0

La medida

La medida

0

PARA COMENZAR (página 7)

- **¿Qué importancia puede tener utilizar diferentes unidades para hablar de las mismas magnitudes?**

  Si utilizamos las mismas unidades para expresar los datos correspondientes a una determinada magnitud, podremos comparar los datos fácilmente. Sin embargo, si cada dato de esa magnitud lo expresamos en una unidad diferente, tendremos que convertir todos los datos a la misma unidad para poder compararlos.

- **Imagina algunas situaciones en las que usar diferentes unidades acaba siendo problemático.**

  Un ejemplo es la forma de expresar la temperatura ambiental. En España la expresamos en grados centígrados o grados Celsius (°C), pero en un país anglosajón la veremos en grados Fahrenheit (°F). Necesitamos conocer la fórmula de conversión para poder hacernos una idea de si hará calor o frío.

  Lo mismo sucede con la unidad de longitud empleada en las carreteas. En España veremos las señales y carteles de tráfico en kilómetros (km), pero en otros países anglosajones se usa la milla. Por tanto, si hacemos un viaje por carretera en EE.UU., por ejemplo, debemos saber cuál es la equivalencia milla-km para poder hacernos una idea de la longitud del trayecto.

ACTIVIDAD (página 10)

1. **Completa en tu cuaderno la siguiente tabla de unidades derivadas para las correspondientes magnitudes.**

Magnitud	Definición	Unidad derivada	
		Nombre	Símbolo
Superficie	Medida de la extensión de una superficie (dos dimensiones).	metro cuadrado	m^2
Volumen	Medida del espacio en tres dimensiones ocupada por un cuerpo.	metro cúbico	m^3
Aceleración	Cambio de velocidad por unidad de tiempo.	metro por segundo al cuadrado	m/s^2
Densidad	Masa por unidad de volumen.	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
Presión	Fuerza por unidad de superficie.	pascal	Pa

ACTIVIDADES (página 11)

2. **Los físicos de partículas no utilizan como unidad de energía la unidad del sistema internacional, el julio, sino el electronvoltio, eV. Escribe los factores de conversión y empléalos para poner en unidades del SI la energía de 14 TeV con la que chocarán los protones en el acelerador del CERN. Dato: 1 eV = 1,602 · 10^{-19} J.**

Para cambiar las unidades de energía aplicamos los factores de conversión. Tendremos en cuenta el significado del prefijo multiplicativo tera y la equivalencia eV-J:

$$14\ \text{TeV} = 14\ \cancel{\text{TeV}} \cdot \frac{10^{12}\ \cancel{\text{eV}}}{1\ \cancel{\text{TeV}}} \cdot \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \cancel{\text{eV}}} = \mathbf{2{,}24 \cdot 10^{-6}\ J}$$

3. El récord mundial de atletismo femenino en los 100 m lisos supone una velocidad media de 33,5 km/h. ¿Qué velocidad es en unidades del SI?

Debemos expresar la velocidad en m/s. Para ello, empleando factores de conversión:

$$33{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 33{,}5\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{10^3\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = \mathbf{9{,}3\ m/s}$$

ACTIVIDAD (página 13)

4. Determina la media aritmética y la desviación típica para expresar el intervalo de incertidumbre del siguiente conjunto de números: {9,01; 8,97; 9,05; 8,96; 9,00; 9,02}.

Calculamos la media aritmética del conjunto de datos:

$$\langle q \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot q_i}{N} = \frac{9{,}01 + 8{,}97 + 9{,}05 + 8{,}96 + 9{,}00 + 9{,}02}{6} = \mathbf{9{,}00}$$

Hallamos la desviación típica:

$$s_q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot q_i^2}{N} - \langle q \rangle^2} = \sqrt{\frac{9{,}01^2 + 8{,}97^2 + 9{,}05^2 + 8{,}96^2 + 9{,}00^2 + 9{,}02^2}{6} - 9{,}00^2} = \mathbf{0{,}03}$$

El intervalo de incertidumbre es: $\mathbf{9{,}00 \pm 0{,}003}$

FÍSICA Y QUÍMICA EN TU VIDA (página 20)

INTERPRETA

1. Estima el orden de magnitud de algunas de las medidas más familiares.

a) Distancia (en metros): a la casa más próxima, a tu instituto, a una ciudad vecina…

b) Masa (en kilogramos): un mueble, un coche, un tren, un edificio…

c) Tiempo (en segundos): una canción, un partido de fútbol, una semana, tu edad…

a) Distancia:

A la casa más próxima $\sim 10^1$ m

A tu instituto $\sim 10^1$ m

A una ciudad vecina $\sim 10^2$ m

…

b) Masa:

Un mueble $\sim 10^1$ kg

Un coche $\sim 10^3$ kg

Un tren $\sim 10^5$ kg

Un edificio $\sim 10^7$ kg

…

c) Tiempo:

Una canción $\sim 10^2$ s

Un partido de fútbol $\sim 10^3$ s

Una semana $\sim 10^5$ s

Mi edad $\sim 10^8$ s

…

USA LAS TIC

2. **Con una hoja de cálculo construye una gráfica que facilite la visualización de los órdenes de magnitud de la magnitud tiempo. Añade tus estimaciones de la actividad 1.c.**

	A	B	C	D	E	F
1		**ÓRDENES DE MAGNITUD DE TIEMPO**				
2		**s**	**min**	**h**	**días**	**años**
3	**Un latido cardíaco**	1,00E+00	1,67E-02	2,78E-04	1,16E-05	3,17E-08
4	**Una canción**	1,20E+02	2,00E+00	3,33E-02	1,39E-03	3,81E-06
5	**Un partido de fútbol**	5,40E+03	9,00E+01	9,00E+05	9,00E+00	2,47E-02
6	**Una semana**	6,05E+05	1,01E+04	1,68E+02	7,00E+00	1,92E-02
7	**El verano**	7,78E+06	1,30E+05	2,16E+03	9,00E+01	2,47E-01
8	**Mi edad**	3,53E+07	5,88E+05	9,79E+03	4,08E+02	1,70E+01
9	**Edad de la Tierra**	1,42E+17	2,37E+15	3,94E+13	1,64E+12	4,50E+09
10						

3. **Consulta los siguientes vínculos para contrastar la información y completarla:**

http://www.hawaii.edu/suremath/jsand.html;

http://www.wolframalpha.com/;

http://www.physics.umd.edu/perg/fermi/fermi.htm;

http://hypertextbook.com/facts/;

http://physics.info/.

Accedemos a los vínculos propuestos y contrastamos la información.

1

Las sustancias y su identificación

Las sustancias y su identificación

1

PARA COMENZAR (página 21)

- **¿Cómo sabemos que el hidrógeno es el elemento químico más abundante en el universo?**

  El alumnado ya sabrá que el hidrógeno es el elemento más abundante en el universo. En cursos precedentes habrá estudiado la composición de las estrellas. Las estrellas reúnen la mayoría de la masa del universo y están constituidas principalmente de hidrógeno. Pero la pregunta es sobre cómo sabemos que esto es así.

  En el párrafo se apunta que es con el espectro como se puede identificar de qué átomos está construida la materia. Precisamente es estudiando los espectros de la luz procedente de estrellas y galaxias como se puede averiguar de qué están hechos.

- **Investiga en qué proporción encontramos los elementos químicos en el universo y de dónde proceden los diferentes átomos.**

  Como resultado de la investigación podemos esperar una tabla como la siguiente:

Elemento	Abundancia relativa en número de átomos	Abundancia relativa en masa
H	92,756 %	75,00 %
He	7,142 %	22,99 %
O	0,050 %	1,00 %
Ne	0,020 %	0,13 %
N	0,015 %	0,10 %
C	0,008 %	0,50 %
Resto de átomos	0,009 %	0,28 %

  Los diferentes átomos proceden: Los de menor número atómico (H, He y Li), de los primeros instantes del Big Bang. El resto de núcleos se forman en las reacciones nucleares que ocurren en el interior del núcleo de las estrellas y en las explosiones de supernovas.

PRACTICA (página 22)

1. **Expresa con notación científica.**

a) **300 000 000**

b) **–0,000 003 25**

c) **458 002,25**

d) **1000,0005**

a) $300\,000\,000 = 3{,}00 \cdot 10^8$

b) $-0{,}000\,003\,25 = -3{,}25 \cdot 10^{-6}$

c) $458\,002{,}25 = 4{,}58 \cdot 10^5$

d) $1000{,}0005 = 1{,}00 \cdot 10^3$

2. **Expresa en unidades del SI.**

a) **1 día**

b) **120 km/h**

c) **$2 \cdot 10^3$ t**

d) **0,002 kg/m³**

a) $1\ \cancel{\text{día}} \cdot \dfrac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \dfrac{60\ \cancel{\text{min}}}{1\ \cancel{\text{h}}} \cdot \dfrac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} = 86\,400\ \text{s}$

b) $120 \dfrac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \dfrac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} \cdot \dfrac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} = 33{,}\widehat{3}\ \text{m/s}$

c) $2 \cdot 10^3\ \cancel{\text{t}} \cdot \dfrac{1000\ \text{kg}}{1\ \cancel{\text{t}}} = 2 \cdot 10^6\ \text{kg}$

d) $0{,}002\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

ACTIVIDADES (página 23)

3. **En sus experiencias, Lavoisier explicó el aumento de peso que experimentaban los metales cuando se calentaban al aire diciendo que se combinaban con alguno de los componentes del aire. Diseña un experimento que te permita dar una explicación científica al hecho de que cuando se quema un trozo de madera se obtienen unas cenizas que pesan mucho menos que la madera original.**

Si hacemos la combustión en un recipiente cerrado, las maderas se quemarán al reaccionar con algún componente del aire que está en contacto con ellas. Además de las cenizas, se producirán gases que se mantendrán en el recipiente, ya que está cerrado. Si pesamos el recipiente antes y después de la combustión, podremos comprobar que la masa no varía, lo que indica que se cumple la ley de Lavoisier.

4. **Para tratar de reproducir la experiencia de Lavoisier, introducimos 6,3 g de cobre en un recipiente, lo cerramos herméticamente y lo pesamos, y comprobamos que contiene 10 g de aire. Al calentarlo observamos que el metal se ha transformado en 8 g de óxido de cobre. ¿Cuánto pesará el aire que hay en el tubo?**

La masa del sistema se debe conservar:

$$m_{\text{cobre}} + \text{masa}_{\text{aire antes}} = \text{masa}_{\text{óxido}} + \text{masa}_{\text{aire después}}$$

Despejando:

$$\text{masa}_{\text{aire después}} = m_{\text{cobre}} + \text{masa}_{\text{aire antes}} - \text{masa}_{\text{óxido}}$$

Sustituyendo y operando:

$$\text{masa}_{\text{aire después}} = 6{,}3\ \text{g} + 10\ \text{g} - 8\ \text{g} = \mathbf{8{,}3\ g}$$

ACTIVIDADES (página 24)

5. **En una muestra de sal común se encontró que había 4,6 g de sodio y 7,1 g de cloro.**

a) ¿Cuál es la masa de la muestra?

b) ¿Qué cantidad de cloro y de sodio habrá en una muestra de 2,3 g de sal?

a) Masa muestra = masa sodio + masa cloro

Masa muestra = 4,6 g + 7,1 g = **11,7 g**

b) En cualquier muestra de sal, el cloro y el sodio mantienen la proporción que se indica en el enunciado:

$$2{,}3\ \cancel{\text{g de sal}} \cdot \frac{7{,}1\ \text{g de cloro}}{11{,}7\ \cancel{\text{g de sal}}} = \mathbf{1{,}4\ g\ de\ cloro}$$

$$2{,}3\ \cancel{\text{g de sal}} \cdot \frac{4{,}6\ \text{g de sodio}}{11{,}7\ \cancel{\text{g de sal}}} = \mathbf{0{,}9\ g\ de\ sodio}$$

Comprobamos que su suma coincide con la masa de la muestra de sal.

6. **En un laboratorio se han analizado tres muestras de cloro y cobre, obteniéndose los siguientes resultados para cada una:**

Muestra	Masa de cobre (g)	Masa de cloro (g)
A	6,3	3,5
B	1,3	0,7
C	3,2	3,6

Determina si las muestras A, B y C pertenecen al mismo compuesto.

Si pertenecen al mismo compuesto, la proporción en la que se combinan el cobre y el cloro será la misma:

Muestra	Masa de cobre (g)	Masa de cloro (g)	Masa de cobre/masa de cloro
A	6,3	3,5	**1,8**
B	1,3	0,7	**1,86**
C	3,2	3,6	**0,89**

Las muestras **A y B pertenecen al mismo compuesto**.

7. En la siguiente tabla se recogen los resultados de varias experiencias en las que se hace reaccionar bromo y calcio para formar bromuro de calcio. Copia la tabla en tu cuaderno y completa el contenido de las casillas que faltan.

Experiencia	Calcio (g)	Bromo (g)	Bromuro de calcio (g)	Calcio que sobra (g)	Bromo que sobra (g)
A	0,4	1,6	2	0	0
B	1,5	0,8			
C	1,2		6		1,5
D		5		1,3	
E			4,2	0	0

- La experiencia A nos permite conocer en qué proporción se combinan los dos elementos.
- En la experiencia B, usando las proporciones de los datos de la experiencia A. Suponemos que se consume completamente el bromo. Calculamos la cantidad de calcio que reacciona y la de bromuro de calcio que se produce:

$$0{,}8\ \cancel{\text{g de Br}}\cdot\frac{0{,}4\text{ g de Ca}}{1{,}6\ \cancel{\text{g de Br}}}=0{,}2\text{ g de Ca}\ ;\ \ 0{,}8\ \cancel{\text{g de Br}}\cdot\frac{2\text{ g de CaBr}_2}{1{,}6\ \cancel{\text{g de Br}}}=\mathbf{1\ g\ de\ CaBr_2}$$

  Calcio que sobra: 1,5 g – 0,2 g = **1,3 g**

  El bromo debe consumirse completamente. Bromo que sobra: **0 g**

- En la experiencia C, usando las proporciones de los datos de la experiencia A. La cantidad de bromuro de calcio producida nos permite conocer la cantidad que reacciona de cada elemento:

$$6\ \cancel{\text{g de CaBr}_2}\cdot\frac{1{,}6\text{ g de Br}}{2\ \cancel{\text{g de CaBr}_2}}=4{,}8\text{ g de Br}$$

  Ya que sobra algo de bromo, se suma con el que reacciona. Bromo antes de la reacción: 4,8 g + 1,5 g = **6,3 g**

  Por diferencia obtenemos la cantidad de calcio que reacciona:

  6 g de $CaBr_2$ – 4,8 g de Br = 1,2 g de Ca que reaccionan

  Calcio que sobra: 1,2 g – 1,2 g = **0 g**

- En la experiencia D suponemos que la cantidad de bromo disponible reacciona completamente. Esto nos permite conocer la cantidad de bromuro de calcio que se obtiene:

$$5\ \cancel{\text{g de Br}}\cdot\frac{2\text{ g de CaBr}_2}{1{,}6\ \cancel{\text{g de Br}}}=\mathbf{6{,}25\ g\ de\ CaBr_2}$$

  Por diferencia obtenemos la cantidad de calcio que reacciona:

  6,25 g de $CaBr_2$ – 5 g de Br = 1,25 g de Ca que reaccionan

  Calcio disponible: 1,25 g + 1,3 g = **2,55 g**.

  El bromo disponible es el bromo que reacciona. Bromo que sobra: 5 g – 5 g = **0 g**

- En la experiencia E, la cantidad de bromuro de calcio nos permite conocer la cantidad que reacciona de cada elemento. Como no sobra ninguno, esa será la cantidad inicial de cada elemento:

$$4{,}2\ \cancel{\text{g de CaBr}_2}\cdot\frac{1{,}6\text{ g de Br}}{2\ \cancel{\text{g de CaBr}_2}}=\mathbf{3{,}36\ g\ de\ Br}$$

  Por diferencia obtenemos la cantidad de calcio que reacciona:

  4,2 g de $CaBr_2$ – 3,36 g de Br = **0,84 g de Ca que reaccionan**

Experiencia	Calcio (g)	Bromo (g)	Bromuro de calcio (g)	Calcio que sobra (g)	Bromo que sobra (g)
A	0,4	1,6	2	0	0
B	1,5	0,8	**1**	**1,3**	**0**
C	1,2	**6,3**	6	**0**	1,5
D	**2,55**	5	**6,25**	1,3	**0**
E	**0,84**	**3,36**	4,2	0	0

ACTIVIDAD (página 25)

8. El C se combina con el O para formar dos compuestos diferentes, A y B. En el compuesto A, 3 g de C se combinan con 4 g de O, y en el compuesto B, 3 g de C se combinan con 8 g de O. Razona la veracidad de cada una de las siguientes frases:

a) 3 g de C no se pueden combinar exactamente con 3 g de O.

b) 9 g de C se combinan exactamente con 12 g de O para formar el compuesto B.

c) 18 g de C se combinan exactamente con 12 g de O para formar el compuesto A.

d) 24 g de O se combinan exactamente con 9 g de C para formar el compuesto B.

Si la fórmula del compuesto B es CO_2, ¿cuál es la fórmula de A? Justifícalo.

Muestra	Masa de C (g)	Masa de O (g)	Masa de C/masa de O
A	3	4	0,75
B	3	8	0,375

a) Verdadera, porque no mantiene la proporción del compuesto A ni del B.

b) Falsa, porque es la proporción correspondiente al compuesto A:

$$\frac{9\text{ g de C}}{12\text{ g de O}} = 0{,}75$$

c) Falsa, porque no es la proporción del compuesto A:

$$\frac{18\text{ g de C}}{12\text{ g de O}} = 1{,}5$$

d) Verdadera, porque es la proporción del compuesto B:

$$\frac{9\text{ g de C}}{24\text{ g de O}} = 0{,}375$$

CO. Porque la misma cantidad de C se combina con el doble de O en B que en A.

ACTIVIDAD (página 27)

9. El monóxido de dinitrógeno es un gas que se utiliza como anestésico dental; se puede obtener en el laboratorio haciendo reaccionar nitrógeno y oxígeno.

Copia en tu cuaderno y completa la tabla siguiente teniendo en cuenta que, en todos los casos, tanto los gases que reaccionan como los que se obtienen están en las mismas condiciones de presión y temperatura.

Experiencia	Nitrógeno (L)	Oxígeno (L)	Monóxido de dinitrógeno (L)	Nitrógeno que sobra (L)	Oxígeno que sobra (L)
A	3	1,5	3	0	0
B		5		0	0
C	3	3			
D	3		2		0
E			2,4	1	0
F		1,7		1,5	0

- La experiencia A nos indica la proporción en la que participan todos los gases del proceso, ya que no sobra ninguno de los reactivos. El volumen de N_2O (3 L) que se obtiene es el mismo que el de N_2 (3 L) que reacciona y el doble que el de O_2 (1,5 L) que reacciona.
- En la experiencia B no sobra ninguno de los reactivos. Con las proporciones que se derivan de la experiencia A calculamos el volumen de los otros dos participantes:

$$5\ \cancel{\text{L de O}_2} \cdot \frac{3\text{ L de N}_2\text{O}}{1{,}5\ \cancel{\text{L de O}_2}} = 10\text{ L de N}_2\text{O}$$

  El volumen de N_2 es el mismo que el de N_2O.
- En la experiencia C, solo pueden reaccionar 3 L de N_2. El resultado de la experiencia A nos permite calcular las restantes cantidades.

- En la experiencia D, la cantidad de N_2O que se obtiene indica la cantidad de N_2 que reacciona; la diferencia con la cantidad que hay indica la cantidad de N_2 que sobra. Como no sobra O_2, la cantidad que hay inicialmente es la que reacciona, un volumen que es la mitad que el de N_2O que se obtiene.
- En la experiencia E, la cantidad de N_2O que se obtiene permite conocer el volumen de N_2 y O_2 que reacciona. Sumando la cantidad de N_2 que sobra tendremos la cantidad inicial. Como no sobra O_2, la cantidad inicial es la que reacciona.
- En la experiencia F se indica que no sobra O_2. Por tanto, la cantidad inicial es la misma que reacciona. Esto nos permite calcular la cantidad de N_2O que se obtiene y la de N_2 que reacciona. Como sobran 1,5 L de N_2, lo sumaremos a la cantidad que reacciona para conocer la cantidad inicial de N_2.

Experiencia	Nitrógeno (L)	Oxígeno (L)	Moóxido de dinitrógeno (L)	Nitrógeno que sobra (L)	Oxígeno que sobra (L)
A	3	1,5	3	0	0
B	**10**	5	**10**	0	0
C	3	3	**3**	**0**	**3 − 1,5 = 1,5**
D	3	**1**	2	**3 − 2 = 1**	0
E	**2,4 + 1 = 3,4**	**1,2**	2,4	1	0
F	**3,4 + 1,5 = 4,9**	1,7	**1,7 · 2 = 3,4**	1,5	0

ACTIVIDADES (página 31)

10. En una muestra de 4 g de azufre, ¿cuántos moles de azufre tenemos? ¿Cuántos átomos? Dato: *M*(S) = 32,06 u.

Un átomo de S tiene una masa de 32,06 u, por tanto, un mol de S tiene una masa de 32,06 g.

$$M(\text{S}) = 32{,}06\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$$n = \frac{m}{M(\text{S})} = 4\ \cancel{\text{g de S}} \cdot \frac{1\ \text{mol}}{32{,}06\ \cancel{\text{g de S}}} \simeq \mathbf{0{,}125\ mol\ de\ S}$$

$$N = n \cdot N_A = 0{,}125\ \cancel{\text{mol de S}} \cdot \frac{6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{átomos de S}}{1\ \cancel{\text{mol de S}}} = \mathbf{7{,}5 \cdot 10^{22}\ átomos\ de\ S}$$

11. En un recipiente tenemos 5 · 10^{18} átomos de un elemento cuya masa es 0,543 mg. ¿Cuál es la masa atómica de ese elemento? ¿De qué elemento se trata? Consulta la tabla periódica. Dato: N_A = 6,022 · 10^{23} partículas.

$$\frac{0{,}543 \cdot 10^{-3}\ \text{g}}{5 \cdot 10^{18}\ \cancel{\text{átomos}}} \cdot \frac{6{,}022 \cdot 10^{23}\ \cancel{\text{átomos}}}{1\ \text{mol}} = \mathbf{65{,}4\ \frac{g}{mol} = 65{,}4\ u}$$

Se trata del cinc.

12. ¿Cuántos gramos de radio tendremos en mil billones de átomos de ese elemento? ¿Y si los átomos fuesen de silicio? Datos: *M*(Ra) = 226 u, *M*(Si) = 28,09 u.

N_A átomos de Ra es un mol de Ra, que es la misma cantidad que 226 g de Ra.

$$1000 \cdot 10^{12}\ \cancel{\text{átomos de Ra}} \cdot \frac{226\ \text{g de Ra}}{6{,}022 \cdot 10^{23}\ \cancel{\text{átomos de Ra}}} = \mathbf{3{,}75 \cdot 10^{-7}\ g\ de\ Ra}$$

Análogamente, N_A átomos de Si es un mol de Si, que es la misma cantidad que 28,09 g de Si.

$$1000 \cdot 10^{12}\ \cancel{\text{átomos de Si}} \cdot \frac{28{,}09\ \text{g de Si}}{6{,}022 \cdot 10^{23}\ \cancel{\text{átomos de Si}}} = \mathbf{4{,}66 \cdot 10^{-8}\ g\ de\ Si}$$

13. **En una muestra de 8 g de dióxido de azufre calcula:**

a) **La cantidad de dióxido de azufre en moles.**

b) **Los átomos de oxígeno.**

c) **Los gramos de azufre.**

Datos: M(S) = 32,06 u, M(O) = 16,00 u, N_A = 6,022 · 10^{23} partículas.

a) Calculamos la masa molar:

$$M(SO_2) = 32,06 + 16,00 \cdot 2 = 64,06 \text{ g/mol}$$

Y a partir de este dato, el número de moles:

$$n = \frac{m}{M(SO_2)} = \frac{8 \cancel{\text{ g de } SO_2}}{64,06 \dfrac{\cancel{\text{g de } SO_2}}{\text{mol}}} = \mathbf{0,125 \text{ mol de } SO_2}$$

b) El N_A permitirá conocer el número de partículas. La fórmula del compuesto nos indica los átomos de oxígeno que hay en cada molécula del compuesto:

$$0,125 \cancel{\text{ mol de } SO_2} \cdot \frac{6,022 \cdot 10^{23} \cancel{\text{ moleculas de } SO_2}}{1 \cancel{\text{ mol de } SO_2}} \cdot \frac{2 \text{ átomos de O}}{1 \cancel{\text{ molécula de } SO_2}} = \mathbf{1,5 \cdot 10^{23} \text{ átomos de O}}$$

c) Primero calculamos los moles de azufre que contiene y luego los gramos:

$$0,125 \cancel{\text{ mol de } SO_2} \cdot \frac{1 \cancel{\text{ mol de S}}}{1 \cancel{\text{ mol de } SO_2}} \cdot \frac{32,06 \text{ g de S}}{1 \cancel{\text{ mol de S}}} = \mathbf{4,0 \text{ g de S}}$$

ACTIVIDADES (página 32)

14. **Determina la composición centesimal del butano, C_4H_{10}.**

Datos: M(C) = 12,00 u, M(H) = 1,008 u.

Calculamos la masa molar que corresponde sumando la masa de los elementos:

$$M(C_4H_{10}) = 12,00 \cdot 4 + 1,008 \cdot 10 = 58,08 \text{ g/mol}$$

Al comparar la masa de cada elemento con la masa total del compuesto, y multiplicando por 100, tenemos el porcentaje en masa de cada elemento.

- Carbono: $\dfrac{(12,00 \text{ g de C}) \cdot 4}{58,08 \text{ g de } C_4H_{10}} \cdot 100 = \mathbf{82,64\ \% \text{ de C}}$

- Hidrógeno: $\dfrac{(1,008 \text{ g de H}) \cdot 10}{58,08 \text{ g de } C_4H_{10}} \cdot 100 = \mathbf{17,36\ \% \text{ de H}}$

15. **Determina la composición centesimal del nitrato de calcio, $Ca(NO_3)_2$.**

Datos: M(Ca) = 40,08 g/mol, M(N) = 14,01 g/mol, M(O) = 16,00 g/mol.

Calculamos la masa molar que corresponde sumando la masa de los elementos:

$$M(Ca(NO_3)_2) = 40,08 + (14,01 + 16,00 \cdot 3) \cdot 2 = 164,1 \text{ g/mol}$$

Al comparar la masa de cada elemento con la masa total del compuesto, y multiplicando por 100, tenemos el porcentaje en masa de cada elemento.

- Calcio: $\dfrac{40,08 \text{ g de Ca}}{164,1 \text{ g de } Ca(NO_3)_2} \cdot 100 = \mathbf{24,42\ \% \text{ de Ca}}$

- Nitrógeno: $\dfrac{(14,01 \text{ g de N}) \cdot 2}{164,1 \text{ g de } Ca(NO_3)_2} \cdot 100 = \mathbf{17,08\ \% \text{ de N}}$

- Oxígeno: $\dfrac{(16,00 \text{ g de O}) \cdot 6}{164,1 \text{ g de } Ca(NO_3)_2} \cdot 100 = \mathbf{58,50\ \% \text{ de O}}$

16. Algunos compuestos iónicos cristalizan con un número determinado de moléculas de agua. A estos compuestos se les llama hidratados y en su fórmula se indica la proporción en que participa el agua. Por ejemplo, el sulfato de cobre pentahidratado tiene de fórmula $CuSO_4 \cdot 5H_2O$. Calcula el porcentaje de agua en masa en esta sustancia.

Datos: $M(CuSO_4)$ = 159,61 g/mol, $M(H_2O)$ = 18,016 g/mol.

Calculamos la masa molar que corresponde sumando la masa de los compuestos que intervienen:

$$M(CuSO_4 \cdot 5H_2O) = 159{,}61 + 5 \cdot (18{,}016) = 249{,}69 \text{ g/mol}$$

Al comparar la masa relativa de agua con la masa relativa total del compuesto, y multiplicando por 100, tenemos el porcentaje en masa de agua.

- Agua: $\dfrac{5 \cdot (18{,}016 \text{ g de } H_2O)}{249{,}69 \text{ g de } CuSO_4 \cdot 5H_2O} \cdot 100 = \mathbf{36{,}08\ \%\ de\ H_2O}$

ACTIVIDADES (página 33)

17. El azufre y el oxígeno forman un compuesto en el que el 40,04 % es de azufre. Determina su fórmula sabiendo que tiene un único átomo de azufre.

Datos: $M(S)$ = 32,06 g/mol, $M(O)$ = 16,00 g/mol.

Fórmula del compuesto que buscamos: S_xO_y.

$$x = 40 \cancel{\text{ g de S}} \cdot \frac{1 \text{ mol de S}}{32{,}06 \cancel{\text{ g de S}}} = \mathbf{1{,}25\ mol\ de\ S}$$

$$y = 60 \cancel{\text{ g de O}} \cdot \frac{1 \text{ mol de O}}{16{,}00 \cancel{\text{ g de O}}} = \mathbf{3{,}75\ mol\ de\ O}$$

La fórmula del compuesto es del tipo $S_{1,25}O_{3,75}$. Como los subíndices deben ser números enteros, dividimos ambos por el más pequeño:

$$S_{\frac{1,25}{1,25}}O_{\frac{3,75}{1,25}} \Rightarrow S_1O_3 \Rightarrow \mathbf{SO_3}$$

18. El análisis de un mineral de aluminio revela que está formado por un 34,59 % de aluminio, 3,88 % de hidrógeno, y el resto, oxígeno. Determina su fórmula empírica.

Datos: $M(Al)$ = 26,98 g/mol, $M(O)$ = 16,00 g/mol, $M(H)$ = 1,008 g/mol.

Fórmula del compuesto que buscamos: $Al_xO_yH_z$.

$$x = 34{,}59 \cancel{\text{ g de Al}} \cdot \frac{1 \text{ mol de Al}}{26{,}98 \cancel{\text{ g de Al}}} = \mathbf{1{,}28\ mol\ de\ Al}$$

$$y = \left[100 - (34{,}59 + 3{,}88)\right] \cancel{\text{ g de O}} \cdot \frac{1 \text{ mol de O}}{16{,}00 \cancel{\text{ g de O}}} = \mathbf{3{,}85\ mol\ de\ O}$$

$$z = 3{,}88 \cancel{\text{ g de H}} \cdot \frac{1 \text{ mol de H}}{1{,}008 \cancel{\text{ g de H}}} = \mathbf{3{,}77\ mol\ de\ H}$$

La fórmula del compuesto es del tipo $Al_{1,28}O_{3,85}H_{3,77}$. Como los subíndices deben ser números enteros, dividimos todos por el más pequeño:

$$Al_{\frac{1,28}{1,28}}O_{\frac{3,85}{1,28}}H_{\frac{3,77}{1,28}} \Rightarrow Al_1O_3H_3 \Rightarrow \mathbf{Al(OH)_3}$$

19. El nitrógeno y el oxígeno forman muchos compuestos. Uno de ellos tiene de masa molar 92,02 g/mol y un porcentaje de nitrógeno del 30,45 %. Determina la fórmula empírica y la fórmula molecular de este compuesto.

Datos: $M(N)$ = 14,01 g/mol, $M(O)$ = 16,00 g/mol.

Fórmula del compuesto: N_xO_y.

$$x = 30{,}43\ \cancel{\text{g de N}} \cdot \frac{1\ \text{mol de N}}{14{,}01\ \cancel{\text{g de N}}} = \mathbf{2{,}172\ mol\ de\ N}$$

$$y = (100 - 30{,}43)\ \cancel{\text{g de O}} \cdot \frac{1\ \text{mol de O}}{16{,}00\ \cancel{\text{g de O}}} = \mathbf{4{,}348\ mol\ de\ O}$$

La fórmula del compuesto es del tipo $N_{2,172}O_{4,348}$. Como los subíndices deben ser números enteros, dividimos ambos por el más pequeño para conseguir la fórmula empírica:

$$N_{\frac{2,172}{2,172}}O_{\frac{4,348}{2,172}} \Rightarrow N_1O_2 \Rightarrow \mathbf{NO_2}$$

Comprobamos si esta es la fórmula molecular del compuesto. Para ello usamos su masa molar, que será un múltiplo de la empírica:

$$M(N_nO_{2\cdot n}) = M(NO_2)\cdot n \Rightarrow n = \frac{M(N_nO_{2\cdot n})}{M(NO_2)} = \frac{92{,}02\ \frac{\text{g}}{\cancel{\text{mol}}}}{(14{,}01 + 16{,}00\cdot 2)\ \frac{\text{g}}{\cancel{\text{mol}}}} = \frac{92{,}02}{46{,}01} = 2$$

La fórmula molecular es:

$$N_nO_{2\cdot n} \Rightarrow \mathbf{N_2O_4}$$

ACTIVIDAD (página 35)

20. Explica el significado de la frase: «El arco iris muestra el espectro de la luz solar».

La luz del sol o luz blanca es una radiación compleja formada por otras radiaciones más simples. Cuando la luz blanca atraviesa una gota de agua se descompone en varios colores que representan las radiaciones simples, es decir, su espectro.

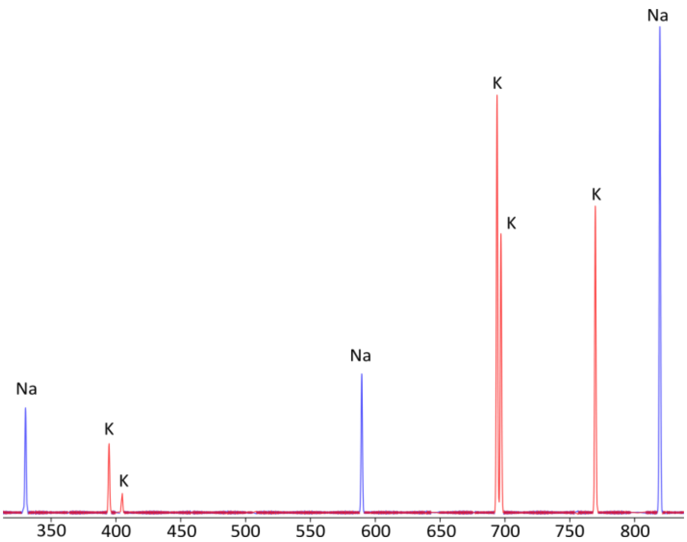
ACTIVIDAD (página 36)

21. Teniendo en cuenta la información que aparece en la figura 1.11, dibuja (de forma cualitativa) el espectro de absorción atómica (similar a la figura 1.12) de una muestra de agua que tenga disueltos NaCl y KCl. Identifica cada raya con la transición electrónica que le corresponda. (Utiliza un color para las rayas que corresponden a un elemento químico y otro diferente para las que corresponden al otro).

Nota: Las figuras a las que hace referencia el enunciado se encuentran en la página 36 del libro del alumno.

El espectro es cualitativo, ya que solo se puede indicar la posición de las rayas pero no su altura, puesto que no conocemos la intensidad de cada raya.

Observa la transición que corresponde a cada raya. Esto es importante, ya que se aprecie la relación entre la energía del fotón y la diferencia de energía entre los niveles del tránsito.



330,3 nm	394,7 nm	404,7 nm	589,6 nm	693,9 nm	696,9 nm	769,7 nm	819,5 nm
Na 3s → 4p	K 4s → 6p	K 4s → 5p	Na 3s → 3p	K 4p → 6s	K 4p → 4d	K 4s → 4p	Na 3p → 3d

ACTIVIDAD (página 38)

22. El elemento químico cobre presenta dos isótopos: el Cu-63, con 62,93 u de masa y con el 69,09 % de abundancia; y el Cu-65, con 64,93 u de masa y 30,91 % de abundancia. ¿Cuál es la masa atómica del elemento cobre?

Tomamos los datos del enunciado y calculamos la media ponderada:

$$m(\text{Cu}) = \frac{69{,}09 \cdot 62{,}93\ \text{u} + 30{,}91 \cdot 64{,}93\ \text{u}}{100} = \mathbf{63{,}55\ u}$$

ACTIVIDAD (página 39)

23. Razona si son ciertas o falsas las siguientes frases.

a) La espectroscopía identifica las sustancias analizando las radiaciones absorbidas por una muestra.

b) La espectroscopía de absorción atómica analiza la fórmula de los compuestos químicos.

c) La espectroscopía de absorción infrarroja permite conocer la masa molar de las sustancias.

d) La espectrometría de masas permite conocer los isótopos de los elementos químicos.

a) Verdadero. El texto explica al alumno las técnicas de absorción para identificar átomos metálicos y enlaces en moléculas orgánicas. Pero si se entiende la frase de un modo excluyente, será falsa. La frase correcta sería: «Dependiendo de la técnica, la espectroscopía identifica las sustancias analizando las radiaciones absorbidas o las radiaciones emitidas por una muestra».

b) Falso. Permite determinar la presencia de átomos de elementos metálicos en una muestra.

c) Falso. La espectroscopía de absorción IR permite detectar la presencia de determinados enlaces en las moléculas. La espectrometría de masa es la que permite conocer la masa molar.

d) Verdadero. Permite conocer la masa de los distintos isótopos de un elemento y su abundancia relativa.

ACTIVIDADES FINALES (página 42)

Leyes ponderales y volumétricas

24. El Mg es un metal que se utiliza en la fabricación de fuegos artificiales, al arder produce fuertes destellos. En el proceso se forma MgO, un compuesto en el que se combinan 2,21 g de Mg por cada 1,45 g de O. En un cohete se han colocado 7 g de cinta de Mg, ¿qué cantidad de MgO se formará cuando el cohete arda?

Cuando forman óxido de magnesio, el magnesio y el oxígeno se combinan siempre en la misma proporción:

$$7\ \cancel{\text{g de Mg}} \cdot \frac{1{,}45\ \text{g de O}}{2{,}21\ \cancel{\text{g de Mg}}} = 4{,}59\ \text{g de O}$$

$$7\ \text{g de Mg} + 4{,}59\ \text{g de O} = \mathbf{11{,}6\ g\ de\ MgO}$$

25. En la tabla se recogen los resultados de varias experiencias en las que reaccionan plata y azufre para formar sulfuro de plata. Completa en tu cuaderno las casillas que faltan.

Exp.	Ag (g)	S (g)	Ag_2S (g)	Ag sobrante (g)	S sobrante (g)
A	3,60	0,54		0	0
B			6,3	0	0
C			5,2	0,5	0,3
D		1,5		1,3	0
E	7,5		8,2		1,5

- La experiencia A indica en qué proporción se combinan exactamente la plata y el azufre. Como no sobra nada, podemos determinar la cantidad de sulfuro de plata que se forma sumando la cantidad de plata y azufre que reaccionan:

$$3{,}60\ \text{g de Ag} + 0{,}54\ \text{g de S} = \mathbf{4{,}14\ g\ de\ Ag_2S}$$

- En la experiencia B conocemos la cantidad de sulfuro de plata. Como no sobra nada de ningún elemento, podemos calcular la cantidad inicial de cada plata, pues guarda proporciones definidas:

$$6{,}3\ \cancel{\text{g de Ag}_2\text{S}}\cdot\frac{3{,}60\ \text{g de Ag}}{4{,}14\ \cancel{\text{g de Ag}_2\text{S}}}=\mathbf{5{,}48\ g\ de\ Ag}$$

  La cantidad de azufre se calcula con la diferencia:

  6,3 g de Ag_2S – 5,48 g de Ag = **0,82 g de S**

- En la experiencia C, la cantidad de sulfuro de plata nos permite conocer la cantidad de plata y azufre que se combinan usando la ley de proporciones definidas:

$$5{,}2\ \cancel{\text{g de Ag}_2\text{S}}\cdot\frac{3{,}60\ \text{g de Ag}}{4{,}14\ \cancel{\text{g de Ag}_2\text{S}}}=4{,}52\ \text{g de Ag}$$

  La cantidad de azufre se calcula con la diferencia:

  5,2 g de Ag_2S □ 4,52 g de Ag = 0,68 g de S

  En cada caso, sumamos la cantidad de elemento que sobra y obtenemos la cantidad inicial de plata y de azufre:

  4,52 g de Ag que se combinan + 0,5 g de Ag que sobra = **5,02 g de Ag iniciales**

  0,68 g de S que se combinan + 0,3 g de S que sobra = **0,98 g de S iniciales**

- En la experiencia D reacciona toda la cantidad de azufre presente, lo que nos permite conocer la cantidad de sulfuro de plata que se forma con la ley de proporciones definidas:

$$1{,}5\ \cancel{\text{g de S}}\cdot\frac{4{,}14\ \text{g de Ag}_2\text{S}}{0{,}54\ \cancel{\text{g de S}}}=\mathbf{11{,}5\ g\ de\ Ag_2S}$$

  La cantidad de plata que reacciona se calcula con la diferencia:

  11,5 g de Ag_2S – 1,5 g de S = 10 g de Ag

  Sumando a esta la cantidad de plata que sobra tendremos la cantidad de plata que había inicialmente:

  10 g de Ag que se combinan + 1,3 g de Ag que sobra = **11,3 g de Ag iniciales**

- En la experiencia E, la cantidad de sulfuro de plata nos permite conocer la cantidad de plata que se combina con la ley de las proporciones definidas:

$$8{,}2\ \cancel{\text{g de Ag}_2\text{S}}\cdot\frac{3{,}60\ \text{g de Ag}}{4{,}14\ \cancel{\text{g de Ag}_2\text{S}}}=7{,}13\ \text{g de Ag}$$

  Y la cantidad de azufre que se combina con la diferencia entre el sulfuro de plata y la plata por la ley de conservación de la masa:

  8,2 g de Ag_2S – 7,13 g de Ag = 1,07 g de S

  Comparando esa cantidad de plata con la inicial, podremos determinar la cantidad de plata que sobra:

  7,5 g de Ag iniciales – 7,13 g de Ag que se combinan = **0,37 g de Ag que sobran**

  Sumando a la cantidad de azufre que se combina a la cantidad que sobra, conoceremos la cantidad inicial de azufre:

  1,07 g de S que se combinan + 1,5 g de S que sobran = **2,57 g de S iniciales**

Exp.	Ag (g)	S (g)	Ag_2S (g)	Ag sobrante (g)	S sobrante (g)
A	3,60	0,54	**4,14**	0	0
B	**5,48**	**0,82**	6,3	0	0
C	**5,02**	**0,98**	5,2	0,5	0,3
D	**11,3**	1,5	**11,5**	1,3	0
E	7,5	**2,57**	8,2	**0,37**	1,5

26. **El cromo y el cloro forman dos compuestos diferentes. En un laboratorio se analizan cuatro muestras y la masa de cada elemento que se obtiene en cada caso es:**

Muestra	Masa de cromo (g)	Masa de cloro (g)
A	0,261	0,356
B	0,150	0,250
C	0,342	0,700
D	0,522	0,713

Entre estas muestras encuentra:

a) Dos que pertenecen al mismo compuesto.

b) Dos que pertenecen a dos compuestos diferentes.

c) La muestra de un compuesto imposible.

d) Si la fórmula de un compuesto es $CrCl_2$, ¿cuál es la del otro?

En cada caso hay que calcular la proporción en que se combinan los elementos:

Muestra	Masa de cromo (g)	Masa de cloro (g)	Proporcion Cl/Cr
A	0,261	0,356	1,364
B	0,150	0,250	1,667
C	0,342	0,700	2,047
D	0,522	0,713	1,366

a) Al guardar la misma proporción, 1,364 ≈ 1,366, **A** y **D** pertenecen al **mismo compuesto**.

b) $\frac{1{,}364}{2{,}047} \approx \frac{3}{2}$. La muestra **A** (o la D) y la **C** pertenecen a **compuestos diferentes** que cumplen la ley de las proporciones múltiples.

c) $\frac{1{,}667}{1{,}364} \neq \frac{a}{b}$; $\frac{1{,}667}{2{,}047} \neq \frac{c}{d}$. La muestra **B** es de un **compuesto imposible**, pues no guarda relaciones de números enteros sencillos con otras muestras.

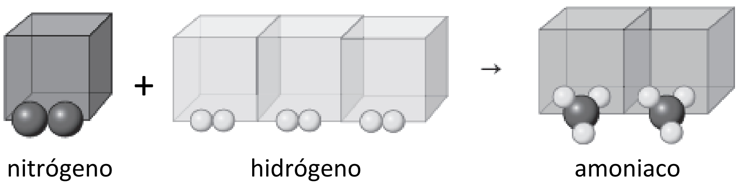
d) Hay que aplicar la ley de las proporciones múltiples. La fracción del apartado b, $\frac{3}{2}$, es el resultado de comparar las cantidades de cloro en los dos compuestos frente a la misma cantidad de cromo. Si una fórmula es $CrCl_2$, la fórmula pedida, por tanto, es **$CrCl_3$**.

27. **1 L de nitrógeno reacciona con 3 L de hidrógeno, y se obtienen 2 L de amoniaco. Estas sustancias son gases y se encuentran en las mismas condiciones de presión y temperatura. Si la molécula de hidrógeno es H_2, deduce la fórmula del nitrógeno y del amoniaco.**

La hipótesis de Avogadro dice que, en iguales condiciones de presión y temperatura, volúmenes iguales de gases diferentes contienen el mismo número de partículas. Aplicado a este caso, si hay *x* moléculas en 1 L de nitrógeno, hay 3*x* moléculas en los 3 L de hidrógeno y 2*x* moléculas en 2 L de amoniaco.

Como *x* moléculas de nitrógeno dan 2*x* moléculas de amoniaco, cada molécula de nitrógeno debe tener 2 átomos de N, y cada molécula de amoniaco, 1 átomo de N. La fórmula del gas nitrógeno es, por tanto, **N_2**.

Los átomos de las 3*x* moléculas de hidrógeno están en las 2*x* moléculas de amoniaco. Como sabemos que cada molécula de hidrógeno tiene dos átomos de hidrógeno, entonces cada molécula de amoniaco tendrá 3 átomos de este elemento. Recopilando la información, la fórmula del amoniaco será **NH_3**.



3 volúmenes *V* de hidrógeno se combinan con 1 volumen *V* de nitrógeno y se obtiene un volumen doble (2*V*) de amoniaco.

28. **El nitrógeno y el oxígeno forman gases diatómicos. Si se combinan 2 litros de nitrógeno con 1 litro de oxígeno, estando los dos en las mismas condiciones de presión y temperatura, se forman 2 litros de un gas, compuesto por ambos elementos, que se utiliza como anestésico. ¿Cuál es la fórmula de ese nuevo gas? Explica tu respuesta.**

La hipótesis de Avogadro dice que, en iguales condiciones de presión y temperatura, volúmenes iguales de gases diferentes contienen el mismo número de partículas. Aplicado a este caso, si hay x moléculas en 1 L de oxígeno, hay $2x$ moléculas en los 2 L de nitrógeno y $2x$ moléculas en 2 L del gas.

Como x moléculas de oxígeno dan $2x$ moléculas de gas, cada molécula de oxígeno debe tener 2 átomos de oxígeno, y cada molécula del gas, 1 átomo de oxígeno.

Los átomos de las $2x$ moléculas de nitrógeno están en las $2x$ moléculas del gas; esto implica que si la molécula de nitrógeno es diatómica, cada molécula del gas debe tener 2 átomos de ese elemento.

La fórmula del gas es $\mathbf{N_2O}$.

29. **Copia en tu cuaderno las siguientes frases, etiquetadas con un número, y relaciónalas con la ley o hipótesis, etiquetadas con una letra, a la que corresponden.**

1. **La materia no se crea ni se destruye.**
2. **Los elementos A y B se combinan unas veces en una proporción, y otras veces, en otra diferente.**
3. **En una reacción química se transforma la materia.**
4. **Si 2,53 g de A se combinan con 1,32 g de B para formar un compuesto, 2,53 g de A no se pueden combinar con 0,66 g de B para formar el mismo compuesto.**
5. **La masa de los productos de una reacción coincide con la masa de sus reactivos.**
6. **Dos elementos, A y B, se combinan siempre en la misma proporción para formar el mismo compuesto.**
7. **En las mismas condiciones de presión y temperatura un recipiente que tenga un volumen doble que otro tendrá doble número de moléculas que el otro.**
8. **La materia se conserva.**
9. **1 L de un gas A no se va a combinar nunca con 1,3792 L de otro gas que se encuentre en las mismas condiciones de presión y temperatura que él.**
10. **Si A y B forman dos compuestos diferentes, puede que en un caso se combinen 1,57 g de A con 2 g de B, y en otro, 3,14 g de A se combinan con 2 g de B.**

a. **Ley de las proporciones múltiples.**

b. **Hipótesis de Avogadro.**

c. **Ley de las proporciones definidas.**

d. **Ley de la conservación de la masa.**

e. **Ley de los volúmenes de combinación.**

1. La materia no se crea ni se destruye.
2. Los elementos A y B se combinan unas veces en una proporción, y otras veces, en otra diferente.
3. En una reacción química se transforma la materia.
4. Si 2,53 g de A se combinan con 1,32 g de B para formar un compuesto, 2,53 g de A no se pueden combinar con 0,66 g de B para formar el mismo compuesto.
5. La masa de los productos de una reacción coincide con la masa de sus reactivos.
6. Dos elementos, A y B, se combinan siempre en la misma proporción para formar el mismo compuesto.
7. En las mismas condiciones de presión y temperatura un recipiente que tenga un volumen doble que otro tendrá doble número de moléculas que el otro.
8. La materia se conserva.
9. 1 L de un gas A no se va a combinar nunca con 1,3792 L de otro gas que se encuentre en las mismas condiciones de presión y temperatura que él.
10. Si A y B forman dos compuestos diferentes, puede que en un caso se combinen 1,57 g de A con 2 g de B, y en otro, 3,14 g de A se combinan con 2 g de B.

a. Ley de las proporciones múltiples.

b. Hipótesis de Avogadro.

c. Ley de las proporciones definidas.

d. Ley de la conservación de la masa.

e. Ley de los volúmenes de combinación.

Medida de la cantidad de sustancia

30. Consulta la tabla periódica y completa en tu cuaderno:

a) Medio mol de moléculas de agua oxigenada, H_2O_2, son ____ g y contiene ____ moléculas, ____ átomos de hidrógeno y ____ moles de oxígeno.

b) 2 mol de gas cloro son ____ g y contienen ____ moléculas de cloro y ____ átomos de cloro.

c) 3 mol de gas argón son ____ g y contienen ____ átomos de argón.

a)

$$M(H_2O_2) = 1{,}008 \cdot 2 + 16{,}00 \cdot 2 = 34{,}02 \text{ g/mol}$$

$$m(H_2O_2) = n(H_2O_2) \cdot M(H_2O_2) = 0{,}5 \text{ mol} \cdot 34{,}02 \text{ g/mol} = 17{,}01 \text{ g}$$

$$N(H_2O_2) = n(H_2O_2) \cdot N_A = 0{,}5 \text{ mol} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ moléculas/mol} = 3{,}011 \cdot 10^{23} \text{ moléculas}$$

$$N(H) = N(H_2O_2) \cdot \frac{2 \text{ átomos de H}}{1 \text{ molécula de } H_2O_2} = 3{,}011 \cdot 10^{23} \text{ moléculas} \cdot \frac{2 \text{ átomos de H}}{1 \text{ molécula de } H_2O_2} = 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ átomos}$$

$$n(O_2) = n(H_2O_2) \cdot \frac{2 \text{ mol de O}}{1 \text{ mol de } H_2O_2} = 0{,}5 \text{ mol} \cdot \frac{2 \text{ mol de O}}{1 \text{ mol de } H_2O_2} = 1 \text{ mol}$$

Medio mol de moléculas de agua oxigenada, H_2O_2, son **17,01** g y contiene **3,011 · 10^{23}** moléculas, **6,022 · 10^{23}** átomos de hidrógeno y **1** moles de oxígeno.

b)

$$M(Cl_2) = 35{,}45 \cdot 2 = 70{,}90 \text{ g/mol}$$

$$m(Cl_2) = n(Cl_2) \cdot M(Cl_2) = 2 \text{ mol} \cdot 70{,}90 \text{ g/mol} = 141{,}80 \text{ g}$$

$$N(Cl_2) = n(Cl_2) \cdot N_A = 2 \text{ mol} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ moléculas/mol} = 12{,}044 \cdot 10^{23} \text{ moléculas}$$

$$N(Cl) = N(Cl_2) \cdot \frac{2 \text{ átomos de Cl}}{1 \text{ molécula de } Cl_2} = 12{,}044 \cdot 10^{23} \text{ moléculas} \cdot \frac{2 \text{ átomos de Cl}}{1 \text{ molécula de } Cl_2} = 24{,}088 \cdot 10^{23} \text{ átomos}$$

2 mol de gas cloro son **141,80** g y contienen **12,044 · 10^{23}** moléculas de cloro y **24,088 · 10^{23}** átomos de cloro.

c)
$$M(\text{Ar}) = 39{,}95 \text{ g/mol}$$
$$m(\text{Ar}) = n(\text{Ar}) \cdot M(\text{Ar}) = 3 \text{ mol} \cdot 39{,}95 \text{ g/mol} = 119{,}85 \text{ g}$$
$$N(\text{Ar}) = n(\text{Ar}) \cdot N_A = 3 \text{ mol} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ átomos/mol} = 18{,}066 \cdot 10^{23} \text{ átomo}$$

3 mol de gas argón son **119,85 g** y contienen **18,066 · 10^{23}** átomos de argón.

31. Razona si es cierto que la masa de 1 mol de gas hidrógeno es 1,008 g. Dato: *M*(H) = 1,008 g/mol.

El gas hidrógeno forma moléculas diatómicas H_2. Por tanto, la masa de 1 mol de gas hidrógeno es 2,016 g. 1,008 g es la masa de 1 mol de átomos de H.

32. Para cubrir una joya de platino necesitamos 5 · 10^{20} átomos de este metal. Calcula:

a) ¿Cuántos moles de platino son?

b) ¿Qué masa de platino es?

Datos: *M*(Pt) = 195,1 g/mol, N_A = 6,022 · 10^{23} partículas.

a) $$5 \cdot 10^{20} \cancel{\text{ átomo de Pt}} \cdot \frac{1 \text{ mol de Pt}}{6{,}022 \cdot 10^{23} \cancel{\text{ átomo de Pt}}} = \mathbf{8{,}3 \cdot 10^{-4} \text{ mol de Pt}}$$

b) $$5 \cdot 10^{20} \cancel{\text{ átomo de Pt}} \cdot \frac{195{,}1 \text{ g de Pt}}{6{,}022 \cdot 10^{23} \cancel{\text{ átomo de Pt}}} = \mathbf{0{,}162 \text{ g de Pt}}$$

ACTIVIDADES FINALES (página 43)

33. Localiza en la tabla periódica la masa molar del cloro y calcula la masa, en gramos, de un átomo de cloro. Dato: N_A = 6,022 · 10^{23} partículas.

Las partículas son átomos:

$$35{,}45 \frac{\text{g}}{\cancel{\text{mol}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{ mol}}}{6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ átomo}} = \mathbf{5{,}89 \cdot 10^{-23}} \ \mathbf{\frac{g}{átomo}}$$

34. Tenemos 3,999 · 10^{22} átomos de un metal cuya masa es de 13,32 g. Consulta en la tabla periódica para averiguar qué metal es. Dato: N_A = 6,022 · 10^{23} partículas.

Las partículas son átomos:

$$\frac{13{,}32 \text{ g de un metal}}{3{,}999 \cdot 10^{22} \cancel{\text{átomo}}} \cdot \frac{6{,}022 \cdot 10^{23} \cancel{\text{átomo}}}{1 \text{ mol}} = 200{,}6 \text{ g/mol}$$

Se puede tratar del mercurio, Hg.

35. Tenemos una muestra de 9,5 g de trióxido de dinitrógeno.

a) ¿Cuántos moles de trióxido de dinitrógeno tenemos?

b) ¿Cuántos átomos de oxígeno tenemos?

c) ¿Cuántos gramos de nitrógeno tenemos?

Datos: *M*(N) = 14,01 g/mol, *M*(O) = 16,00 g/mol, N_A = 6,022 · 10^{23} partículas.

a) Determinamos la masa molar del trióxido de dinitrógeno:

$$M(N_2O_3) = 14{,}01 \cdot 2 + 16{,}00 \cdot 3 = 76{,}02 \text{ g/mol}$$

$$9{,}5 \cancel{\text{ g de } N_2O_3} \cdot \frac{1 \text{ mol de } N_2O_3}{76{,}02 \cancel{\text{ g de } N_2O_3}} = \mathbf{0{,}125 \text{ mol de } N_2O_3}$$

b) El N_A nos permite conocer el número de partículas:

$$0{,}125 \cancel{\text{ mol de } N_2O_3} \cdot \frac{6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ moléculas}}{1 \cancel{\text{ mol de } N_2O_3}} = 7{,}526 \cdot 10^{22} \text{ moléculas de } N_2O_3$$

Y la fórmula del compuesto nos indica los átomos de oxígeno que hay en cada molécula del compuesto:

$$7{,}526\cdot 10^{22}\ \cancel{\text{moléculas de } N_2O_3}\cdot\frac{3\text{ átomos de O}}{1\ \cancel{\text{molécula de } N_2O_3}}=\mathbf{2{,}26\cdot 10^{23}\ \text{átomos de O}}$$

c) Primero calculamos los moles de N a partir de la fórmula y luego los gramos:

$$0{,}125\ \cancel{\text{mol de } N_2O_3}\cdot\frac{2\ \cancel{\text{mol de N}}}{1\ \cancel{\text{mol de } N_2O_3}}\cdot\frac{14{,}01\text{ g de N}}{1\ \cancel{\text{mol de N}}}=\mathbf{3{,}5\text{ g de N}}$$

36. El arsano es un compuesto de fórmula AsH_3. Si tenemos $0{,}8\cdot 10^{25}$ moléculas de arsano:

a) ¿Cuántos moles de arsano tenemos?

b) ¿Cuántos gramos hay de AsH_3?

c) ¿Cuántos átomos de hidrógeno tenemos?

d) ¿Cuántos gramos de arsénico hay?

Datos: M(H) = 1,008 g/mol, M(As) = 74,92 g/mol, N_A = 6,022 · 10^{23} partículas.

a) Calculamos el número de moles teniendo en cuenta que 1 mol de AsH_3 contiene el N_A de moléculas:

$$0{,}8\cdot 10^{25}\ \cancel{\text{moléculas de } AsH_3}\cdot\frac{1\text{ mol de } AsH_3}{6{,}022\cdot 10^{23}\ \cancel{\text{moléculas de } AsH_3}}=\mathbf{13{,}28\text{ mol de } AsH_3}$$

b) Calculamos la masa molar:

$$M(AsH_3) = 74{,}92 + 1{,}008\cdot 3 = 77{,}94\text{ g/mol}$$

Y la masa de la muestra:

$$13{,}28\ \cancel{\text{mol de } AsH_3}\cdot\frac{77{,}94\text{ g de } AsH_3}{1\ \cancel{\text{mol de } AsH_3}}=\mathbf{1035\text{ g de } AsH_3}$$

c) La fórmula del compuesto nos indica los átomos de H que hay en cada molécula del compuesto:

$$0{,}8\cdot 10^{25}\ \cancel{\text{moléculas de } AsH_3}\cdot\frac{3\text{ átomos de H}}{1\ \cancel{\text{molécula de } AsH_3}}=\mathbf{2{,}4\cdot 10^{25}\ \text{átomos de } AsH_3}$$

d) A partir de los moles de arsano que contiene se puede pasar a los gramos de arsénico:

$$13{,}28\ \cancel{\text{mol de } AsH_3}\cdot\frac{74{,}92\text{ g de As}}{1\ \cancel{\text{mol de } AsH_3}}=\mathbf{995\text{ g de As}}$$

37. La urea es un compuesto de fórmula $CO(NH_2)_2$. Si tenemos 5 · 10^{24} moléculas de urea:

a) ¿Cuántos gramos de urea tenemos?

b) ¿Cuántos moles de oxígeno?

c) ¿Cuántos gramos de nitrógeno?

d) ¿Cuántos átomos de hidrógeno?

Datos: M(H) = 1,008 g/mol, M(C) = 12,00 g/mol, M(N) = 14,01 g/mol, M(O) = 16,00 g/mol, N_A = 6,022 · 10^{23} partículas.

En primer lugar calculamos la masa molar del compuesto:

$$M(CO(NH_2)_2) = 12{,}00 + 16{,}00 + (14{,}01 + 1{,}008\cdot 2)\cdot 2 = 60{,}05\text{ g/mol}$$

a) Con N_A calculamos el número de moles y con la masa molar podremos pasar a gramos:

$$5\cdot 10^{24}\ \cancel{\text{moléculas de } CO(NH_2)_2}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{mol de } CO(NH_2)_2}}{6{,}022\cdot 10^{23}\ \cancel{\text{moléculas de } CO(NH_2)_2}}\cdot\frac{60{,}05\text{ g de } CO(NH_2)_2}{1\ \cancel{\text{mol de } CO(NH_2)_2}}=\mathbf{498{,}6\text{ g de } CO(NH_2)_2}$$

b) La fórmula del compuesto nos indica la cantidad de O que hay en cada mol del compuesto:

$$5\cdot 10^{24}\ \cancel{\text{moléculas de } CO(NH_2)_2}\cdot\frac{1\text{ mol de O}}{6{,}022\cdot 10^{23}\ \cancel{\text{moléculas de } CO(NH_2)_2}}=\mathbf{8{,}3\text{ mol de O}}$$

c) De modo similar se puede calcular la masa de nitrógeno:

$$5\cdot 10^{24}\ \cancel{\text{moléculas de } CO(NH_2)_2}\cdot\frac{2\ \cancel{\text{mol de N}}}{6{,}022\cdot 10^{23}\ \cancel{\text{moléculas de } CO(NH_2)_2}}\cdot\frac{14{,}01\text{ g de N}}{1\ \cancel{\text{mol de N}}}=\mathbf{232{,}6\text{ g de N}}$$

d) Por último, calculamos el número de átomos de hidrógeno:

$$5\cdot 10^{24}\ \cancel{\text{moléculas de } CO(NH_2)_2}\cdot\frac{4\text{ átomos de H}}{1\ \cancel{\text{molécula de } CO(NH_2)_2}}=\mathbf{2\cdot 10^{25}\ \text{átomos de H}}$$

38. En un recipiente (A) se han introducido 50 g de gas oxígeno, y en otro recipiente igual (B), 50 g de dióxido de carbono. ¿En qué recipiente hay más moléculas? ¿En qué recipiente hay más átomos?

Datos: M(C) = 12,00 g/mol, M(O) = 16,00 g/mol.

Necesitamos calcular la masa molar de cada gas:

$$M(O_2) = 16{,}00 \cdot 2 = 32{,}00 \text{ g/mol}$$

$$M(CO_2) = 12{,}00 + 16{,}00 \cdot 2 = 44{,}00 \text{ g/mol}$$

Calculamos las moléculas que hay de cada uno de los gases:

$$50 \cancel{\text{ g de } O_2} \cdot \frac{1 \cancel{\text{ mol de } O_2}}{32{,}00 \cancel{\text{ g de } O_2}} \cdot \frac{6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ moléculas de } O_2}{1 \cancel{\text{ mol de } O_2}} = 9{,}4 \cdot 10^{23} \text{ moléculas de } O_2$$

$$50 \cancel{\text{ g de } CO_2} \cdot \frac{1 \cancel{\text{ mol de } CO_2}}{44{,}00 \cancel{\text{ g de } CO_2}} \cdot \frac{6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ moléculas de } CO_2}{1 \cancel{\text{ mol de } CO_2}} = 6{,}8 \cdot 10^{23} \text{ moléculas de } CO_2$$

Comparando los resultados se ve que **hay más moléculas en el recipiente A del O_2**.

Cada molécula de O_2 contiene dos átomos de oxígeno; y cada molécula de CO_2 está formada por 2 átomos de oxígeno y 1 carbono, 3 átomos en total.

$$9{,}4 \cdot 10^{23} \cancel{\text{ moléculas de } O_2} \cdot \frac{2 \text{ átomos}}{1 \cancel{\text{moléculas de } O_2}} = 1{,}88 \cdot 10^{24} \text{ átomos}$$

$$6{,}8 \cdot 10^{23} \cancel{\text{ moléculas de } CO_2} \cdot \frac{3 \text{ átomos}}{1 \cancel{\text{moléculas de } CO_2}} = 2{,}05 \cdot 10^{24} \text{ átomos}$$

Comparando los resultados se ve que **hay más átomos en el recipiente B del CO_2**.

39. El aluminio se extrae de un mineral denominado bauxita, cuyo componente fundamental es el óxido de aluminio, Al_2O_3. ¿Qué cantidad, en gramos, de óxido de aluminio necesitamos para obtener 0,5 kg de aluminio? Datos: M(O) = 16,00 g/mol, M(Al) = 26,98 g/mol.

Calculamos la masa molar del óxido de aluminio:

$$M(Al_2O_3) = 26{,}98 \cdot 2 + 16{,}00 \cdot 3 = 102{,}0 \text{ g/mol}$$

$$500 \cancel{\text{ g de Al}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{ mol de Al}}}{26{,}98 \cancel{\text{ g de Al}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{ mol de } Al_2O_3}}{2 \cancel{\text{ mol de Al}}} \cdot \frac{102{,}0 \text{ g de } Al_2O_3}{1 \cancel{\text{ mol de } Al_2O_3}} = \mathbf{944{,}8 \text{ g de } Al_2O_3}$$

40. La leche de magnesia se prepara disolviendo hidróxido de magnesio, $Mg(OH)_2$, en agua. Para una reacción necesitamos tener en la disolución $5 \cdot 10^{22}$ átomos de magnesio. Calcula cuántos gramos de hidróxido de magnesio tendremos que disolver.

Datos: M(H) = 1,008 g/mol, M(O) = 16,00 g/mol, M(Mg) = 24,31 g/mol, $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ partículas.

En primer lugar, calculamos la masa molar del compuesto:

$$M(Mg(OH)_2) = 24{,}31 + (16{,}00 + 1{,}008) \cdot 2 = 58{,}33 \text{ g/mol}$$

Con N_A podemos pasar de número de átomos de Mg a número de moles de Mg. Con la fórmula del compuesto pasamos de moles de Mg a número de moles de $Mg(OH)_2$ a los que equivale. Por último, con la masa molar pasamos de número de moles de $Mg(OH)_2$ a gramos de $Mg(OH)_2$:

$$5 \cdot 10^{22} \cancel{\text{ átomos de Mg}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{ mol de Mg}}}{6{,}022 \cdot 10^{23} \cancel{\text{ átomos de Mg}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{ mol de } Mg(OH)_2}}{1 \cancel{\text{ mol de Mg}}} \cdot \frac{58{,}33 \text{ g de } Mg(OH)_2}{1 \cancel{\text{ mol de } Mg(OH)_2}} = \mathbf{4{,}84 \text{ g de } Mg(OH)_2}$$

La fórmula de las sustancias

41. Corrige y completa la siguiente afirmación: «En la fórmula de un compuesto se indican los símbolos de los elementos que lo forman y en qué proporción se combinan».

En la fórmula **empirica** de un compuesto se indican los símbolos de los elementos que la forman y en qué proporción se combinan.

En la fórmula **molecular** de un compuesto se indican los símbolos de los elementos que la forman y el número de átomos de cada uno que intervienen en una molécula del compuesto.

42. **A continuación se muestra la fórmula de algunas sustancias moleculares. Escribe, en cada caso, su fórmula empírica y su fórmula molecular:**

a) tetróxido de dinitrógeno, N_2O_4.
b) dióxido de carbono, CO_2.
c) alcohol etílico, C_2H_6O.
d) glucosa, $C_6H_{12}O_6$.
e) propano, C_3H_8.
f) benceno, C_6H_6.

Compuesto	tetróxido de dinitrógeno	dióxido de carbono	alcohol etílico	glucosa	propano	benceno
Fórmula molecular	N_2O_4	CO_2	C_2H_6O	$C_6H_{12}O_6$	C_3H_8	C_6H_6
Fórmula empírica	NO_2	CO_2	C_2H_6O	CH_2O	C_3H_8	CH

43. **Determina la composición centesimal de la glucosa, $C_6H_{12}O_6$.**

Datos: *M*(H) = 1,008 g/mol, *M*(C) = 12,00 g/mol, *M*(O) = 16,00 g/mol.

En primer lugar calculamos la masa molar del compuesto:

$$M(C_6H_{12}O_6) = 12{,}00 \cdot 6 + 1{,}008 \cdot 12 + 16{,}00 \cdot 6 = 180{,}1 \text{ g/mol}$$

Al comparar la masa de cada elemento con la masa total del compuesto, y multiplicando por 100, tenemos el porcentaje en masa de cada elemento.

- Carbono: $\dfrac{(12{,}00 \text{ g de C})\cdot 6}{180{,}1 \text{ g de } C_6H_{12}O_6}\cdot 100 = \mathbf{39{,}98\ \%\ de\ C}$
- Hidrógeno: $\dfrac{(1{,}008 \text{ g de H})\cdot 12}{180{,}1 \text{ g de } C_6H_{12}O_6}\cdot 100 = \mathbf{6{,}72\ \%\ de\ H}$
- Oxígeno: $\dfrac{(16{,}00 \text{ g de O})\cdot 6}{180{,}1 \text{ g de } C_6H_{12}O_6}\cdot 100 = \mathbf{53{,}30\ \%\ de\ O}$

44. **En el carbonato de sodio, por cada gramo de carbono se combinan 4 g de oxígeno y 3,83 g de sodio. Calcula su composición centesimal. Datos: *M*(C) = 12,00 g/mol, *M*(O) = 16,00 g/mol, *M*(Na) = 23,00 g/mol.**

- Carbono: $\dfrac{1 \text{ g de C}}{1 \text{ g} + 4 \text{ g} + 3{,}83 \text{ g}} \cdot 100 = \mathbf{11{,}33\ \%\ de\ C}$
- Oxígeno: $\dfrac{4 \text{ g de O}}{1 \text{ g} + 4 \text{ g} + 3{,}83 \text{ g}} \cdot 100 = \mathbf{45{,}30\ \%\ de\ O}$
- Sodio: $\dfrac{3{,}83 \text{ g de C}}{1 \text{ g} + 4 \text{ g} + 3{,}83 \text{ g}} \cdot 100 = \mathbf{43{,}37\ \%\ de\ Na}$

45. **Al calcinar una muestra de 367 mg de óxido de plata se obtuvo un residuo de 342 mg de plata. Determina la fórmula empírica de este óxido. Datos: *M*(Ag) = 107,9 g/mol, *M*(O) = 16,00 g/mol.**

Fórmula del compuesto que buscamos: Ag_xO_y.

$$x = 0{,}342 \cancel{\text{ g de Ag}} \cdot \frac{1 \text{ mol de Ag}}{107{,}9 \cancel{\text{ g de Ag}}} = \mathbf{3{,}1696\cdot 10^{-3}\ mol\ de\ Ag}$$

$$y = (0{,}367 - 0{,}342) \cancel{\text{ g de O}} \cdot \frac{1 \text{ mol de O}}{16{,}00 \cancel{\text{ g de O}}} = \mathbf{1{,}5625\cdot 10^{-3}\ mol\ de\ O}$$

La fórmula del compuesto es del tipo $Ag_{3{,}1696\cdot 10^{-3}}O_{1{,}5625\cdot 10^{-3}}$. Como los subíndices deben ser números enteros, dividimos ambos por el más pequeño:

$$Ag_{\frac{3{,}1696\cdot 10^{-3}}{1{,}5625\cdot 10^{-3}}}O_{\frac{1{,}5625\cdot 10^{-3}}{1{,}5625\cdot 10^{-3}}} \Rightarrow Ag_{2{,}03}O_1 \Rightarrow \mathbf{Ag_2O}$$

46. El sulfato de hierro(II) cristaliza formando una sal hidratada de fórmula $FeSO_4 \cdot 7H_2O$. Determina el porcentaje de agua de hidratación en este compuesto.

Datos: *M*(H) = 1,008 g/mol, *M*(O) = 16,00 g/mol, *M*(S) = 32,06 g/mol, *M*(Fe) = 55,85 g/mol.

Calculamos la masa molar que corresponde sumando las masas que intervienen.

$$M(FeSO_4 \cdot 7H_2O) = 55{,}85 + 32{,}06 + 16{,}00 \cdot 4 + 7 \cdot (1{,}008 \cdot 2 + 16{,}00) = 278{,}0 \text{ g/mol}$$

$$M(H_2O) = 1{,}008 \cdot 2 + 16{,}00 = 18{,}02 \text{ g/mol}$$

Al comparar la masa relativa de agua con la masa relativa total del compuesto, y multiplicando por 100, tenemos el porcentaje en masa de agua.

- Agua: $$\frac{7 \cdot (18{,}02 \text{ g de } H_2O)}{278{,}0 \text{ g de } FeSO_4 \cdot 7H_2O} \cdot 100 = \mathbf{45{,}36\ \%\ de\ H_2O}$$

ACTIVIDADES FINALES (página 44)

47. Al calentar en la estufa 2,00 g de nitrato de cromo(III) hidratado se obtuvo un residuo de 1,19 g. Determina la fórmula de la sal hidratada.

Datos: *M*(H) = 1,008 g/mol, *M*(N) = 14,01 g/mol, *M*(O) = 16,00 g/mol, *M*(Cr) = 52,00 g/mol.

Al calentar la sal hidratada se evapora el agua y queda la sal anhidra:

$$2{,}00 - 1{,}19 = 0{,}81 \text{ g de } H_2O$$

y 1,19 g de nitrato de cromo(III) anhidro, $Cr(NO_3)_3$.

Fórmula de la sal hidratada que buscamos: $x Cr(NO_3)_3 \cdot y H_2O$.

Determinamos, en cada caso, la cantidad de sustancia en mol. Para ello necesitamos la masa molar:

$$M(Cr(NO_3)_3) = 52{,}00 + (14{,}01 + 16{,}00 \cdot 3) \cdot 3 = 238{,}0 \text{ g/mol}$$

$$M(H_2O) = 1{,}008 \cdot 2 + 16{,}00 = 18{,}02 \text{ g/mol.}$$

$$x = 1{,}19\ \cancel{\text{g de } Cr(NO_3)_3} \cdot \frac{1 \text{ mol de } Cr(NO_3)_3}{238{,}0\ \cancel{\text{g de } Cr(NO_3)_3}} = \mathbf{5 \cdot 10^{-3}\ mol\ de\ Cr(NO_3)_3}$$

$$y = 0{,}81\ \cancel{\text{g de } H_2O} \cdot \frac{1 \text{ mol de } H_2O}{18{,}02\ \cancel{\text{g de } H_2O}} = \mathbf{45 \cdot 10^{-3}\ mol\ de\ H_2O}$$

La fórmula del compuesto es del tipo $5 \cdot 10^{-3} Cr(NO_3)_3 \cdot 45 \cdot 10^{-3} H_2O$. Como los coeficientes deben ser números enteros, dividimos ambos por el más pequeño:

$$\frac{5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}} Cr(NO_3)_3 \cdot \frac{45 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}} H_2O \quad \Rightarrow \quad 1Cr(NO_3)_3 \cdot 9H_2O$$

Fórmula de la sal hidratada: $\mathbf{Cr(NO_3)_3 \cdot 9H_2O}$

48. Para llevar a cabo reacciones de oxidación se emplea una sustancia cuya composición centesimal es la siguiente: 26,58 % de K, 35,35 % de Cr y 38,07 % de O. Determina la fórmula del compuesto.

Datos: *M*(O) = 16,00 g/mol, *M*(K) = 39,10 g/mol, *M*(Cr) = 52,00 g/mol.

La fórmula del compuesto: $K_xCr_yO_z$

$$26{,}58\ \cancel{\text{g de K}} \cdot \frac{1 \text{ mol de K}}{39{,}10\ \cancel{\text{g de K}}} = 0{,}68 \text{ mol de K}$$

$$35{,}35\ \cancel{\text{g de Cr}} \cdot \frac{1 \text{ mol de Cr}}{52{,}00\ \cancel{\text{g de Cr}}} = 0{,}68 \text{ mol de Cr}$$

$$38{,}07\ \cancel{\text{g de O}} \cdot \frac{1 \text{ mol de O}}{16{,}00\ \cancel{\text{g de O}}} = 2{,}38 \text{ mol de O}$$

Por tanto: $K_{0,68}Cr_{0,68}O_{2,38}$

Los subíndices deben ser números enteros sencillos que mantengan esta proporción, para encontrarlos dividimos por el número más pequeño:

$$K_{\frac{0,68}{0,68}}Cr_{\frac{0,68}{0,68}}O_{\frac{2,38}{0,68}} \Rightarrow K_1Cr_1O_{3,5}$$

Como los números en los subíndices deben ser enteros, multiplicamos por 2:

$$\mathbf{K_2Cr_2O_7}$$

49. **El benceno está formado por C e H. En un análisis se ha comprobado que se combinan 3 g de C con 252 mg de H. Determina la fórmula del benceno si su masa molar es 78,05 g/mol.**

Datos: M(H) = 1,008 g/mol, M(C) = 12,00 g/mol.

Fórmula del benceno: C_xH_y.

$$x = 3\ \cancel{\text{g de C}} \cdot \frac{1\ \text{mol de C}}{12,00\ \cancel{\text{g de C}}} = \mathbf{0,25\ mol\ de\ C}$$

$$y = 0,252\ \cancel{\text{g de H}} \cdot \frac{1\ \text{mol de H}}{1,008\ \cancel{\text{g de H}}} = \mathbf{0,25\ mol\ de\ H}$$

La fórmula del compuesto es del tipo $C_{0,25}H_{0,25}$. Como los subíndices deben ser números enteros dividimos ambos por el más pequeño para conseguir la fórmula empírica:

$$C_{\frac{0,25}{0,25}}H_{\frac{0,25}{0,25}} \Rightarrow CH$$

Comprobamos si esta es la fórmula molecular del compuesto. Para ello usamos su masa molar, que será un múltiplo de la empírica:

$$M(C_nH_n) = M(CH)\cdot n \Rightarrow n = \frac{M(C_nH_n)}{M(CH)} = \frac{78,05\ \cancel{\frac{\text{g}}{\text{mol}}}}{(12,00 + 1,008)\ \cancel{\frac{\text{g}}{\text{mol}}}} = \frac{78,05}{13,008} = 6$$

La fórmula molecular es:

$$C_nH_n \Rightarrow \mathbf{C_6H_6}$$

50. **Copia en tu cuaderno y relaciona con flechas cada uno de los hechos con la técnica espectroscópica apropiada.**

- **Absorción atómica**
- **Absorción IR**
- **Espectrometría de masas**

- **Fracciona las moléculas.**
- **Muestra grupos funcionales en una molécula.**
- **Identifica iones metálicos en disolución.**
- **Partículas cargadas interaccionan con campos magnéticos.**
- **Mide la energía de la radiación absorbida.**

- Absorción atómica → Identifica iones metálicos en disolución.
- Absorción atómica → Mide la energía de la radiación absorbida.
- Absorción IR → Muestra grupos funcionales en una molécula.
- Espectrometría de masas → Fracciona las moléculas.
- Espectrometría de masas → Partículas cargadas interaccionan con campos magnéticos.

Ampliación (página 44)

51. El aluminio es un metal que se puede obtener del óxido de aluminio, Al_2O_3, que se extrae de la bauxita, o del fluoruro de aluminio, AlF_3, que se extrae de la fluorita. Suponiendo que el costo es igual en los dos casos, determina cuál de las dos sustancias es más rentable para obtener aluminio.

Datos: *M*(O) = 16,00 g/mol, *M*(F) = 19,00 g/mol, *M*(Al) = 26,98 g/mol.

Hay que determinar el porcentaje en aluminio de cada una de las dos sustancias.

Bauxita: $M(Al_2O_3) = 26{,}98 \cdot 2 + 16{,}00 \cdot 3 = 102{,}0$ g/mol

$$\frac{(26{,}98 \text{ g de Al})\cdot 2}{102{,}0 \text{ g de } Al_2O_3}\cdot 100 = 52{,}92\% \text{ de Al}$$

Fluorita: $M(AlF_3) = 26{,}98 + 19{,}00 \cdot 3 = 93{,}98$ g/mol

$$\frac{26{,}98 \text{ g de Al}}{93{,}98 \text{ g de } AlF_3}\cdot 100 = 32{,}13\% \text{ de Al}$$

La sustancia más rentable es el **óxido de aluminio**, $\mathbf{Al_2O_3}$, contenido en la bauxita.

52. Para determinar la fórmula química del mármol se descompone una muestra de 2 g del mismo y se obtienen 800 mg de calcio y 240 mg de carbono; se sabe que el resto es oxígeno, ¿cuál es la fórmula?

Datos: *M*(Ca) = 40,08 g/mol, *M*(C) = 12,00 g/mol, *M*(O) = 16,00 g/mol.

La fórmula del compuesto: $Ca_xC_yO_z$.

$$2 \text{ g de mármol}\begin{cases} 800 \text{ mg de Ca} = 0{,}8 \text{ g de Ca} \\ 240 \text{ mg de C} = 0{,}24 \text{ g de C} \\ 960 \text{ mg de O} = 0{,}96 \text{ g de O} \end{cases}$$

Calculamos los moles de cada sustancia que hay en la muestra:

$$x = 0{,}8 \cancel{\text{ g de Ca}}\cdot\frac{1 \text{ mol de Ca}}{40{,}08 \cancel{\text{ g de Ca}}} = 0{,}02 \text{ mol de Ca}$$

$$y = 0{,}24 \cancel{\text{ g de C}}\cdot\frac{1 \text{ mol de C}}{12{,}00 \cancel{\text{ g de C}}} = 0{,}02 \text{ mol de C}$$

$$z = 0{,}96 \cancel{\text{ g de O}}\cdot\frac{1 \text{ mol de O}}{16{,}00 \cancel{\text{ g de O}}} = 0{,}06 \text{ mol de O}$$

Por tanto: $Ca_{0,02}C_{0,02}O_{0,06}$. Los subíndices deben ser números enteros sencillos que mantengan esta proporción, para encontrarlos dividimos por el número más pequeño:

$$Ca_{\frac{0,02}{0,02}}C_{\frac{0,02}{0,02}}O_{\frac{0,02}{0,06}} \Rightarrow \mathbf{CaCO_3}$$

53. El hierro se oxida cuando se combina con oxígeno. Para determinar la fórmula del óxido resultante se calientan 223,2 mg de hierro en presencia de exceso de oxígeno, obteniéndose una cantidad máxima de 319,2 mg de óxido. ¿Cuál es la fórmula del compuesto que se formó?

Datos: *M*(Fe) = 55,85 g/mol, *M*(O) = 16,00 g/mol.

La fórmula del compuesto: Fe_xO_y.

$$319{,}2 \text{ mg del óxido}\begin{cases} 223{,}2 \text{ mg de Fe} = 0{,}2232 \text{ g de Fe} \\ 96 \text{ mg de O} = 0{,}096 \text{ g de O} \end{cases}$$

Calculamos los moles presentes de cada uno:

$$x = 0{,}2232 \cancel{\text{ g de Fe}}\cdot\frac{1 \text{ mol de Fe}}{55{,}85 \cancel{\text{ g de Fe}}} = 0{,}004 \text{ mol de Fe}$$

$$y = 0{,}096 \cancel{\text{ g de O}}\cdot\frac{1 \text{ mol de O}}{16{,}00 \cancel{\text{ g de O}}} = 0{,}006 \text{ mol de O}$$

Por tanto: $Fe_{0,004}O_{0,006}$. Los subíndices deben ser números enteros sencillos que mantengan esta proporción, para encontrarlos dividimos por el número más pequeño:

$$Fe_{\frac{0,004}{0,004}}O_{\frac{0,006}{0,004}} \Rightarrow Fe_1O_{1,5}$$

Como los números en los subíndices deben ser enteros, multiplicamos por 2. La fórmula es: **Fe_2O_3**.

54. Para determinar la fórmula de un compuesto se realizaron los siguientes análisis:

- **El análisis elemental reveló 52,17 % de carbono, 13,04 % de hidrógeno, y el resto de oxígeno.**
- **El espectro de masas presenta su pico más alto a 46,026.**
- **Su espectro de IR muestra un pico ancho de absorción entre 3200 cm^{-1} y 3500 cm^{-1}.**

La fórmula del compuesto será del tipo: $C_xH_yO_z$.

La composición centesimal determina la proporción en masa de cada elemento. Así, en 100 g del compuesto:

$$100 \text{ g del compuesto} \begin{cases} 52,17 \text{ g de C} \\ 13,04 \text{ g de H} \\ 100 - (52,17 + 13,04) = 34,79 \text{ g de O} \end{cases}$$

Determinamos los moles de cada elemento que representa esa cantidad usando la masa atómica:

$$x = 52,17 \cancel{\text{ g de C}} \cdot \frac{1 \text{ mol de C}}{12,00 \cancel{\text{ g de C}}} = 4,3475 \text{ mol de C}$$

$$y = 13,04 \cancel{\text{ g de H}} \cdot \frac{1 \text{ mol de H}}{1,008 \cancel{\text{ g de H}}} = 12,9365 \text{ mol de H}$$

$$z = 34,79 \cancel{\text{ g de O}} \cdot \frac{1 \text{ mol de O}}{16,00 \cancel{\text{ g de O}}} = 2,1744 \text{ mol de O}$$

Por tanto, la fórmula del compuesto es del tipo: $C_{4,3475}H_{12,9365}O_{2,1744}$. Los subíndices deben ser números enteros sencillos que mantengan esta proporción, para encontrarlos dividimos por el número más pequeño:

$$C_{\frac{4,3475}{2,1744}}H_{\frac{12,9365}{2,1744}}O_{\frac{2,1744}{2,1744}} \Rightarrow C_{1,99}H_{5,95}O_1 \Rightarrow C_2H_6O_1$$

Comprobamos si es la fórmula molecular de compuesto. Para ello calculamos su masa molar:

$$M(C_2H_6O) = 12,00 \cdot 2 + 1,008 \cdot 6 + 16,00 = 46,084 \text{ g/mol}$$

La fórmula molar, en este caso, coincide con la fórmula empírica ya que coincide con el valor obtenido en el espectro de masas.

Por último, el espectro IR nos indica el tipo de enlace, en este caso, se trata de enlaces simples O–H (ver gráfica de la página 37 del libro del alumno).

Por tanto, la sustancia es el **etanol**: **CH_3–CH_2–OH**.

QUÍMICA EN TU VIDA (página 46)

INTERPRETA

1. ¿Qué cauces tienen los metales pesados para llegar hasta el organismo humano?

El agua, tanto subterráneas como superficiales. Del agua pueden entrar en la cadena trófica y llegar al organismo de los seres humanos por la alimentación. También directamente al beber el agua.

El aire en ciertas partículas en suspensión. Directamente al respirar el aire que contiene estas partículas en suspensión. O indirectamente a través de la cadena trófica alimentándonos de seres vivos que hayan habitado las áreas con estos aerosoles.

2. **¿Dónde se puede identificar la presencia de metales pesados para evitar que lleguen a la alimentación humana?**

   Controles de toxicidad del agua potable. Centros de producción y distribución de alimentos (lonjas, mataderos…).

REFLEXIONA

3. **¿Son los metales pesados sustancias tóxicas artificiales o naturales?**

   Son naturales, pues forman parte de la naturaleza. Otro asunto es si en los procesos donde interviene el hombre como la extracción o el transporte de los minerales, que contienen estos metales, no se tiene cuidado para evitar su difusión.

USA LAS TIC

4. **Investiga en la red sobre los controles del agua que deben hacerse en el suministro de tu localidad.**

   Las diferentes empresas de suministro de agua ofrecen en la red este tipo de información. El Ministerio de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad ofrece un portal que facilita esta tarea desde cualquier lugar del Estado español, el SINAC (Servicio de Información Nacional de Aguas de Consumo). Se encuentra en la URL http://sinac.msc.es/SinacV2/. Desde aquí se puede iniciar la tarea de investigación.

5. **Investiga en la red cómo nuestro organismo elimina los metales pesados y las dificultades que tiene para expulsarlos del cuerpo.**

   Puede iniciarse la investigación introduciendo en cualquier buscador «Metales pesados y salud humana».

OPINA

6. **¿Qué controles establecerías sobre las industrias para reducir su capacidad contaminante?**

   Controles sobre los modos de almacenamiento, transporte y procesado de sustancias potencialmente peligrosas.

2

Los gases

Los gases

2

PARA COMENZAR (página 47)

- **¿Por qué los géiseres son típicos de zonas volcánicas?**

  Porque para que se produzca un géiser debe establecerse contacto entre las aguas subterráneas y rocas calentadas por el magma, que se sitúan precisamente en zonas volcánicas.

- **¿Qué cambios de estado se producen durante el estallido de un géiser?**

  Durante el estallido de un géiser tiene lugar la vaporización del agua subterránea.

- **¿Se te ocurre alguna manera de aprovechar la energía que hay disponible en las regiones donde abundan los géiseres?**

  La energía térmica producida se puede aprovechar para calentar o para generar otros tipos de energía, por ejemplo eléctrica.

PRACTICA (página 48)

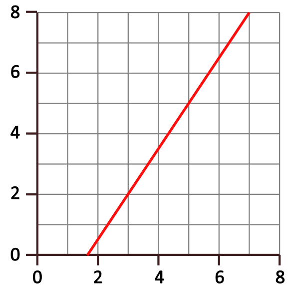
1. Representa las siguientes rectas.

a) Pasa por el punto (3, 2) y tiene pendiente $0,\widehat{6}$. ¿Es función de proporcionalidad directa?

b) Su pendiente es 0 y su ordenada en el origen es 2. ¿Qué tipo de función es?

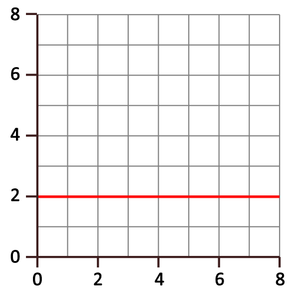
a) $y - y_0 = m\cdot(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 3 = 0,\widehat{6}\cdot(x-2) \quad \Rightarrow \quad 2x - 3y + 5 = 0$

No es una función de proporcionalidad directa ya que la ordenada en el origen no es nula.



b) $y = m\cdot x + n \quad \Rightarrow \quad y = 2$

Es una función constante.

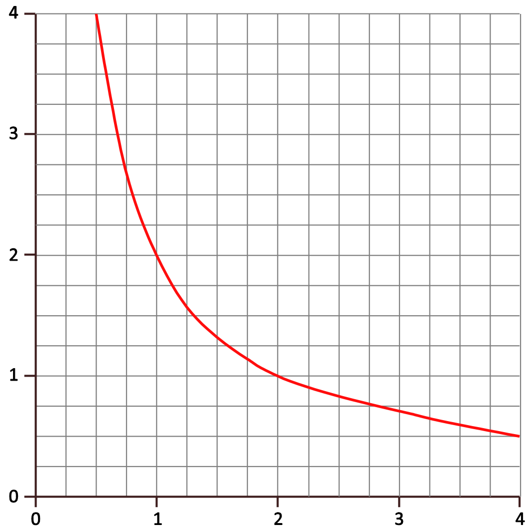


2. **Representa gráficamente los datos de esta tabla. ¿Qué tipo de función es?**

x	0,5	1	2	4
y	4	2	1	0,5

$y \cdot x = 2$

Es una función de proporcionalidad inversa.



PRACTICA (página 49)

3. **¿Qué quiere decir que la forma de los gases es variable?**

Significa que no tienen forma fija, adoptan la forma y el volumen del recipiente que los contiene.

4. **¿De qué depende la temperatura de un gas, según la teoría cinética?**

Según la teoría cinética, la temperatura de un gas es directamente proporcional a la velocidad con la que se muevan las partículas y la masa de las partículas. Para un mismo gas es más alta cuando las partículas se mueven con mayor rapidez. Si las partículas del gas se mueven más despacio, la temperatura disminuye. Llegará un momento en que las partículas no se mueven; entonces, la temperatura ya no puede bajar más (cero absoluto, equivale a –273,15 °C).

5. **¿Por qué podemos oler el perfume que lleva una persona situada al otro lado de una habitación?**

De acuerdo con la teoría cinética, los gases se expanden ocupando todo el volumen del recipiente que los contiene. Por esta razón, en cualquier punto de la habitación las partículas volátiles del perfume tienen libertad de movimiento, llegando hasta todos los rincones de la misma y pueden ser respiradas por otra persona que se encuentre en el otro extremo.

6. **Según la teoría cinética, ¿qué ocurre cuando ponemos en contacto agua a 20 °C con hielo a 0 °C? ¿Qué intercambios de energía se producen?**

Cuando un cuerpo a mayor temperatura se pone en contacto con un cuerpo a menor temperatura, le cede calor. En este caso, diremos que el agua cede calor al hielo hasta que sus temperaturas se igualen y se alcance el equilibrio térmico.

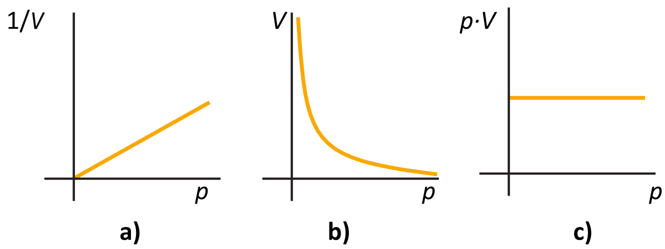
Podemos separar lo que ocurre en varias fases:

- <u>1.ª fase. El agua cede calor al hielo:</u> Las partículas que forman el hielo pueden vibrar, pero su movimiento está muy limitado, al entrar en contacto con el agua, la energía que se le comunica hace que las partículas vibren más rápido. Toda la energía que se comunica a la sustancia se invierte en vencer las fuerzas que unen las partículas del sólido hasta llegar al estado líquido, en el que las fuerzas que mantiene unidas las partículas son menores que en el sólido. Se produce, por tanto, el cambio de estado de sólido (hielo) a líquido (agua). El calor que se comunica mientras se produce el cambio de estado no se invierte en modificar su temperatura.

- 2.ª fase. Alcanzar el equilibrio: El agua que se ha obtenido tras derretirse el hielo se encuentra a 0 °C. El agua que se encuentra a una mayor temperatura sigue cediendo energía que se invierte en aumentar el movimiento de vibración de las partículas, lo que hace que se eleve la temperatura hasta alcanzar el equilibrio térmico.

ACTIVIDADES (página 51)

7. Indica cuál de las siguientes gráficas representa la variación de la presión de un gas cuando se modifica el volumen del recipiente en el que se encuentra, manteniendo constante su temperatura.



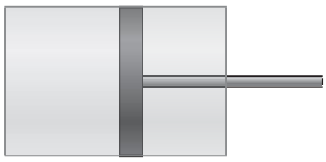
A temperatura constante, $p \cdot V =$ cte.

- La gráfica a) indica que p es directamente proporcional a $1/V$. Da una representación correcta de la ley.
- La gráfica b) indica que p y V son inversamente proporcionales. Da una representación correcta de la ley.
- La gráfica c) indica que el producto de $p \cdot V$ es constante a cualquier presión. También es coherente con la ley.

Las tres gráficas representan de forma coherente la variación de la presión de un gas al modificar el volumen del recipiente, manteniendo constante la temperatura.

8. En un cilindro de émbolo móvil tenemos un gas a 30 °C que ejerce una presión de 350 mm de Hg cuando el volumen del cilindro es de 1,25 L. ¿Qué presión ejercerá el gas si desplazamos el émbolo hasta que el volumen sea de 250 cm³, manteniendo constante la temperatura?

$V_1 = 1{,}25$ L $\quad V_2 = 250\ \text{cm}^3 = 0{,}250$ L



$p_1 = 350$ mm de Hg $\quad p_2 = ?$

De acuerdo con la ley de Boyle-Mariotte, a temperatura constante:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_2} = \frac{350\ \text{mm de Hg} \cdot 1{,}25\ \cancel{\text{L}}}{0{,}250\ \cancel{\text{L}}} = \mathbf{1750\ mm\ de\ Hg}$$

ACTIVIDADES (página 53)

9. ¿En cuánto cambia la presión de un gas si su temperatura pasa de 20 a 40 °C (se duplica la temperatura Celsius), manteniendo constante su volumen?

De acuerdo con la ley de Gay-Lussac, a volumen constante:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{(20+273)\ \text{K}}{(40+273)\ \text{K}} = \frac{293\ \text{K}}{313\ \text{K}} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{313\ \cancel{\text{K}}}{293\ \cancel{\text{K}}} = \mathbf{1{,}07}$$

Aumenta la presión un 7 %: $p_2 = 1{,}07\ p_1$.

10. Manteniendo constante el volumen de un gas, modificamos su temperatura. ¿Qué cambio debe experimentar su temperatura absoluta para que la presión se reduzca a la mitad? ¿Su temperatura Celsius cambia en la misma proporción?

De acuerdo con la ley de Gay-Lussac, a volumen constante:

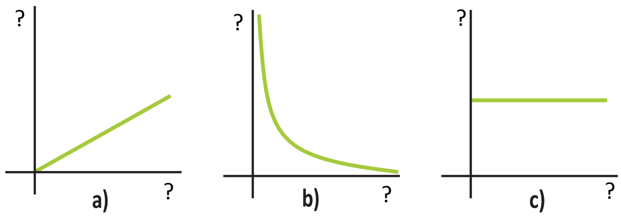
$$\frac{p_1}{T_1}=\frac{p_2}{T_2} \Rightarrow \frac{\cancel{p_1}}{T_1}=\frac{\frac{\cancel{p_1}}{2}}{T_2} \Rightarrow T_2=\frac{T_1}{2}$$

Por tanto, se reduce a la mitad la temperatura absoluta.

La temperatura Celsius no cambia en la misma proporción, ya que estas expresiones son válidas para la temperatura absoluta.

ACTIVIDADES (página 55)

11. Las tres gráficas siguientes pueden representar la relación en el volumen frente a la temperatura de un gas cuando experimenta transformaciones a presión constante. Indica qué magnitud se debe representar en cada eje. Calculamos el vector desplazamiento:



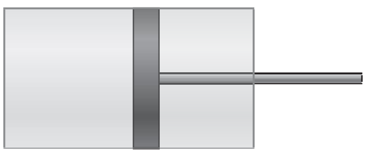
De acuerdo con la ley de Charles, cuando la presión se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a la temperatura absoluta de un gas:

$$\frac{V}{T}=\text{cte.}$$

- La gráfica a) representa dos magnitudes directamente proporcionales. En un eje se representa V; y en otro, T absoluta.
- La gráfica b) representa dos magnitudes inversamente proporcionales. En un eje se representa V; y en otro, $1/T$ absoluta (o T y $1/V$).
- La gráfica c) representa dos magnitudes independientes, por mucho que cambie una, la otra permanece constante. En el eje de abscisas se representa la temperatura centígrada, y en el de ordenadas, el volumen. El volumen tiende a 0 cuando la temperatura tiende a –273 °C.

12. En un recipiente de émbolo móvil (ver ilustración) tenemos una cierta cantidad de gas que ocupa 500 mL y se encuentra a 10 °C. ¿Qué volumen ocupará si el gas se enfría hasta –10 °C sin que varíe la presión?

$T_1 = 10\ °C$ $T_2 = -10\ °C$



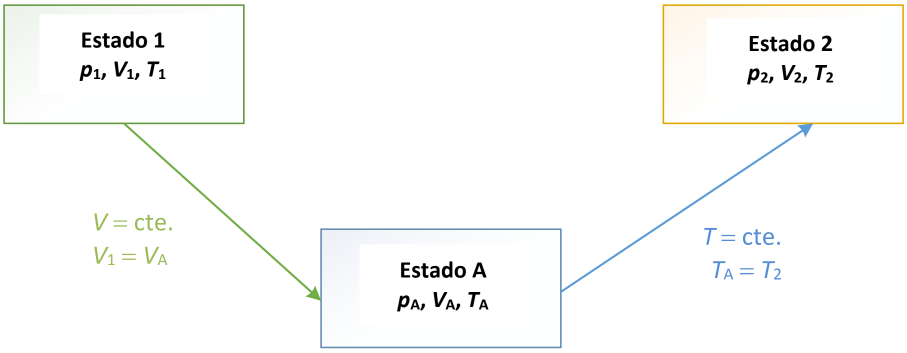
$V_1 = 500\ mL$ $V_2 = ?\ mL$

De acuerdo con la ley de Charles, cuando la presión de un gas ideal se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a su temperatura absoluta.

$$\frac{V_1}{T_1}=\frac{V_2}{T_2} \Rightarrow V_2=\frac{V_1\cdot T_2}{T_1}=\frac{500\ \text{mL}\cdot(-10+273)\ \cancel{K}}{(10+273)\ \cancel{K}}=\mathbf{465\ mL}$$

ACTIVIDADES (página 57)

13. Deduce la ecuación de estado de los gases ideales suponiendo que el gas pasa del estado 1 a A en un proceso con volumen constante y de A a 2 en un proceso con temperatura constante.



- Transformación 1, a V = cte. Se cumple la ley de Gay-Lussac:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_A}{T_A} \Rightarrow p_A = \frac{p_1 \cdot T_A}{T_1}$$

- Transformación 2, a T = cte. Se cumple la ley de Boyle-Mariotte:

$$p_A \cdot V_A = p_2 \cdot V_2$$

Teniendo en cuenta que $T_A = T_2$ y $V_1 = V_A$, estas expresiones se transforman:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_A}{T_2}; \quad p_A \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

Despejamos p_A en ambas expresiones y las igualamos:

$$p_A = \frac{p_1 \cdot T_2}{T_1}; \quad p_A = \frac{p_2 \cdot V_2}{V_1} \Rightarrow \frac{p_1 \cdot T_2}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{V_1}$$

Reordenamos la expresión poniendo todo lo que se refiere al estado 1 en un miembro y lo que se refiere al estado 2 en el otro, y obtenemos la ecuación general de los gases ideales:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

14. ¿Es posible que un gas experimente una transformación en la que se mantengan constantes el volumen y la presión?

Para que esto suceda también debe permanecer constante la temperatura, con lo que el gas no sufriría transformación.

15. En un recipiente de 15 L se ha colocado un gas a 50 °C que ejerce una presión de 2 atm. Determina cuál será ahora el volumen del recipiente si lo calentamos hasta 100 °C y dejamos que la presión llegue hasta 3 atm.

Teniendo en cuenta la ecuación general de los gases ideales:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \Rightarrow V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot p_2} = \frac{2\ \cancel{\text{atm}} \cdot 15\ \text{L} \cdot (100 + 273)\ \cancel{\text{K}}}{3\ \cancel{\text{atm}} \cdot (50 + 273)\ \cancel{\text{K}}} = \mathbf{11{,}55\ L}$$

16. Una bombona de 3 L contiene CO_2 que, a temperatura ambiente (20 °C), ejerce una presión de 2 atm. En un descuido, la bombona se acerca a un fuego y llega a alcanzar 800 °C. ¿Llegará a explotar? La bombona está hecha de un material que soporta hasta 10 atm.

Teniendo en cuenta la ecuación general de los gases ideales:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot V_2} = \frac{2\,\text{atm} \cdot 3\,\cancel{\text{L}} \cdot (800 + 273)\,\cancel{\text{K}}}{(20 + 273)\,\cancel{\text{K}} \cdot 3\,\cancel{\text{L}}} = \mathbf{7{,}32\,atm}$$

Como: **p_2 = 7,32 atm < 10 atm, la bombona no explota**.

17. Como resultado de una reacción química se ha generado un gas que ocupa un volumen de 10 L a la presión de 2500 mm de Hg. ¿Cuál será la temperatura inicial de ese gas si cuando se enfría hasta –10 °C ejerce una presión de 2,5 atm y ocupa 7 L?

Teniendo en cuenta la ecuación general de los gases ideales:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \Rightarrow T_1 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_1}{p_2 \cdot V_2}$$

$$T_1 = \frac{\left(2500\,\cancel{\text{mm de Hg}} \cdot \dfrac{1\,\cancel{\text{atm}}}{760\,\cancel{\text{mm de Hg}}}\right) \cdot 10\,\cancel{\text{L}} \cdot (-10 + 273)\,\cancel{\text{K}}}{2{,}5\,\cancel{\text{atm}} \cdot 7\,\cancel{\text{L}}} = 494{,}26\ \text{K} = \mathbf{221{,}36\ °C}$$

18. En un recipiente de 5 L tenemos un gas que ejerce una presión de 600 mm de Hg a 35 °C. ¿Es posible que experimente una transformación en la que se duplique la presión y el volumen del gas? ¿Qué sucederá con su temperatura?

Teniendo en cuenta la ecuación general de los gases ideales:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{2\,p_1 \cdot 2\,V_1}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{2\,\cancel{p_1} \cdot 2\,\cancel{V_1} \cdot T_1}{\cancel{p_1} \cdot \cancel{V_1}} = 4\,T_1$$

La temperatura del gas se cuadriplica. Por tanto, tendrá un valor de:

$$T_2 = 4 \cdot (35 + 273)\ \text{K} = 1232\ \text{K} = \mathbf{959\ °C}$$

19. Tenemos el mismo gas del ejercicio anterior. ¿Es posible que experimente una transformación en la que se duplique la temperatura y el volumen del gas? ¿Qué sucederá con su presión?

Teniendo en cuenta la ecuación general de los gases ideales:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot 2\,V_1}{2\,T_1} \Rightarrow p_2 = \frac{p_1 \cdot \cancel{V_1} \cdot \cancel{2}\,\cancel{T_1}}{\cancel{T_1} \cdot \cancel{2}\,\cancel{V_1}} = p_1$$

La presión del gas no varía.

ACTIVIDADES (página 58)

20. Tenemos CO_2 a 2 atm y 70 °C ocupando 10 L. ¿Cuántos moles de CO_2 tenemos? ¿Cuántas moléculas de gas dióxido de carbono son? ¿Cuántos átomos de oxígeno son? ¿Cuántos moles de oxígeno son?

Teniendo en cuenta la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{2\,\cancel{\text{atm}} \cdot 10\,\cancel{\text{L}}}{0{,}082\,\dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (70 + 273)\,\cancel{\text{K}}} = \mathbf{0{,}71\,mol\,de\,CO_2}$$

Hallamos el número de moléculas de CO_2:

$$0{,}71\,\cancel{\text{mol de CO}_2} \cdot \frac{6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{moléculas de CO}_2}{1\,\cancel{\text{mol de CO}_2}} = \mathbf{4{,}28 \cdot 10^{23}\ moléculas\ de\ CO_2}$$

Calculamos el número de átomos de oxígeno partiendo del resultado anterior:

$$4,28 \cdot 10^{23}\ \cancel{\text{moléculas de } CO_2} \cdot \frac{2 \text{ átomos de O}}{1\ \cancel{\text{molécula de } CO_2}} = \mathbf{8,56 \cdot 10^{23}\ \text{átomos de O}}$$

El número de moles de oxígeno será:

$$0,71\ \cancel{\text{mol de } CO_2} \cdot \frac{2 \text{ mol de O}}{1\ \cancel{\text{mol de } CO_2}} = \mathbf{1,42\ \text{mol de O}}$$

21. En dos recipientes, del mismo volumen y a la misma temperatura, se introducen 10 g de gas hidrógeno en el primero y 10 g de gas cloro en el segundo. Determina en cuál de los dos recipientes la presión es mayor.

Teniendo en cuenta la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

A igual volumen y temperatura, la presión será mayor donde sea mayor la cantidad de sustancia:

$$M(H_2) = 1,008 \cdot 2 = 2,016 \text{ g/mol}$$

$$10\ \cancel{\text{g de } H_2} \cdot \frac{1 \text{ mol de } H_2}{2,016\ \cancel{\text{g de } H_2}} = 4,96 \text{ mol de } H_2$$

$$M(Cl_2) = 35,45 \cdot 2 = 70,90 \text{ g/mol}$$

$$10\ \cancel{\text{g de } Cl_2} \cdot \frac{1 \text{ mol de } Cl_2}{70,9\ \cancel{\text{g de } Cl_2}} = 0,14 \text{ mol de } Cl_2$$

Por tanto, **la presión es mayor en el recipiente que contiene gas hidrógeno** (el primero).

22. ¿Cuántos gramos de dióxido de carbono tendremos en un recipiente de 10 L si ejerce una presión de 1500 mm de Hg cuando se encuentra a 70 °C?

Pasamos las unidades de presión a atmósferas:

$$p = 1500\ \cancel{\text{mm de Hg}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{atm}}}{760\ \cancel{\text{mm de Hg}}} = 1,9737 \text{ atm}$$

A partir de la ecuación de estado de los gases ideales calculamos la cantidad de sustancia expresada en moles:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{1,9737\ \cancel{\text{atm}} \cdot 10\ \cancel{\text{L}}}{0,082 \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (70 + 273)\ \cancel{\text{K}}} = 0,7017 \text{ mol de } CO_2$$

Expresamos en gramos la cantidad de sustancia anterior:

$$M(CO_2) = 12,00 + 16,00 \cdot 2 = 44,00 \text{ g/mol}$$

$$0,7017\ \cancel{\text{mol de } CO_2} \cdot \frac{44,00 \text{ g de } CO_2}{1\ \cancel{\text{mol de } CO_2}} = 30,88 \text{ g de } CO_2 \approx \mathbf{30,9\ g\ de\ CO_2}$$

23. Calcula la presión que ejercen 3 mol de gas oxígeno en un recipiente de 15 L a 50 °C.

Teniendo en cuenta la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{3\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0,082 \dfrac{\text{atm} \cdot \cancel{\text{L}}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (50 + 273)\ \cancel{\text{K}}}{15\ \cancel{\text{L}}} = \mathbf{5,3\ atm}$$

24. Calcula la masa de 15 L de gas helio en condiciones estándar. ¿Y si el gas fuese cloro?

Para conocer la masa necesitamos saber la cantidad de sustancia en mol y relacionarla con los gramos.

Aplicamos la ecuación de estado de los gases ideales y despejamos la cantidad de sustancia:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T}$$

Como estamos trabajando en condiciones estándar:

$$p = 10^5 \text{ Pa} = 10^5 \cancel{\text{Pa}} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{1{,}01325 \cancel{\text{Pa}}} = 0{,}98692 \text{ atm}$$

$$\text{T} = 0\ °\text{C} = 273 \text{ K}$$

Sustituimos los datos en la expresión de la cantidad de sustancia:

$$n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{0{,}98692 \cancel{\text{atm}} \cdot 15 \cancel{\text{L}}}{0{,}082 \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot 273 \cancel{\text{K}}} = 0{,}6613 \text{ mol de He}$$

Expresamos en gramos los moles anteriores:

$$M(\text{He}) = 4{,}003 \text{ g/mol}$$

$$0{,}6613 \cancel{\text{mol de He}} \cdot \frac{4{,}003 \text{ g de He}}{1 \cancel{\text{mol de He}}} = \mathbf{2{,}647 \text{ g de He}}$$

Si el gas fuese cloro, también tendríamos 0,6613 mol. Expresamos en gramos:

$$M(\text{Cl}_2) = 35{,}5 \cdot 2 = 70{,}9 \text{ g/mol}$$

$$0{,}6613 \cancel{\text{mol de He}} \cdot \frac{70{,}9 \text{ g de Cl}_2}{1 \cancel{\text{mol de He}}} = \mathbf{46{,}89 \text{ g de Cl}_2}$$

ACTIVIDAD (página 59)

25. En un recipiente de 1 L se introducen 0,1 mol de gas H_2 a 27 °C. Calcula la presión que ejerce y compárala con la que ejercerían 0,1 mol de NH_3 en el mismo recipiente y a la misma temperatura. En la tabla del margen se muestran las constantes de Van der Waals de ambos gases.

Gas	a (atm · L² · mol⁻²)	b (L · mol⁻¹)
H_2	0,2452	0,0265
NH_3	4,225	0,0371

Aplicamos la ecuación de estado de los gases reales:

$$\left(p + \frac{a \cdot n^2}{V^2}\right) \cdot \left(V - n \cdot b\right) = n \cdot R \cdot T$$

Despejamos la presión:

$$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{\left(V - n \cdot b\right)} - \frac{a \cdot n^2}{V^2}$$

Sustituimos para cada gas:

$$p_{H_2} = \frac{0{,}1 \text{ mol} \cdot 0{,}082 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot 300 \text{ K}}{\left(1 \text{ L} - 0{,}1 \text{ mol} \cdot 0{,}0265 \frac{\text{L}}{\text{mol}}\right)} - \frac{0{,}2452 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}^2}{\text{mol}^2} \cdot \left(0{,}1 \text{ mol}\right)^2}{\left(1 \text{ L}\right)^2} = \mathbf{2{,}646 \text{ atm}}$$

$$p_{NH_3} = \frac{0{,}1 \text{ mol} \cdot 0{,}082 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot 300 \text{ K}}{\left(1 \text{ L} - 0{,}1 \text{ mol} \cdot 0{,}0371 \frac{\text{L}}{\text{mol}}\right)} - \frac{4{,}225 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}^2}{\text{mol}^2} \cdot \left(0{,}1 \text{ mol}\right)^2}{\left(1 \text{ L}\right)^2} = 2{,}427 \text{ atm}$$

Por tanto:

$$\frac{p_{H_2}}{p_{NH_3}} = \frac{2,646\ \text{atm}}{2,427\ \text{atm}} = \mathbf{1,015}$$

ACTIVIDADES (página 60)

26. Calcula la densidad del metano, CH_4, a 40 °C y a 3 atm de presión.

Calculamos la masa molar del metano:

$$M(CH_4) = 12,00 + 1,008 \cdot 4 = 16,032\ \text{g/mol}$$

A partir de la siguiente expresión podemos calcular la densidad de un gas:

$$d = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} = \frac{3\ \cancel{\text{atm}} \cdot 16,032\ \frac{\text{g}}{\cancel{\text{mol}}}}{0,082\ \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (40 + 273)\ \cancel{\text{K}}} = \mathbf{1,89\ \frac{g}{L}}$$

27. Calcula la densidad del metano en condiciones estándar.

Calculamos la masa molar del metano:

$$M(CH_4) = 12,00 + 1,008 \cdot 4 = 16,032\ \text{g/mol}$$

Como estamos trabajando en condiciones estándar:

$$p = 10^5\ \text{Pa} = 10^5\ \cancel{\text{Pa}} \cdot \frac{1\ \text{atm}}{1,01325 \cdot 10^5\ \cancel{\text{Pa}}} = 0,98692\ \text{atm}$$

$$T = 0\ °\text{C} = 273\ \text{K}$$

A partir de la siguiente expresión podemos calcular la densidad de un gas:

$$d = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} = \frac{0,98692\ \cancel{\text{atm}} \cdot 16,032\ \frac{\text{g}}{\cancel{\text{mol}}}}{0,082\ \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot 273\ \cancel{\text{K}}} = \mathbf{0,71\ \frac{g}{L}}$$

28. En una ampolla se ha introducido un gas cuya densidad, a 50 °C y 2,2 atm, es 6,7 g/L. Determina si se trata de dióxido de azufre, dióxido de carbono o trióxido de azufre.

Conocida la densidad de un gas en determinadas condiciones, podemos calcular su masa molar y así identificar de qué gas se trata:

$$d = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} \Rightarrow M = \frac{d \cdot R \cdot T}{p} = \frac{6,7\ \frac{\text{g}}{\cancel{\text{L}}} \cdot 0,082\ \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (50 + 273)\ \cancel{\text{K}}}{2,2\ \cancel{\text{atm}}} = 80,66\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

Comparamos con las masas molares de los gases:

$$M(SO_2) = 32,06 + 16,00 \cdot 2 = 64,06\ \text{g/mol}$$
$$M(CO_2) = 12,00 + 16,00 \cdot 2 = 44,00\ \text{g/mol}$$
$$M(SO_3) = 32,06 + 16,00 \cdot 3 = 80,06\ \text{g/mol}$$

El gas del problema es el **SO_3**.

29. La composición centesimal de un compuesto orgánico es 52,12 % de carbono, 13,13 % de hidrógeno y 34,75 % de oxígeno. Determina su fórmula sabiendo que su densidad, a 1,5 atm y 25 °C, es 2,85 g/L.

La expresión de la densidad nos permite calcular la masa molar:

$$d=\frac{p\cdot M}{R\cdot T}\quad\Rightarrow\quad M=\frac{d\cdot R\cdot T}{p}=\frac{2{,}85\ \dfrac{\text{g}}{\cancel{\text{L}}}\cdot 0{,}082\ \dfrac{\cancel{\text{atm}}\cdot\cancel{\text{L}}}{\cancel{\text{K}}\cdot\text{mol}}\cdot 298\ \cancel{\text{K}}}{1{,}5\ \cancel{\text{atm}}}=46{,}43\ \text{g/mol}$$

La composición centesimal determina la proporción en masa de cada elemento. Así, en 100 g del compuesto:

$$100\ \text{g del compuesto}\begin{cases}52{,}12\ \text{g de C}\\13{,}3\ \text{g de H}\\34{,}75\ \text{g de O}\end{cases}$$

Determinamos la cantidad, en mol, de cada elemento que corresponde a esa masa usando la masa atómica:

$$52{,}12\ \cancel{\text{g de C}}\cdot\frac{1\ \text{mol de C}}{12{,}00\ \cancel{\text{g de C}}}=4{,}343\ \text{mol de C}$$

$$13{,}3\ \cancel{\text{g de H}}\cdot\frac{1\ \text{mol de H}}{1{,}008\ \cancel{\text{g de H}}}=13{,}194\ \text{mol de H}$$

$$34{,}75\ \cancel{\text{g de O}}\cdot\frac{1\ \text{mol de O}}{16{,}00\ \cancel{\text{g de O}}}=2{,}172\ \text{mol de O}$$

La fórmula del compuesto será del tipo: $C_xH_yO_z$. Por tanto, la fórmula del compuesto es: $C_{4,343}H_{13,194}O_{2,172}$

Los subíndices deben ser números enteros sencillos que mantengan esta proporción, para encontrarlos dividimos por el número más pequeño:

$$C_{\frac{4,343}{2,172}}H_{\frac{13,194}{2,172}}O_{\frac{2,172}{2,172}}\rightarrow \mathbf{C_2H_6O}$$

Comprobamos si es la fórmula molecular del compuesto. Para ello calculamos su masa molar:

$$M(C_2H_6O)=(12{,}00\cdot 2+1{,}008\cdot 6+16{,}00)\ \text{g/mol}=46{,}048\ \text{g/mol}$$

La fórmula molar, en este caso, coincide con la fórmula empírica ya que la masa molar coincide con el valor obtenido de los datos de la densidad.

30. La densidad de un gas es 2,15 g/L a 25 °C y 1000 mm de Hg. ¿A qué temperatura se duplicará su densidad sin que varíe la presión?

Comparamos ambas densidades teniendo en cuenta que la presión no varía:

$$\left.\begin{aligned}d_1&=\frac{p\cdot M}{R\cdot T_1}\\ d_2&=\frac{p\cdot M}{R\cdot T_2}\end{aligned}\right\}\xrightarrow{d_2=2d_1}\frac{\cancel{p}\cdot\cancel{M}}{\cancel{R}\cdot T_2}=2\cdot\frac{\cancel{p}\cdot\cancel{M}}{\cancel{R}\cdot T_1}\Rightarrow\frac{1}{T_2}=\frac{2}{T_1}\Rightarrow T_2=\frac{T_1}{2}=\frac{(25+273)\ \text{K}}{2}=149\ \text{K}=\mathbf{-124\ °C}$$

ACTIVIDADES (página 62)

31. En tres recipientes distintos de 1 L de capacidad tenemos H_2, CO_2 y N_2, cada uno a la presión de 1 atm y todos a la misma temperatura. Metemos los tres gases en un recipiente de 1 L de capacidad a la misma temperatura. ¿Cuánto valdrá la presión ahora?

De acuerdo con la ley de Dalton:

$$p_T=p_{H_2}+p_{CO_2}+p_{N_2}=(1+1+1)\ \text{atm}=\mathbf{3\ atm}$$

32. En un recipiente de 1 L introducimos gas H_2 a la presión de 1 atm y en otro recipiente de 3 L introducimos CO_2, también a la presión de 1 atm. Ambos recipientes se encuentran a la misma temperatura. Metemos los dos gases en un recipiente de 4 L, también a la misma temperatura. ¿Cuánto valdrá la presión ahora?

Calculamos la presión que ejerce el hidrógeno en las nuevas condiciones con la ley general de los gases:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot V_2} = \frac{1\,\text{atm} \cdot 1\,\cancel{L} \cdot \cancel{T}}{\cancel{T} \cdot 4\,\cancel{L}} = 0{,}25\,\text{atm}$$

Calculamos la presión que ejerce el dióxido de carbono en las nuevas condiciones con la ley general de los gases:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot V_2} = \frac{1\,\text{atm} \cdot 3\,\cancel{L} \cdot \cancel{T}}{\cancel{T} \cdot 4\,\cancel{L}} = 0{,}75\,\text{atm}$$

De acuerdo con la Ley de Dalton, la presión de la mezcla de gases:

$$p_T = p_{H_2} + p_{CO_2} = 0{,}25\,\text{atm} + 0{,}75\,\text{atm} = \mathbf{1\,atm}$$

33. En una ampolla se introducen 20 g de gas H_2 y 50 g de gas N_2. Si el manómetro indica que la presión en la ampolla es de 1200 mm de Hg, ¿cuál es la presión que ejerce cada gas?

De acuerdo con la ley de Dalton de las presiones parciales:

$$M(\text{H}_2) = 2 \cdot 1{,}008 = 2{,}016\,\text{g/mol}$$

$$p_{\text{H}_2} = p_\text{T} \cdot \chi_{\text{H}_2} = p_\text{T} \cdot \frac{n_{\text{H}_2}}{n_{\text{H}_2} + n_{\text{N}_2}} = 1200\,\text{mm de Hg} \cdot \frac{\dfrac{20\,\text{g}}{2{,}016\,\text{g/mol}}}{\dfrac{20\,\text{g}}{2{,}016\,\text{g/mol}} + \dfrac{50\,\text{g}}{28{,}02\,\text{g/mol}}} = \mathbf{1017{,}06\,mm\,de\,Hg}$$

$$M(\text{N}_2) = 2 \cdot 14{,}01 = 28{,}02\,\text{g/mol}$$

$$p_{\text{N}_2} = p_\text{T} \cdot \chi_{\text{H}_2} = p_\text{T} \cdot \frac{n_{\text{N}_2}}{n_{\text{H}_2} + n_{\text{N}_2}} = 1200\,\text{mm de Hg} \cdot \frac{\dfrac{50\,\text{g}}{28{,}02\,\text{g/mol}}}{\dfrac{20\,\text{g}}{2{,}016\,\text{g/mol}} + \dfrac{50\,\text{g}}{28{,}02\,\text{g/mol}}} = \mathbf{182{,}94\,mm\,de\,Hg}$$

34. En un recipiente tenemos 5 g de gas H_2 y 5 g de gas N_2. La mezcla ejerce una presión de 800 mm de Hg. Calcula:

a) La presión parcial que ejerce cada componente de la mezcla.

b) La composición de la mezcla expresada como porcentaje en masa y como porcentaje en volumen.

a) De acuerdo con la ley de Dalton de las presiones parciales, para cada componente:

$$p_1 = p_\text{T} \cdot \chi_{\text{H}_2}$$

Para calcular las fracciones molares debemos conocer la cantidad de cada componente. Lo calculamos dividiendo la masa en gramos de cada uno entre su masa molar:

$$M(\text{H}_2) = 1{,}008 = 2{,}016\,\text{g/mol}$$

$$p_{\text{H}_2} = p_\text{T} \cdot \chi_{\text{H}_2} = p_\text{T} \cdot \frac{n_{\text{H}_2}}{n_{\text{H}_2} + n_{\text{N}_2}} = 800\,\text{mm de Hg} \cdot \frac{\dfrac{5\,\text{g}}{2{,}016\,\text{g/mol}}}{\dfrac{5\,\text{g}}{2{,}016\,\text{g/mol}} + \dfrac{5\,\text{g}}{28{,}02\,\text{g/mol}}} = \mathbf{746{,}3\,mm\,de\,Hg}$$

$$M(\text{N}_2) = 14{,}01 \cdot 2 = 28{,}02\,\text{g/mol}$$

$$p_{\text{N}_2} = p_\text{T} \cdot \chi_{\text{H}_2} = p_\text{T} \cdot \frac{n_{\text{N}_2}}{n_{\text{H}_2} + n_{\text{N}_2}} = 800\,\text{mm de Hg} \cdot \frac{\dfrac{5\,\text{g}}{28{,}02\,\text{g/mol}}}{\dfrac{5\,\text{g}}{2{,}016\,\text{g/mol}} + \dfrac{5\,\text{g}}{28{,}02\,\text{g/mol}}} = \mathbf{53{,}7\,mm\,de\,Hg}$$

b) Composición de la mezcla como porcentaje en masa: 50 % de cada uno, ya que tenemos la misma masa:

% en masa (H_2) = 50 %

% en masa (N_2) = 50 %

Composición de la mezcla como porcentaje en volumen: coincide con el porcentaje en número de partículas:

$$\%\ \text{en volumen}(H_2) = \frac{n_{H_2}}{n_{H_2} + n_{N_2}} \cdot 100 = \frac{\dfrac{5\ \text{g}}{2{,}016\ \text{g/mol}}}{\dfrac{5\ \text{g}}{2{,}016\ \text{g/mol}} + \dfrac{5\ \text{g}}{28{,}02\ \text{g/mol}}} \cdot 100 = \mathbf{93{,}29\ \%}$$

$$\%\ \text{en volumen}(N_2) = \frac{n_{N_2}}{n_{H_2} + n_{N_2}} \cdot 100 = \frac{\dfrac{5\ \text{g}}{28{,}02\ \text{g/mol}}}{\dfrac{5\ \text{g}}{2{,}016\ \text{g/mol}} + \dfrac{5\ \text{g}}{28{,}02\ \text{g/mol}}} \cdot 100 = \mathbf{6{,}71\ \%}$$

ACTIVIDADES FINALES (páginas 66)

Leyes de los gases. Ecuación general de los gases ideales

35. ¿En cuánto tiene que cambiar el volumen de un recipiente que contiene un gas si queremos que su presión se cuadruplique sin que varíe su temperatura?

De acuerdo con la ley de Boyle-Mariotte, a temperatura constante:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{p_2} = \frac{\cancel{p_1} \cdot V_1}{4\,\cancel{p_1}} = \frac{1}{4} V_1$$

El volumen se debe reducir a la cuarta parte.

36. En un recipiente de volumen variable tenemos un gas que ejerce una presión de 600 mm de Hg cuando el volumen es de 1,2 L. ¿Cuál será el volumen si la presión alcanza 1,25 atm sin que varíe su temperatura?

De acuerdo con la ley de Boyle-Mariotte, a temperatura constante:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

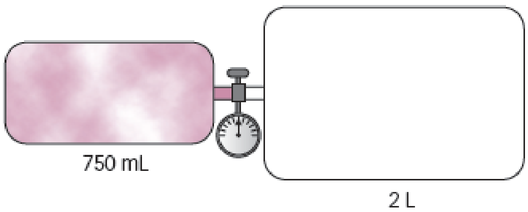
Pasamos las unidades de la presión en el estado 1 a atmósferas:

$$p_1 = 600\ \cancel{\text{mm de Hg}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{atm}}}{760\ \cancel{\text{mm de Hg}}} = 0{,}7895\ \text{atm}$$

Despejamos el volumen en el estado final de la ley de Boyle-Mariotte:

$$V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{p_2} = \frac{0{,}7895\ \cancel{\text{atm}} \cdot 1{,}2\ \text{L}}{1{,}25\ \cancel{\text{atm}}} = 0{,}758\ \text{L} = \mathbf{758\ mL}$$

37. En una ampolla de 750 mL tenemos un gas que ejerce una presión de 1,25 atm a 50 °C. Lo conectamos a una segunda ampolla de 2 L. ¿Qué presión leeremos ahora en el manómetro si no varía la temperatura?



De acuerdo con la ley de Boyle-Mariotte, a temperatura constante:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_2} = \frac{1{,}25\ \text{atm} \cdot 0{,}750\ \cancel{\text{L}}}{0{,}750\ \cancel{\text{L}} + 2\ \cancel{\text{L}}} = 0{,}34091\ \text{atm}$$

Expresamos esta presión en mm de Hg:

$$p_2 = 0{,}34091\ \cancel{\text{atm}} \cdot \frac{760\ \cancel{\text{mm de Hg}}}{1\ \cancel{\text{atm}}} = \mathbf{259\ mm\,de\,Hg}$$

38. Razona si es posible aumentar el volumen de un gas sin calentarlo.

De acuerdo con la ley de Boyle-Mariotte, a temperatura constante:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

Para que el V_2 aumente p_2 debe reducirse en la misma presión, ya que p y V son inversamente proporcionales.

39. Tenemos un gas encerrado en un recipiente rígido de 5 L. ¿En cuánto cambia su temperatura si su presión pasa de 300 mm de Hg a 600 mm de Hg?

De acuerdo con la ley de Gay-Lussac, a volumen constante:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{p_2 \cdot T_1}{p_1} = \frac{600\ \cancel{\text{mm de Hg}} \cdot T_1}{300\ \cancel{\text{mm de Hg}}} = 2T_1$$

Por tanto, **su temperatura absoluta se duplica**.

40. Tenemos un gas dentro de un cilindro de émbolo móvil. ¿Hay algún modo de reducir el volumen sin variar la presión ni empujar el émbolo?

De acuerdo con la ley de Charles, cuando la presión de un gas ideal se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a su temperatura absoluta:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Así, para que se reduzca el V_2 sin variar la presión hay que disminuir la temperatura T_2 del gas.

41. Una pieza de una máquina está formada por un pistón que tiene un gas en su interior. En un momento dado, el volumen del pistón es de 225 mL y la temperatura del gas es de 50 °C. ¿Cuánto debe cambiar la temperatura para que el volumen sea de 275 mL si la presión no varía?

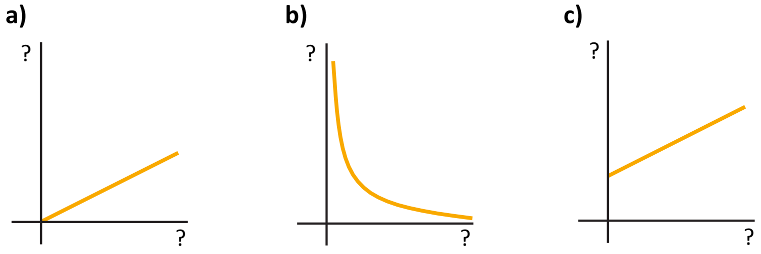
Según la ley de Charles:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{V_2 \cdot T_1}{V_1} = \frac{275\ \cancel{\text{mL}} \cdot (50 + 273)\ \text{K}}{225\ \cancel{\text{mL}}} = 394{,}\widehat{7}\ \text{K}$$

Entonces el incremento de temperatura del pistón debe ser de:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 394{,}\widehat{7}\ \text{K} - (50 + 273)\ \text{K} = \mathbf{71{,}\widehat{7}\ K}$$

42. Las tres gráficas siguientes pueden representar la variación de la presión frente a la temperatura de un gas cuando experimenta transformaciones a volumen constante. Indica qué magnitud se debe representar en cada eje y sus unidades.



Para un gas ideal que sufre transformaciones a volumen constante, la presión es directamente proporcional a su temperatura absoluta:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = \text{cte.} \qquad \text{(Ley de Gay-Lussac)}$$

- En la gráfica a) se representa en un eje *p*; y en el otro, *T* (temperatura absoluta).
- La gráfica b) representa dos magnitudes inversamente proporcionales. En un eje se debe representar *p*, y en el otro, $1/T$ (o viceversa).
- La gráfica c) representa dos magnitudes directamente proporcionales con ordenada en el origen. En el eje de ordenadas se debe representar *p*, y en el de abscisas, la temperatura centígrada. *p* tiende a 0 cuando $T = -273$ °C.

43. Justifica si son ciertas las siguientes afirmaciones:

a) Cuando un gas que ocupa 300 cm³ se comprime hasta ocupar 100 cm³ sin que varíe su temperatura, triplica la presión que ejerce.

b) Cuando un gas que se encuentra a 10 °C se calienta hasta que esté a 20 °C sin que varíe su presión, su volumen se duplica.

c) Cuando un gas que ocupa 300 cm³ se comprime hasta ocupar 100 cm³ sin que varíe su presión, triplica la temperatura a la que estaba.

a) **Cierta**. De acuerdo con la ley de Boyle-Mariotte, a temperatura constante:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_2} = \frac{p_1 \cdot 300\ \cancel{\text{cm}^3}}{100\ \cancel{\text{cm}^3}} = 3\,p_1$$

b) **Falsa**. Según la ley de Charles, a presión constante:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{V_1 \cdot T_2}{T_1} = \frac{V_1 \cdot (10 + 273)\ \cancel{\text{K}}}{(20 + 273)\ \cancel{\text{K}}} = \frac{1}{2} V_1$$

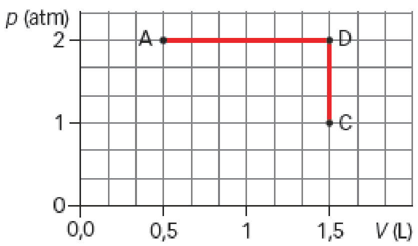
Su volumen de reduce a la mitad.

c) **Falsa**. Según la ley de Charles, a presión constante:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{V_2 \cdot T_1}{V_1} = \frac{100\ \cancel{\text{cm}^3} \cdot T_1}{300\ \cancel{\text{cm}^3}} = \frac{1}{3} T_1$$

Su temperatura se reduce a la tercera parte.

44. Un gas ideal, cuya temperatura es 27 °C, se encuentra en las condiciones del punto A. Determina su temperatura en los puntos D y C.



La gráfica nos permite leer el valor de *p* y *V* de cada estado. Además, conocemos la temperatura en A.

La ecuación general de los gases ideales permite obtener la temperatura en B y C comparando estados:

$$\frac{p_A \cdot V_A}{T_A} = \frac{p_D \cdot V_D}{T_D}$$

Despejamos, sustituimos y operamos:

$$T_D = \frac{p_D \cdot V_D}{p_A \cdot V_A} \cdot T_A = \frac{2\ \cancel{\text{atm}} \cdot 1{,}5\ \cancel{\text{L}}}{2\ \cancel{\text{atm}} \cdot 0{,}5\ \cancel{\text{L}}} \cdot (27 + 273)\text{K} = 900\ \text{K} = \mathbf{627\ °C}$$

De nuevo:

$$\frac{p_D \cdot V_D}{T_D} = \frac{p_C \cdot V_C}{T_C}$$

Despejamos, sustituimos y operamos:

$$T_C = \frac{p_C \cdot V_C}{p_D \cdot V_D} \cdot T_D = \frac{1\ \cancel{\text{atm}} \cdot 1{,}5\ \cancel{\text{L}}}{2\ \cancel{\text{atm}} \cdot 1{,}5\ \cancel{\text{L}}} \cdot 900\ \text{K} = 450\ \text{K} = \mathbf{177\ °C}$$

ACTIVIDADES FINALES (páginas 67)

45. En un recipiente de 500 mL tenemos un gas que ejerce una presión de 1500 mm de Hg cuando se encuentra a 80 °C. Calcula qué volumen ocupará el gas si lo enfriamos hasta 40 °C y hacemos que la presión sea de 0,9 atm.

Pasamos las unidades de la presión en el estado 1 a atmósferas:

$$p_1 = 1500\ \cancel{\text{mm de Hg}} \cdot \frac{1\ \text{atm}}{760\ \cancel{\text{mm de Hg}}} = 1{,}97368\ \text{atm}$$

Teniendo en cuenta la ecuación general de los gases ideales:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{p_2 \cdot T_1} = \frac{1{,}97368\ \cancel{\text{atm}} \cdot 500\ \text{mL} \cdot (40+273)\ \cancel{\text{K}}}{0{,}9\ \cancel{\text{atm}} \cdot (80+273)\ \cancel{\text{K}}} = \mathbf{972{,}24\ mL}$$

46. En un recipiente de 2 L se ha colocado un gas a 50 °C que ejerce una presión de 4 atm. Determina qué presión ejercerá el gas si lo calentamos hasta 100 °C y hacemos que el volumen del recipiente se reduzca hasta 750 mL.

Teniendo en cuenta la ecuación general de los gases ideales:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{V_2 \cdot T_1} = \frac{4\ \text{atm} \cdot 2\ \cancel{\text{L}} \cdot (100+273)\ \cancel{\text{K}}}{0{,}750\ \cancel{\text{L}} \cdot (50+273)\ \cancel{\text{K}}} = \mathbf{12{,}32\ atm}$$

Ecuación de estado de los gases ideales

47. Determina:

a) ¿Qué masa de gas metano, CH_4, tenemos en un recipiente de 8 L si está a la presión de 1140 mm de Hg y a 117 °C?

b) ¿Cuántas moléculas de gas metano son?

c) ¿Cuántos átomos de hidrógeno hay?

d) ¿Cuántos moles de carbono hay?

a) Para conocer la masa necesitamos saber la cantidad de sustancia en mol y relacionarlo con los gramos.

Aplicamos la ecuación de estado de los gases ideales y despejamos la cantidad de sustancia:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T}$$

Las condiciones de presión y temperatura son:

$$p = 1140\ \cancel{\text{mm de Hg}} \cdot \frac{1\ \text{atm}}{760\ \cancel{\text{mm de Hg}}} = 1{,}5\ \text{atm}$$

$$\text{T} = 117\ °\text{C} = (117+273)\ \text{K} = 390\ \text{K}$$

Sustituimos los datos en la expresión de la cantidad de sustancia:

$$n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{1,5\,\cancel{\text{atm}} \cdot 8\,\cancel{\text{L}}}{0,082\,\frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot 390\,\cancel{\text{K}}} = 0,375 \text{ mol de } CH_4$$

Expresamos en gramos la cantidad de sustancia anterior:

$$M(CH_4) = 12,00 + 1,008 \cdot 4 = 16,032 \text{ g/mol}$$

$$0,375\,\cancel{\text{mol de } CH_4} \cdot \frac{16,032 \text{ g de } CO_2}{1\,\cancel{\text{mol de } CH_4}} = 6,016 \text{ g de } CO_2 \approx \mathbf{6\ g\ de\ CH_4}$$

b) Hallamos el número de moléculas de CH_4:

$$0,375\,\cancel{\text{mol de } CH_4} \cdot \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ moléculas de } CH_4}{1\,\cancel{\text{mol de } CH_4}} = \mathbf{2,26 \cdot 10^{23}\ moléculas\ de\ CH_4}$$

c) Calculamos el número de átomos de hidrógeno partiendo del resultado anterior:

$$2,26 \cdot 10^{23}\,\cancel{\text{moléculas de } CH_4} \cdot \frac{4 \text{ átomos de H}}{1\,\cancel{\text{molécula de } CH_4}} = \mathbf{9,04 \cdot 10^{23}\ átomos\ de\ H}$$

d) El número de moles de carbono será:

$$0,375\,\cancel{\text{mol de } CH_4} \cdot \frac{1 \text{ mol de C}}{1\,\cancel{\text{mol de } CH_4}} = \mathbf{0,375\ mol\ de\ C}$$

48. ¿Cuál es la temperatura de un recipiente de 8 L que contiene 7 g de gas nitrógeno a una presión de 650 mm de Hg?

Expresamos la presión en atmósferas:

$$p = 650\,\cancel{\text{mm de Hg}} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{760\,\cancel{\text{mm de Hg}}} = 0,855 \text{ atm}$$

Hallamos la cantidad de sustancia:

$$M(N_2) = 14,01 \cdot 2 = 28,02 \text{ g/mol}$$

$$n = \frac{m}{M} = \frac{7\,\cancel{\text{g}}}{28,02\,\frac{\cancel{\text{g}}}{\text{mol}}} = 0,2499 \text{ mol}$$

A partir de la ecuación de estado de los gases ideales despejamos la temperatura y la calculamos:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{p \cdot V}{n \cdot R} = \frac{0,855\,\cancel{\text{atm}} \cdot 8\,\cancel{\text{L}}}{0,2499\,\cancel{\text{mol}} \cdot 0,082\,\frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \text{K}}} = 334 \text{ K} = \mathbf{61\ °C}$$

49. Una bombona de butano, C_4H_{10}, tiene una capacidad de 26 L, y cuando está llena su masa es 12,5 kg mayor que cuando está vacía. ¿Qué presión ejercería el butano que hay en su interior si estuviese en fase gaseosa? Consideramos que la temperatura es de 20 °C.

Hallamos la masa molar del butano y calculamos la cantidad de sustancia:

$$M(C_4H_{10}) = 12,00 \cdot 4 + 1,008 \cdot 10 = 58,08 \text{ g/mol}$$

$$n = \frac{m}{M} = \frac{12,5 \cdot 10^3\,\cancel{\text{g}}}{58,08\,\frac{\cancel{\text{g}}}{\text{mol}}} = 215,22 \text{ mol}$$

A partir de la ecuación de estado de los gases ideales despejamos la presión y la calculamos:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{215{,}22\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082\ \dfrac{\text{atm} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \text{K}}\,(20 + 73)\ \cancel{\text{K}}}{26\ \cancel{\text{L}}} = \mathbf{198{,}9\ atm}$$

50. **Decimos que una bombona de butano, C_4H_{10}, se ha consumido cuando ya no sale gas de su interior. Eso sucede cuando la presión en su interior es igual a la presión atmosférica. ¿Qué masa de butano queda en el interior de una bombona vacía si la temperatura de la cocina es 20 °C?**

Aplicamos la ecuación de estado de los gases ideales y despejamos la cantidad de sustancia:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{1\ \cancel{\text{atm}} \cdot 26\ \cancel{\text{L}}}{0{,}082\ \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (20 + 273)\ \cancel{\text{K}}} = 1{,}0822\ \text{mol de } C_4H_{10}$$

Expresamos en gramos los moles anteriores:

$$M(C_4H_{10}) = 12{,}00 \cdot 4 + 1{,}008 \cdot 10 = 58{,}08\ \text{g/mol}$$

$$1{,}0822\ \cancel{\text{mol de } C_4H_{10}} \cdot \frac{58{,}08\ \text{g de } C_4H_{10}}{1\ \cancel{\text{mol de } C_4H_{10}}} = \mathbf{62{,}85\ g\ de\ C_4H_{10}}$$

51. **En dos recipientes iguales y a la misma temperatura se introducen 5 g de gas helio y 5 g de gas dióxido de carbono. Determina en cuál de los dos recipientes será mayor la presión.**

De acuerdo con la ecuación de los gases ideales, si *V* y *T* son iguales, ejercerá mayor presión el gas que tenga mayor cantidad de sustancia:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Hallamos la cantidad de sustancia de cada gas:

$$M(\text{He}) = 4{,}003\ \text{g/mol}$$

$$5\ \cancel{\text{g de He}} \cdot \frac{1\ \text{mol de He}}{4{,}003\ \cancel{\text{g de He}}} = 1{,}25\ \text{mol de He}$$

$$M(CO_2) = 12{,}00 + 16{,}00 \cdot 2 = 44{,}00\ \text{g/mol}$$

$$5\ \cancel{\text{g de } CO_2} \cdot \frac{1\ \text{mol de } CO_2}{44{,}00\ \cancel{\text{g de } CO_2}} = 0{,}11\ \text{mol de } CO_2$$

Por tanto, la presión será mayor **en el recipiente de helio.**

52. **En un globo hemos introducido 5 g de gas helio.**
¿Cuál será el volumen del globo si la presión en el interior es de 1,5 atm y la temperatura es de 20 °C?

Calculamos la cantidad de sustancia:

$$M(\text{He}) = 4{,}003\ \text{g/mol}$$

$$n = \frac{m}{M} = \frac{5\ \cancel{\text{g}}}{4{,}003\ \dfrac{\cancel{\text{g}}}{\text{mol}}} = 1{,}249\ \text{mol}$$

Aplicamos la ecuación de estado de los gases ideales y despejamos el volumen

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{1{,}249\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082\ \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (20 + 273)\ \cancel{\text{K}}}{1{,}5\ \cancel{\text{atm}}} = \mathbf{20\ L}$$

Densidad de un gas

53. La densidad de un gas en condiciones estándar es 1,25 g/L. Determina si el gas es monóxido de carbono, monóxido de azufre o amoniaco.

Calculamos la masa molar del monóxido de carbono y del amoniaco:

$$M(\text{CO}) = 12{,}00 + 16{,}00 = 28{,}00 \text{ g/mol}$$
$$M(\text{NH}_3) = 14{,}01 + 1{,}008 \cdot 3 = 17{,}034 \text{ g/mol}$$

Como estamos trabajando en condiciones estándar:

$$p = 10^5 \text{ Pa} = 10^5 \cancel{\text{Pa}} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{1{,}01325 \cdot 10^5 \cancel{\text{Pa}}} = 0{,}98692 \text{ atm}$$
$$T = 0 \text{ °C} = 273 \text{ K}$$

La expresión de la densidad nos permite calcular la masa molar:

$$d = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} \Rightarrow M = \frac{d \cdot R \cdot T}{p} = \frac{1{,}25 \dfrac{\text{g}}{\cancel{\text{L}}} \cdot 0{,}082 \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\cancel{\text{K}} \cdot \text{mol}} \cdot 273 \cancel{\text{K}}}{0{,}98692 \cancel{\text{atm}}} = 28{,}35 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \approx 28{,}00 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = M(\text{CO})$$

Por tanto, el gas es **monóxido de carbono, CO.**

54. La densidad de un gas en condiciones estándar es 1,42 g/L.
Calcula la masa de 750 mL de ese gas a 3,5 atm y 17 °C.

La densidad del gas en condiciones estándar nos permite conocer su masa molar.

$$d = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} \Rightarrow M = \frac{d \cdot R \cdot T}{p} = \frac{1{,}42 \dfrac{\text{g}}{\cancel{\text{L}}} \cdot 0{,}082 \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\cancel{\text{K}} \cdot \text{mol}} \cdot 273 \cancel{\text{K}}}{0{,}98692 \cancel{\text{atm}}} = 32{,}21 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

A partir de la masa molar podemos conocer la densidad del gas en las nuevas condiciones:

$$d = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} = \frac{3{,}5 \cancel{\text{atm}} \cdot 32{,}21 \dfrac{\text{g}}{\cancel{\text{mol}}}}{0{,}082 \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{K}} \cdot \text{mol}} \cdot (17 + 273) \cancel{\text{K}}} = 4{,}74 \frac{\text{g}}{\text{L}}$$

Por último, teniendo en cuenta la densidad calculada determinamos la masa correspondiente a 750 mL:

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow m = d \cdot V = 4{,}74 \frac{\text{g}}{\cancel{\text{L}}} \cdot 0{,}750 \cancel{\text{L}} = \mathbf{3{,}56 \text{ g}}$$

55. Calcula la densidad del monóxido de dinitrógeno en condiciones estándar.
En una ampolla tenemos monóxido de dinitrógeno a una presión de 1000 mm de Hg.
¿A qué temperatura su densidad será de 2,15 g/L?

Calculamos la masa molar del monóxido de dinitrógeno:

$$M(\text{N}_2\text{O}) = 14{,}01 \cdot 2 + 16{,}00 = 44{,}02 \text{ g/mol}$$

Como estamos trabajando en condiciones estándar:

$$p = 10^5 \text{ Pa} = 10^5 \cancel{\text{Pa}} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{1{,}01325 \cdot 10^5 \cancel{\text{Pa}}} = 0{,}98692 \text{ atm}$$
$$T = 0 \text{ °C} = 273 \text{ K}$$

A partir de la siguiente expresión podemos calcular la densidad del gas:

$$d = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} = \frac{0{,}98692\ \cancel{\text{atm}} \cdot 44{,}02\ \dfrac{\text{g}}{\cancel{\text{mol}}}}{0{,}082\ \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot 273\ \cancel{\text{K}}} = \mathbf{1{,}94}\ \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{L}}$$

Hallamos la temperatura a la que la densidad será de 2,15 g/L para la presión dada:

$$p = 1000\ \cancel{\text{mm de Hg}} \cdot \frac{1\ \text{atm}}{760\ \cancel{\text{mm de Hg}}} = 1{,}3158\ \text{atm}$$

$$d = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} \Rightarrow T = \frac{p \cdot M}{d \cdot R} = \frac{1{,}3158\ \cancel{\text{atm}} \cdot 44{,}02\ \dfrac{\cancel{\text{g}}}{\cancel{\text{mol}}}}{2{,}15\ \dfrac{\cancel{\text{g}}}{\cancel{\text{L}}} \cdot 0{,}082\ \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \text{K}}} = 328{,}5\ \text{K} = \mathbf{55{,}5\ °C}$$

ACTIVIDADES FINALES (páginas 68)

Mezclas de gases. Ley de Dalton de las presiones parciales

56. En una bombona tenemos una mezcla de gas hidrógeno y gas nitrógeno al 50 % en volumen. Si la presión de la mezcla es de 800 mm de Hg, ¿cuál es la presión parcial que ejerce cada gas?

El porcentaje en volumen de la mezcla coincide con el porcentaje del número de partículas:

$$\%V_{H_2} = \chi_{H_2} \cdot 100 = \frac{n_{H_2}}{n_{H_2} + n_{N_2}} \cdot 100 = 50\,\% \Rightarrow \chi_{H_2} = 0{,}50$$

De acuerdo con la ley de Dalton de las presiones parciales:

$$p_{H_2} = p_T \cdot \chi_{H_2} = p_T \cdot \frac{n_{H_2}}{n_{H_2} + n_{N_2}} = 800\ \text{mm de Hg} \cdot 0{,}50 = 400\ \text{mm de Hg}$$

Análogamente:

$$\%V_{N_2} = 50\,\% \Rightarrow \chi_{N_2} = 0{,}50 \Rightarrow p_{N_2} = p_{H_2} = \mathbf{400\ mm\ de\ Hg}$$

57. En un recipiente tenemos 3,2 g de oxígeno que ejercen una presión de 500 mm de Hg. Sin que varíen la temperatura ni el volumen, añadimos al mismo recipiente 4,2 g de gas hidrógeno. ¿Cuál será el valor de la presión ahora?

De acuerdo con la ley de Dalton de las presiones parciales:

$$M(O_2) = 16{,}00 \cdot 2 = 32{,}00\ \text{g/mol}$$
$$M(H_2) = 1{,}008 \cdot 2 = 2{,}016\ \text{g/mol}$$

$$p_{O_2} = p_T \cdot \chi_{O_2} \Rightarrow p_T = \frac{p_{O_2}}{\chi_{O_2}} = \frac{500\ \text{mm de Hg}}{\dfrac{n_{O_2}}{n_{O_2} + n_{H_2}}} = \frac{500\ \text{mm de Hg}}{\dfrac{\dfrac{3{,}2\ \text{g}}{32{,}00\ \text{g/mol}}}{\dfrac{3{,}2\ \text{g}}{32{,}00\ \text{g/mol}} + \dfrac{4{,}2\ \text{g}}{2{,}016\ \text{g/mol}}}} = \mathbf{11\,000\ mm\ de\ Hg}$$

58. En una bombona tenemos una mezcla de gas hidrógeno y gas nitrógeno al 50 % en masa. Si la presión de la mezcla es de 800 mm de Hg, ¿cuál es la presión parcial que ejerce cada gas?

Como el porcentaje en masa de la mezcla es del 50 %:

$$M(H_2) = 1{,}008 \cdot 2 = 2{,}016\ \text{g/mol}$$
$$M(N_2) = 14{,}01 \cdot 2 = 28{,}02\ \text{g/mol}$$

Como el porcentaje en masa de la mezcla es del 50 %:

$$\%\, m_{H_2} = \frac{m_{H_2}}{m_{H_2} + m_{N_2}} \cdot 100 = 50\,\%$$
$$\%\, m_{N_2} = \frac{m_{N_2}}{m_{H_2} + m_{N_2}} \cdot 100 = 100\,\% - \%\, m_{H_2} = 50\,\%$$
$$\frac{m_{H_2}}{m_{H_2} + m_{N_2}} = \frac{m_{N_2}}{m_{H_2} + m_{N_2}} \quad \Rightarrow \quad m_{H_2} = m_{N_2} = m$$

De acuerdo con la ley de Dalton de las presiones parciales:

$$p_{H_2} = p_T \cdot \chi_{H_2} = p_T \cdot \frac{n_{H_2}}{n_{H_2} + n_{N_2}} = p_T \cdot \frac{\dfrac{m}{2{,}016\ \text{g/mol}}}{\dfrac{m}{2{,}016\ \text{g/mol}} + \dfrac{m}{28{,}02\ \text{g/mol}}} = \mathbf{746{,}30\ mm\ de\ Hg}$$

Análogamente:

$$p_{N_2} = p_T \cdot \chi_{N_2} = p_T \cdot \frac{n_{N_2}}{n_{H_2} + n_{N_2}} = p_T \cdot \frac{\dfrac{m}{28{,}02\ \text{g/mol}}}{\dfrac{m}{2{,}016\ \text{g/mol}} + \dfrac{m}{28{,}02\ \text{g/mol}}} = \mathbf{53{,}70\ mm\ de\ Hg}$$

Ampliación (página 68)

59. En el laboratorio tenemos una bombona de 5 L que contiene oxígeno a la presión de 7 atm. Abrimos la bombona y dejamos que salga el gas hasta que la presión en su interior es de 1 atm. ¿Cuánto ha disminuido la masa de la bombona si la temperatura se ha mantenido en 20 °C?

Para conocer la masa necesitamos saber la cantidad de sustancia, en mol, y relacionarla con la masa, en gramos. Con la ecuación de estado de los gases ideales calculamos la cantidad de oxígeno que hay en el interior de la bombona antes y después de abrirla:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T}$$

Antes de abrir la bombona:

$$n = \frac{7\ \cancel{\text{atm}} \cdot 5\ \cancel{\text{L}}}{0{,}082 \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (273 + 20)\ \cancel{\text{K}}} = 1{,}46\ \text{mol de } O_2$$

Después de abrir la bombona:

$$n = \frac{1\ \cancel{\text{atm}} \cdot 5\ \cancel{\text{L}}}{0{,}082 \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (20 + 273)\ \cancel{\text{K}}} = 0{,}21\ \text{mol de } O_2$$

La diferencia serán los moles de oxígeno que salieron de la bombona:

$$n = 1{,}46\ \text{molde } O_2 - 0{,}21\ \text{molde } O_2 = 1{,}25\ \text{molde } O_2$$

Calculamos la masa del oxígeno perdido:

$$M(O_2) = 16,00 \cdot 2 = 32,00 \text{ g/mol}$$

$$1,25 \cancel{\text{ mol de } O_2} \cdot \frac{32,00 \text{ g de } O_2}{1 \cancel{\text{ mol de } O_2}} = \mathbf{40 \text{ g de } O_2}$$

60. **El acetileno es un gas que se utiliza como combustible en los sopletes de soldadura. En su composición interviene un 92,3 % de C y un 7,7 % de H. Determina la fórmula del acetileno si al introducir 4,15 g en una ampolla de 1,5 L a 70 °C hay 3 atm de presión.**

La composición centesimal nos permitirá conocer la fórmula empírica. Con los datos que se refieren al estado del gas calculamos su masa molar y, con ello, su fórmula molecular.

La composición centesimal determina la proporción en masa de cada elemento. Así, en 100 g del compuesto:

$$100 \text{ g del compuesto} \begin{cases} 92,3 \text{ g de C} \\ 7,7 \text{ g de H} \end{cases}$$

Determinamos los moles de cada elemento que representa esa cantidad usando la masa atómica:

$$92,3 \cancel{\text{ g de C}} \cdot \frac{1 \text{ mol de C}}{12,00 \cancel{\text{ g de C}}} = 7,69 \text{ mol de C}$$

$$7,7 \cancel{\text{ g de H}} \cdot \frac{1 \text{ mol de H}}{1,008 \cancel{\text{ g de H}}} = 7,64 \text{ mol de H}$$

La fórmula empírica del compuesto será del tipo: $C_xH_yO_z$. Por tanto, la fórmula del compuesto es: $C_{7,69}H_{7,64}$.

Los subíndices deben ser números enteros sencillos que mantengan esta proporción, para encontrarlos dividimos por el número más pequeño:

$$C_{\frac{7,69}{7,64}}H_{\frac{7,64}{7,64}} \Rightarrow CH$$

Determinamos la masa molar correspondiente a esta fórmula:

$$M(CH) = 12,00 + 1,008 = 13,008 \text{ g/mol}$$

Hallamos la masa molar del acetileno aplicando la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \Rightarrow M = \frac{m \cdot R \cdot T}{p \cdot V}$$

$$M = \frac{4,15 \text{ g} \cdot 0,082 \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (70 + 273) \cancel{\text{K}}}{3 \cancel{\text{ atm}} \cdot 1,5 \cancel{\text{ L}}} = 25,94 \text{ g/mol}$$

Determinamos la relación entre ambas masas molares:

$$\frac{25,94 \text{ g/mol}}{13,008 \text{ g/mol}} \approx 2$$

Por tanto, la fórmula molecular del acetileno es: $\mathbf{C_2H_2}$

61. **En un recipiente cerrado tenemos 0,5 g de gas hidrógeno a 150 °C y 2 atm. A continuación, y sin modificar el volumen ni la temperatura, añadimos 0,1 mol de oxígeno.**

a) **Calcula la presión que ejerce la mezcla.**

b) **Los dos gases reaccionan para dar agua (vapor), hasta que se consume todo el oxígeno. Calcula la presión en el recipiente al finalizar el proceso, suponiendo que no cambia la temperatura ni el volumen.**

a) A partir de la ley de Dalton de las presiones parciales:

$$p_T = p_{H_2} + p_{O_2} \quad \text{donde} \quad p_{O_2} = \frac{n_{O_2}}{n_T} \cdot p_T = \frac{0{,}1}{0{,}1 + 0{,}25} \cdot p_T = 0{,}28 \cdot p_T$$

Despejamos y calculamos la presión total:

$$p_T = p_{H_2} + \frac{n_{O_2}}{n_T} \cdot p_T \quad \Rightarrow \quad p_T = \frac{p_{H_2}}{\left(1 - \frac{n_{O_2}}{n_T}\right)} = \frac{2\,\text{atm}}{\left(1 - \frac{0{,}1\ \text{mol}}{(0{,}1 + 0{,}25)\text{mol}}\right)} = \mathbf{2{,}8\ atm}$$

b) A partir de la ecuación de los gases ideales, como el volumen permanece constante, con los datos iniciales, calculamos el volumen final de la mezcla:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{0{,}25\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082 \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (150 + 273)\ \cancel{\text{K}}}{2\ \cancel{\text{atm}}} = 4{,}34\ \text{L}$$

Calculamos los moles que tenemos al final del proceso. Para ello, escribimos la reacción:

	$2H_2$	$+ O_2$	$\rightarrow 2H_2O$
Inicial	0,25 mol	0,1 mol	--
Reaccionan	0,2 mol	0,1 mol	--
Final	**0,05 mol**	**--**	**0,2 mol**

Al finalizar el proceso tenemos 0,05 mol de H_2 y 0,2 mol de H_2O. Sustituimos en la ecuación de los gases ideales, despejamos la presión y calculamos:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{(0{,}05 + 0{,}2)\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082 \frac{\text{atm} \cdot \cancel{\text{L}}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (150 + 273)\ \cancel{\text{K}}}{4{,}34\ \cancel{\text{L}}} = \mathbf{2\ atm}$$

QUÍMICA EN TU VIDA (página 70)

INTERPRETA

1. ¿Por qué hay que medir la presión en frío?

Debemos medir la presión de los neumáticos en frío para tener un valor fiable que comparar con el otorgado por el fabricante.

La presión de un gas se ve afectada por la temperatura. Como el volumen de los neumáticos es constante, según la ley de Gay-Lussac, *p* y *T* son directamente proporcionales:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

Por este motivo, si medimos la presión tras un largo viaje, los neumáticos estarán calientes, y el valor de presión obtenido será superior al que obtendríamos en la medida en frío.

2. Imagina que inflamos un neumático a una temperatura ambiente de 20 °C con 2,2 atm de presión.

a) ¿Cuál será la presión si el neumático alcanza una temperatura de 50 °C?

b) ¿Qué ocurrirá cuando el neumático se enfríe de nuevo?

a) De acuerdo con la ley de Gay-Lussac, a volumen constante:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad p_2 = \frac{p_1 \cdot T_2}{T_1} = \frac{2{,}2\,\text{atm} \cdot (50 + 273)\ \cancel{\text{K}}}{(20 + 273)\ \cancel{\text{K}}} = \mathbf{2{,}4\ atm}$$

b) Cuando el neumático se vuelva a enfriar, la presión disminuirá.

REFLEXIONA

3. Si ajustamos la presión de los neumáticos en caliente, ¿estaremos usando una presión mayor o menor de la que indica el fabricante?

Estaremos tomando como referencia una presión mayor que la indicada por el fabricante para los neumáticos en frío, puesto que al aumentar la temperatura de un gas, aumenta su presión (p y T son directamente proporcionales).

USA LAS TIC

4. Los manómetros utilizados para medir la presión de los neumáticos emplean como unidad el kg/cm², es decir, la presión que ejerce el peso de una masa de un kilogramo actuando sobre una superficie de 1 cm². Usa una hoja de cálculo para establecer una equivalencia entre esta unidad y la atmósfera (atm).

Una posible manera de presentar la hoja de cálculo:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			CONVERSIÓN DE UNIDADES DE PRESIÓN				
3		Unidades	kg/cm^2	N/cm^2	Pa (N/m^2)	atm	
4			1	10	100000	1	
5			2	20	200000	2	
6			3	30	300000	3	
7			4	40	400000	4	
8			5	50	500000	5	
9			6	60	600000	6	
10			7	70	700000	7	
11			8	80	800000	8	
12			9	90	900000	9	
13			10	100	1000000	10	
14							

Los datos y las fórmulas:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			CONVERSIÓN DE UNIDADES DE PRESIÓN				
3		Unidades	kg/cm^2	N/cm^2	Pa (N/m^2)	atm	
4			1	=C4*10	=D4*10^4	=E4/10^5	
5			2	=C5*10	=D5*10^4	=E5/10^5	
6			3	=C6*10	=D6*10^4	=E6/10^5	
7			4	=C7*10	=D7*10^4	=E7/10^5	
8			5	=C8*10	=D8*10^4	=E8/10^5	
9			6	=C9*10	=D9*10^4	=E9/10^5	
10			7	=C10*10	=D10*10^4	=E10/10^5	
11			8	=C11*10	=D11*10^4	=E11/10^5	
12			9	=C12*10	=D12*10^4	=E12/10^5	
13			10	=C13*10	=D13*10^4	=E13/10^5	
14							

OPINA

5. ¿Crees que todos los vehículos deberían llevar sensores que detecten automáticamente una alteración en la presión del aire de los neumáticos? Ten en cuenta los costes asociados y las ventajas de esta medida.

Por un lado, si todos los vehículos llevasen sensores de presión de neumáticos, aumentaría la seguridad en el vehículo (al disminuir el número de pinchazos) y la comodidad de los pasajeros, se reduciría el consumo de combustible (lo que repercutiría directamente en un ahorro económico), y se alargaría la vida de los neumáticos (suponiendo también un ahorro económico a largo plazo).

Sin embargo, por otro lado, puede que esta prestación añadida suponga un coste elevado que se puede evitar simplemente realizando un correcto mantenimiento del coche. Así, se debe comprobar la presión de los neumáticos periódicamente, sobre todo con el cambio de invierno al verano y viceversa, ya que, como hemos visto, la temperatura desempeña un papel fundamental en la presión de los neumáticos. Además, siempre es recomendable medir la presión de los neumáticos antes de emprender un viaje largo, ajustándola si fuera necesario.

Por tanto, de forma individual y responsable, cada conductor debería evaluar si le merece la pena o no adquirir el vehículo con esta nueva prestación, teniendo en cuenta siempre la importancia de la seguridad en el vehículo, tanto la de él mismo como la de los acompañantes.

3

Disoluciones

Disoluciones

3

PARA COMENZAR (página 71)

- **¿Reconoces el instrumental de la fotografía? Si no es así, investiga en Internet qué nombre tiene cada instrumento.**

  En la fotografía aparece un frasco de reactivo químico (ácido clorhídrico) con su correspondiente etiqueta, dos matraces aforados (uno de 1000 mL y otro de 250 mL), una pipeta graduada y dos cuentagotas.

- **Repasa, de cursos anteriores, cuáles son las normas básicas de seguridad a seguir en un laboratorio.**

  Como ya se vio en cursos anteriores, debemos tener en cuenta ciertas normas de seguridad en el trabajo en el laboratorio:

  1. Observa dónde están las salidas y los equipos de emergencia del laboratorio. Aprende a utilizar los lavaojos.
  2. Utiliza guantes y gafas de seguridad cuando sean necesarios.
  3. Haz solo los experimentos que te indique tu profesor o profesora; no trates de realizar pruebas por tu cuenta.
  4. Ten encima de la mesa solo el material necesario. Deja los libros y la ropa que no vayas a utilizar en el lugar apropiado, de forma que no moleste el paso de nadie.
  5. No te muevas más de lo necesario. No corras ni juegues.
  6. No comas, ni bebas ni masques chicle.
  7. Lávate bien las manos cuando salgas del laboratorio.
  8. Los productos del laboratorio no se deben tocar, oler ni probar.
  9. No manejes ningún producto desconocido. Si algún frasco no tiene etiqueta, no lo uses y avisa al profesor. Cuando dejes los frascos en el armario, haz que su etiqueta quede visible.
  10. No pipetees los líquidos con la boca; utiliza las pipetas con dispositivo para pipetear.
  11. No utilices material de vidrio roto; si se te rompe algo, avisa al profesor.
  12. Maneja los aparatos eléctricos con seguridad y nunca con las manos mojadas.
  13. Si tienes que calentar un tubo de ensayo, sujétalo con unas pinzas. Haz que se mantenga inclinado de forma que su boca no apunte hacia ti, ni a ningún compañero.
  14. Utiliza material limpio para coger un producto de un frasco, a fin de evitar contaminar todo el recipiente.
  15. Si necesitas coger un producto de un frasco, ciérralo inmediatamente después.
  16. Si necesitas tirar algo, pregunta al profesor cómo lo puedes hacer para no contaminar.
  17. Al terminar la práctica, deja el material limpio y ordenado, y los productos en su sitio.

PRACTICA (página 73)

1. **¿Cuánto pesa 1 L de aceite? ¿Y 1 L de oro? Dato: 1 L = 1000 cm^3.**

A partir de la expresión de la densidad y teniendo en cuenta las densidades del aceite y del oro que aparecen en la página anterior, hallamos la masa correspondiente a 1 L de cada sustancia:

Aceite:

$$d = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = d \cdot V = 0{,}92 \frac{\text{g}}{\cancel{\text{cm}^3}} \cdot 1000\ \cancel{\text{cm}^3} = 920\ \text{g} = \mathbf{0{,}92\ kg}$$

Oro:

$$d = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = d \cdot V = 19{,}29 \frac{\text{g}}{\cancel{\text{cm}^3}} \cdot 1000\ \cancel{\text{cm}^3} = 19\,290\ \text{g} = \mathbf{19{,}29\ kg}$$

2. **¿Qué volumen ocupa 1 kg de corcho? Dato: 1 L = 1000 cm³.**

Despejamos el volumen de la expresión de la densidad y consultamos el valor de la densidad del corcho en la página anterior:

$$d = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{d} = \frac{1000\ \cancel{g}}{0{,}25\ \frac{\cancel{g}}{\text{cm}^3}} = 4000\ \text{cm}^3 = \mathbf{4\ L}$$

3. **Identifica las siguientes sustancias como: sustancia simple, compuesto, mezcla heterogénea o disolución.**

a) **Agua de mar.**

b) **Granito.**

c) **Acero.**

d) **Oro.**

e) **Aceite.**

f) **Aire.**

a) Agua de mar: disolución.

b) Granito: mezcla heterogénea.

c) Acero: mezcla heterogénea.

d) Oro: sustancia simple.

e) Aceite: disolución.

f) Aire: disolución.

ACTIVIDADES (página 75)

4. **Los especialistas en nutrición recomiendan que tomemos 0,8 g de calcio al día. Suponiendo que solo tomamos calcio en la leche, ¿qué cantidad de leche deberíamos beber diariamente para llegar a la cantidad recomendada? Dato: la leche tiene 0,12 % en masa de calcio.**

La cantidad de leche que deberíamos beber diariamente para llegar a la cantidad recomendada de calcio al día sería:

$$0{,}8\ \frac{\cancel{\text{g de Ca}}}{\text{día}} \cdot \frac{100\ \text{g de leche}}{0{,}12\ \cancel{\text{g de Ca}}} = \mathbf{667\ \frac{g\ de\ leche}{día}}$$

5. **El whisky tiene un 40 % en volumen de alcohol. Calcula qué cantidad de whisky debe beber una persona para consumir 25 mL de alcohol.**

La cantidad de whisky que debe beber una persona para consumir 25 mL de alcohol es:

$$25\ \cancel{\text{mL de alcohol}} \cdot \frac{100\ \text{mL de whisky}}{40\ \cancel{\text{mL de alcohol}}} = \mathbf{62{,}5\ mL\ de\ whisky}$$

6. **Nos podemos preparar un refresco poniendo en un vaso grande 4 g de café soluble descafeinado (2 sobrecitos), 20 g de azúcar (2 sobres) y agua hasta completar 200 mL. Solo falta mezclar y enfriar. Calcula la concentración en masa de las sustancias que forman este refresco.**

La concentración en masa de café será:

$$\text{concentración en masa de café} = \frac{m_{\text{café}}}{V_{\text{disolución}}} = \frac{4\ \text{g}}{0{,}200\ \text{L}} = \mathbf{20\ \frac{g}{L}}$$

La concentración en masa de azúcar será:

$$\text{concentración en masa de azúcar} = \frac{m_{\text{azúcar}}}{V_{\text{disolución}}} = \frac{20\ \text{g}}{0{,}200\ \text{L}} = \mathbf{100\ \frac{g}{L}}$$

ACTIVIDAD (página 76)

7. Para preparar un licor se añadieron 200 g de azúcar a medio litro de un aguardiente de orujo de densidad 1,05 kg/L. La disolución obtenida tenía un volumen de 550 mL. Calcula el porcentaje en azúcar del licor resultante, la concentración de azúcar en g/L y su densidad.

Calculamos la masa de aguardiente:

$$d = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m_{\text{aguardiente}} = d_{\text{aguardiente}} \cdot V_{\text{aguardiente}} = 1{,}05\,\frac{\text{kg}}{\cancel{\text{L}}} \cdot 0{,}5\,\cancel{\text{L}} = 0{,}525\ \text{kg} = 525\ \text{g}$$

Determinamos el porcentaje en masa de azúcar en el licor:

$$\%\ \text{en masa de azúcar} = \frac{m_{\text{azúcar}}}{m_{\text{disolución}}} \cdot 100 = \frac{200\,\text{g}}{525\,\text{g} + 200\,\text{g}} \cdot 100 = \mathbf{27{,}6\,\%\ de\ azúcar}$$

La concentración en g/L será:

$$\text{concentración en masa de azúcar} = \frac{m_{\text{azúcar}}}{V_{\text{disolución}}} = \frac{200\,\text{g}}{0{,}550\,\text{L}} = \mathbf{364\,\frac{g}{L}}$$

Por último, hallamos la densidad del licor:

$$d_{\text{licor}} = \frac{m_{\text{licor}}}{V_{\text{licor}}} = \frac{525\ \text{g} + 200\ \text{g}}{550\ \text{mL}} = 1{,}32\,\frac{\cancel{\text{g}}}{\cancel{\text{mL}}} \cdot \frac{1000\ \cancel{\text{mL}}}{1\ \text{L}} \cdot \frac{1\ \text{kg}}{1000\ \cancel{\text{g}}} = \mathbf{1{,}32\,\frac{kg}{L}}$$

ACTIVIDAD (página 77)

8. ¿Cuál será la concentración de una disolución que se prepara añadiendo agua a 50 mL de una disolución de HNO_3 1,5 M hasta tener un volumen de 250 mL?

Primero debemos calcular los moles de soluto que habrá en la disolución:

$$M = \frac{n_S}{V_D} \quad \Rightarrow \quad n_S = M \cdot V_D = 1{,}5\,\frac{\text{mol}}{\cancel{\text{L}}} \cdot 0{,}050\,\cancel{\text{L}} = 0{,}075\ \text{mol}$$

Estos serán los moles de soluto que tendremos en la disolución final. Calculamos ahora la concentración de la disolución final:

$$M = \frac{n_S}{V_D} = \frac{0{,}075\ \text{mol}}{0{,}250\ \text{L}} = 0{,}3\,\frac{\text{mol}}{\text{L}} = \mathbf{0{,}3\ M}$$

ACTIVIDADES (página 79)

9. Queremos preparar 250 mL de una disolución acuosa de cloruro de potasio 1,5 M. Calcula qué cantidad de soluto necesitas y explica cómo la prepararás.

Calculamos la cantidad de soluto:

$$M = \frac{n_s}{V_D} \quad \Rightarrow \quad n_s = M \cdot V_D = 1{,}5\,\frac{\text{mol}}{\cancel{\text{L}}} \cdot 0{,}250\,\cancel{\text{L}} = 0{,}375\ \text{mol de KCl}$$

Pasamos los moles de soluto a gramos:

$$M(\text{KCl}) = 39{,}10 + 35{,}45 = 74{,}55\ \text{g/mol}$$

$$0{,}375\ \cancel{\text{mol de KCl}} \cdot \frac{74{,}55\ \text{g de KCl}}{1\ \cancel{\text{mol de KCl}}} = \mathbf{27{,}96\ g\ de\ KCl}$$

Para preparar esta disolución en el laboratorio pesaríamos 27,96 g de cloruro de potasio en una balanza, utilizando un vidrio de reloj y una espátula. A continuación lo disolveríamos en una pequeña cantidad de agua en un vaso de precipitados y removeríamos hasta que el cloruro de potasio estuviera totalmente disuelto.

Después, cogeríamos un matraz aforado de 250 mL y echaríamos agua hasta ocupar aproximadamente 1/3 de su volumen. Añadiríamos el contenido disuelto del vaso. Por último, completaríamos con agua hasta el aforo de 250 mL.

10. **Queremos preparar 500 mL de una disolución de ácido nítrico 1,5 M. Haz los cálculos e indica el procedimiento que habría que seguir si disponemos de un HNO_3 comercial del 67 % de riqueza y 1,4 g/mL de densidad.**

A partir de la concentración molar calculamos los moles de soluto que necesitamos:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} \Rightarrow n_{\text{soluto}} = M \cdot V_{\text{disolución}} = 1{,}5\ \text{M} \cdot 0{,}5\ \text{L} = 0{,}75\ \text{mol de HNO}_3$$

La masa molar nos permite conocer la equivalencia en gramos.

$$M(\text{HNO}_3) = 1{,}008 + 14{,}01 + 16{,}00 \cdot 3 = 63{,}02\ \text{g/mol}$$

$$0{,}75\ \cancel{\text{mol de HNO}_3} \cdot \frac{63{,}02\ \text{g de HNO}_3}{1\ \cancel{\text{mol de HNO}_3}} = 47{,}265\ \text{g de HNO}_3$$

Como el producto comercial tiene una riqueza del 67 %, necesitamos:

$$47{,}265\ \cancel{\text{g de HNO}_3} \cdot \frac{100\ \text{g de ácido comercial}}{67\ \cancel{\text{g de HNO}_3}} = 70{,}545\ \text{g de ácido comercial}$$

Al tratarse de un líquido, utilizamos el dato de la densidad para calcular el volumen equivalente:

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{d} = \frac{70{,}545\ \cancel{\text{g}}}{1{,}4\ \frac{\cancel{\text{g}}}{\text{mL}}} = \mathbf{50{,}39\ mL\ del\ ácido\ comercial}$$

Para preparar la disolución en el laboratorio, tomaríamos con una pipeta 50,39 mL del ácido comercial. El contenido de la pipeta se vierte en un matraz aforado de 500 mL. A continuación, completaríamos con agua hasta la marca.

ACTIVIDADES (página 80)

11. **Qué cantidad de glucosa, $C_6H_{12}O_6$, tenemos que mezclar con medio litro de agua para tener una disolución 1,2 m? ¿Y con 2 L de agua? Dato: $d_{agua} = 1$ g/mL.**

Teniendo en cuenta la densidad del agua, hallamos la masa de disolvente correspondiente a medio litro de agua:

$$d_{\text{agua}} = \frac{m_{\text{agua}}}{V_{\text{agua}}} \Rightarrow m_{\text{agua}} = d_{\text{agua}} \cdot V_{\text{agua}} = 1\frac{\text{g}}{\cancel{\text{mL}}} \cdot 500\ \cancel{\text{mL}} = 500\ \text{g} = 0{,}5\ \text{kg} = m_{\text{disolvente}}$$

Calculamos la cantidad de soluto con la expresión de la molalidad:

$$m = \frac{n_{\text{soluto}}}{m_{\text{disolvente}}} \Rightarrow n_{\text{soluto}} = 1{,}2\frac{\text{mol}}{\cancel{\text{kg}}} \cdot 0{,}5\ \cancel{\text{kg}} = 0{,}6\ \text{mol de C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$$

Pasamos los moles de soluto a gramos:

$$M(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6) = 12{,}00 \cdot 6 + 1{,}008 \cdot 12 + 16{,}00 \cdot 6 = 180{,}1\ \text{g/mol}$$

$$0{,}6\ \cancel{\text{mol de C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6} \cdot \frac{180{,}1\ \text{g de C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}{1\ \cancel{\text{mol de C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}} = \mathbf{108{,}06\ g\ de\ C_6H_{12}O_6}$$

Teniendo en cuenta la densidad del agua, hallamos la masa de disolvente correspondiente a dos litros de agua:

$$d_{agua} = \frac{m_{agua}}{V_{agua}} \Rightarrow m_{agua} = d_{agua} \cdot V_{agua} = 1\frac{g}{\cancel{mL}} \cdot 2000\,\cancel{mL} = 2000\,g = 2\,kg = m_{disolvente}$$

Calculamos la cantidad de soluto con la expresión de la molalidad:

$$m = \frac{n_{soluto}}{m_{disolvente}} \Rightarrow n_{soluto} = 1,2\frac{mol}{\cancel{kg}} \cdot 2\,\cancel{kg} = 2,4\text{ mol de } C_6H_{12}O_6$$

Pasamos los moles de soluto a gramos:

$$2,4\ \cancel{\text{mol de } C_6H_{12}O_6} \cdot \frac{180,1\text{ g de } C_6H_{12}O_6}{1\ \cancel{\text{mol de } C_6H_{12}O_6}} = \mathbf{432,2\ g\ de\ C_6H_{12}O_6}$$

12. **¿Qué cantidad de glucosa, $C_6H_{12}O_6$, tenemos que mezclar con medio litro de agua para que su fracción molar sea 0,2?**

La expresión de la fracción molar de glucosa es:

$$\chi_{C_6H_{12}O_6} = \frac{n_{C_6H_{12}O_6}}{n_{C_6H_{12}O_6} + n_{H_2O}} \Rightarrow n_{C_6H_{12}O_6} = \frac{\chi}{1-\chi} n_{H_2O}$$

Hallamos las masas molares de la glucosa y del agua:

$$M(C_6H_{12}O_6) = 12,00 \cdot 6 + 1,008 \cdot 12 + 16,00 \cdot 6 = 180,1\text{ g/mol}$$

$$M(H_2O) = 1,008 \cdot 2 + 16,00 = 18,02\text{ g/mol}$$

Teniendo en cuenta la densidad del agua, la masa de agua correspondiente a medio litro son 500 g. Calculamos en número de moles de agua:

$$M = \frac{m}{n} \Rightarrow n_{H_2O} = \frac{m_{agua}}{M(H_2O)} = \frac{500\ \cancel{g}}{18,02\frac{\cancel{g}}{mol}} = 27,75\text{ mol de } H_2O$$

Sustituyendo en la expresión de arriba:

$$n_{C_6H_{12}O_6} = \frac{\chi}{1-\chi} \cdot n_{H_2O} = \frac{0,2}{1-0,2} \cdot 27,75 = 6,938\text{ mol de } C_6H_{12}O_6$$

Pasamos los moles de soluto a kilogramos:

$$6,938\ \cancel{\text{mol de } C_6H_{12}O_6} \cdot \frac{180,1\text{ g de } C_6H_{12}O_6}{1\ \cancel{\text{mol de } C_6H_{12}O_6}} = 1\,249\text{ g de } C_6H_{12}O_6 = \mathbf{1,25\ kg\ de\ C_6H_{12}O_6}$$

ACTIVIDAD (página 81)

13. **El amoniaco comercial se vende en disoluciones acuosas que contienen un 28 % en masa de NH_3 y una densidad de 0,89 g/mL. Expresa su concentración en unidades de:**

a) Molaridad. **b) Molalidad.** **c) Fracción molar.** **d) g de soluto/L.**

La concentración de una disolución es una propiedad intensiva; su valor es el mismo cualquiera que sea la cantidad de disolución que se considere. Por tanto, tomamos una cantidad arbitraria de amoniaco comercial. Es cómodo tomar 1 L como el valor del volumen de la disolución.

- Con la densidad calculamos la masa correspondiente a 1 L (1000 mL):

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow m_D = V_D \cdot d = 1000\ \cancel{mL} \cdot 0,89\frac{g}{\cancel{mL}} = 890\text{ g de } NH_3\text{ comercial}$$

- La concentración en masa nos permite conocer la masa de la sustancia pura que hay en ella:

$$m_s = 890\ \cancel{\text{g de NH}_3\text{ comercial}} \cdot \frac{28\text{ g de NH}_3}{100\ \cancel{\text{g de NH}_3\text{ comercial}}} = 249{,}2\text{ g de NH}_3$$

- Tanto la molaridad como la molalidad requieren conocer el número de moles del soluto. Necesitamos calcular la masa molar del soluto y utilizar el factor de conversión adecuado.

$$M(\text{NH}_3) = 14{,}01 + 1{,}008 \cdot 3 = 17{,}03\text{ g/mol}$$

$$n_s = \frac{m_s}{M(\text{NH}_3)} = \frac{249{,}2\ \cancel{\text{g de NH}_3}}{17{,}03\dfrac{\cancel{\text{g de NH}_3}}{\text{mol}}} = 14{,}63\text{ mol de NH}_3$$

a) Calculamos la molaridad:

$$M = \frac{n_s}{V_D} = \frac{14{,}63\text{ mol de NH}_3}{1\text{ L}} = 14{,}63\frac{\text{mol}}{\text{L}} = \mathbf{14{,}63\ M}$$

b) Para el cálculo de la molalidad necesitamos la masa de disolvente.

En 890 g de NH_3 comercial hay 249,2 g de NH_3 y el resto es agua, el disolvente:

$$m_d = m_D - m_s = 890\text{ g} - 249{,}2\text{ g} = 640{,}8\text{ g de agua}$$

La molalidad:

$$m = \frac{n_s}{m_d} = \frac{14{,}63\text{ mol de NH}_3}{0{,}6408\text{ kg de agua}} = 22{,}83\frac{\text{mol}}{\text{kg}} = \mathbf{22{,}83\ m}$$

c) Para la fracción molar, necesitamos conocer los moles que corresponden con los 640,8 g de agua:

$$M(\text{H}_2\text{O}) = 1{,}008 \cdot 2 + 16{,}00 = 18{,}02\text{ g/mol}$$

$$n_d = \frac{m_d}{M(\text{H}_2\text{O})} = \frac{640{,}8\ \cancel{\text{g de H}_2\text{O}}}{18{,}02\dfrac{\cancel{\text{g de H}_2\text{O}}}{\text{mol}}} = 35{,}57\text{ mol de H}_2\text{O}$$

La fracción molar de soluto es:

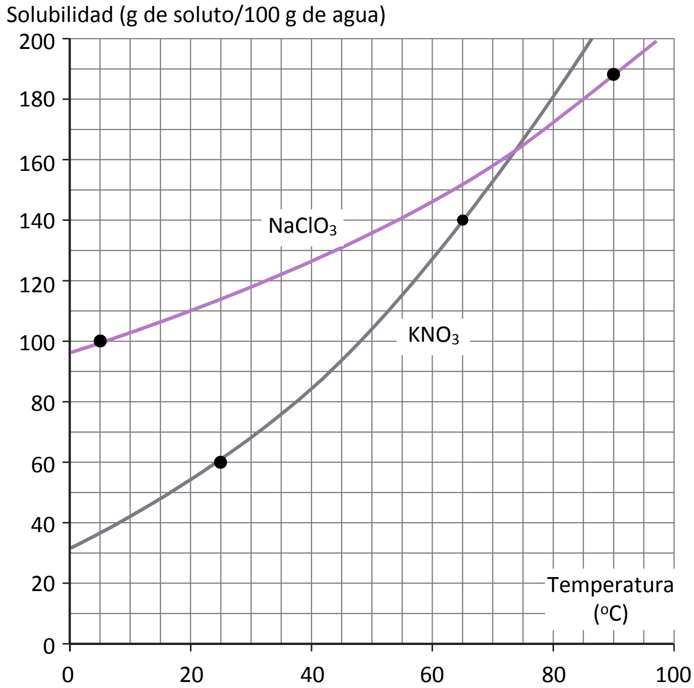
$$\chi_s = \frac{n_s}{n_s + n_d} = \frac{14{,}63\text{ mol}}{14{,}63\text{ mol} + 35{,}57\text{ mol}} = \mathbf{0{,}291}$$

d) Calculamos la concentración en g soluto/L:

$$c = \frac{m_s}{V_D} = \frac{249{,}2\text{ g de NH}_3}{1\text{ L}} = \mathbf{249{,}2\frac{g}{L}}$$

ACTIVIDADES (página 82)

14. Lee la gráfica de la solubilidad en la figura 3.5 y calcula la máxima cantidad de KNO_3 que se podrá disolver en 50 g de agua a 25 °C. ¿Y si estuviese a 65 °C?



Extrayendo de la gráfica de la figura 3.5 la línea correspondiente al KNO_3.

Para 25 °C la solubilidad del nitrato de potasio es 60 g/100 g. Como estamos calculando la cantidad máxima de nitrato de potasio que se podrá disolver en 50 g de agua, la cantidad de soluto capaz de disolver se reduce a la mitad. Por tanto, a 25 °C se puede disolver un máximo de **30 g** de nitrato de potasio en 50 g de agua.

Análogamente, para 65 °C la solubilidad es 140 g/100 g. Por tanto, en 50 g de agua se podrán disolver como máximo **70 g** de nitrato de potasio.

15. Imagina que has preparado una disolución saturada de clorato de sodio a 80 °C con 200 g de agua. ¿Qué cantidad de $NaClO_3$ se irá al fondo del vaso si la enfrías hasta 5 °C? Datos: en la gráfica de solubilidad de la figura 3.5.

Extrayendo de la gráfica de la figura 3.5 (como puede verse en la actividad anterior) la línea correspondiente al $NaClO_3$:

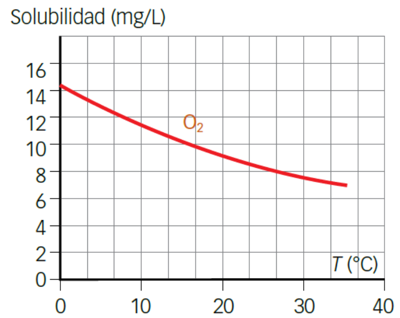
A 90 °C la solubilidad del clorato de sodio es casi 190 g/100 g. Así, la cantidad de clorato de sodio en 200 g de una disolución saturada es el doble, 380 g.

A 5 °C la solubilidad del clorato de sodio es casi 100 g/100 g la cantidad de clorato de sodio en 200 g de una disolución saturada es 200 g.

Por tanto, al enfriar de 90 °C a 5 °C dejan de estar disueltos y se irán al fondo **180 g** de clorato de sodio.

ACTIVIDAD (página 83)

16. La temperatura del agua de un río es de unos 15 °C, pero un vertido industrial de agua de refrigeración hizo que subiese hasta 35 °C. Observa la gráfica de la figura 3.6 y explica en qué proporción varió la cantidad de oxígeno del agua. ¿Qué consecuencia pudo tener para los seres vivos que viven en las aguas de ese río?



Solubilidad del O_2 a 15 °C: 10 mg/L

Solubilidad del O_2 a 35 °C: 7 mg/L.

Proporción en que se redujo el oxígeno disuelto:

$$\frac{(7-10)\ \cancel{\text{mg/L}}}{10\ \cancel{\text{mg/L}}}\cdot 100 = \mathbf{-30\,\%}$$

Los peces tendrán dificultad para respirar con un 30 % menos de oxígeno disuelto en agua, es probable que mueran.

Los microorganismos anaerobios proliferarán en mayor abundancia, haciendo del agua un lugar infecto.

ACTIVIDADES (página 85)

17. La presión de vapor de la acetona a 50 °C es de 603 mm de Hg. Al disolver 15 g de una sustancia en 100 g de acetona, C_3H_6O, la presión de vapor de la disolución a esa temperatura pasa a ser 473 mm de Hg. ¿Cuál es la masa molar de esa sustancia?

De acuerdo con la ley de Raoult:

$$\Delta p = p_0 - p = p_0 \cdot \chi_s \quad \Rightarrow \quad \chi_s = \frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{603 \text{ mm de Hg} - 473 \text{ mm de Hg}}{603 \text{ mm de Hg}} = 0{,}2156$$

Para calcular los moles de acetona, hallamos la masa molar de la acetona.

$$M(C_3H_6O) = 12{,}00 \cdot 3 + 1{,}008 \cdot 6 + 16{,}00 = 58{,}05 \text{ g/mol}$$

$$n_D = 100 \cancel{\text{ g de } C_3H_6O} \cdot \frac{1 \text{ mol de } C_3H_6O}{58{,}048 \cancel{\text{ g de } C_3H_6O}} = 1{,}723 \text{ mol de } C_3H_6O$$

Teniendo en cuenta la expresión de la fracción molar:

$$\chi_s = \frac{n_s}{n_s + n_d} \quad \Rightarrow \quad n_s = \frac{\chi_s}{1 - \chi_s} \cdot n_d = \frac{0{,}2156}{1 - 0{,}2156} \cdot 1{,}723 \text{ mol} = 0{,}473 \text{ mol de soluto}$$

Por último, hallamos la masa molar del soluto con la siguiente expresión:

$$n_s = \frac{m_s}{M(\text{soluto})} \quad \Rightarrow \quad M(\text{soluto}) = \frac{m_s}{n_s} = \frac{15 \text{ g}}{0{,}473 \text{ mol}} = \mathbf{31{,}7 \frac{g}{mol}}$$

18. ¿Cuál será el punto de ebullición de una disolución que se prepara disolviendo 150 g de glucosa, $C_6H_{12}O_6$, en 250 g de agua? Datos: T_e = 100 °C, K_e = 0,51 °C · kg/mol

La variación en la temperatura de ebullición viene dada por la siguiente expresión:

$$\Delta T = T - T_e = K_e \cdot m$$

Calculamos la molalidad de la disolución:

$$M(C_6H_{12}O_6) = 12{,}00 \cdot 6 + 1{,}008 \cdot 12 + 16{,}00 \cdot 6 = 180{,}1 \text{ g/mol}$$

$$m = \frac{n_s}{m_d} = \frac{\dfrac{150 \cancel{\text{ g de } C_6H_{12}O_6}}{180{,}1 \dfrac{\cancel{\text{g de } C_6H_{12}O_6}}{\text{mol}}}}{0{,}250 \text{ kg de agua}} = 3{,}33 \frac{\text{mol}}{\text{kg}} = 3{,}33 \text{ m}$$

Hallamos el incremento en la temperatura de ebullición:

$$\Delta T = T - T_e = K_e \cdot m = 0{,}51 \frac{°\text{C} \cdot \cancel{\text{kg}}}{\cancel{\text{mol}}} \cdot 3{,}33 \frac{\cancel{\text{mol}}}{\cancel{\text{kg}}} = 1{,}7 \text{ °C}$$

Por tanto, la temperatura de ebullición de la disolución será:

$$T_e = 100 \text{ °C} + 1{,}7 \text{ °C} = \mathbf{101{,}7 \text{ °C}}$$

19. ¿Cuál será la masa molar de una sustancia si al disolver 90 g de la misma en un cuarto litro de agua se obtiene una disolución que hierve a 102 °C? Datos: T_e = 100 °C, K_e = 0,51 °C · kg/mol, d_{agua} = 1 kg/L.

$$\Delta T = T - T_e = K_e \cdot m \quad \Rightarrow \quad m = \frac{T - T_e}{K_e}$$

Siendo que $m = n_s/m(\text{disolvente})$, y $n_s = m_s/M(\text{soluto})$:

$$M(\text{soluto}) = \frac{m_s}{m \cdot m_D}$$

Sustituyendo la primera en la segunda, sustituyendo y operando:

$$M = \frac{m_s}{m \cdot m_D} = \frac{m_s}{\frac{T - T_e}{K_e} \cdot m_D} = \frac{m_s \cdot K_e}{(T - T_e) \cdot m_D} = \frac{90 \text{ g} \cdot 0{,}51 \frac{\cancel{°C} \cdot \cancel{kg}}{\text{mol}}}{(102 - 100) \cancel{°C} \cdot 0{,}250 \cancel{\text{ kg de agua}}} = \mathbf{91{,}8 \frac{g}{mol}}$$

ACTIVIDADES (página 87)

20. ¿Cuál será el punto de congelación de una disolución que se prepara disolviendo 150 g de glucosa, $C_6H_{12}O_6$, en 250 g de agua?

La variación en la temperatura de congelación viene dada por la siguiente expresión:

$$\Delta T = T_f - T = K_c \cdot m$$

Calculamos la molalidad de la disolución:

$$M(C_6H_{12}O_6) = 12{,}00 \cdot 6 + 1{,}008 \cdot 12 + 16{,}00 \cdot 6 = 180{,}1 \text{ g/mol}$$

$$m = \frac{n_s}{m_d} = \frac{\dfrac{150 \cancel{\text{ g de } C_6H_{12}O_6}}{180{,}1 \dfrac{\cancel{\text{g de } C_6H_{12}O_6}}{\text{mol}}}}{0{,}250 \text{ kg de agua}} = 3{,}33 \frac{\text{mol}}{\text{kg}} = 3{,}33 \text{ m}$$

Hallamos el incremento en la temperatura de ebullición. Para ello consultamos la constante crioscópica del agua en la tabla de la página 86:

$$\Delta T = T_f - T = K_c \cdot m = 1{,}86 \frac{°C \cdot \cancel{kg}}{\cancel{mol}} \cdot 3{,}33 \frac{\cancel{mol}}{\cancel{kg}} = 6{,}19 \text{ °C}$$

Por tanto, la temperatura de congelación de la disolución será:

$$T_f = 0 \text{ °C} - 6{,}19 \text{ °C} \approx \mathbf{-6{,}2 \text{ °C}}$$

21. ¿Cuál es la presión osmótica de una disolución que se obtiene disolviendo 30 g de glucosa, $C_6H_{12}O_6$, en agua hasta tener medio litro de mezcla a 25 °C? Dato: R = 0,082 (atm · L)/(mol · K).

La presión osmótica se calcula con la siguiente expresión:

$$\pi = M \cdot R \cdot T$$

Calculamos la masa molar de la glucosa y con ella la molaridad de la disolución:

$$M(C_6H_{12}O_6) = 12{,}00 \cdot 6 + 1{,}008 \cdot 12 + 16{,}00 \cdot 6 = 180{,}1 \text{ g/mol}$$

$$M = \frac{n_s}{V_D} = \frac{\dfrac{30 \cancel{\text{g}}}{180{,}1 \dfrac{\cancel{\text{g}}}{\text{mol}}}}{0{,}5 \text{ L}} = 0{,}333 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

La presión osmótica será:

$$\pi = 0{,}333 \frac{\cancel{mol}}{\cancel{L}} \cdot 0{,}082 \frac{\text{atm} \cdot \cancel{L}}{\cancel{mol} \cdot \cancel{K}} \cdot (25 + 273) \cancel{K} = \mathbf{8{,}14 \text{ atm}}$$

22. ¿Cuál es la presión osmótica de la disolución anterior cuando la temperatura alcanza 50 °C?

Dato: *R* = 0,082 (atm · L)/(mol · K).

En este caso:

$$\pi = 0{,}333\ \frac{\cancel{\text{mol}}}{\cancel{\text{L}}} \cdot 0{,}082\ \frac{\text{atm} \cdot \cancel{\text{L}}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (50 + 273)\ \cancel{\text{K}} = \mathbf{8{,}82\ atm}$$

ACTIVIDADES FINALES (páginas 92)

Concentración de una disolución

23. Busca información que te permita identificar los solutos y el disolvente en cada una de las disoluciones siguientes.

a) Agua del grifo.
b) Suero fisiológico.
c) Refresco con gas.
d) Bronce.
e) Gas natural.
f) Nube.

	Agua del grifo	Suero fisiológico	Refresco con gas	Bronce	Gas natural	Acero
Soluto	Sales minerales, oxígeno	Cloruro de sodio	CO_2, azúcar, saborizantes, etc.	Estaño	Nitrógeno, etano, H_2S, etc.	Oxígeno, CO_2, argón, etc.
Disolvente	Agua	Agua	Agua	Cobre	Metano	Nitrógeno

24. Explica la diferencia entre estas dos expresiones.

a) Una disolución de hidróxido de sodio en agua tiene una concentración de 1,5 g/L.
b) Una disolución de hidróxido de sodio en agua tiene una densidad de 1,5 g/L.

En el caso a) hay 1,5 g de hidróxido de sodio (que es el soluto) por cada litro de disolución. En el caso b) hay 1,5 g de disolución (masa de soluto + masa de disolvente) por cada litro de disolución.

La diferencia está a la hora de considerar la masa, si solo de una parte, como en el caso a); o del conjunto completo, como es el caso b).

25. El suero fisiológico es una disolución de sal en agua al 0,9 % (porcentaje en masa). Calcula la cantidad de sal y de agua que necesitas para preparar 2 kg de suero fisiológico.

De acuerdo con la expresión de porcentaje en masa y teniendo en cuenta que la masa de disolución son 2 kg, hallamos la masa de sal necesaria:

$$\%\ \text{en masa de sal} = \frac{m_{\text{sal}}}{m_{\text{disolución}}} \cdot 100$$

$$m_{\text{sal}} = \frac{\%\ \text{en masa} \cdot m_{\text{disolución}}}{100} = \frac{0{,}9\,\% \cdot 2\ \text{kg}}{100} = 0{,}018\ \text{kg} = \mathbf{18\ g\ de\ sal}$$

La masa de agua que se requiere será la diferencia entre la masa de la disolución y la masa de sal:

$$m_{\text{agua}} = m_{\text{disolución}} - m_{\text{sal}} = 2000\ \text{g} - 18\ \text{g} = \mathbf{1982\ g\ de\ agua}$$

26. El análisis de sangre de una persona dice lo siguiente glucosa: 79 mg/100 mL. Una persona adulta tiene alrededor de 5 litros de sangre. ¿Cuánta glucosa tiene la persona del análisis en su sangre?

$$5\ \text{L}\ \cancel{\text{de sangre}} \cdot \frac{79\ \text{mg de glucosa}}{0{,}100\ \text{L}\ \cancel{\text{de sangre}}} = 3950\ \text{mg de glucosa} = \mathbf{3{,}95\ g\ de\ glucosa}$$

27. **El alcohol es irritante para la piel de los bebés. Por eso, para ellos se utiliza una mezcla de alcohol y agua al 70 %. En casa tienes 100 g de alcohol al 90 %. ¿Qué tienes que hacer para transformarlo en alcohol para bebés? Los porcentajes se miden en masa.**

En 100 g de alcohol al 90 % tendremos 90 g de alcohol y 10 g de agua. Calculamos la cantidad de agua que tenemos que añadir para que se convierta en alcohol al 70 %:

$$\frac{70\text{ g de alcohol}}{100\text{ g de disolución}} = \frac{90\text{ g de alcohol}}{100\text{ g de disolución} + x} \Rightarrow x = \mathbf{28,6\ g\,de\,agua}$$

A 100 g de alcohol al 90 % tenemos que echarle 28,6 g de agua.

28. **Necesitamos preparar 500 mL de una disolución de hidróxido de sodio 2 M. Calcula qué cantidad de soluto necesitas y explica cómo la prepararás si se dispone de un producto comercial del 95 % de riqueza en NaOH.**

A partir de la concentración molar calculamos los moles de soluto que necesitamos:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} \Rightarrow n_{\text{soluto}} = M \cdot V_{\text{disolución}} = 2\text{ M} \cdot 0,5\text{ L} = 1\text{ mol de NaOH}$$

La masa molar que nos permite conocer la equivalencia en gramos.

$$M(\text{NaOH}) = 23,00 + 16,00 + 1,008 = 40,01\text{ g/mol}$$

$$1\ \cancel{\text{mol de NaOH}} \cdot \frac{40,01\text{ g de NaOH}}{1\ \cancel{\text{mol de NaOH}}} = 40,01\text{ g de NaOH}$$

Como el producto comercial tiene una riqueza del 95 %, necesitaremos tomar:

$$40,01\ \cancel{\text{g de HNO}_3} \cdot \frac{100\text{ g de NaOH comercial}}{95\ \cancel{\text{g de HNO}_3}} = \mathbf{42,11\ g\,de\,HNO_3\ comercial}$$

29. **Tenemos 15 mL de una disolución de yoduro de potasio en agua 0,5 M. Calcula los moles y los gramos de yoduro de potasio que tenemos.**

A partir de la concentración molar calculamos los moles de soluto que tenemos ahora:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} \Rightarrow n_{\text{soluto}} = M \cdot V_{\text{disolución}} = 0,5\text{ M} \cdot 0,015\text{ L} = \mathbf{7,5 \cdot 10^{-3}\ mol\,de\,KI}$$

La masa molar nos permite conocer la equivalencia en gramos:

$$M(\text{KI}) = 39,10 + 126,9 = 166,0\text{ g/mol}$$

$$7,5 \cdot 10^{-3}\ \cancel{\text{mol de KI}} \cdot \frac{166,0\text{ g de KI}}{1\ \cancel{\text{mol de KI}}} = \mathbf{1,245\ g\,de\,KI}$$

30. **Calcula qué volumen de disolución de sulfato de sodio 1,25 M tenemos que tomar para tener 0,5 mol de sulfato de sodio. ¿Cuántos gramos de sulfato de sodio tendremos entonces?**

A partir de la concentración molar calculamos el volumen de disolución que necesitamos:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} \Rightarrow V_{\text{disolución}} = \frac{n_{\text{soluto}}}{M} = \frac{0,5\text{ mol de Na}_2\text{SO}_4}{1,25\text{ M}} = 0,4\text{ L} = \mathbf{400\ mL}$$

Calculamos la masa de sulfato de sodio que tenemos:

$$M(\text{Na}_2\text{SO}_4) = 23,00 \cdot 2 + 32,06 + 16,00 \cdot 4 = 142,06\text{ g/mol}$$

$$0,5\ \cancel{\text{mol de Na}_2\text{SO}_4} \cdot \frac{142,06\text{ g de Na}_2\text{SO}_4}{1\ \cancel{\text{mol de Na}_2\text{SO}_4}} = \mathbf{71,03\ g\,de\,Na_2SO_4}$$

31. Indica cómo prepararías 100 mL de una disolución de hidróxido de calcio 0,5 M si dispones de 500 mL de disolución de hidróxido de calcio 2,5 M.

Inicialmente debemos calcular los moles de soluto que necesitamos para preparar la disolución 0,5 M:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} \Rightarrow n_{\text{soluto}} = M \cdot V_{\text{disolución}} = 0{,}5\ \text{M} \cdot 0{,}1\ \text{L} = 0{,}05\ \text{mol de Ca(OH)}_2$$

Luego calcularemos la cantidad de disolución 2,5 M que necesitamos para tener esos moles de soluto:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} \Rightarrow V_{\text{disolución}} = \frac{n_{\text{soluto}}}{M} = \frac{0{,}05\ \text{mol de Ca(OH)}_2}{2{,}5\ \text{M}} = 0{,}02\ \text{L} = \mathbf{20\ mL}$$

Debemos tomar 20 mL de la disolución concentrada y diluirla en agua destilada hasta un volumen final de 100 mL.

32. Calcula la molaridad de la disolución que resulta de añadir 3 g de $Mg(OH)_2$ a 50 mL de disolución de $Mg(OH)_2$ 0,5 M. Se supone que el volumen total no varía.

Calculamos los moles de soluto que hay en la disolución resultante.
Son los que hay en 3 g, más los que había en los 50 mL de la disolución 0,5 M:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} \Rightarrow n_{\text{soluto}} = M \cdot V_{\text{disolución}} = 0{,}5\ \text{M} \cdot 0{,}050\ \text{L} = 0{,}025\ \text{mol de Mg(OH)}_2$$

$$M(\text{Mg(OH)}_2) = 24{,}31 + (16{,}00 + 1{,}008) \cdot 2 = 58{,}326\ \text{g/mol}$$

$$3\ \cancel{\text{g de Mg(OH)}_2} \cdot \frac{1\ \text{mol de Mg(OH)}_2}{58{,}326\ \cancel{\text{g de Mg(OH)}_2}} = 0{,}0514\ \text{mol de Mg(OH)}_2$$

Calculamos la molaridad de la disolución resultante:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} = \frac{(0{,}025 + 0{,}0514)\ \text{mol de Mg(OH)}_2}{0{,}050\ \text{L}} = 1{,}528\frac{\text{mol}}{\text{L}} \approx \mathbf{1{,}53\ M}$$

33. En el laboratorio tenemos un ácido clorhídrico del 37 % de riqueza en masa y 1,18 g/mL de densidad. Si cogemos 70 mL del contenido de esa botella, ¿cuánto ácido clorhídrico estaremos tomando?

Comenzaremos calculando el volumen de ácido clorhídrico que hay en los 70 mL:

$$70\ \cancel{\text{mL de HCl comercial}} \cdot \frac{37\ \text{mL de HCl}}{100\ \cancel{\text{mL de HCl comercial}}} = 25{,}9\ \text{mL de HCl}$$

El dato de la densidad nos permite conocer la masa de ácido que estamos tomando:

$$d_{\text{HCl comercial}} = \frac{m_{\text{HCl comercial}}}{V_{\text{HCl comercial}}} \Rightarrow m_{\text{HCl comercial}} = d_{\text{HCl comercial}} \cdot V_{\text{HCl comercial}}$$

$$m_{\text{HCl comercial}} = d_{\text{HCl comercial}} \cdot V_{\text{HCl comercial}} = 1{,}18\frac{\text{g}}{\cancel{\text{mL}}} \cdot 25{,}9\ \cancel{\text{mL}} = \mathbf{30{,}6\ g\ de\ HCl}$$

34. Calcula qué volumen de ácido clorhídrico comercial del 37 % de riqueza y 1,18 g/mL de densidad tendremos que utilizar para tener 20 g de ácido clorhídrico.

Calculamos la masa de ácido clorhídrico comercial que contienen los 20 g de ácido clorhídrico puro:

$$20\ \cancel{\text{g de HCl}} \cdot \frac{100\ \text{g de HCl comercial}}{37\ \cancel{\text{g de HCl}}} = 54{,}05\ \text{g de HCl comercial}$$

El dato de la densidad nos permite conocer el volumen equivalente de ácido que tendremos que utilizar:

$$d_{\text{HCl comercial}} = \frac{m_{\text{HCl comercial}}}{V_{\text{HCl comercial}}} \Rightarrow V_{\text{HCl comercial}} = \frac{m_{\text{HCl comercial}}}{d_{\text{HCl comercial}}} = \frac{54{,}05\ \cancel{\text{g}}}{1{,}18\frac{\cancel{\text{g}}}{\text{mL}}} = \mathbf{45{,}8\ mL\ de\ HCl}$$

35. ¿Qué volumen de ácido sulfúrico comercial, H_2SO_4, del 96 % de riqueza y densidad 1,84 g/mL, necesitamos para preparar 250 mL de una disolución acuosa de este ácido de concentración 0,5 M?

Calculamos la cantidad de soluto que necesitamos:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} \quad \Rightarrow \quad n_{\text{soluto}} = M \cdot V_{\text{disolución}} = 0{,}5\ \text{M} \cdot 0{,}25\ \text{L} = 0{,}125\ \text{mol de } H_2SO_4$$

A partir de la masa molar obtenemos su equivalente en gramos:

$$M(H_2SO_4) = 1{,}008 \cdot 2 + 32{,}06 + 16{,}00 \cdot 4 = 98{,}076\ \text{g/mol}$$

$$0{,}125\ \cancel{\text{mol de } H_2SO_4} \cdot \frac{98{,}076\ \text{g de } H_2SO_4}{1\ \cancel{\text{mol de } H_2SO_4}} = 12{,}26\ \text{g de } H_2SO_4$$

Utilizamos el dato de la riqueza para calcular la cantidad de ácido comercial que hay que tomar para obtener 12,26 g de H_2SO_4:

$$12{,}26\ \cancel{\text{g de } H_2SO_4} \cdot \frac{100\ \text{g de ácido comercial}}{96\ \cancel{\text{g de } H_2SO_4}} = 12{,}77\ \text{g de ácido comercial}$$

Al tratarse de un líquido, utilizamos el dato de la densidad para calcular el volumen equivalente:

$$d = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{d} = \frac{12{,}77\ \cancel{\text{g}}}{1{,}84\ \frac{\cancel{\text{g}}}{\text{mL}}} = \mathbf{6{,}9\ mL\ de\ ácido\ comercial}$$

ACTIVIDADES FINALES (página 93)

36. Preparamos una disolución mezclando agua y ácido sulfúrico comercial hasta tener un volumen de 500 mL. Calcula la concentración molar de la disolución resultante si se han utilizado 15 mL de un ácido sulfúrico del 96 % de riqueza y 1,85 g/mL de densidad.

Calculamos los moles de soluto que hay en los 15 mL del ácido comercial:

$$d_{\text{ácido comercial}} = \frac{m_{\text{ácido comercial}}}{V_{\text{ácido comercial}}} \quad \Rightarrow \quad m_{\text{HCl comercial}} = d_{\text{HCl comercial}} \cdot V_{\text{ácido comercial}}$$

$$m_{\text{HCl comercial}} = d_{\text{HCl comercial}} \cdot V_{\text{ácido comercial}} = 1{,}85\ \frac{\text{g}}{\cancel{\text{mL}}} \cdot 15\ \cancel{\text{mL}} = 27{,}75\ \text{g de ácido comercial}$$

El dato de la riqueza nos permite conocer la cantidad de H_2SO_4 que hay en 27,5 g de ácido comercial:

$$M(H_2SO_4) = 1{,}008 \cdot 2 + 32{,}06 + 16{,}00 \cdot 4 = 98{,}076\ \text{g/mol}$$

$$27{,}75\ \cancel{\text{g de ácido comercial}} \cdot \frac{96\ \cancel{\text{g de } H_2SO_4}}{100\ \cancel{\text{g de ácido comercial}}} \cdot \frac{1\ \text{mol de } H_2SO_4}{98{,}076\ \cancel{\text{g de } H_2SO_4}} = 0{,}27\ \text{mol de } H_2SO_4$$

Hallamos la concentración molar:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} = \frac{0{,}27\ \text{mol de } H_2SO_4}{0{,}500\ \text{L}} = 0{,}54\ \frac{\text{mol}}{\text{L}} = \mathbf{0{,}54\ M}$$

37. ¿Cuál es la cantidad mínima de HNO_3 5 M que se necesita para preparar 250 mL de disolución de HNO_3 0,5 M?

Inicialmente debemos calcular los moles de soluto que necesitamos para preparar la disolución 0,5 M:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} \quad \Rightarrow \quad n_{\text{soluto}} = M \cdot V_{\text{disolución}} = 0{,}5\ \text{M} \cdot 0{,}25\ \text{L} = 0{,}125\ \text{mol de } HNO_3$$

Luego calcularemos la cantidad de disolución 5 M que necesitamos para tener esos moles de soluto:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} \Rightarrow V_{\text{disolución}} = \frac{n_{\text{soluto}}}{M} = \frac{0{,}125 \text{ mol de HNO}_3}{5 \text{ M}} = 0{,}025 \text{ L} = \mathbf{25\ mL}$$

Necesitamos 25 mL de la disolución 5 M y diluir hasta tener 250 mL.

38. ¿Cuál es la cantidad máxima de HNO_3 0,5 M que se necesita para preparar 15 mL de HNO_3 5 M?

Calculamos los moles de soluto que tenemos en los 15 mL de disolución 5 M:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} \Rightarrow n_{\text{soluto}} = M \cdot V_{\text{disolución}} = 5 \text{ M} \cdot 0{,}015 \text{ L} = 7{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ mol de HNO}_3$$

A continuación vemos el volumen de disolución 0,5 M que contienen esos moles:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} \Rightarrow V_{\text{disolución}} = \frac{n_{\text{soluto}}}{M} = \frac{7{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ mol de HNO}_3}{0{,}5 \text{ M}} = 0{,}15 \text{ L} = \mathbf{150\ mL}$$

Se pueden preparar hasta 150 mL.

39. Calcula la molaridad de la disolución que resulta de añadir 10 mL de HNO_3 comercial, del 67 % de riqueza y 1,4 g/mL de densidad a 80 mL de HNO_3 0,8 M. Se supone que los volúmenes son aditivos.

Calculamos los moles de soluto que hay en cada una de las dos fracciones que añadimos:

- 10 mL de HNO_3 comercial, del 67 % de riqueza y 1,4 g/mL de densidad:

$$d_{\text{ácido comercial}} = \frac{m_{\text{ácido comercial}}}{V_{\text{ácido comercial}}} \Rightarrow m_{\text{ácido comercial}} = d_{\text{ácido comercial}} \cdot V_{\text{ácido comercial}}$$

$$m_{\text{ácido comercial}} = d_{\text{ácido comercial}} \cdot V_{\text{ácido comercial}} = 1{,}4 \frac{\text{g}}{\cancel{\text{mL}}} \cdot 10 \cancel{\text{mL}} = 14 \text{ g de ácido comercial}$$

$$14 \cancel{\text{ g de ácido comercial}} \cdot \frac{67 \text{ g de HNO}_3}{100 \cancel{\text{ g de ácido comercial}}} = 9{,}38 \text{ g de HNO}_3$$

$$M(\text{HNO}_3) = 1{,}008 + 14{,}01 + 16{,}00 \cdot 3 = 63{,}02 \text{ g/mol}$$

$$9{,}38 \cancel{\text{ g de HNO}_3} \cdot \frac{1 \text{ mol de HNO}_3}{63{,}02 \cancel{\text{ g de HNO}_3}} = 0{,}149 \text{ mol de HNO}_3$$

- 80 mL de HNO_3 0,8 M:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} \Rightarrow n_{\text{soluto}} = M \cdot V_{\text{disolución}} = 0{,}8 \text{ M} \cdot 0{,}080 \text{ L} = 0{,}064 \text{ mol de HNO}_3$$

Entonces, la molaridad de la disolución resultante será:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} = \frac{(0{,}149 + 0{,}064) \text{ mol de HNO}_3}{(0{,}010 + 0{,}080) \text{ L}} = 2{,}36 \frac{\text{mol}}{\text{L}} = \mathbf{2{,}36\ M}$$

40. ¿Qué cantidad de agua tendremos que añadir a 15 mL de metanol, CH_3OH, para obtener una disolución en la que la fracción molar del disolvente sea 0,9? Dato: d_{metanol} = 0,8 g/mL.

Calculamos los moles que corresponden con los 15 mL de metanol de esas características. Para ello calculamos la masa correspondiente a los 15 mL de metanol:

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow m = d \cdot V = 0{,}8 \frac{\text{g}}{\cancel{\text{mL}}} \cdot 15 \cancel{\text{mL}} = 12 \text{ g}$$

Calculamos la cantidad en mol de metanol que corresponde a esa masa:

$$M(\text{CH}_3\text{OH}) = 12{,}00 + 1{,}008 \cdot 3 + 16{,}00 + 1{,}008 = 32{,}03 \text{ g/mol}$$

$$12\ \cancel{\text{g de CH}_3\text{OH}} \cdot \frac{1\ \text{mol de CH}_3\text{OH}}{32{,}03\ \cancel{\text{g de CH}_3\text{OH}}} = 0{,}375\ \text{mol de CH}_3\text{OH}$$

Despejamos la cantidad de disolvente de la expresión de la fracción molar:

$$\chi_d = \frac{n_d}{n_s + n_d} \quad \Rightarrow \quad n_d = \frac{\chi_d}{1-\chi_d} \cdot n_s = \frac{0{,}9}{1-0{,}9} \cdot 0{,}375 = 3{,}372\ \text{mol de agua}$$

Calculamos la masa de agua equivalente:

$$M(\text{H}_2\text{O}) = 1{,}008 \cdot 2 + 16{,}00 = 18{,}016\ \text{g/mol}$$

$$3{,}372\ \cancel{\text{mol de H}_2\text{O}} \cdot \frac{18{,}016\ \text{g de H}_2\text{O}}{1\ \cancel{\text{mol de H}_2\text{O}}} = \mathbf{60{,}75\ mol\ de\ H_2O}$$

41. **¿Qué cantidad de agua tendremos que añadir a 15 mL de metanol, CH_3OH, para tener una disolución 0,9 m?**

Despejamos la masa de disolvente de la expresión de molalidad:

$$m = \frac{n_s}{m_d(\text{kg})} \quad \Rightarrow \quad m_d(\text{kg}) = \frac{n_s}{m}$$

Calculamos la masa correspondiente a los 15 mL de metanol:

$$d = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = d \cdot V = 0{,}8\frac{\text{g}}{\cancel{\text{mL}}} \cdot 15\ \cancel{\text{mL}} = 12\ \text{g}$$

Calculamos la cantidad en mol de metanol que corresponde a esa masa:

$$M(\text{CH}_3\text{OH}) = 12{,}00 + 1{,}008 \cdot 3 + 16{,}00 + 1{,}008 = 32{,}03\ \text{g/mol}$$

$$12\ \cancel{\text{g de CH}_3\text{OH}} \cdot \frac{1\ \text{mol de CH}_3\text{OH}}{32{,}03\ \cancel{\text{g de CH}_3\text{OH}}} = 0{,}3746\ \text{mol de CH}_3\text{OH}$$

Entonces:

$$m_d(\text{kg}) = \frac{0{,}3746\ \text{mol}}{0{,}9\ \text{m}} = 0{,}41627\ \text{kg} \approx \mathbf{416{,}3\ g}$$

42. **¿Cuál es la molaridad del ácido clorhídrico comercial del 37 % de riqueza y 1,18 g/mL de densidad?**

La concentración es una propiedad intensiva. Por tanto, basta con tomar una cantidad cualquiera del ácido comercial y referir a él todos los cálculos.

Partimos de 100 g de HCl comercial. Hay que determinar la cantidad de soluto, en mol, que corresponde a esa masa, en gramos, y el volumen, en litros, que ocupan los 100 g del ácido comercial:

$$M(\text{HCl}) = 1{,}008 + 35{,}45 = 36{,}458\ \text{g/mol}$$

$$100\ \cancel{\text{g de ácido comercial}} \cdot \frac{37\ \cancel{\text{g de HCl}}}{100\ \cancel{\text{g de ácido comercial}}} \cdot \frac{1\ \text{mol de HCl}}{36{,}458\ \cancel{\text{g de HCl}}} = 1{,}015\ \text{mol de HCl}$$

Con el dato de densidad hallamos el volumen de disolución:

$$d = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{d} = \frac{100\ \cancel{\text{g}}}{1{,}18\frac{\cancel{\text{g}}}{\text{mL}}} = 84{,}75\ \text{mL} = 0{,}08475\ \text{L}$$

Hallamos la concentración molar:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} = \frac{1{,}015\ \text{mol de HCl}}{0{,}08475\ \text{L}} = 11{,}98\frac{\text{mol}}{\text{L}} \approx \mathbf{12\ M}$$

43. ¿Cuál es la molalidad del ácido clorhídrico comercial del 37 % de riqueza y 1,18 g/mL de densidad?

La concentración es una propiedad intensiva. Por tanto, basta con tomar una cantidad cualquiera del ácido comercial y referir a él todos los cálculos.

Escribimos la expresión de la molalidad:

$$m = \frac{n_s}{m_d(\text{kg})}$$

Partimos de 100 g de HCl comercial. Hay que determinar la cantidad de soluto, en mol, que corresponde a esa masa, en gramos, y la masa de disolvente dentro de los 100 g del ácido comercial:

$$M(\text{HCl}) = 1{,}008 + 35{,}45 = 36{,}458 \text{ g/mol}$$

$$100 \cancel{\text{ g de ácido comercial}} \cdot \frac{37 \text{ g de HCl}}{100 \cancel{\text{ g de ácido comercial}}} = 37 \text{ g de HCl}$$

$$37 \cancel{\text{ g de HCl}} \cdot \frac{1 \text{ mol de HCl}}{36{,}458 \cancel{\text{ g de HCl}}} = 1{,}015 \text{ mol de HCl}$$

Como la masa de la disolución, m_D, es la suma de la masa del disolvente, m_d, y la masa del soluto, m_s:

$$m_D = m_d + m_s \quad \Rightarrow \quad m_d = m_D - m_s = 100 \text{ g} - 37 \text{ g} = 63 \text{ g} = 0{,}063 \text{ kg}$$

Calculamos la molalidad:

$$m = \frac{n_s}{m_d(\text{kg})} = \frac{1{,}015 \text{ mol de HCl}}{0{,}063 \text{ kg}} = \mathbf{16\ m}$$

44. Tenemos una disolución de ácido sulfúrico, H_2SO_4, 2 M cuya densidad es 1,15 g/mL. Expresa su concentración como:

a) Molalidad.

b) Fracción molar.

c) Porcentaje en masa.

La concentración de una disolución es una propiedad intensiva, su valor es el mismo cualquiera que sea la cantidad de disolución que se considere. Por tanto, tomamos una cantidad arbitraria de ácido sulfúrico. Es cómodo tomar 1 L como el valor del volumen de la disolución.

- Con la densidad calculamos la masa correspondiente a 1 L (1000 mL):

$$d = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m_D = V_D \cdot d = 1000 \cancel{\text{ mL}} \cdot 1{,}15 \frac{\text{g}}{\cancel{\text{mL}}} = 1150 \text{ g}$$

- La concentración molar nos permite conocer la cantidad de soluto, en mol, que hay en ella:

$$M = \frac{n_s}{V_D} \quad \Rightarrow \quad n_s = M \cdot V_D = 2 \text{ M} \cdot 1 \text{ L} = 2 \text{ mol de } H_2SO_4$$

- Mediante la masa molar podemos conocer la correspondencia con la masa, en gramos, de soluto:

$$M(H_2SO_4) = 1{,}008 \cdot 2 + 32{,}06 + 16{,}00 \cdot 4 = 98{,}076 \text{ g/mol}$$

$$2 \cancel{\text{ mol de } H_2SO_4} \cdot \frac{98{,}076 \text{ g de } H_2SO_4}{1 \cancel{\text{ mol de } H_2SO_4}} = 196{,}15 \text{ g de } H_2SO_4$$

a) Para el cálculo de la molalidad necesitamos la masa de disolvente:

$$m_D = m_d + m_s \quad \Rightarrow \quad m_d = m_D - m_s = 1150 \text{ g} - 196{,}15 \text{ g} = 953{,}85 \text{ g} \approx 0{,}954 \text{ kg}$$

$$m = \frac{n_s}{m_d(\text{kg})} = \frac{2 \text{ mol de } H_2SO_4}{0{,}954 \text{ kg}} = \mathbf{2{,}096\ m}$$

b) Para la fracción molar necesitamos conocer los moles que corresponden con los 953,85 g de agua:

$$M(H_2O) = 1{,}008 \cdot 2 + 16{,}00 = 18{,}016 \text{ g/mol}$$

$$n_d = \frac{m_d}{M(H_2O)} = \frac{953{,}85\ \text{g}\ \cancel{\text{de H}_2\text{O}}}{18{,}016\ \dfrac{\cancel{\text{g de H}_2\text{O}}}{\text{mol}}} = 52{,}94\ \text{mol de H}_2\text{O}$$

La fracción molar de soluto es:

$$\chi_s = \frac{n_s}{n_s + n_d} = \frac{2\ \text{mol}}{2\ \text{mol} + 52{,}94\ \text{mol}} = \mathbf{0{,}036}$$

c) Determinamos el porcentaje en masa:

$$\%\ \text{en masa} = \frac{m_{\text{soluto}}}{m_{\text{disolución}}} \cdot 100 = \frac{196{,}15\ \text{g}}{1150\ \text{g}} \cdot 100 = \mathbf{17{,}06\ \%}$$

Solubilidad de una sustancia

45. ¿Es lo mismo una disolución saturada que una disolución concentrada? Justifica tu respuesta.

No. Una disolución saturada en unas condiciones no admite más cantidad de soluto en el disolvente disponible. Una disolución concentrada tiene una elevada proporción de soluto con relación al disolvente, pero podría admitir más.

Por otra parte, una disolución saturada puede ser diluida si el soluto es poco soluble.

46. Explica por qué las cervezas se sirven habitualmente en vasos muy fríos.

Las cervezas son disoluciones en las que uno de los solutos es un gas (CO_2) y el disolvente es un líquido (agua). La solubilidad de los gases en líquidos disminuye al aumentar la temperatura.

La cerveza se sirve en vasos muy fríos para mantener la mayor cantidad de gas disuelto y así mantener por más tiempo su propiedad espumosa.

47. Razona y escribe en tu cuaderno si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

a) Al aumentar la temperatura aumenta la solubilidad de las sustancias.

b) Una disolución sobresaturada es una mezcla heterogénea.

c) La solubilidad del oxígeno en agua aumenta al aumentar la presión.

d) Una disolución saturada puede ser una disolución diluida.

e) Para eliminar el cloro del agua es bueno meterla en la nevera.

a) Esto es cierto en la mayoría de los casos en los que el soluto es un sólido y el disolvente es un líquido, aunque hay excepciones, como la disolución de la sal común en agua. Si el soluto es un gas, su solubilidad disminuye al aumentar la temperatura y la afirmación es falsa.

b) Una disolución sobresaturada es un estado inestable de la materia. Mientras se mantiene la disolución, la mezcla es homogénea. Cuando se produce algún cambio que hace que precipite el exceso de soluto, es una mezcla heterogénea.

c) Cierto. La solubilidad de los gases en agua aumenta al aumentar la presión.

d) Cierto. Sucede cuando el soluto es poco soluble en el disolvente.

e) Falso. La solubilidad de los gases en agua aumenta al disminuir la temperatura. Para eliminar el cloro del agua conviene calentarla.

48. Se disuelven 40 g de $Pb(NO_3)_2$ en 50 mL de agua a 60 °C y se deja enfriar la disolución muy lentamente hasta 10 °C. ¿Qué cantidad de soluto se irá al fondo? Datos: en la gráfica de solubilidades.

A una temperatura de 60 °C la solubilidad del $Pb(NO_3)_2$ es de casi 100 g de sal en 100 g de agua (100 mL). Para 50 mL pueden llegar a disolverse casi 50 g en agua. Los 40 g que tenemos sí están disueltos.

A 10 °C la cantidad de $Pb(NO_3)_2$ que se disuelve en 50 mL de una disolución saturada es como máximo 30 g.

Por tanto, al enfriar de 60 °C a 10 °C se irán al fondo la diferencia, **10 g de $Pb(NO_3)_2$ precipitan**.

49. **Tratamos de disolver 50 g de nitrato de potasio en 50 mL de agua. ¿Cómo podremos hacerlo si la temperatura del laboratorio es de 25 °C? Obtén la información que precises de la gráfica de solubilidad.**

Disolver 50 g en 50 mL es equivalente a disolver 100 g en 100 mL. A la temperatura de 25 °C la solubilidad del nitrato de potasio es 60 g/100 mL agua. Para que se puedan disolver 100 g/100 mL hay que calentar por lo menos hasta 50 °C.

Propiedades coligativas

50. **Cuando hace mucho frío, las carreteras se hielan, lo que supone un grave peligro para la circulación. Para evitarlo, se les echa sal. ¿Qué se consigue con ello?**

Al disolver sal en agua baja el punto de fusión del agua respecto al estado puro. La sal logra que el agua se mantenga líquida por debajo de 0 °C y evita la formación de hielo, que hace peligrosa la conducción pues reduce el rozamiento.

ACTIVIDADES FINALES (página 94)

51. **Cuál será, a 80 °C, la presión de vapor de una disolución que se prepara disolviendo 30 mL de glicerina, $C_3H_8O_3$, en 70 mL de agua. Datos: p_{agua}(80 °C) = 355 mm de Hg, d_{agua} = 1 g/mL, $d_{glicerina}$ = 1,26 g/mL.**

De acuerdo con la ley de Raoult:

$$\Delta p = p_0 - p = p_0 \cdot \chi_S = p_0 \cdot \frac{n_s}{n_s + n_d} \quad \Rightarrow \quad p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{n_s}{n_s + n_d}\right)$$

Con el dato de la densidad calculamos la masa de cada sustancia:

$$d = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = d \cdot V \begin{cases} m_{glicerina} = d_{glicerina} \cdot V_{glicerina} = 1{,}26 \dfrac{\text{g}}{\cancel{\text{mL}}} \cdot 30\ \cancel{\text{mL}} = 37{,}8\ \text{g} \\ m_{agua} = d_{agua} \cdot V_{agua} = 1 \dfrac{\text{g}}{\cancel{\text{mL}}} \cdot 70\ \cancel{\text{mL}} = 70\ \text{g} \end{cases}$$

Con la masa molar de la glicerina y del agua calculamos el número de moles de cada sustancia:

$$M(C_3H_8O_3) = 12{,}00 \cdot 3 + 1{,}008 \cdot 8 + 16{,}00 \cdot 3 = 92{,}064\ \text{g/mol}$$

$$37{,}8\ \cancel{\text{g de } C_3H_8O_3} \cdot \frac{1\ \text{mol}}{92{,}064\ \cancel{\text{g de } C_3H_8O_3}} = 0{,}41058\ \text{mol de } C_3H_8O_3$$

$$M(H_2O) = 1{,}008 \cdot 2 + 16{,}00 = 18{,}016\ \text{g/mol}$$

$$70\ \cancel{\text{g de } H_2O} \cdot \frac{1\ \text{mol}}{18{,}016\ \cancel{\text{g de } H_2O}} = 3{,}8854\ \text{mol de } H_2O$$

Aplicando la fórmula despejada más arriba:

$$p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{n_s}{n_s + n_d}\right) = 355\ \text{mm de Hg} \cdot \left(1 - \frac{0{,}41058\ \text{mol}}{0{,}41058\ \text{mol} + 3{,}8854\ \text{mol}}\right) = \mathbf{321\ mm\,de\,Hg}$$

52. **Cuál será, a 25 °C, la presión de vapor de una disolución que se prepara disolviendo 6 g de pentano, C_5H_{12}, en 80 mL de benceno, C_6H_6. Datos: $p_{benceno}$(25 °C) = 9,98 kPa, $d_{benceno}$ = 0,878 g/mL.**

De acuerdo con la ley de Raoult:

$$\Delta p = p_0 - p = p_0 \cdot \chi_S = p_0 \cdot \frac{n_s}{n_s + n_d} \quad \Rightarrow \quad p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{n_s}{n_s + n_d}\right)$$

Con el dato de la densidad calculamos la masa de benceno:

$$d = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m_{\text{benceno}} = d_{\text{benceno}} \cdot V_{\text{benceno}} = 0{,}878\,\frac{\text{g}}{\cancel{\text{mL}}} \cdot 80\,\cancel{\text{mL}} = 70{,}24\ \text{g}$$

Con la masa molar del pentano y del benceno calculamos el número de moles de cada sustancia:

$$M(C_5H_{12}) = 12{,}00 \cdot 5 + 1{,}008 \cdot 12 = 72{,}096\ \text{g/mol}$$

$$6\ \cancel{\text{g de } C_5H_{12}} \cdot \frac{1\ \text{mol}}{72{,}096\ \cancel{\text{g de } C_5H_{12}}} = 0{,}083222\ \text{mol de } C_5H_{12}$$

$$M(C_6H_6) = 12{,}00 \cdot 6 + 1{,}008 \cdot 6 = 78{,}048\ \text{g/mol}$$

$$70{,}24\ \cancel{\text{g de } C_6H_6} \cdot \frac{1\ \text{mol}}{78{,}048\ \cancel{\text{g de } C_6H_6}} = 0{,}89996\ \text{mol de } C_6H_6$$

Aplicando la fórmula despejada más arriba:

$$p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{n_s}{n_s + n_d}\right) = 9{,}98\ \text{kPa} \cdot \left(1 - \frac{0{,}083222\ \text{mol}}{0{,}083222\ \text{mol} + 0{,}89996\ \text{mol}}\right) = \mathbf{9{,}135\ kPa}$$

53. Indica algún procedimiento que te permita calentar agua por encima de 100 °C y que se mantenga en estado líquido.

Calentando el agua a una presión por encima de 1 atmósfera.

También se puede conseguir disolviendo en agua un soluto no volátil.

54. Determina la masa molar de una sustancia si al disolver 17 g de la misma en 150 g de benceno se obtiene una mezcla que se congela a –4 °C. Datos: K_c = 5,07 °C · kg/mol, T_f = 6 °C.

Aplicamos la expresión de la variación de la temperatura de congelación. Usando las definiciones de molalidad y de masa molar despejamos esta última:

$$\Delta T = K_c \cdot m \quad \Rightarrow \quad m = \frac{\Delta T}{K_c} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_s}{m_d(\text{kg})} = \frac{\Delta T}{K_c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{m_s(\text{g})}{M(\text{soluto})}}{m_d(\text{kg})} = \frac{\Delta T}{K_c}$$

$$M(\text{soluto}) = \frac{m_s(\text{g}) \cdot K_c}{m_d(\text{kg}) \cdot \Delta T} = \frac{m_s(\text{g}) \cdot K_c}{m_d(\text{kg}) \cdot (T_f - T)} = \frac{17\ \text{g} \cdot 5{,}07\,\frac{°\text{C} \cdot \text{kg}}{\text{mol}}}{0{,}150\ \text{kg} \cdot (6\ °\text{C} - (-4\ °\text{C}))} = \mathbf{57{,}46\ \frac{g}{mol}}$$

55. Explica por qué se hinchan las uvas pasas cuando se dejan en agua.

El interior de la uva es hipertónica con respecto al agua. Como la piel de la uva es una membrana semipermeable, el agua pasará a su través mientras que la presión osmótica dentro de la uva no se iguale con la de fuera. El resultado es que la uva se hincha.

56. En días de mucho calor las personas sensibles corren el riesgo de deshidratarse. ¿Por qué se recomienda que estas personas tomen bebidas isotónicas?

Para que el líquido que se ingiere no desestabilice el equilibrio osmótico.

57. ¿Por qué es peligroso inyectar agua destilada a una persona?

Las células sanguíneas se encuentran en el plasma sanguíneo, que es isotónico con respecto al medio intracelular. Si inyectamos agua destilada, aumentamos el disolvente, disminuye la concentración en el plasma y, como las membranas celulares son semipermeables, pasará agua de fuera a dentro hasta que se igualen las presiones osmóticas a ambos lados. Si se inyecta mucha cantidad de agua destilada, las células pueden llegar a romperse.

58. **Probablemente habrás oído que los náufragos se pueden morir de sed ¿cómo es posible si el agua del mar tiene más de un 90 % de agua?**

Debido a las sales disueltas la presión osmótica del agua del mar es mayor que la de los líquidos intracelulares. Si bebemos agua del mar, las células se encontrarán en un medio hipertónico y saldrá agua de su interior para que se igualen las presiones a ambos lados de la membrana celular. El resultado es que las células se deshidratan.

59. **La albúmina es una proteína del huevo. Calcula la masa molar de la albúmina si una disolución de 50 g de albúmina por litro de agua ejerce una presión osmótica de 14 mm de Hg a 25 °C. Dato: *R* = 0,082 (atm · L)/(mol · K).**

A partir de la expresión de la presión osmótica, la definición de molaridad y de masa molar, despejamos la masa molar:

$$\pi = M \cdot R \cdot T = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} R \cdot T = \frac{\dfrac{m_{\text{albúmina}}}{M(\text{albúmina})}}{V_{\text{disolución}}} \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad M(\text{albúmina}) = \frac{m_{\text{albúmina}} \cdot R \cdot T}{V_{\text{disolución}} \cdot \pi}$$

Expresamos la presión osmótica en atmósferas:

$$\pi = 14\ \cancel{\text{mm de Hg}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{atm}}}{760\ \cancel{\text{mm de Hg}}} = 0{,}018\ \text{atm}$$

Sustituyendo los datos que tenemos y operando:

$$M(\text{albúmina}) = \frac{m_{\text{albúmina}} \cdot R \cdot T}{V_{\text{disolución}} \cdot \pi} = \frac{50\ \text{g} \cdot 0{,}082\ \dfrac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot (25 + 273)\ \text{K}}{1\ \text{L} \cdot 0{,}018\ \text{atm}} = \mathbf{6{,}63 \cdot 10^4\ \frac{g}{mol}}$$

Ampliación (página 94)

60. **La etiqueta de un agua mineral dice que contiene sodio 50,5 mg/L, flúor 0,4 mg/L y calcio 9,2 mg/L. Sabemos que la cantidad diaria recomendada (CDR) para una persona de cada uno de estos elementos es:**

- **Na: 200 mg.**
- **F: 2 mg.**
- **Ca: 800 mg.**

¿Qué cantidad de agua deberíamos tomar para conseguir la CDR de cada uno de estos elementos?

Teniendo en cuenta las concentraciones de cada elemento, expresamos el volumen de cada elemento:

$$200\ \cancel{\text{mg de sodio}} \cdot \frac{1\ \text{L}}{50{,}5\ \cancel{\text{mg de sodio}}} = 4\ \text{L}$$

$$2\ \cancel{\text{mg de flúor}} \cdot \frac{1\ \text{L}}{0{,}4\ \cancel{\text{mg de flúor}}} = 5\ \text{L}$$

$$800\ \cancel{\text{mg de calcio}} \cdot \frac{1\ \text{L}}{9{,}2\ \cancel{\text{mg de calcio}}} = 87\ \text{L}$$

Para conseguir la CDR de cada uno de estos elementos deberíamos tomar: **4 L** en el caso del **sodio**, **5 L** en el caso del **flúor** y **87 L** en el caso del **calcio**.

61. **Calcula qué cantidad de sulfato de cobre(II) pentahidratado necesitas para preparar 250 mL de una disolución que sea 0,8 M de sulfato de cobre(II).**

A partir de la expresión de la molaridad:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} \quad \Rightarrow \quad n_{\text{soluto}} = M \cdot V_{\text{disolución}} = 0{,}8\ \text{M} \cdot 0{,}25\ \text{L} = 0{,}2\ \text{mol de } CuSO_4$$

El sulfato de cobre(II) pentahidratado tiene la siguiente fórmula: $CuSO_4{\cdot}5H_2O$

Entonces, para tener 1 mol de sulfato de cobre(II) necesitamos 1 mol de sulfato de cobre(II) pentahidratado, que es la sustancia que tenemos para preparar la disolución:

$$M(\text{CuSO}_4{\cdot}5\text{H}_2\text{O}) = 63{,}55 + 32{,}06 + 16{,}00 \cdot 4 + 5 \cdot \left(1{,}008 \cdot 2 + 16{,}00\right) = 249{,}69 \text{ g/mol}$$

$$0{,}2 \ \cancel{\text{mol de CuSO}_4} \cdot \frac{249{,}69 \text{ g de CuSO}_4{\cdot}5\text{H}_2\text{O}}{1 \ \cancel{\text{mol de CuSO}_4}} = \mathbf{49{,}95 \text{ g de CuSO}_4{\cdot}5\text{H}_2\text{O}}$$

62. Se prepara una disolución disolviendo 20 g de $CaCl_2$ en agua hasta tener 250 mL. ¿Cuál es la concentración de cada uno de los iones que resultan de esta sal?

Calculamos la concentración de la sal:

$$M(\text{CaCl}_2) = 40{,}08 + 35{,}45 \cdot 2 = 110{,}98 \text{ g/mol}$$

$$20 \ \cancel{\text{g de CaCl}_2} \cdot \frac{1 \text{ mol de CaCl}_2}{110{,}98 \ \cancel{\text{g de CaCl}_2}} = 0{,}180 \text{ mol de CaCl}_2$$

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} = \frac{0{,}180 \text{ mol}}{0{,}25 \text{ L}} = 0{,}72 \frac{\text{mol}}{\text{L}} = 0{,}72 \text{ M}$$

Por la estequiometría, calculamos la concentración de cada uno de sus iones:

$$\text{CaCl}_2 \rightarrow \text{Ca}^{2+} + 2 \text{ Cl}^-$$

$$M(\text{Cl}^-) = 0{,}72 \frac{\cancel{\text{mol de CaCl}_2}}{\text{L}} \cdot \frac{2 \text{ mol de Cl}^-}{1 \ \cancel{\text{mol de CaCl}_2}} = 1{,}44 \frac{\text{mol}}{\text{L}} = \mathbf{1{,}44 \text{ M}}$$

$$M(\text{Ca}^{2+}) = 0{,}72 \frac{\cancel{\text{mol de CaCl}_2}}{\text{L}} \cdot \frac{1 \text{ molde Ca}^{2+}}{1 \ \cancel{\text{mol de CaCl}_2}} = 0{,}72 \frac{\text{mol}}{\text{L}} = \mathbf{0{,}72 \text{ M}}$$

63. Se ha preparado una disolución mezclando 100 mL de $CaCl_2$ 2 M con 150 mL de NaCl 1,5 M. ¿Cuál será la concentración de los iones cloruro en la disolución resultante? Se supone que los volúmenes son aditivos.

De acuerdo con la estequiometría de los compuestos, la disolución que es 2 M en $CaCl_2$ es 4 M en Cl^-.
La disolución que es 1,5 M en NaCl es 1,5 M en iones Cl^-.

Calculamos los moles de iones cloruro que hay en cada una de las disoluciones que mezclamos:

- En la disolución de $CaCl_2$, la cantidad de ion cloruro es:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} \quad \Rightarrow \quad n_{\text{soluto}} = M \cdot V_{\text{disolución}} = 4 \text{ M} \cdot 0{,}1 \text{ L} = 0{,}4 \text{ mol de Cl}^-$$

- En la disolución de NaCl, la cantidad de ion cloruro es:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} \quad \Rightarrow \quad n_{\text{soluto}} = M \cdot V_{\text{disolución}} = 1{,}5 \text{ M} \cdot 0{,}15 \text{ L} = 0{,}225 \text{ mol de Cl}^-$$

Por tanto, la concentración de los iones cloruro en la disolución resultante será:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}} = \frac{(0{,}4 + 0{,}225) \text{ mol}}{(0{,}1 + 0{,}15) \text{ L}} = 2{,}5 \frac{\text{mol}}{\text{L}} = \mathbf{2{,}5 \text{ M}}$$

**64. Un recipiente tiene dos compartimentos iguales separados por una membrana semipermeable.
En uno de ellos se coloca una disolución que se ha preparado disolviendo 50 g de sacarosa, $C_{12}H_{22}O_{11}$, en agua hasta tener medio litro de mezcla y en el otro, una disolución que se ha preparado disolviendo 50 g de glucosa, $C_6H_{12}O_6$, en agua hasta tener medio litro de mezcla.
Al día siguiente, ¿cómo estarán los niveles de líquido en los dos compartimentos?**

Hay que determinar la presión osmótica de ambas disoluciones. Si son isotónicas, no habrá tránsito de moléculas de disolvente a través de la membrana semipermeable; pero si no es así, pasará disolvente desde la disolución hipotónica a la hipertónica hasta que se igualen las presiones.

Ambas disoluciones estarán a la misma temperatura. Para obtener un resultado numérico comparable, supongamos que es 20 °C.

La presión osmótica se calcula con la siguiente expresión:

$$\pi = M \cdot R \cdot T$$

Calculamos la masa molar de la sacarosa y con ella la molaridad de la disolución:

$$M(C_{12}H_{22}O_{11}) = 12{,}00 \cdot 12 + 1{,}008 \cdot 22 + 16{,}00 \cdot 11 = 342{,}176 \text{ g/mol}$$

$$M = \frac{n_s}{V_D} = \frac{\dfrac{50 \cancel{\text{g}}}{342{,}176 \dfrac{\cancel{\text{g}}}{\text{mol}}}}{0{,}5 \text{ L}} == 0{,}292 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

La presión osmótica en el compartimento de sacarosa será:

$$\pi = 0{,}292 \frac{\cancel{\text{mol}}}{\cancel{\text{L}}} \cdot 0{,}082 \frac{\text{atm} \cdot \cancel{\text{L}}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (20 + 273) \cancel{\text{K}} = 7{,}0 \text{ atm}$$

Calculamos la masa molar de la glucosa y con ella la molaridad de la disolución:

$$M(C_6H_{12}O_6) = 12{,}00 \cdot 6 + 1{,}008 \cdot 12 + 16{,}00 \cdot 6 = 180{,}096 \text{ g/mol}$$

$$M = \frac{n_s}{V_D} = \frac{\dfrac{50 \cancel{\text{g}}}{180{,}096 \dfrac{\cancel{\text{g}}}{\text{mol}}}}{0{,}5 \text{ L}} = 0{,}555 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

La presión osmótica en el compartimento de glucosa será:

$$\pi = 0{,}555 \frac{\cancel{\text{mol}}}{\cancel{\text{L}}} \cdot 0{,}082 \frac{\text{atm} \cdot \cancel{\text{L}}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (20 + 273) \cancel{\text{K}} = 13{,}3 \text{ atm}$$

Pasará disolvente (agua) de la disolución con menor presión osmótica (sacarosa) a la de mayor presión osmótica (glucosa) para igualar ambas presiones. **El nivel de líquido en el compartimento de la disolución de glucosa estará más elevado**.

QUÍMICA EN TU VIDA (página 96)

INTERPRETA

1. **¿Qué técnicas de separación de mezclas se emplean en la depuración del agua?**

Como se describe en la figura, en el proceso de depuración de agua se emplean las siguientes técnicas:

- Filtración: para retener las partículas más gruesas que arrastra el agua.
- Precipitación: se añaden sustancias químicas que hacen que algunas partículas menores precipiten al fondo.
- Decantación: mediante esta técnica los sedimentos que acompañan al agua se depositan en el fondo.

2. **¿En qué puntos del proceso se analizan las propiedades del agua?**

En el punto 3 y en el punto 7.

REFLEXIONA

3. **¿Por qué no se distribuye directamente el agua de los embalses por tuberías hasta las viviendas y fábricas?**

Porque esta agua no es potable. Debe potabilizarse primero en una planta de tratamiento de agua potable (ETAP) para ser apta para el consumo.

4. ¿Qué importancia puede tener el análisis inicial que se realiza del agua que llega a la planta?

Dependiendo de los resultados de este análisis inicial, el tratamiento de agua puede necesitar procesos más o menos exhaustivos, como por ejemplo, añadir más o menos cantidad de cloro y sustancias desinfectantes.

5. ¿Es agua pura, H_2O, la que se distribuye desde una planta potabilizadora?

No, es agua que contiene además otras sustancias: cloro, desinfectantes, etc.

OPINA

6. Algunas compañías suministradoras de agua penalizan en su factura el consumo excesivo: cobran un precio mayor por litro a viviendas que exceden un determinado consumo de agua. ¿Qué te parece esta medida?

Se trata de una medida para inculcar la importancia de no derrochar agua. Debemos ser conscientes de que el agua potable es un recurso limitado y actuar en consecuencia, adoptando las medidas de ahorro que podamos. Por tanto, puede ser una medida acertada.

Por otra parte, las empresas suministradoras de agua no cobran por el agua, sino por el suministro y el mantenimiento de las conducciones, tanto de acometida como de los desagües. El agua es un bien esencial que no tiene precio. De esta manera, cabe entender que se penaliza el consumo excesivo de agua, de un modo indirecto, por utilizar más la canalización del agua.

USA LAS TIC

7. Obtén más información en la red. Busca cómo se trata el agua que llega o sale de tu localidad.

Los alumnos y alumnas deben entrar en Internet y buscar la planta de tratamiento de agua potable (ETAP), que trata el agua que llega a su localidad. Buscarán información sobre de dónde capta el agua, los diferentes procesos que engloba el tratamiento, etc. En la mayoría de los casos se puede consultar la página web de la ETAP correspondiente, así como el tratamiento de aguas residuales.

4

Reacciones químicas

Reacciones químicas

4

PARA COMENZAR (página 97)

- **Busca algún ejemplo de reacciones químicas de interés. Ya sea para la biología o para la industria.**

  En el ámbito industrial y doméstico son muy importantes las reacciones de combustión. En ellas un combustible (ya sea sólido, líquido o gaseoso) entra en contacto con oxígeno produciendo dióxido de carbono y agua. Veamos la ecuación química que representa la combustión del butano:

$$2\ C_4H_{10} + 13\ O_2 \rightarrow 8\ CO_2 + 10\ H_2O$$

  En biología es destacable la reacción de respiración celular, mediante la que la glucosa en contacto con oxígeno da lugar a dióxido de carbono y agua:

$$C_6H_{12}O_6 + 6\ O_2 \rightarrow 6\ CO_2 + 6\ H_2O$$

- **¿Hay cambios visibles en la materia que no sean reacción química? Pon ejemplos.**

  Sí, la materia sufre también cambios físicos aparte de cambios químicos.

  Por ejemplo, cuando ponemos a hervir agua en una cazuela, vemos cómo se desprende vapor de agua. En este caso no hay transformación de unas sustancias en otras, tanto el líquido como el vapor es agua.

  Otro ejemplo es la disolución de azúcar en una taza de café. Ambas sustancias forman una disolución, pero no dan lugar a sustancias de naturaleza diferente al entrar en contacto.

PRACTICA (página 99)

1. **Ajusta las siguientes ecuaciones químicas:**

a) $\mathbf{Fe + O_2 \rightarrow Fe_2O_3}$

b) $\mathbf{HCl + Ca(OH)_2 \rightarrow CaCl_2 + H_2O}$

c) $\mathbf{CH_4 + O_2 \rightarrow CO_2 + 2\ H_2O}$

d) $\mathbf{KClO_3 \rightarrow KCl + O_2}$

a) $\mathbf{4}\ Fe + \mathbf{3}\ O_2 \rightarrow \mathbf{2}\ Fe_2O_3$

b) $\mathbf{2}\ HCl + Ca(OH)_2 \rightarrow CaCl_2 + \mathbf{2}\ H_2O$

c) $CH_4 + \mathbf{2}\ O_2 \rightarrow CO_2 + \mathbf{2}\ H_2O$

d) $\mathbf{2}\ KClO_3 \rightarrow \mathbf{2}\ KCl + \mathbf{3}\ O_2$

2. **Calcula el número de átomos que hay en cada caso.**

a) **2 mol de hierro.**

b) **5 mol de agua.**

c) **196 g de H_2SO_4.**

Utilizamos factores de conversión:

a) $$2\ \cancel{\text{mol de Fe}} \cdot \frac{6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{átomos}}{1\ \cancel{\text{mol de Fe}}} = \mathbf{1{,}204 \cdot 10^{24}\ \text{átomos}}$$

b) $$5\ \cancel{\text{mol de } H_2O} \cdot \frac{6{,}022 \cdot 10^{23}\ \cancel{\text{moléculas de } H_2O}}{1\ \cancel{\text{mol de } H_2O}} \cdot \frac{3\ \text{átomos}}{1\ \cancel{\text{molécula de } H_2O}} = \mathbf{9{,}033 \cdot 10^{24}\ \text{átomos}}$$

c) En este caso primero debemos calcular uno de los factores de conversión que necesitamos, la masa molar:

$$M(H_2SO_4) = 1{,}008 \cdot 2 + 32{,}06 + 16{,}00 \cdot 4 = 98{,}08\ \text{g/mol}$$

$$196 \text{ g de } \cancel{H_2SO_4} \cdot \frac{1 \text{ mol de } \cancel{H_2SO_4}}{98{,}08 \text{ g de } \cancel{H_2SO_4}} \cdot \frac{6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ moléculas de } H_2SO_4}{1 \text{ mol de } \cancel{H_2SO_4}} = 1{,}203 \cdot 10^{24} \text{ moléculas de } H_2SO_4$$

$$1{,}203 \cdot 10^{24} \text{ } \cancel{\text{moléculas de } H_2SO_4} \cdot \frac{7 \text{ átomos}}{1 \text{ } \cancel{\text{molécula de } H_2SO_4}} = \mathbf{8{,}424 \cdot 10^{24} \text{ átomos}}$$

ACTIVIDADES (página 101)

3. Ajusta las siguientes reacciones químicas y luego descríbelas con una frase:

a) $C_8H_{16}\,(l) + O_2\,(g) \rightarrow CO_2\,(g) + H_2O\,(l)$

b) $NH_3\,(g) + O_2\,(g) \rightarrow NO\,(g) + H_2O\,(g)$

a) $C_8H_{16}\,(l) + \mathbf{12}\ O_2\,(g) \rightarrow \mathbf{8}\ CO_2\,(g) + \mathbf{8}\ H_2O\,(l)$

Un mol de octano líquido reacciona con doce moles de oxígeno gaseoso para dar ocho moles de dióxido de carbono gaseoso y ocho moles de agua líquida.

b) $\mathbf{4}\ NH_3\,(g) + \mathbf{5}\ O_2\,(g) \rightarrow \mathbf{4}\ NO\,(g) + \mathbf{6}\ H_2O\,(g)$

Cuatro moles de amoniaco gaseoso reaccionan junto con cinco moles de oxígeno gaseoso para dar cuatro moles de monóxido de nitrógeno gaseoso y seis moles de agua gaseosa.

4. Escribe y ajusta la ecuación química de las siguientes reacciones:

a) El amoniaco reacciona con el ácido sulfúrico para dar sulfato de amonio.

b) Cuando el óxido de hierro(III) reacciona con el monóxido de carbono se obtiene hierro metálico y se libera dióxido de carbono.

a) $2\ NH_3 + H_2SO_4 \rightarrow (NH_4)_2SO_4$

b) $Fe_2O_3 + 3\ CO \rightarrow 2\ Fe + 3\ CO_2$

5. Ajusta las siguientes reacciones:

a) $NaOH + NaHCO_3 \rightarrow Na_2CO_3 + H_2O$

b) $CO_2 + C \rightarrow CO$

c) $HCl + Al \rightarrow AlCl_3 + H_2$

d) $HCl + Be(OH)_2 \rightarrow BeCl_2 + H_2O$

a) $NaOH + NaHCO_3 \rightarrow Na_2CO_3 + H_2O$

b) $CO_2 + C \rightarrow \mathbf{2}\ CO$

c) $\mathbf{6}\ HCl + \mathbf{2}\ Al \rightarrow \mathbf{2}\ AlCl_3 + \mathbf{3}\ H_2$

d) $\mathbf{2}\ HCl + Be(OH)_2 \rightarrow BeCl_2 + \mathbf{2}\ H_2O$

6. Ajusta las siguientes ecuaciones químicas:

a) $NaClO_3 \rightarrow NaCl + O_2$

b) $HNO_3 + Fe \rightarrow H_2 + Fe(NO_3)_2$

c) $KI + Pb(NO_3)_2 \rightarrow PbI_2 + KNO_3$

d) $C + O_2 \rightarrow CO_2$

e) $Ca(HCO_3)_2 \rightarrow CaCO_3 + CO_2 + H_2O$

a) $\mathbf{2}\ NaClO_3 \rightarrow \mathbf{2}\ NaCl + \mathbf{3}\ O_2$

b) $\mathbf{2}\ HNO_3 + Fe \rightarrow H_2 + Fe(NO_3)_2$

c) $\mathbf{2}\ KI + Pb(NO_3)_2 \rightarrow PbI_2 + \mathbf{2}\ KNO_3$

d) $C + O_2 \rightarrow CO_2$

e) $Ca(HCO_3)_2 \rightarrow CaCO_3 + CO_2 + H_2O$

ACTIVIDAD (página 102)

7. Calcula la masa de una muestra de óxido de hierro(III) con riqueza del 65 % que se necesita para obtener 0,320 mol de óxido de hierro(III) puro.

Pasamos de cantidad, en mol, a masa, en gramos, utilizando la masa molar:

$$M(Fe_2O_3) = 55{,}85 \cdot 2 + 16{,}00 \cdot 3 = 159{,}7 \text{ g/mol}$$

$$0{,}320 \cancel{\text{ mol de } Fe_2O_3} \cdot \frac{159{,}7 \text{ g de } Fe_2O_3}{1 \cancel{\text{ mol de } Fe_2O_3}} = 51{,}104 \text{ g de } Fe_2O_3$$

Tenemos en cuenta la riqueza de la muestra:

$$51{,}104 \cancel{\text{ g de } Fe_2O_3} \cdot \frac{100 \text{ g de muestra}}{65 \cancel{\text{ g de } Fe_2O_3}} = \mathbf{78{,}62 \text{ g de } Fe_2O_3}$$

ACTIVIDADES (página 103)

8. 20 mL de una muestra de ácido sulfúrico con riqueza del 85 % y densidad 1,96 g/mL, ¿cuántos moles de ácido sulfúrico puro son?

Calculamos primero la masa que corresponde a los 20 mL de muestra:

$$d = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = d \cdot V = 1{,}96 \frac{\text{g}}{\cancel{\text{mL}}} \cdot 20 \cancel{\text{ mL}} = 39{,}2 \text{ g de muestra}$$

Con el dato de la riqueza obtenemos los gramos de ácido puro:

$$39{,}2 \cancel{\text{ g de muestra}} \cdot \frac{85 \text{ g de } H_2SO_4}{100 \cancel{\text{ g de muestra}}} = 33{,}32 \text{ g de } H_2SO_4$$

Con la masa molar calculamos los moles:

$$M(H_2SO_4) = 1{,}008 \cdot 2 + 32{,}06 + 16{,}00 \cdot 4 = 98{,}076 \text{ g/mol}$$

$$33{,}32 \cancel{\text{ g de } H_2SO_4} \cdot \frac{1 \text{ mol de } H_2SO_4}{98{,}076 \cancel{\text{ g de } H_2SO_4}} = 0{,}3397 \text{ mol de } H_2SO_4 \approx \mathbf{0{,}340 \text{ mol de } H_2SO_4}$$

9. ¿Cuántos moles de vapor de agua hay en un recipiente de 1,25 L, a 300 °C si la presión es de 0,25 atm? ¿Cuál es su masa? Dato: *R* = 0,082 (atm · L)/(mol · K).

Aplicamos la ecuación de estado de los gases ideales para conocer el número de moles:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T}$$

Sustituimos y resolvemos:

$$n = \frac{0{,}25 \cancel{\text{ atm}} \cdot 1{,}25 \cancel{\text{ L}}}{0{,}082 \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\cancel{\text{K}} \cdot \text{mol}} \cdot (300 + 273) \cancel{\text{ K}}} = \mathbf{6{,}65 \cdot 10^{-3} \text{ mol de } H_2O}$$

Para calcular la masa necesitamos la masa molar:

$$M(H_2O) = 1{,}008 \cdot 2 + 16{,}00 = 18{,}016 \text{ g/mol}$$

Por tanto:

$$6{,}65 \cdot 10^{-3} \cancel{\text{ mol de } H_2O} \cdot \frac{18{,}016 \text{ g de } H_2O}{1 \cancel{\text{ mol de } H_2O}} = \mathbf{0{,}120 \text{ g de } H_2O}$$

ACTIVIDADES (página 104)

10. La acidez de estómago se debe a un exceso en la producción de HCl por parte de nuestro organismo. Se trata tomando una lechada de hidróxido de aluminio que reacciona con el ácido dando cloruro de aluminio y agua.

a) Escribe la reacción que tiene lugar.

b) Calcula la masa de hidróxido de aluminio que hay que tomar para neutralizar 10 mL de HCl 1,25 M.

c) Calcula la masa de cloruro de aluminio que se forma.

a) Escribimos la ecuación química ajustada:

$$\mathbf{3\ HCl + Al(OH)_3 \rightarrow AlCl_3 + 3\ H_2O}$$

b) La estequiometría de la reacción nos permite conocer la proporción en mol en que reaccionan las sustancias. Calculamos la cantidad de HCl, en mol, que corresponde al volumen de disolución indicado:

$$10\ \cancel{\text{mL de disolución HCl}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{L de disolución HCl}}}{1000\ \cancel{\text{mL de disolución HCl}}} \cdot \frac{1{,}25\ \text{mol de HCl}}{1\ \cancel{\text{L de disolución HCl}}} = 0{,}0125\ \text{mol de HCl}$$

Hallamos la masa de hidróxido de aluminio necesaria:

$$M[\text{Al(OH)}_3] = 26{,}98 + (16{,}00 + 1{,}008) \cdot 3 = 78{,}004\ \text{g/mol}$$

$$0{,}0125\ \cancel{\text{mol de HCl}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{mol de Al(OH)}_3}}{3\ \cancel{\text{mol de HCl}}} \cdot \frac{78{,}004\ \text{g de Al(OH)}_3}{1\ \cancel{\text{mol de Al(OH)}_3}} = 0{,}325\ \text{g de Al(OH)}_3 = \mathbf{325\ mg\ de\ Al(OH)_3}$$

c) Con la estequiometría de la reacción calculamos la masa de cloruro de aluminio formada:

$$M[\text{AlCl}_3] = 26{,}98 + 35{,}45 \cdot 3 = 133{,}33\ \text{g/mol}$$

$$0{,}0125\ \cancel{\text{mol de HCl}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{mol de AlCl}_3}}{3\ \cancel{\text{mol de HCl}}} \cdot \frac{133{,}33\ \text{g de AlCl}_3}{1\ \cancel{\text{mol de AlCl}_3}} = 0{,}5555\ \text{g de AlCl}_3 = \mathbf{556\ mg\ de\ AlCl_3}$$

11. Cuando se calienta el clorato de potasio se desprende oxígeno y queda un residuo de cloruro de potasio. Calcula la cantidad de clorato que se calentó si el oxígeno que se obtuvo, recogido en un recipiente de 5 L a la temperatura de 80 °C, ejercía una presión de 3,5 atm. Calcula la masa de cloruro de potasio que se obtuvo. Dato: $R = 0{,}082$ (atm · L)/(mol · K).

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$\mathbf{2\ KClO_3 \rightarrow 3\ O_2 + 2\ KCl}$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

2 $KClO_3$	→	3 O_2	+	2 KCl
2 mol de clorato de potasio	se descomponen para dar	3 mol de oxígeno	y	2 mol de cloruro de potasio
		5 L, 80 °C, 3,5 atm		

3. Expresamos en mol la cantidad de oxígeno. Como es un gas, utilizamos la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{3{,}5\ \cancel{\text{atm}} \cdot 5\ \cancel{\text{L}}}{0{,}082\ \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (80 + 273)\ \cancel{\text{K}}} = 0{,}60457\ \text{mol de O}_2$$

4. La estequiometría de la reacción permite calcular las cantidades de las otras sustancias que intervienen.

La masa de clorato de potasio que se calentó será:

$$M(\text{KClO}_3) = 39{,}10 + 35{,}45 + 16{,}00 \cdot 3 = 122{,}55\ \text{g/mol}$$

$$0{,}60457\ \cancel{\text{mol de O}_2} \cdot \frac{2\ \cancel{\text{mol de KClO}_3}}{3\ \cancel{\text{mol de O}_2}} \cdot \frac{122{,}55\ \text{g de KClO}_3}{1\ \cancel{\text{mol de KClO}_3}} = 49{,}39\ \text{g de KClO}_3 \approx \mathbf{49{,}4\ g\ de\ KClO_3}$$

La masa de cloruro de potasio que se obtuvo será:

$$M(\text{KCl}) = 39{,}10 + 35{,}45 = 74{,}55\ \text{g/mol}$$

$$0{,}60457\ \cancel{\text{mol de O}_2} \cdot \frac{2\ \cancel{\text{mol de KCl}}}{3\ \cancel{\text{mol de O}_2}} \cdot \frac{74{,}55\ \text{g de KCl}}{1\ \cancel{\text{mol de KCl}}} = 30{,}047\ \text{g de KCl} \approx \mathbf{30{,}05\ g\ de\ KCl}$$

12. **Cuando un hidrocarburo reacciona con una cantidad limitada de oxígeno se produce monóxido de carbono y agua.**

a) Escribe la reacción en la que el C_3H_8 se transforma en CO.

b) ¿Qué volumen de O_2, medido a 0 °C y 1 atm, reacciona con 4 L de C_3H_8 a 2 atm y 25 °C?

c) ¿Qué volumen de CO se obtendrá, medido a 0 °C y 1 atm?

a) Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$\mathbf{2\ C_3H_8 + 7\ O_2 \rightarrow 6\ CO_2 + 8\ H_2O}$$

b) Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

2 C_3H_8	+	**7 O_2**	→	**6 CO**	+	**8 H_2O**
2 mol de propano	reaccionan con	7 mol de oxígeno	para dar	6 mol de monóxido de carbono	y	8 mol de agua
4 L, 25 °C, 2 atm						

Expresamos en mol la cantidad de propano. Como es un gas, utilizamos la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{2\ \cancel{\text{atm}} \cdot 4\ \cancel{\text{L}}}{0{,}082\ \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (25 + 273)\ \cancel{\text{K}}} = 0{,}3274\ \text{mol de C}_3\text{H}_8$$

La estequiometría de la reacción permite calcular las cantidades de las otras sustancias que intervienen.

$$0{,}3274\ \cancel{\text{mol de C}_3\text{H}_8} \cdot \frac{7\ \text{mol de O}_2}{2\ \cancel{\text{mol de C}_3\text{H}_8}} = 1{,}14585\ \text{mol de O}_2$$

El volumen de oxígeno a 0 °C y 1 atm que reacciona será:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{1{,}14585\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082\ \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot 273\ \cancel{\text{K}}}{1\ \cancel{\text{atm}}} = \mathbf{25{,}65\ L\ de\ O_2}$$

c) Del mismo modo, el volumen de CO que se obtiene a 0 °C y 1 atm será:

$$0{,}3274\ \cancel{\text{mol de C}_3\text{H}_8} \cdot \frac{6\ \text{mol de CO}}{2\ \cancel{\text{mol de C}_3\text{H}_8}} = 0{,}982\ \text{mol de CO}$$

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{0{,}982\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082\ \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot 273\ \cancel{\text{K}}}{1\ \cancel{\text{atm}}} = 21{,}987\ \text{L} \approx \mathbf{22{,}0\ L\ de\ CO}$$

ACTIVIDADES (página 105)

13. **El nitrato de amonio, NH_4NO_3, es una sustancia que se utiliza habitualmente como fertilizante. Bajo la acción de detonadores explota descomponiéndose en nitrógeno, oxígeno y agua, razón por la cual también se utiliza para fabricar explosivos. En un bidón tenemos 0,5 kg de una sustancia que tiene un 80 % de riqueza en nitrato de amonio. Si llegase a explotar totalmente, calcula:**

a) La presión que ejercería el nitrógeno que se libera si el bidón es de 50 L y la temperatura es de 35 °C.

b) El volumen de agua que aparecería en el bidón.

Datos: *R* = 0,082 (atm · L)/(mol · K), densidad del agua: 1 g/mL.

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$\mathbf{2\ NH_4NO_3 \rightarrow 2\ N_2 + O_2 + 4\ H_2O}$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

$2\ NH_4NO_3$	$\rightarrow$	$2\ N_2$	+	O_2	+	$4\ H_2O$
2 mol de nitrato de amonio	se descomponen para dar	2 mol de nitrógeno	y	1 mol de oxígeno	y	4 mol de agua
0,5 kg, 80 % en NH_4NO_3						

3. Expresamos en mol la cantidad de nitrato de amonio puro que existe en el bidón:

$$0{,}5\ \cancel{\text{kg de producto}} \cdot \frac{80\ \text{kg de } NH_4NO_3\ \text{puro}}{100\ \cancel{\text{kg de producto}}} = 0{,}4\ \text{kg de } NH_4NO_3\ \text{puro} = 0{,}4 \cdot 10^3\ \text{g de } NH_4NO_3\ \text{puro}$$

$$M(NH_4NO_3) = 14{,}01 + 1{,}008 \cdot 4 + 14{,}01 + 16{,}00 \cdot 3 = 80{,}052\ \text{g/mol}$$

$$0{,}4 \cdot 10^3\ \cancel{\text{g de } NH_4NO_3\ \text{puro}} \cdot \frac{1\ \text{mol de } NH_4NO_3}{80{,}052\ \cancel{\text{g de } NH_4NO_3\ \text{puro}}} = 4{,}997\ \text{mol de } NH_4NO_3$$

4. La estequiometría de la reacción permite calcular las cantidades de las otras sustancias que intervienen:

a) La presión que ejercería el nitrógeno que se libera será:

$$4{,}997\ \cancel{\text{mol de } NH_4NO_3} \cdot \frac{2\ \text{mol de } N_2}{2\ \cancel{\text{mol de } NH_4NO_3}} = 4{,}997\ \text{mol de } N_2$$

Con la ecuación de estado de los gases ideales hallamos la presión:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{4{,}997\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082 \dfrac{\text{atm} \cdot \cancel{\text{L}}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (35 + 273)\ \cancel{\text{K}}}{50\ \cancel{\text{L}}} = \mathbf{2{,}52\ atm}$$

b) El volumen de agua que aparecería en el bidón será:

$$5\ \cancel{\text{mol de } NH_4NO_3} \cdot \frac{4\ \text{mol de } H_2O}{2\ \cancel{\text{mol de } NH_4NO_3}} = 10\ \text{mol de } H_2O$$

Como el agua es un líquido, calculamos la masa equivalente a estos moles y, por medio de la densidad, el volumen que ocupa:

$$M(H_2O) = 1{,}008 \cdot 2 + 16{,}00 = 18{,}016\ \text{g/mol}$$

$$9{,}994\ \cancel{\text{mol de } H_2O} \cdot \frac{18{,}016\ \text{g de } H_2O}{1\ \cancel{\text{mol de } H_2O}} = 180{,}05\ \text{g de } H_2O$$

$$180{,}05\ \cancel{\text{g de } H_2O} \cdot \frac{1\ \text{mL de } H_2O}{1\ \cancel{\text{g de } H_2O}} = \mathbf{180\ mL\ de\ H_2O}$$

14. El óxido de hierro(III) es un compuesto que se utiliza, entre otras cosas, para fabricar cintas de grabación magnética. Para determinar su riqueza en una muestra se le hace reaccionar con hidrógeno gaseoso, y como resultado se obtiene hierro y agua.

a) Determina el porcentaje en óxido de hierro(III) si 100 g de muestra consumen 33,6 L de H_2, medidos a 0 °C y 1 atm.

b) ¿Qué cantidad de hierro se depositará en el proceso?

Dato: $R = 0{,}082$ (atm · L)/(mol · K).

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$\mathbf{Fe_2O_3 + 3\,H_2 \rightarrow 2\,Fe + 3\,H_2O}$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

Fe_2O_3	+	3 H_2	→	2 Fe	+	3 H_2O
1 mol de óxido de hierro(III)	reacciona con	3 mol de hidrógeno	para dar	2 mol de hierro	y	3 mol de agua
100 g de muestra		33,6 L a 0 °C y 1 atm				

3. Expresamos en mol la cantidad de hidrógeno. Como es un gas en las condiciones dadas:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{1\,\cancel{\text{atm}} \cdot 33{,}6\,\cancel{\text{L}}}{0{,}082\,\dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (0 + 273)\,\cancel{\text{K}}} = 1{,}5 \text{ mol de } H_2$$

4. La estequiometría de la reacción permite calcular las cantidades de las otras sustancias que intervienen:

a) Inicialmente calculamos la cantidad de Fe_2O_3 que reacciona con esa cantidad de H_2:

$$1{,}5\,\cancel{\text{mol de } H_2} \cdot \frac{1 \text{ mol de } Fe_2O_3}{3\,\cancel{\text{mol de } H_2}} = 0{,}5 \text{ mol de } Fe_2O_3$$

Con la masa molar hallamos la masa de esa sustancia que contiene la muestra:

$$M(Fe_2O_3) = 55{,}85 \cdot 2 + 16{,}00 \cdot 3 = 159{,}7 \text{ g/mol}$$

$$0{,}5\,\cancel{\text{mol de } Fe_2O_3} \cdot \frac{159{,}7 \text{ g de } Fe_2O_3}{1\,\cancel{\text{mol de } Fe_2O_3}} = 79{,}9 \text{ g de } Fe_2O_3$$

Puesto que esta es la cantidad que hay en 100 g de muestra, concluimos que tiene una riqueza del **79,8 %** en Fe_2O_3.

b) Para calcular la cantidad de hierro que se deposita:

$$1{,}5\,\cancel{\text{mol de } H_2} \cdot \frac{2 \text{ mol de Fe}}{3\,\cancel{\text{mol de } H_2}} = 1 \text{ mol de Fe}$$

$$M(\text{Fe}) = 55{,}85 \text{ g/mol}$$

$$1\,\cancel{\text{mol de Fe}} \cdot \frac{55{,}85 \text{ g de Fe}}{1\,\cancel{\text{mol de Fe}}} = \mathbf{55{,}85\ g\ de\ Fe}$$

ACTIVIDADES (página 106)

15. Cuando el yoduro de potasio reacciona con nitrato de plomo(II), se obtiene un precipitado amarillo de yoduro de plomo(II) y otra sustancia. Si se mezclan 25 mL de una disolución 3 M en KI con 15 mL de disolución 4 M en $Pb(NO_3)_2$, calcula la cantidad de precipitado amarillo que se obtendrá.

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$\mathbf{2\,KI + Pb(NO_3)_2 \rightarrow PbI_2 + 2\,KNO_3}$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

2 KI	+	$Pb(NO_3)_2$	→	**PbI_2**	+	**2 KNO_3**
2 mol de yoduro de potasio	reaccionan con	1 mol de nitrato de plomo(II)	para dar	1 mol de yoduro de plomo(II)	y	2 mol de nitrato de potasio
25 mL, 3 M		15 mL, 4 M				

3. Expresamos en mol la cantidad de las sustancias que reaccionan. Puesto que conocemos las cantidades de los dos reactivos, lo más probable es que uno de ellos actúe de reactivo limitante; determinaremos cuál:

$$25\cdot 10^{-3}\ \cancel{\text{L de KI}}\cdot\frac{3\text{ mol de KI}}{1\ \cancel{\text{L de KI}}}=7{,}5\cdot 10^{-2}\text{ mol de KI}$$

$$15\cdot 10^{-3}\ \cancel{\text{L de Pb}(NO_3)_2}\cdot\frac{4\text{ mol de Pb}(NO_3)_2}{1\ \cancel{\text{L de Pb}(NO_3)_2}}=6\cdot 10^{-2}\text{ mol de Pb}(NO_3)_2$$

Determinamos el reactivo limitante teniendo en cuenta la estequiometría de la reacción:

$$6\cdot 10^{-2}\ \cancel{\text{mol de Pb}(NO_3)_2}\cdot\frac{2\text{ mol de KI}}{1\ \cancel{\text{mol de Pb}(NO_3)_2}}=12\cdot 10^{-2}\text{ mol de KI}$$

Esta cantidad es mayor que los $7{,}5\cdot 10^{-2}$ moles que reaccionan de esta sustancia, por tanto, el reactivo limitante es el KI.

4. Calculamos la cantidad de sustancia que se obtiene a partir de la cantidad existente del reactivo limitante. La estequiometría de la reacción permite determinarla:

$$7{,}5\cdot 10^{-2}\ \cancel{\text{mol de KI}}\cdot\frac{1\text{ mol de PbI}_2}{2\ \cancel{\text{mol de KI}}}=3{,}75\cdot 10^{-2}\text{ mol de PbI}_2$$

$$M(PbI_2)=207{,}2+126{,}9\cdot 2=461{,}0\text{ g/mol}$$

$$3{,}75\cdot 10^{-2}\ \cancel{\text{mol de PbI}_2}\cdot\frac{461{,}0\text{ g de PbI}_2}{1\ \cancel{\text{mol de PbI}_2}}=\mathbf{17{,}29\ g\ de\ PbI_2}$$

16. **El cadmio reacciona con el ácido nítrico dando nitrato de cadmio e hidrógeno. Se hacen reaccionar 8 g de cadmio con 60 mL de HNO_3 1,5 M. ¿Qué volumen de hidrógeno, medido a 0 °C y 1 atm, se obtendrá como máximo? Dato: *R* = 0,082 (atm · L)/(mol · K).**

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$\mathbf{Cd+2\ HNO_3\rightarrow Cd(NO_3)_2+H_2}$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

Cd	+	**2 HNO_3**	→	$Cd(NO_3)_2$	+	**H_2**
1 mol de cadmio	reacciona con	2 mol de ácido nítrico	para dar	1 mol de nitrato de cadmio	y	1 mol de hidrógeno
8 g		60 mL, 1,5 M				0 °C y 1 atm

3. Expresamos en mol la cantidad de las sustancias que reaccionan. Puesto que conocemos las cantidades de los dos reactivos, lo más probable es que uno de ellos actúe de reactivo limitante; determinaremos cuál:

$$8\ \cancel{\text{g de Cd}}\cdot\frac{1\text{ mol de Cd}}{112{,}4\ \cancel{\text{g de Cd}}}=7{,}12\cdot 10^{-2}\text{ mol de Cd}$$

$$60\cdot 10^{-3}\ \cancel{\text{L de HNO}_3}\cdot\frac{1{,}5\text{ mol de HNO}_3}{1\ \cancel{\text{L de HNO}_3}}=9\cdot 10^{-2}\text{ mol de HNO}_3$$

Determinamos el reactivo limitante teniendo en cuenta la estequiometría de la reacción:

$$9\cdot 10^{-2}\ \cancel{\text{mol de HNO}_3}\cdot\frac{1\text{ mol de Cd}}{2\ \cancel{\text{mol de HNO}_3}}=4{,}5\cdot 10^{-2}\text{ mol de Cd}$$

Esta cantidad es menor que los $7{,}12\cdot 10^{-2}$ moles que reaccionan de esta sustancia. Por tanto, el reactivo limitante es el HNO_3.

4. Calculamos la cantidad de hidrógeno que se obtiene a partir de la cantidad existente del reactivo limitante. La estequiometría de la reacción permite determinarla:

$$9\cdot 10^{-2}\ \cancel{\text{mol de HNO}_3}\cdot\frac{1\text{ mol de H}_2}{2\ \cancel{\text{mol de HNO}_3}}=4{,}5\cdot 10^{-2}\text{ mol de H}_2$$

Como el hidrógeno es un gas hallamos el volumen que ocupa con la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p\cdot V=n\cdot R\cdot T\quad\Rightarrow\quad V=\frac{n\cdot R\cdot T}{p}=\frac{4{,}5\cdot 10^{-2}\ \cancel{\text{mol}}\cdot 0{,}082\ \frac{\cancel{\text{atm}}\cdot\text{L}}{\cancel{\text{mol}}\cdot\cancel{\text{K}}}\cdot 273\ \cancel{\text{K}}}{1\ \cancel{\text{atm}}}=\mathbf{1\ L\ de\ H_2}$$

ACTIVIDADES (página 107)

17. El formol, CH_2O, es un compuesto que se utiliza para fabricar colas de madera. En la industria se obtiene haciendo reaccionar metanol, CH_3OH, con oxígeno, en un proceso en el que también se forma agua. El rendimiento de la operación es del 92 %.

a) Escribe la ecuación química de la reacción.

b) Determina la masa de formol que se puede obtener a partir de 50 g de metanol.

a) Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$\mathbf{2\ CH_3OH + O_2 \rightarrow 2\ CH_2O + 2\ H_2O}$$

b) Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

2 CH_3OH	+	O_2	→	2 CH_2O	+	2 H_2O
2 mol de metanol	reaccionan con	1 mol de oxígeno	para dar	2 mol de formol	y	2 mol de agua
50 g						

Expresamos en mol la cantidad de las sustancias que reaccionan. Puesto que conocemos las cantidades de los dos reactivos, lo más probable es que uno de ellos actúe de reactivo limitante; determinaremos cuál:

$$M(CH_3OH)=12{,}00+1{,}008\cdot 3+16{,}00+1{,}008=32{,}032\text{ g/mol}$$

$$50\ \cancel{\text{g de CH}_3\text{OH}}\cdot\frac{1\text{ mol de CH}_3\text{OH}}{32{,}032\ \cancel{\text{g de CH}_3\text{OH}}}=1{,}56\text{ mol de CH}_3\text{OH}$$

La estequiometría de la reacción permite calcular las cantidades de las otras sustancias que intervienen:

$$1{,}56\ \cancel{\text{mol de CH}_3\text{OH}}\cdot\frac{2\text{ mol de CH}_2\text{O}}{2\ \cancel{\text{mol de CH}_3\text{OH}}}=1{,}56\text{ mol de CH}_2\text{O}$$

$$M(CH_2O)=12{,}00+1{,}008\cdot 2+16{,}00=30{,}016\text{ g/mol}$$

$$1{,}56\ \cancel{\text{mol de CH}_2\text{O}}\cdot\frac{30{,}016\text{ g de CH}_2\text{O}}{1\ \cancel{\text{mol de CH}_2\text{O}}}=46{,}85\text{ g de CH}_2\text{O}$$

Esta es la cantidad que se obtendría si el proceso fuese con un rendimiento del 100 %. Como no es así, calculamos la cantidad real:

$$46{,}85\ \cancel{\text{g de CH}_2\text{O teóricos}}\cdot\frac{92\text{ g de CH}_2\text{O reales}}{100\ \cancel{\text{g de CH}_2\text{O teóricos}}}=\mathbf{43{,}1\ g\ de\ CH_2O\ reales}$$

18. Uno de los pasos para la fabricación del ácido sulfúrico comprende la reacción del dióxido de azufre con oxígeno para producir trióxido de azufre. En una ocasión se mezclaron 11 L de dióxido de azufre a 1,2 atm y 50 °C con oxígeno y se formaron 30 g de trióxido de azufre. Determina:

a) El rendimiento de la reacción.

b) Las moléculas de oxígeno que reaccionaron.

Dato: R = 0,082 (atm · L)/(mol · K).

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$\mathbf{2\ SO_2 + O_2 \rightarrow 2\ SO_3}$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

$2\ SO_2$	+	O_2	→	$2\ SO_3$
2 mol de dióxido de azufre	reacciona con	1 mol de oxígeno	para dar	2 mol de trióxido de azufre
11 L, 1,2 atm y 50 °C				30 g

3. Expresamos en mol la cantidad de las sustancias que reaccionan. Como el SO_2 es un gas, utilizamos la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{1{,}2\ \cancel{\text{atm}} \cdot 11\ \cancel{\text{L}}}{0{,}082\ \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (50+273)\ \cancel{\text{K}}} = 0{,}498 \text{ mol de } SO_2$$

La estequiometría de la reacción permite calcular los moles de SO_3 que se obtendrían como máximo a partir de esta cantidad:

$$0{,}498\ \cancel{\text{mol de } SO_2} \cdot \frac{2 \text{ mol de } SO_3}{2\ \cancel{\text{mol de } SO_2}} = 0{,}498 \text{ mol de } SO_3$$

$$M(SO_3) = 32{,}06 + 16{,}00 \cdot 3 = 80{,}06 \text{ g/mol}$$

$$0{,}498\ \cancel{\text{mol de } SO_3} \cdot \frac{80{,}06 \text{ g de } SO_3}{1\ \cancel{\text{mol de } SO_3}} = 39{,}9 \text{ g de } SO_3$$

a) Determinamos el rendimiento del proceso:

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{cantidad real}}{\text{cantidad teórica}} \cdot 100 = \frac{30 \text{ g de } SO_3 \text{ reales}}{39{,}9 \text{ g de } SO_3 \text{ teóricos}} \cdot 100 = \mathbf{75{,}19\,\%}$$

b) Para calcular las moléculas de oxígeno que han reaccionado debemos calcular los moles utilizando la estequiometría de la reacción:

$$0{,}498\ \cancel{\text{mol de } SO_2} \cdot \frac{1 \text{ mol de } O_2}{2\ \cancel{\text{mol de } SO_2}} = 0{,}249 \text{ mol de } O_2$$

Y teniendo en cuenta el número de Avogadro:

$$0{,}249\ \cancel{\text{mol de } O_2} \cdot \frac{6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ moléculas de } O_2}{1\ \cancel{\text{mol de } O_2}} = \mathbf{1{,}5 \cdot 10^{23}\ \text{moléculas de } O_2}$$

ACTIVIDAD (página 108)

19. Denominamos valor añadido de un producto a la diferencia entre el costo de las materias primas y el proceso que ha permitido obtenerlo y lo que se puede obtener de su venta. Razona qué sectores de la industria química pueden tener más valor añadido.

La industria química de la salud es la que mayor valor añadido obtiene en sus productos (medicamentos y productos fitosanitarios o zoosanitarios). En las industrias de este sector, los costes de producción de cada producto son muy bajos comparados con el precio final de venta.

ACTIVIDADES (página 109)

20. Explica por qué la mezcla de gases que entra en el reactor entra por arriba y se dirige hasta la parte inferior y la mezcla de N_2 y H_2 reciclado entra por la parte inferior.

La mezcla nueva entra a temperatura ambiente, más fría, con lo que será más densa con tendencia a sumergirse en el fluido más caliente y más ligero. La mezcla de gases reciclados viene a mayor temperatura, más ligera, tendrá tendencia a ascender en el seno de un fluido más frío y denso.

21. Explica por qué el lecho del catalizador está encima del calefactor.

La reacción entre N_2 y H_2 ocurre después de haber elevado la temperatura. El catalizador solo favorece el proceso a altas temperaturas.

22. La mezcla de gases que sale del reactor entra caliente en el intercambiador de calor y sale más fría. ¿En qué se aprovecha este calor cedido?

Se aprovecha en aumentar la temperatura de los gases reciclados.

23. ¿Por qué entra el agua fría por la parte inferior del condensador y sale por la parte superior?

Esto favorece el flujo, pues a medida que se calienta el agua, esta se hace menos densa y asciende en el seno de un fluido más frío y denso.

24. ¿Cuál crees que es la función de los compresores?

En el interior del reactor la presión debe ser elevada, 200 atm. Los compresores mantienen este valor de la presión.

25. Por cada 17 g de NH_3 que se recogen, ¿cuántos gramos de N_2 y de H_2 deben entrar en el reactor? ¿Es esta la cantidad de N_2 e H_2 que hay en el reactor? Razona tu respuesta.

La reacción química ajustada es:

$$N_2\,(g) + 3\,H_2\,(g) \rightarrow 2\,NH_3\,(g)$$

Calculamos la masa molar para conocer los moles de amoniaco:

$$M(NH_3) = 14{,}01 + 1{,}008 \cdot 3 = 17{,}034 \text{ g/mol}$$

$$17\ \cancel{\text{g de NH}_3} \cdot \frac{1 \text{ mol de NH}_3}{17{,}034\ \cancel{\text{g de NH}_3}} = 0{,}998 \text{ mol de NH}_3$$

Por la estequiometría de la reacción calculamos los moles de nitrógeno e hidrógeno que intervienen:

$$0{,}998\ \cancel{\text{mol de NH}_3} \cdot \frac{1 \text{ mol de N}_2}{2\ \cancel{\text{mol de NH}_3}} = 0{,}499 \text{ mol de N}_2$$

$$0{,}998\ \cancel{\text{mol de NH}_3} \cdot \frac{3 \text{ mol de H}_2}{2\ \cancel{\text{mol de NH}_3}} = 1{,}497 \text{ mol de H}_2$$

Pasamos de cantidad, en mol, a masa, en gramos, usando la masa molar:

$$M(N_2) = 14{,}01 \cdot 2 = 28{,}02 \text{ g/mol}$$

$$0{,}499\ \cancel{\text{mol de N}_2} \cdot \frac{28{,}02 \text{ g de N}_2}{1\ \cancel{\text{mol de N}_2}} = 13{,}98 \text{ g de N}_2 \approx \mathbf{14\ g\ de\ N_2}$$

$$M(H_2) = 1{,}008 \cdot 2 = 2{,}016 \text{ g/mol}$$

$$1{,}497\ \cancel{\text{mol de H}_2} \cdot \frac{2{,}016 \text{ g de H}_2}{1\ \cancel{\text{mol de H}_2}} = 3{,}018 \text{ g de H}_2 \approx \mathbf{3\ g\ de\ H_2}$$

En el reactor deben entrar 14 g de nitrógeno y 3 gramos de hidrógeno.

No es esta la cantidad de nitrógeno e hidrógeno que hay en el interior del reactor, hay más. La reacción no es completa y hay siempre nitrógeno e hidrógeno reciclados.

ACTIVIDADES (página 110)

26. Escribe el proceso químico global de fabricación de ácido nítrico a partir del amoniaco.

En el convertidor, los reactivos de la primera reacción son la materia prima, amoniaco y el oxígeno del aire. Se produce monóxido de nitrógeno, NO, que se reutiliza, y agua:

$$4\,NH_3 + 5\,O_2 \rightarrow 4\,NO + 6\,H_2O$$

En el reactor, la segunda reacción reutiliza el monóxido de nitrógeno, NO, de la primera y última reacción con aún más oxígeno del aire:

$$3\,O_2 + (4+2)\,NO \rightarrow 6\,NO_2$$

En la torre de absorción hay dos reacciones: la tercera, que reutiliza el dióxido de nitrógeno, NO_2, junto con agua:

$$3\ H_2O + 6\ NO_2 \rightarrow 3\ HNO_2 + 3\ HNO_3$$

La cuarta y última que reutiliza el ácido nitroso, HNO_2, y produce monóxido de nitrógeno, NO, para devolverlo a la segunda reacción:

$$3\ HNO_2 \rightarrow 2\ NO + HNO_3 + H_2O$$

En definitiva, entran cuatro moles de amoniaco, ocho moles de oxígeno y tres moles de agua; y se producen cuatro moles de ácido nítrico y siete moles de agua:

$$4\ NH_3 + 8\ O_2 + 3\ H_2O \rightarrow 4\ HNO_3 + 7\ H_2O$$

Tres moles de agua entre los reactivos se pueden eliminar de entre los siete moles de agua entre los productos:

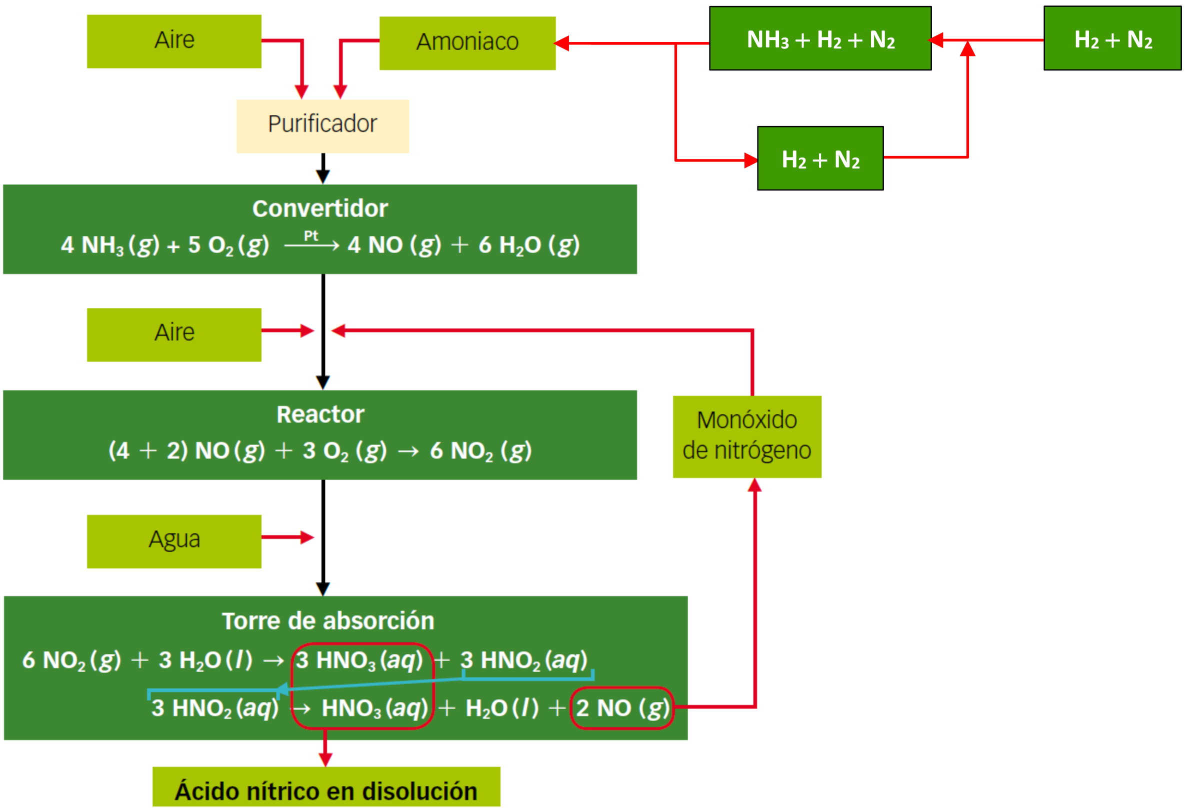
$$4\ NH_3 + 8\ O_2 \rightarrow 4\ HNO_3 + 4\ H_2O$$

Y simplificando:

$$NH_3 + 2\ O_2 \rightarrow HNO_3 + H_2O$$

Un mol de amoniaco con dos moles de oxígeno dan un mol de ácido nítrico con un mol de agua.

27. En muchas ocasiones, el amoniaco que se utiliza para fabricar el ácido nítrico procede de una instalación cercana. Completa el esquema de fabricación del ácido nítrico con el de la planta que fabrica el amoniaco que se utiliza en ella.



28. El coeficiente estequiométrico del NO en la reacción que tiene lugar en el reactor es 4 + 2. Explica por qué se pone cada uno de estos números.

Porque tienen diferente origen. Los cuatro moles de NO proceden del convertidor y los dos moles de NO proceden de la torre de absorción.

29. Algunos petróleos tienen en su composición compuestos nitrogenados que, cuando se queman, producen óxidos de nitrógeno, unos gases causantes de lluvia ácida. Relaciona este problema con las reacciones que intervienen en la fabricación de ácido nítrico y explica la formación de la lluvia ácida.

En la torre de absorción un óxido de nitrógeno se pone en contacto con agua produciendo el ácido. Los vapores de NO_2 procedentes de la combustión entran en contacto con el agua de la lluvia y se produce la misma reacción dando lugar al ácido.

ACTIVIDADES (página 111)

30. Escribe el proceso químico global de obtención del ácido sulfúrico a partir del azufre. Incluye en la ecuación las sustancias que participan en todos los pasos.

En el horno se introduce la materia prima, azufre y oxígeno en exceso:

$$S + O_2 \rightarrow SO_2$$

En el convertidor se usa el SO_2 procedente del horno:

$$\frac{1}{2} O_2 + SO_2 \rightarrow SO_3$$

En la torre de lavado hay varias reacciones químicas que entran en juego. Primero el gas SO_3 en contacto con el agua produce H_2SO_4 concentrado.

$$H_2O + SO_3 \rightarrow H_2SO_4$$

Usando este concentrado de H_2SO_4 con más SO_3 procedente del convertidor:

$$H_2SO_4 + SO_3 \rightarrow H_2S_2O_7$$

En la misma torre de lavado junto con el agua se produce H_2SO_4:

$$H_2O + H_2S_2O_7 \rightarrow 2\,H_2SO_4$$

En conjunto:

$$(S + O_2) + \left[\frac{1}{2} O_2 + SO_2\right] + \{H_2O + SO_3\} + \langle H_2SO_4 + SO_3 \rangle + H_2O + H_2S_2O_7 \rightarrow$$

$$\rightarrow (SO_2) + [SO_3] + \{H_2SO_4\} + \langle H_2S_2O_7 \rangle + 2\,H_2SO_4$$

Simplificando:

$$S + \frac{3}{2} O_2 + H_2O \rightarrow H_2SO_4$$

Pasando a coeficientes enteros:

$$2\,S + 3\,O_2 + 2\,H_2O \rightarrow 2\,H_2SO_4$$

31. Explica de dónde procede el oxígeno que reacciona con el dióxido de azufre en el paso 2.

Es oxígeno que procede del horno. Viene mezclado con los productos, ya que el oxígeno entra en exceso al horno.

32. En el paso 1 de fabricación del ácido sulfúrico se puede utilizar pirita (disulfuro de hierro, FeS_2) en lugar de azufre. Además de SO_2, en el horno se obtiene Fe_2O_3. Escribe y ajusta la ecuación química del proceso.

La ecuación química ajustada del proceso es:

$$4\,FeS_2 + 11\,O_2 \rightarrow 8\,SO_2 + 2\,Fe_2O_3$$

33. Indica cuál puede ser la composición cualitativa de los gases de desecho que salen del paso 3.

Como se inyecta aire de la atmósfera, entre los gases de desecho estarán los que forman la atmósfera, N_2 y O_2 principalmente, y además, óxido de nitrógeno después de las altas temperaturas del horno.

34. **Algunos petróleos contienen compuestos azufrados que, cuando se queman, producen óxidos de azufre, unos gases causantes de lluvia ácida. Relaciona este problema con las reacciones que intervienen en la fabricación de ácido sulfúrico y explica la formación de la lluvia ácida.**

En la torre de lavado se da el siguiente proceso químico, con un paso intermedio:

$$SO_3 + H_2O \rightarrow H_2SO_4$$

Esta misma reacción se da cuando los vapores de SO_2 y SO_3 entran en contacto con el agua de lluvia, dando acidez a las gotas que atrapan estos vapores.

ACTIVIDADES (página 112)

35. **Escribe la ecuación química del proceso completo de obtención del hierro a partir de magnetita.**

Tienen lugar las siguientes reacciones químicas:

$$4\ C + 2\ O_2 \rightarrow 4\ CO$$

$$Fe_3O_4 + 4\ CO \rightarrow 3\ Fe + 4\ CO_2$$

El producto de la primera reacción es reactivo de la segunda y se puede escribir.

$$4\ C + 2\ O_2 + Fe_3O_4 \rightarrow 3\ Fe + 4\ CO_2$$

36. **El $CaCO_3$ se descompone cuando se calienta, dando CaO y CO_2. Escribe la ecuación de esta reacción e indica hacia qué parte del alto horno (superior o inferior) avanzará cada una de estas sustancias.**

La ecuación química ajustada es:

$$CaCO_3 \rightarrow CaO + CO_2$$

El óxido de calcio cae dentro del horno, mientas que el CO_2 gaseoso asciende.

37. **La pirita es un mineral de hierro. Su utilización en los altos hornos puede provocar importantes daños medioambientales, ¿por qué?**

Porque contiene azufre y en el alto horno puede dar lugar a óxidos de azufre que provoquen lluvia ácida.

38. **Indica la composición cualitativa de los gases que se pueden liberar en la parte superior de un alto horno.**

Al inyectar aire saldrán los gases que componen el aire, N_2 y O_2, junto con óxidos de nitrógeno. Además, el CO_2 y el CO, que forman parte de la reacción, también pueden salir.

ACTIVIDADES (página 113)

39. **Ordena, según la proporción de carbono, el hierro dulce, el hierro de fundición y el acero.**

De mayor a menor proporción de carbono:

Fundición > acero > hierro dulce

40. **El acero sufre una dilatación similar al hormigón, por eso ambos se utilizan conjuntamente en el hormigón armado. Explica qué problemas se podrían derivar para la construcción de estructuras con hormigón armado si el acero sufriese una dilatación mayor que el hormigón.**

Bajo temperaturas extremas se dilatarían longitudes muy diferentes comprometiendo el trabajo conjunto de ambos materiales. Se fabricarían tensiones internas que harían que el hormigón se resquebrajase; así, al perder cohesión interna, pierde resistencia entre las cargas.

41. **Razona por qué los utensilios de cocina son de acero y no de hierro.**

Porque el acero resiste la corrosión en ambientes húmedos, no así el hierro.

ACTIVIDADES FINALES (página 117)

Concentración de una disolución

42. Indica cuáles de las siguientes características se conservan en una reacción química:

a) La masa de los reactivos es igual a la masa de los productos.

b) El volumen de los reactivos es igual al volumen de los productos.

c) La temperatura de los reactivos es igual a la temperatura de los productos.

d) El número de átomos en los reactivos es igual que en los productos.

e) El número de partículas (moléculas o iones) en los reactivos es igual que en los productos.

a) Verdadero. Ley de Lavoisier.

b) Falso. Contradice la hipótesis de Avogadro.

c) No tiene por qué. En las combustiones se libera energía.

d) Verdadero. Es consecuencia de la ley de Lavoisier.

e) No tiene por qué ser así.

43. Ajusta las siguientes reacciones químicas y luego descríbelas con una frase:

a) $\mathbf{H_2S\,(\mathit{g}) + O_2\,(\mathit{g}) \rightarrow H_2O\,(\mathit{l}) + SO_2\,(\mathit{g})}$

b) $\mathbf{NaCl\,(\mathit{s}) + H_2O\,(\mathit{l}) \rightarrow NaOH\,(\mathit{aq}) + Cl_2\,(\mathit{g}) + H_2\,(\mathit{g})}$

c) $\mathbf{NaBr\,(\mathit{s}) + H_3PO_4\,(\mathit{aq}) \rightarrow Na_2HPO_4\,(\mathit{aq}) + HBr\,(\mathit{g})}$

a) $\mathbf{2}\ H_2S\,(g) + \mathbf{3}\ O_2\,(g) \rightarrow \mathbf{2}\ H_2O\,(l) + \mathbf{2}\ SO_2\,(g)$

Dos moles de sulfuro de hidrógeno gaseoso con tres moles de gas oxígeno reaccionan para dar dos moles de agua líquida y dos moles de dióxido de azufre gaseoso.

b) $\mathbf{2}\ NaCl\,(s) + \mathbf{2}\ H_2O\,(l) \rightarrow \mathbf{2}\ NaOH\,(aq) + Cl_2\,(g) + H_2\,(g)$

Dos moles de cloruro de sodio sólido con dos moles de agua líquida reaccionan para dar dos moles de hidróxido de sodio en disolución acuosa, un mol de gas cloro y un mol de gas hidrógeno.

c) $\mathbf{2}\ NaBr\,(s) + H_3PO_4\,(aq) \rightarrow Na_2HPO_4\,(aq) + \mathbf{2}\ HBr\,(g)$

Dos moles de bromuro de sodio sólido con un mol de ácido fosfórico en disolución acuosa reaccionan para dar un mol de hidrogenofosfato de sodio en disolución acuosa y dos moles de bromuro de hidrógeno gaseoso.

44. Cuando se hace reaccionar amoniaco con oxígeno se obtiene monóxido de nitrógeno y agua.

a) Escribe la reacción teniendo en cuenta que todas las sustancias están en estado gaseoso.

b) Determina el volumen de oxígeno, medido a 0 °C y 1 atm, que se necesita para que reaccione totalmente con 50 g de amoniaco.

c) Calcula las moléculas de monóxido de nitrógeno que se obtendrán.

Dato: $\mathbf{\mathit{N}_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}}$ **partículas.**

a) Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$\mathbf{4\ NH_3\,(\mathit{g}) + 5\ O_2\,(\mathit{g}) \rightarrow 4\ NO\,(\mathit{g}) + 6\ H_2O\,(\mathit{g})}$$

b) Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

4 NH_3 (*g*)	+	**5 O_2 (*g*)**	→	**4 NO (*g*)**	+	**6 H_2O(*g*)**
4 mol de amoniaco	con	5 mol de oxígeno	reaccionan para dar	4 mol de monóxido de nitrógeno	y	6 mol de agua
50 g		0 °C y 1 atm				

Expresamos en mol la cantidad de las sustancias que reaccionan:

$$M(NH_3) = 14{,}01 + 1{,}008 \cdot 3 = 17{,}034\text{ g/mol}$$

$$50\ \cancel{\text{g de NH}_3} \cdot \frac{1\text{ mol de NH}_3}{17{,}034\ \cancel{\text{g de NH}_3}} = 2{,}9353\text{ mol de NH}_3$$

La estequiometría de la reacción permite calcular las cantidades de las otras sustancias que intervienen:

$$2{,}9353\ \cancel{\text{mol de NH}_3} \cdot \frac{5\ \text{mol de O}_2}{4\ \cancel{\text{mol de NH}_3}} = 3{,}6691\ \text{mol de O}_2$$

Teniendo en cuenta que el gas está a 0 °C y 1 atm, y considerando que es gas ideal:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{3{,}6691\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082 \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot 273\ \cancel{\text{K}}}{1\ \cancel{\text{atm}}} = 82{,}13\ \text{L} \approx \mathbf{82\ L\ de\ O_2}$$

c) Según la estequiometría de la reacción, se obtendrá el mismo número de moles de NO que han reaccionado de NH_3:

$$2{,}94\ \cancel{\text{mol de NO}} \cdot \frac{6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{moléculas}}{1\ \cancel{\text{mol de NO}}} = \mathbf{1{,}77 \cdot 10^{24}\ moléculas}$$

45. Habitualmente el carbono reacciona con el oxígeno para dar dióxido de carbono. Pero cuando no hay oxígeno suficiente, la reacción produce monóxido de carbono, un gas venenoso que puede producir la muerte por asfixia.

a) Escribe la ecuación de las reacciones en las que el carbono se transforma en dióxido de carbono y en monóxido de carbono.

b) Calcula las moléculas de oxígeno que deben reaccionar para que 1 kg de carbono se transforme íntegramente en cada una de esas sustancias.

c) Calcula la presión que ejercería el monóxido o el dióxido de carbono que has calculado en el apartado anterior si la combustión se produce en una habitación de 3 m × 4 m × 2,5 m que se encuentra a 25 °C.

Datos: *R* = 0,082 (atm · L)/(mol · K), *N*A = 6,022 · 1023 partículas, 1 atm = 760 mm de Hg.

a) Escribimos la ecuación química de cada reacción y las ajustamos:

$$\mathbf{2\ C\,(\mathit{s}) + O_2\,(\mathit{g}) \rightarrow 2\ CO\,(\mathit{g})}$$
$$\mathbf{C\,(\mathit{s}) + O_2\,(\mathit{g}) \rightarrow CO_2\,(\mathit{g})}$$

b) Debajo de cada sustancia, en cada reacción, escribimos los datos que conocemos:

2 C (*s*)	**+**	**O_2 (*g*)**	**→**	**2 CO (*g*)**
2 mol de carbono	con	1 mol de oxígeno	reaccionan para dar	2 mol de monóxido de carbono
1 kg = 10^3 g				

C (*s*)	**+**	**O_2 (*g*)**	**→**	**CO_2 (*g*)**
1 mol de carbono	con	1 mol de oxígeno	reaccionan para dar	1 mol de dióxido de carbono
1 kg = 10^3 g				

Expresamos, en mol, la cantidad de carbono que reacciona, en ambas ecuaciones:

$$10^3\ \cancel{\text{g de C}} \cdot \frac{1\ \text{mol de C}}{12{,}00\ \cancel{\text{g de C}}} = 83{,}\widehat{3}\ \text{mol de C}$$

Hallamos el número de moléculas de oxígeno en cada caso:

- Para la primera reacción:

$$83{,}\widehat{3}\ \cancel{\text{mol de C}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{mol de O}_2}}{2\ \cancel{\text{mol de C}}} \cdot \frac{6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{moléculas de O}_2}{1\ \cancel{\text{mol de O}_2}} = \mathbf{2{,}51 \cdot 10^{25}\ moléculas\ de\ O_2}$$

- Para la segunda reacción:

$$83{,}\widehat{3}\ \cancel{\text{mol de C}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{mol de O}_2}}{1\ \cancel{\text{mol de C}}} \cdot \frac{6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{moléculas de O}_2}{1\ \cancel{\text{mol de O}_2}} = \mathbf{5{,}02 \cdot 10^{25}\ moléculas\ de\ O_2}$$

c) Con la ecuación de estado de los gases ideales hallamos la presión que ejerce el monóxido o el dióxido de carbono si la combustión se produce en una habitación de 3 m × 4 m × 2,5 m que se encuentra a 25 °C:

$$V = 3\text{ m} \times 4\text{ m} \times 2{,}5\text{ m} = 30\text{ m}^3 = 30\cancel{\text{m}^3} \cdot \frac{10^3\cancel{\text{dm}^3}}{1\cancel{\text{m}^3}} \cdot \frac{1\text{ L}}{1\cancel{\text{dm}^3}} = 3 \cdot 10^4\text{ L}$$

- Para la primera reacción:

$$83{,}\widehat{3}\cancel{\text{ mol de C}} \cdot \frac{2\text{ mol de CO}}{2\cancel{\text{ mol de C}}} = 83{,}\widehat{3}\text{ mol de CO}$$

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad p_{CO} = \frac{n_{CO} \cdot R \cdot T}{V} = \frac{83{,}\widehat{3}\cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082\dfrac{\text{atm} \cdot \cancel{\text{L}}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (25+273)\cancel{\text{K}}}{3 \cdot 10^4\cancel{\text{L}}} = 0{,}0679\text{ atm}$$

- Para la segunda reacción:

$$83{,}\widehat{3}\cancel{\text{ mol de C}} \cdot \frac{1\text{ mol de CO}_2}{1\cancel{\text{ mol de C}}} = 83{,}\widehat{3}\text{ mol de CO}_2$$

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad p_{CO_2} = \frac{n_{CO_2} \cdot R \cdot T}{V} = \frac{83{,}\widehat{3}\cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082\dfrac{\text{atm} \cdot \cancel{\text{L}}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (25+273)\cancel{\text{K}}}{3 \cdot 10^4\cancel{\text{L}}} = 0{,}0679\text{ atm}$$

Ambas presiones son iguales. Convertimos la presión a milímetros de mercurio:

$$p = 0{,}0679\cancel{\text{ atm}} \cdot \frac{760\text{ mm de Hg}}{1\cancel{\text{ atm}}} = \mathbf{51{,}6\ mm\,de\,Hg}$$

46. Cuando una persona sufre intoxicación por monóxido de carbono se le aplica oxígeno para que el monóxido se transforme en dióxido de carbono, ya que este gas no es venenoso. A una persona intoxicada se le ha administrado el oxígeno que se encontraba en una bombona de 2 L, a 3 atm de presión y a 25 °C. Calcula el volumen de monóxido de carbono que ha podido reaccionar como máximo con esa cantidad de oxígeno y el volumen de dióxido de carbono que se habrá obtenido si ambos se miden a 1 atm y a 25 °C.

Dato: $R = 0{,}082$ (atm · L)/(mol · K).

1. Escribimos la ecuación química de cada reacción y la ajustamos:

$$2\text{ CO}(g) + \text{O}_2(g) \rightarrow 2\text{ CO}_2(g)$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

2 CO (*s*)	+	O_2 (*g*)	→	2 CO_2 (*g*)
2 mol de monóxido de carbono	con	1 mol de oxígeno	reaccionan para dar	2 mol de monóxido de carbono
1 atm, 25 °C		2 L, 3 atm, 25 °C		1 atm, 25 °C

3. Expresamos en mol la cantidad de las sustancias que reaccionan. Como el O_2 es un gas, utilizamos la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{3\cancel{\text{atm}} \cdot 2\cancel{\text{L}}}{0{,}082\dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (25+273)\cancel{\text{K}}} = 0{,}246\text{ mol de O}_2$$

4. La estequiometría de la reacción permite calcular las cantidades de las otras sustancias que intervienen.

La cantidad de monóxido de carbono que reacciona será:

$$0{,}246\cancel{\text{ mol de O}_2} \cdot \frac{2\text{ mol de CO}}{1\cancel{\text{ mol de O}_2}} = 0{,}492\text{ mol de CO}$$

La cantidad de dióxido de carbono que se forma será:

$$0{,}246\cancel{\text{ mol de O}_2} \cdot \frac{2\text{ mol de CO}_2}{1\cancel{\text{ mol de O}_2}} = 0{,}492\text{ mol de CO}_2$$

En ambos casos la cantidad de partículas es la misma. El volumen de gas que se obtiene es:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{0{,}492\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082\ \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (25 + 273)\ \cancel{\text{K}}}{1\ \cancel{\text{atm}}} = \mathbf{12\ L}$$

ACTIVIDADES FINALES (página 118)

47. El octano, C_8H_{18}, presente en la gasolina, es un líquido que se quema con el oxígeno del aire dando dióxido de carbono y agua.

a) Escribe la ecuación química de la reacción que se produce.

b) Calcula el volumen de oxígeno, en condiciones estándar, que se necesita para quemar 1 L de gasolina de densidad 0,8 g/mL.

c) Calcula el volumen de dióxido de carbono que se desprenderá, medido en condiciones estándar.

Datos: R = 0,082 (atm · L)/(mol · K), cond. est.: 0 °C, 10^5 Pa; 1 atm = 1,013 · 10^5 Pa.

a) Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$\mathbf{2\ C_8H_{18}\ (\mathit{l}) + 25\ O_2\ (\mathit{g}) \ \uparrow 16\ CO_2\ (\mathit{g}) + 18\ H_2O\ (\mathit{l})}$$

b) Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

2 C_8H_{18} (*l*)	**+**	**25 O_2 (*g*)**	**→**	**16 CO_2 (*g*)**	**+**	**18 H_2O (*l*)**
2 mol de octano	con	25 mol de oxígeno	reaccionan para dar	16 mol de dióxido de carbono	y	18 mol de agua
1 L, 0,8 g/mL		0 °C, 10^5 Pa		0 °C, 10^5 Pa		

Suponiendo que la gasolina es octano puro, calculamos, en mol, la cantidad de gasolina equivalente al volumen de 1 L; utilizamos el dato de la densidad:

$$1\ \cancel{\text{L de C}_8\text{H}_{18}} \cdot \frac{10^3\ \cancel{\text{mL de C}_8\text{H}_{18}}}{1\ \cancel{\text{L de C}_8\text{H}_{18}}} \cdot \frac{0{,}8\ \text{g de C}_8\text{H}_{18}}{1\ \cancel{\text{mL de C}_8\text{H}_{18}}} = 800\ \text{g de C}_8\text{H}_{18}$$

$$M(C_8H_{18}) = 12{,}00 \cdot 8 + 1{,}008 \cdot 18 = 114{,}144\ \text{g/mol}$$

$$800\ \cancel{\text{g de C}_8\text{H}_{18}} \cdot \frac{1\ \text{mol de C}_8\text{H}_{18}}{114{,}144\ \cancel{\text{g de C}_8\text{H}_{18}}} = 7{,}0087\ \text{mol de C}_8\text{H}_{18}$$

La estequiometría nos permite calcular los moles de oxígeno que se necesitan:

$$7{,}0087\ \cancel{\text{mol de C}_8\text{H}_{18}} \cdot \frac{25\ \text{mol de O}_2}{2\ \cancel{\text{mol de C}_8\text{H}_{18}}} = 87{,}6086\ \text{mol de O}_2$$

Calculamos el volumen de oxígeno con la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p = 10^5\ \cancel{\text{Pa}} \cdot \frac{1\ \text{atm}}{1{,}013 \cdot 10^5\ \cancel{\text{Pa}}} = 0{,}987\ \text{atm}$$

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{87{,}6086\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082\ \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot 273\ \cancel{\text{K}}}{0{,}987\ \cancel{\text{atm}}} = \mathbf{1987\ L\ de\ O_2}$$

c) De forma similar, calcularemos el CO_2 que se vierte a la atmósfera:

$$7{,}0869\ \cancel{\text{mol de C}_8\text{H}_{18}} \cdot \frac{16\ \text{mol de CO}_2}{2\ \cancel{\text{mol de C}_8\text{H}_{18}}} = 56{,}0695\ \text{mol de CO}_2$$

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{56{,}0695\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082\ \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot 273\ \cancel{\text{K}}}{0{,}987\ \cancel{\text{atm}}} = 1271{,}7\ \text{L} \approx \mathbf{1272\ L\ de\ CO_2}$$

48. **El gas cloro se obtiene en la industria por electrolisis de una disolución acuosa de cloruro de sodio (agua de mar). La reacción (sin ajustar) es la siguiente:**

$$\mathbf{NaCl + H_2O \rightarrow NaOH + Cl_2\ (\mathit{g}) + H_2\ (\mathit{g})}$$

a) ¿Qué volumen de cloro, medido en condiciones estándar, se obtendrá si se utilizan 2,5 kg de cloruro de sodio?

b) ¿Cuántos kilogramos de NaOH se obtendrán?

Datos: $R = 0{,}082$ (atm · L)/(mol · K), Cond. est.: 0 °C, 10^5 Pa; 1 atm = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa.

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$\mathbf{2\ NaCl + 2\ H_2O \rightarrow 2\ NaOH + Cl_2\ (\mathit{g}) + H_2\ (\mathit{g})}$$

2. Debajo de cada sustancia, escribimos los datos que conocemos:

2 NaCl	+	2 H_2O	→	2 NaOH	+	Cl_2 (*g*)	+	H_2 (*g*)
2 mol de cloruro de sodio	con	2 mol de agua	reacciona para dar	2 mol de hidróxido de sodio	y	1 mol de cloro	y	1 mol de hidrógeno
2,5 kg = $2{,}5 \cdot 10^3$ g								

a) Expresamos la cantidad de NaCl:

$$M(\text{NaCl}) = 23{,}00 + 35{,}45 = 58{,}45 \text{ g/mol}$$

$$2{,}5 \cdot 10^3 \ \cancel{\text{g de NaCl}} \cdot \frac{1 \text{ mol de NaCl}}{58{,}45 \ \cancel{\text{g de NaCl}}} = 42{,}77 \text{ mol de NaCl}$$

La estequiometría nos permite calcular los moles de cloro que se obtienen:

$$42{,}77 \ \cancel{\text{mol de NaCl}} \cdot \frac{1 \text{ mol de Cl}_2}{2 \ \cancel{\text{mol de NaCl}}} = 21{,}386 \text{ mol de Cl}_2$$

Calculamos el volumen de cloro con la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p = 10^5 \ \cancel{\text{Pa}} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{1{,}013 \cdot 10^5 \ \cancel{\text{Pa}}} = 0{,}987 \text{ atm}$$

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{21{,}386 \ \cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082 \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot 273 \ \cancel{\text{K}}}{0{,}987 \ \cancel{\text{atm}}} = \mathbf{485\ L\ de\ Cl_2}$$

b) De forma similar, calculamos la masa de hidróxido de sodio que se obtiene:

$$42{,}77 \ \cancel{\text{mol de NaCl}} \cdot \frac{2 \text{ mol de NaOH}}{2 \ \cancel{\text{mol de NaCl}}} = 42{,}77 \text{ mol de NaOH}$$

$$M(\text{NaOH}) = 23{,}00 + 16{,}00 + 1{,}008 = 40{,}008 \text{ g/mol}$$

$$42{,}77 \ \cancel{\text{mol de NaOH}} \cdot \frac{40{,}008 \text{ g de NaOH}}{1 \ \cancel{\text{mol de NaOH}}} = 1711{,}2 \text{ g de NaOH} = \mathbf{1{,}71\ kg\ de\ NaOH}$$

49. **El carburo de silicio, SiC, es un abrasivo industrial que se obtiene haciendo reaccionar dióxido de silicio con carbono. Como producto de la reacción se obtiene, además, monóxido de carbono.**

a) Escribe la ecuación química ajustada de la reacción.

b) Calcula la masa de carbono que debe reaccionar para producir 25 kg de SiC.

c) Calcula la presión que ejercerá el monóxido de carbono que se obtiene si se recoge en un recipiente de 1 m³ a 50 °C.

Dato: $R = 0{,}082$ (atm · L)/(mol · K).

a) Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$\mathbf{SiO_2 + 3\ C \rightarrow SiC + 2\ CO}$$

b) Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

SiO_2	+	3 C	→	SiC	+	2 CO
1 mol de dióxido de silicio	con	3 mol de carbono	reaccionan para dar	1 mol de carburo de silicio	y	2 mol de monóxido de carbono
				$25\text{ kg} = 2{,}5\cdot10^3\text{ g}$		$1\text{ m}^3 = 10^3\text{ L}$, 50 °C

Expresamos la cantidad, en mol, de SiC:

$$M(\text{SiC}) = 28{,}09 + 12{,}00 = 40{,}09\text{ g/mol}$$

$$25\cdot10^3\ \cancel{\text{g de SiC}}\cdot\frac{1\text{ mol de SiC}}{40{,}09\ \cancel{\text{g de SiC}}} = 623{,}6\text{ mol de SiC}$$

La estequiometría nos permite calcular los moles de carbono que deben reaccionar para obtener esa cantidad de SiC:

$$623{,}6\ \cancel{\text{mol de SiC}}\cdot\frac{3\text{ mol de C}}{1\ \cancel{\text{mol de SiC}}} = 1870{,}8\text{ mol de C}$$

$$1870{,}8\ \cancel{\text{mol de C}}\cdot\frac{12{,}00\text{ g de C}}{1\ \cancel{\text{mol de C}}} = 22\,449\text{ g de C} = \mathbf{22{,}45\ kg\ de\ C}$$

c) Hallamos la cantidad de monóxido de carbono que se forma:

$$623{,}6\ \cancel{\text{mol de SiC}}\cdot\frac{2\text{ mol de CO}}{1\ \cancel{\text{mol de SiC}}} = 1247{,}2\text{ mol de CO}$$

Con la ecuación de estado de los gases ideales hallamos la presión que ejerce el monóxido o el dióxido de carbono que se obtiene:

$$p\cdot V = n\cdot R\cdot T \quad\Rightarrow\quad p = \frac{n\cdot R\cdot T}{V} = \frac{1247{,}2\ \cancel{\text{mol}}\cdot 0{,}082\dfrac{\text{atm}\cdot\cancel{\text{L}}}{\cancel{\text{mol}}\cdot\cancel{\text{K}}}\cdot(50+273)\ \cancel{\text{K}}}{1\cdot10^3\ \cancel{\text{L}}} = \mathbf{33\ atm}$$

50. La acidez de estómago se debe a un exceso en la producción de HCl por parte de nuestro organismo. Para contrarrestarla tomamos lo que comúnmente se conoce como bicarbonato de sodio, $NaHCO_3$, que reacciona con el ácido dando cloruro de sodio, agua y dióxido de carbono.

a) Escribe la ecuación química de la reacción que tiene lugar.

b) Calcula los gramos de bicarbonato que hay que tomar para neutralizar 10 mL de HCl 1,25 M.

c) ¿Qué volumen de dióxido de carbono se formará si la presión es de 1 atm y la temperatura es de 20 °C?

Dato: $R = 0{,}082$ (atm · L)/(mol · K).

a) En primer lugar escribimos la ecuación química ajustada de la reacción:

$$\mathbf{NaHCO_3 + HCl \rightarrow NaCl + H_2O + CO_2}$$

b) Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

$NaHCO_3$	+	HCl	→	NaCl	+	H_2O	+	CO_2
1 mol de bicarbonato de sodio	con	1 mol de ácido clorhídrico	reaccionan para dar	1 mol de cloruro de sodio	y	1 mol de agua	y	1 mol de dióxido de carbono
		10 mL, 1,25 M						

Calculamos los moles de ácido clorhídrico teniendo en cuenta la concentración molar de la disolución y el volumen que se utiliza:

$$10\ \cancel{\text{mL de HCl}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{L de HCl}}}{10^3\ \cancel{\text{mL de HCl}}}\cdot\frac{1{,}25\text{ mol de HCl}}{1\ \cancel{\text{L de HCl}}} = 1{,}25\cdot10^{-2}\text{ mol de HCl}$$

La estequiometría nos permite calcular los moles de bicarbonato que deben reaccionar con esa cantidad de ácido clorhídrico:

$$1{,}25\cdot10^{-2}\ \cancel{\text{mol de HCl}}\cdot\frac{1\text{ mol de NaHCO}_3}{1\ \cancel{\text{mol de HCl}}} = 1{,}25\cdot10^{-2}\text{ mol de NaHCO}_3$$

Utilizamos la masa molar de esta sustancia para calcular la masa correspondiente a esa cantidad:

$$M(\text{NaHCO}_3) = 23{,}00 + 1{,}008 + 12{,}00 + 16{,}00 \cdot 3 = 84{,}008 \text{ g/mol}$$

$$1{,}25 \cdot 10^{-2} \ \cancel{\text{mol de NaHCO}_3} \cdot \frac{84{,}008 \text{ g de NaHCO}_3}{1 \ \cancel{\text{mol de NaHCO}_3}} = \mathbf{1{,}05 \ g \ de \ NaHCO_3}$$

c) Para calcular el volumen de dióxido de carbono que se forma necesitamos conocer los moles que se obtienen:

$$1{,}25 \cdot 10^{-2} \ \cancel{\text{mol de HCl}} \cdot \frac{1 \text{ mol de CO}_2}{1 \ \cancel{\text{mol de HCl}}} = 1{,}25 \cdot 10^{-2} \text{ mol de CO}_2$$

Utilizamos la ecuación de estado de los gases ideales para calcular el volumen de dióxido de carbono gaseoso que se obtiene en esas condiciones:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{1{,}25 \cdot 10^{-2} \ \cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082 \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (20 + 273) \ \cancel{\text{K}}}{1 \ \cancel{\text{atm}}} = \mathbf{0{,}3 \ L}$$

Riqueza de reactivos y rendimiento de la reacción

51. En la reacción sin ajustar:

$$\mathbf{H_2SO_4 \, (\mathit{aq}) + Al(OH)_3 \, (\mathit{aq}) \rightarrow H_2O \, (\mathit{l}) + Al_2(SO_4)_3 \, (\mathit{aq})}$$

¿Qué cantidad, en gramos, de hidróxido de aluminio se necesita para que reaccione con todo el ácido sulfúrico contenido en 20 mL de ácido de 1,96 g/mL de densidad y 92 % de riqueza?

Escribimos la ecuación química ajustada:

$$3 \text{ H}_2\text{SO}_4 \, (aq) + 2 \text{ Al(OH)}_3 \, (aq) \rightarrow 6 \text{ H}_2\text{O} \, (l) + \text{Al}_2(\text{SO}_4)_3 \, (aq)$$

Con la densidad calculamos la masa que corresponde al volumen de ácido sulfúrico:

$$20 \text{ mL de } \cancel{\text{H}_2\text{SO}_4 \text{ comercial}} \cdot \frac{1{,}96 \text{ g de H}_2\text{SO}_4 \text{ comercial}}{1 \text{ mL de } \cancel{\text{H}_2\text{SO}_4 \text{ comercial}}} = 39{,}2 \text{ g de H}_2\text{SO}_4 \text{ comercial}$$

Teniendo en cuenta el dato de la riqueza:

$$39{,}2 \text{ g de } \cancel{\text{H}_2\text{SO}_4 \text{ comercial}} \cdot \frac{92 \text{ g de H}_2\text{SO}_4 \text{ puro}}{100 \text{ g de } \cancel{\text{H}_2\text{SO}_4 \text{ comercial}}} = 36{,}064 \text{ g de H}_2\text{SO}_4 \text{ puro}$$

Con la masa, en gramos, y a través de la masa molar hallamos la cantidad de sustancia, en mol:

$$M(\text{H}_2\text{SO}_4) = 1{,}008 \cdot 2 + 32{,}06 + 16{,}00 \cdot 4 = 98{,}076 \text{ g/mol}$$

$$36{,}064 \ \cancel{\text{g de H}_2\text{SO}_4} \cdot \frac{1 \text{ mol de H}_2\text{SO}_4}{98{,}076 \ \cancel{\text{g de H}_2\text{SO}_4}} = 0{,}3677 \text{ mol de H}_2\text{SO}_4$$

La estequiometría de la reacción nos permite calcular la cantidad de hidróxido de aluminio que se necesita para que reaccione todo el ácido sulfúrico:

$$0{,}3677 \ \cancel{\text{mol de H}_2\text{SO}_4} \cdot \frac{2 \text{ mol de Al(OH)}_3}{3 \ \cancel{\text{mol de H}_2\text{SO}_4}} = 0{,}2451 \text{ mol de Al(OH)}_3$$

Pasamos a masa la cantidad anterior:

$$M[\text{Al(OH)}_3] = 26{,}98 + (1{,}008 + 16{,}00) \cdot 3 = 78{,}004 \text{ g/mol}$$

$$0{,}2451 \ \cancel{\text{mol de Al(OH)}_3} \cdot \frac{78{,}004 \text{ g de Al(OH)}_3}{1 \ \cancel{\text{mol de Al(OH)}_3}} = \mathbf{19{,}12 \ g \ de \ Al(OH)_3}$$

ACTIVIDADES FINALES (página 119)

52. Una roca caliza contiene un 70 % de carbonato de calcio, sustancia que, al calentarse en un proceso llamado calcinación, desprende dióxido de carbono y óxido de calcio.

a) Determina el volumen de dióxido de carbono, medido en condiciones estándar, que se producirá cuando se calcinen 25 kg de roca caliza.

b) ¿Cuántos kilos de óxido de calcio se producirán?

Datos: *R* = 0,082 (atm · L)/(mol · K), cond. est.: 0 °C, 10^5 Pa; 1 atm = 1,013 · 10^5 Pa.

1. En primer lugar escribimos la ecuación química ajustada de la reacción:

$$CaCO_3 \rightarrow CO_2 + CaO$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

$CaCO_3$	$\rightarrow$	CO_2	+	CaO
1 mol de carbonato de calcio	reacciona para dar	1 mol de dióxido de carbono	y	1 mol de óxido de calcio
25 kg, 70 %		0 °C, 10^5 Pa		

3. Determinamos la masa de $CaCO_3$ que hay en los 25 kg de roca caliza:

$$25\ \cancel{\text{kg de caliza}} \cdot \frac{10^3\ \cancel{\text{g de caliza}}}{1\ \cancel{\text{kg de caliza}}} \cdot \frac{70\ \text{g de CaCO}_3}{100\ \cancel{\text{g de caliza}}} = 1{,}75 \cdot 10^4\ \text{g de CaCO}_3$$

$$M(\text{CaCO}_3) = 40{,}08 + 12{,}00 + 16{,}00 \cdot 3 = 100{,}08\ \text{g/mol}$$

$$1{,}75 \cdot 10^4\ \cancel{\text{g de CaCO}_3} \cdot \frac{1\ \text{mol de CaCO}_3}{100{,}08\ \cancel{\text{g de CaCO}_3}} = 174{,}86\ \text{mol de CaCO}_3$$

4. La estequiometría de la reacción permite calcular las cantidades de las otras sustancias que intervienen:

a) Hallamos la cantidad de dióxido de carbono que se forma:

$$174{,}86\ \cancel{\text{mol de CaCO}_3} \cdot \frac{1\ \text{mol de CO}_2}{1\ \cancel{\text{mol de CaCO}_3}} = 174{,}86\ \text{mol de CO}_2$$

Calculamos el volumen de CO_2 con la ecuación de estado de los gases ideales, teniendo en cuenta condiciones estándar:

$$p = 10^5\ \cancel{\text{Pa}} \cdot \frac{1\ \text{atm}}{1{,}013 \cdot 10^5\ \cancel{\text{Pa}}} = 0{,}987\ \text{atm}$$

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{174{,}86\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082\ \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot 273\ \cancel{\text{K}}}{0{,}987\ \cancel{\text{atm}}} = 3966\ \text{L de CO}_2$$

$$3966\ \cancel{\text{L de CO}_2} \cdot \frac{1\ \text{m}^3}{1000\ \cancel{\text{L}}} = \mathbf{3{,}97\ m^3}$$

b) Calculamos la masa de óxido de calcio que se producirá:

$$174{,}86\ \cancel{\text{mol de CaCO}_3} \cdot \frac{1\ \text{mol de CaO}}{1\ \cancel{\text{mol de CaCO}_3}} = 174{,}86\ \text{mol de CaO}$$

$$M(\text{CaO}) = 40{,}08 + 16{,}00 = 56{,}08\ \text{g/mol}$$

$$174{,}86\ \cancel{\text{mol de CaO}} \cdot \frac{56{,}08\ \text{g de CaO}}{1\ \cancel{\text{mol de CaO}}} = 9806\ \cancel{\text{g de CaO}} \cdot \frac{1\ \text{kg}}{1000\ \cancel{\text{g}}} = \mathbf{9{,}8\ kg\ de\ CaO}$$

53. Para determinar la riqueza en magnesio de una aleación se toma una muestra de 2,83 g de la misma y se la hace reaccionar con oxígeno en unas condiciones en las que solo se obtienen 3,6 g de óxido de magnesio. ¿Cuál será el porcentaje de magnesio en la aleación?

1. En primer lugar escribimos la ecuación química ajustada de la reacción:

$$2\ \text{Mg}(s) + \text{O}_2(g) \rightarrow 2\ \text{MgO}(s)$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

2 Mg (*s*)	+	O_2 (*g*)	→	2 MgO (*s*)
2 mol de magnesio	con	1 mol de oxígeno	reaccionan para dar	2 mol de óxido de magnesio
2,83 g de muestra		2 L, 3 atm, 25 °C		3,6 g

3. Expresamos en mol la cantidad de MgO que se obtiene:

$$M(\text{MgO}) = 24{,}31 + 16{,}00 = 40{,}31 \text{ g/mol}$$

$$3{,}6\ \cancel{\text{g de MgO}} \cdot \frac{1 \text{ mol de MgO}}{40{,}31\ \cancel{\text{g de MgO}}} = 8{,}93 \cdot 10^{-2} \text{ mol de MgO}$$

4. La estequiometría de la reacción permite calcular las cantidades de las otras sustancias que intervienen. Hallamos la cantidad de magnesio que ha reaccionado:

$$8{,}93 \cdot 10^{-2}\ \cancel{\text{mol de MgO}} \cdot \frac{1 \text{ mol de Mg}}{1\ \cancel{\text{mol de MgO}}} = 8{,}93 \cdot 10^{-2} \text{ mol de Mg}$$

Calculamos el equivalente en gramos y esa será la cantidad de Mg que hay en la muestra. El resultado nos permite calcular el porcentaje de magnesio en la aleación:

$$8{,}93 \cdot 10^{-2}\ \cancel{\text{mol de Mg}} \cdot \frac{24{,}31 \text{ g de Mg}}{1\ \cancel{\text{mol de Mg}}} = 2{,}17 \text{ g de Mg}$$

$$\% \text{ en Mg} = \frac{2{,}17 \text{ g de Mg}}{2{,}83 \text{ g de muestra}} \cdot 100 = \mathbf{76{,}7\,\%\,de\,Mg}$$

54. El butano, C_4H_{10}, arde por acción del oxígeno dando dióxido de carbono y agua. ¿Qué volumen de aire, a 1 atm de presión y 25 °C, se necesita para reaccionar con 2,5 kg de butano?
Datos: *R* = 0,082 (atm · L)/(mol · K), 20,95 % en volumen de oxígeno en aire.

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$2\ C_4H_{10} + 13\ O_2 \rightarrow 8\ CO_2 + 10\ H_2O$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

2 C_4H_{10}	+	13 O_2	→	8 CO	+	10 H_2O
2 mol de butano	con	13 mol de oxígeno	reaccionan para dar	8 mol de dióxido de carbono	y	10 mol de agua
2,5 kg = 2,5 · 10^3 g		1 atm, 25 °C				

3. Expresamos en mol la cantidad de propano. Como es un gas, utilizamos la ecuación de estado de los gases ideales:

$$M(C_4H_{10}) = 12{,}00 \cdot 4 + 1{,}008 \cdot 10 = 58{,}08 \text{ g/mol}$$

$$2{,}5 \cdot 10^3\ \cancel{\text{g de } C_4H_{10}} \cdot \frac{1 \text{ mol de } C_4H_{10}}{58{,}08\ \cancel{\text{g de } C_4H_{10}}} = 43{,}044 \text{ mol de } C_4H_{10}$$

4. La estequiometría de la reacción permite calcular los moles de oxígeno que intervienen:

$$43{,}044\ \cancel{\text{mol de } C_4H_{10}} \cdot \frac{13 \text{ mol de } O_2}{2\ \cancel{\text{mol de } C_4H_{10}}} = 279{,}79 \text{ mol de } O_2$$

Como es un gas, la ley de los gases permite determinar el volumen que ocupará en las condiciones del problema:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{279{,}79\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082 \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (25 + 273)\ \cancel{\text{K}}}{1\ \cancel{\text{atm}}} = 6837 \text{ L de } O_2$$

La proporción de oxígeno en el aire nos permite calcular el volumen de aire que se precisa:

$$6837\ \cancel{\text{L de } O_2} \cdot \frac{100 \text{ L de aire}}{20{,}95\ \cancel{\text{L de } O_2}} = 32\,634 \text{ L de aire} = \mathbf{32{,}63\ m^3\ de\ aire}$$

55. **Industrialmente el metanol, CH_3OH, se obtiene haciendo reaccionar monóxido de carbono e hidrógeno a elevadas presiones y temperaturas. Calcula la masa de metanol que se puede obtener a partir de los reactivos contenidos en un reactor de 50 L, a 100 atm de presión y 250 °C, si el rendimiento de la reacción es del 80 %.**

Dato: R = 0,082 (atm · L)/(mol · K).

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$CO + 2\ H_2 \rightarrow CH_3OH$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

CO	+	$2\ H_2$	→	CH_3OH
1 mol de monóxido de carbono	con	2 mol de hidrógeno	reaccionan para dar	1 mol de metanol
50 L, 100 atm, 250 °C			80 %	

3. Las condiciones de presión y temperatura corresponden al inicio de la reacción. Expresamos, en mol, la cantidad de partículas que reaccionan. Aplicamos la ecuación de estado de los gases ideales para conocer la cantidad de partículas, en mol, de la mezcla:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T}$$

Sustituimos los datos:

$$n = \frac{100\ \cancel{\text{atm}} \cdot 50\ \cancel{\text{L}}}{0{,}082\ \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\cancel{\text{K}} \cdot \text{mol}} \cdot (250 + 273)\ \cancel{\text{K}}} = 116{,}588 \text{ mol de CO y } H_2$$

4. La estequiometría de la reacción permite calcular las cantidades de cada uno de los reactivos, de tres moles de la mezcla, un mol es de CO y los otros dos de H_2:

$$n = 116{,}588 \text{ mol CO y } H_2 \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} \text{ de CO} \quad \Rightarrow \quad 38{,}863 \text{ mol de CO} \\ \frac{2}{3} \text{ de } H_2 \quad \Rightarrow \quad 77{,}725 \text{ mol de } H_2 \end{cases}$$

Determinamos la masa de metanol que se producirían en teoría:

$$38{,}863\ \cancel{\text{mol de CO}} \cdot \frac{1 \text{ mol de } CH_3OH}{1\ \cancel{\text{mol de CO}}} = 38{,}863 \text{ mol de } CH_3OH$$

$$M(CH_3OH) = 12{,}00 + 1{,}008 \cdot 3 + 16{,}00 + 1{,}008 = 32{,}032 \text{ g/mol}$$

$$38{,}863\ \cancel{\text{mol de } CH_3OH} \cdot \frac{32{,}032 \text{ g de } CH_3OH}{1\ \cancel{\text{mol de } CH_3OH}} = 1244{,}86 \text{ g de } CH_3OH$$

Calculamos la masa de metanol que se puede obtener con un rendimiento de reacción del 80 %:

$$1244{,}86\ \cancel{\text{g de } CH_3OH \text{ teóricos}} \cdot \frac{80 \text{ g de } CH_3OH \text{ reales}}{100\ \cancel{\text{g de } CH_3OH \text{ teóricos}}} = \mathbf{996\ g\ de\ CH_3OH\ reales}$$

Reactivo limitante

56. **El P_4 (*g*) reacciona con el Cl_2 (*g*) para dar PCl_3 (*g*). En un recipiente de 15 L que contiene Cl_2 en condiciones estándar se introducen 20 g de fósforo y se ponen en condiciones de reaccionar.**

a) ¿Cuál es la máxima cantidad de tricloruro de fósforo que se puede obtener?

b) Determina la presión que ejercerá si se recoge en un recipiente de 15 L a 50 °C.

Datos: R = 0,082 (atm · L)/(mol · K), cond. est.: 0 °C, 10^5 Pa; 1 atm = 1,013 · 10^5 Pa.

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$P_4\ (g) + 6\ Cl_2\ (g) \rightarrow 4\ PCl_3\ (g)$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

P_4 (*g*)	+	6 Cl_2 (*g*)	→	4 PCl_3 (*g*)
1 mol de fósforo	con	6 mol de cloro	reaccionan para dar	4 mol de tricloruro de fósforo
20 g		15 L en cond. est.		15 L, 50 °C

3. Expresamos la cantidad, en mol, de las sustancias que reaccionan. Puesto que conocemos la masa de un reactivo, y el volumen en condiciones estándar del otro reactivo, lo más probable es que uno de ellos actúe de reactivo limitante. Determinaremos cuál:

Primer reactivo, P_4 (*g*):

$$M(P_4) = 30{,}97 \cdot 4 = 123{,}88 \text{ g/mol}$$

$$20 \cancel{\text{ g de P}_4} \cdot \frac{1 \text{ mol de P}_4}{123{,}88 \cancel{\text{ g de P}_4}} = 0{,}161 \text{ mol de P}_4$$

Segundo reactivo, Cl_2 (*g*):

$$p = 10^5 \cancel{\text{ Pa}} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{1{,}013 \cdot 10^5 \cancel{\text{ Pa}}} = 0{,}987 \text{ atm}$$

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{0{,}987 \cancel{\text{ atm}} \cdot 15 \cancel{\text{ L}}}{0{,}082 \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\cancel{\text{K}} \cdot \text{mol}} \cdot 273 \cancel{\text{ K}}} = 0{,}661 \text{ mol de Cl}_2$$

Determinamos el reactivo limitante teniendo en cuenta la estequiometría de la reacción:

$$0{,}161 \cancel{\text{ mol de P}_4} \cdot \frac{6 \text{ mol de Cl}_2}{1 \cancel{\text{ mol de P}_4}} = 0{,}966 \text{ mol de Cl}_2$$

Esta cantidad es mayor que los 0,661 mol de Cl_2 que tenemos de esta sustancia. Por tanto, el reactivo limitante es Cl_2.

a) Calculamos la cantidad de tricloruro de fósforo que se obtiene a partir de la cantidad existente del reactivo limitante. La estequiometría de la reacción permite determinarla:

$$0{,}661 \cancel{\text{ mol de Cl}_2} \cdot \frac{4 \text{ mol de PCl}_3}{6 \cancel{\text{ mol de Cl}_2}} = \mathbf{0{,}441 \text{ mol de PCl}_3}$$

b) Utilizando las leyes de los gases, determinamos la presión que ejerce en las condiciones del problema:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{0{,}441 \cancel{\text{ mol}} \cdot 0{,}082 \frac{\text{atm} \cdot \cancel{\text{L}}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (50 + 273) \cancel{\text{ K}}}{15 \cancel{\text{ L}}} = \mathbf{0{,}778 \text{ atm}}$$

57. Cuando el cloruro de calcio reacciona con carbonato de sodio se obtiene un precipitado blanco de carbonato de calcio y otra sustancia. Si se mezclan 20 mL de una disolución 5 M en Na_2CO_3 con 30 mL de disolución 4 M en $CaCl_2$, calcula la cantidad de $CaCO_3$ que se obtendrá.

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$CaCl_2 + Na_2CO_3 \rightarrow CaCO_3 + 2 \text{ NaCl}$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

$CaCl_2$	+	Na_2CO_3	→	$CaCO_3$	+	2 NaCl
1 mol de cloruro de calcio	con	1 mol de carbonato de sodio	reaccionan para dar	1 mol de carbonato de calcio	y	2 mol de cloruro de sodio
30 mL = 30 · 10^{-3} L, 4 M		20 mL = 20 · 10^{-3} L, 5 M				

3. Expresamos en mol la cantidad de las sustancias que reaccionan. Puesto que conocemos los volúmenes y las concentraciones de los dos reactivos:

$$30 \cdot 10^{-3}\ \cancel{\text{L de CaCl}_2} \cdot \frac{4\ \text{mol de CaCl}_2}{1\ \cancel{\text{L de CaCl}_2}} = 0{,}12\ \text{mol de CaCl}_2$$

$$20 \cdot 10^{-3}\ \cancel{\text{L de Na}_2\text{CO}_3} \cdot \frac{5\ \text{mol de Na}_2\text{CO}_3}{1\ \cancel{\text{L de Na}_2\text{CO}_3}} = 0{,}1\ \text{mol de Na}_2\text{CO}_3$$

Uno de ellos actúa como reactivo limitante. La estequiometría de la reacción indica que interviene el mismo número de moles de cada uno de los reactivos. En consecuencia, el reactivo limitante es el Na_2CO_3.

4. El precipitado blanco es el $CaCO_3$; calculamos la cantidad de carbonato de calcio que se obtiene a partir de la cantidad existente del reactivo limitante. La estequiometría de la reacción dice que se obtendrá el mismo número de moles que de Na_2CO_3:

$$M(\text{CaCO}_3) = 40{,}08 + 12{,}00 + 16{,}00 \cdot 3 = 100{,}08\ \text{g/mol}$$

$$0{,}1\ \cancel{\text{mol de CaCO}_3} \cdot \frac{100{,}08\ \text{g de CaCO}_3}{1\ \cancel{\text{mol de CaCO}_3}} = \mathbf{10\ g\ de\ CaCO_3}$$

58. El aluminio reacciona con el ácido sulfúrico dando sulfato de aluminio e hidrógeno. Se hacen reaccionar 500 mg de aluminio con 40 mL de H_2SO_4 1,25 M. ¿Cuántos gramos de hidrógeno se obtendrán como máximo?

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$2\ \text{Al} + 2\ \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{Al}_2\text{SO}_4 + 3\ \text{H}_2$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

2 Al	+	2 H_2SO_4	→	Al_2SO_4	+	3 H_2
2 mol de aluminio	con	3 mol de ácido sulfúrico	reaccionan para dar	1 mol de sulfato de aluminio	y	3 mol de hidrógeno
500 mg = 0,5 g		40 mL = 40 · 10^{-3} L, 1,25 M				

3. Puesto que conocemos la masa de uno de los reactivos, y el volumen y la concentración del otro, calculamos la cantidad de sustancia en cada caso:

$$0{,}5\ \cancel{\text{g de Al}} \cdot \frac{1\ \text{mol de Al}}{26{,}98\ \cancel{\text{g de Al}}} = 0{,}0185\ \text{mol de Al}$$

$$40 \cdot 10^{-3}\ \cancel{\text{L de H}_2\text{SO}_4} \cdot \frac{4\ \text{mol de H}_2\text{SO}_4}{1\ \cancel{\text{L de H}_2\text{SO}_4}} = 0{,}05\ \text{mol de H}_2\text{SO}_4$$

Uno de los dos reactivos actúa de reactivo limitante. Determinamos el reactivo limitante teniendo en cuenta la estequiometría de la reacción:

$$0{,}0185\ \cancel{\text{mol de Al}} \cdot \frac{3\ \text{mol de H}_2\text{SO}_4}{2\ \cancel{\text{mol de Al}}} = 0{,}02775\ \text{mol de H}_2\text{SO}_4$$

Esta cantidad es menor que los 0,05 moles que tenemos de esta sustancia, ácido sulfúrico, H_2SO_4. Por tanto, el reactivo limitante es el aluminio, Al.

4. La cantidad máxima de hidrógeno que se puede obtener es la que permite la cantidad existente del reactivo limitante:

$$0{,}0185\ \cancel{\text{mol de Al}} \cdot \frac{3\ \text{mol de H}_2}{2\ \cancel{\text{mol de Al}}} = 0{,}02775\ \text{mol de H}_2$$

$$M(\text{H}_2) = 1{,}008 \cdot 2 = 2{,}016\ \text{g/mol}$$

$$0{,}02775\ \cancel{\text{mol de H}_2} \cdot \frac{2{,}016\ \text{g de H}_2}{1\ \cancel{\text{mol de H}_2}} = 0{,}0559\ \text{g de H}_2 \approx \mathbf{56\ mg\ de\ H_2}$$

Industria química

59. El primer paso en la fabricación del ácido nítrico consiste en la oxidación del amoniaco, proceso que representamos por medio de la siguiente ecuación, sin ajustar:

$$NH_3\,(g) + O_2\,(g) \rightarrow NO\,(g) + H_2O\,(g)$$

En un recipiente se introducen 25 L de amoniaco y 50 L de oxígeno medidos ambos en condiciones estándar. Determina la masa, en gramos, de cada una de las sustancias que tendremos al final del proceso.

Datos: R = 0,082 (atm · L)/(mol · K), cond. est.: 0 °C, 10^5 Pa; 1 atm = 1,013 · 10^5 Pa.

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$4\ NH_3\,(g) + 5\ O_2\,(g) \rightarrow 4\ NO\,(g) + 6\ H_2O\,(g)$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

4 NH_3 (*g*)	+	5 O_2 (*g*)	→	4 NO (*g*)	+	6 H_2O (*g*)
4 mol de amoniaco	con	5 mol de oxígeno	reaccionan para dar	4 mol de monóxido de nitrógeno	y	6 mol de agua
25 L, cond. est.		50 L, cond. est.				

3. Expresamos en mol la cantidad de las sustancias que reaccionan; lo haremos teniendo en cuenta que son gases en condiciones estándar. Puesto que conocemos los volúmenes de los dos reactivos, utilizaremos la ecuación de estado de los gases ideales para determinar la cantidad de cada uno de ellos:

$$p = 10^5\ \cancel{\text{Pa}} \cdot \frac{1\ \text{atm}}{1{,}013 \cdot 10^5\ \cancel{\text{Pa}}} = 0{,}987\ \text{atm}$$

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{0{,}987\ \cancel{\text{atm}} \cdot 25\ \cancel{\text{L}}}{0{,}082\ \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (0 + 273)\ \cancel{\text{K}}} = 1{,}1024\ \text{mol de}\ NH_3$$

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{0{,}987\ \cancel{\text{atm}} \cdot 50\ \cancel{\text{L}}}{0{,}082\ \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (0 + 273)\ \cancel{\text{K}}} = 2{,}2045\ \text{mol de}\ O_2$$

Determinamos el reactivo limitante teniendo en cuenta la estequiometría de la reacción:

$$1{,}1024\ \cancel{\text{mol de}\ NH_3} \cdot \frac{5\ \text{mol de}\ O_2}{4\ \cancel{\text{mol de}\ NH_3}} = 1{,}3780\ \text{mol de}\ O_2$$

Esta cantidad es menor que los 2,2045 moles que tenemos de esta sustancia, oxígeno. Por tanto, el reactivo limitante es el NH_3.

4. Calculamos la cantidad de cada una de las sustancias que se obtienen a partir de la cantidad existente del reactivo limitante. Para cada una calculamos el equivalente en gramos por medio de su masa molar.

La masa de oxígeno que no ha reaccionado será:

$$n = 2{,}2045\ \text{mol de}\ O_2\ \text{presentes} - 1{,}3780\ \text{mol de}\ O_2\ \text{consumidos} = 0{,}8265\ \text{mol de}\ O_2\ \text{sobrantes}$$

$$M(O_2) = 16{,}00 \cdot 2 = 32{,}00\ \text{g/mol}$$

$$0{,}8265\ \cancel{\text{mol de}\ O_2} \cdot \frac{32{,}00\ \text{g de}\ O_2}{1\ \cancel{\text{mol de}\ O_2}} = \mathbf{26{,}45\ g\ de\ O_2}$$

La masa de reactivos formada será:

$$1{,}1024\ \cancel{\text{mol de}\ NH_3} \cdot \frac{4\ \text{mol de NO}}{4\ \cancel{\text{mol de}\ NH_3}} = 1{,}1024\ \text{mol de NO}$$

$$M(\text{NO}) = 14{,}10 + 16{,}00 = 30{,}01\ \text{g/mol}$$

$$1{,}1024\ \cancel{\text{mol de NO}} \cdot \frac{30{,}01\ \text{g de NO}}{1\ \cancel{\text{mol de NO}}} = \mathbf{33{,}08\ g\ de\ NO}$$

$$1{,}1024\ \cancel{\text{mol de}\ NH_3} \cdot \frac{6\ \text{mol de}\ H_2O}{4\ \cancel{\text{mol de}\ NH_3}} = 1{,}6537\ \text{mol de}\ H_2O$$

$$M(H_2O) = 1{,}008 \cdot 2 + 16{,}00 = 18{,}016 \text{ g/mol}$$

$$1{,}6537 \cancel{\text{mol de } H_2O} \cdot \frac{18{,}016 \text{ g de } H_2O}{1 \cancel{\text{mol de } H_2O}} = \mathbf{29{,}79 \text{ g de } H_2O}$$

60. El hierro se obtiene en los altos hornos haciendo reaccionar un mineral de hierro con carbono. Para este proceso se pueden utilizar menas de corindón, Fe_2O_3, magnetita, Fe_3O_4, o pirita, FeS_2. Suponiendo que el costo de extracción y transporte de las tres menas fuese el mismo, calcula cuál de las tres sería la más adecuada para obtener hierro.

Para ello hemos de calcular el porcentaje de hierro en masa para cada sustancia:

- Corindón: Fe_2O_3

$$M(Fe_2O_3) = 55{,}85 \cdot 2 + 16{,}00 \cdot 3 = 159{,}7 \text{ g de corindón/mol de corindón}$$

$$M(2 \cdot Fe) = 2 \cdot 55{,}85 = 111{,}7 \text{ g de Fe/mol de corindón}$$

$$\frac{M(2 \cdot Fe)}{M(Fe_2O_3)} \cdot 100 = \frac{111{,}7 \dfrac{\text{g de Fe}}{\cancel{\text{mol de corindón}}}}{159{,}7 \dfrac{\text{g de corindón}}{\cancel{\text{mol de corindón}}}} \cdot 100 = 70\,\%$$

- Magnetita: Fe_3O_4

$$M(Fe_3O_4) = 55{,}85 \cdot 3 + 16{,}00 \cdot 4 = 231{,}55 \text{ g de magnetita/mol de magnetita}$$

$$M(3 \cdot Fe) = 3 \cdot 55{,}85 = 167{,}55 \text{ g de Fe/mol de corindón}$$

$$\frac{M(3 \cdot Fe)}{M(Fe_3O_4)} \cdot 100 = \frac{167{,}55 \dfrac{\text{g de Fe}}{\cancel{\text{mol de magnetita}}}}{231{,}55 \dfrac{\text{g de magnetita}}{\cancel{\text{mol de magnetita}}}} \cdot 100 = 72{,}4\,\%$$

- Pirita: FeS_2

$$M(FeS_2) = 55{,}85 + 32{,}06 \cdot 2 = 119{,}97 \text{ g de pirita/mol de pirita}$$

$$M(Fe) = 55{,}85 \text{ g de Fe/mol de pirita}$$

$$\frac{M(Fe)}{M(FeS_2)} \cdot 100 = \frac{55{,}85 \dfrac{\text{g de Fe}}{\cancel{\text{mol de pirita}}}}{119{,}97 \dfrac{\text{g de pirita}}{\cancel{\text{mol de pirita}}}} \cdot 100 = 46{,}6\,\%$$

El porcentaje más alto de hierro lo proporciona la **magnetita: Fe_3O_4**.

61. En un alto horno moderno se utiliza Fe_3O_4 para producir 3 kt de hierro al día. Calcula:

a) La masa de CO_2 que se emite a la atmósfera cada día por este motivo.

b) Los litros de gasolina, C_8H_{10}, que hay que quemar para emitir la misma cantidad de CO_2.

Dato: $d_{gasolina} = 0{,}76$ g/L.

a) En la actividad 35 ya vimos la reacción que ocurre en el alto horno a partir de la magnetita.

1 Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$4 \text{ C} + 2 \text{ O}_2 + Fe_3O_4 \rightarrow 3 \text{ Fe} + 4 \text{ CO}_2$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos.

4 C	+	2 O_2	+	Fe_3O_4	→	3 Fe	+	4 CO_2
4 mol de carbono	con	2 mol de oxígeno	y	1 mol de magnetita	reaccionan para dar	3 mol de hierro	y	4 mol de dióxido de carbono
						$3 \text{ kt} = 3 \cdot 10^3 \text{ t} =$ $= 3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \text{ kg} =$ $= 3 \cdot 10^9 \text{ g de Fe}$		

3. Expresamos en mol la cantidad de hierro que se obtiene:

$$3\cdot 10^9\ \cancel{\text{g de Fe}}\cdot\frac{1\ \text{mol de Fe}}{55{,}85\ \cancel{\text{g de Fe}}}=53\,715\,310\ \text{mol de Fe}$$

4. La estequiometría de la reacción permite calcular las cantidades de dióxido de carbono que se emite:

$$53\,715\,310\ \cancel{\text{mol de Fe}}\cdot\frac{4\ \text{mol de CO}_2}{3\ \cancel{\text{mol de Fe}}}=71\,620\,412\ \text{mol de CO}_2$$

Expresamos en gramos a partir de la masa molar:

$$M(\text{CO}_2)=12{,}00+16{,}00\cdot 2=44{,}00\ \text{g/mol}$$

$$71\,620\,412\ \cancel{\text{mol de CO}_2}\cdot\frac{44{,}00\ \text{g de CO}_2}{1\ \cancel{\text{mol de CO}_2}}=3\,151\,300\,000\ \text{g de CO}_2=\mathbf{3{,}15\ kt\ de\ CO_2}$$

b) La combustión de la gasolina.

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos.
2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

$2\ C_8H_{10}$	+	$21\ O_2$	→	$10\ H_2O$	+	$16\ CO_2$
2 mol de gasolina	con	21 mol de oxígeno	reaccionan para dar	10 mol de agua	y	16 mol de dióxido de carbono
						$3{,}15\cdot 10^9$ g

3. Expresamos en mol la cantidad de dióxido de carbono que se obtiene:

$$3{,}15\cdot 10^9\ \cancel{\text{g de CO}_2}\cdot\frac{1\ \text{mol de CO}_2}{44{,}00\ \cancel{\text{g de CO}_2}}=71\,600\,000\ \text{mol de CO}_2$$

4. La estequiometría de la reacción permite calcular las cantidades de gasolina que hay que quemar:

$$71\,600\,000\ \cancel{\text{mol de CO}_2}\cdot\frac{2\ \text{mol de C}_8\text{H}_{10}}{16\ \cancel{\text{mol de CO}_2}}=8\,950\,000\ \text{mol de C}_8\text{H}_{10}$$

Expresamos en gramos a partir de la masa molar:

$$M(\text{C}_8\text{H}_{10})=12{,}00\cdot 8+1{,}008\cdot 10=106{,}08\ \text{g/mol}$$

$$8\,950\,000\ \cancel{\text{mol de C}_8\text{H}_{10}}\cdot\frac{106{,}08\ \text{g de C}_8\text{H}_{10}}{1\ \cancel{\text{mol de C}_8\text{H}_{10}}}=949\,000\,000\ \text{g}=0{,}949\ \text{kt de C}_8\text{H}_{10}$$

Para calcular el volumen utilizamos el dato de la densidad:

$$d=\frac{m}{V}\quad\Rightarrow\quad V=\frac{m}{d}=\frac{949\,000\,000\ \cancel{\text{g}}}{0{,}75\ \dfrac{\cancel{\text{g}}}{\text{L}}}=1{,}27\cdot 10^9\ \cancel{\text{L}}\cdot\frac{1\ \text{m}^3}{1000\ \cancel{\text{L}}}=\mathbf{1{,}27\cdot 10^6\ m^3\ de\ C_8H_{10}}$$

62. El primer paso en la fabricación del ácido sulfúrico consiste en quemar azufre con el oxígeno del aire para obtener dióxido de azufre. Algunos depósitos de gas natural tienen cantidades importantes de gas sulfuro de hidrógeno que se puede utilizar para obtener azufre en un proceso en dos pasos. Las reacciones sin ajustar:

Paso 1

$$\mathbf{H_2S\,(\mathit{g})+O_2\,(\mathit{g})\rightarrow S_8\,(\mathit{g})+SO_2\,(\mathit{g})+H_2O\,(\mathit{g})}$$

Paso 2

$$\mathbf{H_2S\,(\mathit{g})+SO_2\,(\mathit{g})\rightarrow S_8\,(\mathit{g})+H_2O\,(\mathit{g})}$$

Escribe la ecuación química ajustada del proceso global que permite obtener azufre a partir del sulfuro de hidrógeno.

Primero se han de ajustar por separado:

$$18\ \text{H}_2\text{S}\,(g)+11\ \text{O}_2\,(g)\rightarrow 2\ \text{S}_8\,(g)+2\ \text{SO}_2\,(g)+18\ \text{H}_2\text{O}\,(g)$$

$$16\ \text{H}_2\text{S}\,(g)+8\ \text{SO}_2\,(g)\rightarrow 3\ \text{S}_8\,(g)+16\ \text{H}_2\text{O}\,(g)$$

Sumando ambas reacciones y simplificando los moles de sustancias que tenemos entre los reactivos y los productos:

$$\mathbf{34\ H_2S\,(\mathit{g}) + 6\ SO_2\,(\mathit{g}) + 11\ O_2\,(\mathit{g}) \rightarrow 5\ S_8\,(\mathit{g}) + 34\ H_2O\,(\mathit{g})}$$

ACTIVIDADES FINALES (página 120)

Ampliación

63. En las centrales térmicas se quema combustible para obtener energía. Debido al origen del petróleo, el combustible suele contener compuestos azufrados que, cuando se queman, producen SO_2, un gas irritante que en la atmósfera puede causar lluvia ácida. Para evitarlo se coloca en las chimeneas un filtro con hidróxido de magnesio que reacciona con el gas dando sulfito de magnesio y agua.

a) Escribe y ajusta la reacción.

b) Determina el volumen de dióxido de azufre que evitamos que se vierta a la atmósfera si cada hora se recogen 1,67 kg de sulfito de magnesio. El gas sale a 70 °C y a la presión atmosférica.

c) Calcula la masa de hidróxido de magnesio que hace falta para capturar el dióxido de azufre que se produce cada hora.

Dato: $R = 0{,}082$ (atm · L)/(mol · K).

a) En primer lugar escribimos la ecuación química ajustada de la reacción:

$$SO_2 + Mg(OH)_2 \rightarrow MgSO_3 + H_2O$$

A continuación, debajo de cada sustancia escribimos los datos de que disponemos:

SO_2	+	$Mg(OH)_2$	→	$MgSO_3$	+	H_2O
1 mol de dióxido de azufre	con	1 mol de hidróxido de magnesio	reaccionan para dar	1 mol de sulfito de magnesio	y	1 mol de agua
				$1{,}67\ \text{kg} = 1{,}67 \cdot 10^3\ \text{g}$		

Expresamos en mol la cantidad de sustancias que intervienen en la reacción. En este caso necesitamos conocer la masa molar del $MgSO_3$:

$$M(MgSO_3) = 24{,}31 + 32{,}06 + 16{,}00 \cdot 3 = 104{,}37\ \text{g/mol}$$

$$1{,}67 \cdot 10^3\ \cancel{\text{g de MgSO}_3} \cdot \frac{1\ \text{mol de MgSO}_3}{104{,}37\ \cancel{\text{g de MgSO}_3}} = 16\ \text{mol de MgSO}_3$$

a) La estequiometría de la reacción nos dice que para que se produzca 1 mol de $MgSO_3$ debe reaccionar 1 mol de SO_2. Para guardar la proporción, cada hora reaccionan 16 mol de SO_2. Utilizaremos la ecuación de los gases ideales para calcular el volumen que ocupan, en las condiciones dadas:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{16\,\dfrac{\cancel{\text{mol}}}{\text{h}} \cdot 0{,}082\,\dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (70 + 273)\,\cancel{\text{K}}}{1\ \cancel{\text{atm}}} = \mathbf{450}\,\frac{\textbf{L de SO}_2}{\textbf{h}}$$

b) La estequiometría de la reacción nos dice que para que se produzca 1 mol de $MgSO_3$ debe reaccionar 1 mol de $Mg(OH)_2$. Para guardar la proporción, cada hora reaccionan 16 mol de $Mg(OH)_2$. Utilizamos la masa molar de esta sustancia para calcular su equivalente en gramos:

$$M[Mg(OH)_2] = 24{,}31 + (16{,}00 + 1{,}008) \cdot 2 = 58{,}326\ \text{g/mol}$$

$$\cancel{16 \text{ mol de Mg(OH)}_2} \cdot \frac{58{,}326 \text{ g de Mg(OH)}_2}{1 \text{ mol de } \cancel{\text{Mg(OH)}_2}} = \mathbf{933 \text{ g de Mg(OH)}_2}$$

64. El amoniaco se descompone cuando se calienta dando nitrógeno e hidrógeno. En un recipiente se introducen 30 g de amoniaco y se calientan. Cuando la descomposición ha terminado, se encuentra que se han producido 30 L de nitrógeno, medidos a 0,8 atm y 125 °C. Determina:

a) El rendimiento de la reacción.

b) El volumen de hidrógeno que se habrá obtenido, también a 0,8 atm y 125 °C.

Dato: *R* = 0,082 (atm · L)/(mol · K).

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$2\ NH_3 \rightarrow N_2 + 3\ H_2$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos.

2 NH_3	$\rightarrow$	**N_2**	+	**3 H_2**
2 mol de amoniaco	se descomponen para dar	1 mol de nitrógeno	y	3 mol de hidrógeno
30 g		30 L, 0,8 atm, 125 °C		

a) Expresamos en mol la cantidad de nitrógeno que se obtiene. Aplicamos la ecuación de estado de los gases ideales para conocer el número de moles de nitrógeno:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T}$$

Sustituimos los datos y operamos:

$$n = \frac{0{,}8\ \cancel{\text{atm}} \cdot 30\ \cancel{\text{L}}}{0{,}082\ \dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\cancel{\text{K}} \cdot \text{mol}} \cdot (125 + 273)\ \cancel{\text{K}}} = 0{,}7354 \text{ mol de } N_2$$

Calculamos la masa molar para conocer los moles de amoniaco que reaccionan:

$$M(NH_3) = 14{,}01 + 1{,}008 \cdot 3 = 17{,}03 \text{ g/mol}$$

$$30\ \cancel{\text{g de NH}_3} \cdot \frac{1 \text{ mol de NH}_3}{17{,}03\ \cancel{\text{g de NH}_3}} = 1{,}761 \text{ mol de NH}_3$$

Por la estequiometría de la reacción calculamos los moles teóricos de nitrógeno que se deberían obtener:

$$1{,}761\ \cancel{\text{mol de NH}_3} \cdot \frac{1 \text{ mol de N}_2}{2\ \cancel{\text{mol de NH}_3}} = 0{,}8807 \text{ mol de N}_2$$

Por tanto, el rendimiento de la reacción:

$$\frac{(0{,}7354 \text{ mol de N}_2)_{\text{real}}}{(0{,}8807 \text{ mol de N}_2)_{\text{teórico}}} \cdot 100 = \mathbf{83{,}51\,\%}$$

b) Por la hipótesis de Avogadro, si un mol de N_2 ocupa 30 L, entonces 3 mol de H_2 ocupan el triple: **90 L**.

65. Sabemos que cuando un ácido reacciona con una base, neutralizan sus efectos. ¿Será suficiente añadir 18 g de hidróxido de aluminio a 200 mL de una disolución de ácido sulfúrico 1,5 M para tener un medio neutro? Determina si después de la reacción tenemos un medio ácido o básico.

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos:

$$2\ Al(OH)_3 + 3\ H_2SO_4 \rightarrow Al_2SO_4 + 6\ H_2O$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

2 $Al(OH)_3$	+	3 H_2SO_4	$\rightarrow$	Al_2SO_4	+	3 H_2O
2 mol de hidróxido de aluminio	con	3 mol de ácido sulfúrico	reaccionan para dar	1 mol de sulfato de aluminio	y	6 mol de agua
18 g		200 mL, 1,5 M				

3. Expresamos en mol la cantidad de las sustancias que reaccionan. Puesto que conocemos las cantidades de los dos reactivos, lo más probable es que uno de ellos actúe de reactivo limitante; determinaremos cuál:

$$M[\text{Al(OH)}_3] = 26{,}98 + (16{,}00 + 1{,}008) \cdot 3 = 78{,}004 \text{ g/mol}$$

$$18 \cancel{\text{ g de Al(OH)}_3} \cdot \frac{1 \text{ mol de Al(OH)}_3}{78{,}004 \cancel{\text{ g de Al(OH)}_3}} = 0{,}23 \text{ mol de Al(OH)}_3$$

$$200 \cdot 10^{-3} \cancel{\text{ L de H}_2\text{SO}_4} \cdot \frac{1{,}5 \text{ mol de H}_2\text{SO}_4}{1 \cancel{\text{ L de H}_2\text{SO}_4}} = 0{,}3 \text{ mol de H}_2\text{SO}_4$$

Determinamos el reactivo limitante teniendo en cuenta la estequiometría de la reacción:

$$0{,}23 \cancel{\text{ mol de Al(OH)}_3} \cdot \frac{3 \text{ mol de H}_2\text{SO}_4}{2 \cancel{\text{ mol de Al(OH)}_3}} = 0{,}345 \text{ mol de H}_2\text{SO}_4$$

Esta cantidad es mayor que los 0,3 mol que tenemos de esta sustancia. Por tanto, el reactivo limitante es precisamente el ácido sulfúrico, H_2SO_4.

Sobra $Al(OH)_3$ y, por tanto, después de la reacción tendremos un **medio básico**.

66. Una industria química fabrica ácido sulfúrico del 96 % de riqueza y densidad 1850 kg/m³. Utiliza como materia prima azufre con una riqueza del 90 % y lo procesa a un ritmo de 500 kg cada hora.

¿Qué volumen de ácido sulfúrico de esas características se puede obtener en cada hora, suponiendo que el conjunto de todos los pasos del proceso tiene un rendimiento del 58 %?

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos.

$$2 \text{ S} + 3 \text{ O}_2 + 2 \text{ H}_2\text{O} \rightarrow 2 \text{ H}_2\text{SO}_4$$

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

2 S	+	3 O_2	+	2 H_2O	→	2 H_2SO_4
2 mol de azufre	con	3 mol de oxígeno	y	2 mol de agua	reaccionan para dar	2 mol de ácido sulfúrico
500 kg/h, 90 % de riqueza					58 %	96 % $d = 1850$ kg/m³

Como el azufre que se utiliza de materia prima tiene una riqueza del 90 %, reaccionan 450 kg/h de azufre (puro).

3. A partir de la masa molar del azufre calculamos el número de moles:

$$M(\text{S}) = 32{,}06 \text{ g/mol}$$

$$4{,}5 \cdot 10^5 \cancel{\text{ g de S}} \cdot \frac{1 \text{ mol de S}}{32{,}06 \cancel{\text{ g de S}}} = 14\,036{,}18 \text{ mol de S}$$

4. Por la estequiometría de la reacción calculamos los moles de ácido que se obtienen:

$$14\,036{,}18 \cancel{\text{ mol de S}} \cdot \frac{2 \text{ mol de H}_2\text{SO}_4}{2 \cancel{\text{ mol de S}}} = 14\,036{,}18 \text{ mol de H}_2\text{SO}_4$$

Como la reacción tiene un rendimiento del 58 %, se obtienen:

$$14\,036{,}18 \cancel{\text{ mol de H}_2\text{SO}_4} \cdot \frac{58 \text{ mol de H}_2\text{SO}_4}{100 \cancel{\text{ mol de H}_2\text{SO}_4}} = 8141 \text{ mol de H}_2\text{SO}_4$$

A partir de la masa molar, calculamos los gramos de ácido que se obtienen:

$$M(\text{H}_2\text{SO}_4) = 1{,}008 \cdot 2 + 32{,}06 + 16{,}00 \cdot 4 = 98{,}076 \text{ g/mol}$$

$$8141 \cancel{\text{ mol de H}_2\text{SO}_4} \cdot \frac{98{,}076 \text{ g de H}_2\text{SO}_4}{1 \cancel{\text{ mol de H}_2\text{SO}_4}} = 798\,400 \text{ mol de H}_2\text{SO}_4$$

Como se fabrica el ácido a 96 % de riqueza, se producen cada hora:

$$798\,400 \cancel{\text{ g H}_2\text{SO}_4\text{ concentrado}} \cdot \frac{100 \text{ g H}_2\text{SO}_4}{96 \cancel{\text{ g H}_2\text{SO}_4\text{ concentrado}}} = 831\,700 \text{ g H}_2\text{SO}_4 = 831{,}7 \text{ kg H}_2\text{SO}_4$$

A partir de la densidad calculamos el volumen de ácido sulfúrico que se puede obtener en cada hora:

$$d = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{d} = \frac{831{,}7\ \frac{\cancel{\text{kg}}}{\text{h}}}{1850\ \frac{\cancel{\text{kg}}}{\text{m}^3}} = 0{,}44957\ \frac{\text{m}^3}{\text{h}} = \mathbf{449{,}57\ \frac{L}{h}}$$

QUÍMICA EN TU VIDA (página 122)

INTERPRETA

1. Calcula el volumen de nitrógeno, medido a 0 °C y 1 atm, que produce la ignición de 65 g de azida de sodio.

Escribimos la ecuación química ajustada de la reacción que tiene lugar:

$$2\ \text{NaN}_3 \rightarrow 2\ \text{Na} + 3\ \text{N}_2$$

Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos:

2 NaN_3	→	2 Na	+	3 N_2
2 mol de azida de sodio	se descomponen para dar	2 mol de sodio	y	3 mol de nitrógeno
65 g				0 °C y 1 atm

Expresamos en mol la cantidad de azida de sodio que reacciona:

$$M(\text{NaN}_3) = 23 + 14{,}01 \cdot 3 = 65{,}03\ \text{g/mol}$$

$$65\ \cancel{\text{g de NaN}_3} \cdot \frac{1\ \text{mol de NaN}_3}{65{,}03\ \cancel{\text{g de NaN}_3}} = 1\ \text{mol de NaN}_3$$

Por la estequiometría de la reacción calculamos los moles de nitrógeno que se obtienen:

$$1\ \cancel{\text{mol de NaN}_3} \cdot \frac{3\ \text{mol de N}_2}{2\ \cancel{\text{mol de NaN}_3}} = 1{,}5\ \text{mol de N}_2$$

Utilizamos la ecuación de los gases ideales para calcular el volumen de nitrógeno, en las condiciones dadas:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{1{,}5\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082\ \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (0 + 273)\ \cancel{\text{K}}}{1\ \cancel{\text{atm}}} = \mathbf{33{,}6\ L\ de\ N_2}$$

2. ¿Qué cantidad de azida de sodio debe tener el *airbag* de un acompañante del conductor cuya bolsa tiene 120 L de capacidad?

Teniendo en cuenta el resultado obtenido en la actividad anterior:

$$\frac{120\ \cancel{\text{L}}}{33{,}6\ \cancel{\text{L}}} = \frac{x}{65\ \text{g}} \quad \Rightarrow \quad x = \mathbf{232{,}1\ g}$$

3. ¿Qué otras reacciones químicas rápidas conoces?

Las reacciones de combustión de los motores de los vehículos, las reacciones que tienen lugar en los explosivos, las reacciones de neutralización ácido-base, etc.

REFLEXIONA

4. ¿Por qué crees que ahora se sitúan varios sensores distribuidos por los vehículos para poner en marcha el mecanismo del *airbag*?

Actualmente, los vehículos cuentan con diversos *airbags* para proteger a los acompañantes además del conductor. Entonces deben existir distintos sensores que detecten cuáles tienen que accionarse en función de la ocupación del vehículo: los delanteros, los traseros, los laterales, o todos al mismo tiempo.

OPINA

5. **¿Qué te parece la norma europea que obliga a todos los fabricantes a instalar *airbags* en los vehículos, aunque esto encarezca el precio final?**

En la respuesta se debe tener en consideración la importancia de dotar a los vehículos con la máxima seguridad posible para minimizar los accidentes y sus consecuencias. Por tanto, se trata de una norma adecuada encaminada a este fin.

6. **Contesta:**

a) **¿Llevas siempre puesto el cinturón de seguridad?**

b) **¿Qué medidas deberían adoptar las autoridades para conseguir que todos los pasajeros de vehículos lleven abrochado el cinturón de seguridad?**

a) Todos los pasajeros de un vehículo en marcha deben llevar siempre abrochado el cinturón de seguridad.

b) Las autoridades hacen controles del uso del cinturón de seguridad, imponiendo una sanción a aquellos pasajeros o conductores que incumplan la normativa al no llevarlo abrochado. Además, en las campañas de seguridad vial, la Dirección General de Tráfico (DGT) ofrece datos comparativos entre las consecuencias de un accidente con o sin cinturón, inculcando así a los ciudadanos que el cinturón es el elemento de seguridad pasiva del vehículo más eficaz.

7. **En colisiones de pequeña envergadura el *airbag* no se dispara, pues el cinturón ofrece suficiente protección. ¿Te parece una buena idea? ¿Por qué?**

Sí, puesto que en caso contrario correríamos el riesgo de que el *airbag* se accionase, por ejemplo, ante un frenazo algo más fuerte de lo habitual, lo que podría ocasionar lesiones a los ocupantes del vehículo. Además, al interrumpirse la conducción y la visión, aumentaría la posibilidad de sufrir un accidente por el simple hecho de haberse activado el *airbag* sin ser necesario.

5

Termodinámica química

Termodinámica química 5

PARA COMENZAR (página 123)

- **Investiga dónde y cuándo los seres humanos usaron por primera vez el fuego de manera controlada.**

  Datos arqueológicos revelan que el fuego fue utilizado por primera vez por los seres humanos en los siguientes lugares y momentos:

  - En África oriental se utilizó por primera vez hace 1,5 millones de años, aproximadamente.
  - En África austral se han encontrado evidencias de utilización del fuego que datan de unos 700 000 años de antigüedad.
  - En Oriente Medio (en el territorio que corresponde actualmente con Israel), hay evidencias de unos 800 000 años de antigüedad.
  - En Extremo Oriente (en el territorio que corresponde actualmente con China), las evidencias indican que la utilización del fuego se remonta a 1 millón de años.
  - En la península ibérica (en el territorio que actualmente corresponde con España) se han encontrado restos de carbón y madera que indican que el fuego se utilizó hace unos 500 000 años.
  - La expansión de la utilización del fuego de manera controlada empezó hace unos 125 000 años.

- **¿Qué otros procesos químicos conoces donde intervienen intercambios de energía?**

  - En el cocinado de alimentos.
  - En los procesos metabólicos.
  - En la obtención de metales.
  - En las combustiones en general (cocinas, calefacciones, transporte, centrales térmicas de obtención de energía eléctrica, etc.).

PRACTICA (página 124)

1. ¿Qué cantidad de calor deben perder 100 g de agua a 20 °C para que su temperatura sea de 0 °C? Dato: c_e = 4180 J/(kg · K).

En esta transformación, el agua solo experimenta un cambio de temperatura. En todo el proceso se mantiene en estado líquido. Para calcular el calor utilizamos la expresión:

$$Q = m \cdot c_e \cdot (t_f - t_i)$$

Y sustituimos los datos proporcionados en el enunciado, expresados en unidades del sistema internacional:

$$t_i = 20\ °C = (20 + 273)\ K = 293\ K;\ \ t_f = 0\ °C = (0 + 273)\ K = 273\ K;\ \ m = 100\ g \cdot \frac{1\ kg}{1000\ g} = 0{,}100\ kg$$

$$Q = 0{,}1\ \cancel{kg} \cdot 4180 \frac{kJ}{\cancel{kg} \cdot \cancel{K}} \cdot (273 - 293)\ \cancel{K} = -8{,}36 \cdot 10^3\ J = \mathbf{-8{,}36\ kJ}$$

El signo negativo del calor es coherente con el hecho de que el sistema disminuye su temperatura.

2. ¿Qué cantidad de calor deben perder 100 g de agua a 0 °C para convertirse en hielo a 0 °C? Dato: L_f = 334,4 kJ/kg.

En este caso, el agua experimenta un cambio de estado (de líquido a sólido) sin que varíe su temperatura. Para calcular el calor utilizamos la expresión:

$$Q = m \cdot L$$

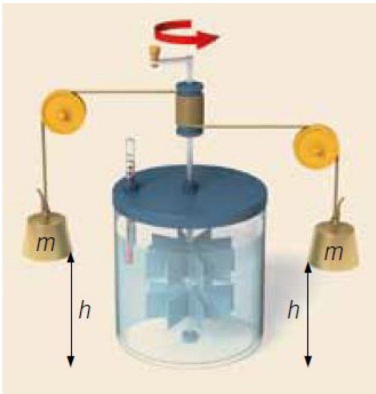
Es importante tener en cuenta que cuando el cuerpo pierde energía (como en este caso), el calor latente será negativo. Sustituimos los datos, expresados en unidades del sistema internacional.

$$m = 100\ \text{g} \cdot \frac{1\ \text{kg}}{1000\ \text{g}} = 0{,}100\ \text{kg}$$

Tenemos en cuenta este criterio de signos:

$$Q = 0{,}1\ \cancel{\text{kg}} \cdot \left(-334{,}4\ \frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{kg}}}\right) = -33{,}44 \cdot 10^3\ \text{J} = \mathbf{-33{,}44\ kJ}$$

3. **Para realizar la experiencia de Joule se utilizaron dos pesas de 5 kg cada una, atadas a una cuerda que se puede desenrollar 1,5 m. En el calorímetro hay 100 mL de agua a 20 °C. ¿Qué temperatura llega a alcanzar? Datos: c_e = 4180 J/(kg · K), g = 9,8 m/s².**



Suponemos que la experiencia se realiza en un sistema aislado, de manera que el trabajo realizado por las dos pesas que caen coincide con el calor que recibe el agua y hace que aumente su temperatura:

$$Q = W$$

El trabajo que realizan las dos pesas coincide con su pérdida de energía potencial:

$$W = 2\, m_{\text{pesa}} \cdot g \cdot h$$

El calor que hace aumentar la temperatura del agua:

$$Q = m_{\text{agua}} \cdot c_e \cdot \Delta t$$

Igualando ambas expresiones:

$$2\, m_{\text{pesa}} \cdot h \cdot g = m_{\text{agua}} \cdot c_e \cdot (t_f - t_i)$$

Despejamos la incógnita, t_f:

$$t_f = \frac{2\, m_{\text{pesa}} \cdot h \cdot g}{m_{\text{agua}} \cdot c_e} + t_i$$

Convertimos los datos dados a unidades del sistema internacional. Calculamos la masa de agua correspondiente al volumen de 100 mL asumiendo que su densidad es 1 g/mL:

$$m_{\text{agua}} = 100\ \cancel{\text{mL}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{g}}}{1\ \cancel{\text{mL}}} \cdot \frac{1\ \text{kg}}{1000\ \cancel{\text{g}}} = 0{,}1\ \text{kg}$$

Cambiamos la temperatura inicial de grados Celsius a grados Kelvin:

$$t_i = 20\ °\text{C} = (20 + 273)\ \text{K} = 293\ \text{K}$$

Sustituimos los datos y operamos:

$$t_f = \frac{2 \cdot 5\ \text{kg} \cdot 1{,}5\ \text{m} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0{,}1\ \cancel{\text{kg}} \cdot 4180\ \frac{\text{J}}{\cancel{\text{kg}} \cdot \text{K}}} + 293\ \text{K} = \frac{147\ \cancel{\text{J}}}{418\ \frac{\cancel{\text{J}}}{\text{K}}} + 293\ \text{K} = 293{,}35\ \text{K}$$

$$(t_f + 273)\ \text{K} = 293{,}35\ \text{K} \quad \Rightarrow \quad t_f = 20{,}35\ °\text{C}$$

El agua del calorímetro llega a estar a **20,35 °C**.

ACTIVIDADES (página 127)

4. ¿Cuál es el valor del trabajo de expansión en un proceso isocórico?

Un proceso isocórico es aquel que se realiza a volumen constante, $V_f = V_i \Rightarrow \Delta V = 0$. Por tanto, no hay trabajo de expansión.

5. Un gas que está encerrado en un cilindro de 5 L sufre una expansión hasta 8 L cuando la presión exterior es de 150 kPa. ¿Cuál es el valor del trabajo de expansión?

La expresión que permite calcular el trabajo de expansión a presión exterior constante es:

$$W = -p \cdot (V_f - V_i)$$

Sustituimos los datos expresándolos en unidades del Sistema Internacional:

$$V_i = 5\,\cancel{L} \cdot \frac{1\ m^3}{1000\,\cancel{L}} = 5 \cdot 10^{-3}\ m^3;\quad V_f = 8\,\cancel{L} \cdot \frac{1\ m^3}{1000\,\cancel{L}} = 8 \cdot 10^{-3}\ m^3;\quad p = 150\,\cancel{kPa} \cdot \frac{1000\ Pa}{1\,\cancel{kPa}} = 1{,}5 \cdot 10^5\ Pa$$

$$W = -1{,}5 \cdot 10^5\ Pa \cdot (8-5) \cdot 10^{-3}\ m^3 = \mathbf{-450\ J}$$

El signo del trabajo es negativo, ya que el sistema realiza la expansión perdiendo energía interna.

6. Un gas que está encerrado en un cilindro de 5 L sufre una compresión hasta 2 L cuando la presión exterior es de 150 kPa. ¿Cuál es el valor del trabajo de expansión?

La expresión que permite calcular el trabajo de expansión a presión exterior constante es:

$$W = -p \cdot (V_f - V_i)$$

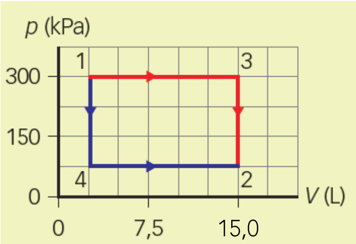
Sustituimos los datos expresándolos en unidades del Sistema Internacional:

$$W = -1{,}5 \cdot 10^5\ Pa \cdot (2-5) \cdot 10^{-3}\ m^3 = \mathbf{+450\ J}$$

El signo del trabajo es positivo. Hay que realizar un trabajo sobre el sistema para que se comprima. Este trabajo aumenta la energía interna del sistema.

7. Un gas encerrado en un recipiente pasa desde un estado 1 a un estado 2 por dos caminos:

- **Camino A: 1 – 3 – 2**
- **Camino B: 1 – 4 – 2**



a) Calcula el trabajo de expansión por cada camino.

En cada caso, analizamos si la transformación que experimenta el sistema es a presión constante o a volumen constante:

- Camino A:

$1 \rightarrow 3$: Expansión a presión constante: $W = -p \cdot (V_f - V_i)$.

$3 \rightarrow 2$: Se reduce la presión a volumen constante: $W = 0$.

$$W_{1\to2} = W_{1\to3} + W_{3\to2} = W_{1\to3} + 0 = W_{1\to3}$$

Para calcular $W_{1\to3}$, leemos los datos de cada estado en el gráfico y sustituimos los valores, expresándolos en unidades del sistema internacional:

$$W = -3 \cdot 10^5\ Pa \cdot (15{,}0 - 2{,}5) \cdot 10^{-3}\ m^3 = -3750\ J = \mathbf{-3{,}75\ kJ}$$

- Camino B:

$1 \rightarrow 4$: Se reduce la presión a volumen constante: $W = 0$.

$4 \rightarrow 2$: Expansión a presión constante: $W = -p \cdot (V_f - V_i)$.

$$W_{1\to2} = W_{1\to4} + W_{4\to2} = 0 + W_{4\to2} = W_{4\to2}$$

Para calcular $W_{4\to2}$, leemos los datos de cada estado en el gráfico y sustituimos los valores, expresándolos en unidades del sistema internacional:

$$W = -7{,}5 \cdot 10^4\ \text{Pa} \cdot (15{,}0 - 2{,}5) \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 = \mathbf{-937{,}5\ J}$$

b) Demuestra que el trabajo no es función de estado.

Una función de estado es aquella magnitud cuyo valor depende solo del estado en el que se encuentre el sistema y no de cómo ha evolucionado para llegar a él. A partir de los resultados del apartado anterior, se deduce que el trabajo no es función de estado, ya que el resultado obtenido al seguir caminos diferentes entre los mismos puntos (estados) ha sido diferente.

ACTIVIDADES (página 128)

8. Razona si es posible que un sistema realice trabajo sin que se le suministre calor. ¿Podrá hacerlo indefinidamente?

El primer principio de la termodinámica dice que, cuando un sistema experimenta una transformación, la variación de su energía interna coincide con la suma del calor y el trabajo que intercambia con el entorno:

$$\Delta U = Q + W$$

Si el sistema realiza trabajo, ese trabajo es negativo, pues supone una disminución de la energía interna del sistema. Si el sistema no recibe calor, podrá realizar trabajo a expensas de su energía interna, hasta que esta se agote. Al agotarse al energía interna, cesa su capacidad de hacer trabajo.

Por eso para seguir trabajando será necesario suministrar calor, variación positiva de la energía interna.

9. Un sistema termodinámico sufre un proceso isotérmico en el que libera 500 kJ de calor. ¿Qué valor tendrá el trabajo de expansión que intercambia con el entorno? Interpreta el signo.

Cuando un sistema realiza un proceso sin que varíe su temperatura, tampoco variará su energía interna.

En un proceso isotérmico, y considerando que el sistema realiza únicamente trabajo de expansión, resulta que:

$$\Delta U = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = Q + W \quad \Rightarrow \quad Q = -W$$

El calor que el sistema desprende al entorno se considera negativo. En el enunciado se indica que el calor se libera, luego su signo es negativo.

$$Q = -500\ \text{kJ} \quad \Rightarrow \quad W = -Q = -(-500\ \text{kJ}) = +500\ \text{kJ}$$

El signo del trabajo es positivo, lo cual indica que el entorno realiza un trabajo sobre el sistema y aumenta la energía interna del sistema.

ACTIVIDADES (página 129)

10. Escribe la ecuación termoquímica del proceso en que tres moles de $CaCO_3$ (*s*) se descomponen en la cantidad correspondiente de CaO y CO_2, a 25 °C y 1 atm.

En el texto se indica la ecuación termoquímica correspondiente a la descomposición del $CaCO_3$ (*s*):

$$CaCO_3\,(s) \rightarrow CaO(s) + CO_2\,(g) \qquad \Delta H = +179{,}2\ \text{kJ}$$

La entalpía es una magnitud extensiva, depende de la cantidad de material. Si debemos escribir el proceso correspondiente a la descomposición de 3 moles de $CaCO_3$, se liberará el triple de energía que cuando se descompone 1 mol:

$$3\,CaCO_3\,(s) \rightarrow 3\,CaO(s) + 3\,CO_2\,(g) \qquad \Delta H = 3\ \cancel{\text{mol}} \cdot \left(+179{,}2\ \frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}}\right) = \mathbf{+537{,}6\ kJ}$$

11. Escribe la ecuación termoquímica del proceso en que tres moles de CaO se combinan con la cantidad correspondiente de CO_2 para dar $CaCO_3$ (s), a 25 °C y 1 atm.

Este proceso es el inverso del que se cita en el ejercicio anterior, por tanto, la variación de entalpía debe tener signo opuesto:

$$3\,CaO(s) + 3\,CO_2\,(g) \rightarrow 3\,CaCO_3\,(s) \qquad \Delta H = -537{,}6\ \text{kJ}$$

ACTIVIDADES (página 130)

12. El butano, C_4H_{10}, es uno de los combustibles más utilizados en el ámbito doméstico. Se quema por acción del oxígeno del aire formando dióxido de carbono y agua. Cada vez que se quema 1 mol de butano se desprenden 2878 kJ. Calcula:

a) La cantidad de energía que se obtiene cuando se queman los 12,5 kg de butano de una bombona.

b) Los moles de CO_2 que se vierten a la atmósfera cada vez que se quema una bombona de butano.

Planteamos la ecuación termoquímica del proceso. Coincidiendo con el dato de la energía desprendida, la ajustamos para que se queme 1 mol de butano:

$$C_4H_{10}\,(g) + \frac{13}{2} O_2\,(g) \rightarrow 4\,CO_2\,(g) + 5\,H_2O(l) \qquad \Delta H = -2878\text{ kJ}$$

a) Calculamos los moles de butano que contiene una bombona y luego la energía que se obtiene cuando se queman en su totalidad.

Calculamos la masa molar del butano y luego lo utilizamos como factor de conversión:

$$M(C_4H_{10}) = 12{,}00 \cdot 4 + 1{,}008 \cdot 10 = 58{,}08\text{ g/mol}$$

$$12{,}5\ \cancel{\text{kg de } C_4H_{10}} \cdot \frac{1000\ \cancel{\text{g de } C_4H_{10}}}{1\ \cancel{\text{kg de } C_4H_{10}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{mol de } C_4H_{10}}}{58{,}08\ \cancel{\text{g de } C_4H_{10}}} \cdot \left(-2878 \frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol de } C_4H_{10}}}\right) = -6{,}19 \cdot 10^5\text{ kJ} \approx \mathbf{-6{,}2 \cdot 10^5\ kJ}$$

b) La estequiometría indica que por cada mol de C_4H_{10} que se quema, se vierten a la atmósfera 4 moles de CO_2. Utilizamos esta información para construir el factor de conversión adecuado y resolver:

$$12{,}5\ \cancel{\text{kg de } C_4H_{10}} \cdot \frac{1000\ \cancel{\text{g de } C_4H_{10}}}{1\ \cancel{\text{kg de } C_4H_{10}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{mol de } C_4H_{10}}}{58{,}08\ \cancel{\text{g de } C_4H_{10}}} \cdot \frac{4\text{ mol de } CO_2}{1\ \cancel{\text{mol de } C_4H_{10}}} = 860{,}88\text{ mol de } CO_2 \approx \mathbf{861\ mol\ de\ CO_2}$$

13. Para cocer unos huevos necesitamos 1700 kJ. Calcula la masa de butano, C_4H_{10}, necesaria para esta operación si cada mol de butano quemado desprende 2878 kJ y el rendimiento de la cocina es el 60 %.

Utilizamos la ecuación termoquímica empleada en el ejercicio anterior.

$$C_4H_{10}\,(g) + \frac{13}{2} O_2\,(g) \rightarrow 4\,CO_2\,(g) + 5\,H_2O(l) \qquad \Delta H = -2878\text{ kJ}$$

El cálculo se inicia en la cantidad de energía que necesitamos. Hay que tener en cuenta que la cocina solo aprovecha el 60 % de la energía obtenida de la combustión:

$$1700\ \cancel{\text{kJ reales}} \cdot \frac{100\text{ kJ teóricos}}{60\ \cancel{\text{kJ reales}}} = 2833{,}\widehat{3}\text{ kJ teóricos}$$

Calculamos los moles de butano que debemos quemar para obtener esta energía:

$$2833{,}\widehat{3}\ \cancel{\text{kJ}} \cdot \frac{1\text{ mol de } C_4H_{10}}{2878\ \cancel{\text{kJ}}} = 0{,}98448\text{ mol de } C_4H_{10}$$

La masa molar del butano nos indicará su equivalente en gramos:

$$M(C_4H_{10}) = 12{,}00 \cdot 4 + 1{,}008 \cdot 10 = 58{,}08\text{ g/mol}$$

$$0{,}98448\ \cancel{\text{mol de } C_4H_{10}} \cdot \frac{58{,}08\text{ g de } C_4H_{10}}{1\ \cancel{\text{mol de } C_4H_{10}}} = 57{,}18\text{ g de } C_4H_{10} \approx \mathbf{57{,}2\ g\ de\ C_4H_{10}}$$

14. Se puede obtener H_2O_2 calentando H_2O con O_2. El proceso requiere un aporte de calor de 196 kJ por mol de O_2. ¿Qué cantidad de energía precisaremos para que reaccionen 40 g de H_2O con 15 L de O_2 en condiciones estándar?

Escribimos la ecuación termoquímica ajustada de forma que intervenga 1 mol de O_2:

$$2\,H_2O + O_2 \rightarrow 2\,H_2O_2 \qquad \Delta H = +196\text{ kJ}$$

Podemos suponer que un gas en condiciones estándar está a 10^5 Pa de presión y 0 °C. Pasamos estos dados al sistema internacional:

$$p = 10^5\ \cancel{\text{Pa}} \cdot \frac{1\ \text{atm}}{1{,}013 \cdot 10^5\ \cancel{\text{Pa}}} = 0{,}987\ \text{atm}\ ;\ T = (0 + 273)\ \text{K}\ = 273\ \text{K}$$

Calculamos los moles de O_2 utilizando la ecuación de estado de los gases ideales. Sustituimos los datos, expresándolos en unidades coherentes, y resolvemos:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{0{,}987\ \cancel{\text{atm}} \cdot 15\ \cancel{\text{L}}}{0{,}082 \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot 273\ \cancel{\text{K}}} = 0{,}661\ \text{mol de } O_2$$

Calculamos la cantidad en mol que corresponde con la masa de 40 g de H_2O. Previamente, necesitamos calcular su masa molar:

$$M(H_2O) = 1{,}008 \cdot 2 + 16{,}00 = 18{,}016\ \text{g/mol}$$

$$40\ \cancel{\text{g de } H_2O} \cdot \frac{1\ \text{mol de } H_2O}{18{,}016\ \cancel{\text{g de } H_2O}} = 2{,}22\ \text{mol de } H_2O$$

La estequiometría de la reacción indica que intervienen 2 mol de H_2O por cada mol de O_2. La cantidad en mol de cada una de estas sustancias indica que el O_2 es el reactivo limitante. Por tanto, debemos calcular la cantidad de energía necesaria para que reaccionen 0,661 mol de O_2. Construimos el factor de conversión con la información de la ecuación termoquímica:

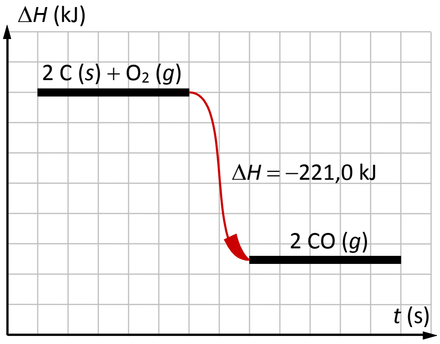
$$0{,}661\ \cancel{\text{mol de } O_2} \cdot \frac{196\ \text{kJ}}{1\ \cancel{\text{mol de } O_2}} = \mathbf{129{,}6\ kJ}$$

ACTIVIDADES (página 131)

15. Haz el diagrama entálpico del proceso en el que se forman 2 mol de CO (*g*) a partir de las cantidades adecuadas de las sustancias simples que lo forman. Sabemos que a 25 °C y 1 atmósfera se desprenden 110,5 kJ por cada mol de CO formado.

Escribimos la ecuación termoquímica del proceso ajustada para que se formen 2 mol de CO (*g*). Como es un proceso exotérmico, la variación de entalpía es negativa. Su valor es el doble del que corresponde a la formación de 1 mol de CO (*g*).

$$2\,C(s) + O_2(g) \rightarrow 2\,CO(g) \qquad \Delta H = -221\ \text{kJ}$$

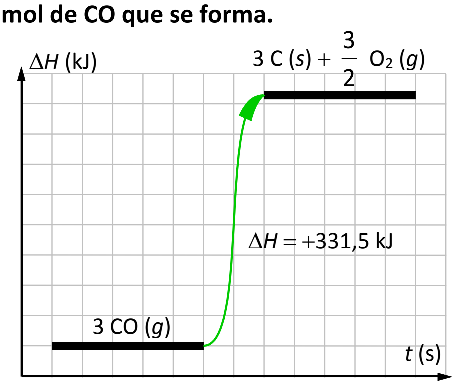


16. Haz el diagrama entálpico del proceso en que se descomponen 3 mol de CO (*g*) en las sustancias simples que lo forman. Se sabe que a 25 °C y 1 atm se desprenden 110,5 kJ por cada mol de CO que se forma.

La descomposición del CO en las sustancias simples que lo forman es el proceso inverso al descrito en la actividad anterior. Será un proceso endotérmico con una variación de entalpía positiva.

Escribimos la ecuación termoquímica del proceso ajustada para que se descompongan 3 mol de CO (*g*). Su valor es el triple del que corresponde a la descomposición de 1 mol de CO (*g*).

$$3\,CO(g) \rightarrow 3\,C(s) + \frac{3}{2}O_2(g) \qquad \Delta H = 331{,}5\ \text{kJ}$$



ACTIVIDADES (página 132)

17. Para medir la entalpía de disolución del NaOH se colocan 100 g de agua en un calorímetro y se comprueba que la temperatura es 19 °C. Se añaden 2 g de NaOH (*s*), se tapa el calorímetro y se comprueba que la temperatura llega a ser de 21 °C. ¿Cuál es el valor de la entalpía?
Datos: $c_{e,agua}$ = 4180 J/(kg · K), masa equivalente del calorímetro en agua = 20 g.

Para calcular la entalpía de disolución del NaOH (*s*) debemos obtener el calor que se desprende cuando se disuelve 1 mol de NaOH (*s*) en agua.

En esta experiencia se calcula el calor que se desprende cuando se disuelven 2 g de NaOH en 100 mL de agua. En el proceso se calienta el sistema, por tanto, podremos calcular la cantidad de calor que se desprende. Luego, debemos relacionarlo con el número de moles de NaOH que se han disuelto.

$$\Delta H = -\frac{Q}{n}$$

La disolución de NaOH es un proceso exotérmico. El calor desprendido hace que aumente la temperatura del sistema. Por tanto, su signo será negativo.

Calculamos la cantidad de calor liberada en el proceso. Debemos incluir el calor absorbido por el calorímetro:

$$Q = m_{\text{sistema}} \cdot c_e \cdot (t_f - t_i) + m_{\text{eq,calorimetro}} \cdot c_e \cdot (t_f - t_i)$$

Como se trata de una disolución acuosa diluida podemos suponer que su calor específico y su densidad coinciden con los del agua.

$$Q = (100 + 2) \cdot 10^{-3}\ \cancel{\text{kg}} \cdot 4180\ \frac{\text{J}}{\cancel{\text{kg}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (21 - 19)\ \cancel{\text{K}} + 0{,}02\ \cancel{\text{kg}} \cdot 4180\ \frac{\text{J}}{\cancel{\text{kg}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (21 - 19)\ \cancel{\text{K}} = 1019{,}9\ \text{J}$$

Calculamos los moles de NaOH que se han disuelto. Necesitamos conocer su masa molar:

$$M(\text{NaOH}) = 23{,}00 + 16{,}00 + 1{,}008 = 40{,}01\ \text{g/mol}$$

$$2\ \cancel{\text{g de NaOH}} \cdot \frac{1\ \text{mol de NaOH}}{40{,}01\ \cancel{\text{g de NaOH}}} = 0{,}05\ \text{mol de NaOH}$$

Sustituimos los datos para calcular la entalpía de disolución del NaOH (*s*).

$$\Delta H = -\frac{1019{,}9\ \text{J}}{0{,}05\ \text{mol}} = \mathbf{-20{,}4\ kJ/mol}$$

18. En un calorímetro se ponen 100 mL de disolución de HCl 0,5 M y se le añaden 2 g de NaOH. Se cierra el calorímetro y se comprueba que la temperatura en su interior ha pasado de 19 °C a 27,5 °C. ¿Para qué proceso medimos la variación de entalpía? ¿Cuál es su valor?
Datos: $c_{e,agua}$ = 4180 J/(kg · K), masa equivalente del calorímetro en agua = 20 g.

Al añadir NaOH (*s*) a la disolución de HCl, se produce la neutralización entre ambos, según la ecuación:

$$\text{NaOH}(s) + \text{HCl}(aq) \rightarrow \text{NaCl}(aq)$$

Según indica la estequiometría, 1 mol de NaOH se neutraliza con 1 mol de HCl. Verificamos que la cantidad de moles es la misma para ambos compuestos.

$$M(\text{NaOH}) = 23{,}00 + 16{,}00 + 1{,}008 = 40{,}01\ \text{g/mol}$$

$$2\ \cancel{\text{g de NaOH}} \cdot \frac{1\ \text{mol de NaOH}}{40{,}01\ \cancel{\text{g de NaOH}}} = 0{,}05\ \text{mol de NaOH}$$

Por definición de molaridad:

$$M = \frac{n}{V(\text{L})} \Rightarrow n(\text{HCl}) = 0{,}5\ \text{M} \cdot 0{,}1\ \text{L} = 0{,}05\ \text{mol}$$

Calculamos ahora la cantidad de calor liberada en el proceso, incluyendo en el cálculo el calor absorbido por el calorímetro:

$$Q = m_{\text{sistema}} \cdot c_e \cdot (t_f - t_i) + m_{\text{eq,calorímetro}} \cdot c_e \cdot (t_f - t_i)$$

Como se trata de una disolución acuosa diluida podemos suponer que su calor específico y su densidad coinciden con los del agua.

$$Q = (0{,}002\,\cancel{\text{kg}} + 0{,}1\,\cancel{\text{kg}}) \cdot 4180\,\frac{\text{J}}{\cancel{\text{kg}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (27{,}5 - 19)\,\cancel{\text{K}} + 0{,}02\,\cancel{\text{kg}} \cdot 4180\,\frac{\text{J}}{\cancel{\text{kg}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (27{,}5 - 19)\,\cancel{\text{K}} = 4{,}33\,\text{kJ}$$

Este resultado representa el calor desprendido cuando se neutralizan 0,05 mol de cada sustancia. Obtendremos a partir de él la entalpía molar de neutralización del proceso. El valor de su signo será negativo, puesto que se trata de un proceso exotérmico (el enunciado indica que la temperatura ha aumentado).

$$\Delta H = -\frac{Q}{n} = -\frac{4{,}33\,\text{kJ}}{0{,}05\,\text{mol}} = \mathbf{-86{,}7\,kJ/mol}$$

ACTIVIDADES (página 133)

19. Dependiendo de las condiciones, los gases hidrógeno y oxígeno se pueden combinar dando agua o agua oxigenada. Conociendo la variación de entalpía de estos procesos, determina la del proceso en que el agua oxigenada se descompone en agua y oxígeno:

A: $2\,H_2\,(g) + O_2\,(g) \rightarrow 2\,H_2O\,(l)$ $\quad \Delta H_A = -571{,}0$ kJ

B: $H_2\,(g) + O_2\,(g) \rightarrow H_2O_2\,(l)$ $\quad \Delta H_B = -187{,}5$ kJ

Comenzamos escribiendo la ecuación del proceso cuya entalpía queremos obtener:

$$H_2O_2\,(l) \rightarrow H_2O(l) + \frac{1}{2}O_2\,(g)$$

Combinaremos las ecuaciones A y B hasta obtener la que buscamos. En el proceso que buscamos, H_2O_2 aparece como reactivo, por lo que tendremos que invertir la ecuación termoquímica B, incluyendo su ΔH_B. Además, buscamos H_2O como producto y tenemos 2 H_2O en la ecuación A. Dividiremos por 2 esta ecuación, incluyendo su ΔH_A. Por lo tanto, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\text{A}: \quad \cancel{H_2(g)} + \cancel{\frac{1}{2}O_2(g)} \rightarrow H_2O(l) \qquad \frac{1}{2} \cdot \Delta H_A = \frac{1}{2} \cdot (-571{,}0\,\text{kJ}) = -285{,}5\,\text{kJ}$$

$$-\text{B}: \quad H_2O_2\,(l) \rightarrow \cancel{H_2(g)} + \left(\frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2}}\right)O_2\,(g) \qquad -\Delta H_B = -(-187{,}5\,\text{kJ}) = +187{,}5\,\text{kJ}$$

$$\frac{1}{2}\text{A} - \text{B}: \quad H_2O_2\,(l) \rightarrow H_2O(l) + \frac{1}{2}O_2\,(g) \qquad \Delta H = \frac{1}{2} \cdot \Delta H_A - \Delta H_B = -285{,}5\,\text{kJ} + 187{,}5\,\text{kJ} = \mathbf{-98\,kJ}$$

20. El fósforo sólido se puede combinar con gas cloro para dar dos compuestos diferentes. Conociendo la variación de entalpía de los procesos que se indican, calcula la variación de entalpía del proceso en que el PCl_3 (*l*) se combina con Cl_2 (*g*) para dar PCl_5 (*s*):

A: $P_4\,(s) + 6\,Cl_2\,(g) \rightarrow 4\,PCl_3\,(l)$ $\quad \Delta H_A = -1270$ kJ

B: $P_4\,(s) + 10\,Cl_2\,(g) \rightarrow 4\,PCl_5\,(s)$ $\quad \Delta H_B = -548$ kJ

Comenzamos escribiendo la ecuación ajustada del proceso cuya entalpía queremos obtener:

$$PCl_3\,(l) + Cl_2\,(g) \rightarrow PCl_5\,(s)$$

Combinaremos las ecuaciones A y B hasta obtener la que buscamos. En el proceso que buscamos, PCl_3 aparece como reactivo, por lo que tendremos que invertir la ecuación termoquímica A, incluyendo su ΔH_A.

$$-\text{A}: \quad 4\,PCl_3 \rightarrow \cancel{P_4} + \cancel{6\,Cl_2} \qquad -\Delta H_A = -(-1270\,\text{kJ}) = +1270\,\text{kJ}$$

$$\text{B}: \quad \cancel{P_4} + (\cancel{6} + 4)\,Cl_2 \rightarrow 4\,PCl_5 \qquad \Delta H_B = -548\,\text{kJ}$$

$$-\text{A} + \text{B}: \quad 4\,PCl_3 + 4\,Cl_2 \rightarrow 4\,PCl_5 \qquad \Delta H = -\Delta H_A + \Delta H_B = +1270\,\text{kJ} - 548\,\text{kJ} = 722\,\text{kJ}$$

Dividiremos este resultado entre 4 para obtener la variación de entalpía del proceso buscado:

$$\frac{-A+B}{4}: \qquad PCl_3 + Cl_2 \rightarrow PCl_5 \qquad \frac{1}{4}\Delta H = \frac{1}{4}\cdot(+722\ \text{kJ}) = \mathbf{+180{,}5\ kJ}$$

ACTIVIDADES (página 134)

21. A partir de la entalpía de formación del agua y del agua oxigenada (ambos líquidos) determina la variación de entalpía del proceso en que el agua oxigenada se descompone en agua y oxígeno. Datos en la tabla 5.1.

Escribimos la ecuación química ajustada del proceso:

$$H_2O_2\,(l) \rightarrow H_2O(l) + \frac{1}{2}O_2\,(g)$$

Para este proceso:

$$\Delta H_{\text{reacción}} = \sum H_{\text{productos}} - \sum H_{\text{reactivos}} = \left[H_f(H_2O) + \frac{1}{2}\cdot H_f(O_2)\right] - H_f(H_2O_2)$$

Sustituimos los datos disponibles en la tabla 5.1:

$$\Delta H = [-285{,}8\ \text{kJ/mol} + 0\ \text{kJ/mol}] - (-187{,}8\ \text{kJ/mol}) = \mathbf{-98\ kJ/mol}$$

22. El etanol (C_2H_5OH) arde produciendo CO_2 (*g*) y H_2O (*l*). Determina la variación de entalpía de combustión del etanol utilizando las entalpías de formación de las sustancias que intervienen en el proceso. Datos en la tabla 5.1.

Escribimos la ecuación química ajustada del proceso:

$$C_2H_5OH(l) + 3\,O_2\,(g) \rightarrow 2\,CO_2\,(s) + 3\,H_2O(l)$$

Para este proceso:

$$\Delta H_{\text{reacción}} = \sum H_{\text{productos}} - \sum H_{\text{reactivos}} = [2\cdot H_f(CO_2) + 3\cdot H_f(H_2O)] - [H_f(C_2H_5OH) + 3\cdot H_f(O_2)]$$

Sustituimos los datos disponibles en la tabla 5.1:

$$\Delta H = \left[2\cdot\left(-393{,}5\frac{\text{kJ}}{\text{mol}}\right) + 3\cdot\left(-285{,}8\frac{\text{kJ}}{\text{mol}}\right)\right] - \left[-277{,}7\frac{\text{kJ}}{\text{mol}} + 0\frac{\text{kJ}}{\text{mol}}\right] = \mathbf{-1366{,}7\frac{kJ}{mol}}$$

ACTIVIDADES (página 135)

23. Utilizando los valores de las entalpías de enlace, determina la variación de entalpía del proceso en que el agua oxigenada se descompone en agua y oxígeno. ¿Coincide con el resultado que has obtenido en la actividad 21? ¿Por qué? Datos en la tabla 5.2.

Escribimos la ecuación química ajustada del proceso:

$$H_2O_2 \rightarrow H_2O + \frac{1}{2}O_2$$

Desde el punto de vista de las entalpías de enlace:

$$\Delta H_{\text{reacción}} = \sum H_{\text{enlaces rotos}} - \sum H_{\text{enlaces nuevos}}$$

Analizamos los enlaces que se rompen y los que se forman en el proceso:

H_2O_2	$\rightarrow$	H_2O	$\frac{1}{2}O_2$
H–O–O–H		H–O–H	O=O
2 H–O 1 O–O		2 H–O	$\frac{1}{2}$ O=O

$$\Delta H_{reac} = \left[2 \cdot H(\text{H}-\text{O}) + H(\text{O}-\text{O})\right] - \left[2 \cdot H(\text{H}-\text{O}) + \frac{1}{2} \cdot H(\text{O}=\text{O})\right] = H(\text{O}-\text{O}) - \frac{1}{2} \cdot H(\text{O}=\text{O})$$

Sustituimos las entalpías de enlace a partir de los datos de la tabla 5.2:

$$\Delta H_{reac} = 157 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} - \frac{1}{2} \cdot 496 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} = \mathbf{-91} \frac{\textbf{kJ}}{\textbf{mol}}$$

En la actividad 19 se obtuvo un valor de entalpía de reacción de –98 kJ/mol.

La diferencia se debe a que tanto el H_2O_2 como el H_2O están en fase líquida, lo que indica que existen enlaces intermoleculares que no se tienen en cuenta cuando se hace el balance de las entalpías correspondientes a los enlaces entre átomos que se rompen o se forman.

24. Utilizando los valores de las entalpías de enlace que se recogen en la tabla 5.2, determina la entalpía de formación estándar del NH_3. ¿Coincide con el resultado que se recoge en la tabla 5.1? ¿Por qué?

Escribimos la ecuación química ajustada del proceso:

$$\frac{3}{2}\text{H}_2 + \frac{1}{2}\text{N}_2 \rightarrow \text{NH}_3$$

Desde el punto de vista de las entalpías de enlace:

$$\Delta H_{\text{reacción}} = \sum H_{\text{enlaces rotos}} - \sum H_{\text{enlaces nuevos}}$$

Analizamos los enlaces que se rompen y los que se forman en el proceso:

$\frac{3}{2}\text{H}_2$	$\frac{1}{2}\text{N}_2$	$\rightarrow$	NH_3
H–H	N≡N		H | H—N—H
$\frac{3}{2}$H–H	$\frac{1}{2}$N≡N		3 N–H

$$\Delta H_{reac} = \left(\frac{3}{2} \cdot H(\text{H–H}) + \frac{1}{2} \cdot H(\text{N≡N})\right) - 3 \cdot H(\text{N–H})$$

Sustituimos las entalpías de enlace a partir de los datos de la tabla 5.2:

$$\Delta H_{reac} = \frac{3}{2} \cdot 436 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} + \frac{1}{2} \cdot 944 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} - 3 \cdot 388 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} = \mathbf{-38} \frac{\textbf{kJ}}{\textbf{mol}}$$

En la tabla 5.1 se especifica que $\Delta H_f^0(\text{NH}_3(g)) = -46{,}1 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$. La diferencia entre ese valor y el que acabamos de calcular se debe a:

- En este ejercicio utilizamos solo entalpías de enlace entre átomos. No estamos teniendo en cuenta las interacciones entre las moléculas.
- Utilizamos valores de entalpías medias de enlace, que no coinciden exactamente con las entalpías de enlace en las moléculas concretas que se manejan en este ejercicio.

ACTIVIDAD (página 136)

25. Observa cada uno de los procesos que se describen en las imágenes de esta página y analiza en cuáles de ellos disminuye la energía del sistema y en cuáles aumenta el desorden.

Figura 5.10. Cuando un cuerpo caliente se enfría, disminuye la energía del sistema.

Figura 5.11. Cuando un cuerpo se calienta, aumenta el desorden de sus partículas.

Figura 5.12. Cuando el gas que está en un recipiente difunde hasta ocupar un segundo recipiente conectado al anterior, aumenta el desorden del sistema.

Figura 5.13. Cuando una sustancia se disuelve en otra, aumenta el desorden del sistema.

Figura 5.14. Cuando una copa se rompe en trozos, aumenta el desorden del sistema.

Figura 5.15. Cuando cae un objeto que estaba sobre la mesa, disminuye la energía del sistema.

ACTIVIDAD (página 137)

26. **Analiza cuáles de los siguientes procesos suponen un aumento de la entropía del sistema:**

a) Evaporar el alcohol.
b) Cristalizar sal marina.
c) Quemarse un bosque.
d) Obtener cubitos de hielo.
e) Aromatizar con incienso.
f) Ordenar una habitación.

a) Cuando el alcohol se evapora, sus moléculas dejan de estar unidas, como en el líquido y pasan a moverse con total libertad, como en el gas. **Aumenta su entropía**.

b) Al cristalizar la sal marina, los iones que estaban disueltos pasan a ocupar posiciones ordenadas en una red cristalina. **La entropía del sistema disminuye**.

c) Cuando se quema un bosque, la materia sólida se convierte en CO_2 (*g*) y H_2O (*l*). **La entropía del sistema aumenta**.

d) Cuando se obtienen cubitos de hielo, las moléculas de agua, que estaban en fase líquida, reducen su movilidad. **La entropía del sistema disminuye**.

e) Cuando se aromatiza con incienso, las moléculas que estaban en fase sólida pasan a fase gas y difunden por la habitación. **La entropía del sistema aumenta**.

f) Cuando se ordena una habitación, disminuye el desorden, lo que hace que **disminuya la entropía**.

ACTIVIDADES (página 138)

27. **Cuando el carbón reacciona con el gas oxígeno se puede obtener monóxido de carbono o dióxido de carbono, según las condiciones.**

a) Escribe ambas reacciones y ajústalas para quemar 1 mol de C.

b) Calcula la variación de entropía en cada caso. Datos en la tabla 5.3.

c) Valora el resultado.

a) Escribimos la ecuación química ajustada del monóxido de carbono:

$$\mathrm{C} + \frac{1}{2}\mathrm{O_2} \rightarrow \mathrm{CO}$$

Escribimos la ecuación química ajustada del dióxido de carbono:

$$\mathrm{C} + \mathrm{O_2} \rightarrow \mathrm{CO_2}$$

b) Para el proceso del monóxido de carbono:

$$\Delta S_{\text{reacción}} = \sum S_{\text{productos}} - \sum S_{\text{reactivos}} = S(\mathrm{CO}) - \left[S(\mathrm{C}) + \frac{1}{2} \cdot S(\mathrm{O_2}) \right]$$

Sustituimos los datos de la tabla 5.3 y obtenemos el resultado:

$$\Delta S = 197{,}7 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K \cdot mol}} - \left[5{,}7 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K \cdot mol}} + \frac{1}{2} \cdot 205{,}1 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K \cdot mol}} \right] = \mathbf{89{,}45} \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{K \cdot mol}}$$

Y para el proceso del dióxido de carbono:

$$\Delta S_{\text{reacción}} = \sum S_{\text{productos}} - \sum S_{\text{reactivos}} = S(\mathrm{CO_2}) - \left[S(\mathrm{C}) + S(\mathrm{O_2}) \right]$$

Sustituimos los datos de la tabla 5.3 y obtenemos el resultado:

$$\Delta S = 213{,}7 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K \cdot mol}} - \left[5{,}7 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K \cdot mol}} + 205{,}1 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K \cdot mol}} \right] = \mathbf{2{,}9} \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{K \cdot mol}}$$

c) En ambos casos se obtiene una variación de entropía positiva, $\Delta S > 0$. La variación es mayor cuando se obtiene CO porque el proceso supone un incremento proporcional de partículas de gas mayor que cuando se obtiene CO_2.

Según la estequiometría de la reacción de obtención de CO, por cada medio mol de gas O_2 que desaparece, se forma 1 mol de gas CO. Por su parte, en el proceso de obtención de CO_2 por cada mol de gas O_2 que desaparece, se forma 1 mol de gas CO_2.

28. Sin hacer ningún cálculo, predice el signo de la variación de entropía de los siguientes procesos. Finalmente, comprueba tus predicciones con los datos de la tabla 5.3.

a) $2\ H_2O_2\ (l) \rightarrow 2\ H_2O\ (l) + O_2\ (g)$

b) $CaCO_3\ (s) \rightarrow CO_2\ (g) + CaO\ (s)$

c) $I_2\ (g) \rightarrow I_2\ (s)$

d) $PCl_3\ (l) + Cl_2\ (g) \rightarrow PCl_5\ (s)$

a) Cuando los reactivos se transforman en productos, se forman gases. Las sustancias líquidas contribuyen poco a la variación de entropía. En el proceso debe aumentar la entropía:

$$\Delta S_{\text{reacción}} = \sum S_{\text{productos}} - \sum S_{\text{reactivos}} = [2 \cdot S(\text{H}_2\text{O}) + S(\text{O}_2)] - [2 \cdot S(\text{H}_2\text{O})]$$

Sustituimos los datos de la tabla 5.3 y obtenemos el resultado:

$$\Delta S = \left[2 \cdot 188{,}8\frac{\text{J}}{\text{K·mol}} + 205{,}1\frac{\text{J}}{\text{K·mol}}\right] - \left[2 \cdot 109{,}6\frac{\text{J}}{\text{K·mol}}\right] = \mathbf{363{,}5\frac{J}{K \cdot mol}}$$

b) Cuando los reactivos se transforman en productos, se forman gases. Las sustancias sólidas contribuyen poco a la variación de entropía. En el proceso debe aumentar la entropía:

$$\Delta S_{\text{reacción}} = \sum S_{\text{productos}} - \sum S_{\text{reactivos}} = [S(\text{CO}_2) + S(\text{CaO})] - S(\text{CaCO}_3)$$

Sustituimos los datos de la tabla 5.3 y obtenemos el resultado:

$$\Delta S = \left[213{,}7\frac{\text{J}}{\text{K·mol}} + 38{,}1\frac{\text{J}}{\text{K·mol}}\right] - \left[91{,}7\frac{\text{J}}{\text{K·mol}}\right] = \mathbf{160{,}1\frac{J}{K \cdot mol}}$$

c) Cuando los reactivos se transforman en productos, un gas se convierte en sólido. La entropía del sistema debe disminuir.

$$\Delta S_{\text{reacción}} = \sum S_{\text{productos}} - \sum S_{\text{reactivos}} = S(\text{I}_2\,(s)) - S(\text{I}_2\,(g))$$

Sustituimos los datos de la tabla 5.3 y obtenemos el resultado:

$$\Delta S = \left[116{,}1\frac{\text{J}}{\text{K·mol}}\right] - \left[260{,}7\frac{\text{J}}{\text{K·mol}}\right] = \mathbf{-144{,}6\frac{J}{K \cdot mol}}$$

d) Cuando los reactivos se transforman en productos, un gas y un líquido se convierten en sólido. El sistema pasa a una fase más ordenada y su entropía debe disminuir.

$$\Delta S_{\text{reacción}} = \sum S_{\text{productos}} - \sum S_{\text{reactivos}} = S(\text{PCl}_5\,(s)) - [S(\text{PCl}_3\,(l)) + S(\text{Cl}_2\,(g))]$$

Sustituimos los datos de la tabla 5.3 y obtenemos el resultado:

$$\Delta S = \left[364{,}2\frac{\text{J}}{\text{K·mol}}\right] - \left[217{,}1\frac{\text{J}}{\text{K·mol}} + 233{,}7\frac{\text{J}}{\text{K·mol}}\right] = \mathbf{-76{,}6\frac{J}{K \cdot mol}}$$

ACTIVIDADES (página 140)

29. Cuando SO_2 (*g*) reacciona con O_2 (*g*) se forma SO_3 (*g*). Determina la espontaneidad del proceso a 25 °C y 300 °C. Datos en las tablas 5.1 y 5.3.

Comenzamos escribiendo la ecuación ajustada del proceso:

$$\text{SO}_2 + \frac{1}{2}\text{O}_2 \rightarrow \text{SO}_3$$

La espontaneidad de un proceso viene determinada por su variación de energía libre de Gibbs. Un proceso es espontáneo si $\Delta G < 0$.

Calcularemos el valor de ΔG del proceso a partir de la expresión:

$$\Delta G = \Delta H - T \cdot \Delta S$$

En primer lugar debemos determinar ΔH y ΔS del proceso.

$$\Delta H_{\text{reacción}} = \sum H_{\text{productos}} - \sum H_{\text{reactivos}} = \left[H_f(SO_3)\right] - \left[H_f(SO_2) + \frac{1}{2}\cdot H_f(O_2)\right]$$

Sustituimos los datos disponibles en la tabla 5.1:

$$\Delta H° = \left(-395{,}7\frac{\text{kJ}}{\text{mol}}\right) - \left(-296{,}8\frac{\text{kJ}}{\text{mol}} + \frac{1}{2}\cdot 0\frac{\text{kJ}}{\text{mol}}\right) = -98{,}9\frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$$

Calculamos también la entropía como:

$$\Delta S_{\text{reacción}} = \sum S_{\text{productos}} - \sum S_{\text{reactivos}} = \left[S(SO_3)\right] - \left[S(SO_2) + \frac{1}{2}\cdot S(O_2)\right]$$

Sustituimos los datos de la tabla 5.3 y obtenemos el resultado:

$$\Delta S° = \left(256{,}8\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}}\right) - \left(-248{,}2\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}} + \frac{1}{2}\cdot 205{,}1\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}}\right) = -98{,}95\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}}$$

Determinamos la espontaneidad para cada una de las temperaturas indicadas en el enunciado.

Para $T = 25$ °C = (25 + 273) K = 298 K:

$$\Delta G^0_{298\,\text{K}} = \Delta H^0 - T\cdot\Delta S^0 = -98{,}9\frac{\text{kJ}}{\text{mol}} - 298\cancel{\text{K}}\left(-93{,}95\frac{\cancel{\text{J}}}{\cancel{\text{K}}\cdot\text{mol}}\cdot 10^{-3}\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{J}}}\right) = \mathbf{-70{,}9\frac{kJ}{mol}}$$

Para $T = 300$ °C = (300 + 273) K = 573 K:

$$\Delta G^0_{298\,\text{K}} = \Delta H^0 - T\cdot\Delta S^0 = -98{,}9\frac{\text{kJ}}{\text{mol}} - 573\cancel{\text{K}}\left(-93{,}95\frac{\cancel{\text{J}}}{\cancel{\text{K}}\cdot\text{mol}}\cdot 10^{-3}\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{J}}}\right) = \mathbf{-45{,}1\frac{kJ}{mol}}$$

El proceso es espontáneo tanto a 25 °C como a 300 °C. El valor de ΔG aumenta a medida que sube la temperatura. Si la temperatura es suficientemente alta, puede dejar de ser espontáneo.

Nota: suponemos que $\Delta H^0_{\text{reacción}}$ y $\Delta S^0_{\text{reacción}}$ no varían con la temperatura, lo cual es bastante aproximado a la realidad.

30. Estima si estos procesos serán espontáneos siempre, nunca o depende de la temperatura.

a) $2\ H_2O_2\ (l) \rightarrow 2\ H_2O\ (l) + O_2\ (g)$ $\Delta H^0 = -196$ kJ

b) $CaCO_3\ (s) \rightarrow CO_2\ (g) + CaO\ (s)$ $\Delta H^0 = +178$ kJ

c) $2\ C\ (s) + 2\ H_2\ (g) \rightarrow C_2H_4\ (g)$ $\Delta H^0 = +52{,}2$ kJ

La espontaneidad de un proceso viene determinada por su variación de energía libre de Gibbs. Un proceso es espontáneo si $\Delta G < 0$. Se puede evaluar ΔG a partir de ΔH y ΔS del proceso. La relación entre ellas es:

$$\Delta G = \Delta H - T\cdot\Delta S$$

Dado que se conoce el valor de ΔH, se puede estimar el valor de ΔS para cada proceso y, basándose en ello, determinar si el proceso será o no espontáneo, dependiendo de la temperatura.

En un segundo paso se confirmarán los resultados calculando ΔS para cada proceso.

a) Al pasar de reactivos a productos, aumenta el número de partículas en fase gas, por tanto, $\Delta S_{\text{reacción}} > 0$.

Si $\Delta H_{\text{reacción}} < 0$ y $\Delta S_{\text{reacción}} > 0$, $\Delta G_{\text{reacción}} < 0$ a cualquier temperatura. Este proceso **será espontáneo siempre**.

Confirmación numérica:

$$\Delta S_{\text{reacción}} = \sum S_{\text{productos}} - \sum S_{\text{reactivos}} = \left[2\cdot S(H_2O(l)) + S(O_2(g))\right] - \left[2\cdot S(H_2O_2(l))\right]$$

Sustituimos los datos de la tabla 5.3 y obtenemos el resultado:

$$\Delta S = \left[2\ \cancel{\text{mol}}\cdot 69{,}9\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\cancel{\text{mol}}} + 1\ \cancel{\text{mol}}\cdot 205{,}1\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\cancel{\text{mol}}}\right] - \left[2\ \cancel{\text{mol}}\cdot 109{,}6\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\cancel{\text{mol}}}\right] = 125{,}7\frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Analizamos la espontaneidad en función de la temperatura T:

$$\Delta G = \Delta H - T\cdot\Delta S = -196\ \text{kJ} - T\cdot\left(125{,}7\frac{\cancel{\text{J}}}{\text{K}}\cdot 10^{-3}\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{J}}}\right)$$

Como T siempre es un valor positivo, $\Delta G_{\text{reacción}} < 0$ a cualquier temperatura. Proceso espontáneo siempre.

b) Al pasar de reactivos a productos, aumenta el número de partículas en fase gas, por tanto, $\Delta S_{\text{reacción}} > 0$. Si $\Delta H_{\text{reacción}} > 0$ y $\Delta S_{\text{reacción}} > 0$, el valor de $\Delta G_{\text{reacción}}$ va a depender de la temperatura. Este proceso será **espontáneo a temperaturas lo suficientemente altas** como para que el término entrópico compense el valor del término entálpico. Confirmación numérica:

$$\Delta S_{\text{reacción}} = \sum S_{\text{productos}} - \sum S_{\text{reactivos}} = \left[S\left(\text{CO}_2\,(g)\right) + S\left(\text{CaO}(s)\right)\right] - \left[S\left(\text{CaCO}_3\,(s)\right)\right]$$

Sustituimos los datos de la tabla 5.3 y obtenemos el resultado:

$$\Delta S = \left[1\,\cancel{\text{mol}}\cdot 213{,}7\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\cancel{\text{mol}}} + 1\,\cancel{\text{mol}}\cdot 38{,}1\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\cancel{\text{mol}}}\right] - \left[1\,\cancel{\text{mol}}\cdot 91{,}7\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\cancel{\text{mol}}}\right] = 160{,}1\frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Analizamos la espontaneidad en función de la temperatura T:

$$\Delta G = \Delta H - T\cdot\Delta S = 178\ \text{kJ} - T\cdot\left(160{,}1\frac{\cancel{\text{J}}}{\text{K}}\cdot 10^{-3}\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{J}}}\right)$$

Como T siempre es positiva, si su valor es suficientemente alto, puede hacer que el segundo término de la expresión compense el primero y $\Delta G_{\text{reacción}}$ llegue a ser negativo.

c) Al pasar de reactivos a productos, disminuye el número de partículas en fase gas, por tanto, $\Delta S_{\text{reacción}} < 0$. Si $\Delta H_{\text{reacción}} > 0$ y $\Delta S_{\text{reacción}} < 0$, el valor de $\Delta G_{\text{reacción}} > 0$. Este proceso siempre será **no espontáneo**. Confirmación numérica:

$$\Delta S_{\text{reacción}} = \sum S_{\text{productos}} - \sum S_{\text{reactivos}} = \left[S\left(\text{C}_2\text{H}_4\,(g)\right)\right] - \left[2\cdot S\left(\text{C}(s)\right) + 2\cdot S\left(\text{H}_2\,(g)\right)\right]$$

Sustituimos los datos de la tabla 5.3 y obtenemos el resultado:

$$\Delta S = \left[1\,\cancel{\text{mol}}\cdot 219{,}5\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\cancel{\text{mol}}}\right] - \left[2\,\cancel{\text{mol}}\cdot 5{,}7\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\cancel{\text{mol}}} + 2\,\cancel{\text{mol}}\cdot 130{,}7\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\cancel{\text{mol}}}\right] = -53{,}3\frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Analizamos la espontaneidad en función de la temperatura T:

$$\Delta G = \Delta H - T\cdot\Delta S = 52{,}2\ \text{kJ} - T\cdot\left(-53{,}3\frac{\cancel{\text{J}}}{\text{K}}\cdot 10^{-3}\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{J}}}\right) = 52{,}2\ \text{kJ} + T\cdot\left(53{,}3\cdot 10^{-3}\frac{\text{kJ}}{\text{K}}\right)$$

Como T siempre es positiva, $\Delta G_{\text{reacción}}$ siempre será positivo y la reacción siempre será no espontánea.

ACTIVIDAD (página 141)

31. Teniendo en cuenta las entalpías de combustión del carbono, el butano y el etanol que se citan en el texto, determina el poder calorífico (PC) de cada uno de ellos. (La energía que se puede obtener a partir de 1 kg de combustible).

Para cada caso, necesitaremos calcular la masa molar (M) de la sustancia. Con este dato y la entalpía molar de combustión, podremos construir el factor de conversión que nos permitirá obtener el poder calorífico, PC, de cada sustancia.

Carbón: $M(\text{C}) = 12{,}00\ \text{g/mol}$ $\qquad \Delta H_{\text{combustión}} = -393{,}5\dfrac{\text{kJ}}{\text{mol}}$

$$PC(\text{C}) = -393{,}5\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}}\cdot\frac{1\,\cancel{\text{mol}}}{12{,}00\cdot 10^{-3}\ \text{kg}} = -32\,792\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \approx \mathbf{-32\,800\frac{kJ}{kg}}$$

Butano: $M(\text{C}_4\text{H}_{10}) = 12{,}00\cdot 4 + 1{,}008\cdot 10 = 58{,}08\ \text{g/mol}$ $\qquad \Delta H_{\text{combustión}} = -2877{,}6\dfrac{\text{kJ}}{\text{mol}}$

$$PC(\text{C}_4\text{H}_{10}) = -2877{,}6\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}}\cdot\frac{1\,\cancel{\text{mol}}}{58{,}08\cdot 10^{-3}\ \text{kg}} = -49\,545\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \approx \mathbf{-49\,500\frac{kJ}{kg}}$$

Etanol:

$$M(C_2H_5OH) = 12{,}00 \cdot 2 + 1{,}008 \cdot 5 + 16{,}00 + 1{,}008 = 46{,}05\ g/mol$$

$$\Delta H_{\text{combustión}} = -1366{,}8\ \frac{kJ}{mol}$$

$$PC(C_2H_5OH) = -1366{,}8\frac{kJ}{\cancel{mol}} \cdot \frac{1\ \cancel{mol}}{46{,}07 \cdot 10^{-3}\ kg} = -29682\ \frac{kJ}{kg} \approx \mathbf{-29700\ \frac{kJ}{kg}}$$

ACTIVIDADES (página 142)

32. El poder calorífico de una sustancia representa la cantidad de energía que se puede obtener a partir de 1 kg de esa sustancia. Determina el poder calorífico de la hidracina, N_2H_4, teniendo en cuenta la reacción:

$$\mathbf{2\ N_2H_4\ (\mathit{l}) + N_2O_4\ (\mathit{l}) \rightarrow 3\ N_2\ (\mathit{g}) + 4\ H_2O\ (\mathit{g}) \qquad \Delta H^0 = -1046\ kJ}$$

Necesitaremos calcular la masa molar (*M*) de la sustancia. Con este dato y la entalpía de la reacción, podremos construir el factor de conversión que nos permitirá obtener su poder calorífico, PC.

$$M(N_2H_4) = 14{,}01 \cdot 2 + 1{,}008 \cdot 4 = 32{,}05\ g/mol \qquad \Delta H^0 = -1046\ kJ$$

$$PC(N_2H_4) = -\frac{1046\ kJ}{2\ \cancel{mol}} \cdot \frac{1\ \cancel{mol}}{32{,}05 \cdot 10^{-3} kg} = -16317\ \frac{kJ}{kg} \approx \mathbf{-16300\ \frac{kJ}{kg}}$$

33. En un recipiente de 1 L se coloca 1 kg de gas hidrógeno.

a) Calcula la presión que ejercerá a 25 °C.

b) Repite el cálculo suponiendo que el gas que hay en el recipiente es butano.

c) ¿Se deduce de ambos resultados alguna dificultad en el uso de uno de ellos como combustible habitual?

Dato: *R* = 0,082 (atm · L)/(mol · K).

a) El H_2 se comporta como un gas ideal. Calculamos la presión con la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$$

Necesitamos determinar el número de moles *n* de hidrógeno H_2 presentes:

$$M(H_2) = 1{,}008 \cdot 2 = 2{,}016\ g/mol$$

$$n(H_2) = \frac{10^3\ \cancel{g}}{2{,}016\ \cancel{g}/mol} = 4{,}96 \cdot 10^2\ mol$$

Sustituimos valores y calculamos la presión. La temperatura debe expresarse en kelvin:

$$p = \frac{4{,}96 \cdot 10^2\ \cancel{mol} \cdot 0{,}082 \frac{atm \cdot \cancel{L}}{\cancel{mol} \cdot \cancel{K}} \cdot (25 + 273)\ \cancel{K}}{1\ \cancel{L}} = \mathbf{1{,}21 \cdot 10^4\ atm}$$

b) El butano (C_4H_{10}) se comporta como un gas ideal. Calculamos la presión que ejerce con la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$$

Necesitaremos determinar el número de moles *n* de butano C_4H_{10} presentes:

$$M(C_4H_{10}) = 12{,}00 \cdot 4 + 1{,}008 \cdot 10 = 58{,}08\ g/mol$$

$$n(C_4H_{10}) = \frac{10^3\ \cancel{g}}{58{,}08\ \cancel{g}/mol} = 17{,}22\ mol$$

Sustituimos valores y calculamos la presión. La temperatura debe expresarse en kelvin:

$$p = \frac{17{,}22\ \cancel{mol} \cdot 0{,}082 \frac{atm \cdot \cancel{L}}{\cancel{mol} \cdot \cancel{K}} \cdot (25 + 273)\ \cancel{K}}{1\ \cancel{L}} = 420{,}7\ atm \approx \mathbf{421\ atm}$$

c) La presión que ejerce 1 kg de H_2 es mucho mayor que la que ejerce 1 kg de butano (aproximadamente 30 veces mayor). Esto dificulta mantener el H_2 en bombonas similares a las del gas butano.

ACTIVIDAD (página 143)

34. Determina la masa de CO_2 que se vierte a la atmósfera cuando se quema 1 kg de carbón, cuando se quema 1 kg de butano, C_4H_{10}, y cuando se quema 1 kg de etanol, C_2H_5OH. Analiza el resultado y razona si hay algún motivo para preferir algún combustible frente a otros.

Planteamos la ecuación de combustión para cada uno de estos combustibles y determinamos la cantidad en mol de CO_2 que obtiene tras la combustión de 1 kg de cada combustible.

- Combustión de 1 kg de carbón (C):

$$C + O_2 \rightarrow CO_2$$

La estequiometría indica que se obtienen tantos moles de CO_2 como moles de C se han quemado.

Utilizamos la masa molar del C para calcular los moles que hay en 1 kg:

$$M(C) = 12{,}00 \text{ g/mol}$$

$$n(C) = \frac{10^3 \cancel{\text{g}}}{12{,}00 \cancel{\text{g}}/\text{mol}} = 83{,}\widehat{3} \frac{\text{mol de C}}{\text{kg de C}}$$

Por la estequiometría se obtienen $83{,}\widehat{3}$ mol de CO_2. Calculamos la masa que corresponde a esta cantidad utilizando su masa molar:

$$M(CO_2) = 12{,}00 + 16{,}00 \cdot 2 = 44{,}00 \text{ g/mol}$$

$$83{,}\widehat{3} \frac{\cancel{\text{mol de CO}_2}}{\text{kg de C}} \cdot \frac{44{,}00 \cancel{\text{g de CO}_2}}{\cancel{\text{mol de CO}_2}} \cdot \frac{1 \text{ kg de CO}_2}{1000 \cancel{\text{g de CO}_2}} = 3{,}\widehat{6} \frac{\text{kg de CO}_2}{\text{kg de C}} \approx \mathbf{3{,}67} \frac{\textbf{kg de CO}_2}{\textbf{kg de C}}$$

- Combustión de 1 kg de butano, C_4H_{10}:

Planteamos la ecuación de la combustión del butano, C_4H_{10}.

$$C_4H_{10}(g) + \frac{13}{2} O_2(g) \rightarrow 4\, CO_2(g) + 5\, H_2O(l)$$

Utilizamos la masa molar del C_4H_{10} para calcular la cantidad de materia en mol que hay en 1 kg de butano:

$$M(C_4H_{10}) = 12{,}00 \cdot 4 + 1{,}008 \cdot 10 = 58{,}08 \text{ g/mol}$$

$$n(C_4H_{10}) = \frac{10^3 \cancel{\text{g}}}{58{,}08 \cancel{\text{g}}/\text{mol}} = 17{,}22 \text{ mol} \frac{\text{mol de C}_4\text{H}_{10}}{\text{kg de C}_4\text{H}_{10}}$$

La estequiometría indica que se obtienen 4 moles de CO_2 por cada mol de C_4H_{10} que se han quemado.

$$17{,}22 \frac{\cancel{\text{mol de C}_4\text{H}_{10}}}{\text{kg de C}_4\text{H}_{10}} \cdot \frac{4 \text{ mol de CO}_2}{1 \cancel{\text{mol de C}_4\text{H}_{10}}} = 68{,}87 \frac{\text{mol de CO}_2}{\text{kg de C}_4\text{H}_{10}}$$

Calculamos la masa en kilogramos que corresponden con tal cantidad, utilizando su masa molar ya conocida:

$$68{,}87 \frac{\cancel{\text{mol de CO}_2}}{\text{kg de C}_4\text{H}_{10}} \cdot \frac{44{,}00 \cancel{\text{g de CO}_2}}{1 \cancel{\text{mol de CO}_2}} \cdot \frac{1 \text{ kg de CO}_2}{1000 \cancel{\text{g de CO}_2}} = 3{,}03 \frac{\text{kg de CO}_2}{\text{kg de C}_4\text{H}_{10}} \approx \mathbf{3{,}03} \frac{\textbf{kg de CO}_2}{\textbf{kg de C}_4\textbf{H}_{10}}$$

- Combustión de 1 kg de etanol, C_2H_5OH:

Planteamos la ecuación de la combustión del etanol, C_2H_5OH.

$$C_2H_5OH(l) + 3\, O_2(g) \rightarrow 2\, CO_2(g) + 3\, H_2O(l)$$

Utilizamos la masa molar para calcular la cantidad de C_2H_5OH, en mol, que hay en 1 kg de masa:

$$M(C_2H_5OH) = 12{,}00 \cdot 2 + 1{,}008 \cdot 5 + 16{,}00 + 1{,}008 = 46{,}05 \text{ g/mol}$$

$$n(C_2H_5OH) = \frac{10^3 \cancel{\text{g}}}{46{,}07 \cancel{\text{g}}/\text{mol}} = 21{,}72 \frac{\text{mol de C}_2\text{H}_5\text{OH}}{\text{kg de C}_2\text{H}_5\text{OH}}$$

La estequiometría indica que se obtienen 2 moles de CO_2 por cada mol de C_2H_5OH que se han quemado.

$$21{,}72\frac{\cancel{\text{mol de C}_2\text{H}_5\text{OH}}}{\text{kg de C}_2\text{H}_5\text{OH}}\cdot\frac{2\,\text{mol de CO}_2}{\cancel{\text{mol de C}_2\text{H}_5\text{OH}}}=43{,}43\frac{\text{mol de CO}_2}{\text{kg de C}_2\text{H}_5\text{OH}}$$

Calculamos su equivalente en masa utilizando su masa molar:

$$43{,}43\frac{\cancel{\text{mol de CO}_2}}{\text{kg de C}_2\text{H}_5\text{OH}}\cdot\frac{44{,}00\ \cancel{\text{g de CO}_2}}{1\ \cancel{\text{mol de CO}_2}}\cdot\frac{1\,\text{kg de CO}_2}{1000\ \cancel{\text{g de CO}_2}}=\mathbf{1{,}91}\frac{\textbf{kg de CO}_\mathbf{2}}{\textbf{kg de C}_\mathbf{2}\textbf{H}_\mathbf{5}\textbf{OH}}$$

En resumen:

En la combustión de 1 kg de...	C	C_4H_{10}	C_2H_5OH
CO_2 (moles)	83,3	68,82	43,41
CO_2 (kg)	3,67	3,03	1,91

Parece preferible, para no emitir demasiado CO_2 a la atmósfera, utilizar como combustible el etanol.

ACTIVIDADES FINALES (página 148)

Intercambio de energía en un proceso

35. Calcula la cantidad de calor que debe perder 1 mol de agua en fase gas, a 100 °C, para convertirse en agua líquida a la misma temperatura. Dato: $L_{\text{vap.,agua}}$ = 2248,8 kJ/kg.

Un cuerpo que pierde energía en forma de calor, a la temperatura del cambio de estado, cambiará de estado físico sin cambiar su temperatura. Se puede obtener la cantidad de calor que se pierde en el proceso a partir de:

$$Q=m\cdot L$$

Donde *m* es la masa del cuerpo y *L* es el calor latente. Calculando la masa de 1 mol de agua:

$$M(\text{H}_2\text{O})=1{,}008\cdot 2+16{,}00=18{,}016\ \text{g/mol}$$

$$m=1\ \cancel{\text{mol}}\cdot 18{,}016\frac{\text{g}}{\cancel{\text{mol}}}=18{,}016\ \text{g}$$

Calculamos el calor. Como el cambio de estado es regresivo, el calor latente tiene signo negativo:

$$Q=18{,}02\ \cancel{\text{g}}\cdot\left(-2248{,}8\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{kg}}}\right)\cdot\frac{1\ \cancel{\text{kg}}}{1000\ \cancel{\text{g}}}=\mathbf{-40{,}52\ kJ}$$

El calor que resulta es de signo negativo porque es un calor que pierde el sistema, lo que hace disminuir su energía interna.

36. Calcula el trabajo de expansión que realiza 1 mol de agua en fase gas, a 100 °C cuando se convierte en agua líquida, a la misma temperatura. Durante todo el proceso, la presión ha sido de 1 atm. Supón que el vapor de agua se comporta como un gas ideal y que la densidad del agua líquida es 1 kg/L. Dato: 1 atm = 1,013 · 10^5 Pa.

El valor del trabajo de expansión a presión constante viene dado por:

$$W=-p\cdot(V_\text{f}-V_\text{i})$$

Necesitamos conocer los valores del volumen inicial y final.

En el estado final, tenemos un mol de agua líquida. Calculamos su volumen por medio de la densidad dejando el resultado en metros cúbicos que es la unidad de volumen en el sistema internacional:

$$V_\text{f}=1\ \cancel{\text{mol de agua}}\cdot\frac{18{,}02\ \cancel{\text{g}}}{1\ \cancel{\text{mol de agua}}}\cdot 1\frac{\text{mL}}{\cancel{\text{g}}}=18{,}02\ \text{mL}=18{,}02\cdot 10^{-3}\ \cancel{\text{L}}\cdot\frac{1\ \text{m}^3}{1000\ \cancel{\text{L}}}=1{,}802\cdot 10^{-5}\ \text{m}^3$$

Inicialmente, el agua está en fase gas. El enunciado indica que se comporta como gas ideal. Calculamos el volumen que ocupa utilizando la ecuación de estado de los gases ideales. Para este caso:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad V_i = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{1\,\cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082\,\frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (100+273)\,\cancel{\text{K}}}{1\,\cancel{\text{atm}}} = 30{,}586\,\cancel{\text{L}} \cdot \frac{1\,\text{m}^3}{1000\,\cancel{\text{L}}} = 3{,}059 \cdot 10^{-2}\,\text{m}^3$$

Calcular el trabajo de expansión, sustituyendo los valores de las magnitudes:

$$W = -1{,}013 \cdot 10^5\,\text{Pa} \cdot \left(1{,}802 \cdot 10^{-5} - 3{,}059 \cdot 10^{-2}\right)\text{m}^3 = 3{,}097 \cdot 10^3\,\text{J} = \mathbf{3{,}097\,kJ}$$

El trabajo es positivo, lo cual es coherente con el hecho de que el agua se ha comprimido en este proceso.

37. En un recipiente tenemos 34 g de gas amoniaco a 27 °C y a la presión de 100 kPa. Representa los siguientes procesos en un diagrama *p-V* y calcula el trabajo de expansión en cada uno de ellos:

a) Expansión presión constante hasta duplicar su volumen y, luego, transformación a volumen constante hasta que su presión se reduzca a la mitad.

b) Transformación a volumen constante hasta que su presión se reduzca a la mitad y, luego, expansión a presión constante hasta duplicar el volumen.

Datos: R = 0,082 atm · L/(mol · K), 1 atm = 1,013 · 10^5 Pa.

Para cada proceso, determinamos el trabajo de expansión en cada transformación mediante la expresión:

$$W = -p \cdot (V_f - V_i)$$

Necesitamos conocer el volumen en el estado inicial. Como se trata de un gas ideal, utilizamos la ecuación de estado de los gases ideales:

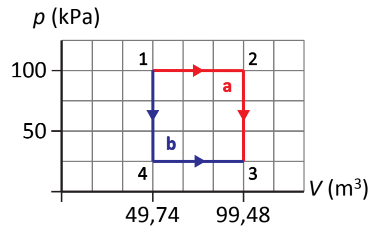
$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p}$$

Calculamos los moles de amoniaco. Determinamos su masa molar M:

$$M(\text{NH}_3) = 14{,}01 + 1{,}008 \cdot 3 = 17{,}03\,\text{g/mol}\,; \qquad n(\text{NH}_3) = \frac{34\,\cancel{\text{g}}}{17{,}03\,\cancel{\text{g}}/\text{mol}} = 1{,}996\,\text{mol}$$

Sustituimos los valores en las unidades determinadas por el valor de la constante R:

$$V_1 = \frac{1{,}996\,\cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082\,\frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (27+273)\,\cancel{\text{K}}}{\frac{100 \cdot 10^3\,\cancel{\text{Pa}}}{1{,}013 \cdot 10^5\,\cancel{\text{Pa}}/\cancel{\text{atm}}}} = 49{,}74\,\text{L}$$



a) Expansión a p = cte. Desde el volumen inicial, V_1 = 49,74 L, hasta el doble de volumen, $V_2 = 2 \cdot V_1 = 2 \cdot 49{,}74$ L = 99,48 L:

$$W_{1\to2} = -100 \cdot 10^3\,\text{Pa} \cdot (99{,}48 - 49{,}74) \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 = -4974\,\text{J}$$

Transformación a V = cte. Desde la presión inicial, p_2 = 100 kPa, hasta la mitad de presión, p_3 = 50 kPa. Se trata de un proceso isocórico en los que no hay trabajo, $W_{2\to3}$ = 0 J.

El trabajo total en el proceso es:

$$W_{1\to3} = W_{1\to2} + W_{2\to3} = -4974\,\text{J} + 0\,\text{J} = \mathbf{-4{,}97\,kJ}$$

b) Transformación a V = cte. Desde la presión inicial, p_1 = 100 kPa, hasta la mitad de presión, p_4 = 50 kPa. Se trata de un proceso isocórico en los que no hay trabajo, $W_{1\to4}$ = 0 J.

Expansión a p = cte. Desde el volumen inicial, V_4 = 49,74 L, hasta el doble de volumen, $V_3 = 2 \cdot V_4 = 2 \cdot 49{,}74$ L = 99,48 L:

$$W_{4\to3} = -50 \cdot 10^3\,\text{Pa} \cdot (99{,}48 - 49{,}74) \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 = -2487\,\text{J}$$

El trabajo total en el proceso es:

$$W_{1\to3} = W_{1\to4} + W_{4\to3} = 0\,\text{J} + (-2487\,\text{J}) = \mathbf{-2{,}49\,kJ}$$

Primer principio de la termodinámica

38. Razona por qué se dice que el primer principio de la termodinámica es una manera de expresar el principio de conservación de la energía.

El principio de conservación de la energía dice que la energía no se crea ni se destruye, sino que se transforma.

El primer principio de la termodinámica establece que, cuando un sistema sufre una transformación, la suma del calor y el trabajo que intercambia con el entorno, coincide con la variación de energía interna del sistema.

Así pues, la energía puede pasar de un sistema a otro e incluso cambiar de forma, pero su valor global permanece constante.

39. Justifica por qué cuando un sistema formado por gases experimenta una transformación isotérmica, no varía su energía interna.

La energía interna de un sistema es la suma de las energías cinética y potencial de todas las partículas que forman el sistema, $U = E_C + E_P$.

La energía cinética de las partículas está relacionada con su velocidad, y la velocidad es proporcional a la temperatura. Por eso la energía cinética es proporcional a la temperatura absoluta $E_C \propto T$.

Las partículas de un gas ideal están libres. No existe, por tanto, ninguna energía relacionada con la posición de unas partículas respecto a otras, es decir, no existe energía potencial, $E_P = 0$.

Podemos decir que, para un gas ideal, su energía interna coincide con la energía cinética de sus partículas. Y esta energía interna es proporcional a la temperatura.

$$U = E_C + 0 = E_C; \quad U \propto T$$

Si un gas experimenta una transformación isotérmica (a temperatura constante) y, en consecuencia, su energía interna permanece constante.

40. Demuestra que se puede conocer la variación de energía interna de un proceso midiendo el calor que intercambia con el entorno cuando se realiza a volumen constante.

De acuerdo con el primer principio de la termodinámica, cuando un sistema experimenta una transformación, la variación de su energía interna coincide con la suma del calor que intercambia con el sistema, Q_v, y el trabajo de expansión.

En un proceso a volumen constante, el trabajo de expansión es nulo, por tanto:

$$\Delta U = Q_v + 0 = Q_v$$

41. En un proceso, un sistema recibe 300 J de calor y realiza un trabajo de expansión de 200 J. ¿Qué cambio experimenta su energía interna?

De acuerdo con el primer principio de la termodinámica, la variación de energía interna puede obtenerse como:

$$\Delta U = Q + W$$

- El calor que recibe el sistema del entorno se considera positivo.
- El trabajo que realiza el sistema sobre el entorno se considera negativo.

Podemos calcular esta variación de energía interna como:

$$\Delta U = 300\ \text{J} - 200\ \text{J} = \mathbf{100\ J}$$

42. En un proceso, un sistema realiza un trabajo de expansión de 200 J y su energía interna disminuye en 500 J. ¿Ha recibido o ha cedido calor? ¿En qué cantidad?

El primer principio de la termodinámica establece:

$$\Delta U = Q + W$$

De acuerdo con el criterio de signos:

- Si la energía interna disminuye, $\Delta U < 0$.
- El trabajo que realiza el sistema sobre el entorno se considera negativo. Pues el sistema pierde esa energía.

Sustituyendo los valores:

$$-500\text{ J} = Q - 200\text{ J} \Rightarrow Q = -300\text{ J}$$

El signo negativo del resultado indica que en el balance global **el sistema ha cedido calor al entorno**.

43. Calcula la variación de energía interna que experimenta 1 mol de agua en fase gas, a 100 °C cuando se convierte en agua líquida a la misma temperatura. Durante todo el proceso, la presión ha sido de 1 atm. Supón que el vapor de agua se comporta como un gas ideal.

Datos: $L_{\text{vap.,agua}} = 2248{,}8$ kJ/kg; $d_{\text{agua,líquida}} = 1$ kg/L.

De acuerdo con el primer principio de la termodinámica, la variación de energía interna puede obtenerse como:

$$\Delta U = Q + W$$

Dado que el sistema cede calor al entorno (las partículas de agua pierden movilidad, pasan de estado gaseoso a estado líquido), este será de signo negativo.

$$Q = m \cdot (-L_{\text{vap.}})$$

Determinamos la masa de 1 mol de agua como:

$$M(H_2O) = 1{,}008 \cdot 2 + 16{,}00 = 18{,}02\text{ g/mol}$$

Sustituimos los valores, en las unidades adecuadas, para calcular el valor del calor desprendido:

$$Q = 18{,}02 \cdot 10^{-3}\ \cancel{\text{kg}} \cdot \left(-2248{,}8 \frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{kg}}}\right) = -40{,}514\text{ kJ}$$

Calculamos el trabajo de expansión a presión constante mediante la expresión:

$$W = -p \cdot (V_f - V_i)$$

Necesitaremos conocer los valores del volumen inicial y final. En el estado final tenemos un mol de agua líquida. Calculamos su volumen con el dato de la densidad:

$$V_f = 1\ \cancel{\text{mol de agua}} \cdot \frac{18{,}02\ \cancel{\text{g}}}{1\ \cancel{\text{mol de agua}}} \cdot 1 \frac{\text{mL}}{\cancel{\text{g}}} = 18{,}02\text{ mL} = 18{,}02 \cdot 10^{-3}\ \cancel{\text{L}} \cdot \frac{1\text{ m}^3}{1000\ \cancel{\text{L}}} = 1{,}802 \cdot 10^{-5}\text{ m}^3$$

Inicialmente el agua está en fase gas. El enunciado indica que se comporta como gas ideal. Calculamos el volumen que ocupa utilizando la ecuación de estado de los gases ideales. Para este caso:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow V_i = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{1\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082 \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (100 + 273)\ \cancel{\text{K}}}{1\ \cancel{\text{atm}}} = 30{,}586\ \cancel{\text{L}} \cdot \frac{1\text{ m}^3}{1000\ \cancel{\text{L}}} = 3{,}059 \cdot 10^{-2}\text{ m}^3$$

Calcular el trabajo de expansión, sustituyendo los valores de las magnitudes:

$$W = -1{,}013 \cdot 10^5\text{ Pa} \cdot \left(1{,}802 \cdot 10^{-5} - 3{,}059 \cdot 10^{-2}\right)\text{m}^3 = 3{,}097 \cdot 10^3\text{ J} = 3{,}097\text{ kJ}$$

El trabajo es positivo porque tiene lugar una compresión. Calculamos la variación de energía interna:

$$\Delta U = Q + W = -40{,}514\text{ kJ} + 3{,}097\text{ kJ} = -37{,}417\text{ kJ} \approx \mathbf{-37{,}4\text{ kJ}}$$

En este proceso disminuye la energía interna del sistema.

Entalpía

44. Razona por qué la entalpía es una función de estado y se mide en unidades de energía.

La función entalpía, *H*, se define como la suma de otras funciones:

$$H = U + p \cdot V$$

La energía interna, *U*, la presión, *p*, y el volumen, *V*, son funciones de estado. Por tanto, *H* también lo es.

Dimensionalmente, el producto de *p* · *V* y *U* tienen unidades de energía, por tanto, *H* también se mide en unidades de energía.

Como consecuencia, cuando un sistema experimenta una transformación, su variación de entalpía depende solo del estado inicial y final, y no de cómo se realice la transformación.

45. **Demuestra que se puede conocer la variación de entalpía de un proceso midiendo el calor que intercambia con el entorno cuando se realiza a presión constante.**

El primer principio de la termodinámica indica que cuando un sistema sufre una transformación, la variación de su energía interna coincide con la suma del calor que intercambia con el entorno y el trabajo que realiza.

$$\Delta U = Q + W$$

Si la expansión se realiza a presión constante, el trabajo viene dado por la expresión:

$$W = -p \cdot (V_f - V_i)$$

Por tanto:

$$U_f - U_i = Q_p - p \cdot (V_f - V_i)$$

Despejamos Q_p y reordenamos la expresión:

$$Q_p = U_f - U_i + p \cdot (V_f - V_i) = (U_f + p \cdot V_f) - (U_i + p \cdot V_i)$$

Por definición: $H = U + p \cdot V$. Por tanto: $Q_p = H_f - H_i = \Delta H$.

46. **El metano, CH_4, es el componente más abundante en el gas natural. Cuando se quema con suficiente cantidad de oxígeno se convierte en CO_2 (*g*) y H_2O (*l*), liberando 55,7 MJ por cada kilogramo. Escribe la ecuación termoquímica y dibuja el diagrama entálpico de este proceso.**

Escribimos la ecuación química ajustada:

$$CH_4\,(g) + 2\,O_2\,(g) \rightarrow CO_2\,(g) + 2\,H_2O(l)$$

Determinamos la masa molar *M* del metano para elaborar el factor de conversión que nos permita conocer la variación de entalpía del proceso en kJ/mol. El signo será negativo puesto que en la combustión se *libera* calor.

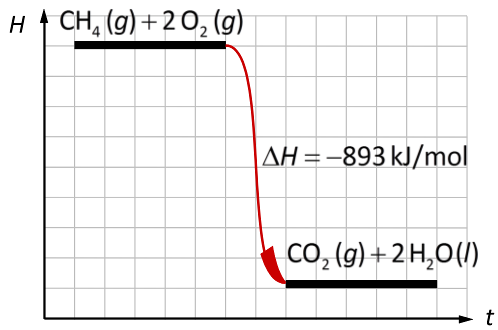
$$M(CH_4) = 12{,}00 + 1{,}008 \cdot 4 = 16{,}03\text{ g/mol}$$

Teniendo en cuenta que 1 kg = 10^3 g y que 1 MJ = 10^6 J:

$$\frac{55{,}7 \cdot 10^6\text{ J}}{10^3\ \cancel{\text{g de CH}_4}} \cdot \frac{16{,}03\ \cancel{\text{g de CH}_4}}{1\text{ mol}} = 892{,}98 \cdot 10^3\ \text{J/mol} = 893\text{ kJ/mol}$$

Ecuación termoquímica:

$$CH_4\,(g) + 2\,O_2\,(g) \rightarrow CO_2\,(g) + 2\,H_2O(l) \qquad \Delta H = -893\text{ kJ/mol}$$



47. **El dióxido de nitrógeno, NO_2, es un gas que se obtiene cuando se calienta una mezcla de gases N_2 y O_2 a elevada temperatura. Para que se produzca la reacción hay que aportar 33,2 kJ por cada mol de NO_2 que se quiera obtener. Escribe la ecuación termoquímica y dibuja el diagrama entálpico de este proceso.**

Escribimos la ecuación química ajustada:

$$N_2\,(g) + 2\,O_2\,(g) \rightarrow 2\,NO_2\,(g)$$

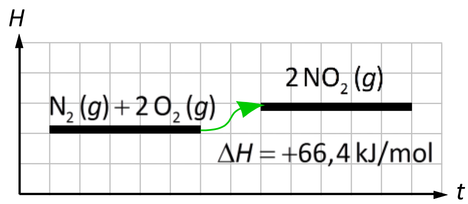
Dado que hay que aportar calor para que se produzca la reacción, la variación de entalpía será positiva.

Los coeficientes estequiométricos que se han utilizado para escribir la ecuación muestran que se forman 2 moles de NO_2. La variación de entalpía es una magnitud extensiva, para el proceso escrito,

$$\Delta H = 2\ \cancel{\text{mol}} \cdot 33{,}2\ \frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}} = +66{,}4\text{ kJ}$$

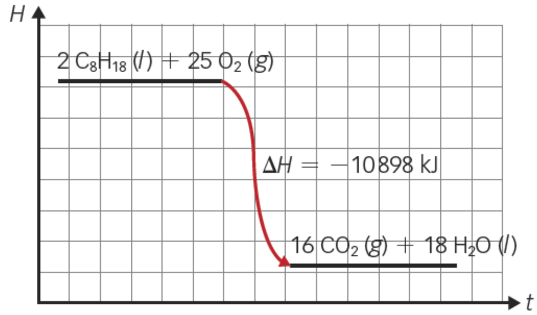
La ecuación termoquímica es, pues:

$$N_2\,(g) + 2\,O_2\,(g) \rightarrow 2\,NO_2\,(g) \qquad \Delta H = +66{,}4\text{ kJ}$$



ACTIVIDADES FINALES (página 149)

48. El isoctano, C_8H_{18}, es el componente fundamental de la gasolina. Arde, por acción del oxígeno del aire, en un proceso que se puede representar por el siguiente diagrama entálpico:



a) ¿Es un proceso exotérmico o endotérmico?

b) Escribe su ecuación termoquímica.

c) ¿Qué cantidad de energía se obtiene cada vez que se quema 1 kg de gasolina?

d) ¿Cuántos litros de CO_2, medidos a la presión de 1 atm y a 25 °C, se vierten a la atmósfera cada vez que se quema 1 kg de gasolina?

a) Se trata de un proceso exotérmico, ya que la variación de entalpía es negativa, $\Delta H < 0$.

b) $2\,C_8H_{18}\,(l) + 25\,O_2\,(g) \rightarrow 16\,CO_2\,(g) + 18\,H_2O(l) \qquad \Delta H = -10\,898$ kJ.

c) La ecuación termoquímica escrita permite conocer la energía que se desprende cada vez que se queman 2 mol de isoctano. Calculamos la masa molar de esta sustancia para poder establecer el factor de conversión que nos permita conocer la energía que se obtiene cada vez que se quema 1 kg de gasolina (isoctano).

$$M(C_8H_{18}) = 12{,}00 \cdot 8 + 1{,}008 \cdot 18 = 114{,}144\ \text{g/mol}$$

$$1\ \cancel{\text{kg de } C_8H_{18}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{mol de } C_8H_{18}}}{0{,}114144\ \cancel{\text{kg de } C_8H_{18}}} \cdot \left(\frac{-10898\ \text{kJ}}{2\ \cancel{\text{mol de } C_8H_{18}}}\right) = -4{,}7737 \cdot 10^4\ \text{kJ} \approx \mathbf{-47\,700\ kJ}$$

d) La ecuación termoquímica indica que se forman 16 moles de CO_2 por cada 2 moles de C_8H_{18} que se queman. La masa molar del C_8H_{18} permite conocer la cantidad, en mol, que hay en una masa de 1 kg de gasolina y la estequiometría, los moles de CO_2 que se obtienen.

$$n(C_8H_{18}) = \frac{1000\ \cancel{\text{g}}}{114{,}144\ \cancel{\text{g}}/\text{mol de } C_8H_{18}} = 8{,}761\ \text{mol de } C_8H_{18}$$

$$8{,}761\ \cancel{\text{mol de } C_8H_{18}} \cdot \frac{16\ \text{mol de } CO_2}{2\ \cancel{\text{mol de } C_8H_{18}}} = 70{,}087\ \text{mol de } CO_2$$

La ecuación de estado de los gases ideales permite calcular el volumen que ocupa el CO_2 en las condiciones que se especifican en el enunciado:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{70{,}087\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0{,}082\ \frac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (25 + 273)\ \cancel{\text{K}}}{1\ \cancel{\text{atm}}} = 1712{,}6\ \text{L} \approx \mathbf{1710\ L}$$

49. La entalpía de combustión de una sustancia es la cantidad de energía que desprende cuando se quema 1 mol de la misma para obtener CO_2 (*g*) y H_2O (*l*). La entalpía de combustión del gas propano, C_3H_8, es –2219,2 kJ/mol. Calcula la cantidad de calor que se puede obtener cuando se quema una bombona con 11 kg de este gas.

Escribimos la ecuación termoquímica que se cita. Ajustamos el proceso para que se queme 1 mol de propano:

$$C_3H_8\,(g) + 5\,O_2\,(g) \rightarrow 3\,CO_2\,(g) + 4\,H_2O(l) \qquad \Delta H = -2219{,}2\ \text{kJ}$$

La masa molar del propano nos permitirá conocer los moles que hay en los 11 kg de gas de la bombona (11 kg = $11 \cdot 10^3$ g). Luego, utilizaremos el factor de conversión que deriva de la estequiometría de la ecuación termoquímica para hacer el cálculo de la energía que se puede obtener:

$$M(C_3H_8) = 12{,}00 \cdot 3 + 1{,}008 \cdot 8 = 44{,}064\ \text{g/mol}$$

$$\left(-2219{,}2\ \frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}}\right) \cdot \frac{1\ \cancel{\text{mol}}}{44{,}064\ \cancel{\text{g}}} \cdot 11 \cdot 10^3\ \cancel{\text{g}} = -553994\ \text{kJ} \approx \mathbf{-554\ MJ}$$

Cómo se calcula la variación de entalpía

50. Tomando como base el ejemplo resuelto 3 y las actividades 17 y 18, diseña una experiencia que te permita comprobar que se cumple la ley de Hess.

Para comprobar la ley de Hess, debemos conseguir un mismo proceso de dos maneras diferentes.

En la actividad 18 se mide el calor desprendido cuando 2 g de NaOH (*s*) se añaden a 100 mL de HCl (*aq*) 0,5 M. En este proceso, el hidróxido de sodio primero se disuelve en agua, NaOH (*s*) → NaOH (*aq*), y luego se neutraliza, NaOH (*aq*) + HCl (*aq*) → NaCl (*aq*) + H_2O (*l*). Intervienen 0,05 mol de NaOH y de HCl.

En la actividad 17 se mide el calor desprendido cuando 2 g de hidróxido de sodio se disuelven en agua, NaOH (*s*) → NaOH (*aq*).

En el ejemplo resuelto 3 se mide el calor que se desprende cuando 100 mL de NaOH 0,5 M se mezclan con 50 mL de HCl 1 M. En el proceso se produce la neutralización de ambas sustancias iniciado cuando las dos sustancias ya estaban disueltas. Intervienen 0,5 mol de NaOH y HCl.

El proceso descrito en la actividad 18 es equivalente a sumar los dos procesos descritos en la actividad 17 y en el ejemplo resuelto 3.

De acuerdo con la ley de Hess, la variación de entalpía del proceso descrito en la actividad 18 debe coincidir con la suma de la variación de entalpía de los otros dos. En este caso, también se puede hacer la comprobación sumando directamente los calores liberados en cada proceso, puesto que en todos los casos interviene la misma cantidad en mol de las sustancias.

51. Uno de los métodos que permiten obtener etanol, C_2H_5OH (*l*), en el laboratorio consiste en hacer reaccionar el gas eteno, C_2H_4 (*g*), con agua. Calcula la variación de entalpía de esta reacción sabiendo que la entalpía de combustión del eteno es –1411,2 kJ/mol y la del etanol es –1366,8 kJ/mol.

La ecuación de la reacción cuya entalpía queremos determinar es:

$$C_2H_4\,(g) + H_2O(l) \rightarrow C_2H_5OH(l)$$

Y las ecuaciones de combustión de eteno y etanol son:

A: $C_2H_4\,(g) + 3\,O_2\,(g) \rightarrow 2\,CO_2\,(g) + 2\,H_2O(l) \qquad \Delta H_A = -1411{,}2\ \text{kJ/mol}$

B: $C_2H_5OH(l) + 3\,O_2\,(g) \rightarrow 2\,CO_2\,(g) + 3\,H_2O(l) \qquad \Delta H_B = -1366{,}8\ \text{kJ/mol}$

Haciendo uso de la ley de Hess, combinaremos las ecuaciones A y B hasta obtener la que buscamos. Los coeficientes estequiométricos de C_2H_4 y C_2H_5OH en los procesos A y B coinciden con los que aparecen en el proceso final, pero C_2H_5OH aparece como producto, por ello tendremos que invertir la ecuación termoquímica B, incluyendo su ΔH_B.

A: $C_2H_4\,(g) + \cancel{3\,O_2\,(g)} \rightarrow \cancel{2\,CO_2} + \cancel{2\,H_2O} \qquad \Delta H_A = -1411{,}2\ \text{kJ/mol}$

–B: $\cancel{2\,CO_2} + \cancel{3}\,H_2O \rightarrow C_2H_5OH + \cancel{3\,O_2} \qquad -\Delta H_B = -(-1366{,}8\ \text{kJ/mol}) = +1366{,}8\ \text{kJ/mol}$

A – B: $C_2H_4\,(g) + H_2O(l) \rightarrow C_2H_5OH(l) \qquad \Delta H = \Delta H_A - \Delta H_B = -1411{,}2\ \text{kJ/mol} + 1366{,}8\ \text{kJ/mol} = \mathbf{-44{,}4\ kJ/mol}$

52. Controlando las condiciones de reacción, se puede obtener gas H_2 combinando metano con oxígeno. La ecuación química del proceso es:

$$\mathbf{2\,CH_4\,(g) + O_2\,(g) \rightarrow 2\,CO\,(g) + 4\,H_2\,(g)}$$

Utilizando los datos de las entalpías de formación de las sustancias, calcula la variación de entalpía del proceso. Datos: $H_f^0[CH_4\,(g)] = -74{,}8\ \text{kJ/mol}$; $H_f^0[CO(g)] = -110{,}5\ \text{kJ/mol}$.

Se puede obtener la variación de entalpía de una reacción, a partir de las entalpías de formación de las sustancias:

$$\Delta H_{\text{reacción}} = \sum H_{\text{productos}} - \sum H_{\text{reactivos}} = \left\{2 \cdot H_f^0[CO(g)] + 4 \cdot H_f^0[H_2\,(g)]\right\} - \left\{2 \cdot H_f^0[CH_4\,(g)] + H_f^0[O_2\,(g)]\right\}$$

La entalpía estándar de formación de las sustancias elementales es nula. Sustituimos los otros datos indicados en el enunciado:

$$\Delta H_{\text{reacción}} = \left[2\,\cancel{\text{mol}} \cdot \left(-110{,}5\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}}\right) + 4\,\cancel{\text{mol}} \cdot 0\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}}\right] - \left[2\,\cancel{\text{mol}} \cdot \left(-74{,}8\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}}\right) + 0\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}}\right] = \mathbf{-71{,}4\ kJ}$$

53. A temperatura ambiente, el trifluoruro de nitrógeno es un gas muy tóxico. Se utiliza para trabajos de microelectrónica. Calcula la entalpía de formación del trifluoruro de nitrógeno a partir de las entalpías de enlace que se citan. Datos de entalpías medias de enlace: $H^0[\text{F–F}] = 158\ \text{kJ/mol}$, $H^0[\text{N}\equiv\text{N}] = 944\ \text{kJ/mol}$, $H^0[\text{N–F}] = 283\ \text{kJ/mol}$.

Escribimos la ecuación química ajustada del proceso:

$$N_2 + 3\,F_2 \rightarrow 2\,NF_3$$

Desde el punto de vista de las entalpías de enlace:

$$\Delta H_{\text{reacción}} = \sum H_{\text{enlaces rotos}} - \sum H_{\text{enlaces nuevos}}$$

Analizamos los enlaces que se rompen y los que se forman en el proceso:

N_2	3 F_2	$\rightarrow$	2 NF_3
N≡N	3 (F–F)		2 (3 N–F)

En el proceso se rompen: un enlace triple (N≡N) en el N_2, tres enlaces simples (F–F) en el F_2. Se forman seis enlaces simples (N–F) en el NF_3.

$$\Delta H_{\text{reac}} = \left[H^0(\text{N}\equiv\text{N}) + 3 \cdot H^0(\text{F–F})\right] - 6 \cdot H^0(\text{N–F})$$

Sustituimos las entalpías de enlace a partir de los datos del enunciado:

$$\Delta H_{\text{reacción}} = \left[1\,\cancel{\text{mol}} \cdot 944\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}} + 3\,\cancel{\text{mol}} \cdot 158\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}}\right] - 6\,\cancel{\text{mol}} \cdot 283\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}} = -280\ \text{kJ}$$

La reacción que hemos usado produce 2 mol de trifluoruro de nitrógeno. Queremos conocer la entalpía de formación del trifluoruro de nitrógeno referida a un solo mol:

$$\Delta H = \frac{\Delta H_{\text{reacción}}}{n} = \frac{-280\ \text{kJ}}{2\ \text{mol}} = \mathbf{-140\ \frac{kJ}{mol}}$$

El valor teórico es –131,1 kJ.

Espontaneidad de los procesos

54. Explica por qué las entalpías de formación estándar de algunas sustancias son positivas y otras negativas mientras que las entropías estándar de todas las sustancias son positivas.

La entalpía de formación de una sustancia es la energía que se libera cuando se forma 1 mol de esa sustancia a partir de las sustancias simples formadas por los elementos que la integran, en su estado termodinámico más estable. Dependiendo de que un compuesto sea más estable o no que esas sustancias simples, la entalpía de la sustancia podrá ser positiva o negativa.

La entropía de una sustancia es una medida del desorden de las partículas. La entropía de una sustancia es cero a 0 K, porque a esa temperatura el movimiento de sus partículas es nulo. A cualquier otra temperatura, una sustancia tiene una entropía mayor, por eso las entropías de todas las sustancias son positivas.

55. Predice el signo de la variación de entropía de los siguientes procesos. Luego utiliza los datos y calcúlalos. ¿Se confirman tus predicciones?

a) $3\,O_2\,(g) \rightarrow 2\,O_3\,(g)$

b) $SO_3\,(g) + H_2\,(g) \rightarrow SO_2\,(g) + H_2O\,(g)$

c) $I_2\,(s) + H_2\,(g) \rightarrow 2\,HI\,(g)$

Datos en la tabla 5.3.

a) Cuando los reactivos se transforman en productos, disminuye el número de partículas gaseosas. Variación de entropía negativa.

Confirmación numérica:

$$\Delta S_{\text{reacción}} = \sum S_{\text{productos}} - \sum S_{\text{reactivos}} = 2 \cdot S[O_3(g)] - 3 \cdot S[O_2(g)]$$

Sustituimos los datos de la tabla 5.3 y obtenemos el resultado:

$$\Delta S = 2\,\cancel{\text{mol}} \cdot 238{,}9 \frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \text{K}} - 3\,\cancel{\text{mol}} \cdot 205{,}1 \frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \text{K}} = -137{,}5 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

b) Cuando los reactivos se transforman en productos, no varía el número de partículas en fase gas. Variación de entropía pequeña.

Confirmación numérica:

$$\Delta S_{\text{reacción}} = \sum S_{\text{productos}} - \sum S_{\text{reactivos}} = \{S[SO_2(g)] + S[H_2O(g)]\} - \{S[SO_3(g)] + S[H_2(g)]\}$$

Sustituimos los datos de la tabla 5.3 y obtenemos el resultado:

$$\Delta S = \left(1\,\cancel{\text{mol}} \cdot 248{,}2 \frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \text{K}} + 1\,\cancel{\text{mol}} \cdot 188{,}8 \frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \text{K}}\right) - \left(1\,\cancel{\text{mol}} \cdot 256{,}8 \frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \text{K}} + 1\,\cancel{\text{mol}} \cdot 130{,}7 \frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \text{K}}\right) = 49{,}5 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

c) Cuando los reactivos se transforman en productos, aumenta el número de partículas en fase gas. Variación de entropía positiva.

Confirmación numérica:

$$\Delta S_{\text{reacción}} = \sum S_{\text{productos}} - \sum S_{\text{reactivos}} = 2 \cdot S[HI(g)] - \{S[I_2(s)] + S[H_2(g)]\}$$

Sustituimos los datos de la tabla 5.3 y obtenemos el resultado:

$$\Delta S = 2\,\cancel{\text{mol}} \cdot 206{,}6 \frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \text{K}} - \left(1\,\cancel{\text{mol}} \cdot 116{,}1 \frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \text{K}} + 1\,\cancel{\text{mol}} \cdot 130{,}7 \frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \text{K}}\right) = 166{,}4 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

ACTIVIDADES FINALES (página 150)

56. Razona si un proceso endotérmico puede ser espontáneo en alguna circunstancia.

Un proceso es espontáneo si da lugar a una variación de energía libre de Gibbs negativa, es decir, $\Delta G < 0$.

Se puede calcular el valor de ΔG de un proceso a partir de la expresión: $\Delta G = \Delta H - T \cdot \Delta S$.

Para un proceso endotérmico, $\Delta H > 0$. Con todo, ΔG puede ser menor que cero si $\Delta S > 0$ y la temperatura es suficientemente alta para que el término $T \cdot \Delta S$ supere el valor de ΔH.

En resumen, un proceso endotérmico puede ser espontáneo si la entropía del sistema aumenta y se produce a una temperatura suficientemente alta.

57. Explica si un proceso que implique una disminución de la entropía del sistema puede ser espontáneo en alguna circunstancia.

Un proceso es espontáneo si da lugar a una variación de energía libre de Gibbs negativa, es decir, $\Delta G < 0$.

Se puede calcular el valor de ΔG de un proceso a partir de la expresión: $\Delta G = \Delta H - T \cdot \Delta S$.

Como la temperatura absoluta T es siempre un número positivo, el término $-T \cdot \Delta S$, tendrá un valor positivo si $\Delta S < 0$. Cuando esto sucede, ΔG solo será negativo si $\Delta H < 0$ (proceso exotérmico) y con un valor suficientemente elevado como para que compense el término $-T \cdot \Delta S$.

En resumen, un proceso que implique una disminución de la entropía del sistema solo será espontáneo si es exotérmico ($\Delta H < 0$), y su temperatura es suficientemente baja para hacer el término $-T \cdot \Delta S$ compensable.

58. Teniendo en cuenta los datos de la tabla, determina si el agua oxigenada se descompone espontáneamente en agua y oxígeno a 50 °C.

	H_2O_2 (*l*)	H_2O (*l*)	O_2 (*g*)
H_f (kJ/mol)	−187,8	−285,8	0
S [J/(K · mol)]	109,6	69,9	205,1

Escribimos la ecuación química de la descomposición del agua oxigenada:

$$2\,H_2O_2(l) \rightarrow 2\,H_2O(l) + O_2(g)$$

La espontaneidad de un proceso viene dada por su variación de energía libre de Gibbs. Es espontáneo si $\Delta G < 0$.

Calcularemos el valor de ΔG del proceso a partir de la expresión:

$$\Delta G = \Delta H - T \cdot \Delta S$$

En primer lugar debemos determinar ΔH y ΔS del proceso.

$$\Delta H_{\text{reacción}} = \sum H_{\text{productos}} - \sum H_{\text{reactivos}} = \left\{2 \cdot H_f\left[H_2O(l)\right] + H_f\left[O_2(g)\right]\right\} - \left\{2 \cdot H_f\left[H_2O_2(l)\right]\right\}$$

Sustituimos los datos disponibles:

$$\Delta H = \left[2\ \cancel{\text{mol}} \cdot \left(-285{,}8\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}}\right) + 1\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}}\right] - \left[2\ \cancel{\text{mol}} \cdot \left(-187{,}7\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}}\right)\right] = -196{,}2\ \text{kJ}$$

Calculamos también la entropía como:

$$\Delta S_{\text{reacción}} = \sum S_{\text{productos}} - \sum S_{\text{reactivos}} = \left\{2 \cdot S\left[H_2O(l)\right] + S\left[O_2(g)\right]\right\} - \left\{2 \cdot S\left[H_2O_2(l)\right]\right\}$$

Sustituimos los datos y obtenemos el resultado:

$$\Delta S = \left[2\ \cancel{\text{mol}} \cdot 69{,}9\frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \text{K}} + 1\ \cancel{\text{mol}} \cdot 205{,}1\frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \text{K}}\right] - \left[2\ \cancel{\text{mol}} \cdot 109{,}6\frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \text{K}}\right] = 125{,}7\frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Determinamos la espontaneidad a 50 °C = (50 + 273) K = 323 K.

$$\Delta G_{323\ \text{K}} = \Delta H - T \cdot \Delta S = -196{,}2\ \text{kJ} - 323\ \cancel{\text{K}} \cdot \left(125{,}7\frac{\cancel{\text{J}}}{\cancel{\text{K}}} \cdot \frac{1\ \text{kJ}}{1000\ \cancel{\text{J}}}\right) = -236{,}8\ \text{kJ}$$

El **proceso es espontáneo** a la temperatura pedida 50 °C.

Nota: El proceso es exotérmico y su variación de entropía es positivo, por tanto será, espontáneo a cualquier temperatura.

Reacciones de combustión

59. Imagínate que eres el alcalde de tu ciudad. Propón las tres medidas que consideres más importantes para lograr un consumo eficiente de la energía. Elige acciones que sea posible llevarlas a cabo de manera razonable.

- Dar ayudas para cambiar las calderas de calefacción y agua caliente comunitaria que sean poco eficientes por otras más modernas y de menor consumo energético.
- Crear una oficina que estudie de forma gratuita cómo mejorar la eficiencia energética de las viviendas. Así, los vecinos sabrán si es más adecuado cambiar las ventanas, aislar las fachadas, el tejado, etc.
- Establecer en la ciudad amplias zonas peatonales en las que solo se comparta la vía con el transporte público.
- Facilitar los desplazamientos en bicicleta.
- Utilizar paneles solares para que funcionen los semáforos, los parquímetros, etc.
- Utilizar bombillas de bajo consumo o de led en los sistemas de iluminación, semáforos, paneles, etc.
- Hacer campañas publicitarias que motiven a los vecinos a no derrochar agua caliente, calefacción, etc.

60. Busca información y elabora una presentación multimedia que muestre:

- **Las cantidades disponibles de los distintos combustibles.**
- **Las ventajas que comprende su utilización.**
- **Las dificultades asociadas a su empleo.**

Respuesta libre.

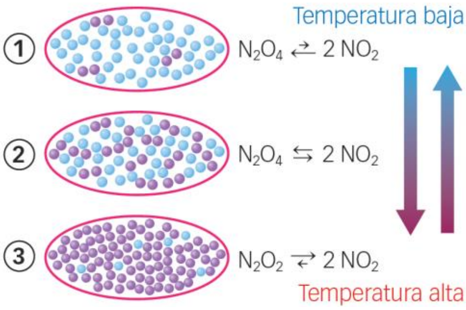
Se debe insistir en que utilicen fuentes de información solventes, como organismos oficiales o internacionales. Si es posible, contrastar lo obtenido con la información de otras fuentes menos objetivas.

Se debe cuidar la forma en que se realiza la presentación. En la medida de lo posible, se deben utilizar gráficos o esquemas que faciliten la lectura.

Ampliación (página 150)

61. En determinadas condiciones, el tetraóxido de dinitrógeno se descompone dando dióxido de nitrógeno. Determina hasta qué temperatura podemos guardar tetraóxido de dinitrógeno sin riesgo de que se descomponga.

Datos: $H_f^0[N_2O_4(g)] = 9{,}2\ \text{kJ/mol}$,
$H_f^0[NO_2(g)] = 33{,}1\ \text{kJ/mol}$,
$S^0[N_2O_4(g)] = 304{,}3\ \text{kJ}/(\text{K}\cdot\text{mol})$,
$S^0[NO_2(g)] = 240{,}1\ \text{kJ}/(\text{K}\cdot\text{mol})$.



Escribimos la ecuación química de la reacción de descomposición del tetraóxido de dinitrógeno y analizamos las condiciones de espontaneidad:

$$N_2O_4(g) \rightarrow 2\,NO_2(g)$$

La espontaneidad de un proceso viene dada por su variación de energía libre de Gibbs. Es espontáneo si $\Delta G < 0$.

Calcularemos el valor de ΔG del proceso a partir de la expresión:

$$\Delta G = \Delta H - T\cdot\Delta S$$

En primer lugar debemos determinar ΔH y ΔS para este proceso en particular.

$$\Delta H_{\text{reacción}} = \sum H_{\text{productos}} - \sum H_{\text{reactivos}} = 2\cdot H_f^0[NO_2(g)] - H_f^0[N_2O_4(g)]$$

Sustituimos los datos disponibles:

$$\Delta H^0 = 2\ \cancel{\text{mol}}\cdot 33{,}2\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}} - 1\ \cancel{\text{mol}}\cdot 9{,}2\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}} = 57{,}2\ \text{kJ}$$

Calculamos también la entropía como:

$$\Delta S_{\text{reacción}} = \sum S_{\text{productos}} - \sum S_{\text{reactivos}} = 2\cdot S^0[NO_2(g)] - S^0[N_2O_4(g)]$$

Sustituimos los datos y obtenemos el resultado:

$$\Delta S^0 = 2\ \cancel{\text{mol}}\cdot 240{,}1\frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}}\cdot\text{K}} - 1\ \cancel{\text{mol}}\cdot 304{,}3\frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}}\cdot\text{K}} = 175{,}9\frac{\text{J}}{\text{K}}$$

El proceso es endotérmico y provoca un aumento de entropía. En consecuencia, puede ser espontáneo a temperaturas suficientemente altas para que el térmico entrópico compense al término entálpico. El límite es aquel valor de la temperatura para el que $\Delta G = 0$.

Calcularemos la temperatura, T, de la expresión. Sustituimos los valores hallados en esta última expresión que permite calcular el valor de T. Ojo con las unidades:

$$0 = \Delta H^0 - T\cdot\Delta S^0 \quad\Rightarrow\quad T = \frac{\Delta H^0}{\Delta S^0} = \frac{57{,}2\cdot 10^3\ \cancel{\text{J}}}{175{,}9\frac{\cancel{\text{J}}}{\text{K}}} = \mathbf{325\ K}$$

La descomposición del N_2O_4 se produce de forma espontánea por encima de 325 K = (54 + 273) K = 54 °C. Podemos guardarlo sin riesgo de que se descomponga a temperaturas inferiores a ese valor.

62. Cuando se calienta, el $KClO_3$ (*s*) se descompone en KCl (*s*) y gas oxígeno. Determina:

a) La variación de entalpía de la reacción indicando si es exotérmica o endotérmica.

b) El signo de la variación de entropía.

c) Si la reacción va a ser o no espontánea siempre o en algún caso.

Datos: $H_f^0[KClO_3(s)] = -398\ \text{kJ/mol}$, $H_f^0[KCl(s)] = -437\ \text{kJ/mol}$.

Escribimos la ecuación química ajustada del proceso:

$$2\,KClO_3(s) \rightarrow 2\,KCl(s) + 3\,O_2(g)$$

a) Calculamos la variación de entalpía:

$$\Delta H_{\text{reacción}} = \sum H_{\text{productos}} - \sum H_{\text{reactivos}} = \left\{2 \cdot H_f^0\left[\text{KCl}(s)\right] + 3 \cdot H_f^0\left[\text{O}_2(g)\right]\right\} - 2 \cdot H_f^0\left[\text{KClO}_3(s)\right]$$

Sustituimos valores y calculamos:

$$\Delta H_{\text{reacción}} = \left[2\ \cancel{\text{mol}} \cdot \left(-437\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}}\right) + 3\ \cancel{\text{mol}} \cdot 0\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}}\right] - 2\ \cancel{\text{mol}} \cdot \left(-398\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}}\right) = -78\ \text{kJ}$$

Si ponemos en referencia a los dos moles de clorato de potasio que se descomponen:

$$\Delta H^0 = \frac{\Delta H^0_{\text{reacción}}}{n} = \frac{-78\ \text{kJ}}{2\ \text{mol}} = \mathbf{-39\ kJ}$$

El proceso es exotérmico, puesto que $\Delta H < 0$.

b) En el proceso aumenta el número de partículas en fase gas, por tanto, $\Delta S > 0$.

c) Un proceso es espontáneo si $\Delta G < 0$. Como $\Delta G = \Delta H - T \cdot \Delta S$, y el proceso presenta $\Delta H < 0$ y $\Delta S > 0$, es espontáneo a cualquier temperatura.

63. Determina la variación de entropía que experimentan 100 g de agua en fase gas, a 100 °C, cuando se convierten en líquido a 100 °C. Compara el resultado con la variación de entropía que experimentan 100 g de agua en fase líquida, a 0 °C, cuando se convierten en hielo a 0 °C. Trata de encontrar una explicación a la diferencia entre ambos valores. Datos: $L_{\text{vap.,agua}}$ = 2248,8 kJ/kg; $L_{\text{f,agua}}$ = 334,4 kJ/kg.

En cualquier proceso la variación de entropía es, por definición, comparar la cantidad de calor intercambiado con la temperatura:

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

Se puede calcular fácilmente la variación de entropía de los procesos que se citan en el enunciado porque, en cada uno, la temperatura permanece constante.

- Cálculo de la variación de entropía en el proceso de condensación del agua:

$$\Delta S_{\text{condensación}} = \frac{Q_c}{T_c} = \frac{m \cdot \left(-L_{\text{vap, agua}}\right)}{T_c}$$

La condensación del agua es un proceso exotérmico, de ahí el signo negativo del calor latente que empleamos. Sustituimos los valores en las unidades adecuadas y calculamos:

$$\Delta S_{\text{condensación}} = \frac{0{,}1\ \cancel{\text{kg}} \cdot \left(-2248{,}8\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{kg}}}\right)}{(100+273)\ \text{K}} = \mathbf{-602{,}9\frac{kJ}{K}}$$

- Cálculo de la variación de entropía en el proceso de solidificación del agua:

$$\Delta S_{\text{solidificación}} = \frac{Q_s}{T_s} = \frac{m \cdot \left(-L_{\text{f, agua}}\right)}{T_s}$$

La solidificación del agua es un proceso exotérmico, de ahí el signo negativo del calor latente que empleamos. Sustituimos los valores en las unidades adecuadas y calculamos:

$$\Delta S_{\text{condensación}} = \frac{0{,}1\ \cancel{\text{kg}} \cdot \left(-334{,}4\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{kg}}}\right)}{(0+273)\ \text{K}} = \mathbf{-122{,}5\frac{kJ}{K}}$$

Representa una mayor variación de entropía el cambio de estado gas a líquido. En fase gas, las moléculas se mueven con total libertad y el desorden del sistema es mucho mayor que en fase líquida.

Aunque también es mayor la entropía del sistema en fase líquida que en fase sólida, la diferencia entre ambos no es tan notoria, pues en ambos casos existen fuerzas de unión entre sus partículas.

QUÍMICA EN TU VIDA (página 152)

INTERPRETA

1. Escribe la reacción química ajustada del hidrogenocarbonato de sodio con el ácido cítrico para dar dióxido de carbono, agua y citrato de trisodio.

La ecuación química de la reacción entre el ácido cítrico y el hidrogenocarbonato de sodio es:

$$3\,NaHCO_3 + H_3C_6H_5O_7 \rightarrow 3\,CO_2 + 3\,H_2O + Na_3C_6H_5O_7$$

2. Calcula la temperatura umbral por debajo de la cual la reacción anterior deja de ser espontánea.

Un proceso es espontáneo si $\Delta G < 0$. La variación de energía libre de Gibbs para el proceso se puede calcular mediante la expresión: $\Delta G = \Delta H - T \cdot \Delta S$. Si el proceso presenta $\Delta H > 0$ y $\Delta S > 0$, su espontaneidad depende de la temperatura. El proceso puede ser espontáneo a temperaturas por encima de una dada. Calculamos el valor límite determinando el valor de T que hace que $\Delta G = 0$.

Sustituimos los valores expresándolos en las unidades adecuadas. Suponemos que los valores se refieren a la reacción ajustada para 1 mol de ácido cítrico:

$$0 = \Delta H - T \cdot \Delta S \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\Delta H}{\Delta S} = \frac{78{,}8 \cdot 10^3 \dfrac{\cancel{J}}{\cancel{mol}}}{902 \dfrac{\cancel{J}}{\cancel{mol} \cdot K}} = 87{,}4\ K = \mathbf{-185{,}6\ ^\circ C}$$

3. Con 3 g de $NaHCO_3$ y zumo de limón en exceso, ¿cuántos gramos de CO_2 se producen? ¿Qué volumen ocupa a los 180 °C del horno suponiendo 1 atm de presión?

La estequiometría de la reacción indica que por cada mol de $NaHCO_3$ que reacciona, se obtiene 1 mol de CO_2. Calculamos los moles de $NaHCO_3$ que reaccionan haciendo uso de las masas molares:

$$M(NaHCO_3) = 23{,}00 + 1{,}008 + 12{,}00 + 16{,}00 \cdot 3 = 84{,}01\ g/mol\ ; \quad M(CO_2) = 12{,}00 + 16{,}00 \cdot 2 = 44{,}00\ g/mol$$

$$3\ g\ \cancel{de\ NaHCO_3} \cdot \frac{1\ \cancel{mol\ de\ NaHCO_3}}{84{,}01\ \cancel{g\ de\ NaHCO_3}} \cdot \frac{1\ mol\ de\ CO_2}{1\ \cancel{mol\ de\ NaHCO_3}} = 3{,}57 \cdot 10^{-2}\ mol\ de\ CO_2 \cdot \frac{44{,}00\ g\ de\ CO_2}{1\ mol\ de\ CO_2} = \mathbf{1{,}57\ g\ de\ CO_2}$$

El CO_2 es un gas ideal. Calculamos el volumen que ocupa en las condiciones del enunciado utilizando la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{3{,}57 \cdot 10^{-2}\ \cancel{mol} \cdot 0{,}082 \dfrac{\cancel{atm} \cdot L}{\cancel{mol} \cdot \cancel{K}} \cdot (180 + 273)\ \cancel{K}}{1\ \cancel{atm}} = \mathbf{1{,}33\ L}$$

REFLEXIONA

4. El recipiente que introduzcamos en el horno, ¿debe ser de mayor volumen que la masa? Justifica tu respuesta.

La cantidad de CO_2 que se produce durante el horneado hace que la masa ocupe mayor volumen, por eso se procura que el recipiente sea de mayor tamaño que la masa.

5. ¿Por qué disminuye el tamaño de la masa después de sacarla del horno?

Cuando se saca la masa del horno disminuye su temperatura. Esto hace que el gas que ocupaba las burbujas disminuya el volumen y si la estructura de la masa no es suficientemente rígida, toda la masa también disminuye su volumen.

6. Esta reacción, además de usarse en la cocina, se emplea en las sales efervescentes de baño. También hay otras reacciones similares que producen CO_2. ¿Sirven todas estas reacciones para esponjar la masa en repostería?

Cualquier carbonato o hidrogenocarbonato producirá burbujas de CO_2 cuando se ponga en contacto con un ácido. En las efervescentes sales de baño, esto es lo único que interesa, pero en repostería, la sal resultante de la reacción va a formar parte de la masa que ingerimos. Hay que cuidar de que ni el anión ni el catión de la sal produzcan efectos nocivos en nuestro organismo, como sucede si la sal que se forma es citrato de sodio.

6

Química del carbono

Química del carbono 6

PARA COMENZAR (página 153)

- **¿Qué diferencia unos compuestos del carbono de otros?**
  El tamaño, es decir, el número de átomos de carbonos que se combinan en un mismo elemento; y la estructura, el modo en el que están combinados.

- **¿A qué se debe la versatilidad de la química del carbono?**
  El átomo central es el átomo de carbono capaz de formar cuatro enlaces covalentes.

- **Nombra distintos materiales que existen gracias a la química del carbono.**
  Teflón, kevlar, neopreno, grafeno…

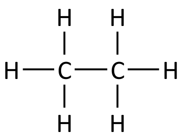
PRACTICA (página 154)

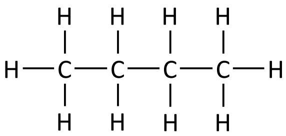
1. Escribe la fórmula desarrollada de compuestos de carbono e hidrógeno, con enlaces simples, que contengan:

a) 2 átomos de carbono.

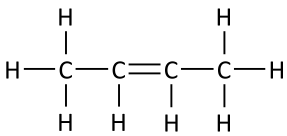
b) 4 átomos de carbono.

¿Cómo se llama cada compuesto?

a)  etano

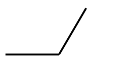
b)  butano

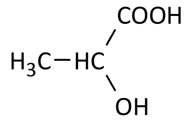
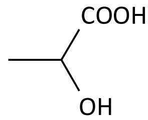
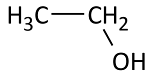
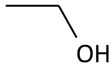
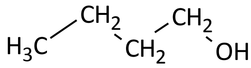
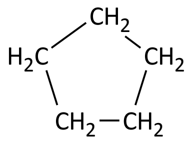
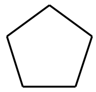
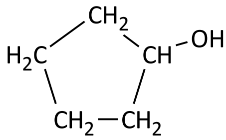
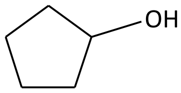
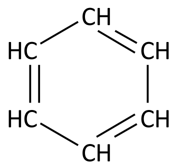
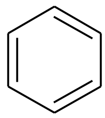
2. Escribe la fórmula desarrollada, la semidesarrollada y la molecular de un compuesto de carbono e hidrógeno con cuatro átomos de carbono, con un doble enlace entre los carbonos centrales.

desarrollada	semidesarrollada	molecular
	$H_3C—CH=CH-CH_3$	C_4H_8
but-2-eno		

ACTIVIDAD (página 156)

3. Escribe la fórmula molecular, semidesarrollada y supersimplificada de cada uno de los compuestos que aparecen en la tabla inicial.

nombre	molecular	semidesarrollada	supersimplificada
propano	C_3H_8	CH_3 / $H_3C—CH_2$	
eteno	C_2H_4	$H_2C=CH_2$	=
etino	C_2H_2	$HC\equiv CH$	≡

nombre	molecular	semidesarrollada	supersimplificada
ácido 2-hidroxipropanoico	$C_3H_6O_3$		
etanol	C_2H_6O		
butan-1-ol	$C_4H_{10}O$		
ácido etanoico	$C_2H_4O_2$	$H_3C—COOH$	—COOH
metilamina	CH_5N	$H_3C—NH_2$	$—NH_2$
ciclopentano	C_5H_{10}		
ciclopentanol	$C_5H_{10}O$		
benceno	C_6H_6		

ACTIVIDADES (página 157)

4. Al quemar 7,63 g de un hidrocarburo gaseoso con un exceso de oxígeno se obtienen 9,80 g de agua. Su densidad en condiciones estándar es 1,85 g/L. Determina la fórmula del compuesto.

La reacción química sin ajustar es:

C_xH_y	+	O_2	→	CO_2	+	H_2O
7,63 g	+	m_{O_2}	→	m_{CO_2}	+	9,80 g

Masa molar del agua:

$$M(H_2O) = 1{,}008 \cdot 2 + 16{,}00 = 18{,}016 \text{ g/mol}$$

La cantidad de hidrógeno presente en el agua:

$$9{,}80 \cancel{\text{ g de agua}} \cdot \frac{(1{,}008 \text{ g de H}) \cdot 2}{18{,}016 \cancel{\text{ g de agua}}} = 1{,}10 \text{ g de H}$$

La misma cantidad de hidrógeno expresada en mol:

$$1{,}10 \cancel{\text{ g de H}} \cdot \frac{1 \text{ mol de H}}{1{,}008 \cancel{\text{ g de H}}} = 1{,}088 \text{ mol de H}$$

Esta cantidad de hidrógeno procede del hidrocarburo así que la cantidad de carbono en la reacción es:

$$7{,}63 \text{ g de } C_xH_y - 1{,}10 \text{ g de H} = 6{,}53 \text{ g de C}$$

La cantidad de carbono presente en el hidrocarburo expresado en mol:

$$6{,}53 \cancel{\text{ g de C}} \cdot \frac{1 \text{ mol de C}}{12{,}00 \cancel{\text{ g de C}}} = 0{,}544 \text{ mol de C}$$

La fórmula del hidrocarburo debe ser proporcional a $C_{0{,}544}H_{1{,}088}$:

$$C_{\frac{0,544}{0,544}}H_{\frac{1,088}{0,544}} \Rightarrow C_1H_{1,998} \Rightarrow CH_2$$

La densidad del gas me permite calcular la masa molar del gas (Tema 2, página 60):

$$d = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} \Rightarrow M = \frac{d \cdot R \cdot T}{p}$$

Las condiciones estándar son: $p = 10^5$ Pa = 0,987 atm; y, $T = 0$ °C = 273 K.
Recordando que $R = 0,082$ (atm · L)/(mol · K).

$$M = \frac{d \cdot R \cdot T}{p} = \frac{1,85 \frac{\text{g}}{\cancel{\text{L}}} \cdot 0,082 \frac{\text{atm} \cdot \cancel{\text{L}}}{\text{mol} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot 273\ \cancel{\text{K}}}{0,987\ \cancel{\text{atm}}} = 41,96 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

Con la masa molar y la fómula empírica es posible conseguir la fórmula molecular:

$$n = \frac{M(C_xH_y)}{M(CH_2)} = \frac{41,96 \frac{\cancel{\text{g}}}{\cancel{\text{mol}}}}{(12,00 + 1,008 \cdot 2) \frac{\cancel{\text{g}}}{\cancel{\text{mol}}}} = 2,99 \approx 3$$

Así, la fórmula molecular es: $\mathbf{C_3H_6}$.

5. Se ha aislado un compuesto orgánico formado por C, H y O. Se ha introducido una muestra de 4,6 g del compuesto en el analizador y, tras su combustión, se han obtenido 6,6 g de CO_2 y 3,6 g de H_2O. Para obtener su masa molar se disolvió 90 g del compuesto en un cuarto litro de agua y la mezcla hirvió a 102 °C. Determina su fórmula empírica y su fórmula molecular.

Dato: $K_{\text{ebulloscópica del agua}}$ = 0,51 °C · kg/mol.

La reacción química sin ajustar es:

$C_xH_yO_z$	+	O_2	→	CO_2	+	H_2O
4,6 g	+	m_{O_2}	→	6,6 g	+	3,6 g

Masa molar del agua:

$$M(H_2O) = 1,008 \cdot 2 + 16,00 = 18,016 \text{ g/mol}$$

La cantidad de hidrógeno presente en el agua procede todo del compuesto:

$$3,6\ \cancel{\text{g de agua}} \cdot \frac{(1,008 \text{ g de H}) \cdot 2}{18,016\ \cancel{\text{g de agua}}} = 0,403 \text{ g de H}$$

La misma cantidad de hidrógeno expresada en mol:

$$0,403\ \cancel{\text{g de H}} \cdot \frac{1 \text{ mol de H}}{1,008\ \cancel{\text{g de H}}} = 0,3996 \text{ mol de H} \approx 0,40 \text{ mol de H}$$

Masa molar del dióxido de carbono:

$$M(CO_2) = 12,00 + 16,00 \cdot 2 = 44,00 \text{ g/mol}$$

La cantidad de carbono presente en el dióxido de carbono procede todo del compuesto:

$$6,6\ \cancel{\text{g de CO}_2} \cdot \frac{12,00 \text{ g de C}}{44,00\ \cancel{\text{g de CO}_2}} = 1,80 \text{ g de C}$$

La misma cantidad de dióxido de carbono expresada en mol:

$$1,40\ \cancel{\text{g de C}} \cdot \frac{1 \text{ mol de C}}{12,00\ \cancel{\text{g de C}}} = 0,150 \text{ mol de C}$$

Esta cantidad de oxígeno procedente del compuesto es:

$$4,6 \text{ g de } C_xH_yO_z - 0,403 \text{ g de H} - 1,80 \text{ g de C} = 2,397 \text{ g de O} \approx 2,40 \text{ g de O}$$

La cantidad de oxígeno presente en el compuesto expresado en mol:

$$2{,}40\ \cancel{\text{g de O}} \cdot \frac{1\ \text{mol de O}}{16{,}00\ \cancel{\text{g de O}}} = 0{,}1498\ \text{mol de O} \approx 0{,}15\ \text{mol de O}$$

La fórmula empírica del compuesto debe ser proporcional a $C_{0,15}H_{0,40}O_{0,15}$:

$$C_{\frac{0,15}{0,15}}H_{\frac{0,40}{0,15}}O_{\frac{0,15}{0,15}} \Rightarrow C_1H_{8/3}O_1 \Rightarrow \mathbf{C_3H_8O_3}$$

La constante ebulloscópica permite calcular la masa molar del gas (Tema 3, página 85):

$$\Delta T = K_e \cdot m \Rightarrow m = \frac{\Delta T}{K_e} = \frac{2\ \cancel{°C}}{0{,}51\ \cancel{°C} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{mol}}} = 3{,}92\ \frac{\text{mol de soluto}}{\text{kg de disolvente}}$$

Son 90 g de compuesto, el soluto, disueltos en un cuarto de litro de agua, el disolvente. Haciendo uso de la densidad del agua ($d = 1$ kg/L) calculamos la masa del disolvente, m_d. Así, podemos calcular el número de moles del soluto, n_s, y la masa molar, M.

$$d = \frac{m_d}{V} \Rightarrow m_d = d \cdot V = 1\ \frac{\text{kg}}{\cancel{\text{L}}} \cdot 0{,}25\ \cancel{\text{L}} = 0{,}25\ \text{kg de disolvente}$$

$$n_s = m \cdot m_d = 3{,}92\ \frac{\text{mol de soluto}}{\cancel{\text{kg de disolvente}}} \cdot 0{,}25\ \cancel{\text{kg de disolvente}} = 0{,}98\ \text{mol de soluto}$$

$$M = \frac{m_s}{n_s} = \frac{90\ \text{g de soluto}}{0{,}98\ \text{mol de soluto}} = 91{,}8\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

Con la masa molar y la fórmula empírica es posible conseguir la fórmula molecular:

$$n = \frac{M(C_xH_yO_z)}{M(C_3H_8O_3)} = \frac{91{,}8\ \cancel{\frac{\text{g}}{\text{mol}}}}{(12{,}00 \cdot 3 + 1{,}008 \cdot 8 + 16{,}00 \cdot 3)\ \cancel{\frac{\text{g}}{\text{mol}}}} = 0{,}997 \approx 1$$

Así, la fórmula molecular es: $\mathbf{C_3H_8O_3}$. Coincide con la fórmula empírica.

ACTIVIDADES (página 160)

6. **Escribe la fórmula molecular del metano, etano, butano y pentano. Obsérvalas y escribe la fórmula molecular general para un hidrocarburo lineal de *n* átomos de carbono: C_nH_m.**

Nombre	Fórmula molecular
metano	CH_4
etano	C_2H_6
butano	C_4H_{10}
pentano	C_5H_{12}

El número de átomos de hidrógeno es siempre el doble que el de carbono $+2$:

$\mathbf{C_nH_{2n+2}}$

7. **Escribe la fórmula molecular del ciclobutano, ciclopentano y ciclohexano. Obsérvalas y escribe la fórmula molecular general para un hidrocarburo cíclico de *n* átomos de carbono: C_nH_m.**

Nombre	Fórmula molecular
ciclobutano	C_4H_8
ciclopentano	C_5H_{10}
ciclohexano	C_6H_{12}

El número de átomos de hidrógeno es siempre el doble que el de carbono:

$\mathbf{C_nH_{2n}}$

8. **Escribe la fórmula molecular del eteno, but-2-eno y pent-1-eno. Obsérvalas y escribe la fórmula molecular general para un hidrocarburo lineal de *n* átomos de carbono que presente un doble enlace: C_nH_m. ¿Cuál sería la fórmula molecular general si tuviesen dos dobles enlaces?**

Nombre	Fórmula molecular	
eteno	C_2H_4	El número de átomos de hidrógeno es siempre el doble que el de carbono:
but-2-eno	C_4H_8	
pent-1-eno	C_5H_{10}	$\mathbf{C_nH_{2n}}$

Si hay dos dobles enlaces, se pierde una pareja de hidrógeno para el nuevo doble enlace:

$$\mathbf{C_nH_{2n-2}}$$

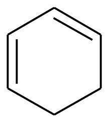
9. **Escribe la fórmula molecular del etino, but-2-ino y pent-1-ino. Obsérvalas y escribe la fórmula molecular general para un hidrocarburo lineal de *n* átomos de carbono que presente un triple enlace: C_nH_m. ¿Cuál sería la fórmula molecular general si tuviesen dos triples enlaces?**

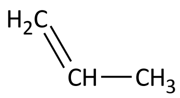
Nombre	Fórmula molecular	
etino	C_2H_2	El número de átomos de hidrógeno es siempre el doble que el de carbono −2:
but-2-ino	C_4H_6	
pent-1-ino	C_5H_8	$\mathbf{C_nH_{2n-2}}$

Si hay dos triples enlaces, se pierde una pareja de hidrógeno para el nuevo triple enlace:

$$\mathbf{C_nH_{2n-4}}$$

10. **Nombra los siguientes hidrocarburos:**

a) 

b) 

c) $H_3C-C\equiv C-C\equiv C-C\equiv C-CH_3$

a) **ciclohexa-1,3-dieno**

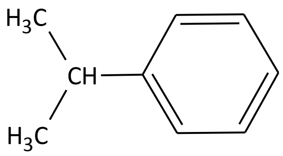
b) **prop-1-eno**

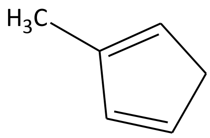
c) **octa-2,4,6-triino**

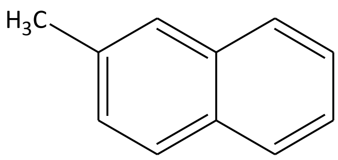
11. **Formula los siguientes compuestos.**

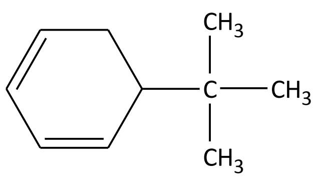
a) **isopropilbenceno** **c)** **2-metilciclopenta-1,3-dieno**

b) **2-metilnaftaleno** **d)** **5-*terc*-butilciclohexa-1,3-dieno**

a) 

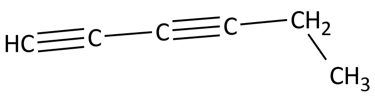
c) 

b) 

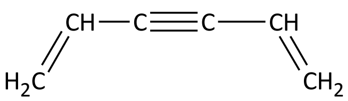
d) 

12. **La fórmula del benceno es C_6H_6. Escribe y nombra un hidrocarburo de cadena lineal que sea compatible con la fórmula molecular del benceno.**

Las respuestas válidas pueden ser muy variadas. Ofrecemos dos posibles.

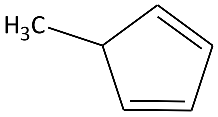


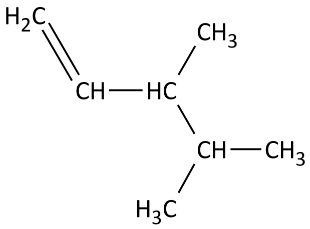
hexa-1,3-diino

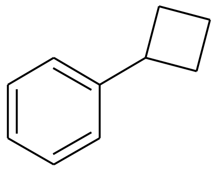


hex-1,5-dien-3-ino

13. Nombra los siguientes compuestos:

a) 

b) 

c) 

a) **5-metilciclopenta-1,3-dieno**

b) **3,4-dimetilpent-1-eno**

c) **ciclobutilbenceno**

ACTIVIDADES (página 162)

14. Formula.

a) **3-clorobutan-1-ol**

b) **acetato de isopropilo**

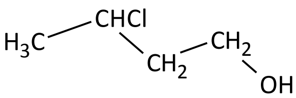
c) **propanodial**

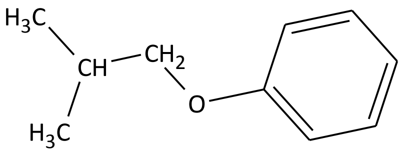
d) ***para*-difenol**

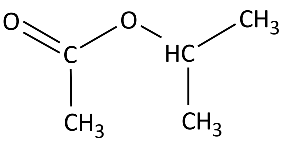
e) **isobutil fenil éter**

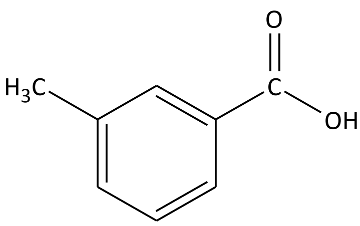
f) **ácido 3-metilbenzoico**

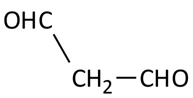
g) **acetato de calcio**

a) 

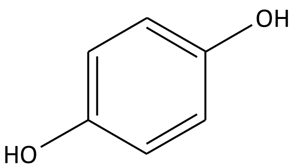
e) 

b) 

f) 

c) 

g) $Ca(CH_3–COO)_2$

d) 

15. Formula.

a) **ciclopentanona**

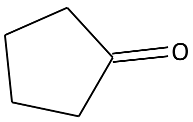
b) **fenol**

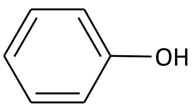
c) **ácido propanodioico**

d) **butanodiona**

e) **1,2,3-propanotriol**

f) **propanoato de metilo**

a) 

b) 

c) $COOH–CH_2–COOH$

d) $CH_3–CO–CO–CH_3$

e) $CH_2OH–CHOH–CH_2OH$

f) $CH_3–CH_2–COO–CH_3$

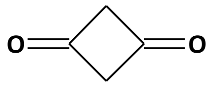
16. **Nombra.**

a) $CH_3–COO–CH_3$

b) $CH_3–CH(CH_3)–O–C_6H_5$

c) $CH_3–CBrOH–CH_3$

d)



a) etanoato de metilo

b) isopropil fenil éter

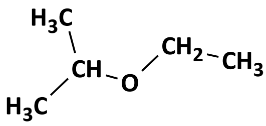
c) 2-bromoproan-2-ol

d) ciclobutana-1,3-diona

17. **Nombra.**

a) $HCOO–C_6H_5$

b)



c) $CH_3–CHO$

d) COOH–COOH

a) metanoato de fenilo

b) isopropil etil éter

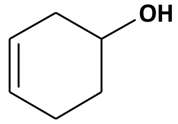
c) etanal

d) ácido etanodioico

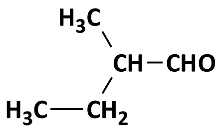
18. **Nombra.**

a) $CH_3–CH_2–CO–CH_3$

b)

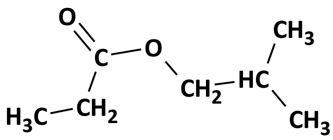


c)



d) $CH_2{=}CH–CH_2–COOH$

e)



a) butan-2-ona

b) ciclohex-3-enol

c) 2-metilbutanal

d) ácido but-3-enoico

e) propanoato de isobutilo

19. **En cada una de las fórmulas siguientes hay algún error. Corrígelo.**

a) **etanona**

b) **ácido ciclopropanoico**

c) **propanoato de metanol**

d) **etano metano éter**

a) En una cadena de dos carbonos ambos son extremo de cadena. El grupo carbonilo en el extremo de la cadena es aldehído. El nombre correcto es **etanal**.

Las cetonas tienen el grupo carbonilo en posición intermedia de la cadena. La más pequeña es la de tres carbonos. Un nombre correcto es **propanona**.

b) El grupo ácido está sobre un carbono extremo de cadena en un hidrocarburo abierto. El nombre correcto es **ácido propanoico**.

c) Error en el nombre del radical. El nombre correcto es **propanoato de metilo**.

d) Error en el nombre de los radicales. El nombre correcto es **etil metil éter**.

ACTIVIDADES (página 163)

20. **Formula los siguientes compuestos.**

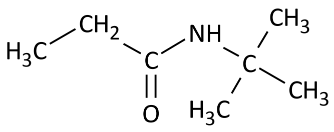
a) ***N*-*terc*-butilbutanoamida**

b) **butanonitrilo**

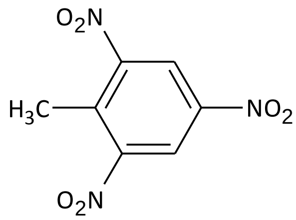
c) ***N*-metilpropilamina**

d) ***N*-metilformamida**

e) **2,4,6-trinitrotolueno**

a) 

c) $CH_3–CH_2–CH_2–NH–CH_3$

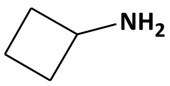
e) 

b) $CH_3–CH_2–CH_2–C{\equiv}N$

d) $H–CO–NH–CH_3$

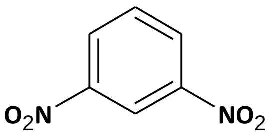
21. Nombra lossiguientes compuestos.

a) $\mathbf{NC–CH_2–CH_3}$

b) 

c) $\mathbf{C_6H_5–NH_2}$

d) $\mathbf{CH_3–NH–CO–CH_2–CH_3}$

e) 

a) propanonitrilo

b) ciclobutilamina

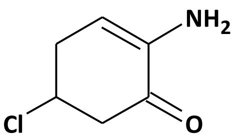
c) fenilamina

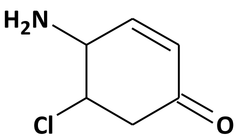
d) *N*-metilpropanoamida

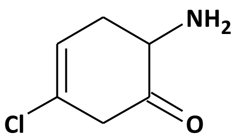
e) 1,3-nitrobenceno

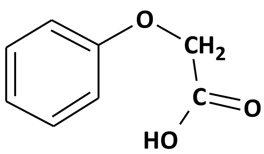
ACTIVIDADES (página 165)

22. Nombra los siguientes compuestos:

a) 

b) 

c) 

d) 

a) 5-cloro-2-aminociclohex-2-enona

b) 5-cloro-4-aminociclohex-2-enona

d) 5-cloro-2-aminociclohex-4-enona

e) ácido fenoxietanoico

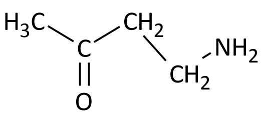
23. Formula los siguientes compuestos.

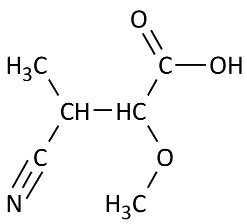
a) 4-aminobutanona

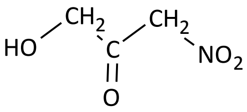
b) ácido 3-ciano-2-metoxibutanoico

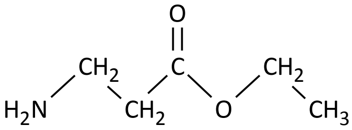
c) 1-hidroxi-3-nitropropanona

d) 3-aminopropanoato de etilo

a) 

b) 

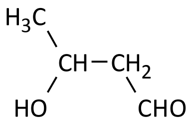
c) 

d) 

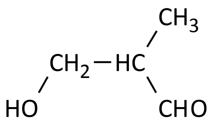
ACTIVIDADES (página 166)

24. Escribe y nombra tres isómeros estructurales del 3-hidroxibutanal.

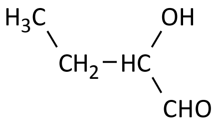
Primero construye la fórmula del 3-hidroxibutanal:



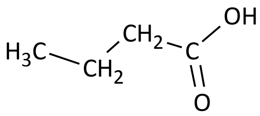
Isómero de cadena al reducir el número de carbonos en la cadena principal y llevar carbonos a ramificaciones. Por ejemplo 3-hidroxi-2-metilpropanal.



Isómero de posición al cambiar de posición el grupo funcional alcohol. Por ejemplo 2-hidroxibutanal.



Isómero de función al cambiar el grupo funcional, reuniendo alcohol con carbonilo en el mismo carbono nos encontramos con el grupo carboxilo. Por ejemplo ácido butanoico.



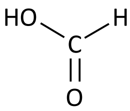
25. Indica cuáles de estos pueden presentar actividad óptica.

a) ácido metanoico

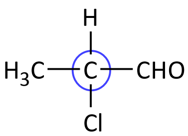
b) 2-cloropropanal

c) 3-metilbutanonitrilo

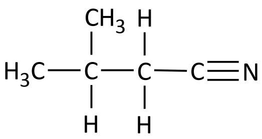
d) 3-metilpent-2-eno

a) 

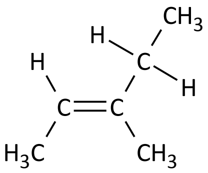
No puede tener actividad óptica. No hay 4 sustituyentes distintos en el único carbono de la molécula.

b) 

Sí puede tener actividad óptica. Hay 4 sustituyentes distintos en el carbono central.

c) 

No puede tener actividad óptica. No hay 4 sustituyentes distintos en ningún carbono de la molécula.

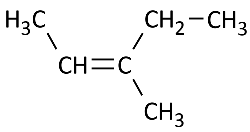
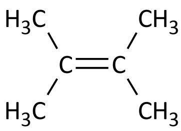
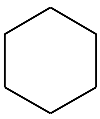
d) 

No puede tener actividad óptica. No hay 4 sustituyentes distintos en ningún carbono de la molécula.

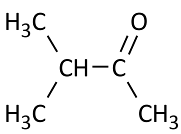
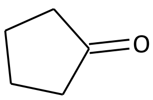
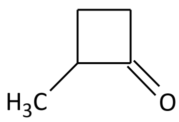
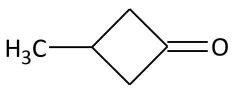
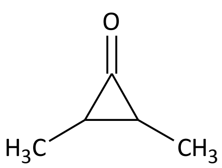
ACTIVIDADES (página 167)

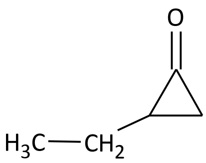
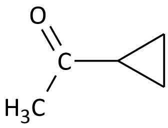
26. Escribe y nombra tres isómeros de cadena del hex-2-eno.

La fórmula semidesarrollada del hex-2-eno es: $CH_3–CH=CH–CH_2–CH_2–CH_3$. Los isómeros de cadena se diferencian en la estructura del esqueleto de la cadena. Tres isómeros pueden ser:

-  3-metilpent-2-eno
-  2,3-dimetilbut-2-eno
-  ciclohexano

27. Escribe y nombra todas las cetonas de cinco átomos de carbono con un solo grupo carbonilo.

- $CH_3–CO–CH_2–CH_2–CH_3$ pentan-2-ona
- $CH_3–CH_2–CO–CH_2–CH_3$ pentan-3-ona
-  3-metilbutan-2-ona
-  ciclopentanona
-  2-metilciclobutanona
-  3-metilciclobutanona
-  2,3-dimetilciclopropanona

-  2-etilciclopropanona
-  1-ciclopropiletanona

28. Identifica los grupos funcionales que están presentes en este compuesto.
Escribe la fórmula de otro que sea isómero de función con un único grupo funcional.

$CH_3–O–CH_2–CH=CH–CH_2–OH$

El nombre del compuesto es 4-metoxibut-2-en-1-ol. Los grupos funcionales son:

$$\underbrace{CH_3–O–}_{\text{éter}}CH_2–\underbrace{CH=CH}_{\text{doble enlace}}–\underbrace{CH_2–OH}_{\text{alcohol}}$$

Un isómero con un único grupo funcional es el ácido pentanoico:

$$CH_3–CH_2–CH_2–CH_2–COOH$$

29. Indica cuáles de estos pueden presentar isomería óptica.

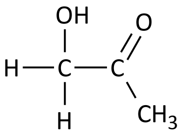
a) 3-hidroxipentan-2-ona

b) pentan-2-ol

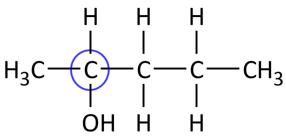
c) 3-aminobutanona

d) ciclopentanol

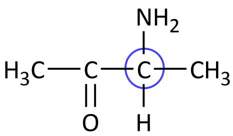
e) 2-clorociclopentanol

a) 

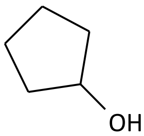
No puede tener actividad óptica. No hay 4 sustituyentes distintos en ninguno de los átomos de carbono.

b) 

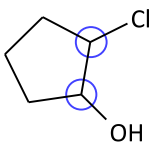
Sí puede tener actividad óptica. Hay 4 sustituyentes distintos en el átomo de carbono número 2 de la cadena principal.

c) 

Sí puede tener actividad óptica. Hay 4 sustituyentes distintos en el átomo carbono número 3 de la cadena principal.

d) 

No puede tener actividad óptica. No hay 4 sustituyentes distintos en ningún átomo de carbono del ciclo.

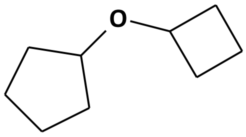
e) 

Sí puede tener actividad óptica. Hay 4 sustituyentes distintos en dos átomos de carbono del ciclo.

ACTIVIDAD (página 169)

30. **Completa en tu cuaderno las siguientes reacciones de hidrólisis y nombra las sustancias que intervienen.**

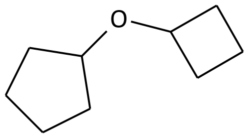
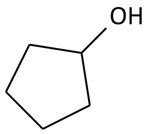
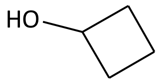
a) $CH_3–COO–CH_2–CH_3$ + H_2O →

b)  + H_2O →

c) $CH_3–O–CH(CH_3)_2$ + H_2O →

d) $NH_2–CO–CH_3$ + H_2O →

a) $CH_3–COO–CH_2–CH_3$ + H_2O → $CH_3–COOH$ + $HO–CH_2–CH_3$
etanoato de etilo + agua → ácido etanoico + etanol

b)  + H_2O →  + 
ciclobutil ciclopentil éter + agua → ciclopentanol + ciclobutanol

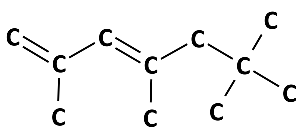
c) $CH_3–O–CH(CH_3)_2$ + H_2O → $CH_3–OH$ + $HO–CH(CH_3)_2$
isopropil metil éter + agua → metanol + propan-2-ol

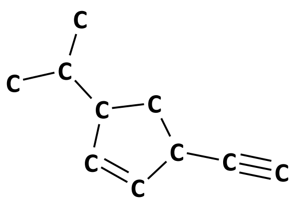
d) $NH_2–CO–CH_3$ + H_2O → NH_3 + $HOOC–CH_3$
etanoamida + agua → amoniaco + ácido etanoico

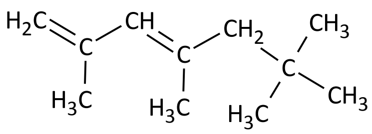
ACTIVIDADES FINALES (página 177)

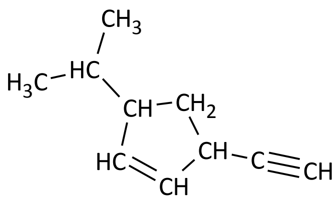
La fórmula de los compuestos orgánicos

31. **Escribe los átomos de hidrógeno que faltan para que las siguientes cadenas carbonadas representen la fórmula de un hidrocarburo.**

a) 

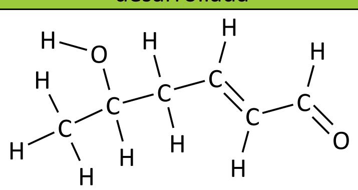
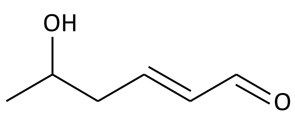
b) 

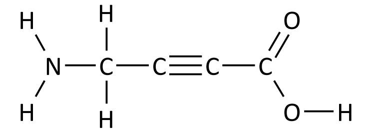
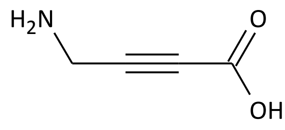
a) 

b) 

32. **A continuación se muestra la fórmula semidesarrollada de dos compuestos. Para cada uno, escribe sus fórmulas desarrollada, supersimplificada y molecular:**

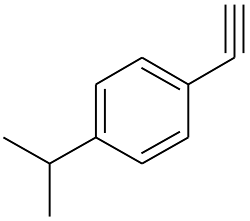
a) $CH_3–CHOH–CH_2–CH=CH–COH$ **b)** $NH_2–CH_2–C≡C–COOH$

	desarrollada	supersimplificada	molecular
a)			$C_6H_{10}O_2$

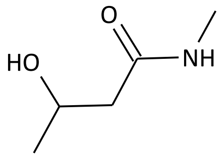
	desarrollada	supersimplificada	molecular
b)			$C_4H_5NO_2$

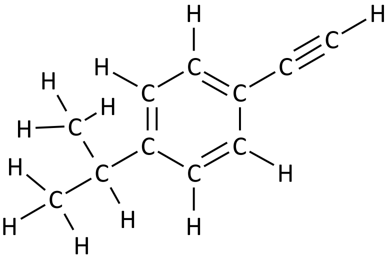
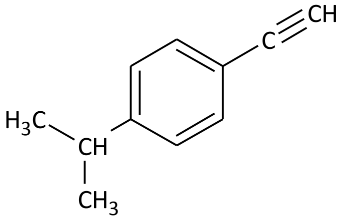
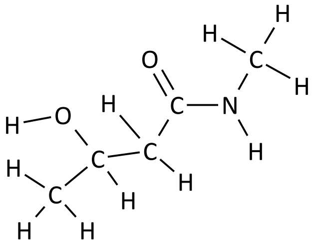
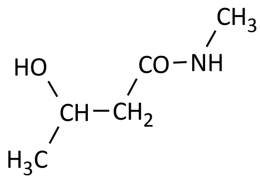
33. Las siguientes son las fórmulas supersimplificadas de dos compuestos. Para cada uno de ellos escribe la fórmula desarrollada, semidesarrollada y molecular:

a)



b)



	desarrollada	semidesarrollada	molecular
a)			$C_{11}H_{12}$
b)			$C_5H_{11}NO_2$

34. Se queman 12,75 g de un dialcohol en presencia de un exceso de oxígeno. Como resultado de la reacción se obtienen 27,5 g de dióxido de carbono y 11,25 g de agua. Determina la fórmula del compuesto.

La reacción química sin ajustar es:

$$\begin{array}{ccccccccc} C_xH_yO_z & + & O_2 & \rightarrow & CO_2 & + & H_2O \\ 12{,}75\text{ g} & + & m_{O_2} & \rightarrow & 27{,}5\text{ g} & + & 11{,}25\text{ g} \end{array}$$

Masa molar del agua:

$$M(H_2O) = 1{,}008 \cdot 2 + 16{,}00 = 18{,}016\text{ g/mol}$$

La cantidad de hidrógeno presente en el agua:

$$11{,}25\ \cancel{\text{g de H}_2\text{O}} \cdot \frac{(1{,}008\text{ g de H}) \cdot 2}{18{,}016\ \cancel{\text{g de H}_2\text{O}}} = 1{,}259\text{ g de H}$$

La misma cantidad de hidrógeno expresada en mol:

$$1{,}259\ \cancel{\text{g de H}} \cdot \frac{1\text{ mol de H}}{1{,}008\ \cancel{\text{g de H}}} = 1{,}249\text{ mol de H}$$

Masa molar del dióxido de carbono:

$$M(CO_2) = 12{,}00 + 16{,}00 \cdot 2 = 44{,}00\text{ g/mol}$$

La cantidad de carbono presente en el dióxido de carbono:

$$27{,}5\ \cancel{\text{g de CO}_2} \cdot \frac{12{,}00\ \text{g de C}}{44{,}00\ \cancel{\text{g de CO}_2}} = 7{,}5\ \text{g de C}$$

La misma cantidad de carbono expresada en mol:

$$7{,}5\ \cancel{\text{g de C}} \cdot \frac{1\ \text{mol de C}}{12{,}00\ \cancel{\text{g de C}}} = 0{,}625\ \text{mol de C}$$

Estas cantidades de hidrógeno y oxígeno proceden del bialcohol, así que la cantidad de oxígeno en la reacción es:

$$12{,}75\ \text{g de } C_xH_yO_z - 1{,}259\ \text{g de H} - 7{,}5\ \text{g de C} = 3{,}99\ \text{g de O}$$

La cantidad de oxígeno presente en el dialcohol expresado en mol:

$$3{,}99\ \cancel{\text{g de O}} \cdot \frac{1\ \text{mol de O}}{16{,}00\ \cancel{\text{g de O}}} = 0{,}249\ \text{mol de O}$$

La fórmula del dialcohol debe ser proporcional a $C_{0,625}H_{1,249}O_{0,249}$:

$$C_{\frac{0,625}{0,249}}H_{\frac{1,249}{0,249}}O_{\frac{0,249}{0,249}} \Rightarrow C_{2,51}H_{5,02}O_1 \Rightarrow C_5H_{10}O_2$$

Al tratarse de un dialcohol la fórmula molecular es: $\mathbf{C_5H_{10}O_2}$.

35. La putrescina es un compuesto de C, H y N que se origina en los procesos de putrefacción de la carne. Al quemar una muestra de 2,125 g de putrescina con exceso de oxígeno se forman 4,25 g de dióxido de carbono y 2,608 g de agua. Obtén la fórmula de la putrescina sabiendo que su masa molar es 88 g/mol.

La reacción química sin ajustar es:

$C_xH_yN_z$	+	O_2	$\rightarrow$	CO_2	+	H_2O	+	NO_n
2,125 g	+	m_{O_2}	$\rightarrow$	4,25 g	+	2,608 g	+	m_{NO_n}

Masa molar del agua:

$$M(H_2O) = 1{,}008 \cdot 2 + 16{,}00 = 18{,}016\ \text{g/mol}$$

La cantidad de hidrógeno presente en el agua:

$$2{,}608\ \cancel{\text{g de H}_2\text{O}} \cdot \frac{(1{,}008\ \text{g de H}) \cdot 2}{18{,}016\ \cancel{\text{g de H}_2\text{O}}} = 0{,}292\ \text{g de H}$$

La misma cantidad de hidrógeno expresada en mol:

$$0{,}292\ \cancel{\text{g de H}} \cdot \frac{1\ \text{mol de H}}{1{,}008\ \cancel{\text{g de H}}} = 0{,}290\ \text{mol de H}$$

Masa molar del dióxido de carbono:

$$M(CO_2) = 12{,}00 + 16{,}00 \cdot 2 = 44{,}00\ \text{g/mol}$$

La cantidad de carbono presente en el dióxido de carbono:

$$4{,}25\ \cancel{\text{g de CO}_2} \cdot \frac{12{,}00\ \text{g de C}}{44{,}00\ \cancel{\text{g de CO}_2}} = 1{,}159\ \text{g de C}$$

La misma cantidad de carbono expresada en mol:

$$1{,}159\ \cancel{\text{g de C}} \cdot \frac{1\ \text{mol de C}}{12{,}00\ \cancel{\text{g de C}}} = 0{,}0966\ \text{mol de C}$$

Estas cantidades de hidrógeno y oxígeno proceden de la putrescina, así que la cantidad de nitrógeno en la reacción es:

$$2{,}125\ \text{g de } C_xH_yN_z - 0{,}292\ \text{g de H} - 1{,}159\ \text{g de C} = 0{,}674\ \text{g de N}$$

La cantidad de nitrógeno presente en la putrescina expresado en mol:

$$0{,}674\ \cancel{\text{g de N}} \cdot \frac{1 \text{ mol de N}}{14{,}01\ \cancel{\text{g de N}}} = 0{,}0481 \text{ mol de N}$$

La fórmula de la putrescina debe ser proporcional a $C_{0,0966}H_{0,290}N_{0,0481}$:

$$C_{\frac{0,0966}{0,0481}}H_{\frac{0,290}{0,0481}}N_{\frac{0,0481}{0,0481}} \Rightarrow C_{2,01}H_{6,03}N_{1} \Rightarrow C_2H_6N$$

Comprobamos si esta es la fórmula molecular del compuesto. Para ello, obtenemos su masa molar:

$$M(C_2H_6N) = 12{,}00 \cdot 2 + 1{,}008 \cdot 6 + 14{,}01 = 44{,}06 \text{ g/mol}$$

Como NO coincide con el dato, hay que pensar que esa es la fórmula empírica del compuesto. En la molécula del compuesto habrá *n* veces esta proporción de átomos:

$$n = \frac{88\ \text{g}/\cancel{\text{mol}}}{44{,}06\ \text{g}/\cancel{\text{mol}}} = 1{,}997 \approx 2$$

Fórmula molecular de la putrescina: **$C_4H_{12}N_2$**.

36. Determina la fórmula molecular de la urea sabiendo que al quemar 15 g de urea en presencia de exceso de O_2 se consiguen 11 g de CO_2, 9 g de H_2O y 19 g de N_2O_3. La masa molar de la urea es de 60 g/mol.

La reacción química sin ajustar es:

$C_xH_yN_zO_n$	+	O_2	→	CO_2	+	H_2O	+	N_2O_3
15 g	+	m_{O_2}	→	11 g	+	9 g	+	19 g

Masa molar del agua:

$$M(H_2O) = 1{,}008 \cdot 2 + 16{,}00 = 18{,}016 \text{ g/mol}$$

La cantidad de hidrógeno presente en el agua:

$$9\ \cancel{\text{g de H}_2\text{O}} \cdot \frac{(1{,}008 \text{ g de H}) \cdot 2}{18{,}016\ \cancel{\text{g de H}_2\text{O}}} = 1{,}007 \text{ g de H}$$

La misma cantidad de hidrógeno expresada en mol:

$$1{,}007\ \cancel{\text{g de H}} \cdot \frac{1 \text{ mol de H}}{1{,}008\ \cancel{\text{g de H}}} = 0{,}999 \text{ mol de H}$$

Masa molar del dióxido de carbono:

$$M(CO_2) = 12{,}00 + 16{,}00 \cdot 2 = 44{,}00 \text{ g/mol}$$

La cantidad de carbono presente en el dióxido de carbono:

$$11\ \cancel{\text{g de CO}_2} \cdot \frac{12{,}00 \text{ g de C}}{44{,}00\ \cancel{\text{g de CO}_2}} = 3{,}000 \text{ g de C}$$

La misma cantidad de carbono expresada en mol:

$$3{,}000\ \cancel{\text{g de C}} \cdot \frac{1 \text{ mol de C}}{12{,}00\ \cancel{\text{g de C}}} = 0{,}250 \text{ mol de C}$$

Masa molar del trióxido de dinitrógeno:

$$M(N_2O_3) = 14{,}01 \cdot 2 + 16{,}00 \cdot 3 = 76{,}02 \text{ g/mol}$$

La cantidad de nitrógeno presente en el trióxido de dinitrógeno:

$$19\ \cancel{\text{g de N}_2\text{O}_3} \cdot \frac{(14{,}01 \text{ g de N}) \cdot 2}{76{,}02\ \cancel{\text{g de N}_2\text{O}_3}} = 7{,}003 \text{ g de N}$$

La misma cantidad de nitrógeno expresada en mol:

$$7{,}003\ \cancel{\text{g de N}}\cdot\frac{1\ \text{mol de N}}{14{,}01\ \cancel{\text{g de N}}}=0{,}500\ \text{mol de N}$$

Estas cantidades de hidrógeno, carbono y nitrógeno proceden de la urea, así que la cantidad de oxígeno en la reacción es:

$$15\ \text{g de}\ C_xH_yN_zO_n - 0{,}999\ \text{g de H} - 3{,}000\ \text{g de C} - 7{,}003\ \text{g de N} = 3{,}998\ \text{g de O}$$

La cantidad de oxígeno presente en la urea expresado en mol:

$$3{,}998\ \cancel{\text{g de O}}\cdot\frac{1\ \text{mol de O}}{16{,}00\ \cancel{\text{g de O}}}=0{,}250\ \text{mol de O}$$

La fórmula de la urea debe ser proporcional a $C_{0,250}H_{0,999}N_{0,500}O_{0,250}$:

$$C_{\frac{0,250}{0,250}}H_{\frac{0,999}{0,250}}N_{\frac{0,500}{0,250}}O_{\frac{0,250}{0,250}} \Rightarrow C_1H_{3,996}N_2O_1 \Rightarrow CH_4N_2O$$

Comprobamos si esta es la fórmula molecular del compuesto. Para ello, obtenemos su masa molar:

$$M(CH_4N_2O) = 12{,}00 + 1{,}008\cdot 4 + 14{,}01\cdot 2 + 16{,}00 = 60{,}05\ \text{g/mol}$$

Se aproxima al dato bastante bien, hay que pensar que la fórmula empírica del compuesto es la misma que la fórmula molecular. Fórmula molecular de la urea: **CH_4N_2O**.

ACTIVIDADES FINALES (página 178)

Formulación y nomenclatura de compuestos orgánicos

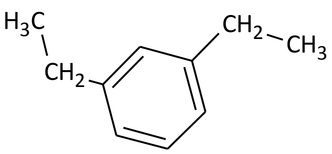
37. Formula los siguientes compuestos.

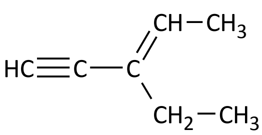
a) 1,3-dietilbenceno

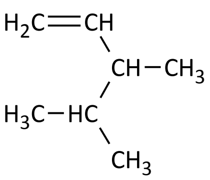
b) 3,4-dimetilpent-1-eno

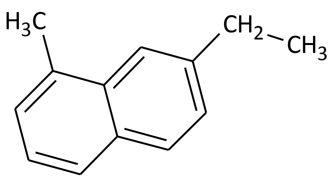
c) 3-etilpent-3-en-1-ino

d) 6-etil-1-metilnaftaleno

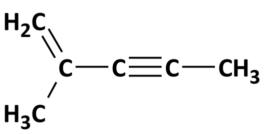
a) 

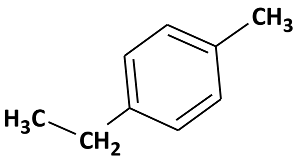
c) 

b) 

d) 

38. Nombra los siguientes compuestos.

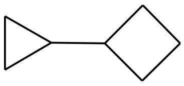
a) 

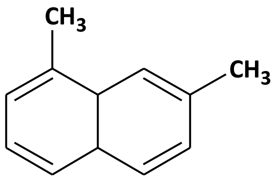
b) 

a) 2-metilpent-1-en-3-ino

b) 1-etil-4-metilbenceno

39. **Nombra los siguientes compuestos.**

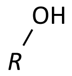
a) 

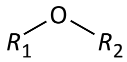
b) 

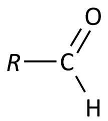
a) ciclopropilciclobutano

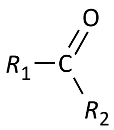
b) 1,7-dimetilnaftaleno

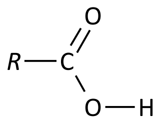
40. **Escribe en tu cuaderno los grupos funcionales de los compuestos orgánicos oxigenados.**

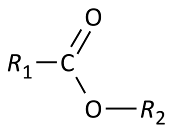
Alcohol: 

Éter: 

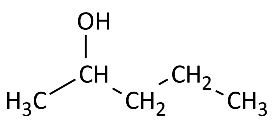
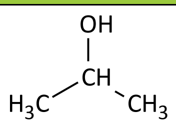
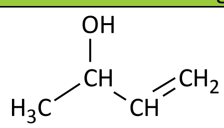
Aldehído: 

Cetona: 

Ácido carboxílico: 

Éster: 

41. **Formula el pentan-2-ol. Formula un compuesto diferente de su misma serie homóloga. Formula un compuesto de la misma familia que él pero que no pertenezca a su serie homóloga.**

Pentan-2-ol	Misma serie homóloga	Misma familia, distinta serie homóloga
	 propan-2-ol	 but-3-en-2-ol

42. **Escribe la fórmula molecular de los siguientes alcoholes: metanol, etanol, propan-2-ol, pentan-3-ol. Deduce la fórmula general de los compuestos que tienen un grupo alcohol en su molécula: C_nH_xO.**

Nombre	Fórmula molecular
metanol	CH_4O
etanol	C_2H_6O
propan-2-ol	C_3H_8O
pentan-2-ol	$C_5H_{12}O$

El número de átomos de hidrógeno es siempre el doble que el de carbono más dos:

$C_nH_{2n+2}O$

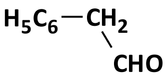
43. Escribe la fórmula molecular de los siguientes aldehídos: metanal, etanal, propanal, pentanal. Deduce la fórmula general de los compuestos que tienen un grupo aldehído en su molécula C_nH_xO.

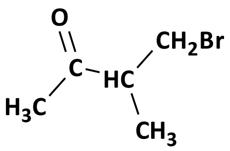
Nombre	Fórmula molecular	
metanal	CH_2O	El número de átomos de hidrógeno es siempre el doble que el de carbono: **$C_nH_{2n}O$**
etanal	C_2H_4O	
propanal	C_3H_6O	
pentanal	$C_5H_{10}O$	

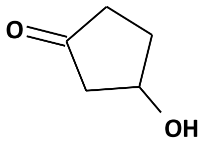
44. Escribe la fórmula molecular de las siguientes cetonas: propanona, butanona, pentan-3-ona. Deduce la fórmula general de los compuestos que tienen un grupo cetona en su molécula C_nH_xO.

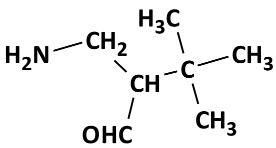
Nombre	Fórmula molecular	
propanona	C_3H_6O	El número de átomos de hidrógeno es siempre el doble que el de carbono: **$C_nH_{2n}O$**
butanona	C_4H_8O	
pentan-3-ona	$C_5H_{10}O$	

45. Nombra los siguientes compuestos.

a) 

c) 

b) 

d) 

a) fenileetanal

b) 4-bromo-3-hidroxibutan-2-ona

c) 3-hidroxiciclopentan-1-ona

d) 3-amino-2-*terc*-butilpropanal

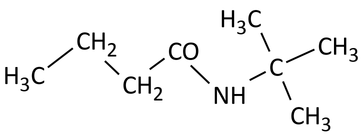
46. Formula los siguientes compuestos.

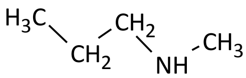
a) *N*-*terc*-butilbutanamida

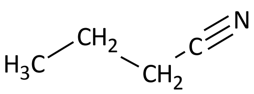
b) butanonitrilo

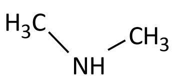
c) *N*-metilpropan-1-amina

d) *N*-metilformamida

a) 

c) 

b) 

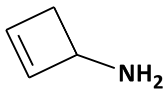
d) 

47. Nombra los siguientes compuestos.

a) CN–CH₂–CH₃

b) C₆H₅–NH₂

c) CH₃–NH–CO–CH₂–CH₃

d) 

a) propanonitrilo

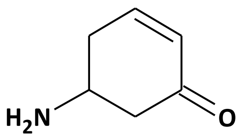
b) fenilamina

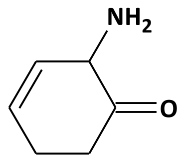
c) *N*-metilpropanamida

d) ciclobut-2-en-1-amina

ACTIVIDADES FINALES (página 179)

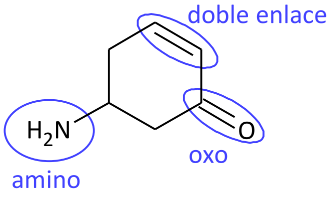
48. Identifica los grupos funcionales de los siguientes compuestos y nómbralos.

a) 

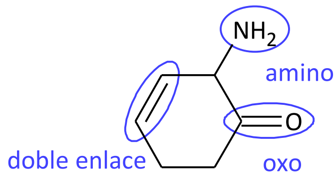
d) 

b) $CH_2OH–CH_2–NH_2$ **e)** $CH_3–O–CO–CH_2–CH_3$

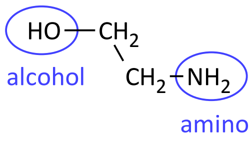
c) $CH_2Br–CH_2–NH_2$ **f)** $CH_3–COO–CH_2–CH_3$

a) 

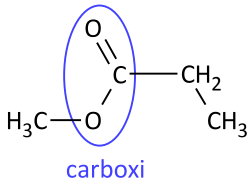
5-aminociclohex-2-en-1-ona

d) 

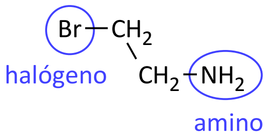
2-aminociclohex-3-en-1-ona

b) 

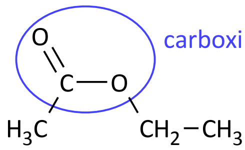
2-aminoetanol

e) 

propanoato de metilo

c) 

2-bromoetanoamina

f) 

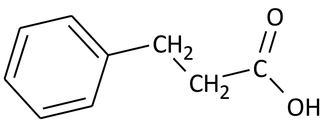
etanoato de etilo

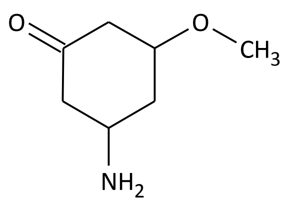
49. Formula los siguientes compuestos.

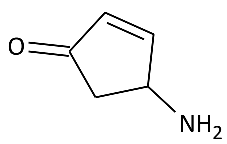
a) ácido 3-fenilpropanoico

b) 3-amino-5-metoxiciclohexan-1-ona

c) 4-aminociclopent-2-en-1-ona

a) 

b) 

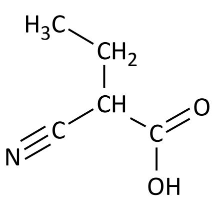
c) 

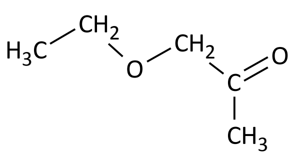
50. Formula los siguientes compuestos.

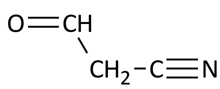
a) ácido 2-cianobutanoico

b) etoxipropanona

c) 3-oxopropanonitrilo

a) 

b) 

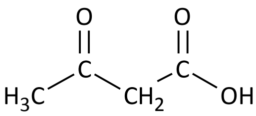
c) 

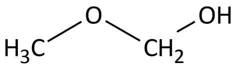
51. Formula los siguientes compuestos.

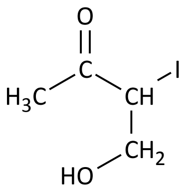
a) ácido 3-oxobutanoico

b) metoximetanol

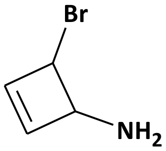
c) 3-yodo-4-hidroxibut-2-ona

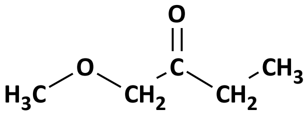
a) 

b) 

c) 

52. Nombra los siguientes compuestos.

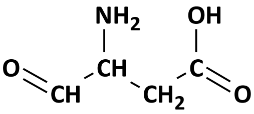
a) 

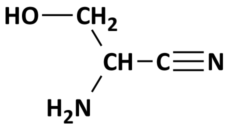
b) 

a) 4-bromociclobut-2-en-1-amino

b) 1-metoxibutan-2-ona

53. Nombra los siguientes compuestos.

a) 

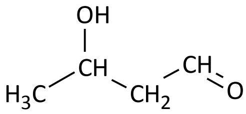
b) 

a) ácido 3-amino-4-oxobutanoico

b) 2-amino-3-hidroxipropanonitrilo

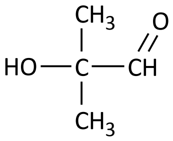
Isomería

54. Escribe y nombra tres isómeros estructurales del 3-hidroxibutanal.



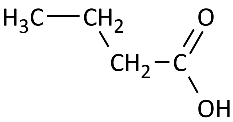
3-hidroxibutanal

Isómero estructural de cadena



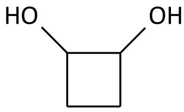
2-hidroxi-2-metilpropanal

Isómero estructural de función



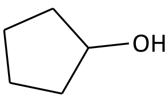
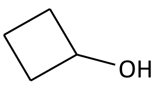
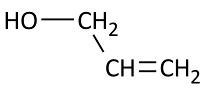
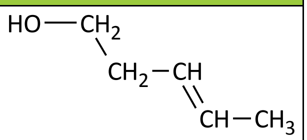
ácido butanoico

Isómero estructural de función



ciclobutan-1,2-diol

55. Para el ciclopentanol, escribe la fórmula de un compuesto de su misma serie homóloga, otro que pertenezca a su familia pero no a su serie homóloga y otro que sea su isómero estructural.

ciclopentanol	Misma serie homóloga	Misma familia, distinta serie homóloga	Isómero estructural
	 ciclobutanol	 prop-2-en-1-ol	 pent-3-en-1-ol

56. Identifica los grupos funcionales de los siguientes compuestos y relaciona los que son isómeros de función.

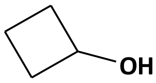
a) $CH_3–O–CH_2–CH_3$

b) $CH_3–CH_2–COOH$

c) $CH_3–CH_2–CH_2–CHO$

d) $CH_3–O–CO–CH_3$

e) $CH_3–CH_2–CH_2OH$

f) 

g) $CH_3–CO–CH_2–CH_3$

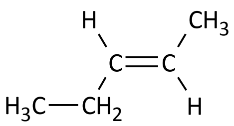
h) $CH_3–CH=CH–CH_2OH$

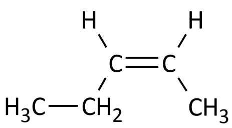
a) Grupo éter
b) Grupo ácido carboxílico
c) Grupo aldehído
d) Grupo éster
e) Grupo alcohol
f) Grupo alcohol
g) Grupo cetona
h) Grupo alcohol y un doble enlace

- Son isómeros de función el a) y el e). Con la misma fórmula molecular, C_3H_8O, hay un éter y un alcohol.
- Son isómeros de función el c), f), g) y h). Con la misma fórmula molecular, C_4H_8O, hay un aldehído, una cetona y dos alcoholes, uno en un ciclo y otro en cadena abierta con doble enlace.
- Son isómeros de función el b) y el d). Con la misma fórmula molecular, $C_3H_6O_2$, hay un ácido y un éster.

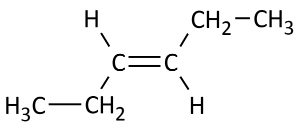
57. Formula los siguientes compuestos e indica cuáles de ellos pueden presentar isomería geométrica.

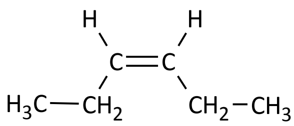
a) **pent-2-eno**
b) **hex-3-eno**
c) **but-2-ino**
d) **2-metilbut-2-eno**
e) **3-metilpent-2-eno**
f) **ácido but-2-enoico**

a) 
trans-pent-2-eno

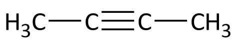

cis-pent-2-eno

Presenta isomería geométrica.

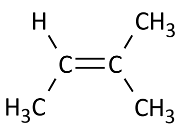
b) 
trans-hex-3-eno


cis-hex-3-eno

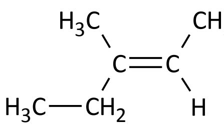
Presenta isomería geométrica.

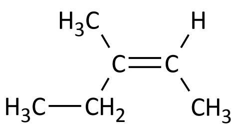
c) 
but-2-ino

No puede presentar isomería geométrica por el triple enlace.

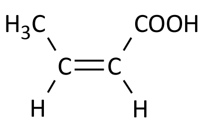
d) 
2-metilbut-2-eno

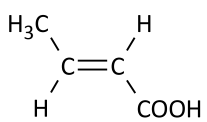
No puede presentar isomería geométrica porque uno de los átomos de carbono del doble enlace tiene los dos sustituyentes iguales.

e) 
trans-3-metilpent-2-eno


cis-3-metilpent-2-eno

Presenta isomería geométrica.

f) 
ácido *cis*-but-2-enoico


ácido *trans*-but-2-enoico

Presenta isomería geométrica.

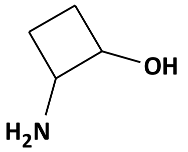
58. **Identifica los grupos funcionales de los siguientes compuestos y relaciona los que son isómeros estructurales:**

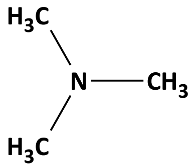
a) $CH_3–NH–CH_2–CH_3$

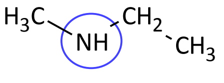
b) $CH_3–NH–CO–CH_2–CH_3$

c) $HOCH_2–CH{=}CH–CH_2–NH_2$

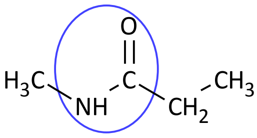
d) $CH_3–CH{=}CH–CHOH–NH_2$

e)


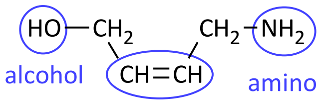
f)


a)


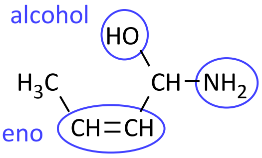
N-metiletanamina

b)


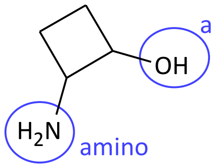
N-metilpropanamida

c)


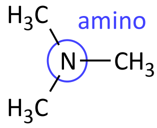
4-aminobut-2-en-1-ol

d)


1-aminobut-2-en-1-ol

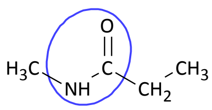
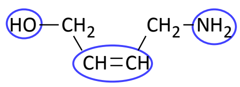
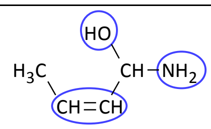
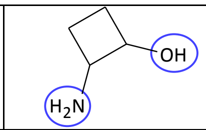
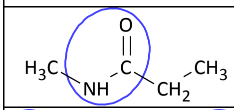
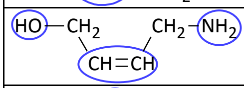
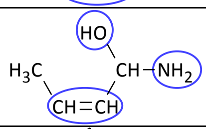
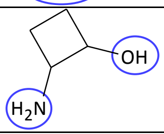
e)


2-aminociclobutan-1-ol

f)


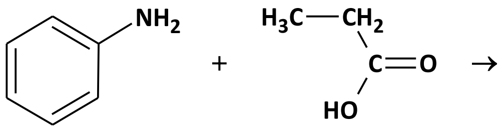
N,*N*-dimetilfenilamina

- Son isómeros estructurales el a) y el f). Con la misma fórmula molecular, C_3H_9N, en las dos moléculas se conserva la función amina, así que son isómeros estructurales de cadena.
- Son isómeros estructurales el b), c), d) y e). Las cuatro moléculas tienen la misma fórmula molecular, C_4H_9NO. Las modificaciones de una a otra son según la tabla de doble entrada.

				
		función	función	función
	función		posición	cadena
	función	posición		cadena
	función	cadena	cadena	

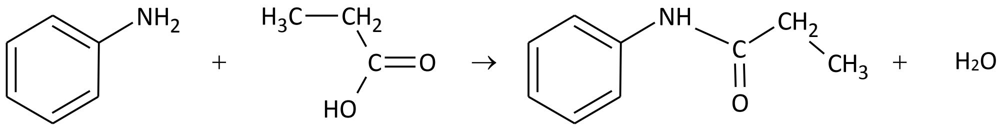
Reacciones de los compuestos orgánicos

59. Completa en tu cuaderno las siguientes reacciones y nombra las sustancias que intervienen.

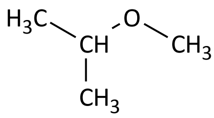
a) 

b) $CH_3–CHOH–CH_3$ + CH_3OH →

c) $CH_3–COOH$ + CH_3OH →

a) 

fenilamina | ácido propanoico | *N*-fenilpropanamida | agua

b) $CH_3–CHOH–CH_3$ + CH_3OH →  + H_2O

propan-2-ol | metanol | isopropil metil éter | agua

c) $CH_3–COOH$ + CH_3OH → $CH_3–COO–CH_3$ + H_2O

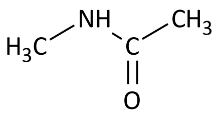
ácido acético | metanol | acetato de metilo | agua

60. Escribe una reacción química que te permita obtener las siguientes sustancias.

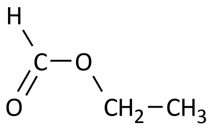
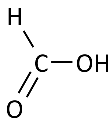
a) $CH_3–NH–CO–CH_3$

b) $HCOO–CH_2–CH_3$

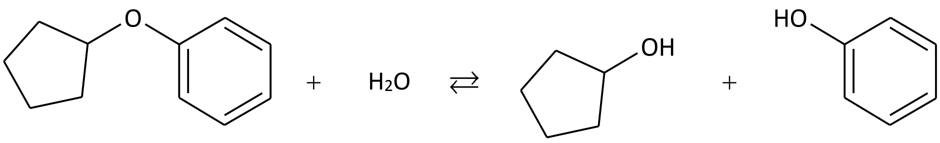
c) ciclopentil fenil éter

a)  + H_2O ⇄ $CH_3–NH_2$ + $CH_3–COOH$

N-metilmetanoamida | agua | metanamina | ácido acético

b)  + H_2O ⇄  + $CH_3–CH_2OH$

metanoato de etilo | agua | ácido metanoico | etanol

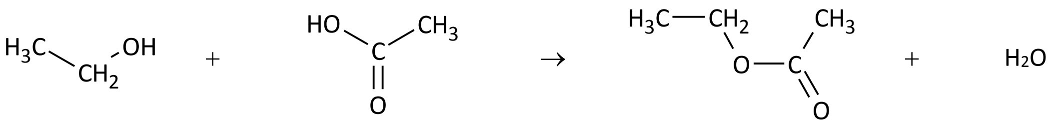
c) 

ciclopentil fenil éter | agua | ciclopentanol | fenol

ACTIVIDADES FINALES (página 180)

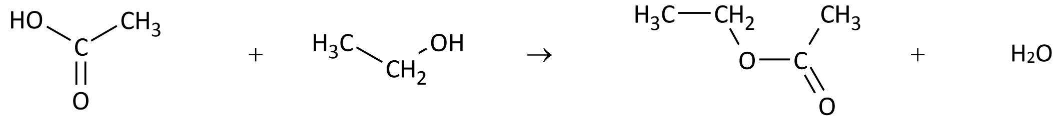
61. Se hacen reaccionar 50 mL de un ácido acético comercial, del 96 % de riqueza en masa y densidad 1,06 g/mL con un exceso de etanol. Calcula que cantidad, en gramos, de acetato de etilo se habrá obtenido suponiendo que el proceso va con un 85 % de rendimiento.

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos.



1 mol de etanol con 1 mol de ácido acético dan 1 mol de acetato de etilo y 1 mol de agua

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos.



1 mol de ácido acético	con	1 mol de etanol	dan	1 mol de acetato de etilo	y	1 mol de agua
50 mL						
96 % en masa			85 % de rendimiento			
d = 1,06 g/mL						

3. Expresamos en mol la cantidad de las sustancias que reaccionan. La densidad del etanol permite calcular su equivalente en masa, y la riqueza, la cantidad exacta de ácido que puede reaccionar:

$$50\ \cancel{\text{mL}}\text{ de } C_2H_4O_2\text{ comercial}\cdot\frac{1{,}06\text{ g}}{1\ \cancel{\text{mL}}}=53\text{ g de } C_2H_4O_2\text{ comercial}$$

$$53\ \cancel{\text{g de } C_2H_4O_2\text{ comercial}}\cdot\frac{96\text{ g de } C_2H_4O_2\text{ puro}}{100\ \cancel{\text{g de } C_2H_4O_2\text{ comercial}}}=50{,}88\text{ g de } C_2H_4O_2\text{ puro}$$

$$M(C_2H_4O_2)=12{,}00\cdot 2+1{,}008\cdot 4+16{,}00\cdot 2=60{,}032\text{ g/mol}$$

$$50{,}88\ \cancel{\text{g de } C_2H_4O_2\text{ puro}}\cdot\frac{1\text{ mol de } C_2H_4O_2}{60{,}032\ \cancel{\text{g de } C_2H_4O_2\text{ puro}}}=0{,}848\text{ mol de } C_2H_4O_2$$

4. La estequiometría de la reacción permite calcular los moles de acetato de etilo que se obtienen:

1 mol de ácido acético, $C_2H_4O_2$, producen 1 mol de acetato de etilo, $C_4H_8O_2$.

En este caso, se obtendrían 0,848 mol de acetato de etilo si la reacción fuese con un 100 % de rendimiento. De acuerdo con los datos, solo se obtiene el 85 % de lo que se obtendría en teoría:

$$0{,}848\ \cancel{\text{mol de } C_4H_8O_2\text{ teórico}}\cdot\frac{85\text{ mol de } C_4H_8O_2\text{ real}}{100\ \cancel{\text{mol de } C_4H_8O_2\text{ teórico}}}=0{,}720\text{ mol de } C_4H_8O_2\text{ real}$$

$$M(C_4H_8O_2)=12{,}00\cdot 4+1{,}008\cdot 8+16{,}00\cdot 2=88{,}064\text{ g/mol}$$

$$0{,}720\ \cancel{\text{mol de } C_4H_8O_2}\cdot\frac{88{,}064\text{ g de } C_4H_8O_2}{1\ \cancel{\text{mol de } C_2H_4O_2}}=\mathbf{63{,}44\text{ g de } C_4H_8O_2}$$

62. En la combustión de cada mol de CH_4 se liberan 890 kJ. Calcula la cantidad de energía que se produce por la combustión de 1 kg de CH_4 y la cantidad de CO_2 que se vierte a la atmósfera en el proceso. Determina el volumen de aire, medido a 0 °C y 1 atm, que será necesario para que se produzca esa combustión.

Dato: el aire tiene un 21 % de oxígeno.

1. Escribimos la ecuación química de la reacción y la ajustamos.

CH_4	+	$2\ O_2$	→	CO_2	+	$2\ H_2O$	$\Delta H=-890$ kJ/mol
1 mol de metano	con	2 mol de oxígeno	dan	1 mol de dióxido de carbono		2 mol de agua	y energía

2. Debajo de cada sustancia escribimos los datos que conocemos.

CH_4	+	$2\ O_2$	→	CO_2	+	$2\ H_2O$	$\Delta H=-890$ kJ/mol
1 mol de metano	con	2 mol de oxígeno	dan	1 mol de dióxido de carbono		2 mol de agua	y energía
1000 g		0 °C		0 °C			
		1 atm		1 atm			
		21 % en volumen					

3. Expresamos en mol la cantidad de las sustancias que reaccionan. La masa molar del metano permite calcular el número de moles de este compuesto que participan en la reacción:

$$M(CH_4)=12{,}00+1{,}008\cdot 4=16{,}032\text{ g/mol}$$

$$1000\ \cancel{\text{g de } CH_4}\cdot\frac{1\text{ mol de } CH_4}{16{,}032\ \cancel{\text{g de } CH_4}}=62{,}375\text{ mol de } CH_4$$

4. La estequiometría de la reacción permite calcular:

- La cantidad de energía:

$$62{,}375\ \cancel{\text{mol}}\text{ de }CH_4 \cdot -890\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{mol}}} = -55\,514\ kJ \approx -55\,500\ \text{kJ}$$

El signo negativo indica que el metano pierde esa cantidad de energía. La cantidad de energía que se produce es **55 500 kJ**.

- La cantidad de dióxido de carbono:

$$62{,}375\ \cancel{\text{mol de }CH_4} \cdot \frac{1\text{ mol de }CO_2}{1\ \cancel{\text{mol de }CH_4}} = 32{,}375\text{ mol de }CO_2$$

$$M(CO_2) = 12{,}00 + 16{,}00 \cdot 2 = 44{,}00\text{ g/mol}$$

$$32{,}375\ \cancel{\text{mol de }CO_2} \cdot \frac{44{,}00\text{ g de }CO_2}{1\ \cancel{\text{mol de }CO_2}} = \mathbf{2744{,}5\ g\ de\ CO_2}$$

- La cantidad de aire:

$$62{,}375\ \cancel{\text{mol de }CH_4} \cdot \frac{2\text{ mol de }O_2}{1\ \cancel{\text{mol de }CH_4}} = 124{,}75\text{ mol de }O_2$$

De la ecuación de estado de los gases perfectos, $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$, despejando y sustituyendo:

$$V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{124{,}75\ \cancel{\text{mol}}\text{ de }O_2 \cdot 0{,}082\dfrac{\cancel{\text{atm}} \cdot \text{L}}{\cancel{\text{mol}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot 273\ \cancel{\text{K}}}{1\ \cancel{\text{atm}}} = 2792{,}7\text{ L de }O_2$$

Considerando la cantidad de oxígeno en el aire:

$$V_{\text{aire}} = 2792{,}7\ \cancel{\text{L de }O_2} \cdot \frac{100\text{ L de aire}}{21\ \cancel{\text{L de }O_2}} = 13\,298\text{ L de aire} \approx \mathbf{13\,300\ L\ de\ aire}$$

La industria del petróleo y sus derivados

63. Analiza el cuadro de las reservas mundiales de los combustibles fósiles y responde:

a) Cuál es la región que posee las mayores reservas y en qué porcentaje de:

	Carbón	Petróleo	Gas natural
Región			
Cantidad			
Porcentaje			

b) Avanzando desde la región que posee la mayor reserva, qué regiones acumulan el 50 % de cada combustible.

Carbón	Petróleo	Gas natural

c) Busca información que te permita valorar las reservas de España en cada uno de los tres tipos de combustibles fósiles.

a) Completamos la tabla con la información del apartado 6:

	Carbón	Petróleo	Gas natural
Región	Eurasia	Oriente Medio	Oriente Medio
Cantidad	$310{,}54 \cdot 10^{12}$ t	$808{,}5 \cdot 10^{9}$ barriles	$80{,}29 \cdot 10^{12}$ m^3
Porcentaje	34,83 %	47,90 %	43,24 %

Para calcular el porcentaje se ha de sumar el total de las reservas mundiales en cada caso:

$$\text{Porcentaje reservas de carbón de Eurasia} = \frac{310{,}54}{310{,}54 + 288{,}33 + 245{,}09 + 31{,}81 + 14{,}64 + 1{,}12} = 34{,}83\ \%$$

$$\text{Porcentaje reservas de petróleo de Oriente Medio} = \frac{808{,}5}{808{,}5+329{,}6+229{,}6+147{,}8+130{,}3+42{,}2} = 47{,}90\ \%$$

$$\text{Porcentaje reservas de gas natural de Oriente Medio} = \frac{80{,}29}{80{,}29+56{,}62+15{,}20+14{,}21+11{,}71+7{,}67} = 43{,}24\ \%$$

b) Incorporamos regiones hasta que la suma de porcentajes supere el 50 %:

Carbón		Petróleo		Gas natural	
Eurasia	34,83 %	Oriente Medio	47,90 %	Oriente Medio	43,24 %
Asia-Pacífico	32,34 %	Sudamérica-Caribe	19,53 %	Asia-Pacífico	30,49 %
Suma	67,17 %	Suma	67,43 %	Suma	73,73 %

Calculamos igualmente el porcentaje de la segunda región en importancia:

$$\text{Porcentaje reservas de carbón de Asia-Pacífico} = \frac{288{,}33}{310{,}54+288{,}33+245{,}09+31{,}81+14{,}64+1{,}12} = 32{,}34\ \%$$

$$\text{Porcentaje reservas de petróleo de Sudamérica-Caribe} = \frac{329{,}6}{808{,}5+329{,}6+229{,}6+147{,}8+130{,}3+42{,}2} = 19{,}53\ \%$$

$$\text{Porcentaje reservas de gas natural de Asia-Pacífico} = \frac{56{,}62}{80{,}29+56{,}62+15{,}20+14{,}21+11{,}71+7{,}67} = 30{,}49\ \%$$

c) En esta búsqueda de información se puede echar mano de la información que ofrecen las compañías petrolíferas o el Ministerio de Industria a través de sus portales en la Internet. Algunos datos encontrados para esta publicación que no excluyen otras búsquedas que actualicen los datos:

Fuente: British Petroleum (reservas en 2014)

Carbón	$53 \cdot 10^6$ t
Petróleo	no consta
Gas natural	no consta

Fuente: Ministerio de Industria, Energía y Turismo (datos de producción en 2011).

Carbón	$6{,}62 \cdot 10^3$ t
Petróleo	100 t
Gas natural	58 m^3 (en condiciones normales)

64. Razona por qué hay refinerías de petróleo y no hay instalaciones semejantes para tratar el gas natural.

El petróleo es una mezcla de diferentes hidrocarburos de muy diferente peso molecular. El gas natural es también una mezcla en la que el componente principal es el metano y hay otros gases también todos de bajo peso molecular.

- Además, en el petróleo se necesita destilar la mezcla para poder separar en diferentes fracciones. Cada una con poca variación en el peso molecular de sus componentes. Así es posible aprovechar cada fracción en el contexto que es útil: combustibles, lubricantes, asfaltos…
- En el gas natural, el peso molecular de sus componentes no es muy variado. Todos los componentes son de bajo peso molecular y se emplean para la combustión y así obtener energía. Por eso no es necesario el tratamiento en las refinerías.

65. En las refinerías se separa el petróleo crudo en distintas fracciones según su punto de ebullición. Desde el punto de vista químico, podemos decir que el proceso es una destilación fraccionada. ¿Por qué se llama refinerías a estas instalaciones y no destilerías?

En la mezcla del petróleo crudo llegan algunas sustancias químicas, que contienen nitrógeno y azufre, se consideran impurezas. Si se dejan en la mezcla al quemar la gasolina, por ejemplo, los gases producto de la combustión contendrían estas sustancias que pueden llegar a ser perjudiciales. Por eso es necesario el refinado.

66. En qué consiste el *cracking* y para qué se utiliza.

Cracking es separar moléculas de alto peso molecular dejando sustancias de menor peso molecular. Se consiguen así gasolinas a partir de querosenos y gasóleos, por ejemplo.

67. **Explica la expresión: «La mayor parte de los plásticos son materiales de diseño químico para aplicaciones especificas, que se obtienen del petróleo».**

Los plásticos son polímeros. Se consiguen enlazando un número indeterminado de monómeros. Estos monómeros se consiguen desde la destilación del petróleo o como subproducto en los procesos de *cracking*.

68. **Busca información y elabora un informe utilizando las TIC que comprenda lo siguiente:**

- **Productos naturales del carbono.**
- **Presencia en:**
  - **Materiales fósiles.**
  - **Seres vivos.**
- **Aprovechamiento de los compuestos naturales del carbono.**
  - **Energético.**
  - **Alimenticio.**
  - **Médico.**
  - **Mejora de la calidad de vida.**
- **Impacto medioambiental derivado de la obtención y aprovechamiento de los compuestos naturales del carbono.**

Al tratarse de un trabajo de investigación, la respuesta es necesariamente abierta. El objetivo es repasar dónde es posible encontrar átomos de carbono en la naturaleza, clasificando según el origen como material fósil o materia viva. Y qué utilidad tiene para las personas. Para terminar con una reflexión alrededor del impacto de nuestra intervención en la naturaleza.

69. **Busca informacion y elabora un informe utilizando las TIC que comprenda lo siguiente:**

- **Productos del carbono obtenidos de forma sintética.**
- **Aprovechamiento de los compuestos sintéticos del carbono.**
  - **Alimenticio.**
  - **Médico.**
  - **Industrial (obtención de materiales).**
  - **Mejora de la calidad de vida.**
- **Impacto medioambiental derivado de la obtención y aprovechamiento de los compuestos sintéticos del carbono.**

Al tratarse de un trabajo de investigación, la respuesta es necesariamente abierta. El objetivo es repasar en dónde es posible encontrar átomos de carbono en las sustancias no naturales y qué utilidad tiene para las personas. Para terminar con una reflexión alrededor del impacto en la naturaleza de nuestra intervención.

AMPLIACIÓN (página 180)

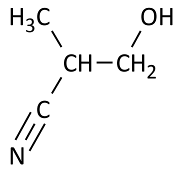
70. **Detecta y corrige el error de los siguientes nombres.**

a) **2-cianopropan-1-ol**

b) **ácido 2-etilpropanoico**

c) **3,3-dibromobut-3-en-2-ona**

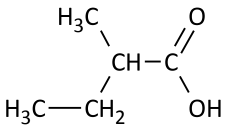
a)



El nitrilo es la función principal:

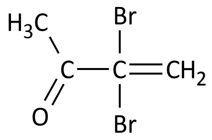
3-hidroxi-2-metilpropanonitrilo

b)



La cadena de carbonos de mayor longitud es de 4 átomos de carbono:

ácido 2-metilbutanoico

c) 

El átomo de carbono número 3 no puede formar 5 enlaces. **El compuesto no es posible**.

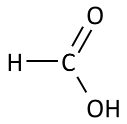
71. **Indica cuáles de estos compuestos pueden presentar isomería óptica.**

a) **ácido metanoico**

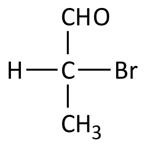
b) **2-cloropropanal**

c) **3-metilbutanonitrilo**

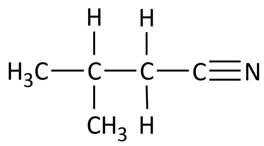
d) **3-metilpent-2-eno**

a) 

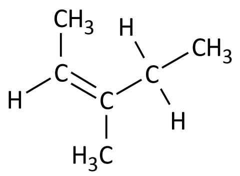
El único átomo de carbono en el compuesto forma 3 enlaces.
No es posible la simetría especular.

b) 

En el átomo de carbono central cada uno de los enlaces es a un sustituyente diferente.
Sí es posible la isomería especular.

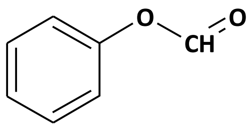
c) 

Los átomos que tienen cuatro enlaces simples repiten algún sustituyente.
No es posible la simetría especular.

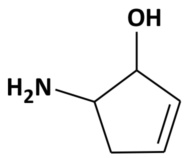
d) 

Los átomos que tienen cuatro enlaces simples repiten algún sustituyente.
No es posible la simetría especular.

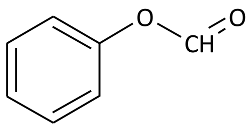
72. **Los nombres siguientes contienen un error; detéctalo y corrígelo:**

a) 

ácido benzoico

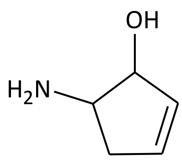
b) 

2-aminociclopent-4-en-1-ol

a) 

El aldehído es la función principal:

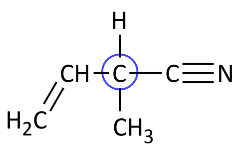
Fenoximetanal.

b) 

En la numeración de los átomos de carbono del ciclo se mira primero el enlace doble que el sustituyente amino:

5-aminociclopent-2-en-1-ol.

73. **Escribe la fórmula de un compuesto de cinco átomos de carbono que tenga un grupo ciano y un doble enlace y sea ópticamente activo.**



Sí puede tener actividad óptica. Hay 4 sustituyentes distintos en el átomo de carbono número 2 de la cadena principal.

Su nombre: **2-metilbut-3-enonitrilo.**

QUÍMICA EN TU VIDA (página 182)

INTERPRETA

1. **Describe el camino del gas natural desde que se extrae de un yacimiento hasta que lo aprovechamos en una vivienda.**

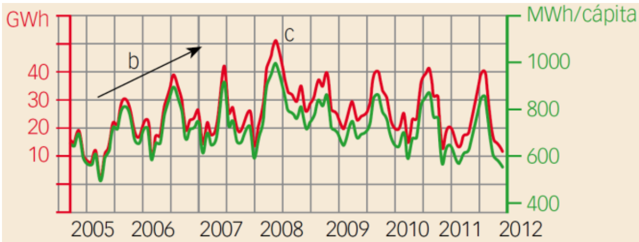
    1. Extracción del yacimiento.
    2. Almacenamiento próximo a la extracción.
    1. Transporte. Por gaseoductos o con barcos metaneros.
    1. Almacenamiento previo a la distribución.
    1. Distribución a viviendas e industrias.

2. **¿Por qué se dice que el gas natural es un combustible más «limpio» que otros?**

    Como puede verse en la gráfica, las emisiones de dióxido de carbono son menores para una misma cantidad de energía generada.

REFLEXIONA

3. **Observa el gráfico que muestra la evolución en el consumo de gas natural en España (GWh total junto con el gráfico que muestra el consumo per cápita MWh/cápita) y contesta.**



a) **¿Qué condicionantes estacionales, sociales y económicos inciden en el consuno de gas natural?**

b) **¿A qué crees que se debió el incremento observado en el consumo total de gas natural hasta el invierno de 2008?**

c) **Explica el periodo 2008-2012 de la gráfica verde.**

a) Se puede observar en la gráfica que el consumo se intensifica cíclicamente según los ciclos estacionales.

En la primera parte de la gráfica se observa que los ciclos van llevando a picos cada vez más altos, esto es consecuencia de un crecimiento sostenido del consumo.

Quedó estancado, incluso se redujo a partir de 2008.

A partir de 2008 se separa la gráfica de consumo total de la de consumo per cápita.

b) Son los años previos a la crisis económica de 2007. En este periodo se construyeron muchas casas nuevas que había que calentar. La economía española crecía y con ella el consumo de energía.

c) En el periodo a partir de 2008 hasta 2012 el consumo global (línea roja) de energía se estancó, cada invierno repite la altura del pico, cada verano se consume menos. El motivo puede ser que cada vez más la energía eléctrica se genera con eólica y solar, así no es necesario consumir más gas. En la línea verde se ve que se separa de la roja. Esto es porque al ser consumo per cápita se divide entre el número de habitantes, que cada vez son más.

7

El movimiento

El movimiento

7

PARA COMENZAR (página 183)

- **¿Cuál es la diferencia entre la velocidad media durante un trayecto y la velocidad instantánea?**

  La diferencia está en el tiempo considerado para el desplazamiento. La velocidad media abarca todo el trayecto; la velocidad instantánea corresponde a un breve instante.

- **¿Depende el consumo de combustible de un coche únicamente de la velocidad media mantenida durante su recorrido?**

  El párrafo afirma que no es así.

  Mantener la velocidad frente a la fuerza de rozamiento del aire supone un consumo de energía. Más adelante, en el tema 9 dedicado a las fuerzas, se explica que el rozamiento viscoso es proporcional a la velocidad y la proporcionalidad no es lineal. La explicación está en la página 253.

  Además, los cambios de velocidad suponen variaciones de energía cinética. Si el incremento es positivo, es a costa de la energía contenida en el combustible.

PRACTICA (página 184)

1. Calcula el módulo del vector $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$.

$$|\vec{a}|=a=+\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=+\sqrt{(1)^2+(2)^2+(2)^2}=+\sqrt{1+4+4}=+\sqrt{9}=\mathbf{3}$$

2. Dados los siguientes vectores:

- $\vec{u}=-\vec{j}+2\vec{k}$
- $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{k}$

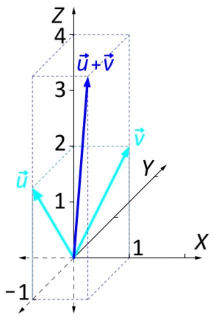
a) Calcula el producto $-4\cdot\vec{u}$.

b) Realiza gráfica y algebraicamente la suma $\vec{u}+\vec{v}$.

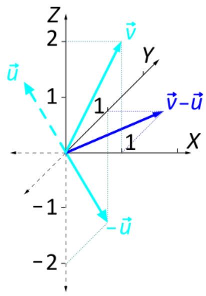
c) Realiza gráfica y algebraicamente la resta $\vec{v}-\vec{u}$.

a) $-4\cdot\vec{u}=-4\cdot(-\vec{j}+2\vec{k})=\mathbf{4\vec{j}-8\vec{k}}$

b) $\vec{u}+\vec{v}=(-\vec{j}+2\vec{k})+(\vec{i}+2\vec{k})=\mathbf{\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}}$

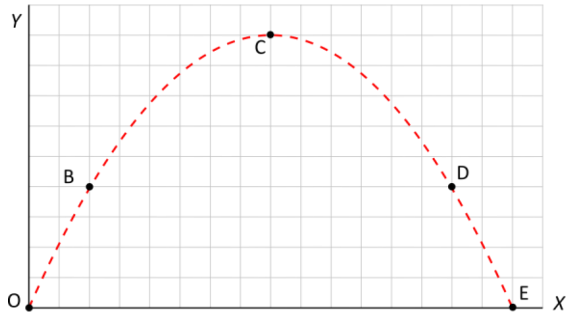


c) $\vec{v}-\vec{u}=(\vec{i}+2\vec{k})-(-\vec{j}+2\vec{k})=\mathbf{\vec{i}+\vec{j}}$



PRACTICA (página 185)

3. **Observa la ilustración.**



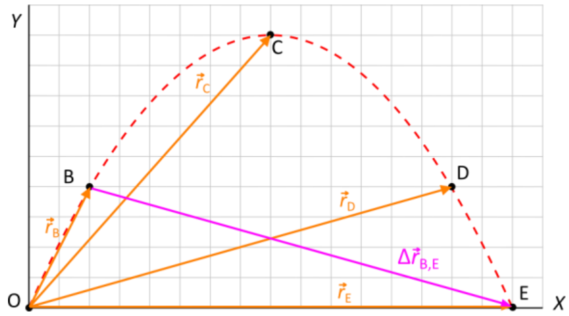
Dibuja en tu cuaderno:

a) **El vector de posición para cada uno de los puntos señalados: B, C, D y E.**

b) **El vector desplazamiento entre los puntos B y E.**

a) Los vectores en naranja en el dibujo.

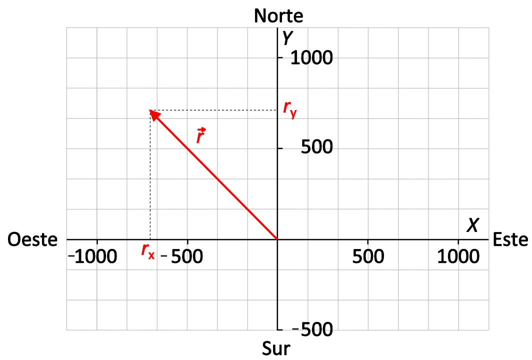
b) El vector en morado en el dibujo.



ACTIVIDAD (página 188)

4. **Escribe las coordenadas cartesianas para un punto a 1000 m del origen en dirección noroeste.**

Se ha desplazado por igual en ambas direcciones. La dirección este-oeste es el eje *OX*, positivo hacia el oeste. La dirección norte-sur es el eje *OY*, positivo hacia el norte. Por lo que en la dirección noroeste las componentes en *x* e *y* del vector posición son iguales pero con el signo opuesto, $-r_x = r_y$, por tanto:



$$|\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{r_x^2 + (-r_x)^2} = \sqrt{2 \cdot r_x^2}$$

Despejamos y calculamos:

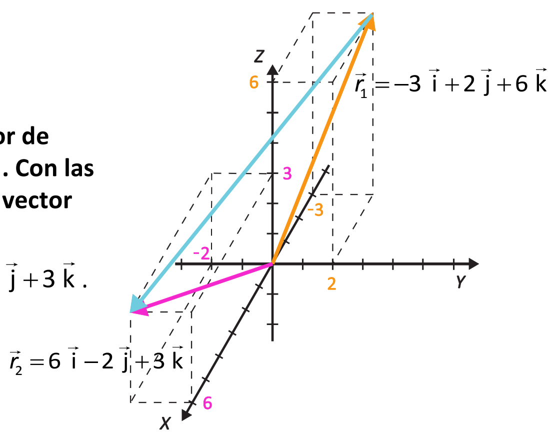
$$-r_x = r_y = \frac{|\vec{r}|}{\sqrt{2}} = \frac{1000 \text{ m}}{\sqrt{2}} = 707 \text{ m}$$

En coordenadas cartesianas:

$$\vec{r} = (r_x, r_y) = \mathbf{(-707, 707)\,m}$$

ACTIVIDADES (página 189)

5. **Un punto en una trayectoria (–3, 2, 6) está determinado por el vector de posición $\vec{r}_1$ y otro punto (6, –2, 3) está determinado por el vector $\vec{r}_2$. Con las distancias expresadas en metros, ¿cuáles serán las coordenadas del vector $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$?**

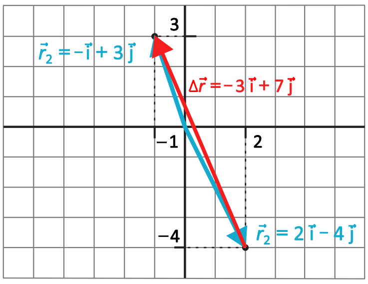


Escribimos los vectores de posición: $\vec{r}_1 = -3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 6\,\vec{k}$ y $\vec{r}_2 = 6\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$.

Calculamos las coordenadas del vector $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$:

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(6\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}\right) - \left(-3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 6\,\vec{k}\right) = \mathbf{9\,\vec{i} - 4\,\vec{j} - 3\vec{k}}$$

6. **Una pelota se desplaza desde el punto P₁, $\vec{r}_1 = 2\,\vec{i} - 4\,\vec{j}$ m, hasta el punto P₂, $\vec{r}_2 = -\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ m. Calcula la distancia entre los puntos P₁ y P₂ en metros.**
¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$?



La distancia entre los puntos P₁ y P₂ es el módulo de la diferencia de sus vectores de posición.

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(-\,\vec{i} + 3\,\vec{j}\right)\text{ m} - \left(2\,\vec{i} - 4\,\vec{j}\right)\text{ m} = \mathbf{-3\,\vec{i} + 7\,\vec{j}\ m}$$

$$\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = \sqrt{(-3)^2 + (7)^2}\text{ m} = \sqrt{58}\text{ m} \simeq \mathbf{7{,}62\,m}$$

ACTIVIDADES (página 190)

7. **Los vectores de posición de un móvil en dos instantes t_1 y t_2 son:**

$$\vec{r}_1 = 6\,\vec{i} - 4\,\vec{j} \text{ y } \vec{r}_2 = 6\,\vec{j}$$

Calcula el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$.

Calculamos el vector desplazamiento:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(6\,\vec{j}\right)\text{ m} - \left(6\,\vec{i} - 4\,\vec{j}\right)\text{ m} = \mathbf{-6\,\vec{i} + 10\,\vec{j}\ m}$$

8. **El vector de posición de una pelota en función del tiempo es:**

$$\vec{r}(t) = 3\cdot t\,\vec{i} + \vec{j} + 2\cdot t^2\,\vec{k}\text{ m}$$

Calcula el vector desplazamiento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ entre los instantes $t_1 = 2$ s y $t_2 = 5$ s.

Calculamos el vector desplazamiento entre los instantes t_1 y t_2:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \left(3\cdot t_2\,\vec{i} + \vec{j} + 2\cdot t_2^2\,\vec{k}\right)\text{ m} - \left(3\cdot t_1\,\vec{i} + \vec{j} + 2\cdot t_1^2\,\vec{k}\right)\text{ m}$$

Sustituimos $t_1 = 2$ s y $t_2 = 5$ s:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(5\text{ s}) - \vec{r}(2\text{ s}) = \left(15\,\vec{i} + \vec{j} + 50\,\vec{k}\right)\text{ m} - \left(6\,\vec{i} + \vec{j} + 8\,\vec{k}\right)\text{ m} = \mathbf{9\,\vec{i} + 42\,\vec{k}\ m}$$

ACTIVIDAD (página 191)

9. **La velocidad media de los trenes de la línea 1 del metro de Madrid es de 21,4 km/h y su longitud se recorre en 55 min 30 s. ¿Cuál es su longitud?**

Pasamos la velocidad y el tiempo a unidades del SI:

$$21{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot\frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}}\cdot\frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}} = 5{,}9\widehat{4}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$55\text{ min}\cdot\frac{60\text{ s}}{1\text{ min}} + 30\text{ s} = 3330\text{ s}$$

Despejando de la definición de la velocidad media, sustituimos y calculamos:

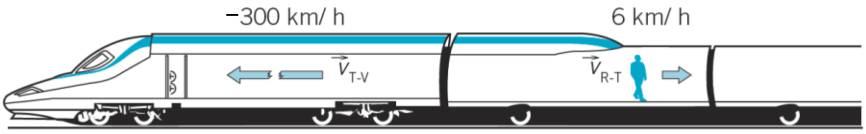
$$v_\text{m} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta s = v_\text{m}\cdot\Delta t = 5{,}9\widehat{4}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 3330\text{ s} = 19795\text{ m} = \mathbf{19{,}8\,km}$$

ACTIVIDAD (página 193)

10. El AVE circula a 300 km/h y el revisor se mueve por el pasillo a 6 km/h hacia la cola del tren.

a) ¿Hacia dónde se mueve el revisor, hacia la derecha o hacia la izquierda?

b) ¿Cuál es su velocidad para un observador fuera del tren?



El término «velocidad» solo tiene sentido con respecto a un determinado sistema de referencia. En nuestro caso, la velocidad del revisor respecto del tren es $\vec{v}_{R\text{-}T}$, de módulo $v_{R\text{-}T} = 6$ km/h.

La velocidad del tren respecto a las vías es $\vec{v}_{T\text{-}V}$, de módulo $v_{T\text{-}V} = 300$ km/h.

Para un observador externo al tren y ligado a las vías, la velocidad del revisor será:

$$\vec{v}_{R\text{-}V} = \vec{v}_{T\text{-}V} - \vec{v}_{R\text{-}T}$$

Suponiendo que el movimiento es rectilíneo, solo necesitamos una coordenada (x) y, según la figura:

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}_{R\text{-}T} &= +6\ \vec{i}\ \text{km/h}\\ \vec{v}_{T\text{-}V} &= -300\ \vec{i}\ \text{km/h}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \vec{v}_{R\text{-}V} = -300\ \vec{i}\ \text{km/h} - (+6\ \vec{i}\ \text{km/h}) = \mathbf{-294\ \vec{i}\ km/h}$$

Esto significa que, visto desde el exterior del tren, el revisor se mueve en el mismo sentido que el tren, pero a 294 km/h.

Según las ilustraciones y el sistema de referencia elegido:

a) El revisor se mueve hacia la **izquierda**.

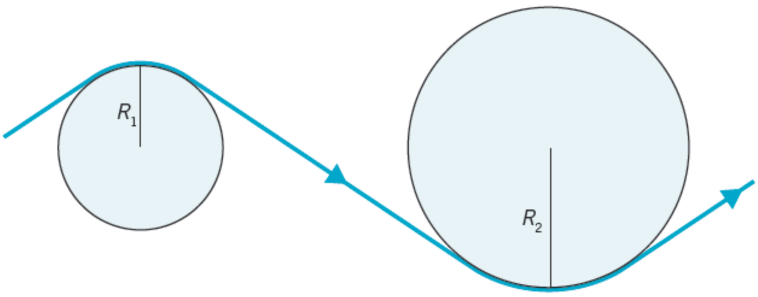
b) $\mathbf{-294\ \vec{i}\ km/h}$.

ACTIVIDADES (página 196)

11. Imagina que te llevan en coche por una curva con forma de arco de circunferencia con velocidad constante. Como te han vendado los ojos y tapado los oídos, solo puedes notar que te estás moviendo porque hay aceleración (si el movimiento fuese uniforme y en línea recta, no te darías cuenta).

a) ¿De qué factores depende que notes más o menos que el coche está tomando una curva? O, dicho de otra manera, ¿de qué depende la aceleración normal de este movimiento circular uniforme?

b) ¿Qué magnitudes físicas relacionadas con la trayectoria y la forma de recorrerla influyen en que se note más el cambio de dirección?



La curva «se notará más» a igualdad de otros factores cuanto más cerrada sea, lo que se mide mediante el parámetro «radio de curvatura», R. Cuanto mayor sea R más abierta es la curva y menos se nota.

Por otro lado, si el radio de curvatura es el mismo, la curva se notará más cuanto más rápido se tome.
En resumen:

La curva "se nota más" (el cambio de dirección) $\begin{cases} \text{Cuanto mayor sea } v \\ \text{Cuanto menor sea } R \end{cases}$

12. ¿Qué factor influye más en a_N, la velocidad o el radio de la curva? Supón que decides duplicar tu velocidad en una curva (de v a $2 \cdot v$) y, para compensar, pides al Ministerio de Fomento que haga la curva más abierta, duplicando también su radio (de R a $2 \cdot R$).

a) Calcula la expresión del módulo de la aceleración normal antes y después de duplicar la velocidad.

b) Halla los valores numéricos de a_N para una curva de 20 m de radio tomada a 60 km/h.

c) Averigua el valor de a_N para otra curva de 40 m de radio que se toma a una velocidad de 120 km/h. Compara los resultados con los obtenidos en el apartado anterior.

a) Como la aceleración normal tiene módulo $a_N = \frac{v^2}{R}$, al duplicar la velocidad se transforma en

$a'_N = \frac{(2 \cdot v)^2}{R} = 4 \cdot \frac{v^2}{R} = 4 \cdot a_N$, es decir, es cuatro (y no dos) veces mayor.

Sin embargo, al duplicar el radio:

$$a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a''_N = \frac{v^2}{2 \cdot R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{R} = \frac{1}{2} \cdot a_N$$

la aceleración normal solo se divide por dos.

En resumen, si duplicamos simultáneamente la velocidad y el radio de la curva, la aceleración normal aún sería el doble de la inicial.

$$a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a'''_N = \frac{(2 \cdot v)^2}{2 \cdot R} = 2 \cdot \frac{v^2}{R} = \mathbf{2 \cdot a_N}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} v = 60 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}} = 16,\widehat{6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ R = 20 \text{ m} \end{array}\right\} \Rightarrow a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(16,\widehat{6} \text{ m/s})^2}{20 \text{ m}} = \mathbf{13,\widehat{8} \frac{m}{s^2}}$$

c) Teniendo en cuenta el razonamiento del apartado a), y el resultado del apartado b):

Si duplicamos simultáneamente la velocidad y el radio de la curva, la aceleración normal aún sería el doble de la inicial.

$$a'''_N = 2 \cdot a_N = 2 \cdot 13,\widehat{8} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \mathbf{27,\widehat{7} \frac{m}{s^2}}$$

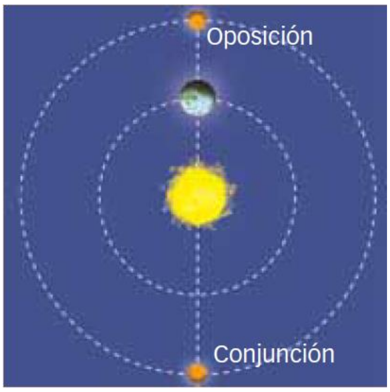
ACTIVIDAD (página 198)

13. El Sol, la Tierra y Marte pueden estar alineados. Si la Tierra está entre Marte y el Sol se llama oposición. Si el Sol está entre Marte y la Tierra se llama conjunción. Calcula el módulo de la aceleración relativa de Marte para un observador en la Tierra:

a) En oposición.

b) En conjunción.

Datos: periodos de traslación: $T_{Marte} = 687$ días, $T_{Tierra} = 365,25$ días; radios orbitales: $r_{Marte} = 2,3 \cdot 10^8$ km, $r_{Tierra} = 1,5 \cdot 10^8$ km.



Pasamos los datos a unidades del sistema internacional:

$$T_{\text{Tierra}} = 365{,}25\ \cancel{\text{día}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 3{,}16 \cdot 10^7\ \text{s}\ ;\ T_{\text{Marte}} = 687\ \cancel{\text{día}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 5{,}94 \cdot 10^7\ \text{s}$$

$$r_{\text{Tierra}} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m}\ ;\ r_{\text{Marte}} = 2{,}3 \cdot 10^{11}\ \text{m}$$

Estamos trabajando en un sistema de referencia no inercial, por tanto:

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_{\text{obj}} - \vec{a}_{\text{sis}}$$

a) En oposición, figura 13.1. En este caso, calculamos la aceleración relativa de Marte (objeto) para un observador que está en la Tierra (sistema).

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_{\text{Marte}} - \vec{a}_{\text{Tierra}}$$

Como todas las aceleraciones son centrípetas:

$$a_{\text{N}} = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(\dfrac{2\pi \cdot R}{T}\right)^2}{R} = \frac{4\pi^2 \cdot R}{T^2}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_{\text{Tierra}} = \dfrac{4\pi^2 \cdot r_{\text{Tierra}}}{T^2_{\text{Tierra}}}\,\vec{i} = \dfrac{4\pi^2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m}}{\left(3{,}16 \cdot 10^7\ \text{s}\right)^2}\,\vec{i} = 5{,}93 \cdot 10^{-3}\ \vec{i}\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ \vec{a}_{\text{Marte}} = \dfrac{4\pi^2 \cdot r_{\text{Marte}}}{T^2_{\text{Marte}}}\,\vec{i} = \dfrac{4\pi^2 \cdot 2{,}3 \cdot 10^{11}\ \text{m}}{\left(5{,}94 \cdot 10^7\ \text{s}\right)^2}\,\vec{i} = 2{,}57 \cdot 10^{-3}\ \vec{i}\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

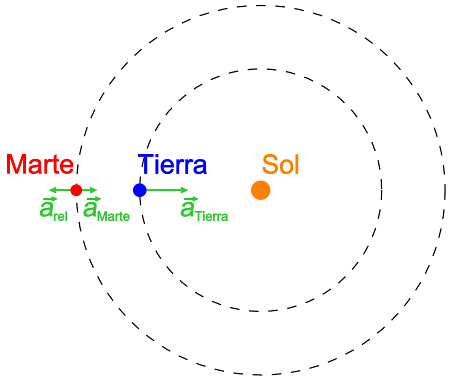


Figura 13.1. Marte en oposición.

Sustituimos:

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_{\text{Marte}} - \vec{a}_{\text{Tierra}} = 2{,}57 \cdot 10^{-3}\ \vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 5{,}93 \cdot 10^{-3}\ \vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -3{,}36 \cdot 10^{-3}\ \vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

El resultado significa, como puede verse en la figura 13.1, que un observador en la Tierra vería la trayectoria de Marte con el centro dirigido hacia el lado contrario de donde está el Sol. (Esto sin tener en cuenta la rotación de la Tierra sobre su eje). El módulo del vector:

$$\left|\vec{a}_{\text{rel}}\right| = \mathbf{3{,}36 \cdot 10^{-3}\ \dfrac{m}{s^2}}$$

b) En conjunción, figura 13.2. Los módulos de las aceleraciones no varían, solo tenemos que tener en cuenta el cambio de signo. En este caso: $\vec{a}_{\text{Tierra}} = 5{,}93 \cdot 10^{-3}\ \vec{i}\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$; y,

$$\vec{a}_{\text{Marte}} = -2{,}57 \cdot 10^{-3}\ \vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Sustituimos:

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_{\text{Marte}} - \vec{a}_{\text{Tierra}}$$

$$\vec{a}_{\text{rel}} = -2{,}57 \cdot 10^{-3}\ \vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 5{,}93 \cdot 10^{-3}\ \vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -8{,}52 \cdot 10^{-3}\ \vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

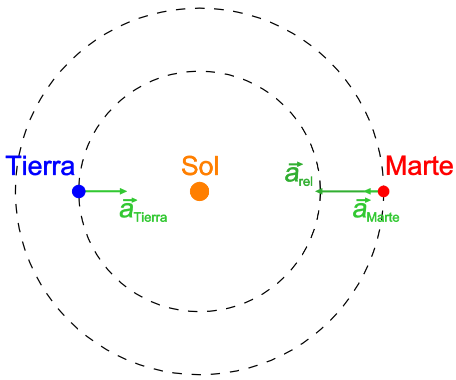


Figura 13.2. Marte en conjunción.

El resultado significa, como puede verse en la figura 13.2, que un observador en la Tierra vería la trayectoria de Marte con el centro dirigido hacia el mismo lado de donde está el Sol. (Esto sin tener en cuenta la rotación de la Tierra sobre su eje). El módulo del vector:

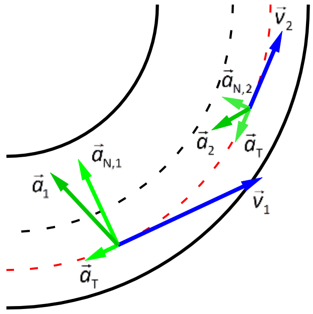
$$\left|\vec{a}_{\text{rel}}\right| = \mathbf{8{,}52 \cdot 10^{-3}\ \dfrac{m}{s^2}}$$

Nota: El problema podría haber sido resuelto también en cualquier eje.

ACTIVIDADES (página 199)

14. Adapta el dibujo del apartado 4.2, del cuadro «Aceleración en distintas situaciones», punto D, al caso en que se toma la misma curva, pero frenando.

Si la curva se toma frenando, el módulo de la velocidad disminuye. El móvil toma la curva variando la dirección del vector velocidad.



15. Clasifica estos movimientos usando las categorías anteriores:

a) Una estudiante da siete vueltas a ritmo constante a una pista de atletismo.

b) Otro estudiante corre una carrera de 100 m.

c) Un satélite artificial gira alrededor de la Tierra en una órbita perfectamente circular a velocidad constante, dando una vuelta completa cada 11 horas.

d) Un trabajador va todos los días (laborables) a trabajar en tren, recorriendo 35 km en 30 minutos.

e) Un autobús recorre un tramo recto de autopista a una velocidad de 90 km/h.

f) Movimiento de un punto del tambor de una lavadora cuando esta comienza a centrifugar.

a) La estudiante encontrará tramos con Movimiento Rectilíneo Uniforme ($a_T = 0$; $a_N = 0$), y otros tramos con Movimiento circular uniforme ($a_T = 0$; $a_N =$ constante $\neq 0$).

b) Movimiento rectilíneo no uniforme ($a_T \neq 0$; $a_N = 0$).

c) Movimiento circular uniforme ($a_T = 0$; $a_N =$ constante $\neq 0$).

d) Cabe suponer que se trata de un movimiento general curvilíneo y no uniforme ($a_T \neq 0$; $a_N \neq 0$).

e) Movimiento rectilíneo uniforme ($a_T = 0$; $a_N = 0$).

f) Movimiento circular uniformemente Acelerado ($a_T =$ constante $\neq 0$; $a_N \neq 0$).

ACTIVIDADES FINALES (página 202)

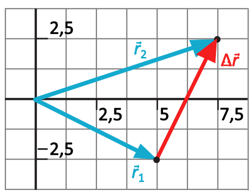
Posición

16. Describe un viaje en coche, o en tren, con una tabla de distancias en kilómetros y los tiempos de paso por cada posición. Especifica debidamente el origen del sistema de referencia de tu descripción.

Respuesta modelo.

Supongamos que viajamos en coche. Podemos tomar como origen el punto de salida y poner el contador de kilómetros a cero. Además, deberíamos anotar la hora que marca el reloj del coche justo en el instante que abandonamos el aparcamiento. Después, con cierta frecuencia, anotar en una libreta la hora que marca el reloj y los kilómetros que indica el contador.

17. Los vectores posición de un móvil en dos instantes dados, t_1 y t_2, son $\vec{r}_1 = 5{,}25\,\vec{i} - 2{,}5\,\vec{j}$ m y $\vec{r}_2 = 7{,}5\,\vec{i} + 2{,}5\,\vec{j}$ m, respectivamente. Represente en tu cuaderno los vectores posición dados, calcula el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y su módulo.



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (7{,}5\,\vec{i} + 2{,}5\,\vec{j})\text{ m} - (5{,}25\,\vec{i} - 2{,}5\,\vec{j})\text{ m} = \mathbf{2{,}25\,\vec{i} + 5\,\vec{j}\text{ m}}$$

$$|\Delta\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(2{,}25)^2 + (5)^2}\text{ m} = \sqrt{30{,}0625}\text{ m} \simeq \mathbf{5{,}48\text{ m}}$$

18. **Una estrella está situada en $\vec{r}_E = (6\,\vec{i} - 5\,\vec{j} + \vec{k}) \cdot 10^{10}$ m, y un planeta en $\vec{r}_P = (-\,\vec{i} + 8\,\vec{j} - 3\,\vec{k}) \cdot 10^{10}$ m, respecto a un cierto sistema de referencia.**

a) ¿Cuál es el vector $\vec{r}_{EP}$ que va de la estrella al planeta? ¿Cuánto vale su módulo? ¿Qué significado físico tiene?

b) ¿Cuál es el vector $\vec{r}_{PE}$ que va del planeta a la estrella?

a) Escribimos los vectores de posición de E y P:

$$\vec{r}_E = (6\,\vec{i} - 5\,\vec{j} + \vec{k}) \cdot 10^{10}\ \text{m};\ \text{y}\ \vec{r}_P = (-\,\vec{i} + 8\,\vec{j} - 3\,\vec{k}) \cdot 10^{10}\ \text{m}$$

El vector que va de la estrella al planeta es $\vec{r}_{EP}$. Este es el vector de posición del planeta en un sistema de referencia con origen en la estrella. Calculamos:

$$\vec{r}_{EP} = \vec{r}_P - \vec{r}_E = (-\,\vec{i} + 8\,\vec{j} - 3\,\vec{k}) \cdot 10^{10}\ \text{m} - (6\,\vec{i} - 5\,\vec{j} + \vec{k}) \cdot 10^{10}\ \text{m} = \mathbf{(-7\,\vec{i} + 13\,\vec{j} - 4\,\vec{k}) \cdot 10^{10}\ m}$$

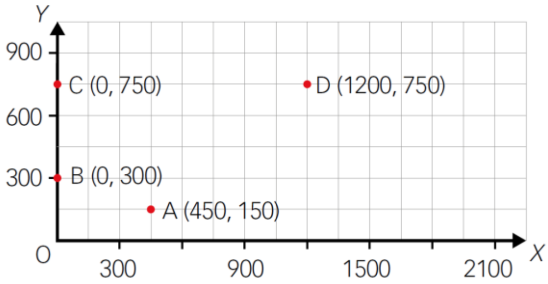
Calculamos su módulo. El módulo del vector, $|\vec{r}_{EP}|$, representa la distancia entre la estrella y el planeta:

$$|\vec{r}_{EP}| = \sqrt{\left(-7 \cdot 10^{10}\right)^2 + \left(13 \cdot 10^{10}\right)^2 + \left(-4 \cdot 10^{10}\right)^2}\ \text{m} = \sqrt{2{,}34 \cdot 10^{22}}\ \text{m} \simeq \mathbf{1{,}53 \cdot 10^{11}\ m}$$

b) El vector que va del planeta a la estrella:

$$\vec{r}_{PE} = \vec{r}_E - \vec{r}_P = -\left(\vec{r}_P - \vec{r}_E\right) = -\vec{r}_{EP} = \mathbf{(7\,\vec{i} - 13\,\vec{j} + 4\,\vec{k}) \cdot 10^{10}\ m}$$

19. **Calcula el vector desplazamiento y su módulo para cada uno de los tramos del recorrido de un vehículo teledirigido que realiza el desplazamiento entre los puntos A, B, C y D de la figura, en ese orden. Las distancias en metros.**



- Desplazamiento AB:

$$\Delta\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (300\,\vec{j})\ \text{m} - (450\,\vec{i} + 150\,\vec{j})\ \text{m} = \mathbf{-450\,\vec{i} + 150\,\vec{j}\ m}$$

$$|\Delta\vec{r}_{AB}| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A| = \sqrt{(-450)^2 + (150)^2}\ \text{m} = \sqrt{225000}\ \text{m} \simeq \mathbf{474{,}3\ m}$$

- Desplazamiento BC:

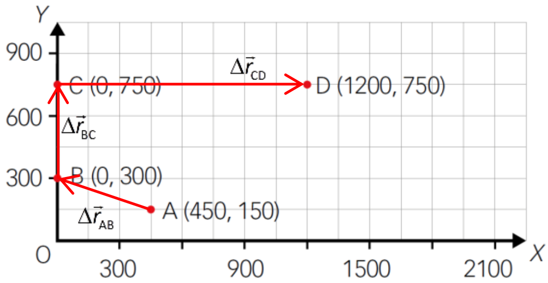
$$\Delta\vec{r}_{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = (750\,\vec{j})\ \text{m} - (300\,\vec{j})\ \text{m} = \mathbf{450\,\vec{j}\ m}$$

$$|\Delta\vec{r}_{BC}| = |\vec{r}_C - \vec{r}_B| = \sqrt{(450)^2}\ \text{m} = \mathbf{450\ m}$$

- Desplazamiento CD:

$$\Delta\vec{r}_{CD} = \vec{r}_D - \vec{r}_C = (1200\,\vec{i} + 750\,\vec{j})\ \text{m} - (750\,\vec{j})\ \text{m} = \mathbf{1200\,\vec{i}\ m}$$

$$|\Delta\vec{r}_{CD}| = |\vec{r}_D - \vec{r}_C| = \sqrt{(1200)^2}\ \text{m} = \mathbf{1200\ m}$$



Velocidad

20. **¿Bajo qué condiciones la velocidad media es igual a la velocidad instantánea?**

La velocidad media solo puede ser igual a la instantánea en los movimientos uniformes, es decir, con módulo de la velocidad constante: v = constante.

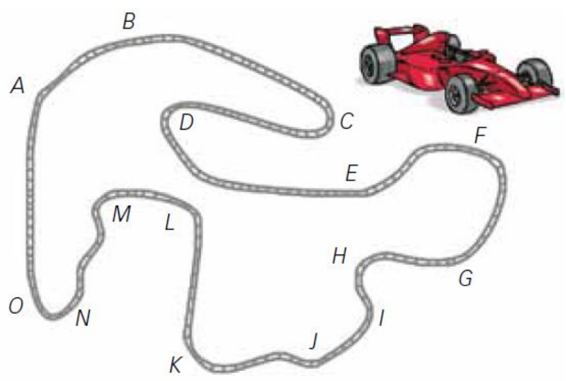
21. **Observa la figura y contesta.**

a) ¿Qué lugares de la trayectoria de la figura son imposibles de recorrer sin aceleración?

b) ¿En qué lugares es posible el movimiento uniforme?

c) ¿Dónde puede haber movimiento sin ningún tipo de aceleración?

d) Dibuja un posible vector velocidad en cinco puntos.

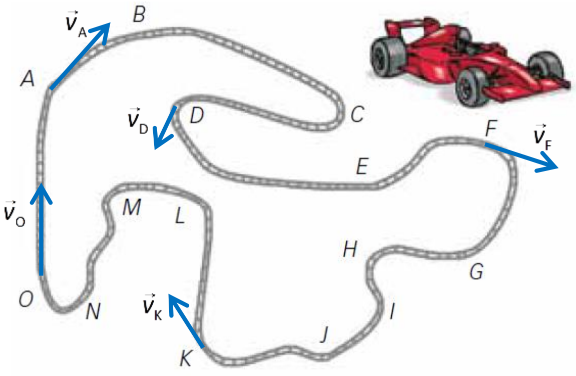


a) Todos los tramos que no sean rectilíneos, y aparentemente ninguno de los marcados es rectilíneo.

b) Un movimiento uniforme es posible en cualquier punto de la trayectoria; la forma de la trayectoria no condiciona, en principio, el módulo de la velocidad.

c) Solo en las rectas.

d) Respuesta libre. Proponemos una solución con cinco vectores velocidad.



22. **¿Cómo es el vector velocidad media para una vuelta completa de cualquier trayectoria cerrada? ¿Depende del sistema de referencia? ¿Dice el primer resultado algo sobre el valor de la velocidad media?**

Según la definición del vector velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{\text{final}} - \vec{r}_{\text{inicial}}}{\Delta t}$$

En cualquier vuelta completa la posición final coincide con la posición inicial: $\vec{r}_{\text{final}} = \vec{r}_{\text{inicial}}$. Por tanto, $\vec{v}_m = 0$.

Esto es cierto para cualquier sistema de referencia.

Del primer resultado no podemos deducir nada sobre el valor de la velocidad media. Sin embargo, según la definición de velocidad media, se deduce que la velocidad media no puede ser nula, ya que la longitud de la trayectoria no es nula.

23. **¿Cómo se mueve un cuerpo si la velocidad media y la instantánea son iguales en todo momento?**

Si la velocidad media es igual que la instantánea en todo momento, el movimiento tiene que ser uniforme, de otro modo no hay garantía de que coincidan. No hay ningún motivo para que un cambio arbitrario en la velocidad instantánea se refleje en el mismo cambio en la velocidad media para un intervalo cualquiera.

Nota: Así como en un instante hay una única velocidad instantánea, la velocidad media depende del intervalo en el que se defina.

24. **¿Serviría de algo hablar de las componentes tangencial y normal de la velocidad?**

El vector velocidad se define de modo que sea tangente a la trayectoria. La velocidad es un vector puramente tangencial por tanto, la componente normal siempre sería nula. De ahí que no tenga sentido hacer distinción entre la componente normal y tangencial de la velocidad.

25. **Alicia dice que ha visto moverse un avión en línea recta a 980 km/h. Benito, por su parte, sostiene que el avión estaba inmóvil. ¿Es posible que se refieran al mismo avión? ¿Cómo?**

Por supuesto, la velocidad es un concepto relativo, que depende del sistema de referencia utilizado.

Alicia está usando un sistema de referencia ligado al suelo, por ejemplo, mientras Benito prefiere emplear otro ligado al avión (y, claro, la velocidad del avión respecto de sí mismo es cero).

Eso puede parecer absurdo en la vida cotidiana, pero no en Física, donde la libertad y conveniencia de elegir diferentes sistemas es muy importante.

26. **El ganador de una carrera ciclista recorre los últimos 10 m en 0,72 s.**

a) ¿Cuál es su velocidad media en ese tramo?

b) Exprésala en las unidades más comunes, km/h.

a) $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10\text{ m}}{0{,}72\text{ s}} = \mathbf{13{,}\widehat{8}\,\frac{m}{s}}$

b) $13{,}\widehat{8}\,\frac{\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{s}}} \cdot \frac{1\text{ km}}{1000\,\cancel{\text{m}}} \cdot \frac{3600\,\cancel{\text{s}}}{1\text{ h}} = \mathbf{50\,\frac{km}{h}}$

27. Un acantilado nos devuelve eco retardando nuestra voz en 0,4 s. Sabiendo que la velocidad del sonido es de 340 m/s, ¿a qué distancia está el acantilado?

Despejamos el espacio recorrido de la expresión de la velocidad media:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta s = v_m \cdot \Delta t = 340\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}4\ \text{s} = 136\ \text{m}$$

Como el espacio recorrido es de ida y vuelta, la distancia a la que se encuentra el acantilado será:

$$\Delta s = 2 \cdot d \Rightarrow d = \frac{\Delta s}{2} = \frac{136\ \text{m}}{2} = \mathbf{68\ m}$$

28. Se suele elegir la superficie de la Tierra como sistema de referencia fijo respecto al que medir, pero ¿está realmente quieta la Tierra?

a) Calcula la velocidad con que se mueve un punto del ecuador en su giro alrededor del eje.

b) Calcula la velocidad de traslación de la Tierra alrededor del Sol, sabiendo que un rayo de luz desde el Sol a la Tierra tarda aproximadamente 8 minutos y 19 segundos.

c) ¿Cómo es posible que vayamos a esa velocidad sin enterarnos?

Datos: Radio ecuatorial de la Tierra: 6378 km; v_{luz} = 299 792 km/s; 1 año = 365,25 días; 1 día = 24 h.

a) La Tierra hace un giro completo sobre sí misma en un día (esa es la definición de «día»).

La circunferencia de la Tierra en el ecuador es:

$$\Delta s = L = 2\pi \cdot R_{\text{ecuatorial}} = 2\pi \cdot 6378\ \text{km} = 40\ 074\ \text{km}$$

Y la velocidad (lineal) de giro $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{L}{1\ \text{día}}$:

$$v_{rot} = \frac{40074\ \text{km}}{2\ \text{h}} = \mathbf{1670\ \frac{km}{h}} = 464\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) La Tierra da una vuelta completa alrededor del Sol en un año (esa es, justamente, la definición).

Suponiendo que la órbita fuera circular (solo lo es aproximadamente), tomemos como radio 8 minutos-luz, es decir, el espacio que recorre la luz en 8 minutos a velocidad *c*:

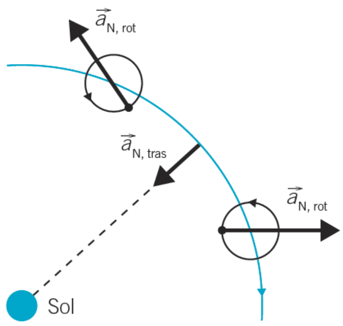
$$R = c \cdot t = 299792\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot \left(8\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} + 19\ \text{s}\right) = 149\,600\,000\ \text{km}$$

Y la velocidad de traslación de la Tierra es:

$$v_{trasl} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot R_{\text{órbita}}}{1\ \text{año}} = \frac{2\pi \cdot 149\,600\,000\ \text{km}}{365{,}25\ \cancel{\text{días}} \cdot 24\ \frac{\text{h}}{\cancel{\text{día}}}} = \mathbf{1{,}07 \cdot 10^5\ \frac{km}{h}} = 29{,}8\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

c) Es decir, lejos de estar «inmóviles», tenemos un complicadísimo movimiento en el que se mezclan una rotación a 462 m/s con una traslación a 29 800 m/s y aun otros movimientos en la galaxia…

¿Por qué no los notamos? En realidad, nunca notamos la velocidad por sí misma (¿respecto a qué?), sino la aceleración. Calculemos las aceleraciones correspondientes a esos dos movimientos circulares:



$$a_{N,rot} = \frac{v_{rot}^2}{R_{\text{ecuatorial}}} = \frac{\left(464\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{6\,378\,000\ \text{m}} = 0{,}0338\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{N,trasl.} = \frac{v_{trasl}^2}{R_{\text{órbita}}} = \frac{\left(29\,800\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{149\,600\,000\,000\ \text{m}} = 0{,}0059\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Tanto estas dos como otras que no hemos tenido en cuenta son muy pequeñas y no tienen por qué sumarse sus módulos (para ello habrían de coincidir direcciones y sentidos).

29. Para el mismo vehículo teledirigido del ejercicio 19:

a) Calcula el vector velocidad media y su módulo para cada tramo, sabiendo que los tiempos empleados en recorrer cada tramo son: de A a B 15 min, de B a C 40 min, y de C a D 28 min.

b) Calcula la velocidad y el vector velocidad media totales.

Recordamos los resultados que obtuvimos en el ejercicio 19:

$$\Delta\vec{r}_{AB} = -450\,\vec{i} + 150\,\vec{j}\text{ m} ; |\Delta\vec{r}_{AB}| \simeq 474{,}3\text{ m}$$
$$\Delta\vec{r}_{BC} = 450\,\vec{j}\text{ m} ;\ |\Delta\vec{r}_{BC}| = 450\text{ m}$$
$$\Delta\vec{r}_{CD} = 1200\,\vec{i}\text{ m} ;\ |\Delta\vec{r}_{CD}| = 1200\text{ m}$$

Convertimos cada intervalo de tiempo a unidades del SI:

$$\Delta t_{AB} = 15\text{ min}\cdot\frac{60\text{ s}}{1\text{ min}} = 900\text{ s}$$
$$\Delta t_{BC} = 45\text{ min}\cdot\frac{60\text{ s}}{1\text{ min}} = 2400\text{ s}$$
$$\Delta t_{CD} = 28\text{ min}\cdot\frac{60\text{ s}}{1\text{ min}} = 1680\text{ s}$$

a) Calculamos el vector velocidad media y su módulo para cada tramo:

- $$\vec{v}_{AB} = \frac{\Delta\vec{r}_{AB}}{\Delta t_{AB}} = \frac{-450\,\vec{i} + 150\,\vec{j}\text{ m}}{900\text{ s}} = \mathbf{-0{,}5\,\vec{i} + 0{,}1\hat{6}\,\vec{j}\ \frac{m}{s}}$$

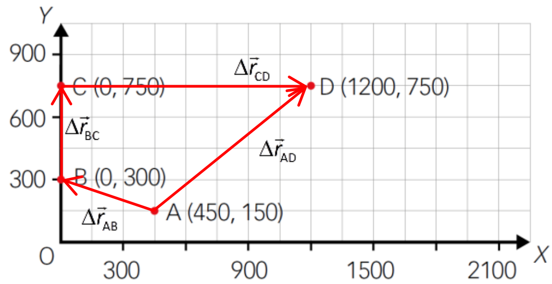
  $$|\vec{v}_{AB}| = \frac{|\Delta\vec{r}_{AB}|}{\Delta t_{AB}} = \frac{474{,}3\text{ m}}{900\text{ s}} = \mathbf{0{,}527\ \frac{m}{s}}$$

- $$\vec{v}_{BC} = \frac{\Delta\vec{r}_{BC}}{\Delta t_{BC}} = \frac{450\,\vec{j}\text{ m}}{2400\text{ s}} = \mathbf{0{,}1875\,\vec{j}\ \frac{m}{s}}$$

  $$|\vec{v}_{BC}| = \frac{|\Delta\vec{r}_{BC}|}{\Delta t_{BC}} = \frac{450\text{ m}}{2400\text{ s}} = \mathbf{0{,}1875\ \frac{m}{s}}$$

- $$\vec{v}_{CD} = \frac{\Delta\vec{r}_{CD}}{\Delta t_{CD}} = \frac{1200\,\vec{i}\text{ m}}{1680\text{ s}} = \mathbf{0{,}7143\,\vec{i}\ \frac{m}{s}}$$

  $$|\vec{v}_{CD}| = \frac{|\Delta\vec{r}_{CD}|}{\Delta t_{CD}} = \frac{1200\text{ m}}{1680\text{ s}} = \mathbf{0{,}7143\ \frac{m}{s}}$$



b) Calculamos el vector velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}_{AD}}{\Delta t_{total}} = \frac{\vec{r}_D - \vec{r}_A}{\Delta t_{AB} + \Delta t_{BC} + \Delta t_{CD}} = \frac{\left(1200\,\vec{i} + 750\,\vec{j}\right)\text{ m} - \left(450\,\vec{i} + 150\,\vec{j}\right)\text{ m}}{\left(900 + 2400 + 1680\right)\text{ s}} = \left(\mathbf{0{,}15\,\vec{i} + 0{,}12\,\vec{j}}\right)\mathbf{\frac{m}{s}}$$

Calculamos la velocidad media:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t_{Total}} = \frac{|\Delta\vec{r}_{AB}| + |\Delta\vec{r}_{BC}| + |\Delta\vec{r}_{CD}|}{\Delta t_{AB} + \Delta t_{BC} + \Delta t_{CD}} = \frac{\left(474{,}3 + 450 + 1200\right)\text{ m}}{\left(900 + 2400 + 1680\right)\text{ s}} = \mathbf{0{,}427\ \frac{m}{s}}$$

Nota: Observa que si calculas el módulo del vector velocidad media:

$$|\vec{v}_m| = \sqrt{(0{,}15)^2 + (0{,}12)^2}\ \frac{m}{s} = 0{,}193\ \frac{m}{s}$$

No coincide con la velocidad media, $v_m = 0{,}427$ m/s, ya que Δs es la longitud de la trayectoria realizada; mientras que $|\Delta\vec{r}_{AD}|$ es la distancia en línea recta entre los puntos inicial y final.

30. Tras el lanzamiento de una falta, la posición de un balón medida desde el punto en el que se le golpea cambia desde $5\,\vec{i}+2\,\vec{j}+3\,\vec{k}$ m hasta $5{,}3\,\vec{i}+1{,}8\,\vec{j}+3{,}1\,\vec{k}$ m en un intervalo de tiempo $\Delta t = 0{,}02$ s. Escribe el vector velocidad del balón durante ese intervalo y calcula su módulo.

El vector velocidad media, o simplemente el vector velocidad, ya que la variación de tiempo es muy pequeña:

$$\Delta t = 0{,}02 \text{ s}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{\text{final}} - \vec{r}_{\text{inicial}}}{\Delta t} = \frac{\left(5{,}3\,\vec{i}+1{,}8\,\vec{j}+3{,}1\,\vec{k}\right)\text{ m} - \left(5\,\vec{i}+2\,\vec{j}+3\,\vec{k}\right)\text{ m}}{0{,}02 \text{ s}} = \mathbf{15\,\vec{i} - 10\,\vec{j} + 5\,\vec{k}\,\frac{m}{s}}$$

Su módulo:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + (5)^2} \text{ m/s} = \sqrt{350} \text{ m/s} = 18{,}7 \text{ m/s} \simeq \mathbf{67\,km/h}$$

31. Un protón viaja con una velocidad $(3\,\vec{i}+2\,\vec{j}-4\,\vec{k})\cdot 10^5$ m/s y pasa por el origen de coordenadas en $t = 9{,}0$ s.

a) ¿Cuál es el módulo de la velocidad en el origen?

b) ¿Qué valor podemos dar para su posición en $t = 9{,}7$ s?

c) ¿Has tenido que hacer alguna suposición para calcular la posición?

Para $t = 9{,}0$ s; $\vec{r} = 0\,\vec{i}+0\,\vec{j}+0\,\vec{k}$ m ; $\vec{v} = \left(3\,\vec{i}+2\,\vec{j}-4\,\vec{k}\right)\cdot 10^5$ m/s .

a) El módulo de la velocidad en el origen:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(3\cdot 10^5\right)^2 + \left(2\cdot 10^5\right)^2 + \left(-4\cdot 10^5\right)^2} \text{ m/s} = \sqrt{29\cdot 10^{10}} \text{ m/s} = \mathbf{5{,}39\cdot 10^5\,m/s}$$

b) Para poder calcular su posición a los 9,7 s, es decir, 0,7 s más tarde, vamos a suponer que la velocidad es constante (o al menos que «varía muy poco» en ese intervalo de tiempo).

$$\vec{v} = \vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta \vec{r} = \vec{v}\cdot\Delta t = \left[\left(3\,\vec{i}+2\,\vec{j}-4\,\vec{k}\right)\cdot 10^5 \text{ m/s}\right]\cdot(9{,}7 \text{ s} - 9 \text{ s})$$

$$\Delta \vec{r} = \left(2{,}1\,\vec{i}+1{,}4\,\vec{j}-2{,}8\,\vec{k}\right)\cdot 10^5 \text{ m}$$

Como $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t_{\text{fin.}}) - \vec{r}\,(t_{\text{ini.}}) \Rightarrow \vec{r}\,(t_{\text{fin.}}) = \Delta\vec{r} + \vec{r}\,(t_{\text{ini.}})$. Por tanto:

$$\vec{r}(t_{\text{fin.}}) = \Delta\vec{r} + \vec{r}(t_{\text{ini.}}) = \Delta\vec{r} + \vec{r}(9{,}0\text{ s}) = \left(2{,}1\,\vec{i}+1{,}4\,\vec{j}-2{,}8\,\vec{k}\right)\cdot 10^5 \text{ m} + \left(0\,\vec{i}+0\,\vec{j}+0\,\vec{k}\right) \text{ m}$$

$$\vec{r}(t_{\text{fin.}}) = \mathbf{\left(2{,}1\,\vec{i}+1{,}4\,\vec{j}-2{,}8\,\vec{k}\right)\cdot 10^5\,m}$$

Como la posición del protón a los 9 s es cero, la posición de este a los 9,7 s coincide con el desplazamiento.

c) Hemos tenido que hacer una suposición con respecto a su movimiento. Hemos supuesto que el protón se desplazaba con una velocidad constante.

32. Calcula la velocidad en el instante $t = 2$ s de un móvil cuyo vector posición es $\vec{r}(t) = \left(4\cdot t - 4\cdot t^2\right)\,\vec{i}$ m .

Partimos del vector de posición:

$$\vec{r}(t) = \left(4\cdot t - 4\cdot t^2\right)\,\vec{i}\text{ m}$$

Queremos calcular la velocidad en el instante $t = 2$ s. Partimos de la definición de velocidad:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Sustituimos y calculamos:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[4\cdot(t+\Delta t) - 4\cdot(t+\Delta t)^2\right]\vec{i} - \left(4\cdot t - 4\cdot t^2\right)\vec{i}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[4\cdot t + 4\cdot\Delta t - 4\left(t^2 + 2\cdot t\cdot\Delta t + (\Delta t)^2\right) - 4\cdot t + 4\cdot t^2\right]\vec{i}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[4\cdot\Delta t-4\cdot t^2-8\cdot t\cdot\Delta t-4\cdot(\Delta t)^2+4\cdot t^2\right]\ \vec{i}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[4\cdot\Delta t-8\cdot t\cdot\Delta t-4\cdot(\Delta t)^2\right]\ \vec{i}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(4-8\cdot t-4\cdot\Delta t)\cdot\Delta t\ \vec{i}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}(4-8\cdot t-4\cdot\Delta t)\ \vec{i}=(4-8\cdot t-4\cdot 0)\ \vec{i}=(4-8\cdot t)\ \vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Para $t=2$ s:

$$\vec{v}(t=2)=(4-8\cdot 2)\ \vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}=\mathbf{-12\ \vec{i}\ \frac{m}{s}}$$

33. El vector de posición de un cuerpo viene dado por la expresión:

$$\vec{r}(t)=t\ \vec{i}+(t^2+1)\ \vec{j}\ \text{m}$$

con *t* en segundos y *r* en metros.

a) ¿En qué región del espacio se mueve, en un plano, en una recta?

b) Calcula la posición en $t=2$ s y en $t=2{,}5$ s.

c) Deduce la ecuación de la trayectoria.

d) Calcula el vector velocidad media entre ambos instantes.

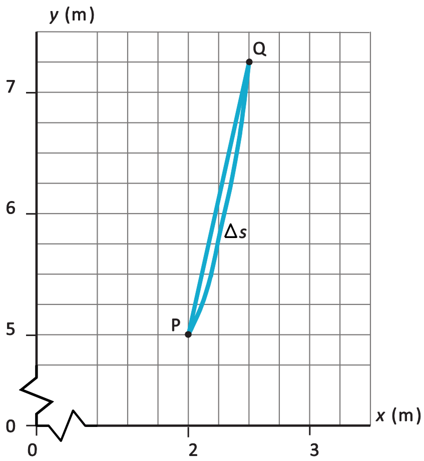
a) El movimiento es **en un plano**, pues una de las tres componentes tiene un valor constante, en concreto la tercera componente es nula. Si $z=0$ en cualquier instante el movimiento se da en el plano *x*-*y*.

A partir de ahora nos basta trabajar con el vector bidimensional:

$$\vec{r}(t)=t\ \vec{i}+(t^2+1)\ \vec{j}\ \text{m en unidades del SI.}$$

b) $\vec{r}(t=2\ \text{s})=\left[2\ \vec{i}+(2^2+1)\ \vec{j}\right]\ \text{m}=\mathbf{(2\ \vec{i}+5\ \vec{j})\ m}$ (P)

$\vec{r}(t=2{,}5\ \text{s})=\left[2{,}5\ \vec{i}+(2{,}5^2+1)\ \vec{j}\right]\ \text{m}=\mathbf{(2{,}5\ \vec{i}+7{,}25\ \vec{j})\ m}$ (Q)



c) Para obtener la ecuación de la trayectoria, fijémonos en que:

$$\left.\begin{array}{l}x=t\\ y=t^2+1\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ y=x^2+1$$

Es decir, la ecuación es $\mathbf{y=x^2+1}$, que no es una recta, sino una parábola.

d) De la definición de velocidad media:

$$\vec{v}_{\text{media}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Calculando el vector desplazamiento:

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t=2{,}5\ \text{s})-\vec{r}(t=2\ \text{s})=(2{,}5\ \vec{i}+7{,}25\ \vec{j})-(2\ \vec{i}+5\ \vec{j})=(0{,}5\ \vec{i}+2{,}25\ \vec{j})\ \text{m}$$

Sustituyendo:

$$\vec{v}_{\text{media}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{(0{,}5\ \vec{i}+2{,}25\ \vec{j})\ \text{m}}{0{,}5\ \text{s}}=\mathbf{(1\ \vec{i}+4{,}5\ \vec{j})\ \frac{m}{s}}$$

34. Un móvil se mueve según la siguiente ley de movimiento:

$$\vec{r}(t)=t\ \vec{i}+(2+t)\ \vec{j}+t^2\ \vec{k}\ \text{m}$$

Calcula el vector velocidad media durante los 10 primeros segundos.

Partimos de la definición del vector velocidad media $\vec{v}_{\text{media}}=\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\dfrac{\vec{r}_{\text{f}}-\vec{r}_{\text{i}}}{\Delta t}$:

$$\vec{v}_{\text{media}}=\frac{\vec{r}(t_{\text{f}})-\vec{r}(t_{\text{i}})}{t_{\text{f}}-t_{\text{i}}}=\frac{\vec{r}(10\ \text{s})-\vec{r}(0\ \text{s})}{10\ \text{s}-0\ \text{s}}=\frac{\left[10\ \vec{i}+(2+10)\ \vec{j}+10^2\ \vec{k}\right]-\left[0\ \vec{i}+(2+0)\ \vec{j}+0^2\ \vec{k}\right]}{10\ \text{s}}=\mathbf{(\vec{i}+\vec{j}+10\ \vec{k})\ \frac{m}{s}}$$

35. Un ciclista circula a 20 km/h y una motocicleta le rebasa a 70 km/h. ¿Qué velocidad observa el ciclista?

Antes de empezar definimos los vectores usando como referencia la dirección de la carretera por la que circulan y el sentido positivo en sentido de la marcha del ciclista. Como la motocicleta rebasa al ciclista, lleva el mismo sentido. Las unidades se quedan en km/h.

$$\vec{v}_{\text{bici}} = 20\,\vec{i}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\ ;\ \vec{v}_{\text{moto}} = 70\,\vec{i}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Necesitamos considerar que el sistema de referencia en movimiento es el ciclista, que viaja a la velocidad de la bicicleta; y que el objeto en movimiento es la motocicleta:

$$\vec{v}_{\text{sis}} = \vec{v}_{\text{bici}} = 20\,\vec{i}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\ ;\ \vec{v}_{\text{obj}} = \vec{v}_{\text{moto}} = 70\,\vec{i}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Según esto, la velocidad de la motocicleta desde el sistema de referencia del ciclista es:

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_{\text{obj}} - \vec{v}_{\text{sis}} = 70\,\vec{i}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} - 20\,\vec{i}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \mathbf{50\,\vec{i}\,\frac{km}{h}}$$

36. El agua de un río fluye a 0,5 m/s. Una barcaza remonta el río navegando a 45 km/h. ¿Qué velocidad se observa para la barcaza desde la orilla? Expresa el resultado en m/s.

Antes de empezar definimos los vectores usando como referencia la dirección del río por el que navega la barcaza y el sentido positivo en sentido de la corriente. Como la barcaza remonta el río, lleva el sentido opuesto. Las unidades deben ser m/s.

$$\vec{v}_{\text{agua}} = 0{,}5\,\vec{i}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\ ;\ \vec{v}_{\text{barcaza}} = -45\,\vec{i}\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}}\cdot\frac{1000\text{ m}}{1\,\cancel{\text{km}}} = -12{,}5\,\vec{i}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Necesitamos considerar que el sistema de referencia en movimiento es el agua del río, que viaja a la velocidad de la corriente. También consideramos que conocemos la velocidad relativa de la barcaza:

$$\vec{v}_{\text{sis}} = \vec{v}_{\text{agua}} = 0{,}5\,\vec{i}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\ ;\ \vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_{\text{barcaza}} = -12{,}5\,\vec{i}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Según esto, la velocidad de la barcaza desde la orilla para un observador en reposo es:

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_{\text{obj}} - \vec{v}_{\text{sis}} \quad\Rightarrow\quad \vec{v}_{\text{obj}} = \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{v}_{\text{sis}} = -12{,}5\,\vec{i}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 0{,}5\,\vec{i}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \mathbf{-12\,\vec{i}\,\frac{m}{s}}$$

El signo negativo solo indica que se mueve en el sentido contrario a la corriente.

Aceleración

37. Contesta.

a) ¿Es posible que un movimiento uniforme tenga aceleración? Pon ejemplos.

b) ¿Es posible que un cuerpo tenga velocidad cero y aceleración distinta de cero? ¿Y al contrario? Pon ejemplos en los que se dé cada situación.

a) Por supuesto que sí.

Uniforme quiere decir que el módulo de la velocidad es constante (v = constante, $a_T = 0$).

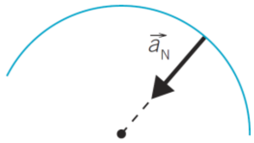
Pero aunque la aceleración tangencial sea nula, la aceleración normal puede muy bien no serlo.

Cualquier trayectoria rectilínea tiene $a_N = 0$. Así que cualquier trayectoria no rectilínea recorrida uniformemente tiene aceleración no nula: $a = a_N \neq 0$.

b) Sí es posible que un cuerpo tenga velocidad nula y aceleración no nula. Eso es lo que sucede en el instante en el que se inicia cualquier movimiento. La velocidad es cero, pero el ritmo de cambio de velocidad, aceleración, es distinta de cero y hará se mueva.

Respecto a velocidad no nula y aceleración nula, solo puede suceder en un caso, en el movimiento rectilíneo uniforme ($a_N = 0$ y $a_T = 0$).

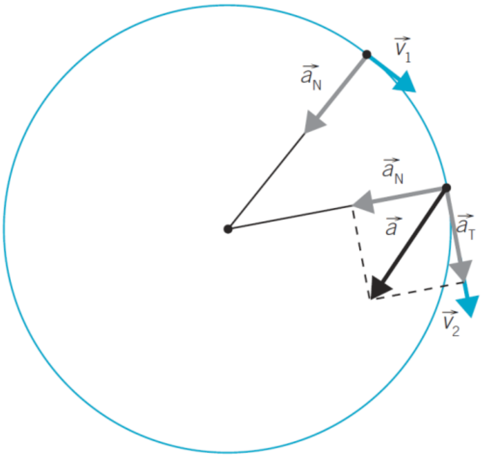
38. ¿Qué dirección tiene la aceleración de un cuerpo que se mueve en una circunferencia con el módulo de la velocidad constante?



Está dirigida hacia el centro de la circunferencia. Como el movimiento es uniforme, $a_T = 0$; así que la aceleración es puramente normal, $\vec{a} = \vec{a}_N$.

39. Un cuerpo se mueve con movimiento circular y uniformemente acelerado. Dibuja en un punto cualquiera de la trayectoria los vectores velocidad, aceleración tangencial, aceleración normal y aceleración total.

Respuesta gráfica.

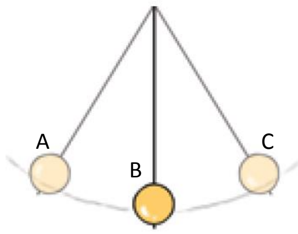


40. Un péndulo oscila en un plano vertical.

a) ¿Cuál es la dirección de la aceleración en el punto medio del recorrido?

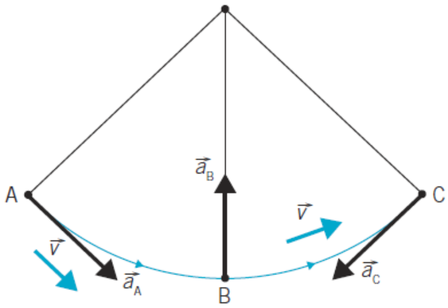
b) ¿Y en los extremos?

(Recuerda que $\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T$ y piensa que al soltar la masa en un extremo, desde el reposo, va cada vez más deprisa hasta el punto más bajo y luego se frena hasta pararse en el otro extremo).



Convendrá analizar cualitativamente el movimiento del péndulo desde que lo soltamos, por ejemplo, en A hasta que se para en el punto C.

a) Desde A hacia B el péndulo se mueve cada vez más deprisa, siendo B el punto más rápido; y de B a C frena, de modo que su aceleración tangencial tiene que cambiar de sentido en B, es decir, $a_{TB} = 0$. Pero en B sí hay aceleración normal, pues el movimiento es circular y $v_B \neq 0$. Esto quiere decir que $\vec{a}_B = \vec{a}_{NB}$, dirigida hacia el centro de la trayectoria.

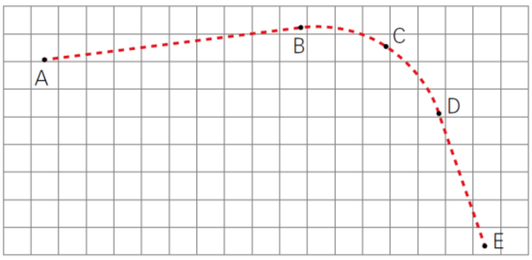


b) Al principio $v_A = 0$. Está parado, de modo que $a_{NA} = 0$ (no puede tener aceleración normal si no se está moviendo). Sí tiene aceleración tangencial y está dirigida hacia B, pues en tal sentido va a aumentar el vector velocidad.

En el punto C, de nuevo $v_C = 0$, lo que obliga a que $a_{NC} = 0$ y solo hay aceleración tangencial, la misma que frenaba el movimiento de A a C y ahora lo va a acelerar en el sentido opuesto, de C hacia A.

41. Se toma una curva como la de la figura (cuyos tramos AB y DE son rectos). Hasta el punto C la velocidad es constante y empieza a acelerar a partir de ahí. Dibuja en tu cuaderno los vectores $\Delta\vec{v}$ apropiados en cada tramo.

Pista: ¿qué tipos de aceleración hay en cada tramo?

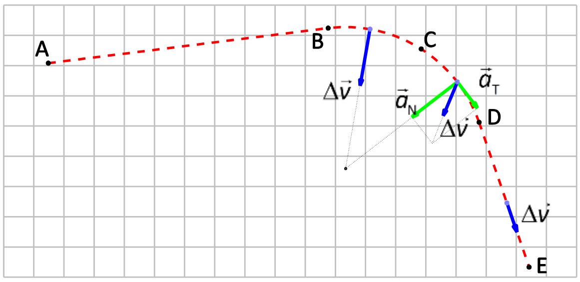


Por definición de vector aceleración:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

La dirección del vector pedido, $\Delta \vec{v}$, es la dirección del vector aceleración en cada tramo.

- El tramo AB es un movimiento rectilíneo y uniforme. Así que aceleración no hay, $\Delta \vec{v} = 0$.
- El tramo BC es un movimiento circular y uniforme. Así que solo hay aceleración normal, $\Delta \vec{v}$ en la dirección del radio.
- El tramo CD es un movimiento circular uniformemente acelerado. Así que hay aceleración normal y tangencial, $\Delta \vec{v}$ en la dirección del vector $\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T$.
- El tramo DE es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Así que no hay aceleración normal y solo hay tangencial, $\Delta \vec{v}$ en la dirección del vector $\vec{a}_T$.



42. **¿Es posible que la velocidad de un cuerpo sea constante y su aceleración no nula?**

Normalmente llamamos «velocidad» al escalar, es decir, al módulo del vector velocidad. Entonces, si el módulo de la velocidad es constante, $v = |\vec{v}| = \text{cte.}$, tenemos un movimiento uniforme, y por tanto, la aceleración tangencial sería nula, $\vec{a}_T = 0$. Pero podría ocurrir que la aceleración normal sea distinta de cero, $|\vec{a}_T| = \text{cte.} \neq 0$. En este caso sería un movimiento circular y uniforme.

Si es el vector velocidad el que es constante, $\vec{v} = \text{cte.}$ (módulo, dirección y sentido constante), el movimiento solo podría ser rectilíneo y uniforme, por lo que la aceleración sería nula.

43. **¿Cómo tiene que ser el vector velocidad para cambiar el sentido en el que se recorre una trayectoria? Pista: ten en cuenta la relación entre los vectores aceleración tangencial y velocidad.**

Los sentidos de $\vec{v}$ y $\vec{a}_T$ deben ser opuestos (por definición siempre tienen la misma dirección, son paralelos).

La $\vec{a}_T$ indica cómo cambia el módulo de $\vec{v}$:

- Si $\vec{a}_T$ apunta en el mismo sentido que $\vec{v}$, el módulo de la velocidad aumenta.
- Si $\vec{a}_T$ apunta en sentido contrario a $\vec{v}$, el módulo de la velocidad disminuye.

Fijémonos en el cociente $a_T = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

En el sentido del movimiento, si $a_T < 0$, entonces la velocidad decrece, $\Delta v < 0$ (para $\Delta t > 0$).

Por tanto, para que el sentido del movimiento cambie, $\vec{v}$ y $\vec{a}_T$ deben tener sentidos opuestos. En tal caso, $\vec{v}$ se irá haciendo más pequeño (la velocidad disminuye) hasta hacerse 0 y cambiar de sentido.

44. **¿Puede moverse un cuerpo hacia la izquierda cuando su aceleración se dirige hacia la derecha?**

Sí. Tomemos el caso más sencillo, un movimiento rectilíneo. El hecho de que $\vec{v}$ y $\vec{a}$ tengan sentidos opuestos solo significa que el movimiento es decelerado (se frena).

Nota: Si el movimiento continúa así, $\vec{v}$ se hará 0 y habrá un cambio de sentido en la trayectoria. En ese momento, $\vec{v}$ y $\vec{a}$ tendrán el mismo sentido.

45. ¿Es cierto que conocer la aceleración normal de un objeto da información sobre la forma de la trayectoria que sigue? ¿Y la tangencial?

Ambas aceleraciones dan información sobre la forma de la trayectoria. Teniendo en cuenta que cualquier trayectoria puede aproximarse con toda la precisión necesaria por segmentos de recta (la suma de todos los desplazamientos, $\Delta\vec{r}$ (para Δt muy pequeños), tiende a coincidir con la trayectoria real.

- Si conocemos $\vec{a}_T$, que es tangente a la trayectoria, tenemos en cada punto un trocito de la recta que se aproxima a la trayectoria real.
- Si conocemos $\vec{a}_N$, que es perpendicular a la trayectoria, parece no decirnos nada directamente, pero si conocemos la aceleración normal, su dirección perpendicular es la tangencial y estaríamos en el caso anterior.

Así que tanto la aceleración tangencial como la aceleración normal nos dan información sobre la dirección del movimiento en cada punto de la trayectoria.

46. ¿Cómo es un movimiento en el que solo hay aceleración tangencial? Pista: en este caso, $\vec{v}$, que es un vector, solo cambia en módulo, no en dirección. ¿Qué características de este vector permanecen constantes?

Si la aceleración normal en nula ($a_N = 0$), el movimiento es rectilíneo.

El vector velocidad tiene dirección constante.

47. Calcula la aceleración tangencial media de un vehículo que circula a 72 km/h y se detiene en 4 s.

Pasamos a unidades del sistema internacional:

$$72\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}}\cdot\frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}=20\ \text{m/s}$$

Calculamos la aceleración tangencial media:

$$a_m=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_{\text{final}}-v_{\text{inicial}}}{\Delta t}=\frac{0\ \text{m/s}-20\ \text{m/s}}{4\ \text{s}}=\mathbf{-5\ \frac{m}{s^2}}$$

48. Un tren viaja a 120 km/h y se detiene completamente en 29 s.

a) ¿Cuál es su aceleración tangencial media?

b) ¿Cuánto tardará en alcanzar esa misma velocidad máxima si al arrancar desde el reposo mantiene una aceleración tangencial constante de 0,7 m/s²?

Pasamos a unidades del sistema internacional:

$$120\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}}\cdot\frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}=33,\widehat{3}\ \text{m/s}$$

a) Calculamos la aceleración tangencial media:

$$a_m=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_{\text{final}}-v_{\text{inicial}}}{\Delta t}=\frac{0\ \text{m/s}-33,\widehat{3}\ \text{m/s}}{29\ \text{s}}=\mathbf{-1{,}15\ \frac{m}{s^2}}$$

b) De la definición de la aceleración tangencial media:

$$a_m=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_{\text{final}}-v_{\text{inicial}}}{t_{\text{final}}-t_{\text{inicial}}}$$

Para $t_{\text{inicial}} = 0$, despejando t_{final} y sustituyendo:

$$t_{\text{final}}=\frac{v_{\text{final}}-v_{\text{inicial}}}{a_m}=\frac{33,\widehat{3}\ \text{m/s}-0\ \text{m/s}}{0,7\ \text{m/s}^2}=\mathbf{47{,}62\ s}$$

49. La lanzadera espacial alcanza en el despegue una aceleración de hasta $3 \cdot g$ (tres veces el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre). ¿Cuánto tiempo tardaría en alcanzar, a ese ritmo, la velocidad de la luz, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s? Dato: $g = 9,8$ m/s².

Suponiendo que su movimiento sea uniformemente acelerado, $\vec{a}=\text{cte}$.

Si la física clásica fuera válida para velocidades comparables con la de la luz (que no lo es) y se pudiera mantener la aceleración constante $a_T = 3 \cdot g \approx 29{,}4$ m/s^2 el tiempo suficiente, la velocidad de la luz en el vacío, c, se alcanzaría en un tiempo t_c tal que:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 3 \cdot g = \frac{c}{t_c} \Rightarrow t_c = \frac{c}{3 \cdot g} = \frac{3{,}0 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{3 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} = 1{,}02 \cdot 10^7 \text{ s} = 1{,}02 \cdot 10^7 \cancel{\text{s}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \cancel{\text{s}}} \cdot \frac{1 \text{ día}}{24 \cancel{\text{h}}} \approx \mathbf{118 \text{ días}}$$

50. Calcula la aceleración normal debida a la rotación en un punto del ecuador terrestre. Datos: $R_{ec} = 6{,}378 \cdot 10^6$ m; día sidéreo, $T_s = 23$ h 56 min 4 s.

Pasamos el periodo a unidades del sistema internacional:

$$T_s = 23 \cancel{\text{h}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \cancel{\text{h}}} + 56 \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \cancel{\text{min}}} + 4 \text{ s} = 86\,164 \text{ s}$$

La aceleración normal coincide con la aceleración centrípeta:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(\frac{2\pi \cdot R_{ec}}{T_s}\right)^2}{R_{ec}} = \frac{4\pi^2 \cdot R_{ec}}{T_s^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 6{,}378 \cdot 10^6 \text{ m}}{(86\,164 \text{ s})^2} = \mathbf{0{,}0339 \text{ m/s}^2}$$

51. Las normas que regulan la deceleración que debe sufrir un coche para que salten los *airbags* han pasado desde valores próximos a los 25 · *g* (25 veces el valor de la aceleración de la gravedad) hasta los 60 · *g* que hacen falta hoy día.

a) ¿A qué velocidad inicial hay que ir para alcanzar esa nueva aceleración (negativa) cuando un coche choca y se detiene bruscamente en 0,1 s?

b) ¿Cuál es, entonces, la aceleración mínima a la que salta el *airbag*?

a) Si suponemos que la aceleración es constante, $\vec{a} = \text{cte.} = -60 \cdot g\,\vec{i}$. Que en nuestro caso es de frenado desde $t_{ini} = 0$ hasta que $v_{fin} = 0$.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{final} - \vec{v}_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} = \frac{\vec{0} - \vec{v}_{inicial}}{t_{final} - 0} \Rightarrow \vec{v}_{inicial} = -\vec{a}_m \cdot t_{final}$$

$$\vec{v}_{inicial} = -\left(-60 \cdot g\,\vec{i}\right) \cdot t_{final} = 60 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2\,\vec{i} \cdot 0{,}1 \text{ s} = 58{,}8\,\vec{i} \text{ m/s} \approx \mathbf{212\,\vec{i} \text{ km/h}}$$

b) Si suponemos que la aceleración es constante, $\vec{a} = -60 \cdot g\,\vec{i} = -60 \cdot 9{,}8\,\vec{i}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \mathbf{-588\,\vec{i}\,\frac{m}{s^2}}$.

52. Para un cierto movimiento en el plano:

$$\vec{v}(t) = 5\,\vec{i} + 6 \cdot t\,\vec{j} \text{ m/s}$$

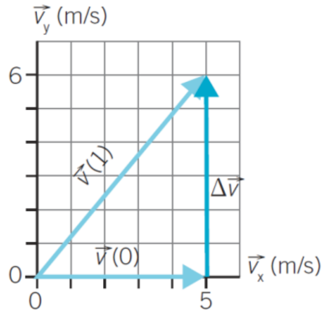
a) Representa gráficamente los vectores velocidad en $t_1 = 0$ y $t_2 = 1$ s, así como el vector variación de velocidad, $\Delta\vec{v}$. ¿Es paralelo o perpendicular a la velocidad inicial?

b) Calcula el vector aceleración media en ese intervalo de tiempo y di cuánto vale su módulo.

a) Para la representación gráfica es necesario calcular previamente el valor del vector velocidad en cada instante:

$$\vec{v}(t = 0 \text{ s}) = \left(5\,\vec{i} + 6 \cdot 0\,\vec{j}\right) \text{ m/s} = 5\,\vec{i} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}(t = 1 \text{ s}) = \left(5\,\vec{i} + 6 \cdot 1\,\vec{j}\right) \text{ m/s} = \left(5\,\vec{i} + 6\,\vec{j}\right) \text{ m/s}$$



Y el vector variación de velocidad es la diferencia entre estos dos últimos:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t = 1 \text{ s}) - \vec{v}(t = 0 \text{ s}) = \left[\left(5\,\vec{i} + 6\,\vec{j}\right) - 5\,\vec{i}\right] \text{ m/s} = 6\,\vec{j} \text{ m/s}$$

El vector variación de la velocidad, en este caso, es perpendicular a la velocidad inicial.

b) La aceleración media en ese intervalo será: $\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{6\,\vec{j} \text{ m/s}}{1 \text{ s}} = \mathbf{6\,\vec{j} \text{ m/s}^2}$. Y el módulo es $\left|\vec{a}_m\right| = \mathbf{6 \text{ m/s}^2}$.

53. Los fabricantes de una montaña rusa que tiene un tramo en el que podemos viajar cabeza abajo (ver figura) nos aseguran que en dicho tramo la aceleración normal vale 2 · *g*, es decir, $a_N \approx 2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

a) Si en ese punto se mide para los carritos una velocidad de 50 km/h, ¿cuánto vale el radio de la curva?

b) Dibuja el vector a_N.

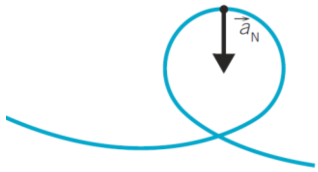
Pasamos a unidades del sistema internacional:

$$50\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}}\cdot\frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}=13{,}\widehat{8}\ \text{m/s}$$

a) Despejando de la definición de la aceleración normal:

$$a_N=\frac{v^2}{R}\quad\Rightarrow\quad R=\frac{v^2}{a_N}=\frac{v^2}{2\cdot g}=\frac{\left(13{,}\widehat{8}\ \text{m/s}\right)^2}{2\cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}=\mathbf{9{,}84\ m}$$

b) Nota: $\vec{a}_N$ es perpendicular a la tangente a la trayectoria.



54. En un ascensor, una de las lámparas del techo está a punto de descolgarse. El ascensor comienza a subir y arranca el movimiento con una aceleración hacia arriba de 1 m/s². En ese momento la lámpara se descuelga y cae por efecto de la gravedad con una aceleración descendente de 9,8 m/s². Para un observador en el interior del ascensor, ¿con qué aceleración cae la lámpara?

Antes de empezar definimos los vectores usando como referencia la dirección vertical por la que se mueven ascensor y lámpara. El sentido positivo hacia arriba.

$$\vec{a}_{\text{ascensor}}=+\vec{j}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\ ;\ \vec{a}_{\text{lámpara}}=-9{,}8\ \vec{j}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Necesitamos considerar que el sistema de referencia en movimiento es el ascensor, que sube con su aceleración. Y que el objeto con aceleración es la lámpara, que cae:

$$\vec{a}_{\text{sis}}=\vec{a}_{\text{ascensor}}=+\vec{j}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\ ;\ \vec{a}_{\text{obj}}=\vec{a}_{\text{lámpara}}=-9{,}8\ \vec{j}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Según esto, la aceleración de la lámpara para un observador acelerado en el interior del ascensor:

$$\vec{a}_{\text{rel}}=\vec{a}_{\text{obj}}-\vec{a}_{\text{sis}}=\left(-9{,}8\ \vec{j}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)-\left(+\vec{j}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)=\mathbf{-10{,}8\ \vec{j}\ \frac{m}{s^2}}$$

El signo negativo solo indica que el sentido del movimiento es hacia abajo para el observador en el ascensor.

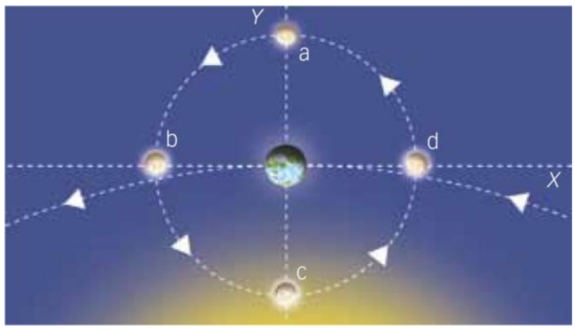
55. Teniendo en cuenta el resultado de la actividad 50 calcula, para un observador en el ecuador terrestre, la aceleración de la Luna, a media noche, en cada una de las siguientes posiciones. No debes considerar la traslación terrestre.

a) Luna llena.

b) Cuarto menguante.

c) Luna nueva.

d) Cuarto creciente.



Nota: El sistema de referencia está centrado en la Tierra con el eje OX en dirección tangente a la órbita terrestre, el eje OY negativo en dirección al Sol. La rotación terrestre y la traslación lunar son giros en sentido antihorario.

Datos: radio de la órbita lunar, $r_L = 3{,}84 \cdot 10^8$ m; periodo lunar, T_L: 27 día 7 h 43 min 11 s.

En el sistema de referencia (Tierra) tiene, al menos, dos aceleraciones centrípetas:

- La aceleración normal debida a la rotación ya está calculada en el ejercicio 50. La dirección y el sentido según el sistema de referencias proporcionado, situado el observador a media noche:

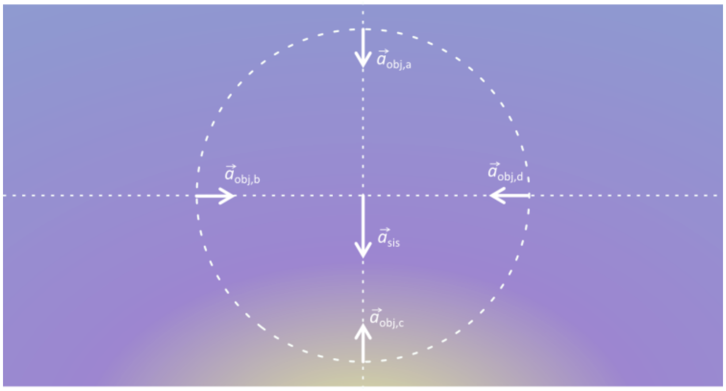
$$\vec{a}_{\text{Tierra, rotación}} = -0{,}0339\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- La aceleración normal debida al movimiento de traslación de la Tierra a lo largo de su órbita no la tenemos en cuenta para este ejercicio.

La Luna en su órbita, supuesta circular, está sometida a una aceleración centrípeta de módulo:

$$T_{\text{Luna}} = 27\,\cancel{\text{días}} \cdot \frac{24\,\cancel{\text{h}}}{1\,\cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\text{ s}}{1\,\cancel{\text{h}}} + 7\,\cancel{\text{h}} \cdot \frac{3600\text{ s}}{1\,\cancel{\text{h}}} + 43\,\cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\text{ s}}{1\,\cancel{\text{min}}} + 11\text{ s} = 2\,360\,591\text{ s}$$

$$a_{\text{Luna}} = \frac{v^2}{r_L} = \frac{\left(\frac{2\pi \cdot r_L}{T_L}\right)^2}{r_L} = \frac{4\pi^2 \cdot r_L}{T_L^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8\text{ m}}{(2\,360\,591\text{ s})^2} = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\text{ m/s}^2$$



a) Luna llena. En la posición que ocupa la Luna según el sistema de referencia que hemos definido, el vector aceleración normal para la Luna es:

$$\vec{a}_{\text{Luna llena}} = -2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\vec{j}\text{ m/s}^2$$

Necesitamos considerar que el sistema de referencia en movimiento es la Tierra rotando sobre sí misma. Y que el objeto con aceleración es la Luna orbitando alrededor de la Tierra:

$$\vec{a}_{\text{sis}} = \vec{a}_{\text{Tierra, rotación}} = -0{,}0339\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\ ;\ \vec{a}_{\text{obj}} = \vec{a}_{\text{Luna llena}} = -2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\vec{j}\text{ m/s}^2$$

Según esto, la aceleración de la Luna llena para un observador sobre el ecuador de la Tierra a medianoche:

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_{\text{obj}} - \vec{a}_{\text{sis}} = \left(-2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) - \left(-3{,}39 \cdot 10^{-2}\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = \mathbf{0{,}0312\,\vec{j}\,\frac{m}{s^2}}$$

b) Cuarto menguante. En la posición que ocupa la Luna según el sistema de referencia que hemos definido, el vector aceleración normal para la Luna es:

$$\vec{a}_{\text{Luna menguante}} = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\vec{i}\text{ m/s}^2$$

Necesitamos considerar que el sistema de referencia en movimiento es la Tierra rotando sobre sí misma. Y que el objeto con aceleración es la Luna orbitando alrededor de la Tierra:

$$\vec{a}_{\text{sis}} = \vec{a}_{\text{Tierra, rotación}} = -0{,}0339\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\ ;\ \vec{a}_{\text{obj}} = \vec{a}_{\text{Luna menguante}} = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\vec{i}\text{ m/s}^2$$

Según esto, la aceleración de la Luna menguante para un observador sobre el ecuador de la Tierra a media noche:

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_{\text{obj}} - \vec{a}_{\text{sis}} = \left(2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\vec{i}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) - \left(-3{,}39 \cdot 10^{-2}\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = \mathbf{\left(0{,}0027\,\vec{i} + 0{,}0339\,\vec{j}\right)\frac{m}{s^2}}$$

c) Luna nueva. En la posición que ocupa la Luna según el sistema de referencia que hemos definido, el vector aceleración normal para la Luna es:

$$\vec{a}_{\text{Luna nueva}} = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\ \vec{j}\ \text{m/s}^2$$

Necesitamos considerar que el sistema de referencia en movimiento es la Tierra rotando sobre sí misma. Y que el objeto con aceleración es la Luna orbitando alrededor de la Tierra:

$$\vec{a}_{\text{sis}} = \vec{a}_{\text{Tierra, rotación}} = -0{,}0339\ \vec{j}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\ ;\ \vec{a}_{\text{obj}} = \vec{a}_{\text{Luna nueva}} = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\ \vec{j}\ \text{m/s}^2$$

Según esto, la aceleración de la Luna nueva para un observador sobre el ecuador de la Tierra a media noche:

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_{\text{obj}} - \vec{a}_{\text{sis}} = \left(2{,}72 \cdot 10^{-3}\ \vec{j}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) - \left(-3{,}39 \cdot 10^{-2}\ \vec{j}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = \mathbf{0{,}0366}\ \vec{\mathbf{j}}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s^2}}$$

d) Cuarto creciente. En la posición que ocupa la Luna según el sistema de referencias que hemos definido el vector aceleración normal para la Luna es:

$$\vec{a}_{\text{Luna, creciente}} = -2{,}72 \cdot 10^{-3}\ \vec{i}\ \text{m/s}^2$$

Necesitamos considerar que el sistema de referencia en movimiento es la Tierra rotando sobre sí misma. Y que el objeto con aceleración es la Luna orbitando alrededor de la Tierra:

$$\vec{a}_{\text{sis}} = \vec{a}_{\text{Tierra, rotación}} = -0{,}0339\ \vec{j}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\ ;\ \vec{a}_{\text{obj}} = \vec{a}_{\text{Luna, menguante}} = -2{,}72 \cdot 10^{-3}\ \vec{i}\ \text{m/s}^2$$

Según esto, la aceleración de la Luna menguante para un observador sobre el ecuador de la Tierra a media noche:

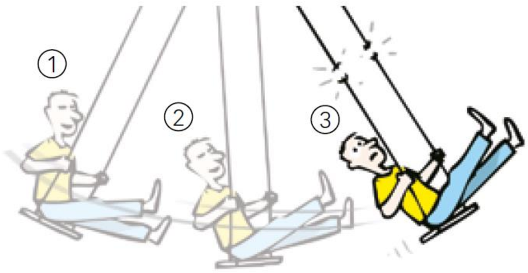
$$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_{\text{obj}} - \vec{a}_{\text{sis}} = \left(-2{,}72 \cdot 10^{-3}\ \vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) - \left(-3{,}39 \cdot 10^{-2}\ \vec{j}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = \left(\mathbf{-0{,}0027}\ \vec{\mathbf{i}} + \mathbf{0{,}0339}\ \vec{\mathbf{j}}\right) \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s^2}}$$

Ampliación (página 220)

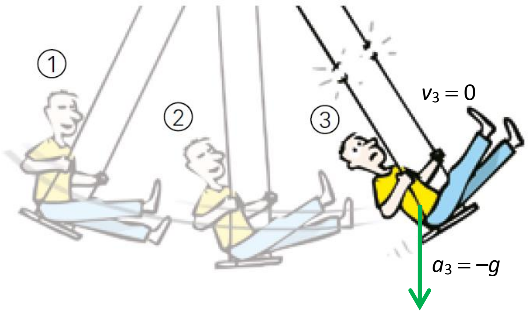
56. La cuerda de un columpio se rompe cuando está en uno de los extremos de su trayectoria (por ejemplo, en 3).

a) ¿Hacia dónde sale volando el muchacho? Justifica gráficamente la respuesta.

b) Y antes de haberse roto, ¿había aceleración tangencial en los extremos del movimiento? Justifica la respuesta y dibuja las dos componentes de la aceleración –cuando existan– en los tres puntos de la figura.



a) ¿Qué velocidad tiene en el extremo (3) de la trayectoria? $v_3 = 0$, ¡ahí está parado! Si se rompe la cuerda, no se va a quedar quieto porque sí hay aceleración, la aceleración de la gravedad. Al actuar sobre el muchacho, cuando ya no está ligado al columpio, hace que caiga verticalmente.



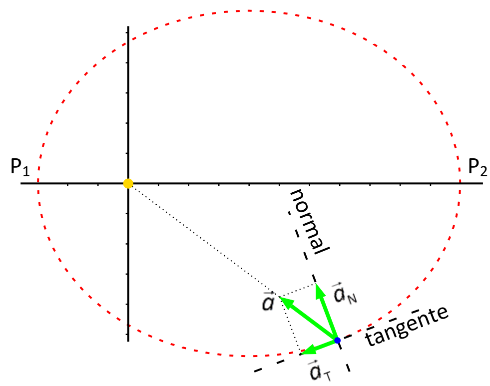
b) Ya ha sido respondida en la cuestión 40 (siempre que tratemos al columpio igual que un péndulo ignorando –lo que en muchos casos no basta– que en el columpio no hay un punto, sino un cuerpo extenso cuya posición cambia…).

57. ¿Qué tipo de aceleración tiene un planeta (en un sistema de referencia anclado al Sol) sabiendo que su órbita es elíptica con el Sol en el foco y que el vector aceleración del planeta siempre apunta hacia el Sol? ¿Es posible que recorra esa órbita a velocidad constante?

Si $\vec{a}$ apunta hacia el Sol en general, $\vec{a}$ tiene dos componentes intrínsecas, la aceleración normal, $\vec{a}_N$, y la aceleración tangencial, $\vec{a}_T$. Por eso $\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T$. La aceleración del planeta tendrá solo componente normal, $\vec{a} = \vec{a}_N$, en dos puntos: el más cercano a la estrella, P_1, y el más alejado de esta, P_2.

Por tanto, como en general $\vec{a}_T \neq 0$, un planeta describiendo una elipse bajo la acción de la atracción gravitatoria del Sol no puede recorrer la órbita a velocidad constante. Y así sucede en la realidad: la velocidad varía desde un máximo en el punto más cercano, P_1, hasta un mínimo en el punto más alejado, P_2.

Nota: Si la órbita fuera circular, sí podría llevar una velocidad constante, en módulo, ya que la aceleración sería puramente radial y $\vec{a}_T = 0$.



58. **Se lanza una bola por el aire y registramos su posición en tres instantes con los siguientes resultados:**

t (s)	posición (m)
0,0	$0\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$
1,0	$22{,}3\,\vec{i} + 26{,}1\,\vec{j}$
2,0	$40{,}1\,\vec{i} + 38{,}1\,\vec{j}$

a) **¿Se puede decir algo sobre la forma de la trayectoria?**

b) **Intenta predecir matemáticamente la posición en *t* = 2 s a partir de las posiciones en los dos instantes anteriores.**

c) **¿Coincide tu predicción con el dato? ¿Por qué?**

a) No, en general de tres puntos no puede deducirse la forma de una trayectoria. Hay infinitas trayectorias distintas que pasan por tres puntos.

b) Para predecir posiciones futuras tenemos que saber qué tipo de movimiento sigue. Como no hay ninguna pista, haremos la suposición más sencilla, que se trata de un movimiento a velocidad constante.

Por tanto, el vector velocidad media, o simplemente el vector velocidad, ya que estamos suponiendo la velocidad constante para variación pequeña de tiempo:

$$\vec{v} = \vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{final} - \vec{r}_{inicial}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(1\text{ s}) - \vec{r}(0\text{ s})}{1\text{ s} - 0\text{ s}}$$

Sustituimos:

$$\vec{v} = \frac{(22{,}3\,\vec{i} + 26{,}1\,\vec{j})\text{ m} - (0\,\vec{i} + 0\,\vec{j})\text{ m}}{1\text{ s}} = 22{,}3\,\vec{i} + 26{,}1\,\vec{j}\text{ m/s}$$

Calculamos ahora la posición para *t* = 2 s. Según la definición de velocidad:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(2\text{ s}) - \vec{r}(1\text{ s})}{\Delta t} \Rightarrow \vec{r}(2\text{ s}) = \vec{r}(1\text{ s}) + \vec{v}\cdot\Delta t$$

Sustituimos:

$$\vec{r}(2\text{ s}) = (22{,}3\,\vec{i} + 26{,}1\,\vec{j}\text{ m}) + (22{,}3\,\vec{i} + 26{,}1\,\vec{j}\text{ m/s})\cdot 1\text{ s} = \mathbf{44{,}6\,\vec{i} + 52{,}2\,\vec{j}\text{ m}}$$

c) No coincide el valor que hemos obtenido con el valor real que aparece tabulado. Esto significa que, contra nuestra suposición, la velocidad del movimiento no es constante.

59. **Benito hace cada día un viaje de ida y vuelta al puesto de periódicos, que dista 3 km desde su casa. Viaja a la velocidad constante de 6 km/h y emplea una hora en total. Un día solo consigue hacer 4 km/h en el viaje de ida y piensa que podrá arreglarlo y compensar el retraso volviendo a una velocidad de 8 km/h, pero Alicia le dice que no. ¿Cuánto tarda en realidad? ¿Cuál es la velocidad media aquel día?**

Como la velocidad no es la misma en el trayecto de ida y de vuelta, calculamos el tiempo por tramos:

$$\text{Ida: } v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t_{ida} = \frac{\Delta s}{v_m} = \frac{3\,\cancel{\text{km}}}{4\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\text{h}}} = 0{,}75\,\cancel{\text{h}}\cdot\frac{60\text{ min}}{1\,\cancel{\text{h}}} = 45\text{ min}$$

Vuelta: $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t_{\text{vuelta}} = \dfrac{\Delta s}{v_m} = \dfrac{3\ \cancel{\text{km}}}{8\ \dfrac{\cancel{\text{km}}}{\text{h}}} = 0{,}375\ \cancel{\text{h}} \cdot \dfrac{60\ \text{min}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 22{,}5\ \text{min} = 22\ \text{min} + 0{,}5\ \cancel{\text{min}} \cdot \dfrac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} = 22\ \text{min}\ 30\ \text{s}$

Por tanto, el tiempo total que empleó ese día en hacer su recorrido fue:

$$\Delta t = \Delta t_{\text{ida}} + \Delta t_{\text{vuelta}} = 0{,}75\ \text{h} + 0{,}375\ \text{h} = 1{,}125\ \text{h}$$

$$1{,}125\ \text{h} = 1\ \text{h} + 0{,}125\ \cancel{\text{h}} \cdot \frac{60\ \text{min}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 1\ \text{h} + 7{,}5\ \text{min} = 1\ \text{h} + 7\ \text{min} + 0{,}5\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} = \mathbf{1\ h\ 7\ min\ 30\ s}$$

Calculamos la velocidad media:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6\ \text{km}}{1{,}125\ \text{h}} = \mathbf{5{,}\widehat{3}\ km/h}$$

60. Supón que la posición de un objeto en función del tiempo es $\vec{r}(t) = (-7+5t)\ \vec{i} + (8t^2)\ \vec{j} + (6t-4t^3)\ \vec{k}$ en unidades del SI.

a) ¿Cuánto vale la velocidad instantánea en $t = 0$ s?

b) ¿Cuánto vale la aceleración instantánea en $t = 0$ s?

a) El punto de partida es el vector de posición:

$$\vec{r}(t) = (-7+5t)\ \vec{i} + (8t^2)\ \vec{j} + (6t-4t^3)\ \vec{k}\ \text{m}$$

Para calcular la velocidad en el instante $t = 0$ s, partimos de la definición de velocidad instantánea:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Sustituimos:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[(-7+5(t+\Delta t))\ \vec{i} + \left(8(t+\Delta t)^2\right)\ \vec{j} + \left(6(t+\Delta t) - 4(t+\Delta t)^3\right)\ \vec{k}\right] - \left[(-7+5t)\ \vec{i} + (8t^2)\ \vec{j} + (6t-4t^3)\ \vec{k}\right]}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{(-7+5(t+\Delta t))\ \vec{i} + \left(8(t+\Delta t)^2\right)\ \vec{j} + \left(6(t+\Delta t) - 4(t+\Delta t)^3\right)\ \vec{k}}{\Delta t} - \frac{(-7+5t)\ \vec{i} + (8t^2)\ \vec{j} + (6t-4t^3)\ \vec{k}}{\Delta t}\right]$$

Desarrollamos los binomios:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{(-7+5t+5\Delta t)\ \vec{i} + \left(8t^2 + 16t \cdot \Delta t + 8(\Delta t)^2\right)\ \vec{j} + \left(6t + 6\Delta t - 4t^3 - 12t^2 \cdot \Delta t - 12t \cdot (\Delta t)^2 - 4(\Delta t)^3\right)\ \vec{k}}{\Delta t} - \right.$$

$$\left. - \frac{(-7+5t)\ \vec{i} + (8t^2)\ \vec{j} + (6t-4t^3)\ \vec{k}}{\Delta t}\right]$$

Efectuando las restas componente a componente:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5\Delta t\ \vec{i} + \left[16t \cdot \Delta t + 8(\Delta t)^2\right]\ \vec{j} + \left[6\Delta t - 12t^2 \cdot \Delta t - 12t \cdot (\Delta t)^2 - 4(\Delta t)^3\right]\ \vec{k}}{\Delta t}$$

Extrayendo en el numerador factor común Δt:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left\{5\ \vec{i} + [16t + 8\Delta t]\ \vec{j} + \left[6 - 12t^2 - 12t \cdot \Delta t - 4(\Delta t)^2\right]\ \vec{k}\right\} \cdot \cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}}$$

Simplificando:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{5\ \vec{i} + [16t + 8\Delta t]\ \vec{j} + \left[6 - 12t^2 - 12t \cdot \Delta t - 4(\Delta t)^2\right]\ \vec{k}\right\}$$

Resolvemos el límite:

$$\vec{v}(t) = 5\ \vec{i} + [16t + 8 \cdot 0]\ \vec{j} + \left[6 - 12t^2 - 12t \cdot 0 - 4(0)^2\right]\ \vec{k} = 5\ \vec{i} + 16t\ \vec{j} + (6 - 12t^2)\ \vec{k}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dando valor a la variable tiempo, $t = 0$ s: $\vec{v}(0\text{ s}) = 5\ \vec{i} + 16(0\text{ s})\ \vec{j} + \left(6 - 12(0\text{ s})^2\right)\ \vec{k} = \mathbf{5\ \vec{i} + 6\ \vec{k}\ \frac{m}{s}}$

b) Partimos del vector velocidad:

$$\vec{v}(t) = 5\ \vec{i} + 16t\ \vec{j} + \left(6 - 12t^2\right)\ \vec{k}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Queremos calcular la aceleración en el instante $t = 0$ s. Partimos de la definición de aceleración instantánea:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Sustituimos:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[5\ \vec{i} + 16(t + \Delta t)\ \vec{j} + \left(6 - 12(t + \Delta t)^2\right)\ \vec{k}\right] - \left[5\ \vec{i} + 16t\ \vec{j} + \left(6 - 12t^2\right)\ \vec{k}\right]}{\Delta t}$$

Desarrollamos los binomios:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[5\ \vec{i} + (16t + 16\Delta t)\ \vec{j} + \left(6 - 12t^2 - 24t \cdot \Delta t - 12(\Delta t)^2\right)\ \vec{k}\right] - \left[5\ \vec{i} + 16t\ \vec{j} + \left(6 - 12t^2\right)\ \vec{k}\right]}{\Delta t}$$

Efectuando las restas componente a componente y extrayendo en el numerador factor común Δt:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[16\Delta t\ \vec{j} + \left(-24t \cdot \Delta t - 12(\Delta t)^2\right)\ \vec{k}\right]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[16\ \vec{j} - (24t + 12\Delta t)\ \vec{k}\right] \cdot \cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}}$$

Simplificando y resolviendo el límite:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[16\ \vec{j} - (24t + 12\Delta t)\ \vec{k}\right] = 16\ \vec{j} - (24t + 12 \cdot 0)\ \vec{k} = 16\ \vec{j} - 24t\ \vec{k}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Dando valor a la variable tiempo, $t = 0$ s:

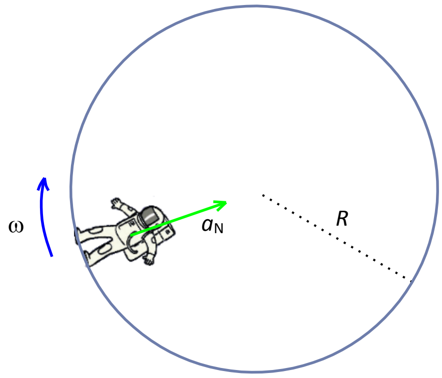
$$\vec{a}(0\text{ s}) = 16\ \vec{j} - 24(0\text{ s})\ \vec{k}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \mathbf{16\ \vec{j}\ \frac{m}{s^2}}$$

61. En las películas de ciencia ficción, una de las formas menos fantásticas de crear «gravedad artificial» es con rotación uniforme alrededor de un eje dentro de una estacion espacial.

a) Dibuja en una circunferencia la posición de un astronauta apoyado en el «suelo», representa la aceleración a la que está sometido y di de qué tipo es.

b) ¿A qué velocidad angular debe girar una estación espacial de 1 km de radio para que la aceleración sea numéricamente como la de la gravedad en la superficie de la Tierra? ¿Y si el radio es de 100 m?

a) En un movimiento circular uniforme la aceleración es puramente normal ($\vec{a} = \vec{a}_N$; $\vec{a}_T = \vec{0}$).



b) Queremos que $a = a_N = g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$ (trabajamos sin carácter vectorial porque la aceleración solo tiene componente normal). La aceleración normal coincide con la aceleración centrípeta:

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

Por tanto, queremos que: $v = \sqrt{g \cdot R}$.

Como $v = \omega \cdot R$, sustituimos en la expresión anterior y despejamos la velocidad angular:

$$\omega \cdot R = \sqrt{g \cdot R} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

Es decir, para que la aceleración experimentada sea igual a la aceleración de la gravedad, las velocidades lineal y angular deben ser:

- Para $R = 1$ km $= 1000$ m, sustituyendo y operando:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{9{,}8\ \text{m/s}^2}{1000\ \text{m}}} = \mathbf{0{,}099\ rad/s}\ (\approx 1\ \text{rpm})$$

- Para $R = 100$ m, sustituyendo y operando:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{9{,}8\ \text{m/s}^2}{100\ \text{m}}} = \mathbf{0{,}31\ rad/s}\ (\approx 3\ \text{rpm})$$

62. Situando el origen del sistema de referencias en el Sol las componentes del vector posición del planeta Tierra cada 30 días viene dado por la siguiente tabla.

Fecha	r_x (10^{10} m)	r_y (10^{10} m)
4 julio	15,2	0,0
3 agosto	13,3	7,3
2 septiembre	8,2	12,7
2 octubre	0,9	14,9
1 noviembre	–6,6	13,3

a) Representa en tu cuaderno los cinco vectores posición del movimiento del planeta Tierra en cada fecha.

b) Representa en tu cuaderno la trayectoria del planeta según indican los vectores posición.

c) Representa en tu cuaderno los cuatro vectores desplazamiento consecutivos que se pueden trazar.

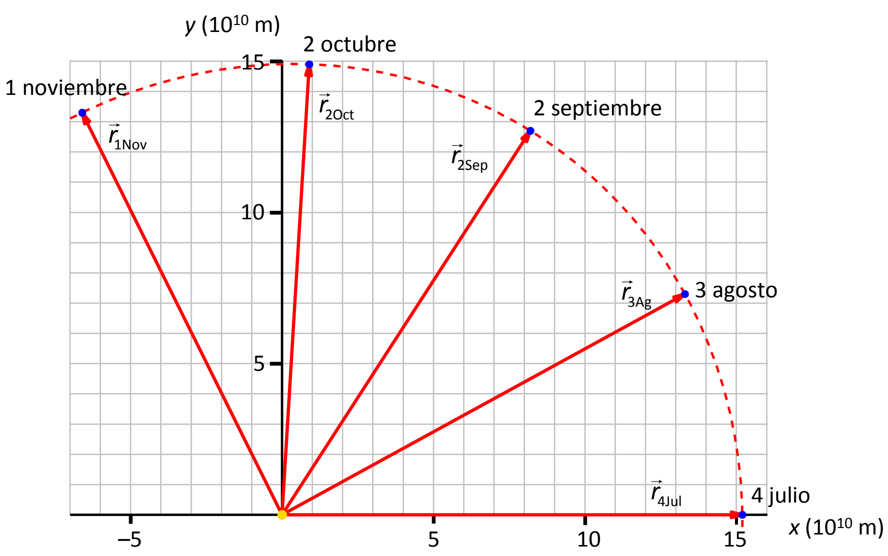
d) Calcula las componentes de cuatro vectores velocidad media, en unidades del SI. Escribe el resultado en una tabla similar a la anterior, asigna a cada vector la fecha intermedia de cada intervalo.

e) Representa en tu cuaderno los vectores velocidad media del movimiento del planeta Tierra. Considera la posición de la Tierra en la fecha de $\vec{v}$.

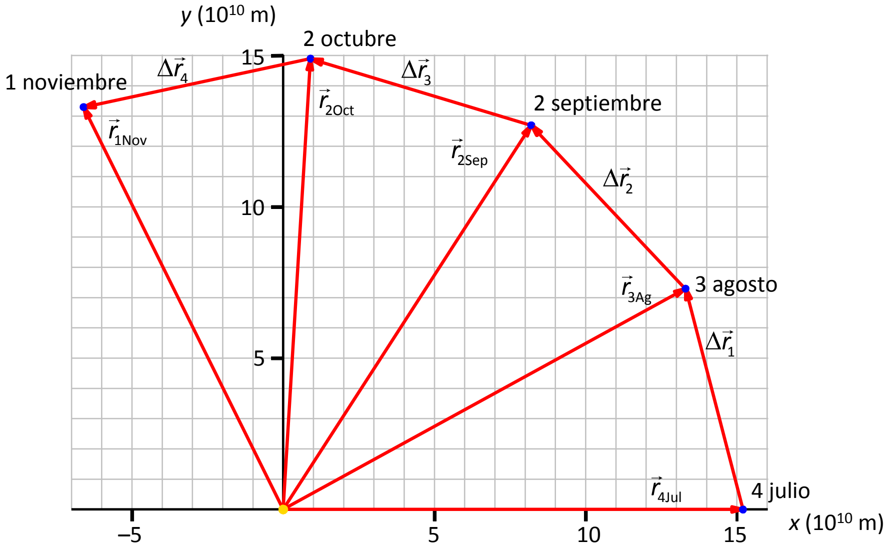
f) Calcula las componentes de tres vectores aceleración media en cm/s². Escribe el resultado en una tabla similar a la anterior.

g) Representa en tu cuaderno los vectores aceleración media. Considera la posición de la Tierra en la fecha de $\vec{a}$. ¿Adónde apuntan estos vectores?

a y b)



c)



d) Pasamos los 30 días a unidades del sistema internacional:

$$30\ \cancel{\text{día}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 2592000\ \text{s}$$

Para calcular la fecha intermedia hay que tener en cuenta que los datos de la tabla están separados 30 días. Por tanto, hay que sumar 15 días a la primera fecha. Calculamos el vector velocidad media para cada tramo:

$$\vec{v}_{19\text{Jul}} = \frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{3\text{Ag}} - \vec{r}_{4\text{Jul}}}{30\ \text{día}} = \frac{\left[\left(13{,}3\ \vec{i} + 7{,}3\ \vec{j}\right) - \left(15{,}2\ \vec{i}\right)\right] \cdot 10^{10}\ \text{m}}{2\,592\,000\ \text{s}} = -7330\ \vec{i} + 28\,164\ \vec{j}\ \text{m/s}$$

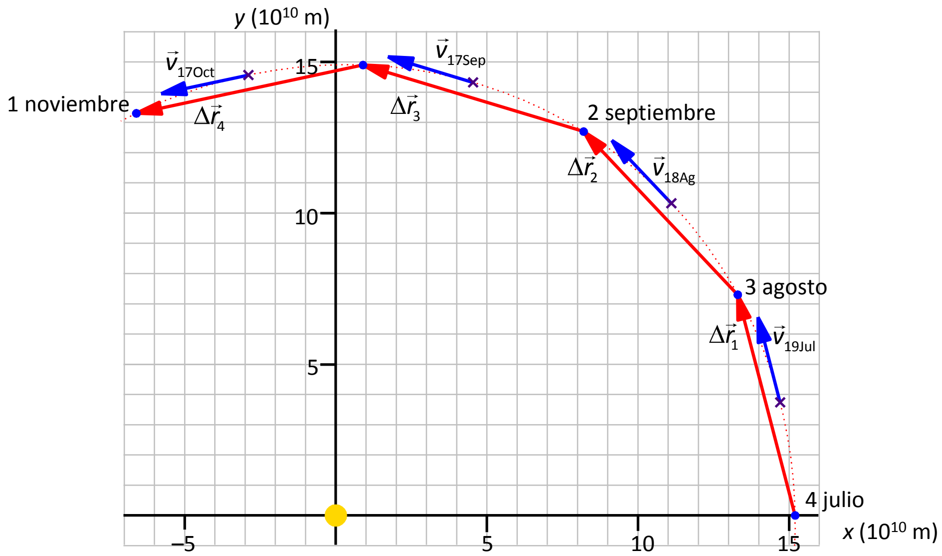
$$\vec{v}_{18\text{Ag}} = \frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{2\text{Sep}} - \vec{r}_{3\text{Ag}}}{30\ \text{día}} = \frac{\left[\left(8{,}2\ \vec{i} + 12{,}7\ \vec{j}\right) - \left(13{,}3\ \vec{i} + 7{,}3\ \vec{j}\right)\right] \cdot 10^{10}\ \text{m}}{2\,592\,000\ \text{s}} = -19\,676\ \vec{i} + 20\,833\ \vec{j}\ \text{m/s}$$

$$\vec{v}_{17\text{Sep}} = \frac{\Delta\vec{r}_3}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{2\text{Oct}} - \vec{r}_{2\text{Sep}}}{30\ \text{día}} = \frac{\left[\left(0{,}9\ \vec{i} + 14{,}9\ \vec{j}\right) - \left(8{,}2\ \vec{i} + 12{,}7\ \vec{j}\right)\right] \cdot 10^{10}\ \text{m}}{2\,592\,000\ \text{s}} = -28\,164\ \vec{i} + 8488\ \vec{j}\ \text{m/s}$$

$$\vec{v}_{17\text{Oct}} = \frac{\Delta\vec{r}_4}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{1\text{Nov}} - \vec{r}_{2\text{Oct}}}{30\ \text{día}} = \frac{\left[\left(-6{,}6\ \vec{i} + 13{,}3\ \vec{j}\right) - \left(0{,}9\ \vec{i} + 14{,}9\ \vec{j}\right)\right] \cdot 10^{10}\ \text{m}}{2\,592\,000\ \text{s}} = -28\,935\ \vec{i} - 6173\ \vec{j}\ \text{m/s}$$

Fecha	r_x (10^{10} m)	r_y (10^{10} m)	Fecha	v_x (m/s)	v_y (m/s)
4 julio	15,2	0,0			
			19 julio	**−7330**	**28 164**
3 agosto	13,3	7,3			
			18 agosto	**−19 676**	**20 833**
2 septiembre	8,2	12,7			
			17 septiembre	**−28 164**	**8488**
2 octubre	0,9	14,9			
			17 octubre	**−28 935**	**−6176**
1 noviembre	−6,6	13,3			

e)



f) Análogamente, calculamos la aceleración media:

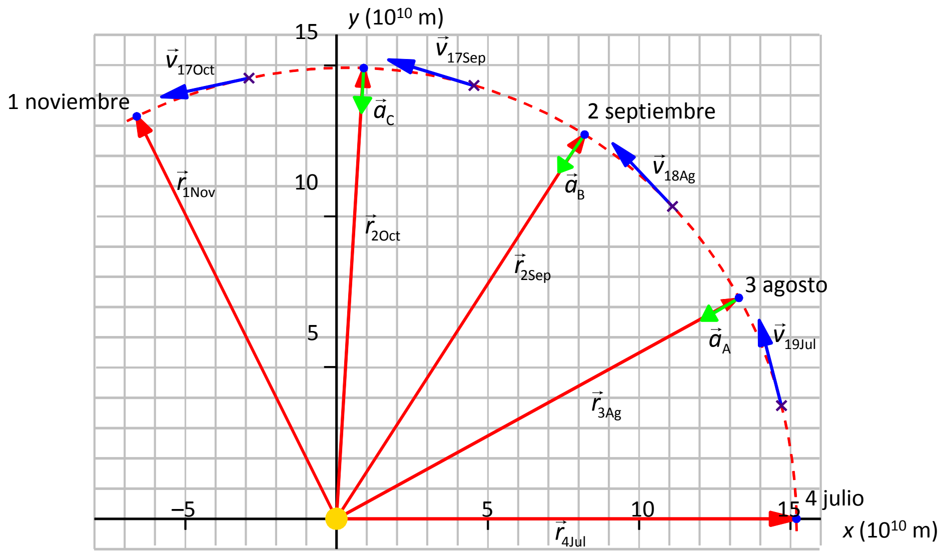
$$\vec{a}_A = \frac{\Delta\vec{v}_A}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{18Ag} - \vec{v}_{19Jul}}{30\ \text{día}} = \frac{\left[\left(-19\,676\ \vec{i} + 20\,833\ \vec{j}\right) - \left(-7330\ \vec{i} + 28\,164\ \vec{j}\right)\right]\ \text{m/s}}{2\,592\,000\ \text{s}} = -0{,}476\ \vec{i} - 0{,}283\ \vec{j}\ \text{m/s}^2$$

$$\vec{a}_B = \frac{\Delta\vec{v}_B}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{17Sep} - \vec{v}_{18Ag}}{30\ \text{día}} = \frac{\left[\left(-28\,164\ \vec{i} + 8488\ \vec{j}\right) - \left(-19\,676\ \vec{i} + 20\,833\ \vec{j}\right)\right]\ \text{m/s}}{2\,592\,000\ \text{s}} = -0{,}327\ \vec{i} - 0{,}476\ \vec{j}\ \text{m/s}^2$$

$$\vec{a}_C = \frac{\Delta\vec{v}_C}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{17Oct} - \vec{v}_{17Sep}}{30\ \text{día}} = \frac{\left[\left(-28\,935\ \vec{i} - 6173\ \vec{j}\right) - \left(-28\,164\ \vec{i} + 8488\ \vec{j}\right)\right]\ \text{m/s}}{2\,592\,000\ \text{s}} = -0{,}030\ \vec{i} - 0{,}566\ \vec{j}\ \text{m/s}^2$$

Fecha	r_x (10^{10} m)	r_y (10^{10} m)	Fecha	v_x (m/s)	v_y (m/s)	a_x (m/s²)	a_y (m/s²)
4 julio	15,2	0,0					
			19 julio	–7330	28 164		
3 agosto	13,3	7,3				**–0,476**	**–0,283**
			18 agosto	–19 676	20 833		
2 septiembre	8,2	12,7				**–0,327**	**–0,476**
			17 septiembre	–28 164	8488		
2 octubre	0,9	14,9				**–0,030**	**–0,566**
			17 octubre	–28 935	–6176		
1 noviembre	–6,6	13,3					

g)



Hacia el centro de la curva, en este caso hacia el Sol.

63. Un paracaidista se deja caer desde un globo aerostático con aceleración 9,8 m/s² desde una altura de 500 m. El paracaidista observa cómo se lanza desde el suelo en vertical y hacia arriba un proyectil con velocidad inicial 50 m/s. El proyectil también está sometido a la aceleración de la gravedad de 9,8 m/s² hacia abajo. Determina qué velocidad del proyectil observa el paracaidista durante su caída.

El paracaidista, al caer por el efecto de la gravedad, observa desde un sistema de referencia no inercial con $\vec{a}_{\text{sis}} = -9{,}8\ \vec{j}\ \text{m/s}^2$. El proyectil es el objeto observado, también está sometido a la aceleración de la gravedad, por eso $\vec{a}_{\text{obj}} = -9{,}8\ \vec{j}\ \text{m/s}^2$. Así que la aceleración del movimiento del proyectil que observa el paracaidista:

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_{\text{obj}} - \vec{a}_{\text{sis}} = -9{,}8\ \vec{j}\ \text{m/s}^2 - \left(-9{,}8\ \vec{j}\ \text{m/s}^2\right) = \vec{0}$$

El proyectil es observado por el paracaidista sin aceleración. Por tanto, mientras mantiene la caída libre, para el paracaidista conservará su velocidad inicial:

$$\boldsymbol{\vec{v}'_{\text{proyectil}} = +50\ \vec{j}\ \text{m/s}}$$

FÍSICA EN TU VIDA (página 222)

INTERPRETA

1. ¿Qué velocidad miden los radares fijos? ¿Y los radares de tramo?

Los radares fijos miden la velocidad instantánea. Los radares de tramo miden la velocidad media.

2. Un radar de tramo se sitúa en un túnel de 5,5 km. Por la entrada y salida del túnel pasan varios vehículos en los instantes que muestra la tabla.

Vehículo	Hora de entrada	Hora de salida
A	12:30:10	12:32:55
B	12:30:30	12:32:45
C	12:30:40	12:33:45

¿Qué vehículos serán sancionados, si la velocidad permitida en este tramo es 120 km/h?

Hay un tiempo mínimo, Δt_{L}, para recorrer el tramo sin rebasar el límite de velocidad, v_{L}.
En este caso ese tiempo es:

$$x = v_{\text{L}} \cdot \Delta t_{\text{L}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_{\text{L}} = \frac{x}{v_{\text{L}}} = \frac{5{,}5\ \text{km}}{120\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{5{,}5}{120}\ \text{h} = \frac{5{,}5}{120}\ \text{h} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \text{h}} = 165\ \text{s}$$

Cualquier vehículo que emplee menos tiempo en recorrer el tramo habrá superado el límite de velocidad.

A $\Delta t_{\text{A}} = t_{\text{A,salida}} - t_{\text{A,entrada}} = (12\ \text{h}\ 32\ \text{min}\ 55\ \text{s}) - (12\ \text{h}\ 30\ \text{min}\ 10\ \text{s}) = 2\ \text{min}\ 45\ \text{s} = 165\ \text{s}$

$$\Delta t_{\text{A}} = 165\ \text{s} = \Delta t_{\text{L}}$$

El vehículo A recorrió el tramo exactamente a la velocidad límite. **No será sancionado**.

B $\Delta t_{\text{B}} = t_{\text{B,salida}} - t_{\text{B,entrada}} = (12\ \text{h}\ 32\ \text{min}\ 45\ \text{s}) - (12\ \text{h}\ 30\ \text{min}\ 30\ \text{s}) = 2\ \text{min}\ 15\ \text{s} = 135\ \text{s}$

$$\Delta t_{\text{B}} = 135\ \text{s} < 165\ \text{s} = \Delta t_{\text{L}}$$

El vehículo B recorrió el tramo en menos tiempo que el límite, superó la velocidad. **Será sancionado**.

C $\Delta t_{\text{C}} = t_{\text{C,salida}} - t_{\text{C,entrada}} = (12\ \text{h}\ 33\ \text{min}\ 45\ \text{s}) - (12\ \text{h}\ 30\ \text{min}\ 40\ \text{s}) = 3\ \text{min}\ 5\ \text{s} = 185\ \text{s}$

$$\Delta t_{\text{C}} = 185\ \text{s} > 165\ \text{s} = \Delta t_{\text{L}}$$

El vehículo C recorrió el tramo en más tiempo que el límite, no superó la velocidad. **No será sancionado**.

USA LAS TIC

3. Con los datos de la tabla anterior, elabora una hoja de cálculo que determine la velocidad media de los vehículos usando los datos de tiempos que establezca si un vehículo sobrepasa el límite permitido. Presta atención al formato de las celdas para expresar el tiempo en las unidades adecuadas.

Una posible manera de presentar la hoja de cálculo:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		**Longitud del tramo**		5,5 km =		5500 m			
3									
4		**Vehículo**	**Hora de entrada**	**Hora de salida**	**Tiempo empleado**	***t* (s)**	***v* (m/s)**	***v* (km/h)**	
5		**A**	12:30:10	12:32:55	0:02:45	165	33	120	
6		**B**	12:30:30	12:32:45	0:02:15	135	41	147	
7		**C**	12:30:40	12:33:45	0:03:05	185	30	107	
8			**Formato de las medidas de tiempo**		**hh:mm:ss**				
9									

Los datos y las fórmulas:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		**Longitud del tramo**		5,5	km =	=D2*1000	m		
3									
4		**Vehículo**	**Hora de entrada**	**Hora de salida**	**Tiempo empleado**	***t* (s)**	***v* (m/s)**	***v* (km/h)**	
5		**A**	0,520949074074074	0,522858796296296	=D5-C5	=E5*3600*24	=$F$2/F5	=G5*3,6	
6		**B**	0,521180555555556	0,522743055555556	=D6-C6	=E6*3600*24	=$F$2/F6	=G6*3,6	
7		**C**	0,521296296296296	0,5234375	=D7-C7	=E7*3600*24	=$F$2/F7	=G7*3,6	
8			**Formato de las medidas de tiempo**		**hh:mm:ss**				

OPINA

4. ¿Crees que es mejor usar controles de velocidad en tramo que radares fijos?

Dependerá del objetivo.

Un radar fijo es muy oportuno situado poca distancia antes de un punto conflictivo de la vía (la proximidad de un cruce, una rampa descendente en la que es necesario controlar mejor la velocidad, una curva peligrosa, …). Así se disuade de superar el límite en caso de que la seguridad esté comprometida, tanto para el mismo conductor como para otros conductores.

Ahora bien si se trata, no de un punto conflictivo, sino de varios kilómetros en los que mantener la velocidad es crucial (un túnel donde un accidente con posible incendio sería un gran peligro, una rampa ascendente donde es preciso moderar la emisión de gases producto de la combustión, …) es mejor un control de velocidad en tramo.

REFLEXIONA

5. ¿Qué otras maneras de controlar la velocidad se te ocurren?

Control externo usando multas, en el que se usa como herramienta el radar. Ya existen radares móviles en vehículos que quedando estacionados junto a la vía, o en movimiento, detectan la velocidad de otro vehículo en circulación. Desde coches patrulla incluso desde helicópteros. Otros radares más sencillos se instalan sobre un trípode junto a la vía para una intervención puntual.

Control externo de imposibilidad en el vehículo. Hay proyectos, de ingeniería y legales, que tienen como objetivo que los vehículos a motor, ya desde fábrica, vengan limitados para no superar el límite de velocidad.

Autocontrol del conductor. También en los mismos vehículos hay sistemas automáticos del control de la velocidad. El regulador que compara la velocidad a la que circula el coche con la velocidad de referencia indicada por el conductor con el objetivo de controlar automáticamente el flujo de combustible que consume el motor. El limitador que en una conducción «normal» impide que el coche vaya más deprisa que la velocidad indicada.

Y un largo etcétera.

8

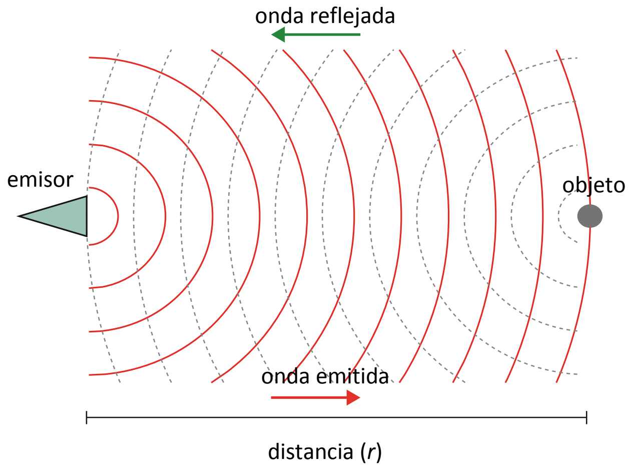
Tipos de movimientos

Tipos de movimientos 8

PARA COMENZAR (página 209)

- **¿Cómo funciona un radar? Elabora un esquema**

  Su funcionamiento se basa en la emisión de ondas electromagnéticas que se reflejan al chocar con el obstáculo (objetivo), regresando a la fuente de emisión. Estas ondas se desplazan a la velocidad de la luz
  (299 792 km/s), midiendo el tiempo que tardan en ir y volver es posible calcular la distancia al obstáculo.



- **¿Cuánto tarda en recibir una señal un radar que detecta un avión situado a 60 km de distancia?**

  Teniendo en cuenta la velocidad de la luz, hallamos el tiempo:

$$v=\frac{e}{t}\quad\Rightarrow\quad t=\frac{e}{v}=\frac{60\ \cancel{\text{km}}}{299\,792\ \frac{\cancel{\text{km}}}{\text{s}}}=2\cdot 10^{-4}\ \text{s}$$

PRACTICA (página 210)

1. Halla el dominio y recorrido de la función $f(x)=\sqrt{x^2-9}$.

- Dominio: El radicando tiene que ser un número mayor o igual que cero:
  $x^2-9\geq 0\Rightarrow (x-3)\cdot(x+3)\geq 0$, es decir, el dominio es el intervalo $(+\infty,-3]\cup[3,+\infty)$.

$$\mathbf{Dom}\,(f)=(+\infty,-3]\cup[3,+\infty)$$

- Recorrido: La raíz puede ser positiva o negativa. Para que sea función, a cada x le debe corresponder una única y. Escogemos por ejemplo los valores positivos de la raíz y el recorrido es el intervalo $[0,+\infty)$.

$$\mathbf{Rec}\,(f)=[0,+\infty)$$

2. Expresa en radianes y revoluciones los siguientes ángulos:

a) 720° **b) 270°** **c) 90°**

Convertimos los ángulos, expresados en grados, a radianes:

a) $720°\cdot\dfrac{2\pi\ \text{rad}}{360°}=\dfrac{720°\cdot 2\pi}{360°}\text{rad}=\mathbf{4\pi\ rad}$

b) $270°\cdot\dfrac{2\pi\ \text{rad}}{360°}=\dfrac{270°\cdot 2\pi}{360°}\text{rad}=\mathbf{\dfrac{3\pi}{2}\ rad}$

c) $90°\cdot\dfrac{2\pi\ \text{rad}}{360°}=\dfrac{90°\cdot 2\pi}{360°}\text{rad}=\mathbf{\dfrac{\pi}{2}\ rad}$

Convertimos los ángulos, expresados en grados, a revoluciones:

a) $720°\cdot\dfrac{1\ \text{rev}}{360°}=\dfrac{720°}{360°}\text{rev}=\mathbf{2\ rev}$

b) $270°\cdot\dfrac{1\ \text{rev}}{360°}=\dfrac{270°}{360°}\text{rev}=\mathbf{0,75\ rev}$

c) $90°\cdot\dfrac{1\ \text{rev}}{360°}=\dfrac{90°}{360°}\text{rev}=\mathbf{0,25\ rev}$

PRACTICA (página 211)

3. Una piedra se deja caer y tarda 2,5 s en llegar al suelo. Dato: $g = 9{,}8$ m/s.

a) ¿Qué tipo de movimiento lleva?

b) ¿Cuál es la velocidad con la que llega al suelo?

c) Calcula el espacio recorrido.

a) Lleva un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA) bajo la aceleración de la gravedad.

b) Escribimos la ecuación de la velocidad:

$$v = v_0 - g \cdot t = 0 - 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2{,}5\,\text{s} = \mathbf{-24{,}5\ m/s}$$

c) Escribimos la ecuación de la posición:

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

El espacio recorrido será el valor absoluto de la diferencia entre su posición final y su posición inicial:

$$|y - y_0| = \left|v_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2\right| = \left|0 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2{,}5\,\text{s})^2\right| = \mathbf{30{,}6\ m}$$

4. Un coche de juguete da una vuelta a un circuito circular de 2 m de radio cada 20 segundos.

a) Calcula su velocidad angular.

b) ¿Qué espacio recorre durante un minuto?

a) El coche da una vuelta cada 20 s. Como 1 vuelta = 2π rad, su velocidad angular es:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi\,\text{rad}}{20\,\text{s}} = \mathbf{0{,}1\pi\ rad/s}$$

b) Para calcular el espacio recorrido en primer lugar calculamos el ángulo de giro en dicho tiempo:

$$\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t = 0{,}1\pi\,\frac{\text{rad}}{\cancel{\text{s}}} \cdot 60\,\cancel{\text{s}} = \mathbf{6\pi\ rad}$$

Sustituimos y tenemos que el espacio que recorre en un minuto es:

$$s = \Delta\theta \cdot R = 6\pi\ \text{rad} \cdot 2\ \text{m} = 12\pi\ \text{m} = \mathbf{37{,}7\ m}$$

ACTIVIDAD (página 212)

5. La posición inicial de un móvil es $\vec{r}_0 = 2\,\vec{i}$; su velocidad $\vec{v} = 2\,\vec{i}$. Calcula la ecuación del vector posición y escribe en forma escalar la ecuación del MRU.

Escribimos el vector posición:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{i} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\vec{r}(t) = (2 + 2t)\,\vec{i}}$$

Como el vector posición solo tiene componente en el eje *X*, podemos escribir:

$$x = x_0 + v \cdot t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x(t) = 2 + 2 \cdot t\ m}$$

ACTIVIDADES (página 213)

6. La velocidad de un barco es de 40 nudos. Sabiendo que un nudo corresponde a una velocidad de 1 milla náutica/h y que una milla náutica equivale a 1,852 km, calcula la velocidad del barco en m/s.

$$v = 40\,\text{nudos} = 40\,\frac{\cancel{\text{millas}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600\,\text{s}} \cdot \frac{1{,}852\,\cancel{\text{km}}}{1\,\cancel{\text{milla}}} \cdot \frac{10^3\,\text{m}}{1\,\cancel{\text{km}}} = \mathbf{20{,}5\overset{\frown}{7}\ m/s}$$

7. **La ecuación de movimiento de un ciclista durante una contrarreloj es la siguiente:**

$$\boldsymbol{x(t) = 45 \cdot t}$$

(El espacio se expresa en km, y el tiempo, en horas).

a) **Compara con la ecuación del MRU, ¿cuál es el valor de x_0?**

b) **¿Cuál es la velocidad del ciclista? Expresa el resultado en km/h y en m/s.**

c) **¿Cuánto tiempo emplea en recorrer 55 km?**

a) La ecuación del MRU en forma escalar es: $x(t) = x_0 + v \cdot t$. Por tanto:

$$x_0 = \mathbf{0\ km}$$

b) La velocidad del ciclista en km/h será:

$$v = \mathbf{45\,\frac{km}{h}}$$

Pasando las unidades de la velocidad a m/s:

$$v = 45\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{10^3\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = \mathbf{12{,}5\,\frac{m}{s}}$$

c) Hallamos el tiempo que tarda el ciclista en recorrer 55 km:

$$x(t) = x_0 + v \cdot t \quad \Rightarrow \quad x(t) = 45 \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{55\ \cancel{\text{km}}}{45\,\dfrac{\cancel{\text{km}}}{\text{h}}} = 1{,}\widehat{2}\ \text{h}$$

$$t = 1{,}\widehat{2}\ \text{h} = 1\ \text{h} + 0{,}\widehat{2}\ \cancel{\text{h}} \cdot \frac{60\ \text{min}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 1\ \text{h} + 13{,}\widehat{3}\ \text{min} = 1\ \text{h} + 13\ \text{min} + 0{,}\widehat{3}\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} = \mathbf{1\ h + 13\ min + 20\ s}$$

ACTIVIDADES (página 215)

8. **La posición inicial de un móvil es $\vec{r}_0 = 2\,\vec{i}$ m; su velocidad inicial, $\vec{v}_0 = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j}$ m/s; y la aceleración, $\vec{a} = 0{,}6\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j}$ m/s^2.**

a) **Calcula la velocidad y la posición en los instantes $t_1 = 1$ s; y, $t_2 = 2$ s.**

b) **Representa en un diagrama cartesiano las tres posiciones y en cada posición su vector velocidad.**

c) **¿Corresponde con un movimiento con aceleración uniforme? ¿Es rectilíneo?**

a) Escribimos los vectores posición y velocidad:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = 2\,\vec{i} + (3\,\vec{i} - 4\,\vec{j}) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (0{,}3\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j}) \cdot t^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = (3\,\vec{i} - 4\,\vec{j}) + (0{,}3\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j}) \cdot t$$

Agrupamos:

$$\vec{r}(t) = (2 + 3 \cdot t + 0{,}15 \cdot t^2)\,\vec{i} + (-4 \cdot t + 0{,}4 \cdot t^2)\,\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = (3 + 0{,}3 \cdot t)\,\vec{i} + (-4 + 0{,}8 \cdot t)\,\vec{j}$$

Calculamos la posición para los instantes $t_1 = 1$ s; y, $t_2 = 2$ s:

$$\vec{r}_1\,(t = 1\ \text{s}) = (2 + 3 \cdot 1 + 0{,}15 \cdot 1^2)\,\vec{i} + (-4 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 1^2)\,\vec{j} = \mathbf{5{,}15\,\vec{i} - 3{,}6\,\vec{j}\ m}$$

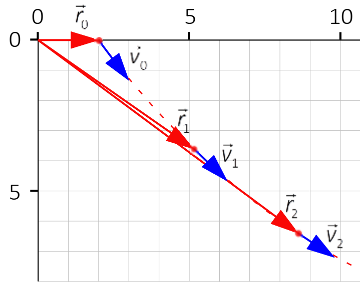
$$\vec{r}_2\,(t = 2\ \text{s}) = (2 + 3 \cdot 2 + 0{,}15 \cdot 2^2)\,\vec{i} + (-4 \cdot 2 + 0{,}4 \cdot 2^2)\,\vec{j} = \mathbf{8{,}6\,\vec{i} - 6{,}4\,\vec{j}\ m}$$

Análogamente, calculamos la velocidad para los instantes $t_1 = 1$ s; y, $t_2 = 2$ s:

$$\vec{v}_1(t = 1\ \text{s}) = (3 + 0{,}3 \cdot 1)\,\vec{i} + (-4 + 0{,}8 \cdot 1)\,\vec{j} = \mathbf{3{,}3\,\vec{i} - 3{,}2\,\vec{j}\ m/s}$$

$$\vec{v}_2(t = 2\ \text{s}) = (3 + 0{,}3 \cdot 2)\,\vec{i} + (-4 + 0{,}8 \cdot 2)\,\vec{j} = \mathbf{3{,}6\,\vec{i} - 2{,}4\,\vec{j}\ m/s}$$

b)



c) No es rectilíneo, ya que su trayectoria no es una línea recta. Es uniformemente acelerado, ya que $\vec{a}$ = cte., no depende del tiempo.

9. **La posición inicial de un móvil es $\vec{r}_0 = 2\,\vec{i}$ m; su velocidad inicial, $\vec{v}_0 = 2\,\vec{i} + 1{,}5\,\vec{j}$ m/s; y aceleración, $\vec{a} = 0{,}4\,\vec{i} + 0{,}3\,\vec{j}$ m/s^2.**

a) Calcula la velocidad y la posición en los instantes $t_1 = 1$ s; y, $t_2 = 2$ s.

b) Representa en un diagrama cartesiano las tres posiciones y en cada posición su vector velocidad.

c) ¿Corresponde con un movimiento con aceleración uniforme? ¿Es rectilíneo?

a) Escribimos los vectores posición y velocidad:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = 2\,\vec{i} + (2\,\vec{i} + 1{,}5\,\vec{j}) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (0{,}4\,\vec{i} + 0{,}3\,\vec{j}) \cdot t^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = (2\,\vec{i} + 1{,}5\,\vec{j}) + (0{,}4\,\vec{i} + 0{,}3\,\vec{j}) \cdot t$$

Agrupamos:

$$\vec{r}(t) = (2 + 2 \cdot t + 0{,}2 \cdot t^2)\,\vec{i} + (1{,}5 \cdot t + 0{,}15 \cdot t^2)\,\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = (2 + 0{,}4 \cdot t)\,\vec{i} + (1{,}5 + 0{,}3 \cdot t)\,\vec{j}$$

Calculamos la posición para los instantes $t_1 = 1$ s; y, $t_2 = 2$ s:

$$\vec{r}_1(t = 1\text{ s}) = (2 + 2 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 1^2)\,\vec{i} + (1{,}5 \cdot 1 + 0{,}15 \cdot 1^2)\,\vec{j} = \mathbf{4{,}2\,\vec{i} + 1{,}65\,\vec{j}\text{ m}}$$

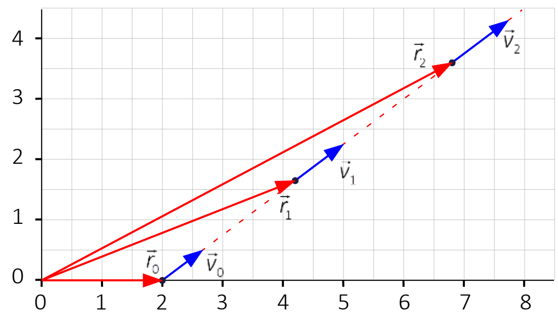
$$\vec{r}_2(t = 2\text{ s}) = (2 + 2 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 2^2)\,\vec{i} + (1{,}5 \cdot 2 + 0{,}15 \cdot 2^2)\,\vec{j} = \mathbf{6{,}8\,\vec{i} + 3{,}6\,\vec{j}\text{ m}}$$

Análogamente, calculamos la velocidad para los instantes $t_1 = 1$ s; y, $t_2 = 2$ s:

$$\vec{v}_1(t = 1\text{ s}) = (2 + 0{,}4 \cdot 1)\,\vec{i} + (1{,}5 + 0{,}3 \cdot 1)\,\vec{j} = \mathbf{2{,}4\,\vec{i} + 1{,}8\,\vec{j}\text{ m/s}}$$

$$\vec{v}_2(t = 2\text{ s}) = (2 + 0{,}4 \cdot 2)\,\vec{i} + (1{,}5 + 0{,}3 \cdot 2)\,\vec{j} = \mathbf{2{,}8\,\vec{i} + 2{,}1\,\vec{j}\text{ m/s}}$$

b)



c) Es rectilíneo, ya que su trayectoria es una línea recta. Es uniformemente acelerado, ya que $\vec{a}$ = cte., no depende del tiempo.

ACTIVIDADES (página 216)

10. Una conductora circula a una velocidad de 90 km/h observa un obstáculo en la calzada. Justo en ese momento pisa el freno, lo que proporciona al vehículo una deceleración constante de 1,5 m/s². Calcula la distancia desde su vehículo hasta el obstáculo si se detiene justo ante él al cabo de 10 s.

Es un movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado. Expresamos la velocidad inicial en m/s:

$$v_0 = 90\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1000\,\text{m}}{1\,\cancel{\text{km}}}\cdot\frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600\,\text{s}} = 25\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aplicando la ecuación de la posición del MRUA:

$$x = x_0 + v_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 = 0 + 25\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 10\text{ s} + \frac{1}{2}\cdot\left(-1{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\cdot(10\text{ s})^2 = \mathbf{175\ m}$$

11. Un móvil se desliza sobre una superficie horizontal a una velocidad de 5 m/s. Sobre este móvil actúa una fuerza de rozamiento, que lo frena con una aceleración de 0,5 m/s². Calcula la velocidad después de recorrer 8 m y el espacio que recorre hasta pararse.

Es un movimiento rectilíneo uniformemente decelerado. La velocidad después de recorrer 8 m se puede calcular con la ecuación:

$$v^2 - v_0^2 = 2\cdot a\cdot\Delta x \quad\Rightarrow\quad v^2 = v_0^2 + 2\cdot a\cdot\Delta x$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\cdot a\cdot\Delta x} = \sqrt{\left(5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2\cdot 0{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 8\text{ m}} = \mathbf{4{,}12\frac{m}{s}}$$

Como cuando se pare $v = 0$, hallamos el tiempo que tarda en pararse con la ecuación:

$$v = v_0 + a\cdot t \quad\Rightarrow\quad t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 5\frac{\text{m}}{\text{s}}}{-0{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 10\text{ s}$$

El espacio recorrido hasta pararse es:

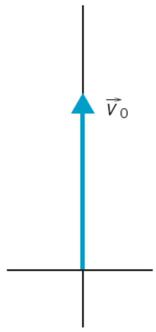
$$x = x_0 + v_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 = 0 + 5\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 10\text{ s} + \frac{1}{2}\cdot\left(-0{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\cdot(10\text{ s})^2 = \mathbf{25\ m}$$

ACTIVIDADES (página 219)

12. Al hacer un tiro en suspensión un jugador de baloncesto lanza un balón desde el aire:

a) ¿Qué debe hacer un jugador de baloncesto para estar el máximo tiempo posible en el aire?

b) Si un jugador puede estar 0,6 s en el aire y sube unos 44 cm, ¿cuál es su velocidad de salto?



a) Se trata de un lanzamiento vertical. El tiempo que está en el aire depende solo de la velocidad vertical en el momento del salto, y es independiente de la velocidad horizontal (velocidad a la que corre). Lo que debe hacer es **impulsarse lo máximo posible hacia arriba**.

b) La ecuación del movimiento del jugador es:

$$y = y_0 + v_0\cdot t - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$

Haciendo $y = 0$ y sustituyendo t por 0,6 s (tiempo que tarda en subir y bajar) se calcula v_0:

$$0 = 0 + v_0\cdot t\cdot - \frac{1}{2}\cdot g\cdot(t)^2 \quad\Rightarrow\quad \left(v_0 - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t\right)\cdot t = 0 \quad\Rightarrow\quad v_0 - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t = 0$$

$$v_0 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}6 \text{ s} = \mathbf{2{,}94 \text{ m/s}}$$

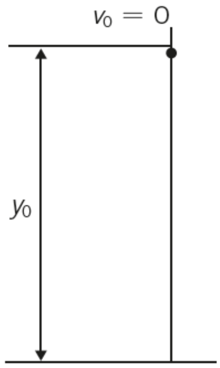
13. Se deja caer una pelota desde la azotea de un edificio de 44 m de altura:

a) Calcula el tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo.

b) ¿Con qué velocidad (expresada en km/h) llega al suelo la pelota del apartado anterior?

a) Se trata de un movimiento de caída libre desde el reposo. La ecuación del movimiento tomando el origen de coordenadas en la superficie de la Tierra es:

$$y = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$



Cuando la pelota llega al suelo $y = 0$:

$$0 = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 44 \cancel{\text{m}}}{9{,}8 \cancel{\text{m}}/\text{s}^2}} = \mathbf{3 \text{ s}}$$

b) La velocidad con la que llega al suelo será:

$$v = v_0 - g \cdot t = 0 - 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 3 \text{ s} = -29{,}4 \text{ m/s}$$

Expresamos la velocidad en km/h:

$$v_0 = -29{,}4 \frac{\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{s}}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \cancel{\text{m}}} \cdot \frac{3600 \cancel{\text{s}}}{1 \text{ h}} = \mathbf{-106 \frac{km}{h}}$$

ACTIVIDADES (página 222)

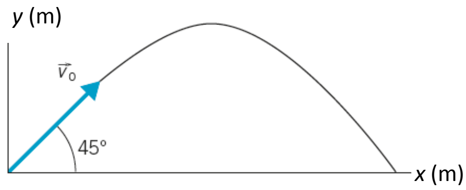
14. Un futbolista chuta hacia la portería con una velocidad inicial de 17 m/s y un ángulo de tiro con la horizontal de 45°. Calcula:

a) El alcance máximo.

b) El tiempo de vuelo.

a) Alcance:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen } 2\alpha}{g} = \frac{(17 \text{ m/s})^2 \cdot \text{sen } 90°}{9{,}8 \text{ m/s}^2} = \mathbf{29{,}5 \text{ m}}$$



a) Tiempo de vuelo:

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{2 v_0 \cdot \text{sen } \alpha}{g} = \frac{2 \cdot 17 \text{ m/s} \cdot \text{sen } 45°}{9{,}8 \text{ m/s}^2} = \mathbf{2{,}45 \text{ s}}$$

15. Contesta:

a) ¿Con qué velocidad hay que lanzar un balón de fútbol para que, si lo golpeamos con un ángulo de 45° respecto a la horizontal, llegue al otro extremo de un campo de 100 m de largo?

b) Cuando el balón va por el aire, ¿a qué distancia horizontal del punto de lanzamiento estaría el balón a 1,80 m por encima del suelo?

a) A partir de la ecuación del alcance con $\alpha = 45°$:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen } 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen } 90°}{g} = \frac{v_0^2}{g} \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = g \cdot x_{\text{máx}} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{g \cdot x_{\text{máx}}}$$

$$v_0 = \sqrt{9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 100 \text{ m}} = \mathbf{31{,}30 \text{ m/s}}$$

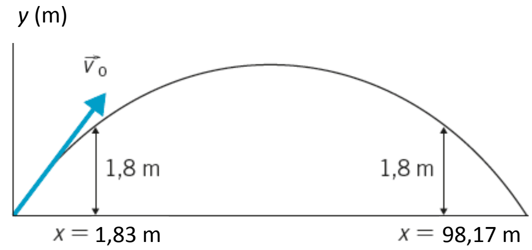
b) Hay dos puntos a 1,80 m del suelo. Las ecuaciones del movimiento del balón son:

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$$

$$y = v_0 \cdot \text{sen } \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Sustituimos en la segunda ecuación y por 1,80 m y v_0 por 31,30 m/s:

$$1{,}80\ \text{m} = 31{,}30\ \text{m/s} \cdot \text{sen}\,45° \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot t^2$$



Es una ecuación de segundo grado con la incógnita en t, resulta:

$$t_1 = 0{,}083\,\text{s} \text{ y } t_2 = 4{,}43\,\text{s}$$

Sustituyendo ahora en la ecuación del movimiento del eje X:

$$x_1 = 31{,}30\,\text{m/s} \cdot \cos 45° \cdot 0{,}083 = \mathbf{1{,}83\,m}$$

$$x_2 = 31{,}30\,\text{m/s} \cdot \cos 45° \cdot 4{,}43 = \mathbf{98{,}17\,m}$$

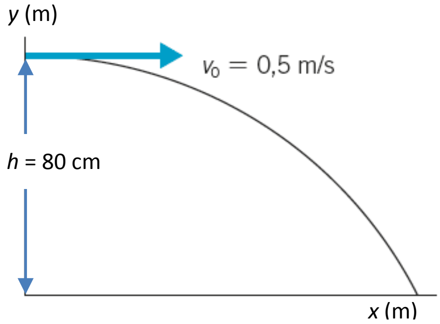
La suma de x_1 y x_2 es 100 m, como debe ser. Ambos puntos se encuentran a 1,83 m del origen y del final de la trayectoria.

ACTIVIDADES (página 223)

16. Una bola que rueda sobre una mesa con una velocidad de 0,5 m/s al llegar al borde cae al suelo. Si la altura de la mesa es de 80 cm, calcula:

a) El tiempo que tarda en caer.

b) La distancia horizontal recorrida desde la vertical de la mesa hasta el punto en el que la bola choca con el suelo.



a) Las ecuaciones del movimiento del balón son:

$$x = v_0 \cdot t$$

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

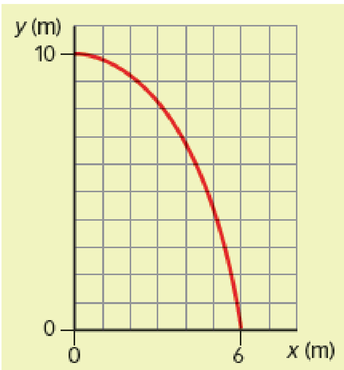
Haciendo $y = 0$ m despejamos t y calculamos el tiempo que tarda en caer:

$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}80\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = \mathbf{0{,}40\ s}$$

b) La distancia recorrida es:

$$x = v_0 \cdot t = 0{,}5\ \text{m/s} \cdot 0{,}40\ \text{s} = \mathbf{0{,}20\ m}$$

17. Se lanza horizontalmente una pelota desde un balcón a 10 m de altura sobre el suelo y cae a 6 metros de la vertical de la terraza.



a) ¿Cuánto tarda en llegar al suelo?

b) ¿Con qué velocidad se lanzó?

a) Las ecuaciones del movimiento del balón son:

$$x = v_0 \cdot t$$

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \text{(origen en el suelo)}$$

De la segunda, al sustituir y por 0 m se obtiene el tiempo que tarda en llegar al suelo:

$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = \mathbf{1{,}43\ s}$$

b) De la primera despejamos v_0 y sustituimos los valores conocidos:

$$x = v_0 \cdot t \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{x}{t} = \frac{6\ \text{m}}{1{,}43\ \text{s}} = \mathbf{4{,}2\ m/s}$$

ACTIVIDADES (página 224)

18. Queremos clavar un dardo en una diana cuyo centro está por encima de nuestra mano al lanzar.

a) ¿Debemos apuntar directamente al blanco?

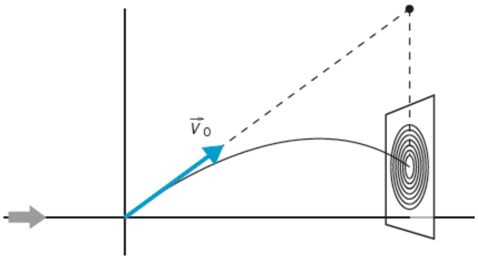
b) ¿Más arriba? ¿Más abajo? ¿Por qué?

a) **No**, porque el dardo, según recorre distancias horizontales, también está afectado en vertical por la gravedad. Mientras se desplaza en el eje horizontal, estará cayendo en el eje vertical.

b) Hay que apuntar **más arriba**, de forma que impacte en un punto inferior al que se apunta. Todo ello se puede comprobar a partir de las ecuaciones del movimiento y la figura.

$$x = v_{0x} \cdot t$$

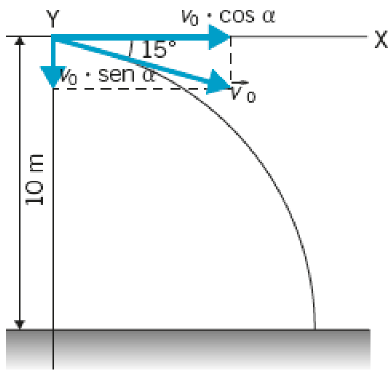
$$y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$



19. Tiran una pelota desde un balcón a 10 m de altura con velocidad inicial de 18 km/h y ángulo de 15° por debajo de la horizontal. ¿Cuándo y dónde llega al suelo? ¿Y si se lanza con ángulo de 15° por encima de la horizontal?

$$v = 18 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ecuación del movimiento de la pelota según el eje *Y*:



$$y = h - v_0 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Al sustituir *y* por 0 m se consigue una ecuación de segundo grado con la incógnita en la variable tiempo:

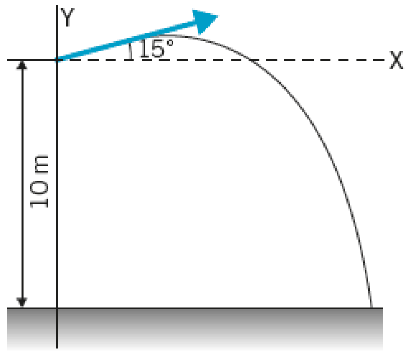
$$0 = 10\ \text{m} - 5\ \text{m/s} \cdot \text{sen}\ 15° \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot t^2$$

$$4{,}9\ t^2 + 1{,}29\ t - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \mathbf{1{,}3\ s}$$

Ecuación del movimiento de la pelota según el eje *X*:

$$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t = 5\ \text{m/s} \cdot \cos 15° \cdot 1{,}3\ \text{s} = \mathbf{6{,}3\ m}$$

Si se lanza con ángulo de 15° por encima de la horizontal, la ecuación de movimiento según el eje *Y* es ahora:



$$y = h + v_0 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Al sustituir *y* por 0 m se obtiene el tiempo en llegar al suelo:

$$0 = 10\ \text{m} + 5\ \text{m/s} \cdot \text{sen}\ 15° \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot t^2$$

$$4{,}9\ t^2 - 1{,}29\ t - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \mathbf{1{,}6\ s}$$

Y al sustituir en la ecuación del movimiento de la pelota según el eje *X*:

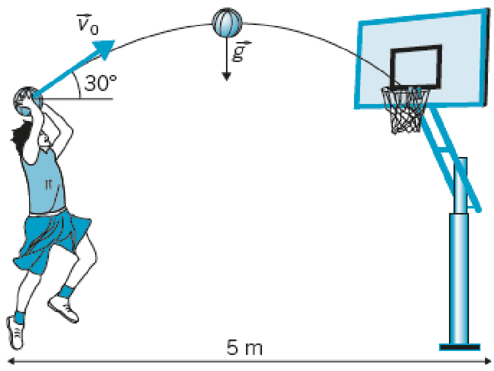
$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t = 5\ \text{m/s} \cdot \cos 15° \cdot 1{,}6\ \text{s} = \mathbf{7{,}6\ m}$$

20. Si un jugador de baloncesto lanza un tiro libre con un ángulo de 30° respecto a la horizontal desde una altura de 2,20 m sobre el suelo, ¿con qué velocidad ha de lanzar la pelota sabiendo que la distancia horizontal del punto de tiro al aro es de 5 m y que este está a 3,05 m de altura?

Las ecuaciones del movimiento de la pelota son:

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$$

$$y = h + v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$



Se despeja t de la primera:

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}$$

Y al sustituir t en la segunda se obtiene la ecuación de la trayectoria:

$$y = h + \cancel{v_0} \cdot \text{sen}\ \alpha \cdot \frac{x}{\cancel{v_0} \cdot \cos \alpha} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}\right)^2 = h + x \cdot \text{tg}\ \alpha - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2$$

Se despeja v_0, y se sustituye: y por 3,05 m, h por 2,2 m, x por 5 m, y α por 30°.

$$v_0 = \sqrt{\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot (h + x \cdot \text{tg}\ \alpha - y)}} = \sqrt{\frac{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (5\ \text{m})^2}{2 \cdot \cos^2 30° \cdot (2{,}2\ \text{m} + 5\ \text{m} \cdot \text{tg}\ 30° - 3{,}05\ \text{m})}} = \mathbf{8{,}96\ \frac{m}{s}}$$

ACTIVIDADES (página 226)

21. Un disco de 40 cm de radio gira a 33 rpm. Calcula:

a) La velocidad angular en rad/s.

b) La velocidad angular en rad/s en un punto situado a 20 cm del centro.

a) $\omega = 33 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60\ \text{s}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \cancel{\text{rev}}} = 1{,}1\pi\ \text{rad/s} = \mathbf{3{,}46\ rad/s}$

b) Es la misma, ya que no varía con el radio. Es la velocidad lineal la que varía con el radio: $v = \omega \cdot R$.

Por tanto: $\omega = \mathbf{3{,}46\ rad/s}$.

22. Calcula la velocidad lineal del borde de una rueda de 75 cm de diámetro si gira a 1000 rpm.

$$\omega = 1000 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60\ \text{s}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \cancel{\text{rev}}} = 33{,}\widehat{3}\pi\ \text{rad/s}$$

Calculamos la velocidad lineal:

$$v = \omega \cdot R = \omega \cdot \frac{D}{2} = 33{,}\widehat{3}\pi\ \text{rad/s} \cdot \frac{0{,}75\ \text{m}}{2} = \mathbf{39{,}27\ \frac{m}{s}}$$

ACTIVIDADES (página 227)

23. Determina si las siguientes frases son verdaderas o falsas:

a) La aceleración angular se mide en rad/s.

b) La aceleración tangencial de un punto de la circunferencia se puede medir con el ángulo recorrido por unidad de tiempo.

c) Todos los radios de una rueda de bicicleta tienen la misma aceleración angular.

a) **Falso**. Son las unidades de la velocidad, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$; θ en rad y t en s.

b) **Falsa**. Se mide en m/s.

c) **Verdadera**. Todos giran el mismo ángulo en el mismo tiempo.

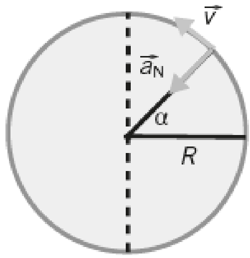
24. **En el siguiente esquema reconoce:**

a) La aceleración normal.

b) La velocidad lineal.

c) El ángulo recorrido y el radio

Respuesta gráfica:



ACTIVIDAD (página 228)

25. **Dos niños van montados en dos caballitos que giran solidarios con la plataforma de un tiovivo con ω= 4 rpm. Si la distancia de los caballos al eje de giro es de 2 y 3 m, calcula:**

a) La velocidad angular en rad/s.

b) El número de vueltas que dan los niños en cinco minutos.

c) El espacio recorrido por cada uno de ellos en ese tiempo.

d) ¿Qué niño se mueve con mayor aceleración total?

a) $\omega = 4\,\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}}\cdot\frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\text{ s}}\cdot\frac{2\pi\text{ rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}} = 0{,}1\widehat{3}\pi\text{ rad/s} = \mathbf{0{,}42\text{ rad/s}}$

b) Si dan 4 vueltas en 1 minuto, en 5 minutos darían **20 vueltas**.

c) Hallamos el espacio recorrido:

$$s_1 = \theta\cdot R_1 = 2\pi\cdot 2\text{ m} = \mathbf{251\text{ m}}$$
$$s_2 = \theta\cdot R_2 = 2\pi\cdot 3\text{ m} = \mathbf{377\text{ m}}$$

d) Ambos tienen solo aceleración normal: $a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2\cdot R$. Como ambos tienen la misma velocidad angular, tendrá mayor aceleración el que se encuentra más lejos, o sea, el caballo situado a 3 m del eje de giro.

ACTIVIDADES (página 230)

26. **Una rueda que gira a 300 rpm es frenada y se detiene completamente a los 10 s. Calcula:**

a) La aceleración angular.

b) La velocidad angular a los 3 s después de comenzar el frenado.

c) El número de vueltas que da hasta que frena.

$$\omega_0 = 300\,\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}}\cdot\frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\text{ s}}\cdot\frac{2\pi\text{ rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}} = 10\pi\text{ rad/s}$$

a) $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{(0-10\pi)\text{ rad/s}}{10\text{ s}} = \mathbf{-\pi\,\frac{rad}{s^2}}$

b) $\omega = \omega_0 + \alpha\cdot t = 10\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} - \pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\cdot 3\text{ s} = \mathbf{7\pi\,\frac{rad}{s^2}}$

c) Cuando se detiene: $\omega = 0$. Sustituimos en la ecuación de la velocidad angular y despejamos el tiempo:

$$0 = \omega_0 + \alpha\cdot t \quad\Rightarrow\quad t = \frac{-\omega_0}{\alpha} = \frac{-10\pi\text{ rad/s}}{-\pi\text{ rad/s}^2} = 10\text{ s}$$

Sustituimos en la ecuación de la posición angular y calculamos el ángulo recorrido. Pasamos los radianes a vueltas:

$$\Delta\theta = \omega_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot t^2 = -10\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\cdot 10\text{ s} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)\cdot(10\text{ s})^2 = 50\pi\,\cancel{\text{rad}}\cdot\frac{1\text{ vuelta}}{2\pi\,\cancel{\text{rad}}} = \mathbf{25\text{ vueltas}}$$

27. Se deja caer una rueda de 30 cm de radio por un plano inclinado, de forma que su velocidad angular aumenta a un ritmo constante. Si la rueda parte del reposo y llega al final del plano al cabo de 5 s con una velocidad angular de π rad/s, calcula:

a) La aceleración angular.

b) La velocidad angular a los 3 s.

c) La aceleración tangencial y normal al final del plano.

a) Es un movimiento circular uniformemente acelerado:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\pi \text{ rad/s}}{5 \text{ s}} = \mathbf{0,2\pi\ rad/s^2}$$

b) $\omega = \alpha \cdot t = 0{,}2\pi \dfrac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 3 \text{ s} = \mathbf{0,6\pi \dfrac{rad}{s^2}}$

c) Para calcular la aceleración normal hallamos la velocidad angular a los 5 s:

$$\omega = \alpha \cdot t = 0{,}2\pi \text{ rad/s}^2 \cdot 5 \text{ s} = \pi \text{ rad/s}$$

La aceleración normal será:

$$a_N = \omega^2 \cdot R = (\pi \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}3 \text{ m} = \mathbf{2,96\ m/s^2}$$

La aceleración tangencial será:

$$a_T = \alpha \cdot R = 0{,}2\pi \text{ rad/s}^2 \cdot 0{,}3 \text{ m} = \mathbf{0,19\ m/s^2}$$

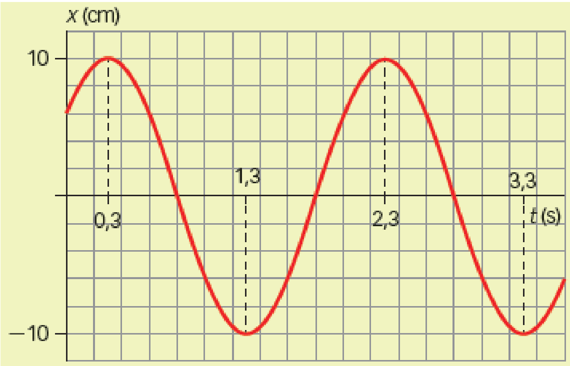
ACTIVIDAD (página 231)

28. Además de los ejemplos que pueden verse en las ilustraciones de movimientos periódicos añade algunos ejemplos más. Explica cuáles de ellos son también un movimiento armónico y simple.

- Un electrocardiograma es periódico, pero no MAS.
- Un niño en un columpio si el ángulo tiende a cero es MAS.
- Volantes giratorios de la maquinaria de un reloj.

ACTIVIDADES (página 234)

29. Escribe la ecuación del movimiento del muelle de la figura cuya gráfica posición-tiempo es la que se indica:



La ecuación del movimiento del muelle se corresponde con la expresión:

$$\underset{\text{Elongación}}{x} = \underset{\text{Amplitud}}{A} \cdot \text{sen}\,\overbrace{(\underset{\text{Frecuencia angular}}{\omega} \cdot t + \underset{\text{Fase inicial}}{\phi_0})}^{\text{Fase}}$$

Identificamos términos a partir de la gráfica:

- Amplitud: $A = 10$ cm $= 0{,}1$ m.
- Frecuencia angular: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$. El periodo es el tiempo entre dos máximos sucesivos:

$$T = 2{,}3 \text{ s} - 0{,}3 \text{ s} = 2 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{2 \text{ s}} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- Fase inicial: ϕ_0 . Para $t_0 = 0$, $x_0 = 6$ cm $= 0{,}06$ m $\Rightarrow$ $6 = 10 \cdot \text{sen}\ \phi_0$ $\Rightarrow$ $\phi_0 = \arcsen 0{,}6 = \dfrac{\pi}{5}$ rad .

Por tanto:

$$\boldsymbol{x = 0,1 \cdot \text{sen}\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{5}\right)}$$

30. Se estira un muelle hasta que su longitud aumenta 5 cm. A continuación se suelta y se le deja oscilar libremente, de forma que completa 30 oscilaciones en 5 segundos. Determina:

a) La ecuación de su movimiento suponiendo que empezamos a estudiarlo cuando se encuentra en la posición más estirada.

b) La posición en la que se encuentra el muelle a los 10 s de iniciado el movimiento.

c) El tiempo que tarda el muelle en alcanzar la posición de equilibrio desde que está en la posición de máximo estiramiento.

a) Dado que en el enunciado se menciona que la posición inicial de estudio ($t = 0$) coincide con un máximo:

$$t = 0,\ x = A \quad \Rightarrow \quad x = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La amplitud del muelle coincide con su elongación máxima: $A = 5$ cm $= 0{,}05$ m.

La frecuencia angular: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot \dfrac{30 \text{ ciclos}}{5 \text{ s}} = 12\pi$ rad/s.

Sustituyendo:

$$\boldsymbol{x = 0{,}05 \cdot \text{sen}\left(12\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

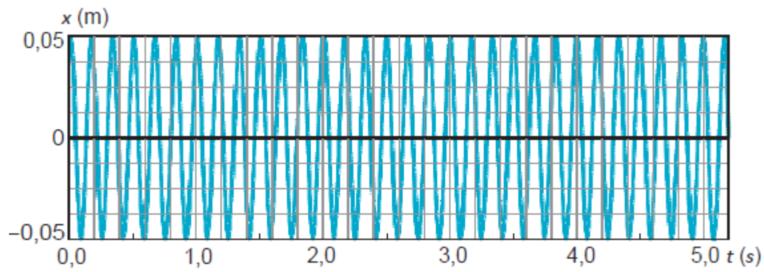
b) A los 10 s de inicio del movimiento:

$$x(t = 10 \text{ s}) = 0{,}05 \cdot \text{sen}\left(12\pi \cdot 10 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}05 \text{ m} = \mathbf{5\ cm}$$

c) En la posición de equilibrio $x = 0$:

$$0 = 0{,}05 \cdot \text{sen}\left(12\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{arcsen } 0 = 12\pi \cdot t + \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \mathbf{0{,}042\ s}$$

31. Representa la gráfica posición-tiempo de un muelle cuyo movimiento se describe en la actividad anterior.



ACTIVIDAD (página 246)

32. Un MAS está caracterizado por una amplitud de 30 cm y una velocidad máxima de 9π m/s con fase inicial nula. Determina su velocidad cuando $t = 5{,}25$ s.

$$A = 30 \text{ cm} = 0{,}3 \text{ m}$$
$$v_{\text{máx}} = 9\pi \text{ m/s}$$

A partir de la velocidad máxima calculamos la frecuencia angular:

$$v_{\text{máx}} = \omega \cdot A \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_{\text{máx}}}{A} = \frac{9\pi \text{ m/s}}{0{,}3 \text{ m}} = 30\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Sustituimos en la ecuación de la velocidad del MAS, $v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)$:

$$v = 0{,}3 \cdot 30\pi \cdot \cos(30\pi \cdot t + 0) = 9\pi \cdot \cos(30\pi \cdot t)$$

Para $t = 5{,}25$ s: $v(t = 5{,}25 \text{ s}) = 9\pi \cdot \cos(30\pi \cdot 5{,}25) = \mathbf{0\ m/s}$.

33. ¿Cuál será la velocidad del móvil del ejemplo 18 cuando se encuentra a 2 cm del punto más bajo?

$$x = -4\ \text{cm} = -0{,}04\ \text{m}$$
$$A = 6\ \text{cm} = 0{,}06\ \text{m}$$
$$v = \pm\omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2} = \pm\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{(0{,}06)^2 - (0{,}04)^2} = \pm 0{,}07\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \boldsymbol{\pm 7\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}}$$

ACTIVIDADES (página 237)

34. En el extremo de un muelle colocamos un cuerpo, lo estiramos una longitud de 4 cm y lo dejamos oscilar libremente. Escribe la función que permite conocer su elongación, velocidad y aceleración en función del tiempo si vibra con una frecuencia de 2 Hz. Representa gráficamente dichas funciones tomando valores del tiempo que permitan conocer lo que sucede en dos oscilaciones completas.

Como la posición inicial considerada se corresponde con su elongación máxima, utilizaremos la ecuación cosenoidal del MAS.

- **Elongación:**

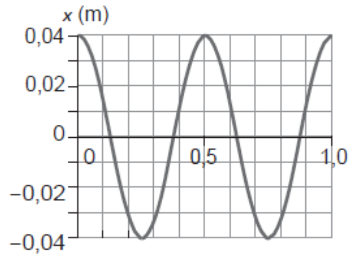
  La elongación máxima es precisamente $A = 4$ cm.

  Calculamos la frecuencia angular:

  $$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 2\ \text{Hz} = 4\pi\ \text{rad/s}$$

  La ecuación de la elongación será:

  $$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0) \Rightarrow \boldsymbol{x = 4 \cdot \text{sen}\left(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{cm}}$$

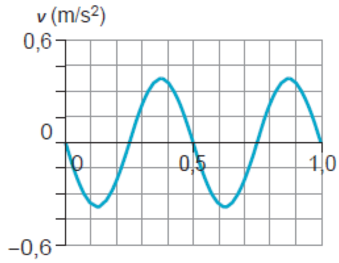


- **Velocidad:**

  La velocidad se obtiene derivando la expresión de la elongación con respecto al tiempo:

  $$v = \frac{dx}{dt} = 4\pi \cdot 4 \cdot \cos\left(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

  $$\boldsymbol{v = 16\pi \cdot \cos\left(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{cm/s}}$$

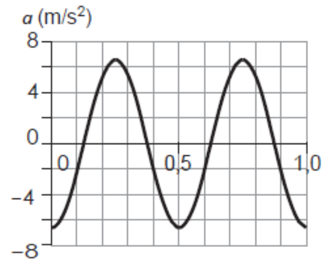


- **Aceleración:**

  La aceleración se obtiene derivando la expresión de la velocidad con respecto al tiempo:

  $$a = \frac{dv}{dt} = -4\pi \cdot 16\pi \cdot \text{sen}\left(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

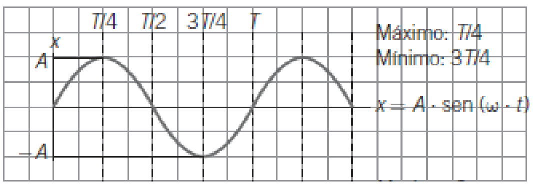
  $$\boldsymbol{a = 64\pi^2 \cdot \text{sen}\left(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{cm/s}^2}$$



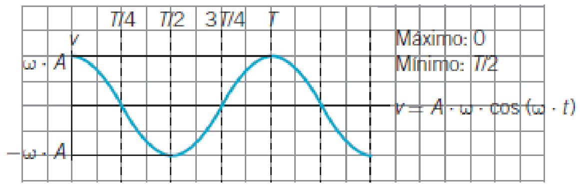
35. Haz la representación gráfica de las funciones $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ para un muelle que oscila apoyado en una superficie horizontal sin rozamiento. De forma similar a la figura 8.39, indica en qué posición las magnitudes *x, v* y *a* alcanzan sus valores máximos y mínimos.

Respuesta gráfica:

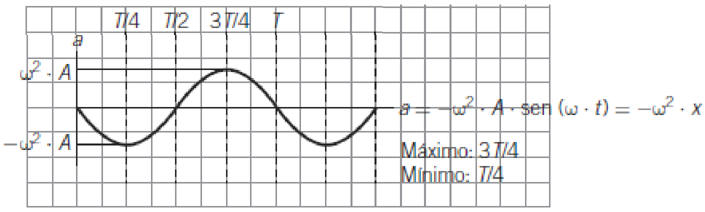
La posición.



La velocidad.



La aceleración.



ACTIVIDADES FINALES (página 241)

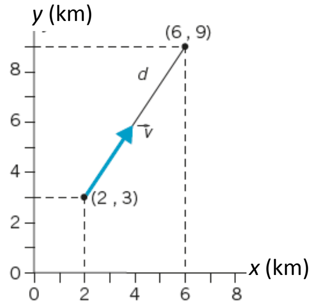
Movimiento uniforme

36. Escribe la ecuación de movimiento de un móvil que parte del punto $\vec{r}_1 = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ km y, tras 2 horas moviéndose en línea recta, llega al punto $\vec{r}_2 = 6\,\vec{i} + 9\,\vec{j}$ km.

a) ¿Cuál es el vector velocidad del móvil?

b) ¿Cuál es el módulo de la velocidad? Expresa el resultado en km/h.

a) El vector velocidad del móvil es:



$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t} = \frac{\left[(6\,\vec{i} + 9\,\vec{j}) - (2\,\vec{i} + 3\,\vec{j})\right]\text{km}}{2\,\text{h}}$$

$$\vec{v} = \frac{4\,\vec{i} + 6\,\vec{j}}{2}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \mathbf{2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}\ \text{km/h}}$$

b) Calculamos el módulo del vector velocidad:

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = \mathbf{3{,}6\ \text{km/h}}$$

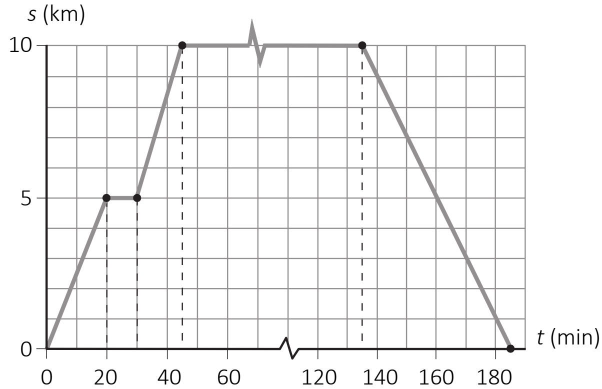
37. Óscar va a visitar a su amigo en bicicleta desde su pueblo hasta un pueblo próximo que se encuentra a 10 km.

- **Parte de su casa a las 8 h 15 min de la mañana con una velocidad de 18 km/h.**
- **A los 20 minutos de la salida hace un descanso de 10 minutos y después continúa pedaleando, pero ahora, más deprisa, con una velocidad de 20 km/h, hasta que llega a casa de su amigo.**
- **Una vez allí se queda hasta las 10 h 30 min, momento en el que emprende la vuelta a su casa con una velocidad constante de 12 km/h.**

a) Representa el movimiento de ida y vuelta de Óscar en una gráfica *s*-*t*.

b) ¿Qué tipo de movimiento ha llevado?

a) Figura de la derecha.



b) A: En los primeros 20 minutos a v_A = 15 km/h recorre:

$$d_A = v_A \cdot t_A = 15\,\frac{\text{km}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1}{3}\,\cancel{\text{h}} = 5\ \text{km}$$

B: Luego está parado 10 min.

C: Reanuda la marcha a 20 km/h hasta recorrer los restantes $d_C = 5$ km. Tarda:

$$\Delta t_C = \frac{d_C}{v_C} = \frac{5\ \cancel{\text{km}}}{20\ \cancel{\text{km}}/\text{h}} = \frac{1}{4}\text{h} = 15\ \text{min}$$

D: Parado desde las 9:00 (8:15 + 0:20 + 0:10 + 0:15 = 9:00) hasta las 10:30; 90 minutos en total.

E: Recorre los 10 km de vuelta a $v_E = 12$ km/h en un tiempo:

$$\Delta t_E = \frac{d_E}{v_E} = \frac{10\ \cancel{\text{km}}}{12\ \cancel{\text{km}}/\text{h}} = \frac{5}{6}\text{h} = 50\ \text{min}$$

38. Un coche A parte del punto kilométrico cero de una carretera a las 10:40 h con una velocidad constante de 80 km/h. Media hora más tarde otro coche B parte a su encuentro desde el mismo punto con una velocidad de 100 km/h.

a) Calcula el punto kilométrico de la carretera en que están situados ambos vehículos y el tiempo que transcurre hasta encontrarse.

b) ¿Qué velocidad debería llevar el coche B para que se encuentren en el punto kilométrico 180?

$$v_A = 80\ \text{km/h}; \quad v_B = 100\ \text{km/h}$$

a) Cuando los coches se encuentran, la posición de ambos es la misma:

$$x_A = v_A \cdot t \quad \Rightarrow \quad x_A = 80 \cdot t$$
$$x_B = v_B \cdot (t - 0,5) \quad \Rightarrow \quad x_B = 100 \cdot t - 50$$
$$x_A = x_B \quad \Rightarrow \quad 80 \cdot t = 100 \cdot t - 50$$
$$t = \mathbf{2,5\ h}$$

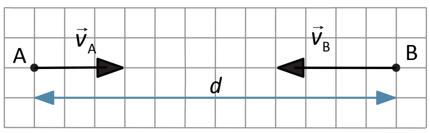
Sustituimos el tiempo en cualquiera de las ecuaciones de posición y calculamos el punto kilométrico en el que se encuentran:

$$x_A = x_B = 80\frac{\text{km}}{\cancel{\text{h}}} \cdot 2,5\ \cancel{\text{h}} = \mathbf{200\ km}$$

b) Calculamos el tiempo que tarda el coche A en llegar al kilómetro 180 y lo sustituimos en la ecuación de la posición de B despejando la velocidad:

$$x_B = v_B \cdot (t - 0,5)$$
$$x_A = v_A \cdot t = 80 \cdot t$$
$$t = \frac{x_A}{v_A} = \frac{180\ \cancel{\text{km}}}{80\ \cancel{\text{km}}/\text{h}} = 2,25\ \text{h} \quad \Rightarrow \quad v_B = \frac{x_B}{t - 0,5} = \frac{180\ \text{km}}{1,75\ \text{h}} = \mathbf{102,8\ km/h}$$

39. Un tren parte de una ciudad A en dirección a otra B con una velocidad constante de 90 km/h. Una hora más tarde otro tren parte desde B hacia A con velocidad de 120 km/h. Calcula la distancia entre las dos ciudades si los trenes se cruzan a una distancia de 250 km de la ciudad A.



Considerando el origen del sistema de referencias para los dos trenes la ciudad A, y el sentido positivo desde A hacia B, negativo el opuesto, las ecuaciones de movimiento para ambos trenes son:

$$\begin{cases} x_A = v_A \cdot t_A \\ x_B = d - v_B \cdot t_B \end{cases}$$

Para expresar la diferencia de tiempo: $t_B = t_A - 1$. Por eso:

$$\begin{cases} x_A = 90 \cdot t_A \\ x_B = d - 120 \cdot (t_A - 1) \end{cases}$$

Cuando los dos trenes se cruzan están en la misma posición, $x_A = x_B = 250$ km, y en el mismo instante, $t_A = t$.

$$\begin{cases} 250 = 90 \cdot t \\ 250 = d - 120 \cdot (t - 1) \end{cases}$$

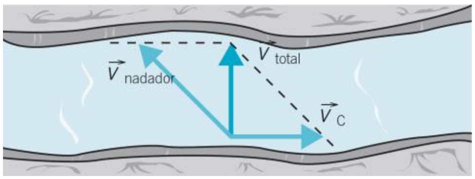
Resolviendo el sistema de ecuaciones nos queda que:

$$t = 2,\widehat{7}\ \text{h}; \quad d = \mathbf{463,\widehat{3}\ km}$$

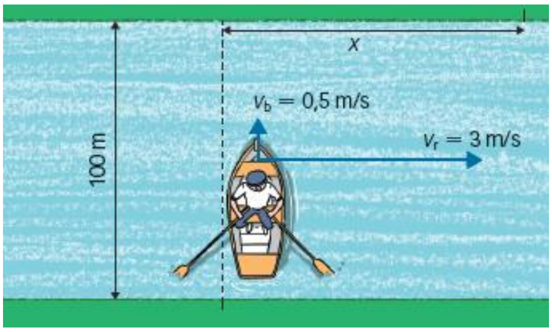
Solo queremos la distancia entre las dos ciudades.

40. Si queremos cruzar transversalmente un río a nado, ¿qué debemos hacer?

Nadar en una dirección de forma que la suma de la velocidad de la corriente y la del nadador sea perpendicular a la corriente.



41. Un pescador quiere atravesar un río de 100 m de ancho para lo cual dispone de una lancha, con la que rema a 0,5 m/s.



a) Si la velocidad de la corriente es de 3 m/s, ¿a qué distancia aguas abajo del punto de partida se encuentra el pescador cuando consigue atravesar el río?

b) ¿Influiría la velocidad de la corriente en el tiempo que se tarda en atravesar el río?

a) El tiempo que tardará en atravesar el río será:

$$d = v_{\text{barca}} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{d}{v_{\text{barca}}} = \frac{100\ \cancel{\text{m}}}{0,5\ \frac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}}} = 200\ \text{s}$$

La distancias aguas abajo que se habrá desviado la barca será:

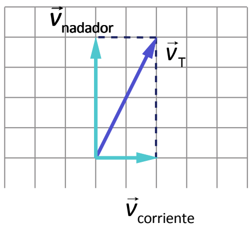
$$x = v_{\text{corriente}} \cdot t = 3\ \frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}} \cdot 200\ \cancel{\text{s}} = \mathbf{600\ m}$$

b) No, la velocidad de la corriente influye en la distancia recorrida aguas abajo, no en el tiempo.

42. Un nadador que es capaz de nadar a una velocidad de 0,5 m/s pretende cruzar un río de 20 m de anchura en el que la velocidad del agua es de 0,25 m/s. Calcula el tiempo que tarda en cruzarlo y la distancia aguas abajo que le arrastra la corriente. ¿En qué dirección debería nadar para cruzarlo perpendicularmente?

El tiempo que tardará en cruzar el río será:

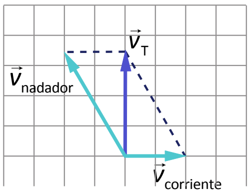
$$d = v_{\text{nadador}} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{d}{v_{\text{nadador}}} = \frac{20\ \cancel{\text{m}}}{0,5\ \frac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}}} = \mathbf{40\ s}$$



La distancia aguas abajo que lo arrastra la corriente será:

$$x = v_{\text{corriente}} \cdot t = 0,25\ \frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}} \cdot 40\ \cancel{\text{s}} = \mathbf{10\ m}$$

Para cruzar el río transversalmente, la suma de la velocidad de la corriente y la del nadador debe ser perpendicular a la corriente, es decir, $\vec{v}_T$ tiene que ser perpendicular a $\vec{v}_c$:



$$\text{sen } \alpha = \frac{v_c}{v_n} = \frac{0{,}25 \cancel{\text{m/s}}}{0{,}5 \cancel{\text{m/s}}} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \mathbf{30°}$$

Movimiento con aceleración constante

43. Un electrón que se mueve con una velocidad de 3 · 10⁵ m/s frena debido a la existencia de otras cargas.

a) Si la aceleración de frenado es de 10⁶ cm/s², ¿cuánto tiempo tardará el electrón en reducir la velocidad a la mitad?

b) ¿Y desde que tiene esta nueva velocidad hasta que se detiene?

c) Compara los resultados obtenidos y explica por qué ambos tiempos son iguales.

a)
$$v_0 = 3 \cdot 10^5 \text{ m/s}; \quad a = -10^6 \text{ cm/s}^2 = -10^4 \text{ m/s}^2$$

Hallamos el tiempo que tarda el electrón en reducir su velocidad a la mitad:

$$v = v_o + a \cdot t \quad \Rightarrow \quad \frac{v_o}{2} = v_o + a \cdot t \quad \Rightarrow \quad \frac{v_o}{2} - v_o = a \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-v_o}{2 \cdot a} = \frac{-3 \cdot 10^5 \text{ m/s}}{2 \cdot (-10^4) \text{ m/s}^2} = \mathbf{15 \text{ s}}$$

b) Ahora, hasta pararse tardará:

$$0 = v_o + a \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-v_o}{a} = \frac{-1{,}5 \cdot 10^5 \text{ m/s}}{(-10^4) \text{ m/s}^2} = \mathbf{15 \text{ s}}$$

c) Son iguales. Como la aceleración es la medida del cambio de velocidad en la unidad de tiempo, a cambios de velocidad iguales le corresponden tiempos iguales.

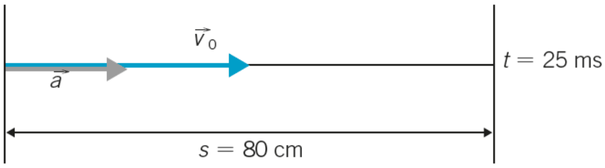
44. Un haz de iones positivos que posee una velocidad de 15 m/s entra en una región y acelera. Necesitamos que en 25 ms los iones alcancen un cátodo situado a 80 cm.

a) Dibuja en tu cuaderno un esquema del ejercicio.

b) Calcula la aceleración constante que hay que comunicarles.

c) Halla la velocidad con que llegan el cátodo.

a)



b) Escribimos la ecuación de la posición del MRUA y despejamos la aceleración, considerando que $x_0 = 0$:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2 \cdot (x - v_0 \cdot t)}{t^2} = \frac{2 \cdot (0{,}8 \text{ m} - 15 \text{ m/s} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ s})}{(2{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ s})^2} = \mathbf{1360 \text{ m/s}^2}$$

c) Escribimos la ecuación de la velocidad del MRUA, sustituimos y calculamos:

$$v = v_o + a \cdot t = 15 \text{ m/s} + 1360 \text{ m/s}^2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ s} = \mathbf{49 \text{ m/s}}$$

ACTIVIDADES FINALES (página 242)

45. Contesta:

a) ¿Qué tipo de movimientos se dan cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo sentido?

b) ¿Y si es distinto? Pon ejemplos.

a) Se trata de un movimiento rectilíneo donde la velocidad crece con el tiempo.

Ejemplo: un coche que se mueve por una carretera recta acelerando o un cuerpo que se deja caer desde cierta altura.

b) Se trata de un movimiento rectilíneo como antes, pero de velocidad decreciente.

Ejemplo: lanzamiento vertical y hacia arriba de un cuerpo.

46. ¿Qué aceleración actúa sobre un electrón en el «cañón de electrones» de un osciloscopio que alcanza el 10 % de la velocidad de la luz en un espacio de 10 cm? Especifica claramente las suposiciones que has hecho para resolver este ejercicio. Dato: $c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Hallamos la velocidad, que es el 10 % de c_0:

$$v = \frac{10 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{100} = 3 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

Por tanto:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2 \cdot a \cdot x \Rightarrow a = \frac{v^2}{2 \cdot x} = \frac{(3 \cdot 10^7 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 0{,}1 \text{ m}} = \mathbf{4{,}5 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2}$$

Se supone que no es necesario utilizar cálculos relativistas.

47. En el anuncio de un nuevo modelo de coche se dice que es capaz de pasar de cero a 100 km/h en 6 s.

a) Calcula la aceleración media.

b) Calcula el espacio que recorre durante este tiempo.

a) Expresamos la velocidad en m/s:

$$v = 100 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} = 2{,}\widehat{7} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Calculamos la aceleración media:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(2{,}\widehat{7} - 0) \text{ m/s}}{6 \text{ s}} = 4{,}629 \text{ m/s}^2 = \mathbf{4{,}63 \text{ m/s}^2}$$

b) Determinamos el espacio recorrido en 6 s, teniendo en cuenta que x_0 y v_0 son cero:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 4{,}629 \text{ m/s}^2 \cdot (6 \text{ s})^2 = \mathbf{83{,}\widehat{3} \text{ m}}$$

48. Un coche necesita 40 s para alcanzar una velocidad de 100 km/h partiendo del reposo.

a) Calcula la aceleración y el espacio recorrido en ese tiempo.

b) Si después frena con una aceleración de 3 m/s², calcula el tiempo que tarda hasta pararse.

c) Dibuja en tu cuaderno la gráfica velocidad-tiempo del movimiento desde que el coche arranca hasta que se para.

a) Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 100 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} = 27{,}\widehat{7} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La aceleración será:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(27{,}\widehat{7} - 0) \text{ m/s}}{40 \text{s}} = \mathbf{0{,}69\widehat{4} \text{ m/s}^2}$$

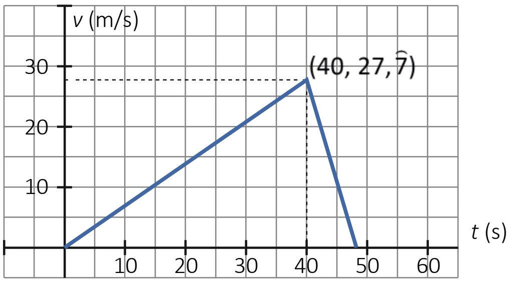
El espacio recorrido es:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}69\widehat{4} \text{ m/s}^2 \cdot (40 \text{ s})^2 = \mathbf{555{,}\widehat{5} \text{ m}}$$

b) El tiempo que tarda en pararse es:

$$v = v_0 + a \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 27{,}\widehat{7} \text{ m/s}}{-3 \text{ m/s}^2} = 9{,}259 \text{ s} = \mathbf{9{,}26 \text{ s}}$$

c) Representamos gráficamente la velocidad frente al tiempo:



49. **Un tren de 80 m de longitud circula a 120 km/h y una señal le indica que a una distancia de 100 m debe ir a 90 km/h.**

a) ¿Qué aceleración de frenado debe aplicar el conductor?

b) ¿Cuánto tiempo tarda el tren en cruzar completamente un túnel de 200 m cuando lleva una velocidad constante de 90 km/h?

Expresamos las velocidades en m/s:

$$v_0 = 120 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 33,\widehat{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = 90 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a) A partir de la siguiente expresión, que relaciona velocidad y posición en un MRUA, calculamos la aceleración de frenado:

$$v^2 - v_0{}^2 = 2 \cdot a \cdot x \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2 - v_0{}^2}{2 \cdot x} = \frac{(25\ \text{m/s})^2 - (33,\widehat{3}\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 100\ \text{m}} = -2,430\widehat{5}\ \text{m/s}^2 = \mathbf{-2,43\ m/s^2}$$

b) Para cruzar completamente un túnel de 200 m debemos tener en cuenta la longitud del túnel más la longitud del tren; por tanto, el espacio que debe recorrer es:

$$x = 200\ \text{m} + 80\ \text{m} = 280\ \text{m}$$

Y el tiempo que emplea será:

$$x = v \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v} = \frac{280\ \cancel{\text{m}}}{25\ \cancel{\text{m}}/\text{s}} = \mathbf{11,2\ s}$$

50. **Una moto que se encuentra parada en un semáforo arranca en el mismo momento que es adelantada por un coche que se mueve con velocidad constante de 90 km/h. Si la moto arranca con aceleración constante de 1,5 m/s², calcula:**

a) El tiempo que transcurre hasta que la moto adelanta al coche.

b) La velocidad que lleva la moto en ese instante.

Expresamos la velocidad del coche en m/s:

$$v_{\text{coche}} = 90 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 25\ \text{m/s}$$

a) Planteamos las ecuaciones de movimiento (el coche lleva un MRU y la moto lleva un MRUA):

$$\begin{cases} x_{\text{coche}} = x_{0,\text{coche}} + v_{\text{coche}} \cdot t = v_{\text{coche}} \cdot t \\ x_{\text{moto}} = x_{0,\text{moto}} + v_0 \cdot t + \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \dfrac{1}{2} \cdot a_{\text{moto}} \cdot t^2 \end{cases}$$

En $t = 0$ s los dos vehículos están en la línea del semáforo, $x_{0,\text{coche}} = x_{0,\text{moto}} = 0$ m. En el instante, t, que la moto adelanta al coche, las posiciones de ambos vehículos coinciden, $x_{\text{coche}} = x_{\text{moto}}$. Igualamos y resolvemos para despejar el tiempo de encuentro:

$$x_{coche} = x_{moto} \Rightarrow v_{coche} \cdot t = \frac{1}{2} \cdot a_{moto} \cdot t^2 \Rightarrow t = \frac{2 \cdot v_{coche}}{a_{moto}} = \frac{2 \cdot 25 \cancel{m}/s}{1{,}5 \cancel{m}/s^2} = \mathbf{33{,}\widehat{3}\ s}$$

b) La velocidad de la moto cuando adelanta al coche:

$$v_{moto} = v_0 + a \cdot t = 0 + 1{,}5\left(m/s^2\right) \cdot 33{,}\widehat{3}\ s = \mathbf{50\ m/s}$$

51. Un móvil se mueve sobre una superficie horizontal y en línea recta con una aceleración constante de 3 m/s². Si en $t_0 = 0$ s el móvil se encuentra en $x_0 = 20$ m moviéndose con una velocidad $v_0 = 10$ km/h, determina la ecuación del movimiento y halla la velocidad y la posición a los 10 s. ¿Con qué aceleración hay que frenar si se quiere que el móvil se pare después de recorrer 100 m?

Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 10 \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \cdot \frac{1000\ m}{1\ \cancel{km}} \cdot \frac{1\ \cancel{h}}{3600\ s} = 2{,}\widehat{7} \frac{m}{s}$$

Ecuación de la posición:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 20\ m + 2{,}\widehat{7}\ m/s \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left(3\ m/s^2\right) \cdot t^2$$

Ecuación de la velocidad:

$$v = v_0 + a \cdot t = 2{,}\widehat{7}\ m/s + 3\ m/s^2 \cdot t$$

Para $t = 10$ s:

$$v(t = 10\ s) = 2{,}\widehat{7}\ m/s + 3\ m/s^2 \cdot 10\ s = \mathbf{32{,}\widehat{7}\ m/s}$$

$$x(t = 10\ s) = 20\ m + 2{,}\widehat{7}\ m/s \cdot 10\ s + \frac{1}{2} \cdot \left(3\ m/s^2\right) \cdot (10\ s)^2 = \mathbf{197{,}\widehat{7}\ m}$$

A partir de la siguiente expresión, que relaciona velocidad y posición en un MRUA, calculamos la aceleración de frenado:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot x \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot x} = \frac{(0)^2 - (32{,}\widehat{7}\ m/s)^2}{2 \cdot 100\ m} = \mathbf{-5{,}37\ m/s^2}$$

52. Un vehículo parte del reposo y aumenta su velocidad a un ritmo de 2 m/s cada segundo durante 10 s. Después continúa con velocidad constante durante 5 s. Al final frena y se para en 4 s. Calcula el espacio total recorrido y la aceleración en el último tramo.

Para calcular el espacio total recorrido debemos analizar cada tramo por separado:

Primer tramo (MRUA): $t = 10$ s; $v_0 = 0$ m/s; $a = 2$ m/s².

$$x_1 = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\ m/s^2 \cdot (10\ s)^2 = 100\ m$$

$$v_1 = v_0 + a \cdot t = 2\ m/s^2 \cdot 10\ s = 20\ m/s$$

Segundo tramo (MRU): $t = 5$ s; $x_1 = 100$ m; $v_1 = 20$ m/s = cte.

$$x_2 = x_1 + v_1 \cdot t = 100\ m + 20\ m/s \cdot 5\ s = 200\ m$$

Tercer tramo (MRUA): $t = 4$ s; $x_2 = 200$ m; $v_2 = 20$ m/s; $v_3 = 0$ m/s.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(0 - 20)\ m/s}{4\ s} = -5\ m/s^2$$

$$x_3 = x_2 + v_2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 200\ m + 20\ m/s \cdot 4\ s - \frac{1}{2} \cdot 5\ m/s^2 \cdot (4\ s)^2 = 240\ m$$

El espacio total recorrido es **240 m** y la aceleración en el último tramo es **–5 m/s²**.

53. **Representa gráficamente la velocidad y la posición frente al tiempo para el caso de un cuerpo que cae bajo la acción de la gravedad desde una altura de 100 m.**

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{cases} y = h - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ v = -g \cdot t \end{cases}$$

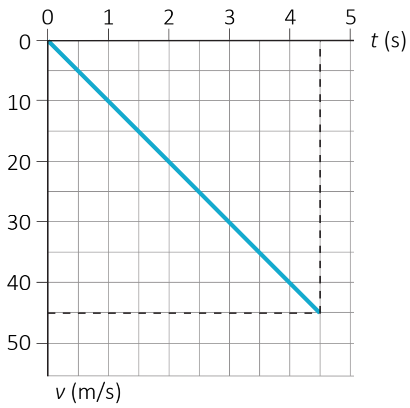
Hacemos $y = 0$ m, y calculamos el tiempo que tarda en caer:

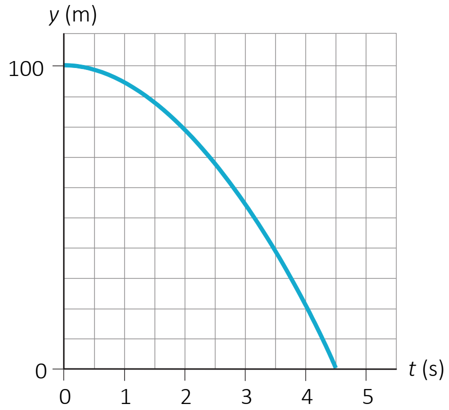
$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 4{,}5\ \text{s}$$

Sustituimos el tiempo de caída en la ecuación de la velocidad y calculamos la velocidad con la que llega al suelo:

$$v = -9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 4{,}5\ \text{s} = -44{,}3\ \text{m/s}$$

El signo negativo indica que el cuerpo se mueve hacia abajo. Representamos la componente vertical de la velocidad frente al tiempo y la posición vertical también frente al tiempo:





54. **Se dejan caer dos bolas de acero de masas 5 kg y 20 kg.**

a) **¿Cuál de ellas llegará antes al suelo?**

b) **¿Cuál llegará con una mayor velocidad?**

a) Ambas llegan a la vez. La aceleración es igual para las dos e igual a g. Escribimos la ecuación de movimiento y hacemos $y = 0$ para calcular el tiempo que tardan en llegar al suelo es:

$$y = h + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

Como podemos ver en la ecuación anterior, el tiempo no depende de la masa.

b) Ambas llegan con la misma velocidad independientemente de su masa:

$$v = -g \cdot t$$

55. **Una pelota que se suelta desde una cierta altura tarda 10 segundos en caer al suelo.**

a) **¿Durante cuál de esos 10 segundos se produce un mayor incremento de la velocidad?**

b) **¿Y del espacio recorrido?**

a) $\Delta v = a \cdot \Delta t$. La aceleración es $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

La variación de la velocidad para cada $\Delta t = 1$ s es $\Delta v = 9{,}8$ m/s, es decir, siempre la misma.

La velocidad va aumentando cada segundo en 9,8 m/s.

b) Como:

$$y = y_i + v_i \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta_i y = y - y_i = v_i \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2$$

Donde v_i es la velocidad al inicio de cada intervalo de tiempo, y $\Delta t = 1$ s. La velocidad de cada intervalo es mayor, y el espacio recorrido, $\Delta_i y$, en ese segundo también lo es. El mayor incremento en el espacio recorrido ocurre en el último segundo, donde se inicia con mayor velocidad.

56. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 100 m/s. Halla la velocidad cuando se encuentra a 30 m de altura y el tiempo que tarda en llegar al punto más alto de su recorrido. Dibuja la gráfica velocidad-tiempo desde que el cuerpo se lanzó hasta que volvió otra vez al punto de partida. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

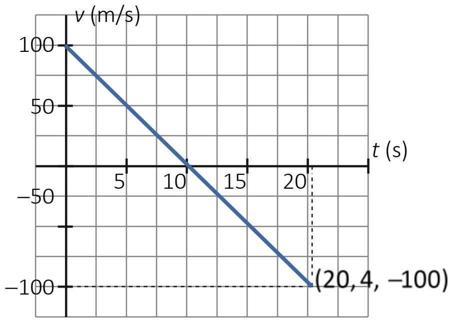
A partir de la siguiente expresión, particularizada para un MRUA bajo la aceleración de la gravedad, que relaciona velocidad y posición, calculamos la velocidad para y = 30 m:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot (-g) \cdot y \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot y} = \sqrt{(100\ \text{m/s})^2 - 2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 30\ \text{m}} = \mathbf{97{,}02\ m/s}$$

Como el lanzamiento se lleva a cabo verticalmente, la velocidad solo tiene componente en el eje Y. En el punto más alto esta velocidad se anula, por tanto:

$$v = v_0 - g \cdot t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{g} = \frac{100\ \text{m/s}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = \mathbf{10{,}2\ s}$$

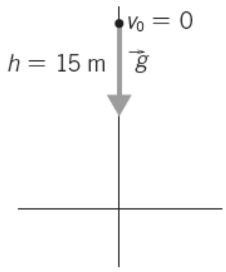
Representamos gráficamente la velocidad frente al tiempo:



57. Un niño que se encuentra en la calle ve caer una pelota verticalmente desde una ventana. Si el niño se encuentra a 4 m de distancia en horizontal al punto de caída y la altura de la ventana es de 15 m, calcula a qué velocidad media debe correr para atraparla antes de que llegue al suelo. Dibuja en tu cuaderno un esquema de la situación.

Ecuación del movimiento de la pelota:

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$



Haciendo $y = 0$ m se calcula el tiempo que invierte el cuerpo en llegar al suelo:

$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 1{,}75\ \text{s}$$

La velocidad a la que debe correr el niño es:

$$v = \frac{4\ \text{m}}{1{,}75\ \text{s}} = \mathbf{2{,}29\ m/s}$$

58. Se lanzan dos cuerpos verticalmente hacia arriba con velocidad de 50 m/s separados por un intervalo de tiempo de 3 s. Calcula el tiempo que tardan en cruzarse, la velocidad que lleva cada uno en ese momento y la altura a la que se cruzan. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

El intervalo de tiempo es $t_2 = t_1 - 3$ s. Escribimos las ecuaciones de la posición de ambos cuerpos:

$$y_1 = y_0 + v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 50 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2$$

$$y_2 = y_0 + v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 50 \cdot (t_1 - 3) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_1 - 3)^2$$

En el momento de cruce sus posiciones coinciden, $y_1 = y_2$. Queda una ecuación con la incógnita en el tiempo que tardan en cruzarse desde que se lanzó la primera. Resolviendo:

$$50 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = 50 \cdot (t_1 - 3) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_1 - 3)^2$$

$$50 \cdot t_1 - \cancel{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2} = 50 \cdot t_1 - 150 - \cancel{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2} - \frac{9}{2} \cdot g + 3 \cdot g \cdot t_1$$

$$0 = -150 - \frac{9}{2} \cdot g + 3 \cdot g \cdot t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{150 + 4{,}5 \cdot 9{,}8}{3 \cdot 9{,}8} = \mathbf{6{,}60\ s}$$

La velocidad para $t = 6{,}60$ s:

$$v_1 = v_0 - g \cdot t = 50\ \text{m} - 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 6{,}60\ \text{s} = \mathbf{-14{,}7\ m/s}$$

$$v_2 = v_0 - g \cdot (t - 3) = 50\ \text{m} - 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (6{,}60\ \text{s} - 3\ \text{s}) = \mathbf{14{,}7\ m/s}$$

Para calcular la altura a la que se cruzan basta sustituir el tiempo del cruce en cualquiera de las ecuaciones de la posición:

$$y_1 = 50 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = 50\ \text{m} \cdot 6{,}60\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (6{,}60\ \text{s})^2 = \mathbf{116{,}5\ m}$$

59. Una persona situada frente a una ventana de 1 m de altura ve pasar un cuerpo que cae desde más arriba y comprueba que tarda 0,2 s en cruzarla. Si la distancia de la ventana al suelo es de 10 m, calcula la altura desde la que se dejó caer el cuerpo. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

Escribimos las ecuaciones de movimientos en los instantes t_1 y t_2:

$$y_1 = y_0 + v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \quad \Rightarrow \quad 11 = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2$$

$$y_2 = y_0 + v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \quad \Rightarrow \quad 10 = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2$$

Restando a la primera expresión la segunda, tenemos:

$$1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(t_2^2 - t_1^2\right) \quad \Rightarrow \quad 2 = g \cdot \left(t_2^2 - t_1^2\right)$$

Como tarda 0,2 s en cruzar la ventana $t_2 - t_1 = 0{,}2$ s, es decir, $t_2 = t_1 + 0{,}2$ s.

Sustituimos y despejamos t_1:

$$2 = g \cdot \left(\cancel{t_1^2} + 0{,}04 + 0{,}4 \cdot t_1 - \cancel{t_1^2}\right) \quad \Rightarrow \quad 2 = g \cdot \left(0{,}04 + 0{,}4 \cdot t_1\right)$$

$$t_1 = \frac{2 - 9{,}8 \cdot 0{,}04}{9{,}8 \cdot 0{,}4} = 0{,}41\ \text{s}$$

Despejamos la posición inicial de la primera expresión y sustituimos el tiempo t_1:

$$y_1 = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = y_1 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = 11\ \text{m} + \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (0{,}41\ \text{s})^2 = \mathbf{11{,}82\ m}$$

60. El tiempo transcurrido desde que se deja caer una piedra a un pozo hasta que se oye el sonido que produce al chocar con el agua es de 4 s. Con estos datos halla la profundidad del pozo. Dato: la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s; $g = 9{,}8$ m/s².

Escribimos las ecuaciones de ambos movimientos. Consideramos el origen del sistema de referencias en el punto más hondo del pozo. Despejamos el tiempo en cada ecuación:

- La piedra cae: $y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow 0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t_{\text{piedra en caer}} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$
- El sonido sube: $y = y_0 + v_s \cdot t' \Rightarrow h = 0 + v_s \cdot t' \Rightarrow t' = t_{\text{sonido en subir}} = \frac{h}{v_s}$

El tiempo total:

$$t_T = t_{\text{piedra en caer}} + t_{\text{sonido en subir}} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} + \frac{h}{v_s}$$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = t_T - \frac{h}{v_s} \Rightarrow \frac{2 \cdot h}{g} = t_T^2 + \frac{h^2}{v_s^2} - 2 \cdot t_T \cdot \frac{h}{v_s}$$

$$\left[\frac{2 \cdot h}{g} = t_T^2 + \frac{h^2}{v_s^2} - 2 \cdot t_T \cdot \frac{h}{v_s}\right] \times v_s^2 \cdot g \Rightarrow 2 \cdot h \cdot v_s^2 = t_T^2 \cdot v_s^2 \cdot g + h^2 \cdot g - 2 \cdot t_T \cdot h \cdot v_s \cdot g$$

$$g \cdot h^2 - 2 \cdot (v_s + t_T \cdot g) \cdot v_s \cdot h + t_T^2 \cdot v_s^2 \cdot g = 0$$

Sustituyendo los valores conocidos y ordenando queda una ecuación de segundo grado con la incógnita en *h*. Resolviendo obtenemos la profundidad del pozo pedida:

$$9{,}8\, h^2 - 257\,856\, h + 18\,126\,080 = 0 \Rightarrow h = \mathbf{70{,}5\,m}$$

La profundidad del pozo resulta positiva pues hemos considerado el origen del sistema de referencias en el punto más hondo del pozo. Solo una de las dos soluciones tiene sentido.

ACTIVIDADES FINALES (página 243)

Movimiento parabólico

61. Contesta:

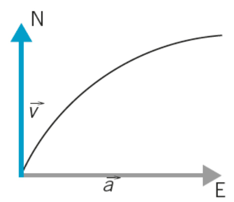
a) ¿Puede tener un automóvil su velocidad dirigida hacia el norte y sin embargo la aceleración estar dirigida hacia el sur?

b) ¿Y hacia el este?

c) ¿Cómo serían estos movimientos?

a) Sí, sería un movimiento hacia el norte con velocidad decreciente, hasta detenerse.

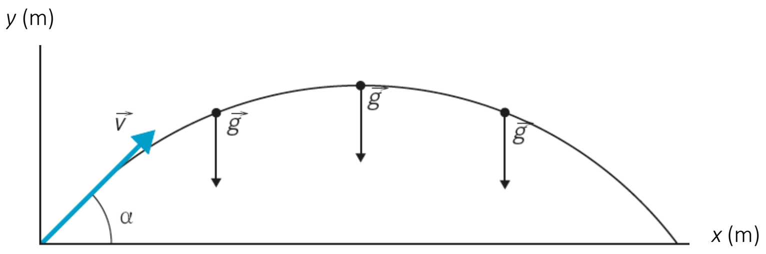
b) Solo en el instante inicial. A partir del instante inicial la velocidad cambiaría de dirección y ya no estaría dirigida hacia el norte. Su movimiento seguiría una trayectoria curva, como se indica en el dibujo.



c) El primero es rectilíneo, y el segundo, curvilíneo. En el caso de que la componente norte de la velocidad fuera constante, parabólico.

62. **¿Qué dirección tiene la aceleración de un cuerpo que es lanzado con determinada velocidad formando un ángulo α con la superficie de la Tierra? Haz un esquema que aclare la respuesta.**

La aceleración siempre apunta hacia la superficie de la Tierra (perpendicular a la misma y dirigida hacia el centro).



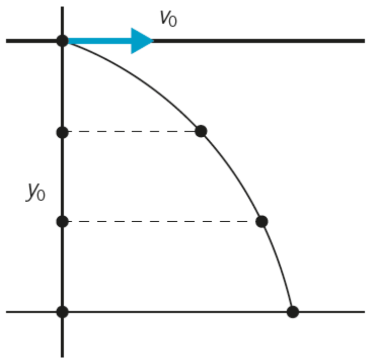
63. **Se deja caer un cuerpo desde una altura *h* a la vez que se lanza otro objeto desde el mismo punto con velocidad horizontal v_0.**

a) **¿Cuál de los dos llega antes a la superficie de la Tierra?**

b) **Haz un esquema.**

a) Llegan a la vez. El movimiento horizontal no afecta al vertical.

b) $v_0 = 0$ m/s.



Ecuaciones del cuerpo que se deja caer sin velocidad inicial:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = h - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Ecuaciones del cuerpo al que se le da una velocidad horizontal:

$$\begin{cases} x = v_0 \cdot t \\ y = h - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

En lo que respecta al movimiento vertical, la ecuación de movimiento es la misma para ambos:

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

64. **Se lanza horizontalmente un proyectil con una cierta velocidad inicial.**

a) **Demuestra lo que sucede con el alcance del proyectil si se dobla la velocidad de lanzamiento.**

b) **¿También se dobla el alcance?**

a) El tiempo de caída es independiente de la velocidad horizontal v_0; solo depende de la altura *h*.

Ecuaciones del movimiento del proyectil:

$$\begin{cases} x = v_0 \cdot t \\ y = h - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Haciendo $y = 0$ se obtiene el tiempo de caída:

$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

b) Al duplicar la velocidad de lanzamiento se duplica el alcance:

$$x = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \quad \Rightarrow \quad x' = 2 \cdot v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \quad \Rightarrow \quad \text{para } 2 \cdot v_0 \Rightarrow x' = 2 \cdot x$$

65. **Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:**

a) **En un MUA la velocidad tiene siempre la misma dirección que la aceleración.**

b) **En un MUA la representación gráfica de $\Delta\vec{r}$ frente a t siempre es una parábola, aunque el movimiento sea retardado.**

c) **En el punto más elevado de la trayectoria de un proyectil la velocidad total es nula.**

d) **En el punto más elevado de la trayectoria de un proyectil la velocidad vertical es nula.**

e) **El alcance de un proyectil solo depende de la velocidad inicial.**

f) **El alcance de un proyectil depende del ángulo α de lanzamiento.**

a) **Falso**. $\vec{v}$ y $\vec{a}$ pueden tener cualquier dirección.

b) **Verdadero**.

c) **Falso**. Es nula la velocidad vertical.

d) **Verdadero**.

e) **Falso**. Depende de la velocidad inicial y del ángulo.

f) **Verdadero**, aunque también depende de la velocidad inicial v_0.

66. **Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de un móvil son:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 50 \cdot t} \\ \boldsymbol{y = 50 \cdot t - 5 \cdot t^2} \end{cases}$$

Halla la ecuación de la trayectoria y calcula la velocidad en $t = 3$ s.

Para obtener la ecuación de la trayectoria eliminamos el tiempo de las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 50 \cdot t & \Rightarrow \quad t = \dfrac{x}{50} \\ y = 50 \cdot t - 5 \cdot t^2 & \Rightarrow \quad y = 50 \cdot \dfrac{x}{50} - 5 \cdot \left(\dfrac{x}{50}\right)^2 \end{cases}$$

Ecuación de la trayectoria:

$$\boldsymbol{y = x - \frac{x^2}{500}}$$

El vector velocidad se obtiene derivando respecto al tiempo el vector de posición:

$$\vec{r} = 50 \cdot t\,\vec{i} + (50 \cdot t - 5 \cdot t^2)\,\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left[50 \cdot t\,\vec{i} + (50 \cdot t - 5 \cdot t^2)\,\vec{j}\right]}{dt} = 50\,\vec{i} + (50 - 10 \cdot t)\,\vec{j} \text{ m/s}$$

Para $t = 3$ s:

$$\vec{v}\left(t = 3 \text{ s}\right) = 50\,\vec{i} + (50 - 10 \cdot 3)\,\vec{j} = \boldsymbol{50\,\vec{i} + 20\,\vec{j} \text{ m/s}}$$

67. **Un cañón dispara un proyectil a una velocidad de 500 m/s con un ángulo de 15°. Calcula, despreciando el rozamiento con el aire: Dato: $g = 9{,}8$ m/s².**

a) **El alcance máximo**

b) **La altura máxima.**

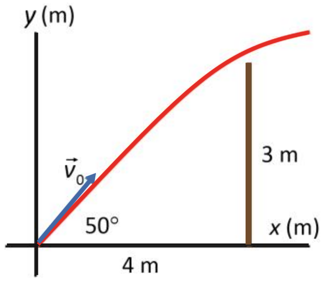
a) Calculamos el alcance máximo:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\left(2\,\alpha\right)}{g} = \frac{\left(500 \text{ m/s}\right)^2 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot 15°\right)}{9{,}8 \text{ m/s}^2} = \mathbf{12\,755 \text{ m}}$$

b) Calculamos la altura máxima:

$$y_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\ \alpha}{2 \cdot g} = \frac{(500\ \text{m/s})^2 \cdot \text{sen}^2\ 15°}{2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2} = \mathbf{854{,}4\ m}$$

68. Un niño chuta un balón con un ángulo de 50° sobre la horizontal. A una distancia de 4 m delante del niño hay una valla de 3 m de altura. Halla el valor mínimo del módulo de la velocidad inicial del balón para que pase por encima de la valla. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².



Escribimos las ecuaciones de la posición:

$$\begin{cases} x = v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y = v_{0y} \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Para calcular la velocidad inicial imponemos la condición del problema de que el balón pase por encima de la valla, es decir, para $x = 4$ m, $y \geq 3\text{m}$. Despejamos el tiempo de la primera ecuación:

$$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} = \frac{4}{v_0 \cdot \cos 50°}$$

Sustituimos la expresión en la segunda ecuación y resolvemos la inecuación:

$$y = v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha \cdot \frac{4}{v_0 \cdot \cos\alpha} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{4}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 \geq 3$$

$$4 \cdot \text{tg}\ \alpha - \frac{8 \cdot g}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \geq 3 \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot \text{tg}\ \alpha - 3 \geq \frac{8 \cdot g}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}$$

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{8 \cdot g}{(4 \cdot \text{tg}\ \alpha - 3) \cdot \cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 9{,}8}{(4 \cdot \text{tg}\ 50° - 3) \cdot \cos^2 50°}} = 10{,}36\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

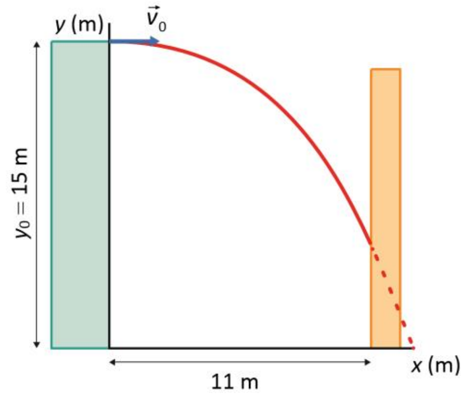
El módulo de la velocidad inicial debe ser mayor o igual que **10,36 m/s.**

69. Desde la azotea de un edificio, a 15 m del suelo, se lanza horizontalmente un balón con una velocidad de 8 m/s. Si la anchura de la calle a la que da el edificio es de 11 m:

a) ¿Choca la pelota con el edificio de enfrente o cae directamente al suelo?

b) En el caso de que choque, ¿a qué altura choca?

Dato: $g = 9{,}8$ m/s².



a) Tomamos el origen de alturas en el suelo. Escribimos las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{cases} x = v_{0x} \cdot t \\ y = h - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Haciendo $y = 0$ m, se calcula el tiempo que tarda el balón en llegar al suelo:

$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 1{,}75\ \text{s}$$

Sustituyendo el tiempo en la componente x, calculamos el alcance horizontal:

$$x = v_{0x} \cdot t = 8\ \text{m/s} \cdot 1{,}75\ \text{s} = 14\ \text{m}$$

Como es mayor que el ancho de la calle, el balón **chocará con la pared del edificio** de enfrente antes de tocar el suelo.

b) Tenemos que calcular el valor de *y* cuando *x* valga 11 m. Calculamos el tiempo que tarda el balón en conseguir dicha posición:

$$x = v_{0x} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{11\ \cancel{\text{m}}}{8\ \cancel{\text{m}}/\text{s}} = 1{,}375\ \text{s}$$

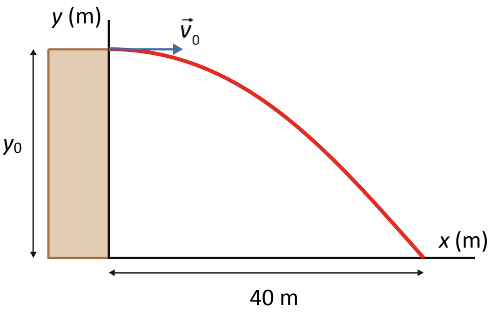
Sustituyendo el tiempo en la componente *y* calculamos la altura a la que choca con la pared:

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 15\ \text{m} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (1{,}375\ \text{s})^2 = \mathbf{5{,}74\ m}$$

ACTIVIDADES FINALES (página 244)

70. Se lanza un cuerpo horizontalmente desde lo alto de un acantilado con una velocidad inicial de 72 km/h. El cuerpo cae a una distancia de 40 m contados desde la vertical del punto de lanzamiento. Calcula la altura del acantilado y la velocidad del cuerpo al llegar al mar. Dato: $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

Tomamos como origen del sistema de referencia el punto del suelo situado en la vertical de lanzamiento.



Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v_{0x} = 72 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Escribimos las ecuaciones del movimiento:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2$$

$$\vec{r} = h\,\vec{j} + v_{0x}\,\vec{i} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left(-g\,\vec{j}\right) \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = v_{0x} \cdot t\,\vec{i} + \left(h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2\right)\vec{j}$$

Cuyas componentes son:

$$\begin{cases} x = v_{0x} \cdot t \\ y = h - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Calculamos el tiempo que tarda el cuerpo en recorrer los 40 m en horizontal:

$$x = v_{0x} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{40\ \cancel{\text{m}}}{20\ \cancel{\text{m}}/\text{s}} = 2\ \text{s}$$

Calculamos la altura del acantilado. Sustituimos el valor $y = 0$ m, al caer al agua. Y el tiempo calculado antes:

$$y = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (2\ \text{s})^2 = \mathbf{19{,}6\ m}$$

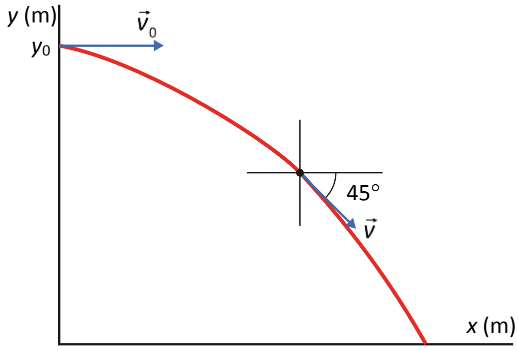
Resolvemos vectorialmente, ya que la velocidad final tiene componente en ambas direcciones. La velocidad del cuerpo al llegar al suelo es:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t = v_{0x}\,\vec{i} - g \cdot t\,\vec{j} = 20\,\vec{i} - 9{,}8 \cdot 2\,\vec{j} = 20\,\vec{i} - 19{,}6\,\vec{j}\ \text{m/s}$$

Y su módulo será la raíz cuadrada de sus componentes al cuadrado:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(20\ \text{m/s})^2 + (-19{,}6\ \text{m/s})^2} = \mathbf{28\ m/s}$$

71. Un esquiador salta desde un trampolín que se encuentra a una altura de 10 m con una velocidad horizontal de 30 km/h. Calcula el tiempo de vuelo y el punto en el que su velocidad forma un ángulo de 45° con la horizontal. Dato: *g* = 9,8 m/s².



Expresamos la velocidad en m/s:

$$v_{0x} = 30\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 8,\widehat{3}\ \text{m/s}$$

Escribimos las componentes de la ecuación de movimiento:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}\cdot t = v_{0x}\cdot t \\ y = y_0 + v_{0y}\cdot t - \dfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 = y_0 - \dfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 \end{cases}$$

Haciendo $y = 0$, calculamos el tiempo de vuelo:

$$0 = y_0 - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 \quad\Rightarrow\quad t = \sqrt{\frac{2\cdot y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\ \text{m}}{9,8\ \text{m/s}^2}} = \mathbf{1,43\ s}$$

Escribimos las componentes de la velocidad:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - g\cdot t = -g\cdot t \end{cases}$$

Para que el vector velocidad forme un ángulo de 45° con la horizontal ha de cumplirse que:

$$\text{tg } 45° = \frac{|v_y|}{|v_x|} = 1 \quad\Rightarrow\quad |v_x| = |v_y|$$

$$v_{0x} = g\cdot t \quad\Rightarrow\quad t = \frac{v_{0x}}{g} = \frac{8,\widehat{3}\ \cancel{\text{m}}/\text{s}}{9,8\ \cancel{\text{m}}/\text{s}^2} = 0,85\ \text{s}$$

Sustituyendo el tiempo en las componentes de la ecuación de movimiento calculamos la situación de dicho punto:

$$\begin{cases} x = v_{0x}\cdot t = 8,\widehat{3}\ \text{m/s}\cdot 0,85\ \text{s} = 7,09\ \text{m} \\ y = y_0 - \dfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 = 10\ \text{m} - \dfrac{1}{2}\cdot 9,8\ \text{m/s}^2\cdot(0,85\ \text{s})^2 = 6,46\ \text{m} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\vec{r} = \mathbf{7,09\ \vec{i} + 6,46\ \vec{j}\ m/s}$$

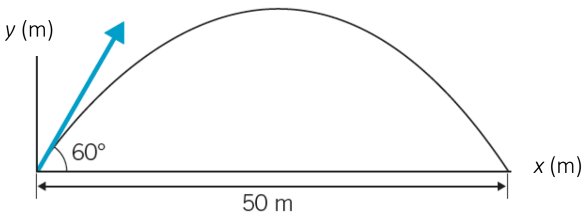
72. Un balón es lanzado con un ángulo de 60° por encima de la horizontal y recorre una longitud de 50 m en el campo de fútbol.

a) Dibuja un esquema del ejercicio.

b) Calcula la velocidad inicial.

c) ¿Qué altura alcanzó?

a)



b) Despejamos v_0 de la ecuación del alcance:

$$x_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen } 2\alpha}{g} \Rightarrow v_0^2 = \frac{x_{máx} \cdot g}{\text{sen } 2\alpha} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{x_{máx} \cdot g}{\text{sen } 2\alpha}} = \sqrt{\frac{50 \text{ m} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{\text{sen } 120^\circ}} = \mathbf{23{,}8 \text{ m/s}}$$

c) Calculamos la altura que alcanzó el balón:

$$y_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\ \alpha}{2 \cdot g} = \frac{(23{,}8 \text{ m/s})^2 \cdot \text{sen}^2\ 60^\circ}{2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} = \mathbf{21{,}7 \text{ m}}$$

73. Dos aviones que se encuentran en la misma vertical pretenden alcanzar el mismo blanco dejando caer una bomba. Si uno vuela a una altura doble que el otro, halla la relación entre sus velocidades para conseguirlo. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

Calculamos cuánto tiempo tarda una de las bombas en alcanzar el blanco ($y_1 = 0$):

$$y_1 = y_{01} + v_{y1} \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \Rightarrow 0 = y_{01} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot y_{01}}{g}}$$

Análogamente, ($y_2 = 0$):

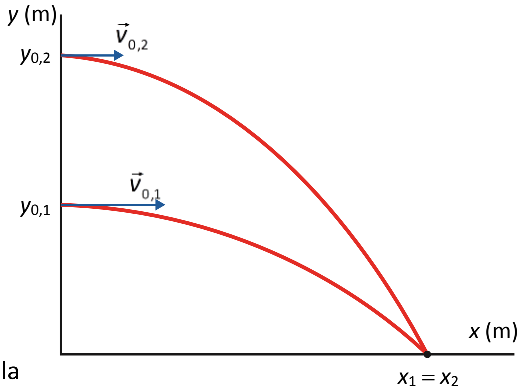
$$y_2 = y_{02} + v_{y2} \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \Rightarrow 0 = y_{02} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot y_{02}}{g}}$$

Como $y_{02} = 2 \cdot y_{01}$:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot y_{02}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot y_{01}}{g}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot y_{01}}{g}} \Rightarrow t_2 = \sqrt{2} \cdot t_1$$

En ese tiempo la distancia horizontal recorrida por las bombas debe ser la misma ($x_1 = x_2$):

$$x_1 = x_{01} + v_{01} \cdot t_1 = v_{01} \cdot t_1$$
$$x_2 = x_{02} + v_{02} \cdot t_2 = v_{02} \cdot t_2$$



Igualando:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow v_{01} \cdot t_1 = v_{02} \cdot t_2$$

Como $t_2 = \sqrt{2} \cdot t_1$, tenemos que:

$$v_{01} \cdot \cancel{t_1} = v_{02} \cdot \sqrt{2} \cdot \cancel{t_1} \Rightarrow \mathbf{v_{01} = \sqrt{2} \cdot v_{02}}$$

Es decir, el avión que vuela más bajo debe ir más rápido para que la posición de impacto de la bomba sea la misma.

Movimiento circular

74. La Estación Espacial Internacional dio 133 vueltas a la Tierra en 8 días y 13 horas a una altura media de 409 km.

Sabiendo que el radio medio de la Tierra es de 6371 km:

a) Haz un esquema en tu cuaderno con las velocidades orbitales de la nave (lineal y angular), así como la aceleración normal, a_N, en la órbita.

b) ¿Por qué el valor de a_N se parece tanto al valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre, g?

Ayuda: ¿Hay «gravedad» en órbita? ¿A qué fuerza se debe esa aceleración de la nave?

$$\left.\begin{array}{l} 8 \text{ días} = 8\ \cancel{\text{días}} \cdot \dfrac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \dfrac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 691\,200\ \text{s} \\ 13\ \text{h} = 13\ \cancel{\text{h}} \cdot \dfrac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 46\,800\ \text{s} \end{array}\right\} \quad t = 738\,000\ \text{s}$$

$$133 \text{ vueltas} = 133\ \cancel{\text{rev}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \cancel{\text{rev}}} = 266\pi\ \text{rad}$$

a) Calculamos la velocidad angular, la velocidad lineal y la aceleración normal en la órbita:

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{266\pi\ \text{rad}}{738\,000\ \text{s}} = 3{,}60 \cdot 10^{-4}\,\pi\ \text{rad/s}$$

$$v = \omega \cdot R = 3{,}60 \cdot 10^{-4}\,\pi\ \text{rad/s} \cdot (409\,000 + 6\,371\,000)\ \text{m} = 7677{,}24\ \text{m/s}$$

$$a_N = \omega^2 \cdot R = (3{,}60 \cdot 10^{-4}\,\pi\ \text{rad/s})^2 \cdot (409\,000 + 6\,371\,000)\ \text{m} = 8{,}69\ \text{m/s}^2$$

b) Para un satélite en órbita se cumple que $F = m \cdot a_N$, donde F es la fuerza gravitatoria:

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2} = m \cdot \frac{v^2}{d} \quad \Rightarrow \quad g = G \cdot \frac{M}{d} = \frac{v^2}{d} = a_N$$

La intensidad del campo gravitatorio g a una distancia d del centro de la Tierra es igual a la aceleración normal del satélite.

Como el satélite se encuentra cerca de la superficie de la Tierra (en comparación con el radio), el valor de la aceleración normal no es muy distinto al valor de g en la superficie, es decir, 9,8 m/s²:

$$g = G \cdot \frac{M}{(R_T + h)^2} \simeq G \cdot \frac{M}{R_T^2}; \quad R_T + h = d$$

ACTIVIDADES FINALES (página 245)

75. Un cuerpo gira en una circunferencia de 3 m de radio con velocidad angular constante dando 8 vueltas cada minuto. Halla la velocidad angular en el SI, el periodo, la frecuencia, la velocidad lineal y la aceleración normal.

- Velocidad angular:

$$\omega = 8\ \text{rpm} = 8\,\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60\ \text{s}} = \mathbf{\frac{4\pi}{15}\ rad/s}$$

- Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\dfrac{4\pi}{15}\ \text{rad/s}} = \mathbf{7{,}5\ s}$$

- Frecuencia:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{7{,}5\ \text{s}} = \mathbf{0{,}1\widehat{3}\ Hz}$$

- Velocidad lineal:

$$v = \omega \cdot R = \frac{4\pi}{15}\ \text{rad/s} \cdot 3\ \text{m} = \mathbf{2{,}51\ m/s}$$

- Aceleración normal:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = \left(\frac{4\pi}{15}\ \text{rad/s}\right)^2 \cdot 3\ \text{m} = \mathbf{2{,}1\ m/s^2}$$

76. Una rueda de 100 cm de radio gira en torno a un eje perpendicular a la misma que pasa por su centro a razón de 900 vueltas por minuto. Determina la velocidad angular en rad/s, el periodo y la velocidad lineal de un punto de su periferia. ¿Cuánto tiempo tardará en girar un ángulo de 0,5 rad?

- Velocidad angular:

$$\omega = 900 \text{ rpm} = 900 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} = \mathbf{30\pi\ rad/s}$$

- Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{30\pi \text{ rad/s}} = \mathbf{0{,}0\widehat{6}\ s}$$

- Velocidad lineal:

$$v = \omega \cdot R = 30\pi \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ m} = \mathbf{94{,}25\ m/s}$$

El tiempo que tardará en girar un ángulo $\Delta\theta = 0{,}5$ rad será:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{0{,}5 \text{ rad}}{30\pi \text{ rad/s}} = \mathbf{5{,}3 \cdot 10^{-3}\ s}$$

77. El disco duro de un ordenador gira con una velocidad angular de 4200 vueltas por minuto. Calcula:

a) La velocidad angular en el SI.

b) El tiempo que tarda en dar 1,5 vueltas.

c) Las vueltas que da en 10 s.

d) La velocidad de un punto del borde del disco.

Dato: diámetro del disco duro 10 cm.

a) Velocidad angular:

$$\omega = 4200 \text{ rpm} = 4200 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} = \mathbf{140\pi\ rad/s}$$

b) Para calcular el tiempo que tarda en dar 1,5 vueltas, pasamos las 1,5 vueltas a radianes:

$$1{,}5 \cancel{\text{rev}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{rev}}} = 3\pi \text{ rad}$$

Y calculamos el tiempo pedido:

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{3\pi \cancel{\text{rad}}}{140\pi \cancel{\text{rad}}/\text{s}} = \mathbf{0{,}021\ s}$$

c) Para calcular las vueltas que da en 10 s calculamos el ángulo de giro:

$$\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t = 140\pi \text{ rad/s} \cdot 10 \text{ s} = 1400\pi \text{ rad}$$

Y convertimos los radianes en vueltas:

$$1400\pi \cancel{\text{rad}} \cdot \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \cancel{\text{rad}}} = \mathbf{700\ vueltas}$$

d) La velocidad lineal de un punto del borde del disco es:

$$v = \omega \cdot R = 140\pi \text{ rad/s} \cdot 0{,}05 \text{ m} = \mathbf{22\ m/s}$$

78. La distancia entre la Tierra y la Luna es 385 000 km. Sabiendo que el periodo de rotación de la Luna es de 28 días, calcula la velocidad angular de la Luna, su velocidad lineal y su aceleración normal.

Expresamos el periodo de rotación en segundos:

$$T = 28 \cancel{\text{días}} \cdot \frac{24 \cancel{\text{h}}}{1 \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \cancel{\text{h}}} = 2\,419\,200 \text{ s}$$

La velocidad angular de la Luna es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\,419\,200\ \text{s}} = 8{,}27 \cdot 10^{-7}\pi\ \text{rad/s} = \mathbf{2{,}60 \cdot 10^{-6}\ rad/s}$$

La velocidad lineal es:

$$v = \omega \cdot R = 2{,}60 \cdot 10^{-6}\ \text{rad/s} \cdot 3{,}85 \cdot 10^{8}\ \text{m} = \mathbf{1000\ m/s}$$

La aceleración normal:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = (2{,}60 \cdot 10^{-6}\ \text{rad/s})^2 \cdot 3{,}85 \cdot 10^{8}\ \text{m} = \mathbf{2{,}6 \cdot 10^{-3}\ m/s^2}$$

79. Un disco de 25 cm de radio, inicialmente en reposo, gira con movimiento uniformemente acelerado alcanzando una velocidad de 100 rpm en 10 s. Calcula:

a) La aceleración angular del disco.

b) La velocidad lineal de un punto de la periferia del disco a los 5 s.

c) El módulo de la aceleración normal en ese momento.

a) Expresamos las velocidades angulares en unidades del SI:

$$\omega_0 = 0; \quad \omega = 100\ \text{rpm} = 100 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60\ \text{s}} = 3{,}\widehat{3}\pi\ \text{rad/s}$$

Aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{3{,}\widehat{3}\pi\ \text{rad/s}}{10\ \text{s}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}\ \mathbf{rad/s^2}$$

b) Para calcular la velocidad lineal de un punto de la periferia del disco a los 5 s necesitamos calcular la velocidad angular:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \quad \Rightarrow \quad \omega = \alpha \cdot t = \frac{\pi}{3}\text{rad/s}^2 \cdot 5\ \text{s} = 1{,}\widehat{6}\pi\ \text{rad/s}$$

Así, la velocidad lineal es:

$$v = \omega \cdot R = 1{,}\widehat{6}\pi\ \text{rad/s} \cdot 0{,}25\ \text{m} = \mathbf{1{,}31\ m/s}$$

c) El módulo de la aceleración normal a los 5 s es:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = (1{,}\widehat{6}\pi\ \text{rad/s})^2 \cdot 0{,}25\ \text{m} = \mathbf{6{,}85\ m/s^2}$$

80. Un volante de 40 cm de radio parte del reposo y acelera durante 30 s hasta alcanzar una velocidad angular de 300 rpm. Después de girar 4 min con dicha velocidad angular, se aplica un freno durante 50 s hasta que el volante se para. Calcula la aceleración angular en el último tramo del recorrido, la aceleración normal 10 s después de aplicar el freno y el ángulo total girado.

Expresamos las velocidades angulares en unidades del SI:

$$\omega_0 = 0\ \text{rad/s}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = 300\ \text{rpm} = 300 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60\ \text{s}} = 10\pi\ \text{rad/s}$$

$$\omega_3 = 0\ \text{rad/s}$$

La aceleración angular del primer tramo es:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta t} = \frac{10\pi\ \text{rad/s} - 0\ \text{rad/s}}{30\ \text{s}} = \frac{\pi}{3}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

La aceleración angular del último tramo es:

$$\alpha_3 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_3 - \omega_2}{\Delta t} = \frac{0\text{ rad/s} - 10\pi\text{ rad/s}}{50\text{s}} = -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{5}}\frac{\mathbf{rad}}{\mathbf{s^2}}$$

El signo negativo indica que la aceleración es de frenado.

Para calcular la aceleración normal a los 10 s de pisar el freno calculamos primero la velocidad angular del volante en ese momento:

$$\omega = \omega_2 + \alpha_3 \cdot t \quad \Rightarrow \quad \omega = 10\pi\text{ rad/s} - \frac{\pi}{5}\text{rad/s} \cdot 10\text{ s} = 8\pi\text{ rad/s}$$

Así, la aceleración normal es:

$$a_N = \omega^2 \cdot R = (8\pi\text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}4\text{ m} = \mathbf{252{,}66\ m/s^2}$$

Para calcular el ángulo total girado debemos analizar cada tramo por separado:

Primer tramo (MCUA):

$$t = 30\text{ s};\quad \omega_0 = 0\text{ rad/s};\quad \omega_1 = 10\pi\text{ rad/s};\quad \alpha_1 = \frac{\pi}{3}\text{rad/s}^2$$

$$\theta_1 = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2}\cdot\alpha_1 \cdot t^2 = 0\text{ rad} + 0\text{ rad/s}\cdot 30\text{ s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\text{rad/s}^2 \cdot (30\text{ s})^2 = 150\pi\text{ rad}$$

Segundo tramo (MCU):

$$t = 4\text{ min} = 240\text{ s};\quad \omega_1 = 10\pi\text{ rad/s}$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \omega_1 \cdot t = 150\pi\text{ rad} + 10\pi\frac{\text{rad}}{\cancel{\text{s}}}\cdot 240\ \cancel{\text{s}} = 2550\pi\text{ rad}$$

Tercer tramo (MCUA):

$$t = 50\text{ s};\quad \omega_2 = 10\pi\text{ rad/s};\quad \omega_3 = 0\text{ rad/s};\quad \alpha_3 = -\frac{\pi}{5}\text{rad/s}^2$$

$$\theta_3 = \theta_2 + \omega_2 \cdot t + \frac{1}{2}\cdot\alpha_3\cdot t^2 = 2550\pi\text{ rad} + 10\pi\text{ rad/s}\cdot 50\text{ s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{5}\text{rad/s}^2\cdot(50\text{ s})^2 = 2800\pi\text{ rad}$$

El ángulo total girado es **2800π rad** = **8796,46 rad** = **1400 vueltas**.

81. Un volante de 50 cm de radio parte del reposo y alcanza una velocidad angular de 300 rpm en 5 s. Calcula la aceleración tangencial y la velocidad lineal de un punto de su periferia a los 2 s de iniciado el movimiento.

Expresamos las velocidades angulares en unidades del SI:

$$\omega_0 = 0\text{ rad/s};\quad \omega = 300\text{ rpm} = 300\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}}\cdot\frac{2\pi\text{ rad}}{1\ \cancel{\text{rev}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60\text{ s}} = 10\pi\text{rad/s}$$

Para calcular la aceleración tangencial calculamos primero la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{10\pi\text{ rad/s}}{5\text{ s}} = 2\pi\text{ rad/s}^2$$

La aceleración tangencial:

$$a_T = \alpha \cdot R = 2\pi\text{ rad/s}^2 \cdot 0{,}5\text{ m} = \boldsymbol{\pi}\ \mathbf{m/s^2}$$

Para calcular la velocidad lineal calculamos primero la velocidad angular del volante a los 2 s:

$$\omega = \omega_0 + \alpha\cdot t \quad\Rightarrow\quad \omega = \alpha\cdot t = 2\pi\text{ rad/s}^2\cdot 2\text{ s} = 4\pi\text{ rad/s}$$

La velocidad lineal:

$$v = \omega\cdot R = 4\pi\text{ rad/s}\cdot 0{,}5\text{ m} = \mathbf{2\pi\ m/s^2}$$

82. La velocidad angular de un motor que gira a 900 rpm desciende uniformemente hasta 10π rad/s después de dar 50 vueltas. Calcula la aceleración angular de frenado y el tiempo necesario para realizar las 50 revoluciones.

Expresamos las velocidades angulares en unidades del SI:

$$\omega_0 = 900\text{ rpm} = 900\,\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}}\cdot\frac{2\pi\text{ rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}}\cdot\frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\text{ s}} = 30\pi\text{ rad/s}$$

$$\omega = 10\pi\text{ rad/s}$$

Para calcular la aceleración angular y el tiempo necesario para realizar 50 vueltas, pasamos las 50 vueltas a radianes:

$$50\,\cancel{\text{rev}}\cdot\frac{2\pi\text{ rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}} = 100\pi\text{ rad}$$

Y a partir de la siguiente expresión, que relaciona ω y θ en un MCUA, calculamos la aceleración angular:

$$\omega^2 - {\omega_0}^2 = 2\cdot\alpha\cdot\theta \quad\Rightarrow\quad \alpha = \frac{\omega^2 - {\omega_0}^2}{2\cdot\theta} = \frac{(10\pi\text{ rad/s})^2 - (30\pi\text{ rad/s})^2}{2\cdot 100\pi\text{ rad}} = \mathbf{-4\pi\text{ rad/s}^2}$$

El signo negativo indica que la aceleración es de frenado.

Ahora calculamos el tiempo:

$$\omega = \omega_0 + \alpha\cdot t \quad\Rightarrow\quad t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{10\pi\text{ rad/s} - 30\pi\text{ rad/s}}{-4\pi\text{ rad/s}^2} = \mathbf{5\text{ s}}$$

Movimiento armónico simple

83. Un objeto realiza un MAS. ¿Qué magnitudes son proporcionales entre sí? Elige la correcta.

a) La elongación y la velocidad.

b) La aceleración y la elongación.

La expresión de la velocidad en un MAS es:

$$v = \omega\cdot\sqrt{A^2 - x^2}$$

Por tanto, v y x no son directamente proporcionales.

La expresión de la aceleración de un MAS es:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left[\omega\cdot A\cdot\cos\left(\omega\cdot t + \phi_0\right)\right]}{\mathrm{d}t} = -\omega^2\cdot A\cdot\text{sen}\left(\omega\cdot t + \phi_0\right) = -\omega^2\cdot x$$

Por tanto, la respuesta correcta en la b), ya que la aceleración y la elongación son magnitudes proporcionales entre sí, la constante de proporcionalidad es $-\omega^2$.

84. Estiramos un resorte 5 cm y lo dejamos oscilar libremente resultando que completa una oscilación cada 0,2 s.

a) La ecuación que nos permite conocer su posición en función del tiempo.

b) La velocidad y la aceleración a la que estará sometido su extremo libre a los 15 s de iniciado el movimiento.

a) El movimiento empieza en el punto de máxima elongación: $A = 0{,}05$ m. A partir del periodo calculamos la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2\text{ s}} = 10\pi\text{ rad/s}$$

Con todos estos datos podemos expresar la posición en función del tiempo como

$$x = A\cdot\text{sen}(\omega\cdot t + \phi_0)$$

Para $t = 0$, $x = A$:

$$A = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot 0 + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{x = 5 \cdot \text{sen}\left(10\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{cm}}$$

b) La velocidad se obtiene derivando la expresión de la elongación con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\text{d}x}{\text{d}t} = \frac{\text{d}[A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0)]}{\text{d}t} = \omega \cdot A \cdot \cos\,(\omega \cdot t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad v = 10\pi \cdot 0{,}05 \cdot \cos\left(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\text{m/s}$$

Para $t = 15$ s:

$$v = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(4\pi \cdot 15\ \text{s} + \frac{\pi}{2}\right)\text{m/s} = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{61\pi}{2}\right) = \mathbf{0\,m/s}$$

La aceleración se calcula derivando la expresión de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\text{d}v}{\text{d}t} = \frac{\text{d}[\omega \cdot A \cdot \cos\,(\omega \cdot t + \phi_0)]}{\text{d}t} = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad a = -(10\pi)^2 \cdot 0{,}05 \cdot \text{sen}\left(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\text{m/s}^2$$

Para $t = 15$ s:

$$a = -5\pi^2 \cdot \text{sen}\left(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\text{m/s}^2 = -5\pi^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{61\pi}{2}\right)\text{m/s}^2 = \boldsymbol{-5\pi^2\ \text{m/s}^2}$$

El valor de la velocidad es cero, por lo que el cuerpo estará en alguno de los extremos (elongación máxima). El valor de la aceleración correspondiente es el máximo. Como la aceleración es de valor negativo, resulta que el resorte estará próximo a su elongación máxima.

ACTIVIDADES FINALES (página 246)

85. Un móvil realiza un movimiento armónico simple en el extremo de un muelle realizando dos oscilaciones por segundo, siendo la amplitud del movimiento 20 cm.

a) La velocidad máxima que llega a alcanzar la masa que oscila.

b) La aceleración de la masa al pasar por el extremo del movimiento vibratorio armónico.

a) Calculamos la frecuencia angular a partir de la frecuencia de oscilación determinada en el enunciado:

$$f = \frac{2\ \text{ciclos}}{1\ \text{s}} = 2\ \text{Hz} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 2\ \text{Hz} = 4\pi\ \text{rad/s}$$

La velocidad máxima a la que se mueve la masa puede obtenerse a partir de:

$$v_{\text{máx}} = \omega \cdot A = 4\pi\ \text{rad/s} \cdot 0{,}02\ \text{m} = \boldsymbol{\frac{4\pi}{5}\ \text{m/s}}$$

b) La aceleración a la que se mueve el MAS se calcula así:

$$a = -\omega^2 \cdot x = -\omega^2 \cdot A = (4\pi\ \text{rad/s})^2 \cdot 0{,}02\ \text{m} = \boldsymbol{\frac{16\pi^2}{5}\ \text{m/s}^2}$$

86. Una partícula recorre de extremo a extremo en un movimiento armónico simple 8 cm y su aceleración máxima es 48 m/s². Calcula:

a) La frecuencia y el periodo del movimiento.

b) La velocidad máxima de la partícula.

a) La aceleración máxima de un MAS se puede obtener a partir de: $a = -\omega^2 \cdot A$. Su elongación máxima es $A = 4$ cm, la mitad del recorrido de extremo a extremo. La frecuencia angular del MAS:

$$a = -\omega^2 \cdot A \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\left|\frac{a}{A}\right|} = \sqrt{\frac{48\ \text{m/s}^2}{0{,}04\ \text{m}}} = 20\sqrt{3}\ \text{rad/s}$$

Como $\omega = 2\pi \cdot f$, despejando la frecuencia y sustituyendo, $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20\sqrt{3}\ \text{rad/s}}{2\pi} = \mathbf{\frac{10\sqrt{3}}{\pi}\ Hz}$, el periodo es el inverso de la frecuencia: $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{10\sqrt{3}}{\pi}\text{Hz}} = \mathbf{\frac{\pi}{10\sqrt{3}}\ s}$

b) La velocidad máxima de una partícula es:

$$v_{\text{máx}} = |\omega \cdot A| = \left|\sqrt{\left|\frac{a}{A}\right|} \cdot A\right| = \left|\sqrt{|a \cdot A|}\right| = \left|\sqrt{\left|48\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}04\ \text{m}\right|}\right| = \mathbf{\frac{4\sqrt{3}}{5}\ m/s}$$

87. Calcula la aceleración y la velocidad en el instante inicial, *t* = 0 s, para un muelle cuyo movimiento viene descrito por la ecuación:

$$\boldsymbol{x(t) = 0{,}3 \cdot \cos\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)\ \text{cm}}$$

La ecuación de la posición es:

$$x(t) = 0{,}3 \cdot \cos\left(2\ t + \frac{\pi}{6}\right) \text{cm}$$

En el instante $t = 0$ s.

$$x(t = 0\ \text{s}) = 0{,}3 \cdot \cos\left(2 \cdot 0 + \frac{\pi}{6}\right) \text{cm} = 0{,}26\ \text{m}$$

La velocidad se obtiene derivando la posición con respecto al tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega \cdot A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) = -2 \cdot 0{,}3 \cdot \text{sen}\left(2\ t + \frac{\pi}{6}\right) \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

En el instante $t = 0$ s.

$$v(t = 0\ \text{s}) = -0{,}6 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot 0 + \frac{\pi}{6}\right) = -0{,}6 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \mathbf{-0{,}3\ \frac{cm}{s}}$$

La aceleración se obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) = -\omega^2 \cdot x$$

En el instante $t = 0$ s.

$$a(t = 0\ \text{s}) = -\omega^2 \cdot x(t = 0\ \text{s})$$

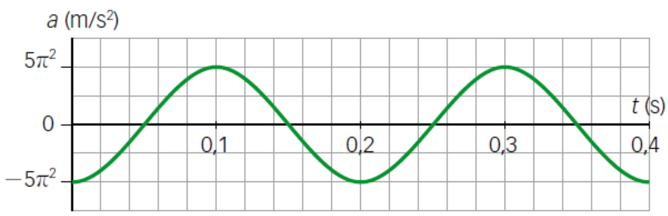
$$x(t = 0\ \text{s}) = 0{,}3 \cdot \cos\left(2 \cdot 0 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{20}\ \text{cm}$$

$$a(t = 0\ \text{s}) = -\left(2\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{20}\ \text{cm} = \mathbf{-\frac{3\sqrt{6}}{5}\ \frac{cm}{s^2}}$$

88. Un móvil oscila según un MAS en torno al origen en la dirección del eje *OX*. En el dibujo se representa la aceleración del móvil en función del tiempo.

a) La ecuación de la elongación.

b) Determina la velocidad inicial.



De la gráfica extraemos los siguientes datos:

$$T = 0{,}2\ \text{s} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2\ \text{s}} = 10\pi\ \text{rad/s}$$

$$a_{\text{máx}} = 5\pi^2\ \text{m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad a_{\text{máx}} = A \cdot \omega^2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{a_{\text{máx}}}{\omega^2} = \frac{5\pi^2\ \text{m/s}^2}{(10\pi\ \text{rad/s})^2} = 0{,}05\ \text{m}$$

Escribimos la ecuación de la aceleración en función del tiempo:

$$a(t) = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) = -(10\pi)^2 \cdot 0{,}05 \cdot \text{sen}\left(10\pi\ t + \phi_0\right)\ \text{m/s}^2$$

$$a(t) = -5\pi^2 \cdot \text{sen}\left(10\pi\ t + \phi_0\right)\ \text{m/s}^2$$

Para $t = 0$ s:

$$a(t = 0\ \text{s}) = -5\pi^2 \cdot \text{sen}\left(10\pi \cdot 0 + \phi_0\right) \quad \Rightarrow \quad -5\pi^2 = -5\pi^2 \cdot \text{sen}\ \phi_0 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, la ecuación de la aceleración es:

$$\boldsymbol{a(t) = -5\pi^2 \cdot \text{sen}\left(10\pi\ t + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

a) La ecuación de la elongación será:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) \quad \Rightarrow \quad x(t) = 0{,}05 \cdot \text{sen}\left(10\pi\ t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m}$$

Expresada en cm:

$$\boldsymbol{x(t) = 5 \cdot \text{sen}\left(10\pi\ t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{cm}}$$

b) La ecuación de la velocidad será:

$$v(t) = \frac{\text{d}x}{\text{d}t} = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(10\pi\ t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m/s}$$

Para $t = 0$ s:

$$v(t) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(10\pi \cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

89. Un objeto está unido a un muelle horizontal y realiza un MAS sobre una superficie horizontal sin rozamiento con una amplitud de 5 cm y una frecuencia de 3,3 Hz. Determina:

a) El periodo del movimiento.

b) La velocidad máxima y la aceleración máxima.

a) El dato de la frecuencia nos permite conocer el periodo, *T:*

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3{,}3\ \text{Hz}} = 0{,}30\ \text{s} = \mathbf{0{,}3\,s}$$

b) Calculamos ω a partir del dato del periodo, según:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}30\ \text{s}} = 20{,}73\ \text{rad/s}$$

La velocidad máxima en un MAS es:

$$v_{\text{máx}} = \omega \cdot A = 20{,}73\ \text{rad/s} \cdot 0{,}05\ \text{m} = \mathbf{1{,}04\ m/s}$$

La aceleración máxima en un MAS es:

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 \cdot A = (20{,}73\ \text{rad/s})^2 \cdot 0{,}05\ \text{m} = \mathbf{21{,}5\ m/s}$$

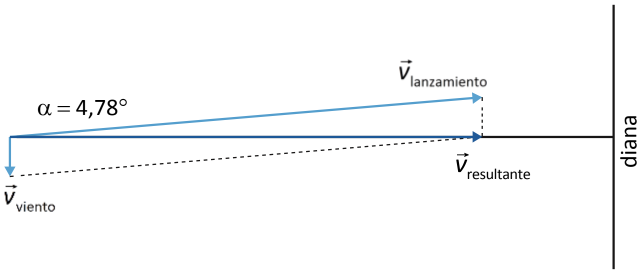
Ampliación (página 246)

90. En un concurso de tiro con arco la velocidad del viento es de 30 km/h. Si el viento sopla perpendicularmente a la dirección en la que se van a hacer los tiros, halla el ángulo con el que hay que tirar para acertar en el blanco si la velocidad de la flecha es de 100 m/s. Toma como origen de la medida de ángulos la línea que une el blanco con el arquero.

Pasamos la velocidad a unidades del SI:

$$v_{\text{viento}} = 30\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 8,\widehat{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocidad final de la flecha, $\vec{v}_{\text{resultante}}$, debe tener la dirección del blanco, y es la suma de la velocidad del lanzamiento, $\vec{v}_{\text{lanzamiento}}$, y la del viento, $\vec{v}_{\text{viento}}$. En este caso no vamos a tener en cuenta la ligera caída de la fecha en su recorrido al centro de la diana. En el siguiente esquema se representa la suma vectorial de las velocidades implicadas (visión cenital).



Por trigonometría, calculamos el ángulo α:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{|\vec{v}_{\text{viento}}|}{|\vec{v}_{\text{lanzamiento}}|} = \frac{8,\widehat{3}\ \cancel{\text{m/s}}}{100\ \cancel{\text{m/s}}} = 0,08\widehat{3} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \mathbf{4,78°}$$

Es decir, hay que orientar el arco de manera que apunte con una desviación de **4,78°** contra el lado del que viene el viento.

91. Un avión, que vuela horizontalmente a 100 m de altura con una velocidad de 100 m/s, deja caer un paquete con ayuda humanitaria sobre la cubierta de un barco que se mueve con una velocidad de 25 km/h. Calcula la distancia del portaviones al avión, medida horizontalmente, a la que hay que soltar la carga si:

a) El avión y el portaaviones se mueven en la misma dirección y sentido.

b) El avión y el portaaviones se mueven en la misma dirección y sentido contrario.

Dato: $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

Expresamos la velocidad inicial del portaaviones en unidades de

$$v_{0,\text{portaaviones}} = 25\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 6,9\widehat{4}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a) Escribimos las ecuaciones de movimiento del paquete:

$$\begin{cases} x_{\text{paquete}} = x_{0,\text{paquete}} + v_{0,x,\text{paquete}}\cdot t = v_{0,x,\text{paquete}}\cdot t \\ y_{\text{paquete}} = y_{0,\text{paquete}} + v_{0,y,\text{paquete}}\cdot t - \dfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 = y_{0,\text{paquete}} - \dfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 \end{cases}$$

Y la del portaaviones:

$$x_{\text{portaaviones}} = x_{0,\text{portaaviones}} + v_{0,x,\text{portaaviones}}\cdot t$$

Calculamos el tiempo de vuelo del paquete haciendo $y_{\text{paquete}} = 0$ m (cuando llega al suelo):

$$0 = y_{0,\text{paquete}} - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 \quad\Rightarrow\quad y_{0,\text{paquete}} = \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$

Para que el paquete caiga sobre el portaaviones, x_{paquete} ha de ser igual a $x_{\text{portaaviones}}$:

$$x_{\text{paquete}} = x_{\text{portaaviones}} \Rightarrow v_{0,x,\text{paquete}} \cdot t = x_{0,\text{portaaviones}} + v_{0,x,\text{portaaviones}} \cdot t$$

$$x_{0,\text{portaaviones}} = \left(v_{0,x,\text{paquete}} - v_{0,x,\text{portaaviones}}\right) \cdot t \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot y_{0,\text{paquete}}}{g}} \sqrt{\frac{2 \cdot 100\text{ m}}{9,8\text{ m/s}^2}} = 4,52\text{ s}$$

Para $t = 4,52$ s:

$$x_{0,\text{portaaviones}} = \left(100\text{ m/s} - 6,94\text{ m/s}\right) \cdot 4,52\text{ s} = \mathbf{420,38\text{ m}}$$

b) Si el portaaviones se mueve en la misma dirección y sentido contrario que el avión, reescribimos la ecuación de movimiento:

$$x_{\text{portaaviones}} = x_{0,\text{portaaviones}} - v_{0,x,\text{portaaviones}} \cdot t$$

Como el tiempo de vuelo del paquete es el mismo, igualamos las posiciones y resolvemos como en el apartado anterior:

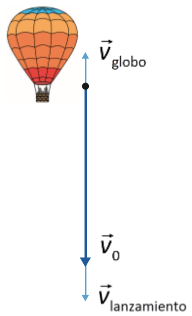
$$x_{\text{paquete}} = x_{\text{portaaviones}} \Rightarrow v_{0,x,\text{paquete}} \cdot t = x_{0,\text{portaaviones}} - v_{0,x,\text{portaaviones}} \cdot t$$

$$x_{0,\text{portaaviones}} = \left(v_{0,x,\text{paquete}} + v_{0,x,\text{portaaviones}}\right) \cdot t$$

Para $t = 4,52$ s:

$$x_{0,\text{portaaviones}} = \left(100\text{ m/s} + 6,94\text{ m/s}\right) \cdot 4,52\text{ s} = \mathbf{483,13\text{ m}}.$$

92. Desde un globo que asciende a una velocidad de 5 m/s, en el momento en que el globo está a 30 m de altura se lanza verticalmente hacia abajo un cuerpo con una velocidad inicial respecto al globo de 20 m/s. Calcula el tiempo que tarda el cuerpo en caer al suelo.



Como el globo asciende a una velocidad de 5 m/s en sentido contrario al lanzamiento, la velocidad relativa inicial del cuerpo es:

$$v_{\text{lanz}} - v_{\text{globo}} = 20\text{ m/s} - 5\text{ m/s} = 15\text{ m/s} = v_0$$

Escribimos la ecuación de movimiento y hacemos $y = 0$ m para calcular el tiempo que tarda el cuerpo en llegar al suelo:

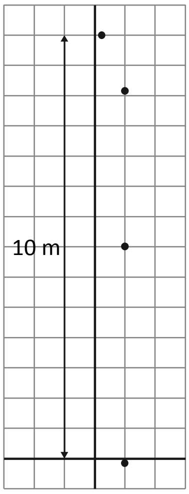
$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow 0 = 30\text{ m} - 15\text{ m/s} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,8\text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

$$4,9\,t^2 + 15\,t - 30 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado y obtenemos dos soluciones: $t_1 = -4,45$ s y $t_2 = 1,38$ s.

La primera de ellas no es una solución posible (no existen tiempos negativos), por tanto, el tiempo que tarda el cuerpo en llegar al suelo es: $t_c = \mathbf{1,38\text{ s}}$.

93. Un recipiente lleno de agua tiene un orificio por el que escapa una media de dos gotas de agua por segundo. Si se coloca el recipiente a una altura de 10 m sobre el suelo, indica la posición de las gotas que se encuentren en el aire cuando comienza a caer una gota cualquiera. Dato: $g = 9,8$ m/s².



En primer lugar veamos cuánto tiempo tarda una gota en llegar al suelo ($y = 0$ m):

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow 0 = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\text{ m}}{9,8\text{ m/s}^2}} = 1,43\text{ s}$$

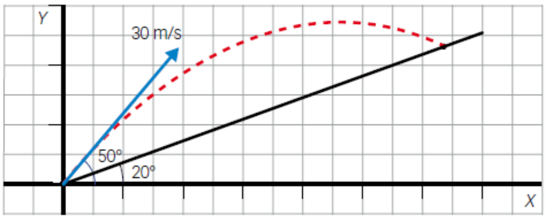
Como cada 0,5 s cae una gota, cuando comienza a caer una nueva gota ($t = 0$ s) tendremos solo dos gotas en el aire ($t = 0,5$ s y $t = 1$ s, respectivamente), ya que la anterior a estas ($t = 1,5$ s) ya habría alcanzado el suelo. La posición de cada gota viene dada por:

$$y(t = 0\text{ s}) = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \mathbf{10\text{ m}}$$

$$y(t=0,5\text{ s}) = y_0 - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 = 10\text{ m} - \frac{1}{2}\cdot 9,8\text{ m/s}^2\cdot(0,5\text{ s})^2 = \mathbf{8,77\text{ m}}$$

$$y(t=1\text{ s}) = y_0 - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 = 10\text{ m} - \frac{1}{2}\cdot 9,8\text{ m/s}^2\cdot(1\text{ s})^2 = \mathbf{5,1\text{ m}}$$

94. Se lanza un cuerpo con una velocidad de 30 m/s y ángulo de 50° con la horizontal desde la base de un plano inclinado 20°. Halla la ecuación de la trayectoria del cuerpo y a qué distancia desde el origen el cuerpo impacta sobre el plano inclinado. Dato: *g* = 9,8 m/s².



Escribimos las componentes de la ecuación de movimiento:

$$\begin{cases} x = v_{0x}\cdot t = v_0\cdot\cos\alpha\cdot t \\ y = v_{0y}\cdot t - \dfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 = v_0\cdot\text{sen}\,\alpha\cdot t - \dfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 \end{cases}$$

Para obtener la ecuación de la trayectoria eliminamos el tiempo. Despejamos en la primera:

$$x = v_0\cdot\cos\alpha\cdot t \quad\Rightarrow\quad t = \frac{x}{v_0\cdot\cos\alpha}$$

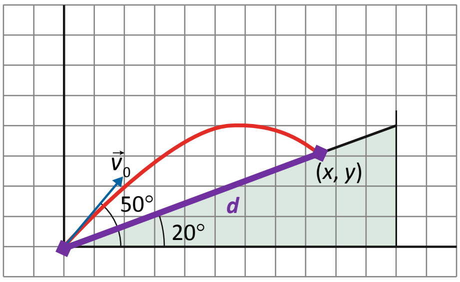
Y sustituimos en la segunda:

$$y = v_0\cdot\text{sen}\,\alpha\cdot t - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 = v_0\cdot\text{sen}\,\alpha\cdot\frac{x}{v_0\cdot\cos\alpha} - \frac{1}{2}\cdot g\cdot\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2$$

$$y = \text{tg}\,\alpha\cdot x - \frac{g}{2\cdot v_0^2\cdot\cos^2\alpha}\cdot x^2 = \text{tg}\,50°\cdot x - \frac{9,8\text{ m/s}^2}{2\cdot(30\text{ m/s})^2\cdot\cos^2 50°}\cdot x^2$$

La ecuación de la trayectoria del cuerpo es:

$$\mathbf{y = 1,19\cdot x - 0,013\cdot x^2}$$



Para calcular el punto del plano inclinado donde va impactar el cuerpo, en primer lugar necesitamos conocer la ecuación del plano inclinado (ecuación de una recta):

$$y = \text{m}\cdot x = \text{tg}\,\beta\cdot x = \text{tg}\,20°\cdot x = 0,36\cdot x$$

A continuación resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 1,19\cdot x - 0,013\cdot x^2 \Rightarrow \text{Ecuación de la trayectoria} \\ y = 0,36\cdot x \qquad\qquad\quad \Rightarrow \text{Ecuación del plano} \end{cases}$$

$$0,36\cdot x = 1,19\cdot x - 0,013\cdot x^2 \quad\Rightarrow\quad 0,013\cdot x^2 = 0,83\cdot x \quad\Rightarrow\quad x = 62,82\text{ m}$$

$$y = 0,36\cdot x = 0,36\cdot 62,82 = 22,86 \quad\Rightarrow\quad y = 22,86\text{ m}$$

Por tanto, la distancia sobre el plano es:

$$d = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(62,82\text{ m})^2 + (22,86\text{ m})^2} = \mathbf{66,85\text{ m}}$$

95. Dos partículas tienen un MAS sobre la misma trayectoria con la misma frecuencia y amplitud. Si se cruzan en el centro de la trayectoria, la diferencia de fase entre ellas será: (Elige la opción correcta).

a) π/2 rad **b) π/2 rad** **c) 3π/2 rad** **d) π/4 rad**

La respuesta correcta es la b), ya que en un movimiento gobernado por una función senoidal esto equivale a un desfase de 180° (invertir el signo) y, por tanto, se cruzarán en los mismos puntos con sentido de avance opuesto.

FÍSICA EN TU VIDA (página 248)

INTERPRETA

La tabla muestra las características de algunos saltos de longitud.

	Atleta	Velocidad (m/s)	Ángulo (°)	Marca (m)
HOMBRES	Mike Powell	9,8	23,2	8,95
	Carl Lewis	10,0	18,7	8,79
MUJERES	Heike Dresler	9,4	15,6	7,13
	Jackie Joyner	8,5	22,1	7,12

1. **¿Cuál fue la velocidad horizontal de Mike Powell en el momento de la batida?**

Calculamos la componente horizontal del vector velocidad:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha = 9{,}8\ \text{m/s} \cdot \cos 23{,}2° = \mathbf{9{,}01\ m/s}$$

2. **¿Una mayor velocidad implica siempre un mayor alcance?**

Escribimos la expresión del alcance:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\ 2\alpha}{g}$$

De ella podemos deducir que el alcance depende tanto de la velocidad inicial como del ángulo de salto. Por tanto, una mayor velocidad no implica siempre un salto más largo, hay que tener en cuenta también el ángulo con el que salta el atleta.

3. **Calcula la velocidad vertical y horizontal de cada atleta. ¿Quién se impulsó más verticalmente durante la batida, Lewis o Powell, Dresler o Joyner?**

Calculamos las velocidades aplicando las ecuaciones correspondientes a las componentes *x* e *y* de la velocidad:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha \end{cases}$$

De este modo obtenemos:

	Atleta	v_{0x} (m/s)	v_{0y} (m/s)
HOMBRES	Mike Powell	9,01	3,86
	Carl Lewis	9,47	3,21
MUJERES	Heike Dresler	9,05	2,53
	Jackie Joyner	7,88	3,20

Verticalmente el atleta que más se impulsó fue Powell.

REFLEXIONA

4. **Si calculas la distancia del salto de Powell con la fórmula para el alcance, se obtiene algo más de 7 m (referido al centro de gravedad del atleta). Identifica esta distancia en el esquema de arriba.**

a) **¿El centro de gravedad del atleta se encuentra a la misma altura durante la batida que en la caída?**

b) **Explica entonces la marca de 8,95 m.**

Los 7 m corresponden a la suma de $L_1 + L_2 + L_3 + L_4$.

a) No, el centro de gravedad del atleta se encuentra más bajo en la caída que en la batida.

b) El motivo por el que no coincide la marca de la tabla con el alcance calculado con la fórmula es que en la marca se tiene como referencia los pies del atleta y la fórmula considera el centro de gravedad.

OPINA

5. **¿Qué te parecen las fuertes medidas contra el dopaje que hacen que algunos récords del mundo de atletismo sobrevivan muchos años?**

En la respuesta se debe tener en cuenta, por un lado, que las competiciones deportivas deben ser objetivas y, por otro, las graves consecuencias que provoca el consumo de sustancias que alteran la salud de las personas.

Por tanto, las medidas contra el dopaje son necesarias, y no tiene sentido batir un récord mundial gracias a haber consumido algún tipo de sustancia, debiéndose penalizar siempre esta clase de actuaciones.

9

Las fuerzas

Las fuerzas

9

PARA COMENZAR (página 249)

- **¿Cómo podrá moverse hacia atrás una nave en el espacio usando la tercera ley de Newton?**

  Expulsando gases hacia adelante. De esta forma, la nave recibiría un impulso hacia atrás.

- **¿Hacia dónde se moverá un patinador sobre hielo inicialmente en reposo cuando lanza una pesada piedra hacia su izquierda?**

  Se moverá en el sentido contrario del lanzamiento, es decir, hacia su derecha.

PRACTICA (página 250)

1. Di qué frases son verdaderas:

a) Siempre que un objeto se mueve está actuando una fuerza neta sobre él.

b) Siempre que un objeto se mueve es porque no actúa ninguna fuerza sobre él.

c) Siempre que un objeto no se mueve o lo hace con velocidad constante es porque no hay una fuerza neta ejercida sobre él.

a) Falso, un objeto puede moverse incluso cuando no actúe ninguna fuerza sobre él, y entonces lo hace con movimiento rectilíneo y uniforme $(\Delta\vec{v} = \text{constante})$.

Un caso particular es que esté en reposo y entonces permanece en reposo.

b) Falso. Hay incontables ejemplos de cuerpos que se mueven bajo la acción de las fuerzas, como una bicicleta, un avión, un pájaro…

c) Verdadero, pero hay que precisar: «si un objeto no se mueve o lo hace con vector velocidad constante (no basta que sea constante el módulo v).

2. Una fuerza de 200 N actúa sobre una caja llena con 50 kg de naranjas durante 5 s. Suponiendo que parte del reposo:

a) Calcula el valor de la aceleración.

b) ¿Cuál es la distancia recorrida en esos 5 s?

a) Aplicamos la segunda ley de Newton, puesto que conocemos tanto la masa como la fuerza, y podemos averiguar así el valor de la aceleración (ignoramos el rozamiento):

$$F = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{m} = \frac{200\ \text{N}}{50\ \text{kg}} = \mathbf{4\ m/s^2}$$

b) Para calcular la distancia recorrida durante 5 s:

De $t = 0$ a $t = 5$ s el movimiento es uniformemente acelerado. Según calculamos en a) la aceleración es $a = 4\ \text{m/s}^2$, entonces:

$$\Delta s_{\text{durante 5 s}} = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 0 + \frac{1}{2} \cdot (4\ \text{m/s}^2) \cdot (5\ \text{s})^2 = \mathbf{50\ m}$$

3. La Tierra, cuya masa es de unos $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, ejerce una fuerza (peso) de 588 N sobre una persona de 60 kg situada en su superficie. Según la tercera ley de Newton, la persona atrae a nuestro planeta con una fuerza opuesta del mismo módulo.

a) Con estos datos y la segunda ley, calcula las aceleraciones respectivas de la Tierra y la persona, a_T y a_p.

b) ¿Por qué no se anulan las fuerzas ejercidas, si tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentidos opuestos?

a) La fuerza que ejerce la Tierra sobre la persona es el peso, $\vec{P} = m_p \cdot a_p = 588\,\text{N}$, y la fuerza que ejerce la persona sobre la Tierra es igual y opuesta, $-\vec{P}$.

Despejamos la aceleración y sustituimos los datos:

$$a_T = \frac{P}{M_T} = \frac{588\ \text{N}}{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}} = \mathbf{9{,}8 \cdot 10^{-23}\ m/s^2}$$

$$a_p = \frac{P}{M_p} = \frac{588\ \text{N}}{60\ \text{kg}} = \mathbf{9{,}8\ m/s^2}$$

(En realidad, $a_P = g$ - 9,8 m/s^2; la «aceleración de la gravedad» en la superficie terrestre).

c) La fuerza de la Tierra sobre la persona, $\vec{F}_{TP} = \vec{P}$ y la de la persona sobre la Tierra $\vec{F}_{PT} = -\vec{P}$ no se pueden sumar o, mejor dicho, no tiene sentido sumarlas, puesto que no están aplicadas sobre el mismo cuerpo. Lo mismo pasa con todas las parejas de fuerzas de la tercera ley de Newton, que actúan sobre cada uno de los dos cuerpos que participan en la interacción.

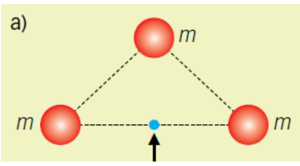
ACTIVIDAD (página 251)

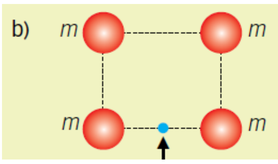
4. Ordena de menor a mayor intensidad las cuatro interacciones fundamentales.

Interacción gravitatoria < Interacción electromagnética < Interacción nuclear débil < Interacción nuclear fuerte

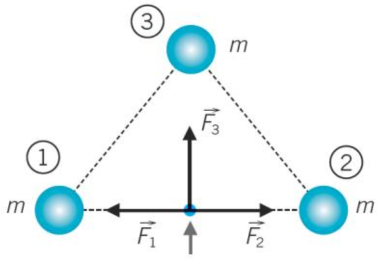
ACTIVIDAD (página 252)

5. Indica hacia dónde estará dirigida la fuerza gravitatoria que sufre la masa señalada con la flecha.

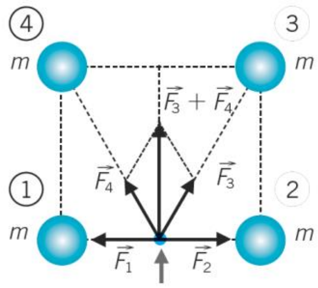




a) $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ se anulan. La fuerza resultante viene representada por $\vec{F}_3$.



b) $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ se anulan. La fuerza resultante es la suma de $\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$.

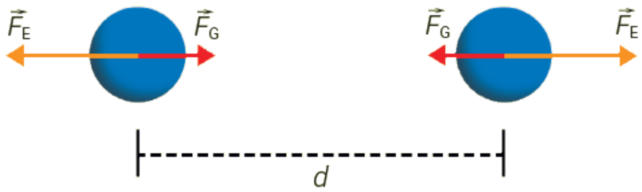


Como $\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$ son iguales y forman el mismo ángulo (α) con el eje *Y*, la resultante de la suma de $\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$ va dirigida a lo largo del eje *Y*.

ACTIVIDAD (página 253)

6. Calcula la fuerza de atracción gravitatoria entre dos electrones y compárala con la fuerza eléctrica de repulsión entre ambos. ¿Cuál es mayor?

Datos: $q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $k = 8{,}99 \cdot 10^9$ N · m²/C²; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².



Aplicamos la ley de la gravitación universal y la ley de Coulomb:

$$F_G = G \cdot \frac{m_e \cdot m_e}{d^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\cancel{\text{kg}^2}} \cdot \frac{(9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\cancel{\text{kg}})^2}{d^2} = \frac{5{,}523 \cdot 10^{-71}}{d^2}\,\text{N}\cdot\text{m}^2$$

$$F_E = k \cdot \frac{m_e \cdot m_e}{d^2} = 9 \cdot 10^9\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\cancel{\text{C}^2}} \cdot \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\cancel{\text{C}})^2}{d^2} = \frac{2{,}304 \cdot 10^{-28}}{d^2}\,\text{N}\cdot\text{m}^2$$

Por tanto:

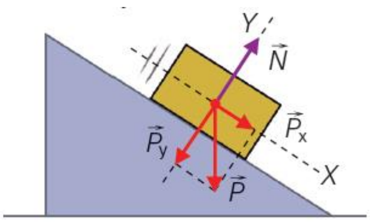
$$\frac{F_E}{F_G} = \frac{\dfrac{2{,}304 \cdot 10^{-28}}{\cancel{d^2}}\,\cancel{\text{N}\cdot\text{m}^2}}{\dfrac{5{,}523 \cdot 10^{-71}}{\cancel{d^2}}\,\cancel{\text{N}\cdot\text{m}^2}} = 4{,}17 \cdot 10^{42} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F_E = 4{,}2 \cdot 10^{42} \cdot F_G}$$

Es mayor la fuerza eléctrica.

ACTIVIDAD (página 254)

7. Siguiendo el ejemplo resuelto número 4, calcula el valor de la fuerza resultante si el bloque tiene una masa de 5 kg; la inclinación del plano es de 35°. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

Sustituimos los datos en la expresión obtenida en el ejemplo resuelto 4 para el caso de una masa de 5 kg y una inclinación del plano de 35°:

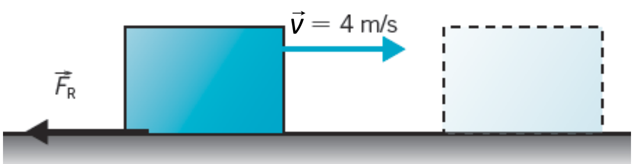


$$\vec{F}_T = m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha\,\vec{i} = 5\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 \cdot \text{sen } 35^\circ\,\vec{i} = \mathbf{28{,}11\,\vec{i}\text{ N}}$$

ACTIVIDAD (página 256)

8. Un cuerpo de masa 2 kg que desliza sobre un plano horizontal con una velocidad de 4 m/s termina parándose por efecto de la fuerza de rozamiento. Calcula el valor de dicha fuerza si se detiene en 5 s.

Es un movimiento rectilíneo uniformemente decelerado:



Calculamos la aceleración de frenado:

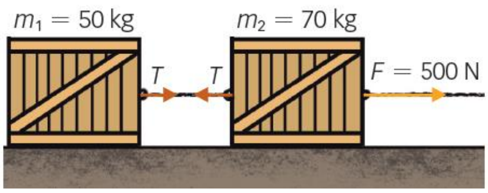
$$a = \frac{\Delta v}{t} = \frac{4\ \text{m/s}}{5\ \text{s}} = 0{,}8\ \text{m/s}^2$$

Como la única fuerza que interviene es F_R, la calculamos:

$$F_R = m \cdot a = 2\ \text{kg} \cdot 0{,}8\ \text{m/s}^2 = \mathbf{1{,}6\ N}$$

ACTIVIDAD (página 258)

9. Un par de bloques, $m_1 = 50$ kg y $m_2 = 70$ kg, enlazados con una cuerda son arrastrados hacia la derecha por la acción de una fuerza $F = 500$ N. Determina la aceleración del conjunto y la tensión de la cuerda.



El sistema se mueve sin deshacerse, así que podemos actuar como si fuera un solo cuerpo de masa:

$$M = m_1 + m_2 = 120\ \text{kg}$$

Aplicamos la segunda ley de la dinámica: $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Al ser un movimiento unidimensional, prescindimos del carácter vectorial y calculamos la aceleración:

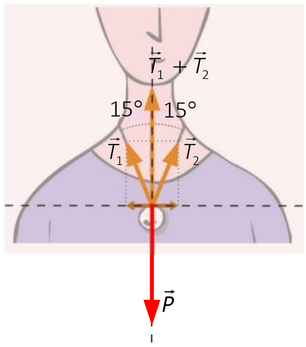
$$F = M \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{M} = \frac{500\ \text{N}}{120\ \text{kg}} = \mathbf{4{,}1\widehat{6}\ m/s^2}$$

Para calcular la tensión aplicamos ahora la segunda ley de la dinámica a uno de los bloques.
En el bloque 1 solo interviene una fuerza, T:

$$T = m_1 \cdot a = 50\ \text{kg} \cdot 4{,}1\widehat{6}\ \text{m/s}^2 = \mathbf{208{,}\widehat{3}\ N}$$

ACTIVIDAD (página 259)

10. Dibuja las fuerzas que actúan sobre una medalla. El valor del peso del colgante es 0,05 N. Calcula la tensión en la cadena si el ángulo formado a ambos lados del colgante es de 30°.



Sin tener en cuenta la posibilidad de que la medalla esté apoyada sobre el pecho, lo que introduciría una fuerza más y modificaría las tensiones. $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ son las tensiones de las cadena. $\vec{P} = 0{,}05\ \text{N}\,\vec{j}$ es el peso del colgante.

Como la medalla está en equilibrio: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{P}$.

$$\vec{T}_1 = -T_1 \cdot \text{sen}\ 15°\ \vec{i} + T_1 \cdot \cos 15°\ \vec{j}$$
$$\vec{T}_2 = T_2 \cdot \text{sen}\ 15°\ \vec{i} + T_2 \cdot \cos 15°\ \vec{j}$$

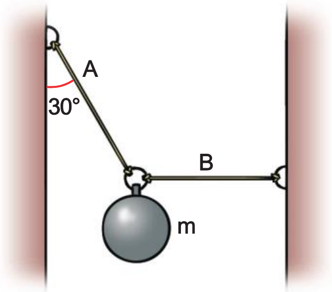
Teniendo en cuenta que $T_1 = T_2$ y el equilibrio en el eje Y:

$$T_1 \cdot \cos 15° + T_2 \cdot \cos 15° = 0{,}05\ \text{N} \quad \Rightarrow \quad T_1 \cdot \cos 15° + T_1 \cdot \cos 15° = 0{,}05\ \text{N}$$

$$2 \cdot T_1 \cdot \cos 15° = 0{,}05\ \text{N} \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 = \frac{0{,}05\ \text{N}}{2 \cdot \cos 15°} = \mathbf{0{,}026\ N}$$

ACTIVIDAD (página 260)

11. Una bola de 10 kg está suspendida por dos cuerdas ancladas cada una a una pared, tal como se muestra en la figura. La cuerda A está tensa formando un ángulo de 30° con la vertical. La cuerda B se mantiene tensa en horizontal. Encuentra las tensiones en las cuerdas A y B. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².



El peso de la bola es:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g} = 10 \text{ kg} \cdot (-9{,}8 \text{ m/s}^2 \ \vec{j}) = -98 \ \vec{j} \text{ N}$$

Las fuerzas de tensión de cada cuerda son:

$$\vec{T}_A = -T_A \cdot \text{sen } 30° \ \vec{i} + T_A \cdot \cos 30° \ \vec{j}$$
$$\vec{T}_B = T_B \ \vec{i}$$

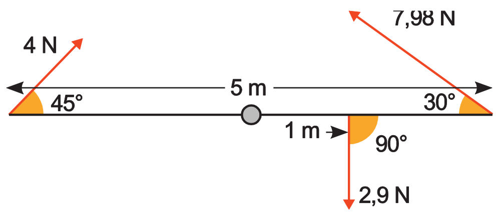
Al haber equilibrio, la suma de todas las fuerzas debe ser cero. Esto hace que las fuerzas se anulen componente a componente. Planteamos un sistema de ecuaciones que te permita resolver las tensiones.

$$\vec{P} + \vec{T}_A + \vec{T}_B = 0 \Rightarrow \begin{cases} -T_A \cdot \text{sen } 30° + T_B = 0 \\ -98 + T_A \cdot \cos 30° = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es: T_A = **113,2N**; T_B = **56,6 N**.

ACTIVIDAD (página 261)

12. Determina si la barra de la figura, de 5 m de longitud y que gira sobre su punto central, cumple cada condición de equilibrio.



Para que un cuerpo se encuentre en equilibrio se tienen que cumplir dos condiciones:

$$\sum \vec{F} = 0 \text{ y } \sum M = 0$$

Analizamos la primera condición. Para ello, descomponemos las fuerzas en sus componentes. En el eje *X*:

$$F_{1x} - F_{3x} = 4 \text{ N} \cdot \cos 45° - 8 \text{ N} \cdot \cos 30° = 2\sqrt{2} \text{ N} - 4\sqrt{3} \text{ N} \neq 0$$

La barra **no cumple la primera condición de equilibrio**.

Si calculamos los momentos teniendo en cuenta que el signo se determina según el sentido de giro que provoca la fuerza:

- $M_1 = -r_1 \cdot F_1 \cdot \text{sen } \alpha = -2{,}5 \text{ m} \cdot 4 \text{ N} \cdot \text{sen } 45° = -5\sqrt{2} \text{ N} \cdot \text{m}$
- $M_2 = -r_2 \cdot F_2 \cdot \text{sen } \beta = -1 \text{ m} \cdot 2{,}9 \text{ N} \cdot \text{sen } 90° = -2{,}9 \text{ N} \cdot \text{m}$
- $M_3 = +r_3 \cdot F_3 \cdot \text{sen } \gamma = +2{,}5 \text{ m} \cdot 8 \text{ N} \cdot \text{sen } 30° = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$

$$\sum M = M_1 + M_2 + M_3 = -5\sqrt{2} \text{ N} \cdot \text{m} - 2{,}9 \text{ N} \cdot \text{m} + 10 \text{ N} \cdot \text{m} = 0$$

La barra **sí cumple la segunda condición de equilibrio.**

Observa que la barra se desplazaría, ya que el sumatorio de fuerzas en el eje horizontal no es nulo, pero no giraría, ya que el sumatorio de los momentos es nulo.

ACTIVIDADES (página 262)

13. El *airbag* de los automóviles es una bolsa que se hincha cuando el módulo de la aceleración supera cierto valor. Lo que consigue el *airbag* es retener la cabeza de la persona durante la colisión.

a) ¿Qué efecto produce sobre el valor de la fuerza y el cambio de velocidad un *airbag* que multiplica por 100 la duración del choque?

b) ¿Sirven los cinturones de seguridad para un propósito similar al de los *airbag*? Explícalo.

a) El *airbag* no modifica Δv, la variación de velocidad, sino que alarga el tiempo en el que esta variación tiene lugar y, consiguientemente, reduce la fuerza. Así:

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{(suponiendo una fuerza constante)}$$

Al aumentar Δt en un factor 100 manteniendo constantes los demás factores, F disminuye en un factor 100.

b) Un cinturón de seguridad hace lo mismo que un *airbag*; prolonga el tiempo en el que se produce Δv disminuyendo F en el mismo factor.

14. Una tenista que saca a 180 km/h golpea la pelota durante 15 milésimas de segundo en el momento del saque.

a) Calcula la fuerza ejercida por la tenista sabiendo que la masa de la pelota es de 58 g.

b) ¿Cuál es la aceleración media de la pelota durante el impacto?

a) Suponiendo una fuerza constante (al menos aproximadamente):

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0{,}058 \text{ kg} \cdot \frac{50 \text{ m/s}}{0{,}015 \text{ s}} = \mathbf{193\ N}$$

En realidad, el tiempo de contacto con la pelota suele ser mayor (y la fuerza y la aceleración, menores).

b) La aceleración media es:

$$a_\text{m} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{50 \text{ m/s}}{0{,}015 \text{ s}} = \mathbf{3333\ m/s}$$

La pelota pierde velocidad tras el saque por la fricción con el aire.

ACTIVIDAD (página 263)

15. Al despegar un cohete de 2300 t, sus motores desarrollan una fuerza de $3 \cdot 10^7$ N.

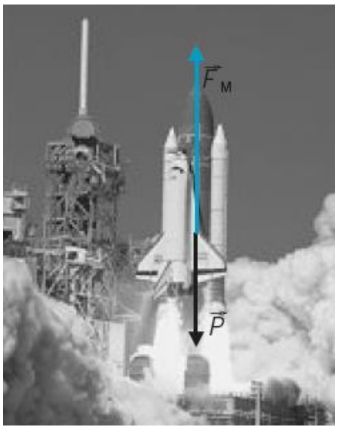
a) Elabora un esquema incluyendo las fuerzas que intervienen.

b) Calcula la fuerza total que actúa sobre el cohete en el despegue.

c) Calcula la aceleración en el momento del despegue.

a) Si ignoramos el rozamiento con el aire (también llamado «fricción»), lo que es posible cuando aún la velocidad es baja, las fuerzas que actúan sobre la lanzadera son el peso, $\vec{P}$, y la fuerza ejercida por los motores, $\vec{F}_\text{M}$.

Desde luego, para que despegue debe ser $|\vec{F}_\text{M}| > |\vec{P}|$.



b) $\vec{F}_\text{Total} = \vec{F}_\text{M} + \vec{P}$. Como ambos vectores tienen igual dirección y sentidos opuestos, el módulo es $F_\text{Total} = F_\text{M} - P$, pero:

$$P = m \cdot g = 2300 \text{ t} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 2{,}3 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 2{,}254 \cdot 10^7 \text{ N}$$

$$F_\text{Total} = F_\text{M} - P = 3 \cdot 10^7 \text{ N} - 2{,}254 \cdot 10^7 \text{ N} = \mathbf{7{,}46 \cdot 10^6\ N}$$

c) La aceleración en el despegue es:

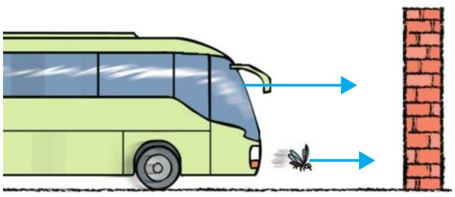
$$a = \frac{F_\text{Total}}{M} = \frac{7{,}46 \cdot 10^6 \text{ N}}{2{,}3 \cdot 10^6 \text{ kg}} = \mathbf{3{,}24\ m/s^2}$$

ACTIVIDADES (página 265)

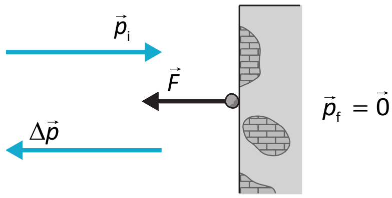
16. Un autobús y un mosquito chocan contra una pared y se detienen en una décima de segundo.

a) Dibuja en tu cuaderno cualitativamente los vectores $\vec{p}$ inicial y final, así como su variación $\Delta\vec{p}$ y, a partir de ella, la fuerza $\vec{F}$.

b) Deduce una fórmula para el módulo de la fuerza que actúa durante el choque sobre el mosquito y sobre el autobús.



a) Se representa únicamente el choque de uno de los cuerpos, pues la diferencia está solo en la escala (el módulo de los vectores).



$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{0} - \vec{p}_i = -\vec{p}_i$$

Si $\vec{F}$ es constante:

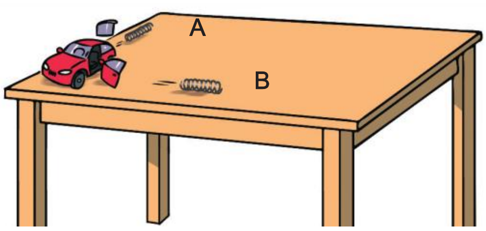
$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = -\frac{\vec{p}_i}{\Delta t}$$

b) Como es un problema esencialmente unidimensional, podemos trabajar solo con el módulo. Llamando Δt a la duración del choque y p_i al momento lineal inicial del objeto antes del choque:

$$F = \frac{p_i}{\Delta t} = \frac{m \cdot v_i}{\Delta t}$$

El módulo de la fuerza es directamente proporcional al producto de la masa con la velocidad inicial e inversamente proporcional al lapso de tiempo del impacto.

17. Un juguete formado por un chasis y cuatro piezas a base de muelles está sobre una mesa donde reposa tras montarlo (mal, de modo que los resortes pueden saltar en cualquier momento). Poco tiempo después dos piezas situadas en los puntos A y B se mueven según indica la figura 9.35, mientras que el chasis del juguete sigue quieto.



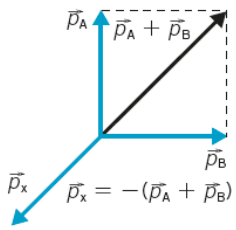
a) ¿Es posible que no haya más piezas? ¿Por qué?

b) Si crees que hay más piezas, ¿dónde las buscarías? Concreta la respuesta anterior para el caso de que las dos piezas tengan la misma masa y hayan viajado la misma distancia por la mesa.

a) En un sistema aislado (como se puede considerar el juguete del enunciado con suficiente aproximación, si despreciamos el rozamiento) se tiene que conservar el momento lineal total, que tiene que ser el mismo antes y después de lo que le sucede al juguete. Veamos cuál es el balance observable directamente.

Aunque no sabemos nada sobre los módulos de $\vec{p}_A$ y $\vec{p}_B$, que son los momentos lineales de las piezas que vemos, es imposible que su suma sea cero, puesto que sí conocemos sus direcciones (las del movimiento de las piezas). Por tanto, **hay más piezas necesariamente**, para que el momento lineal, en conjunto, sea nulo.

b) Puesto que $\vec{p}_A + \vec{p}_B$ apunta hacia el interior de la mesa, el momento lineal que falta debe ser opuesto a esa suma, de modo que $\vec{p}_A + \vec{p}_B + \vec{p}_{\text{de las piezas que faltan}} = \vec{0}$. Habrá que buscar en el suelo, a cierta distancia de la esquina donde estaba el juguete.

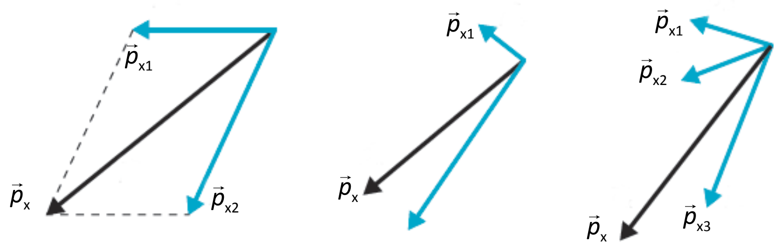


Si sabemos algo más de las piezas A y B como que $m_A = m_B$ y presumiblemente $p_A = p_B$, pues $(v_A = v_B)$, ya que ambas recorren igual distancia por la mesa. Tras la rotura del juguete se cumplirá, como antes que $\vec{p}_A + \vec{p}_B + \vec{p}_x = \vec{0}$.

Geométricamente (ver figura), si solo se nos ha escapado una pieza, habrá que buscarla en el suelo en la dirección y sentido que marca $\vec{p}_x$.

Si faltan dos o más piezas, no podremos ser tan concretos, pues hay muchas posibilidades. Mostramos tres de ellas en la figura que sigue.

Este método lo utilizan los físicos de partículas para identificar partículas invisibles en sus detectores.



ACTIVIDADES (página 266)

18. El curio-243 se sintetiza a partir del plutonio-239 usado como diana para proyectiles de helio-4. Si un átomo de plutonio inicialmente en reposo recibe el impacto de un átomo de helio con una velocidad de 5 · 10⁶ m/s, ¿qué velocidad tendrá el átomo de curio? Datos: $M({}^{4}_{2}\text{He}) = 4,003$ u; $M({}^{239}_{96}\text{Pu}) = 239,005$ u; $M({}^{243}_{96}\text{Cm}) = 243,058$ u.

En primer lugar pasamos las masas a unidades del sistema internacional:

$$m_{\text{He}} = 4,003\ \cancel{\text{u}} \cdot \frac{1,66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \cancel{\text{u}}} = 6,645 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

$$m_{\text{Cm}} = 243,058\ \cancel{\text{u}} \cdot \frac{1,66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \cancel{\text{u}}} = 4,035 \cdot 10^{-25}\ \text{kg}$$

Al ser un movimiento unidimensional, prescindimos del carácter vectorial. El momento lineal es el mismo al principio y al final:

$$p_{\text{inicial}} = p_{\text{final}}$$
$$p_{\text{He}} + p_{\text{Pu}} = p_{\text{Cm}}$$
$$m_{\text{He}} \cdot v_{\text{He}} + m_{\text{Pu}} \cdot v_{\text{Pu}} = m_{\text{Cm}} \cdot v_{\text{Cm}}$$

Despejamos la velocidad pedida y sustituimos los datos:

$$v_{\text{Cm}} = \frac{m_{\text{He}} \cdot v_{\text{He}} + m_{\text{Pu}} \cdot v_{\text{Pu}}}{m_{\text{Cm}}} = \frac{6,645 \cdot 10^{-27}\ \cancel{\text{kg}} \cdot 5 \cdot 10^{6}\ \text{m/s}}{4,035 \cdot 10^{-25}\ \cancel{\text{kg}}} = \mathbf{8,2 \cdot 10^{4}\ \frac{m}{s}}$$

19. El radón-220 tiene un núcleo inestable que se desintegra emitiendo un núcleo de helio-4 a 1,75 · 10⁷ m/s y deja un átomo de polonio-216. Si el radón estaba inicialmente en reposo, ¿qué velocidad tendrá el átomo de polonio? (Se supone que no hay otros intercambios de energía).
Datos: $M({}^{4}_{2}\text{He}) = 4,003$ u; $M({}^{216}_{84}\text{Po}) = 216,051$ u.

En primer lugar pasamos las masas a unidades del sistema internacional:

$$m_{\text{He}} = 4,003\ \cancel{\text{u}} \cdot \frac{1,66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \cancel{\text{u}}} = 6,645 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

$$m_{\text{Po}} = 216,051\ \cancel{\text{u}} \cdot \frac{1,66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \cancel{\text{u}}} = 3,586 \cdot 10^{-25}\ \text{kg}$$

Al ser un movimiento unidimensional, prescindimos del carácter vectorial. El momento lineal es el mismo al principio y al final:

$$p_{\text{inicial}} = p_{\text{final}}$$
$$p_{\text{Rn}} = p_{\text{Po}} + p_{\text{He}}$$
$$m_{\text{Rn}} \cdot v_{\text{Rn}} = m_{\text{Po}} \cdot v_{\text{Po}} + m_{\text{He}} \cdot v_{\text{He}}$$

Despejamos la velocidad pedida y sustituimos los datos:

$$v_{\text{Po}} = \frac{-m_{\text{He}} \cdot v_{\text{He}}}{m_{\text{Po}}} = \frac{-6,645 \cdot 10^{-27}\ \cancel{\text{kg}} \cdot 1,75 \cdot 10^{7}\ \text{m/s}}{3,586 \cdot 10^{-25}\ \cancel{\text{kg}}} = \mathbf{-3,24 \cdot 10^{5}\ m/s}$$

ACTIVIDAD (página 268)

20. El cuerpo $m_A = 5$ kg con velocidad $\vec{v}_A = 5\,\vec{i} - 6\,\vec{j}$ m/s y el cuerpo m_B de velocidad $\vec{v}_B = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$ m/s colisionan. Al separarse resulta que $\vec{v}\,'_A = 2,2\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ m/s y $\vec{v}\,'_B = 10\,\vec{i} - v'_{B,y}\,\vec{j}$ m/s . Calcula m_B y $v'_{B,y}$.

Al ser un choque elástico, se conserva la cantidad de movimiento:

$$\vec{p}_{\text{inicial}} = \vec{p}_{\text{final}}$$
$$(\vec{p}_{m_A} + \vec{p}_{m_B})_{\text{inicial}} = (\vec{p}\,'_{m_A} + \vec{p}\,'_{m_B})_{\text{final}}$$
$$m_A \cdot \vec{v}_A + m_B \cdot \vec{v}_B = m_A \cdot \vec{v}\,'_A + m_B \cdot \vec{v}\,'_B$$

La expresión vectorial anterior ha de cumplirse en cada componente:

$$\begin{cases} m_A \cdot v_{A,x} + m_B \cdot v_{B,x} = m_A \cdot v'_{A,x} + m_B \cdot v'_{B,x} \\ m_A \cdot v_{A,y} + m_B \cdot v_{B,y} = m_A \cdot v'_{A,y} + m_B \cdot v'_{B,y} \end{cases}$$

Sustituimos los datos conocidos:

$$\begin{cases} 5\text{ kg} \cdot (5\text{ m/s}) + m_B \cdot (3\text{ m/s}) = 5\text{ kg} \cdot (2{,}2\text{ m/s}) + m_B \cdot (10\text{ m/s}) \\ 5\text{ kg} \cdot (-6\text{ m/s}) + m_B \cdot (4\text{ m/s}) = 5\text{ kg} \cdot (2\text{ m/s}) + m_B \cdot v'_{B,y} \end{cases}$$

Agrupamos y resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 14 = 7 \cdot m_B \\ -40 = (v'_{B,y} - 4) \cdot m_B \end{cases}$$

De la primera tenemos que $m_B = 2$ kg. Sustituimos en la segunda y despejamos la velocidad: $v'_{B,y} = \mathbf{-16\ m/s}$.

ACTIVIDADES FINALES (página 274)

Fuerzas a distancia

21. Calcula el peso de un cuerpo de masa 20 kg a una altura de 1000 km sobre la superficie de la Tierra.

Datos: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, $R_T = 6370$ km, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

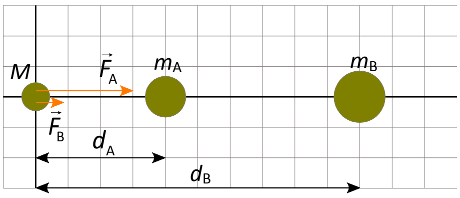
El cuerpo se encuentra a una distancia del centro de la Tierra:

$$d = R_T + h = 6370\text{ km} + 1000\text{ km} = 7370\text{ km} = 7{,}37 \cdot 10^6\text{ m}$$

Calculamos la fuerza con la que el cuerpo es atraído por la Tierra:

$$F = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\text{ kg} \cdot 20\text{ kg}}{\left(7{,}37 \cdot 10^6\text{ m}\right)^2} = \mathbf{146{,}6\ N}$$

22. Dos masas de 7 kg y 9 kg están situadas, respectivamente, en los puntos A (2, 0) m y B (5, 0) m. Calcula la fuerza resultante sobre una tercera masa de 5 kg situada en el origen de coordenadas.



Calculamos la fuerza ejercida por las masas A y B sobre la tercera:

$$F_A = G \cdot \frac{M \cdot m_A}{(d_A)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5\text{ kg} \cdot 7\text{ kg}}{(2\text{ m})^2} = 5{,}84 \cdot 10^{-10}\text{ N}$$
$$F_B = G \cdot \frac{M \cdot m_B}{(d_B)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5\text{ kg} \cdot 9\text{ kg}}{(5\text{ m})^2} = 1{,}20 \cdot 10^{-10}\text{ N}$$

Como ambas fuerzas apuntan en el mismo sentido, la fuerza resultante es la suma de las fuerzas ejercidas sobre la masa, M:

$$F = F_A + F_B = \mathbf{7{,}04 \cdot 10^{-10}\ N}$$

23. Sobre un cuerpo de masa 3 kg un planeta ejerce una fuerza de 18 N en su superficie. Halla la aceleración con la que cae el cuerpo y la masa del planeta si su radio es 5000 km.

La fuerza que actúa sobre el cuerpo es el peso:

$$F = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad P = m \cdot g_{\text{planeta}}$$

El cuerpo caerá con la aceleración de la gravedad del planeta. Despejamos de la expresión anterior y sustituimos:

$$g_{\text{planeta}} = \frac{P}{m} = \frac{18\ \text{N}}{3\ \text{kg}} = \mathbf{6\ m/s^2}$$

Conocida la aceleración de la gravedad del planeta, podemos calcular la masa de este:

$$g_{\text{planeta}} = G \cdot \frac{M_{\text{planeta}}}{R^2} \quad \Rightarrow \quad M_{\text{planeta}} = \frac{R^2}{G} \cdot g_{\text{planeta}} \quad \Rightarrow \quad M_{\text{planeta}} = \frac{(5 \cdot 10^6\ \text{m})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}} \cdot 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \mathbf{2{,}25 \cdot 10^{24}\ kg}$$

24. Calcula la fuerza gravitatoria entre la Tierra y la Luna. ¿En qué punto de la línea que las une sería nula la fuerza neta sobre una masa *m*? Datos: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg; $d_{T\text{-}L} = 384\,000$ km.

Calculamos la fuerza gravitatoria entre la Tierra y la Luna:

$$F = G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{(d_{T-L})^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{(3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m})^2} = \mathbf{1{,}98 \cdot 10^{20}\ N}$$

Para calcular el punto entre la Tierra y la Luna donde la fuerza neta aplicada sobre una masa *m* se anula necesitamos la fuerza gravitatoria que ejercen la Tierra y la Luna sobre la masa *m* respectivamente. Tomamos como origen del sistema de referencia la posición de la Tierra.

$$F_{\text{T-m}} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(x)^2}; \quad F_{\text{L-m}} = G \cdot \frac{m \cdot M_L}{(d_{T-L} - x)^2}$$

Para que la fuerza neta sobre *m* sea nula las fuerzas deben ser iguales en módulo y de sentidos opuestos:

$$F_{\text{T-m}} = F_{\text{L-m}}$$

$$\cancel{G} \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m}}{(x)^2} = \cancel{G} \cdot \frac{\cancel{m} \cdot M_L}{(d_{T\text{-}L} - x)^2}$$

$$\frac{M_T}{(x)^2} = \frac{M_L}{(d_{T\text{-}L} - x)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{M_T}}{x} = \frac{\sqrt{M_L}}{d_{T\text{-}L} - x}$$

Despejando la incógnita, sustituyendo y operando:

$$x = \frac{\sqrt{M_T} \cdot d_{T\text{-}L}}{\sqrt{M_T} + \sqrt{M_L}} = \frac{\sqrt{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}} \cdot 3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m}}{\sqrt{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}} + \sqrt{7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}} = \mathbf{3{,}46 \cdot 10^8\ m}$$

Esta es la distancia desde la posición de la Tierra.

Nota: Al calcular una raíz cuadrada, cabe la posibilidad de que el resultado sea negativo o positivo. Las diferentes combinaciones entre raíces positivas o negativas nos ofrecerán distintas posiciones, no todas con sentido.
En estas, los módulos de las dos fuerzas gravitatorias son iguales, pero eso no quiere decir que ambas fuerzas estén equilibradas.

25. Halla el número de protones y la masa de los mismos que presentan una carga total de 1 C. ¿Cuál es la carga total de 1 kg de protones? Datos: $q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

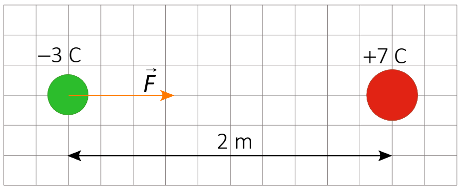
Sabemos que la carga de un protón, q_p, es $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. Si calculamos el inverso de este número, obtenemos el número de protones que corresponde a una carga de 1 C, es decir, **$6{,}25 \cdot 10^{18}$ protones** presentan una carga total de 1 C.

Como la masa de un protón es 1,67 · 10^{-27} kg, calculamos la masa de protones que corresponden con una carga total de 1 C:

$$m_{\text{protones}} = 6{,}25 \cdot 10^{18}\ \cancel{\text{protones}} \cdot \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \cancel{\text{protón}}} = \mathbf{1{,}04 \cdot 10^{-8}\ kg}$$

Por último, como conocemos la masa del número de protones que corresponde a una carga de 1 C, si calculamos el inverso de este número, obtenemos la carga total de 1 kg de protones, es decir, **9,58 · 10^7 C** por cada kg.

26. Calcula el módulo, dirección y sentido de la fuerza que una carga de +7 C ejerce sobre otra de –3 C situada a 2 m. Dato: $k = 9 \cdot 10^9$ N · m²/C².



Aplicamos la ley de Coulomb:

$$F = k \cdot \frac{|q_1 \cdot q_2|}{d^2} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{|+7\ \text{C} \cdot (-3\ \text{C})|}{(2\ \text{m})^2} = \mathbf{4{,}73 \cdot 10^{10}\ N}$$

Dirección, la recta que une las cargas y sentido atractivo al ser de diferente signo.

27. Calcula la fuerza eléctrica existente entre el protón y el electrón en el átomo de hidrógeno suponiendo que la distancia entre ambos es de 0,5 Å. Datos: 1 Å = 10^{-10} m; $q_e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C; $k = 9 \cdot 10^9$ N · m²/C².

Aplicamos la ley de Coulomb:

$$F = k \cdot \frac{|q_e \cdot q_p|}{d^2} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{|-1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}|}{(0{,}5 \cdot 10^{-10}\ \text{m})^2} = \mathbf{9{,}24 \cdot 10^{-8}\ N}$$

Es una fuerza de atracción.

28. Calcula la distancia a la que deben situarse dos cargas de signos contrarios de 2 μC para que se atraigan con una fuerza de 2 N. Dato: $k = 9 \cdot 10^9$ N · m²/C².

Aplicamos la ley de Coulomb, despejamos la distancia y sustituimos los datos:

$$F = k \cdot \frac{|q_1 \cdot q_2|}{d^2} \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{k \cdot \frac{|q_1 \cdot q_2|}{F}} = \sqrt{9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(2 \cdot 10^{-6}\ \text{C})^2}{2\ \text{N}}} = 0{,}134\ \text{m} = \mathbf{13{,}4\ cm}$$

29. Una carga negativa q_1 de 2 μC se encuentra a 20 cm de otra carga q_2 de valor desconocido. Determina el valor y el signo de la carga q_2 si la fuerza de repulsión entre ambas es de 10 N. Dato: $k = 9 \cdot 10^9$ N · m²/C².

Aplicamos la ley de Coulomb, despejamos la carga q_2 y sustituimos los datos:

$$F = k \cdot \frac{|q_1 \cdot q_2|}{d^2} = k \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{d^2} \quad \Rightarrow \quad |q_2| = \frac{F \cdot d^2}{k \cdot |q_1|} = \frac{10\ \text{N} \cdot (0{,}2\ \text{m})^2}{9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}} = 2{,}\widehat{2} \cdot 10^{-5}\ \text{C} = 22{,}\widehat{2}\ \mu\text{C}$$

Como q_1 es negativa y la fuerza entre ambas es de repulsión, entonces q_2 será también negativa: $q_2 = \mathbf{-22{,}\widehat{2}\ \mu C}$.

Fuerzas de contacto

30. Si queremos que el carrito del supermercado se mueva hemos de empujarlo continuamente, ¿acaso es falsa la primera ley de Newton? ¿Por qué no se continúa moviendo por inercia una vez que lo ponemos inicialmente en movimiento?

La primera ley de Newton se aplica a cuerpos aislados, sobre los que no actúa ninguna fuerza o la resultante de las fuerzas que actúan es nula.

Un carrito de supermercado no cumple ninguna de las dos condiciones anteriores, ya que además del peso y la fuerza de reacción normal de la superficie, que se cancelan mutuamente, está la fuerza de rozamiento que hace inaplicable la primera ley.

Así, si ponemos en movimiento el carrito y lo dejamos libre, la F_R es la fuerza neta, que da lugar a una aceleración, en este caso de frenado, que hará que el carro se pare.

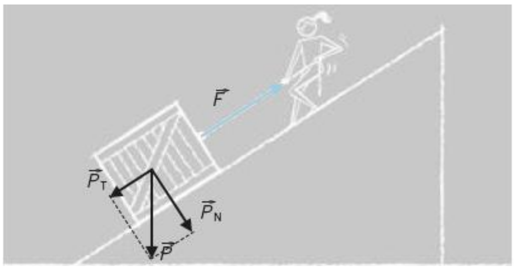
31. ¿Qué ocurrirá si tiramos hacia arriba, mediante una cuerda, de un cuerpo colocado en la mitad de una rampa (sin rozamiento)? Elige la respuesta correcta.

a) El bloque ascenderá o descenderá en función de la intensidad de la fuerza ejercida sobre él.

b) El bloque quedará en reposo siempre.

c) El bloque ascenderá siempre.

Aclaremos que la chica que tira de la cuerda no forma en realidad parte del sistema, y que únicamente tiene la función de aplicar una fuerza $\vec{T}$ sobre la caja.



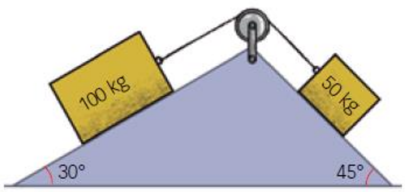
En tal caso, ha de quedar claro que c) es falsa y a) y b) pueden ser verdaderas:

Si $T > P_T$, siendo P_T la componente tangencial del peso, la caja sube.

Si $T = P_T$, la caja sigue en reposo, si lo estaba inicialmente.

Si $T < P_T$, el bloque caerá por el plano.

32. Indica hacia dónde se moverán los cuerpos de la figura y cuál será la aceleración del sistema. Supón que no hay rozamiento. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

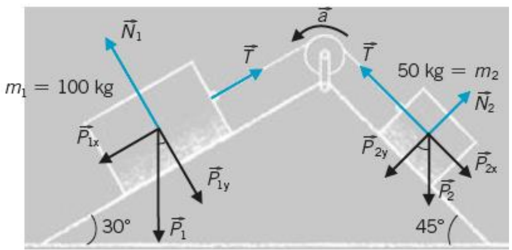


Si ignoramos el rozamiento, sobre cada una de las masas actúan el peso, $\vec{P}$, la reacción normal de la superficie, $\vec{N}$, y la tensión de la cuerda, $\vec{T}$, igual para ambas masas, ya que están unidas por la cuerda.

La segunda ley de Newton dice que $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Aplicando esta ley en cada cuerpo.

$$\vec{P}_1 + \vec{T} + \vec{N}_1 = m_1 \cdot \vec{a}_1$$
$$\vec{P}_2 + \vec{T} + \vec{N}_2 = m_2 \cdot \vec{a}_2$$

Si elegimos para cada masa su propio sistema de coordenadas con un eje tangente a la superficie y otro normal a ella y tenemos en cuenta que la aceleración es la misma para ambas masas (además, hemos dado a la aceleración un sentido arbitrario; si nos sale negativa, el sentido real será el contrario al supuesto):



$$P_{1x} - T = m_1 \cdot a \quad [A] \qquad T - P_{2x} = m_2 \cdot a \quad [C]$$
$$N_1 - P_{1y} = 0 \quad [B] \qquad N_2 - P_{2y} = 0 \quad [D]$$

Ahora hay que tener en cuenta que las componentes tangenciales del peso son:

$$P_{1x} = P_1 \cdot \text{sen}\ \alpha = m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha$$
$$P_{2x} = P_2 \cdot \text{sen}\ \beta = m_2 \cdot g \cdot \text{sen}\ \beta$$

Un truco para recordarlo es fijarse en que si el plano es horizontal y los ángulos son cero, estas componentes deben desaparecer.

Como solo nos interesa la aceleración, eliminamos T entre las ecuaciones [A] y [C]:

$$\left.\begin{array}{ll} T = m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\ 30° - m_1 \cdot a & [\text{A}] \\ T = m_2 \cdot a + m_2 \cdot g \cdot \text{sen}\ 45° & [\text{C}] \end{array}\right\}$$

Igualamos:

$$m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\ 30° - m_1 \cdot a = m_2 \cdot a + m_2 \cdot g \cdot \text{sen}\ 45°$$
$$m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\ 30° - m_2 \cdot g \cdot \text{sen}\ 45° = (m_1 + m_2) \cdot a$$
$$a = \frac{m_1 \cdot \text{sen}\ 30° - m_2 \cdot \text{sen}\ 45°}{m_1 + m_2} \cdot g \simeq \mathbf{0{,}96\ m/s^2}$$

Como a es positiva, el sistema se mueve en el sentido que habíamos elegido.

33. Una niña de 30 kg se desliza hacia abajo por un poste vertical de madera con una aceleración de 2 m/s². ¿Cuál es la fuerza de fricción con el poste? Dato: *g* = 9,8 m/s².

Aplicamos la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_R + \vec{P} = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad F_R - P = -m \cdot a$$

Despejamos y sustituimos los datos:

$$F_R = P - m \cdot a = m \cdot (g - a) = 30\ \text{kg} \cdot (9{,}8\ \text{m/s}^2 - 2\ \text{m/s}^2) = \mathbf{234\ N}$$

34. Para subir un piano de 300 kg a un piso se utiliza una polea. Si la aceleración inicial del instrumento es de 0,45 m/s², ¿cuál es la tensión de la cuerda? Dato: g = 9,8 m/s².

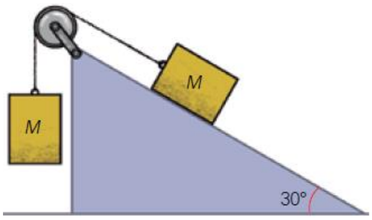
Aplicamos la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{T} + \vec{P} = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad T - P = m \cdot a$$

Despejamos y sustituimos los datos:

$$T = P + m \cdot a = m \cdot (g + a) = 300\ \text{kg} \cdot (9{,}8\ \text{m/s}^2 + 0{,}45\ \text{m/s}^2) = \mathbf{3075\ N}$$

35. Los dos bloques de la figura son exactamente iguales. ¿Hacia dónde se moverá el conjunto? ¿Por qué?



Siendo las dos masas iguales, el conjunto se moverá hacia la izquierda, puesto que la componente del peso del bloque del plano inclinado en la dirección del movimiento, P_T, es necesariamente menor que el peso, P.

Más en detalle. Supongamos que hay una aceleración $a > 0$ en el sentido indicado en la figura que comparten ambos bloques.

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\left.\begin{array}{l} P - T = M \cdot a \\ T - P_T = M \cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow P - M \cdot a = P_T + M \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{P - P_T}{2 \cdot M}$$

Que, tal como se había supuesto, es mayor que cero, lo que implica que el conjunto se mueve, como se supuso, **hacia la derecha.**

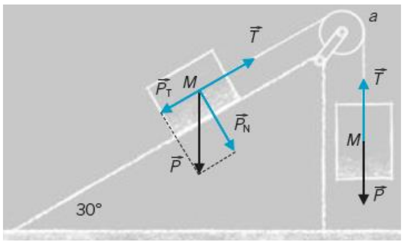
ACTIVIDADES FINALES (página 275)

36. En un plano inclinado 30° hay un bloque de 7 kg, y en su extremo, una polea de la que cuelga una masa de 5 kg. Suponiendo que no existe rozamiento.

a) ¿Con qué aceleración se mueven las masas?

b) ¿Qué masa debería colgar verticalmente para que el sistema estuviera en equilibrio?

Dato: $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.



a) Aplicamos la segunda ley de Newton para cada una de las masas:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Masa 1}: \vec{P}_1 + \vec{T} = m_1 \cdot \vec{a} \\ \text{Masa 2}: \vec{P}_2 + \vec{T} + \vec{N} = m_2 \cdot \vec{a}\end{array}\right\}$$

Descomponemos las fuerzas en sus componentes paralelas y perpendiculares al plano. En este caso nos quedaremos solo con la dirección paralela al plano, que es la dirección del movimiento.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Masa 1:} & m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot a \\ \text{Masa 2:} & T - m_2 \cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha = m_2 \cdot a\end{array}\right\}$$

Suponemos que m_1 cae y m_2 sube por el plano. Si resulta ser al revés, obtendremos una aceleración negativa y el sentido de giro será el contrario.

Sumamos las dos ecuaciones:

$$m_1 \cdot g - m_2 \cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha = (m_1 + m_2) \cdot a$$

Despejamos la aceleración y sustituimos los datos:

$$a = \frac{(m_1 - m_2 \cdot \text{sen}\ \alpha) \cdot g}{m_1 + m_2} = \frac{5\ \text{kg} - 7\ \text{kg} \cdot (\text{sen}\ 30°)}{5\ \text{kg} + 7\ \text{kg}} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = \mathbf{1{,}225\ m/s^2}$$

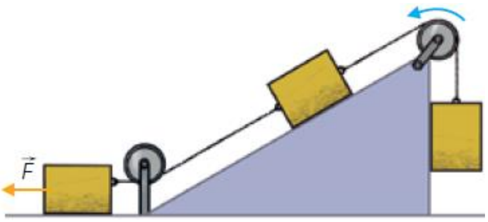
Como la aceleración es positiva, confirma la suposición que hicimos respecto al movimiento del sistema.

b) Para que el sistema esté en equilibrio es necesario que la aceleración sea nula:

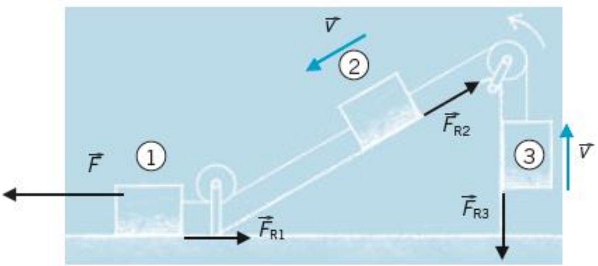
$$a = \frac{(m_1 - m_2 \cdot \text{sen}\ \alpha) \cdot g}{m_1 + m_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad (m_1 - m_2 \cdot \text{sen}\ \alpha) \cdot g = 0$$

$$m_1 = m_2 \cdot \text{sen}\ \alpha = 7\ \text{kg} \cdot \text{sen}\ 30° = \mathbf{3{,}5\ kg}$$

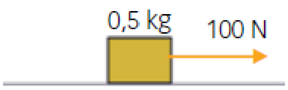
37. Dibuja la fuerza de rozamiento que sufre cada bloque en el siguiente esquema.

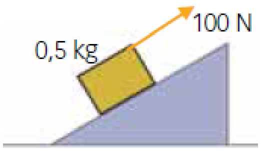


La existencia de F_{R3} es dudosa, depende de si el cuerpo se apoya algo o nada sobre el plano vertical.



38. ¿En qué caso será mayor la fuerza de rozamiento? En todos los casos el coeficiente de rozamiento $\mu_c = 0{,}2$.

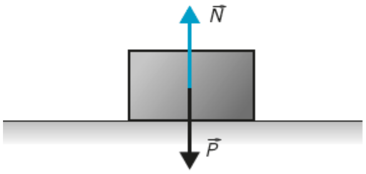
a)


b)


La fuerza de rozamiento es igual al coeficiente de rozamiento por la normal, $F_R = \mu \cdot N$.

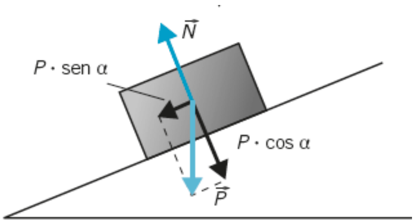
El módulo de N cambia de valor según cada caso:

a) $\mu_c = 0{,}2$.



$$N = P = m \cdot g$$

b) $\mu_c = 0{,}2$.



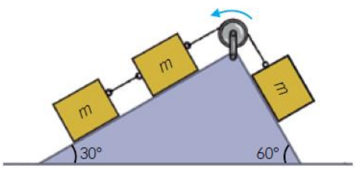
$$N = P \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

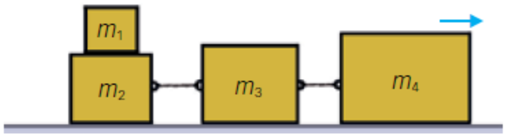
$$\left.\begin{array}{l} F_{Ra} = \mu \cdot m \cdot g \\ F_{Rb} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow F_{Ra} > F_{Rb}$$

Por tanto, la fuerza de rozamiento **es mayor en el caso a**.

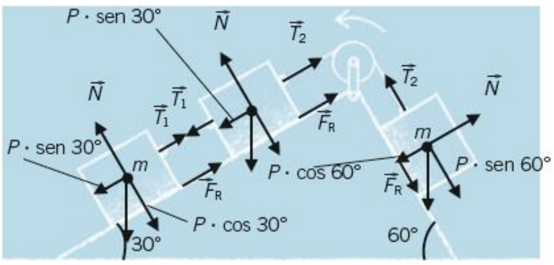
39. **Dibuja todas las fuerzas que actúan sobre los cuerpos de las figuras. Ten en cuenta el rozamiento.**

a) Las tres masas son iguales. **b)** $\boldsymbol{m_1 = m_2/2; m_2 = m_3/2; m_3 = m_4/2}$**.**

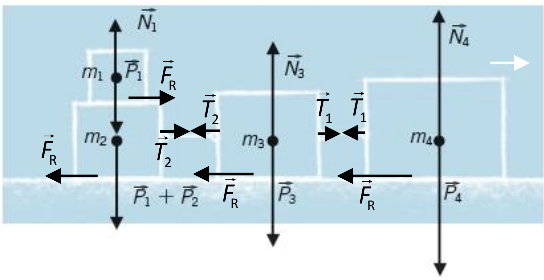




a)



b)



40. **Se lanza un cuerpo de 10 kg de masa verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s. Si la fuerza de rozamiento con el aire vale 10 N, halla la altura máxima a la que llega y compárala con la que alcanzaría en el caso de no tener en cuenta el rozamiento. Dato:** $\boldsymbol{g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}}$**.**

- **Sin tener en cuenta la fuerza de rozamiento.**

  Aplicamos la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad P = m \cdot g$$

Como la única fuerza que interviene es el peso, la aceleración es igual a la aceleración de la gravedad.

Aplicamos las ecuaciones de un MRUA. Cuando la velocidad final es cero, el móvil llega a la altura máxima. Despejamos y calculamos el tiempo que tarda en llegar al punto más alto:

$$v = v_0 - g \cdot t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{g} = \frac{20 \text{ m/s}}{9{,}8 \text{ m/s}^2} = 2{,}04 \text{ s}$$

Sustituimos el tiempo y calculamos la altura máxima:

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0 \text{ m} + 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (2{,}04 \text{ s}) - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2{,}04 \text{ s})^2 = 20{,}41 \text{ m}$$

- **Teniendo en cuenta la fuerza de rozamiento.**

  Aplicamos la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad P + F_R = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad m \cdot g + F_R = m \cdot a$$

  Al tener en cuenta la fuerza de rozamiento, la aceleración durante el ascenso del objeto no coincide con la aceleración de la gravedad por lo que debemos calcularla. Despejamos de la expresión anterior y sustituimos:

$$a = \frac{m \cdot g + F_R}{m} = \frac{10 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 + 10 \text{ N}}{10 \text{ kg}} = 10{,}8 \text{ m/s}^2$$

  Análogamente, aplicamos las ecuaciones de un MRUA. Cuando la velocidad final es cero el móvil llega a la altura máxima. Despejamos y calculamos el tiempo que tarda en llegar al punto más alto:

$$v = v_0 - a \cdot t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{a} = \frac{20 \text{ m/s}}{10{,}8 \text{ m/s}^2} = 1{,}85 \text{ s}$$

  Sustituimos el tiempo y calculamos la altura máxima:

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0 \text{ m} + 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (1{,}85 \text{ s}) - \frac{1}{2} \cdot 10{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1{,}85 \text{ s})^2 = \mathbf{18{,}52 \text{ m}}$$

  Por tanto, cuando interviene la fuerza de rozamiento la altura máxima que alcanza el cuerpo es menor.

$$\frac{(h_{\text{máx}})_{\text{con Roz.}}}{(h_{\text{máx}})_{\text{sin Roz.}}} = \frac{18{,}52 \cancel{\text{m}}}{20{,}41 \cancel{\text{m}}} = 0{,}91 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{h_{\text{con Roz.}} = 0{,}91 \cdot h_{\text{sin Roz.}}}$$

41. Un coche de 1300 kg sube por una rampa de 15°. Calcula la fuerza que proporciona el motor si el coeficiente de rozamiento es 0,6 y sube con una velocidad constante de 35 km/h.

Aplicamos la segunda ley de Newton en el eje perpendicular al plano. La suma de las fuerzas es cero, ya que no hay movimiento en la dirección perpendicular.

$$\vec{P}_y + \vec{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_y + N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P_y = P \cdot \cos \alpha$$

Aplicamos la segunda ley de Newton en el eje paralelo al plano. La suma de las fuerzas es cero, ya que como $v = \text{cte.} \Rightarrow a = 0$.

$$\vec{F} + \vec{P}_x + \vec{F}_R = 0 \quad \Rightarrow \quad F - P_x - F_R = 0 \quad \Rightarrow \quad F - P \cdot \text{sen } \alpha - \mu \cdot P \cdot \cos \alpha = 0$$

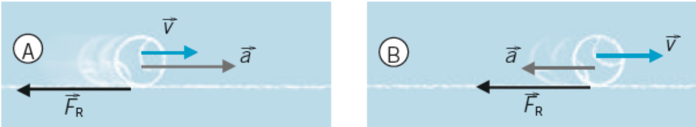
$$F = P \cdot \text{sen } \alpha + \mu \cdot P \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad F = m \cdot g \cdot (\text{sen } \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)$$

Sustituyendo los datos:

$$F = 1300 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot (\text{sen } 15° + 0{,}6 \cdot \cos 15°) = \mathbf{10\,680 \text{ N}}$$

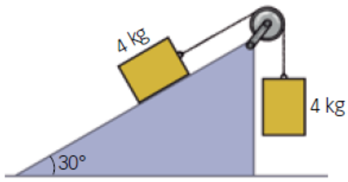
ACTIVIDADES FINALES (página 276)

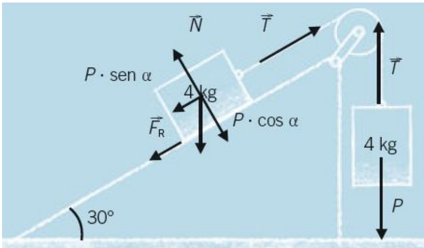
42. Dibuja la dirección y sentido de la fuerza de rozamiento para cada pelota:



La $\vec{F}_R$ siempre tiene sentido opuesto a $\vec{v}$ y es independiente de la aceleración.

43. Determina cuál es el coeficiente de rozamiento estático en el plano inclinado si el sistema de la figura está en equilibrio:





Aplicando la segunda ley de Newton a cada cuerpo:

$$\text{Cuerpo 1:}\quad \vec{T} + \vec{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad T - P = 0$$

$$\text{Cuerpo 2:}\quad \vec{F}_R + \vec{P}_x + \vec{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_R + P \cdot \text{sen}\ \alpha - T = 0$$

Como el sistema está en equilibrio, la suma de las fuerzas aplicadas al sistema de los dos cuerpos debe ser cero. Se cumple que:

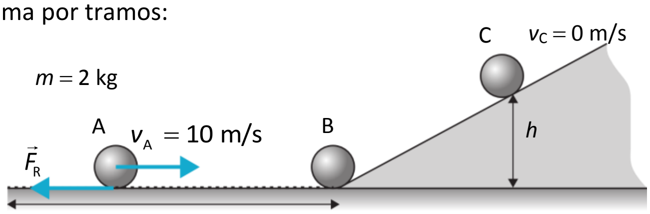
$$\cancel{T} - P + F_R + P \cdot \text{sen}\ \alpha - \cancel{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_R + P \cdot \text{sen}\ \alpha = P$$

$$\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha + m \cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha = m \cdot g \quad \Rightarrow \quad \cancel{m \cdot g} \cdot (\text{sen}\ \alpha + \mu \cdot \cos\alpha) = \cancel{m \cdot g}$$

$$\text{sen}\ \alpha + \mu \cdot \cos\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1 - \text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{1 - \text{sen}\ 30°}{\cos 30°} = \frac{0{,}5}{0{,}86} = \mathbf{0{,}58}$$

44. Se lanza un cuerpo de 2 kg de masa por un plano horizontal rugoso ($\mu_c = 0{,}4$) con una velocidad de 10 m/s. Después de recorrer una distancia de 2 m comienza a ascender por un plano inclinado 30° sin rozamiento. Calcula la altura que alcanza. Dato: $g = 9{,}8$ m/s^2.

Vamos a resolver el problema por tramos:



- **Primer tramo. Plano horizontal rugoso. Desde A hasta B.**

  Conocemos la velocidad inicial del cuerpo, $v_A = 10$ m/s, y calculamos la velocidad de este tras recorrer 2 m, v_B. La única fuerza que actúa en el eje horizontal es la fuerza de rozamiento. Aplicamos la segunda ley de Newton y calculamos la aceleración del cuerpo:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad F_R = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\mu \cdot N}{m}$$

  En el eje perpendicular al plano no hay movimiento, la normal es igual al peso. Sustituimos en la expresión anterior y calculamos a:

$$a = \frac{\mu \cdot \cancel{m} \cdot g}{\cancel{m}} = \mu \cdot g = 0{,}4 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 3{,}92\ \text{m/s}^2$$

La aceleración tiene signo negativo porque se opone al movimiento: $a = -3{,}92\ \text{m/s}^2$.

A partir de la siguiente expresión, que relaciona la velocidad y el espacio recorrido en un MRUA, calculamos la velocidad después de recorrer 2 m, es decir, en el punto B:

$$v_B^2 - v_A^2 = 2 \cdot a \cdot x \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{v_A^2 + 2 \cdot a \cdot x} = \sqrt{\left(10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 2 \cdot 3{,}92\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2\ \text{m}} = 9{,}18\ \text{m/s}$$

- **Segundo tramo. Plano inclinado sin rozamiento. Desde B hasta C.**

  Conocemos la velocidad del cuerpo al inicio de rampa, $v_B = 9{,}18$ m/s y calculamos la distancia que recorre sobre el plano inclinado hasta que se detiene, $v_C = 0$ m/s.

  La única fuerza que actúa en el eje horizontal es la componente *X* del peso. Aplicamos la segunda ley de Newton y calculamos la aceleración del cuerpo en el segundo tramo, *a´*:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad P_x = m \cdot a' \quad \Rightarrow \quad a' = \frac{P_x}{m} = \frac{\cancel{m} \cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha}{\cancel{m}} = g \cdot \text{sen}\ \alpha = 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\ 30° = 4{,}9\ \text{m/s}^2$$

  La aceleración tiene signo negativo porque se opone al movimiento: $a' = -4{,}9\ \text{m/s}^2$.

  A partir de la siguiente expresión, que relaciona la velocidad y el espacio recorrido en un MRUA, calculamos la distancia recorrida por el plano inclinado hasta que se detiene:

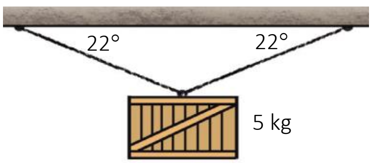
$$v_C^2 - v_B^2 = 2 \cdot a' \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{v_C^2 - v_B^2}{2 \cdot a'} = \frac{0 - \left(9{,}18\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot \left(-4{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} = 8{,}6\ \text{m}$$

  Por último, calculamos la altura que alcanza:

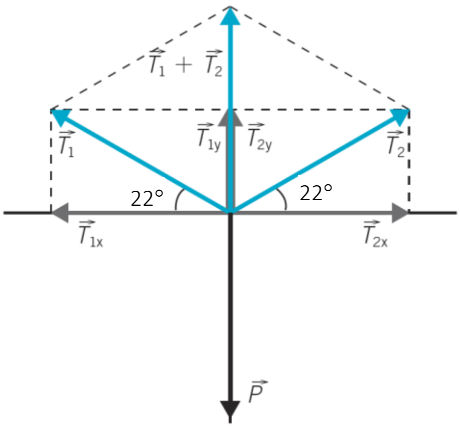
$$h = d \cdot \text{sen}\ 30° = 8{,}6\ \text{m} \cdot 0{,}5 = \mathbf{4{,}30\ m}$$

El problema del equilibrio

45. Calcula la tensión de cada cuerda si la masa del cuerpo que cuelga es de 5 kg.



Elegimos un sistema de referencia según la figura y descomponemos $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ en sus componentes según los ejes *X* e *Y*.



Como hay equilibrio, debe cumplirse: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Componente horizontal:} & T_{1x} = T_{2x} \\ \text{Componente vertical:} & T_{1y} + T_{2y} = P = m \cdot g \end{array}\right\} (*)$$

Las proyecciones de las tensiones sobre los ejes cartesianos:

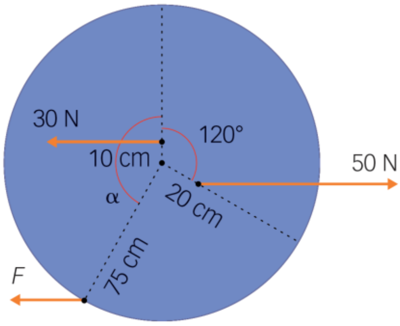
$$T_{1x} = T_1 \cdot \cos 22°; \quad T_{2x} = T_2 \cdot \cos 22°$$
$$T_{1y} = T_1 \cdot \text{sen}\ 22°; \quad T_{2y} = T_2 \cdot \text{sen}\ 22°$$

Ahora las condiciones de equilibrio (*) quedan así:

$$(*)\begin{cases} T_1 \cdot \cos 22° = T_2 \cdot \cos 22° \quad \Rightarrow \quad T \equiv T_1 = T_2 \\ 2 \cdot T \cdot \text{sen } 22° = m \cdot g \end{cases}$$

$$T = \frac{m \cdot g}{2 \cdot \text{sen } 22°} = \frac{5 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{2 \cdot \text{sen } 22°} = \mathbf{65{,}4 \text{ N}}$$

46. **Determina el módulo de la fuerza horizontal que se debe aplicar sobre la periferia del disco de la figura, y cuánto debe valer el ángulo α para que el disco quede en equilibrio. El radio del disco es 75 cm.**



Para que un cuerpo se encuentre en equilibrio se tienen que cumplir dos condiciones: $\sum \vec{F} = \vec{0}$ y $\sum \vec{M} = \vec{0}$.

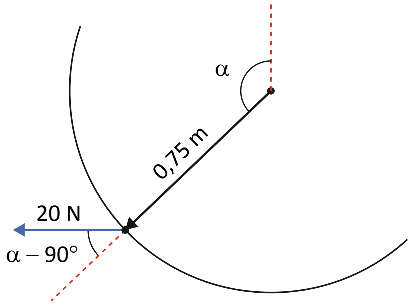
Calculamos cuál debe ser el valor de *F* para que se cumpla la primera condición $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

En este caso solo hay fuerzas en el eje horizontal, podemos reducir el problema a un cálculo escalar indicando con el signo el sentido de los vectores:

$$\sum \vec{F} = 50 \text{ N} - 30 \text{ N} - F = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 50 \text{ N} + 30 \text{ N} = \mathbf{20\,N}$$

Imponemos la segunda condición, y calculamos el valor de α para que $\sum \vec{M} = \vec{0}$.

Calculamos los momentos teniendo en cuenta que el signo se determina según el sentido de giro que provoca la fuerza:



$$M_1 = 0{,}20 \text{ m} \cdot 50 \text{ N} \cdot \text{sen } 30° = +5 \text{ N} \cdot \text{m}$$
$$M_2 = 0{,}10 \text{ m} \cdot 30 \text{ N} \cdot \text{sen } 90° = +3 \text{ N} \cdot \text{m}$$
$$M_3 = 0{,}75 \text{ m} \cdot 20 \text{ N} \cdot \text{sen } (\alpha - 90°) = -15 \cdot \text{sen } (\alpha - 90°) \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\sum M = M_1 + M_2 + M_3$$

$$\sum M = 5 \text{ N} \cdot \text{m} + 3 \text{ N} \cdot \text{m} - 15 \cdot \text{sen } (\alpha - 90°) \text{ N} \cdot \text{m} = 0$$

$$\text{sen } (\alpha - 90°) = \frac{8 \cancel{\text{N} \cdot \text{m}}}{15 \cancel{\text{N} \cdot \text{m}}}$$

$$\alpha - 90° = \text{arcsen}\left(\frac{8}{15}\right) = \begin{cases} 32° 13' 51'' \\ 147° 46' 9'' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \begin{cases} 122° 13' 51'' \\ 237° 46' 9'' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \mathbf{122° 13' 51''}$$

Cualquiera de las dos soluciones es buena para equilibrar el disco. Está destacada la que más se acerca a la figura del enunciado.

Momento lineal, impulso y colisiones

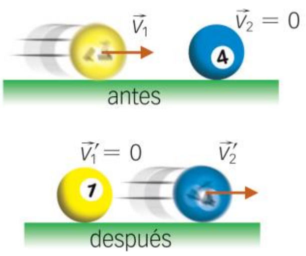
47. **¿Para qué sirven los cascos acolchados (o deformables, como los que llevan los motoristas) o las colchonetas sobre las que caen los gimnastas? Responde basándote en alguna de las leyes de la física que has estudiado en esta unidad.**

Un cuerpo deformable en un choque protege porque prolonga el intervalo de tiempo en el que tiene lugar el cambio de velocidad, disminuyendo así la fuerza. Para fuerzas constantes:

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}\text{; o mejor aún } F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Y a igual variación de momento lineal o velocidad, cuanto más dura la colisión, menor es la fuerza.

48. **Una bola de billar golpea a otra igual de forma que después del choque la bola que golpea queda en reposo. La velocidad que adquiere la bola golpeada es:**



a) Igual que la de la bola que golpea.

b) Menor que la de la bola que golpea.

c) Mayor que la de la bola que golpea.

Un razonamiento basado en la simetría nos podría hacer pensar que la bola inicialmente en reposo, de igual masa que la que se mueve, saldrá de la colisión con la misma velocidad con la que la otra la impulsó.

Sin embargo, vamos a utilizar la ley de conservación del movimiento lineal, cuyo valor total debe ser el mismo antes y después de la colisión.

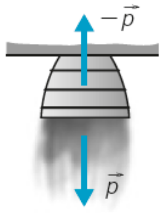
Como el problema es unidimensional, haremos un tratamiento escalar.

$$p_{\text{TOTAL}} = \overbrace{p_1 + 0}^{\text{Antes}} = \overbrace{0 + p_2'}^{\text{Después}} \quad (\vec{p}_1 \text{ y } \vec{p}_2' \text{ tienen igual dirección y sentido})$$

Por tanto, $p_1 = p_2'$, y como tienen igual masa: $m \cdot v_1 = m \cdot v_2'$, entonces $v_1 = v_2'$. Es decir, tal y como sospechábamos, tienen igual velocidad. Entonces la respuesta correcta es la **a**.

49. **Los cohetes (como los motores «a reacción») queman parte de su masa –de combustible– y expulsan a gran velocidad los gases de combustión en sentido opuesto al de la marcha. Explica la causa a partir de las leyes de Newton.**

Los gases de combustión son «empujados» por el motor hacia el exterior, y a su vez, estos «empujan» al motor (bueno, al cohete, que está unido al motor) con una fuerza de igual módulo y dirección, y sentido opuesto (tercera ley de Newton).



Una explicación equivalente a partir de la conservación del momento lineal: los gases de combustión expulsados se llevan consigo un momento lineal $\vec{p}$, pero como el momento lineal se tiene que conservar, al cohete «no le queda más remedio» que adquirir un momento lineal del mismo módulo y opuesto: $-\vec{p}$.

50. **Halla el tiempo que tiene que estar actuando una fuerza constante de 15 N sobre una masa de 10 kg en reposo para que esta adquiera una velocidad de 30 m/s.**

En el caso de fuerzas constantes, la segunda ley de Newton dice que:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{(suponiendo } m = \text{cte.)}$$

Despejamos Δt:

$$\Delta t = \frac{m \cdot \Delta v}{F} = \frac{10 \text{ kg} \cdot 30 \text{ m/s}}{15 \text{ N}} = \mathbf{20 \text{ s}}$$

51. **Una pelota de béisbol tiene una masa de 142 g y puede ser lanzada con una velocidad de 45 m/s. ¿Qué fuerza debe aplicarse para detener la pelota en tres décimas de segundo?**

Detener la pelota quiere decir conseguir que:

$$\Delta v = v_f - v_0 = 0 - v_0 = -v_0$$

Si suponemos que la fuerza es constante:

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0{,}142 \text{ kg} \cdot \frac{-45 \text{ m/s}}{0{,}3 \text{ s}} = \mathbf{-21{,}3 \text{ N}}$$

52. **Un bloque de plastilina de 50 g de masa choca perpendicularmente contra una pared a 30 m/s y se queda parado y adherido a ella; el proceso ha durado 60 ms.**

a) **Elige un sistema de referencia y escribe y representa los vectores momento lineal de la plastilina antes y después del choque.**

b) **¿Cuál ha sido la fuerza que ha ejercido la pared sobre la plastilina?**

Ahora sustituyamos la plastilina por una pelota de tenis.

c) **Dibuja y calcula los vectores momento lineal y calcula la fuerza sobre la pelota, suponiendo que no pierde velocidad en el rebote.**

d) **Repite el apartado anterior, pero suponiendo ahora que la pelota pierde en el choque un 10 % de la velocidad inicial.**

a)

b) Si consideramos m constante (al menos aproximadamente):

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \cdot \frac{v_f - v_0}{\Delta t} = 0{,}05\ \text{kg} \cdot \frac{0\ \text{m/s} - 30\ \text{m/s}}{0{,}06\ \text{s}} = \mathbf{-25\ N}$$

(El signo negativo quiere decir que la fuerza tiene sentido opuesto a la velocidad inicial).

c)

La velocidad de la pelota se invierte (si despreciamos las pérdidas de energía por la deformación, la subida de temperatura de la pelota,…) tras el choque: $\vec{p}_f = -\vec{p}_0$.

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \cdot \frac{v_f - v_0}{\Delta t} = 0{,}05\ \text{kg} \cdot \frac{-30\ \text{m/s} - (+30\ \text{m/s})}{0{,}06\ \text{s}} = \mathbf{-50\ N}$$

La fuerza se duplica (suponiendo que la colisión dura lo mismo).

d) Si se pierde un 10 % de velocidad en la colisión:

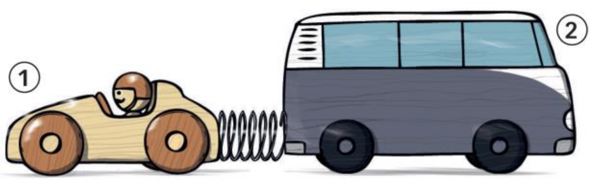
$$v_f = -\left(v_0 - \frac{1}{10} \cdot v_0\right) = -\frac{9}{10} \cdot v_0 = -\frac{9}{10} \cdot 30\ \text{m/s} = -27\ \text{m/s}$$

Sustituimos:

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \cdot \frac{v_f - v_0}{\Delta t} = 0{,}05\ \text{kg} \cdot \frac{-27\ \text{m/s} - (+30\ \text{m/s})}{0{,}06\ \text{s}} = \mathbf{-47{,}5\ N}$$

ACTIVIDADES FINALES (página 277)

53. **Tenemos dos coches de juguete en reposo y entre ellos hay un muelle comprimido. Si la masa de uno es doble que la del otro, $m_2 = 2 \cdot m_1$, al soltarlos, ¿con qué velocidades relativas salen?**



Según la tercera ley de Newton, las fuerzas que ejercen uno sobre el otro son iguales y opuestas:

$$\vec{F}_{m_1 \text{ sobre } m_2} = -\vec{F}_{m_1 \text{ sobre } m_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\vec{p}_{m_1}}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{p}_{m_2}}{\Delta t}$$

Como la duración de la interacción es la misma en ambos juguetes: $\Delta\vec{p}_{m_1} = -\Delta\vec{p}_{m_2}$. Por tanto:

$$\left(p_{m_1}\right)_{\text{final}} - \left(p_{m_1}\right)_{\text{inicial}} = -\left\lfloor \left(p_{m_2}\right)_{\text{final}} - \left(p_{m_2}\right)_{\text{inicial}} \right\rfloor$$

$$\left(m_1 \cdot v_1\right)_{\text{final}} - \left(m_1 \cdot v_1\right)_{\text{inicial}} = -\left\lfloor \left(m_2 \cdot v_2\right)_{\text{final}} - \left(m_2 \cdot v_2\right)_{\text{inicial}} \right\rfloor$$

Como inicialmente los coches estaban en reposo, sus velocidades iniciales son cero:

$$m_1 \cdot \left(v_1\right)_{\text{final}} = -m_2 \cdot \left(v_2\right)_{\text{final}} \quad \Rightarrow \quad \left(v_1\right)_{\text{final}} = -\frac{m_2}{m_1} \cdot \left(v_2\right)_{\text{final}}$$

Como $m_2 = 2 \cdot m_1$, entonces:

$$\left(v_1\right)_{\text{final}} = -\frac{2 \cdot \cancel{m_1}}{\cancel{m_1}} \cdot \left(v_2\right)_{\text{final}} = -2 \cdot \left(v_2\right)_{\text{final}}$$

El juguete más ligero sale con el doble de velocidad y en sentido contrario que el juguete más pesado:

$$\boldsymbol{v_1 = -2 \cdot v_2}$$

54. Una partícula se mueve con un momento lineal de $10\,\vec{k}$ kg · m/s y, tras una interacción con otra, su momento cambia a $7\,\vec{i} + 12\,\vec{k}$ kg · m/s.

a) Calcula el vector variación del momento lineal, $\Delta\vec{p}$.

b) Calcula la intensidad de la fuerza sobre la partícula si la interacción duró una milésima de segundo.

a) La variación del momento lineal en la interacción es:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{\text{final}} - \vec{p}_{\text{inicial}} = (7\,\vec{i} + 12\,\vec{k})\text{ kg} \cdot \text{m/s} - (10\,\vec{k})\text{ kg} \cdot \text{m/s} = \mathbf{(7\,\vec{i} + 2\,\vec{k})\ kg \cdot \frac{m}{s}}$$

b) Calculamos la intensidad de la fuerza sobre la partícula:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{(7\,\vec{i} + 12\,\vec{k})\text{ kg} \cdot \text{m/s}}{10^{-3}\text{ s}} = 7000\,\vec{i} + 2000\,\vec{k}\text{ N}$$

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{(7000\text{ N})^2 + (2000\text{ N})^2} = \mathbf{7280\ N}$$

55. Un proyectil de 900 g lanzado durante una sesión de fuegos artificiales explota a 300 m de altura, cuando su velocidad es vertical y ascendente de 80 km/h, dividiéndose en dos fragmentos. Uno de estos fragmentos, de 600 g, continúa subiendo con $v = 100$ km/h.

a) ¿Cuál es la velocidad del otro fragmento?

b) ¿Hacia dónde se mueve?

Al ser todos los desplazamientos verticales, se puede resolver con las componentes en esa dirección. Usaremos el principio de conservación del momento lineal para el proyectil (antes) y sus fragmentos (después).

$$v_0 = 80\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\text{ m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}} = 22{,}\widehat{2}\text{ m/s}$$

$$v_{\text{fA}} = 100\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\text{ m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}} = 27{,}\widehat{7}\text{ m/s}$$

Veamos los módulos de los momentos lineales.

$$\overset{\text{Antes}}{p_0} = \overbrace{p_{fA} + p_{fB}}^{\text{Después}}$$
$$p_0 = M \cdot v_0 = 0{,}9\text{ kg} \cdot 22{,}\widehat{2}\text{ m/s} = 20\text{ kg} \cdot \text{m/s}$$
$$p_{fA} = 0{,}6\text{ kg} \cdot 27{,}7\text{ m/s} = 16{,}\widehat{6}\text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Calculamos el módulo del momento lineal del segundo fragmento:

$$p_{fB} = p_0 - p_{fA} = (20 - 16{,}\widehat{6})\text{ kg} \cdot \text{m/s} = 3{,}\widehat{3}\text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

a) Con lo que su velocidad será:

$$v_B = \frac{p_{fB}}{m_B} = \frac{3{,}\widehat{3}\ \cancel{\text{kg}} \cdot \text{m/s}}{(0{,}9 - 0{,}6)\ \cancel{\text{kg}}} = 11{,}\widehat{1}\text{ m/s} = 11{,}\widehat{1}\ \frac{\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{s}}} \cdot \frac{3600\ \cancel{\text{s}}}{1\text{ h}} \cdot \frac{1\text{ km}}{1000\ \cancel{\text{m}}} = \mathbf{40}\ \frac{\textbf{km}}{\textbf{h}}$$

b) Al resultar un número positivo, la componente es **hacia arriba**.

56. Dos patinadores sobre hielo se dirigen uno contra otro a lo largo de una línea recta con igual velocidad y, tras chocar, queden abrazados.

a) ¿Qué pasaría si tuvieran la misma masa?

b) Si tras la colisión se mueven juntos a 0,1 m/s a lo largo de la dirección inicial, ¿qué significa eso?

a) Ambos patinadores tienen igual masa, $m_2 = m_1 = m$, y se dirigen el uno a otro a lo largo de la misma recta con igual velocidad y sentido contrario, $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$.

Al no haber fuerzas exteriores, se conserva el momento lineal:

$$\vec{p}_{\text{inicial}} = \vec{p}_{\text{final}}$$
$$\left(\vec{p}_{m_1} + \vec{p}_{m_2}\right)_{\text{inicial}} = \left(\vec{p}_{m_1+m_2}\right)_{\text{final}}$$
$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = \left(m_1 + m_2\right) \cdot \vec{v}$$
$$m \cdot \vec{v}_1 + m \cdot (-\vec{v}_1) = 2 \cdot m \cdot \vec{v}$$
$$0 = 2 \cdot m \cdot \vec{v}$$
$$\vec{v} = 0$$

Por tanto, la velocidad del conjunto tras la colisión es cero. Es decir, los patinadores **se quedan quietos tras el choque**.

b) Si la velocidad final del conjunto es distinta de cero, **las masas de los patinadores deben ser diferentes.**

57. La mano de una lanzadora de jabalina llega al momento del lanzamiento a una velocidad de 5 m/s y la jabalina sale a 28 m/s tras dar el brazo un impulso de 2 centésimas de segundo de duración. ¿Qué fuerza ha aplicado la atleta si la masa de la jabalina es de 0,8 kg?

Suponiendo que el atleta ejerce una fuerza constante sobre la jabalina durante el tiempo del lanzamiento, Δt = 0,02 s, se cumplirá:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{m \cdot \Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

La velocidad antes del impulso es 5 m/s. La velocidad después del impulso es de 28 m/s. Sustituimos y calculamos el módulo de la fuerza:

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{0{,}8\text{ kg} \cdot (28\text{ m/s} - 5\text{ m/s})}{0{,}02\text{ s}} = \mathbf{920\ N}$$

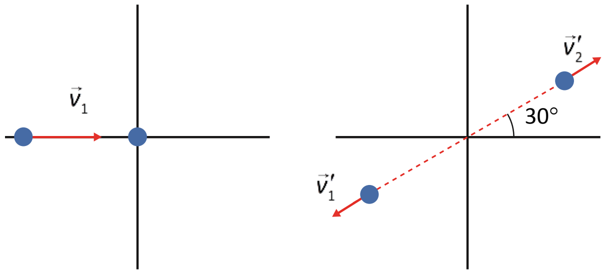
58. Una bola que se mueve en línea recta a 2 m/s choca contra otra de igual masa que estaba en reposo. Tras el choque, la que antes estaba en reposo se mueve a 1 m/s en una dirección que forma un ángulo de 30° con la dirección de movimiento de la primera. Hay que calcular:

a) La velocidad y dirección de la primera bola tras el choque.

b) El módulo del vector variación de la velocidad de cada partícula.

a) En la colisión se conserva la cantidad de movimiento.

$$\vec{p}_{\text{inicial}} = \vec{p}_{\text{final}}$$
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$



Para poder continuar, fijamos un sistema de referencia como en la figura y descomponemos cada vector en sus componentes. La igualdad vectorial queda:

$$\left.\begin{array}{r} p_{1x} = p'_{1x} + p'_{2x} \\ 0 = p'_{1y} + p'_{2y} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} p_1 = p'_1 \cdot \cos\alpha_1 + p'_2 \cdot \cos\alpha_2 \\ 0 = p'_1 \cdot \text{sen}\,\alpha_1 + p'_2 \cdot \text{sen}\,\alpha_2 \end{array}\right\}$$

Como $p = m \cdot v$, y además las dos bolas tienen la misma masa, podemos escribir el sistema anterior en función solo de las velocidades:

$$\left.\begin{array}{r} v_1 = v'_1 \cdot \cos\alpha_1 + v'_2 \cdot \cos\alpha_2 \\ 0 = v'_1 \cdot \text{sen}\,\alpha_1 + v'_2 \cdot \text{sen}\,\alpha_2 \end{array}\right\}$$

Conocemos $v_1 = 2$ m/s, $v'_2 = 1$ m/s y $\alpha_2 = 30°$. Al sustituir tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolvemos y conseguimos las incógnitas pedidas:

$$\alpha_1 \approx \mathbf{-23°\ 47'\ 38''} \text{ y } v'_1 = 1{,}2393 \text{ m/s} \simeq \mathbf{1{,}24\ m/s}$$

b) Calculamos el módulo del vector variación de la velocidad de cada partícula:

$$\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 - \vec{v}_1 = \left(v'_1 \cdot \cos\alpha_1\,\vec{i} + v'_1 \cdot \text{sen}\,\alpha_1\,\vec{j}\right) - v_1\,\vec{i} = \left(v'_1 \cdot \cos\alpha_1 - v_1\right)\vec{i} + v'_1 \cdot \text{sen}\,\alpha_1\,\vec{j}$$

$$\Delta\vec{v}_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{i} - \frac{1}{2}\,\vec{j}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

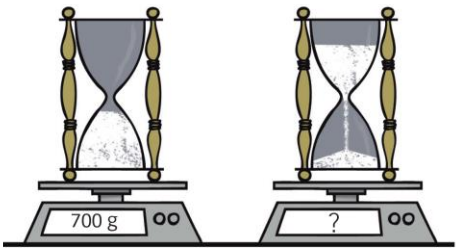
$$\left|\Delta\vec{v}_1\right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \mathbf{1\ m/s}$$

$$\Delta\vec{v}_2 = \vec{v}'_2 - \vec{v}_2 = \left(v'_2 \cdot \cos\alpha_2\,\vec{i} + v'_2 \cdot \text{sen}\,\alpha_2\,\vec{j}\right) - \vec{0}$$

$$\Delta\vec{v}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{i} + \frac{1}{2}\,\vec{j}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\left|\Delta\vec{v}_2\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \mathbf{1\ m/s}$$

59. Un reloj de arena tiene una masa de 700 g cuando la arena se encuentra en el depósito inferior. Si ahora se le da la vuelta y se coloca sobre una balanza, ¿qué indicará la balanza mientras la arena está cayendo?



Por un lado, es cierto que mientras cae la arena su masa no contribuye al peso que registra la báscula, de modo que al empezar a caer la balanza registra un peso menor. Luego, la arena empieza a chocar contra el fondo ejerciendo sobre él una fuerza que se puede calcular, para ver que compensa al peso que falta por estar la arena en caída libre.

Cuando la arena está terminando de caer, hay un intervalo en el que la masa en caída libre disminuye, mientras la fuerza de la que cae sigue igual y la balanza registra fugazmente un peso mayor que el inicial.

Ampliación (página 278)

60. En el espacio, entre el Sol y la Tierra, existe un punto en el que la fuerza neta que ambos astros ejercen sobre una masa colocada en él es nula. ¿Dónde se encuentra dicho punto? Escoge la respuesta correcta.

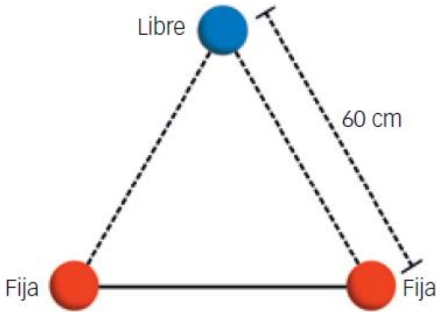
a) Más cerca del Sol que de la Tierra.

b) Más cerca de la Tierra que del Sol.

c) Justo a mitad de camino, entre la Tierra y el Sol.

La respuesta correcta es la **b**, más cerca de la Tierra que del Sol. El campo gravitatorio de dos masas se anula en la línea que las une, y más cerca de la masa menor, pues la fuerza es inversamente proporcional a la distancia.

61. Tres cargas eléctricas de 5 nC, dos positivas fijas y una negativa libre, se sitúan en los vértices de un triángulo equilátero de 60 cm de lado. Calcula la aceleración inicial de la carga negativa sabiendo que su masa es de 5 g.



a) Dibuja las fuerzas que actúan sobre la carga negativa. ¿En qué dirección comienza a moverse?

b) Observa la simetría del problema y responde: ¿cómo es la trayectoria que sigue la carga negativa?

c) ¿Hay algún punto de la trayectoria seguida en que la fuerza neta sobre la carga negativa sea nula? ¿Dónde?

d) Elige la respuesta correcta:

1. La velocidad de la carga negativa aumenta hasta que la carga negativa pasa entre ambas cargas positivas. Luego disminuye.

2. La velocidad se mantiene constante.

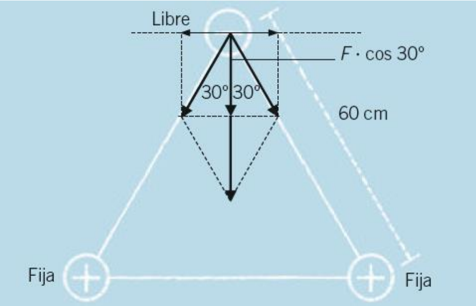
3. El movimiento es uniformemente acelerado.

a) El valor de la fuerza entre la carga libre y cada una de las cargas fijas es:

$$F = k \cdot \frac{|q \cdot q'|}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{|-5 \cdot 10^{-9}\ \text{C} \cdot 5 \cdot 10^{-9}\ \text{C}|}{(0,6\ \text{m})^2} = 6,25 \cdot 10^{-7}\ \text{N}$$

La componente horizontal de una se anula con la otra por simetría. La componente vertical es:

$$F_y = F \cdot \cos 30° = 6,25 \cdot 10^{-7}\,\text{N} \cdot \cos 30° = 5,4 \cdot 10^{-7}\ \text{N}$$



El total de la fuerza es:

$$F_T = 2 \cdot F_y = 2 \cdot 5,4 \cdot 10^{-7}\ \text{N} = 1,08 \cdot 10^{-6}\ \text{N}$$

La aceleración que sufre la carga:

$$a = \frac{F_T}{m} = \frac{1,08 \cdot 10^{-6}\ \text{N}}{5 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}} = \mathbf{2,16 \cdot 10^{-4}\ m/s^2}$$

Comienza a moverse en dirección vertical y hacia abajo.

b) La trayectoria es una línea recta vertical.

c) Sí, cuando la carga negativa pasa por el centro de la línea que une las cargas positivas. En ese punto solo hay componente horizontal de las fuerzas y por simetría se anulan entre sí.

d) En principio, las cargas positivas tiran de la carga negativa en la dirección negativa del eje *Y* y su velocidad va aumentando, pero cuando la carga positiva rebasa el punto medio de las dos cargas positivas, la fuerza se invierte. Ahora la fuerza sobre la carga negativa tiene sentido del eje *Y* positivo.

La fuerza logrará frenar el movimiento de la carga negativa hacia abajo y después esta comenzará a ascender con velocidad creciente.

Y así sucesivamente, la carga negativa asciende y desciende siguiendo un movimiento oscilatorio.

62. En el suelo de un vagón de tren hay una caja de masa 100 kg. Calcula la aceleración que adquiere la caja respecto al vagón cuando el tren arranca con una aceleración de 2 m/s² en los siguientes casos:

a) No hay rozamiento entre la caja y el suelo del vagón.

b) Sí hay rozamiento, $\mu_c = 0{,}1$.

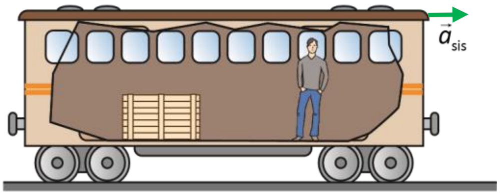
Aplicamos en ambos casos las ecuaciones del movimiento relativo estudiadas en el tema anterior.

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_{\text{obj}} - \vec{a}_{\text{sis}}$$

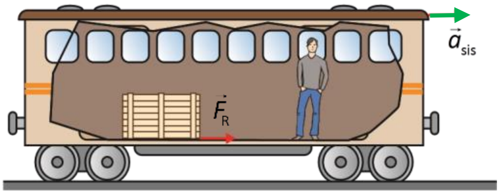
La aceleración sobre el objeto dependerá de las fuerzas que reciba, la aceleración del sistema es la aceleración del vagón. Al ser todos los movimientos en la misma dirección, prescindimos del carácter vectorial en la ecuación.

a) Si no existe rozamiento entre la caja y el suelo ($F_R = 0$), la caja recibe una fuerza neta nula en la dirección del movimiento, y su aceleración es nula:

$$a_{\text{rel}} = a_{\text{obj}} - a_{\text{sis}} = 0\ \text{m/s}^2 - 2\ \text{m/s}^2 = \mathbf{-2\ m/s^2}$$



b) El suelo del vagón se mueve en una dirección y la caja sin rozamiento se quedaría quieta. Al haber rozamiento, este se opone al movimiento relativo entre las dos superficies, ver la figura. La caja recibe esta fuerza y su aceleración será proporcional a esta fuerza:



$$F_R = \mu \cdot \cancel{m} \cdot g = \cancel{m} \cdot a_{\text{obj}}$$

$$a_{\text{obj}} = \mu \cdot g = 0{,}1 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 0{,}98\ \text{m/s}^2$$

$$a_{\text{rel}} = a_{\text{obj}} - a_{\text{sis}} = 0{,}98\ \text{m/s}^2 - 2\ \text{m/s}^2 = \mathbf{-1{,}02\ m/s^2}$$

Observa que en ambos casos, la aceleración de la caja es negativa. Esto significa que para un observador en el interior del vagón la caja se mueve acelerada en el sentido opuesto al movimiento del vagón.

63. En el espacio exterior actúa sobre una roca de 5 kg una fuerza neta constante $20\,\vec{i} - 15\,\vec{j} + 60\,\vec{k}$ N durante un intervalo de 35 s. Si al final de este tiempo la velocidad de la roca llega a ser $12\,\vec{i} + 20\,\vec{j} - 30\,\vec{k}$ m/s, ¿cuál era la velocidad inicial?

Para aceleraciones constantes e intervalos de tiempo pequeños, podemos escribir la aceleración como:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Y expresar la segunda ley de Newton en función de la velocidad:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m \cdot \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Calculamos la variación de la velocidad:

$$\Delta\vec{v} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta t}{m} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{v} = \frac{\left(20\,\vec{i} - 15\,\vec{j} + 60\,\vec{k}\right)\text{N} \cdot 35\ \text{s}}{5\ \text{kg}} = 140\,\vec{i} - 105\,\vec{j} + 420\,\vec{k}\ \text{m/s}$$

Por tanto:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_{\text{final}} - \vec{v}_{\text{inicial}} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{\text{inicial}} = \vec{v}_{\text{final}} - \Delta\vec{v}$$

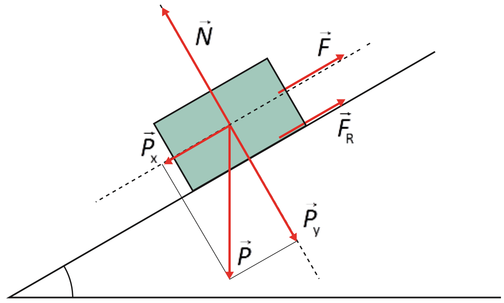
Sustituimos los datos y tenemos que la velocidad inicial:

$$\vec{v}_{\text{inicial}} = \left(12\,\vec{i} + 20\,\vec{j} - 30\,\vec{k}\right)\text{m/s} - \left(140\,\vec{i} - 105\,\vec{j} + 420\,\vec{k}\right)\text{m/s} = \mathbf{-128\,\vec{i} + 125\,\vec{j} - 450\,\vec{k}\ m/s}$$

64. Un cuerpo de masa 3 kg se encuentra sobre un plano inclinado 30° sobre la horizontal.
Datos: $\mu_e = 0{,}45$, $\mu_c = 0{,}2$, $g = 9{,}8$ m/s².

a) Calcula el valor de la fuerza paralela al plano que es necesario ejercer para que el cuerpo permanezca en reposo.

b) Si después se le deja libre, calcula el espacio recorrido en los dos primeros segundos.



Para resolver el problema situamos un eje paralelo al plano y otro perpendicular a él y aplicamos las leyes de Newton:

a) En el eje perpendicular al plano, el cuerpo se encuentra en equilibrio:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{N} + \vec{P}_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P \cdot \cos\alpha$$

En el eje paralelo al plano, para que el objeto se encuentre en equilibrio, el sumatorio de las fuerzas ha de ser nulo:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} + \vec{F}_R + \vec{P}_x = 0$$

$$F + F_R - P \cdot \text{sen}\,\alpha = 0$$

$$F = P \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu_e \cdot N = P \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu_e \cdot P \cdot \cos\alpha$$

$$F = m \cdot g \cdot (\text{sen}\,\alpha - \mu_e \cdot \cos\alpha)$$

$$F = 3\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 \cdot (\text{sen}\,30° - 0{,}45 \cdot \cos 30°) = \mathbf{3{,}24\ N}$$

b) Si lo dejamos libre, desaparece la fuerza que lo retiene, la fuerza de rozamiento no es suficiente y el cuerpo se desliza. Aplicamos la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} + \vec{F}_R = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad P \cdot \text{sen}\,\alpha - F_R = m \cdot a$$

En el eje perpendicular al plano, el cuerpo continúa en equilibrio, por lo que:

$$N = P \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

Despejamos la aceleración y sustituimos:

$$m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu_c \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot a$$

$$a = g \cdot (\text{sen}\,\alpha - \mu_c \cdot \cos\alpha) = 9{,}8\text{ m/s}^2 \cdot \left(\text{sen}\,30° - 0{,}2 \cdot \cos 30°\right) = 3{,}20\text{ m/s}^2$$

A partir de la ecuación de posición en un MRUA, calculamos el espacio recorrido en los dos primeros segundos:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot \left(3{,}20\text{ m/s}^2\right) \cdot (2\text{s})^2 = \mathbf{6{,}4\ m}$$

65. Sobre un plano inclinado 30° hay un bloque A. El bloque A está conectado a otro bloque B a través de una cuerda que pasa por una polea situada en la cúspide del plano. El bloque B cuelga de la cuerda en vertical por acción de la gravedad. Ambos bloques tienen una masa de 5 kg. Calcula la aceleración del sistema (sin rozamiento) y la tensión de la cuerda. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

Aplicamos la segunda ley de Newton. Una ecuación para cada una de las masas:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{P}_A + \vec{T} + \vec{N} = m_A \cdot \vec{a} \\ \vec{P}_B + \vec{T} = m_B \cdot \vec{a} \end{array}\right\}$$

Descomponemos las fuerzas en sus componentes paralelas y perpendiculares al plano. En el caso del bloque A nos quedaremos solo con la dirección paralela al plano, que es la dirección del movimiento.

$$\left.\begin{array}{l} T - m_A \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha = m_A \cdot a \\ m_B \cdot g - T = m_B \cdot a \end{array}\right\}$$

Suponemos que m_B baja y m_A se desliza subiendo por el plano. Si resulta ser al revés, obtendremos una aceleración negativa y el sentido de giro será el contrario. Sumamos las dos ecuaciones:

$$m_B \cdot g - m_A \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha = (m_B + m_A) \cdot a$$

Teniendo en cuenta que las masas son iguales, $m_A = m_B = m$, la aceleración es:

$$\cancel{m} \cdot g \cdot (1 - \text{sen}\,\alpha) = 2 \cdot \cancel{m} \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{(1 - \text{sen}\,\alpha) \cdot g}{2}$$

Sustituyendo los valores y operando:

$$a = \frac{(1 - \text{sen } 30^\circ) \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{2} = \mathbf{2{,}45 \text{ m/s}^2}$$

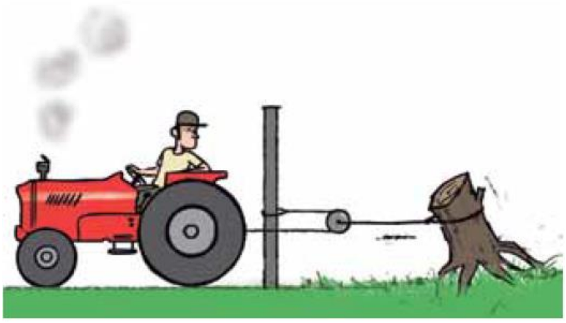
Como la aceleración es positiva, confirma la suposición que hicimos respecto al sentido del movimiento del sistema. De la segunda ecuación para $m_B = m$ despejamos y calculamos la tensión:

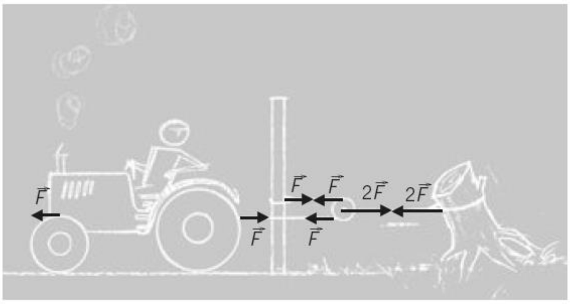
$$m_B \cdot g - T = m_B \cdot a \quad \Rightarrow \quad T = m \cdot (g - a)$$

Sustituimos los datos y operamos:

$$T = 5 \text{ kg} \cdot (9{,}8 \text{ m/s}^2 - 2{,}45 \text{ m/s}^2) = \mathbf{36{,}75 \text{ N}}$$

66. **A un agricultor se le ocurre realizar el siguiente montaje para arrancar un tronco. ¿Se incrementa así la fuerza que ejerce el motor del tractor? Haz un esquema dibujando las fuerzas para justificar tu respuesta.**





Digamos que el tractor es capaz de ejercer una fuerza $\vec{F}$ y analicemos la situación de equilibrio.

Del esquema se deduce que la fuerza que actúa sobre el tronco es $2 \cdot \vec{F}$, justo el doble. (La clave para deducirlo está en el análisis de las tensiones en las cuerdas).

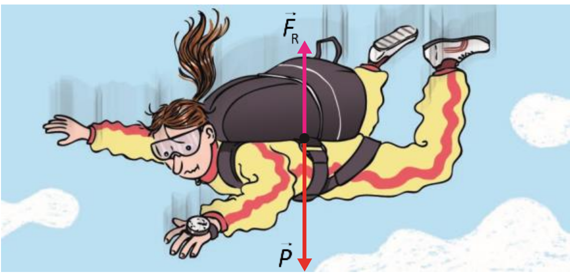
67. **Una paracaidista salta de un avión que vuela muy alto y abre su paracaídas.**

a) **Dibuja las fuerzas que actúan sobre ella.**

b) **Inicialmente cae cada vez más deprisa, pero al cabo de un tiempo alcanza una velocidad constante, ¿qué nos dice eso sobre el módulo de las fuerzas?**

c) **¿Por qué si la paracaidista es liviana cae más lentamente que si es más pesada aun usando el mismo paracaídas?**

a)



b) Actúan dos fuerzas, el peso y la fuerza de rozamiento con el aire. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad F = P - F_R \quad \Rightarrow \quad m \cdot a = m \cdot g - F_R \quad \Rightarrow \quad a = g - \frac{F_R}{m}$$

La aceleración inicial de caída es g pero el paracaídas hace que disminuya. Esto sucede así porque el peso es constante, pero la fuerza de rozamiento crece con la velocidad, aunque no linealmente. Alcanzar un valor límite: en el que la fuerza de rozamiento es igual al peso del objeto que cae:

$$F_R = m \cdot g = P$$

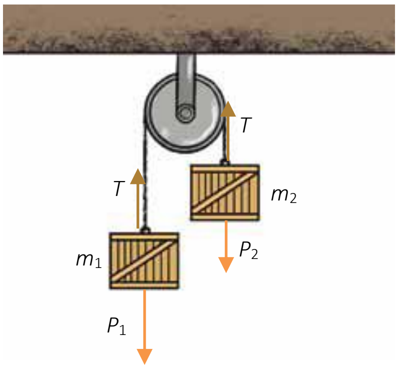
En ese momento, la aceleración se hace nula y la velocidad es constante. La fuerza de rozamiento no depende de la masa, pero sí la aceleración que provoca $a = g - \frac{F_R}{m}$ de tal modo que a menor masa más frenado.

68. Los cohetes funcionan quemando un combustible y arrojando los gases de la combustión en un proceso relacionado con la tercera ley de Newton. ¿Por qué es cada vez más fácil acelerarlo a medida que avanza? Al principio más del 90 % de la masa del cohete es combustible.

El cohete funciona quemando combustible y expulsando los resultados de la combustión, por tanto, su masa es cada vez menor. Mientras el empuje del motor, F sea constante, a medida que el cohete avanza irá gastando más combustible, por lo que la masa total (cohete sumado con el combustible) irá disminuyendo y, por tanto, la aceleración irá aumentando con el tiempo.

$$a(t) = \frac{F}{m_{\text{cohete}} + m_{\text{combustible}}(t)}$$

69. En una máquina de Atwood observamos que la aceleración del sistema formado por ambas masas está acelerado en un 10 % del valor de la aceleración de la gravedad. Calcula la proporción que guardan las masas, m_2/m_1.



La tensión T es la misma para los dos cuerpos. Se aplica la segunda ley de la dinámica, $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$, para cada objeto.

Al ser un movimiento unidimensional prescindimos del carácter vectorial. Escribiendo una ecuación para cada masa:

$$\left.\begin{array}{l} P_1 - T = m_1 \cdot a \\ T - P_2 = m_2 \cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot a \\ T - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a \end{array}\right\}$$

Se suman ambas ecuaciones, miembro a miembro:

$$m_1 \cdot g - m_2 \cdot g = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a$$

Como el sistema está acelerado en un 10 % de la aceleración de la gravedad, expresamos la aceleración:

$$a = \frac{1}{10} \cdot g$$

Y sustituimos en la ecuación anterior:

$$m_1 \cdot g - m_2 \cdot g = m_1 \cdot \frac{1}{10} \cdot g + m_2 \cdot \frac{1}{10} \cdot g$$

Sacando factor común en ambos miembros de la igualdad y simplificando:

$$m_1 - m_2 = \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{10} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{10} \cdot m_1 = \frac{11}{10} \cdot m_2$$

Por tanto:

$$\frac{m_2}{m_1} = \mathbf{\frac{9}{11}}$$

FÍSICA EN TU VIDA (página 280)

INTERPRETA

1. **A partir de la gráfica, determina el consumo de un coche circulando con diferentes marchas a:**

a) **30 km/h**

b) **40 km/h**

c) **60 km/h**

d) **80 km/h**

e) **100 km/h**

Recoge el resultado en una tabla en tu cuaderno.

Velocidad (km/h)	Consumo (L / 100 km)				
	1.ª vel.	2.ª vel.	3.ª vel.	4.ª vel.	5.ª vel.
30	14	10	7	--	--
40	17	10	7	6	--
60	19	11	8	6	--
80	22	12	9	6	2
100	--	13	9,5	7,5	4

2. **¿Consume más un coche con el depósito al completo o con el depósito lleno hasta la mitad de capacidad? ¿Por qué?**

Consume más con el depósito completo, puesto que pesa más.

REFLEXIONA

3. **¿Qué ventajas crees que aporta un coche con 6 marchas frente a un vehículo con 5 marchas?**

Con 6 marchas podemos optimizar mejor el consumo de combustible, ajustándolo a las distintas velocidades. Así, cambiaremos de marcha con más frecuencia. Podemos consumir menos combustible yendo a la misma velocidad que en un coche con cinco marchas.

4. **¿Y un coche con menor resistencia aerodinámica?**

Un coche con menor resistencia aerodinámica minimiza la fuerza de rozamiento que actúa sobre el vehículo, consiguiéndose un menor consumo de combustible para la misma velocidad, que otro que no cuente con este diseño.

5. **El sistema Marcha-Parada que incorporan algunos automóviles modernos detiene automáticamente el motor cuando el coche se para, por ejemplo en un semáforo, y lo enciende de nuevo al pisar el embrague para engranar una marcha. ¿Te parece una opción interesante, aunque el ahorro de combustible no sea grande?**

Se trata de una buena opción, ya que algunos semáforos tardan mucho tiempo en ponerse de nuevo verde. Sin embargo, hay que tener en cuenta que el vehículo siempre consume más combustible al arrancar. Por eso algunos vehículos permiten ajustar el tiempo de espera para que se detenga el motor. Sin embargo, el motor se va a arrancar un mayor número de veces para recorrer los mismos kilómetros, lo que puede acortar su vida.

OPINA

6. **Contesta:**

a) **¿Deberían los conductores recibir, a tu juicio, cursos de conducción eficiente con periodicidad?**

b) **¿Cómo conseguirías tú que realizasen estos cursos?**

a) Siempre es conveniente que los conductores conduzcan de la forma más segura y eficiente posible. Por tanto, puede ser una buena medida para actualizarse. Por ejemplo, la tecnología de los vehículos cambia cada poco incorporando nuevas prestaciones que no todos los conductores saben emplear.

b) Una forma sería, por ejemplo, aumentar sus puntos en el carné por realizar este tipo de cursos.

10

Dinámica

Dinámica 10

PARA COMENZAR (página 281)

- **¿Sufren alguna aceleración los satélites artificiales en su órbita? ¿A qué es debido?**

  Sí, la aceleración centrípeta. Se debe a la aceleración de la gravedad.

- **¿Se te ocurren otros movimientos en los que la trayectoria sea una circunferencia?**

  Otros ejemplos de movimientos en los que la trayectoria es una circunferencia son: un tiovivo, una noria, el movimiento de las agujas de un reloj, etc.

PRACTICA (página 282)

1. **Una empresa está investigando la relación entre su inversión en publicidad y sus beneficios (en millones de euros). El resumen del estudio está en la tabla. Calcula la ecuación de la recta de regresión lineal y estima los beneficios que se obtendrán en el año 2015, si se van a invertir 2,6 millones de euros en publicidad.**

Año	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
Inversión	2	2,4	2	2,8	2	2	1,8	1,9	1,7	2
Beneficios	12	15	13	15	12	11	10	11	9	12

Definimos las variables:

x: inversión

y: beneficio

Construimos la tabla para calcular los parámetros necesarios

	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
	2	12	24	4
	2,4	15	36	5,76
	2	13	26	4
	2,8	15	42	7,84
	2	12	24	4
	2	11	22	4
	1,8	10	18	3,24
	1,9	11	20,9	3,61
$n = 10$	1,7	9	15,3	2,89
Sumas	20,6	120	252,2	43,34
Promedios	2,06	12		

Calculamos α y β:

$$\alpha = \frac{n \cdot \sum x \cdot y - \sum x \cdot \sum y}{n \cdot \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \frac{10 \cdot 252,2 - 20,6 \cdot 120}{10 \cdot 43,34 - 10,6^2} = 5,53$$

$$y = \alpha \cdot x + \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \langle y \rangle - \alpha \cdot \langle x \rangle = 12 - 5,53 \cdot 2,06 = 0,606$$

Escribimos la ecuación de la recta:

$$\boldsymbol{y = \alpha \cdot x + \beta = 5,53 \cdot x + 0,61}$$

Para una inversión de 2,6 millones de euros $x = 2{,}6$:

$$y = 5{,}53 \cdot 2{,}6 + 0{,}61 = 15$$

Por tanto, los beneficios son de **15 millones de euros.**

PRACTICA (página 283)

2. Señala las principales diferencias existentes entre el modelo del Ptolomeo y el modelo de Copérnico.

Diferencias entre el modelo de Ptolomeo y el modelo de Copérnico:

- El centro en el sistema está ocupado por la Tierra en el modelo de Ptolomeo, y por el Sol en el de Copérnico.
- Todo gira alrededor de la Tierra en el modelo de Ptolomeo, y solo la Luna gira alrededor de la Tierra en el modelo de Copérnico.

3. ¿Cuál es la principal ventaja del modelo de Copérnico sobre el de Ptolomeo?

La principal ventaja del modelo de Copérnico es la sencillez, se trata de un modelo muy simple.

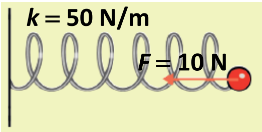
4. A la vista del modelo de Ptolomeo, Alfonso X el Sabio (1121-1284) dijo que… «Si Dios me hubiese pedido consejo, le hubiese recomendado algo más sencillo». Explica este comentario.

En la Edad Media el modelo vigente era el de Ptolomeo. Lo complicado de este modelo despertó el comentario del soberano. La arrogancia del monarca también se aprecia al verse digno de ofrecer consejo al creador.

A su vez, queda patente la creencia de un ser supremo creador del universo, al que se le atribuyen decisiones arbitrarias e indiscutibles a pesar de ir contra nuestro raciocinio.

ACTIVIDAD (página 284)

5. Un muelle de longitud natural $l_0 = 40$ cm, tiene una constante elástica de 50 N/m. Calcula la longitud cuando se aplica una fuerza de compresión de 10 N.



A partir de la ley de Hooke: $F_e = -k \cdot x$

Al comprimir el muelle, este se contrae:

$$F_e = -k \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{F_e}{-k} = \frac{10\ \cancel{\text{N}}}{-50\ \cancel{\text{N}}/\text{m}} = 0{,}2\ \text{m} = -20\ \text{cm}$$

Calculamos la longitud del muelle:

$$x = l - l_0 \quad \Rightarrow \quad l = x + l_0 = -20\ \text{cm} + 40\ \text{cm} = \mathbf{20\ cm}$$

ACTIVIDAD (página 285)

6. Tenemos un muelle elástico sujeto por un extremo al techo. Si colgamos por el otro extremo un cuerpo de 6 kg de masa, el muelle se alarga 20 cm. Calcula:

a) La constante elástica del muelle.

b) El periodo de las oscilaciones si se le aparta de su posición de equilibrio y se deja libre para que oscile según un MAS.

Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

a) Determinaremos la constante de elasticidad estática por medio de la ley de Hooke:

$$-F_e = -(-k \cdot x) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{P}{x} = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{6\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}{0{,}20\ \text{m}} = \mathbf{294\ N/m}$$

b) Aunque la constante de elasticidad estática y dinámica no son exactamente iguales, utilizaremos el dato calculado en el apartado anterior para obtener el periodo de la oscilación:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{6\ \text{kg}}{294\ \text{N/m}}} = \mathbf{0,90\ s}$$

ACTIVIDAD (página 286)

7. En una catedral hay una lámpara que cuelga desde el techo de la nave y, en la posición más baja, está a 2,85 m del suelo. Se observa que oscila con frecuencia 0,111 Hz. ¿Cuál es la altura de la nave? Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

Calculamos el periodo:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}111\ \text{Hz}} = 9{,}01\ \text{s}$$

Necesitamos obtener la longitud del hilo del que pende la lámpara. Para ello podemos utilizar la expresión:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \Rightarrow \quad L = g \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \quad \Rightarrow \quad L = 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot \frac{(9{,}01\ \text{s})^2}{4\pi^2} = \mathbf{20{,}15\ m}$$

Si la lámpara se encuentra a 2,85 m del suelo, la altura total de la nave será:

$$h = L + 2{,}85\ \text{m} = 20{,}15\ \text{m} + 2{,}85\ \text{m} = \mathbf{23\ m}$$

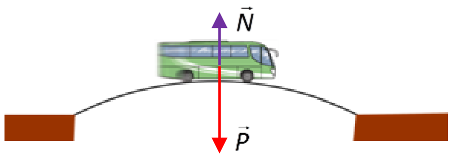
ACTIVIDAD (página 288)

8. Un autobús de 10 t cruza un puente de trazado circular con una curvatura de 50 m de radio. Su velocidad es 72 km/h. ¿Cuál es la reacción de la estructura del puente al paso del autobús? Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

Pasamos la masa y la velocidad a unidades del sistema internacional:

$$m = 10\ \cancel{t} \cdot \frac{1000\ \text{kg}}{1\ \cancel{t}} = 10\,000\ \text{kg}; \quad v = 72 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 20\ \text{m/s}$$

La fuerza centrípeta es la fuerza resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el autobús en ese punto: el peso y la normal.



$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_N \quad \Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{N} = m \cdot \vec{a}_N$$

Tomamos sentido positivo hacia el centro de curvatura, de modo que coincida con la dirección y el sentido de la aceleración.

$$P - N = m \cdot a_N$$

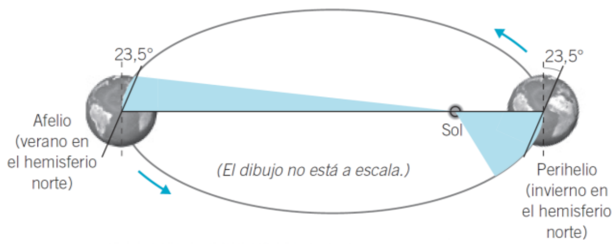
Despejamos, sustituimos y operamos:

$$N = P - m \cdot a_N = m \cdot g - m \cdot \frac{v^2}{R} = m \cdot \left(g - \frac{v^2}{R}\right) = 10\,000\ \text{kg} \cdot \left(9{,}8\ \text{m/s}^2 - \frac{(20\ \text{m/s})^2}{50\ \text{m}}\right) = \mathbf{18\,000\ N}$$

ACTIVIDADES (página 289)

9. Teniendo en cuenta las leyes de Kepler, explica con la ayuda de un dibujo en qué parte de su órbita alrededor del Sol (afelio o perihelio) se encuentra la Tierra en el invierno y en el verano si se cumple que en el hemisferio norte el periodo otoño-invierno dura seis días menos que el de primavera-verano.

De acuerdo con la segunda ley de Kepler, la velocidad lineal es mayor en el perihelio que en el afelio. Seis días menos es más rápido. Desde el equinoccio de otoño al equinoccio de primavera, el planeta recorre la órbita próxima al perihelio. El hemisferio norte de la Tierra está en posición opuesta al Sol cuando se mueve en la zona del perihelio.



10. La distancia media de Marte al Sol es 1,468 veces la de la Tierra al Sol. Encuentra el número de años terrestres que dura un año marciano.

De acuerdo con la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = k\,(\text{constante})$$

Por tanto:

$$\frac{T_T^2}{a_T^3} = \frac{T_M^2}{a_M^3} = \text{cte.}$$

Además, sabemos que $a_M = 1{,}468 \cdot a_T$. Igualando:

$$\frac{T_T^2}{a_T^3} = \frac{T_M^2}{a_M^3} \quad \Rightarrow \quad T_M^2 = \frac{a_M^3}{a_T^3} \cdot T_T^2 = \frac{(1{,}468 \cdot a_T)^3}{a_T^3} \cdot T_T^2 = \frac{1{,}468^3 \cdot \cancel{a_T^3}}{\cancel{a_T^3}} \cdot T_T^2 = 1{,}468^3 \cdot T_T^2$$

$$T_M = 1{,}468^{3/2} \cdot T_T = 1{,}468^{3/2} \cdot T_T = 1{,}779 \cdot T_T$$

Por tanto, hay **1,779 años terrestres** en cada año marciano.

ACTIVIDAD (página 290)

11. Calcula el vector momento angular del minutero de un reloj. Supongamos que es un reloj en una torre y que los 250 g masa de la aguja se concentran a 90 cm del eje. Indica su dirección y sentido.

Calculamos la velocidad angular. Como se trata del minutero de un reloj, el periodo (tiempo que tarda en dar una vuelta) es una hora:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1\ \text{h}} = \frac{2\pi}{3600\ \text{s}} = \frac{\pi}{1800}\ \text{rad/s}$$

Calculamos la velocidad lineal:

$$v = \omega \cdot r = \frac{\pi}{1800}\ \text{rad/s} \cdot 0{,}9\ \text{m} = \frac{\pi}{2000}\ \text{m/s}$$

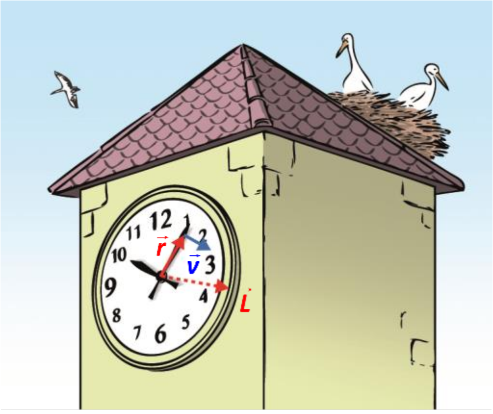
Calculamos el momento angular. El movimiento es circular, por tanto, *r*, tiene la dirección del radio de la circunferencia, y *v*, al ser tangente a la misma, hace que sean vectores mutuamente perpendiculares en todo momento:

$$L = r \cdot m \cdot v \cdot \text{sen}\ \alpha = r \cdot m \cdot v \cdot \text{sen}\ 90° = r \cdot m \cdot v$$

Sustituimos los datos:

$$L = 0{,}9\ \text{m} \cdot 0{,}25\ \text{kg} \cdot \frac{\pi}{2000}\ \text{m/s} = \mathbf{3{,}53 \cdot 10^{-4}\ m^2 \cdot kg/s}$$

La dirección de *L* será perpendicular a la esfera del reloj, es decir, **horizontal**, y el sentido **hacia** dentro de la esfera del reloj.



ACTIVIDADES (página 291)

12. Venus describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Su velocidad en el afelio es de 3,48 · 10⁴ m/s, y en el perihelio es de 3,53 · 10⁴ m/s. Si la distancia que separa el afelio del perihelio es de 1,446 UA, determina a qué distancia se encuentra Venus del Sol en cada una de esas posiciones. Dato: 1 UA = 1,496 · 10¹¹ m.

En los vértices de la elipse el radio vector, $\vec{r}$, y la tangente, dirección del vector $\vec{v}$, son perpendiculares. El seno del ángulo recto es la unidad. El momento angular se conserva:

$$L_{af.} = L_{per.} \quad \Rightarrow \quad \cancel{m} \cdot v_{af.} \cdot r_{af.} = \cancel{m} \cdot v_{per.} \cdot r_{per.} \quad \Rightarrow \quad v_{af.} \cdot r_{af.} = v_{per.} \cdot r_{per.}$$

Podemos conseguir otra ecuación con las mismas incógnitas:

$$r_{\text{af.}} + r_{\text{per.}} = d$$

$$d = 1,446 \text{ UA} = 1,446 \cancel{\text{UA}} \cdot \frac{1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}}{1 \cancel{\text{UA}}} = 2,1632 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Planteando un sistema de ecuaciones con las dos igualdades y resolviendo en las dos incógnitas pedidas:

$$\left.\begin{array}{r} r_{\text{af.}} + r_{\text{per.}} = d \\ v_{\text{af.}} \cdot r_{\text{af.}} = v_{\text{per.}} \cdot r_{\text{per.}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r_{\text{per.}} = \dfrac{v_{\text{af.}}}{v_{\text{af.}} + v_{\text{per.}}} \cdot d = \dfrac{3,48 \cdot \cancel{10^4 \text{ m/s}}}{(3,48 + 3,53) \cdot \cancel{10^4 \text{ m/s}}} \cdot 2,1632 \cdot 10^{11} \text{ m} = \mathbf{1,0738 \cdot 10^{11} \text{ m}} \\ r_{\text{af.}} = \dfrac{v_{\text{per.}}}{v_{\text{af.}} + v_{\text{per.}}} \cdot d = \dfrac{3,53 \cdot \cancel{10^4 \text{ m/s}}}{(3,48 + 3,53) \cdot \cancel{10^4 \text{ m/s}}} \cdot 2,1632 \cdot 10^{11} \text{ m} = \mathbf{1,0893 \cdot 10^{11} \text{ m}} \end{array}\right.$$

13. **Si la órbita de un planeta es elíptica, ¿en qué punto de su trayectoria tendrá velocidad lineal máxima? ¿Y si la órbita fuera circular?**

Una conclusión de la segunda ley de Kepler es que el momento angular de los planetas es constante:

$$L_{\text{afelio}} = L_{\text{perihelio}} \quad \Rightarrow \quad \cancel{m} \cdot v_{\text{afelio}} \cdot r_{\text{afelio}} = \cancel{m} \cdot v_{\text{perihelio}} \cdot r_{\text{perihelio}}$$

Si la órbita es elíptica, su velocidad lineal será máxima en el perihelio, ya que ahí la distancia al centro de giro ($r_{\text{perihelio}}$) es menor. Si la órbita fuera circular, su velocidad lineal será la misma en toda la órbita.

ACTIVIDAD (página 292)

14. **La órbita elíptica del cometa Halley alrededor del Sol se acerca hasta 8,75 · 10⁷ km en el perihelio y se aleja del Sol hasta 5,26 · 10⁹ km en el afelio. ¿Dónde es mayor la velocidad? ¿Cuánto vale el cociente de velocidades?**

El momento angular se conserva:

$$L_{\text{afelio}} = L_{\text{perihelio}} \quad \Rightarrow \quad \cancel{m} \cdot v_{\text{afelio}} \cdot r_{\text{afelio}} = \cancel{m} \cdot v_{\text{perihelio}} \cdot r_{\text{perihelio}}$$

$$\frac{v_{\text{perihelio}}}{v_{\text{afelio}}} = \frac{r_{\text{afelio}}}{r_{\text{perihelio}}} = \frac{5,26 \cdot 10^9 \cancel{\text{m}}}{8,75 \cdot 10^7 \cancel{\text{m}}} = \mathbf{60,1}$$

Por lo tanto, la velocidad en el perihelio es 60,1 veces mayor que la velocidad en el afelio.

ACTIVIDAD (página 293)

15. **El semieje mayor de la órbita terrestre mide 1,49 · 10^8 km y la duración de un año es de 365,256 días. ¿Cuál es la masa del Sol? Dato: G = 6,67 · 10^{-11} N · m²/kg².**

Hallamos el periodo:

$$T = 365,256 \cancel{\text{días}} \cdot \frac{24 \cancel{\text{h}}}{1 \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \cancel{\text{h}}} = 3,156 \cdot 10^7 \text{ s}$$

Cuando la Tierra está en órbita alrededor del Sol, $F_G = F_C$:

$$M_T \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_S \cdot M_T}{r^2}$$

Sabiendo que $v = \omega \cdot r = \dfrac{2\pi}{T} \cdot r$, sustituyendo y despejando:

$$\cancel{M_T} \cdot \frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}} = G \cdot \frac{M_S \cdot \cancel{M_T}}{r^2}$$

$$M_S = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \frac{r^3}{G}$$

$$M_S = \left(\frac{2\pi}{3,156 \cdot 10^7\ \text{s}}\right)^2 \cdot \frac{(1,49 \cdot 10^{11}\ \text{m})^3}{6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}} = \mathbf{1,97 \cdot 10^{30}\ kg}$$

ACTIVIDADES (página 294)

16. Calcula la aceleración de la gravedad en la Luna y compárala con la aceleración de la gravedad en la Tierra.

Datos: M_L = 7,35 · 10^{22} kg; R_L = 1740 km; M_T = 5,97 · 10^{24} kg; R_T = 6370 km.

Aplicamos la expresión:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

En la Luna la gravedad es:

$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{R_L^2} = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{7,35 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{(1,74 \cdot 10^6\ \text{m})^2} = \mathbf{1,62\ m/s^2}$$

Comparando ambas:

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{\cancel{G} \cdot \frac{M_L}{R_L^2}}{\cancel{G} \cdot \frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{M_L \cdot R_T^2}{M_T \cdot R_L^2} = \frac{7,35 \cdot 10^{22}\ \cancel{\text{kg}} \cdot (6,37 \cdot 10^6\ \cancel{\text{m}})^2}{5,97 \cdot 10^{24}\ \cancel{\text{kg}} \cdot (1,74 \cdot 10^6\ \cancel{\text{m}})^2} = \mathbf{0,165}$$

17. Un astronauta de 70 kg se pesa en un planeta extrasolar y observa sorprendido que el aparato marca 1030 N. Señala qué afirmaciones son verdaderas:

a) El aparato de medida está mal.

b) La gravedad en ese planeta es 1,5 · *g*.

c) La gravedad en el planeta vale 1030 N/70 kg.

a) **Falso**. El valor del peso depende de la intensidad del campo gravitatorio en el exoplaneta.

b) **Verdadero**:

$$P = m \cdot g' = m \cdot k \cdot g \quad \Rightarrow \quad k = \frac{P}{m \cdot g} = \frac{1030\ \cancel{\text{N}}}{70\ \cancel{\text{kg}} \cdot 9,8\ \cancel{\text{N}}/\cancel{\text{kg}}} = 1,5 \quad \Rightarrow \quad g' = 1,5 \cdot g$$

c) **Verdadero**:

$$P = m \cdot g' \quad \Rightarrow \quad g' = \frac{P}{m} = \frac{1030\ \text{N}}{70\ \text{kg}}$$

ACTIVIDAD (página 295)

18. Al despegar un cohete de 2800 t, sus motores desarrollan una fuerza de 4 · 10^7 N.

a) Calcula la fuerza total que actúa sobre la lanzadera en el despegue.

b) Calcula la aceleración en el momento del despegue.

Dato: g = 9,8 m/s².

a) La fuerza total será la diferencia entre la fuerza que ejercen los motores y el peso:

$$P = m \cdot g = 2800\ \text{t} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 2{,}8 \cdot 10^6\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 2{,}744 \cdot 10^7\ \text{N}$$

$$F_{\text{Total}} = F_{\text{M}} - P \quad \Rightarrow \quad F_{\text{Total}} = F_{\text{M}} - P = 4 \cdot 10^7\ \text{N} - 2{,}744 \cdot 10^7\ \text{N} = \mathbf{1{,}256 \cdot 10^7\ N}$$

b) La aceleración en el despegue es:

$$a = \frac{F_{\text{Total}}}{M} = \frac{1{,}256 \cdot 10^7\ \text{N}}{2{,}8 \cdot 10^6\ \text{kg}} = \mathbf{4{,}49\ m/s^2}$$

ACTIVIDADES (página 296)

19. Un astronauta de 65 kg de masa viaja por el sistema solar. Calcula el valor del campo gravitatorio y el peso del astronauta en la superficie de cada planeta. Datos: G = 6,67 · 10^{-11} N · m^2/kg^2; masas y diámetros de los planetas en la tabla.

	Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno
Masa (kg)	$3{,}30 \cdot 10^{25}$	$4{,}87 \cdot 10^{24}$	$5{,}97 \cdot 10^{24}$	$6{,}42 \cdot 10^{23}$	$1{,}90 \cdot 10^{26}$	$5{,}69 \cdot 10^{26}$	$8{,}70 \cdot 10^{25}$	$1{,}02 \cdot 10^{65}$
Radio órbita (m)	$5{,}79 \cdot 10^{10}$	$1{,}08 \cdot 10^{11}$	$1{,}50 \cdot 10^{11}$	$2{,}28 \cdot 10^{11}$	$7{,}78 \cdot 10^{11}$	$1{,}43 \cdot 10^{12}$	$2{,}87 \cdot 10^{12}$	$4{,}50 \cdot 10^{12}$
Diámetro (km)	4879	12 104	12 756	6794	142 984	120 536	21 118	49 528

Calculamos la aceleración de la gravedad g en cada planeta. Como tenemos el diámetro de cada planeta, dividimos entre dos para conocer su radio:

$$g_{\text{T}} = G \cdot \frac{M_{\text{planeta}}}{R^2_{\text{planeta}}} = G \cdot \frac{M_{\text{planeta}}}{\left(\dfrac{D_{\text{planeta}}}{2}\right)^2} = 4\ G \cdot \frac{M_{\text{planeta}}}{D^2_{\text{planeta}}}$$

Sustituyendo los valores de la tabla para cada planeta:

$$g_{\text{Mercurio}} = 4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{3{,}30 \cdot 10^{25}\ \text{kg}}{\left(4{,}879 \cdot 10^6\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{3{,}7\ N/kg}$$

$$g_{\text{Venus}} = 4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{4{,}87 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{\left(1{,}2104 \cdot 10^7\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{8{,}9\ N/kg}$$

$$g_{\text{Tierra}} = 4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{\left(1{,}2756 \cdot 10^7\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{9{,}8\ N/kg}$$

$$g_{\text{Marte}} = 4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6{,}42 \cdot 10^{23}\ \text{kg}}{\left(6{,}794 \cdot 10^6\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{3{,}7\ N/kg}$$

$$g_{\text{Júpiter}} = 4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}90 \cdot 10^{26}\ \text{kg}}{\left(1{,}42984 \cdot 10^8\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{24{,}8\ N/kg}$$

$$g_{\text{Saturno}} = 4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}69 \cdot 10^{26}\ \text{kg}}{\left(1{,}20536 \cdot 10^8\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{10{,}4\ N/kg}$$

$$g_{\text{Urano}} = 4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{8{,}70 \cdot 10^{25}\ \text{kg}}{\left(2{,}1118 \cdot 10^7\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{8{,}9\ N/kg}$$

$$g_{\text{Neptuno}} = 4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}02 \cdot 10^{26}\ \text{kg}}{\left(4{,}9528 \cdot 10^7\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{11\ N/kg}$$

Calculamos el peso del astronauta en la superficie de cada planeta:

$$P_{\text{planeta}} = m \cdot g_{\text{planeta}}$$

Por tanto:

$$P_{\text{Mercurio}} = 65\ \cancel{\text{kg}} \cdot 3{,}7\ \text{N}/\cancel{\text{kg}} = \mathbf{240{,}5\ N}$$
$$P_{\text{Venus}} = 65\ \cancel{\text{kg}} \cdot 8{,}9\ \text{N}/\cancel{\text{kg}} = \mathbf{578{,}5\ N}$$
$$P_{\text{Tierra}} = 65\ \cancel{\text{kg}} \cdot 9{,}8\ \text{N}/\cancel{\text{kg}} = \mathbf{637\ N}$$
$$P_{\text{Marte}} = 65\ \cancel{\text{kg}} \cdot 3{,}7\ \text{N}/\cancel{\text{kg}} = \mathbf{240{,}5\ N}$$
$$P_{\text{Júpiter}} = 65\ \cancel{\text{kg}} \cdot 24{,}8\ \text{N}/\cancel{\text{kg}} = \mathbf{1612\ N}$$
$$P_{\text{Saturno}} = 65\ \cancel{\text{kg}} \cdot 10{,}4\ \text{N}/\cancel{\text{kg}} = \mathbf{676\ N}$$
$$P_{\text{Urano}} = 65\ \cancel{\text{kg}} \cdot 8{,}9\ \text{N}/\cancel{\text{kg}} = \mathbf{578{,}5\ N}$$
$$g_{\text{Neptuno}} = 65\ \cancel{\text{kg}} \cdot 11\ \text{N}/\cancel{\text{kg}} = \mathbf{715\ N}$$

20. Con los datos del radio medio de la órbita de los planetas calcula el valor del campo gravitatorio en el sistema solar provocado por la masa del Sol. Compara las distancias con el valor del campo.

Datos: $M_S = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; radios de las órbitas en la tabla.

Calculamos el valor del campo gravitatorio en el sistema solar provocado por la masa del Sol:

$$g_{\text{planeta}} = G \cdot \frac{M_{\text{Sol}}}{r^2_{\text{Órbita}}}$$

Sustituimos los datos para cada planeta:

$$g_{\text{Mercurio}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(5{,}79 \cdot 10^{10}\ \text{m})^2} = \mathbf{4 \cdot 10^{-2}\ N/kg}$$
$$g_{\text{Venus}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(1{,}08 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2} = \mathbf{1{,}1 \cdot 10^{-2}\ N/kg}$$
$$g_{\text{Tierra}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(1{,}50 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2} = \mathbf{5{,}9 \cdot 10^{-3}\ N/kg}$$
$$g_{\text{Marte}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(2{,}28 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2} = \mathbf{2{,}6 \cdot 10^{-3}\ N/kg}$$
$$g_{\text{Júpiter}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(7{,}78 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2} = \mathbf{2{,}2 \cdot 10^{-4}\ N/kg}$$
$$g_{\text{Saturno}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(1{,}43 \cdot 10^{12}\ \text{m})^2} = \mathbf{6{,}5 \cdot 10^{-5}\ N/kg}$$
$$g_{\text{Urano}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(2{,}87 \cdot 10^{12}\ \text{m})^2} = \mathbf{1{,}6 \cdot 10^{-5}\ N/kg}$$
$$g_{\text{Neptuno}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(4{,}50 \cdot 10^{12}\ \text{m})^2} = \mathbf{6{,}5 \cdot 10^{-5}\ N/kg}$$

El valor del campo disminuye a medida que aumenta el radio de la órbita.

ACTIVIDADES (página 297)

21. La Estación Espacial Internacional (ISS, por sus siglas en inglés) orbita a una altura de 420 km sobre la superficie terrestre. ¿Cuál es su velocidad de orbitación? ¿Qué tiempo tarda, en horas, minutos y segundos, en completar una órbita? Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg², $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.

Calculamos la velocidad orbital de la ISS situada a una altura, $h = 420$ km $= 4{,}2 \cdot 10^5$ m, sobre la superficie de la Tierra:

$$v_{\text{orbitación}} = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)}} = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{(6{,}37 \cdot 10^6 + 4{,}2 \cdot 10^5)\text{m}}} = \mathbf{7658\,m/s}$$

Calculamos el tiempo que tarda en completar una órbita, es decir, su periodo:

$$\left.\begin{aligned} \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \\ v = \omega \cdot r \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot (R_T + h)}{v_{\text{orbitación}}}$$

Sustituimos los datos:

$$T = \frac{2\pi \cdot (6{,}37 \cdot 10^6 + 4{,}2 \cdot 10^5)\,\cancel{\text{m}}}{7658\,\cancel{\text{m}}/\text{s}} = 5571\ \text{s}$$

Pasamos a horas minutos y segundos:

$$5571\,\cancel{\text{s}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3600\,\cancel{\text{s}}} = 1{,}5475\ \text{h} = 1\ \text{h} + 0{,}5475\ \text{h} = 1\ \text{h} + 0{,}5475\,\cancel{\text{h}} \cdot \frac{60\ \text{min}}{1\,\cancel{\text{h}}} = 1\ \text{h} + 32{,}85\ \text{min}$$

$$1\ \text{h} + 32\ \text{min} + 0{,}85\ \text{min} = 1\ \text{h} + 32\ \text{min} + 0{,}85\,\cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\,\cancel{\text{min}}} = \mathbf{1\ h + 32\ min + 51\ s}$$

22. Ganímedes, el mayor satélite de Júpiter, emplea 7,15 días terrestres en completar su órbita de $1{,}07 \cdot 10^9$ m de radio. ¿Cuál es la masa de Júpiter? Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Expresamos el tiempo que emplea en completar la órbita en segundos:

$$T = 7{,}15\ \cancel{\text{días}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 6{,}18 \cdot 10^5\ \text{s}$$

Las órbitas de los satélites también siguen las leyes de Kepler, cada planeta desempeña el papel del Sol. Por tanto, aplicando la tercera ley de Kepler queda:

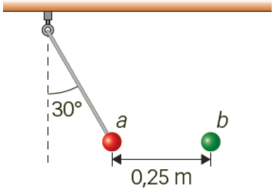
$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_{\text{Júpiter}}}$$

Despejamos la masa y sustituimos los datos:

$$M_{\text{Júpiter}} = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}07 \cdot 10^9\ \text{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot (6{,}18 \cdot 10^5\ \text{s})^2} = \mathbf{1{,}90 \cdot 10^{27}\ kg}$$

ACTIVIDAD (página 299)

23. Dos partículas, *a* y *b*, tienen masas iguales de 1,6 g y cargas de igual valor pero de signos contrarios. La partícula *b* está fija en el espacio, y la partícula *a* está colgada del techo por un hilo de masa despreciable (ver figura). Cuando ambas partículas están separadas una distancia de 0,25 m, la partícula *a* se halla en equilibrio y el hilo forma un ángulo de 30° con la vertical. Calcula:



a) La tensión del hilo.

b) La fuerza de atracción entre las partículas.

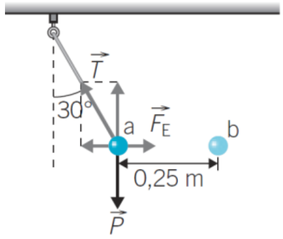
c) El valor absoluto de la carga de las partículas.

Datos: $k = 9 \cdot 10^9$ N · m²/C²; $g = 9{,}8$ m/s².

Planteamos el balance de fuerzas de la masa suspendida. Despreciamos la fuerza de atracción gravitatoria entre las dos partículas porque, como se deduce de la actividad anterior, será mucho menor que la fuerza.

Observa que la tensión debe descomponerse en sus componentes vertical y horizontal, que se calculan relacionando *T* con el ángulo que forma con la vertical (30°):

- Eje vertical: $T \cdot \cos 30° = P = m \cdot g = 0{,}0016\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 0{,}0157\ \text{N}$
- Eje horizontal: $T \cdot \text{sen}\ 30° = F_E = k \cdot \dfrac{q^2}{d^2} = 9 \cdot 10^9\ \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \dfrac{q^2}{(0{,}25\ \text{m})^2}$



a) Obtenemos la tensión del hilo, T, a partir del balance correspondiente al eje vertical:

$$T = \frac{0{,}0157\ \text{N}}{\cos 30°} = \mathbf{0{,}018\ N}$$

b) Conociendo el valor de la tensión T podemos obtener el valor de la fuerza electrostática de atracción de las partículas a partir del balance correspondiente al eje horizontal:

$$F_E = T \cdot \text{sen}\ 30° = 0{,}018\ \text{N} \cdot \text{sen}\ 30° = \mathbf{9{,}05 \cdot 10^{-3}\ N}$$

c) Conociendo el valor de la fuerza electrostática de atracción de las partículas y sabiendo que su carga es idéntica, podemos obtener su valor:

$$F_E = k \cdot \frac{q^2}{d^2} \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{F_E \cdot d^2}{k}} = \sqrt{\frac{9{,}05 \cdot 10^{-3}\ \cancel{\text{N}} \cdot (0{,}25\ \cancel{\text{m}})^2}{9 \cdot 10^9\ \dfrac{\cancel{\text{N}} \cdot \cancel{\text{m}^2}}{\text{C}^2}}} = \mathbf{2{,}5 \cdot 10^{-7}\ C}$$

ACTIVIDADES FINALES (páginas 304)

Dinámica del MAS

24. Calcula la constante k del muelle de un dinamómetro que se alarga 5 cm cuando colgamos de él una pesa de 500 g.

Aplicamos la ley de Hooke teniendo en cuenta que el peso es la fuerza que hace el muelle se alargue:

$$P = -F_e = -(-k \cdot x) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{P}{x} = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{0{,}5\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}{0{,}05\ \text{m}} = \mathbf{98\ N/m}$$

25. Se cuelga de un muelle un cuerpo de 250 g de masa y se observa que se alarga una distancia de 20 cm, ¿cuál es el valor de la constante elástica del muelle? ¿Qué cuerpo hay que colgar para que el muelle se alargue 10 cm?

Aplicamos la ley de Hooke teniendo en cuenta que el peso es la fuerza que hace que el muelle se alargue:

$$F = k \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{m \cdot g}{\Delta x} = \frac{0{,}25\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}{0{,}2\ \text{m}} = \mathbf{12{,}25\ N/m}$$

Conocida la constante elástica del muelle, aplicamos de nuevo la ley de Hooke para calcular el valor de la masa que tendremos que colocar para que el muelle se alargue 10 cm:

$$F = k \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad m \cdot g = k \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad m = \frac{k \cdot \Delta x}{g} = \frac{12{,}25\ \text{N/m} \cdot 0{,}1\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 0{,}125\ \text{kg} = \mathbf{125\ g}$$

Como la deformación del muelle y la fuerza que provoca la deformación son magnitudes directamente proporcionales, si la masa que se coloca se reduce a la mitad, el alargamiento del muelle también es la mitad.

26. De dos resortes con la misma constante elástica k se cuelgan sendos cuerpos con la misma masa. Uno de los resortes tiene el doble de longitud que el otro. ¿El cuerpo vibrará con la misma frecuencia? Razona tu respuesta.

Tenemos: $k = m \cdot \omega^2 = m \cdot (2\pi \cdot f)^2 \Rightarrow f = \sqrt{\dfrac{k}{m \cdot 4\pi^2}}$

Se deduce que la frecuencia depende de la constante elástica y la masa, pero no de la longitud del muelle. Como la constante *k* y la masa de los cuerpos es la misma, la vibración tendrá la misma frecuencia aunque varíe la longitud del resorte.

27. Un bloque de 0,5 kg cuelga del extremo inferior de un resorte de constante elástica $k = 72$ N/m. Al desplazar el bloque verticalmente hacia abajo de su posición de equilibrio comienza a oscilar, pasando por el punto de equilibrio con una velocidad de 6 m/s. Determina la amplitud y la frecuencia angular de oscilación.

Al pasar por el punto de equilibrio, se tiene la velocidad máxima del MAS:

$$v = \omega \cdot A$$

Por otra parte, conocemos el valor de la constante de elasticidad del resorte, que en función de la frecuencia angular puede expresarse como:

$$k = m \cdot \omega^2$$

A partir de este último dato obtendremos el valor de la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{72\text{ N/m}}{0{,}5\text{ kg}}} = \mathbf{12\ rad/s}$$

Por tanto:

$$A = \frac{v}{\omega} = \frac{6\text{ m/s}}{12\text{ rad/s}} = \mathbf{0{,}5\ m}$$

28. Un muelle se deforma 12 cm cuando se cuelga de él una partícula de 2 kg de masa.

a) Determina la constante elástica *k* del muelle.

b) A continuación se separa hacia abajo otros 10 cm de la posición de equilibrio y se deja oscilar en libertad. ¿Cuáles son la frecuencia angular y el periodo de oscilación en estas condiciones?

c) Escribe la ecuación de la posición de la partícula en función del tiempo.

Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

a) Aplicamos la ley de Hooke teniendo en cuenta que el peso es la fuerza que hace que el muelle se alargue:

$$P = -F_e = -(-k \cdot x) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{P}{x} = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{2\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2}{0{,}12\text{ m}} = \mathbf{163{,}\widehat{3}\ N/m}$$

b) Calculamos la frecuencia:

$$k = m \cdot \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{163{,}\widehat{3}\text{ N/m}}{2\text{ kg}}} = \mathbf{9{,}04\ rad/s}$$

Y el periodo:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2\text{ kg}}{163{,}\widehat{3}\text{ N/m}}} = \mathbf{0{,}695\ s}$$

Tanto la frecuencia angular como el periodo de la oscilación son independientes de la amplitud del MAS.

c) Consideramos que el movimiento se inicia en su posición de elongación máxima. Utilizamos la ecuación senoidal del MAS. Del enunciado se deduce que $A = 0{,}1$ m y que para $t = 0$ s, $x = -A$:

$$x = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) \Rightarrow -A = A \cdot \text{sen}\left(9{,}04\text{ rad/s} \cdot 0\text{ s} + \phi_0\right) \Rightarrow \text{sen}\ \phi_0 = -1 \Rightarrow \phi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{x = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) = 0{,}1 \cdot \text{sen}\left(9{,}04 \cdot t + \frac{3\pi}{2}\right)\ \text{m}}$$

29. Un cuerpo de 200 g de masa está en reposo y colgado de un muelle cuya constante elástica es de 5 N/m. Se tira de dicho cuerpo con una fuerza de 0,3 N y se le abandona libremente. Suponiendo ausencia de rozamiento:

a) Calcula la amplitud y la pulsación del movimiento vibratorio. Proporciona la expresión matemática de la ecuación del movimiento vibratorio armónico simple (suponer que en $t = 0$ la fase inicial es $3\pi/2$).

b) Determina los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de dicho movimiento vibratorio.

a) La expresión de la fuerza en función de la elongación es: $F = -k \cdot x$. Cuando se tira del cuerpo para luego liberarlo, se le lleva a su elongación máxima. Conociendo la constante del resorte y la fuerza que se ha aplicado (la fuerza de recuperación será equivalente, pero de sentido contrario), se puede obtener la amplitud resultante:

$$F = -F_e = -(-k \cdot x) \quad \Rightarrow \quad F = k \cdot A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{F}{k} = \frac{0{,}3\text{ N}}{5\text{ N/m}} = 0{,}06\text{ m} = \mathbf{6\ cm}$$

Teniendo que cuenta que:

$$k = m \cdot \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5\text{ N/m}}{0{,}2\text{ kg}}} = \mathbf{5\ rad/s}$$

Con los resultados obtenidos:

$$\boldsymbol{x = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) \quad \Rightarrow \quad x = 6 \cdot \text{sen}\left(5 \cdot t + \frac{3\pi}{2}\right)\ \text{cm}}$$

b) Se calculan los valores solicitados:

$$v_{\text{máx}} = \omega \cdot A = 5\text{ rad/s} \cdot 0{,}06\text{ m} = \mathbf{0{,}3\ m/s}$$
$$a_{\text{máx}} = \omega^2 \cdot A = (5\text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}06\text{ m} = \mathbf{1{,}5\ m/s^2}$$

30. De un resorte de 40 cm de longitud se cuelga un peso de 50 g de masa y, alcanzado el equilibrio, la longitud del resorte es de 45 cm. Se estira con la mano el conjunto masa-resorte 6 cm y se suelta. Obtén:

a) La constante del resorte.

b) La ecuación del MAS que describe el movimiento.

Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

a) Como al colgar la masa el conjunto se ha estirado de 40 a 45 cm, resulta que la masa ha producido una elongación $x = 5$ cm. De acuerdo con la ley de Hooke, obtendremos la constante k a partir del peso:

$$P = -F_e = -(-k \cdot x) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{P}{x} = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{0{,}05\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2}{0{,}05\text{ m}} = \mathbf{9{,}8\ N/m}$$

b) Calculamos la frecuencia angular:

$$k = m \cdot \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9{,}8\text{ N/m}}{0{,}05\text{ kg}}} = \mathbf{14\ rad/s}$$

Consideramos que el movimiento se inicia, $t = 0$ s, en su posición de máxima elongación $x = A$. Describiremos el movimiento mediante una función senoidal:

$$x = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) \quad \Rightarrow \quad A = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot 0 + \phi_0\right) \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\ \phi_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{x = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}06 \cdot \text{sen}\left(14 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m}}$$

31. **Para medir el tiempo construimos un reloj de péndulo formado por una bola metálica unida a una cuerda. Lo hacemos oscilar de manera que en los extremos toque unas láminas metálicas.**

a) **¿Cuál debe ser la longitud de la cuerda si queremos que de un toque al siguiente haya un intervalo de tiempo de 1 s?**

b) **Con el tiempo, es muy probable que la cuerda se deforme y estire. ¿Significa esto que nuestro reloj va más rápido o más lento?**

Dato: suponemos péndulo ideal y g = 9,8 m/s².

a) Si queremos que dé un toque cada segundo y las láminas se colocan a ambos lados, el periodo total de oscilación del péndulo será $T = 2$ s. En el libro del alumno se ha deducido que para un péndulo:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \Rightarrow \quad L = g \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} = 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot \frac{(2\ \text{s})^2}{4\pi^2} = \mathbf{0{,}993\ m}$$

b) La relación entre la longitud del hilo y el periodo de oscilación del péndulo viene dada por la expresión:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

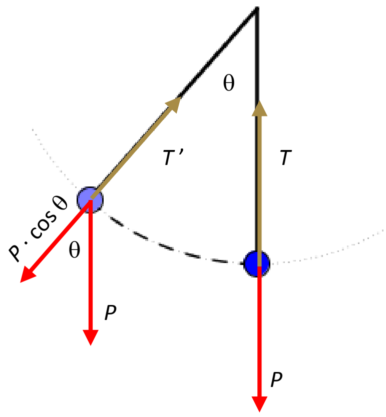
Si L aumenta, aumentará también T y, con esto, será mayor la separación entre toques sucesivos. Esto significa que la velocidad disminuye y el reloj va **más lento**.

Dinámica del movimiento circular

32. **¿Qué condiciones debe cumplir una fuerza para no modificar el módulo de la velocidad cuando actúa sobre un cuerpo?**

Que sea siempre perpendicular a la velocidad. Una fuerza perpendicular a la velocidad solo modifica la dirección de la velocidad, no su módulo.

33. **¿Cuándo es mayor la tensión del hilo de un péndulo en el punto más bajo de su recorrido, cuando está en reposo o cuando se encuentra oscilando?**



- Si el cuerpo está en reposo:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad T - P = 0 \quad \Rightarrow \quad T = P$$

- Si está oscilando y se encuentra en el punto más bajo:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_N \quad \Rightarrow \quad T - P = m \cdot a_N \quad \Rightarrow \quad T = P + m \cdot a_N$$

La aceleración es la de un movimiento circular. Y al pasar por la posición de equilibrio la velocidad es máxima. Y el radio es la longitud del péndulo:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{v_{\text{máx}}^2}{L} \quad \Rightarrow \quad T = m \cdot g + m \cdot \frac{v_{\text{máx}}^2}{L} = m \cdot \left(g + \frac{v_{\text{máx}}^2}{L}\right)$$

- Si está oscilando y no se encuentra en el punto más bajo:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_N \quad \Rightarrow \quad T - P \cdot \cos\theta = m \cdot a_N \quad \Rightarrow \quad T = P \cdot \cos\theta + m \cdot a_N$$

La aceleración es la de un movimiento circular. Y al pasar por una posición cualquiera la velocidad es la máxima multiplicada por el coseno de la fase. El radio sigue siendo la longitud del péndulo:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(v_{\text{máx}} \cdot \cos\theta\right)^2}{L} \quad \Rightarrow \quad T = m \cdot g \cdot \cos\theta + m \cdot \frac{\left(v_{\text{máx}} \cdot \cos\theta\right)^2}{L} = m \cdot \left(g + \frac{v_{\text{máx}}^2 \cdot \cos\theta}{L}\right) \cdot \cos\theta$$

La tensión del hilo es **mayor cuando el péndulo está oscilando** y se encuentra en el punto más bajo de su recorrido.

ACTIVIDADES FINALES (páginas 306)

34. **Calcula la velocidad orbital (media) de la Tierra en su recorrido alrededor del Sol. Expresa el resultado en km/s. Datos: $M_{Sol} = 2 \cdot 10^{30}$ kg; $d_{Tierra\text{-}Sol} = 149{,}6$ millones de km; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².**

Cuando un cuerpo orbita alrededor de otro se cumple:

$$F_C = m \cdot a_N \quad \text{donde} \quad a_N = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad F = M_T \cdot \frac{v^2}{R^2} = M_T \cdot \frac{v^2}{d^2_{\text{Tierra-Sol}}}$$

Aplicando la ley de la gravitación universal:

$$F = G \cdot \frac{M_T \cdot M_S}{d^2_{\text{Tierra-Sol}}}$$

Igualando ambas fuerzas:

$$G \cdot \frac{\cancel{M_T} \cdot M_S}{d^{\cancel{2}}_{\text{Tierra-Sol}}} = \cancel{M_T} \cdot \frac{v^2}{\cancel{d_{\text{Tierra-Sol}}}} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{d_{\text{Tierra-Sol}}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \,\frac{\text{N} \cdot \text{m}^{\cancel{2}}}{\text{kg}^{\cancel{2}}} \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \cancel{\text{kg}}}{1{,}496 \cdot 10^{11}\ \cancel{\text{m}}}} = \sqrt{8{,}917 \cdot 10^{8}\, \frac{\cancel{\text{kg}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m}}{\cancel{\text{kg}}}} = 29\,861{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx \mathbf{30\ km/s}$$

35. **Calcula el periodo de un satélite artificial que sigue una trayectoria circular a 400 km de altura. ¿Cuántas vueltas a la Tierra da el satélite en un día? Datos: $M_{Tierra} = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $R_{Tierra} = 6370$ km; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².**

Teniendo en cuenta el problema anterior, pero ahora la masa es la masa de la Tierra:

$$v^2 = G \cdot \frac{M}{d}, \text{ siendo } d = R_T + h = 6370 \text{ km} + 400 \text{ km} = 6{,}77 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Calculamos la velocidad lineal del satélite:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{d}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\text{ kg}}{6{,}77 \cdot 10^6\text{ m}}} = 7669{,}3 \text{ m/s}$$

El periodo es el tiempo que el satélite tarda en dar una vuelta. Como el módulo de la velocidad es constante, dividimos la longitud de una vuelta entre el tiempo empleado en recorrerla o periodo. Despejando, sustituyendo y operando:

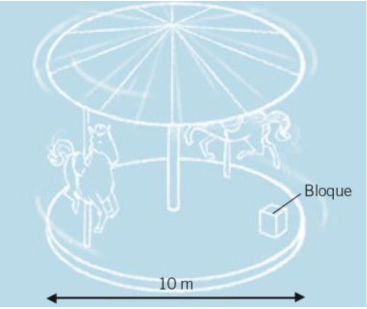
$$v = \frac{2\pi \cdot d}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi \cdot d}{v} = \frac{2\pi \cdot 6{,}77 \cdot 10^6\ \cancel{\text{m}}}{7669{,}3\,\frac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}}} = \mathbf{5546\ s}$$

Y el número de vueltas que da el satélite a la Tierra en un día es:

$$1\ \cancel{\text{día}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\text{ s}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 86\,400\text{ s}$$

$$\text{Número de vueltas} = \frac{86\,400\ \cancel{\text{s}}}{5546\ \cancel{\text{s}}} = \mathbf{15{,}6\ vueltas}$$

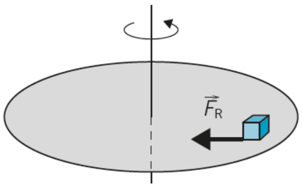
36. **Un carrusel de 10 m de diámetro da una vuelta cada 5 s. Un bloque de madera está colocado sobre el suelo en el borde exterior del carrusel, a 5 m del centro. ¿Cuál debe ser el valor del coeficiente de rozamiento estático para que el bloque no sea lanzado al exterior?**



Como el módulo de la velocidad es constante, dividimos la longitud de una vuelta entre el tiempo que tarda en dar una vuelta (periodo), y calculamos la velocidad lineal:

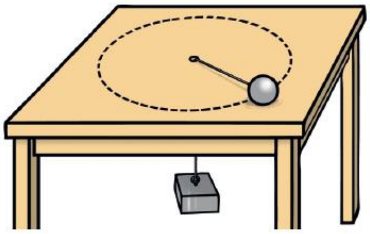
$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} = \frac{2\pi \cdot 5 \text{ m}}{5 \text{ s}} = 6{,}28 \text{ m/s}$$

La fuerza de rozamiento es la fuerza centrípeta que mantiene al bloque girando:



$$F_C = F_R \Rightarrow \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{R} = \mu \cdot \cancel{m} \cdot g \Rightarrow \mu = \frac{v^2}{g \cdot R} = \frac{(6{,}28 \text{ m/s})^2}{9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \text{ m}} = \mathbf{0{,}8}$$

37. **Un cuerpo de masa de 200 g gira en un círculo horizontal de radio 50 cm sobre una mesa horizontal sin rozamiento dando 0,8 vueltas por segundo. El cuerpo está unido, mediante una cuerda que pasa por un orificio situado en el centro de la mesa, a otro cuerpo de masa *m*. ¿Qué valor debe tener *m* para que el sistema esté equilibrado?**



Expresamos la velocidad angular en unidades del SI:

$$\omega = 0{,}8 \text{ rev/s} = 0{,}8 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\text{s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{rev}}} = 1{,}6\pi \text{ rad/s}$$

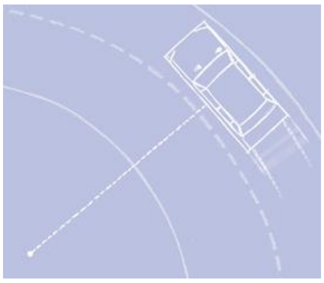
La tensión de la cuerda es la fuerza centrípeta que hace girar la bolita. Para que el sistema se encuentre en equilibrio el peso de la masa que cuelga debe ser igual a la fuerza centrípeta que hace girar a la bolita:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_N \Rightarrow \vec{P} = m_{\text{bolita}} \cdot \vec{a}_N \Rightarrow m \cdot g = m_{\text{bolita}} \cdot \omega^2 \cdot R$$

$$m = \frac{m_{\text{bolita}} \cdot \omega^2 \cdot R}{g} = \frac{0{,}2 \text{ kg} \cdot (1{,}6\pi \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}5 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m/s}^2} = 0{,}258 \text{ kg} = \mathbf{258 \text{ g}}$$

38. **Un vehículo de 1200 kg de masa toma una curva de 50 m de radio con una velocidad de 50 km/h. Halla la mínima fuerza de rozamiento de las ruedas con el asfalto para poder efectuar el giro. Calcula el valor del coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el asfalto.**

Expresamos la velocidad en unidades del SI:



$$v = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 50 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}} = 13{,}\widehat{8} \text{ m/s}$$

Para que el vehículo tome la curva se necesita que actúe una fuerza dirigida hacia el centro de la trayectoria circular. La fuerza de rozamiento de los neumáticos con el suelo es en este caso la fuerza centrípeta, igual al producto de la masa por la aceleración normal.

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_N \Rightarrow \vec{F}_R = m \cdot \vec{a}_N \Rightarrow F_R = m \cdot \frac{v^2}{R} = 1200 \text{ kg} \cdot \frac{(13{,}\widehat{8} \text{ m/s})^2}{50 \text{ m}} = \mathbf{4630 \text{ N}}$$

Recuerda que en la dirección perpendicular al plano el sistema se encuentra en equilibrio, por lo que el valor de la normal se corresponde con el del peso:

$$F_R = \mu \cdot N = \mu \cdot P = \mu \cdot m \cdot g$$

Despejamos el coeficiente de rozamiento y calculamos:

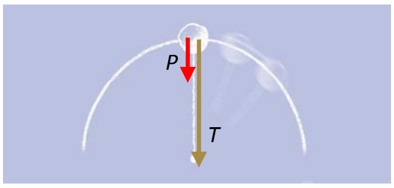
$$\mu = \frac{F_R}{m \cdot g} = \frac{4630\ \text{N}}{1200\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2} = \mathbf{0{,}4}$$

39. Se hace girar un cuerpo de masa 300 g atado al extremo de una cuerda de 60 cm de longitud a una velocidad de 300 rpm en una circunferencia vertical. Halla la tensión de la cuerda en los puntos más alto y más bajo de la trayectoria.

Expresamos la velocidad angular en unidades del SI:

$$\omega = 300\ \text{rpm} = 300 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60\ \text{s}} = 10\pi\ \text{rad/s}$$

En el punto más alto, la suma de las dos fuerzas, peso y tensión, es la fuerza centrípeta responsable de la aceleración normal en dicho punto:

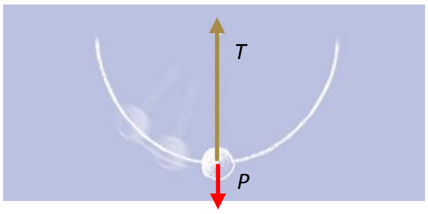


$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_N \quad \Rightarrow \quad \vec{T} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}_N \quad \Rightarrow \quad T + P = m \cdot a_N$$

Despejamos la tension:

$$T = m \cdot a_N - m \cdot g = m \cdot \left(\omega^2 \cdot R - g\right) = 0{,}3\ \text{kg} \cdot \left((10\pi\ \text{rad/s})^2 \cdot 0{,}6\ \text{m} - 9{,}8\ \text{m/s}^2\right) = \mathbf{175\ N}$$

En el punto más bajo la situación es similar, pero ahora la tensión y el peso tienen distinto sentido. La tensión, como la aceleración normal centrípeta, está dirigida hacia arriba y el peso, como siempre, está dirigido hacia abajo.



$$\vec{T} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}_N \quad \Rightarrow \quad T - P = m \cdot a_N$$

Despejamos la tension:

$$T = m \cdot a_N + m \cdot g = m \cdot \left(\omega^2 \cdot R + g\right) = 0{,}3\ \text{kg} \cdot \left((10\pi\ \text{rad/s})^2 \cdot 0{,}6\ \text{m} + 9{,}8\ \text{m/s}^2\right) = \mathbf{181\ N}$$

40. Un coche de masa 1500 kg que se mueve con velocidad constante de 110 km/h toma una curva circular de 90 m de radio.

a) ¿Qué tipo de aceleración lleva?

b) ¿Qué intensidad tiene la fuerza que hay que ejercer sobre el coche para que no se salga de la curva?

c) ¿Qué agente ejerce esta fuerza?

Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 110\ \text{km/h} = 110 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} = 30{,}\widehat{5}\ \text{m/s}$$

a) Lleva aceleración normal.

b) Calculamos la intensidad de la fuerza centrípeta:

$$F_C = m \cdot a_N = m \cdot \frac{v^2}{R} = 1500\ \text{kg} \cdot \frac{(30{,}\widehat{5}\ \text{m/s})^2}{90\ \text{m}} = \mathbf{15\,561\ N}$$

c) La fuerza centrípeta es la fuerza de rozamiento de los neumáticos con el asfalto.

Cinemática de los planetas

41. Enuncia las leyes de Kepler y razona si la velocidad de traslación de un planeta alrededor del Sol es la misma en cualquier punto de la órbita.

1. Todos los planetas se mueven alrededor del Sol siguiendo órbitas elípticas. El Sol está en uno de los focos de la elipse.
2. Los planetas se mueven con velocidad areolar constante; es decir, el vector de posición de cada planeta con respecto al Sol (el radio vector) barre áreas iguales en tiempos iguales. Siendo A el área barrida por el radio vector:

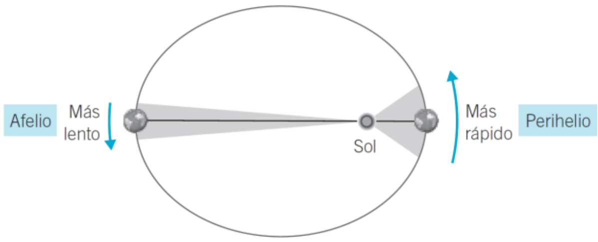
$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \text{cte.}$$

3. Para todos los planetas:

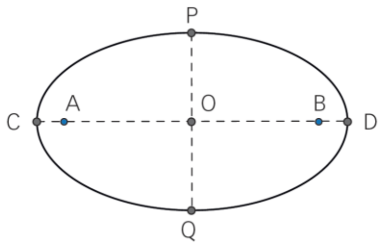
$$\frac{T^2}{a^3} = k\,(\text{constante})$$

Donde a es el semieje mayor de la elipse y T es el periodo del planeta.

Para que se cumpla la segunda ley de Kepler los planetas deben moverse más rápido al estar más cerca del Sol (perihelio), ya que una velocidad areolar constante implica una longitud de arco mayor en ese punto que cuando esté más alejado del Sol para un mismo intervalo de tiempo.



42. En la figura se muestra la trayectoria de un cometa. Indica en tu cuaderno en qué punto se coloca el Sol y dale nombre a los puntos etiquetados con las letras.



- El Sol se sitúa en el punto A o en el punto B.
- Si A es la posición del Sol: C es el perihelio y D es el afelio.
- O es el centro de la órbita.
- P y Q son los vértices menores.

43. El periodo de revolución de Marte alrededor del Sol es de 687 días. Sabiendo que la distancia de la Tierra al Sol es de 150 millones de kilómetros, calcula la distancia de Marte al Sol. (Suponer que las órbitas descritas son circunferencias). Dato: $T_{\text{Tierra}} = 365{,}256$ días.

De acuerdo con la tercera ley de Kepler, todos los planetas que giran alrededor del Sol verifican:

$$\frac{T^2}{r^3} = k \quad \Rightarrow \quad \frac{T_M^2}{r_M^3} = k = \frac{T_T^2}{r_T^3}$$

Igualando, despejando sustituyendo y operando:

$$\frac{T_M^2}{r_M^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \quad \Rightarrow \quad r_M = r_T \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_M}{T_T}\right)^2} = 150 \cdot 10^6\ \text{km} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{687\ \cancel{\text{días}}}{365{,}256\ \cancel{\text{días}}}\right)^2} = 229 \cdot 10^6\ \text{km}$$

Por tanto, la distancia de Marte al Sol es de **229 millones de km**.

ACTIVIDADES FINALES (página 307)

44. **Una partícula se mueve con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado alejándose continuamente de un punto que tomamos como origen del movimiento y en dirección radial. Indica en tu cuaderno su momento angular:**

a) **Es constante.**

b) **Es cero.**

c) **Aumenta indefinidamente.**

Por la definición de momento angular:

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r} \times \vec{p}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|m \cdot \vec{v}\right| \cdot \text{sen } \alpha$$

Si los vectores de $\vec{r}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección y sentido, resulta que forman un ángulo de 0°. Sabemos que sen $0° = 0$ y el resultado es nulo, $L = 0$.

Respuesta correcta: **b**.

45. **Resuelve el ejercicio anterior suponiendo que la partícula se acerca continuamente al origen.**

La única diferencia con respecto al ejercicio anterior es que, en este caso, los vectores forman un ángulo de 180°. Pero, nuevamente, sen $180° = 0$ y el resultado es nulo, $L = 0$.

46. **Una partícula se mueve en un plano con movimiento rectilíneo y uniforme. Demuestra que su momento angular, con respecto a un punto cualquiera de ese plano, va a ser constante.**

El momento angular es constante si no varía con el tiempo.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{r} \times \vec{p})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times (m \cdot \vec{v}) + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\,(m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \times (m \cdot \vec{v}) + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\,(m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d}t} \qquad [1]$$

El vector $m \cdot \vec{v}$ es paralelo a $\vec{v}$. El producto vectorial entre ambos vectores es 0, porque el seno del ángulo que forman es 0, $\vec{v} \times (m \cdot \vec{v}) = \vec{0}$.

Si la partícula se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme, su aceleración es cero, $\vec{a} = 0$. Su masa tampoco varía con el tiempo, $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$. Como consecuencia, el segundo término es nulo:

$$\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}(m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v} + m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right) = \vec{r} \times \left(0 \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{a}\right) = \vec{r} \times \left(m \cdot \vec{0}\right) = \vec{0}$$

Sustituyendo en la expresión [1]:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \times (m \cdot \vec{v}) + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\,(m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

La variación con el tiempo del vector momento angular es nula. Por tanto, es constante.

47. **Escribe la respuesta en tu cuaderno. Si una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales, su momento angular respecto al centro de fuerzas:**

a) Aumenta indefinidamente.

b) Es cero.

c) Permanece constante.

De acuerdo con el teorema del momento angular:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Una fuerza central tiene, en todo momento, la dirección del radio. Si la partícula describe un movimiento cualquiera bajo la acción de esta fuerza, se cumplirá $\vec{r} \times \vec{F} = 0$, por lo que $\vec{L}$ no presentará variación respecto al tiempo, y la respuesta correcta es la **c**, **permanece constante**.

48. Escribe en tu cuaderno la frase correcta. En el movimiento de la Tierra alrededor del Sol:

a) Se conservan el momento lineal y el momento angular.

b) Se conserva el momento lineal y varía el momento angular.

c) Varía el momento lineal y se conserva el momento angular.

d) Varían el momento lineal y el momento angular.

La respuesta correcta es la **c**. Al moverse bajo la acción de fuerzas centrales (gravitatoria), se conserva su momento angular.

Sin embargo, la velocidad lineal con la que se mueve no es constante, por lo que su momento lineal no se conservará. Es un vector que cambia de dirección en cada instante debido a la acción de una aceleración centrípeta, relacionada con la fuerza central. Recuérdese la segunda ley de Kepler: la Tierra se mueve con velocidad areolar constante, por lo que su velocidad en el perihelio será mayor que en el afelio.

49. Escribe la respuesta en tu cuaderno. Las órbitas de los planetas son planas porque:

a) Se mueven con velocidad constante.

b) Se mueven bajo la acción de una fuerza central.

c) Los planetas son restos materiales de una única estrella.

No es verdad que los planetas se muevan con velocidad constante, cambian de dirección y de módulo a lo largo de la órbita. El origen de los materiales que forman los planetas no tiene nada que ver con la forma de su órbita. La respuesta correcta es la **b**, ya que al moverse bajo la acción de una fuerza central su momento angular es constante, y de ello se deriva que las órbitas son planas.

Recuérdese que $\vec{L}$ es en todo momento perpendicular a $\vec{r}$ y $\vec{p}$; para que la dirección de $\vec{L}$ no cambie, $\vec{r}$ y $\vec{p}$ deben definir siempre el mismo plano, lo que obliga a que los planetas describan órbitas planas.

50. Demuestra que para cualquier planeta el producto de su velocidad instantánea en un punto de la trayectoria por el radio vector correspondiente es constante.

Una consecuencia de la segunda ley de Kepler es que los planetas se mueven con momento angular constante. Para dos puntos cualesquiera es el mismo momento angular:

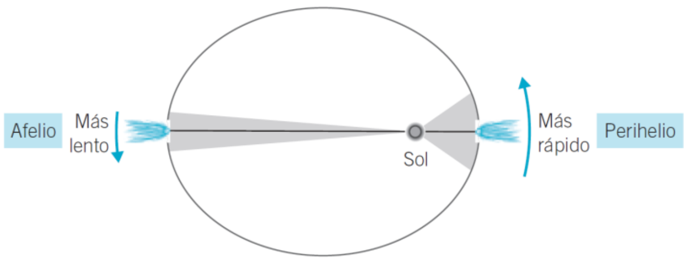
$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_1 \times (m \cdot \vec{v}_1) = \vec{r}_2 \times (m \cdot \vec{v}_2)$$

Es el mismo planeta con la misma masa a lo largo de la órbita. Simplificamos *m*:

$$\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 = \text{cte.}$$

51. Explica por qué los cometas que orbitan elípticamente alrededor del Sol tienen mayor velocidad cuando se encuentran cerca que cuando se encuentran lejos del Sol, considerando el carácter de fuerza central de la fuerza gravitatoria.

En el caso de fuerzas centrales, de acuerdo con la segunda ley de Kepler, el radio vector que une un cometa al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.



Por esto, cuando el cometa está más cerca del Sol, tendrá que recorrer una longitud de arco mayor para abarcar la misma área que la recorrida en el mismo tiempo cuando está alejado del Sol. Para ello debe moverse más rápido.

Dinámica de los planetas

52. Calcula la masa de la Tierra, sabiendo que la Luna tiene un periodo igual a 2,3 · 10⁶ s y se encuentra a una distancia media de la Tierra de 384 400 km. Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Cuando la Luna está en órbita alrededor de la Tierra:

$$F_G = F_C \quad \Rightarrow \quad \cancel{M_L} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} = G \cdot \frac{\cancel{M_L} \cdot M_T}{r^{\cancel{2}}} \quad \Rightarrow \quad v^2 = G \cdot \frac{M_T}{r}$$

Sabiendo que $v = \omega \cdot r = \dfrac{2\pi}{T} \cdot r$, sustituyendo y despejando:

$$\left(\frac{2\pi}{T} \cdot r\right)^2 = G \cdot \frac{M_T}{r} \quad \Rightarrow \quad M_T = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{r^3}{G} = \frac{4\pi^2}{\left(2{,}3 \cdot 10^6\ \text{s}\right)^2} \cdot \frac{\left(3{,}884 \cdot 10^8\ \text{m}\right)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = \mathbf{6{,}35 \cdot 10^{24}\ kg}$$

53. ¿A qué distancia del centro de la Tierra la aceleración de la gravedad vale 4,9 m/s²?

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg.

La aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra vale 9,8 m/s². Como a distancias mayores g decrece, calculamos la distancia a la que $g = 4{,}9$ m/s²:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \quad \Rightarrow \quad R_T + h = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{g}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{4{,}9\ \text{m/s}^2}} = 9{,}015 \cdot 10^6\ \text{m}$$

$$R_T + h = \mathbf{9015\ km}$$

54. Una persona de 70 kg se encuentra sobre la superficie de la Tierra. ¿Cuál es su peso? Y cuál sería su peso si:

a) La masa de la Tierra se reduce a la mitad.

b) El radio de la Tierra se reduce a la mitad.

c) El radio y la masa de la Tierra se reducen a la mitad.

Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

$$P = F_G = m \cdot g$$

En la Tierra:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = g_0 = 9{,}8\ \text{m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad P = 70\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 686\ \text{N}$$

a) Si $M'_T = \dfrac{M_T}{2}$:

$$g' = G \cdot \frac{\frac{M_T}{2}}{R_T^2} = \frac{g_0}{2} \quad \Rightarrow \quad P' = m \cdot g' = m \cdot \frac{g_0}{2} = \frac{P}{2} = \frac{686\ \text{N}}{2} = \mathbf{343\ N}$$

b) Si $R'_T = \dfrac{R_T}{2}$:

$$g'' = G \cdot \frac{M_T}{\left(\frac{R_T}{2}\right)^2} = G \cdot \frac{M_T}{\frac{R_T^2}{4}} = 4 \cdot g_0 \quad \Rightarrow \quad P'' = m \cdot g'' = m \cdot 4 \cdot g = 4 \cdot P = 4 \cdot 686\ \text{N} = \mathbf{2744\ N}$$

c) Si $M'_T = \dfrac{M_T}{2}$ y $R'_T = \dfrac{R_T}{2}$

$$g''' = G \cdot \frac{\frac{M_T}{2}}{\left(\frac{R_T}{2}\right)^2} = G \cdot \frac{\frac{M_T}{2}}{\frac{R_T^2}{4}} = 2 \cdot g_0 \quad \Rightarrow \quad P''' = m \cdot g''' = m \cdot 2 \cdot g = 2 \cdot P = 2 \cdot 686\ \text{N} = \mathbf{1372\ N}$$

55. Calcula la aceleración de la gravedad en un punto que está situado a una distancia de la Tierra equivalente a la distancia a la que se encuentra la Luna (unos 60 radios terrestres). Dato: $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

Llamamos g_0 al valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra y suponemos que vale $9{,}8\ \text{m/s}^2$:

$$g = G \cdot \frac{M}{(R_T + h)^2} = G \cdot \frac{M}{(R_T + 60 \cdot R_T)^2} = G \cdot \frac{M}{61^2 \cdot R_T^2} = \frac{g_0}{61^2}$$

$$g = \frac{9{,}8\ \text{m/s}^2}{3721} = 2{,}63 \cdot 10^{-3}\ \text{m/s}^2 = \mathbf{2{,}63\ mm/s^2}$$

56. La Luna describe una órbita casi circular en torno a la Tierra en 27,3 días. Calcula:

a) La distancia media entre los centros de la Tierra y la Luna.

b) El valor de la fuerza con que la Tierra atrae a la Luna y con que la Luna atrae a la Tierra, sabiendo que la masa de la Luna es 1/81 veces la de la Tierra.

c) Si en la Luna se deja caer un objeto desde una altura de 10 m, ¿con qué velocidad llegará al suelo?

d) ¿Con qué velocidad llegará al suelo si se deja caer desde una altura de 10 m de la Tierra?

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 4 \cdot R_L$; $R_T = 6370$ km.

$$27{,}3\ \cancel{\text{días}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 2{,}36 \cdot 10^6\ \text{s}$$

a) Cuando la Luna está en órbita alrededor de la Tierra:

$$F_G = F_C \quad \Rightarrow \quad \cancel{M_L} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} = G \cdot \frac{\cancel{M_L} \cdot M_T}{r^{\cancel{2}}} \quad \Rightarrow \quad v^2 = G \cdot \frac{M_T}{r}$$

Sabiendo que $v = \omega \cdot r = \dfrac{2\pi}{T} \cdot r$, sustituyendo y despejando:

$$\left(\frac{2\pi}{T} \cdot r_L\right)^2 = G \cdot \frac{M_T}{r_L}$$

$$r_L = \sqrt[3]{G \cdot M_T \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^{-2}} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot \left(\frac{2{,}36 \cdot 10^6\ \text{s}}{2\pi}\right)^2} = \mathbf{3{,}83 \cdot 10^8\ m}$$

b) En este caso:

$$F_T = G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{r_L^2} = G \cdot \frac{M_T \cdot \frac{M_T}{81}}{r_L^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{\left(5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}\right)^2}{81 \cdot \left(3{,}83 \cdot 10^8\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{2{,}00 \cdot 10^{20}\ N}$$

La fuerza con que la Tierra atrae a la Luna es igual y de sentido contrario a la fuerza con que la Luna atrae a la Tierra.

c) El cuerpo que cae tendrá un movimiento uniformemente acelerado. Vendrá determinado por las ecuaciones:

$$v = v_0 + a \cdot t; \quad y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Suponemos que $v_0 = 0$ y que el origen de tiempos y espacios está en el momento y en el punto en que se inicia el movimiento. La aceleración será en cada caso la de la gravedad en la Luna; utilizando un sistema de referencia cartesiano, tendrá signo negativo.

Trabajamos en unidades del SI. Para una altura de 10 m será:

$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{(R_L + h)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{\dfrac{5,97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{81}}{\left(\dfrac{6,37 \cdot 10^6\ \text{m}}{4} + 10\ \text{m}\right)^2} = 1,94\ \text{m/s}^2$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g_L \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{-2 \cdot (-10\ \text{m})}{1,94\ \text{m/s}^2}} = 3,21\ \text{s}$$

Por tanto:

$$v_L = -g_L \cdot t = -1,94\ \text{m/s}^2 \cdot 3,21\ \text{s} = \mathbf{-6,23\ m/s}$$

El signo negativo indica que está descendiendo.

d) Las consideraciones son las mismas que en el caso anterior. Calculamos el valor de g en ese punto; como antes, es muy similar al valor en la superficie:

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5,97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{\left(6,37 \cdot 10^6\ \text{m} + 10\ \text{m}\right)^2} = 9,813\ \text{m/s}^2$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g_L \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{-2 \cdot (-10\ \text{m})}{9,813\ \text{m/s}^2}} = 1,43\ \text{s}$$

Por tanto:

$$v_T = -g_T \cdot t = -9,813\ \text{m/s}^2 \cdot 1,43\ \text{s} = \mathbf{-14,02\ m/s}$$

El signo negativo indica que está descendiendo.

57. Júpiter está rodeado de una serie de lunas que giran en torno a él de forma similar a como los planetas giran alrededor del Sol. Completa la tabla en tu cuaderno para conocer los datos orbitales de algunas lunas de Júpiter.

Nombre	**Radio orbital (10^6 m)**	**Periodo (días)**
Ío	**421,6**	**1,769**
Europa		**3,551**
Ganimedes	**1070**	
Calisto	**1882**	**16,689**

De acuerdo con la tercera ley de Kepler, todos los planetas que giran alrededor de un mismo planeta verifican:

$$\frac{T^2}{r^3} = k$$

Por tanto:

$$\frac{T_I^2}{r_I^3} = \frac{T_E^2}{r_E^3} = \frac{T_G^2}{r_G^3} = \text{cte.}$$

Igualando:

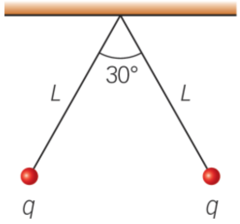
$$\frac{T_E^2}{r_E^3} = \frac{T_I^2}{r_I^3} \quad \Rightarrow \quad r_E = r_I \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_E}{T_I}\right)^2} = 421,6 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{3,551\ \cancel{\text{días}}}{1,769\ \cancel{\text{días}}}\right)^2} = \mathbf{670,9 \cdot 10^6\ m}$$

Y para Ganimedes:

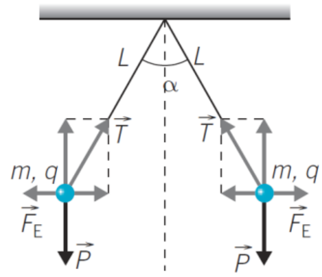
$$\frac{T_G^2}{r_G^3} = \frac{T_I^2}{r_I^3} \quad \Rightarrow \quad T_G = T_I \cdot \sqrt{\left(\frac{r_G}{r_I}\right)^3} = 1,769\ \text{días} \cdot \sqrt{\left(\frac{1070 \cdot \cancel{10^6\ \text{m}}}{421,6 \cdot \cancel{10^6\ \text{m}}}\right)^3} = \mathbf{7,152\ días}$$

Cargas eléctricas suspendidas

58. Dos esferas, de masa $m = 50$ g y con carga q, cada una, se suspenden del mismo punto mediante hilos de masa despreciable y longitud $L = 0{,}25$ m, bajo la gravedad terrestre. ¿Cuál debe ser el valor de la carga q para que, en equilibrio, los hilos formen entre sí un ángulo de 30°? Datos: $g = 9{,}8$ m/s²; $k = 9 \cdot 10^9$ N · m²/C².



Planteamos el balance de fuerzas para cada una de las cargas suspendidas y en equilibrio.



- Eje vertical:

$$T \cdot \cos\theta = P = m \cdot g$$

- Eje horizontal:

$$T \cdot \text{sen}\,\theta = F_E = k \cdot \frac{|q \cdot q|}{d^2}$$

La separación entre las cargas es $d = 2 \cdot L \cdot \text{sen}\,\theta$. El ángulo es:

$$\theta = \frac{\alpha}{2} = \frac{30°}{2} = 15°$$

Para calcular la carga, dividimos miembro a miembro y sustituimos los datos que tenemos, expresando las magnitudes en unidades del SI:

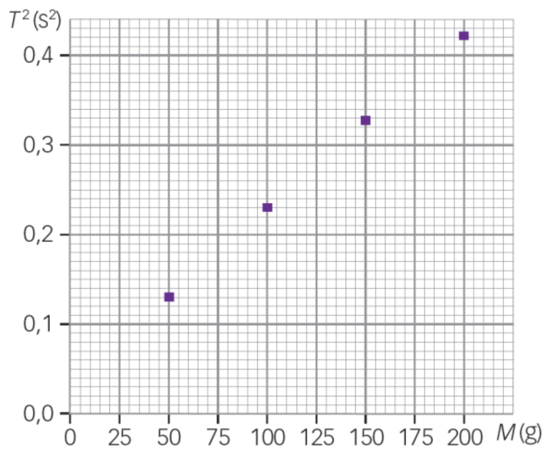
$$\frac{\cancel{T} \cdot \cos\theta}{\cancel{T} \cdot \text{sen}\,\theta} = \frac{m \cdot g}{k \cdot \frac{q^2}{d^2}} \Rightarrow \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \frac{(2 \cdot L \cdot \text{sen}\,\theta)^2 \cdot m \cdot g}{k \cdot q^2} \Rightarrow q^2 = \frac{\text{sen}\,\theta \cdot (2 \cdot L \cdot \text{sen}\,\theta)^2 \cdot m \cdot g}{k \cdot \cos\theta}$$

$$q = \sqrt{\frac{\text{sen}\,\theta \cdot (2 \cdot L \cdot \text{sen}\,\theta)^2 \cdot m \cdot g}{k \cdot \cos\theta}} = \sqrt{\frac{\text{sen}\,15° \cdot (2 \cdot 0{,}25\ \text{m} \cdot \text{sen}\,15°)^2 \cdot 0{,}05\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}{9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cdot \cos 15°}} = 4{,}94 \cdot 10^{-7}\ \text{C}$$

$$q = \mathbf{0{,}49\ \mu C}$$

Ampliación (página 308)

59. Disponemos de un muelle y de cuatro masas, cada una de ellas de valor M. Las masas se suspenden sucesivamente del muelle acumulando su valor. Al tomar medidas de pequeñas oscilaciones, anotamos en cada caso el periodo de oscilación, T. Tras la representación de los resultados experimentales según se muestra en la gráfica.



a) Determina la constante elástica del muelle.

b) Justifica físicamente el comportamiento observado.

a) Tenemos en cuenta la ecuación de una recta y la relación entre el periodo y la constante elástica del muelle, $y = a \cdot x + b$, donde a es la pendiente y b la ordenada en el origen:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}} \Rightarrow \begin{cases} T^2 = \dfrac{4\pi^2}{k} \cdot M + 0 \\ y = a \cdot x + b \end{cases}$$

Elaboramos una tabla que recoja los puntos conocidos de la gráfica, denominando x a M (kg) e y a T^2 (s²):

	x	**y**	**x · y**	**x²**
	0,05	0,13	0,0065	0,0025
	0,10	0,23	0,0230	0,0100
	0,15	0,33	0,0495	0,0225
$n = 4$	0,20	0,43	0,0860	0,0400
Sumas	0,50	1,12	0,1650	0,0750
Promedios	0,125	0,28		

La pendiente de la recta de regresión lineal:

$$a = \frac{n \cdot \sum x \cdot y - \sum x \cdot \sum y}{n \cdot \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \frac{4 \cdot 0{,}1650 - 0{,}50 \cdot 1{,}12}{4 \cdot 0{,}0750 - \left(0{,}50\right)^2} = 2$$

La ordenada en el origen de la recta de regresión lineal:

$$b = \langle y \rangle - a \cdot \langle x \rangle = 0{,}28 - 2 \cdot 0{,}125 = 0{,}03$$

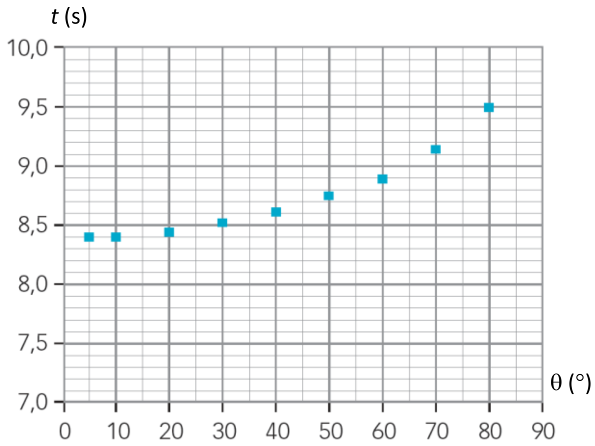
La recta de regresión lineal es $y = 2 \cdot x + 0{,}03$. Comparando con las variables originales:

$$\frac{4\,\pi^2}{k} = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4\,\pi^2}{2} = 2\,\pi^2 = \mathbf{19{,}74}\,\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{m}}$$

La ordenada en el origen debería resultar nula pero no es así. Esto ocurre porque la masa del muelle no es despreciable, la masa del muelle también está oscilando.

b) Cuando se estira el muelle, aparece una fuerza recuperadora que le obliga a realizar un movimiento armónico simple. Como se ha deducido en el libro del alumno, el cuadrado del periodo de oscilación es directamente proporcional a la masa sujeta al resorte.

60. Un astronauta realiza un viaje espacial a un planeta del sistema solar. Durante su aproximación determina, con sus aparatos de telemetría, el radio de dicho planeta, que resulta ser $R = 3{,}37 \cdot 10^6$ m. Una vez en la superficie del planeta utiliza un péndulo simple, formado por una pequeña esfera de plomo y un hilo de 25 cm de longitud, y realiza el análisis de sus oscilaciones, variando la amplitud angular de la oscilación, θ, y midiendo, en cada caso, el tiempo, t, correspondiente a 5 oscilaciones completas del péndulo. El astronauta representa los valores experimentales según la gráfica:



a) Comenta físicamente los resultados mostrados en la figura.

b) Determina la masa del planeta.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

a) El periodo del péndulo se relaciona con su longitud y el valor de g en el punto donde oscila:

$$T = 2\,\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

De acuerdo con la deducción que se recoge en el libro del alumno, el periodo es independiente de la amplitud angular siempre que esta no exceda de 15°, ya que, para valores más altos, no se cumple la simplificación $\theta \simeq \operatorname{sen} \theta$

En la gráfica se observa que el tiempo que tarda el péndulo en dar cinco oscilaciones (y, por tanto, su periodo) aumenta a medida que aumenta la amplitud angular. Para amplitudes mayores de 15° el movimiento del péndulo deja de ser armónico.

b) En la parte fiable de la gráfica leemos que el periodo del péndulo es:

$$T = \frac{\text{Tiempo}}{\text{Número de oscilaciones}} = \frac{8{,}4\ \text{s}}{5\ \text{oscilaciones}} = 1{,}68\ \text{s}$$

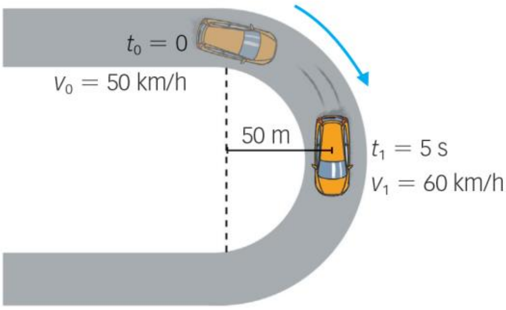
Con este dato calculamos g en la superficie del planeta:

$$g = \frac{4\,\pi^2}{T^2} \cdot L = \frac{4\,\pi^2}{(1{,}68\text{ s})^2} \cdot 0{,}25\text{ m} = 3{,}5\text{ m/s}^2$$

Como el valor de g en la superficie del planeta es:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{g \cdot R^2}{G} = \frac{3{,}5\text{ m/s}^2 \cdot (3{,}37 \cdot 10^6\text{ m})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = \mathbf{5{,}95 \cdot 10^{23}\ kg}$$

61. **Un coche de 1100 kg acelera justo al entrar a una curva, de manera que su velocidad aumenta de 50 a 60 km/h en un tiempo de 5 segundos.**



a) **Calcula la fuerza normal, la fuerza tangencial y la fuerza total en el vehículo cuando este está a mitad de la curva.**

b) **Haz un esquema con las fuerzas.**

Expresamos la velocidad en unidades del SI.

$$v_0 = 50\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\text{ m}}{1\,\cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}} = 13{,}\widehat{8}\text{ m/s}$$

$$v_1 = 60\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\text{ m}}{1\,\cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}} = 16{,}\widehat{6}\text{ m/s}$$

La aceleración tangencial del coche es:

$$a_T = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t} = \frac{16{,}\widehat{6}\text{ m/s} - 13{,}\widehat{8}\text{ m/s}}{5\text{ s}} = 0{,}\widehat{5}\text{ m/s}^2$$

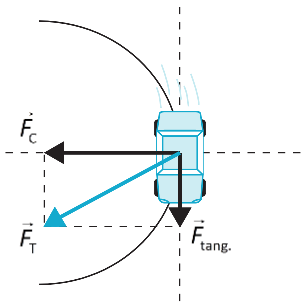
a) Hallamos la fuerza normal, la tangencial y la total en la mitad de la curva:

$$F_C = m \cdot \frac{v^2}{R} = 1100\text{ kg} \cdot \frac{(16{,}\widehat{6}\text{ m/s})^2}{50\text{ m}} = 6111{,}\widehat{1}\text{ N} \simeq \mathbf{6111\,N}$$

$$F_{\text{tang.}} = m \cdot a_T = 1100\text{ kg} \cdot 0{,}\widehat{5}\text{ m/s}^2 = 611{,}\widehat{1}\text{ N} \simeq \mathbf{611\,N}$$

$$F_T = \sqrt{F_C^2 + F_{\text{tang.}}^2} = \sqrt{(6111{,}\widehat{1}\text{ N})^2 + (611{,}\widehat{1}\text{ N})^2} = 6141{,}59\text{ N} \simeq \mathbf{6142\,N}$$

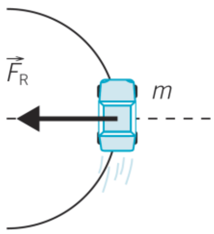
b) Respuesta gráfica:



62. **Explica por qué es más fácil que un coche derrape cuando toma una curva con una velocidad elevada. Haz un esquema con las fuerzas que actúan cuando el coche toma una curva.**

La fuerza responsable del movimiento circular cuando un coche toma una curva es la fuerza de rozamiento entre los neumáticos y la calzada, y va dirigida hacia el centro de la curva.

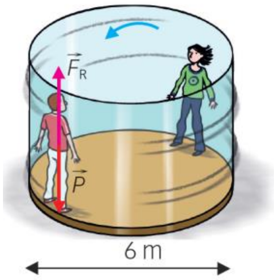
Cuanto más cerrada es una curva y mayor es la velocidad con que se toma, mayor es la a_N y más grande es la fuerza que se precisa.



Si la calzada está mojada o la curva es muy cerrada, la fuerza de rozamiento puede ser insuficiente y el coche derrapa.

$$F_R = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

63. Una atracción de un parque de atracciones consiste en un cilindro vertical giratorio (3 m de radio) en cuya pared interior se colocan las personas con la espalda apoyada en la pared. Al girar rápidamente, un operario retira el suelo de la atracción y las personas quedan adheridas a la pared. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².



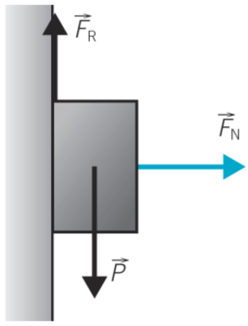
a) Calcula la velocidad mínima que debe llevar el cilindro para que las personas no caigan, si el coeficiente de rozamiento estático con la pared es $\mu_e = 0{,}3$.

b) Calcula la velocidad angular del cilindro.

c) ¿Cuántas vueltas da cada persona en un minuto?

a) Las personas quedan pegadas a la pared sin caerse, si la fuerza de rozamiento es igual al peso:

$$F_R = \mu \cdot N, \text{ donde } N = m \cdot \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad F_R = P \quad \Rightarrow \quad \mu_e \cdot \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{R} = \cancel{m} \cdot g$$



Despejamos la velocidad y sustituimos:

$$v = \sqrt{\frac{R \cdot g}{\mu_e}} = \sqrt{\frac{3 \text{ m} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{0{,}3}} = \mathbf{9{,}90\ m/s}$$

b) La velocidad angular se calcula:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{9{,}90 \text{ m/s}}{3 \text{ m}} = \mathbf{3{,}30\ rad/s}$$

c) Para calcular el número de vueltas, en primer lugar hallamos el ángulo recorrido en 60 s y sustituimos:

$$\varphi = \omega \cdot t = 3{,}30 \text{ rad/s} \cdot 60 \text{ s} = 198 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{198 \cancel{\text{rad}}}{2\pi \cancel{\text{rad}} \text{/vuelta}} = \mathbf{31{,}5\ vueltas}$$

64. ¿Cuántas veces es mayor el peso de un cuerpo que la fuerza centrípeta a que está sometido en la superficie de la Tierra, en el ecuador? Datos: $R_E = 6\,378$ km; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg.

El peso de un cuerpo es la fuerza con que la Tierra lo atrae. Utilizamos unidades del SI:

$$P = F_G = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot m}{\left(6{,}378 \cdot 10^6 \text{ m}\right)^2} = 9{,}789 \cdot m \qquad [1]$$

Para calcular la fuerza centrípeta tenemos en cuenta que el cuerpo que está en la superficie de la Tierra sobre el ecuador tiene un movimiento de rotación idéntico al de la Tierra, es decir, con un periodo de 1 día. Utilizamos unidades del SI:

$$1 \cancel{\text{día}} \cdot \frac{24 \cancel{\text{h}}}{1 \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \cancel{\text{h}}} = 86\,400 \text{ s}$$

$$F_C = m \cdot \frac{v^2}{R_E} = m \cdot \frac{(\omega \cdot R_E)^2}{R_E} = m \cdot \omega^2 \cdot R_E = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot R_E = m \cdot \left(\frac{2\pi}{86\,400 \text{ s}}\right)^2 \cdot 6{,}378 \cdot 10^6 \text{ m} = 0{,}0337 \cdot m \qquad [2]$$

Relacionando las expresiones [1] y [2]:

$$\frac{P}{F_C} = \frac{9{,}789 \cdot \cancel{m}}{0{,}0337 \cdot \cancel{m}} \simeq \mathbf{290}$$

65. **Rea y Titán son dos satélites de Saturno que tardan, respectivamente, 4,52 y 15,9 días terrestres en recorrer sus órbitas en torno a dicho planeta. Sabiendo que el radio medio de la órbita de Rea es 5,27 · 10⁸ m, calcula el radio medio de la órbita de Titán y la masa de Saturno. Dato: G = 6,67 · 10⁻¹¹ N · m² · kg⁻².**

Teniendo en cuenta la tercera ley de Kepler para ambos satélites:

$$\frac{T_T^2}{r_T^3}=\frac{T_R^2}{r_R^3} \Rightarrow r_T=r_R\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{T_T}{T_R}\right)^2}=5{,}27\cdot10^8\ \text{m}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{15{,}9\ \cancel{\text{días}}}{4{,}52\ \cancel{\text{días}}}\right)^2}=\mathbf{1{,}22\cdot10^9\ m}$$

Para calcular la masa de Saturno estudiamos el sistema formado por este planeta y uno de sus satélites, por ejemplo, Rea. Cuando el satélite está en órbita alrededor de Saturno:

$$F_C=F_G \Rightarrow \cancel{m_R}\cdot\frac{v_R^2}{\cancel{r_R}}=G\cdot\frac{M_{Sat}\cdot\cancel{m_R}}{r_R^{\cancel{2}}} \Rightarrow v_R^2=G\cdot\frac{M_{Sat}}{r_R}$$

Sabiendo que $v_R=\omega\cdot r_R=\frac{2\pi}{T_R}\cdot r_R$, sustituyendo y despejando:

$$\left(\frac{2\pi}{T_R}\right)^2\cdot r_R^2=G\cdot\frac{M_S}{r_R} \Rightarrow M_S=\left(\frac{2\pi}{T_R}\right)^2\cdot\frac{r_R^3}{G}$$

Teniendo en cuenta los datos de Rea, expresados en unidades SI:

$$4{,}52\ \cancel{\text{día}}\cdot\frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}}\cdot\frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}}=390\,528\ \text{s}$$

$$M_S=\left(\frac{2\pi}{390\,528\ \text{s}}\right)^2\cdot\frac{\left(5{,}27\cdot10^8\ \text{m}\right)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}}=5{,}682\cdot10^{26}\ \frac{\cancel{\text{m}^3}\cdot\text{kg}^{\cancel{2}}}{\left(\cancel{\text{kg}}\cdot\frac{\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{s}^2}}\right)\cdot\cancel{\text{m}^2}\cdot\cancel{\text{s}^2}}=\mathbf{5{,}68\cdot10^{26}\ kg}$$

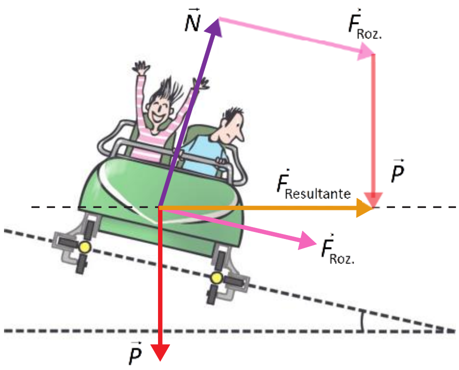
FÍSICA EN TU VIDA (página 310)

INTERPRETA

1. **Haz un esquema en tu cuaderno de las fuerzas ejercidas sobre un vehículo en una curva con peralte. ¿Hacia dónde va dirigida la aceleración normal que sufre el vehículo? Dibújala.**

En una curva con peralte actúan las siguientes fuerzas sobre el vehículo:

- El peso.
- La fuerza de rozamiento.
- La fuerza normal.



La aceleración normal va dirigida hacia el centro de la curva. La obtenemos al aplicar la segunda ley de Newton. La resultante de todas las fuerzas es un vector en la dirección del eje Y:

$$\sum\vec{F}=m\cdot\vec{a}_N$$

2. **¿Una curva más cerrada necesitará un ángulo de peralte mayor o menor?**

Suponiendo la velocidad constante. Como podemos deducir, de la expresión de la velocidad máxima en la curva, despejando el radio en función del ángulo de inclinación del peralte:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{R \cdot g \cdot \frac{\text{sen } \alpha + \mu_e \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_e \cdot \text{sen } \alpha}} \Rightarrow R = \frac{v_{\text{máx}}^2}{g} \cdot \frac{\cos \alpha - \mu_e \cdot \text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha + \mu_e \cdot \cos \alpha}$$

Podemos plantear el problema a la inversa. ¿Cómo varía el radio con el ángulo? Haciendo la derivada:

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{v_{\text{máx}}^2}{g} \cdot \frac{1 + \mu_e^2}{(\text{sen } \alpha + \mu_e \cdot \cos \alpha)^2}$$

No encontramos que la variación del radio de curvatura respecto del peralte es siempre un número negativo. Esto significa que, considerando la velocidad constante, si el ángulo aumenta, el radio disminuye y viceversa.

Así, una curva más cerrada, radio menor, necesita un ángulo de peralte más inclinado, ángulo mayor.

3. **Calcula la velocidad máxima a la que un vehículo puede tomar una curva de $R = 100$ m si $\alpha = 15°$ y $\mu_e = 0{,}7$. Repite el cálculo para un suelo mojado ($\mu_e = 0{,}35$). Dato: $g = 9{,}8$ m/s².**

Sustituyendo en la expresión de la velocidad máxima y operando:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{100 \text{ m} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{\text{sen } 15° + 0{,}7 \cdot \cos 15°}{\cos 15° - 0{,}7 \cdot \text{sen } 15°}} = \mathbf{34{,}17 \text{ m/s}}$$

Repetimos el cálculo para el caso del suelo mojado:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{100 \text{ m} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{\text{sen } 15° + 0{,}35 \cdot \cos 15°}{\cos 15° - 0{,}35 \cdot \text{sen } 15°}} = \mathbf{25{,}85 \text{ m/s}}$$

REFLEXIONA

4. **¿Qué ocurre en carreteras mojadas? ¿Cómo varía la velocidad máxima «segura» en las curvas? ¿Es entonces el peralte igual de eficiente o varía la velocidad máxima con que puede tomarse la curva en condiciones de seguridad?**

En las carreteras mojadas varía el coeficiente de rozamiento (disminuye). Como hemos comprobado en la actividad anterior, en las carreteras mojadas disminuye la velocidad máxima segura para el vehículo. Para 15° se reduce la velocidad máxima al 75 % del valor en seco, suponiendo que el coeficiente de rozamiento se reduce a la mitad.

También puede verse que sin peralte, $\alpha = 0°$, el cambio de carretera seca a mojada es más acusado. Suponiendo el caso de que el coeficiente de rozamiento se reduce a la mitad, la velocidad máxima se reduce en un 70 %.

OPINA

5. **¿Qué otras maneras se te ocurren para aumentar la seguridad de los conductores en las curvas?**

Los conductores deben disminuir su velocidad antes de llegar a una curva, frenando y reduciendo la marcha. Nunca se debe frenar ya dentro de la curva, ya que se puede perder el control del vehículo, corriendo el riesgo de un deslizamiento, vuelco y posterior salida de vía.

Al salir de la curva se girará con suavidad el volante para enderezar la dirección al mismo tiempo que se aumenta progresivamente la aceleración, cambiando a marchas más largas para adquirir la velocidad normal.

11

Trabajo y energía

Trabajo y energía

11

PARA COMENZAR (página 311)

- **¿Qué transformaciones sufre la energía en un parque eólico?**

  En un parque eólico la energía cinética del viento se transforma en energía cinética de rotación del alternador. En el interior de este se transforma en energía eléctrica.

- **¿Qué problemas ves en la utilización de coches eléctricos capaces de recargar sus baterías durante la noche gracias a la energía eólica?**

  Uno de los problemas es que no en todos los lugares hay viento suficiente para aprovechar su energía cinética en la recarga de baterías. Y en los lugares en los que los hay, no siempre sopla con la misma intensidad. La velocidad del viento depende de la diferencia de presión atmosférica, siendo más intenso en las borrascas (isobaras juntas) que en los anticiclones (isobaras separadas). Por tanto, habría que diseñar sistemas de almacenamiento que eviten la falta de abastecimiento con la atmósfera estable.

PRACTICA (página 313)

1. **Señala el tipo de energía que tiene principalmente:**

a) **Un vaso de agua hirviendo.**
b) **El depósito de gasolina de un coche.**
c) **Las microondas de una red wifi.**
d) **Un muelle comprimido.**
e) **Un camión en movimiento.**

a) Energía térmica.
b) Energía química.
c) Energía radiante.
d) Energía potencial.
e) Energía cinética.

2. **¿Está realizando trabajo una persona que espera parada sosteniendo una maleta?**

No. Si no hay desplazamiento, no se realiza trabajo.

3. **Explica brevemente las transformaciones de energía que se producen en:**

a) **Una central térmica de combustibles fósiles.**
b) **Una central hidráulica.**

a) Central térmica.
- Entrada de combustible.
- La energía obtenida en la combustión se emplea en calentar el agua.
- El vapor mueve la turbina.
- El movimiento de la turbina se transmite a un alternador, que genera la corriente eléctrica.

b) Central hidráulica.
- Se construye un embalse en el curso de un río que sirve para acumular agua y disponer de ella de forma regular.
- El paso del agua hace girar una turbina.
- El alternador transforma esta energía mecánica en electricidad de bajo voltaje.

ACTIVIDADES (página 318)

4. Calcula el trabajo que realiza la fuerza peso cuando un cuerpo de 3 kg de masa cae desde una altura de 10 m. Dato: g = 9,8 m/s².

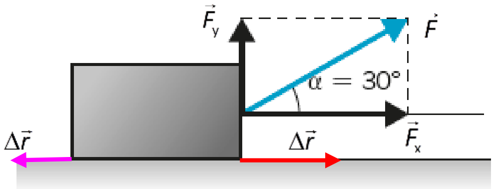
El trabajo que realiza la fuerza peso:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta y \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \Delta y \cdot \cos\alpha$$

En este caso el peso es paralelo a la dirección de movimiento, por tanto, $\alpha = 0°$. Sustituimos los datos y resolvemos:

$$W = 3\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 \cdot 10\text{ m} \cdot \cos 0° = \mathbf{294\ J}$$

5. Una fuerza de 100 N que forma un ángulo de 30° con la horizontal tira de un cuerpo. Si el cuerpo se desplaza 2,6 m a lo largo del plano horizontal, calcula el trabajo realizado por esta fuerza. Si la fuerza de rozamiento es de 1,2 N, calcula también el trabajo realizado por el rozamiento.



Observa que solo la fuerza paralela al desplazamiento, $\left|\vec{F}_x\right| = F \cdot \cos\alpha$, realiza trabajo:

$$W_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta x \cdot \cos\alpha = 100\text{ N} \cdot 2{,}6\text{ m} \cdot \cos 30° = \mathbf{225\ J}$$

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es:

$$W_{F_R} = \vec{F}_R \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta x \cdot \cos\alpha = 1{,}2\text{ N} \cdot 2{,}6\text{ m} \cdot \cos 180° = \mathbf{-3{,}12\ J}$$

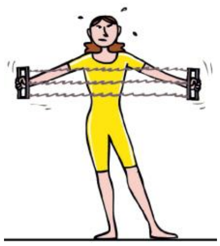
6. Razona si realizan trabajo las personas del dibujo:

a) Mantiene 150 kg a una altura de 2 m durante 4 s.

b) Mantiene estirado el resorte durante 10 s.

c) La patinadora de 60 kg se desliza 10 m sin rozamiento a velocidad constante.

a) 

b) 

c) 

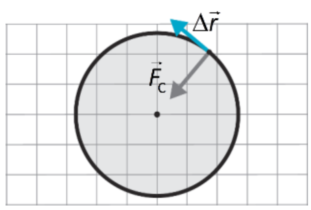
a) No. No hay desplazamiento.

b) No. No hay desplazamiento.

c) No. La fuerza peso es perpendicular al desplazamiento, cos 90° = 0.

7 Un cuerpo se mueve con movimiento circular y uniforme. ¿Realiza trabajo la fuerza responsable de este movimiento? ¿Por qué?

No. Como podemos ver en la figura, la fuerza centrípeta es perpendicular al desplazamiento.



ACTIVIDAD (página 319)

8. ¿Qué objeto tiene más energía cinética: un coche de 1200 kg de masa que se mueve con una velocidad de 80 km/h o un proyectil de 15 kg disparado con una velocidad de 200 m/s?

Pasamos la velocidad del coche a unidades del SI:

$$v_0 = 80\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 22,\widehat{2}\ \text{m/s}$$

Coche: $$E_{\text{C,coche}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1200\ \text{kg} \cdot (22,\widehat{2}\ \text{m/s})^2 = 296\,296\ \text{J}$$

Proyectil: $$E_{\text{C,proyectil}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 15\ \text{kg} \cdot (200\ \text{m/s})^2 = 300\,000\ \text{J}$$

Puede verse por los resultados que tiene **más energía cinética el proyectil**.

ACTIVIDADES (página 321)

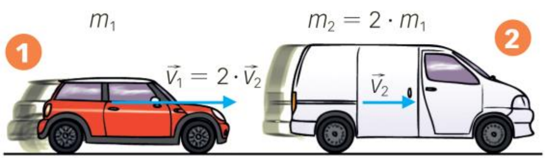
9. Una partícula α, ${}^4_2\text{He}^{2+}$, penetra en una región donde otras cargas eléctricas ejercen sobre ella una fuerza constante de $5 \cdot 10^{-14}$ N. ¿Qué variación de energía cinética se produce en la partícula después de recorrer 3 cm?

La variación de la energía cinética es igual al trabajo ejercido por las fuerzas eléctricas:

$$W = \Delta E_{\text{C}}$$

Por tanto: $$\Delta E_{\text{C}} = F \cdot \Delta x \cdot \cos\alpha = 5 \cdot 10^{-14}\ \text{N} \cdot 3 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot \cos 0° = \mathbf{1,5 \cdot 10^{-15}\ J}$$

10. Observa el dibujo e indica qué vehículo tiene más energía cinética:

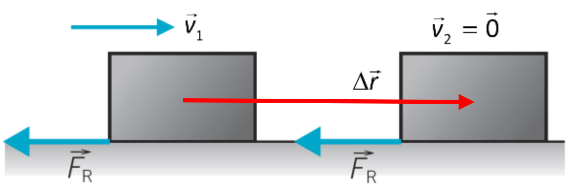


Para el coche: $$E_{\text{C,coche}} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2$$

Para la furgoneta: $$E_{\text{C,furgoneta}} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot (\cancel{2} \cdot m_1) \cdot \left(\frac{v_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot E_{\text{C,coche}}$$

Tiene más energía cinética el coche.

11. Un cuerpo de 0,5 kg de masa se mueve por una superficie horizontal a 5 m/s y se detiene tras recorrer 10 m. Halla la fuerza de rozamiento.



Aplicando el teorema de la energía cinética, $W = \Delta E_{\text{C}} = E_{\text{C},2} - E_{\text{C},1}$, y teniendo en cuenta que la única fuerza que actúa es la del rozamiento, $\vec{F}_R$. Como $E_{\text{C},2} = 0$, entonces el trabajo de la fuerza de rozamiento es $W_{\text{R}} = 0 - E_{\text{C},1}$.

$$F_{\text{R}} \cdot \Delta r \cdot \cos 180° = -\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{R}} = \frac{-m_1 \cdot v_1^2}{2 \cdot \Delta r \cdot \cos 180°} = \frac{-0,5\ \text{kg} \cdot (5\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 10\ \text{m} \cdot \cos 180°} = \mathbf{0,625\ N}$$

12. **Calcula la energía cinética en cada caso.**

Prestaciones	Fórmula 1	Moto GP	Rally
Vel. máxima (km/h)	315	288	234
Masa (kg)	500	130	1200
Energía cinética			

En todos los casos, para pasar una velocidad de km/h a m/s se divide entre 3,6.

$$E_{C,F1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 500 \text{ kg} \cdot \left(\frac{315}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = \mathbf{1,91 \cdot 10^6 \text{ J}}$$

$$E_{C,Moto} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 130 \text{ kg} \cdot \left(\frac{288}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = \mathbf{4,16 \cdot 10^5 \text{ J}}$$

$$E_{C,Rally} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1200 \text{ kg} \cdot \left(\frac{234}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = \mathbf{2,56 \cdot 10^6 \text{ J}}$$

ACTIVIDADES (página 323)

13. **Calcula la energía potencial de una maceta de 2 kg de masa colocada en la terraza de un edificio a 20 m de altura. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².**

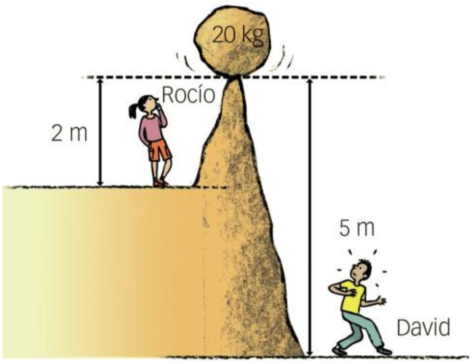
La energía potencial es: $E_P = m \cdot g \cdot h = 2 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ m} = \mathbf{392 \text{ J}}$

14. **Calcula la energía potencial de una lámina de cristal de 80 kg que está en un andamio situado a 12 m del suelo. ¿Qué le puede ocurrir si no se sujeta con seguridad? Justifícalo.**

La energía potencial es: $E_P = m \cdot g \cdot h = 80 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 12 \text{ m} = \mathbf{9408 \text{ J}}$

Si no se sujeta con seguridad, se puede caer. En la caída pierde su energía potencial, pasando esta a energía cinética. Al llegar al suelo se detiene. La energía cinética que tenía se emplea en romper los enlaces entre algunos átomos y moléculas. La lámina de cristal pierde la cohesión y se rompe.

15. **Rocío opina que la energía potencial de la piedra del dibujo es de 392 J, y David calcula que vale 980 J. ¿Quién tiene razón? Justifica tu respuesta. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².**



Ambos tienen razón, depende del sistema de referencia que se elija. Haciendo el cálculo que haría cada uno de los personajes.

- Desde la posición de David:

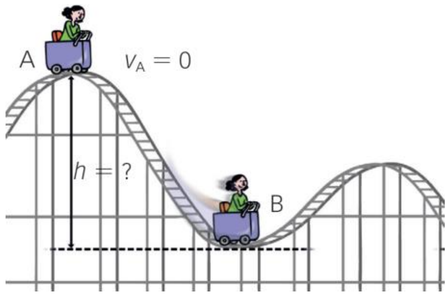
$$E_P = m \cdot g \cdot h_1 = 20 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \text{ m} = \mathbf{980 \text{ J}}$$

- Desde la posición de Rocío:

$$E_P = m \cdot g \cdot h_1 = 20 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 2 \text{ m} = \mathbf{392 \text{ J}}$$

ACTIVIDAD (página 324)

16. **Observa el dibujo del margen y contesta.**



a) **¿A qué altura hay que elevar el carrito para que al pasar por el punto más bajo la velocidad sea de 20 m/s?**

b) **¿Y si se duplica la masa del carrito?**

Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

a) A partir del principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{M,A} - E_{M,B} \Rightarrow E_{C,A} + E_{P,A} = E_{C,B} - E_{P,B}$$

Teniendo en cuenta que al principio la velocidad es nula, $v_A = 0$:

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{m} \cdot v_A^2 + m \cdot g \cdot h_A = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 + m \cdot g \cdot h_B$$

$$\cancel{m} \cdot g \cdot (h_A - h_B) = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_B^2$$

$$(h_A - h_B) = h = \frac{v_B^2}{2 \cdot g}$$

Sustituyendo y operando:

$$h = \frac{(20\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2} = \mathbf{20{,}41\ m}$$

b) La masa no influye en el valor de la velocidad. En el apartado a se ve que la masa se simplifica en uno de los pasos intermedios. Esto solo ocurre si no hay rozamiento.

ACTIVIDADES (página 325)

17. Deja caer un balón de baloncesto, una pelota de tenis y una bola saltarina desde 1 metro de altura y anota la altura a la que rebota cada una. Calcula la E_P inicial y la E_P final en cada caso.

a) ¿Cuál es más elástica?

b) ¿Qué ha pasado con la energía «perdida»?

Actividad práctica.

a) La energía potencial sería cada vez más pequeña para cada objeto. La pelota saltarina de goma es más elástica, es decir, conserva mejor la energía en cada bote.

b) La energía «perdida» se ha transformado en energía térmica, y un muy pequeño porcentaje, en energía sonora.

18. Un paracaidista desciende con velocidad constante.

a) ¿Qué ocurre con su energía potencial?

b) ¿En qué se transforma?

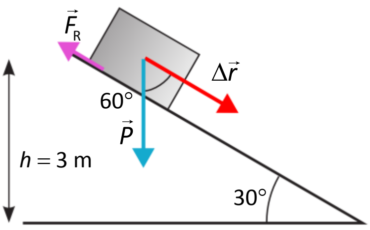
a) Va disminuyendo con el tiempo a medida que cae.

b) Se transforma en energía térmica debido a la fuerza de rozamiento del paracaídas con el aire.

19. Se deja caer una caja de 2 kg desde la parte superior de un plano inclinado de 3 m de altura que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Si la fuerza de rozamiento entre el cuerpo y el plano es de 2 N, calcula la velocidad de la caja al final del plano, cuando ha recorrido 6 m. Dato: $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

A partir del teorema de la energía cinética.

$$W = \Delta E_C \quad \Rightarrow \quad W_P + W_R = E_{C,\text{fin}} - E_{C,\text{ini}}$$



$$P \cdot \Delta x \cdot \cos 60° + F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180° = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - 0$$

$$\Delta x \cdot (m \cdot g \cdot \cos 60° - F_R) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta x \cdot (m \cdot g \cdot \cos 60° - F_R)}{m}}$$

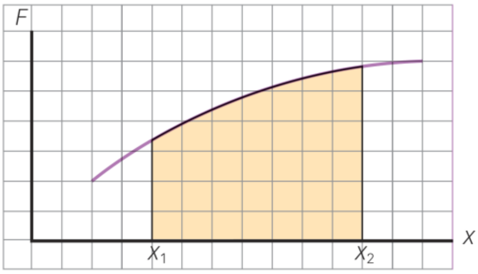
Sustituyendo los datos:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6\ \text{m} \cdot (2\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot \cos 60° - 2\ \text{N})}{2\ \text{kg}}} = \mathbf{6{,}84\ \frac{m}{s}}$$

ACTIVIDADES FINALES (página 328)

Trabajo

20. Observa la figura y di qué representa el área sombreada.



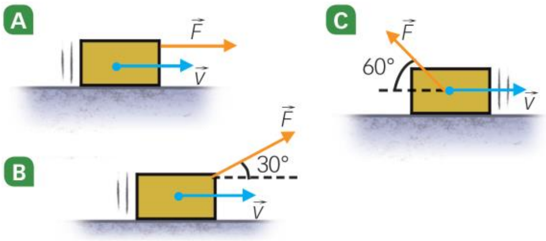
a) El trabajo realizado por una fuerza constante.

b) El trabajo realizado por una fuerza que no es constante.

c) No representa ningún trabajo, ya que la fuerza no es constante.

La respuesta correcta es la **b)**. Representa el trabajo de una fuerza cuyo módulo varía con la posición (no constante).

21. Indica cuál de las tres fuerzas realiza más trabajo.

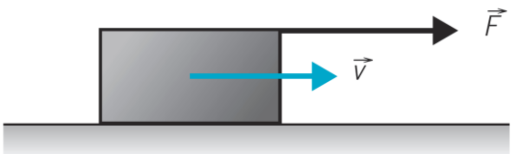


El trabajo se calcula así:

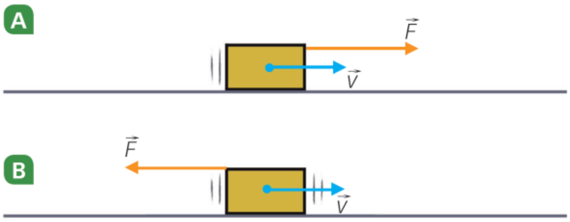
$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta x \cdot \cos\alpha$$

Donde α es el ángulo que forman los vectores fuerza y su desplazamiento.

El trabajo de una fuerza es mayor si la fuerza es paralela al desplazamiento: $\alpha = 0°$ y $\cos 0° = 1$. Por tanto, se realiza más trabajo en el **caso A**.



22. Indica si las fuerzas dibujadas realizan trabajo.



Sí, ambas fuerzas son paralelas al desplazamiento y, como son iguales, realizan el mismo trabajo. El trabajo de la A es positivo, y el de la B es negativo.

23. Una piedra gira en un plano vertical atada a una cuerda. Valora la veracidad de las frases.

a) La tensión de la cuerda no realiza trabajo.

b) La tensión de la cuerda sí realiza trabajo.

c) Necesitamos conocer el valor de la tensión para decir si hay trabajo o no.

a) **Verdadera**. La tensión de la cuerda es una fuerza perpendicular a la velocidad, $\vec{v} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ y, por tanto, no realiza trabajo: $W = \vec{T} \cdot \Delta\vec{r} = T \cdot \Delta x \cdot \cos 90° = 0$.

b) **Falsa**. La tensión de la cuerda es una fuerza perpendicular a la velocidad, $\vec{v} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ y, por tanto, no realiza trabajo: $W = \vec{T} \cdot \Delta\vec{r} = T \cdot \Delta x \cdot \cos 90° = 0$.

c) **Falsa**. La tensión de la cuerda es una fuerza perpendicular a la velocidad: $\vec{v} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ y, por tanto, no realiza trabajo independientemente de la intensidad de la tensión: $W = \vec{T} \cdot \Delta\vec{r} = T \cdot \Delta x \cdot \cos 90° = 0$.

24. Un tractor tira de un carro de 400 kg con una fuerza de 800 N (para vencer el rozamiento), recorriendo 15 m. Una grúa levanta el mismo carro a lo alto de un edificio de 15 m. Indica si son verdaderas o falsas estas frases.

a) Los dos realizan el mismo trabajo.

b) El tractor realiza un trabajo de 12 000 J, y la grúa, de 58 800 J.

c) Es imposible que el tractor mueva un carro que pesa 3920 N con una fuerza de 800 N.

d) El tractor no realiza trabajo porque no sube el carro ni un solo metro.

Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

$$W_{tractor} = \vec{F}_R \cdot \Delta\vec{r} = F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 0° = 800\ \text{N} \cdot 15\ \text{m} \cdot 1 = 12\,000\ \text{J}$$
$$W_{grúa} = \vec{P} \cdot \Delta\vec{r} = P \cdot \Delta x \cdot \cos 0° = m \cdot g \cdot h \cdot 1 = 400\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 15\ \text{m} = 58\,800\ \text{J}$$

a) **Falsa**. Se ve que no coindicen los valores del trabajo.

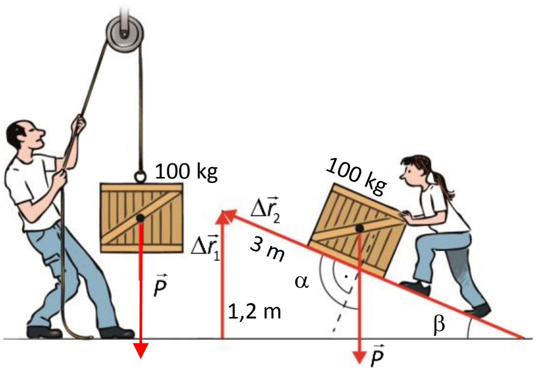
b) **Verdadera**. Es el resultado de los cálculos.

c) **Falsa**. El tractor debe vencer la fuerza de rozamiento, no la fuerza peso.

d) **Falsa**. Sí realiza trabajo, contra la fuerza de rozamiento.

25. Se eleva una caja de 100 kg a una altura de 120 cm del suelo. Indica el trabajo que se realiza al subirla verticalmente y al ayudarse de una tabla de 3 m de longitud. ¿En qué caso se hace más fuerza?

Dato: $g = 9{,}8$ m/s².



- En el primer caso se trata de vencer la fuerza del peso en un desplazamiento contra del sentido del peso

$$W_1 = \vec{P} \cdot \Delta\vec{r}_1 = m \cdot g \cdot \Delta r_1 \cdot \cos 180°$$

Sustituimos los datos:

$$W_1 = 100\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}2\ \text{m} \cdot -1 = -1176\ \text{J}$$

El resultado es negativo, pues estamos calculando el trabajo que hace la fuerza del peso. Una fuerza externa que eleve la caja, la tensión de la cuerda, hace un trabajo positivo.

$$W_T = \mathbf{1176\ J}$$

- En el segundo caso se trata de vencer la fuerza del peso en un desplazamiento a lo largo del plano inclinado.

$$W_2 = \vec{P} \cdot \Delta\vec{r}_2 = m \cdot g \cdot \Delta r_2 \cdot \cos \alpha$$

Observando la relación entre ángulos:

$$\cos \alpha = \cos(90 + \beta) = -\text{sen}\ \beta$$

Sustituimos los datos:

$$W_2 = -m \cdot g \cdot \Delta r_2 \cdot \text{sen}\ \beta = -100\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 3\ \text{m} \cdot \frac{1{,}2}{3} = -1176\ \text{J}$$

El resultado es negativo, pues estamos calculando el trabajo que hace la fuerza del peso. Una fuerza externa que eleve la caja, el empuje de la operaria, hace un trabajo positivo.

$$W_E = \mathbf{1176\ J}$$

Al comparar los dos resultados, se ve que se hace **el mismo trabajo** tanto en un caso como en el otro.

26. Un vehículo de 1200 kg circula con velocidad constante por una carretera recta y horizontal. Si la fuerza de tracción del motor es de $1{,}5 \cdot 10^4$ N, el coeficiente de rozamiento cinemático es 0,3 y recorre 100 m, halla el trabajo realizado por cada una de las fuerzas y el trabajo total. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

Calculamos el trabajo de la fuerza aplicada por el motor:

$$W_F = \vec{F}_R \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta x \cdot \cos \alpha = F \cdot \Delta x \cdot \cos 0° = 1{,}5 \cdot 10^4\ \text{N} \cdot 100\ \text{m} \cdot 1 = \mathbf{1{,}5 \cdot 10^6\ J}$$

Calculamos el trabajo de la fuerza de rozamiento:

$$W_R = \vec{F}_R \cdot \Delta\vec{r} = F_R \cdot \Delta x \cdot \cos \alpha = \mu \cdot m \cdot g \cdot \Delta x \cdot \cos 180° = 0{,}3 \cdot 1200\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 100\ \text{m} \cdot (-1) = \mathbf{-3{,}5 \cdot 10^5\ J}$$

El trabajo total:

$$W = W_F + W_R = 1{,}5 \cdot 10^6\ \text{J} - (-3{,}5 \cdot 10^5\ \text{J}) = \mathbf{1{,}15 \cdot 10^6\ J}$$

27. **En un momento dado un cuerpo que se desliza por una superficie horizontal tiene una velocidad de 10 m/s. Si el peso del cuerpo es de 20 N y el coeficiente de rozamiento cinemático es 0,2, calcula el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento y la distancia que recorre hasta pararse. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².**

La única fuerza que actúa en la dirección de movimiento (eje X) es la fuerza de rozamiento. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad -F_R = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-F_R}{m} = \frac{-\mu \cdot \cancel{m} \cdot g}{\cancel{m}} = -\mu \cdot g = -0{,}2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = -1{,}96 \text{ m/s}^2$$

Se trata de un MRUA. Para calcular el espacio recorrido aplicamos le ecuación que relaciona la velocidad con el desplazamiento:

$$v_{\text{fin.}}^2 - v_{\text{ini.}}^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{v_{\text{fin.}}^2 - v_{\text{ini.}}^2}{2 \cdot a} = \frac{(0 \text{ m/s})^2 - (10 \text{ m/s})^2}{2 \cdot (-1{,}96 \text{ m/s}^2)} = \mathbf{25{,}51\ m}$$

Por último, calculamos el trabajo aplicado por la fuerza de rozamiento:

$$W_R = \vec{F}_R \cdot \Delta\vec{r} = F_R \cdot \Delta x \cdot \cos\alpha = \mu \cdot P \cdot \Delta x \cdot \cos 180° = 0{,}2 \cdot 20 \text{ N} \cdot 25{,}51 \text{ m} \cdot (-1) = \mathbf{-102\ J}$$

Energía

28. **¿Siempre que una fuerza realiza trabajo sobre un cuerpo su energía mecánica aumenta?**

No. Puede disminuir si la fuerza tiene sentido opuesto al desplazamiento. Un ejemplo es la fuerza de rozamiento, que hace que disminuya la energía mecánica.

29. **¿Puede la energía cinética tener valor negativo? ¿Y la energía potencial?**

No. La energía cinética siempre es positiva:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

La masa es una magnitud positiva, al igual que el cuadrado de la velocidad.

Sí. La energía potencial puede ser positiva o negativa:

$$E_P = m \cdot g \cdot h$$

Su signo depende de la elección del origen de la medida de las alturas.

30. **¿Es la energía de un cuerpo independiente del sistema de referencia?**

No. Ambas dependen del sistema de referencia. La energía cinética porque depende de la velocidad, el sistema de referencia puede estar en reposo o no. La energía potencial porque depende de la elección del origen de la medida de las alturas.

31. **Demuestra trabajando con unidades de las magnitudes implicadas en la fórmula de la energía cinética que las unidades de la energía cinética son julios.**

A partir de la fórmula de la energía cinética deducimos sus unidades:

$$\left[E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2\right] \quad \Rightarrow \quad \text{kg} \cdot \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot m = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$$

32. **Razona si al variar la masa de un cuerpo su energía mecánica varía o no.**

La energía mecánica de un cuerpo se expresa como:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h = m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot v^2 + g \cdot h\right)$$

Por tanto, si varía la masa del cuerpo la energía mecánica también varía. Si aumenta la masa aumenta la energía mecánica y viceversa.

33. Calcula la energía cinética de un cuerpo de 40 N de peso a los 30 s de caída libre.

Hallamos la masa del cuerpo:

$$P = m \cdot g \quad \Rightarrow \quad m = \frac{P}{g} = \frac{40\ \text{N}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 4{,}082\ \text{kg}$$

Calculamos la velocidad del cuerpo a los 30 s de caída libre:

$$v = v_0 - g \cdot t = 0 - 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 30\ \text{s} = 294\ \text{m/s}$$

La energía cinética del cuerpo será:

$$E_\text{C} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 4{,}082\ \text{kg} \cdot (294\ \text{m/s})^2 \simeq \mathbf{176\,400\ J}$$

Teorema de la energía cinética

34. Si la velocidad de un cuerpo se hace cuatro veces mayor, ¿cómo varía su energía cinética? Escribe la respuesta correcta en tu cuaderno.

a) Aumenta 4 veces.

b) Aumenta 16 veces.

c) No varía; la energía se conserva.

A partir de la expresión de la energía cinética:

$$E_\text{C} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad \Rightarrow \quad E'_\text{C} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v')^2 \quad \Rightarrow \quad v' = 4 \cdot v \quad \Rightarrow \quad E'_\text{C} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (4 \cdot v)^2 \quad \Rightarrow \quad E_\text{C} = 16 \cdot E'_\text{C}$$

La energía cinética se multiplica por 16. Por tanto, la repuesta correcta es la **b**.

35. Sobre un cuerpo de 15 kg actúa una fuerza constante de 10 N que lo detiene después de recorrer 3 m. ¿Con qué velocidad se movía el cuerpo?

Aplicando el teorema de la energía cinética y teniendo en cuenta que la única fuerza que actúa es la fuerza $\vec{F}$:

$$W_\text{R} = \Delta E_\text{C} = E_{\text{C},2} - E_{\text{C},1}$$

Como $E_{\text{C},2} = 0$:

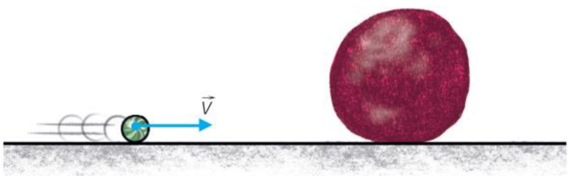
$$W_\text{R} = 0 - E_{\text{C},1}$$

$$F \cdot \Delta x \cdot \cos 180° = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \quad \Rightarrow \quad F \cdot \Delta x \cdot (-1) = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot \Delta x}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\ \text{N} \cdot 3\ \text{m}}{15\ \text{kg}}} = \mathbf{2\ m/s}$$

ACTIVIDADES FINALES (página 329)

36. Una canica choca contra una pelota de plastilina inicialmente en reposo y se incrusta en ella. Escribe la afirmación correcta en tu cuaderno.



a) Como el momento lineal se conserva en el choque, la energía cinética también se conserva.

b) El momento se conserva, pero la energía cinética del sistema disminuye.

c) El momento no se conserva, pero la energía cinética, sí.

El momento lineal se conserva siempre (en ausencia de fuerzas exteriores), pero la energía cinética, no. Solo se conserva la energía cinética en choques elásticos entre cuerpos duros que no se deforman en el choque. Nos dice el enunciado que la canica queda incrustada. Para que esto sea posible la plastilina se deforma.

En el caso del problema se conserva el momento, pero la energía cinética total disminuye. Por tanto, la respuesta correcta es la **b**.

37. Un proyectil de 1 N de peso atraviesa una pared de 20 cm de espesor. Si llega a ella con una velocidad de 500 m/s y sale por el otro lado con una velocidad de 300 m/s, ¿cuál es la resistencia que ofreció la pared? Dato: $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

Calculamos la resistencia que opone la pared, es decir, la fuerza que se opone al movimiento. Teniendo en cuenta que la variación de energía cinética es igual al trabajo realizado:

$$W = \Delta E_\text{C} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = E_\text{C,fin} - E_\text{C,ini}$$

Como la fuerza tiene sentido opuesto al desplazamiento:

$$F_\text{R} \cdot \Delta x \cdot \cos 180° = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_\text{fin}^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_\text{ini}^2 \quad \Rightarrow \quad F_\text{R} = -\frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_\text{fin}^2 - v_\text{ini}^2)}{\Delta x}$$

Donde la masa tiene un valor de:

$$P = m \cdot g \quad \Rightarrow \quad m = \frac{P}{g} = \frac{1\ \text{N}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 0{,}102\ \text{kg}$$

Sustituimos los datos:

$$F_\text{R} = -\frac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}102\ \text{kg} \cdot \left[(300\ \text{m/s})^2 - (500\ \text{m/s})^2\right]}{0{,}2\ \text{m}} = \mathbf{40\,816\ N}$$

ACTIVIDADES FINALES (página 330)

38. La lectura del contador de una vivienda marca un consumo de 40 kWh. Calcula la velocidad que alcanzaría un cuerpo de masa 10 kg si esta energía se utilizase en aumentar su velocidad partiendo del reposo.

Pasamos los kWh a unidades del SI:

$$40\ \cancel{\text{kWh}} \cdot \frac{3{,}6 \cdot 10^6\ \text{J}}{1\ \cancel{\text{kWh}}} = 1{,}44 \cdot 10^8\ \text{J}$$

Entonces:

$$E_\text{C} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_\text{C}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}44 \cdot 10^8\ \text{J}}{10\ \text{kg}}} = \mathbf{5637\ m/s}$$

39. Un automóvil de 1300 kg se mueve a 108 km/h.

a) Calcula el trabajo que realizan los frenos para detenerlo completamente.

b) Si se ha detenido después de recorrer 80 m, halla la fuerza de rozamiento de los frenos.

a) Pasamos la velocidad a unidades del SI:

$$v = 108\ \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 30\ \text{m/s}$$

El trabajo realizado por los frenos es igual a la variación de la energía cinética:

$$W_\text{R} = \Delta E_\text{C} = E_\text{C,final} - E_\text{C,inicial} = 0 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

$$W_R = -\frac{1}{2} \cdot 1300 \text{ kg} \cdot (30 \text{ m/s})^2 = \mathbf{-585\,000 \text{ J}}$$

b) Calculamos la fuerza de rozamiento de los frenos:

$$W_R = \vec{F}_R \cdot \Delta\vec{x} = F_R \cdot \Delta x \cdot \cos\alpha = F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180° = -F_R \cdot \Delta x$$

$$F_R = -\frac{W_R}{\Delta x} = -\frac{(-585\,000 \text{ J})}{80 \text{ m}} = \mathbf{7312{,}5 \text{ N}}$$

40. Un proyectil de 80 g que se mueve con una velocidad de 200 m/s se incrusta algunos centímetros antes de detenerse en un bloque de madera que permanece inmóvil. Si la fuerza de resistencia que el bloque opone al avance del proyectil es de 32 000 N, halla la profundidad a la que se empotra el proyectil.

A partir del teorema de la energía cinética:

$$W_R = \Delta E_C$$

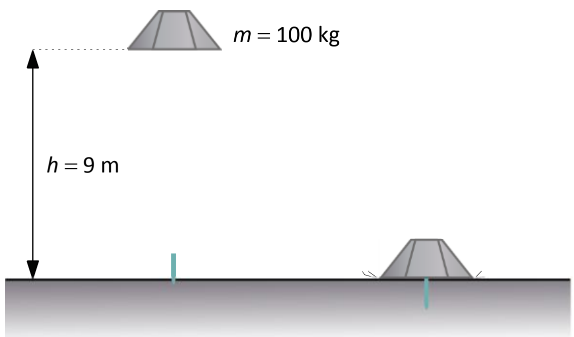
Como la fuerza se opone al movimiento:

$$-F_R \cdot \Delta x = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot F_R} = \frac{0{,}08 \text{ kg} \cdot (200 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 32\,000 \text{ N}} = 0{,}05 \text{ m} = \mathbf{5 \text{ cm}}$$

41. Un cuerpo de 100 kg cae desde una altura de 9 m y choca contra una varilla vertical de 0,5 m sin masa que se introduce completamente en el suelo, calcula.

a) La energía cinética del cuerpo al terminar su caída.

b) La resistencia que opone el suelo a la varilla.



a) Calculamos la velocidad con la que el cuerpo impacta con la varilla. Se trata de un MRUA (caída libre):

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot g \cdot \Delta y$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta y} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 9 \text{ m}} = 13{,}28 \text{ m/s}$$

Calculamos la energía cinética en ese momento:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \text{ kg} \cdot (13{,}28 \text{ m/s})^2 = \mathbf{8820 \text{ J}}$$

b) El trabajo para detenerlo es igual a la variación de la energía cinética:

$$W = \Delta E_C \quad \Rightarrow \quad \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = E_{C,\text{final}} - E_{C,\text{inicial}}$$

Como la fuerza tiene sentido opuesto al desplazamiento y la varilla finalmente se para:

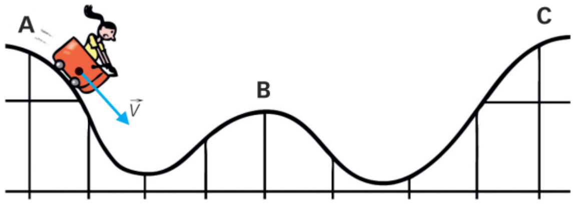
$$-F_R \cdot \Delta y = 0 - E_{C,\text{ini}} \quad \Rightarrow \quad F_R = \frac{-E_{C,\text{ini}}}{-\Delta y} = \frac{8820 \text{ J}}{0{,}5 \text{ m}} = \mathbf{17\,640 \text{ N}}$$

Principio de conservación de la energía

42. Indica las transformaciones energéticas que tienen lugar cuando se deja caer una pelota y rebota varias veces hasta pararse.

Al principio toda la energía es potencial. Según cae, se va transformando en cinética, a la vez que disminuye la potencial. Debido al rozamiento con el aire y a los choques contra el suelo (no elásticos), parte de la energía mecánica se transforma en energía térmica hasta que finalmente la pelota se para.

43. El carrito se deja caer desde A. Contesta razonadamente en tu cuaderno verdadero o falso en cada caso.



1. No existe rozamiento:

a) El vagón llega a B.

b) El vagón llega a C.

c) El vagón llega a A.

2. Sí existe rozamiento:

a) El vagón no llega a C.

b) El vagón llega a C.

c) El vagón llega a C, pero con menos energía de la que tenía inicialmente.

1. Si no existe rozamiento debido al principio de conservación de la energía mecánica, el vagón va de A hasta C pasando por B, ya que A y C están a la misma altura. Luego volverá hacia atrás y alcanzará de nuevo el punto A.

   La repuesta correcta es la **c**.

2. Si hay rozamiento, hay pérdida de energía mecánica y el vagón no llega a C.

   La repuesta correcta es la **a**.

44. Una piedra cae desde una azotea. Si tenemos en cuenta el rozamiento, escribe la afirmación correcta en tu cuaderno.

a) La energía cinética al llegar al suelo es igual que la energía potencial inicial de la piedra.

b) La energía cinética al llegar al suelo es menor que la energía potencial inicial de la piedra.

c) La energía cinética al llegar al suelo es mayor que la energía potencial inicial de la piedra.

La energía cinética al llegar al suelo es menor que la potencia inicial. La fuerza de rozamiento trabaja en contra del desplazamiento absorbiendo energía del sistema. A partir del teorema de conservación de la energía mecánica:

$$W_R = \Delta E_M$$

$$\text{Como } W_R < 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_M < 0 \quad \Rightarrow \quad E_{P,\text{inicial}} > E_{C,\text{suelo}}$$

Por tanto, la respuesta correcta es la **b**.

45. Un proyectil de 2 kg de masa se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 100 m/s. Determina la energía cinética a los 3 s y la posición en que se encuentra cuando la energía cinética es igual a la energía potencial. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica:

$$E_{M,\text{fin}} = E_{M,\text{ini}}$$

Calculamos la velocidad que tendrá el proyectil a los 3 s del lanzamiento:

$$v = v_0 - g \cdot t = 100 \text{ m/s} - 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 3 \text{ s} = 70{,}6 \text{ m/s}$$

La energía cinética a los 3 s será:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ kg} \cdot (70{,}6 \text{ m/s})^2 = \mathbf{4984\ J}$$

Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica:

$$E_{M,\text{fin}} = E_{M,\text{ini}} \quad \Rightarrow \quad E_{C,\text{fin}} + E_{P,\text{fin}} = E_{C,\text{ini}} + E_{P,\text{ini}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{\text{fin}}^2 + \cancel{m} \cdot g \cdot h_{\text{fin}} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{\text{ini}}^2 + \cancel{m} \cdot g \cdot h_{\text{ini}} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{\text{fin}}^2}{2} + g \cdot h_{\text{fin}} = \frac{v_{\text{ini}}^2}{2} + 0 \qquad [1]$$

Cuando la energía cinética sea igual a su energía potencial:

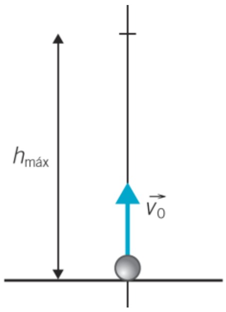
$$E_C = E_P \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{fin}^2 = \cancel{m} \cdot g \cdot h_{fin} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{fin}^2}{2} = g \cdot h_{fin} \qquad [2]$$

Sustituyendo [2] en [1], despejando la altura final, sustituyendo los valores conocidos y operando:

$$g \cdot h_{fin} + g \cdot h_{fin} = \frac{v_{ini}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot g \cdot h_{fin} = \frac{v_{ini}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad h_{fin} = \frac{v_{ini}^2}{4 \cdot g} = \frac{(100\ \text{m/s})^2}{4 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2} = \mathbf{255{,}1\ m}$$

46. Calcula, utilizando razonamientos cinemáticos, la altura máxima que alcanza un cuerpo que es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad v_0.

Partiendo de las ecuaciones del movimiento con aceleración constante para un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba:



$$\begin{cases} v = v_0 - g \cdot t \\ h_{máx} = y_0 + v_0 \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Al hacer $v = 0$ m/s en la primera ecuación se obtiene el tiempo que se tarda en alcanzar el punto más alto:

$$v = v_0 - g \cdot t \quad \Rightarrow \quad 0 = v_0 - g \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{g}$$

Con $y_0 = 0$ m y sustituir en la segunda ecuación:

$$y = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad y = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$$

47. Calcula utilizando razonamientos energéticos la altura máxima que alcanza un cuerpo cuando es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 50 m/s. ¿Se corresponde el resultado con lo que se obtendría aplicando las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado? Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

Si no se considera el rozamiento, se cumple el principio de conservación de la energía mecánica.

$$E_{M,fin} = E_{M,ini} \quad \Rightarrow \quad E_{C,fin} + E_{P,fin} = E_{C,ini} + E_{P,ini}$$

Teniendo en cuenta que en la posición final la velocidad es cero, y que al inicio la altura es cero:

$$\frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{fin}^2 + \cancel{m} \cdot g \cdot h_{fin} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{ini}^2 + \cancel{m} \cdot g \cdot h_{ini} \quad \Rightarrow \quad 0 + g \cdot h_{fin} = \frac{v_{ini}^2}{2} + 0$$

$$y = \frac{v_{ini}^2}{2 \cdot g} = \frac{(50\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2} = \mathbf{127{,}6\ m}$$

En la actividad 46 ya comprobamos que esta expresión se corresponde con la obtenida a partir de las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

48. Se lanza verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de 10 m/s un cuerpo de 0,5 kg de masa desde una altura de 20 m. Calcula.

a) El incremento que experimenta su energía cinética.

b) Si la fuerza de rozamiento con el aire fuera constante y de valor 1 N, ¿con qué velocidad llegaría al suelo?

Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

a) Por el principio de la conservación de la energía, suponiendo que no intervienen fuerzas no conservativas, se cumple:

$$\Delta E_M = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{M,fin} - E_{M,ini} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{C,fin} + E_{P,fin} = E_{C,ini} + E_{P,ini} \quad \Rightarrow \quad E_{C,fin} - E_{C,ini} = -\left(E_{P,fin} - E_{P,ini}\right)$$

$$\Delta E_C = -\left(E_{P,fin} - E_{P,ini}\right) = -\left(m \cdot g \cdot h_{fin} - m \cdot g \cdot h_{ini}\right) = m \cdot g\left(h_{ini} - h_{fin}\right)$$

$$\Delta E_C = m \cdot g \cdot \Delta h = 0{,}5 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ m} = \mathbf{98\ J}$$

b) Si tenemos en cuenta la fuerza de rozamiento del aire:

$$\Delta E_M = W_{nC} \quad \Rightarrow \quad E_{M,fin} - E_{M,ini} = W_R \quad \Rightarrow \quad E_{C,fin} + E_{P,fin} - \left(E_{C,ini} + E_{P,ini}\right) = -F_R \cdot \Delta h$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{fin}^2 + m \cdot g \cdot h_{fin} - \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{ini}^2 + m \cdot g \cdot h_{ini}\right) = -F_R \cdot \Delta h \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v_{fin}^2 - v_{ini}^2\right) - m \cdot g \cdot \Delta h = -F_R \cdot \Delta h$$

Despejamos la velocidad final, sustituimos los datos y operamos:

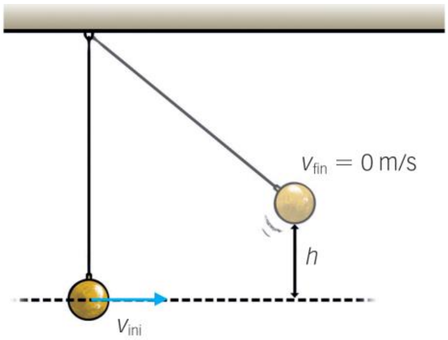
$$v_{fin} = \sqrt{v_{ini}^2 + \frac{2 \cdot \left(m \cdot g - F_R\right) \cdot \Delta h}{m}} = \sqrt{\left(10 \text{ m/s}\right)^2 + \frac{2 \cdot \left(0{,}5 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 - 1 \text{ N}\right) \cdot 20 \text{ m}}{0{,}5 \text{ kg}}} = \mathbf{20{,}3\,m/s}$$

49. Un péndulo está formado de un hilo de 2 m de longitud y una bolita de 100 g de masa. Cuando el péndulo pasa por su punto más bajo, lleva una velocidad de 5 m/s.

a) ¿Qué altura máxima alcanzará la bolita?

b) ¿Cuál será entonces su energía potencial?

Dato: $g = 9{,}8$ m/s².



a) Se cumple el principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{M,fin} = E_{M,ini} \quad \Rightarrow \quad E_{C,fin} + E_{P,fin} = E_{C,ini} + E_{P,ini}$$

Considerando que el origen de las alturas coincide con la altura del péndulo en el instante inicial, $h_{ini} = 0$ m, y como consecuencia $E_{P,ini} = 0$ J. Teniendo en cuenta que en el instante final la velocidad del péndulo es cero, $v_{fin} = 0$ m/s, y como consecuencia, $E_{C,fin} = 0$ J:

$$0 + \cancel{m} \cdot g \cdot h_{máx} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{ini}^2 + 0 \quad \Rightarrow \quad h_{máx} = \frac{v^2}{2 \cdot g} = \frac{(5 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} = \mathbf{1{,}28\ m}$$

b) Su energía potencial en el punto más alto será:

$$E_P = m \cdot g \cdot h_{máx} = 0{,}1 \text{kg} \cdot 9{,}8 \text{m/s}^2 \cdot 1{,}28 \text{m} = \mathbf{1{,}25\,J}$$

ACTIVIDADES FINALES (página 331)

50. ¿Qué altura máxima alcanzará la bolita de un péndulo si la velocidad en la parte más baja es de 2 m/s? Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

Como en el caso anterior, se cumple el principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{M,fin} = E_{M,ini} \quad \Rightarrow \quad E_{C,fin} + E_{P,fin} = E_{C,ini} + E_{P,ini}$$

Considerando que el origen de las alturas coincide con la altura del péndulo en el instante inicial, $h_{ini} = 0$ m, y como consecuencia $E_{P,ini} = 0$ J. Teniendo en cuenta que en el instante final la velocidad del péndulo es cero, $v_{fin} = 0$ m/s, y como consecuencia, $E_{C,fin} = 0$ J:

$$0 + \cancel{m} \cdot g \cdot h_{máx} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{ini}^2 + 0 \quad \Rightarrow \quad h_{máx} = \frac{v^2}{2 \cdot g} = \frac{(2 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} = 0{,}204 \text{ m} = \mathbf{204\ mm}$$

51. Un balón de masa 120 g cae desde una altura de 2 m sin velocidad inicial y rebota hasta una altura de 1,75 m. ¿Qué cantidad de energía ha perdido?

Cuando, además de fuerzas conservativas, actúan también fuerzas no conservativas, la energía mecánica no se conserva. Vamos a calcular qué cantidad de energía se ha perdido. Teniendo en cuenta que la energía cinética, tanto al inicio como al final, es nula pues, el balón tiene velocidad nula:

$$\Delta E_M = E_{M,fin} - E_{M,ini} = \left(E_{C,fin} + E_{P,fin}\right) - \left(E_{C,ini} + E_{P,ini}\right) = \left(0 + E_{P,fin}\right) - \left(0 + E_{P,ini}\right)$$

$$\Delta E_M = E_{P,fin} - E_{P,ini} = m \cdot g \cdot h_{fin} - m \cdot g \cdot h_{ini}$$

Sustituimos:

$$\Delta E_M = m \cdot g \cdot (h_{fin} - h_{ini}) = 0{,}12\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (1{,}75\ \text{m} - 2\ \text{m}) = -0{,}294\ \text{J}$$

Debido al bote se ha disipado una energía de **0,294 J**

52. Un proyectil de 20 kg de masa sale de la boca de un cañón a 500 m/s y alcanza el blanco con una velocidad de 400 m/s. Suponiendo que la altura del disparo coincide con la altura del blanco, calcula la energía mecánica perdida debido a la resistencia que opone el aire.

Calculamos la variación de la energía mecánica:

$$\Delta E_M = E_{M,fin} - E_{M,ini} = \left(E_{C,fin} + E_{P,fin}\right) - \left(E_{C,ini} + E_{P,ini}\right) = \left(E_{C,fin} - E_{C,ini}\right) + \left(E_{P,fin} - E_{P,ini}\right)$$

Bajo la suposición dada en el enunciado, la energía potencial inicial y final es la misma. En este caso, la variación de la energía mecánica coincide con la variación de la energía cinética. Calculamos:

$$\Delta E_M = \left(E_{C,fin} - E_{C,ini}\right) + 0 = E_{C,fin} - E_{C,ini}$$

$$\Delta E_M = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{fin}^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{ini}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v_{fin}^2 - v_{ini}^2\right) = \frac{1}{2} \cdot 20\ \text{kg} \cdot \left[\left(400\ \text{m/s}\right)^2 - \left(500\ \text{m/s}\right)^2\right] = -900\,000\ \text{J}$$

Es decir, pierde **900 000 J** de energía.

53. Un cuerpo de 4 kg se deja deslizar sin rozamiento desde el punto más alto de un plano inclinado de ángulo 40° y longitud 3 m. Calcula.

a) La variación de energía potencial del cuerpo al llegar al punto más bajo del plano.

b) La energía cinética en ese momento.

c) El trabajo realizado sobre el cuerpo.

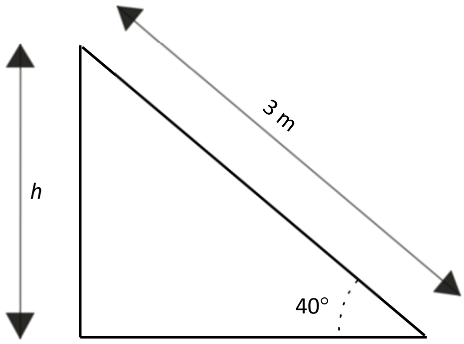
d) La velocidad del cuerpo al final del plano.

e) La velocidad con que hubiera llegado de haber caído verticalmente desde la misma altura.

Dato: g = 9,8 m/s².

a) En primer lugar calculamos la altura a la que se encuentra el cuerpo utilizando razones trigonométricas:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \quad \Rightarrow \quad h = 3 \cdot \text{sen}\ 40° = 1{,}93\ \text{m}$$



Calculamos la variación de la energía potencial. Tomamos el cero de referencia en el punto más bajo del plano inclinado, por tanto, la energía potencial final es nula:

$$\Delta E_P = E_{P,fin} - E_{P,ini} = 0 - m \cdot g \cdot h$$

$$\Delta E_P = 4\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}93\ \text{m} = \mathbf{-75{,}66\ J}$$

b) Como todas las fuerzas son conservativas, es decir, no actúa ninguna fuerza externa, por el principio de conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_C = -\Delta E_P = 75{,}66\ \text{J}$$

En el instante inicial, como el cuerpo parte del reposo, la energía cinética inicial es nula:

$$\Delta E_C = E_{C,fin} - E_{C,ini} = E_{C,fin} - 0 = E_{C,fin}$$

Por tanto, la energía cinética en el punto más bajo del plano:

$$E_{C,fin} = \mathbf{75{,}66\ J}$$

c) La única fuerza que realiza trabajo es la fuerza del peso. Aplicando el teorema de la energía cinética:

$$W = \Delta E_C = \mathbf{75{,}66\ J}$$

d) Conocida la energía cinética al final del plano, calculamos la velocidad final:

$$E_{C,fin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{fin}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{fin} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{C,fin}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 75{,}66\ \text{J}}{4\ \text{kg}}} = \mathbf{6{,}15\ \frac{m}{s}}$$

e) Aplicamos de nuevo el principio de la conservación de la energía mecánica:

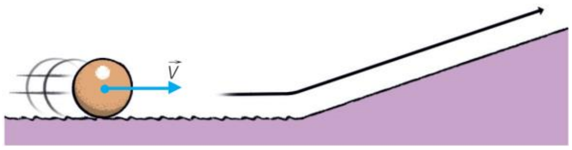
$$E_{M,ini} = E_{M,fin} \quad \Rightarrow \quad E_{C,ini} + E_{P,ini} = E_{C,fin} + E_{P,fin}$$

Teniendo en cuenta que en el punto más alto la energía cinética es nula y la potencial es máxima, y en el punto más bajo la energía cinética es máxima y la potencial se hace cero.

$$E_{C,fin} + 0 = 0 + E_{P,ini} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{fin}^2 = \cancel{m} \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow \quad v_{fin} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}93\ \text{m}} = 6{,}15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocidad final con la que hubiera llegado de haber caído verticalmente es la misma que la velocidad tras recorrer el plano inclinado: v = **6,15 m/s**.

54. Se lanza un cuerpo de 500 g con una velocidad inicial de 10 m/s por un plano horizontal rugoso (μ_c = 0,4). Después de recorrer una distancia de 2 m comienza a ascender por un plano inclinado, sin rozamiento, hasta detenerse. Dato: g = 9,8 m/s².



a) ¿Cuánto vale la energía potencial del cuerpo en el instante en el que se detiene?

b) Calcula la altura que alcanza.

a) Tramo horizontal:

$$\Delta E_C = W_{AB}$$

$$E_{C,A} - E_{C,B} = F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180° = -F_R \cdot \Delta x$$

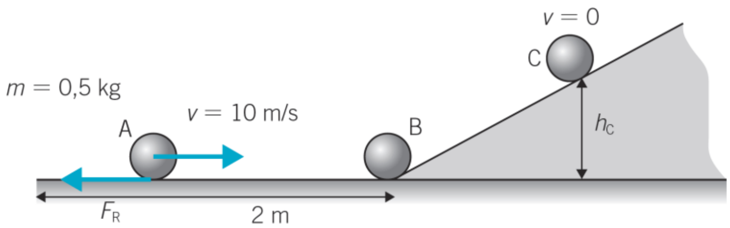
$$E_{C,B} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{ini}^2 - \mu_C \cdot m \cdot g \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v_{ini}^2 - \mu_C \cdot g \cdot \Delta x\right)$$

$$E_{C,B} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5\ \text{kg} \cdot \left[\left(10\ \text{m/s}\right)^2 - 0{,}3 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 2\ \text{m}\right] = 21{,}08\ \text{J}$$

En el plano inclinado se cumple el principio de conservación de la energía mecánica, ya que no hay rozamiento:

$$E_{M,B} = E_{M,C} \Rightarrow E_{C,B} + E_{P,B} = E_{C,C} + E_{P,C}$$

En el punto B la energía cinética es máxima y la energía potencial es nula. En el punto C la energía potencial es máxima y la energía cinética es nula:



$$E_{C,B} + 0 = 0 + E_{P,C} \quad \Rightarrow \quad E_{P,C} = E_{C,B} = \mathbf{21{,}08\ J}$$

b) La altura que alcanza la bola hasta detenerse será:

$$E_{P,C} = m \cdot g \cdot h_C \quad \Rightarrow \quad h_C = \frac{E_{P,C}}{m \cdot g} = \frac{21{,}08\ \text{J}}{0{,}5\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2} = \mathbf{4{,}3\ m}$$

55. Se lanza un cuerpo de masa 1 kg por un plano horizontal con rozamiento con una velocidad de 10 m/s. Después de recorrer una distancia de 5 m comienza a ascender por un plano inclinado 30°. Calcula la altura que alcanza y la energía potencial del cuerpo en el punto más alto, si el coeficiente de rozamiento en todo el trayecto es μ_c = 0,3.

Cuando, además de fuerzas conservativas, actúan también fuerzas no conservativas la variación de la energía mecánica coincide con el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas que intervengan. Por tanto, se cumple:

$$\Delta E_M = W_{nC}$$

- **Tramo horizontal, de A a B.** La variación de energía potencial es nula, pues los puntos A y B están a la misma altura. La variación la energía mecánica coincide con la variación de la cinética, que es igual al trabajo realizado por la fuerza de rozamiento en el tramo:

$$\Delta E_{C,A\to B} = W_{nC,A\to B} \quad \Rightarrow \quad E_{C,B} - E_{C,A} = F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180° \quad \Rightarrow \quad E_{C,B} = E_{C,A} + F_R \cdot \Delta x \cdot (-1)$$

$$E_{C,B} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 - \mu_C \cdot m \cdot g \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v_A^2 - \mu_C \cdot g \cdot \Delta x\right)$$

$$E_{C,B} = \frac{1}{2} \cdot 1\text{ kg} \cdot \left[(10\text{ m/s})^2 - 0{,}3 \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 \cdot 5\text{ m} \right] = 35{,}5\text{ J}$$

- **Tramo inclinado, de B a C.** En el punto C la bola se detiene, por lo que la energía cinética en C es nula. Aplicamos de nuevo el principio de la conservación de la energía.

$$\Delta E_{M,B\to C} = W_{nC,B\to C} \quad \Rightarrow \quad E_{P,C} - E_{C,B} = F'_R \cdot \Delta x' \cdot \cos 180° \quad \Rightarrow \quad E_{P,C} = E_{C,B} + \mu_C \cdot N \cdot \Delta x' \cdot (-1)$$

Donde:

$$\Delta x' = \frac{h_C}{\text{sen } \alpha}; \quad N = P_Y = m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

Sustituyendo:

$$m \cdot g \cdot h_C = E_{C,B} - \mu_C \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \frac{h_C}{\text{sen } \alpha}$$

Despejamos la altura que alcanza la bola en el punto C y sustituimos los datos:

$$h_C = \frac{E_{C,B}}{m \cdot g \cdot \left(1 + \mu_C \cdot \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}\right)} = \frac{35{,}5\text{ J}}{1\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 \cdot \left(1 + 0{,}3 \cdot \frac{\sqrt{3}/2}{1/2}\right)} = \mathbf{2{,}38\text{ m}}$$

Calculamos la energía potencial en C:

$$E_{P,3} = m \cdot g \cdot h_C = 1\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 \cdot 4{,}3\text{ m} = \mathbf{23{,}36\text{ J}}$$

56. La altura máxima de una montaña rusa es 40 m. El tren es elevado hasta esta altura y después se le deja deslizar hasta completar el recorrido. Dato: $g = 9{,}8$ m/s^2.

a) Halla la velocidad del tren en dos puntos cuyas alturas son 30 m y 10 m, despreciando el rozamiento.

b) ¿Por qué la altura inicial del tren es la máxima de todo el recorrido?

Se cumple el principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{M,ini} = E_{M,fin} \quad \Rightarrow \quad E_{C,ini} + E_{P,ini} = E_{C,fin} + E_{P,fin}$$

a) La energía cinética inicial es cero, por tanto:

$$E_{P,ini} = E_{C,fin} + E_{P,fin} \quad \Rightarrow \quad \cancel{m} \cdot g \cdot h_{ini} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{fin}^2 + \cancel{m} \cdot g \cdot h_{fin}$$

$$g \cdot h_{ini} - g \cdot h_{fin} = \frac{1}{2} \cdot v_{fin}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{fin}^2 = 2 \cdot g \cdot (h_{ini} - h_{fin})$$

$$v_{fin} = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_{ini} - h_{fin})}$$

- A 30 m de altura: $v_{fin} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\text{ m/ s}^2 \cdot (40\text{ m} - 30\text{ m})} = \mathbf{14\text{ m/s}}$
- A 10 m de altura: $v_{fin} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\text{ m/ s}^2 \cdot (40\text{ m} - 10\text{ m})} = \mathbf{24{,}2\text{ m/s}}$

b) Porque el principio de conservación de la energía mecánica prohíbe alcanzar una altura mayor, ya que en ese caso tendría una energía potencial mayor que la inicial, y eso no es posible.

ACTIVIDADES FINALES (página 332)

57. Una pelota con 25 J de energía cinética golpea a otra inicialmente en reposo. Tras el choque, la primera pelota se para y la segunda comienza a moverse. Dato: $g = 9{,}8$ m/s^2.

a) Teniendo en cuenta que la segunda pelota tiene 170 g de masa y que el coeficiente de rozamiento es de 0,15, calcula la distancia recorrida por la segunda pelota hasta pararse.

b) ¿Se conserva la energía?

a) Por el principio de conservación de la energía, la segunda bola se queda con los 25 J de energía cinética, posteriormente los perderá por el rozamiento. Tras el choque, la única fuerza que actúa sobre la bola es la fuerza de rozamiento hasta que se detenga, por lo que:

$$\Delta E_C = W_R$$

$$E_{C,fin} - E_{C,ini} = 0 - E_{C,ini} = -F_R \cdot \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{E_{C,ini}}{F_R} = \frac{E_{C,ini}}{\mu \cdot m \cdot g} = \frac{25\ \text{J}}{0{,}15 \cdot 0{,}17\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2} = \mathbf{100\ m}$$

b) La energía mecánica no; la energía total sí.

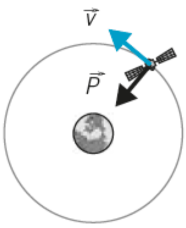
58. **Un satélite gira en una órbita circular en torno a la Tierra.**

a) ¿Realiza trabajo la fuerza peso? Haz un dibujo.

b) ¿Qué puedes decir de su energía cinética y potencial?

c) Contesta a las mismas preguntas de los dos apartados anteriores suponiendo, ahora, que la órbita del satélite es elíptica con la Tierra en uno de los focos.

a) La fuerza-peso, $\vec{P}$, es perpendicular a la velocidad, $\vec{v}$; y, por tanto, al desplazamiento, por lo que $W = 0$.



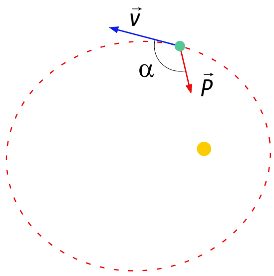
b) Como la fuerza peso y la velocidad son perpendiculares, el trabajo es nulo. Y por el teorema de la energía cinética:

$$W = \Delta E_C \quad \Rightarrow \quad 0 = \Delta E_C \quad \Rightarrow \quad E_C = \text{cte.}$$

La energía cinética no varía.

Como se trata de un sistema conservativo, por el principio de conservación de la energía mecánica, la energía total es constante, $\Delta E_M = 0$; y por tanto también la energía potencial:

$$\Delta E_M = \Delta E_C + \Delta E_P \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 + \Delta E_P \quad \Rightarrow \quad E_P = \text{cte.}$$



c) En este caso, la fuerza-peso, $\vec{P}$, no es perpendicular a la velocidad, $\vec{v}$, y por tanto al desplazamiento, por lo que $W \neq 0$.

$$W = \Delta E_C \Rightarrow E_C \neq \text{cte.}$$

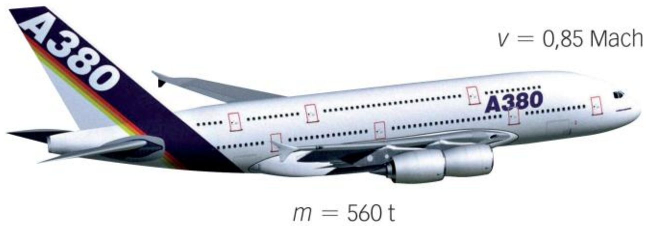
Como se trata de un sistema conservativo, si la energía cinética no es constante, la potencial tampoco puede serlo.

59. **Un Airbús A380 de 560 toneladas vuela a una altura de 10 km sobre el nivel del mar con una velocidad de 0,85 Mach.**

a) Calcula sus energías cinéticas, potencial y mecánica.

b) Si no asciende a más altura ni incrementa su velocidad, ¿necesita combustible para mantenerse? ¿Por qué?

Datos: g = 9,8 m/s², 1 Mach = 300 m/s (a 10 km de altura).



Pasamos la velocidad a unidades del SI:

$$v = 0{,}85\ \cancel{\text{Mach}} \cdot \frac{300\ \text{m/s}}{1\ \cancel{\text{Mach}}} = 255\ \text{m/s}$$

a) Calculamos la energía cinética, la potencial (suponiendo que la gravedad a 10 km de altitud es la misma que en la superficie) y la mecánica, que será la suma de las dos anteriores:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 5,6 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot 255 \text{ m/s} = \mathbf{1,82 \cdot 10^{10}\ J}$$

$$E_P = m \cdot g \cdot h = 5,6 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \cdot 10^4 \text{ m} = \mathbf{5,49 \cdot 10^{10}\ J}$$

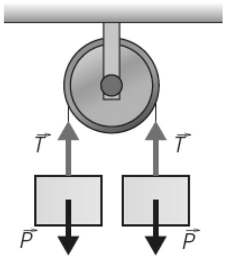
$$E_M = E_C + E_P = 1,82 \cdot 10^{10} \text{ J} + 5,49 \cdot 10^{10} \text{ J} = \mathbf{7,31 \cdot 10^{10}\ J}$$

b) Evidentemente, un avión necesita una velocidad mínima para sustentarse en el aire, pero para mantener esa velocidad necesita vencer la fuerza de rozamiento con el aire y, por tanto, gastar energía que proviene del combustible que consume.

Ampliación (página 332)

60. Dos cuerpos de la misma masa que están unidos con una cuerda que pasa por la garganta de una polea se mueven con velocidad constante. Demuestra que en estas condiciones la energía potencial del sistema formado por las dos masas es constante.

La energía potencial gravitatoria no varía porque lo que aumenta la energía potencial de una masa al subir disminuye la de la otra al bajar. Ambas masas son iguales, y lo que asciende una lo desciende la otra.



61. Una pelota de goma de 100 g de masa cae, a partir del reposo, desde una altura de 2 m. Calcula la altura de la bola después de tres rebotes si en cada uno de ellos pierde el 10 % de su energía cinética.

En cada bote se pierde un 10 % de la energía mecánica que tenía antes del bote:

$$E_{M,1} = 0,9 \cdot E_{M,ini}$$

Por tanto, tras el tercer bote, la energía mecánica es:

$$E_{M,3} = (0,9)^3 \cdot E_{M,ini} = 0,729 \cdot E_{M,ini}$$

Ya que esta energía mecánica primero es cinética que se trasforma en potencial, la altura que gana la pelota:

$$\frac{E_{M,3}}{E_{M,ini}} = \frac{E_{P,3}}{E_{P,ini}} = \frac{\cancel{m} \cdot \cancel{g} \cdot h_3}{\cancel{m} \cdot \cancel{g} \cdot h_{ini}} = \frac{0,729 \cdot \cancel{E_{M,ini}}}{\cancel{E_{M,ini}}} = 0,729 \quad \Rightarrow \quad h_3 = 0,729 \cdot h_{ini} = 0,729 \cdot 2 \text{ m} = \mathbf{1,458\ m}$$

En esta situación una parte de la energía se ha disipado en forma de calor en los sucesivos rebotes.

62. Se hace girar verticalmente en una trayectoria circular a un cuerpo que está unido a una cuerda de 1,5 m de longitud. Dato: $g = 9,8$ m/s².

a) Si la velocidad en el punto más bajo es de 10 m/s, halla su valor en el punto más alto.

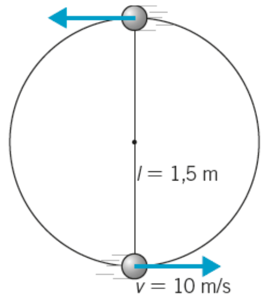
b) ¿Qué velocidad mínima debe llevar en el punto más bajo para completar la circunferencia?

a) Se cumple el principio de conservación de la energía mecánica. De las dos fuerzas que actúan, una, el peso es conservativa y, la otra, la tensión de la cuerda no realiza trabajo.

$$E_{M,ini} = E_{M,fin} \quad \Rightarrow \quad E_{C,ini} + E_{P,ini} = E_{C,fin} + E_{P,fin}$$

La energía potencial inicial es cero, por tanto:

$$E_{C,ini} + 0 = E_{C,fin} + E_{P,fin} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{ini}^2 = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{fin}^2 + \cancel{m} \cdot g \cdot (2 \cdot l)$$



$$\frac{1}{2}\cdot v_{ini}^2 = \frac{1}{2}\cdot v_{fin}^2 + g\cdot 2\cdot l \quad\Rightarrow\quad v_{ini}^2 = 4\cdot g\cdot l + v_{fin}^2$$

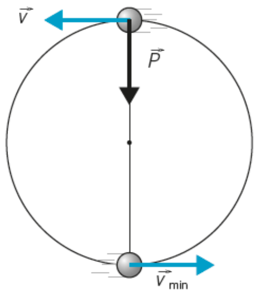
$$v_{fin} = \sqrt{v_{ini}^2 - 4\cdot g\cdot l} = \sqrt{(10\text{ m/s})^2 - 4\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2\cdot 1{,}5\text{ m}} = \mathbf{6{,}42\text{ m/s}}$$

b) Para que complete la trayectoria circular con velocidad mínima la tensión de la cuerda en el punto más alto debe ser nula. La única fuerza que actúa sobre el cuerpo en ese punto será el peso:

$$F_N = m\cdot g = m\cdot\frac{v^2}{R} \quad\Rightarrow\quad \cancel{m}\cdot g = \cancel{m}\cdot\frac{v^2}{l}$$

$$v = \sqrt{g\cdot l} = \sqrt{9{,}8\text{ m/s}^2\cdot 1{,}5\text{ m}} = \mathbf{3{,}8\text{ m/s}}$$

Aplicamos el principio de conservación de la energía para calcular el valor de la velocidad inicial mínima:



$$\frac{1}{2}\cdot\cancel{m}\cdot v_{mín}^2 = \frac{1}{2}\cdot\cancel{m}\cdot v^2 + \cancel{m}\cdot g\cdot(2\cdot l)$$

$$\frac{1}{2}\cdot v_{mín}^2 = \frac{1}{2}\cdot v^2 + g\cdot 2\cdot l$$

$$v_{mín} = \sqrt{v^2 + 4\cdot g\cdot l} = \sqrt{(3{,}8\text{ m/s})^2 + 4\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2\cdot 1{,}5\text{ m}} = \mathbf{8{,}57\text{ m/s}}$$

63. Se dice que un choque es elástico cuando se conserva la energía cinética. Un ejemplo de choque elástico es el que se produce entre dos bolas de billar. Supón que una bola de billar choca frontalmente con otra que se encuentra en reposo. Calcula la velocidad de las bolas después del choque. La dirección en que se mueven los cuerpos después del impacto es la misma que la que tenía el cuerpo antes de chocar.

Nota: es conveniente usar la expresión de la energía cinética en función del momento lineal.

El momento lineal de la primera bola antes de la colisión es p_1, su energía cinética, $E_{C,1}$. Después de la colisión, p'_1 y $E'_{C,1}$. Para la segunda bola después de la colisión, p'_2 y $E'_{C,2}$.

Al ser la colisión frontal, los vectores siguen en la misma dirección y como se conserva el momento lineal, se cumple que $p_1 = p'_1 + p'_2$.

Al ser choque elástico se conserva la energía, y se cumple que $E_{C,1} = E'_{C,1} + E'_{C,2}$.

La energía cinética se puede expresar en función del momento lineal, sustituimos la velocidad:

$$v = \frac{p}{m} \quad\Rightarrow\quad E_C = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{2\cdot m}$$

Sustituyendo y simplificando:

$$\frac{p_1^2}{\cancel{2\cdot m}} = \frac{p_1'^2}{\cancel{2\cdot m}} + \frac{p_2'^2}{\cancel{2\cdot m}} \quad\Rightarrow\quad p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2$$

$$\begin{cases} p_1 = p'_1 + p'_1 \\ p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \cancel{m}\cdot v_1 = \cancel{m}\cdot v'_1 + \cancel{m}\cdot v'_2 \\ \cancel{m^2}\cdot v_1^2 = \cancel{m^2}\cdot v_1'^2 + \cancel{m^2}\cdot v_2'^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = v'_1 + v'_2 \\ v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \end{cases}$$

Si de la primera ecuación $v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2\cdot v'_1\cdot v'_2$. Sustituimos en la segunda y al simplificar se deduce que:

$$\cancel{v_1'^2 + v_2'^2} + 2\cdot v'_1\cdot v'_2 = \cancel{v_1'^2 + v_2'^2} \quad\Rightarrow\quad 2\cdot v'_1\cdot v'_2 = 0$$

Hay dos soluciones posibles. La primera es $v'_2 = 0$. Esta igualdad significa que la segunda bola queda quieta y la primera continúa con su velocidad, lo que es físicamente imposible. La segunda es la que es, $v'_1 = 0$, significa que la primera bola queda quieta y la segunda se mueve recibiendo el momento y energía de la primera.

64. Una esfera metálica de 60 kg de masa se deja caer desde una altura de 6 m sobre un suelo de arena. Si la esfera penetra 30 cm en el suelo, calcula la fuerza de resistencia ejercida por el suelo. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

Por el principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{\text{M,ini}} = E_{\text{M,fin}} \Rightarrow E_{\text{C,ini}} + E_{\text{P,ini}} = E_{\text{C,fin}} + E_{\text{P,fin}}$$

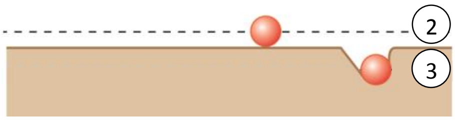
Inicialmente estaba en reposo, con lo que la energía cinética en el punto inicial, punto 1, es nula. Y al llegar al suelo, punto 2, la energía potencial es nula. Calculamos la energía cinética en el punto 2:

$$E_{\text{C,2}} = E_{\text{P,1}} = m \cdot g \cdot h = 60 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 6 \text{ m} = 3528 \text{ J}$$

Aplicando el teorema de la energía cinética, el trabajo para detener la bola es igual a la variación de su energía cinética:

$$W = \Delta E_{\text{C}} \Rightarrow \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = 0 - E_{\text{C,2}}$$

Como la fuerza de resistencia tiene sentido opuesto al desplazamiento y la bola finalmente se para:



$$-F_{\text{R}} \cdot \Delta y = -E_{\text{C,2}} \Rightarrow F_{\text{R}} = \frac{E_{\text{C,2}}}{\Delta y} = \frac{3528 \text{ J}}{0{,}3 \text{ m}} = \mathbf{11\,760\ N}$$

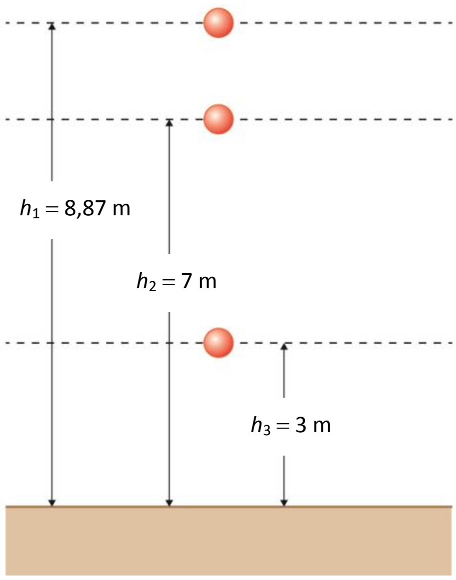
En este ejercicio hemos despreciado el cambio de energía potencial al cambiar altitud cuando la esfera penetra 30 cm en el suelo.

65. Un cuerpo de 5 kg de masa cae bajo la acción de la gravedad, $g = 9{,}8$ m/s². Cuando se encuentra a 7 m del suelo posee una velocidad de 6 m/s.

a) ¿Desde qué altura se le dejó caer?

b) Calcula la energía cinética y potencial cuando se encuentra a 3 m del suelo.

c) Calcula la altura a la que rebota si en el bote pierde un 20 % de su energía mecánica.



a) Por el principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{\text{M,1}} = E_{\text{M,2}} \Rightarrow E_{\text{C,1}} + E_{\text{P,1}} = E_{\text{C,2}} + E_{\text{P,2}}$$

Calculamos la altura inicial h_1:

$$0 + E_{\text{P,1}} = E_{\text{C,2}} + E_{\text{P,2}} \Rightarrow \cancel{m} \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_2^2 + \cancel{m} \cdot g \cdot h_2$$

$$h_1 = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + h_2 = \frac{(6 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} + 7 \text{ m} = \mathbf{8{,}84\ m}$$

b) Aplicando de nuevo el principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{\text{C,1}} + E_{\text{P,1}} = E_{\text{C,3}} + E_{\text{P,3}} \Rightarrow E_{\text{C,3}} = E_{\text{P,1}} - E_{\text{P,3}}$$

Calculamos la energía cinética en 3:

$$E_{\text{C,3}} = m \cdot g \cdot (h_1 - h_3) = 5 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot (8{,}84 - 3) \text{ m} = \mathbf{286\ J}$$

Calculamos la energía potencial en 3:

$$E_{\text{P,3}} = m \cdot g \cdot h_3 = 5 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 3 \text{ m} = \mathbf{147\ J}$$

En el bote se pierde un 20 % de la energía mecánica que tenía antes del bote:

$$E_{\text{M,fin}} = 0{,}8 \cdot E_{\text{M,ini}}$$

Ya que esta energía mecánica primero es cinética que se transforma en potencial, la altura que gana el balón:

$$\frac{E_{\text{M,fin}}}{E_{\text{M,ini}}} = \frac{E_{\text{P,fin}}}{E_{\text{P,ini}}} = \frac{\cancel{m} \cdot \cancel{g} \cdot h_{\text{fin}}}{\cancel{m} \cdot \cancel{g} \cdot h_{\text{ini}}} = 0{,}8 \Rightarrow h_{\text{fin}} = 0{,}8 \cdot h_{\text{ini}} = 0{,}8 \cdot 8{,}84 \text{ m} = \mathbf{7{,}07\ m}$$

En esta situación, una parte de la energía se ha disipado en forma de calor en el rebote.

66. Un bloque de 10 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado 30° con la horizontal con una velocidad de 10 m/s. El bloque vuelve al punto de partida con una velocidad de 5 m/s. Calcula.

a) El trabajo de rozamiento total en subir y bajar.

b) El espacio que recorre al subir.

c) El coeficiente de rozamiento con el plano.

d) Un resorte en la parte baja del plano, $k = 500$ N/m, recibe al bloque descendente. Calcula la deformación máxima del resorte supuesta la deformación sin pérdida de altura y sin rozamiento.

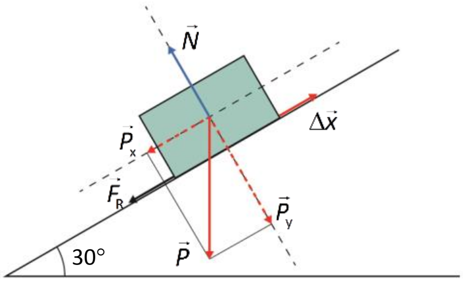
Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

a) La energía potencial inicial y final es la misma (vuelve al punto de partida), por tanto, la variación de la energía mecánica coincide con la variación de la cinética, que es igual al trabajo realizado por la fuerza de rozamiento entre esos instantes:

$$\Delta E_{\text{C}} = W_{\text{nC}} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{C,fin}} - E_{\text{C,ini}} = W_{\text{R}}$$

$$W_{\text{R}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v_{\text{fin}}^2 - v_{\text{ini}}^2\right) = \frac{1}{2} \cdot 10\ \text{kg} \cdot \left[\left(5\ \text{m/s}\right)^2 - \left(10\ \text{m/s}\right)^2\right] = \mathbf{-375\ J}$$

b) Aplicamos de nuevo el principio de conservación de la energía mecánica. En este caso, el trabajo de rozamiento será la mitad que en el apartado anterior, ya que solo estamos teniendo en cuenta el tramo de subida:



$$\Delta E_{\text{M}} = W_{\text{nC}} \quad \Rightarrow \quad \left(0 + E_{\text{P,fin}}\right) - \left(E_{\text{C,ini}} + 0\right) = W_{\text{R,subir}}$$

$$E_{\text{P,fin}} - E_{\text{C,ini}} = \frac{W_{\text{R}}}{2} \quad \Rightarrow \quad m \cdot g \cdot h_{\text{fin}} - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{ini}}^2 = \frac{W_{\text{R}}}{2}$$

$$m \cdot g \cdot \Delta x \cdot \text{sen}\ \alpha - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{ini}}^2 = \frac{W_{\text{R}}}{2}$$

Despejamos Δx y sustituimos los datos:

$$\Delta x = \frac{W_{\text{R}} + m \cdot v_{\text{ini}}^2}{2 \cdot m \cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha} = \frac{-375\ \text{J} + 10\ \text{kg} \cdot \left(10\ \text{m/s}\right)^2}{2 \cdot 10\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\ 30°} = \mathbf{6{,}38\,m}$$

c) El coeficiente de rozamiento:

$$W_{\text{R,subir}} = -F_{\text{R}} \cdot \Delta x = -\mu \cdot N \cdot \Delta x = -\mu \cdot P_{\text{Y}} \cdot \Delta x = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot \Delta x$$

Despejamos y sustituimos:

$$\mu = -\frac{W_{\text{R}}}{2 \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot \Delta x} = -\frac{-375\ \text{J}}{2 \cdot 10\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot \cos 30° \cdot 6{,}38\ \text{m}} = \mathbf{0{,}35}$$

d) Por el principio de la conservación de energía. Antes del choque con el muelle solo hay energía cinética, y después del choque, energía potencial elástica.

$$E_{\text{M,ini}} = E_{\text{M,fin}} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{C}} = E_{\text{P}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Despejamos y sustituimos los datos:

$$x = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot v = \sqrt{\frac{10\ \text{kg}}{500\ \text{N/m}}} \cdot 5\ \text{m/s} = \mathbf{0{,}71\ m}$$

FÍSICA EN TU VIDA (página 334)

INTERPRETA

1. Haz un esquema indicando las transformaciones de energía que se producen mientras los vagones suben y bajan por cada rama de la atracción.

- En el punto más alto de la rama izquierda (punto 1 de la imagen), justo antes de dejar caer a los vagones, toda la energía mecánica es potencial.

- Durante la bajada hasta el punto más bajo de la atracción la energía potencial se va transformando en energía cinética.
- Al llegar al punto más bajo solo existe energía cinética.
- Durante la subida por la rama derecha, esta energía cinética se va transformando en energía potencial.
- En el punto más alto que se alcanza en la rama izquierda, solo hay energía potencial.

2. **Justifica las alturas sucesivas de los vagones en cada ciclo marcadas sobre la imagen.**

Las alturas alcanzadas van disminuyendo progresivamente porque parte de la energía mecánica se pierde por el rozamiento. Por tanto, la fuerza de rozamiento es la responsable de que los vagones se vayan frenando.

3. **Explica la frase «como una parte de la energía se ha "perdido" debido al rozamiento, la altura alcanzada en la segunda rampa es menor que la altura inicial».**

Cuando, además de fuerzas conservativas, actúan también fuerzas no conservativas, en este caso, la fuerza de rozamiento, la energía mecánica no se conserva:

$$\Delta E_{M} = W_{nC}$$

En la atracción, el rozamiento con los raíles convierte la energía mecánica en energía térmica que calienta los raíles y el aire que les rodea. Lo que sucede es que parte de la energía potencial inicial se ha transformado en trabajo de rozamiento.

4. **Calcula qué porcentaje de energía se pierde en cada descenso, en promedio, si los vagones se detienen al cabo de 21 descensos, sabiendo que tras el primer descenso la velocidad de los vagones en el punto más bajo es de 81 km/h.**

En cada descenso se pierde:

$$\frac{1}{21} E_{M} = 4,76\,\%\, E_{M}$$

REFLEXIONA

5. **Imagina una segunda atracción de este tipo con la misma altura, etc., que llamaremos B, donde el rozamiento sea menor que en el caso mostrado en esta página.**

a) **Compara la velocidad que se alcanza en el punto más bajo tras el primer descenso en ambas atracciones.**

b) **Compara la altura que se alcanza tras el primer ascenso en la segunda rama.**

c) **Compara el tiempo que tardarán en detenerse los vagones de ambas atracciones.**

d) **Compara la cantidad total de energía que se ha transformado en calor una vez que ambas atracciones se han detenido.**

a) Será mayor, puesto que se pierde menos energía por el rozamiento durante el descenso.

b) Será mayor, puesto que se pierde menos energía por el rozamiento durante el descenso y en el nuevo ascenso.

c) Será mayor, puesto que se pierde menos energía en el cómputo global.

d) Será la misma, por el principio de conservación de la energía. Pero en este caso habrá mayor número de ciclos (descenso-ascenso).

12

Fuerzas y energía

Fuerzas y energía

12

PARA COMENZAR (página 355)

- **Investiga la localización en el mundo de las bases de lanzamiento de cohetes espaciales.**

  En el siguiente enlace podemos consultar las principales bases de lanzamiento de cohetes espaciales y su localización:

  http://www.upv.es/satelite/trabajos/pracGrupo20/sitios.htm

  Resumimos la información encontrada a continuación:

	Lugar de lanzamiento	Localización
América del Norte	Cabo Cañaveral Eastern Test Range Centro Espacial Kennedy	Florida, EE. UU.
	Base Aérea Militar Vandenberg Western Test Range	California, EE. UU.
	Wallops Pacific Missile Range (PMR)	Fit Facil, Virginia, EE. UU.
Asia	Jiuquan Shuang Ch'eng Tsu	China
	Kagoshima Space Center	Uchinoura, Kagoshima, Japón
	Palmachim	Israel
	Cosmódromo Plesestk	Arkhangelsk Oblast, Rusia
	Sriharikota	Sriharikota island, Andra Pradesh, India
	Cosmódromo Svobodniy	Amur Oblast, Rusia
	Tanegashima	Tanega Island, Japón
	Tyuratam Baikonur	Kazakhstan
	Xichang	China
América del Sur	Centro Espacial Guayana	Kourou, Guayana Francesa

- **Busca información sobre los diferentes tipos de órbitas de satélites artificiales. ¿Qué tipos de satélites son los más abundantes?**

  En función del tipo de órbita, podemos hacer la siguiente clasificación de los satélites artificiales:

  - **LEO.** (*Low Earth Orbit*, órbitas bajas). Orbitan alrededor de la Tierra entre 200 y 2000 km de altura. Se emplean para proporcionar datos sobre el movimiento de las placas terrestres y en telefonía vía satélite.
  - **MEO.** (*Medium Earth Orbit*, órbitas medias). Orbitan a una altura de entre 2000 y 35 786 km. Su uso se destina a comunicaciones de telefonía y televisión, y a las mediciones de experimentos espaciales.
  - **HEO.** (*Highly Elliptical Orbit*, órbitas muy elípticas). Se aplican en cartografía y espionaje, ya que pueden detectar un ángulo de superficie terrestre según se elija.
  - **Satélites geoestacionarios.** Se ve siempre un mismo punto de la Tierra. Se encuentran a 35 786 km sobre el ecuador. Se utilizan en emisiones de televisión y de telefonía, en transmisión de datos a larga distancia y en detección y difusión de datos meteorológicos.

  Los más abundantes son los satélites geoestacionarios, ya que presentan la ventaja de permanecer casi fijos con respecto a una determinada estación terrestre. Así, las estaciones terrestres no requieren de equipos de rastreo.

PRACTICA (página 337)

1. Calcula la fuerza de repulsión entre dos electrones separados una distancia de 1 μm.

Dato: $q_e = -1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C.

Aplicamos la ley de Coulomb:

$$F = k \cdot \frac{|q_1 \cdot q_2|}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{\left|-1{,}60 \cdot 10^{-19} \ \text{C} \cdot \left(-1{,}60 \cdot 10^{-19} \ \text{C}\right)\right|}{(1 \cdot 10^{-6} \ \text{m})^2} = \mathbf{2{,}30 \cdot 10^{-16} \ N}$$

2. Calcula la fuerza con que se atraen la Tierra y la Luna conociendo los siguientes datos:

- **Masa de la Tierra = $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg.**
- **Masa de la Luna = $7{,}20 \cdot 10^{22}$ kg.**
- **Distancia de la Tierra a la Luna = $3{,}84 \cdot 10^5$ km.**

Calculamos la fuerza gravitatoria entre la Tierra y la Luna aplicando la ley de gravitación universal:

$$F = G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{(d_{T-L})^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24} \ \text{kg} \cdot 7{,}20 \cdot 10^{22} \ \text{kg}}{\left(3{,}84 \cdot 10^8 \ \text{m}\right)^2} = \mathbf{1{,}94 \cdot 10^{20} \ N}$$

3. Con los datos y la solución del ejercicio anterior calcula la velocidad de la Luna en su órbita alrededor de la Tierra.

Cuando un cuerpo orbita alrededor de otro se cumple:

$$F_C = m \cdot a_N \text{ donde } a_N = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad F = M_L \cdot \frac{v^2}{R} = M_L \cdot \frac{v^2}{d_{\text{Tierra-Luna}}}$$

Aplicando la ley de la gravitación universal:

$$F = G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{d^2_{\text{Tierra-Luna}}}$$

Igualando ambas fuerzas obtenemos y despejando la velocidad orbital de la Luna:

$$F = G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{M_L}}{d^2_{\text{Tierra-Luna}}} = \cancel{M_L} \cdot \frac{v^2}{d_{\text{Tierra-Luna}}} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{d_{\text{Tierra-Luna}}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \ \text{kg}}{3{,}84 \cdot 10^8 \ \text{m}}} = \mathbf{1018 \ m/s}$$

4. Un levantador de pesas consigue elevar 107 kg desde el suelo hasta una altura de 2 m y los aguanta 20 segundos arriba. Calcula el trabajo que realiza:

a) Mientras levanta las pesas.

b) Mientras las mantiene levantadas.

Dato: g = 9,8 m/s.

a) El trabajo que realiza la fuerza peso mientras levanta las pesas es:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta y \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \Delta y \cdot \cos\alpha$$

En este caso, el peso es paralelo a la dirección de movimiento, por tanto, $\alpha = 0°$. Sustituimos los datos y resolvemos:

$$W = 107 \ \text{kg} \cdot 9{,}8 \ \text{m/s}^2 \cdot 2 \ \text{m} \cdot \cos 0° = \mathbf{2097{,}2 \ J}$$

b) En este caso, el trabajo realizado es nulo, puesto que no existe desplazamiento, $\Delta\vec{r} = \vec{0}$:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{0} = \mathbf{0 \ J}$$

ACTIVIDAD (página 338)

5. **Una vieja máquina de *pinball* lanza una bola de acero de 50 g con un muelle de constante 10^3 N/m y que se comprime 4 cm. Al lanzar la bola debe salvar una altura de 10 cm. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².**

a) Calcula la energía que almacena el muelle al comprimirlo.

b) Determina la energía potencial de la bola en lo alto de la máquina.

a) La energía potencial elástica almacenada por el muelle al comprimirlo será:

$$E_{\text{P,e}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \text{ N/m} \cdot (0{,}04 \text{ m})^2 = \mathbf{0{,}8\ J}$$

b) Calculamos la energía potencial gravitatoria de la bola en lo alto de la máquina:

$$E_{\text{P,g}} = m \cdot g \cdot h = 0{,}050 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}10 \text{ m} = \mathbf{0{,}049\ J}$$

ACTIVIDADES (página 340)

6. **Un oscilador armónico se encuentra en un instante determinado en una posición que es igual a un tercio de su amplitud *A*. Determina para dicho instante la relación existente entre la energía cinética y la energía potencial (E_C/E_P).**

Utilizamos las expresiones:

$$\begin{cases} E_{\text{P,e}} = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \\ E_{\text{C}} = E_{\text{M}} - E_{\text{P,e}} = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 - \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot \left(A^2 - x^2\right) \end{cases}$$

Obtenemos la relación entre ambas:

$$\frac{E_{\text{C}}}{E_{\text{P,e}}} = \frac{\cancel{\dfrac{1}{2}} \cdot \cancel{k} \cdot \left(A^2 - x^2\right)}{\cancel{\dfrac{1}{2}} \cdot \cancel{k} \cdot x^2} = \frac{A^2 - x^2}{x^2}$$

Como $x = \dfrac{1}{3} \cdot A$, obtenemos:

$$\frac{E_{\text{C}}}{E_{\text{P,e}}} = \frac{\cancel{\dfrac{1}{2}} \cdot \cancel{k} \cdot \left(A^2 - x^2\right)}{\cancel{\dfrac{1}{2}} \cdot \cancel{k} \cdot x^2} = \frac{A^2 - \left(\dfrac{A}{3}\right)^2}{\left(\dfrac{A}{3}\right)^2} = \frac{\cancel{A^2} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{9}\right)}{\cancel{A^2} \cdot \dfrac{1}{9}} = \mathbf{8}$$

7. **Una partícula describe un movimiento vibratorio armónico de amplitud A y pulsación ω. Si duplicamos a la vez la amplitud y el periodo del movimiento, ¿cambiará la energía cinética de la partícula cuando pase por el punto central de la oscilación? ¿Cambiará su energía potencial en ese punto? Justifica la respuesta.**

En este problema:

$$\begin{cases} E_{\text{C}} = E_{\text{M}} - E_{\text{P,e}} = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 - \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x^2) \\ E_{\text{P,e}} = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \end{cases}$$

En el punto central de la oscilación, $x = 0$ m, por lo que la energía potencial será nula. En ese punto:

$$E_{\text{C}} = E_{\text{M}} + 0 \quad \Rightarrow \quad E_{\text{C}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

Para el oscilador armónico:

$$k = m \cdot \omega^2 = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot A^2 = m \cdot 2\pi^2 \cdot \left(\frac{A}{T}\right)^2$$

Si se duplican a la vez la amplitud y el periodo:

$$A' = 2 \cdot A \text{ y } T' = 2 \cdot T \quad \Rightarrow \quad E'_C = m \cdot 2\pi^2 \cdot \left(\frac{\cancel{2} \cdot A}{\cancel{2} \cdot T}\right)^2 = E_C$$

Es decir, la energía cinética no varía.

La energía potencial:

$$E_{P,e} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \text{ frente a } E'_{P,e} = \frac{1}{2} \cdot k' \cdot x^2$$

Al tratarse de la posición $x = 0$ m, ambas son iguales a cero.

ACTIVIDAD (página 342)

8. **¿A qué distancia deben situarse dos cargas iguales de 10 μC para que la energía potencial eléctrica del sistema sea de 10 J? Dato: 9 · 10⁹ N · m² · C⁻².**

$$E_{P,E} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d} \quad \Rightarrow \quad d = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{E_{P,E}} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-5}\text{ C} \cdot 1 \cdot 10^{-5}\text{ C}}{10\text{ J}} = 0{,}09\text{ m} = \mathbf{9\text{ cm}}$$

ACTIVIDADES (página 345)

9. **Un haz de partículas de ion amonio, NH_4^+, tiene una velocidad inicial de 4,5 · 10^4 m/s, el haz está sometido a una diferencia de potencial de 150 V para frenarlo. Calcula la velocidad final de los iones.**
Datos: 1 u = 1,661 · 10^{-27} kg; q = 1,602 · 10^{-19} C.

Calculamos la masa del amonio y pasamos a unidades del SI:

$$m(NH_4^+) = (14{,}01 + 1{,}008 \cdot 4)\text{ u} = 18{,}042\text{ u}$$

$$18{,}042\,\cancel{\text{u}} \cdot \frac{1{,}661 \cdot 10^{-27}\text{ kg}}{1\,\cancel{\text{u}}} = 2{,}997 \cdot 10^{-26}\text{ kg}$$

Utilizamos la expresión de la velocidad final para una partícula sometida a una diferencia de potencial:

$$v_{\text{fin}} = \sqrt{v_{\text{ini}}^2 - 2 \cdot \frac{q}{m} \cdot \Delta V}$$

Sustituimos los datos y calculamos:

$$v_{\text{fin}} = \sqrt{\left(4{,}5 \cdot 10^4\text{ m/s}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\text{ C}}{2{,}997 \cdot 10^{-26}\text{ kg}} \cdot 150\text{ V}} = 2{,}053 \cdot 10^4\text{ m/s} \approx \mathbf{2{,}1 \cdot 10^4\text{ m/s}}$$

10. **Calcula la diferencia de potencial necesaria para que la velocidad de un catión plata, Ag^+, aumente desde los 10 m/s a los 1000 m/s. Datos: 1 u = 1,661 · 10^{-27} kg; $q_{Ag^+} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.**

Calculamos la masa del catión plata en unidades del SI:

$$m(Ag^+) = 107{,}9\,\cancel{\text{u}} \cdot \frac{1{,}661 \cdot 10^{-27}\text{ kg}}{1\,\cancel{\text{u}}} = 1{,}79 \cdot 10^{-25}\text{ kg}$$

A este cambio en la energía cinética le corresponde un trabajo y como todas las fuerzas son conservativas:

$$\Delta E_C = -q \cdot \Delta V \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v_{\text{fin}}^2 - v_{\text{ini}}^2\right) = -q \cdot \Delta V$$

Despejamos, sustituimos los datos y calculamos:

$$\Delta V = -\frac{m \cdot \left(v_{\text{fin}}^2 - v_{\text{ini}}^2\right)}{2 \cdot q} = -\frac{1{,}79 \cdot 10^{-25}\ \text{kg} \cdot \left[(1000\ \text{m/s})^2 - (10\ \text{m/s})^2\right]}{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = \mathbf{-0{,}56\ V}$$

ACTIVIDAD (página 347)

11. Calcula la velocidad mínima con que debe lanzarse una sonda desde la superficie de la Tierra para que alcance 200 km de altura. ¿Con qué velocidad mínima debería lanzarse para llevar la sonda al infinito?
Datos: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Por el principio de conservación de la energía mecánica, y teniendo en cuenta que al alcanzar la altura final la velocidad se anula $v_{\text{fin}} = 0$ m/s:

$$E_{\text{M,ini}} = E_{\text{M,fin}} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{C,ini}} + E_{\text{P,G,ini}} = E_{\text{C,fin}} + E_{\text{P,G,fin}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{\text{ini}}^2 - G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m}}{R_T} = 0 - G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m}}{R_T + h}$$

Despejamos la velocidad inicial:

$$v_{\text{ini}} = \sqrt{2 \cdot G \cdot M_T \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)}$$

$$v_{\text{ini}} = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot \left(\frac{1}{3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m}} - \frac{1}{3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m} + 2 \cdot 10^5\ \text{m}}\right)} = \mathbf{1951\ m/s}$$

Para llevar la sonda hasta el infinito debemos calcular la velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m}}} = \mathbf{11\,181\ m/s}$$

ACTIVIDADES (página 348)

12. Determina la energía mecánica total de la Luna en su órbita, supuesta la órbita alrededor de la Tierra un MCU.
Datos: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $m_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg; $r_{T\text{-}L} = 3{,}84 \cdot 10^8$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

La energía mecánica en la órbita es:

$$E_M = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_L}{2 \cdot r_{T\text{-}L}} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m}} = \mathbf{-3{,}81 \cdot 10^{28}\ J}$$

13. Suponiendo que la Luna describe una órbita circular con velocidad uniforme y sabiendo que emplea 27 días 7 horas 43 min y 11,5 s en completar la órbita, calcula qué velocidad lleva en su órbita y el radio de la órbita. Datos: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Pasamos el periodo a unidades del sistema internacional:

$$T = 27\ \cancel{\text{días}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} + 7\ \cancel{\text{h}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} + 43\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} + 11{,}5\ \text{s} = 2\,360\,591{,}5\ \text{s}$$

A partir de la velocidad en la órbita:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r_{\text{órbita}}}} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{G \cdot M}{r_{\text{órbita}}}$$

Y la expresión de la velocidad en un movimiento circular y uniforme:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r_{\text{órbita}} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r_{\text{órbita}}^2}{T^2}$$

Igualamos ambas ecuaciones y despejamos el radio:

$$\frac{G \cdot M}{r_{\text{órbita}}} = \frac{4\pi^2 \cdot r_{\text{órbita}}^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad r_{\text{órbita}} = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

Sustituimos los datos y resolvemos:

$$r_{\text{órbita}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \ \text{kg} \cdot (2\,360\,591{,}5 \ \text{s})^2}{4\pi^2}} = \mathbf{3{,}83 \cdot 10^8 \ m}$$

Sustituimos en cualquiera de las dos expresiones anteriores y calculamos la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r_{\text{órbita}}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \ \text{kg}}{3{,}83 \cdot 10^8 \ \text{m}}} = \mathbf{1020 \ m/s}$$

ACTIVIDADES FINALES (página 352)

Fuerza elástica y energía

14. Se tienen dos muelles idénticos. Si después de estirados uno tiene el doble de longitud que el otro, ¿tendrá también el doble de energía potencial? En caso negativo, qué longitud deberían tener los dos muelles para que sí sea el doble.

Al estirarse cada muelle:

$$\left.\begin{array}{l} l_0 + x = l_1 \\ l_0 + x' = l_2 \end{array}\right\}$$

La energía potencial de ambos muelles es:

$$E_{\text{P,e1}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \qquad E_{\text{P,e2}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x'^2$$

Si después de estirarlos el muelle 2 tiene doble longitud que el muelle 1, se cumple:

$$l_2 = 2 \cdot l_1 \quad \Rightarrow \quad l_0 + x' = 2 \cdot (l_0 + x) \quad \Rightarrow \quad l_0 + x' = 2 \cdot l_0 + 2 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x' = l_0 + 2 \cdot x$$

Por tanto:

$$E_{\text{P,e2}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (l_0 + 2 \cdot x)^2$$

Comparando ambas energías potenciales:

$$\frac{E_{\text{P,e2}}}{E_{\text{P,e1}}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{k} \cdot (l_0 + 2 \cdot x)^2}{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{k} \cdot x^2} = \left(\frac{l_0 + 2 \cdot x}{x}\right)^2 = \left(\frac{l_0}{x} + 2\right)^2$$

Por tanto, el muelle 2 no tiene el doble de energía potencial que el muelle 1.

Para que la energía potencial del muelle 2 sea el doble que la del muelle 1, debe cumplirse que:

$$E_{P,e2} = 2 \cdot E_{P,e1} \quad \Rightarrow \quad \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{k} \cdot x'^2 = 2 \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{k} \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad x' = \sqrt{2 \cdot x^2} \quad \Rightarrow \quad x' = \sqrt{2} \cdot x$$

Por tanto, la longitud de cada muelle debería ser:

$$l_1 = l_0 + x$$
$$l_2 = l_0 + x' = l_0 + \sqrt{2} \cdot x$$

15. ¿Qué tiene más energía potencial, un cuerpo de 10 kg a una altura de 5 m o un muelle con *k* = 30 N/cm deformado 40 cm? Dato: *g* = 9,8 m/s².

$$\left.\begin{array}{l} E_{P,G,cuerpo} = m \cdot g \cdot h = 10\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 5\ \text{m} = 490\ \text{J} \\ E_{P,e,muelle} = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^3\ \text{N/m} \cdot (0{,}40\ \text{m})^2 = 240\ \text{J} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{E_{P,G,cuerpo} > E_{P,e,muelle}}$$

16. Se coloca un muelle de 15 cm de longitud y constante elástica *k* = 50 N/m verticalmente sobre una superficie horizontal y se comprime 5 cm. Sobre el muelle se coloca una bolita de masa 25 g apoyada en su extremo. Si ahora se deja libre el conjunto, calcula la velocidad con que sale despedida la esfera al dejar libre el muelle y la máxima altura *h* que alcanzaría.

Calculamos la energía potencial elástica:

$$E_{P,e} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 50\ \text{N/m} \cdot (0{,}05\ \text{m})^2 = 0{,}0625\ \text{J}$$

Como las fuerzas que actúan son conservativas, por el principio de conservación de la energía mecánica, $E_{P,e,ini} = E_{C,fin}$:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}0625\ \text{J}}{0{,}025\ \text{kg}}} = \mathbf{2{,}24\ m/s}$$

De nuevo por el principio de conservación de la energía mecánica, $E_{C,ini} = E_{P,G,fin}$, calculamos la altura que alcanza:

$$E_{P,G} = m \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{E_{P,G}}{m \cdot g} = \frac{0{,}0625\ \text{J}}{0{,}025\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2} = \mathbf{0{,}26\ m}$$

17. Una partícula de masa *m* = 0,1 kg oscila armónicamente en la forma $x = A \cdot \text{sen}\,\omega \cdot t$, con amplitud *A* = 0,2 m y frecuencia angular $\omega = 2\pi$ rad/s.

a) Calcula la energía mecánica de la partícula.

b) Determina y representa gráficamente las energías potencial y cinética de *m* en función de la elongación *x*.

a) Se puede obtener la energía mecánica de la partícula a partir de la expresión:

$$E_M = E_C + E_{P,e} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x^2) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

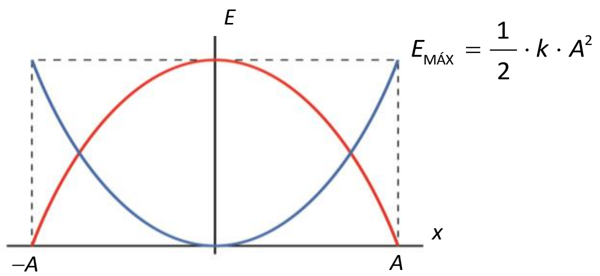
Para un oscilador armónico $k = m \cdot \omega^2$:

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1\ \text{kg} \cdot (2\pi\ \text{rad/s})^2 \cdot (0{,}2\ \text{m})^2 = \mathbf{7{,}90 \cdot 10^{-2}\ J}$$

b) En este caso:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x^2)$$

$$E_{P,e} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$



18. **De un resorte de 40 cm de longitud se cuelga un peso de 50 g de masa y, alcanzado el equilibrio, la longitud del resorte es de 45 cm. Se estira 6 cm con la mano la masa y se suelta. Deduce la ecuación de la energía potencial elástica. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².**

Obtendremos la constante k a partir de la fuerza peso:

$$P = -F_e \quad \Rightarrow \quad m \cdot g = -(-k \cdot \Delta x) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{m \cdot g}{\Delta x} = \frac{m \cdot g}{l_1 - l_0} = \frac{0{,}050 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{0{,}45 \text{ m} - 0{,}40 \text{ m}} = 9{,}8 \ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

La energía potencial elástica del muelle en reposo es:

$$E_{\text{P,e}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta x)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{\cancel{\Delta x}} \cdot (\Delta x)^{\cancel{2}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot (l_1 - l_0)$$

$$E_{\text{P,e}} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}050 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot (0{,}45 \text{ m} - 0{,}40 \text{ m}) = 4{,}41 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

Hay que añadir la energía potencial elástica del muelle en la oscilación. La amplitud del movimiento es 0,06 m y la elongación x cambia con el tiempo según la ecuación:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0)$$

Dado que al iniciarse la oscilación el muelle está estirado hacia abajo, en $t = 0$ s la elongación $x = -0{,}06$ m:

$$-0{,}06 \text{ m} = 0{,}06 \text{ m} \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 \text{ s} + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad \text{sen } \phi_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \frac{-\pi}{2}$$

De la dinámica del oscilador armónico:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \text{ N/m}}{0{,}050 \text{ kg}}} = 14 \text{ rad/s}$$

Al sustituir, queda que la elongación x cambia con el tiempo según la ecuación:

$$x = 0{,}06 \cdot \text{sen}\left(14 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) m$$

La energía potencial elástica del muelle en la oscilación es:

$$E'_{\text{P,e}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot \left[0{,}06 \cdot \text{sen}\left(14 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = 1{,}764 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}^2\left(14 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La energía potencial elástica en conjunto es:

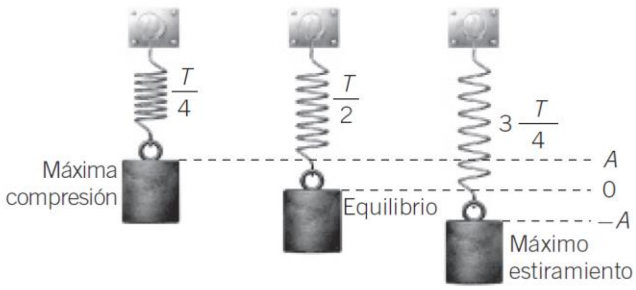
$$E_{\text{P,e,T}} = E_{\text{P,e}} + E'_{\text{P,e}} = 4{,}41 \cdot 10^{-2} + 1{,}764 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}^2\left(14 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ J}$$

$$E_{\text{P,e,T}} = \mathbf{1{,}764 \cdot 10^{-2} \cdot \left[2{,}5 + \text{sen}^2\left(14 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)\right] \text{ J}}$$

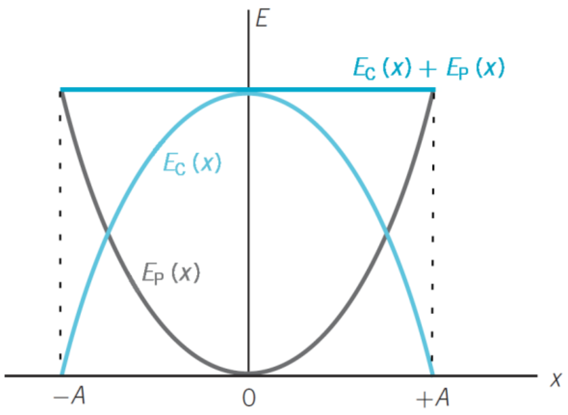
19. **Un bloque de 0,5 kg cuelga del extremo inferior de un resorte de constante elástica $k = 72$ N/m. Al desplazar el bloque verticalmente hacia abajo de su posición de equilibrio, comienza a oscilar. Pasa por el punto de equilibrio con una velocidad de 6 cm/s. Razona los cambios energéticos que se producen en el proceso.**

Observamos los cambios energéticos que tiene lugar en la oscilación de un MAS producida por un resorte, tal y como se plantea en el enunciado:

- En el punto de máxima compresión: la energía cinética es nula, y la energía potencial máxima.
- En el punto de equilibrio: la energía cinética es máxima, y la energía potencial mínima.
- En el punto de máximo estiramiento: la energía cinética es nula, y la energía potencial, máxima.



La fuerza elástica es una fuerza conservativa así que, de acuerdo con el teorema de conservación de la energía mecánica, la energía mecánica total es constante. Sumando ambas energías siempre resulta un valor constante.



Como se puede observar en el gráfico del apartado anterior, al pasar por el punto de equilibrio se tiene la velocidad máxima del MAS, $v = \omega \cdot A$. Por otra parte, conocemos el valor de la constante de elasticidad del resorte, que en función de la frecuencia angular puede expresarse como $k = m \cdot \omega^2$.

A partir de este último dato obtendremos el valor de la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{72\ \text{N/m}}{0{,}5\ \text{kg}}} = 12\ \text{rad/s}$$

Por tanto:

$$v = 6\frac{\cancel{\text{cm}}}{\text{s}} \cdot \frac{1\ \text{m}}{100\ \cancel{\text{cm}}} = 0{,}06\ \text{m/s}$$

$$A = \frac{v}{\omega} = \frac{0{,}06\ \text{m/s}}{12\ \text{rad/s}} = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

En el punto de equilibrio del oscilador la energía potencial será nula, y la energía cinética será máxima e igual a la energía mecánica total:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5\ \text{kg} \cdot (0{,}06\ \text{m/s})^2 = 9 \cdot 10^{-4}\ \text{J}$$

$$E_{P,e} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_{\text{equilibrio}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 72\ \text{N/m} \cdot (0\ \text{m})^2 = 0\ \text{J}$$

En los extremos de la oscilación la energía cinética será nula y la energía potencial será igual a la energía mecánica total.

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{extremo}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5\ \text{kg} \cdot (0\ \text{m/s})^2 = 0\ \text{J}$$

$$E_{P,e} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 72\ \text{N/m} \cdot (0{,}05\ \text{m})^2 = 9 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

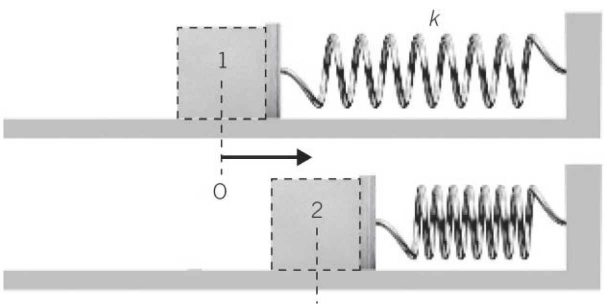
20. Un cuerpo de 5 kg se desplaza sobre una superficie sin rozamiento a una velocidad de 3 m/s. En un momento dado impacta con un resorte y queda unido a él vibrando como un oscilador armónico. Si el muelle tiene una constante k = 750 N/m, determina.

a) La máxima compresión que puede alcanzar el muelle.

b) La velocidad del oscilador cuando se encuentre a la mitad de la compresión máxima.

a) La energía cinética del cuerpo que se desliza se transforma en energía potencial elástica del resorte.

La energía cinética inicial coincide con la energía potencial del resorte en estado de compresión máxima. De acuerdo con el principio de conservación de la energía:



$$E_{M,1} = E_{M,2} \quad \Rightarrow \quad E_{C,1} + E_{P,1} = E_{C,2} + E_{P,2}$$

$$E_{C,1} + 0 = 0 + E_{P,2}$$

Calculamos la energía cinética que tenía el cuerpo en su movimiento:

$$E_{C,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 5\text{ kg} \cdot (3\text{ m/s})^2 = 22{,}5\text{ J}$$

Esta energía coincide con la energía potencial máxima del resorte:

$$E_{P,2} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{P,2}}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 22{,}5\text{ J}}{750\text{ N/m}}} = 0{,}245\text{ m}$$

La máxima compresión que puede alcanzar el muelle es A = **0,245 m**.

b) La velocidad se puede expresar así: $v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$

A partir de k:

$$k = m \cdot \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

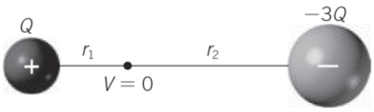
Como queremos encontrar la velocidad cuando x = A/2, entonces:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m} \cdot \left[A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2\right]} = A \cdot \sqrt{\frac{k}{m} \cdot \frac{3}{4}} = 0{,}245\text{ m} \cdot \sqrt{\frac{750\text{ N/m}}{5\text{ kg}} \cdot \frac{3}{4}} = \mathbf{2{,}60\text{ m/s}}$$

Fuerza eléctrica y energía

21. Dos cargas, *q* y –3 · *q*, están separadas una distancia *d*. ¿En qué punto de la línea que une ambas cargas se anula el potencial?

$$V = V_1 + V_2 = k \cdot \frac{q_1}{r_1} + k \cdot \frac{q_2}{r_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cancel{k} \cdot \frac{\cancel{q_1}}{x} - \cancel{k} \cdot \frac{3 \cdot \cancel{q_1}}{d - x} = 0$$

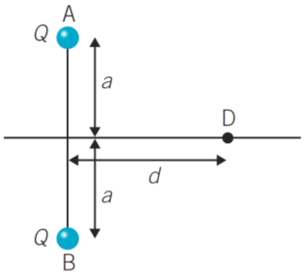


$$\frac{1}{x} = \frac{3}{d - x} \quad \Rightarrow \quad d - x = 3 \cdot x \quad \Rightarrow \quad d = 4 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{d}{4}$$

El potencial se anula a **d/4 de la carga positiva**.

22. Dos cargas positivas e iguales están situadas en el eje *Y*; una está situada en *y* = *a*, y la otra, en *y* = –*a*. Calcula el potencial eléctrico en un punto situado sobre el eje *X* y a una distancia *d* del origen. ¿Cómo varía el resultado si *a* >> *d*? ¿Y si es *d* >> *a*?

Obtenemos el potencial creado en el punto D (d, 0) por las cargas de valor q situadas en A (0, a) y B (0, –a). Para ello, en virtud el principio de superposición:



$$r_A = r_B = \sqrt{a^2 + d^2}$$

$$V_A = V_B = k \cdot \frac{q}{r} = k \cdot \frac{q}{\sqrt{a^2 + d^2}}$$

$$V_D = V_A + V_B = 2 \cdot k \cdot \frac{q}{\sqrt{a^2 + d^2}}$$

- Si a >> d:

$$\sqrt{a^2 + d^2} \simeq a \quad \Rightarrow \quad V_D = 2 \cdot k \cdot \frac{q}{a}$$

- Si d >> a:

$$\sqrt{a^2 + d^2} \simeq d \quad \Rightarrow \quad V_D = 2 \cdot k \cdot \frac{q}{d}$$

23. Indica en tu cuaderno si cada frase se cierta, o no, justificando tu respuesta. Una partícula con carga eléctrica positiva se deja en libertad en un punto de un campo eléctrico. Se moverá:

a) En el sentido de los potenciales crecientes.

b) En el sentido de los potenciales decrecientes.

c) La partícula no se mueve a menos que sobre ella se aplique otra fuerza.

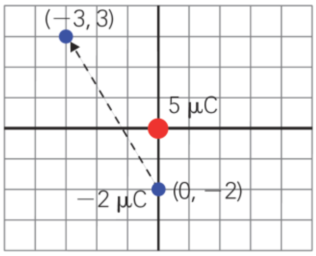
a) **Falsa**. Se moverá en el sentido de los potenciales decrecientes.

b) **Verdadera**.

c) **Falsa**. No es necesaria otra fuerza además de la propia del campo eléctrico.

ACTIVIDADES FINALES (página 353)

24. Una carga eléctrica de 5 μC se encuentra fija en el origen de coordenadas. Otra carga de –2 μC pasa del punto (0, –2) m al punto (–3, 3) m. Calcula el trabajo realizado por las fuerzas del campo. Dato: $k = 9 \cdot 10^9$ N · m²/C².



El trabajo realizado por las fuerzas del campo cuando una carga pasa de un punto a otro del campo eléctrico es:

$$W = -\Delta E_{P,e} = -q \cdot \Delta V = -q \cdot (V_2 - V_1) = q \cdot (V_1 - V_2)$$

$$V_1 = k \cdot \frac{q}{r_1} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{2\ \text{m}} = 22\,500\ \text{V}$$

$$V_2 = k \cdot \frac{q}{r_1} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{\sqrt{18}\ \text{m}} = 10\,6067\ \text{V}$$

$$W = q \cdot (V_1 - V_2) = -2 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot (22\,500\ \text{V} - 10\,606{,}6\ \text{V}) = \mathbf{0{,}0238\ J}$$

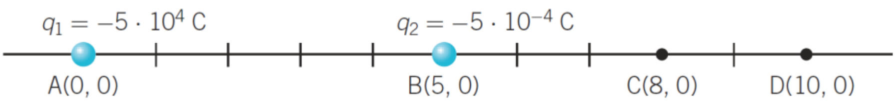
25. Se aceleran unas partículas α, $^{4}_{2}\text{He}^{2+}$, a través de una diferencia de potencial de 2000 V. Halla la velocidad que adquieren desde el reposo. Datos: $q_\alpha = +3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C; $m_\alpha = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg.

Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica, $\Delta E_C = -\Delta E_P$:

$$\Delta E_C = -\left(-q \cdot \Delta V\right) = q \cdot \Delta V \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = q \cdot \Delta V$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 2000\ \text{V}}{6{,}64 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}} = \mathbf{4{,}39 \cdot 10^5\ m/s}$$

26. Dos cargas puntuales de –5 · 10⁻⁴ C están fijas en los puntos $x = 0$ y $x = 5$ cm del eje *OX*. Calcula el potencial electrostático, *V*, en los puntos $x = 8$ cm y $x = 10$ cm. Si se abandona en reposo una partícula de masa $m = 5$ mg y carga positiva $q = +10^{-9}$ C en el punto $x = 10$ cm, ¿cuál será su velocidad al pasar por $x = 8$ cm?



Utilizamos el principio de superposición para calcular el potencial que ambas cargas crean en los puntos C y D.

- Potencial creado por q_1 y q_2 en C:

$$V_{1C} = k \cdot \frac{q_1}{r_{AC}} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(-5 \cdot 10^{-4}\ \text{C})}{0{,}08\ \text{m}} = -5{,}625 \cdot 10^7\ \text{V}$$

$$V_{2C} = k \cdot \frac{q_2}{r_{BC}} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(-5 \cdot 10^{-4}\ \text{C})}{0{,}03\ \text{m}} = -1{,}5 \cdot 10^8\ \text{V}$$

Sumando:

$$V_C = V_{1C} + V_{2C} = -5{,}625 \cdot 10^7\ \text{V} + \left(-1{,}5 \cdot 10^8\ \text{V}\right) = \mathbf{-2{,}0625 \cdot 10^8\ V}$$

- Potencial creado por q_1 y q_2 en D:

$$V_{1D} = k \cdot \frac{q_1}{r_{AD}} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(-5 \cdot 10^{-4}\ \text{C})}{0{,}1\ \text{m}} = -4{,}5 \cdot 10^7\ \text{V}$$

$$V_{2D} = k \cdot \frac{q_2}{r_{BD}} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(-5 \cdot 10^{-4}\ \text{C})}{0{,}05\ \text{m}} = -9 \cdot 10^7\ \text{V}$$

Sumando:

$$V_D = V_{1D} + V_{2D} = -4{,}5 \cdot 10^7\ \text{V} + \left(-9 \cdot 10^7\ \text{V}\right) = \mathbf{-1{,}35 \cdot 10^8\ V}$$

Dado que la interacción electrostática es conservativa, haremos uso del principio de conservación de la energía mecánica para calcular la velocidad que alcanza la partícula al pasar por el punto C cuando es liberada en D en reposo ($v_D = 0$):

$$E_{C,D} + E_{P,D} = E_{C,C} + E_{P,C} \quad \Rightarrow \quad 0 + q \cdot V_D = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_C^2 + q \cdot V_C \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot (V_D - V_C)}{m}}$$

Sustituyendo los datos y operando:

$$v_C = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-9}\ \text{C} \cdot \left[-1{,}35 \cdot 10^8\ \text{V} - \left(-2{,}0625 \cdot 10^8\ \text{V}\right)\right]}{5 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}}} = \mathbf{5{,}34\ m/s}$$

27. **En una región del espacio existe un campo eléctrico uniforme vertical, de manera que la diferencia de potencial entre dos puntos situados uno encima del otro y distantes 2 cm es de 100 V. Si un electrón se abandona en reposo en el punto de menor potencial, ¿con qué velocidad llegará al otro punto?**
Datos: masa del electrón: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; carga del electrón: $q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $k = 9 \cdot 10^9$ N · m²/C².

Suponiendo que las únicas fuerzas que actúan sobre el sistema son las fuerzas electrostáticas:

$$E_{C,ini} + E_{P,E,ini} = E_{C,fin} + E_{P,E,fin} \quad \Rightarrow \quad -E_{P,E,fin} + E_{P,E,ini} = E_{C,fin} - 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{P,E} = E_{C,fin}$$

$$-q_e \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_{fin}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{fin} = \sqrt{\frac{-2 \cdot q_e \cdot (V_D - V_C)}{m_e}}$$

Sustituyendo los datos:

$$v_{fin} = \sqrt{\frac{-2 \cdot (-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}) \cdot 100\ \text{V}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = \mathbf{5{,}93 \cdot 10^6\ m/s}$$

28. **Un protón se acelera desde el reposo atravesando una zona de cierta diferencia de potencial, ΔV. Calcula el valor de ΔV si sale con una velocidad de $1{,}2 \cdot 10^6$ m/s. Datos: $q_p = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.**

A este cambio en la energía cinética le corresponde un trabajo y como todas las fuerzas son conservativas:

$$\Delta E_C = -\Delta E_P = -\left(-q \cdot \Delta V\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v_{fin}^2 - v_{ini}^2\right) = q \cdot \Delta V$$

Sustituimos los datos y calculamos:

$$\Delta V = \frac{m \cdot \left(v_{fin}^2 - v_{ini}^2\right)}{2 \cdot q} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot \left[\left(1{,}2 \cdot 10^6\ \text{m/s}\right)^2 - \left(0\ \text{m/s}\right)^2\right]^2}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = \mathbf{7515\ V}$$

Fuerza gravitatoria y energía

29. **Indica si es cierta o no la siguiente expresión:**

«Si el valor de la energía potencial gravitatoria de la masa *m* debida a una masa M_1 en un punto A es –8 J/kg y la energía de *m* en ese mismo punto causada por una masa M_2 es –4 J/kg, la energía debida a la acción conjunta de las masas M_1 y M_2 en el punto A es –12 J/kg».

Es **verdadera**, ya que en virtud del principio de superposición, con el potencial gravitatorio es una función escalar, el total se obtiene como la suma escalar de los potenciales gravitatorios creados por cada masa.

30. **Dadas dos masas, M_1 y M_2, ¿existirá algún punto del espacio en el que la energía potencial gravitatoria de una tercera masa, *m*, provocada por esas dos masas sea cero?**

No, pues es acumulativo por el principio de superposición. Si la energía potencial gravitatoria es negativa siempre, la resultante de la suma será distinta de cero.

31. En los tres vértices de un triángulo equilátero de 10 m de lado colocamos masas puntuales de 2, 3 y 0,5 kg, las tres inicialmente en reposo. Las masas de 2 y 3 kg permanecen fijas, mientras que la masa de 0,5 kg se desplaza hasta el punto medio del segmento que une las otras dos. ¿Con qué velocidad llega a este punto medio? Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Calculamos la energía potencial que las dos masas crean en cada uno de estos puntos:

$$E_{P,G,ini} = E_{P,G,A} + E_{P,G,B} = -G \cdot \frac{m_A \cdot m}{L} - G \cdot \frac{m_B \cdot m}{L} = -\frac{G \cdot m}{L} \cdot (m_A + m_B)$$

$$E_{P,G,ini} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 0{,}5 \text{ kg}}{10 \text{ m}} \cdot (2 \text{ kg} + 3 \text{ kg}) = -1{,}6675 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

$$E_{P,G,fin} = E_{P,G,A} + E_{P,G,B} = -G \cdot \frac{m_A \cdot m}{L/2} - G \cdot \frac{m_B \cdot m}{L/2} = -\frac{2 \cdot G \cdot m}{L} \cdot (m_A + m_B)$$

$$E_{P,G,fin} = -\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 0{,}5 \text{ kg}}{10 \text{ m}} \cdot (2 \text{ kg} + 3 \text{ kg}) = -3{,}3350 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

La gravedad es una fuerza conservativa, así que la variación de la energía mecánica se conserva:

$$E_{C,ini} + E_{P,G,ini} = E_{C,fin} + E_{P,G,fin} \quad \Rightarrow \quad E_{C,fin} = E_{C,ini} + E_{P,G,ini} - E_{P,G,fin}$$

$$E_{C,fin} = 0 + E_{P,G,ini} - E_{P,G,fin} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{fin}^2 = E_{P,G,ini} - E_{P,G,fin}$$

$$v_{fin} = \sqrt{\frac{2 \cdot (E_{P,G,ini} - E_{P,G,fin})}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \left[-1{,}6675 \cdot 10^{-11} \text{ J} - (-3{,}3350 \cdot 10^{-11} \text{ J})\right]}{0{,}5 \text{ kg}}} = \mathbf{8{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}}$$

32. Escribe la frase correcta en tu cuaderno. Si para un cuerpo situado en un campo gravitatorio su energía cinética es igual a su energía potencial (en valor absoluto), significa:

a) Que el cuerpo puede escapar al infinito.

b) Que el cuerpo caerá sobre la masa que crea el campo.

c) Que seguirá en una órbita circular.

La respuesta correcta es la **a**.

Si para un cuerpo situado en un campo gravitatorio su energía cinética es igual a su energía potencial en valor absoluto, significa que el cuerpo puede escapar al infinito.

33. Indica en tu cuaderno si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Un objeto de masa m_1 necesita una velocidad de escape de la Tierra el doble de la que necesita otro objeto de masa $m_2 = m_1/2$.

b) Se precisa realizar más trabajo para colocar en una misma órbita un satélite de masa m_1 que otro satélite de masa $m_2 = m_1/2$.

a) **Falsa**. La velocidad de escape no depende de la masa del satélite, sino de la masa que crea el campo.

b) El trabajo es la diferencia entre las energías mecánica del satélite en cada una de las órbitas:

$$E_{M,suelo} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T}; \quad E_{M,órbita} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T + h}$$

Por tanto:

$$W = \Delta E_M = E_{M,órbita} - E_{M,suelo} \quad \Rightarrow \quad W = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T + h} - \left(-\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T}\right)$$

$$W = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

El trabajo es directamente proporcional a la masa del cuerpo, por lo que la afirmación es **verdadera**.

34. **El radio de un planeta es la tercera parte del radio terrestre, y su masa, la mitad. Calcula la velocidad de escape del planeta en relación al valor terrestre.**

La velocidad de escape será:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_P}{R_P}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot \frac{M_T}{2}}{\frac{R_T}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot v_{e\,(\text{Tierra})} = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot v_{e\,(\text{Tierra})}$$

ACTIVIDADES FINALES (página 354)

35. **Un satélite artificial describe una órbita circular de radio 2 · R_T en torno a la Tierra. Calcula la velocidad orbital. Datos: R_T = 6370 km; G = 6,67· 10^{-11} N · m^2/kg^2; M_T = 5,97 · 10^{24} kg.**

$$F_C = F_G \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m_S}}{(2 \cdot R_T)^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m_S} \cdot v^2}{\cancel{2 \cdot R_T}} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{2 \cdot R_T}}$$

Sustituyendo:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}}} = \mathbf{5591\ m/s}$$

36. **Se desea situar un par de satélites artificiales en una órbita ecuatorial. Se pretende que el primero de ellos sea geoestacionario, mientras que el segundo se situará al doble de distancia del centro de la Tierra. Calcula.**

a) **La altura sobre la superficie terrestre a la cual debe orbitar el primero.**

b) **El periodo de orbitación del segundo.**

c) **¿En qué influiría la masa de los satélites?**

Datos: R_T = 6370 km; G = 6,67 · 10^{-11} N · m^2/kg^2; M_T = 5,97 · 10^{24} kg; día sidéreo: T = 23 h 56 min 4 s.

a) El satélite geoestacionario tendrá el mismo periodo de rotación que la Tierra, es decir, 1 día. Obtenemos la altura a la que debe orbitar.

Cuando el satélite está en órbita:

$$F_C = F_G \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m_S}}{r^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m_S} \cdot v^2}{\cancel{r}} \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{M_T}{r} = v^2$$

Conocemos el periodo:

$$T = 23\ \cancel{\text{h}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} + 56\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} + 49\ \text{s} = 86\,209\ \text{s}$$

Considerando el movimiento circular y uniforme:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r \quad \Rightarrow \quad v^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2$$

Igualando las dos expresiones:

$$G \cdot \frac{M_T}{r} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2$$

Despejando r podremos calcular el radio de la órbita. Sustituyendo los datos y operando:

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(86\,209\ \text{s})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{4\pi^2}} = 4{,}22 \cdot 10^7\ \text{m}$$

Para conocer la altura a la que orbita sobre la superficie terrestre:

$$h = 4{,}22 \cdot 10^7\ \text{m} - 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} = \mathbf{3{,}58 \cdot 10^7\ m}$$

b) Obtenemos el radio de la órbita del segundo satélite a partir del radio obtenido en el apartado anterior:

$$r_2 = 2 \cdot r = 2 \cdot 4{,}22 \cdot 10^7 \text{ m} = 8{,}43 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Reordenamos la expresión del radio de la órbita para obtener el periodo. Sustituyendo los datos correspondientes a este caso:

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (r_2)^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot \left(8{,}43 \cdot 10^7 \text{ m}\right)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} = 2{,}44 \cdot 10^5 \text{ s} = \mathbf{67{,}7\ h}$$

c) La masa del satélite no influye ni en el periodo ni en el radio de la órbita. Influiría en la energía mecánica de los sistemas o en la determinación de su peso en un lugar determinado.

37. Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 3815 km. Calcula.

a) La velocidad de traslación del satélite.

b) Su periodo de revolución.

Datos: R_T = 6370 km; G = 6,67 · 10^{-11} N · m²/kg²; M_T = 5,97 · 10^{24} kg.

Para el satélite que gira alrededor de la Tierra:

$$F_G = F_C \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m_S}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m_S} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{M_T}{r} = v^2$$

Trabajaremos con unidades del SI.

a) La velocidad de traslación es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m} + 3{,}815 \cdot 10^6 \text{ m}}} = \mathbf{6253\ m/s}$$

b) Y el periodo es:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (R_T + h)^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot \left(6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m} + 3{,}815 \cdot 10^6 \text{ m}\right)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} = 10\,235 \text{ s} = \mathbf{2\ h + 50\ min + 35\ s}$$

38. El primer satélite, desarrollado con tecnología totalmente española, el Minisat, fue lanzado en 1997 desde las islas Canarias. Su órbita circular alrededor de la Tierra tiene un periodo de revolución de 10,5 horas.

a) Calcula el radio de la órbita.

b) Calcula la energía mecánica del satélite.

Datos: $m_{Minisat}$ = 100 kg; G = 6,67 · 10^{-11} N · m²/kg²; M_T = 5,97 · 10^{24} kg.

a) El periodo es:

$$T = 10{,}5 \cancel{\text{h}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \cancel{\text{h}}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \cancel{\text{min}}} = 3{,}78 \cdot 10^4 \text{ s}$$

Aplicando la fórmula del radio de la órbita como en actividades anteriores:

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{\left(3{,}78 \cdot 10^4 \text{ s}\right)^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{4\pi^2}} = \mathbf{2{,}43 \cdot 10^7\ m}$$

b) Aplicando la fórmula de la energía mecánica en la órbita:

$$E_M = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2 \cdot r} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 100 \text{ kg}}{2 \cdot 2{,}43 \cdot 10^7 \text{ m}} = \mathbf{-8{,}2 \cdot 10^8\ J}$$

Ampliación (página 354)

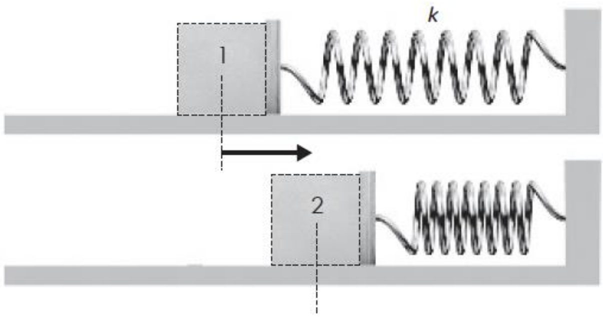
39. Un cuerpo de 5 kg se desplaza sobre una superficie cuyo coeficiente de rozamiento es 0,2 a una velocidad de 3 m/s. En un momento dado impacta con un resorte y queda unido a él vibrando como un oscilador armónico. Si el muelle tiene una constante $k = 750$ N/m, determina:

a) La máxima compresión que puede alcanzar el muelle.

b) La distancia que recorre el oscilador hasta pararse.

Dato: g = 9,8 m/s².

a) En este caso, la energía cinética del cuerpo que se desliza se invierte en energía potencial elástica y en vencer el trabajo de rozamiento mientras se alcanza la compresión máxima.



De acuerdo con el principio de conservación de la energía:

$$\Delta E_M = W_{nC} \quad \Rightarrow \quad E_{M,fin} - E_{M,ini} = W_{nC} \quad \Rightarrow \quad \left(E_{C,fin} + E_{P,fin}\right) - \left(E_{C,ini} + E_{P,ini}\right) = -F_R \cdot \Delta x$$

$$\left(0 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + 0\right) = -\mu \cdot m \cdot g \cdot A$$

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 + \mu \cdot m \cdot g \cdot A - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k \cdot \boldsymbol{A}^2 + 2 \cdot \mu \cdot m \cdot g \cdot \boldsymbol{A} - m \cdot v^2 = 0$$

$$A = \frac{-2 \cdot \mu \cdot m \cdot g \pm \sqrt{\left(2 \cdot \mu \cdot m \cdot g\right)^2 - 4 \cdot k \cdot \left(-m \cdot v^2\right)}}{2 \cdot k}$$

$$A = \frac{-2 \cdot 0{,}2 \cdot 5\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \pm \sqrt{\left(2 \cdot 0{,}2 \cdot 5\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2\right)^2 + 4 \cdot 750\ \text{N/m} \cdot 5\ \text{kg} \cdot \left(3\ \text{m/s}\right)^2}}{2 \cdot 750\ \text{N/m}}$$

Las dos soluciones algebraicas de la ecuación son 0,232 m y –0,258 m. Solo tiene sentido la solución positiva. La máxima compresión que puede alcanzar el muelle es A = **0,232 m**. (Como vemos, debido al rozamiento la amplitud es menor que en la actividad 20).

b) El resorte estará oscilando hasta que toda la energía cinética inicial se haya transformado en trabajo de rozamiento. Calculamos el espacio que ha recorrido el cuerpo:

$$\left(E_{C,fin} + E_{P,fin}\right) - \left(E_{C,ini} + E_{P,ini}\right) = -F_R \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad \left(0 + 0\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + 0\right) = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \Delta x$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v^2 = -\mu \cdot \cancel{m} \cdot g \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{v^2}{2 \cdot \mu \cdot g} = \frac{\left(3\ \text{m/s}\right)^2}{2 \cdot 0{,}2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2} = \mathbf{2{,}30\ m}$$

40. Se construye un péndulo colgando un cuerpo de 1 kg de una cuerda de 1 m. Se le hace oscilar de manera que el cuerpo llega a subir hasta una altura de medio metro en la posición más elevada. Calcula la velocidad en el punto más bajo de las dos formas siguientes.

a) Utilizando el principio de conservación de la energía.

b) Considerando que describe un MAS.

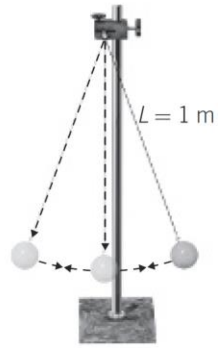
c) Explica las diferencias que se obtienen entre ambos resultados.

Dato: g = 9,8 m/s².

a) Según el principio de conservación de la energía:

$$E_{M,A} = E_{M,B} \quad \Rightarrow \quad E_{C,A} + E_{P,A} = E_{C,B} + E_{P,B} \quad \Rightarrow \quad E_{C,A} + 0 = 0 + E_{P,B}$$

Tomando como cero de energía potencial la que tiene la bola en el punto más bajo:



$$\frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_A^2 = \cancel{m} \cdot g \cdot h$$

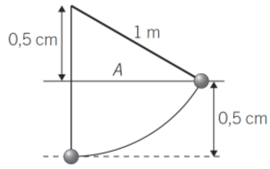
$$v_A = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}5\ \text{m}} = \mathbf{3{,}13\ m/s}$$

b) Si describe un MAS, en el punto más bajo de la trayectoria tendrá una velocidad:

$$v_{\text{máx}} = \omega \cdot A = \frac{2\pi}{T} \cdot A$$

El periodo del péndulo es:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 2\ \text{s}$$



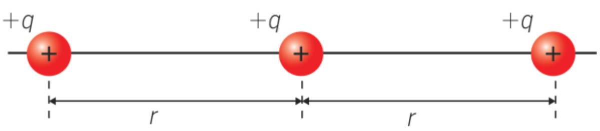
Calculamos A por medio de la relación trigonométrica:

$$A = \sqrt{(1\ \text{m})^2 + (0{,}5\ \text{m})^2} = 0{,}8660\ \text{m}$$

Entonces:

$$v_{\text{máx}} = \frac{2\,\pi}{2\ \text{s}} \cdot 0{,}8660\ \text{m} = \mathbf{2{,}72\ m/s}$$

41. **Se dispone un sistema de cargas eléctricas positivas, puntuales, del mismo valor y alineadas tal como indica la figura.**



Justifica en tu cuaderno, qué expresión matemática expresa la energía potencial electrostática del sistema.

a) $\mathbf{2 \cdot k \cdot \frac{q^2}{r}}$ **b)** $\mathbf{3 \cdot k \cdot \frac{q^2}{2 \cdot r}}$ **c)** $\mathbf{5 \cdot k \cdot \frac{q^2}{2 \cdot r}}$

La energía potencial del sistema es la suma de la energía potencial de todas las parejas de cargas que se puedan establecer:

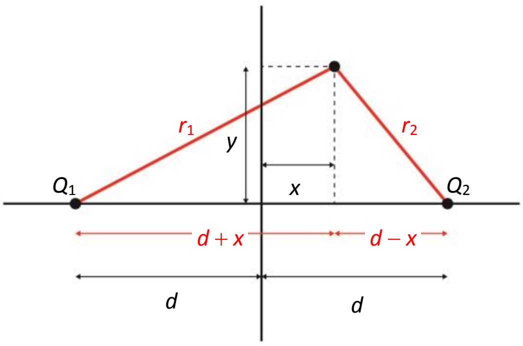
$$E_P = k \cdot \frac{q \cdot q}{r} + k \cdot \frac{q \cdot q}{r} + k \cdot \frac{q \cdot q}{2 \cdot r} = 5 \cdot k \cdot \frac{q \cdot q}{2 \cdot r}$$

Por tanto, la respuesta correcta es la **c**.

42. **Sean dos cargas, Q_1 y Q_2, colocadas en los puntos del plano *XY* dados por (–*d*, 0) y (*d*, 0), respectivamente. Si $Q_1 > 0$ y $Q_2 < 0$ y se cumple $|Q_1| = 4 \cdot |Q_2|$, averigua en qué puntos del plano *XY* el potencial electrostático es nulo.**

El potencial total en un punto se calcula con la suma $V_T = V_1 + V_2$. Para que se anule buscamos los puntos que cumplan:

$$|V_1| = |V_2| \quad \Rightarrow \quad \cancel{K} \cdot \frac{|Q_1|}{r_1} = \cancel{K} \cdot \frac{|Q_2|}{r_2}$$



Donde $r_1 = \sqrt{y^2 + (d + x)^2}$ y $r_2 = \sqrt{y^2 + (d - x)^2}$. Teniendo en cuenta que $|Q_1| = 4 \cdot |Q_2|$:

$$\frac{4 \cdot \cancel{|Q_2|}}{\sqrt{y^2 + (d + x)^2}} = \frac{\cancel{|Q_2|}}{\sqrt{y^2 + (d - x)^2}}$$

$$\frac{16}{y^2+(d+x)^2}=\frac{1}{y^2+(d-x)^2}$$
$$16\cdot\left(y^2+d^2+x^2-2\,d\cdot x\right)=y^2+d^2+x^2+2\,d\cdot x$$
$$15x^2+15y^2-34\,d\cdot x+15\cdot d^2=0$$

Por tanto, los puntos del plano *XY* en los que se anula el potencial electrostático verifican la ecuación:

$$\boldsymbol{15x^2+15y^2-34\,d\cdot x+15\cdot d^2=0}$$

43. Calcula:

a) La velocidad de escape desde la superficie de la Luna.

b) Se lanza verticalmente un objeto desde la superficie de la Luna con velocidad inicial igual a la de escape. ¿A qué distancia del centro de la Luna se reduce su velocidad a la mitad de la inicial?

Datos: $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ N · m²/kg²; masa y radio de la Luna: $M_L=7{,}35\cdot10^{22}$ kg, $R_L=1{,}74\cdot10^6$ m.

a) La velocidad de escape en la Luna es:

$$v_e=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_L}{R_L}}=\sqrt{\frac{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2\cdot7{,}35\cdot10^{22}\ \text{kg}}{1{,}74\cdot10^6\ \text{m}}}=\mathbf{2360\ m/s}$$

b) Suponiendo que la única interacción a la que está sometido el objeto es la atracción gravitatoria que ejerce la Luna, se conservará su energía mecánica en relación con esta fuerza central. Llamando punto A al punto de lanzamiento y punto B al punto en el que su velocidad es la mitad de la inicial:

$$E_{M,A}=E_{M,B}\quad\Rightarrow\quad E_{C,A}+E_{P,A}=E_{C,B}+E_{P,B}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\cancel{m}\cdot v_{escape}^2-G\cdot\frac{M_L\cdot\cancel{m}}{R_L}=\frac{1}{2}\cdot\cancel{m}\cdot\left(\frac{v_{escape}}{2}\right)^2-G\cdot\frac{M_L\cdot\cancel{m}}{r}$$
$$\frac{1}{2}\cdot v_{escape}^2-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v_{escape}}{2}\right)^2=G\cdot\frac{M_L}{R_L}-G\cdot\frac{M_L}{r}\quad\Rightarrow\quad\frac{3}{8}\cdot v_{escape}^2=G\cdot M_L\left(\frac{1}{R_L}-\frac{1}{r}\right)$$

Teniendo en cuenta la expresión de la velocidad de escape:

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{2\cdot\cancel{G\cdot M_L}}{R_L}=\cancel{G\cdot M_L}\left(\frac{1}{R_L}-\frac{1}{r}\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{3}{4\cdot R_L}=\frac{1}{R_L}-\frac{1}{r}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{r}=\frac{1}{4\cdot R_L}\quad\Rightarrow\quad r=4\cdot R_L$$

Sustituyendo los datos:

$$r=4\cdot1{,}74\cdot10^6\ \text{m}=\mathbf{6{,}96\cdot10^6\ m}$$

44. Los NOAA son una familia de satélites meteorológicos de EE. UU. Algunos de ellos orbitan la Tierra pasando sobre los polos, con un periodo aproximado de 5 horas. Calcula:

a) La altura a la que orbitan sobre la superficie de la Tierra.

b) La velocidad con que lo hacen.

Datos: $R_T=6370$ km; $M_T=5{,}97\cdot10^{24}$ kg; $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ N · m²/kg².

a) Para el satélite que gira a una altura *h*:

$$F_G=F_C\quad\Rightarrow\quad G\cdot\frac{M_T\cdot\cancel{m_S}}{r^2}=\cancel{m_S}\cdot\frac{v^2}{r}\quad\Rightarrow\quad\frac{G\cdot M_T}{r}=v^2$$

El periodo es:

$$T=5\ \cancel{h}\cdot\frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{h}}=18\,000\ \text{s}$$

Como conocemos el tiempo que tarda en dar una vuelta, ponemos *v* en función de *T*:

$$v=\omega\cdot r=\frac{2\pi}{T}\cdot r\quad\Rightarrow\quad v^2=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot r^2$$

Igualando las dos expresiones anteriores:

$$G \cdot \frac{M_T}{r} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2$$

Despejando *r* podremos calcular el radio de la órbita:

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}}$$

Sustituyendo los datos y operando:

$$r = \sqrt[3]{\frac{(18\,000\text{ s})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\text{ kg}}{4\pi^2}} = 1{,}484 \cdot 10^7\text{ m}$$

Para conocer la altura a la que orbita sobre la superficie terrestre:

$$h = r - R_T = 1{,}484 \cdot 10^7\text{ m} - 6{,}37 \cdot 10^6\text{ m} = \mathbf{8{,}47 \cdot 10^6\text{ m}}$$

b) Para el satélite que gira a una altura *h*:

$$F_G = F_C \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m_S}}{r^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m_S} \cdot v^2}{\cancel{r}} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\text{ kg}}{8{,}47 \cdot 10^6\text{ m}}} = \mathbf{5180\text{ m/s}}$$

45. Calcula el radio que debería tener la Tierra, conservando su masa, para que la velocidad de escape desde la superficie terrestre fuese igual a la velocidad de la luz en el vacío, *c* = 300 000 km/s.

Datos: M_T = 5,97 · 10^{24} kg; *G* = 6,67 · 10^{-11} N · m^2/kg^2.

A partir de la expresión de la velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}} \quad \Rightarrow \quad R_T = \frac{2 \cdot G \cdot M_T}{v_e^2} = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\text{ kg}}{(3 \cdot 10^8\text{ m})^2} = 8{,}85 \cdot 10^{-3}\text{ m} \simeq \mathbf{9\text{ mm}}$$

FÍSICA EN TU VIDA (página 356)

INTERPRETA

1. Cada uno de los cuatro satélites de la constelación tiene una masa de 1200 kg. Calcula la energía potencial gravitatoria de C3 y C1 aquel 5 de junio de 2009.

Aplicamos la expresión de la energía potencial gravitatoria para cada uno de los satélites:

$$E_{P,G,C3} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_{C3}}{(R_T + h_{C3})} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\text{ kg} \cdot 1200\text{ kg}}{6{,}37 \cdot 10^6\text{ m} + 6{,}4 \cdot 10^6\text{ m}} = \mathbf{-3{,}74 \cdot 10^{10}\text{ J}}$$

$$E_{P,G,C1} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_{C1}}{(R_T + h_{C1})} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\text{ kg} \cdot 1200\text{ kg}}{6{,}37 \cdot 10^6\text{ m} + 9 \cdot 10^6\text{ m}} = \mathbf{-3{,}11 \cdot 10^{10}\text{ J}}$$

USA LAS TIC

2. Investiga sobre más características del programa Cluster en la web de la Agencia Espacial Europea:

http://sci.esa.int/cluster

Accedemos al enlace web propuesto y nos informamos sobre el programa Cluster, prestando especial atención a los últimos descubrimientos.

REFLEXIONA

3. ¿Qué ventajas puede aportar para nuestra vida cotidiana este tipo de investigaciones acerca de la magnetosfera?

El mayor conocimiento científico siempre repercute positivamente en la sociedad. Investigar la magnetosfera nos ha permitido conocer la estructura de esta capa que nos protege del Sol, así como el funcionamiento de fenómenos naturales como las tormentas solares, el viento magnético y las auroras boreales. Todo ello resulta fundamental para prever los posibles cambios en la Tierra, como pueden ser las variaciones del campo magnético terrestre y su influencia en las telecomunicaciones vía satélite.

OPINA

4. El programa Cluster, como todos los de la Agencia Espacial Europea, es un programa de cooperación internacional. ¿Qué opinión te merece que diferentes estados pongan de acuerdo sus recursos, económicos y personales, para este tipo de investigaciones?

Resulta ventajoso llevar a cabo investigaciones en las que participen distintos países, ya que de esta forma, podemos optimizar los recursos materiales, económicos y humanos de los distintos miembros, sacando el máximo rendimiento científico al programa de investigación. La cooperación es algo fundamental en los programas de I+D+i. Por tanto, se trata de actuaciones que podemos valorar como positivas.