UNIDAD 1: Números Reales

ACTIVIDADES-PÁG. 10

1. Teniendo en cuenta las propiedades de las potencias, obtenemos:

a) $9^2 \cdot 3^{-2} \cdot 27 = (3^2)^2 \cdot 3^{-2} \cdot 3^3 = 3^4 \cdot 3^{-2} \cdot 3^3 = 3^{4-2+3} = 3^5$

b) $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]^{-2} \cdot 25 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-6} \cdot 5^2 = 5^6 \cdot 5^2 = 5^8$

c) $\frac{3^6 \cdot 2^8 \cdot 5^3}{9^3 \cdot 25^3 \cdot 4^4} = \frac{3^6 \cdot 2^8 \cdot 5^3}{3^6 \cdot 5^6 \cdot 2^8} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$

2. En las tablas aparecen los valores pedidos.

Truncamiento de	$\sqrt{0,6} = 0,774\ 596\ 6...$	$\sqrt{6} = 2,449\ 489\ 7...$
a) A las décimas	0,7	2,4
b) A las milésimas	0,774	2,449
c) A las millonésimas	0,774 596	2,449 489

Redondeo de	$\sqrt{0,6} = 0,774\ 596\ 6...$	$\sqrt{6} = 2,449\ 489\ 7...$
a) A las décimas	0,8	2,4
b) A las milésimas	0,775	2,449
c) A las millonésimas	0,774 597	2,449 490

3. Si la velocidad de la luz es $3 \cdot 10^8$ m/s, el tiempo que tardará en recorrer 300 km = $3 \cdot 10^5$ m será:

$$t = \frac{3 \cdot 10^5\ m}{3 \cdot 10^8\ m/s} = \frac{1}{10^3}\ s = 0,001\ s.$$

El tiempo es una milésima de segundo.

4. Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos:

$$\left(\sqrt{11 - 4\sqrt{6}}\right)^2 = 11 - 4\sqrt{6}$$

$$\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 8 + 3 - 4\sqrt{6} = 11 - 4\sqrt{6}$$

5. Las raíces enésimas son números reales siempre que:

- **n** sea par y **a** sea un número real no negativo.

- **n** sea impar y **a** sea un número real cualquiera.

ACTIVIDADES-PÁG. 27

1. El valor de la suma es:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2m = m \cdot (m + 1)$$

2. Resolvemos el problema en los siguientes pasos:

● Supongamos que el camello lleva un bidón hasta la mitad del camino, vuelve a Kamal, carga con otro bidón hasta el mismo punto y se bebe uno de los bidones transportados, quedándole otro. Repitiendo el proceso conseguirá llevar 50 bidones hasta la mitad del camino. De aquí repitiendo lo mismo hasta Wadi conseguirá que lleguen 25 según la expresión:

$$25 \text{ bidones} = 100 \cdot \frac{1^2}{2^2}$$

● Si mejoramos al solución conseguiremos que lleguen más bidones, haciendo el camino en tres fases tras el primer tercio, el camello habrá bebido 33,333… bidones y quedan 66,666… En el segundo tercio se bebe 22,222… y quedan 44,444…. En Wadi se bebe 14,81… y quedan 29,629… bidones, es decir:

$$100 \cdot \frac{8}{27} = 100 \cdot \frac{2^3}{3^3} \cong 29{,}63 \ \ bidones$$

● Avanzando por cuartos de camino se puede mejorar la solución, llegan:

$$100 \cdot \frac{81}{256} = 100 \cdot \frac{3^4}{4^4} = 100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cong 31{,}64 \ \ bidones$$

● Siguiendo así sucesivamente, se puede decir que en el mejor de los casos llegan:

$$100 \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^{100} = 100 \cdot \frac{1}{e} = \cong \ 36{,}788 \ \ bidones$$

ACTIVIDADES-PÁG. 29

1. a) Teniendo en cuenta las propiedades de las potencias, obtenemos:

$$\left[\left(\frac{2}{7}\right)^{12} : \left(\frac{7}{2}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{-4}\right]^{-2} = \left[\left(\frac{2}{7}\right)^{12} : \left(\frac{2}{7}\right)^{7} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{-4}\right]^{-2} = \left[\left(\frac{2}{7}\right)^{12-7-4}\right]^{-2} =$$

$$= \left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^{2} = \frac{49}{4} = 12{,}25$$

b) Operando, obtenemos:

$$\left[3\left(1-\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{15}\left(2-\frac{1}{2}\right)^{2}\right]:7 = \left[3\cdot\frac{2}{3}-\frac{4}{15}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\right]:7 = \left[2-\frac{3}{5}\right]:7 = \frac{7}{5}:7 = \frac{1}{5} = 0{,}200$$

2. a) Sacando factores de los radicandos y operando, obtenemos:

$$\left(7\sqrt{63}-8\sqrt{\frac{175}{4}}+\frac{4}{3}\sqrt{112}\right)\cdot\frac{6}{\sqrt{7}} = \left(7\cdot 3\sqrt{7}-8\cdot\frac{5\sqrt{7}}{2}+\frac{4}{3}\cdot 4\sqrt{7}\right)\cdot\frac{6}{\sqrt{7}} =$$

$$= \left(21\sqrt{7}-20\sqrt{7}+\frac{16}{3}\sqrt{7}\right)\cdot\frac{6}{\sqrt{7}} = \frac{19\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{6}{\sqrt{7}} = 38$$

b) Racionalizamos los denominadores y operamos, obteniendo:

$$\frac{2}{\sqrt{6}}-\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}-\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{12-3\sqrt{6}}{15} = \frac{-4}{5}+\frac{8\sqrt{6}}{15}$$

En el gráfico pueden verse la resolución de las actividades 1 y 2 con Wiris.

Actividad 1

$$\left(\left(\frac{2}{7}\right)^{12} / \left(\frac{7}{2}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{-4}\right)^{-2} \rightarrow \frac{49}{4}$$

$$\left(3 \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right) - \frac{4}{15} \cdot \left(2-\frac{1}{2}\right)^{2}\right) / 7 \rightarrow \frac{1}{5}$$

Actividad 2

$$\left(7 \cdot \sqrt{63} - 8 \cdot \sqrt{\frac{175}{4}} + \frac{4}{3} \cdot \sqrt{112}\right) \cdot \frac{6}{\sqrt{7}} \rightarrow 38$$

$$\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{3 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{3}} \rightarrow \frac{8 \cdot \sqrt{6}}{15} - \frac{4}{5}$$

3. a) Operamos en ambos miembros de la igualdad:

En el primer miembro, $\left(\frac{2}{25} \cdot \frac{15}{9}\right)^{x} = \left(2 \cdot 5^{-1} \cdot 3^{-1}\right)^{x}$

En el segundo miembro, $\frac{625 \cdot 4^{2}}{81^{-1}} = \left(2^{-4} \cdot 5^{4} \cdot 3^{4}\right) = \left(2 \cdot 5^{-1} \cdot 3^{-1}\right)^{-4}$

Igualando las potencias obtenemos x = - 4.

b) Operamos en ambos miembros de la igualdad:

En el primer miembro, $\left[\left(\frac{1}{9}\right)^{3} \cdot (3)^{x}\right]^{-2} : 27 = \left(3^{-6} \cdot 3^{x}\right)^{-2} : 3^{3} = 3^{12-2x-3} = 3^{9-2x}$

En el segundo miembro, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-6} = \left(3^{-1}\right)^{-6} = 3^{6}$

Igualando las potencias y los exponentes obtenemos x = $\frac{3}{2}$.

ACTIVIDADES-PÁG. 30

1. La ordenación pedida es: 284 > 24> 0,5 > 0 > -0,4 > -3,2 > -30

2. Las soluciones son:

a) $9 - 4 \cdot (-6) + 5 - 7 \cdot (-4 + 9) = 3$

b) $6 \cdot 4^2 - (-3)^3 + [5 - (7 - 5)^2] = 124$

c) $(-5)^2 - 5^2 + 4 \cdot (-3)^2 = 36$

3. Los resultados son:

a) $\frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{4} - 3 = -\frac{131}{60}$

d) $\left(3 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(2 - \frac{3}{7}\right) : \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{121}{91}$

b) $\left(3 - \frac{3}{2}\right) \cdot 2 - 3 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

e) $3 + 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2}\right) = \frac{19}{5}$

c) $\frac{2}{3} : \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{6}$

f) $2 - 2 : \left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{6}{7}$

4. Las soluciones quedan:

a) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^6$

d) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 : \left(\frac{3}{2}\right)^6\right]^0 = \left(\frac{3}{2}\right)^0$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 : \left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^0$

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 : \left(-\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^4$

c) $\left(2 - \frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{4}\right)^1$

f) $\left(\frac{6}{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-5} : \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^6$

5. En cada caso queda:

a) $\frac{28}{126}$: decimal periódico puro.

d) $\frac{42}{528}$: decimal periódico mixto.

b) $-\frac{36}{225}$: decimal exacto.

e) $\frac{2\,145}{2\,100}$: decimal periódico mixto.

c) $\frac{73}{63}$: decimal periódico puro.

6. Las soluciones son:

a) $3,\widehat{1} + 5,2\widehat{1} + 2,8 = \dfrac{28}{9} + \dfrac{469}{90} + \dfrac{14}{5} = 11,1\widehat{2}$

b) $\left(5,\widehat{4} - 3,4\widehat{2}\right) \cdot 2,7 = \left(\dfrac{49}{9} - \dfrac{154}{45}\right) \cdot \dfrac{27}{10} = 5,46$

c) $6,1\widehat{4} : 3,\widehat{4} \cdot 2,44 = \dfrac{553}{90} : \dfrac{31}{9} \cdot \dfrac{244}{100} = \dfrac{33733}{7750} = 4,35264516129$

d) $12,5 + 3,7\widehat{8} : 1,\widehat{4} = \dfrac{25}{2} + \dfrac{341}{90} : \dfrac{13}{9} = \dfrac{983}{65} = 15,1230769231$

7. La clasificación queda:

- Racionales: a); b) y c).
- Irracionales: d).

8. El primer socio recibe 9000 €, el segundo 4000 € y el tercero 2000 €.

9. El primer alumno hace $\dfrac{4}{12}$ del trabajo, luego queda por hacer $\dfrac{8}{12}$ del trabajo.

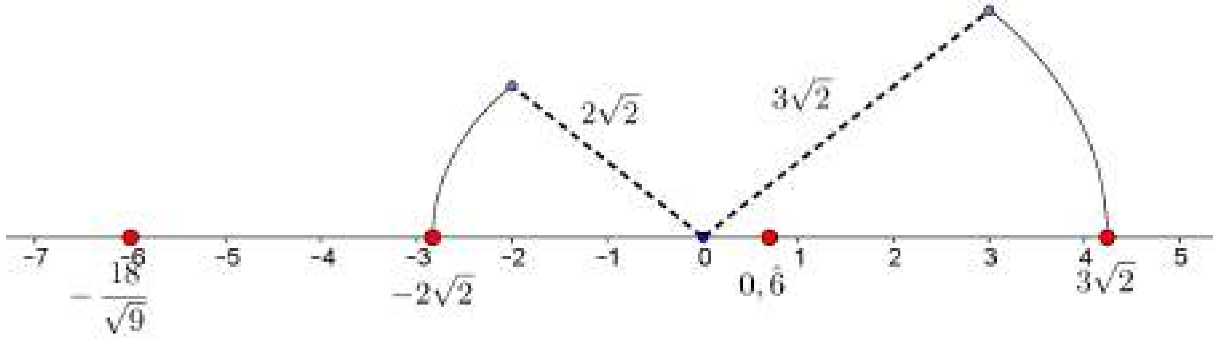
El segundo alumno tarda $\dfrac{8}{12} : \dfrac{1}{8} = \dfrac{64}{12} = 5,\widehat{3}\ horas = 5\ h\ 20$ min en terminar el trabajo.

10. Las soluciones pueden verse en la tabla.

	$-\sqrt{49}$	**23,5**	**0**	$\sqrt{11}$	$2,1\widehat{3}$	$-\dfrac{1,4}{0,5}$	$\dfrac{23}{3}$	**- 4^2**	$\sqrt[3]{-27}$	$\dfrac{\pi}{5}$
Menor conjunto numérico al que pertenece	**Z**	**Q**	**N**	**I**	**Q**	**Q**	**Q**	**Z**	**Z**	**I**

ACTIVIDADES-PÁG. 31

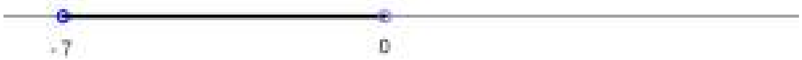
11. Las representaciones pueden verse en el dibujo.



12. Los conjuntos resultantes aparecen a continuación y las representaciones pueden verse en el dibujo.

a) A = $\{a \in R \,/\, a < -2 \ y \ a > -6\}$ = (- 6, - 2)

b) $B = \{b \in R \text{ I } b < 0 \ y \ b > -7\}$ = (- 7, 0)



c) $C = \{c \in Z \text{ I } c > 2 \ ó \ c > -3\}$ = {- 4, - 3, - 2…}

d) $D = (-1, 4] \cap (0, 3)$ = (0, 3)

e) E (5, 2) = (3, 7)

f) $F = (-\infty, -5]$

13. Quedan del siguiente modo:

a) $(-\infty, -1)$

b) $[-10, 12)$

c) $(-6, -4) \cup [3, 5]$

d) $\{-3, -1, 1, 3, 5\}$

14. Para cada uno de los números queda:

- 1 725 no es redondeo.
- 1 724,16 es un redondeo a centésimas. Cota de error 0,005.
- 1 724,2 es un redondeo a décimas. Cota de error 0,05.
- 1 724,1 no es un redondeo.
- 1 720 es un redondeo a decenas. Cota de error 5.
- 1 724,158 no es un redondeo.
- 1 724,1572 es un redondeo a diezmilésimas. Cota de error 0,00005.

15. Consideramos como valor real $\pi = 3{,}141592$.

Para la fracción $\frac{223}{71}$ obtenemos:

$$\text{Error absoluto} = \left|3{,}141592 - \frac{223}{71}\right| = 0{,}000\ 746...$$

$$\text{Error relativo} = \frac{Error\ absoluto}{Valor\ real} = \frac{0{,}000\ 746}{3{,}141592} = 0{,}000\ 237...$$

Para la fracción $\frac{22}{7}$ obtenemos:

$$\text{Error absoluto} = \left|3{,}141592 - \frac{22}{7}\right| = 0{,}001\ 265...$$

$$\text{Error relativo} = \frac{Error\ absoluto}{Valor\ real} = \frac{0{,}001\ 265}{3{,}141592} = 0{,}000\ 4022...$$

16. Consideramos el número de oro $\Phi = 1{,}61803398\ldots$

El redondeo a las centésimas es 1,62. Los errores son:

$$\text{Error absoluto} = |1{,}61803398 - 1{,}62| = 0{,}001\,97...$$

$$\text{Error relativo} = \frac{Error\ absoluto}{Valor\ real} = \frac{0{,}00197}{1{,}61803398} = 0{,}001\,215\,06...$$

17. En la tabla aparecen los resultados:

Apartado	Notación decimal	Notación científica	Orden de magnitud
a)	384 000 km	$3,84 \cdot 10^5$ km	10^5
b)	150 000 000 km	$1,5 \cdot 10^8$ km	10^8
c)	0,000 000 002 2 m	$2,2 \cdot 10^{-9}$ m	10^{-9}
d)	0,000 000 000 05 m	$5 \cdot 10^{-11}$ m	10^{-10}

18. Los cálculos quedan:

a) $127 \text{ x } 2^{30}$ Bytes = $1,36 \text{ X } 10^{11}$ Bytes; $127 \text{ x } 2^{33}$ Bits = $1,09 \text{ x } 10^{12}$ Bits.

b) $1,44 \text{ x } 2^{20}$ Bytes = $1,5 \text{ X } 10^{6}$ Bytes ; $1,44 \text{ x } 2^{23}$ Bits = $1,21 \text{ x } 10^{7}$ Bits.

c) $650 \text{ x } 2^{20}$ Bytes = $6,8 \text{ X } 10^{8}$ Bytes ; $650 \text{ x } 2^{23}$ Bits = $5,45 \text{ x } 10^{9}$ Bits.

19. Las soluciones son:

a) $\sqrt{36a^4b^2} = 6a^2b$ b) $\sqrt[3]{-8x^6y^3} = -2x^2y$ c) $\sqrt[4]{256z^8} = 4z^2$

20. Las potencias y raíces pedidas quedan:

a) $\sqrt[4]{a} = a^{1/4}$ c) $\sqrt[5]{a^4} = a^{4/5}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{-2/3}$ g) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}} = a^{-3/2}$

b) $3^{3/2} = \sqrt{3^3}$ d) $7^{2/3} = \sqrt[3]{7^2}$ f) $7^{-3/2} = \dfrac{1}{\sqrt{7^3}}$ h) $5^{-2/3} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

21. Los radicales son:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$ c) $\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt{5}}} = \sqrt[4]{5^3}$

b) $\left(\sqrt[5]{ab^2}\right)^3 = \sqrt[5]{a^3b^6}$ d) $\left(\sqrt{a^3\sqrt{b}}\right)^4 = a^6b$

22. Las expresiones quedan:

a) $\sqrt{500} = 10\sqrt{5}$ c) $\sqrt[4]{625x^5y^6} = 5xy\sqrt[4]{xy^2}$

b) $\sqrt[3]{a^3b^4} = ab\sqrt[3]{b}$ d) $\sqrt{x^2 + x^2y} = x\sqrt{1+y}$

23. Los radicales quedan:

a) $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$ d) $a^4b^2\sqrt{2a^3b} = \sqrt{2a^{11}b^5}$

b) $3ab\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{27a^5b^3}$ e) $2\sqrt[3]{2a} = \sqrt[3]{16a}$

c) $3\sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{3^7}$

f) $4ab\sqrt[3]{2a^2b} = \sqrt[3]{128\,a^5b^4}$

ACTIVIDADES-PÁG. 32

24. Las soluciones son:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3^3} = \sqrt{3^4} = 3^2$

b) $\sqrt[3]{a}\cdot a^2 = \sqrt[3]{a^7} = a^{7/3}$

c) $\sqrt[4]{2a^5} : \sqrt[4]{2a^3} = \sqrt{a} = a^{1/2}$

d) $\sqrt[5]{3^6} : \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{3^2} = 3^{2/5}$

25. Los resultados de las operaciones son:

a) $3\sqrt{2} - \dfrac{3}{2}\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \dfrac{4}{5}\sqrt{2} = \dfrac{57}{10}\sqrt{2}$

b) $2\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{54} + \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{250} = -10\sqrt[3]{2}$

c) $\dfrac{4}{5}\sqrt{8} - \sqrt{50} + \dfrac{7}{2}\sqrt{18} - \dfrac{3}{4}\sqrt{98} = \dfrac{37}{20}\sqrt{2}$

26. La solución queda:

a) *Como* $\sqrt[10]{5^2} < \sqrt[10]{2^5}$ *entonces* $\sqrt[5]{5} < \sqrt{2}$

b) *Como* $\sqrt[15]{10^5} < \sqrt[15]{10^6}$ *entonces* $\sqrt[3]{10} < \sqrt[5]{100}$

c) *Como* $\sqrt[12]{6^2} < \sqrt[12]{4^3}$ *entonces* $\sqrt[6]{6} < \sqrt[4]{4}$

d) *Como* $\sqrt[12]{2^3} < \sqrt[12]{2^4} < \sqrt[12]{2^6}$ *entonces* $\sqrt[4]{2} < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$

e) *Como* $\sqrt[18]{3^2} < \sqrt[18]{2^6} < \sqrt[18]{5^9}$ *entoces* $\sqrt[9]{3} < \sqrt[3]{2} < \sqrt{5}$

f) *Como* $\sqrt[4]{5^{-3}} < \sqrt[4]{3^{-2}}$ *entonces* $\sqrt[4]{5^{-3}} < \sqrt{3^{-1}}$

27. Tras operar obtenemos:

a) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{2^9\cdot 3^3\cdot 5^4}$

b) $\sqrt[6]{a^5}\cdot 5\sqrt{a^3} : \sqrt[10]{a} = 5a^2\sqrt[30]{a^7}$

c) $\sqrt[8]{ab^3}\cdot\sqrt[6]{2a^2b^2} = \sqrt[24]{2^4\cdot a^{11}\cdot b^{17}}$

d) $\sqrt{2ab} : \sqrt[4]{8a^3b} = \sqrt[4]{\dfrac{b}{2a}}$

e) $\sqrt{3\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[6]{3^5}$

28. Quedan:

a) $\left(2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{9}{2}-2\sqrt{2}$

b) $\left(2\sqrt{7}+3\right)^2-4\sqrt{7}\left(\sqrt{7}+3\right)=9$

c) $\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)-\left(2+\sqrt{2}\right)^2=-4-4\sqrt{2}$

d) $\left(4\sqrt{18}-2\sqrt{12}+\sqrt{32}\right)\cdot 2\sqrt{2}=64-8\sqrt{6}$

e) $\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}=3\sqrt{6}-9+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}$

f) $\left(\sqrt{72}-\sqrt{20}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+2\sqrt{8}+2\sqrt{5}\right)=30$

29. Tras racionalizar se obtiene:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

b) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}=\dfrac{2\sqrt[3]{5^2}}{5}$

d) $\dfrac{3}{2\sqrt[4]{3}}=\dfrac{\sqrt[4]{3^3}}{2}$

e) $\dfrac{7}{\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{3}}=\dfrac{\sqrt[6]{7^3\cdot 3^4}}{3}$

f) $\dfrac{3}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{6-3\sqrt{2}}{2}$

g) $\dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}+3$

h) $\dfrac{\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}+5}=3-\sqrt{7}$

30. La solución queda:

a) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{96}-\dfrac{3}{\sqrt{7}}\sqrt{189}=11\sqrt{3}$

b) $\dfrac{2\sqrt{18}-5\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=-4$

c) $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{34+23\sqrt{2}}{2}$

d) $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}-\dfrac{2}{1-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

31. Queda:

a) $\sqrt{4\sqrt{9\sqrt[3]{729}}}=6$

b) $\sqrt{14+\sqrt{7-\sqrt[4]{81}}}=4$

c) $\left(\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{16}\right)\cdot\sqrt[3]{4}=6$

d) $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5^5}}}}=5\sqrt[16]{5^3}$

32. El zumo supone: $\frac{70}{100} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ Peso = \frac{28}{50} \cdot P.$

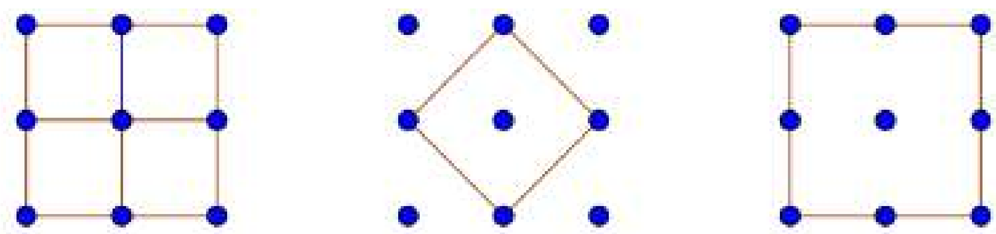
Por tanto: $\frac{28}{50} \cdot P = 2400, \ entonces \ P = 4285{,}7 \ kg \ de \ naranjas.$

33. La solución queda:

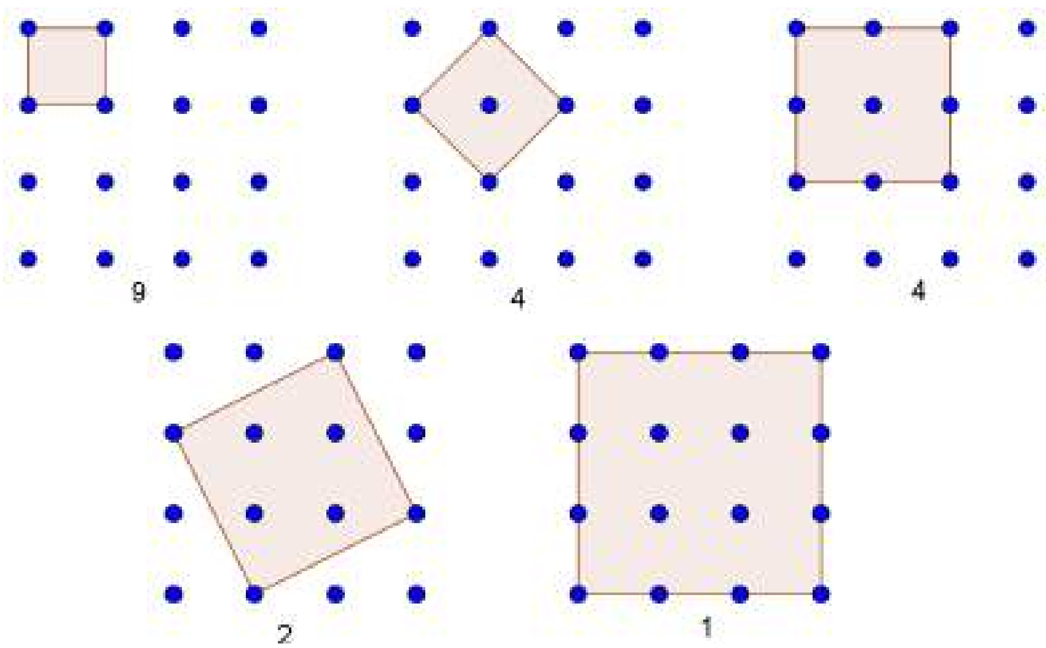
$$\begin{cases} Azúcar \ moreno (AM) = \frac{12}{19} \ caña \ (C) \\ Azúcar \ blanca \ (AB) = \frac{4}{3} \ (AM) \end{cases} \Rightarrow AB = \frac{12}{19} \cdot \frac{4}{3} \cdot C \ \Rightarrow 10 \ T = \frac{12}{19} \cdot \frac{4}{3} \cdot C \ \Rightarrow \ C = 11{,}875 \ T \ de \ caña.$$

ACTIVIDADES-PÁG. 33

a) y b) En una cuadrícula de 3 x 3 puntos se pueden dibujar 6 cuadrados de 3 tamaños diferentes.



c) Sobre una cuadrícula de 4 x 4 puntos se pueden dibujar 20 cuadrados de 5 tamaños diferentes.



d) En una cuadrícula de 8 x 8 puntos se pueden dibujar cuadrados de 13 tamaños diferentes y podremos encontrar:

$$1 \cdot 7^2 + 2 \cdot 6^2 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 4^2 + 5 \cdot 3^2 + 6 \cdot 2^2 + 7 \cdot 1^2 = 336 \text{ cuadrados.}$$

e) Sobre una cuadrícula de n x n puntos se pueden dibujar cuadrados de 2n - 3 tamaños diferentes y el siguiente número de cuadrados:

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i \cdot (n-i)^2 = 1 \cdot (n-1)^2 + 2 \cdot (n-2)^2 + 3 \cdot (n-3)^2 + \ldots + (n-1) \cdot 1^2 = \frac{n^4 - n^2}{12}$$

UNIDAD 2: Polinomios. Fracciones algebraicas

ACTIVIDADES-PÁG. 34

1. Los resultados son:

a) $2x^5 – 3x^4 + 6x^3 – 19x^2 + 27x - 18$ c) $x^6 – 6x^5 + 12x^4 - 8x^3$

b) Cociente: $2x^2 + x + 4$; resto: 12 d) $4x^4 – 12x^3 + 13x^2 – 6x + 1$

2. El valor del parámetro es a = 3.

3. Las fracciones simplificadas son:

a) $\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}=\dfrac{x+1}{x-3}$ b) $\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2-5x+4}=\dfrac{(x+2)^2}{x-4}$

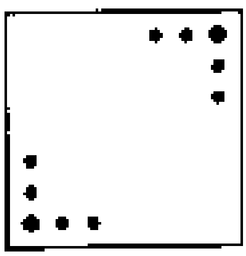
4. Los resultados de las operaciones son:

a) $\dfrac{x-2}{x^2-1}\cdot\dfrac{x+1}{x^2-4x+4}=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

b) $\left(x-\dfrac{x}{x+1}\right):\left(x+\dfrac{x}{x+1}\right)=\dfrac{x}{x+2}$

ACTIVIDADES-PÁG. 47

1. Si cada punto representa una lámpara, la solución quedaría del siguiente modo:



2. Si hay n calles, el número máximo de cruces es $C_{n,\,2}=\dfrac{n^2-n}{2}$.

Luego si hay 66 farolas habrá 66 cruces y se cumplirá:

$$\frac{n^2-n}{2}=66 \;\Rightarrow\; n^2-n-132=0 \;\Rightarrow\; n=12$$

El pueblo tenía 12 calles como mínimo.

3. Ésta es una de las disposiciones en que quedó la cava.

1		20
20		1

Cómo máximo pudo robar:

60 – 42 = 18 botellas.

La disposición de 42 botellas admite muchas formas diferentes,

ACTIVIDADES-PÁG. 49

1. Utilizando el teorema del resto.

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = 5 \;\Rightarrow\; 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 + k\cdot\frac{2}{3} + 3 = 5 \;\Rightarrow\; \frac{16}{27} + \frac{2k}{3} + 3 = 5 \;\Rightarrow\; \frac{2k}{3} = \frac{38}{27} \;\Rightarrow\; k = \frac{19}{9}$$

2. a) La factorización del polinomio es P (x) = $2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 + 1)(x + 1)(x - 3)$ y sus raíces son – 1 y 3.

b) La factorización del polinomio es P (x) = $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 2(x - 1)(x + 2)(x + 1/2)$ y sus raíces son 1; - 2 y – 1/2.

En el gráfico pueden verse la resolución de las actividades 1 y 2 con Wiris.

Actividad 1

$P(x) = 2x^3 + k\cdot x + 3 \rightarrow x \mapsto k\cdot x + 2\cdot x^3 + 3$

$P\left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow \frac{2}{3}\cdot k + \frac{97}{27}$

resolver$\left(\frac{2}{3}\cdot k + \frac{97}{27} = 5, k\right) \rightarrow \left\{\left\{k = \frac{19}{9}\right\}\right\}$

Actividad 2

factorizar$(2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 6) \rightarrow 2\cdot(x-3)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$

resolver$(2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 6 = 0) \rightarrow \{\{x=-1\},\{x=3\}\}$

factorizar$(2x^3 + 3x^2 - 3x - 2) \rightarrow (x-1)\cdot(x+2)\cdot(2\cdot x+1)$

resolver$(2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0) \rightarrow \left\{\{x=-2\},\{x=1\},\left\{x=-\frac{1}{2}\right\}\right\}$

3. Operando, obtenemos:

a) $$\frac{3x}{x-2} - \frac{4x^2+5}{x^2-x-2} - \frac{3}{x+1} = \frac{1-x}{x-2}$$

b) $$\frac{2x^4-18x^2}{x^3+3x^2} : \frac{x^2+2x}{x^2-4} = \frac{2x^2-10x+12}{x}$$

4. Operando, obtenemos:

a) $$\frac{x^3+2x^2+x}{x^2-9} \cdot \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{x(x+1)^2}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{x\,(x+1)}{(x-3)(x-1)}$$

b) $$\left(a - \frac{a^2-1}{a+1}\right) : \left(\frac{a^2-a}{a-1} + 1\right) = \frac{a+1}{a+1} : \frac{a^2-1}{a-1} = \frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)(a^2-1)} = \frac{1}{a+1}$$

En el gráfico pueden verse la resolución de las actividades 3 y 4 con Wiris.

Actividad 3

$$\frac{3x}{x-2} - \frac{4x^2+5}{x^2-x-2} - \frac{3}{x+1} \rightarrow \frac{-x+1}{x-2}$$

$$\frac{2x^4-18x^2}{x^3+3x^2} : \frac{x^2+2x}{x^2-4} \rightarrow 2\cdot x-6 : \frac{x}{x-2}$$

Actividad 4

$$\frac{x^3+2x^2+x}{x^2-9} \cdot \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \rightarrow \frac{x^2+x}{x^2-4\cdot x+3}$$

$$\left(a - \frac{a^2-1}{a+1}\right) : \left(\frac{a^2-a}{a-1}+1\right) \rightarrow 1 : a+1$$

ACTIVIDADES-PÁG. 50

1. El valor de los parámetros es:

a) a = 2 y b = - 1.

b) a = 2 y b = - 5 o a = -2 y b = 5.

2. Los resultados de las operaciones son:

a) A (x) - B (x) + C (x) = $- x^3 + x^2 + 5x - 9$

d) B (x) · C (x) = $6x^4 - 11x^3 + 4x^2$

b) A (x) – [B (x) + C (x)] = $- x^3 + x^2 - x - 1$

c) B (x) – 2 A (x) = $- x^2 - 4x + 10$

e) $[B (x)]^2 = 4x^6 - 4x^5 + x^4$

f) C (x) · [A (x) + B (x)] = $9x^4 - 15x^3 + 10x^2 - 23x + 20$

3. Los resultados de las operaciones son:

a) $(2 - 3x)^2 = 4 - 12x + 9x^2$

b) $(2x - 5)(2x + 5) = 4x^2 - 25$

c) $(3 + x)^3 = 27 + 27x + 9x^2 + x^3$

d) $\left(\frac{2}{3} + 9x\right)^2 = \frac{4}{9} + 12x + 81x^2$

e) $(x - 3)^2 - (x + 3)^2 = - 12x$

f) $(4x + 3)^2 - (4x - 3)(4x + 3) = 24x + 18$

4. El valor del polinomio buscado, en cada caso, es:

a) $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 8x + 4$

b) $P(x) = 2x^4 - 3x^2$

5. La solución en cada uno de los casos es:

a) Cociente: $4x^4 - 3x^3 - 6x + 7$; Resto: $- 3x + 2$.

b) Cociente: $5x^2 + 8x - 3$; Resto: $- 9x$

6. La tabla completa aparece a continuación.

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
$5x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 3x + 7$	$5x^2 + 3$	$x^2 - 2x + 1$	$3x + 4$
$5x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 5x - 4$	**$5x^2 + 6x + 2$**	$x^2 - 1$	$x - 2$
$8x^3 - 4x^2 + 7$	$2x^2 + x - 1$	**$4x - 4$**	$8x + 3$
$x^5 - 2x^3 - x^2$	$x^2 - 2$	$x^3 - 1$	**$- 2$**

7. Los valores numéricos son:

a) – 30; 0 y 12

b) $-5; -\frac{5}{2}$ y $-\frac{55}{32}$

8. Los resultados de cada una de las divisiones es:

a) Cociente: $x^3 - 4x^2 + 4x$; Resto: -2.

b) Cociente: $2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$; Resto: 7.

c) Cociente: $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$; Resto: 0.

9. El valor en cada caso es: a) a = - 3 b) $a = -\frac{43}{2}$.

10. Quedaría:

a) P (0) = 3; P (1) = 3 y P (- 2) = 3.

b) Debe verificarse que P (- 1) = 0, entonces k = 4.

c) Debe verificarse que P (- 2) = 2, entonces a = 23.

d) El resto de esta división es B (0) = - 5.

ACTIVIDADES-PÁG. 51

11. Las raíces son:
a) 0, 3 y – 3 b) 3 y – 3 c) 1; 3, - 1 y – 3

12. Las descomposiciones pedidas son:

a) A (x) = $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

b) B(x) = $9x^3 - 9x^2 - x + 1 = 9\,(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

c) C(x) = $x^3 + 2x^2 + x = x\,(x + 1)^2$

d) D (x) = $x^4 - 29x^2 + 100 = (x + 2)(x + 5)(x - 5)(x - 2)$

e) E (x) = $x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x - 1)(x^2 + 2)$

f) F (x) = $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)(x^2 + 1)$

13. La solución en cada uno de los casos queda:

a) MCD [A (x), B (x)] = $x\,(x + 2)^2$
mcm [A (x), B (x)] = $x^2 (x + 2)^2 (x - 1)^2 (x + 1)$

b) MCD [A (x), C (x)] = $x\,(x - 1)$
mcm [A (x), C (x)] = $x^3 (x + 2)^2 (x - 1)^2 (x - 2)^3$

c) MCD [A (x), B (x), C (x)] = x
mcm [A (x), B (x), C (x)] = $x^3 (x + 2)^2 (x - 1)^2 (x - 2)^3 (x + 1)$

14. En cada uno de los casos descomponemos los polinomios en factores y calculamos el MCD y el mcm, obteniendo:

a) $\begin{cases} MCD\,[A\,(x),\ B\,(x)] = (x-3)(x+3) \\ mcm\,[A\,(x),\ B\,(x)] = (x-3)\,(x+3)\,(x-1)\,(x+1) \end{cases}$

b) $\begin{cases} MCD\,[C\,(x),\ D\,(x)] = x-1 \\ mcm\,[C\,(x),\ D\,(x)] = (x-1)^2\,(x+1)\,(x^2+1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} MCD\,[E\,(x),\ F\,(x)] = 2\,(x-2) \\ mcm\,[E\,(x),\ F\,(x)] = -\,2\,(x-2)\,(x^2+x+1)\left(x+\frac{5}{2}\right) \end{cases}$

15. Se comprueba fácilmente a partir de las descomposiciones de los polinomios:

A (x) · B (x) = $(x^4 - 9x^2) \cdot (x^3 + 6x^2 + 9x) = x^7 + 6x^6 - 54x^4 - 81x^3$

MCD [A (x), B (x)] · mcm [A (x) · B (x)] = $(x^2 + 3x) \cdot (x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 27x^2) = x^7 + 6x^6 - 54x^4 - 81x^3$

16. Queda en cada caso:

a) $\dfrac{x^3 - 2x^2}{x^3 - 4x} = \dfrac{x}{x+2}$

b) $\dfrac{x^2 - 25}{2x + 10} = \dfrac{x-5}{2}$

c) $\dfrac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^4 - 2x^2 + 1} = \dfrac{x+3}{(x-1)^2}$

d) $\dfrac{5x^3 + x^2 - 5x - 1}{5x^3 - 9x^2 + 3x + 1} = \dfrac{x+1}{x-1}$

17. El polinomio P (x) es:

a) P (x) = $x^2 - 1$

b) P (x) = $x + 5$

c) P (x) = $x^2 - 5x + 6$

d) P (x) = $x^3 - 4x^2$

18. En cada caso queda:

a) $\dfrac{2x^2 + 2x}{6x^2}, \dfrac{9x + 15}{6x^2}$

b) $\dfrac{2x^2 + 4x}{x^2 - 4}, \dfrac{x+3}{x^2 - 4}, \dfrac{4x^2 - 8x}{x^2 - 4}$

c) $\dfrac{3x^2 - 6x + 3}{6x^2 - 6x}, \dfrac{6x + 6}{6x^2 - 6x}, \dfrac{2x^2}{6x^2 - 6x}$

d) $\dfrac{x^3 - 25x}{3x^2 - 75}, \dfrac{5}{3x^2 - 75}, \dfrac{9x^2 + 45x}{3x^2 - 75}$

ACTIVIDADES-PÁG. 52

19. Los resultados de las operaciones son:

a) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2x^2} = \dfrac{4x+3}{2x^2}$

b) $\dfrac{x+2}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{5x+1}{x^2-1}$

c) $\dfrac{3x-1}{x^2-9} - \dfrac{3}{x+3} = \dfrac{8}{x^2-9}$

d) $\dfrac{3x}{x-3} + \dfrac{5}{x+2} = \dfrac{3x^2 + 11x - 15}{x^2 - x - 6}$

20. Los resultados de las operaciones son:

a) $\dfrac{x^2 + x}{x^2 + 1} \cdot \dfrac{4x^2 + 4}{x^2 - 1} = \dfrac{4x}{x-1}$

c) $\dfrac{x-1}{2x+6} : \dfrac{x^2 - 1}{-3x - 3} = \dfrac{-3}{2x+6}$

b) $\dfrac{2x-6}{x^2-1} \cdot \dfrac{5x+5}{4x-12} = \dfrac{5}{2x-2}$

d) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-x} : \dfrac{2x+6}{4x^2-8x+4} = \dfrac{2(x+3)(x-1)}{x}$

21. Los resultados de las operaciones son:

a) $\left(1+\dfrac{2}{x}\right) : \dfrac{x^2-4}{x^2-2x} = 1$

d) $\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right) : \left(x-\dfrac{x}{x-1}\right) = \dfrac{x}{x-2}$

b) $\dfrac{x^2+4x}{x^2} : \dfrac{x^2-16}{x^2+2x+1} \cdot \dfrac{3x-12}{x^2-x} = \dfrac{3\,(x+1)^2}{x^2\,(x-1)}$

e) $\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}\right) \cdot \dfrac{x^3+9x}{x-3} = \dfrac{x^3+3x^2+9x+27}{3}$

c) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right) : \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2}$

f) $\dfrac{x+1}{2x} \cdot \left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right) = \dfrac{1}{x-x^2}$

22. Las soluciones quedan:

a) Los valores buscados son: a = 5; b = 2.

b) La igualdad queda: $\dfrac{10x+1}{x^2-3x-10} = \dfrac{51/7}{x-5} + \dfrac{19/7}{x+2}$

23. En cada caso queda:

a) Obtenemos las raíces de los polinomios a partir de su descomposición factorial:
$A(x) = (x+1)(x-2)(x^2+1)$. Las raíces son $x = -1$ y $x = 2$.
$B(x) = x(x+2)^2$. Las raíces son $x = 0$ y $x = -2$ (doble).
$C(x) = x(x^2+9)$. Las raíz es $x = 0$.

b) En cada uno de los tres casos:
i) El polinomio que tiene como raíces $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$ es $P(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)$.

ii) El polinomio que tiene como raíces $x = 0$ y $x = 1$ doble es $P(x) = a\,x\,(x-1)^2$.

iii) El polinomio que tiene como raíces $x = 0$ doble y $x = -1$ triple es $P(x) = a\,x^2(x+1)^3$.

c) El polinomio es $P(x) = x + 2$

24. En cada uno de los casos queda:

a) Multiplicando en cruz, obtenemos:
$(x^2-4x+3)\cdot(x+2) = x^3-2x^2-5x+6$

$(x^2+x-2)\cdot(x-2) = x^3-2x^2-5x+6$

Luego la igualdad es cierta.

b) Operando obtenemos: $$\frac{x-1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{\frac{x-1}{x}}=x$$

Luego la igualdad es cierta.

ACTIVIDADES-PÁG. 53

a) En la mesa de tamaño 8 x 6 la bola se mete en la esquina B, como puede verse en el dibujo.

b) La bola ha cruzado 24 cuadrados.

c) La bola ha rebotado 5 veces en los lados de la mesa.

Los mismo ocurriría en las mesas de medidas semejantes: 16 x 12, 24 x 18, etc. En particular en la mesa 4 x 3.

d) Los resultados para las mesas pedidas aparecen a continuación:

● En una mesa 2 x 6, la bola se mete en la esquina C opuesta a A, cruza 6 cuadrados y rebota 2 veces en los lados de la mesa. Lo mismo ocurre en una mesa 1 x 3.

● En una mesa 5 x 10, la bola se mete en la esquina B, cruza 10 cuadrados y rebota una vez en los lados de la mesa. Lo mismo ocurre en una mesa 1 x 2.

● En una mesa 6 x 6, la bola se mete en la esquina C, cruza 6 cuadrados y rebota 0 veces en los lados de la mesa. Lo mismo ocurre en una mesa 1 x 1.

e) En general, para una mesa de tamaño m x n, m y n números naturales, se busca la mesa semejante de dimensiones a x b, siendo a y b primos entre sí y obtenemos:

■ Si b es par, la bola se mete en la esquina B, contigua a la de partida A.

■ Si b es impar, la bola se mete en la esquina C, opuesta a la de partida A, si a es par; si x es par, la bola se mete en la esquina D.

Determinamos el número de rebotes en las bandas de la mesa de billar y para ello calculamos los rebotes que da la bola en las mesas de las dimensiones particulares que aparecen en el enunciado, obtenemos:

- En la mesa 8 x 6, o en su semejante 4 x 3, da 4 + 3 – 2 = 5 rebotes.

- En la mesa 2 x 6, o en su semejante 1 x 3, da 1 + 3 – 2 = 2 rebotes.

- En la mesa 5 x 10, o en su semejante 1 x 2, da 1 + 2 – 2 = 1 rebote.

- En la mesa 6 x 6, o en su semejante 1 x 1, da 1 + 1 – 2 = 0 rebotes.

En general, en la mesa a x b, da a + b - 2 rebotes; siendo a, b los primos entre sí determinados a partir de m x n, es decir, en una mesa de tamaño m x n, la bola da $\frac{m+n}{m.\,c.\,d.\,(m,\,n)}-2$ rebotes.

Haciendo los mismo para determinar los cuadros que cruza la bola, se llega a que en una mesa de tamaño m x n, la bola cruza $\frac{m \cdot n}{m.\ c.\ d.\ (m,\ n)}$ cuadros.

UNIDAD 3: Polinomios. Fracciones algebraicas

ACTIVIDADES-PÁG. 54

1. El valor x = 15 es la solución de la primera ecuación. El valor x = 2 es solución de la segunda ecuación, que también tiene a x = 5 como solución.

2. a) Las soluciones son x = - 3 y x = 3.

b) La solución es x = 4.

3. Vendió 65 libros a 2,50 euros y 25 libros a 3,50 euros.

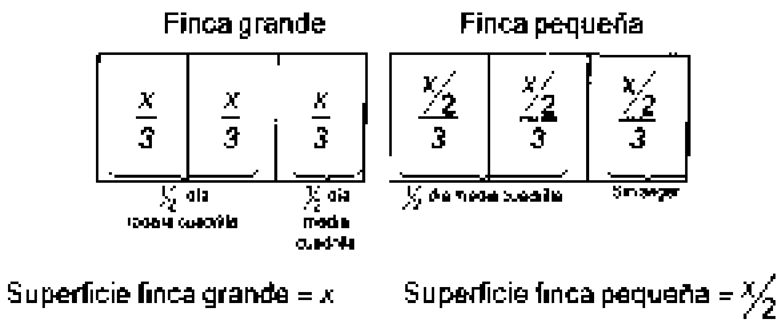
4. Si llamamos x al número de piezas que tenía al principio e y al valor inicial de cada pieza, podemos formular el sistema:

$$\begin{cases} x \cdot y = 560 \\ (x-1)\cdot(y+10) = 560 \end{cases}$$

La solución del sistema es x = 8 e y = 70. Por tanto, el alfarero tenía 8 piezas al principio.

ACTIVIDADES-PÁG. 69

1. Podemos resolver el problema mediante ecuaciones, pero es un camino muy complicado. Intentaremos representar la situación:



Las condiciones del problema nos muestran que si toda la cuadrilla trabajó durante la mitad del día en la finca grande y sólo la mitad de la cuadrilla el otro medio día. Entonces la mitad de la cuadrilla vendimió la tercera parte de la finca grande en medio día, es decir, $x/3$. Luego en la finca pequeña durante media día vendimiaron el equivalente a la finca grande, es decir, $x/3 = 2x/6$, luego quedó sin vendimiar $x/6$ de la finca pequeña que la vendimió un trabajador al día siguiente.

Si un trabajador vendimia $x/6$ en un día y se vendimiaron el campo grande $3x/3$ más el pequeño $\left(3x/6 - x/6\right)$ todos los trabajadores en 1 día, entonces el primer día se hicieron:

$$\frac{3x}{3} + \left(\frac{3x}{6} - \frac{x}{6}\right) = \frac{6x}{6} + \frac{2x}{6} = \frac{8x}{6} = 8 \cdot \left(\frac{x}{6}\right)$$

Es decir, en la cuadrilla había 8 vendimiadores.

2. Hay que ver que $x^2 - 1 = \dot{12}$.

$$x^2 = (x-1)\cdot(x+1) \quad \Rightarrow \quad Al\ ser\ x\ primo > 3 \quad \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \dot{3}\ y\ x + 1 = \dot{4} \\ \qquad o \\ x - 1 = \dot{4}\ y\ x + 1 = \dot{3} \end{cases}$$

En ambos casos, $x^2 - 1 = \dot{3} \cdot \dot{4} = \dot{12}$.

3. Hacemos el siguiente diagrama:

Páginas numeradas	1 - 9	10 - 99	100 - 999	1000 - 1025
Dígitos usados	9	180	2700	100
Total dígitos	9	180 + 9	180 + 9 + 2700 = 2889	2889 + 100

En total hacen falta: 2889 + 100 = 2989 dígitos.

100 dígitos son 25 páginas, entonces hacen falta 999 + 25 = 1024 páginas.

El libro tiene 1024 páginas.

4. Por medio de ensayo y error dirigido se obtiene:

- Con la información referida a los Reyes (R) y las Damas (D) llegamos a que puede ser RDD o DRD.

- Con la información referida a los Corazones (C) y las Picas (P) llegamos a que puede ser PCP o PPC.

Juntamos los resultados obtenidos y llegamos a que la solución es: Rey de Picas – Dama de Picas – Dama de Corazones.

ACTIVIDADES-PÁG. 71

1. a) Pasamos el paréntesis (14 – x) al segundo miembro y elevamos al cuadrado y operamos:

$$\sqrt{2x^2-3x+10}-(14-x)=0 \;\Rightarrow\; \sqrt{2x^2-3x+10}=14-x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2x^2-3x+10=196-28x+x^2 \;\Rightarrow\; x^2+25x-186=0$$

Las soluciones de la ecuación cuadrática son x = 6 y x = - 31, que ambas son soluciones de la ecuación inicial.

b) Operamos y obtenemos:

$$(x^2-5)(x^2-3)=-1 \;\Rightarrow\; x^4-8x^2+16=0$$

Las soluciones de la ecuación son x = - 2 y x = 2.

c) La solución de la ecuación es x = 7.

En el gráfico puede verse la resolución de las ecuaciones anteriores con Wiris.

Actividad 1

resolver$\left(\sqrt{2x^2-3x+10}-(14-x)=0\right) \rightarrow \{\{x=-31\},\{x=6\}\}$

resolver$\left((x^2-5)\cdot(x^2-3)=-1\right) \rightarrow \{\{x=-2\},\{x=2\}\}$

resolver$\left(\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{x^2-3x-1}{3x-12}\right) \rightarrow \{\{x=7\}\}$

2. a) Despejamos x de la primera ecuación, x = 2y + 1. Sustituimos en la segunda ecuación y obtenemos la ecuación cuadrática $8y^2 + 4y - 12 = 0$, cuyas soluciones son y = 1 e y = - 3/2.

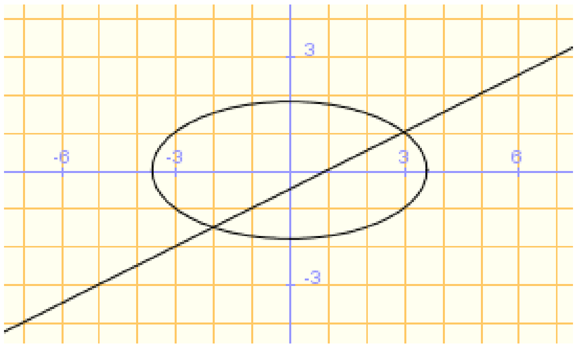
Las dos soluciones del sistema son: {x = 3; y = 1} y {x = - 2, y = - 3/2}.

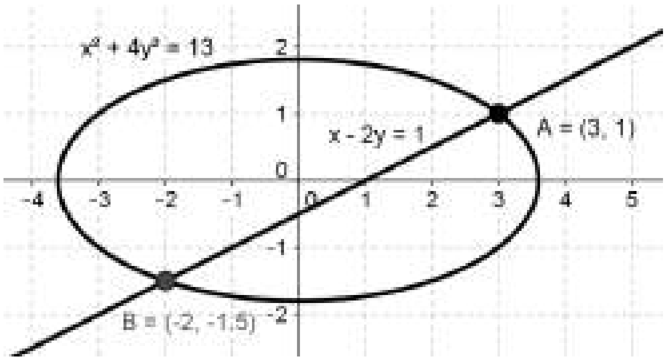
b) Despejamos x de la primera ecuación, x = y + 4. Sustituimos en la segunda ecuación y obtenemos la ecuación cuadrática $y^2 + 4y + 5 = 0$, que no tiene soluciones reales.

Por tanto, el sistema carece de soluciones.
En el gráfico pueden verse la resolución de la actividad 2 analíticamente con Wiris y gráficamente con Wiris y GeoGebra.

Actividad 1
Apartado a)

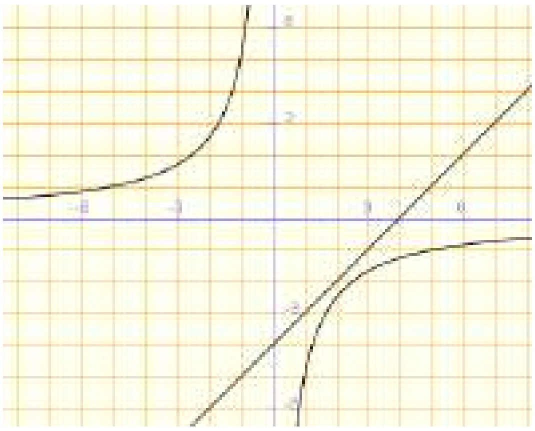
resolver$\left\{\begin{matrix} x-2y=1 \\ x^2+4y^2=13 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\left\{x=-2, y=-\dfrac{3}{2}\right\},\{x=3,y=1\}\right\}$

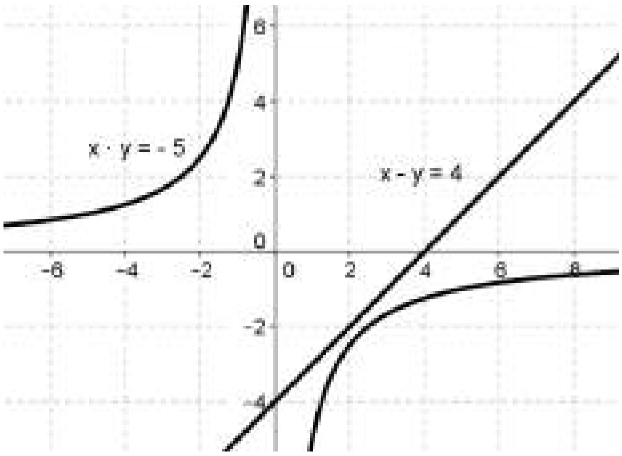




Apartado b)

resolver $\left\{\begin{array}{l} x-y=4 \\ x\cdot y=-5 \end{array}\right\} \rightarrow \{\square\}$





3. Llamando xyz al número buscado, las condiciones del enunciado nos permite escribir el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 17 \\ 2x \quad\;\; - z = 0 \\ -x \quad\;\; + z = 3 \end{cases}$$

La solución del sistema es x = 3, y = 8, z = 6 y el número buscado es 386.

En el gráfico puede verse el sistema resuelto con Wiris.

Actividad 4

resolver $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=17 \\ 2x-z=0 \\ -x+z=3 \end{array}\right\} \rightarrow \{\{x=3, y=8, z=6\}\}$

ACTIVIDADES-PÁG. 72

1. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) x = 2

b) x = 0

c) x = 5

d) x = 5

2. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) x = - 1 y x = 0

b) No tiene soluciones reales

c) x = 3 y x = 5

d) x = 0 y x = 3

e) x = - 3; x = - 1; x = 1 y x = 3

f) x = - 3 y x = 3

g) x = 4 y $x = -\frac{1}{2}$

h) x = b – a y x = - a – b

3. Las soluciones quedan:

a) Si una de las soluciones es 1/3, ésta verificará la ecuación, es decir:

$$3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}k - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}k - \frac{2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

b) Si las soluciones de la ecuación son – 3 y 6, éstas deben verificar la ecuación, por tanto:

$$\begin{cases} (-3)^2 - 3b + c = 0 \\ 6^2 + 6b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3b + c = -9 \\ 6b + c = -36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = -18 \end{cases}$$

c) Las dos soluciones son iguales si el valor del discriminante es nulo, es decir:

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \Rightarrow \quad 20^2 - 4 \cdot 2 \cdot c = 0 \quad \Rightarrow \quad 400 - 8c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 50$$

d) Sean x_1 y x_2 las soluciones de la ecuación. Se cumple:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 4 \\ x_1 \cdot x_2 = 18 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6; \quad x_2 = 3 \ y \ m = 5 \\ x_1 = -6; \ x_2 = -3 \ y \ m = -13 \end{cases}$$

4. Las soluciones son:

a) Factorizamos el polinomio $x^3 - 2x^2 - x + 2$ y obtenemos $(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$. Las soluciones de la ecuación son $x_1 = -1$; $x_2 = 1$ y $x_3 = 2$.

b) Operando $x \cdot (x + 1)^2 - 12 = x \cdot (5 - x)$, obtenemos $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$, que factorizada queda $(x + 3) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2) = 0$. Las soluciones son $x_1 = -3$; $x_2 = -2$ y $x_3 = 2$.

c) Operamos en la ecuación $\frac{x^2 - 6}{x^2 + 2} = \frac{21 - x^2}{2x^2 - 23}$ y obtenemos $3x^4 - 54x^2 + 96 = 0$ cuyas soluciones son $x_1 = -4$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = 4$ y $x_4 = \sqrt{2}$.

d) Las soluciones de la ecuación $9x^4 - 85x^2 + 36 = 0$ son $x_1 = -3$; $x_2 = -2/3$; $x_3 = 3$ y $x_4 = 2/3$.

e) Las soluciones reales de la ecuación $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$ son $x_1 = -3$; $x_2 = 2$.

f) Operando $x^2 - 3x + 1 = \dfrac{2}{x^2 - 3x}$ se obtiene $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x - 2 = 0$.

Factorizando la ecuación obtenemos $(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 - 3x - 1) = 0$; cuyas soluciones son:

$$x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \text{ y } x_4 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}.$$

5. Las soluciones son:

a) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando, obtenemos:

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 = (x-1)^2 \Rightarrow 2x+1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \ y \ x_2 = 4.$$

El valor $x_1 = 0$ no es solución, ya que se cumple: $\sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 1 \neq -1 = 0 - 1$.

El valor $x_2 = 4$ es solución, ya que se cumple: $\sqrt{2 \cdot 4 + 1} = 3 = 4 - 1$.

b) Procediendo como en el caso anterior la ecuación $3\sqrt{3x+4} - 2x = 5$ tiene dos soluciones: $x_1 = -1$ y $x_2 = \dfrac{11}{4}$

c) La ecuación $\sqrt{x^2+9} + x^2 = 21$ tiene dos soluciones: $x_1 = -4$ y $x_2 = 4$.

d) La solución de la ecuación $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 3$ es $x_1 = \dfrac{13}{9}$.

e) La ecuación $\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x-4} = 3$ no tiene soluciones.

f) Elevando al cuadrado y operando en la ecuación $\sqrt{x+10} - \dfrac{6}{\sqrt{x+10}} = 5$ obtenemos como solución los valores $x_1 = -9$ y $x_2 = 26$; aunque sólo este último es solución de la ecuación dada,

6. Llamando x al cociente, el resto será x y el divisor 2x. La relación entre los elementos de la división permite escribir $595 = 2x \cdot x + x$.

Las soluciones de la ecuación $2x^2 + x - 595 = 0$ son $x_1 = 17$ y $x_2 = -\dfrac{35}{2}$.

El divisor de esta división es 34 y se cumple $595 = 34 \cdot 17 + 17$.

7. El triángulo tiene por catetos x y x – 42 y por hipotenusa 78. El teorema de Pitágoras nos permite escribir:

$$x^2 + (x - 42)^2 = 78^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 84x - 4320 = 0$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 72$ y $x_2 = -30$.

La segunda solución carece de sentido y uno de los catetos mide 72 cm y el otro 30 cm.

8. Llamando x al número e imponiendo las condiciones del enunciado, obtenemos:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{58}{21} \quad \Rightarrow \quad 21x^2 - 58x + 21 = 0$$

Las soluciones son $x_1 = \frac{7}{3}$ y $x_2 = \frac{3}{7}$.

9. Sean x – 1, x y x + 1 los tres números consecutivos. Podemos formular la ecuación:

$$(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = 365$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = -11$ y $x_2 = 11$.

La primera carece de sentido y los números son 10, 11 y 12.

Los números consecutivos a éstos son 13 y 14, y se cumple también que $13^2 + 14^2 = 365$.

ACTIVIDADES-PÁG. 73

10. Llamamos x al número de estudiantes del curso e y a la cantidad de dinero que paga cada uno. Imponiendo las condiciones del enunciad, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x \cdot y = 2160 \\ (x - 3) \cdot (y + 8) = 2160 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por sustitución, obtenemos x = 30 e y = 72. Por tanto, en el curso había 30 estudiantes y cada uno debía pagar, en principio, 72 euros.

11. Los sistemas resueltos quedan:

a) Resolvemos el sistema $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 7 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = \frac{25}{3} \end{cases}$ por reducción y obtenemos $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ y_1 = 3 \end{cases}$

b) Resolvemos el sistema $\begin{cases} y = x^2 - 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$ por sustitución y obtenemos $\begin{cases} x_1 = 3; \quad y_1 = 1 \\ x_2 = -4; \quad y_2 = 8 \end{cases}$

c) Resolvemos el sistema $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$ por sustitución y obtenemos $\begin{cases} x_1 = 3; \quad y_1 = 2 \\ x_2 = \frac{7}{3}; \quad y_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$

d) Resolvemos el sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ x \cdot y = 30 \end{cases}$ por sustitución y obtenemos $\begin{cases} x_1 = 6; \quad y_1 = 5 \\ x_2 = -6; \quad y_2 = -5 \end{cases}$

e) Resolvemos el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 89 \\ x \cdot y = -40 \end{cases}$ por sustitución y obtenemos $\begin{cases} x_1 = -8; \quad y_1 = 5 \\ x_2 = -5; \quad y_2 = 8 \\ x_3 = 5; \quad y_3 = -8 \\ x_4 = 8; \quad y_4 = -5 \end{cases}$

f) Resolvemos el sistema $\begin{cases} x + y = 52 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{cases}$ por sustitución y obtenemos $\begin{cases} x_1 = 36; \quad y_1 = 16 \\ x_2 = 16; \quad y_2 = 36 \end{cases}$

g) En el sistema $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 57 \\ x^2 - xy + y^2 = 43 \end{cases}$ sumamos ambas ecuaciones y restamos ambas ecuaciones, obteniendo el sistema equivalente $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50 \\ x \cdot y = 7 \end{cases}$. Resolviendo este último por sustitución obtenemos las soluciones $\begin{cases} x_1 = 7; \quad y_1 = 1 \\ x_2 = -7; \quad y_2 = -1 \\ x_3 = 1; \quad y_3 = 7 \\ x_4 = -1; \quad y_4 = -7 \end{cases}$

h) Resolviendo el sistema $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = 2 \end{cases}$ por sustitución y obtenemos $\begin{cases} x_1 = 1; \quad y_1 = 0 \\ x_2 = 17; \quad y_2 = 8 \end{cases}$.

De las dos soluciones anteriores sólo es válida $x_2 = 17$ e $y_2 = 8$.

12. Sean x y x + 100 la medida de sus lados. Se cumplirá x · (x + 100) = 120 000.

Operando y resolviendo, obtenemos:

$$x^2 + 100x - 120\,000 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-100 \pm \sqrt{100^2 + 4 \cdot 120\,000}}{2} = \frac{-100 \pm 700}{2} = \begin{cases} 300 \\ -400 \end{cases}$$

Las medidas de la finca son 300 y 400 metros.

13. Llamando x a la longitud de la base e y a la altura e imponiendo las condiciones del enunciado, obtenemos:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 20 \\ x \cdot y = 24 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 6; \; y_1 = 4 \\ x_2 = 4; \; y_2 = 6 \end{cases}$$

Los trozos deben ser de 4 dm y 6 dm.

14. Llamando x al área de un cuadrado e y al área de otro, podemos formular el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3060 \\ x - y = 468 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1764\ cm^2 \\ y = 1296\ cm^2 \end{cases}$$

El lado de un cuadrado mide $\sqrt{1764}\,cm = 42\ cm$ y el del otro $\sqrt{1296}\,cm = 36\ cm$.

15. Llamamos x al tiempo que tarda el segundo albañil solo en hacer la reparación. De la cantidad de trabajo que hacen los albañiles por separado y juntos podemos formular la ecuación:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4x + 24 = 6x \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = 12$$

El segundo albañil tardaría en hacer sólo la reparación 12 horas.

16. Las soluciones son:

a) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:
$E_1 \rightarrow E_1$; $E_2 \rightarrow E_2 - E_1$ y $E_3 \rightarrow E_3$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y = 3 \\ y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad -z = -3 \\ y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y su solución es x = 1; y = 2; z = 3.

b) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:
$E_1 \rightarrow E_1$; $E_2 \rightarrow E_2 - 2E_1$ y $E_3 \rightarrow E_3 - 3E_1$
$E_1 \rightarrow E_1$; $E_2 \rightarrow E_2$ y $E_3 \rightarrow 3E_3 - 4E_2$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2x + y - 5z = -4 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3y - 9z = -12 \\ 4y - 10z = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3y - 9z = -12 \\ 6z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y su solución es x = 2; y = 2; z = 2.

c) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:
$E_1 \rightarrow E_1$; $E_2 \rightarrow 2E_2 - E_1$ y $E_3 \rightarrow 2E_3 - 5E_1$
$E_1 \rightarrow E_1$; $E_2 \rightarrow E_2$ y $E_3 \rightarrow E_3 - E_2$

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -7 \\ x + y = 1 \\ 5x + 2z = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ 5y - z = 9 \\ 15y - z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ 5y - z = 9 \\ 10y \quad = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{5} \\ y = -\dfrac{2}{5} \\ y = -11 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y su solución es $x = \frac{7}{5},\ y = -\frac{2}{5},\ z = -11.$

d) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:

$E_1 \rightarrow E_1;\ E_2 \rightarrow E_2 - 2E_1$ y $E_3 \rightarrow E_3 - E_1$

$E_1 \rightarrow E_1;\ E_2 \rightarrow E_2$ y $E_3 \rightarrow E_3 - 6E_2$

$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x + 3y + 5z = -11 \\ x - 5y + 6z = -29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -2 \\ y + 3z = -7 \\ 6y - 5z = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -2 \\ y + 3z = -7 \\ -23z = 69 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y su solución es x = - 1; y = 2; z = - 3.

e) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:

$E_1 \rightarrow E_1;\ E_2 \rightarrow E_2 - 2E_1$ y $E_3 \rightarrow E_3 - 5E_1$

$E_1 \rightarrow E_1;\ E_2 \rightarrow E_2$ y $E_3 \rightarrow E_3 - 4E_2$

$$\begin{cases} x + 4y - 8z = 6 \\ 2x + 4y - z = 8 \\ 5x + 4y + 20z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y - 8z = 6 \\ -4y + 15z = -4 \\ -16y + 60z = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y - 8z = 6 \\ -4y + 15z = -4 \\ 0z = -4 \end{cases}$$

El sistema es incompatible y carece de solución.

f) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:

$E_1 \rightarrow E_1;\ E_2 \rightarrow E_2 - 3E_1$ y $E_3 \rightarrow E_3 - E_1$

$E_1 \rightarrow E_1;\ E_2 \rightarrow E_2$ y $E_3 \rightarrow E_3 - 3E_2$

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = 6 \\ 3x - 3y + z = -7 \\ x - y + 2z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 4z = 6 \\ -12y + 13z = -25 \\ -4y + 6z = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 4z = 6 \\ -12y + 13z = -25 \\ -5z = 5 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y su solución es x = - 1; y = 1; z = - 1.

g) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:

$E_1 \rightarrow E_1;\ E_2 \rightarrow E_2;\ E_3 \rightarrow E_3$ y $E_4 \rightarrow E_4 + E_3$

$E_1 \rightarrow E_1;\ E_2 \rightarrow E_2;\ E_3 \rightarrow E_3$ y $E_4 \rightarrow E_4 + E_2$

$E_1 \rightarrow E_1;\ E_2 \rightarrow E_2;\ E_3 \rightarrow E_3$ y $E_4 \rightarrow E_4 + E_3$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \\ z - t = 1 \\ t - x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \\ z - t = 1 \\ -y + t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \\ z - t = 1 \\ -z + t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \\ z - t = 1 \\ 0t = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y \quad = 1 \\ y - z = 1 \\ z = 1 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + m \\ y = 2 + m \\ z = 1 + m \\ t = m \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son x = 3 + m, y = 2 + m, z = 1 + m; t = m, con m $\in$ R.

h) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:

$E_1 \rightarrow E_1$; $E_2 \rightarrow E_2 - E_1$; $E_3 \rightarrow E_3 - E_1$ y $E_4 \rightarrow E_4$

$E_1 \rightarrow E_1$; $E_2 \rightarrow E_2$; $E_3 \rightarrow 2E_3 - E_2$ y $E_4 \rightarrow 2E_4 + 3E_2$

$E_1 \rightarrow E_1$; $E_2 \rightarrow E_2$; $E_3 \rightarrow E_3$ y $E_4 \rightarrow E_4 - E_3$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + t = 1 \\ x + z - t = 3 \\ 3y + 2z + t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2y - z + t = 0 \\ -y - t = 2 \\ 3y + 2z + t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2y - z + t = 0 \\ z - 3t = 4 \\ z + 5t = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2y - z + t = 0 \\ z - 3t = 4 \\ -8t = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y su solución es x = 1; y = - 1; z = 1; t = - 1.

i) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:

$E_1 \rightarrow E_1$; $E_2 \rightarrow E_2 - 2E_1$; $E_3 \rightarrow E_3 - E_1$ y $E_4 \rightarrow 3E_4$

$E_1 \rightarrow E_1$; $E_2 \rightarrow E_2$; $E_3 \rightarrow 6E_3 - E_2$ y $E_4 \rightarrow 6E_4 - 4E_2$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -3 \\ 2x - 2y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -3 \\ -6y + 7z = 8 \\ -y + 2z = 3 \\ -4y + 7z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -3 \\ -6y + 7z = 8 \\ -5z = -10 \\ 14z = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y su solución es x = 1; y = 1; z = 2.

17. Sea el número $\overline{xyz} = 100x + 10 + z$ el número buscado. De las condiciones del enunciado obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + x = 10 \\ x = y + z \\ \overline{xyz} - \overline{zyx} = 297 \end{cases}$$

Operando y resolviendo, obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + x = 10 \\ x - y + z = 0 \\ 100x + 10y + x - (100z + 10y + x) = 297 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 10 \\ x - y - z = 0 \\ x \quad - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

El número buscado es 532.

ACTIVIDADES-PÁG. 74

18. Llamando x a la edad del padre e y a la edad del hijo obtenemos:

$$\begin{cases} y + \dfrac{x}{3} = \dfrac{x}{2} \\ x - 4 = 11\,(y - 4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 6y = 0 \\ x - 11y = -40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 48 \\ y = 8 \end{cases}$$

El padre tiene 48 años y el hijo 8 años.

19. Sea el número $\overline{xyz} = 100x + 10 + z$ el número buscado. De las condiciones del enunciado obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + x = 18 \\ \overline{xyz} - \overline{zyx} = 594 \\ y = \dfrac{x + z}{2} \end{cases}$$

Operando y resolviendo, obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + x = 18 \\ 100x + 10y + x - (100z + 10y + x) = 594 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x \quad - z = 6 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{cases}$$

El número buscado es 963.

20. Llamamos x a la edad del padre, y a la edad de la madre y z a la edad de la hija. Obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 86 \\ y = 3z \\ x - z = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 38 \\ y = 36 \\ z = 12 \end{cases}$$

El padre tiene 38 años, la medre 36 años y la hija 12 años.

21. Llamamos

x: al número de bricks de leche entera
y: al número de bricks de leche semidesnatada
z: al número de bricks de leche desnatada

Imponemos las condiciones del enunciado y obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 10\,400 \\ 0{,}6x + 0{,}55y + 0{,}5z = 5765 \\ x = 0{,}6 \cdot (y + z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3900 \\ y = 3500 \\ z = 3000 \end{cases}$$

La central lechera envasa:

3 900 bricks de leche entera
3 500 bricks de leche semidesnatada
3 000de bricks de leche desnatada.

22. En el equipo A hay x futbolistas y en el equipo B hay y futbolistas. Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x - 3 = y + 3 \\ x + 7 = (y - 7)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 12 \end{cases}$$

Hay 18 futbolistas en el equipo A y 12 futbolistas en el equipo B.

23. Llamamos x a la edad de Luis e y a la edad de María. Se debe cumplir:

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + 16 = 2(y + 16) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 48 \\ y = 16 \end{cases}$$

Luis tiene 48 años y María tiene 16 años.

24. Las soluciones son:

a) $(x^2 - 2) \cdot (x^2 + 2) = 12 \quad \Rightarrow \quad x^4 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

b) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando obtenemos: $x^2 - 2 = 2\sqrt{x^2 - 3}$, y elevando de nuevo obtendríamos: $x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$ y ambas soluciones son válidas.

c) Factorizando obtenemos $x^2 (x - 1) (x + 1) (2x + 3) = 0$ y sus soluciones serían las siguientes: x = 0 doble; x = - 1; x = 1 y $x = -\dfrac{3}{2}$.

d) Operando obtenemos $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ cuyas soluciones son: $x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$.

e) $x^2 - 8 = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3$ y $x = \pm\sqrt{7}$.

f) $2x - 3 = x + 9 \quad \Rightarrow \quad x = 12$; o bien $2x - 3 = -(x + 9) \quad \Rightarrow \quad x = -2$

25. Las soluciones son:

a) x = 3 e y = 1 o x = - 2 e y = - 4.

b) x = 3, y = 1, z = 3

c) Sumando ambas ecuaciones obtenemos: $(x + y)^2 = 36$ $\Rightarrow$ x+ y = 6 o x + y = - 6 y la solución provendrá de los dos sistemas siguientes:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + xy = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -6 \\ x^2 + xy = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases}$$

26. Llamando x e y a las dimensiones del jardín e imponiendo las condiciones del problema obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 36 \\ (x+2)(y+2) = xy + 40 \end{cases}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones, todos los valores de x e y que verifiquen la siguiente expresión: x + y = 18 con x $\in$ (0, 18) e y $\in$ (0, 18).

27. Llamamos x al número de kilómetros hacia arriba a la ida, y al número de kilómetros hechos en llano y z al número de kilómetros hacia abajo. Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 920 \\ \dfrac{x}{80} + \dfrac{y}{100} + \dfrac{z}{120} = 9 \\ \dfrac{x}{120} + \dfrac{y}{100} + \dfrac{z}{80} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 240\ km \\ y = 200\ km \\ z = 480\ km \end{cases}$$

28. Llamamos x al número de coches, y al número de motos y z al número de camiones. Se tiene que:

$$\begin{cases} x + y + z = 37 \\ y = 3 + x + z \\ 4z + 2y + 6z = 118 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12\ coches \\ y = 20\ motos \\ z = 5\ camiones \end{cases}$$

ACTIVIDADES-PÁG. 75

29. Llamando x al número de personas que asistieron a la sala grande e y al número de personas de la sala pequeña; imponiendo las condiciones del enunciado, obtenemos:

$$\begin{cases} 5x + 3{,}75y = 1287{,}5 \\ x + y = 280 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 190\ personas\ en\ la\ sala\ grande \\ y = 90\ personas\ en\ la\ sala\ pequeña \end{cases}$$

30. Llamamos x al número de motos que importa este país, y al de coches y z al de todoterrenos. Obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 22\,400 \\ 4800x + 9000y + 9500z = 168{,}65 \cdot 10^6 \\ y = \dfrac{60}{100}(x + z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8500 \; motos \\ y = 8400 \; coches \\ z = 5500 \; todoterrenos \end{cases}$$

31. Llamamos x al tiempo que invertiría la tercera persona sola. Obtenemos:

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{x = 15 días tarda la tercera.}$$

32. Llamando x e y a los capitales, obtenemos:

$$\begin{cases} x - y = 567 \\ \dfrac{x \cdot r \cdot 4}{1200} = \dfrac{y \cdot r \cdot 13}{1200} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 567 \\ 4x - 13y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 819 \\ y = 252 \end{cases}$$

Los capitales son de 819 euros y 252 euros.

33. Llamando x al interés que produce cada acción del tipo A e y al que produce cada acción del tipo B, obtenemos:

$$\begin{cases} 1000x + 2000y = 1680 \\ 2000x + 1000y = 1560 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}48 \; euros \\ y = 0{,}6 \; euros \end{cases}$$

Luego los 3000 euros en tipo A y 5000 euros en tipo B producen 4440 euros.

34. Llamamos x al número de alumnas que había al principio de curso e y al número de alumnos. Obtenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{8}{7} \\ \dfrac{x - 40}{0{,}96 \cdot y} = \dfrac{15}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 400 \; alumnas \\ y = 350 \; alumnos \end{cases}$$

Finalizan el curso 360 chicos y 336 chicas.

35. Llamamos x al número de cajas de 250 g, y al de 500 g y z al de 100 g. Obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ x = y + 5 \\ (0{,}25x + 0{,}5y + z) \cdot 24 = 750 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \; cajas \; pequeñas \\ y = 20 \; cajas \; medianas \\ z = 15 \; cajas \; grandes \end{cases}$$

36. Llamando D al número de habitaciones dobles y S al de sencillas, obtenemos:

$$\begin{cases} D + S = 16 \\ 2D + S = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 11 \text{ habitaciones dobles} \\ S = 5 \text{ habitaciones sencillas} \end{cases}$$

37. Llamamos m, n y p al número de manzanos, circules y perales, respectivamente. Obtenemos:

$$\begin{cases} m + c + p = 22 \\ 2m - 2c - 3p = 0 \\ m - 2c \qquad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 12 \\ c = 6 \\ p = 4 \end{cases}$$

Por tanto, en la finca hay 12 manzanos, 6 ciruelos y 4 perales.

38. Llamando x, y, z a los alumnos que eligen Italia, Canarias y Holanda, respectivamente e imponiendo las condiciones del enunciado, obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 50 \\ x = 2y \\ z = \dfrac{y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \text{ alumnos prefieren ir a Italia} \\ y = 15 \text{ alumnos prefieren ir a Canarias} \\ z = 5 \text{ alumnos prefieren ir a Holanda} \end{cases}$$

ACTIVIDADES-PÁG. 76

39. Sean x, y, z el número de participaciones de 1, 2 y 5 euros, respectivamente. Las condiciones del enunciado nos permiten plantear el sistema que sigue. En la primera ecuación se describe el número total de participaciones, en la segunda el importe total y en la tercera la relación entre participaciones de 1 euros y de 5 euros.

$$\begin{cases} x + y + z = 260 \\ x + 2y + 5z = 600 \\ x \qquad - 2z = 0 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado, es decir, tiene una solución única ya que el determinante de la matriz de los coeficientes vale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Aplicando el método de Gauss, obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 260 \\ x + 2y + 5z = 600 \\ x \quad\quad - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 260 \\ -y - 4z = -340 \\ y + 3z = 260 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 260 \\ y + 4z = 340 \\ -z = -80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 160 \\ y = 20 \\ z = 80 \end{cases}$$

Se han vendido 160 participaciones de 1 euros, 20 participaciones de 2 euros y 80 participaciones de 5 euros.

Puede comprobarse, con facilidad, que la solución obtenida es la correcta:

$$\begin{cases} 160 + 20 + 80 = 260 \\ 160 + 2 \cdot 20 + 5 \cdot 80 = 600 \\ 160 \quad\quad - 2 \cdot 80 = 0 \end{cases}$$

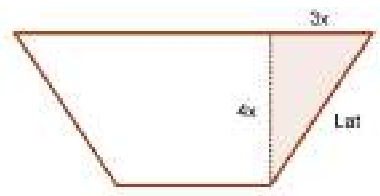
40. a) El área de la sección es el área de un trapecio de bases 4x y 10x y de altura 4x; por tanto, su área, A, será:

$$A = \frac{4x + 10x}{2} \cdot 4x \quad \Rightarrow \quad A = 7x \cdot 4x \quad \Rightarrow \quad A = 28x^2$$

El volumen, V, del canal será el área de la sección por su longitud:

$$V = 28x^2 \cdot 245x = 6860x^3$$

b) Para determinar el área total del canal tenemos que conocer la medida de los lados inclinados de la sección.



Llamando Lat al lado inclinado, calculamos su medida aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo del dibujo cuyos catetos miden 3x y 4x.

$$Lat^2 = (3x)^2 + (4x)^2 \quad \Rightarrow \quad Lat = \sqrt{9x^2 + 16x^2} \quad \Rightarrow \quad Lat = \sqrt{25x^2} = 5x$$

El área total del canal es:

$$A_T = (5x + 4x + 5x) \cdot 245x = 3430x^2$$

c) Si la longitud real del canal es 122,5 m, entonces:

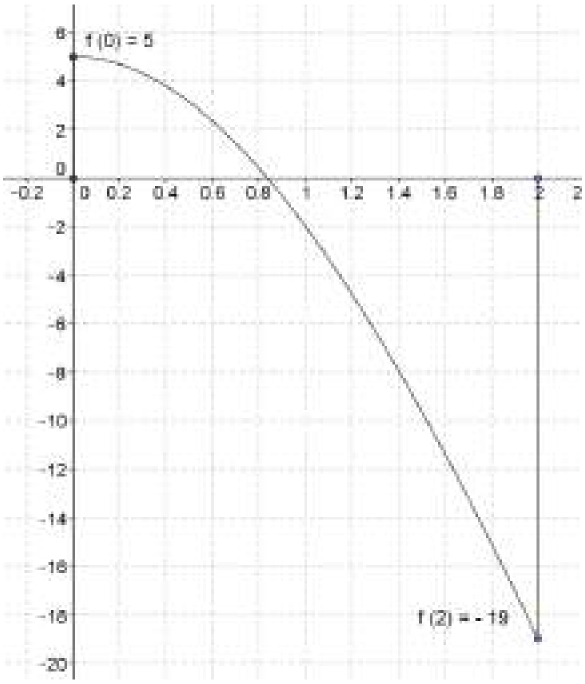
$$245x = 122{,}5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{122{,}5}{245} = 0{,}5$$

El valor del volumen del canal es $V = 6860 \cdot (0{,}5)^3 = 857{,}5\ m^3$.

El área total del canal es $A_T = 3430 \cdot (0{,}5)^2 = 857{,}5\ m^2$.

41. a) Aplicamos los pasos descritos al polinomio P (x) = $x^3 - 8x^2 + 5$,

Paso 1º. Observamos que P (0) = 5 > 0 y P (2) = 8 – 32 + 5 = -19 < 0, por tanto, hay una raíz entre 0 y 2.



Paso 2º. En el intervalo (0, 2) su punto medio es 1 y P (1) = -2. Este valor es de signo opuesto al de P (0), entonces la raíz está entre 0 y 1.

Paso 3º. En el intervalo (0, 1) su punto medio es 0,5 y P (0,5) = 3,125. Este valor es de signo opuesto al de P (1), luego la raíz está entre 0,5 y 1.

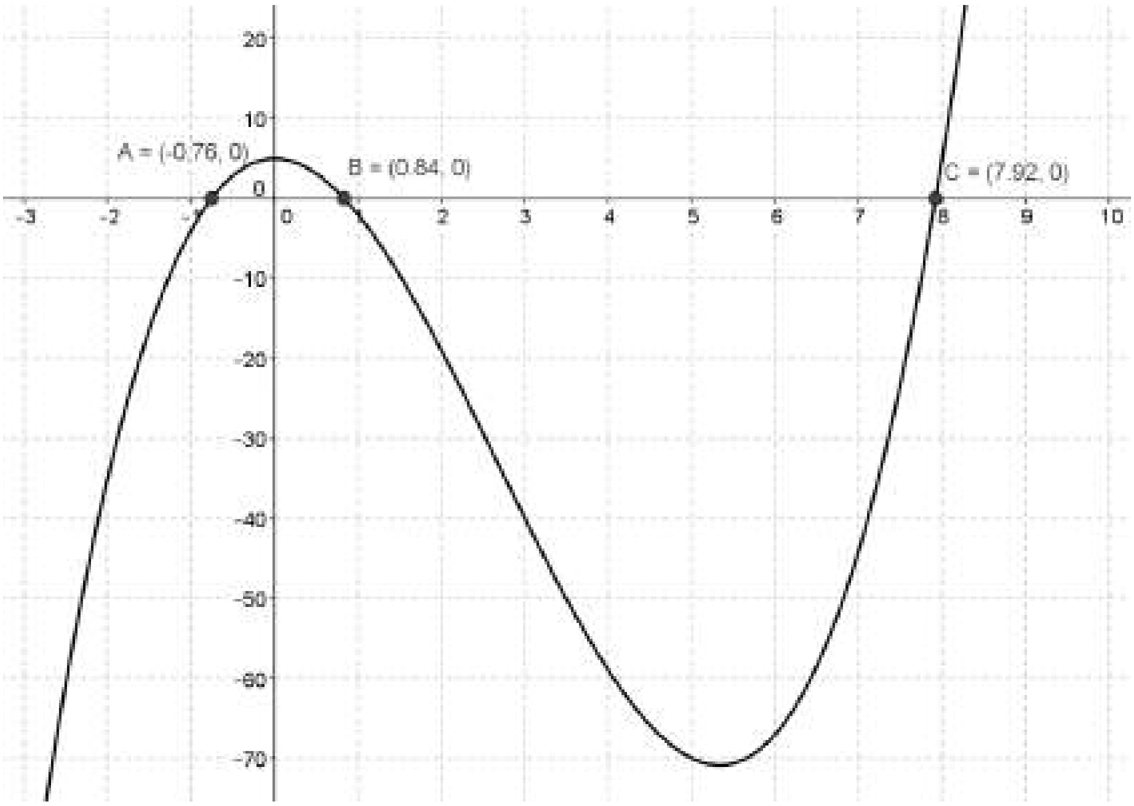
Paso 4º. En el intervalo (0,5; 1) su punto medio es 0,75 y P (0,75) = 0,92. Este valor es de signo opuesto al de P (1), luego la raíz está entre 0,75 y 1.

Paso 5º. En el intervalo (0,75; 1) su punto medio es 0,875 y P (0,875) = - 0,455. Este valor es de signo opuesto al de P (0,75), luego la raíz está entre 0,75 y 0,875.

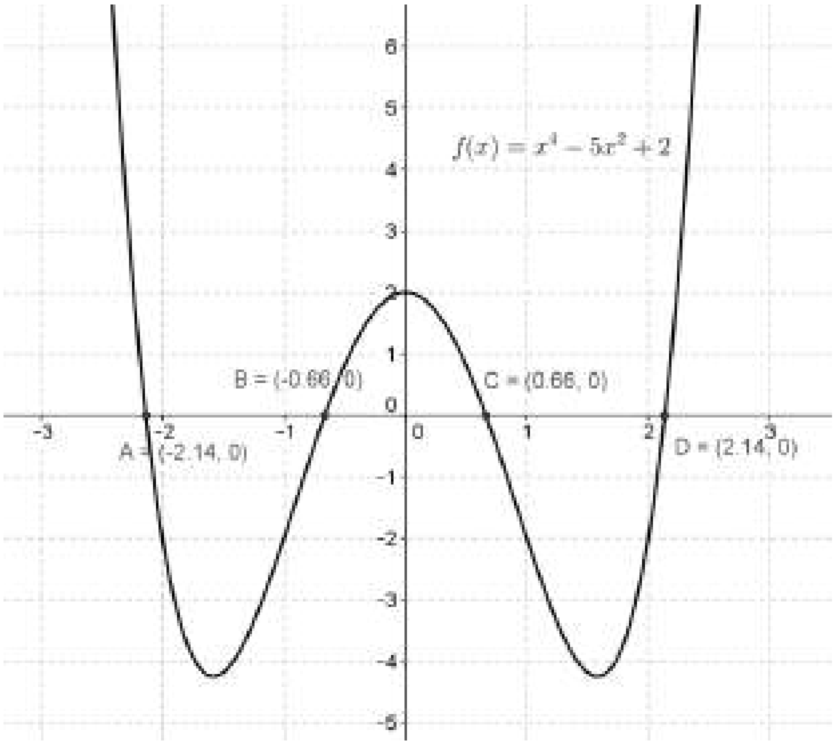
Una estimación razonable sería el punto medio de este intervalo, es decir: $\dfrac{0{,}75 + 0{,}875}{2} = 0{,}8125$.

En la imagen puede verse la raíz encontrada.

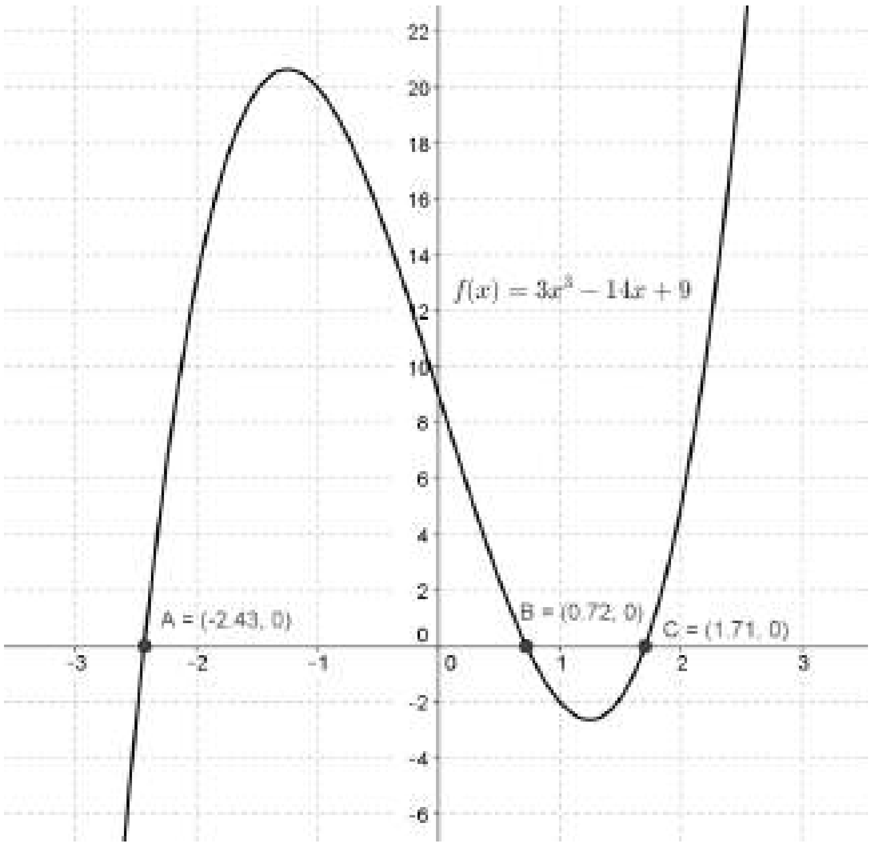
Si realizamos la gráfica de la función polinómica f(x) = $x^3 - 8x^2 + 5$ observamos que tiene tres raíces en los intervalos (- 1, 0), (0, 1) y (7, 8).



b) Procediendo como en el apartado anterior, encontramos las raíces del polinomio Q (x) = $x^4 - 5x^2 + 2$ en los intervalos (- 3, -2); (- 1, 0), (0, 1) y (2, 3). Pueden verse en la gráfica.



c) Las raíces del polinomio R (x) = $3x^3 - 14x + 9$ están en los intervalos (- 3, - 2); (0, 1) y (1, 2). Pueden verse en la gráfica.



42. a) Llamando b al número de coches blancos, **r** el número de coches rojos y **g** al número de coches grises podemos formular el siguiente sistema con las dos condiciones del enunciado:

$$\begin{cases} b + r + g = 24 \\ g = 2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + r + g = 24 \\ -2r + g = 0 \end{cases}$$

Con estas ecuaciones no podemos saber el número **b** de coches blancos que hay en el aparcamiento ya que si resolvemos el sistema anterior (es compatible indeterminado), obtenemos las soluciones:

$$\begin{cases} b = 24 - 3r \\ g = 2r \end{cases}$$

b) Si añadimos la ecuación r + g = 12, el sistema anterior queda:

$$\begin{cases} b + r + g = 24 \\ -2r + g = 0 \\ r + g = 12 \end{cases}$$

Eliminamos la incógnita **g** en la última ecuación haciendo la combinación $E_3 - E_2 \rightarrow E_3$ y resolviendo el sistema resultante, obtenemos:

$$\begin{cases} b + r + g = 24 \\ -2r + g = 0 \\ 3r = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 12 \\ g = 8 \\ r = 4 \end{cases}$$

Observamos que en el aparcamiento hay 12 coches blancos, 8 grises y 4 rojos.

43. Llamamos x a las personas que pagan la entrada a 9 euros, y a los jubilados y z a los niños.

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ y = 2x \\ 9x + 1{,}8y + 4{,}5z = 2115 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 150 \ \textit{pagan la entrada a 9 euros} \\ y = 300 \ \textit{son jubilados} \\ z = 50 \ \textit{son niños} \end{cases}$$

ACTIVIDADES-PÁG. 77

a) La tabla completa con los polígonos inscritos y circunscritos a la circunferencia de 2^{n+1} lados, es decir, 4, 8, 16, 32, 64,… lados, nos proporciona las siguientes aproximaciones numéricas de π.

Lados	Ángulo	Seno	Tangente	Semiperímetro inscrito	Semiperímetro circunscrito
4	45º	0,707106781	1	2,82842712475	4
8	22,5º	0,382683432	0,41421356237	3,06146745892	3,31370849898
16	11,25º	0,195090322	0,19891236738	3,12144515226	3,18259787807
32	5,625º	0.0980171403	0,09849140336	3,13654849055	3,15172490743
64	2,8125º	0,0490676743	0,04912684977	3,14033115695	3,14411838525
128	1,4063º	0,0245412285	0,02454862211	3,14127725093	3,14222362994
256	0,7031º	0.0122715383	0,01227246238	3,14151380114	3,14175036917
512	0,3516º	0,0061358846	0,00613600016	3,14157294037	3,1416320807

1024	0,1758º	0,0030679568	0,0030679712	3,14158772528	3,14160251026
2048	0,0879º	0,0015339802	0,0015339819	3,1415914215	3,14159511774
4096	0,0440º	0,0007669903	0,0007699054	3,1415923461	3,14159326967

b) La tabla completa con los polígonos inscritos y circunscritos a la circunferencia de $3 \cdot 2^n$ lados, es decir, 6, 12, 24 48, 96,… lados, nos proporciona las siguientes aproximaciones numéricas de π.

Lados	Ángulo	Seno	Tangente	Semiperímetro inscrito	Semiperímetro circunscrito
6	30º	0,5	0,577350269	3	3,464101615
12	15º	0,258819045	0,267949192	3,105828541	3,215390309
24	7,5º	0,130526193	0,131652497	3,132628613	3,159659942
48	3,75º	0,065403129	0,065543462	3,139350203	3,146086215
96	1,875º	0,032719082	0,03273661	3,141031951	3,1427146
192	0,9375º	0,016361731	0,016363922	3,141452472	3,14187305
384	0,4688º	0,00818139604	0,0081814134	3,141557608	3,141662747
768	0,2344º	0,00409060402	0,0040906382	3,141583892	3,141610177
1536	0,1172º	0,00204530629	0,00204531056	3,141590463	3,141597034
3072	0,0586º	0,00102265421	0,00102265421	3,141592106	3,141593749
6144	0,0293º	0,00051132691	0,00051132697	3,141592517	3,141592927

c) Para construir las dos tablas anteriores con una hoja de cálculo, en este caso Excel, seguimos las instrucciones:

Abres la Hoja de Cálculo y escribes:
1. Las cabeceras de columna (Fila 1): n, Lados, Ángulo, etc.
2. Escribes la serie de la columna A: 1, 2, 3, …., 11
3. En la celda B2 escribes: =POTENCIA(2;A2+1)
4. En la celda C2 escribes: =180/B2
5. En la celda D2 escribes: =SENO(C2*PI()/180)
6. En la celda E2 escribes: =TAN(C2*PI()/180)
7. En la celda F2 escribes: =B2*D2
8. En la celda G2 escribes: =B2*E2
9. Seleccionas con el ratón el Rango B2:G12 y pulsas Control+J
10. Seleccionas el Rango C2:G12 y Formato/Celdas/Número/11 posiciones decimales

Se obtiene la tabla que sigue.

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	Lados	Ángulo (grados)	Seno	Tangente	Semiperímetro inscrito	Semiperímetro circunscrito
2	1	4	45,00000000000	0,70710678119	1,00000000000	2,82842712475	4,00000000000
3	2	8	22,50000000000	0,38268343237	0,41421356237	3,06146745892	3,31370849898
4	3	16	11,25000000000	0,19509032202	0,19891236738	3,12144515226	3,18259787807
5	4	32	5,62500000000	0,09801714033	0,09849140336	3,13654849055	3,15172490743
6	5	64	2,81250000000	0,04906767433	0,04912684977	3,14033115695	3,14411838525
7	6	128	1,40625000000	0,02454122852	0,02454862211	3,14127725093	3,14222362994
8	7	256	0,70312500000	0,01227153829	0,01227246238	3,14151380114	3,14175036917
9	8	512	0,35156250000	0,00613588465	0,00613600016	3,14157294037	3,14163208070
10	9	1024	0,17578125000	0,00306795676	0,00306797120	3,14158772528	3,14160251026
11	10	2048	0,08789062500	0,00153398019	0,00153398199	3,14159142151	3,14159511775
12	11	4096	0,04394531250	0,00076699032	0,00076699054	3,14159234557	3,14159326963
13							

Para la segunda tabla procedemos de manera análoga:

Abres la Hoja de Cálculo y escribes:

1. Las cabeceras de columna (Fila 1): n, Lados, Ángulo, etc.
2. Escribes la serie de la columna A: 1, 2, 3, …., 11
3. En la celda B2 escribes: =3*POTENCIA(2;A2)
4. En la celda C2 escribes: =180/B2
5. En la celda D2 escribes: =SENO(C2*PI()/180)
6. En la celda E2 escribes: =TAN(C2*PI()/180)
7. En la celda F2 escribes: =B2*D2
8. En la celda G2 escribes: =B2*E2
9. Seleccionas con el ratón el rango B2:G12 y pulsas Control+J
10. Seleccionas el Rango C2:G12 y Formato/Celdas/Número/11 posiciones decimales

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	Lados	Ángulo (grados)	Seno	Tangente	Semiperímetro inscrito	Semiperímetro circunscrito
2	1	6	30,00000000000	0,50000000000	0,57735026919	3,00000000000	3,46410161514
3	2	12	15,00000000000	0,25881904510	0,26794919243	3,10582854123	3,21539030917
4	3	24	7,50000000000	0,13052619222	0,13165249759	3,13262861328	3,15965994210
5	4	48	3,75000000000	0,06540312923	0,06554346282	3,13935020305	3,14608621513
6	5	96	1,87500000000	0,03271908282	0,03273661041	3,14103195089	3,14271459965
7	6	192	0,93750000000	0,01636173163	0,01636392214	3,14145247229	3,14187304998
8	7	384	0,46875000000	0,00818113960	0,00818141340	3,14155760791	3,14166274706
9	8	768	0,23437500000	0,00409060403	0,00409063825	3,14158389215	3,14161017660
10	9	1536	0,11718750000	0,00204530629	0,00204531057	3,14159046323	3,14159703432
11	10	3072	0,05859375000	0,00102265368	0,00102265422	3,14159210600	3,14159374877
12	11	6144	0,02929687500	0,00051132691	0,00051132697	3,14159251669	3,14159292739
13							

UNIDAD 4: Inecuaciones y sistemas

ACTIVIDADES-PÁG. 78

1. Las afirmaciones de los apartados a) y b) son falsas y la del apartado c) es verdadera.

2. La medida del tercer segmento debe estar entre 5 y 25 cm.

3. Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x - \dfrac{x}{3} < 170 \\ x - \dfrac{x}{5} > 190 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 255 \\ x > 237{,}5 \end{cases}$$

El número de paquetes de folios que ha comprado el centro es un número entero comprendido en el intervalo (237, 255).

4. No podemos simplificar (dividir) por x – 5, ya que en este caso su valor es nulo.

ACTIVIDADES-PÁG. 89

1. Sí puede ser cierto; se trata de dos padres que se han casado cada uno con la hija del otro.

2. Diremos que:

$a_1 = 7$

$a_2 = 8$

…

$a_n = 7 + (n – 1) \cdot 1 = n + 6$

Además sabemos que $a_n + n = 42$. Sustituyendo y operando, obtenemos n = 18 damas.

Con el valor anterior, tenemos $a_n = 42 – 18 = 24$ caballeros.

Había 18 damas y 24 caballeros.

3. Luís tarda 15 minutos en llegar a la sierra.

La perra, por lo tanto, ha estado moviéndose durante 15 minutos. Por tanto ha recorrido:

$$16\ {}^{km}\!/_{h} : 4\ h = 4\ kilómetros$$

4. Llamando x e y a las incógnitas podemos formular la "igualdad":

$$2000 - 19xy = 9 + x + y$$

Desarrollando los números según la expresión decimal:

$2000 - (1000 + 900 + 10x + y) = 9 + x + y$

Operando, obtenemos la ecuación $11x + 2y = 91$, cuya solución con sentido es $x = 7$, $y = 7$.

Es decir, Astérix nació en el año 1977 y en el año 2000 tenía 23 años.

ACTIVIDADES-PÁG. 91

1. Con Wiris obtenemos:

resolver_inecuación$(-4x^2+12x-8<0) \rightarrow x>2|x<1$

dibujar$(y=-4x^2+12x-8$, {color=azul, anchura_línea=3}) $\rightarrow$

resolver_inecuación$\left(\frac{4x+3}{8}-x \geq \frac{x^2-14}{16}\right) \rightarrow x \geq -10 \& x \leq 2$

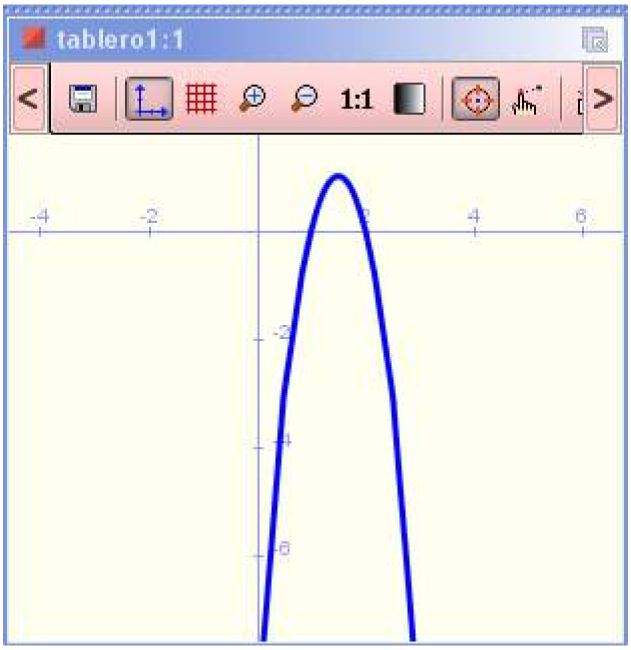
$\frac{4x+3}{8}-x-\frac{x^2-14}{16} \rightarrow -\frac{1}{16}\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{5}{4}$

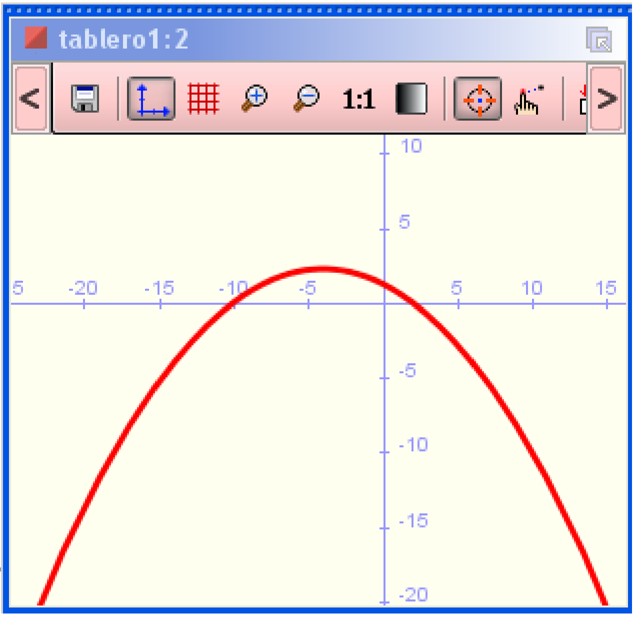
dibujar$\left(y=-\frac{1}{16}\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{5}{4}\right.$, {color=rojo, anchura_línea=3}$\left.\right)$

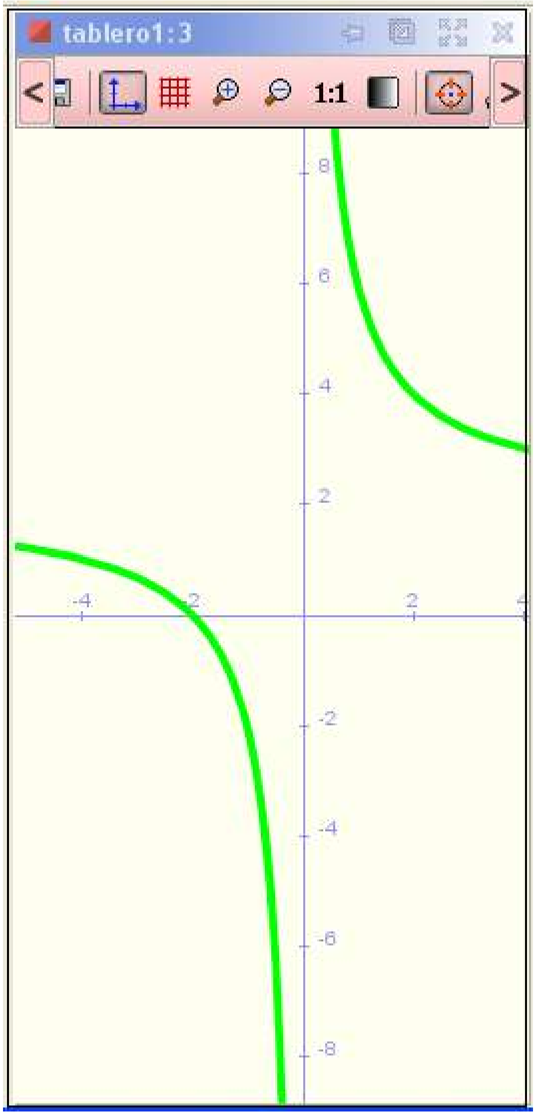
resolver_inecuación$\left(\frac{2x+4}{x}<0\right) \rightarrow x>-2 \& x<0$

dibujar$\left(y=\frac{2x+4}{1x}\right.$, {color=verde, anchura_línea=4}$\left.\right) \rightarrow$ tabler

Como vemos en la imagen, la primera inecuación tiene como soluciones $(-\infty , 1) \cup (2 , +\infty)$; la segunda inecuación, el intervalo [- 10, 2] y la tercera inecuación (- 2 , 0). En las gráficas adjuntas comprobamos estos resultados.

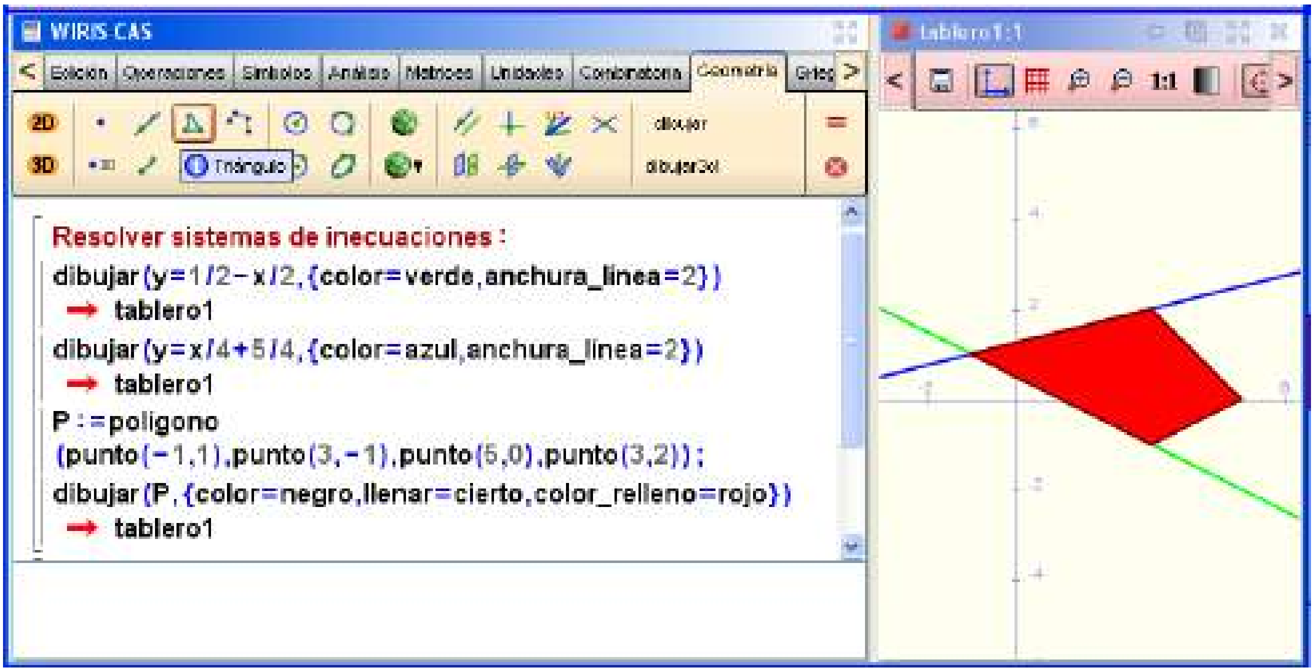



tablero1:2
1:1
10
5
-20
-15
-10
-5
5
10
15
-5
-10
-15
-20

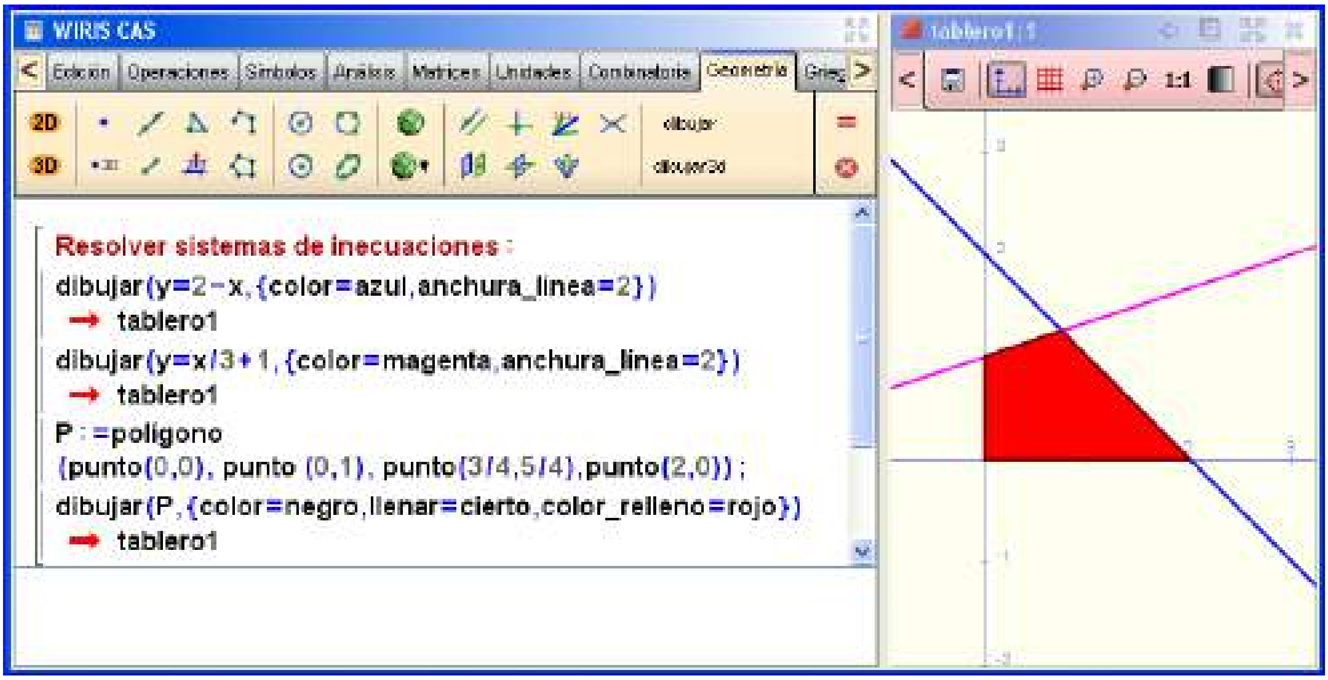

tablero1:3
1:1
8
6
4
2
-4
-2
2
-2
-4
-6
-8

2. Con Wiris obtenemos:

a) La resolución de este sistema como vemos en la siguiente imagen es toda la región abierta señalada en rojo.



b) La resolución de este sistema como vemos en la imagen es la región cerrada señalada en rojo.



ACTIVIDADES-PÁG. 92

1. Los resultados pueden verse en la tabla que sigue:

Inecuación	x = - 1	x = - $\frac{1}{2}$	x = 0	x = $\frac{1}{2}$	x = 1
a)	No	No	No	Si	Si
b)	No	No	No	No	Si
c)	No	No	No	No	No
d)	Si	Si	Si	Si	Si
e)	No	No	No	No	No
f)	Si	Si	Si	No	No
g)	No	No	No	Si	Si
h)	No	No	No	No	No
i)	No	No	No	No	No

2. Las soluciones quedan:

a) $x < \frac{11}{9}$ c) x ∈ R e) $x \geq \frac{4}{11}$

b) $x \geq -14$ d) No tiene solución f) $x \leq -\frac{23}{5}$

3. Las asociaciones quedan: 1) con c); 2) con d); 3) con a); 4) con b)

4. Las soluciones de los sistemas son:

a) x ∈ (7, 9) c) $x \in (-\infty, -2]$ e) $x \in (-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$

b) $x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right]$ d) $x \in (90, +\infty)$ f) $x \in (-45, 35)$

5. La asociación es: a) con iii); b) con ii); c) con i)

6. Si llamamos x al número de ventas, se tiene que el sueldo en la empresa E_1 es 450 + 80x, y en la empresa E_2 125x.

Se cumplirá:

$$450 + 80x > 125x \quad \Rightarrow \quad 80x - 125x > -450 \quad \Rightarrow \quad -45x > -450 \quad \Rightarrow \quad x < 10$$

Interesa más la empresa E_1 si se realizan menos de 10 ventas, la empresa E_2 si se realizan más de 10 ventas, y en el caso de realizarse 10 ventas, no importa la empresa elegida.

7. Las soluciones del sistema son $-\dfrac{29}{2} < x < 2$. Por tanto, los números enteros buscados son:

- 14, - 13, - 12, - 11, - 10, - 9, - 8, - 7, - 6, - 5, - 4, - 3, - 2, - 1, 0 y 1

ACTIVIDADES-PÁG. 93

8. Llamando x al número de escalones tenemos:

$$45 < \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < 50 \quad \Leftrightarrow \quad 45 < \frac{5x}{6} < 50 \quad \Leftrightarrow \quad 9 < \frac{x}{6} < 10 \quad \Leftrightarrow \quad 54 < x < 60$$

El número de escalones está comprendido entre 54 y 60.

9. Llamando x al número de caras y 20 – x al número de cruces, obtenemos:

$$10\,000x + 6\,000 \cdot (20 - x) < 176\,000 \quad \Rightarrow \quad x < 14$$

El número máximo de caras conseguido es 14.

10. Las soluciones quedan, en cada caso:

a) $x \in (-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$

c) $x \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$

e) $x \in (-\infty, 0] \cup [1, 10]$

b) $R - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

d) No tiene soluciones.

f) $x \in (1, +\infty)$

11. Las soluciones son:

a) $(2, +\infty)$

c) $(2, +\infty)$

e) (0, 1)

b) $(-\infty, -3) \cup [3, +\infty)$

d) (- 3, 1]

f) $\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$

12. Sea x la capacidad, en litros, del depósito. El dinero gastado en el viaje es 0,7x + 7, que no puede superar los 35 euros, por tanto:

$$0{,}7x + 7 \le 35 \quad \Rightarrow \quad x \le 40$$

La capacidad del depósito no puede exceder los 40 litros.

Si han sobrado 3,5 euros, se cumplirá: $0{,}7x + 7 = 35 - 3{,}5 \quad \Rightarrow \quad x = 35$.

La capacidad del depósito es 35 litros.

13. Todos los números x que verifiquen $x^2 < 4x$, es decir, los valores del intervalo (0, 4).

14. Llamando x al lado del cuadrado obtenemos $150x^2 + 30 \cdot 4x \leq 620$.

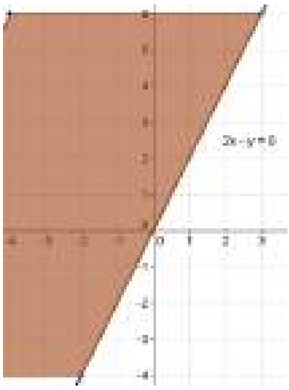
Las soluciones son los valores de x que estén en el intervalo (- 2,47; 1,67). Luego la longitud máxima del cuadro es de 1,67 metros.

15. Las soluciones de las inecuaciones son:

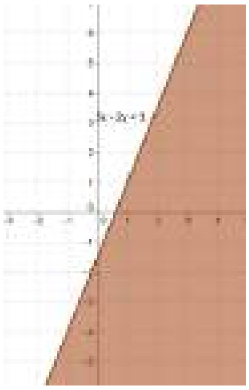
a) El punto A   b) Los puntos E, F y G

16. Las soluciones de las inecuaciones son los conjuntos de puntos sombreados que aparecen en los dibujos.

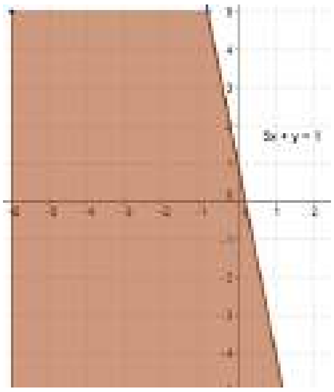
a)



b)

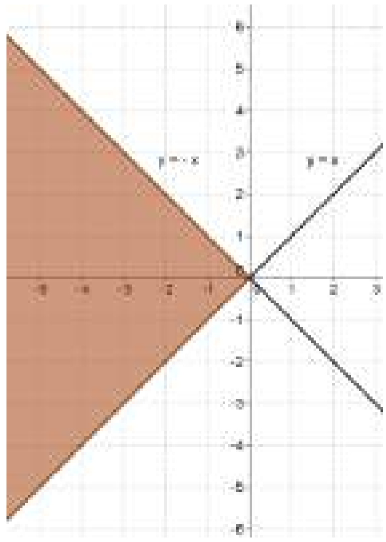


c)

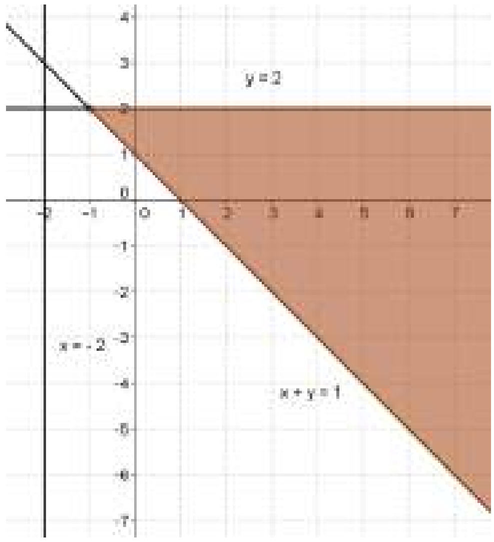


17. Las soluciones de los sistemas son los conjuntos de puntos sombreados que aparecen en los dibujos.

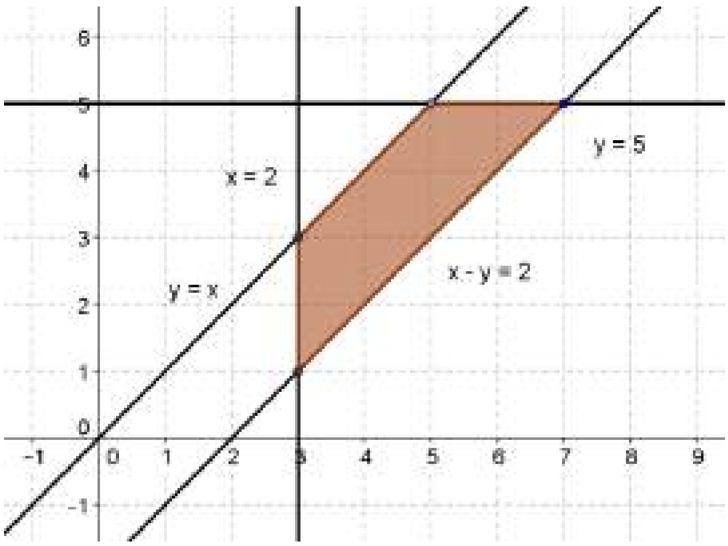
a)



b)



c)



18. Los sistemas de inecuaciones son:

a) $\begin{cases} x > -1 \\ x < 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x > 0 \\ x < 3 \\ y > -3 \\ y < -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x < -1 \\ y > 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x > 0 \\ y > -3 \\ y < -1 \\ x + 2y < 2 \end{cases}$

ACTIVIDADES-PÁG. 94

19. En cada caso quedan:

a) (0, 0); (6, 0) y (3, 3)

b) (- 1, 0); (- 5, 4) y (3, 4)

c) (- 4, - 1) y (- 1, 2); (0, 2) y (0, - 1)

20. El sistema de inecuaciones es:

$$\begin{cases} x + y < 4 \\ 5x - 2y > -15 \\ 5x - 9y < 20 \end{cases}$$

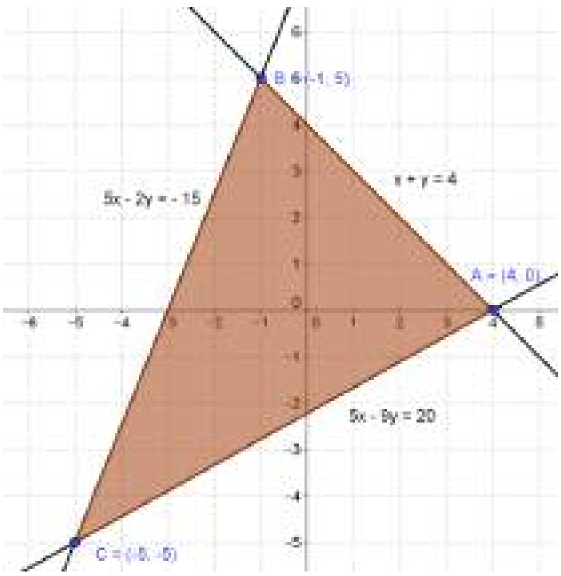
Los vértices de la región son:

$$A : \begin{cases} 5x - 9y = 20 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (4,\ 0)$$

$$B : \begin{cases} 5x - 2y = -15 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B = (-1,\ 5)$$

$$C : \begin{cases} 5x - 9y = 20 \\ 5x - 2y = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow C = (-5,\ -5)$$

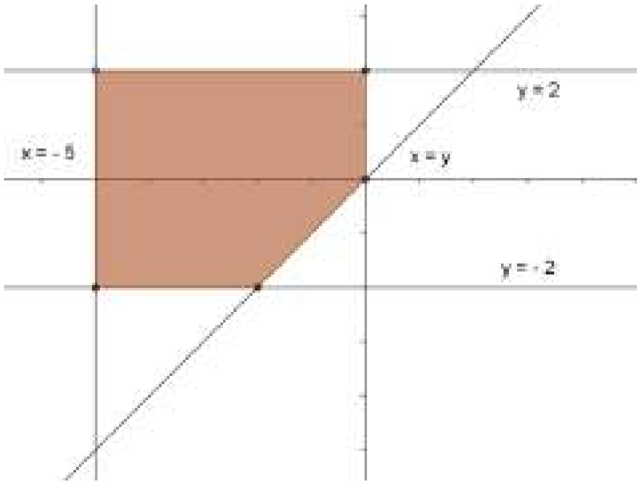
Todo lo anterior puede verse en el dibujo.



21. Se debe cumplir: $2 \cdot x + 3 \cdot (60 - x) \leq 2{,}6 \cdot 60 \quad \Rightarrow \quad x \geq 24$

Por tanto, deben mezclarse 24 ó más kilos del de 2 euros/kg con 36 o menos kilos del de 3 euros/kg.

22. El área del recinto que puede verse en el gráfico es de 18 unidades cuadradas.



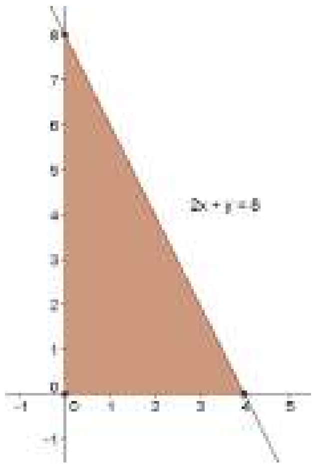
23. Para que se cumplan las condiciones del enunciado el hijo debe tener 24 años como mínimo.

Este resultado satisface al sistema que se obtiene del enunciado, llamando P a la edad del padre y H a la del hijo.

$$\begin{cases} P - H > 30 \\ P = 2H + 6 \end{cases} \Rightarrow H > 24 \text{ años}$$

24. Llamando x e y a los lados del triángulo, debe cumplirse:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 2x + y \leq 8 \end{cases}$$

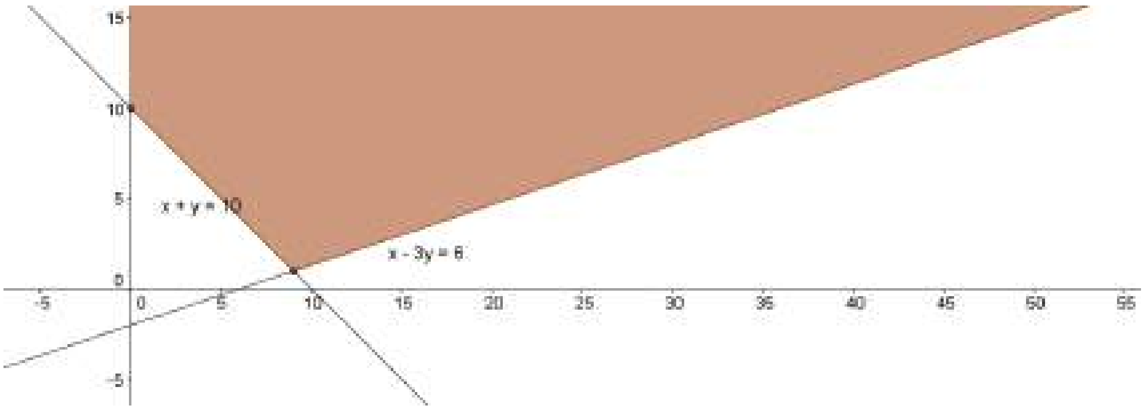


Las medidas serán las coordenadas de los puntos de la región de soluciones del sistema de inecuaciones anterior. Estas aparecen en la región sombreada del gráfico.

25. Llamando x al número de monedas del cofre rojo, e y al número de monedas del otro cofre. Dichas cantidades deben cumplir el sistema:

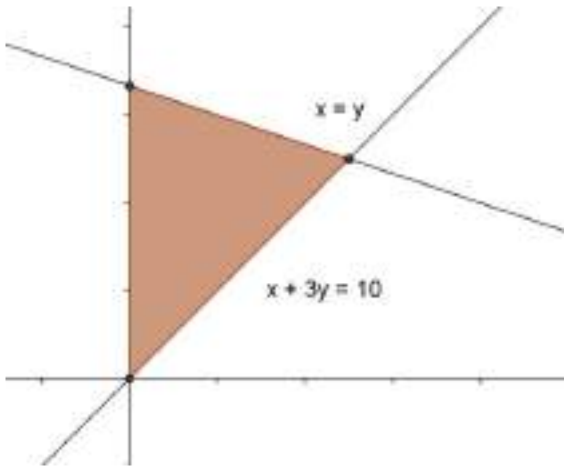
$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y > 10 \\ x - 3y < 6 \end{cases}$$

Las soluciones son las coordenadas enteras de los puntos de la región de soluciones del sistema de inecuaciones anterior. Estas aparecen en la región sombreada del gráfico.



26. Sean x e y el número de bolígrafos y cuadernos, respectivamente, que podemos comprar. Se debe cumplir:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x \leq y \\ 0{,}2x + 0{,}6y \leq 2 \end{cases}$$



Las soluciones son el conjunto de pares enteros dentro del recinto sombreado. Es decir:

(0, 1); (0, 2); (0, 3); (1, 1); (1, 2); (1, 3) y (2, 2).

27. Llamamos x al número de partidas ganadas; se debe cumplir:

$$2 \cdot x + (10 - x) \cdot 1 \geq 16 \quad \Rightarrow \quad x \geq 6$$

Por tanto, ha de ganar más de 6 de las 10 partidas.

28. Llamando x a la cantidad que debe vender se cumple:

$$1200 < 600 + 0{,}05 \cdot x < 1500 \quad \Rightarrow \quad 12\,000 < x < 18\,000$$

Debe vender una cantidad entre 12 000 y 18 000 euros.

29. Resolviendo cada una, obtenemos:

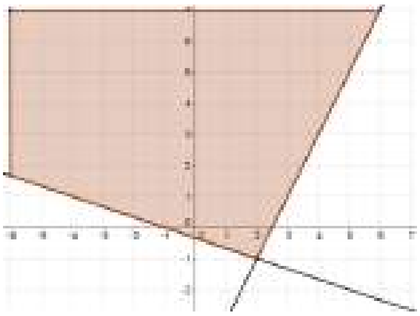
a) Las soluciones son los números reales del intervalo $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

b) Las soluciones son los números reales del conjunto $(-\infty, -2] \cup [1, 3]$.

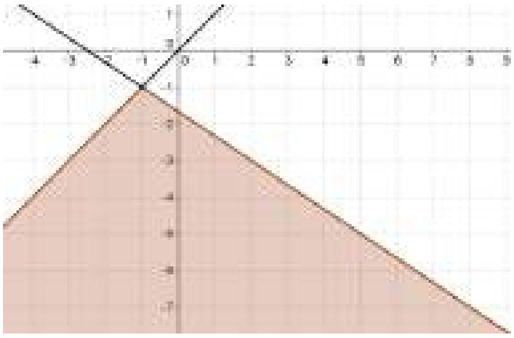
c) Las soluciones son los números reales del intervalo [- 5, 2).

d) Las soluciones son los números reales del intervalo [- 1, 1).

e) Las soluciones son los puntos de la región sombreada.



f) Las soluciones son los puntos de la región sombreada.



ACTIVIDADES-PÁG. 95

En esta actividad no damos la solución al uso ya que sobre el número π existe muchísima información tanto bibliográfica como en Internet. Existen monografías dedicadas a este número como las que aparecen en la bibliografía que sigue.

ESTEBAN, M.; IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (1998) *Trigonometría.* Editorial Síntesis. Madrid.

NAVARRO, Joaquín. (2010) *Los secretos del número π.* RBA. Barcelona

POSAMENTIER, Alfred. (2006) *La proporción trascendental. La historia de π, el número más misterioso del mundo.* Ariel. Barcelona.

TORIJA, R. (1999). Arquímedes. Alrededor del círculo. Nivela. Madrid.

La página web dedicada a π es http://webs.adam.es/rllorens/pihome.htm

La página web realizada por los amigos de π puedes encontrarla en http://webs.adam.es/rllorens/pifriend.htm

UNIDAD 5: Logaritmos. Aplicaciones

ACTIVIDADES-PÁG. 96

1. La asociación es: a) con iii); b) con ii) y c) con i)

2. La solución queda en cada caso:

Dentro de 5 años costará 50 · $(1,08)^5$ = 73,47 euros.

Hace 5 años costaba 50 · $(1,08)^{-5}$ = 34,03 euros.

El tiempo, t que pasará para que se duplique es:

$$100 = 50 \cdot 1{,}08^t \quad \Rightarrow \quad 1{,}08^t = 2 \quad \Rightarrow \quad \log 1{,}08^t = \log 2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\log 2}{\log 1{,}08} = 9 \text{ años.}$$

3. Los intereses que han producido son 60 euros, por tanto:

$$60 = \frac{120 \cdot r \cdot 10}{400} \quad \Rightarrow \quad r = 20\%$$

El rédito es del 20%.

4. Las soluciones son:

a) Después de 5 años habrá 3^5 = 243 bulbos. Al cabo de 10 años tendremos 3^{10} = 59049 bulbos.

b) Los años, t, que han pasado si tenemos 4 782 969 bulbos son:

$$3^t = 4\,782\,969 \quad \Rightarrow \quad 3^t = 3^{14} \quad \Rightarrow \quad t = 14 \text{ años}$$

ACTIVIDADES-PÁG. 113

1. Veamos si el producto de cuatro números enteros consecutivos (x – 1) · x · (x + 1) · (x + 2) es un cuadrado perfecto menos una unidad.

Tenemos:

$$\begin{cases} (x-1)\cdot x \cdot (x+1)\cdot(x+2) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x \\ (x^2 + x - 1)^2 = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \textit{Luego, } (x-1)\cdot x \cdot (x+1)\cdot(x+2) = (x^2 + x - 1)^2 - 1$$

2. Ambos cohetes tardan $\frac{3\,000\,000}{50\,000} = 60$ segundos en alcanzar Venus. Durante este tiempo láxenla, en sus idas y venidas ha recorrido:

$$300\,000 \cdot 60 = 18\,000\,000 \text{ km.}$$

3. Analizamos las terminaciones de las primeras potencias de 7:

$7^1 = 7$, termina en 7
$7^2 = 49$, termina en 9
$7^3 = 343$, termina en 3
$7^4 = 2\,401$, termina en 1
$7^5 = 16\,807$, termina en 7
$7^6 = 117\,649$, termina en 9

Observamos que hay cuatro terminaciones distintas que se repiten cíclicamente; de modo que dividimos 83578 entre 4 y obtenemos de cociente 20894 y de resto 2:

$$83578 = 4 \cdot 20894 + 2$$

Es decir, 7^{83578} termina en el mismo número que 7^2, es decir, termina en 9.

ACTIVIDADES-PÁG. 115

1. Hacemos la hoja de cálculo siguiente escribiendo el texto de la columna A y los datos en B. En la celda B5 ponemos la fórmula:

=B1*(1+B2/(100*B4))^B3

y obtenemos un capital de 15 078,139 euros.

Capital inicial	9000
Rédito %	3,5
Tiempo	15
Periodos de tiempo	1
Capital final	15078,139

Para calcular el tiempo que ha de pasar para duplicar el capital hacemos la siguiente hoja de cálculo escribiendo el texto en la columna A y los datos en la B. En la celda B3 la fórmula:

= log(B5/B1)/log(1+B2/100)

y obtenemos que han de pasar unos 20 años para duplicar el capital.

Capital inicial	9000
Rédito %	3,5
Tiempo	20,14879168
Periodos de tiempo	1
Capital final	18000

2. Hacemos la hoja de cálculo siguiente escribiendo el texto de la columna A y los datos en B. En la celda B5 ponemos la fórmula

= -VF(B2/(100*B4);B4*B3;B1;;1)

y obtenemos que el que contrate este plan obtiene al cabo de 25 años 38 994,110 euros.

Anualidad	300
Rédito %	2
Tiempo	25
Periodos de tiempo	4
Capital obtenido	38994,110

3. Hacemos la hoja de cálculo siguiente escribiendo el texto de la columna A y los datos en B. En la celda B5 ponemos la fórmula

= - PAGO(B2/(100*B4);B4*B3;B1;;1)

y obtenemos que cada semestre hemos de pagar 1357,051 euros.

Préstamo	12500
Rédito %	3,75
Tiempo	5
Periodos de tiempo	2
Cada Semestre	1357,051

ACTIVIDADES-PÁG. 116

1. Las soluciones son:

a) $\log_3 3 = 1$ b) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ c) $\log_{1/3} 27 = -3$ d) $\log_{1/2} \sqrt[3]{4} = -\frac{2}{3}$

2. Las soluciones son:

a) x = 2 b) x = 1000 c) x = - 4 d) $x = \frac{1}{2}$

3. En cada caso queda:

a) $\log 17 = 1{,}2304$ c) $\log 1{,}17 = 0{,}0682$ e) $\log \frac{1}{4} = -0{,}6021$ g) $\log (1{,}5 \cdot 10^8) = 8{,}1761$

b) $\ln \frac{1}{2} = -0{,}6931$ d) $\ln 15 = 2{,}7081$ f) $\ln \sqrt{7} = 0{,}9730$ h) $\ln (2{,}3 \cdot 10^7) = 16{,}9510$

4. Las soluciones de cada apartado son:

a) $\log_2 48 - \log_2 6 = 3$ d) $3 \log_5 10 - \log_5 8 = 3$

b) $\log_6 3 + \log_6 8 + \log_6 9 = 3$ e) $\frac{1}{2} \log_3 81 + \log_3 \frac{1}{3} = 1$

c) $\log_3 75 - \log_3 3 + \log_3 81 - \log_3 25 = 4$

f) $\frac{3}{2}\log_2 48 - \frac{1}{2}\log_2 27 = 6$

5. En cada caso queda:

a) $3\log_2 M - 2\log_2 N = \log_2\left(\frac{M^3}{N^2}\right)$

b) $\frac{4}{3}\log M - \frac{5}{2}\log N = \log\left(\frac{M^{4/3}}{N^{5/2}}\right)$

c) $\frac{2}{3}\ln M + \ln N - \frac{3}{2}\ln P = \ln\left(\frac{M^{2/3}\cdot N}{P^{3/2}}\right)$

6. En cada caso queda:

a) x = 25

b) x = 1

c) x = 5184

7. Las soluciones son:

a) $\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = 2{,}32$

b) $\log_5 2 = \frac{\log 2}{\log 5} = 0{,}43$

c) $\log_{0,25}\frac{2}{5} = \frac{\log 2 - \log 5}{-\log 4} = 0{,}66$

d) $\log_{2/3}\frac{4}{5} = \frac{\log\left(4/5\right)}{\log\left(2/3\right)} = 0{,}55$

8. Las soluciones son:

a) $\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0{,}7782$

b) $\log 5 = \log 10 - \log 2 = 0{,}6990$

c) $\log 12 = 2\cdot\log 2 + \log 3 = 1,0792$

d) $\log 108 = 2\cdot\log 2 + 3\cdot\log 3 = 2{,}0334$

e) $\log 500 = \log 5 + \log 100 = 2{,}6990$

f) $\log\sqrt{0{,}24} = \frac{1}{2}(3\cdot\log 2 + \log 3 - \log 100) = -\,03099$

g) $\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = 0{,}6309$

h) $\log_2 27 = \dfrac{3 \cdot \log 3}{\log 2} = 4{,}7549$

9. En cada apartado queda:

a) Al cabo de 5 años funcionan: $\left(\dfrac{8}{9}\right)^5 = 0{,}55$, el 55,5 % de los televisores.

Después de 15 años: $\left(\dfrac{8}{9}\right)^{15} = 0{,}17$, es decir, el 17% de los televisores.

Después de 20 años: $\left(\dfrac{8}{9}\right)^{20} = 0{,}09$, es decir, el 9,5 % de los televisores.

b) Deberían pasar t años y se debe cumplir:

$$\left(\frac{8}{9}\right)^t = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\log 0{,}4}{\log\left(\frac{8}{9}\right)} = 7{,}8$$

Deberán pasar casi 8 años.

ACTIVIDADES-PÁG. 117

10. La solución de cada apartado es:

a) El precio del electrodoméstico será: P (2) = 270 · $1{,}0375^2$ = 290,63 euros.

b) Si el nivel general de precios se duplica, se cumplirá:

$$2 \cdot P_0 = P_0 \cdot (1 + I)^5 \quad \Rightarrow \quad 2 = (1 + I)^5 \quad \Rightarrow \quad \log 2 = \log\,(1 + I)^5 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \log\,(1 + I) = \frac{\log 2}{5} = 0{,}0602 \quad \Rightarrow \quad 1 + I = 1{,}1487 \quad \Rightarrow \quad I = 0{,}1487$$

La tasa de inflacción anual será 0,1487, es decir, del 14,87%.

11. Las respuestas son:

a) Al cabo de 4 años habrá 6 · $1{,}05^4$ =7,29 m^3 de madera.

Al cabo de 15 años habrá 6 · $1{,}05^{15}$ =12,47 m^3 de madera.

b) Los años que han de pasar para que en el pinar haya 870 m^3 de madera son:

$$6 \cdot 1{,}05^x = 870 \quad \Rightarrow \quad 1{,}05^x = 145 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\log 145}{\log 1{,}05} = 102 \text{ años}$$

c) Al cabo de 25 años habrá $6 \cdot 1{,}05^{25} = 20{,}32$ m^3 de madera.

Al cortar la mitad quedará en el pinar 10,16 m^3 de madera.

Los años que han de pasar para que en el pinar haya 10,16 m^3 de madera son:

$6 \cdot 1{,}05^x = 10{,}16 \Rightarrow 1{,}05^x = 1{,}693 \Rightarrow x = \dfrac{\log 1{,}693}{\log 1{,}05} = 10{,}79$ años después de los 25 anteriores.

12. La solución de cada ecuación es:

a) $27^{x+1} = 3^{x^2 - x - 2} \Leftrightarrow 3^{3(x+1)} = 3^{x^2 - 2x - 2} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 5;\ x_2 = -1$

b) $3^x - 3^{x-1} - 3^{x-2} = 15 \Leftrightarrow 3^x + \dfrac{3^x}{3} + \dfrac{3^x}{9} = 15 \Leftrightarrow 5 \cdot 3^x = 135 \Rightarrow x = 3$

c) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 18 \cdot 3^x + 81 = 0 \Rightarrow x = 2$

d) $2^{x+2} + 128 = \dfrac{1}{4^{1-x}} \Leftrightarrow 4 \cdot 2^x + 128 = \dfrac{2^{2x}}{4} \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 16 \cdot 2^x - 512 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

e) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 7 \Leftrightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x = 7 \Leftrightarrow 7 \cdot 2^x = 7 \Leftrightarrow x = 0$

f) $2^{x+1} - 12 \cdot 2^{1-x} = 13 \Leftrightarrow 2 \cdot (2^x)^2 - 13 \cdot 26^x - 24 = 0 \Rightarrow x = 3$

g) $5^x \cdot 25^x = 5^6 \Leftrightarrow 5^{3x} = 5^6 \Rightarrow x = 2$

h) $2^{-x} = 8^{3-x} \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^{9-3x} \Rightarrow x = \dfrac{9}{2}$

i) $5^x = 10 + 3 \cdot 5^{2-x} \Leftrightarrow (5^x)^2 - 10 \cdot 5^x - 75 = 0 \Leftrightarrow 5^x = 15 \Rightarrow x = \dfrac{\log 15}{\log 5} = 1{,}6826$

j) $9^x = 45 + 4 \cdot 3^{x+1} \Leftrightarrow (3^x)^2 - 12 \cdot 3^x - 45 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 15 \Rightarrow x = \dfrac{\log 15}{\log 3} = 2{,}4650$

k) $4^{x-1} - 3 \cdot 2^{x+1} + 32 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 24 \cdot 2^x + 128 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 8 \Rightarrow x_1 = 3 \\ 2^x = 16 \Rightarrow x_2 = 4 \end{cases}$

l) $5 \cdot 4^{x-1} + 4 = 5 \cdot 2^{x+1} + 2^{x-1} \Leftrightarrow 5 \cdot (2^x)^2 - 42 \cdot 2^x + 16 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 \\ 2^x = \dfrac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \dfrac{\log \dfrac{2}{5}}{\log 2} = -1{,}3219 \end{cases}$$

13. Las soluciones son:

a) $\log_3 \sqrt{243} = x \quad \Rightarrow \quad 3^x = 3^{\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{5}{2}$

b) $\ln e^6 = 2x \quad \Rightarrow \quad e^{2x} = e^6 \quad \Rightarrow x = 3$

c) $5 = \log_x \dfrac{1}{32} \quad \Rightarrow \quad x^5 = \dfrac{1}{32} \quad \Rightarrow \quad x^5 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{2}$

d) $\log x = -2 \quad \Rightarrow \quad x = 10^{-2} = 0{,}01$

e) $x = \log_{\sqrt{2}} 8 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{2}\right)^x = 8 \quad \Rightarrow \quad 2^{\frac{x}{2}} = 2^3 \quad \Rightarrow \quad x = 6$

f) $\log_x 0{,}000001 = 3 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 0{,}000\,001 \quad \Rightarrow x = 0{,}01$

g) $-2 = \ln x \quad \Rightarrow \quad x = e^{-2}$

h) $\log_{\frac{1}{3}} x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad x = 3$

14. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) $\log (5x^2 + 2x - 15) = 2 \cdot \log (2x - 1) \quad \Rightarrow 5x^2 + 2x - 15 = (2x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x - 16 = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 16}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -8 \ (\textit{no es válida}) \end{cases}$$

b) $2 \cdot \log (3x - 2) - 1 = \log (x + 6) \quad \Rightarrow \quad \log \dfrac{(3x-2)^2}{x+6} = 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{(3x-2)^2}{x+6} = 10 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 9x^2 - 22x - 56 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 + 4 \cdot 9 \cdot 56}}{18} = \frac{22 \pm 50}{18} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -\dfrac{14}{9} \ (\textit{no es válida}) \end{cases}$$

c) $\log (x^4 - 4x^2 - 12x) - 2 \cdot \log (2x - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \log \dfrac{x^4 - 4x^2 - 12x}{(2x-3)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^4 - 4x^2 - 12}{4x^2 - 12x + 9} = 1 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} = \begin{cases} x_1^2 = 9 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_{11} = 3 \\ x_{12} = -3 \; (no\ es\ válida) \end{cases} \\ x_2^2 = -1 \; (no\ es\ válida) \end{cases}$$

d) $(x^2 - 5x + 9)\log 2 + \log 125 = 3 \;\Rightarrow\; \log(125 \cdot 2^{x^2-5x+9}) = \log 1000 \;\Rightarrow\; 2^{x^2-5x+9} = 8 \quad \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

e) $3 \cdot \log_2 x - \log_2 (x^2 + x - 4) = 2 \;\Rightarrow\; \log_2 \dfrac{x^3}{x^2 + x - 4} = 2 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^3}{x^2 + x - 4} = 4 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0 \;\Rightarrow\; (x-4)\cdot(x-2)\cdot(x+2) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -2 \; (no\ es\ válida) \end{cases}$$

f) $\log \sqrt{2x^2 - 3x + 10} - \log(14 - x) = 0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 10} = 14 - x \;\Rightarrow\; 2x^2 - 3x + 10 = 196 - 28x + x^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 25x - 186 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 + 4 \cdot 186}}{2} = \frac{-25 \pm 37}{2} = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -31 \end{cases}$$

15. Las soluciones de los sistemas son:

a) $\begin{cases} 3^x - 2^y = 23 \\ 3^{x-1} + 2^{y-2} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x - 2^y = 23 \\ 4 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^y = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x = 27 \\ 2^y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5^x - 5^y = 620 \\ 5^{x-y} = 125 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^x - 5^y = 620 \\ 5^x = 125 \cdot 5^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^y = 5 \\ 5^x = 625 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{\pi^8}{\pi^x} = \pi^y \\ \log(x+y) - \log(x-y) = \log 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 - x = y \\ \dfrac{x+y}{x-y} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ 3x - 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log x + 3\log y = 5 \\ \log x - \log y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x = \dfrac{7}{2} \\ \log y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10^{7/2} = 1000 \cdot \sqrt{10} \\ y = 10^{1/2} = \sqrt{10} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log_Y (x-16) = 2 \\ \log_x (y+2) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 16 = y^2 \\ y + 2 = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \\ \log_2 x^2 - \log_2 y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \\ 2 \log_2 x - \log_2 y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

ACTIVIDADES-PÁG. 118

16. La expresión que nos da el número total de individuos (P) en función de la población inicial (P_0) y del tiempo t, en días, es: $P(t) = P_0 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$

Al cabo de un mes habrá $P(30) = 100 \cdot 2^{\frac{30}{4}} = 18101{,}93 \approx 18100$ insectos.

Para que haya 204800 insectos tendrán que pasar:

$$204800 = 100 \cdot 2^{\frac{t}{4}} \Rightarrow 2^{\frac{t}{4}} = 2048 \Rightarrow t = 4 \cdot \frac{\log 2048}{\log 2} = 44 \text{ días}$$

17. En cada apartado obtenemos:

a) $i = \dfrac{1000 \cdot 12 \quad 3}{100} = 360 \ euros \Rightarrow Se\ transforma\ en\ 1360\ euros.$

b) $900 = \dfrac{3000 \cdot 10 \quad t}{100} \Rightarrow t = 3 \ años.$

c) $i = \dfrac{12\,000 \cdot 7 \quad 4}{100} = \Rightarrow i = 3\,360 \ euros$

$i = \dfrac{12\,000 \cdot 7 \quad 48}{1200} = \Rightarrow i = 3\,360 \ euros$

En ambos casos generan unos intereses de 3 360 euros.

18. Aplicando la fórmula $M = C \cdot (1 + r)^t$ obtenemos:

$$8000 = 4000 \cdot (1 + 0{,}055)^t \Rightarrow 2 = (1 + 0{,}055)^t \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}055} = 12{,}95 \ años \cong 13 \ años$$

19. En cada caso queda:

• $2C = C \cdot (1 + r)^{20} \Rightarrow 2 = (1 + r)^{20} \Rightarrow \log (1 + r) = \dfrac{\log 2}{20} \Rightarrow 1 + r = 1{,}035 \Rightarrow r = 0{,}035$

Para que el capital se duplique al cabo de 20 años el rédito debe ser de un 3,5%.

- $2C = C \cdot (1 + r)^{10} \Rightarrow 2 = (1 + r)^{10} \Rightarrow \log (1 + r) = \dfrac{\log 2}{10} \Rightarrow r = 0{,}072$

Para que el capital se duplique al cabo de 10 años el rédito debe ser de un 7,2%.

20. La solución queda:

$$2100 = C \cdot (1 + 0{,}08)^7 \Rightarrow C = 1225{,}33 \text{ euros}$$

21. Se tiene que:

$$C = \frac{60 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}05}{12}\right) \cdot \left[\left(1 + \dfrac{0{,}05}{12}\right)^{48} - 1\right]}{\dfrac{0{,}05}{12}} = 3194{,}1468 \text{ euros}$$

Al cabo de 4 años tendrá 3 194,1468 euros.

22. Aplicando la fórmula $C = \dfrac{a \cdot (1 + r) \cdot \left[(1 + r)^t - 1\right]}{r}$, obtenemos:

$$12\,000 = \frac{a \cdot (1 + 0{,}13) \cdot \left[(1 + 0{,}13)^5 - 1\right]}{0{,}13} \Rightarrow a = 1638{,}7385 \text{ euros.}$$

23. Aplicando la misma fórmula que en el problema anterior:

$$C = \frac{1500 \cdot (1 + 0{,}045) \cdot \left[(1 + 0{,}045)^4 - 1\right]}{0{,}045} = 6706{,}06 \text{ euros}$$

En la libreta después de sacar 5000 euros quedan 1 706,06 euros.

24. Aplicando la fórmula $a = \dfrac{D \cdot r \cdot (1 + r)^t}{(1 + r)^t - 1}$, obtenemos:

$$1350 = \frac{D \cdot 0{,}09 \cdot (1 + 0{,}09)^6}{(1 + 0{,}09)^6 - 1} \Rightarrow D = 6055{,}99$$

La deuda asciende a 6 055,99 euros.

25. Aplicando la misma fórmula del problema anterior:

$$a = \frac{50\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}11}{12}\right)^{180} \cdot \dfrac{0{,}11}{12}}{\left(1 + \dfrac{0{,}11}{12}\right)^{180} - 1} \Rightarrow a = 568{,}298 \text{ euros}$$

La cuota mensual de amortización es de 568,298 euros.

En total hemos pagado:

$$C = \frac{568{,}298 \cdot \left(1 + \frac{0{,}11}{12}\right) \cdot \left[\left(1 + \frac{0{,}11}{12}\right)^{180} - 1\right]}{\frac{0{,}11}{12}} = 260\,767{,}83 \ euros$$

26. Aplicando la fórmula $A = \frac{D \cdot r \cdot (1 + r)^t}{(1 + r)^t - 1}$, obtenemos:

$$4\,200 = \frac{29\,500 \cdot 0{,}07 \cdot 1{,}07^t}{1{,}07^t - 1} \quad \Rightarrow \quad 1{,}07^t = 1{,}9672 \quad \Rightarrow \quad t = 10 \ años$$

27. Aplicando la fórmula anterior, obtenemos:

$$21\,000 = \frac{D \cdot 0{,}06 \cdot (1 + 0{,}06)^{13}}{(1 + 0{,}06)^{13} - 1} \quad \Rightarrow \quad D = 185\,906{,}34 \ euros \ costó \ el \ camión$$

28. Aplicando la fórmula anterior, obtenemos:

$$528{,}7 = \frac{10\,000 \cdot \frac{0{,}08}{4} \cdot \left(1 + \frac{0{,}08}{4}\right)^t}{\left(1 + \frac{0{,}08}{4}\right)^t - 1} \quad \Rightarrow \quad 528{,}7 \cdot (1{,}02^t - 1) = 200 \cdot 1.02^t \quad \Rightarrow$$

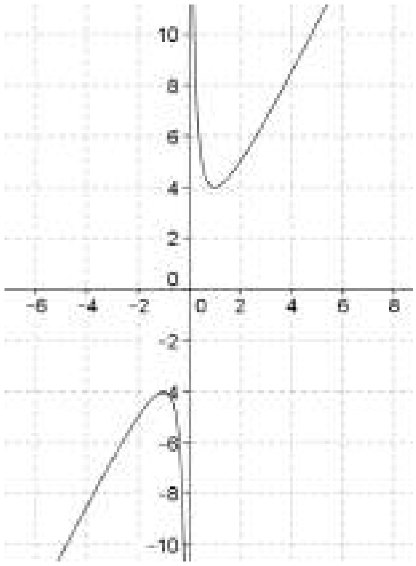
$$\Rightarrow \quad 1.02^t = 1{,}60845 \quad \Rightarrow \quad t = 24 \ períodos$$

Pagará la moto en 6 años.

UNIDAD 6: Funciones reales. Propiedades globales

ACTIVIDADES-PÁG. 122

1. La gráfica puede ser como la que aparece en el dibujo.



2. En cada uno de los casos queda:

a) Dom f = R; Im f = $[0, +\infty)$
Simétrica respecto al eje OY.
Acotada inferiormente por y = 0, pero no acotada superiormente.
Mínimos en (- 2, 0) y (2, 0); Máximo en (0, 4).
Tiende a $+\infty$ para x tendiendo a $\pm\infty$.

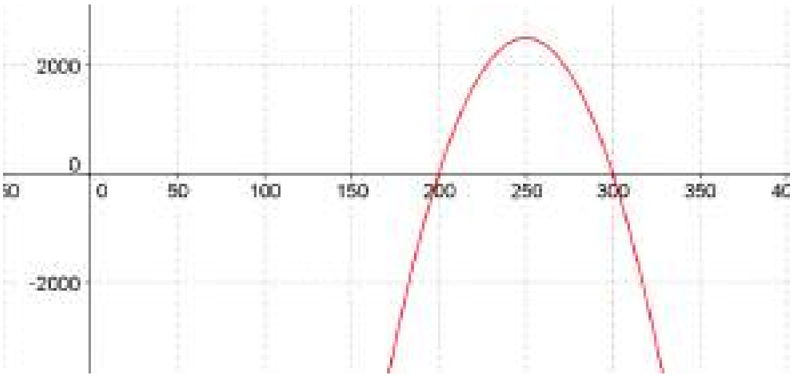
b) Dom g = R- {-1, 1}; Im g = R
Simétrica respecto al origen de coordenadas.
No acotada
Carece de extremos relativos
Cuando x tiende a $+\infty$ la función tiende a 1; si x tiende a $-\infty$ la función tiende a -1. Cuando x tiende a -1 por la izquierda la función tiende a $-\infty$ y si x tiende a -1 por la derecha la función tiende a $+\infty$. Cuando x tiende a 1 por la izquierda la función tiende a $-\infty$ y si x tiende a 1 por la derecha la función tiende a $+\infty$.

c) Dom h = R; Im h = R
No es simétrica.
No acotada.
Tiene mínimo relativo en (0, -1) y máximo relativo en (2, 3).
Cuando x tiende a $-\infty$ la función tiende a $+\infty$ y cuando x tiene a $+\infty$ la función tiende a $-\infty$.

3. La función que da los ingresos es: I(x) = 50 · x

La función que da los beneficios es: B(x) = - x^2 + 500 · x – 60 000

La gráfica es:



ACTIVIDADES-PÁG. 135

1. Hay que buscar un número que sea a la vez triangular y cuadrado.

Los números triangulares son: 1, 3, 6, 10, 15, 21,…, $\frac{n^2+n}{2}$

Los números cuadrados son: 1, 4, 9, 16, 25,…, x^2.

Deba cumplirse la igualdad $\frac{n^2+n}{2}=x^2$.

El valor de n más pequeño que cumple la igualdad es n = 8, ya que $\frac{8^2+8}{2}=x^2 \quad \Rightarrow\ 36=x^2$.

El enunciado dice que hay más de 36 cajas, por tanto hay que buscar otra solución, y ésta es: n = 49, pues $\frac{49^2+49}{2}=1225=35^2$.

Tiene 1225 cajas.

2. Observamos que:

$$\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} \quad \text{con n} \geq 2$$

Dando valores, obtenemos:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\ldots=\ldots$$

$$\frac{1}{998\cdot 999}=\frac{1}{998}-\frac{1}{999}$$

$$\frac{1}{999\cdot 100}=\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}$$

Sumando y simplificando:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{998\cdot 999}+\frac{1}{999\cdot 1000}=\frac{1}{1}-\frac{1}{1000}=1-0{,}001=0{,}999$$

3. Sean A, B y C las tres rebanadas. Con A_1 indicamos que se tuesta la cara 1 y con A_2 indicamos que se tuesta la cara 2.

1º A_1B_1 tarda:
30 s en tostar cara A_1 y B_1
5 s en colocar A_1
5 s en colocar B_1
5 s en sacar B_1

2º A_2C_1 tarda:
3 s en dar vuelta A_1
5 s en meter C_1
30 s en tostar cara A_2 y C_1
3 s en dar la vuelta C_2

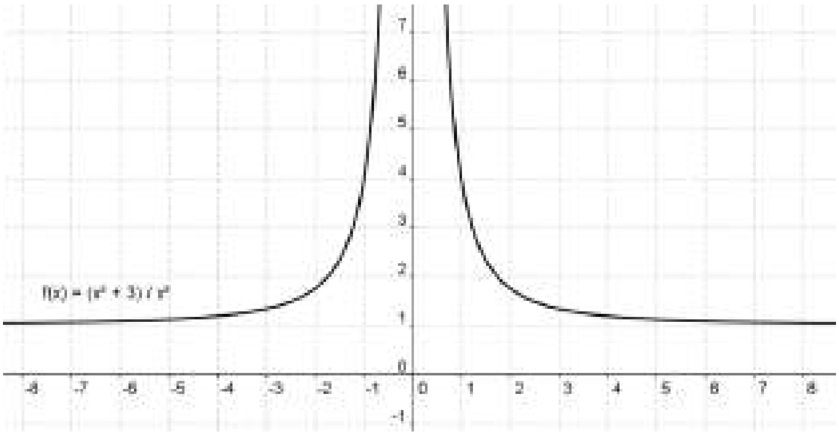
3º B_2C_2 tarda:
5 s en sacar A_2
30 s en tostar cara B_2 y C_2
5 s en sacar B_2
5 s en sacar C_2

En total se necesitan 136 s en tostar 3 rebanadas.

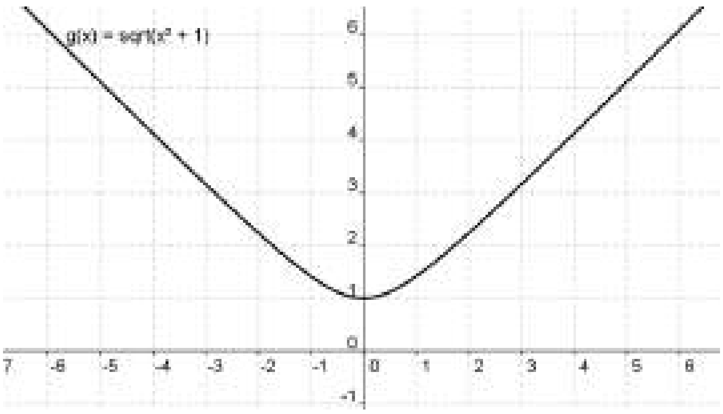
ACTIVIDADES-PÁG. 137

1. Procedemos como se indica en el apartado representación gráfica de funciones explícitas completas y obtenemos las gráficas que pueden verse a continuación:

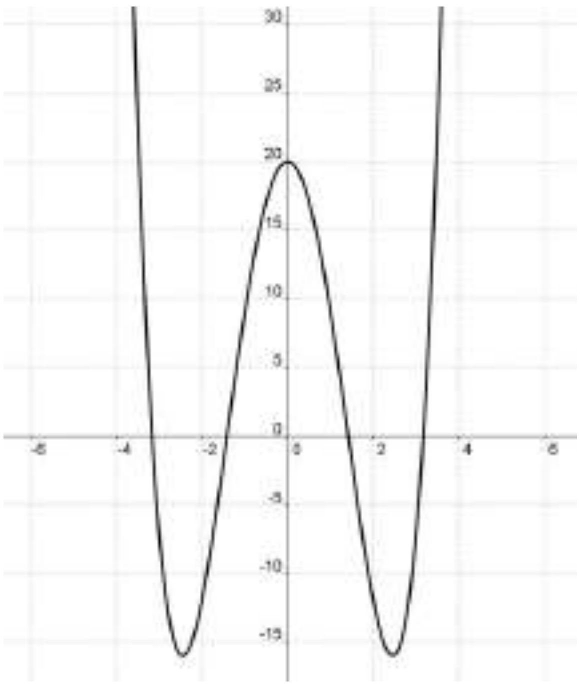
a) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2}$



b) $g(x) = \sqrt{x^2+1}$

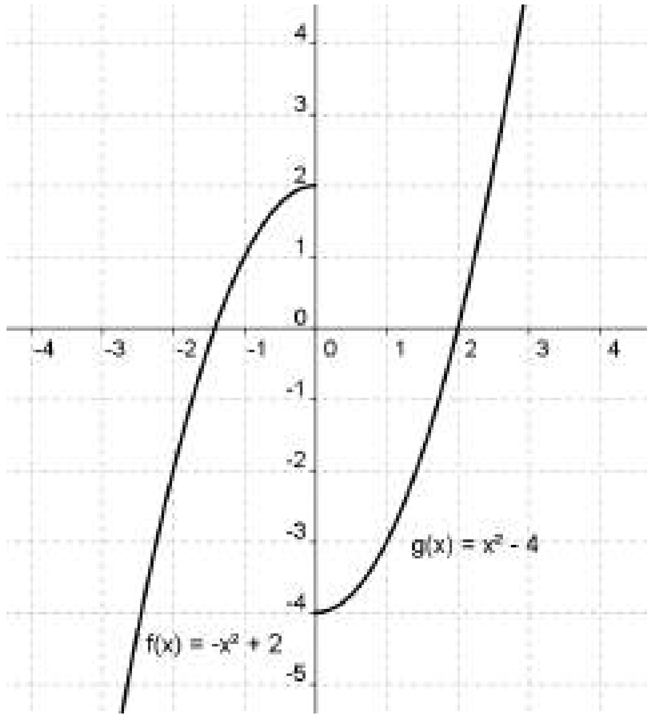


c) $h(x) = x^4 - 12x^2 + 20$

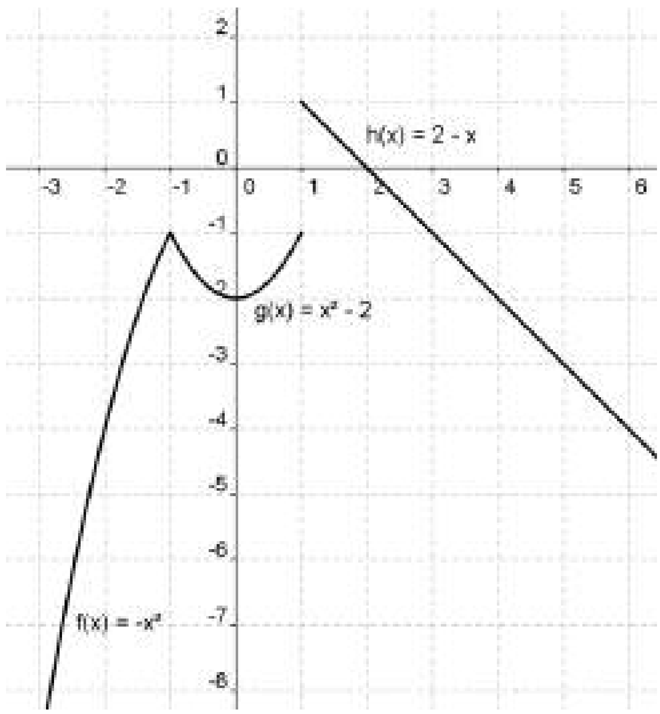


2. Procedemos como se indica en el apartado representación gráfica de funciones definidas a trozos y obtenemos las gráficas que pueden verse a continuación:

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & si\ x \le 0 \\ x^2 - 4 & si\ x > 0 \end{cases}$

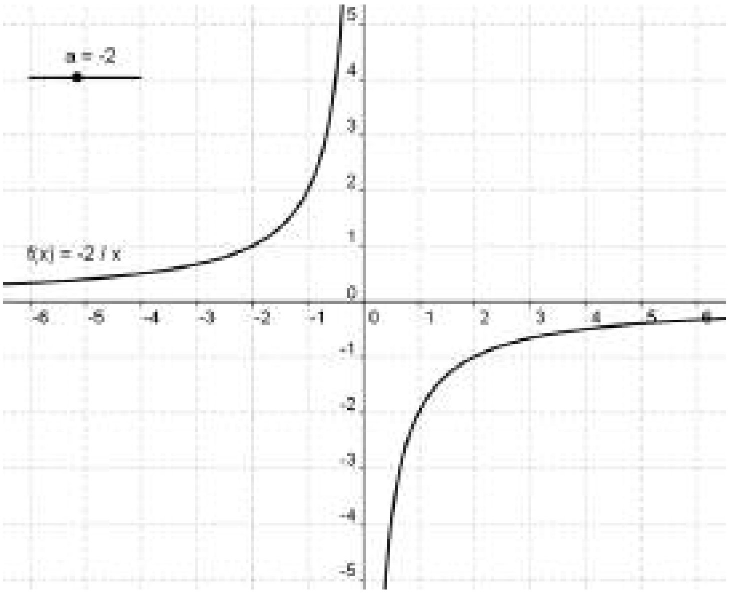


b) $g(x) = \begin{cases} -x^2 & si\ x < -1 \\ x^2 - 2 & si\ -1 \le x < 1 \\ 2 - x & si\ x \ge 1 \end{cases}$

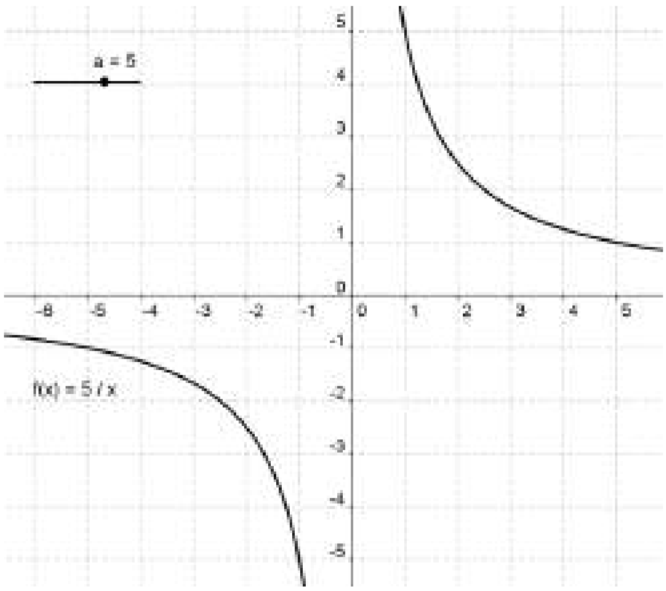


3. a) f (x) = $\frac{a}{x}$

Con la herramienta **Deslizador** y haciendo clic sobre la Zona o Vista Gráfica colocamos un deslizador, y lo llamamos a. En el *Menú Contextual* del deslizador elige **Propiedades**; en la ficha **Deslizador** escoge **Intervalo** entre – 15 y 15, **Incremento** 1.



En la Ventana de Entrada introduce una función genérica f(x) = $\frac{a}{x}$, tecleando **f(x) = a/x**. Varía los valores del deslizador y observa las variaciones de la gráfica.

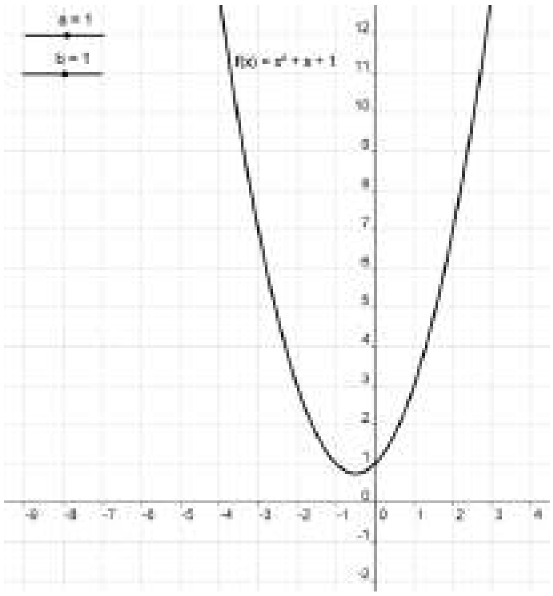


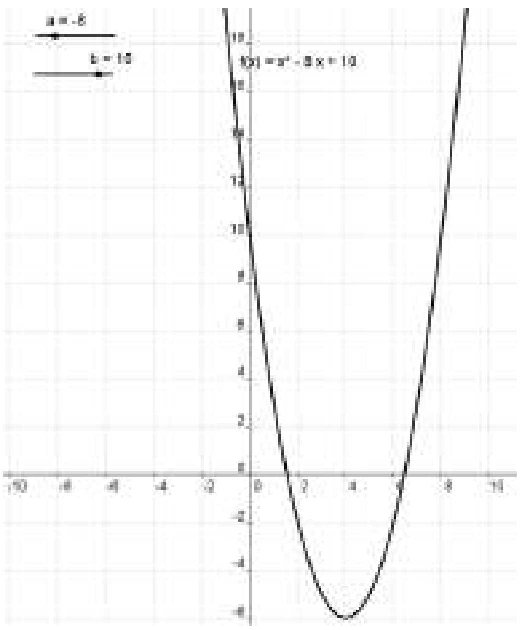
b) $f(x) = x^2 + ax + b$

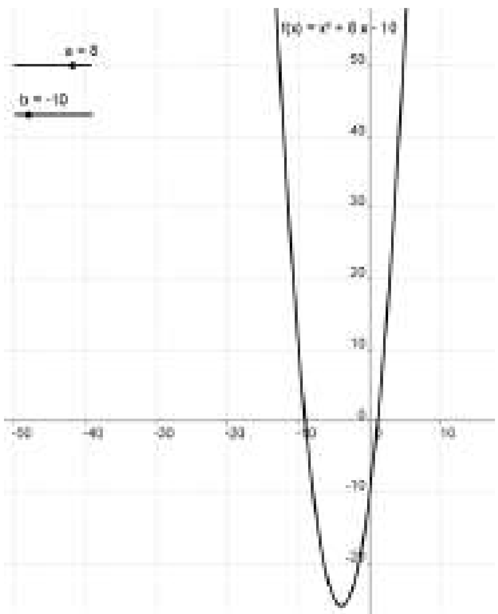
Con la herramienta **Deslizador** y haciendo clic sobre la Zona o Vista Gráfica colocamos dos deslizadores, uno detrás de otro, y los llamamos a y b escoge **Intervalo** entre – 15 y 15, **Incremento** 1.

En el Campo de Entrada introduce una función genérica $f(x) = x^2 + ax + b$ tecleando la expresión **f(x) = x^2+a*x+b**

Varía los valores del deslizador y observa las variaciones de la gráfica.



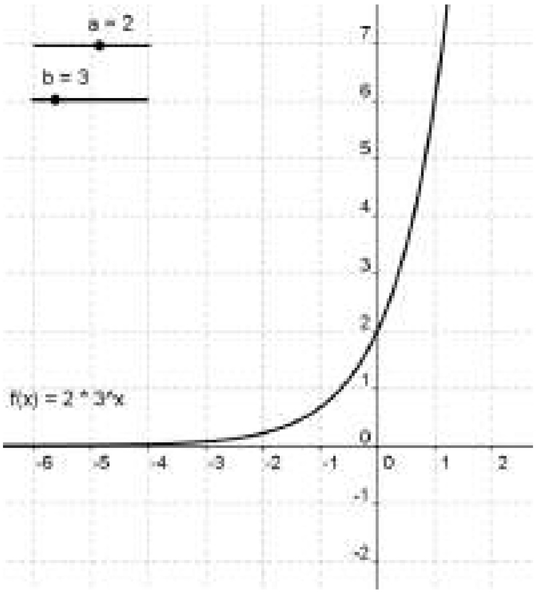


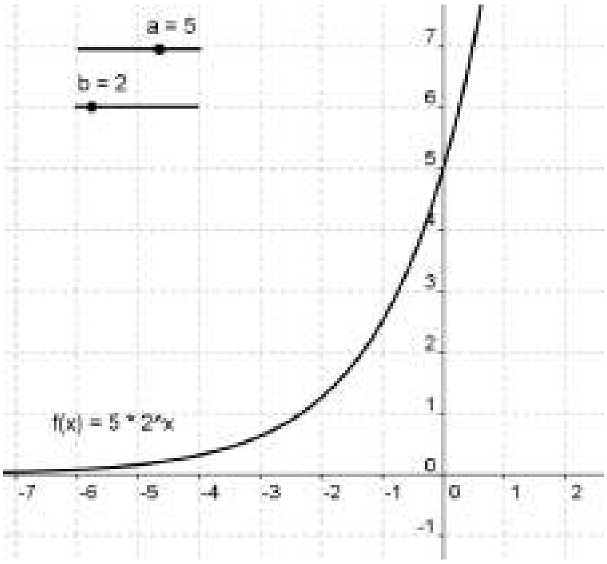


c) $f(x) = a \cdot b^x$

Con la herramienta **Deslizador** y haciendo clic sobre la Zona o Vista Gráfica colocamos dos deslizadores, uno detrás de otro, y los llamamos a y b, escoge **Intervalo** entre – 15 y 15, **Incremento** 1 y en el del segundo escoge **Intervalo** entre 0 y 15, **Incremento** 1.

En la Ventana de Entrada introduce una función genérica $f(x) = a \cdot b^x$ tecleando f(x) = a * b^x. Varía los valores de los deslizadores y observa las variaciones de la gráfica.





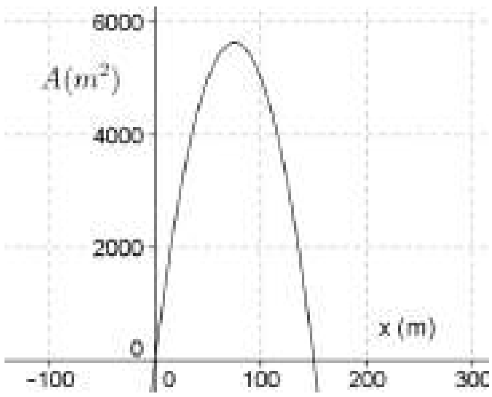
ACTIVIDADES-PÁG. 138

1. En cada caso queda:

a) Llamando x a la medida de la altura sabemos que la base mide 150 - x, por tanto, la tabla de valores, a fórmula y la gráfica quedan:

Altura (x)	1	30	100	120
Área (A)	149	3600	5000	3600

$A(x) = x \cdot (150 - x) \Rightarrow A(x) = -x^2 + 150x$; con Dom A = (0, 150) e Im A = (0, 5625)



b) La tabla de valores, la fórmula y la gráfica, con el dominio y recorrido, son:

Espacio (m)	100	200	500	1000
Precio (€)	2,6	2,7	3	3,5

f (x) = 2,5 + 0,0010 x. El dominio es (0, +∞) y la imagen es (2,5; +∞)

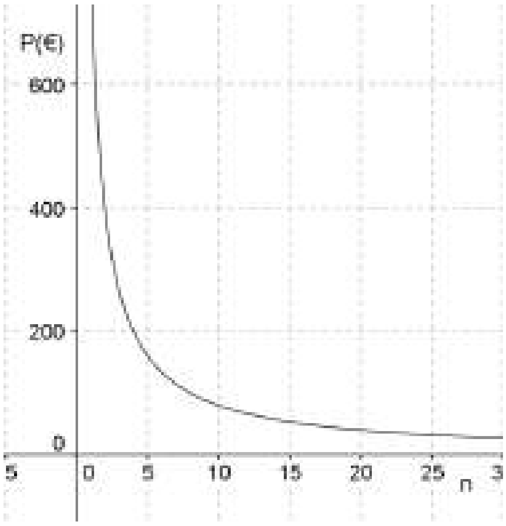
La gráfica es una línea recta casi paralela al eje OX

c) La tabla de valores, la fórmula y la gráfica son:

Nº Vecinos (n)	10	25	40
Paga cada uno (€)	80	32	20

La fórmula es: $P\ (x) = \dfrac{800}{n}$

El dominio y la imagen son: Dom P = (0, 800) e Im P = (0, +∞)



2. Los dominios y recorridos son:

a) Dom f = R; Im f = $(-\infty, 0]$

b) Dom f = R; Im f = Z

c) Dom f = $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$; Im f = $(0, +\infty)$

3. a) Dom f = R

b) Dom f = R – {-2, 0}

c) Dom f = [-2, 2]

d) Dom f = R

e) Dom f = R

f) Dom f = $[-2, +\infty)$

4. a) Dom f = R – {-2, 2}. Im f = R. Estrictamente creciente en $(-\infty, -3{,}46) \cup (3{,}46, +\infty)$. Estrictamente decreciente en $(-3{,}46, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +3{,}46)$. Máximo relativo en (- 3,46; - 5,2) y Mínimo relativo (3,46; 5,2).

b) Dom f = R. Im f = $(-3, 0]$. Estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$. Estrictamente creciente en $(0, +\infty)$, Máximo relativo en (0, 0).

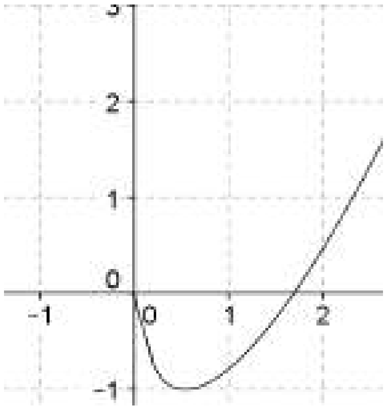
5. El número de socios fundadores es N (0) = 20 000. El dominio de esta función es $[0, +\infty)$ siendo 0 el año 2005.

6. Se verifica $2 \le x^2 + 6x + 7 \le 7$ para x ∈ [- 6, - 5] ∪ [- 1, 0].

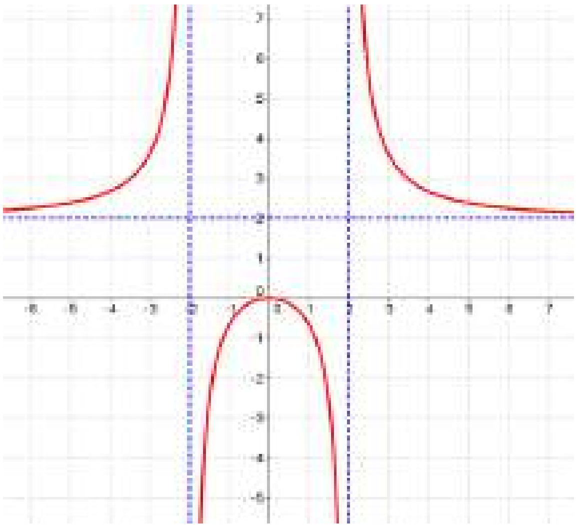
ACTIVIDADES-PÁG. 139

7. Posibles gráficas, que verifiquen las condiciones, son:

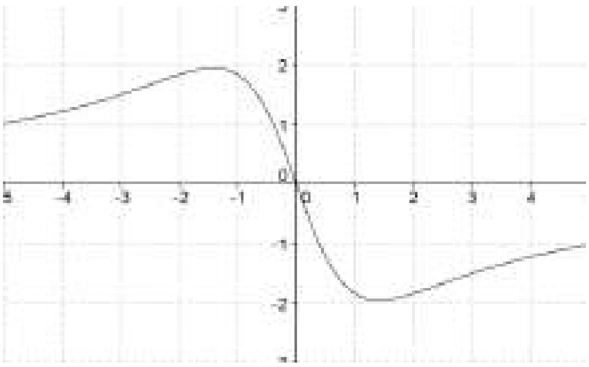
a)



b)



c)



8. a) ● y = f (x)

Dom f = R; Im f = $[0, +\infty)$
Acotada inferiormente por 0 pero no esta acotada superiormente por lo que no esta acotada.
Estrictamente decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.
Estrictamente creciente en (0, 2)
No presenta simetría.
Mínimo relativo en (0, 0) y máximo relativo en (2; 0,54)

b) ● y = f (x)

Dom f = R; Im f = [-1, 1]
Acotada inferiormente por - 1 y superiormente por 1, por lo cual esta acotada.
Estrictamente decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
Estrictamente creciente en (- 1, 1)
Es simétrica respecto al origen de coordenadas.
Mínimo relativo en (- 1, - 1) y máximo relativo en (1, 1)

9. Las simetrías son:

a) Simétrica respecto al Origen.
b) Simétrica respecto al eje OY.
c) Simétrica respecto al eje OY.
d) No tiene simetría.
e) Simétrica respecto al Origen.
f) Simétrica respecto al Origen.

10. Las respuestas son:

a) El dominio es [4, 22] y el recorrido [0, 169 000]
b) A las 4 de la mañana tiene 144 000 litros de agua. Disminuye de 9 de la mañana a las 22 horas.
c) La máxima capacidad la tiene a las 9 de la mañana y es de 169 000 litros.
d) Se queda sin agua a las 22 horas.

11. Las respuestas son:

a) f (x) + g (x) = $\frac{x+1}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{x^2+2x+3}{x^2-1}$. Dom (f +g) (x) = R – {1, - 1}

b) f (x) · g (x) = $\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)^2}$. Dom (f · g) (x) = R – {1}

c) f(x) : g(x) = $\frac{x+1}{x-1} : \frac{2}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{2}$. Dom (f : g) (x) = R

d) $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Dom $f^{-1}(x)$ = R – {1}

e) $f^{-1} \circ g\,(x) = \frac{x^2+1}{3-x^2}$. Dom $f^{-1} \circ g\,(x)$ = R - $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

f) 1/ g (x) = $\dfrac{x^2-1}{2}$. Dom (1/g(x)) = R

12. Las respuestas son:

a) (f o g) (x) = $\dfrac{x+3}{\sqrt{x+2}}$

b) (f o h o g) (x) = $\dfrac{x^2+4x+5}{-x-2}$

c) (g o h) (-1) = 1

d) (g o g) (7) = $\sqrt{5}$

ACTIVIDADES-PÁG. 140

13. La función es h (t) = $-5t^2 + 25t$. La gráfica puede verse en el dibujo.

La altura máxima la alcanza a los 2,5 s y es de 31,25 m

14. Las funciones inversas son, en cada caso:

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x-12}{2}$

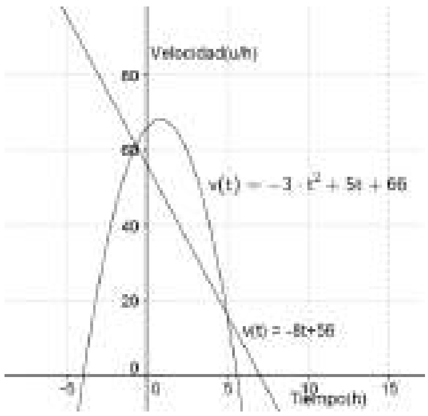
b) $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{1-2x}$

c) $f^{-1}(x) = x^2 - 1$

Fácilmente se comprueba la propiedad que cumple la f función inversa.

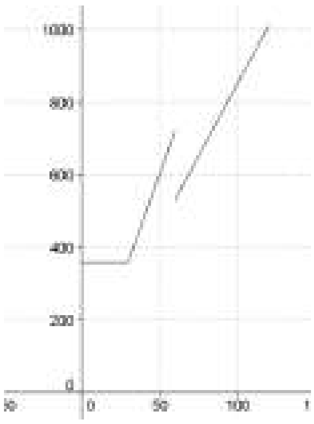
15. Alcanzan la misma velocidad cuando $-3 \cdot t^2 + 5 \cdot t + 66 = -8 \cdot t + 56$, es decir a las 5 horas.

Observando las gráficas podemos decir que el primero es más rentable desde t = 0 a t = 5 horas.



16. Llamando x al nº de espectadores, la función es

$$f(x) = f\ (x)\begin{cases} 360 & si\quad 0 < x < 30 \\ 12x & si\quad 30 \le x \le 60 \\ 50 + 8{\cdot}x & si\quad 60 < x \le 120 \end{cases}$$



Su gráfica es la del dibujo.

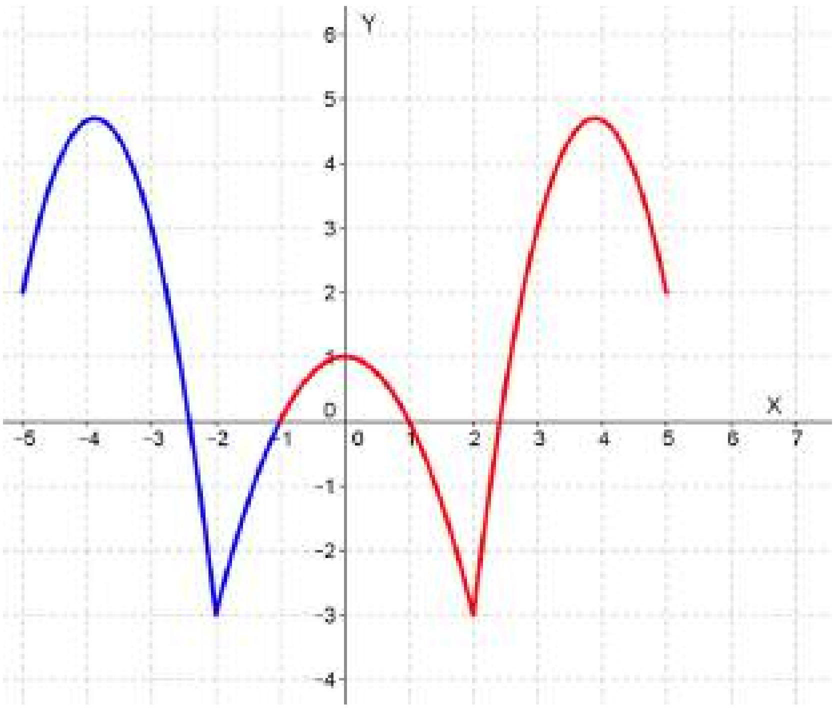
De ella y de su expresión obtenemos que:

Dom(f) = (0, 120]. Im f = [360, 1010]

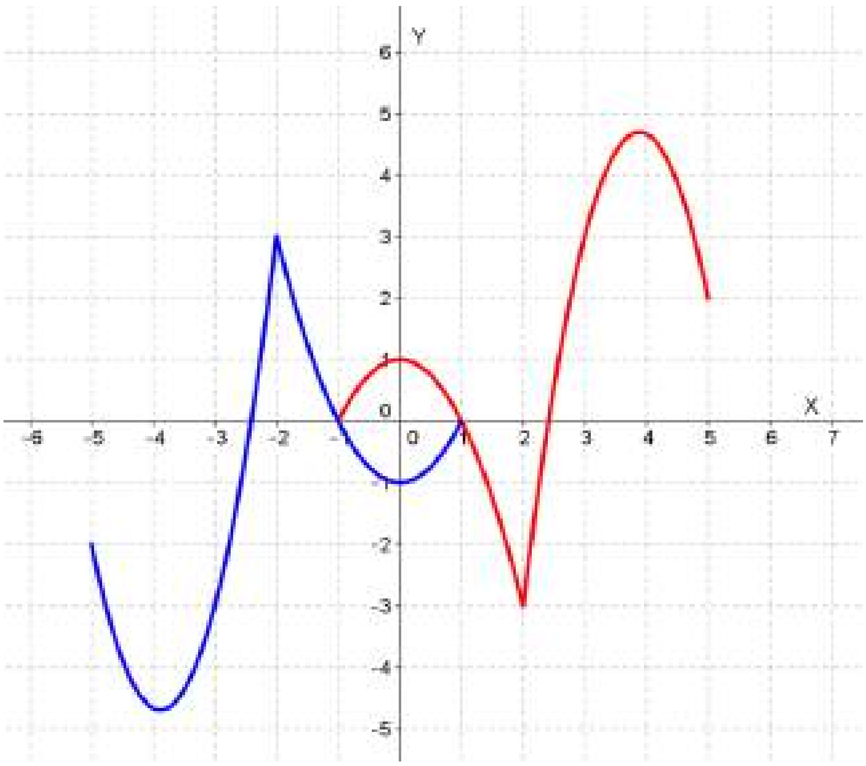
17. La función es: $f(r) = 450 \cdot r - \pi \cdot r^2 - 4 \cdot r^2$

18. En cada caso:

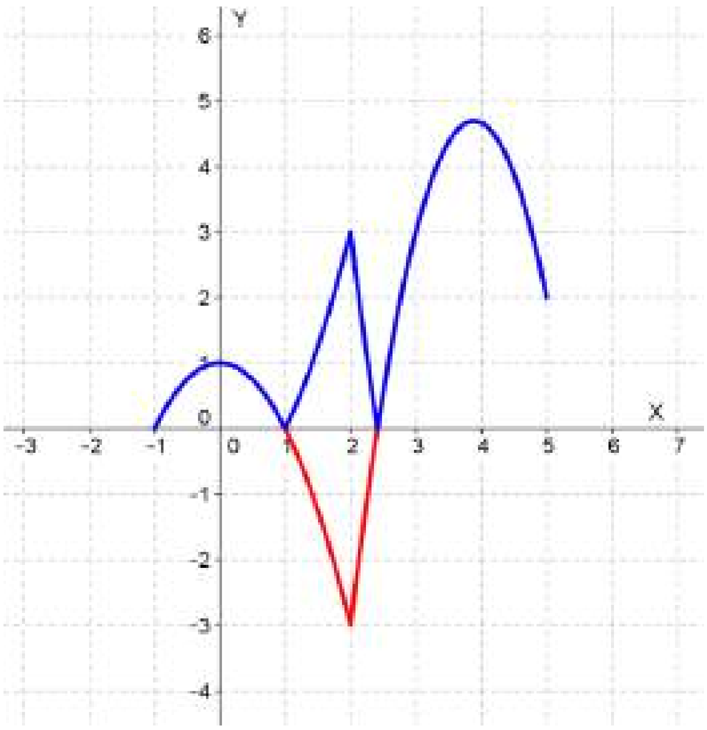
a) En el dibujo aparece la gráfica de la función y = f (x) (en rojo) y la gráfica simétrica respecto del eje de ordenadas (en azul). Hay que tener en cuenta que, en algunos intervalos, ambas gráficas coinciden.



b) En el dibujo aparece la gráfica de la función y = f (x) (en rojo) y la gráfica simétrica respecto del origen de coordenadas (en azul).

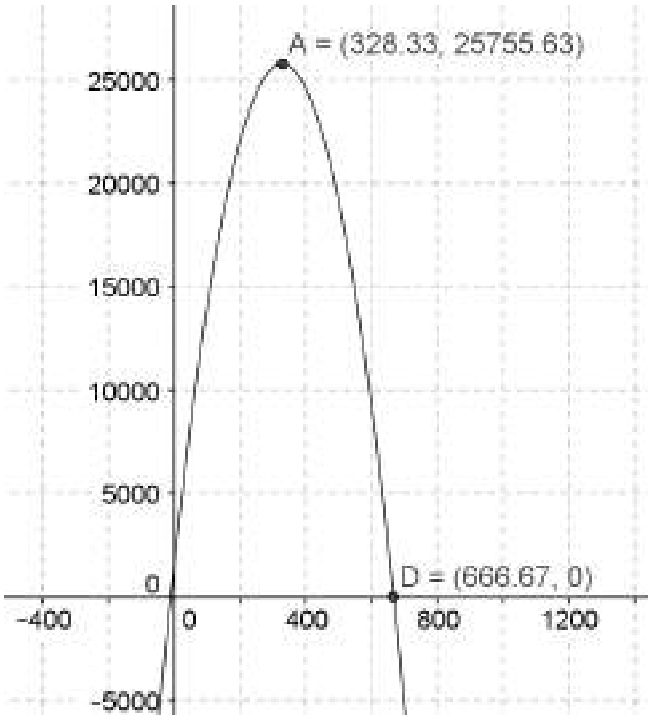


c) En el dibujo aparece la gráfica de la función y = f (x) (en rojo) y la gráfica y = │ f (x) │(en azul). Hay que tener en cuenta que, en algunos intervalos, ambas gráficas coinciden.



19. La función es: f(t) = (1000 – 1,5 · t) · (1,5 + 0,15 · t) = 1500 + 147,75t – 0,225 t^2

A la vista de su gráfica podemos decir que Dom f= [0; 666,67] y que Im f = [0; 25755,63].



20. Las respuestas son:

a) El beneficio que obtiene es 12 · 40 – C (40) = 338, 56 €.

b) La función buscada es: B (x) = 12 · x – C(x) = $\frac{104}{9}x - \frac{7}{100}x^2 - \frac{35}{3}$.

c) El beneficio será nulo para x = 1,05 € o para x = 164,03 €.

ACTIVIDADES-PÁG. 141

Ofrecemos bibliografía sobre la relación entre matemáticas y deporte.

BOLT, B. y HOBBS, D. (1991). *101 proyectos matemáticos.* Labor. Barcelona.

CORBALÁN, Fernando. (2007) *Matemáticas en la vida misma.* Graó. Barcelona.

CORBALÁN, Fernando. (201) *Matemáticas de cerca.* Graó. Barcelona.

ORTEGA, Tomás. (2005). *Conexiones matemáticas.* Graó. Barcelona.

SORANDO MUZÁS, J. M. (2012) *Matemáticas y deporte. Sugerencias para el aula.* Revista Números. Volumen 80.

SORANDO MUZÁS, J. M. http://catedu.es/matematicas_mundo/

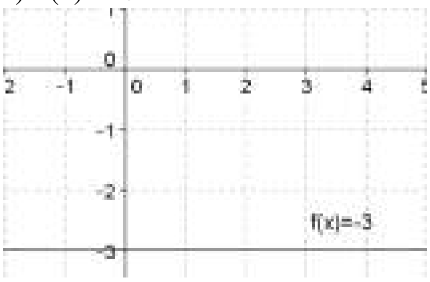
VV. AA. (2013). *Matemáticas y deporte.* Revista UNO. Graó. Barcelona.

UNIDAD 7: Funciones polinómicas. Interpolación

ACTIVIDADES-PÁG. 142

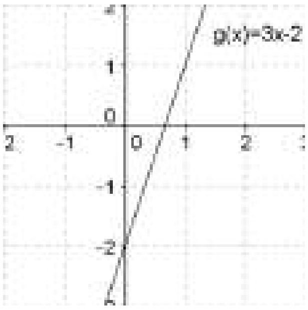
1. Las representaciones quedan:

a) f (x) = -3



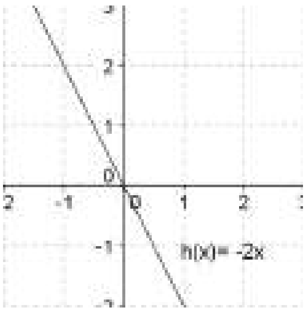
f (x) es una función constante.
Dom f = R
Im f = {- 3}
Acotada por - 3.

b) g (x) = 3x - 2



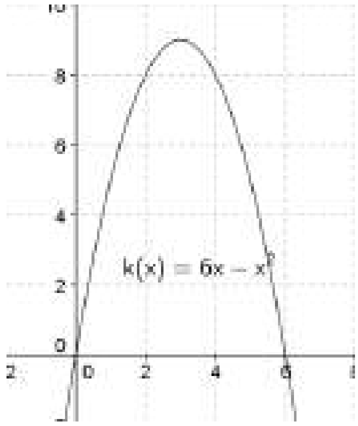
g (x) es una función afín.
Dom g = R
Im g = {R}
Estrictamente creciente en su dominio.

c) h (x) = - 2x



h (x) es una función lineal.
Dom h = R
Im h = {R}
Estrictamente decreciente en su dominio.

d) $k(x) = 6x - x^2$



k (x) es una función cuadrática.
Dom f = R
Im k = $(-\infty, 9]$
Acotada superiormente por 9.
Estrictamente creciente en $(-\infty, 3)$.
Estrictamente decreciente en $(3, +\infty)$
Máximo en (3, 9).

2. La función es $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

3. La asociación es: a) con (III) b) con (IV) c) con (I) d) con (II)

ACTIVIDADES-PÁG. 157

1. Llamamos B a las vacas blancas y N a las vacas negras:

$$5 \cdot (4B + 3N) = 4 \cdot (3B + 5N) \Rightarrow 20B + 15N = 12B + 20N \Rightarrow 8B = 5N$$

Dan más leche las vacas negras.

2. El número de naranjas de la pirámide es:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + .. + 14^2 + 15^2 = 1240 \text{ naranjas.}$$

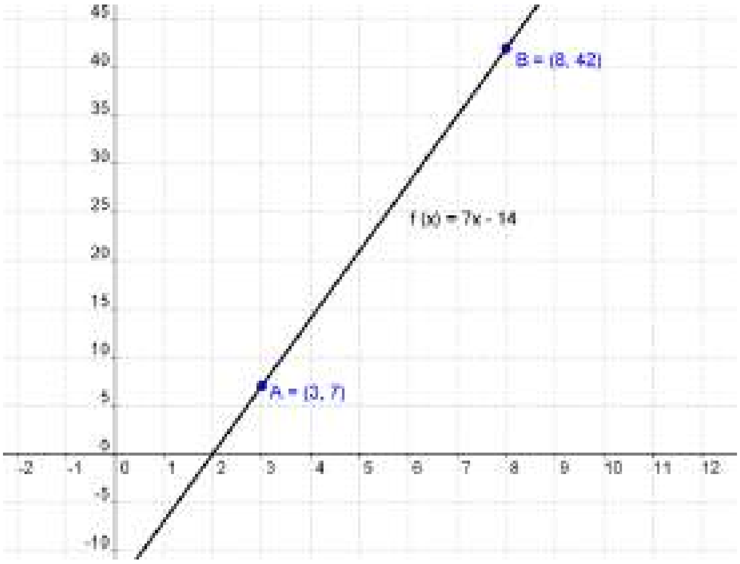
3. Por medio de ensayo y error dirigido se obtiene:

- Con la información referida a los Reyes (R) y las Damas (D) llegamos a que puede ser RDD o DRD.
- Con la información referida a los Corazones (C) y las Picas (P) llegamos a que puede ser PCP o PPC.

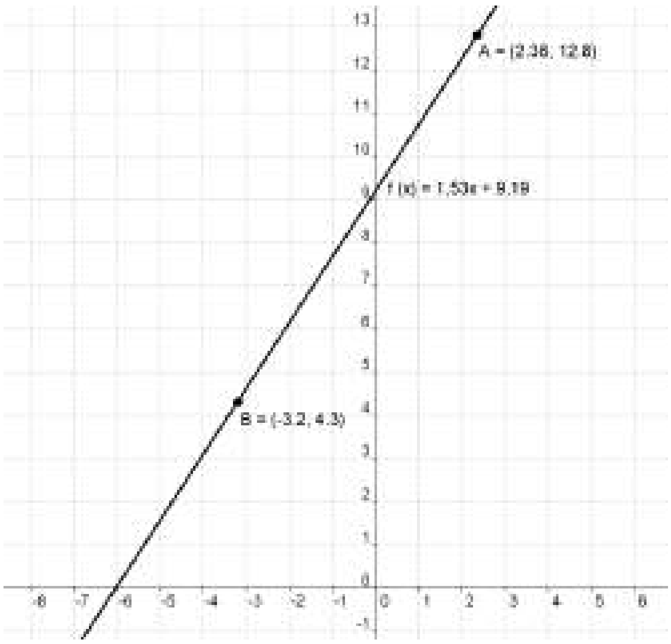
Juntamos los resultados obtenidos y llegamos a que la solución es: Rey de Picas – Dama de Picas – Dama de Corazones.

ACTIVIDADES-PÁG. 159

1. a) Siguiendo los pasos descritos, obtenemos f(x) = 7x – 14 como polinomio interpolador.



b) En este caso obtenemos f (x) = 1,53x + 9,19.



2. Procedemos como en los casos anteriores:

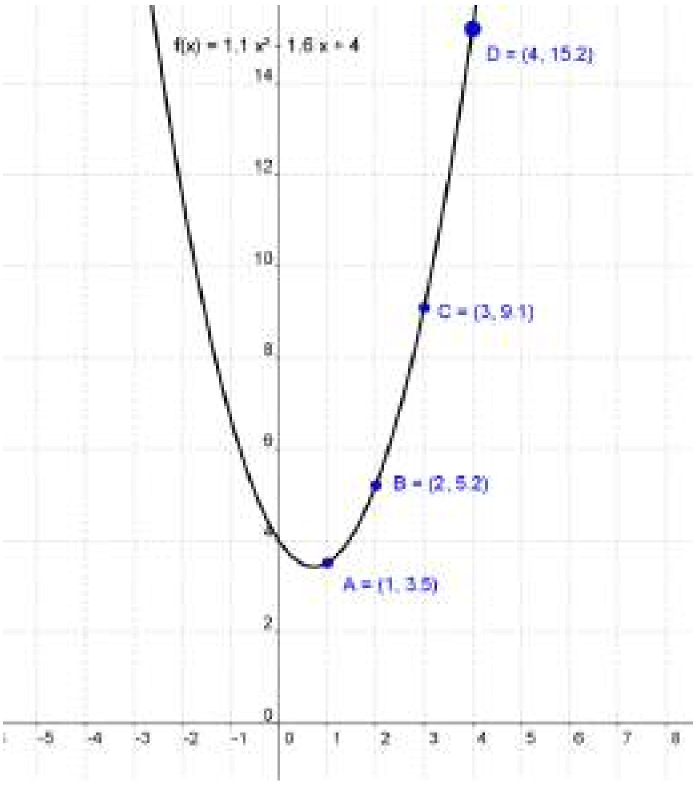
a) Introducimos los puntos A = (1, 3.5); B = (2, 5.2) y C =(3, 9.1).

b) Dibujamos la función interpoladora con el comando Polinomio [A,B,C].

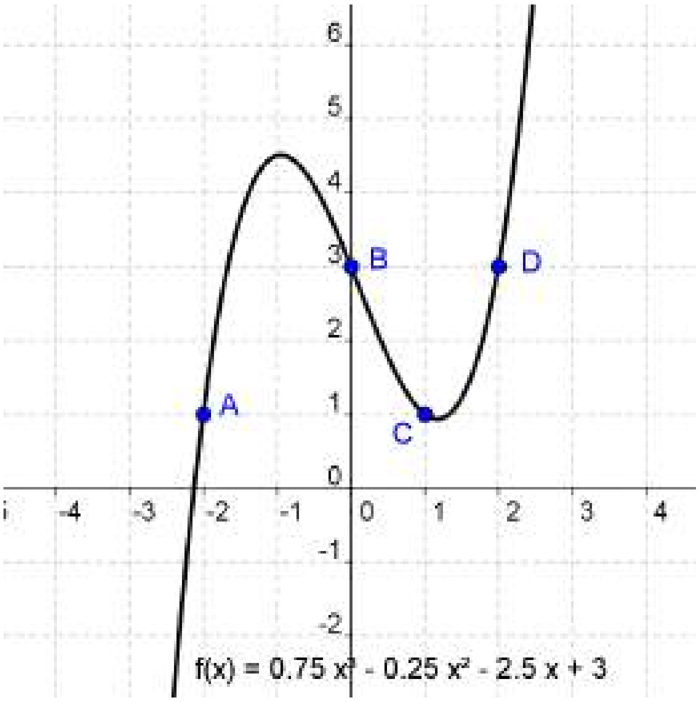
c) En el menú contextual de cada elemento determinamos su nombre y valor.

d) Obtenemos el gasto previsto para el año 2012 escribiendo en el Campo de Entrada f (4) y nos da que el gasto 15200 euros.

Puedes verlo dibujado en la gráfica como punto D.



3. Procediendo como en los casos anteriores obtenemos el polinomio f (x) = $0{,}75x^3 - 0{,}25x^2 - 2{,}5\,x + 3$.



ACTIVIDADES-PÁG. 160

1. En cada caso queda:

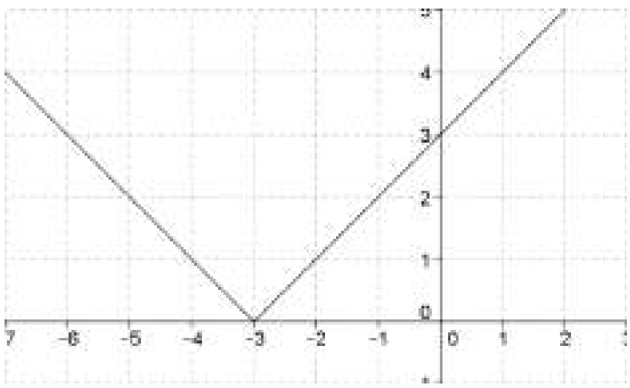
a) La función es $y = \frac{7}{3}x$.

b) Es la función lineal y = 2x. Es una función lineal.

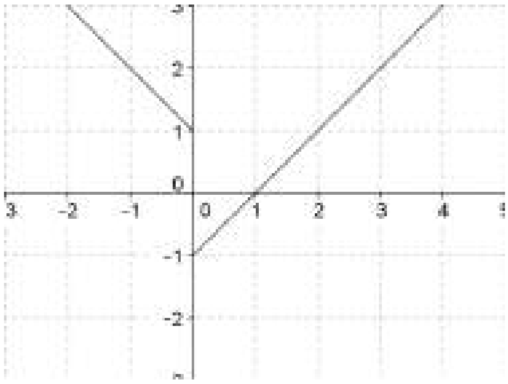
c) Su ecuación es $y = \frac{3}{4}x - 3$. La pendiente de esta recta vale $\frac{3}{4}$.

2. Las gráficas quedan:

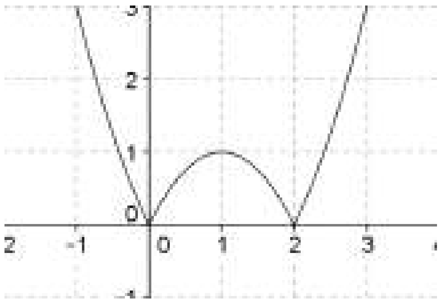
a) $f(x) = |x + 3|$



b) $f\ (x) = |x| - \dfrac{|x|}{x}$

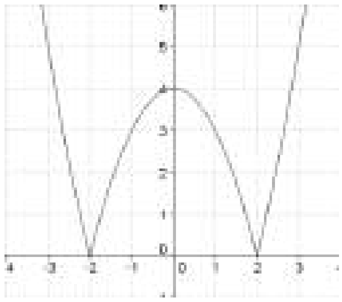


c) $f\ (x) = |x^2 - 2x|$



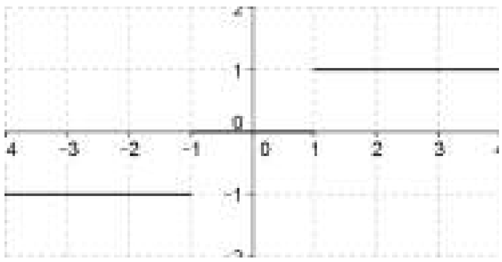
3. Las gráficas quedan:

a) $f\ (x) = \begin{cases} x^2 - 4 & si \quad x \leq 2 \ ó \ x \geq -2 \\ 4 - x^2 & si \quad -2 < x < 2 \end{cases}$



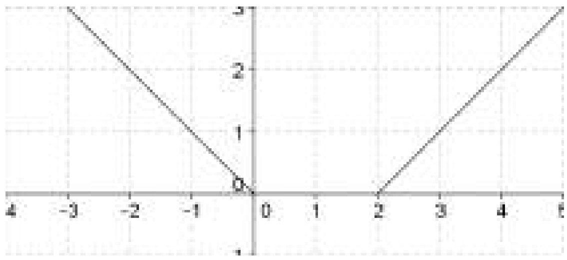
Dom f = R
Im f = $[0, +\infty)$

b) $f\ (x) = \begin{cases} -1 & si\ x < -1 \\ 0 & si\ -1 \leq x < 1 \\ 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$



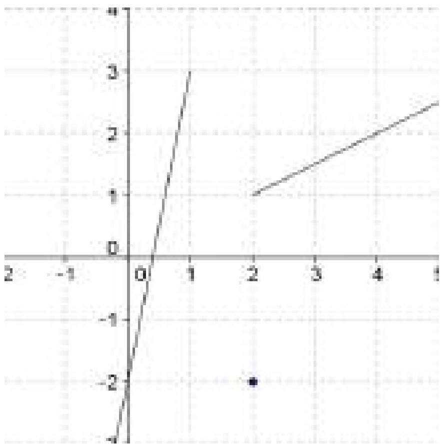
Dom f = R
Im f = {-1, 0, 1}

c) $f\ (x) = \begin{cases} -x & si \quad x \leq 0 \\ x-2 & si \quad 2 < x \end{cases}$



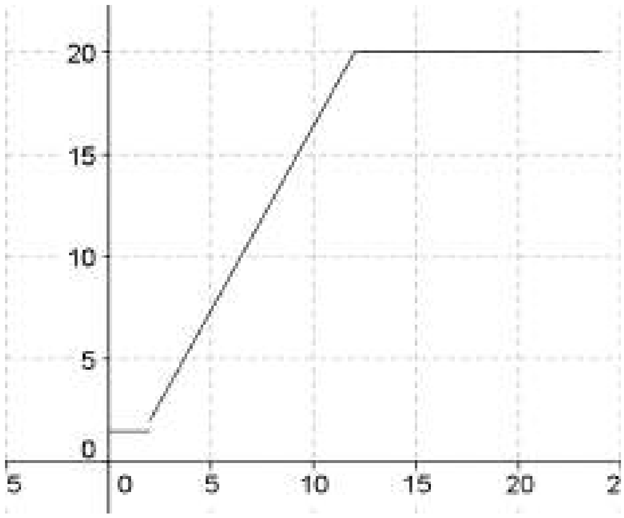
Dom f = $(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$
Im f= $[0, +\infty)$

d) $f\ (x) = \begin{cases} 5x - 2 \quad si \ x < 1 \\ -2 \quad si \ x = 2 \\ \dfrac{1}{2}x \quad si \ x > 2 \end{cases}$



Dom f = $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$
Im f= R

4. La representación gráfica es:



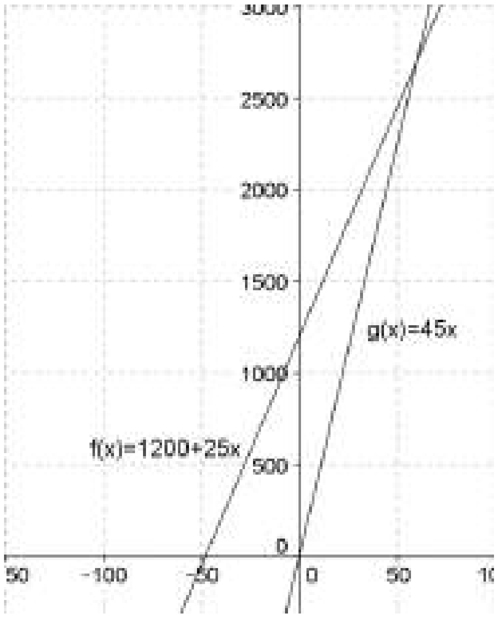
5. La expresión de la función es P (x) = 1,5 x + 2,75. Cobra 1,5 €/km y 2,75 € por bajada de bandera.

6. La solución queda:

a) La función es P = 1200 + 25 · x, donde P es el precio a cobrar en euros y x los kilómetros.

b) La función para la otra empresa es P = 45 · x , donde P es el precio a cobrar en euros y x los kilómetros.

Las gráficas aparecen en el dibujo.



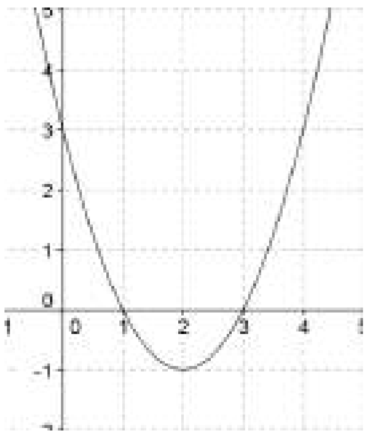
Para los primeros 60 km interesa más la segunda opción. Para 60 km da igual una que otra y a partir de 60 km es más barata la primera opción.

c) La función primera será: $f\ (x) = \frac{121}{100}\ P = \frac{121}{100}(1200 + 25 \cdot x)$

La función segunda será: $g\ (x) = \frac{121}{100}\ P = \frac{121}{100}(45 \cdot x)$

Todas las ordenadas de ambas funciones quedan multiplicadas por 1,21.

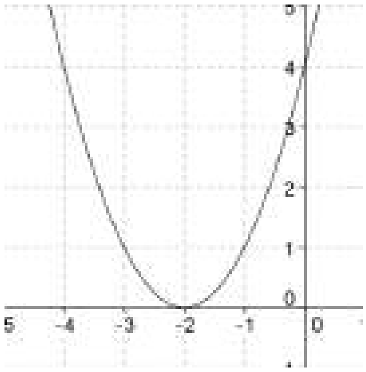
7. Las representaciones gráficas y sus características son:



a) f (x) = x^2 – 4x + 3

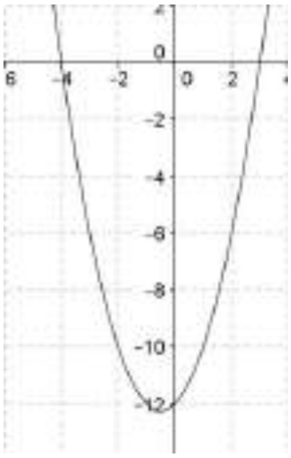
Dom f = R
Im f = $[-1, +\infty)$
Estrictamente decreciente en $(-\infty, 2)$.
Estrictamente creciente en $(2, +\infty)$
Mínimo relativo en (2, - 1).
Está acotada inferiormente por – 1.
Mínimo absoluto en – 1.
Es simétrica respecto de su eje x = 2.

b) $f(x) = x^2 + 4x + 4$



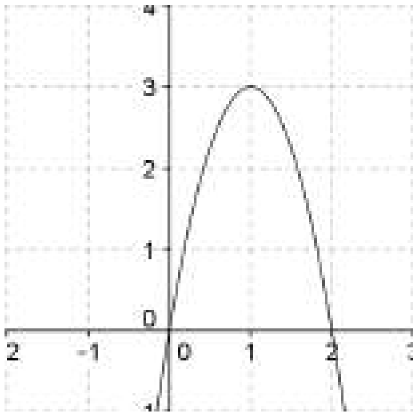
Dom f = R
Im f = $[0, +\infty)$
Estrictamente decreciente en $(-\infty, -2)$.
Estrictamente creciente en $(-2, +\infty)$
Mínimo relativo en (-2, 0).
Está acotada inferiormente por 0. Mínimo absoluto en 0.
Es simétrica respecto de su eje x = -2.

c) $f(x) = x^2 + x - 12$



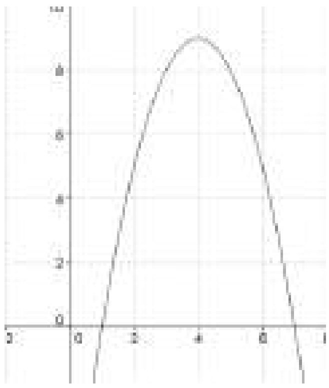
Dom f = R
Im f = $[-12{,}25; +\infty)$
Estrictamente decreciente en $(-\infty, -1/2)$.
Estrictamente creciente en $(-1/2, +\infty)$
Mínimo relativo en (-1/2; -12,25).
Está acotada inferiormente por -12,25. Mínimo absoluto en -12,25.
Es simétrica respecto de su eje x = -1/2.

d) $f(x) = -3x^2 + 6x$



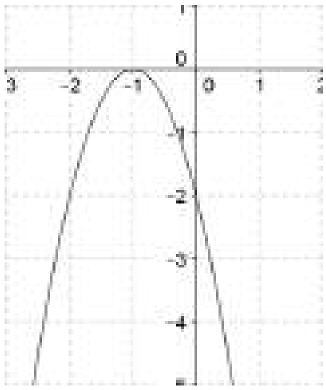
Dom f = R
Im f = $(-\infty, 3]$
Estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$.
Estrictamente decreciente en $(1, +\infty)$
Máximo relativo en (1, 3).
Está acotada superiormente por 3.
Máximo absoluto en 3.
Es simétrica respecto de su eje x = 1.

e) $f(x) = -x^2 + 8x - 7$



Dom f = R
Im f = $(-\infty, 9]$
Estrictamente creciente en $(-\infty, 4)$.
Estrictamente decreciente en $(4, +\infty)$
Máximo relativo en (4, 9).
Está acotada superiormente por 9.
Máximo absoluto 9.
Es simétrica respecto de su eje x = 4.

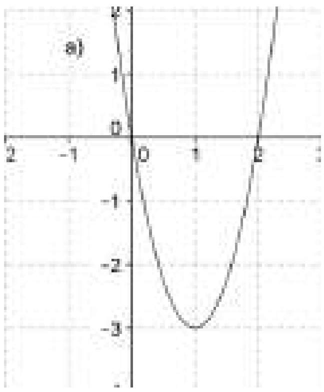
f) f (x) = - 2x^2 – 4x - 2



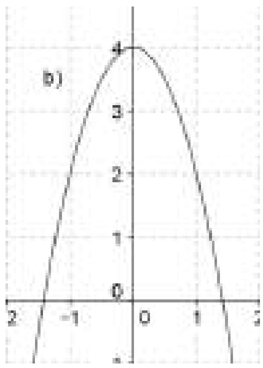
Dom f = R
Im f = $(-\infty,\ 0]$
Estrictamente creciente en $(-\infty, -1)$.
Estrictamente decreciente en $(-1, +\infty)$
Máximo relativo en (- 1, 0).
Está acotada superiormente por 0. Máximo absoluto 0.
Es simétrica respecto de su eje x = - 1 .

ACTIVIDADES-PÁG. 161

8. Las soluciones se presentan bajo las gráficas.

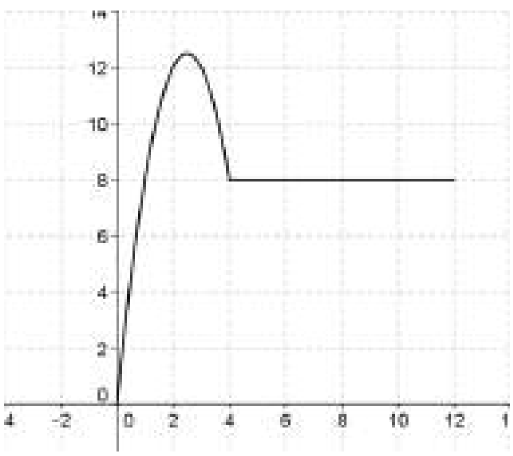


f (x) = 3 x^2 – 6x



f (x) = (-16/9) x^2 + 4

9. La representación gráfica es:



El beneficio es de 12 millones de euros al 2º año y al 3º.

10. Las soluciones de los apartados son:

a) El precio de equilibrio se consigue cuando coinciden ambas funciones:

$$\frac{425}{3}p - 326 = 51570 - \frac{1454}{5}p \quad \Rightarrow \quad p = 120\ €$$

La cantidad de equilibrio es f_o (120) = f_d (120) = 16 674 unidades.

b) Si el precio es de 135 € entonces: f_o (135) = 18 799 unidades produce el almacén y f_d (135) = 12 312 unidades demanda el público, es decir hay sobreabundancia de unidades.

Si el precio es de 105 € entonces: f_o (105) = 14 549 unidades produce el almacén y f_d (105) = 21 036 unidades demanda el público, es decir hay escasez de unidades.

11. a) La función demanda es f_d (p) = - 2p + 110

b) La función oferta es : f_o (p) = 1,5 p + 15

c) El precio de equilibrio es p = 27,14 euros. Si p = 40 € entonces f_o (40) = 75 unidades oferta la empresa y f_d (40) = 30 unidades demanda el comprador. En este caso se produce exceso de carteras.

12. El polinomio buscado es P(x) = x + 2.

Para el valor a = 0, obtenemos P (0) = 0 + 2, es decir, P (0) = 2.

Para el valor a = 5, obtenemos P (5) = 5 + 2, es decir, P (5) = 7.

13. El polinomio interpolador es P (x) = $a_0 + a_1x + a_2x^2$:

$$\begin{cases} a_0 + 5\,a_1 + 25\,a_2 = 49 \\ a_0 + 10\,a_1 + 100\,a_2 = 105 \\ a_0 + 25a_1 + 625a_2 = 352 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 37/6 \\ a_1 = 29/4 \\ a_2 = 79/300 \end{cases} \Rightarrow P\,(x) = \frac{79}{300}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{37}{6}$$

P (15) = 174,17 mm

P (20)= 256,5 mm

Las aproximaciones obtenidas son bastante buenas.

14. El polinomio interpolado es P (x) = $a_0 + a_1x + a_2x^2$:

$$\begin{cases} a_0 = 48 \\ a_0 + 3\,a_1 + 9a_2 = 52 \\ a_0 + 6a_1 + 36a_2 = 58 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 48 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1/9 \end{cases} \Rightarrow P\,(x) = \frac{1}{9}x^2 + x + 48$$

Un bebe de 1 año, es decir de 12 meses, tendría una longitud media de P (12) = 76 cm.

ACTIVIDADES-PÁG. 162

15. La solución queda:

● El punto de intersección lo hallamos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 16x \\ y = -2x + 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 0 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 14 \end{cases}$$

Los puntos de intersección son (8, 0) y (1, 14).

El ingreso total máximo se produce para x = 4 dólares y es 32.

● El ingreso total pasa de 14 a 24 dólares para valores de $x \in (1, 2)$.

La función f (x) que da la cantidad de producto fabricado disminuye de 14 a 12 unidades, no aumenta y el precio pasa de 1 a 2 dólares.

16. a) El precio de equilibrio se consigue cuando coinciden ambas funciones:

$$0{,}2 \cdot p^2 - 65 = 340 - 0{,}25 \cdot p^2 \quad \Rightarrow \quad p = 30 \text{ €}$$

La cantidad de equilibrio es $f_o(30) = f_d(30) = 115$ motos.

b) Se produce escasez de motos cuando $340 - 0{,}25 \cdot p^2 > 0{,}2 \cdot p^2 - 65 + 99 \quad \Rightarrow \quad p \in (0, 26)$ €

17. Consideramos el mes de mayo como el mes inicial (x = 0). El polinomio interpolador, P (x) = ax^2 + bx + c, para los datos de la tabla, es:

Mayo x = 0	**Agosto x = 3**	**Septiembre x = 4**
2,4	2,7	2,9

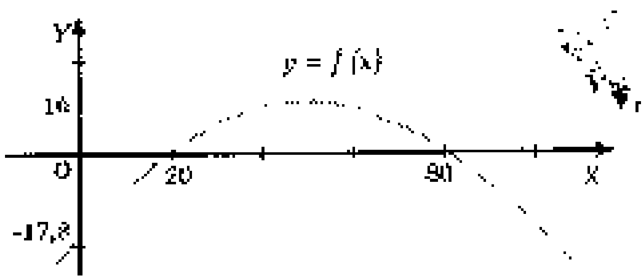
$$P(x) = 0{,}025x^2 + 0{,}025x + 2{,}4$$

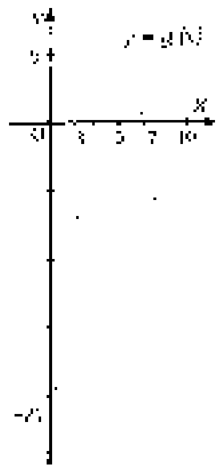
La inflación estimada para el mes de julio (x = 2) es P (2) = 2,55.

La inflación estimada para el mes de octubre (x = 5) es P (5) = 3,15.

18. Las soluciones de los apartados son:

a) Las representaciones quedan:





b) En el primer caso hay que fabricar entre 20 y 80 unidades y en el segundo caso entre 3 y 7 unidades.

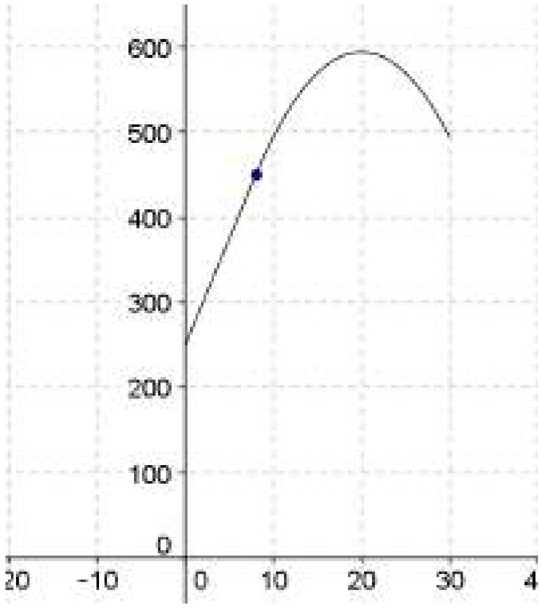
c) En la función f (x) el mayor beneficio se produce al fabricar 50 unidades y este beneficio es de 10 000 euros.

En la función g (x) el mayor beneficio se produce al fabricar 5 unidades y este beneficio es de 4 000 euros.

d) Obtiene los mismos beneficios cuando:

$$f\ (x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{90}(-x^2 + 100x - 1600) = 10x - x^2 - 21 \Rightarrow x = 8{,}6\ ;\ x = 0{,}38$$

19. La representación gráfica es:



La oferta máxima la alcanza para p = 20 €.

La oferta es menor de 450 unidades para p $\in (0,8)$

20. Considerando 2011 como año 0, 2012 como año 1 y 2014 como año 3, obtenemos la función de interpolación cuadrática que se ajusta a estos datos:

$$\begin{cases} P\ (0) = 54 \Rightarrow a_0 = 54 \\ P\ (2) = 57 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 57 \\ P\ (3) = 4{,}6 \Rightarrow a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 54 \\ a_1 = \frac{8}{3} \\ a_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow P\ (x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 54$$

Para el año 2015 se prevé que haya P (4) = 70 millones de turistas por el interior de España.

ACTIVIDADES-PÁG. 163

Existe una amplísima bibliografía sobre la relación entre matemáticas y arte. Ofrecemos algunos textos significativos.

CORBALÁN, Fernando. (2010) *La proporción áurea. El lenguaje matemático de la belleza.* RBA. Barcelona.

FERNÁNDEZ, I. y REYES, M. A. (2006) *Geometría con el hexágono y el octógono.* Proyecto Sur. Granada.

LIVIO, Mario. (2006) *La proporción áurea. La historia de phi, el número más sorprendente del mundo.* Ariel. Barcelona.

MARTÍN CASALDERREY, F. (2010) *La burla de los sentidos. El arte visto con ojos matemáticos.* RBA. Barcelona.

MEAVILLA SEGUÍ, V. (2007) *Las matemáticas del arte. Inspiración ma(r)temática.* Almuzara. Córdoba.

VV. AA. (2005) *Geometría en los Reales Alcázares de Sevilla.* Junta de Andalucía. Sevilla.

VV. AA. (2009) *La proporción: arte y matemáticas.* Graó. Barcelona.

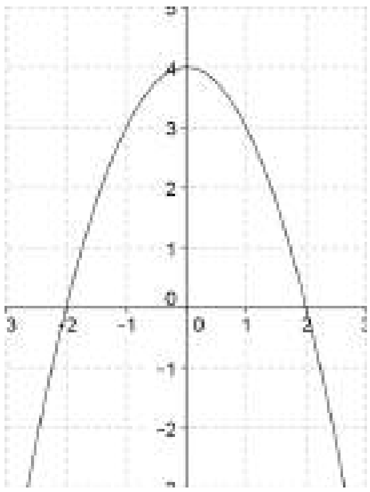
VV. AA. (2009) *Matemáticas en la catedral de Burgos.* Caja Círculo. Burgos.

UNIDAD 8: Funciones racionales e irracionales

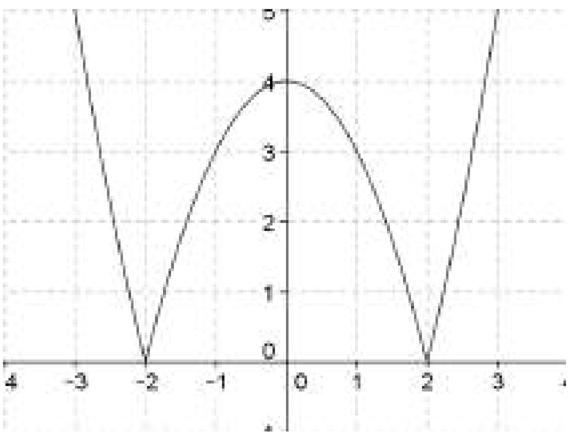
ACTIVIDADES-PÁG. 164

1. La expresión algebraica correspondiente al problema es $t = \frac{400}{v}$ y la distancia entre las ciudades es de 400 km.

2. a) La gráfica es la simétrica respecto de OX de la función dada.



b) La gráfica es el valor absoluto de la función dada y se obtiene dejando igual la parte positiva y haciendo la simétrica respecto de OX con la negativa.



3. La asociación es: a) con (III) b) con (I) c) con (II)

ACTIVIDADES-PÁG. 177

1. La suma queda 1 + 3 + 5 + 7 +…+ (2n – 1) = $\frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n = n^2$

2. La solución queda:

1er piso: se necesitan 2 naipes.
2º piso: se necesitan 5 naipes.
3er piso: se necesitan 8 naipes.
4º piso: se necesitan 11 naipes.

Luego en el enésimo piso habrá (3n – 1) naipes.

Una torre de n pisos tendrá $\frac{(3n+1)\cdot n}{2}$ naipes.

Una torre de 15 pisos tendrá $\frac{(3\cdot 15+1)\cdot 15}{2} = 345$ naipes.

Veamos cuántos pisos tendrá un castillo de 3775 naipes:

$$\frac{(3n+1)\cdot n}{2} = 3775 \quad \Rightarrow \quad 3n^2 + n - 7750 \quad \Rightarrow \quad \text{n = 50 pisos.}$$

3. Imaginamos que la rueda del padre tarda 6 segundos en dar una vuelta y la del hijo 6 segundos en dar vuelta y media.

En la situación de partida vuelven a estar a cabo de 12´´, pero en ningún momento coincidirán las marcas azules sobre el suelo.

4. El cuadrado de cualquier número entero termina en 0, 1, 4, 5, 6 ó 9.

Si un número cuadrado es par, su cuadrado es múltiplo de 4.

Así, $14^2 = 169 = \dot{4}$.

Si el número entero es impar, su cuadrado es múltiplo de 4 + 1, Así, $13^2 = 169 = \dot{4} + 1$.

Ahora bien, si el número al cuadrado termina en 111, 555, 666 ó 999, éstos no son múltiplos de 4 ni múltiplo de 4 + 1, luego no pueden ser.

Veamos, pues, los que terminan en 000 ó 444.

Efectivamente, $1444 = 38^2$, luego también se verifican si no son cero las cifras.

5. La demostración queda de la siguiente forma:

El valor de (2n)! es $(2n)! = 2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Veamos si es cierta la igualdad anterior transformada en otra:

$$2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot\ldots\cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 > [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot\ldots\cdot (2n-1)]^2 \cdot \sqrt{2n+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot\ldots\cdot (2n-1)} > \sqrt{2n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{2n \cdot (2n-2) \cdot\ldots\cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1) \cdot\ldots\cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} > \sqrt{2n+1}$$

Esto es lo que vamos a demostrar por el método de inducción:

Para n = 1: $2 > \sqrt{2 \cdot 1 + 1} \quad \Rightarrow \quad 2 > \sqrt{3}$.

Supongamos que se cierto para n: $\dfrac{2n \cdot (2n-2) \cdot\ldots\cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1) \cdot\ldots\cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} > \sqrt{2n+1}$.

Veamos que es cierto para n + 1: $\dfrac{(2n+2) \cdot 2n \cdot (2n-2) \cdot\ldots\cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot\ldots\cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} > \sqrt{2n+3}$ [I]

$$\frac{(2n+2) \cdot 2n \cdot (2n-2) \cdot\ldots\cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot\ldots\cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{(2n+2)}{(2n+1)} \cdot \frac{(2n) \cdot (2n-2) \cdot\ldots\cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1) \cdot\ldots\cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} > \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \sqrt{2n+1} > \sqrt{2n+3}$$

Elevando al cuadrado:

$$(2n+2)^2 \cdot (2n+1) > (2n+1) > (2n+1)^2 \cdot (2n+3) \quad \Rightarrow \quad 16n + 4 > 14n + 3 \quad \Rightarrow \quad 2n + 1 > 0$$

Esto siempre es cierto ya que n es un número natural.

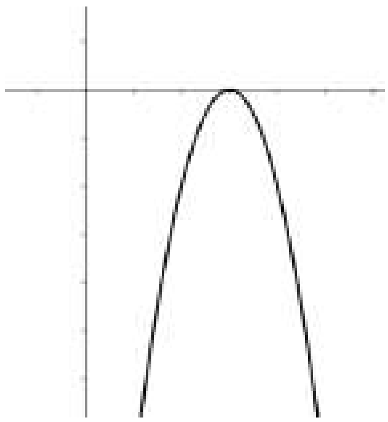
Por tanto, la desigualdad [I] es cierta y el enunciado es cierto.

ACTIVIDADES-PÁG. 179

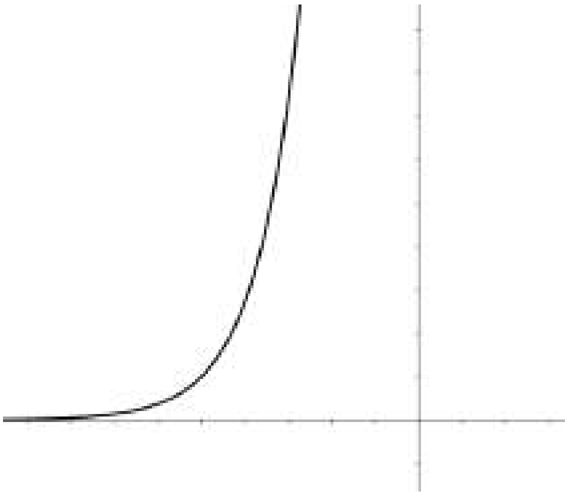
1. a) Introducimos en la pantalla que aparece después de pulsar la tecla la expresión:

-X ^2 + 12 * X - 36

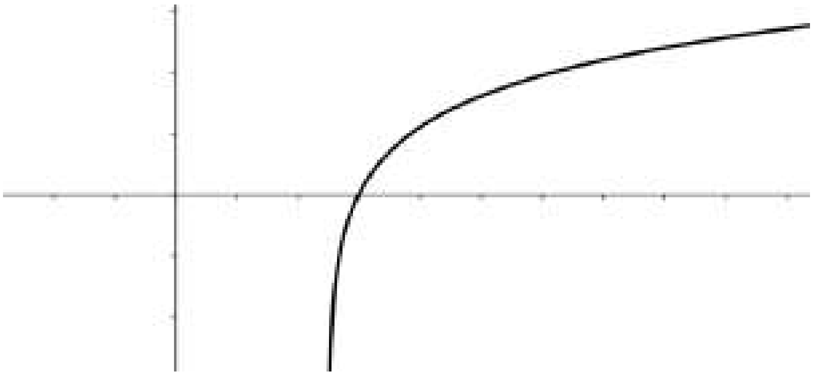
Pulsamos la tecla  para representar la función, y  modificamos las opciones de la pantalla con la tecla . Obtenemos la gráfica del dibujo.



b) Procediendo como en el apartado anterior y tecleando **e^(X+5)**, obtenemos:



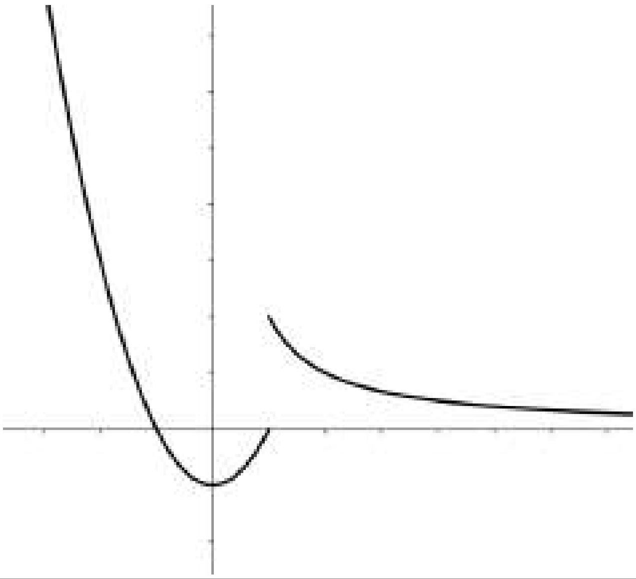
c) Procediendo como en los apartados anteriores y tecleando **ln(2*X-5)**, obtenemos:



2. a) Escribimos en **Y_1=** la expresión:

$$\mathbf{(X\text{^}2 - 1) * (X < 1) + (2/X) * (X \geq 1)}$$

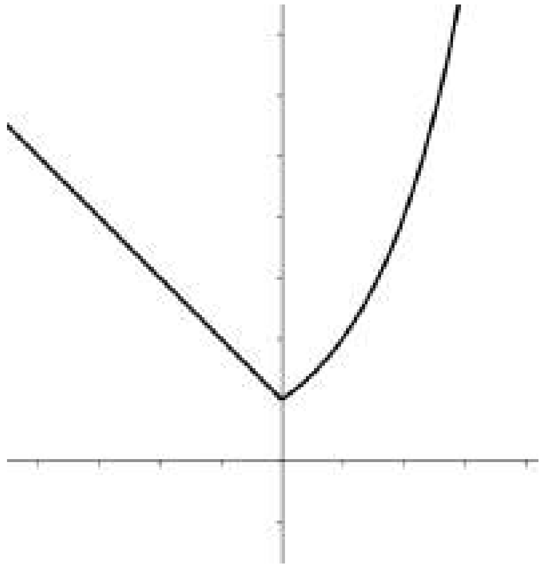
y obtenemos la gráfica:



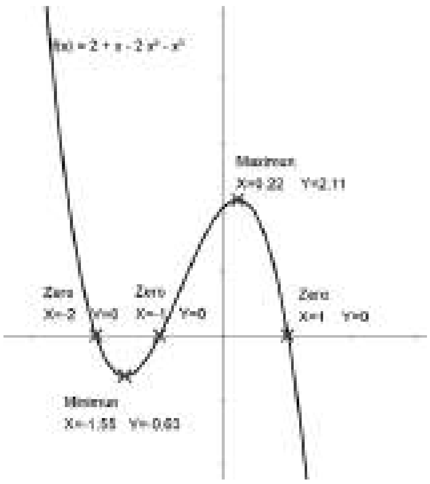
b) Escribimos en **Y_1=** la expresión:

$$(-X + 1) * (X \le 0) + (2\text{^}X) * (X > 0)$$

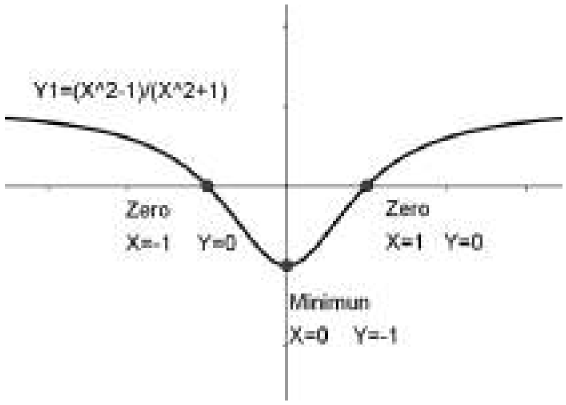
y obtenemos la gráfica:



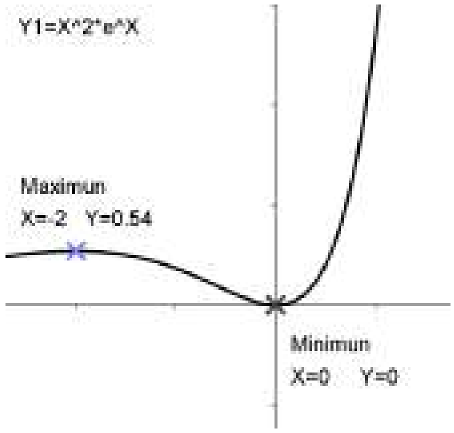
3. a) Representamos la función f (x) = $2 + x - 2x^2 - x^3$ y con las opciones del menú que ofrece la tecla  obtenemos, como vemos en la imagen, que la función tiene tres cortes con OX en los puntos (- 2, 0); (- 1, 0) y (1, 0); un máximo relativo en (0,22; 2,11) y un mínimo relativo en (-1,55; - 0,63).



b) Para la función g (x) = $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ procedemos como en el apartado anterior y obtenemos, como vemos en la imagen, que la función tiene dos cortes con OX en los puntos (- 1, 0) y (1, 0) y un mínimo relativo en (0, - 1).

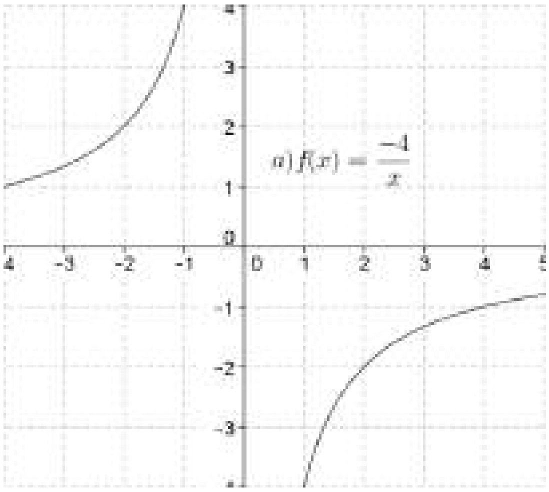


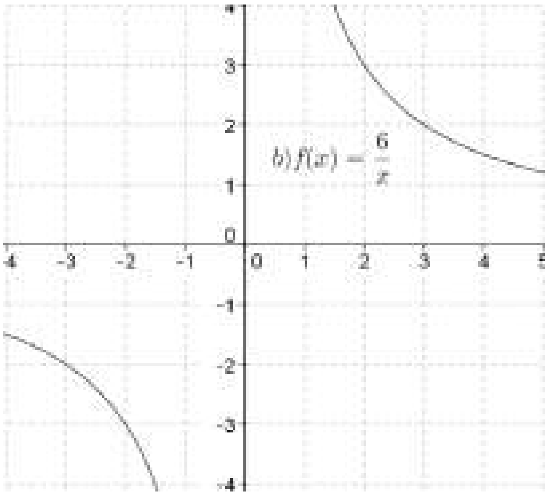
c) Para la función h (x) = $x^2 \cdot e^x$ procedemos como en los apartados anteriores y obtenemos, como vemos en la imagen, que la función tiene un corte con OX en el punto (0, 0); un máximo relativo en (-2; 0,54) y un mínimo relativo en (0, 0).

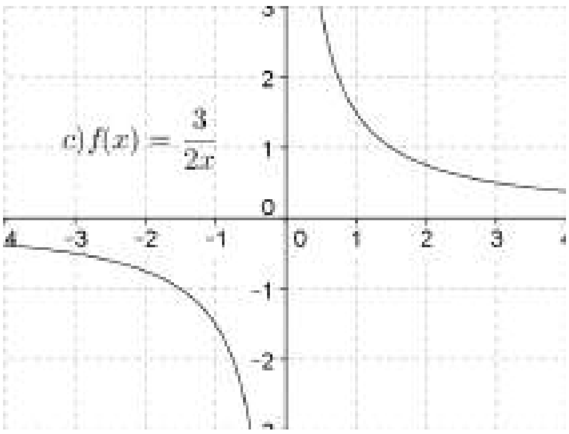


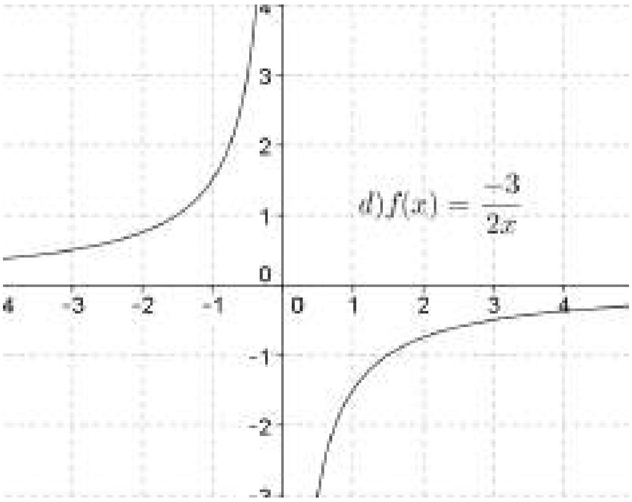
ACTIVIDADES-PÁG. 180

1. Las representaciones quedan:





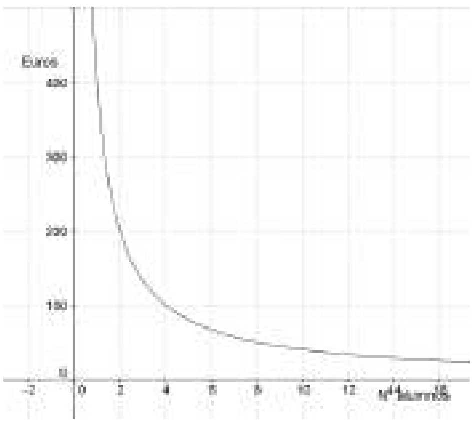




2. En cada uno de los casos son:

a) $y = -\dfrac{1}{2x}$ b) $y = \dfrac{5}{2x}$ c) $y = \dfrac{-5}{2x}$

3. La función es $f(x) = \dfrac{400}{x}$. Es una función de proporcionalidad inversa. La parte negativa de la gráfica no tiene sentido en el contexto del problema. La gráfica correspondiente viene dada por:

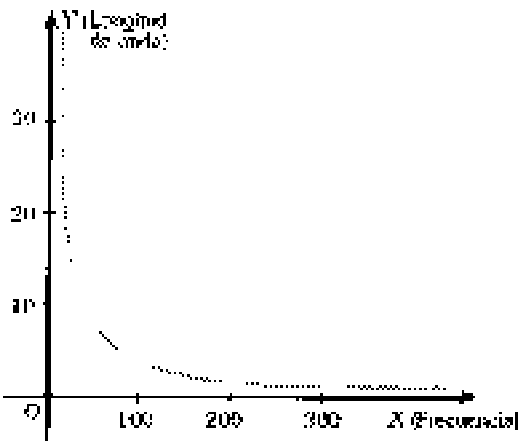


4. La solución de cada apartado es:

a) La tabla completa es:

Frecuencia (ciclos/segundo)	6	60	75	150	500	800	1200
Longitud de onda (metros)	50	5	4	2	0,6	0,375	0,25

b) La gráfica aparece en el dibujo:



c) La fórmula pedida es: $y = \dfrac{300}{x}$.

5. Llamando n al número de pintores y t al número de días, se obtiene la función $t = \dfrac{96}{n}$.

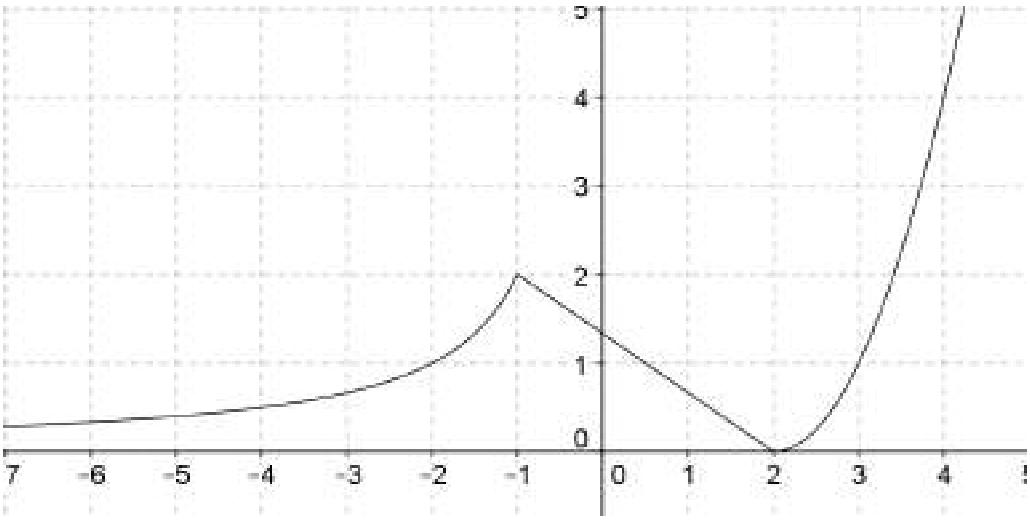
La tabla correspondiente viene dada por:

Nº pintores (n)	4	6	8	10	12
Tiempo (días)	24	16	12	9,6	8

6. Para $x \in \left(10^4\ ,\ 10^5\right)$

ACTIVIDADES-PÁG. 181

7. La gráfica es:

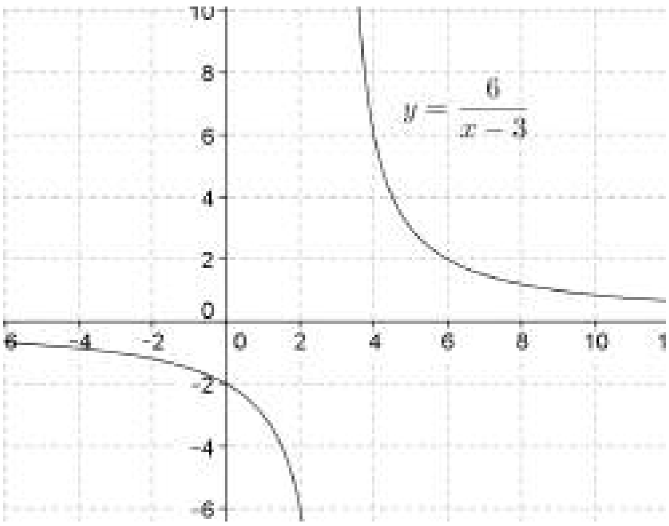


Dom f = R ; Im f = $[0, +\infty)$

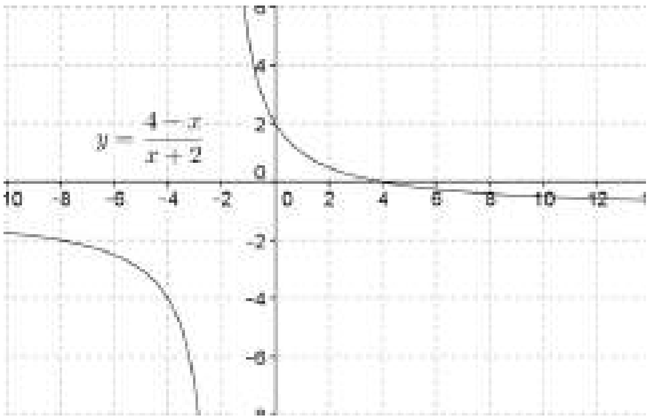
Creciente $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ y decreciente (-1, 2)

8. En cada uno de los casos:

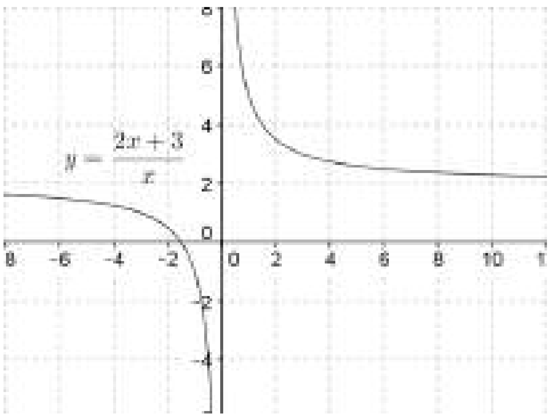
a) La función $y = \dfrac{6}{x-3}$ tiene como asíntotas las rectas de ecuaciones x = 3 e y = 0.



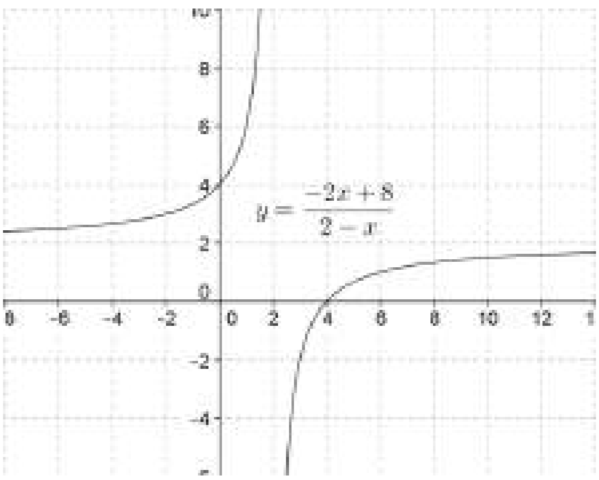
b) La función $y = \dfrac{4-x}{x+2}$ tiene como asíntotas las rectas de ecuaciones x = - 2 e y = -1.



c) La función $y = \dfrac{2x+3}{x}$ tiene como asíntotas las rectas de ecuaciones: x = 0 e y = 2.



d) La función $y = \dfrac{-2x+8}{2-x}$ tiene como asíntotas las rectas de ecuaciones x = 2 e y = 2.



9. Los dominios son:

a) Dom f = $[3, +\infty)$

b) Dom f = R

c) Dom f = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

d) Dom f = $[-2, 2]$

10. Las asociaciones son:

a) con g(x) $= -\sqrt{4+x}$

b) con h(x) = $\sqrt[3]{x+1}$

c) con f(x) = $\sqrt{4-x}$

11. Las respuestas son:

a) La gráfica de la función $y = \dfrac{3}{x} - 2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = \dfrac{3}{x}$ según el vector $\vec{v}\,(0, -2)$

b) La gráfica de la función $y = \dfrac{3}{x} + 1$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = \dfrac{3}{x}$ según el vector $\vec{v}\,(0, 1)$

c) La gráfica de la función $y = \dfrac{3}{x-3} + 2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = \dfrac{3}{x}$ según el vector $\vec{v}\,(3, 2)$

12. Las soluciones son:

a) La gráfica de la función $y = x^2 - 4$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = x^2$ según el vector $\vec{v}\,(0, -4)$

b) La gráfica de la función y = $(x-2)^2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = x^2$ según el vector $\vec{v}\,(2, 0)$

c) La gráfica de la función $y = (x - 1)^2 + 4$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = x^2$ según el vector $\vec{v}\,(1, 4)$

d) La gráfica de la función $y = x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 4$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = x^2$ según el vector $\vec{v}\,(-3,-4)$

13. Las respuestas son:

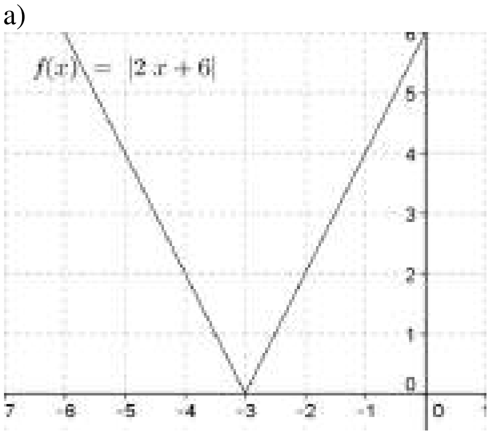
a) La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x} + 3$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ según el vector $\vec{v}\,(0,3)$

b) La gráfica de la función $g(x) = \sqrt{x+2}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ según el vector $\vec{v}\,(-2,0)$

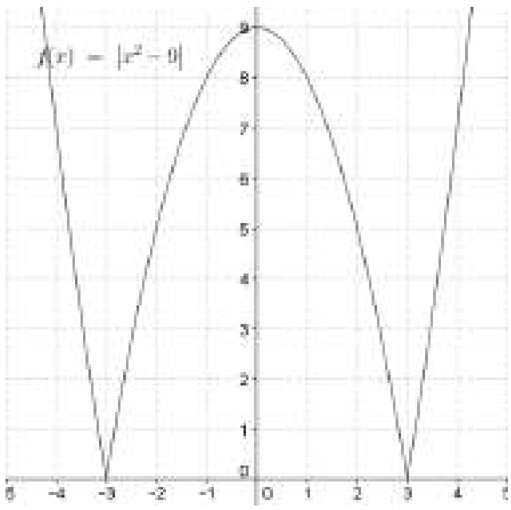
c) La gráfica de la función $h(x) = 4 - \sqrt{x-1}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ según el vector $\vec{v}\,(1,-4)$ y a esta aplicarle una simetría horizontal de eje OX.

14. Las gráficas son:

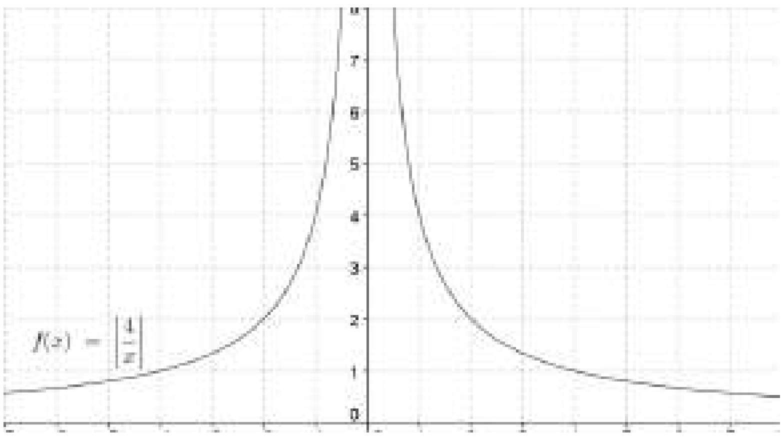
a)



b)

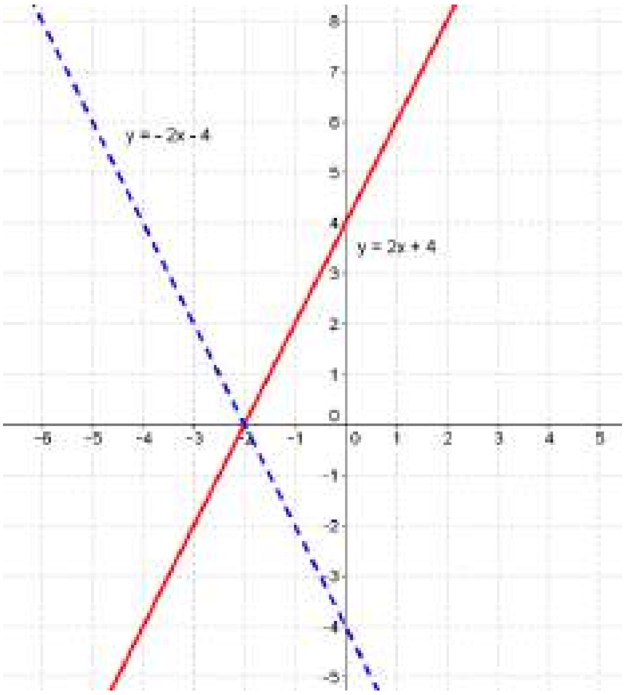


c)

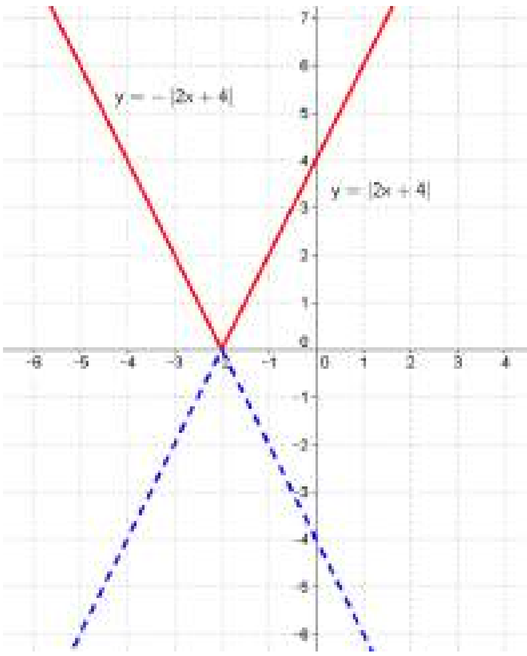


15. Las gráficas de las funciones se han dibujado en trazo continuo de color rojo y las gráficas de sus funciones opuestas están dibujadas en trazo discontinuo de color azul.

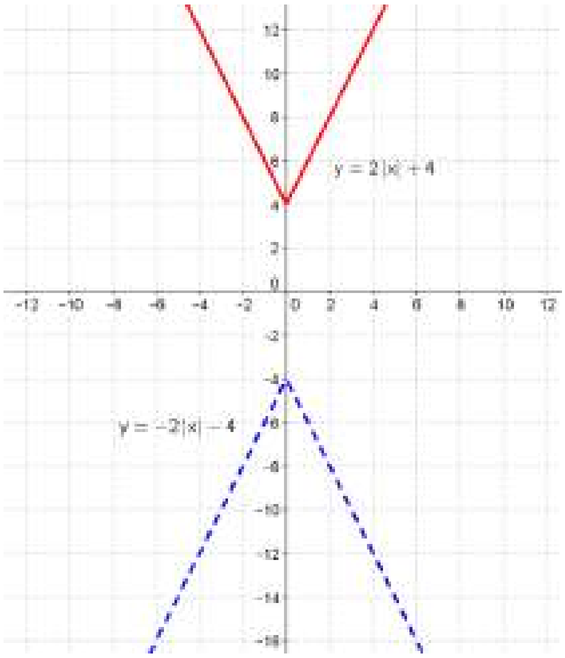
a)



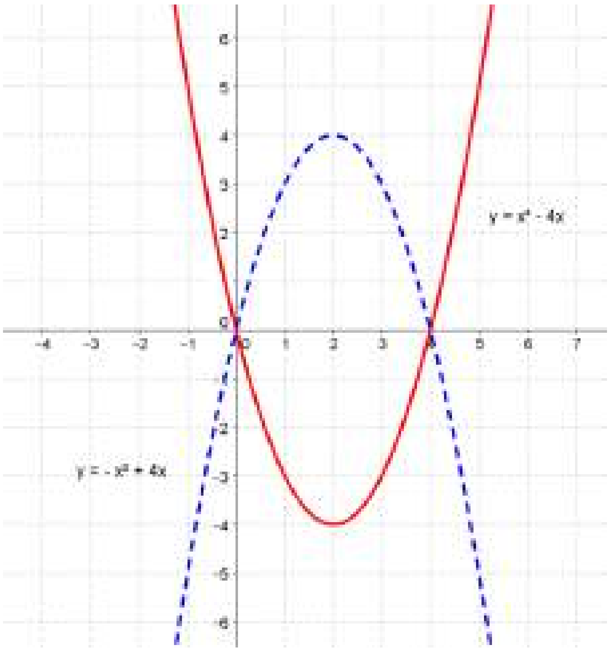
b)



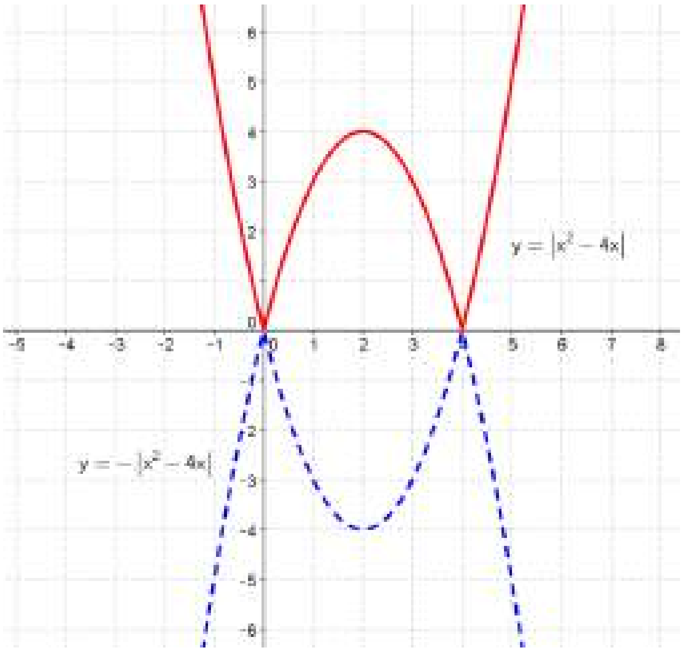
c)



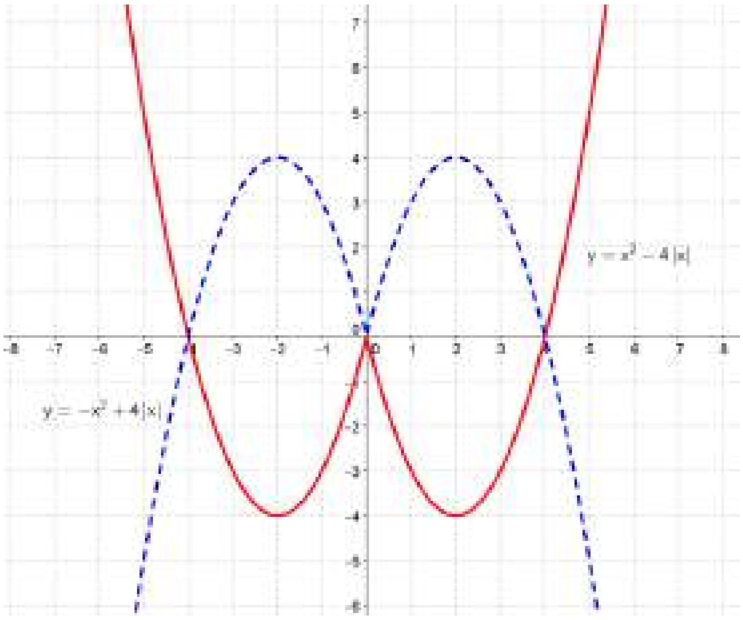
d)



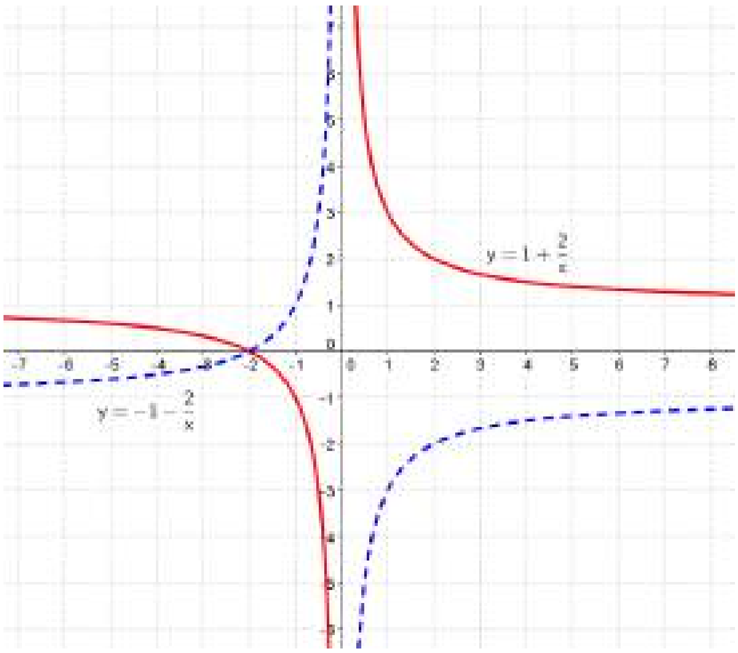
e)



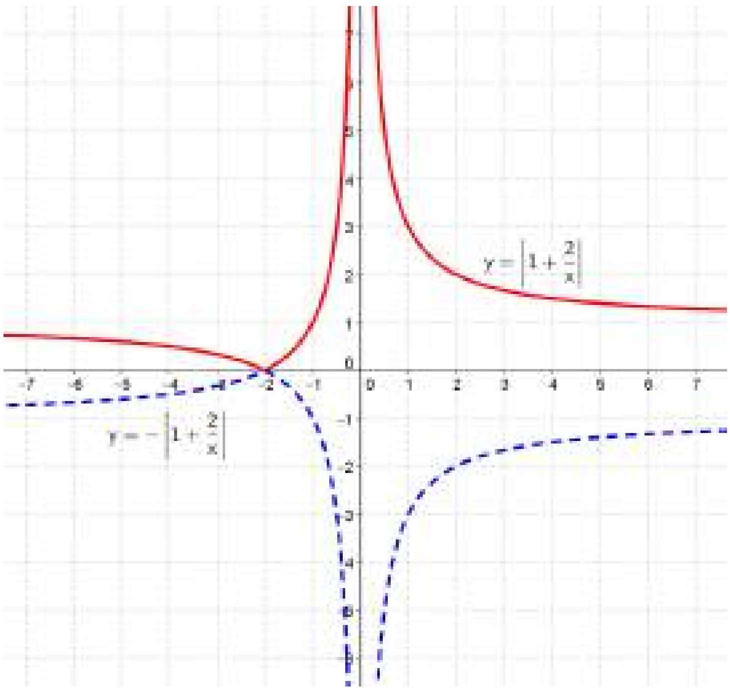
f)



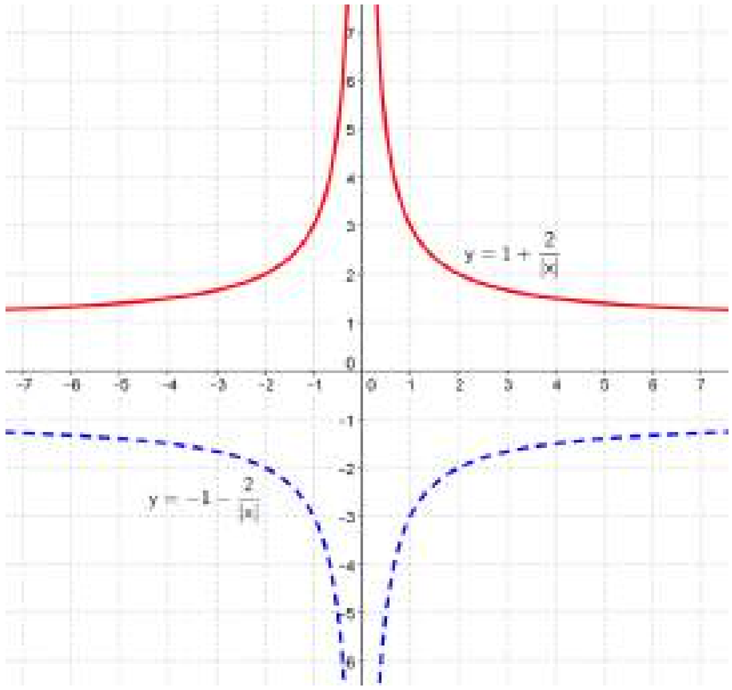
g)


$y = 1 + \frac{2}{x}$
$y = -1 - \frac{2}{x}$

h)


$y = \left|1 + \frac{2}{x}\right|$
$y = -\left|1 + \frac{2}{x}\right|$

i)



ACTIVIDADES-PÁG. 182

16. a) El tamaño inicial de la población es 40 000 animales.

b) En el año 3 había unos 170 000 animales, aproximadamente, y en el año 6 había unos 184000 animales, es decir ha ido aumentando a razón de unos 4670 animales por año.

c) Si se estabilizaría en 200 000 animales.

17. Las respuestas son:

a) La gráfica de la función $y = x^4 - 2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $f(x) = x^4$ según el vector $\vec{v}\,(0,-2)$.

b) La gráfica de la función $y = \sqrt{x-9}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función f(x) = $\sqrt{x}$ según el vector $\vec{v}\,(9,0)$.

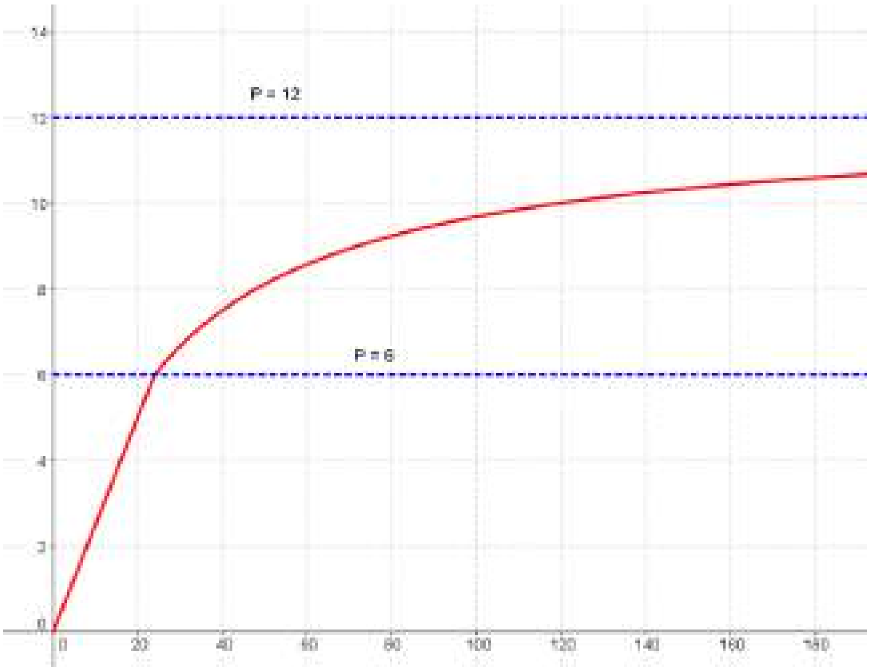
c) La gráfica de la función $y = -x^2 + 8x - 12 = 4 - (x-4)^2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $f(x) = x^2$ según el vector $\vec{v}\,(4,-4)$ y a esta función aplicarle una simetría de eje OX.

d) La gráfica de la función $y = (x-2)^3$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = x^3$ según el vector $\vec{v}\,(2,0)$.

e) La gráfica de la función $y = \dfrac{1}{(x+1)^4}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{x^4}$ según el vector $\vec{v}\,(-1,0)$.

e) La gráfica de la función $y = \dfrac{1}{x+2} - 3$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{x}$ según el vector $\vec{v}\,(-2,-3)$.

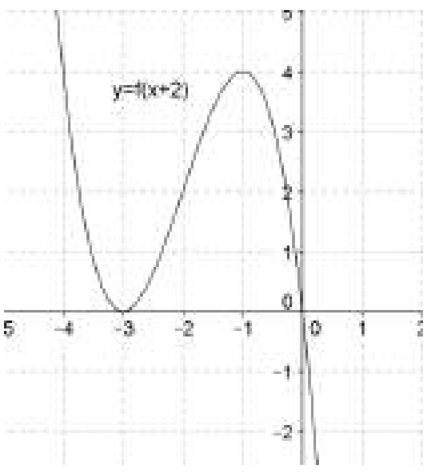
18. La gráfica de la función aparece en el dibujo:

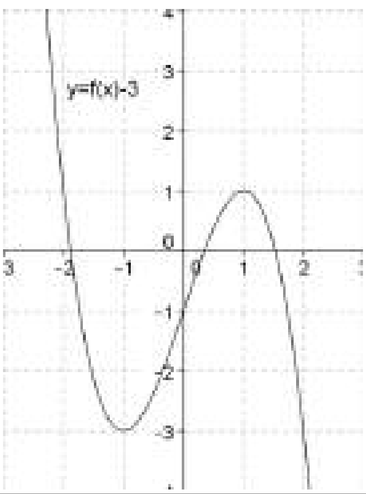


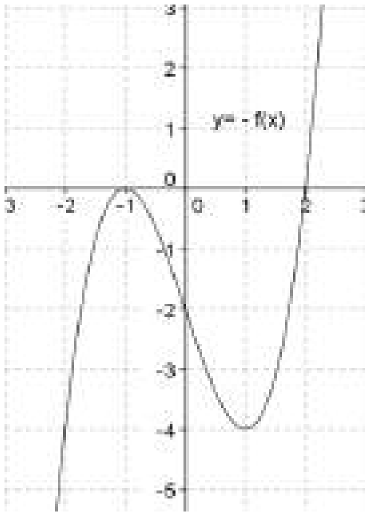
No aprobará el examen si dedica menos de 24 horas.

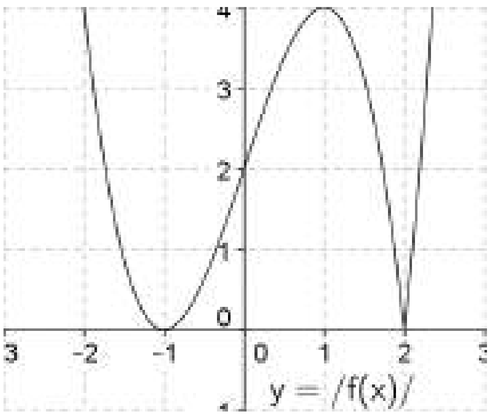
La nota máxima que puede alcanzar en este examen es de 12 puntos.

19. Las gráficas quedan:



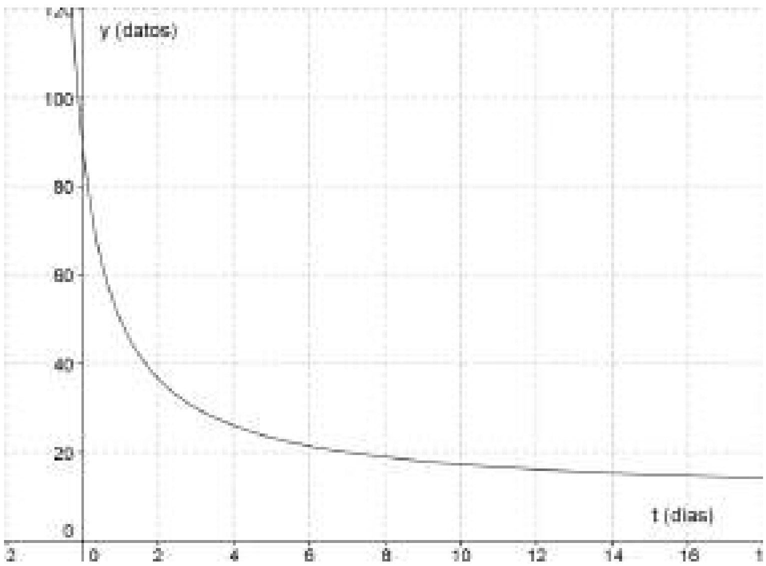






20. a) La tabla y la gráfica quedan:

t	y
0	90
1	50
3	30
4	26
9	18
10	17,27
100	10,8
1000	10,07



Esta función presenta asíntota vertical en la recta t = - 1 y asíntota horizontal y = 10. La parte negativa no tiene sentido en el contexto del problema.

b) Al cabo de 10 días recuerda $\dfrac{10 \cdot 10 + 90}{10 + 1} = 17{,}27\ datos.$

Al cabo de 18 días recuerda $\dfrac{10 \cdot 18 + 90}{18 + 1} = 14{,}21\ datos.$

c) El mayor número de datos que retiene es de 90 y el menor es 10 datos.

ACTIVIDADES-PÁG. 183

a) Las funciones $y = \frac{2}{x^n}$ con n par son: $y = \frac{2}{x^2}$, $y = \frac{2}{x^4}$, $y = \frac{2}{x^6}$ …

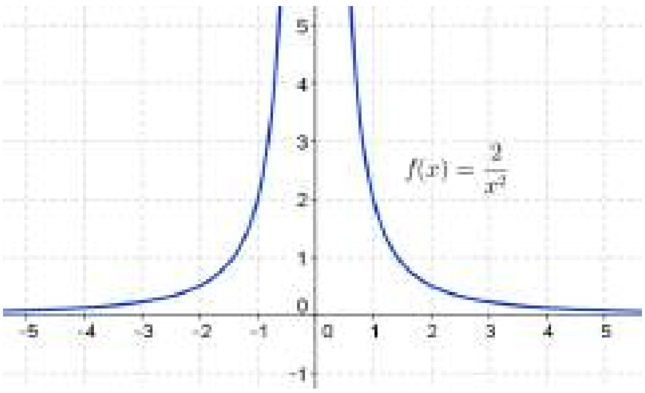
Sus principales características son:

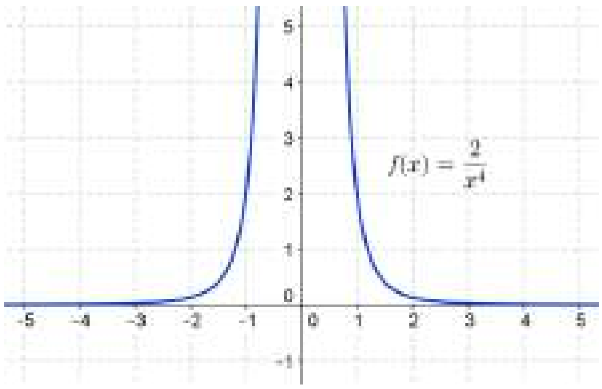
- Dominio: R – {0}.
- Recorrido: $(0, +\infty)$
- Simetría respecto eje OY, ya que $f(-x) = \frac{2}{(-x)^n} = \frac{2}{x^n} = f(x)$
- Asíntotas: x = 0 e y = 0, al cumplirse:

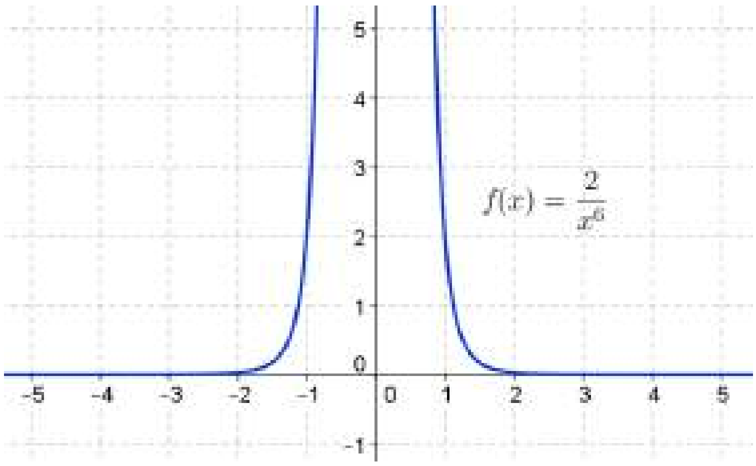
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^n} = 0$$

- Creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$. La primera derivada es $y' = \frac{-2n}{x^{n+1}}$
- Convexa (cóncava hacia las Y positivas) en R – {0}. La segunda derivada es $y'' = \frac{2n(n+1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:







Las funciones $y = \frac{2}{x^n}$ con n impar son: $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{2}{x^3}$, $y = \frac{2}{x^5}$ …

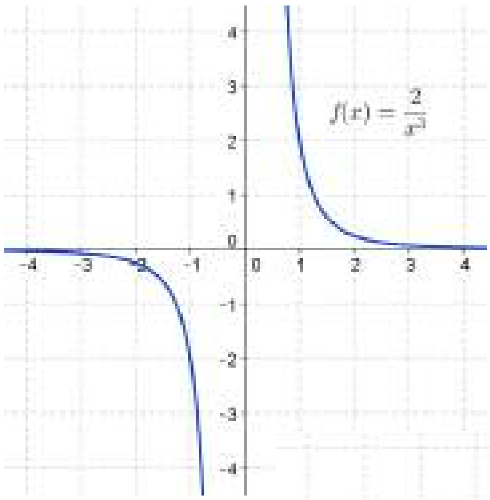
Sus principales características son:

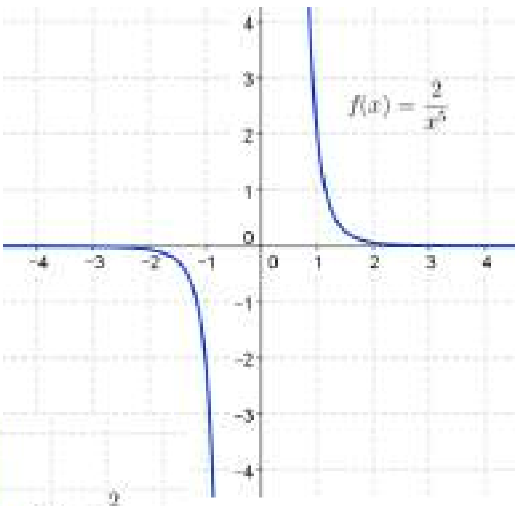
- Dominio: R – {0}.
- Recorrido: R – {0}
- Simetría respecto del origen de coordenadas, ya que $f\,(-\,x) = \frac{2}{(-\,x)^n} = -\,\frac{2}{x^n} = -\,f\,(x)$
- Asíntotas: x = 0 e y = 0, al cumplirse:

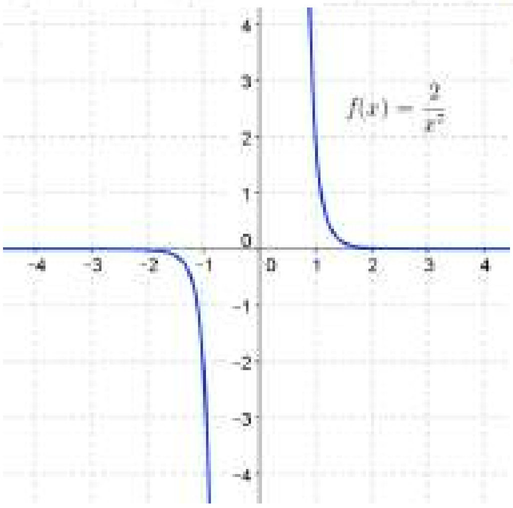
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2}{x^n} = -\,\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x^n} = +\,\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^n} = 0$$

- Decreciente en R – {0}. La primera derivada es $y' = \frac{-\,2n}{x^{n+1}}$
- Cóncava (cóncava hacia las Y negativas) en $(-\,\infty,\,0)$ Convexa (cóncava hacia las Y positivas) en $(0,\,+\,\infty)$. La segunda derivada es $y'' = \frac{2n(n+1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:







b) Estudiamos las principales características de las funciones $y = \dfrac{k}{x^n}$, siendo k un valor cualquiera.

b₁) En el caso k = 0, la función $y = \dfrac{0}{x^n} = 0$ es una función constante y no comparte las características de la familia de funciones.

b₂) En el caso k > 0 las características de las funciones coinciden con las descritas en el apartado anterior.

b₃) En el caso k < 0, por ejemplo k = - 3, tenemos dos opciones distintas:

(I) Las funciones $y = \dfrac{-3}{x^n}$ con n par son: $y = \dfrac{-3}{x^2}$, $y = \dfrac{-3}{x^4}$, $y = \dfrac{-3}{x^6}$ …

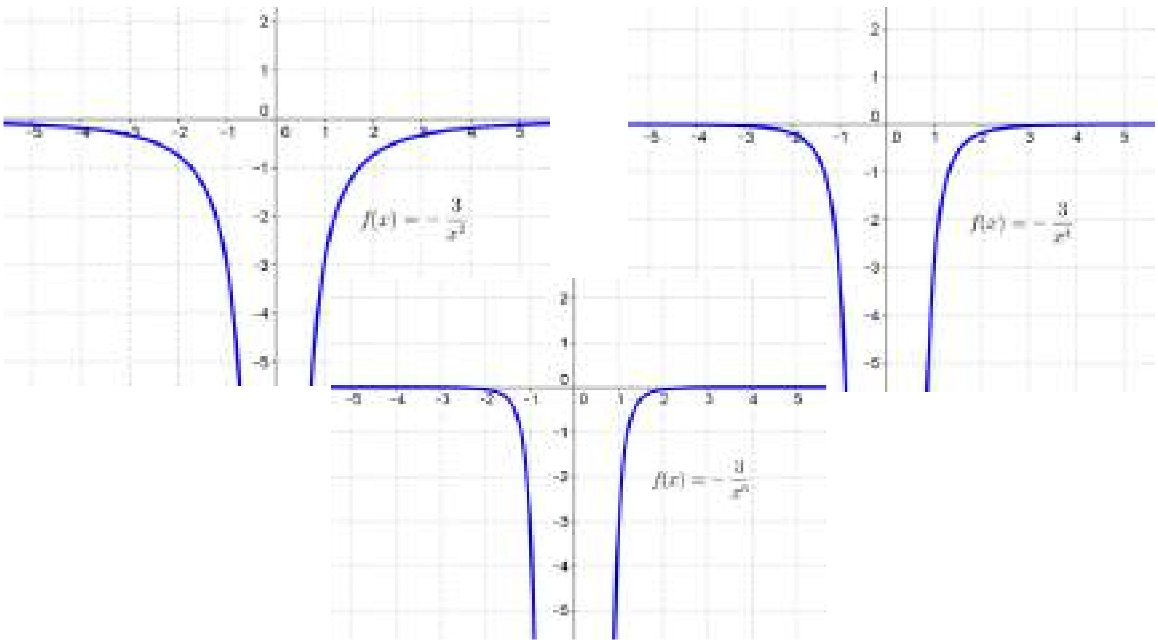
Sus principales características son:

- Dominio: R – {0}.
- Recorrido: $(-\infty, 0)$
- Simetría respecto eje OY, ya que $f(-x) = \dfrac{-3}{(-x)^n} = \dfrac{-3}{x^n} = f(x)$
- Asíntotas: x = 0 e y = 0, al cumplirse:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-3}{x^n} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{-3}{x^n} = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{-3}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{-3}{x^n} = 0$$

- Decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. La primera derivada es $y' = \dfrac{3n}{x^{n+1}}$
- Cóncava (cóncava hacia las Y negativas) en R – {0}. La segunda derivada es $y'' = -\dfrac{3n(n+1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:



(II) Las funciones $y = \frac{-3}{x^n}$ con n impar son: $y = \frac{-3}{x}$, $y = \frac{-3}{x^3}$, $y = \frac{-3}{x^5}\ldots$

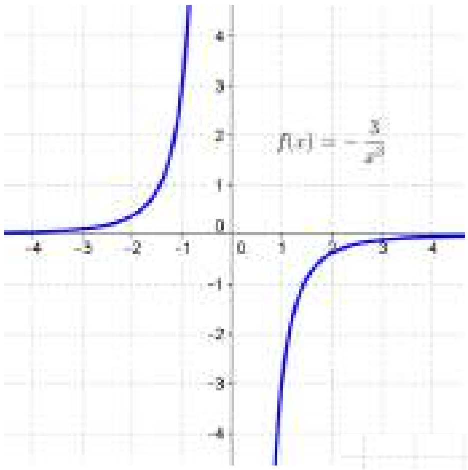
Sus principales características son:

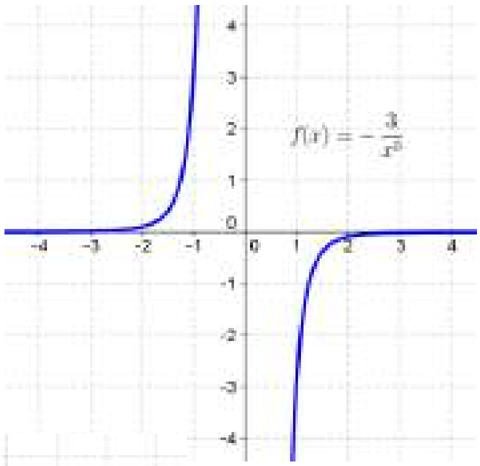
- Dominio: R – {0}.
- Recorrido: R – {0}
- Simetría respecto del origen de coordenadas, ya que $f\,(-x) = \frac{-3}{(-x)^n} = \frac{3}{x^n} = -f\,(x)$
- Asíntotas: x = 0 e y = 0, al cumplirse:

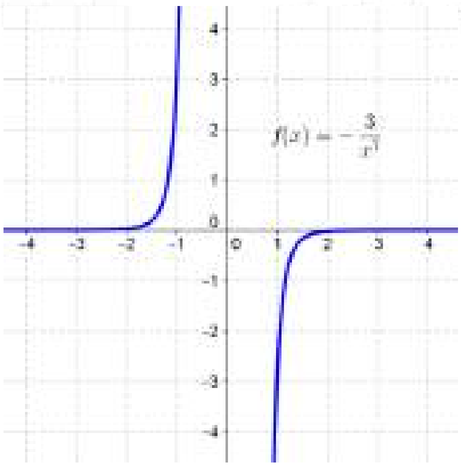
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-3}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{-3}{x^n} = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{-3}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{-3}{x^n} = 0$$

- Creciente en R – {0}. La primera derivada es $y´ = \frac{3n}{x^{n+1}}$
- Convexa (cóncava hacia las Y positivas) en $(-\infty, 0)$. Cóncava (cóncava hacia las Y negativas) en $(0, +\infty)$. La segunda derivada es $y´´ = \frac{-3n(n+1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:







c) Las respuestas a los aparatados aparecen a continuación:

c1) La derivada de la función $y = \dfrac{k}{x^n}$ es $y' = -\dfrac{kn}{x^{n+1}}$. Sea $P\left(a, \dfrac{k}{a^n}\right)$ un punto de la función.

La ecuación de la recta tangente a la curva en P es:

$$y - \frac{k}{a^n} = -\frac{kn}{a^{n+1}}(x-a) \quad \Rightarrow \quad knx + a^{n+1}y = k(n+1)a$$

Los puntos de corte A (con OX) y B (con OY) con los ejes coordenados son:

$$A: \begin{cases} knx + a^{n+1}y = k(n+1)a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{n+1}{n}a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{n+1}{n}a, 0\right)$$

$$B: \begin{cases} x = 0 \\ knx + a^{n+1}y = k(n+1)a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{k(n+1)}{a^n} \end{cases} \Rightarrow B = \left(0, \frac{k(n+1)}{a^n}\right)$$

Sea M el punto medio del segmento de extremos A y B; sus coordenadas son:

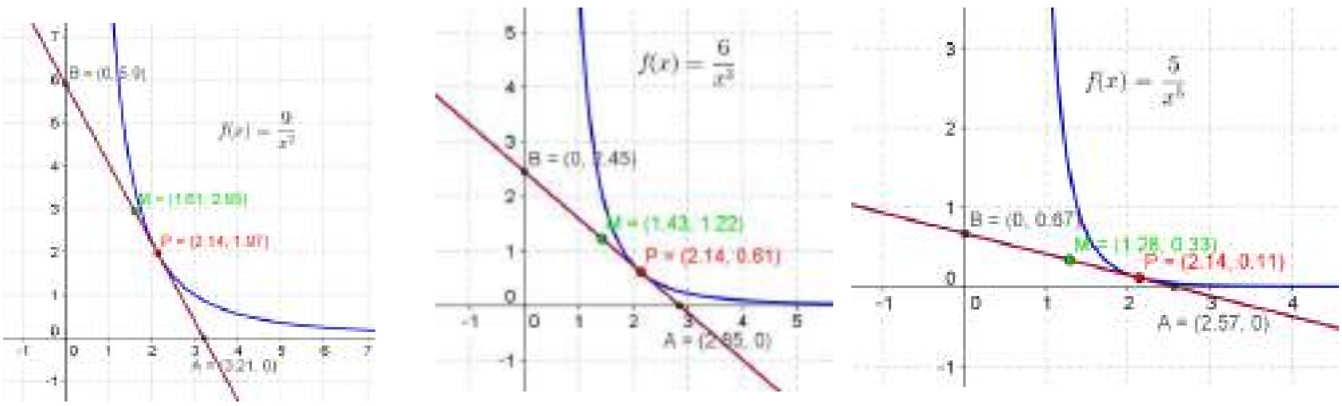
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{n+1}{n}a + 0}{2} = \frac{n+1}{2n}a \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + \frac{k(n+1)}{a^n}}{2} = \frac{k(n+1)}{2a^n}$$

Para que el punto M coincida con el punto P debe cumplirse:

$$x_M = x_P \Rightarrow \frac{n+1}{2n}a = a \Rightarrow \frac{n+1}{2n} = 1 \Rightarrow n+1 = 2n \Rightarrow n = 1$$

$$y_M = y_P \Rightarrow \frac{k(n+1)}{2a^n} = \frac{k}{a^n} \Rightarrow \frac{n+1}{2} = 1 \Rightarrow n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$$

Como n debe ser mayor o igual que 2, el punto medio, M (en color verde), del segmento de extremos A y B no es el punto P (en color rojo). Esto puede observarse en los dibujos que siguen.



c_2) El área del triángulo OAB es:

$$Área = \frac{OA \cdot OB}{2} \quad \Rightarrow \quad Área = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\, a\right) \cdot \frac{k\ (n+1)}{a^n} \quad \Rightarrow \quad Área = \frac{k\ (n+1)^2}{2na^{n-1}}$$

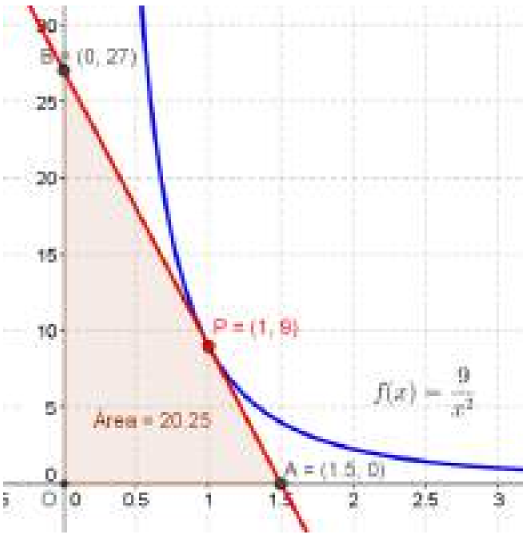
Observamos que el área del triángulo depende de los parámetros k y n que definen la función y de la variable a que nos da la posición del punto P sobre la gráfica de la función.

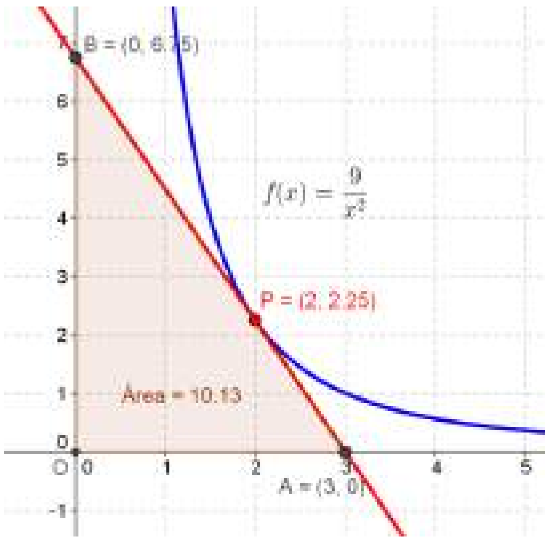
En las imágenes pueden verse las áreas de los triángulos OAB para la función $f\ (x) = \frac{9}{x^2}$ en los puntos de abscisas a = 1, a = 2 y a = 3.

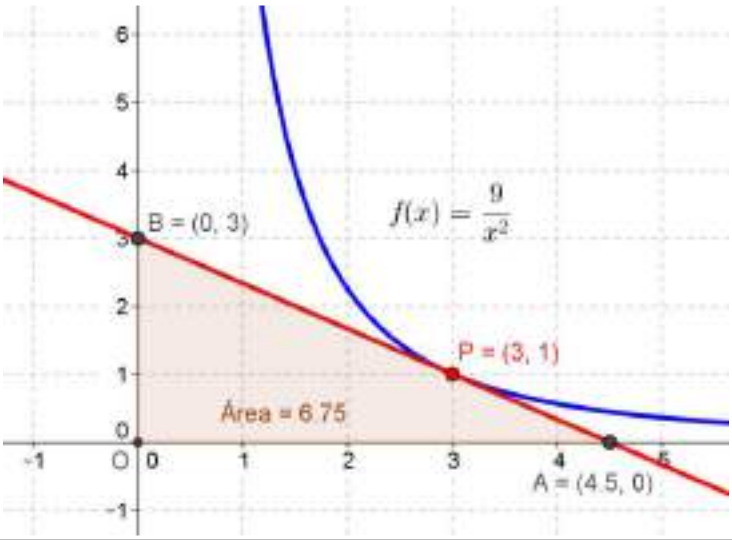
Si k = 9, n = 2 y a = 1, obtenemos: $Área = \frac{9\ (2+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 1^{2-1}} = \frac{81}{4} = 20{,}25\ u^2$.

Si k = 9, n = 2 y a = 2, obtenemos: $Área = \frac{9\ (2+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 2^{2-1}} = \frac{81}{8} = 10{,}125\ u^2$.

Si k = 9, n = 2 y a = 3, obtenemos: $Área = \frac{9\ (2+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 3^{2-1}} = \frac{81}{12} = 6{,}75\ u^2$.







d) Las respuestas a los apartados aparecen a continuación:

d₁) La derivada de la función $y = \dfrac{k}{nx^n}$ es $y\,' = -\dfrac{k}{x^{n+1}}$. Sea $P\left(a,\ \dfrac{k}{na^n}\right)$ un punto de la función.

La ecuación de la recta tangente a la curva en P es:

$$y - \frac{k}{na^n} = -\frac{k}{a^{n+1}}(x-a) \quad \Rightarrow \quad knx + na^{n+1}y = k(n+1)a$$

Los puntos de corte A (con OX) y B (con OY) con los ejes coordenados son:

$$A:\begin{cases} knx + na^{n+1}y = k(n+1)a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{n+1}{n}a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{n+1}{n}a,\ 0\right)$$

$$B:\begin{cases} x = 0 \\ knx + na^{n+1}y = k(n+1)a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{k(n+1)}{na^n} \end{cases} \Rightarrow B = \left(0,\ \frac{k(n+1)}{na^n}\right)$$

Sea M el punto medio del segmento de extremos A y B; sus coordenadas son:

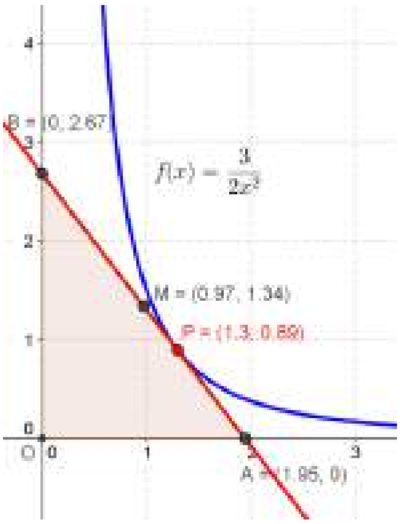
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{n+1}{n}a + 0}{2} = \frac{n+1}{2n}a \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + \frac{k(n+1)}{na^n}}{2} = \frac{k(n+1)}{2na^n}$$

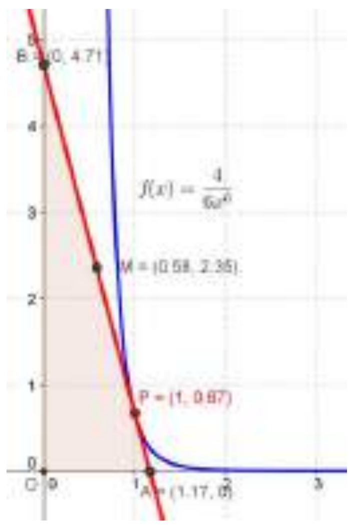
Para que el punto M coincida con el punto P debe cumplirse:

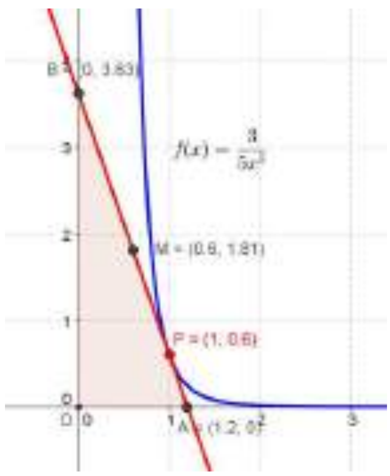
$$x_M = x_P \Rightarrow \frac{n+1}{2n}a = a \Rightarrow \frac{n+1}{2n} = 1 \Rightarrow n+1 = 2n \Rightarrow n = 1$$

$$y_M = y_P \Rightarrow \frac{k(n+1)}{2na^n} = \frac{k}{na^n} \Rightarrow \frac{n+1}{2} = 1 \Rightarrow n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$$

Como n debe ser mayor o igual que 2, el punto medio, M, del segmento de extremos A y B nunca coincide con el punto P. Esto puede observarse en los dibujos que siguen.







d_2) El área del triángulo OAB es:

$$\acute{A}rea = \frac{OA \cdot OB}{2} \quad \Rightarrow \quad \acute{A}rea = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \, a \right) \cdot \frac{k \, (n+1)}{na^n} \quad \Rightarrow \quad \acute{A}rea = \frac{k \, (n+1)^2}{2n^2 a^{n-1}}$$

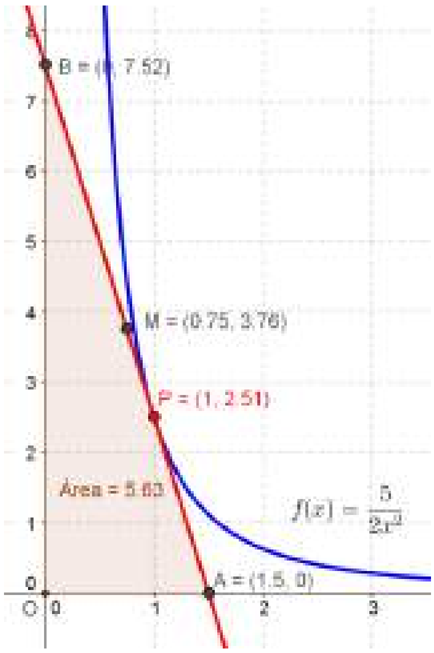
Observamos que el área del triángulo depende de los parámetros k y n que definen la función y de la variable a que nos da la posición del punto P sobre la gráfica de la función.

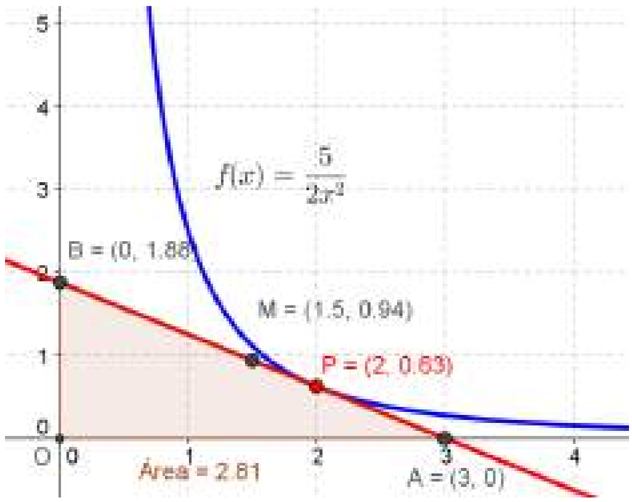
En las imágenes pueden verse las áreas de los triángulos OAB para la función $f\,(x) = \dfrac{5}{2x^2}$ en los puntos de abscisas a = 1, a = 2 y a = 3.

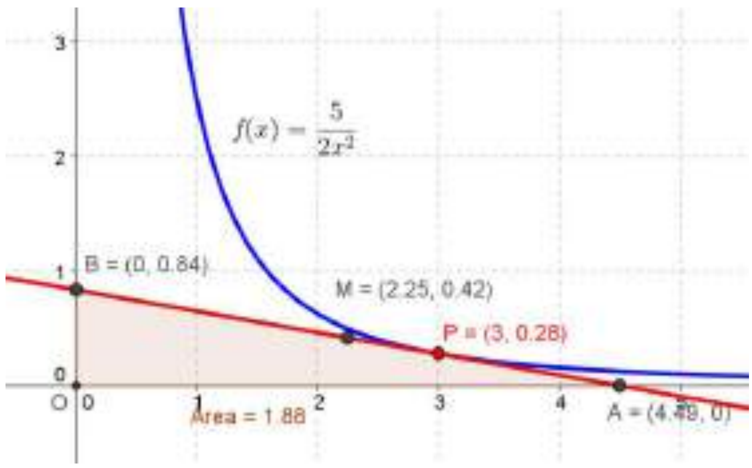
Si k = 5, n = 2 y a = 1, obtenemos: $\acute{A}rea = \dfrac{5\,(2+1)^2}{2 \cdot 2^2 \cdot 1^{2-1}} = \dfrac{45}{8} = 5{,}625\ u^2$.

Si k = 5, n = 2 y a = 2, obtenemos: $\acute{A}rea = \dfrac{5\,(2+1)^2}{2 \cdot 2^2 \cdot 2^{2-1}} = \dfrac{45}{16} = 2{,}81\ u^2$.

Si k = 5, n = 2 y a = 3, obtenemos: $\acute{A}rea = \dfrac{5\,(2+1)^2}{2 \cdot 2^2 \cdot 3^{2-1}} = \dfrac{45}{24} = 1{,}875\ u^2$.







UNIDAD 9: Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas

ACTIVIDADES-PÁG. 184

1. a) $x = -5$ b) $x = 2{,}81$ c) $x = 1$ d) $x = 1/3$

2. $C = 3{,}5$; $a = 2$

3. a) $y = 2^{x-2}$ con (II) c) $y = \log_2(x+2)$ con (III)

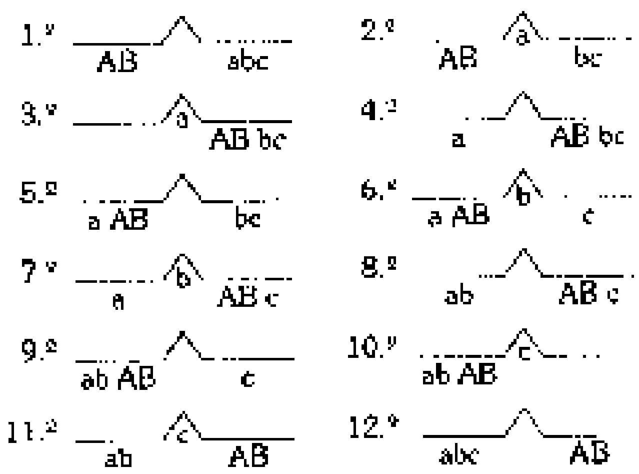
b) $y = 2^x - 2$ con (IV) d) $y = \log_2(x) + 2$ con (I)

a) Dom f = R ; Im f = R ; Creciente en R
b) Dom f = R ; Im f = $(-2, +\infty)$; Creciente en R
c) Dom f = $(-2, +\infty)$; Im f = R ; Creciente en R
d) Dom f = $(0, +\infty)$; Im f = R ; Creciente en R

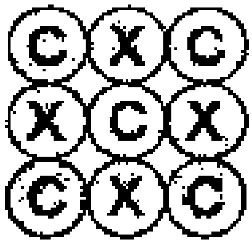
4. No podemos. Para ello la ventana debería estar a $h = 10 \cdot \text{sen } 70^\circ = 9{,}40$ m del suelo como máximo.

ACTIVIDADES-PÁG. 201

1. Los pasos a seguir son los siguientes, llamando AB a los montañeros que suben y abc a los que bajan.



2. Señalamos las monedas con C y X.



Consideramos el caso que sólo tengamos 9 monedas. En este caso hay 5 caras, C, y 4 cruces, X.

Si la abeja parte de una moneda marcada con C, puede hacer el recorrido: CXCXCXCXC

Pero si parte de una moneda marcada con X, no puede: XCXCXC…falta una C.

En nuestro caso hay 13 caras C y 13 cruces X. Si la abeja parte de una moneda marcada con C, es posible el recorrido, pero si la abeja parte de una moneda marcada con X no es posible.

3. La solución queda:

Sea el número $\overline{xyz}$ el número inicial. Se cumplirá:

$$(100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 100(x - z) + (z - x)$$

Si $x > z$, entonces $z - x < 0$ y hay que escribir la expresión anterior de la forma:

$$(x - z - 1) \cdot 100 + 100 + (z - x) = (x - z - 1) \cdot 100 + 9 \cdot 10 + (10 + z - x)$$

La primera cifra de este número es: $x - z - 1$.

La segunda cifra de este número es: 9.

La tercera cifra de este número es: $10 + z - x$.

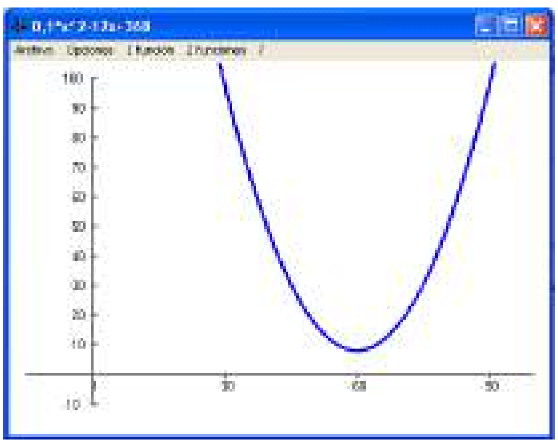
Observamos que $(x - z + 1) + (10 + z - x) = 0$, es decir, la primera cifra más la tercera siempre da 9 y la segunda también da 9. Luego siempre se cumple el resultado del problema.

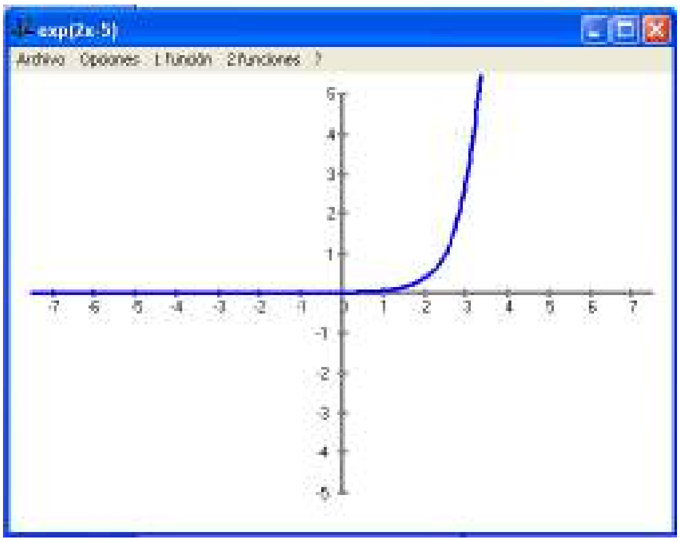
ACTIVIDADES-PÁG. 203

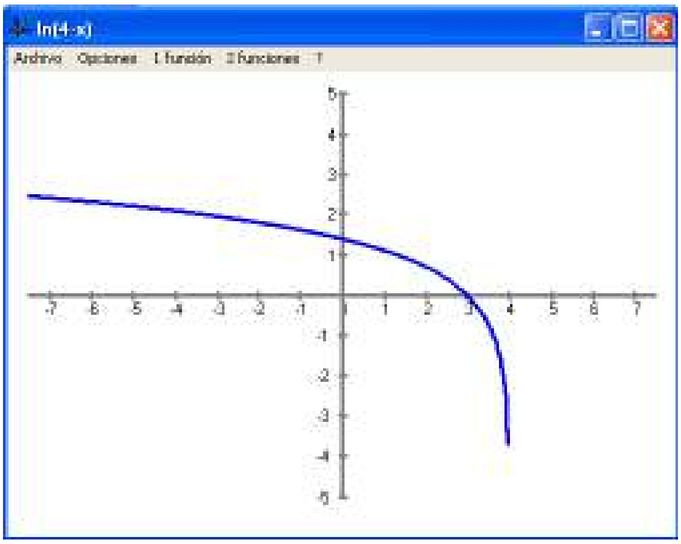
1. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = 0{,}1x^2 - 12\,x + 368$ b) $g(x) = e^{2x - 5}$ c) $h(x) = \ln\,(4 - x)$

En las siguientes imágenes podemos ver las gráficas de estas funciones:



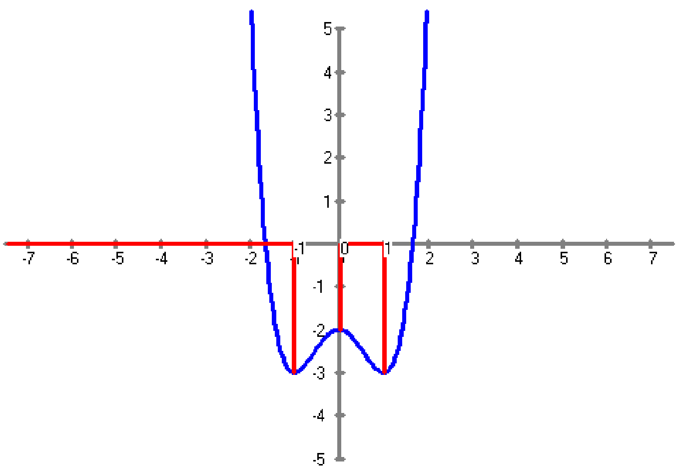




2. Estudia la monotonía y los extremos de las funciones y halla los puntos de corte de f(x) y g(x):

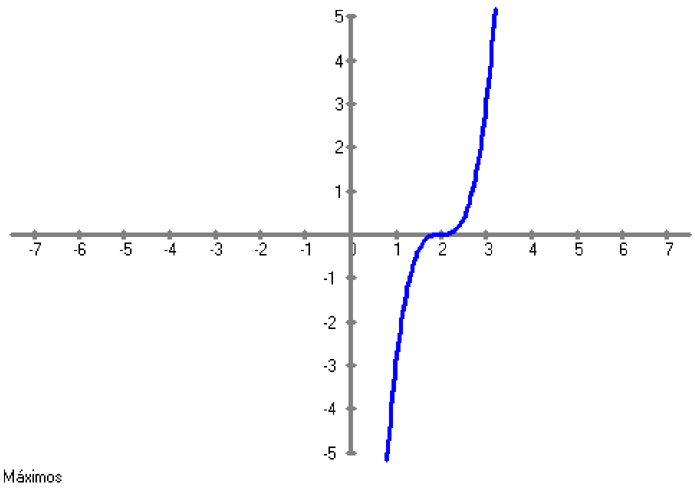
a) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$ b) $g(x) = 3(x - 2)^3$ c) $h(x) = x \cdot e^x$

a) La función $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$ es creciente en $(-1, 0) \cup (1,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,-1) \cup (0,1)$. Tiene un máximo relativo en (0, -2) y dos mínimos relativos en los puntos (-1, -3) y (1, -3) como podemos ver en su gráfica.

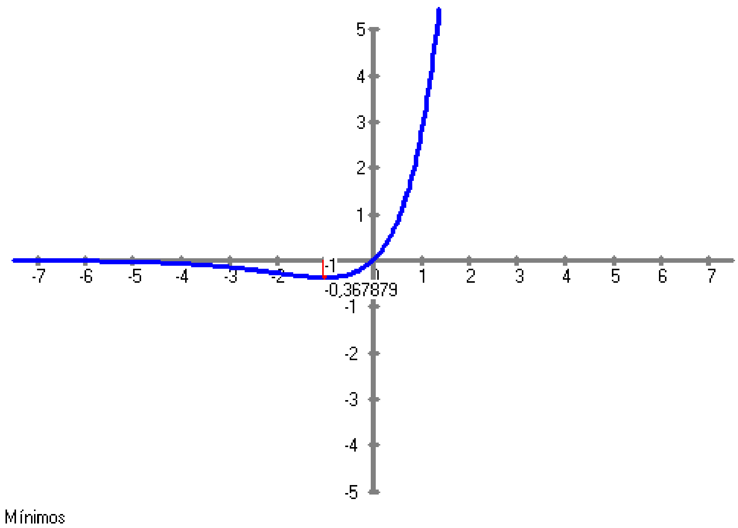


Intervalos de decrecimiento

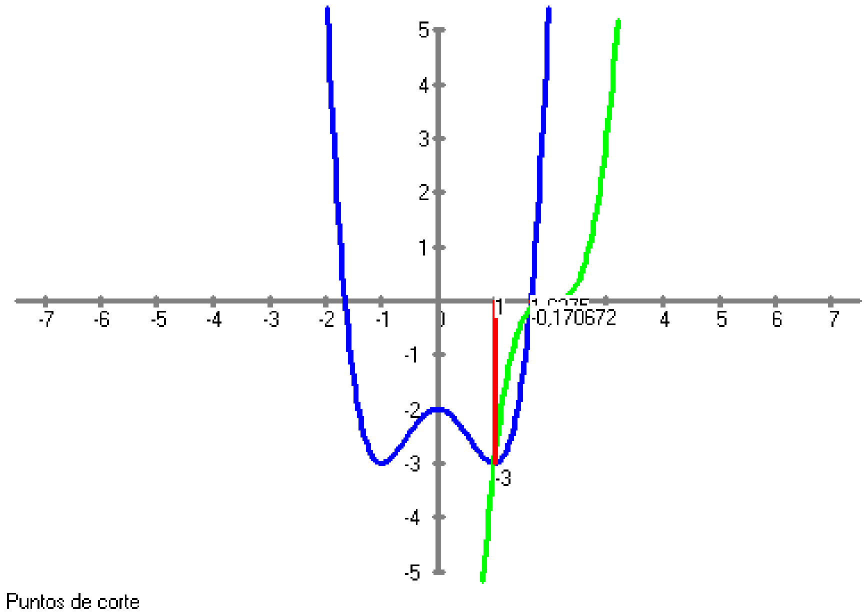
b) La función $g(x) = 3\,(x - 2)^3$ es creciente en R. Carece de extremos relativos como podemos ver en su gráfica.



c) La función $f(x) = x \cdot e^x$ es creciente en $(-1,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,-1)$. Tiene un mínimo relativo en el punto (- 1, - 0,37) y carece de máximos relativos, como podemos ver en su gráfica.



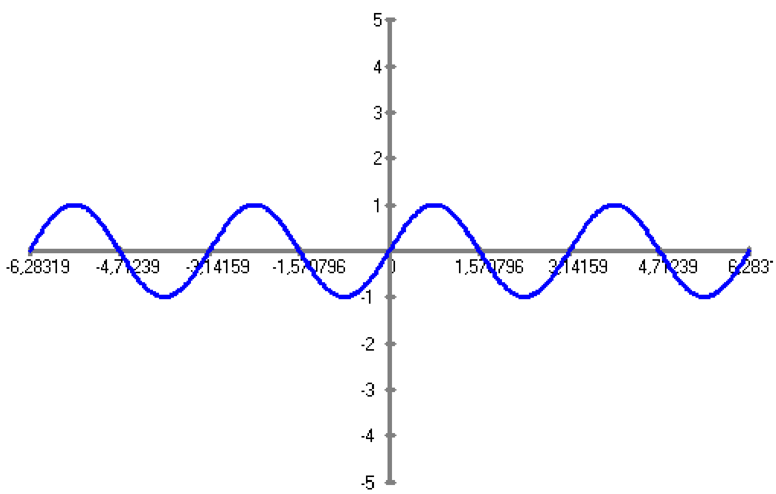
Los puntos de corte de las funciones f(x) y g(x) son (1,-3) y (1,64; -0,18) como podemos ver en la imagen:



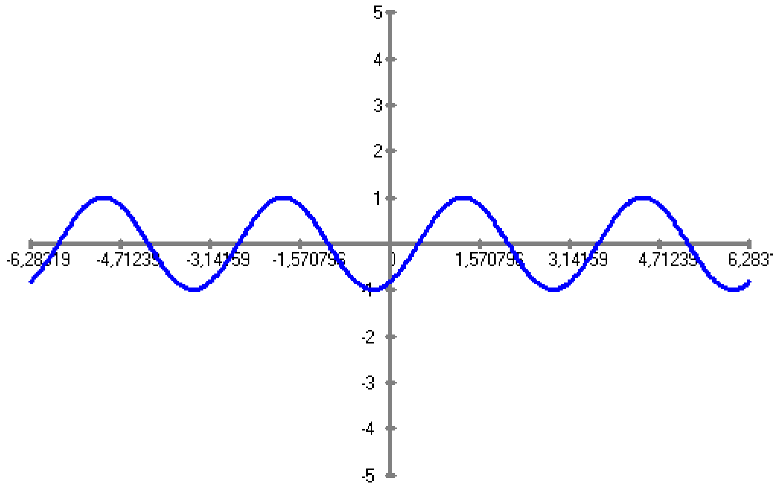
3. Representa las siguientes funciones e indica las transformaciones geométricas que permiten dibujar las gráficas de las funciones g(x) y h(x) a partir de la gráfica de f(x).

a) f (x) = sen 2x b) g (x) = sen (2x -1) c) h (x) = 4 · sen 2x

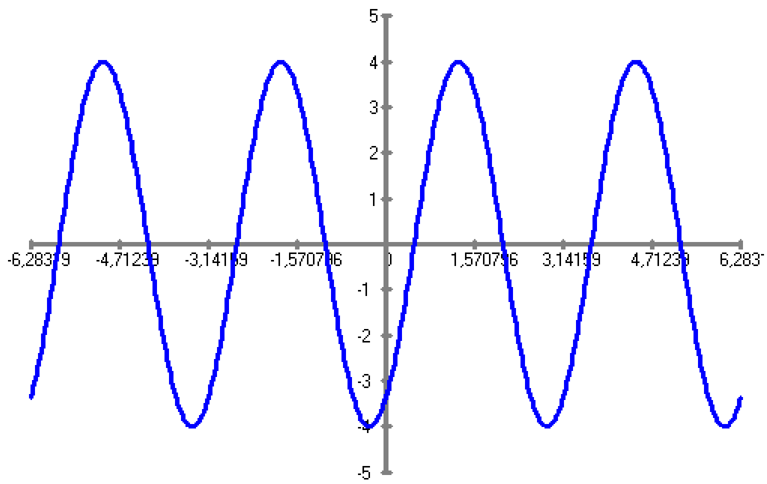
a) La gráfica puede verse en el dibujo.



b) La gráfica de la función g(x) se obtiene a partir de la gráfica de f(x) mediante una traslación de vector (0,5; 0).



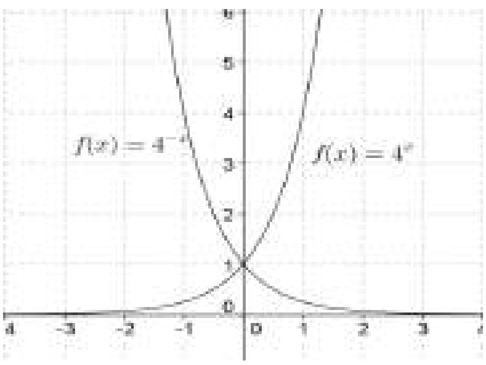
c) La gráfica de la función h(x) se obtiene a partir de la gráfica de f(x) mediante una dilatación multiplicando sus ordenadas por 4.



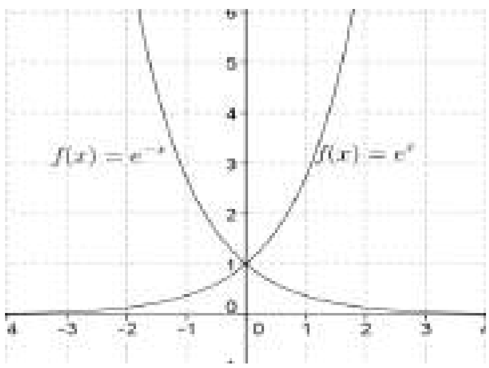
ACTIVIDADES-PÁG. 204

1. Las gráficas quedan:

a) y b)



c) y d)



2. En cada uno de los casos:

- $y = e^x + 2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = e^x$, según el vector $\vec{v}$ (0, 2).

- $y = e^x - 3$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = e^x$, según el vector $\vec{v}$ (0, -3).

- $y = e^{x+1}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = e^x$, según el vector $\vec{v}$ (- 1, 0).

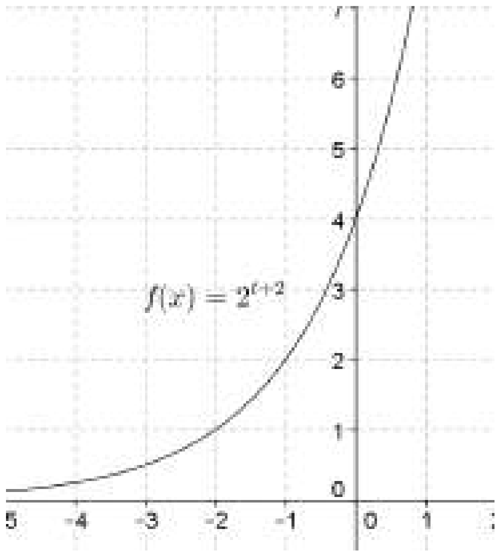
- $y = e^{x-3}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = e^x$, según el vector $\vec{v}$ (3, 0).

3. La función $f(x) = 3^x$ es simétrica de $g(x) = 3^{-x}$ respecto del eje de ordenadas. La función $h(x) = 3^{|x|}$ es simétrica respecto al eje de ordenadas. Es la recta x = 0

4. Dentro de un año tendremos 12 bulbos.

Dentro de 6 años tendremos $4 \cdot 2^6$ bulbos, es decir 256 bulbos.

La función es $f(x) = 2^{t+2}$ y su gráfica puede verse en el dibujo.



5. La solución queda:

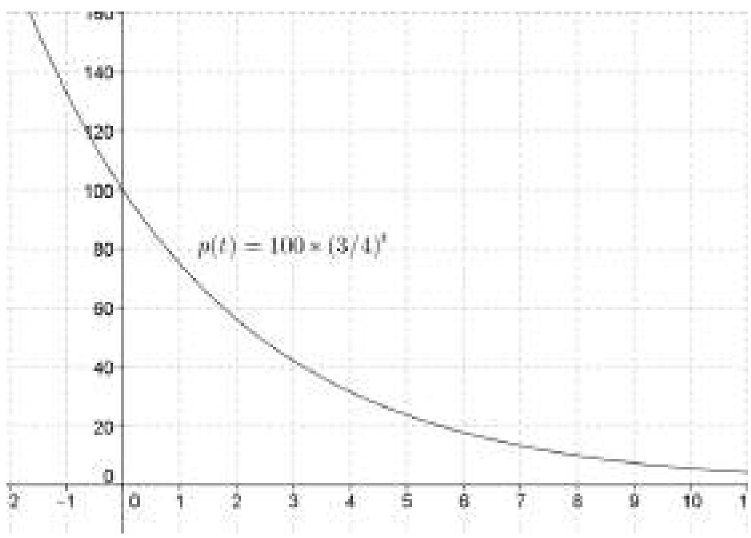
a) La gráfica es:

La parte negativa de la gráfica no tiene sentido.

El corte en OY indica el número de automóviles que funcionan en el momento de salir de la cadena de montaje.

b) Para t = 10, p = 5,63 % siguen funcionado al cabo de 10 años.

c) Han de pasar 4,82 años.



6. La solución queda:

a) En el año 1800 hay una unidad de madera.

En el año 1600 había $(1{,}6)^{-2} = 0{,}39$ unidades de madera.

En el año 1900 había $1{,}6^{1} = 1{,}6$ unidades de madera.

En el año 2010 había $1{,}6^{2{,}10} = 2{,}68$ unidades de madera.

b) La función que se ajusta a esta situación es $f(t) = 1{,}6^{t}$ unidades de madera en función del tiempo, en siglos, a partir de 1800.

c) Para que haya el doble de madera que en 1800 se ha de verificar:

$$2 = 1{,}6^{t} \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}6} = 1{,}475 \ siglos$$, es decir, en el año 1800 + 148 = 1948.

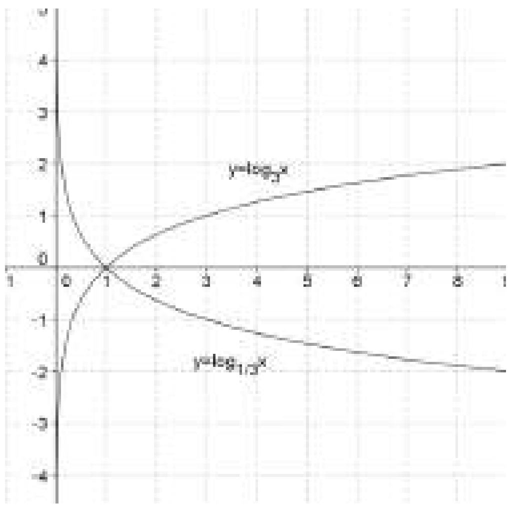
Para que haya la mitad de madera que en 1800 se ha de verificar:

$$\frac{1}{2} = 1{,}6^{t} \Rightarrow t = \frac{\log 0{,}5}{\log 1{,}6} = -1{,}475 \ siglos$$, es decir, en el año 1800 - 148 = 1652.

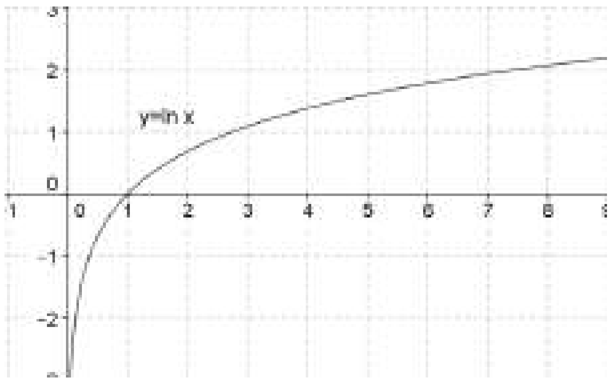
d) Se cuadriplica la cantidad de madera cada:

$$4 = 1{,}6^{t} \Rightarrow t = \frac{\log 4}{\log 1{,}6} = 2{,}95 \ siglos .$$

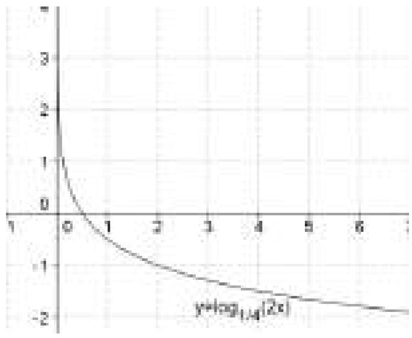
7. Las gráficas quedan: a) $y = \log_3 x$ y b) $y = \log_{1/3} x$



c) y = ln x



d) $y = \log_{1/4}(2x)$



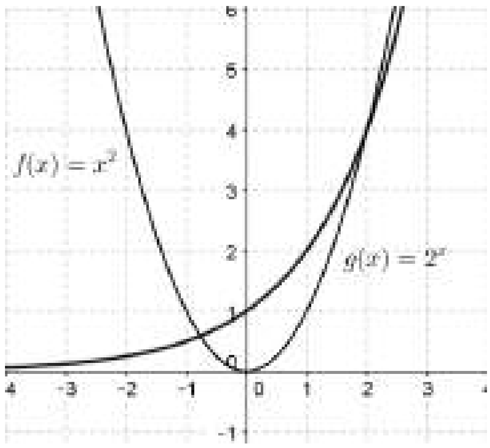
ACTIVIDADES-PÁG. 205

8. A partir de la gráfica dada, hacemos las siguientes transformaciones:

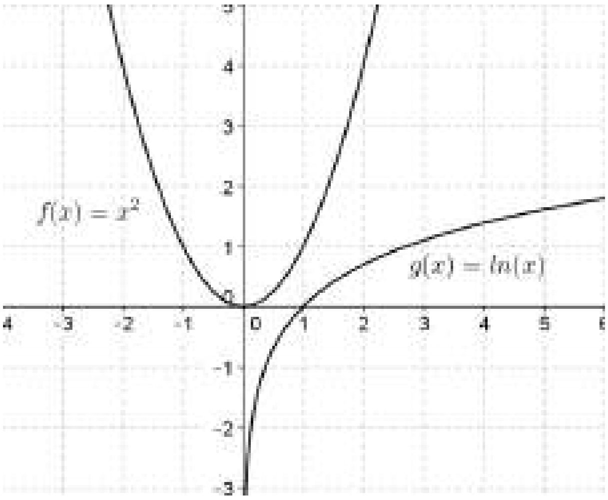
- $y = 2 + \log_2 x$ se obtiene de trasladar la gráfica de $y = \log_2 x$ según el vector $\vec{v}\,(0,2)$
- $y = \log_2 x - 2$ se obtiene de trasladar la gráfica de $y = \log_2 x$, según el vector $\vec{v}\,(0,-2)$.
- $y = \log_2 (x+3)$ se obtiene de trasladar la gráfica de $y = \log_2 x$, según el vector $\vec{v}\,(-3,0)$
- $y = \log_2 (x-1)$ se obtiene de trasladar la gráfica de $y = \log_2 x$, según el vector $\vec{v}\,(1,0)$-

9. Las soluciones son:

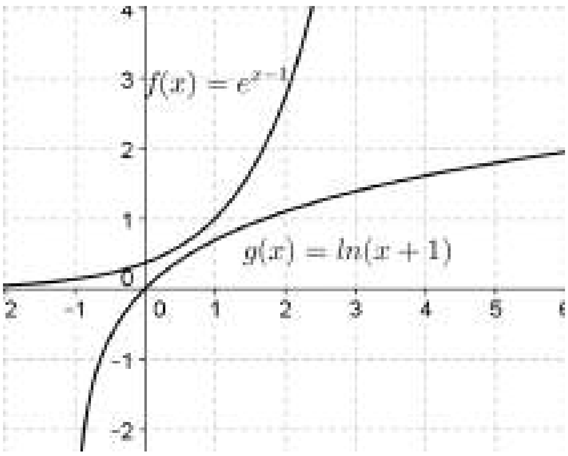
a) A partir de las gráficas siguientes podemos decir que la desigualdad $2^x > x^2$ es cierta para valores de x del intervalo (- 0,77 ; 2)



b) A partir de las gráficas siguientes podemos decir que la desigualdad $x^2 < \ln x$ no se cumple para ningún valor de x.

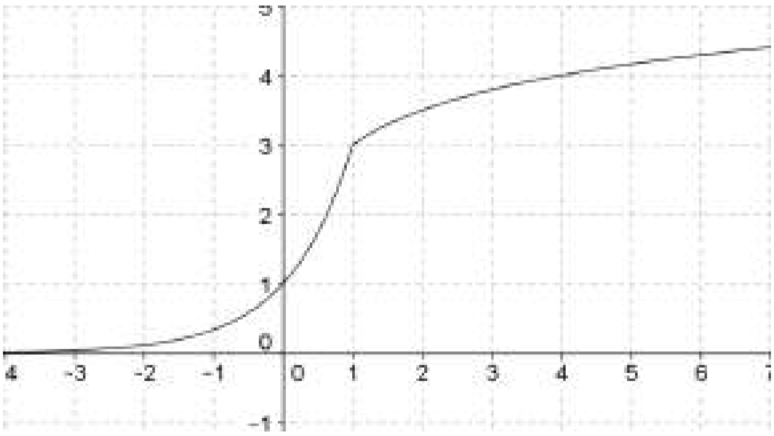


c) A partir de las gráficas siguientes podemos decir que la desigualdad $e^{x-1} \geq \ln(x+1)$ es cierta para todos los valores reales que tome x.



10. La correspondencia es: a) con $g(x) = 5^x$; b) con $h(x) = \log_5 x$ y c) con $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

11. La gráfica es:



12. Contamos el tiempo, t, a partir del momento actual. Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\begin{cases} 100 = A \cdot e^{-6B} \\ 2100 = A \cdot e^{0 \cdot B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2100 \\ B = 0{,}5074 \end{cases}$$

La función buscada es: $N = 2100 \cdot e^{0{,}5074 \cdot t}$

Para que haya 14 850 ejemplares han de pasar t años, y se debe verificar:

$$14\,850 = 2100 \cdot e^{0{,}5074 \cdot t} \quad \Rightarrow \quad t = 3{,}86 \text{ años.}$$

13. El precio del producto al cabo de t años será $P(t) = 4 \cdot 1{,}12^t$.

Para que el producto valga 8 € han de pasar $t = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}12} = 6{,}12$ años.

14. En cada uno de los casos:

Son positivas las razones trigonométricas de los apartados a), b) y e)

Son negativas las razones trigonométricas de los apartados c) y d).

15. Las reducciones quedarán:

a) $1215° = 3 \cdot 360° + 135° \quad \Rightarrow \quad 1215° \cong 135°$

b) $-60° = 300° - 360° \quad \Rightarrow \quad -60° \cong 300°$

c) $\dfrac{23\pi}{6} \cong \dfrac{11\pi}{6}$

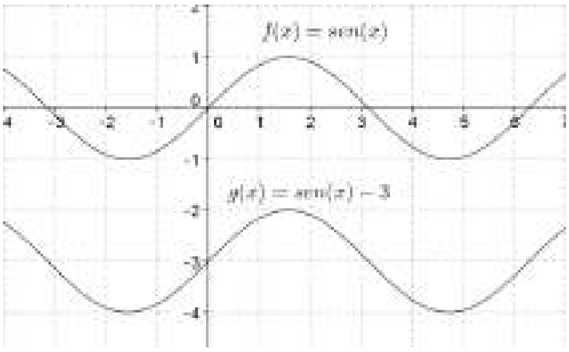
d) $18750° = 52 \cdot 360° + 30° \quad \Rightarrow \quad 18750° \cong 30°$

e) $\dfrac{26\pi}{3} \cong \dfrac{2\pi}{3}$

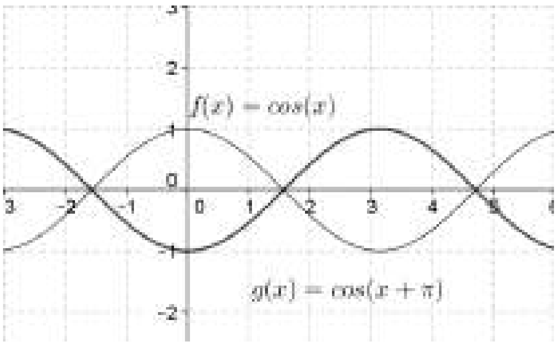
ACTIVIDADES-PÁG. 206

16. Las gráficas pedidas son:

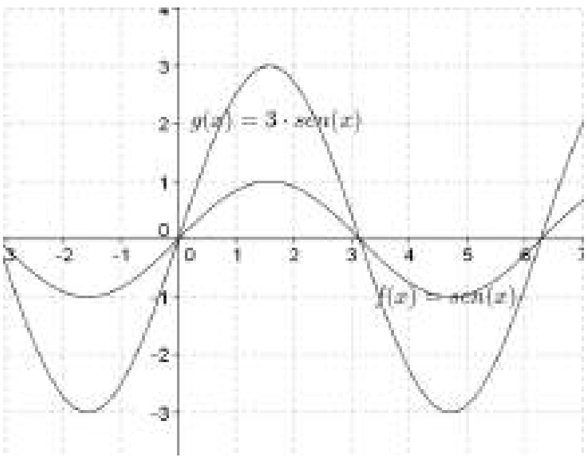
a) La gráfica de la función f(x) = sen x – 3 se obtiene de aplicar a la de la función f(x) = sen x una traslación de vector $\vec{v}\,(0,-3)$ como vemos en las gráficas siguientes:



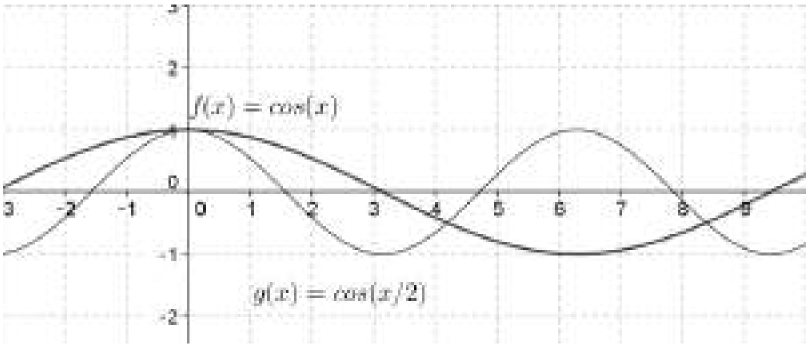
b) La gráfica de la función f(x) = cos (x + π) se obtiene de aplicar a la de la función f(x) = cos x una simetría de eje OX, o una traslación de vector $\vec{v}\,(-\pi,0)$como vemos en las gráficas siguientes:



c) La gráfica de la función f(x) = 3 · sen x se obtiene de dilatar la gráfica de la función f(x) = sen x multiplicando sus ordenadas por 3 como podemos ver en las gráficas siguientes:



d) La función $f(x) = \cos \dfrac{x}{2}$ se obtiene de la función f(x) = cos x y si teniendo en cuenta que si el periodo de esta función es 2 π el de la que nos piden es (2 π)/(1/2) = 4 π



17. Con un crecimiento anual del 2% al cabo de t años, habrá en la Tierra una población de:

$$P = 1{,}02^t \cdot 4\,500 \text{ millones de habitantes.}$$

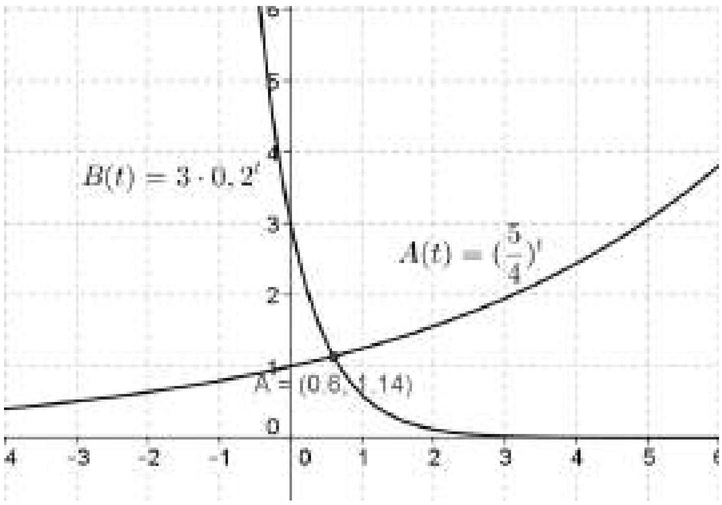
De este modo: 10 000= $1{,}02^t \cdot 4\,500$, entonces $t = \dfrac{\log \dfrac{10000}{4500}}{\log 1{,}02} = 40{,}32 \text{ años}$.

Al cabo de 40,32 años la población será de 10 mil millones.

18. Las soluciones son:

a) Las gráficas pueden verse en el dibujo.

Al nacer la especie A medía 1 cm y la B medía 3 cm.



b) Para ver en qué momento miden lo mismo resolvemos la ecuación:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^t = 3 \cdot 0{,}2^t \Rightarrow t = \frac{\log 3}{\log(1{,}25) - \log(0{,}2)} \Rightarrow t = 0{,}5995 \ años \ .$$

Miden lo mismo al cabo de 0,6 años, es decir al cabo de 219 días. A partir de este momento la especie A sigue creciendo y la B disminuyendo de tamaño.

19. Las respuestas son:

a) La dosis inicial ha sido de 10 mg

b) Para ver en qué momento deja de hacer efecto el fármaco resolvemos la ecuación:

$$0{,}15 = 10 \cdot 0{,}72^t \Rightarrow t = \frac{\log 0{,}015}{\log(0{,}72)} \Rightarrow t = 12{,}784 \ horas$$

20. Las soluciones son:

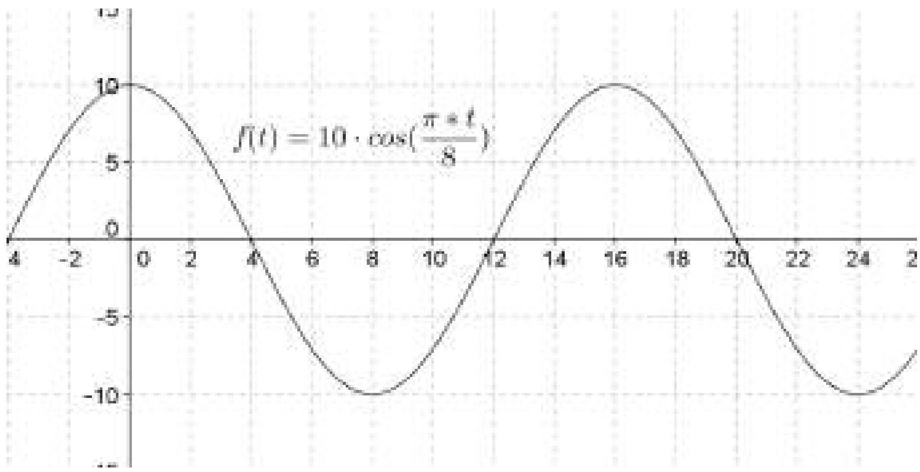
a) Si x = 12, entonces y = 5,49 metros es capaz de recorrer en un minuto después de 12 horas de entrenamiento.

b) Si y = 12 metros por minuto, entonces se cumplirá:

$$12 = 16\,(1 - e^{-0{,}035x}) \Rightarrow 0{,}75 = 1 - e^{-0{,}035x} \Rightarrow e^{-0{,}035x} = 0{,}25 \Rightarrow x = \frac{\ln 0{,}25}{-0{,}035} = 39{,}61$$

Tendrá que realizar 39,61 horas de entrenamiento.

21. En la gráfica podemos ver que la longitud máxima, de 10 m, la alcanza a las 0 horas y a las 16 horas y la mínima, de -10 m, a las 8 y a las 24 horas.



22. Las respuestas son:

a) El terremoto de 2011 tuvo una magnitud de:

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{7{,}9 \cdot 10^{17}}{2{,}5 \cdot 10^{4}}\right) = 8{,}9998 \approx 9$$

b) El terremoto de Lisboa liberó una energía de:

$$8{,}7 = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{2{,}5 \cdot 10^{4}}\right) \Rightarrow E = 2{,}5 \cdot 10^{4} \cdot 10^{13{,}05} \Rightarrow E = 2{,}81 \cdot 10^{17} \ \ julios$$

c) Hallamos el cociente $\dfrac{7{,}9 \cdot 10^{17}}{2{,}81 \cdot 10^{17}} = 2{,}8$

El terremoto de Japón fue 2,8 veces más potente que el de Lisboa

d) Resolvemos las inecuaciones:

$$5 \leq \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{2{,}5 \cdot 10^{4}}\right) \leq 7 \quad \Rightarrow \quad 7{,}9 \cdot 10^{11} \leq E \leq 7{,}9 \cdot 10^{14}$$

Es decir debe encontrarse entre $7{,}95 \cdot 10^{11}$ julios y $7{,}9 \cdot 10^{14}$ julios

23. La función viene dada por $P(t) = 0{,}88^{t} \cdot x$ siendo x el precio de compra y t los años desde que se compró. Haciendo $528 = 0{,}88^{t} \cdot x$ obtenemos que el precio del ordenador es de 600 €.

Por tanto la función es $P(t) = 600 \cdot 0{,}88^{t}$

El ordenador reduce su valor a la mitad al cabo de: $t = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}88} = 5{,}42 \ \ años$

El ordenador reduce su valor a la décima parte al cabo de: $t = \dfrac{\log 0{,}1}{\log 0{,}88} = 18{,}01 \ \ años$

ACTIVIDADES-PÁG. 207

Ofrecemos bibliografía sobre la relación entre matemáticas y ciclismo.

CORBALÁN, Fernando. (201) *Matemáticas de cerca.* Graó. Barcelona.

ORTEGA, Tomás. (2005). *Conexiones matemáticas.* Graó. Barcelona.

SORANDO MUZÁS, J. M. (2012) *Matemáticas y deporte. Sugerencias para el aula.* Revista Números. Volumen 80.

SORANDO MUZÁS, J. M. http://catedu.es/matematicas_mundo/

http://plataformarecorridosciclistas.org/2009/11/22/rampas-maximas-superadas-en-competicion/

UNIDAD 10: Límites de funciones. Continuidad

ACTIVIDADES-PÁG. 208

1. Podemos decir lo siguiente:

a) Para esta función:

f (x) tiende a 1 cuando x tiende a $-\infty$
f (x) tiende a + ∞ cuando x tiende a – 2 por la izquierda
f (x) tiende a - ∞ cuando x tiende a – 2 por la derecha
f (x) tiende a - ∞ cuando x tiende a 2 por la izquierda
f (x) tiende a + ∞ cuando x tiende a 2 por la derecha
f (x) tiende a 1 cuando x tiende a $+\infty$.

b) En este caso:

f (x) tiende a 0 cuando x tiende a $-\infty$
f(x) tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.

c) Para esta gráfica:

f (x) tiende a 1 cuando x tiende a $-\infty$
f(x) tiende a 1 cuando x tiende a $+\infty$.

d) Para esta funcióm:

f (x) tiende a $-\infty$ cuando x tiende a $-\infty$
f (x) tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.

ACTIVIDADES-PÁG. 227

1. Designamos los colores por: rojo (R), verde (V), azul (Z) y amarillo (A). Las cuatro formas por: cuadrada (C), circular (O), triangular (T) y pentagonal (P).
Por ensayo y error colocamos las fichas en un tablero 4x4, cumpliendo las condiciones que indica el enunciado y obtenemos una solución:

RC	VO	ZT	AP
ZP	AT	RO	VC
AO	ZC	VP	RT
VT	RP	AC	ZO

Podemos encontrar hasta 72 soluciones distintas.

2. El número total de amanitas ha de ser múltiplo de 9 menos 1, es decir, 8 amanitas.
Resolviendo el problema mediante ecuaciones obtenemos:

$$\frac{8}{9}x + \frac{8}{9} = x \quad \Rightarrow x = 8 \ \ amanitas$$

3. El enunciado del problema nos muestra que el número de latas de zumo debe ser un número impar. Por ensayo y error obtenemos:

Hay 7 latas de zumo.

El primer amigo se bebe 7/2 + 0,5 = 4 latas. Quedan 3 latas.

El segundo amigo se bebe 3/2 + 0,5 = 2 latas. Quedan 1 lata.

El dueño de la casa se bebe 1/2 + 0,5 = 1 lata.

Luego, efectivamente había 7 latas de zumo.

Este problema se puede resolver también mediante ecuaciones.

4. Sea n un número real. Veamos si $n^2 \cdot (n^2 - 1) = \dot{12}$

Como $n^2 \cdot (n^2 - 1) = n \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1)$, entonces:

- $n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) = \dot{3}$, pues es producto de tres números consecutivos.

- Si $n = \dot{3}$, entonces $n - 1 = \dot{2}$ y $n + 1 = \dot{2}$. Por tanto $n \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) = \dot{3} \cdot \dot{2} \cdot \dot{2} = \dot{12}$
- Si $n - 1 = \dot{3}$, entonces $n = \dot{2}$. Por tanto $n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) = \dot{3} \cdot \dot{2} \cdot \dot{2} = \dot{12}$
- Si $n + 1 = \dot{3}$, entonces $n = \dot{2}$. Por tanto $n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) = \dot{3} \cdot \dot{2} \cdot \dot{2} = \dot{12}$

En cualquier caso se verifica que $n^2 \cdot (n^2 - 1) = \dot{12}$

ACTIVIDADES-PÁG. 229

1. En la imagen tenemos la resolución, con Wiris, de estos límites.

$$\lim_{x \to 0^+} (1+4x)^{\frac{3}{2x^2}} \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{9x^2-2x}-3x\right) \rightarrow -\frac{1}{3}$$

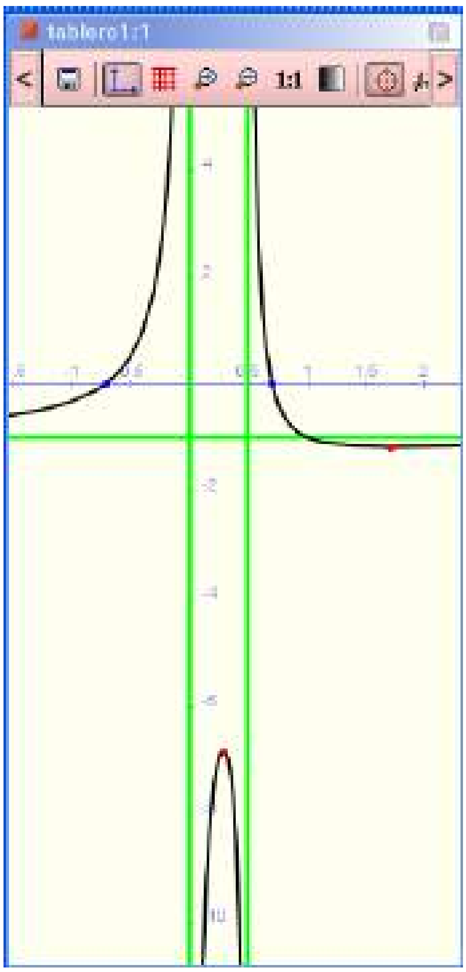
$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2-6x+5}{2\sqrt{x-1}-4} \rightarrow 8$$

2. Con Wiris representamos la función y vemos en la gráfica que tiene dos asíntotas verticales de ecuaciones x = 0; x = 0,5 y una asíntota horizontal de ecuación y = - 1.

En la misma gráfica estudiamos la continuidad y esta función es continua en R – {0; 0,5}

$$f(x) := \frac{1-2\cdot x^2}{2\cdot x^2 - x} \rightarrow x \mapsto \frac{1-2\cdot x^2}{2\cdot x^2 - x}$$

representar(f(x),{asíntota={color=verde,anchura_línea=3}})

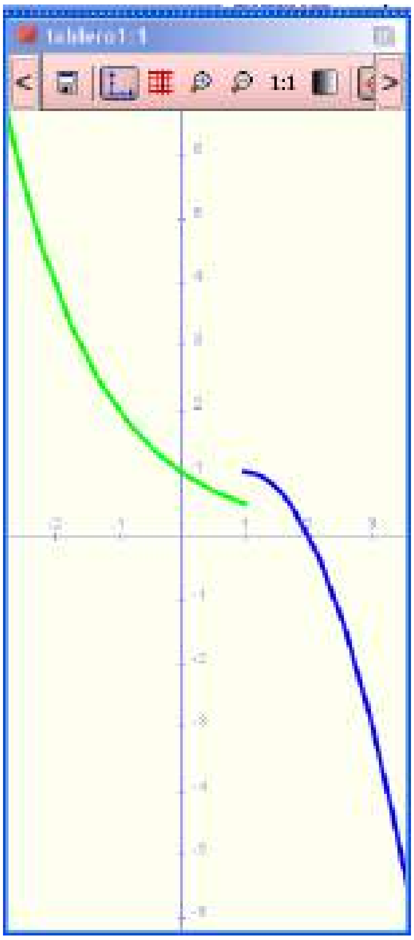


3. Representamos con Wiris estas dos funciones:

a) Esta es una función a trozos y hay que dibujar cada trozo en su intervalo, los dos dibujos dentro del mismo bloque.

```
dibujar(2·x−x², 1..+∞,{color=azul,anchura_línea=3}) → tablero1
dibujar(2⁻ˣ, -∞..1,{color=verde,anchura_línea=3}) → tablero1
```

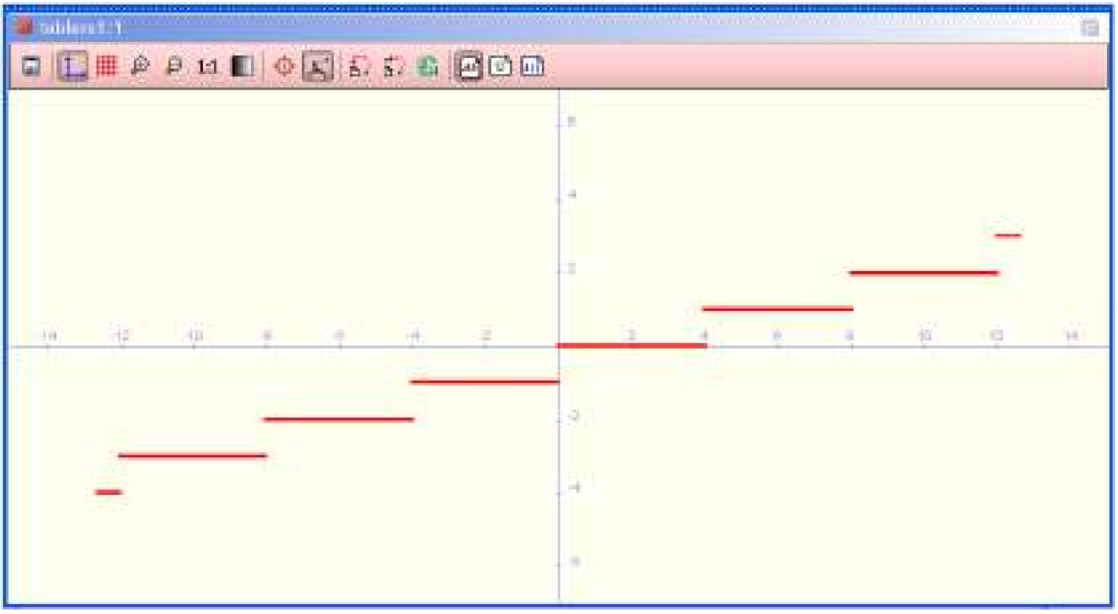
A partir de la gráfica vemos que esta función es continua en R – {1}



b) Para representar la parte entera se escribe **dibujar(suelo(x/4))**

La representamos y a partir de la gráfica vemos que es una función es continua en $R-\{x=4\cdot k \ / \ k\in Z\}$.

dibujar$\left(\text{suelo}\left(\frac{x}{4}\right)\right.$,{color=rojo,anchura_línea=3}$\Big)$ → tablero1



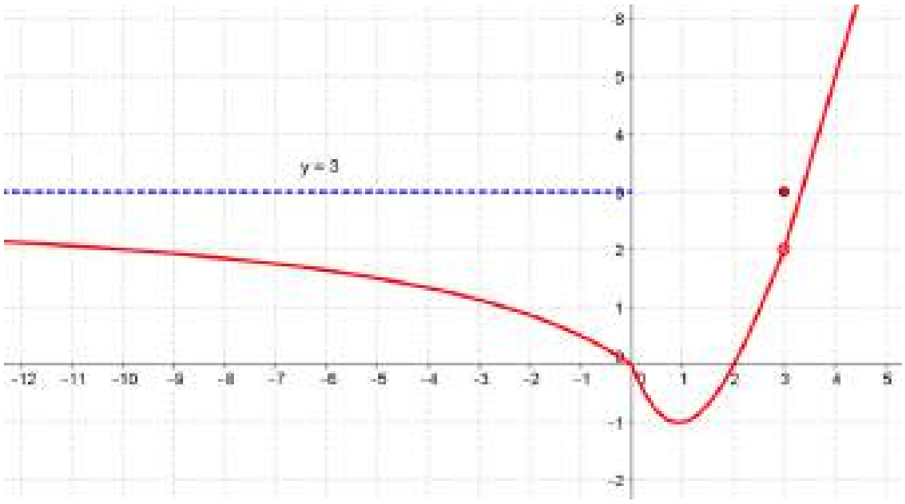
ACTIVIDADES-PÁG. 230

1. Las soluciones pueden verse en la tabla.

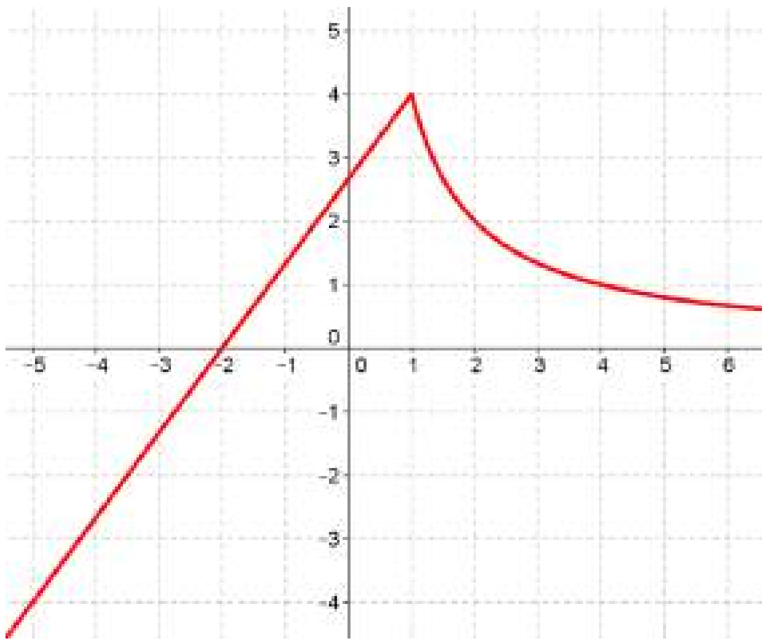
Apartados	Gráfica a)	Gráfica b)	Gráfica c)
a) Dom f	R	R	R
b) Im f	[0, 1)	R	[0, + ∞)
c) f (0)	0	2	1
d) f (1)	0	2	0
e) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$	1	1	1
f) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$	0	1	1
g) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$	No existe	1	1
h) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$	1	2	0
i) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$	0	2	2
j) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$	No existe	2	No existe
k) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$	No existe	- ∞	+ ∞
l) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$	No existe	+ ∞	+ ∞

2. Las gráficas pueden ser como las que siguen.

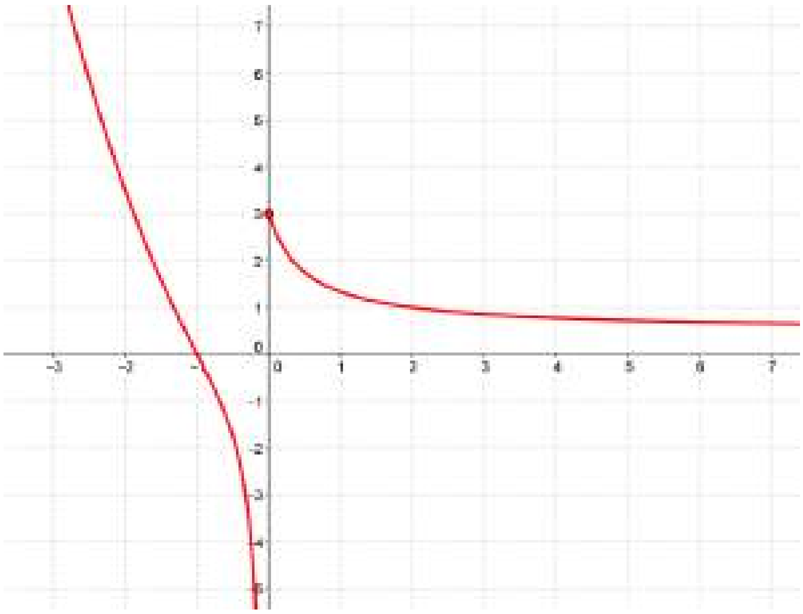
a)



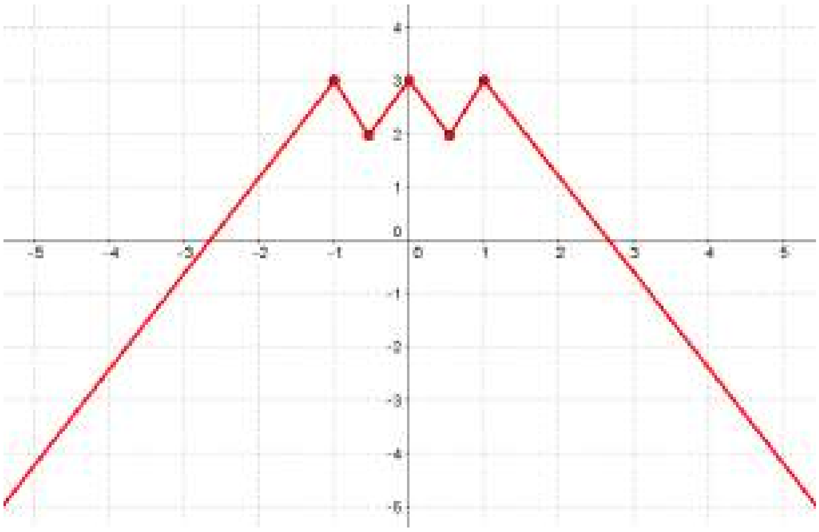
b)



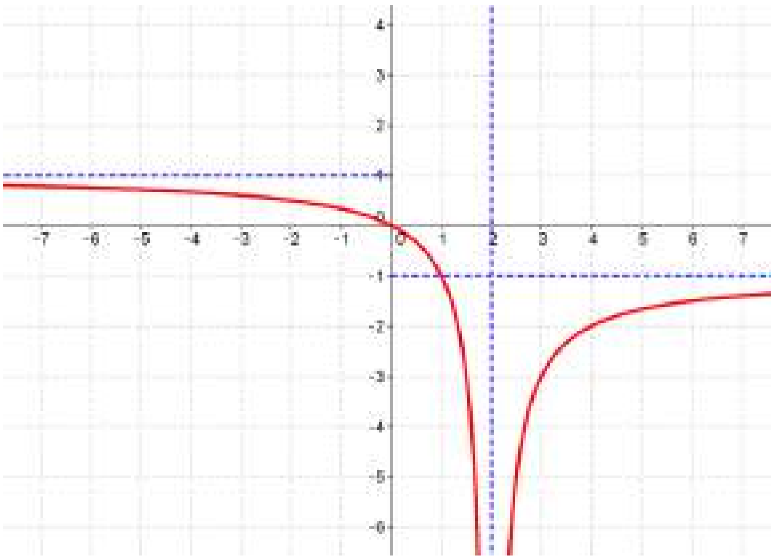
c)



d)



e)



3. La asociación es:

a) con (II) b) con (III) c) con (I)

ACTIVIDADES-PÁG. 231

4. Las soluciones son:

a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ no existe

d) Asíntotas horizontales: y = 0
Asíntotas verticales: x = - 1

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

g) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

h) $\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = 1$

i) $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x)$ no existe

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

k) Asíntotas horizontales: y = 0
Asíntotas verticales: x = - 1

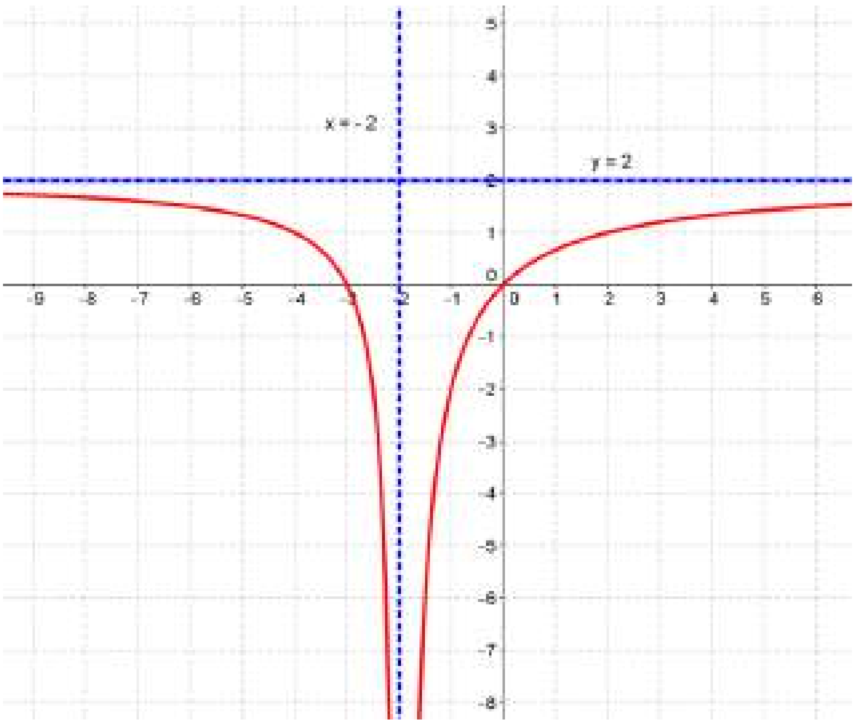
l) $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$ no existe

m) $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = -1$

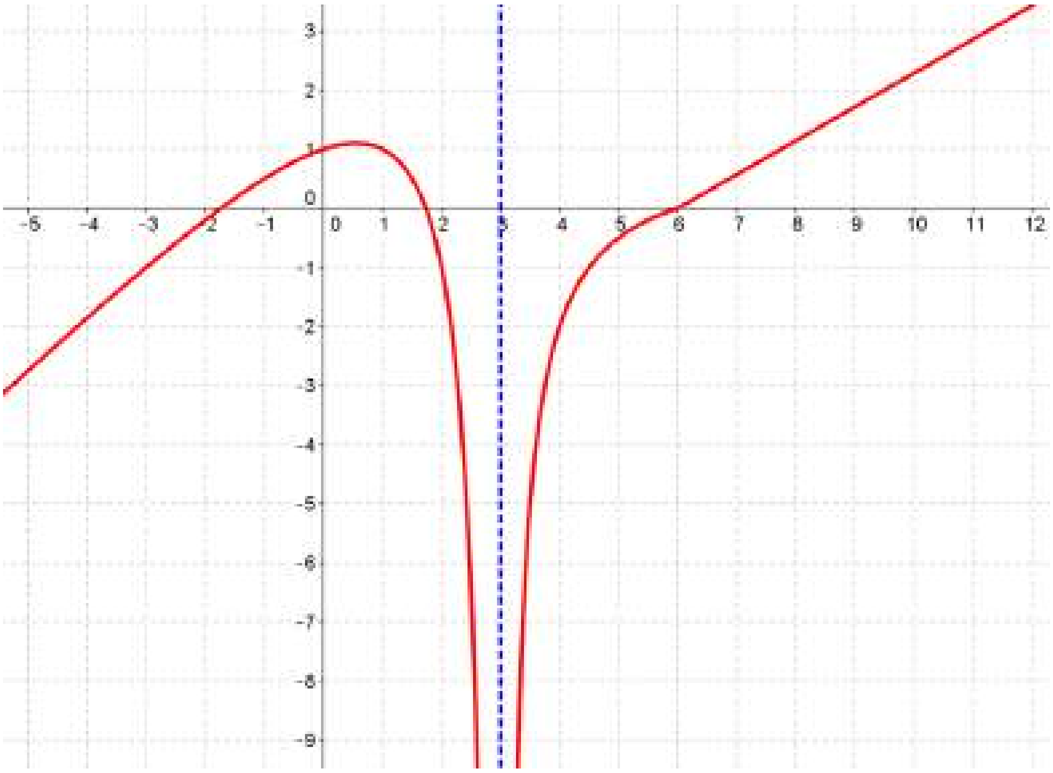
n) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

5. Las gráficas pueden verse a continuación:

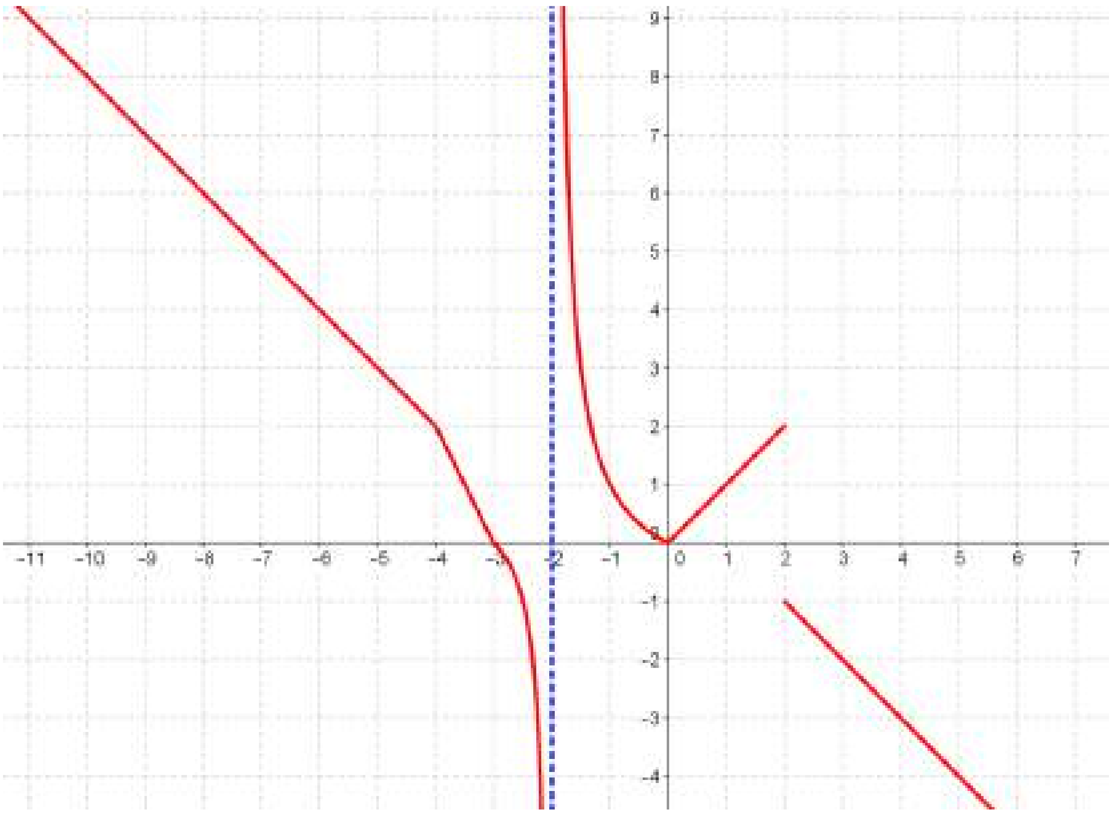
a)



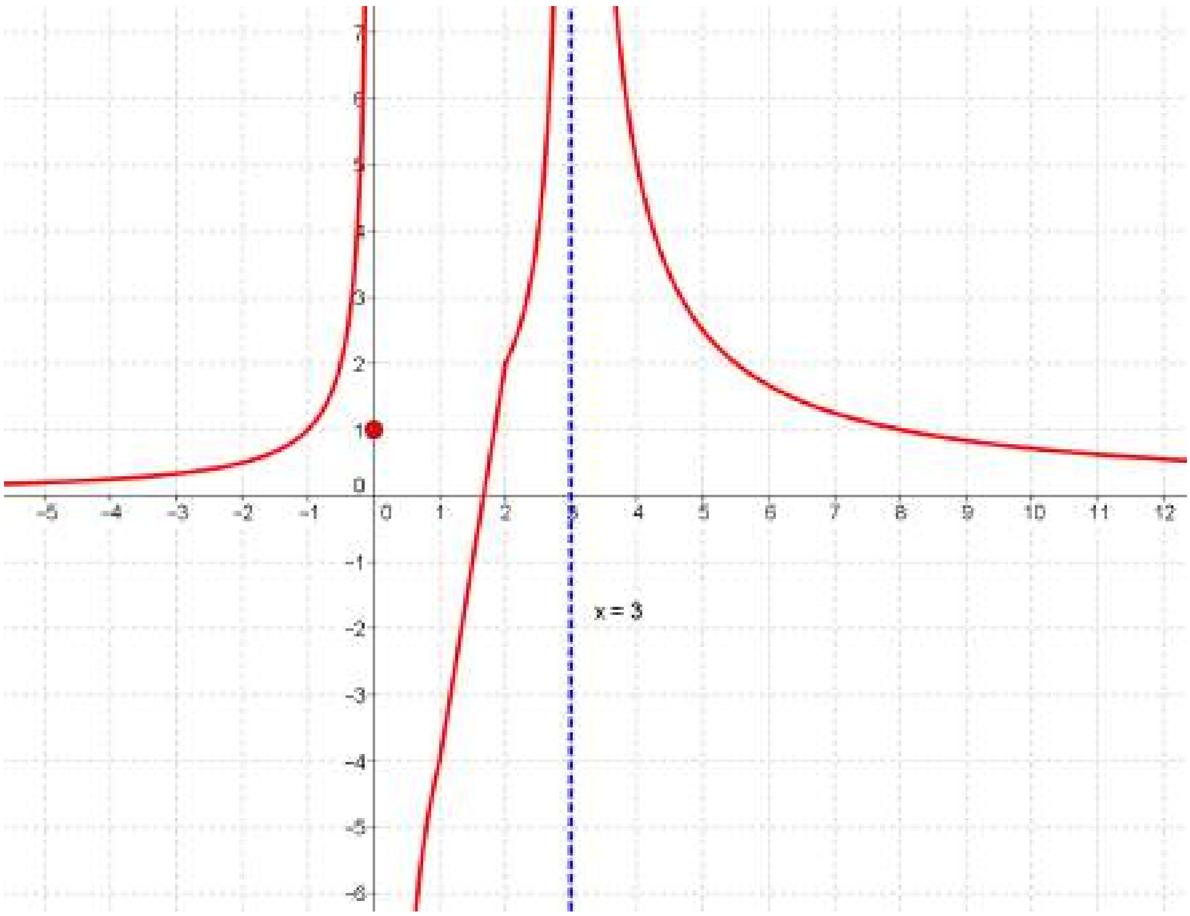
b)


-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3

c)


-11
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9

d)



6. Los valores de los límites son:

a) $\lim\limits_{x \to 0} 7 = 7$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-3} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3) = -3$

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^8} = +\infty$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^{11}} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to -1} x^4 = 1$

k) $\lim\limits_{x \to 0^-} x^{-5} = -\infty$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^4} = +\infty$

m) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$

n) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$

g) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^8} = 0$

o) $\lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$

h) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^8} = +\infty$

p) $\lim_{x \to -1} x^3 = -1$

ACTIVIDADES-PÁG. 232

7. El valor de los límites es:

a) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$

b) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$

c) $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$

d) $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 1$

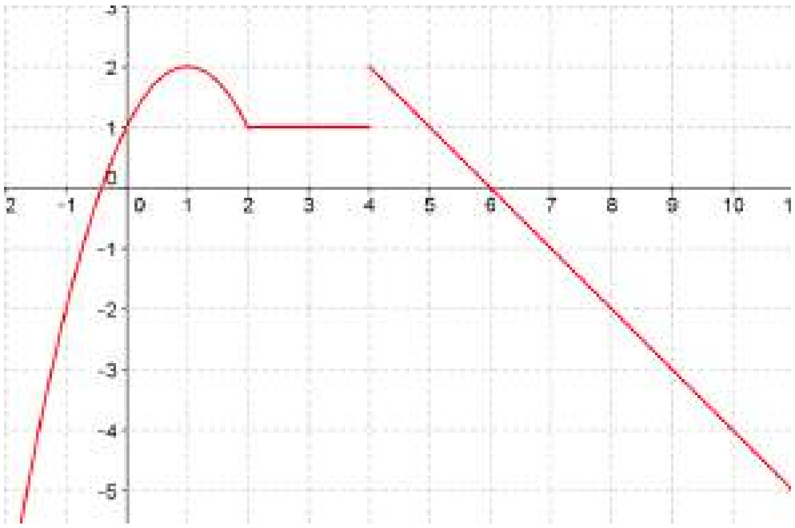
e) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 2$

f) $\lim_{x \to 4} f(x) =$ no existe

g) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

h) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Todo lo anterior puede verse en la gráfica que sigue.



8. Los límites valen:

a) $\lim_{x \to +\infty} (3x^2 + 5x - 2) = +\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + 5x - 4) = -\infty$

f) $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3 - 2x + 1}{6x^2 + 2x} = -\infty$

g) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{2x} - 5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 - 6x^2 - 5) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{2x^3 - 4x + 6} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 5x - 7}{-3x^2 - 3x + 4} = -1$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 4x^2 - 2}}{\sqrt[3]{8x^2 - 5x + 3}} = -\infty$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 - 7}}{4x} = \dfrac{1}{2}$

9. Los límites valen:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 3x} = -1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 2x}{2x^3 + 3x^2 + 2x} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{5x^2 - 7x - 6} = \dfrac{4}{13}$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^4 - 1}{x^3 + 1} = -\dfrac{4}{3}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^5 - 3x^3}{x^3 + x^2} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 9}$ no existe (los límites laterales son diferentes)

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - x} - 1}{x} = -\dfrac{1}{2}$

h) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} = 4$

i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4} = \dfrac{\sqrt{2}}{16}$

j) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2 - \sqrt{7 - x}}{4 - \sqrt{13 + x}} = -2$

k) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x + 2} - 2} = 2$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2 - x}} = \sqrt{2}$

10. Los límites son:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{2x - 4}$ no existe, ya que: $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{2x - 4} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^{+-}} \dfrac{x^2}{2x - 4} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4 - x}{x^2} = +\infty$ ya que: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{4 - x}{x^2} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{4 - x}{x^2} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 5}{|x - 3|} = +\infty$ ya que $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x + 5}{|x - 3|} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x + 5}{|x - 3|} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{x^3} \cdot \dfrac{x^2 + 2x}{3} \right) [\infty \cdot 0] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(x^2 + 2x)}{3x^3} \left[\dfrac{0}{0} \right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x\,(x + 2)}{3x^3} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4}{x+3} \cdot \sqrt{x^2+4} \right) [0 \cdot \infty] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4\sqrt{x^2+4}}{x+3} \left[\dfrac{\infty}{\infty} \right] = 4$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{x^2} \left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x^2+2} \right) \right] [\infty \cdot 0] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x}{x^2\,(x+2)(x^2+2)} \left[\dfrac{0}{0} \right] =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\,(x-1)}{x^2\,(x+2)\,(x^2+2)}$ no existe, al ser los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x-1}{x\,(x+2)\,(x^2+2)} = +\infty \text{ y } \lim_{x \to 0^+} \frac{x-1}{x\,(x+2)\,(x^2+2)} = -\infty$$

11. Los límites valen:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 4x - 1} - 3x \right) = -\dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x} \left(\sqrt{x} - \sqrt{x-2} \right) \right] = 1$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2+3}{x} - \dfrac{x^2-1}{x} \right) = 0$

ACTIVIDADES-PÁG. 233

12. Los límites son:

a) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x+2}{4x-3} \right)^{2x} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} 2x \cdot \left(\frac{4x+2}{4x-3} - 1 \right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{10x}{4x-3}} = e^{\frac{5}{2}}$$

b) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x-7}{3x} \right)^{\frac{2x^2+1}{3x}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2+1}{3x} \cdot \left(\frac{3x-7}{3x} - 1 \right)} = e^{-\frac{14}{9}}$$

c) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{5x} \right)^{x^2} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \cdot \frac{2}{5x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

d) El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3+2x}{x-5} \right)^{3x} = 2^{+\infty} = +\infty$$

e) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to 0} (1+3x)^{\frac{2}{x}} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{2}{x} \cdot (1+3x-1)} = e^{6}$$

f) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5-3x}{4-3x} \right)^{x-3} = e^{\lim_{x \to +\infty} (x-3) \cdot \left(\frac{5-3x}{4-3x} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{-x+3}{-3x+4}} = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

13. Las soluciones son:

a) La función f(x) = $\frac{3x-2}{6x+6}$ tiene dos asíntotas: vertical de ecuación x = - 1 y horizontal de ecuación y = 1/2.

b) La función $f(x) = \frac{2}{x^2 - x}$ tiene tres asíntotas: dos verticales de ecuaciones x = 1 y x = 0 ; y una horizontal de ecuación y = 0.

c) La función f(x) = $\frac{x^2 - 1}{x}$ tiene dos asíntotas: vertical de ecuación x = 0 y oblicua de ecuación y = x.

d) La función f(x) = $\frac{3x}{x^2 + 4}$ tiene una asíntota horizontal de ecuación y = 0.

e) La función $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}$ tiene dos asíntotas: vertical de ecuación x = - 2 y oblicua de ecuación y = x – 4

f) La función f(x) = $\frac{3x^2 - 2}{6x+6}$ tiene dos asíntotas: Vertical de ecuación x = - 1 y oblicua de ecuación $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

14. A la vista de la gráfica podemos asegurar que:

a) La gráfica es continua para cualquier número real excepto para x = 0.

b) La gráfica es continua para cualquier número real excepto para x = 0.

c) La gráfica es continua para cualquier número real.

15. Los resultados son:

(I) a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$ e) f (0) = 3

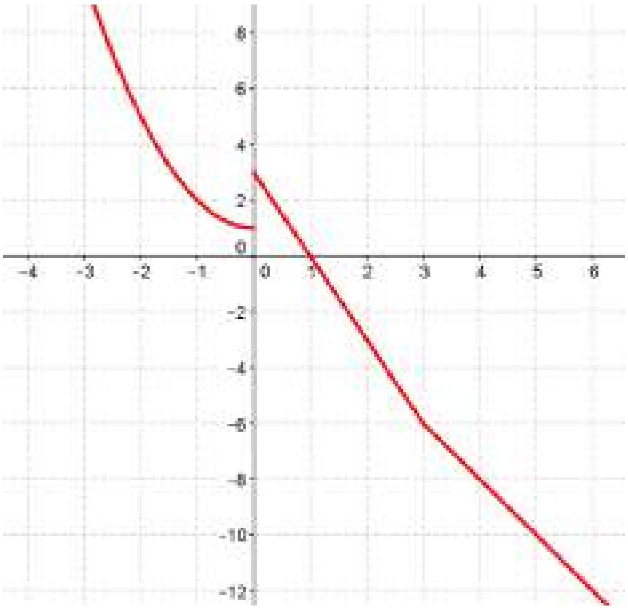
b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$ f) f (1) = 0

c) $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$ g) f (3) = - 6

d) $\lim_{x \to 3} f(x) = -6$

La función es continua para cualquier número real excepto para x = 0.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica adjunta.



(II) a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2$ e) f (0) = - 4

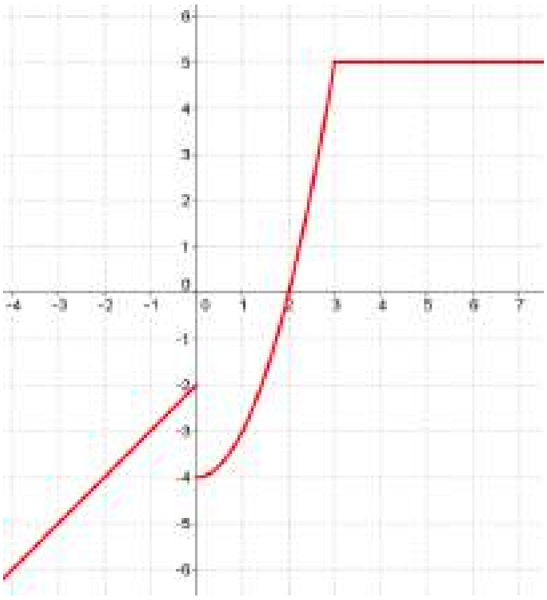
b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -4$ f) f (1) = - 3

c) $\lim_{x \to 1} f(x) = -3$ g) f (3) = 5

d) $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$

La función es continua para cualquier número real excepto para x = 0.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica adjunta.



16. Los valores del parámetro a para que las funciones sean continuas es:

a) a = 6 b) a = 1

ACTIVIDADES-PÁG. 234

17. a) La función f (x) es continua en R – {- 2, 2}.

b) La función f (x) es continua en [- 1, 1].

c) La función f (x) no es continua en x = 4.

d) La función f (x) es continua en $(3, +\infty)$.

e) La función f (x) es continua en $[-2, 0) \cup (0 + \infty)$

f) La función f (x) no es continua en x = - 1 pues no esta definida. Tampoco es continua en x = 1.

g) La función f (x) es continua en R.

h) La función f (x) es continua en R

i) La función f (x) es continua en $(-\infty, 1) \cup (-2, +\infty)$.

18. La función dada es discontinua evitable en x = - 3 y discontinua no evitable en x = 3. La redefinimos para x = - 3 y queda:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{6x + 18}{x^2 - 9} & si \quad x \neq -3 \\ -1 & si \quad x = -3 \end{cases}$$

19. a) En este momento hay 4000 águilas. Al cabo de 8 años habrá 7368 águilas y al cabo de 12 años habrá 7556 águilas, es decir, habrá aumentado el número.

b) Calculamos $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{16t + 12}{2t + 3} \right) = 8$, es decir se estabilizará en 8 000 animales.

20. La función beneficio es: $B(t) = I(t) - G(t) = \dfrac{60t + 700}{2t^2 + 8}$

Calculamos $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{60t + 700}{2t^2 + 8} \right) = 0$, es decir tienden a anularse.

21. a) La función es continua en $[0, +\infty)$

b) El 6º año hará un promedio de unas 35 fotocopias por minuto.

c) Calculamos $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{12t + 172}{t + 1} \right) = 12$, es decir, hará 12 fotocopias por minuto, por término medio.

ACTIVIDADES-PÁG. 235

Dibujamos un triángulo equilátero, dividimos cada lado en tres partes y sobre la parte central, dibujamos otro triángulo equilátero, en el siguiente paso sobre cada uno de los 6 triángulos equiláteros repetimos el proceso e iterando obtenemos esta curva.

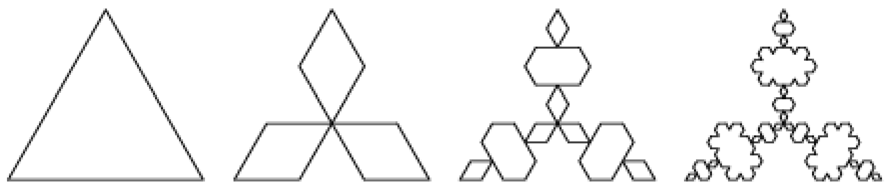
Consideramos que el triángulo equilátero inicial tiene de lado a unidades.

NÚMERO DE CURVA	PERÍMETRO	ÁREA
1	3a	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$
2	12a/3	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}+3\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{36}$
3	48a/9	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}+3\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{36}+12\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{81\cdot 4}$
4	192a/27	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}+3\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{36}+12\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{81\cdot 4}+48\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}+3\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{36}+12\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{729\cdot 4}$
enésima	$\frac{4^{n-1}}{3^{n-2}}a$	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$

Como vemos en la tabla la sucesión de los perímetros es una sucesión geométrica de razón 4/3. Por lo que su longitud es infinita pues $\lim_{n\to+\infty}\frac{4^{n-1}}{3^{n-2}}a=+\infty$ .La sucesión de las áreas es una sucesión geométrica de razón 4/9. Su superficie es finita pues: $\lim_{n\to+\infty}\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$

La propiedad que tienen estas curvas es que **siendo su longitud infinita encierran una superficie finita.**

La curva *anticopo de nieve* es la que vemos en el dibujo:



Es la configuración opuesta al copo de nieve. Se forma del mismo modo pero metiendo los triángulos hacia adentro.

Se obtienen los mismos resultados que en la anterior y tienen la misma propiedad.

UNIDAD 11: Introducción a las derivadas y sus aplicaciones

ACTIVIDADES-PÁG. 236

1. Las soluciones aparecen en la tabla.

	[0, 3]	[3, 6]
a) $f_1(x) = 2x$	2	2
b) $f_2(x) = 2x + 3$	2	2
c) $f_3(x) = x^2$	3	9
d) $f_4(x) = 2^x$	$\frac{7}{3} = 2{,}33$	$\frac{56}{3} = 18{,}67$

2. El valor del límite es: $$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 16$$

3. La función y = f (x) es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en (1, 3). Tiene un máximo relativo en el punto (1, 4) y un mínimo relativo en (0, 3).

La función y = g (x) es creciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en (0, 1). Tiene un mínimo relativo en el punto (1, e).

ACTIVIDADES-PÁG. 257

1. Organizamos los datos en una tabla:

	Recibe	**Marca**
Lunes	X	M
Martes	X – M	12
Miércoles	X + 14	2 M
Jueves	4M	10
Viernes	4	X + 14 – 14
Sábado		20

Los discos que recibe menos los que marca son los 20 discos que le quedaron para el sábado:

$$X + X - M + X + 14 + 4M + 4 - (M + 12 + 2M + 10 + X) = 20 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3X + 3M + 18 - 3M - X - 22 = 20 \quad \Rightarrow \quad 2X = 24 \quad \Rightarrow X = 12$$

El lunes recibió 12 discos.

2. Sea v la velocidad del camión y w la velocidad del tractor.

La expresión queda: v + w = 2 (v – w), es decir, v = 3w.

La velocidad del camión es el triple que la velocidad del tractor.

3. Llamamos R_4 al reloj que mide 4 minutos y R_9 al que mide 9 minutos.

● *Para medir 1 minuto*: ponemos ambos relojes a cero. Cuando pasan 4 minutos, damos la vuelta a R_4 y al pasar otros 4 minutos, lo que queda de R_9 es 1 minuto.

● *Para medir 2 minutos*: conseguimos 1 minuto por el procedimiento anterior. A la vez que logramos 1 minuto, el reloj R_4 lo ponemos y quedan en él 3 minutos. En este momento ponemos a funcionar R_9y al terminar, quedan en éste 6 minutos; ponemos a funcionar R_4 y al terminar éste último, quedan en el anterior 2 minutos.

● *Para medir 3 minutos*: está explicado en el procedimiento anterior.

● *Para medir 4 minutos*: con el reloj R_4.

● *Para medir 5 minutos*: ponemos R_4 y R_9; al terminar R_4, quedan en R_9 5 minutos.

● *Para medir 6 minutos*: esta situación se explica en el procedimiento para medir 2 minutos.

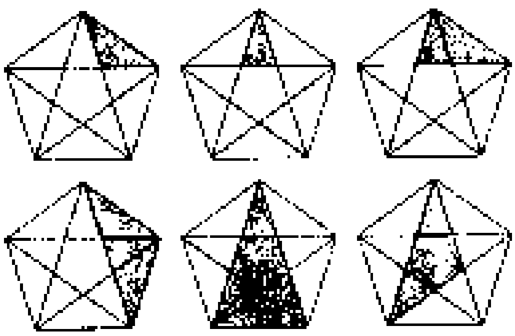
● *Para medir 7 minutos*: conseguimos 2 minutos por el procedimiento dado anteriormente. Los 2 minutos los tenemos en R_9. Ponemos a funcionar R_4 y al pasar 2 minutos en R_9 quedan otros 2 minutos en R_4. Ponemos a funcionar R_9 y, al pasar los dos minutos en R_4 quedarán 7 minutos en R_9.

● *Para medir 8 minutos*: ponemos dos veces R_4.

● *Para medir 9 minutos*: ponemos a funcionar R_9.

● *Para medir 2 minutos*: conseguimos que queden 6 minutos en R_9 por los procedimientos descritos ya vistos anteriormente y, cuando pasan esos 6 minutos, ponemos a funcionar R_4 obteniendo así los 10 minutos.

4. En esta figura podemos encontrar los siguientes tipos de triángulos:



En cada figura podemos encontrar 5 triángulos iguales al rayado en la misma; por tanto, en total hay 5 x 6 = 30 triángulos.

ACTIVIDADES-PÁG. 258

1. Las derivadas de estas funciones podemos verlas en la imagen.

$$\frac{d\left(\frac{3}{2}\cdot x^4-\frac{4}{3}\cdot x^3-7\cdot x^2+\frac{x}{2}\right)}{dx} \rightarrow 6\cdot x^3-4\cdot x^2-14\cdot x+\frac{1}{2}$$

$$f(x):=3^{2x^2}\cdot\left(4x-\frac{7}{3}\right) \rightarrow x\mapsto 3^{2\cdot x^2}\cdot\left(4\cdot x-\frac{7}{3}\right)$$

$$f' \rightarrow x\mapsto (17.578\cdot x^{2.}-10.254\cdot x+4.)\cdot 3.^{2.\cdot x^2}$$

2. El valor de las derivadas de estas funciones en los puntos indicados podemos verlas en la imagen

$$f(x):=\frac{3x}{x^2+5} \rightarrow x\mapsto \frac{3\cdot x}{x^2+5}$$

$$f'(2) \rightarrow \frac{1}{27}$$

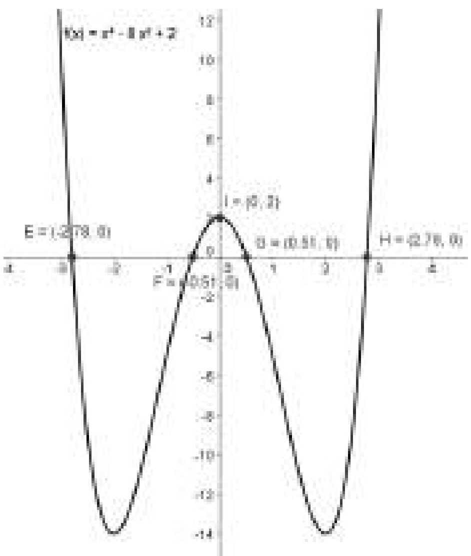
$$g(x):=\frac{3}{5}\cdot\sqrt{8+4\cdot x^3} \rightarrow x\mapsto \frac{3}{5}\cdot\sqrt{8+4\cdot x^3}$$

$$g'(-1) \rightarrow \frac{9}{5}$$

ACTIVIDADES-PÁG. 259

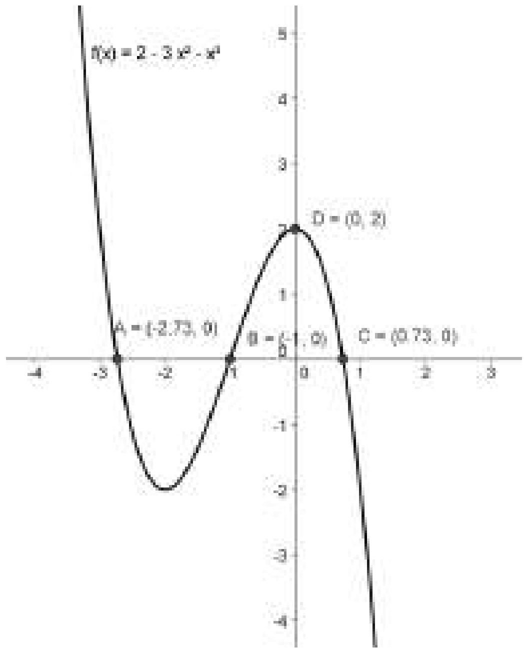
1. a) En la imagen vemos la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$.

Los puntos de corte con los ejes son: E (- 2,78; 0); F (- 0,51; 0); G (0,51; 0); H (2,78; 0) e I (0, 2).



b) En la imagen vemos la gráfica de la función $f(x) = 2 - 3x^2 - x^3$

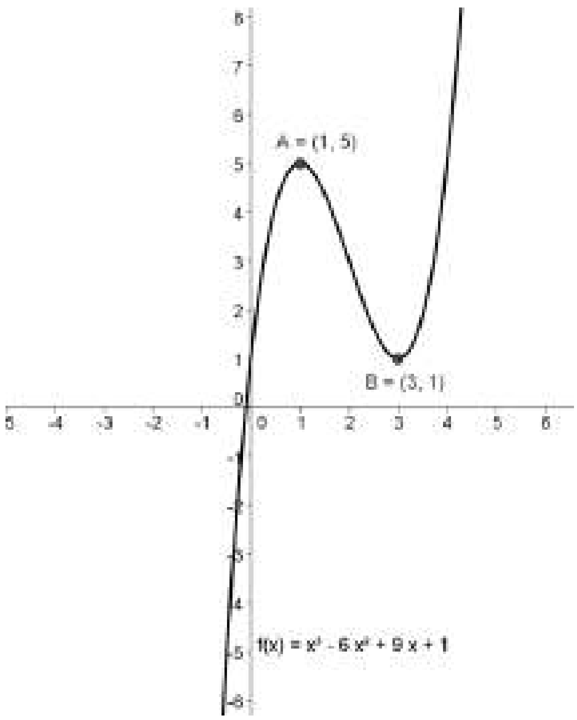
Los puntos de corte con los ejes son: A (- 2,73; 0); B (- 1; 0); C (0,73; 0) y D (0, 2).



2. a) En la imagen vemos la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Los extremos son: máximo A (1, 5) y mínimo B (3, 1).

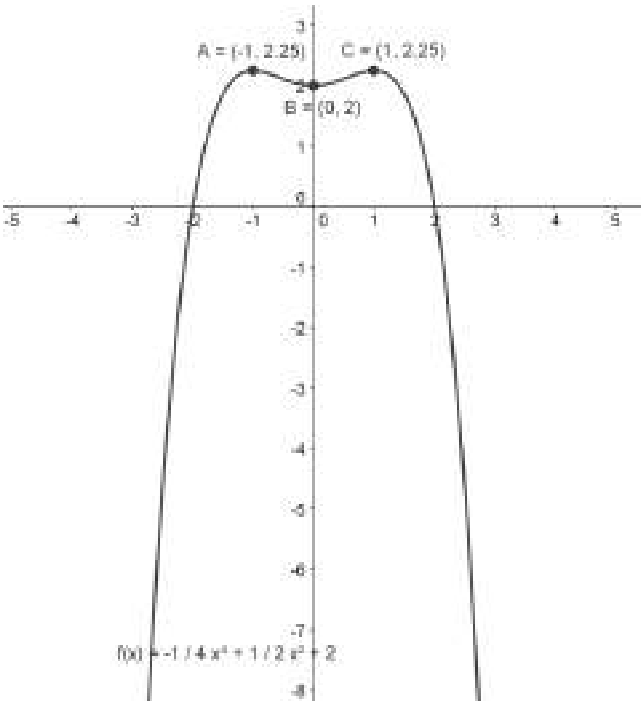
Es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en (1, 3).



b) En la imagen vemos la gráfica de la función $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2$

Los extremos son: máximos en A (- 1; 2,25) y C (1; 2,25) y mínimo en B (0, 2).

Es creciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y decreciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

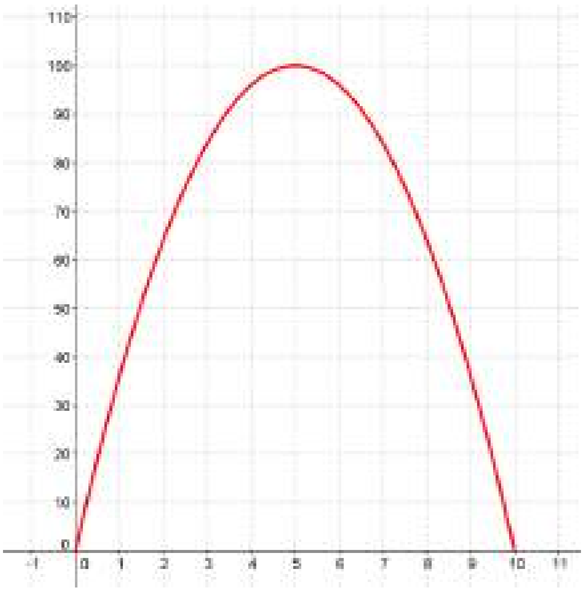


ACTIVIDADES-PÁG. 260

1. La tabla queda del siguiente modo:

	[- 2, 3]	[0, 4]	[2, 5]
a) f (x) = 2x + 4	2	2	2
b) $g(x) = 7x - x^3$	0	- 9	- 32
c) $h(x) = \sqrt{x+6}$	$\frac{1}{5} = 0{,}2$	$\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{4} = 0{,}18$	$\frac{\sqrt{11}-\sqrt{8}}{3} = 0{,}16$
d) $t(x) = \frac{2}{x^2-1}$	$-\frac{1}{12} = -0{,}083$	$\frac{8}{15} = 0{,}53$	$-\frac{7}{36} = -0{,}19$

2. Las soluciones son:



a) La gráfica la podemos ver en el dibujo.

b) Las tasas de variación medias son:

TVM [1; 1,5] = 30 m/s

TVM [1; 3 = 24 m/s

TVM [1; 5] = 16 m/s

c) Los valores anteriores son las velocidades medias que alcanza el balón en cada uno de los intervalos citados.

3. Los resultados son:

a) $t_{vm}\ [1,\ 2] = \frac{f\ (2) - f\ (1)}{2 - 1} = 6 \cdot 1{,}2^2 - 1 \cdot 1{,}2 = 1{,}44\ {m^3}/{año}$

Indica la velocidad de crecimiento de la cantidad de madera del bosque.

b) $t_{vi}\ (1{,}5) = \lim_{h \to 0} \frac{f\ (1{,}5 + h) - f\ (1{,}5)}{f} = D\ [\ f\ (1{,}5)] = 6 \cdot 1{,}2^{1{,}5} \cdot \ln 1{,}2 = 1{,}44\ {m^3}/{año}$

Indica la velocidad de crecimiento de la cantidad de madera en ese momento del bosque.

4. La velocidad media entre los instantes 2,5 y 6 vale 13 m/s.

La velocidad instantánea en el instante 2,5 vale 6 m/s.

La velocidad instantánea en el instante 6 vale 20 m/s.

5. El valor de las derivadas es:

a) $f\,'(-1) = -6$ b) $f\,'(2) = \frac{1}{4}$ c) $f\,'(7) = \frac{2}{5}$

6. Los resultados podemos verlos en la tabla siguiente:

Función	**Tangente**	**Pendiente**
a) $f(x) = 8 + x$	$y = x + 8$	1
b) $g(x) = 2 - x^2$	$y = 2$	0
c) $t(x) = \frac{1}{x+1}$	$y = -x + 1$	- 1

7. La ecuación de la recta tangente en el punto (0, 5) es $y = 5 - 2x$.

8. Los puntos son (1,5) y (5,5).

Las rectas tangente y normal en el punto (1, 5) son: $8x + y = 13$ e $x - 8y = -39$.

Las rectas tangente y normal en el punto (5, 5) son: $8x - y = 35$ e $x + 8y = 45$.

9. La pendiente es tg 45º = 1. El punto es (1, 2)

10. Si es paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante su pendiente es -1. El punto es (- 1, - 3/4)

Si es paralela al eje de abscisas su pendiente es 0. El punto es (0, - 1)

ACTIVIDADES-PÁG. 261

11. En la gráfica observamos que $f'(2) = 0$ y $f'(-1/2) = -3{,}75$.

12. Quedan:

a) $D[x^8] = 8x^7$

b) $D[3x^2 - 4] = 6x$

c) $D[5x^2 + 4x - 1] = 10x + 4$

d) $D\left[\dfrac{x^3}{6}\right] = \dfrac{x^2}{2}$

e) $D\left[3\sqrt[5]{x}\right] = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^4}}$

f) $D\left[\dfrac{7x^2 + 1}{4}\right] = \dfrac{7x}{2}$

g) $D\left[\dfrac{3}{x^4}\right] = \dfrac{-12}{x^5}$

h) $D[(x - 2x^2)^3] = (x - 2x^2)^2 \cdot (3 - 12x)$

i) $D\left[\sqrt{3x^4 - 2}\right] = \dfrac{6x^3}{\sqrt{3x^4 - 2}}$

j) $D\left[2\sqrt[3]{4x^3 + 3x}\right] = \dfrac{8x^2 + 2}{\sqrt[3]{(4x^3 + 3x)^2}}$

k) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{3 + 2x^2}}\right] = \dfrac{-2x}{(3 + 2x^2)^{3/2}}$

l) $D\left[4x^3 \cdot (x^2 - 3)^2\right] = 28x^6 - 120x^4 + 108x^2$

13. Las derivadas quedan:

a) $D\left[\dfrac{2x}{2x-5}\right] = \dfrac{-10}{(2x-5)^2}$

b) $D\left[\dfrac{7x^2-4}{7x^2+4}\right] = \dfrac{112x}{(7x^2+4)^2}$

c) $D\left[\dfrac{5x-2}{5x}\right] = \dfrac{2}{5x^2}$

d) $D\left[\dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{3}{2}x^3 + 5x\right] = x^3 - (9/2)x^2 + 5$

e) $D\left[\dfrac{3x}{x^3+3}\right] = \dfrac{9-6x^3}{(x^3+3)^2}$

f) $D\left[\dfrac{2+5x^4}{2-5x^4}\right] = \dfrac{80x^3}{(2-5x^4)^2}$

g) $D\left[\dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+5}}\right] = \dfrac{15}{(4x^2+5)\sqrt{4x^2+5}}$

h) $D\left[\dfrac{(5x^2-1)^2}{x}\right] = \dfrac{75x^4-10x^2-1}{x^2}$

i) $D\left[\dfrac{4}{(x^4-3x)^3}\right] = \dfrac{36-48x^3}{(x^4-3x)^4}$

14. Las derivadas quedan:

a) $D\left[5^{\frac{x}{4}}\right] = 5^{\frac{x}{4}} \cdot \ln 5 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)$

b) $D[2 \cdot 3^{2x}] = 4 \cdot 3^{2x} \cdot \ln 3$

c) $D\left[e^x - e^{-x}\right] = e^x + e^{-x}$

d) $D\left[5^{3x} \cdot 3^{5x}\right] = 5^{3x} \cdot \ln 5 \cdot 3^{5x+1} + 3^{5x} \cdot \ln 3 \cdot 5^{3x+1}$

e) $D\left[\dfrac{e^{-2x}}{4}\right] = \dfrac{-e^{-2x}}{2}$

f) $D[(e^{2x}+1)^4] = 8 \cdot e^{2x} \cdot (e^{2x}+1)^3$

ACTIVIDADES-PÁG. 262

15. Las derivadas quedan:

a) $D[\ln(7x^2-1)] = \dfrac{14x}{7x^2-1}$

b) $D[\ln(2+x^3)^2] = \dfrac{6x^2}{2+x^3}$

c) $D\left[\ln\sqrt{4x^3-9}\right] = \dfrac{6x^2}{4x^3-9}$

d) $D[\log_3 (x^2 - 1)] = \dfrac{2x}{(x^2-1)\cdot \ln 3}$

e) $D[\ln (e^x \cdot 2x)] = D[x + \ln (2x)] = 1 + 1/x$

h) $D\left[\ln\left(\dfrac{2-5x}{2+5x}\right)\right] = D\left[\ln(2-5x) - \ln(2+5x)\right] = \dfrac{-5}{2-5x} - \dfrac{5}{2+5x} = \dfrac{-20}{4-25x^2}$

16. Las derivadas quedan:

a) $D[\text{sen } 3x] = 3 \cdot \cos 3x$

b) $D[3 \text{ sen } x] = 3 \cdot \cos x$

c) $D[sen\ x^3] = 3x^2 \cos x^3$

d) $D[\text{sen}^3 x] = 3 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos x$

e) $D[\cos x^{-4}] = 4x^{-5} \cdot \text{sen } x^{-4}$

f) $D[4 \cos x] = -4 \cdot \text{sen } x$

g) $D[\cos^2 4x] = -8 \cos 4x \cdot \text{sen } 4x$

h) $D\left[\sqrt{\cos 2x^2}\right] = \dfrac{-2x \cdot sen\ (2x^2)}{\sqrt{\cos 2x^2}}$

i) $D[\text{tg } (2x-4)] = 2(1 + \text{tg}^2 (2x-4))$

j) $D\left[tg\ \sqrt{x}\right] = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$

k) $D[\text{tg}^3 (3^x)] = \text{tg}^2 (3^x) \cdot [1 + \text{tg}^2 (3^x)] \cdot 3^{x+1} \cdot \ln 3$

l) $D[x \cdot \text{tg } x] = \text{tg } x + x \cdot (1 + \text{tg}^2 x)$

17. a) $D\left[(1-x)\sqrt{1+x}\right] = \dfrac{-1-3x}{2\sqrt{1+x}}$

b) $D\left[\sqrt[3]{3x^5+4}\right] = \dfrac{5x^4}{\sqrt[3]{(3x^5+4)^2}}$

c) $D\left[\dfrac{2x^2+1}{2x^2-1}\right] = -\dfrac{8x}{(2x^2-1)^2}$

d) $D[(7x^2 - 3).(5x - 4)^5] = (245x^2 - 96x - 15) \cdot (5x - 4)^4$

e) $D[(x^2 + 1)^2 \cdot e^{2x}] = 2(x^2 + 1) \cdot e^{2x} \cdot (x + 1)^2$

f) $D[\ln 6 \cdot 6^x] = \ln^2 6 \cdot 6^x$

g) $D\left[\dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}\right] = \dfrac{8}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+4\right)^2}$

h) $D\left[\dfrac{x^2-2x-5}{x^2-1}\right] = \dfrac{2x^2+8x+2}{\left(x^2-1\right)^2}$

i) $D[x^a \cdot a^x \cdot e^{ax}] = x^{a-1} \cdot a^x \cdot e^{ax} \cdot [a + x \cdot \ln a + ax]$

j) $D[\text{sen } 7x \cdot 7^{2x}] = 7^{2x} \cdot [7 \cdot \cos(7x) + 2 \cdot \ln 7 \cdot \text{sen}(7x)]$

k) $D\left[\dfrac{x^2}{3^{2x}}\right] = \dfrac{2x - 2 \cdot \ln 3 \cdot x^2}{3^{2x}}$

l) $D\left[\dfrac{e^{x^2}}{x}\right] = \dfrac{e^{x^2} \cdot (2x^2 - 1)}{x^2}$

18. Las respuestas son:

a) $f'(x) = -4$; por tanto, f (x) es decreciente en todo R.

b) $f'(x) = -8 - 4x$; por tanto, f (x) es creciente en $(-\infty, -2)$ y decreciente en $(-2, +\infty)$.

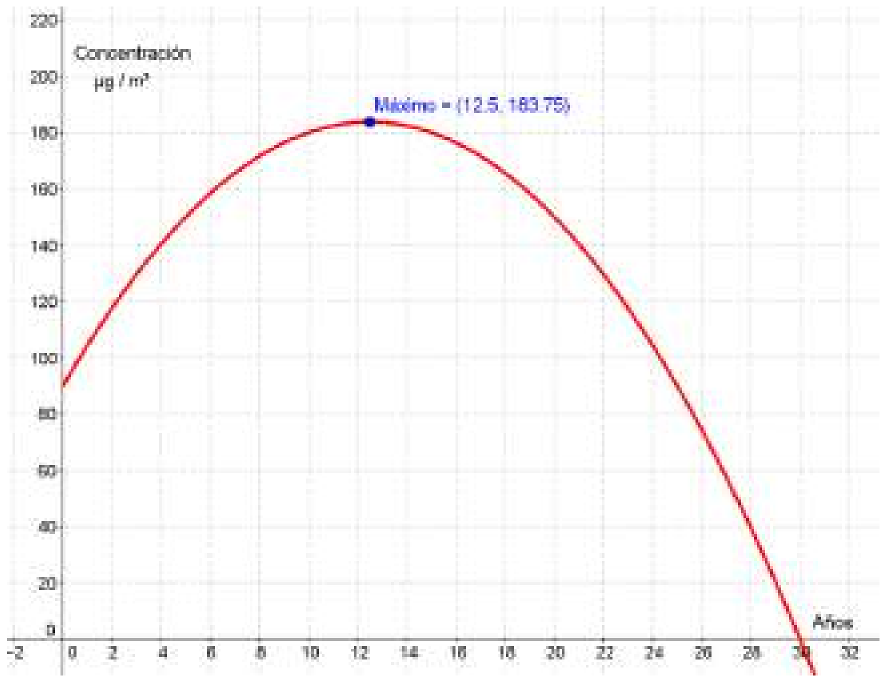
c) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; por tanto, f (x) es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en $(1, 3)$.

d) $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$ por tanto, f (x) es decreciente en R- {0}

e) $f'(x) = 16x - 4x^3$; por tanto, f (x) es creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ y decreciente en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.

f) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 16x}{(x-4)^2}$; por tanto, f (x) es creciente en $(-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$ y decreciente en $(0, 4) \cup (4, 8)$.

19. Al ser C ´ (t) = 15 – 1,2 t, el ozono aumenta desde el año 0 al 12,5. Disminuye del año 12,5 en adelante. Todo puede verse en la gráfica adjunta.



20. El beneficio es nulo para los valores de x que satisfagan la ecuación $0 = 32x - 4x^2 - 60$, es decir x = 5 o x = 3 millones de euros.

La empresa tiene pérdidas para B ´(x) = 32 – 8x < 0 es decir para x > 4 millones de euros. El beneficio aumenta para valores de x en el intervalo (0, 4)

21. N ´ (h) = $3h^2$ – 96 h + 756. El número de visitantes aumenta cuando N ´ (h) > 0, es decir desde las 10 a las 14 horas y desde las 18 a las 22 horas. El número de visitantes disminuye de 14 a 18 horas.

ACTIVIDADES-PÁG. 263

22. Los extremos son:

a) f ´(x) = -12 - 6x = 0 en x = -2. f ´´ (-2) = -6 < 0, por tanto, f (x) tiene un máximo en (- 2, 32).

b) f ´ (x) = $20x^3$ – 20x = 0 en x = 0 , x = 1 y x = -1.

$$f''(x) = 60x^2 - 20 \quad \begin{cases} f''(0) < 0 \\ f''(1) > 0 \\ f''(-1) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ tiene un } \begin{cases} \text{máximo en } (0, 3) \\ \text{mínimo en } (1, -2) \\ \text{mínimo en } (-1, -2) \end{cases}$$

c) f ´ (x) = $6x^2$ – 12x – 18 = 0 en x = -1 y x = 3.

$$f''(x) = 12x - 12 \quad \begin{cases} f''(-1) < 0 \\ f''(3) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ tiene un } \begin{cases} \text{máximo en } (-1,\ 11) \\ \text{mínimo en } (3, -53) \end{cases}$$

23. Los números son 3 y 3

24. La solución queda:

a) Función beneficio: B (t) = I (t) – G (t), es decir:

B (t) = (42 t - 3t^2) – (2t^2 – 8t + 105) = - 5t^2 + 50 t - 105

b) La derivada B ´ (t) = - 10x + 50 se anula en t = 5.

B ´´ (5) = - 10 < 0. El beneficio es máximo al vender 5 unidades de producto.

c) Para t = 5, el beneficio máximo es:

B (5) = 20 000 euros.

25. Los lados del recinto medirán x y (55 – x) metros. El área es A(x) = 55x – x^2.

A´(x) = 55 – 2x = 0 ; x = 27,5 m.

A´´ (27,5) = -2 < 0. Por tanto el área es máxima cuando los lados midan 27,5 m cada uno, es decir es un cuadrado y su área es 756,25 m^2.

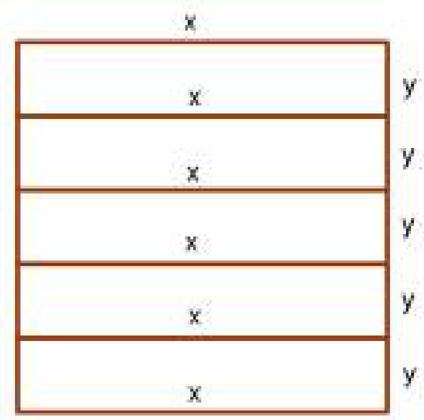
26. La anulación de la primera derivada:

$$C´(x) = \frac{-200}{x^2} + \frac{1}{2} = 0; \; x = 20 \text{ trabajadores.}$$

En la segunda obtenemos: C ´´(x) = $\dfrac{400}{x^3}$; C´´ (20) > 0. El coste es mínimo para 20 trabajadores

El coste mínimo es: C (20) = 420 000 euros.

27. Observando el dibujo adjunto tenemos:



6x + 10 y = 3660 $\Rightarrow$ $y = 366 - \frac{3}{5}x$

El área será $A(x) = x \cdot \left(366 - \frac{3}{5}x\right)$.

Esta función alcanza un mínimo para x = 305.

Las dimensiones de las pistas serán 305 metros por 183 metros.

28. Las dimensiones serán $\frac{40}{3}$ cm y $\frac{20}{3}$ cm.

29. $f\,'(x) = 3x^2 + 2Kx - 3$; $f\,'(3) = 0$; $K = -4$.

30. Llamamos x al lado de la base del prisma e y a la altura. Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$V = x^2 \cdot y = 42\,750$

Coste : $C(x) = 95x^2 + \frac{5130000}{x}$; $C'(x) = 190x - \frac{5130000}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 30\,dm$

$C''(30) > 0$. Luego las dimensiones que hacen mínimo el coste son: base 30 dm y altura 47,5 dm

31. La solución es:

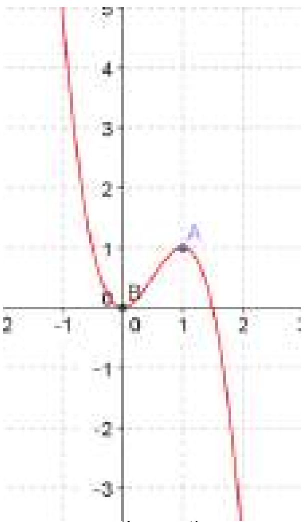
$N'(t) = -480 + 144t - 6t^2 = 0$; $x = 4$; $x = 20$

$N''(t) = 144 - 12t$; $N''(4) > 0$ y $N''(20) < 0$. Por tanto:

El máximo número de personas conectadas a Internet se produce a las 20 horas y es de 8200 personas. El mínimo número se produce a las 4 de la mañana y es de 4104 personas.

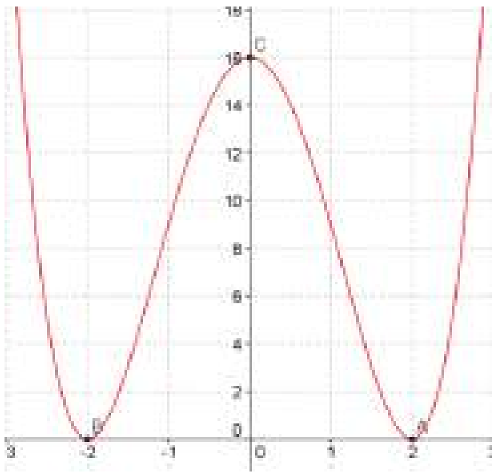
32. Las gráficas son:

a)



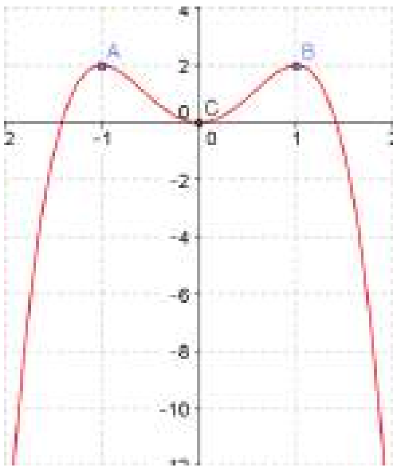
$y = 3x^2 - 2x^3$
Máximo (1, 1)
Mínimo (0, 0)
Cortes (0, 0) y (1, 5; 0)

b)



$y = x^4 - 8x^2 + 16$
Máximo (0, 16)
Mínimos (- 2, 0) y (2, 0)
Cortes (- 2, 0); (2, 0) y (0, 16)
Simétrica respecto de OY

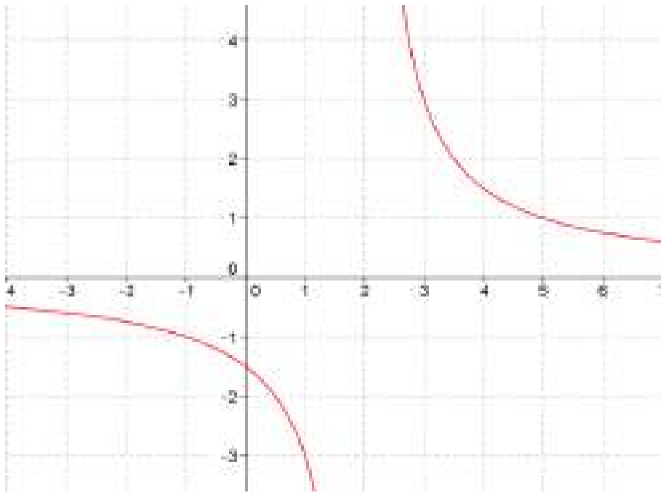
c)



$y = 4x^2 - 2x^4$

Máximo (- 1, 2) y (1, 2)
Mínimo (0, 0)
Cortes (- 1, 4; 0) (1, 4; 0) y (0; 0)
Simétrica respecto de OY

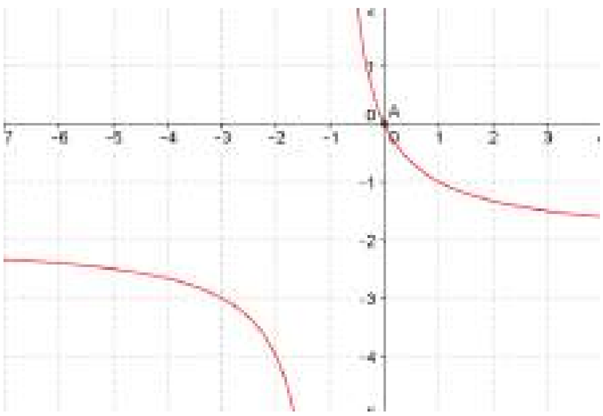
d)



$$y = \frac{3}{x - 2}$$

Asíntotas x = 2 e y = 0

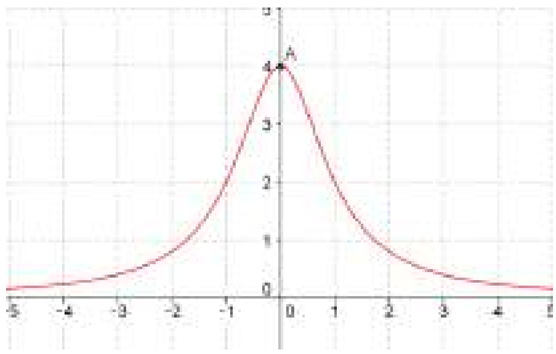
e)



$$y = \frac{-2x}{x + 1}$$

Asíntotas x = - 1 e y = - 2
Cortes (0; 0)

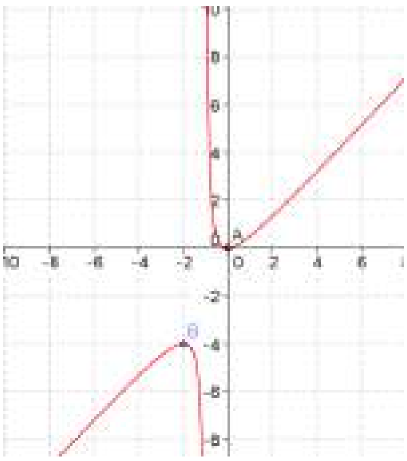
f)



$$y = \frac{4}{x^2 + 1}$$

Asíntota y = 0
Cortes (0, 4)
Máximo (0, 4)
Simétrica respecto de OY

g)

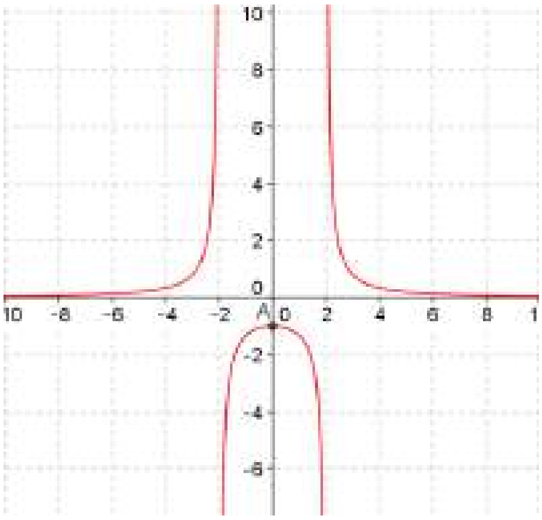


$$y = \frac{x^2}{x+1}$$

Asíntotas x = - 1 e y = x - 1

Cortes (0, 0)

h)



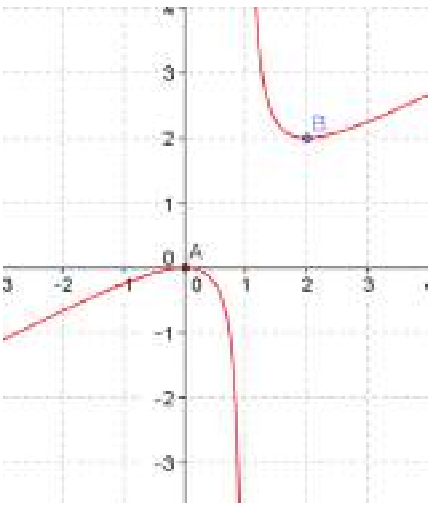
$$y = \frac{4}{x^2 - 4}$$

Asíntotas x = 2, x = - 2 e y = 0

Cortes (0, -1)

Simétrica respecto al eje OY

i)



$$y = \frac{x^2}{2\,(x-1)}$$

Asíntotas x = 1 e y = 1/2

Cortes (0, 0)

ACTIVIDADES-PÁG. 264

33. La producción aumenta cuando $P'(T) = 120 + 54T - 3T^2 > 0$.

$P'(T) = 120 + 54T - 3T^2 = 0$; $T = 20º$; $T = -2º$. Aumenta la producción cuando $T \in (-2º, 20º)$

El máximo número de kilos se consigue para T = 20º

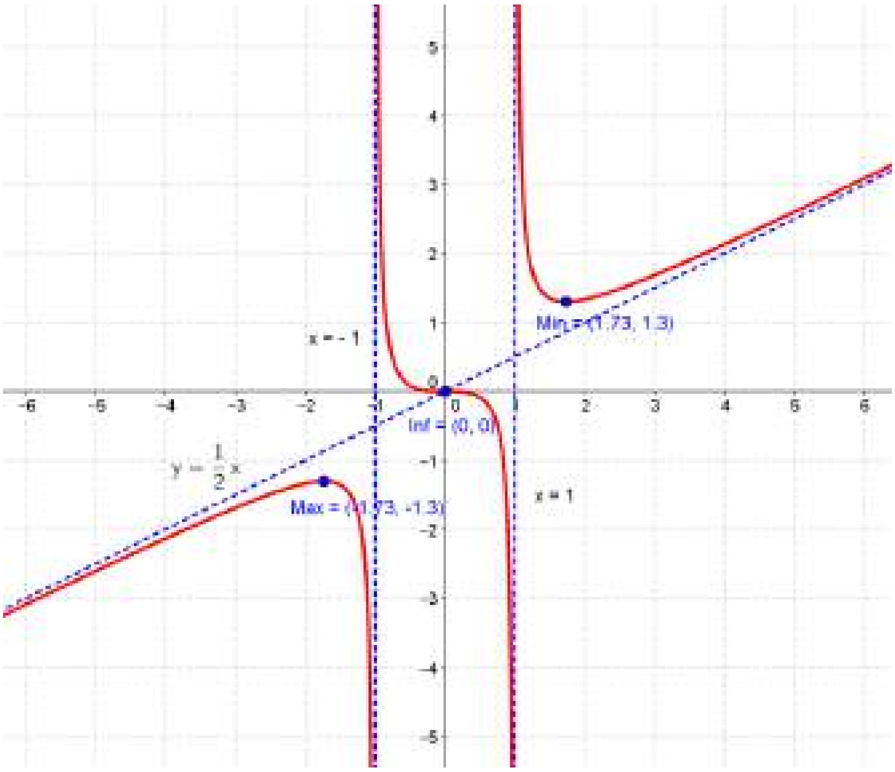
34. Las asíntotas de la función son las rectas x = - 1, x = 1 e $y = \frac{1}{2}x$.

La función es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ y decreciente en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Tiene un máximo relativo en el punto $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ y un mínimo relativo en el punto $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.

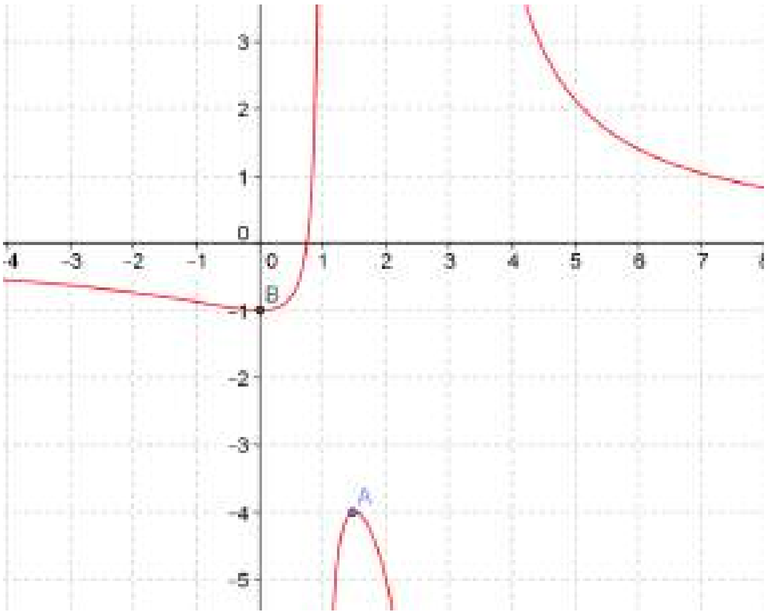
Es cóncava hacia las y positivas en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Tiene un punto de inflexión en (0, 0).

Todo lo anterior puede verse en la gráfica.

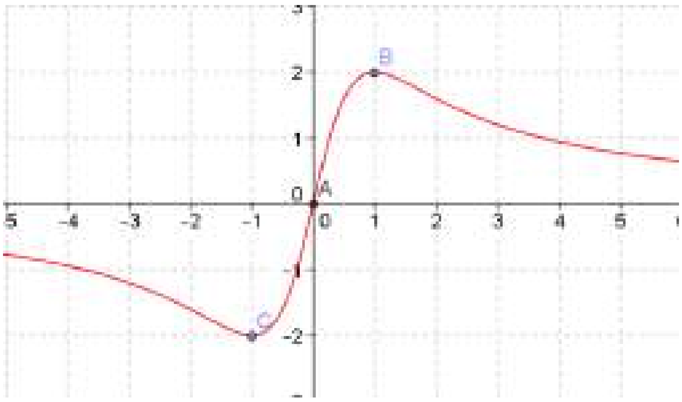


35. Las gráficas son:

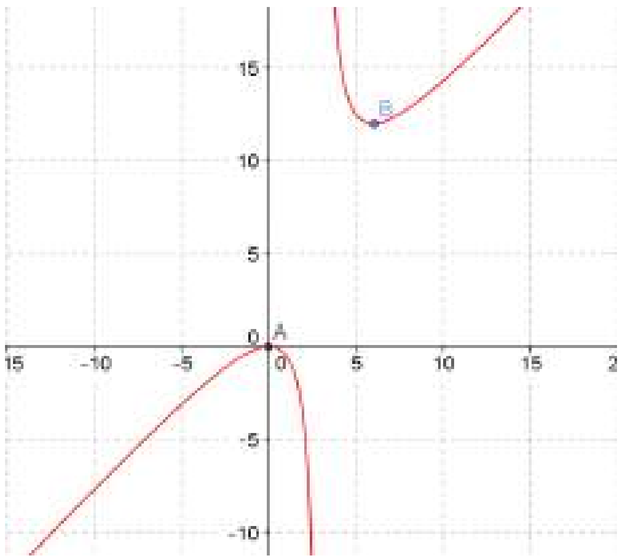
a)
Máximo (1,5; - 4)
Mínimo (0, - 1)
Cortes (3/4; 0) y (0, -1)
Asíntotas x = 3; x = 1; y = 0



b)
Máximo (1, 2)
Mínimo (- 1, - 2)
Cortes (0, 0)
Asíntotas y = 0
Simétrica respecto al origen de coordenadas



c)
Máximo (0, 0)
Mínimo (6, 12)
Cortes (0, 0)
Asíntotas x = 3; y = x + 3



36. La función que muestra el ingreso es:

$$I(x) = (60\,000 - 6x) \cdot x = 60\,000\,x - 6x^2$$

Para que este ingreso sea máximo ha de vender a 5000 € la pieza.

37. Llamaos x e y a las dimensiones del cartel. La función a minimizar es A (x, y) = x · y.

La relación entre las variables x e y es:

$$(x-8)\cdot(y-5) = 100 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{5x+60}{x-8}$$

Sustituyendo en la función anterior, obtenemos: $A(x) = \dfrac{5x^2 + 60x}{x-8}$.

La primera derivada, $A\,'(x) = \dfrac{5x^2 - 80x - 480}{(x-8)^2}$, se anula para x = 20,65.

Por tanto las dimensiones del cartel serán x = 20,65 cm e y = 12,91 cm.

38. a) El radio inicial es R (0) = 0,5 cm. Para que el radio sea de 2,5 cm han de pasar 2,13 minutos.

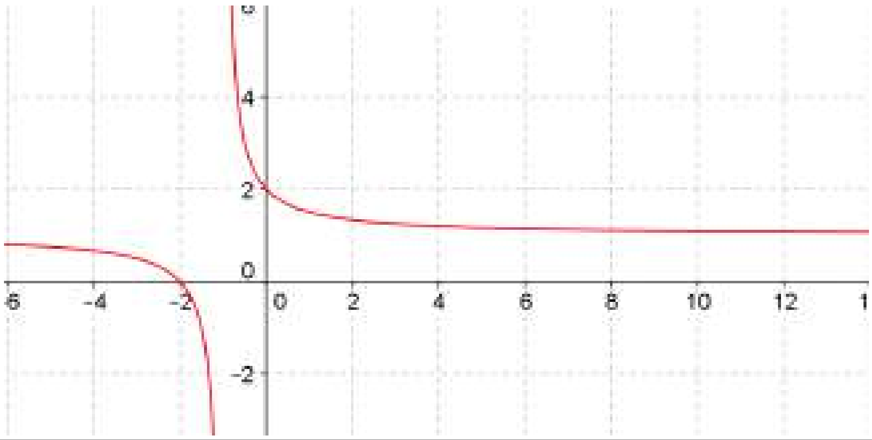
b) La tasa de variación del radio respecto al tiempo viene dada por $\dfrac{dR}{dt} = \dfrac{162 \cdot t^2}{(t^3+12)^2}$.

c) El área de la mancha es A (t) = π · R^2 y $\dfrac{dA}{dt} = 2\pi \cdot \dfrac{6+5t^3}{t^3+12} \cdot \dfrac{162 \cdot t^2}{(t^3+12)^2}$ y para R = 4; t = 4,48 minutos y la tasa de variación del área de la mancha es 8,79 m^2/min.

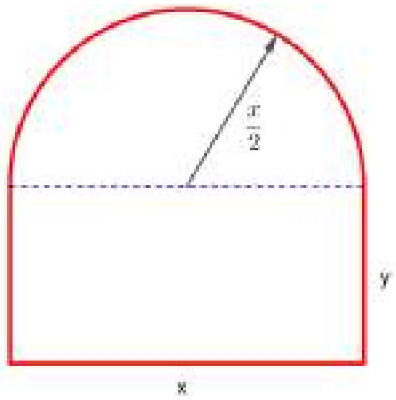
39. En el dibujo está representada gráficamente la función dada.

Sólo consideramos la parte positiva de la gráfica (desde t = 0), ya que el resto no tiene sentido en el contexto.

En el año 1980 (t = 0) había 2000 ejemplares de lince ibérico, éstos van disminuyendo con los años tendiendo hacia 1000 ejemplares.



40. Llamamos x e y a las dimensiones del rectángulo y $\frac{x}{2}$ al radio de la semicircunferencia como puede verse en la imagen.



El perímetro de la ventana mide:

$$x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 8 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{16 - 2x - \pi x}{4}$$

La superficie de la ventana, en función de la variable x, es:

$$A\,(x) = \frac{-4x^2 - \pi x^2 + 32x}{8} \quad \Rightarrow \quad A\,(x) = -\frac{(4+\pi)x^2}{8} + 4x$$

El valor que hace máxima a la función anterior es $x = \frac{16}{4+\pi} = 2{,}24$.

Por tanto, las dimensiones de la ventana serán x = 2,24 m e y = 1,12 m.

ACTIVIDADES-PÁG. 265

Las propiedades de esta gráfica son:

No está definida en el origen.

No tiene simetrías ni es periódica.

No tiene cortes con los ejes coordenadas.

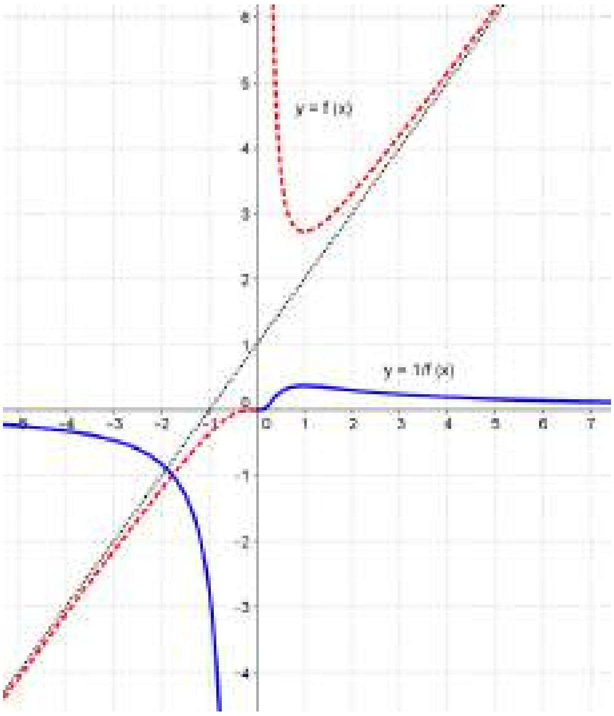
Las asíntotas son las rectas x = 0 (eje OY) e y = x + 1.

Tiene un mínimo relativo y no tiene máximos relativos ni puntos de inflexión.

Las gráficas de las funciones pedidas son las que están dibujadas en trazo continuo de color azul. Van acompañadas de la gráfica de la función y = f (x) en trazo discontinuo de color rojo

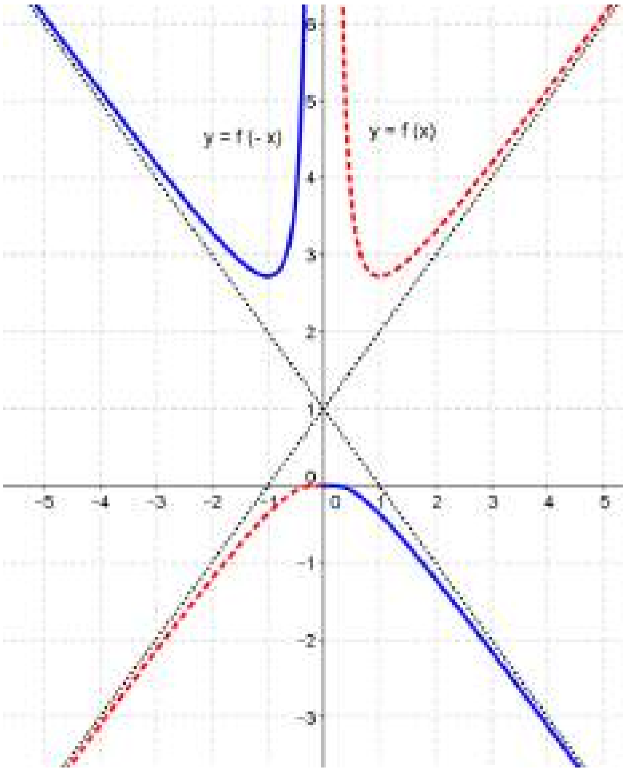
a) y = 1/f (x)

Se dibuja teniendo en cuenta que donde la f(x) crece esta decrece y donde decrece esta crece. Además los cortes con OX de f(x) son asíntotas verticales de esta otra.



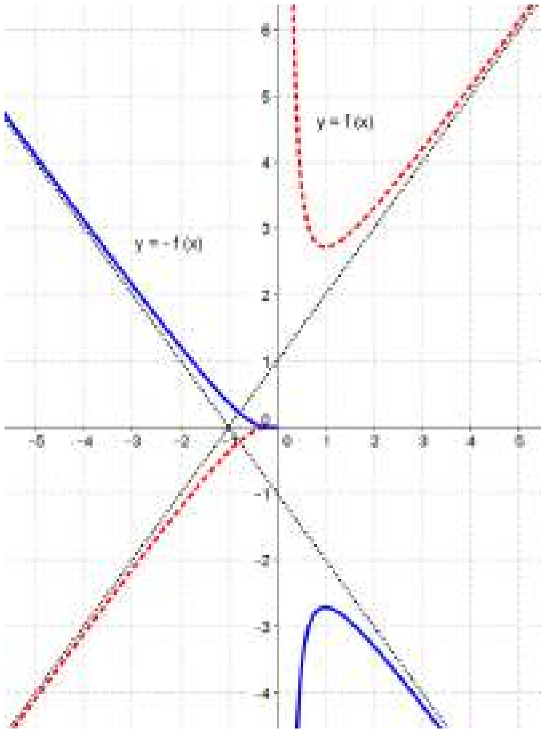
b) y = f (- x)

Se dibuja teniendo en cuenta que esta gráfica es la simétrica de f(x) respecto al eje de ordenadas.



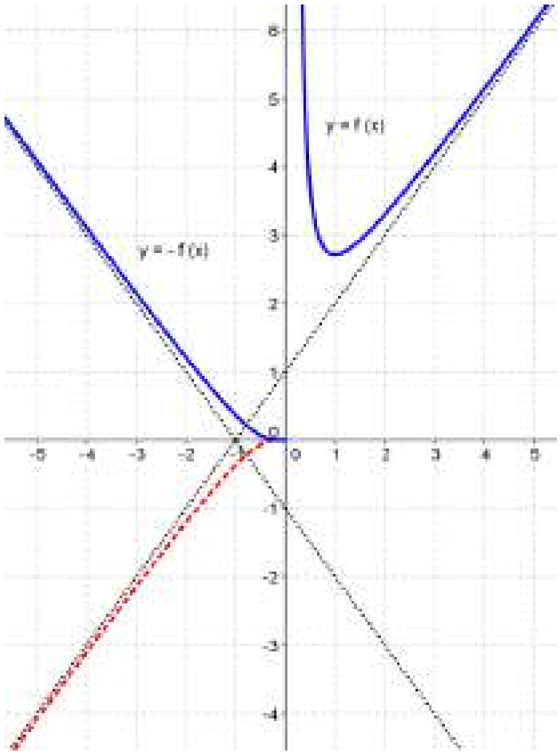
c) y = - f (x)

Se dibuja teniendo en cuenta que esta gráfica es la simétrica de f(x) respecto al eje de abscisas.



d) y = | f(x) |

Se dibuja teniendo en cuenta que esta gráfica se obtiene de f(x) manteniendo la parte de ordenadas positivas y las ramas de ordenadas negativas se hace su simétrica respecto al eje de abscisas.



UNIDAD 12: Distribuciones bidimensionales. Correlación y regresión

ACTIVIDADES-PÁG. 268

1. La media y la desviación típica son: $\bar{x} = 1{,}866 \quad y \quad \sigma = 0{,}065.$

Los jugadores que se encuentran por encima de $\bar{x} + \sigma = 1{,}866 + 0{,}065 = 1{,}931$ son 5 del intervalo [1,90; 1,95) y 2 del intervalo [1,95; 2,00); en total 7.

2. La media y la desviación típica son $\bar{x} = 105 \quad y \quad \sigma = 23{,}95$.

El intervalo buscado es:

$$\left(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma\right) = (105 - 23{,}95;\ 105 + 23{,}95) = (81{,}05;\ 128{,}95).$$

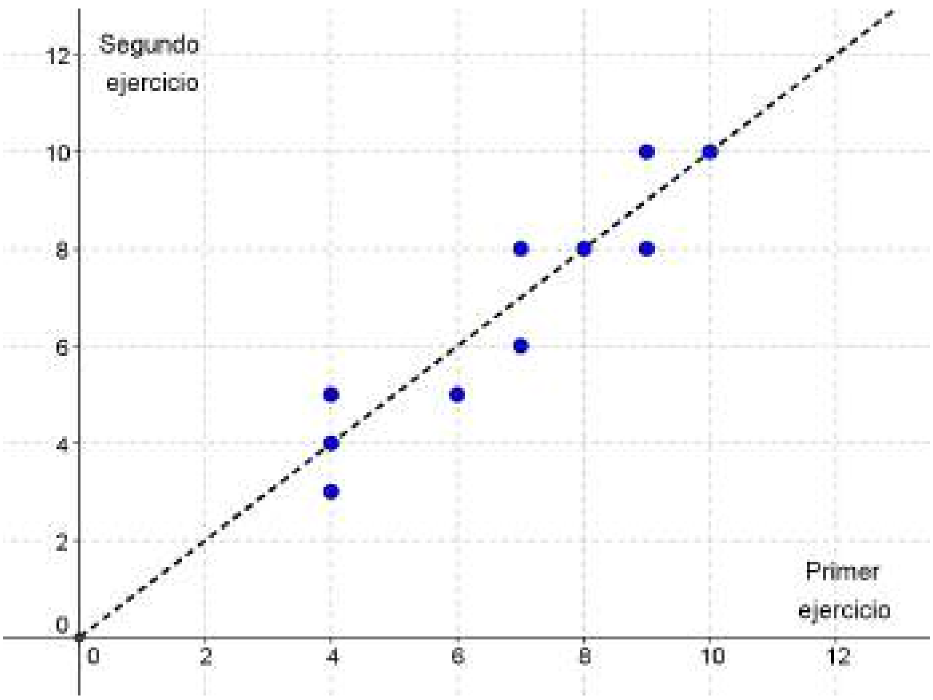
En el intervalo anterior se encuentran 9 + 18 + 19 + 8 = 54 valores del total, que representan el $\frac{54}{80} \cdot 100 = 67{,}5\%$ del total.

3. La nube de puntos parece en el gráfico.

La recta ajustada a ojo puede ser al bisectriz del primer cuadrante, y = x.

La correlación será positiva y fuerte, próxima a 1.

Si calculamos el coeficiente de correlación lineal obtenemos r = 0,927.

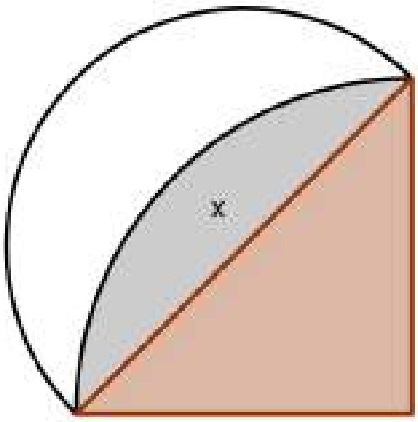


ACTIVIDADES-PÁG. 287

1. La estrategia consiste en establecer una analogía con el cuadrado mágico 3 x 3 que contiene los nueve primero números naturales 1, 2…, 8 y 9 y la constante mágica 15.

Hay que utilizarlo como si se jugase al tres en raya.

2. En total el nabab tenía 36 gemas y 6 hijos.



Al mayor le da $1 + \frac{35}{7} = 6$ gemas. Quedan 30.

Al 2º le da $2 + \frac{28}{7} = 6$ gemas. Quedan 24.

Al 3º le da $31 + \frac{21}{7} = 6$ gemas. Quedan 18.

Al 4º le da $1 + \frac{14}{7} = 6$ gemas. Quedan 12.

Al 5º le da $1 + \frac{7}{7} = 6$ gemas. Quedan 6.

Al 6º le da 6 gemas.

3. La solución queda:

Área del triángulo = $\frac{r^2}{2}$.

Área lúnula = $\frac{1}{2}$ · Área semicírculo – Área (x).

Área (x) = $\frac{1}{4}$ · Área círculo – Área triángulo = $\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$.

$$\text{Área lúnula} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\right) = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi r^2}{4} + \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2}.$$

Ambas áreas son iguales.

4. Cortó la cadena en 4 trozos de 1, 2, 4 y 8 cm cada uno.

- El primer día le dio 1 cm.
- El segundo día le dio el trozo de 2 cm y le devolvió la patrona el de 1 cm.
- El tercer día le dio el trozo de 1 cm, luego la patrona tiene 1 cm y 2 cm.
- El cuarto día le dio el trozo de 4 cm y la patrona le devolvió los dos trozos que tenía.
- Así sucesivamente.

ACTIVIDADES-PÁG. 289

1. a) Utilizando la tecla STAT y procediendo como se explica en el texto, obtenemos los siguientes parámetros:

2 – Var Stat
$\bar{x} = 181.00$
$\sum x = 1448.00$
$\sum x^2 = 262264.00$
$Sx = 5.01$
$\sigma x = 4.69$
↓ $n = 8.00$

2 – Var Stat
↑ $\bar{y} = 78.50$
$\sum y = 628.00$
$\sum y^2 = 49444.00$
$Sy = 4.57$
$\sigma y = 4.27$
↓ $\sum xy = 113805.00$

2 – Var Stat
$\sigma y = 4.27$
$\sum xy = 113805.00$
mínX = 175.00
máxX = 190.00
mínY = 70.00
máxY = 85.00

Para calcular el coeficiente de correlación de Pearson $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$, calculamos previamente la covarianza:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum f_{ij}\, x_i\, y_j}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{113805}{8} - 181 \cdot 78{,}50 = 17{,}125$$

Con este valor obtenemos: $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \dfrac{17{,}125}{4{,}69 \cdot 4{,}27} = 0{,}86$

b) La recta de regresión del peso (Y) sobre la estatura (X) es:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}) \quad \Rightarrow \quad y - 78{,}50 = \frac{17{,}125}{4{,}69^2}(x - 181) \quad \Rightarrow \quad y = 0{,}78x - 62{,}39$$

La recta de regresión de la estatura (X) sobre el peso (Y) es:

$$x - \bar{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \bar{y}) \quad \Rightarrow \quad x - 181 = \frac{17{,}125}{4{,}27^2}(y - 78{,}50) \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}94y + 107{,}34$$

Con la calculadora se determinan así:

- Para la recta de regresión del peso (Y) sobre la estatura (X), en el menú de tecla **STAT**, elegimos **CALC** seguido de la opción **4:LinReg(ax+b),** tecleando posteriormente **L1, L2** (teclas 2nd 1; tecla , teclas 2nd 2) y obtenemos, como vemos en la imagen, la recta de ecuación $y = 0{,}78\,x - 62{,}39$

LinReg
y = ax + b
a = .78
b = -62.39

● Para la recta de regresión de la estatura (X) sobre el peso (Y), en el menú de tecla **STAT**, elegimos **CALC** seguido de la opción **4:LinReg(ax+b),** tecleando posteriormente **L2, L1** (teclas 2nd 2; tecla , teclas 2nd 1) y obtenemos, como vemos en la imagen, la recta de ecuación x = 0,94 y + 107,34

```
LinReg
  y = ax + b
  a = .94
  b = 107.34
```

2. a) Utilizando la tecla STAT y procediendo como se explica en el texto, obtenemos los siguientes parámetros para los datos de la tabla del enunciado:

```
2 – Var Stat
    x̄ = 21.25
  Σx = 170.00
  Σx² = 3950.00
  Sx = 6.94
  σx = 6.50
↓  n = 8.00
```

```
2 – Var Stat
↑   ȳ = 337.50
  Σy = 2700.00
  Σy² = 992600.00
Sy = 107.80
  σy = 100.84
↓ Σxy = 62600.00
```

```
2 – Var Stat
  σy = 100.84
  Σxy = 62600.00
  mínX = 14.00
  máxX = 32.00
  mínY = 210.00
  máxY = 500.00
```

Para calcular el coeficiente de correlación de Pearson $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$, calculamos previamente la covarianza:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum f_{ij}\, x_i\, y_j}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{62600}{8} - 21{,}25 \cdot 337{,}50 = 653{,}125$$

17

Con este valor obtenemos: $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \dfrac{653{,}125}{6{,}50 \cdot 100{,}84} = 0{,}996$

La recta de regresión del número de conejos (Y) sobre el número de zorros (X) es:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}) \quad \Rightarrow \quad y - 337{,}50 = \frac{635{,}125}{6{,}50^2}(x - 21{,}25) \quad \Rightarrow \quad y = 15{,}48x + 8{,}52$$

La recta de regresión del número de zorros (X) sobre el número de conejos (Y) es:

$$x - \bar{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \bar{y}) \quad \Rightarrow \quad x - 21{,}25 = \frac{635{,}125}{100{,}84^2}(y - 337{,}50) \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}06y - 0{,}43$$

Con la calculadora se determinan así:

- Para la recta de regresión del número de conejos (Y) sobre el número de zorros (X), en el menú de tecla **STAT**, elegimos **CALC** seguido de la opción **4:LinReg(ax+b),** tecleando posteriormente **L1, L2** (teclas 2nd 1; tecla , teclas 2nd 2) y obtenemos, como vemos en la imagen, la recta de ecuación y = 15,48 x + 8,52

```
LinReg
  y = ax + b
  a = 15.48
  b = 8.52
```

- Para la recta de regresión del número de zorros (X) sobre el número de conejos (Y), en el menú de tecla **STAT**, elegimos **CALC** seguido de la opción **4:LinReg(ax+b),** tecleando posteriormente **L2, L1** (teclas 2nd 2; tecla , teclas 2nd 1) y obtenemos, como vemos en la imagen, la recta de ecuación x = 0,06 y – 0,43

```
LinReg
  y = ax + b
  a = .06
  b = -.43
```

b) Estimamos la cantidad de conejos que habría si hubiera 10 zorros, calculando en la recta de regresión de Y sobre X, de ecuación y = 15,48x + 8,52, el valor que se obtiene al hacer x = 10.

Operando, obtenemos:

Si $x = 10 \quad \Rightarrow \quad y = 15{,}48 \cdot 10 + 8{,}52 \quad \Rightarrow \quad y = 163{,}32$.

Por tanto, si hubiera 10 zorros, la cantidad de conejos estimada sería 163.

c) Estimamos la cantidad de zorros que habría si hubiéramos contado 350 conejos, calculando en la recta de regresión de X sobre Y, de ecuación x = 0,06y – 0,43, el valor que se obtiene al hacer y = 350.

Operando, obtenemos:

Si $y = 350 \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}06 \cdot 350 - 0{,}43 \quad \Rightarrow \quad x = 20{,}57$.

Por tanto, si hubiera 350 conejos, la cantidad de zorros estimada sería 21.

ACTIVIDADES-PÁG. 290

1. Las soluciones son:

La media: $\overline{x} = 172{,}5$.

La desviación típica: $\sigma = 12{,}91$

El número de países en:

$\left(\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma\right) = (159{,}59; 185{,}41)$ es 161.

$$\left(\bar{x} - 2\sigma,\ \bar{x} + 2\sigma\right) = (146{,}68;\ 198{,}32) \text{ es } 200.$$
$$\left(\bar{x} - 3\sigma,\ \bar{x} + 3\sigma\right) = (133{,}77;\ 211{,}23) \text{ es } 200.$$

2. Los valores pedidos son:

Las medias aritméticas son: $\overline{x_A} = \dfrac{276}{10} = 26{,}7$ y $\overline{x_B} = \dfrac{285}{10} = 28{,}5$.

Las desviaciones típicas son: $\sigma_A = \sqrt{\dfrac{7243}{10} - (26{,}7)^2} = 3{,}38$ y $\sigma_B = \sqrt{\dfrac{8209}{10} - (28{,}5)^2} = 2{,}94$

Será aconsejable optar por la marca B, ya que tiene mayor media y, a su vez, menos desviación típica.

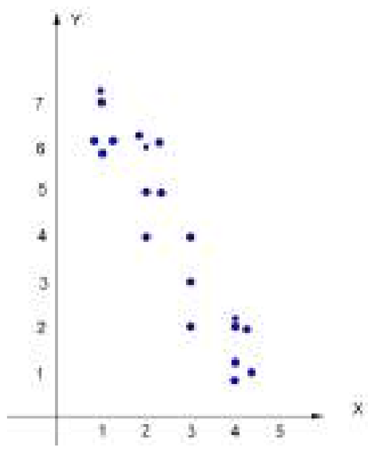
3. En cada caso queda:

a) No existe correlación.
b) Existe correlación negativa y fuerte.
c) Existe correlación positiva y fuerte.
d) No existe correlación.

4. a) La tabla de doble entrada es:

Y Viajes hijos / X Viajes padres	**1**	**2**	**3**	**4**	**TOTALES**
1				3	3
2			1	3	4
3			1		1
4		1	1		2
5		2			2
6	3	3			6
7	2				1
TOTALES	5	6	3	6	20

b) El diagrama de dispersión es:



Se observa una correlación negativa fuerte (puede calcularse el coeficiente de correlación r = - 0,944).

ACTIVIDADES-PÁG. 291

5. a) La tabla bidimensional de doble entrada es:

X / Y	3	4	5	6	7	8	9	10	Totales
3		2							2
4	1	2	2						5
5		3	3	2	5				13
6			3						3
7									0
8				5		6			11
9									0
10						5	7	4	16
Totales	1	7	8	7	5	11	7	4	50

b) La tabla bidimensional simple es:

x_i	3	4	4	4	5	5	5	6	6	7	8	8	9	10
y_i	4	3	4	5	4	5	6	5	8	5	8	10	10	10
f_i	1	2	2	3	2	3	3	2	5	5	6	5	7	4

c) Las tablas de las distribuciones marginales son:

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
f_i	1	7	8	7	5	11	7	4	50

y_i	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
f_i	2	5	13	3	0	11	0	16	50

d) La distribución correspondiente a la variable X condicionada a que Y tome el valor 5 es:

$x_i / _{Y=5}$	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
f_i	0	3	3	2	5	0	0	0	13

e) La distribución correspondiente a la variable Y condicionada a que X tome el valor 5 es:

$y_i / _{X=5}$	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
f_i	0	2	3	3	0	0	0	0	8

6. a) La tabla bidimensional simple es:

x_i	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7

y_i	1	2	2	3	3	4	4	5	4	5
f_i	1	2	4	6	10	12	15	5	1	4

b) Los parámetros buscados son:

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
3	3	9	27
4	10	40	160
5	22	110	550
6	20	120	720
7	5	35	245
Sumas	60	314	1702

$$\bar{x} = \frac{314}{60} = 5{,}23 \qquad \sigma_x = \sqrt{\frac{1702}{60} - (5{,}23)^2} = 1{,}01$$

y_i	f_i	$f_i \cdot y_i$	$f_i \cdot yx_i^2$
1	1	1	1
2	6	12	24
3	16	48	144
4	28	112	448
5	9	345	225
Sumas	60	218	8402

$$\bar{y} = \frac{218}{60} = 3{,}63 \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{842}{60} - (3{,}63)^2} = 0{,}93$$

c) La media aritmética y la desviación típica de la distribución de la variable X condicionada a que Y valga 4 es:

$x_i /_{y=4}$	f_i	$f_i \cdot x_i /_{y=4}$	$f_i \cdot (x_i /_{y=4})^2$
3	0	0	0
4	0	0	0
5	12	60	300
6	15	90	540
7	1	7	49
Sumas	28	157	889

$$\bar{x}/_{Y=4} = \frac{157}{28} = 5{,}607 \qquad \sigma_{x/y=4} = \sqrt{\frac{889}{28} - (5{,}607)^2} = 0{,}56$$

d) Calcula los parámetros anteriores para la distribución de la variable Y condicionada a que X valga 5.

$y_i /_{x=54}$	f_i	$f_i \cdot y_i /_{x=5}$	$f_i \cdot (y_i /_{x=5})^2$
1	0	0	0
2	0	0	0
3	10	30	90

4	12	48	192
5	0	0	0
Sumas	22	78	182

$$\bar{y}/_{x=5} = \frac{282}{22} = 3{,}55 \qquad \sigma_{y/x=5} = \sqrt{\frac{282}{22} - (3{,}55)^2} = 0{,}50$$

7. Las respuestas a los apartados son:

a)

X/Y	**1**	**2**	**3**	**Total**
1	9	0	0	9
2	14	7	0	21
3	16	9	5	30
4	20	12	8	40
Total	59	28	13	**100**

x_i	f_i
1	9
2	21
3	30
4	40

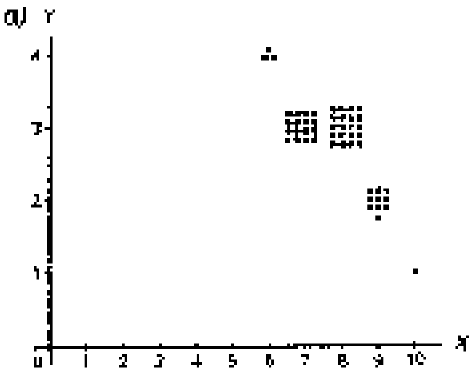
y_i	f_i
1	59
2	28
3	13

b) $\bar{x} = 3{,}01 \qquad \sigma_X = 0{,}98$

$\bar{y} = 1{,}54 \qquad \sigma_Y = 0{,}71$

8. Las soluciones son:

a)



b) Para amabas variables queda:

$$\bar{x} = \frac{390}{50} = 7{,}8 \textit{ horas dormidas y } \sigma_X = 0{,}89$$

$$\bar{y} = \frac{141}{50} = 2{,}82 \textit{ horas televisión y } \sigma_Y = 0{,}55$$

c) El porcentaje de individuos por encima de al media es $\frac{20+10+1}{50}=0{,}62$, es decir, el 62%.

d) Para el cálculo de $r=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}$, calculamos la covarianza: $\sigma_{XY}=\frac{1078}{50}-7{,}8\cdot 2{,}82=-0{,}436$.

El coeficiente de correlación es: $r=\frac{-0{,}436}{0{,}89\cdot 0{,}55}=-0{,}89$.

La correlación es muy fuerte y negativa.

ACTIVIDADES-PÁG. 292

9. La covarianza es $\sigma_{AB}=\frac{1619}{10}-11{,}5\cdot 14{,}3=-2{,}55$.

El coeficiente de correlación es: $r=\frac{-2{,}55}{3{,}67\cdot 2{,}72}=-0{,}255$.

La correlación es negativa y débil.

10. La correspondencia de cada gráfico con su coeficiente de correlación es:

a) r = 0,05 b) r = 0,71 c) r = - 0,98 d) r = 0,93 e) r = - 0,62

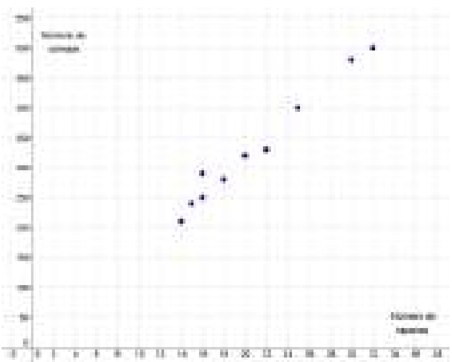
11. Los parámetros estadísticos son:

$\bar{x}=2{,}68;\ \bar{y}=15{,}4;\ \sigma_X=1{,}82;\ \sigma_Y=7{,}97;\ \sigma_{XY}=8{,}47$

a) El coeficiente de correlación es: $r=\frac{8{,}47}{1{,}82\cdot 7{,}96}=0{,}58$.

b) La recta de regresión es: $y-15{,}4=\frac{8{,}47}{3{,}31}(x-2{,}68)$, es decir, y = 2,56x + 8,54.

12. a) El diagrama de dispersión puede verse en el dibujo.



Los parámetros que se obtienen en el cálculo del coeficiente de correlación lineal son:

$$\bar{x} = 20{,}8 \qquad \sigma_X = 6{,}03 \qquad \bar{y} = 330 \qquad \sigma_Y = 94{,}55 \qquad \sigma_{XY} = 564$$

El valor del coeficiente es:

$$r = \frac{564}{6{,}03 \cdot 94{,}55} = 0{,}9892$$

Observamos que el valor obtenido nos permite afirmar que existe un excelente grado de dependencia positiva, es decir, que a mayor número de conejos, existe mayor número de rapaces.

b) Las rectas de regresión son:

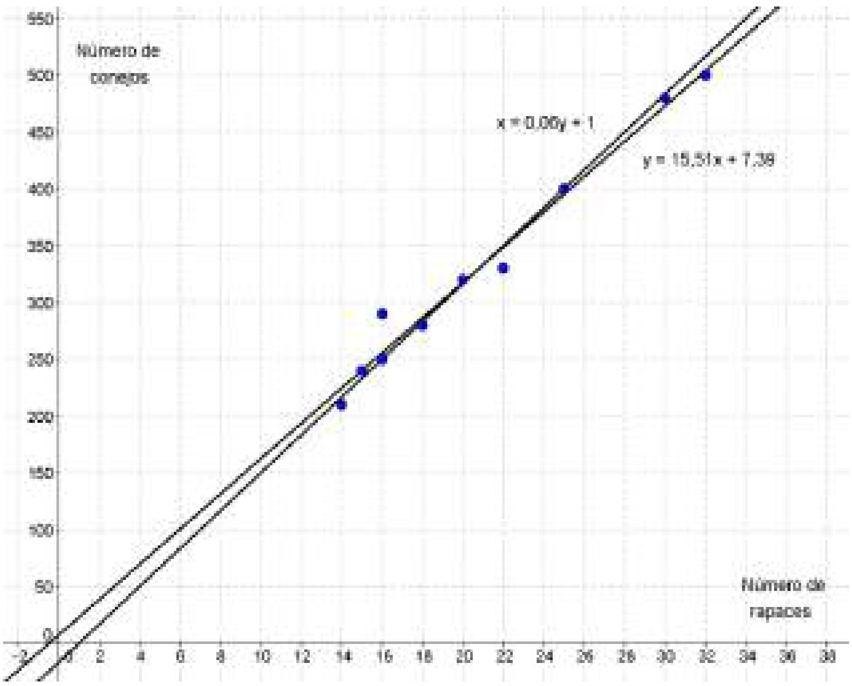
De Y sobre X es:

$$y - 330 = \frac{564}{6{,}03^2}(x - 20{,}8) \quad \Rightarrow \quad y = 15{,}51x + 7{,}39$$

De X sobre Y:

$$x - 20{,}8 = \frac{564}{94{,}55^2}(y - 330) \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}06y + 1$$

Sus gráficas pueden verse en el dibujo.



c) Estimamos la cantidad de conejos que habría si hubiera 10 rapaces:

En la recta de regresión de Y sobre X: si x = 10, entonces y = 15,51 · 10 + 7,39 = 162,49 ≈ 162 conejos.

En la recta de regresión de X sobre Y: si x = 10, entonces 10 = 0,06y + 1 $\Rightarrow$ y = 150 conejos.

d) Estimamos la cantidad de rapaces que habría si hubiera 350 conejos:

En la recta de regresión de Y sobre X: si y = 350, entonces 350 = 15,51 · y + 7,39 $\Rightarrow$ 22,09 ≈ 22 rapaces.

En la recta de regresión de X sobre Y: si y = 350, entonces x = 350y + 1 = 22 rapaces.

Es más fiable la segunda estimación, ya que el valor inicial de la primera se aleja bastante de la media de rapaces.

13. Al ser el coeficiente de correlación r = 0,7; obtenemos:

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad \Rightarrow \quad 0{,}7 = \frac{\sigma_{XY}}{5 \cdot 7{,}5} = \quad \Rightarrow \quad \sigma_{XY} = 26{,}25.$$

La recta de regresión de Y (estatura de los hijos) sobre X (estatura de los padres) es:

$$y - 170 = \frac{26{,}25}{5^2}(x - 168) \quad \Rightarrow \quad y = 1{,}05x - 6{,}4$$

Si un padre mide 180 cm, se estima que su hijo tendrá y = 1,05 · 180 – 6,4 = 182, 6 cm.

Nota: Todos los datos se han convertido en centímetros.

ACTIVIDADES-PÁG. 293

14. Calculamos previamente los parámetros correspondientes a las distribuciones marginales y la covarianza, obteniendo:

$$\bar{x} = \frac{108}{9} = 12 \qquad \sigma_x = \sqrt{\frac{1836}{9} - 12^2} = 7{,}75$$

$$\bar{y} = \frac{84{,}40}{9} = 9{,}38 \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{863{,}52}{9} - (9{,}38)^2} = 2{,}83$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1201{,}20}{9} - 12 \cdot 9{,}38 = 20{,}93$$

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
0	3,50	0	12,25	0,00
3	6,25	9	39,06	18,75
6	8,00	36	64,00	48,00
9	9,20	81	84,64	82,80
12	10,20	144	104,04	122,40
15	11,00	225	121,00	165,00
18	11,60	324	134,56	208,80
21	12,05	441	145,20	253,05
24	12,60	576	158,76	302,40
108	**84,40**	**1836**	**836,52**	**1201,20**

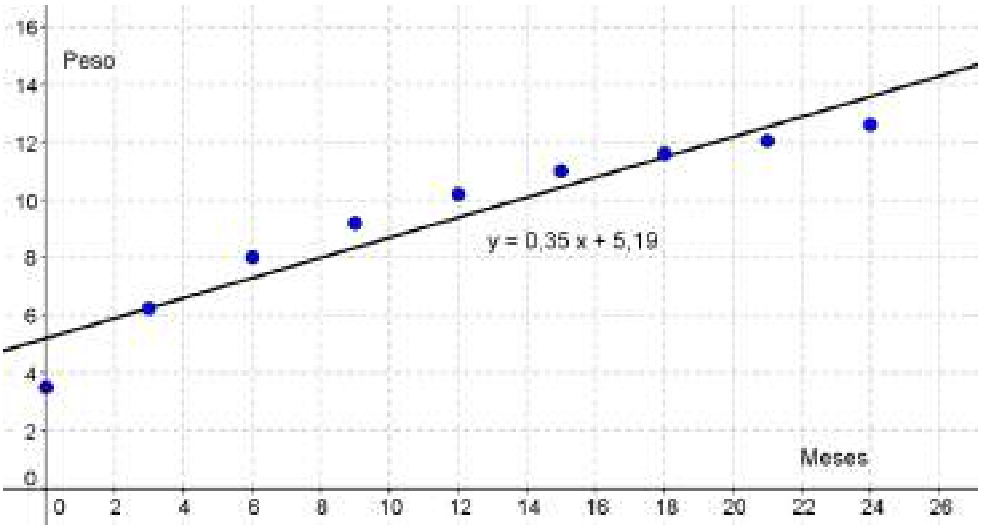
a) El coeficiente de correlación lineal vale:

$$r = \frac{20{,}93}{7{,}75 \cdot 2{,}83} = 0{,}96$$

La recta de regresión del peso (Y) en función de la edad (X) es:

$$y - 9{,}38 = \frac{20{,}93}{7{,}75^2}(x - 12) \quad \Rightarrow \quad y = 0{,}35x + 5{,}19$$

En el dibujo puede verse la nube de puntos y la gráfica de la recta de regresión.



b) Los valores de la varianza residual y el coeficiente de determinación son:

La varianza residual vale:

$$\sigma_e^2 = \frac{6,30}{9} = 0,70$$

El coeficiente de determinación es:

$$R^2 = 1 - \frac{0,70}{8,00} = 0,91$$

x_i	y_i	$\hat{y}_i = 0,35x_i + 5,19$	$e_i = \hat{y}_i - y_i$	e_i^2
0	3,50	5,19	- 1,69	2,86
3	6,25	6,24	0,01	0,00
6	8,00	7,29	0,71	0,50
9	9,20	8,34	0,86	0,74
12	10,20	9,39	0,81	0,66
15	11,00	10,44	0,56	0,31
18	11,60	11,49	0,11	0,01
21	12,05	12,54	- 0,49	0,24
24	12,60	13,59	- 0,99	0,98
				6,30

c) El incremento del peso esperado en un mes, podemos calcularlo como la diferencia de los pesos esperados para dos meses consecutivos, por ejemplo para x = 1 y x = 2:

Si x = 1, entonces $\hat{y}(1) = 0,35 \cdot 1 + 5,19 = 5,54\ kg.$

Si x = 2, entonces $\hat{y}(2) = 0,35 \cdot 2 + 5,19 = 5,89\ kg.$

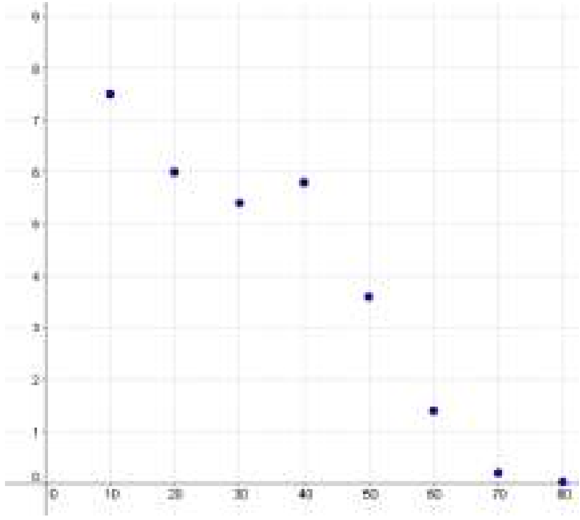
La diferencia es $\hat{y}(2) - \hat{y}(1) = 5,89 - 5,54 = 0,35\ kg.$

Puede observarse que el peso esperado en un mes coincide con el coeficiente de regresión $m = \frac{20,93}{7,75^2} = 0,35$.

d) El peso esperado para un niño de 14 meses es: $\hat{y}(14) = 0,35 \cdot 14 + 5,19 = 10,08\ kg.$

El peso esperado para un niño de dos años y medio (30 meses) es: $\hat{y}(30) = 0,35 \cdot 30 + 5,19 = 15,66\ kg.$

15. a) El diagrama de dispersión puede verse en el dibujo.



b) Los parámetros que se obtienen en el cálculo del coeficiente de correlación lineal son:

$$\bar{x} = 45 \qquad \sigma_X = 22{,}91 \qquad \bar{y} = 3{,}75 \qquad \sigma_Y = 2{,}68 \qquad \sigma_{XY} = -59{,}41$$

El valor del coeficiente es:

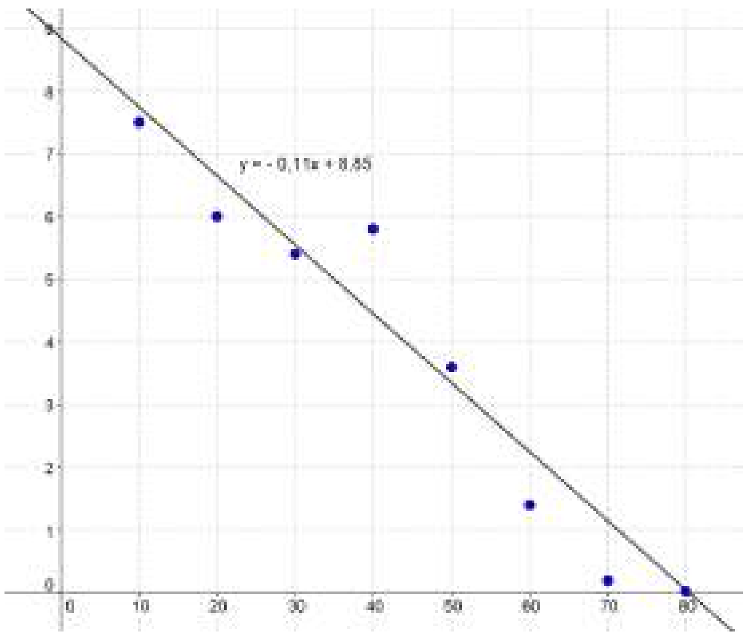
$$r = \frac{-59{,}41}{22{,}91 \cdot 2{,}68} = -0{,}968$$

Observamos que el valor obtenido nos permite afirmar que existe un excelente grado de dependencia negativa, es decir, que a mayor profundidad, existe menos oxígeno en el agua del embalse.

c) La recta de regresión de Y sobre X es:

$$y - 3{,}75 = \frac{-59{,}41}{22{,}91^2}(x - 45) \qquad \Rightarrow \qquad y = -0{,}11x + 8{,}85$$

Su gráfica puede verse en el dibujo.



d) Calculamos las estimaciones de la cantidad de oxígeno en el agua a las distintas profundidades que se piden:

Para x = 25 m, tenemos que y = - 0,11 · 25 + 8,85 = 6,1 mg/L.

Para x = 55 m, tenemos que y = - 0,11 · 55 + 8,85 = 2,8 mg/L.

Para x = 85 m, tenemos que y = - 0,11 · 85 + 8,85 = - 0,5 mg/L.

Puede observarse que los dos primeros valores son razonables, pero el último carece de sentido.

e) Nos ayudamos de los cálculos que aparecen en la tabla.

x_i	y_i	$\hat{y}_i = -0{,}11x_i + 8{,}85$	$e_i = \hat{y}_i - y_i$	e_i^2
10	7,50	7,75	- 0,25	0,0625
20	6,00	6,65	- 0,65	0,4225
30	5,40	5,55	- 0,15	0,0225
40	5,80	4,45	1,35	1,8225
50	3,60	3,35	0,25	0,0625
60	1,40	2,25	- 0,85	0,7225
70	0,30	1,15	- 0,85	0,7225
80	0,02	0,05	- 0,03	0,0009
				3,8384

La varianza residual vale: $\sigma_e^2 = \dfrac{3{,}84}{8} = 0{,}48$

El coeficiente de determinación es: $R^2 = 1 - \dfrac{0{,}48}{7{,}18} = 0{,}93$

16. a) Como la recta de regresión de Y sobre X es 4x – 3y = 0, su pendiente es el coeficiente de regresión y vale:

$$m = \frac{4}{3} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

La pendiente de la recta de regresión de X sobre Y, 3x – 2y = 1, es:

$$m' = \frac{3}{2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$$

La relación entre el coeficiente de correlación lineal y los coeficientes de regresión nos permite calcular:

$$r = \sqrt{m \cdot m'} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}} = \sqrt{2} = 1{,}41$$

El coeficiente de correlación es muy alto y nos permite afirmar que las variables están muy relacionadas.

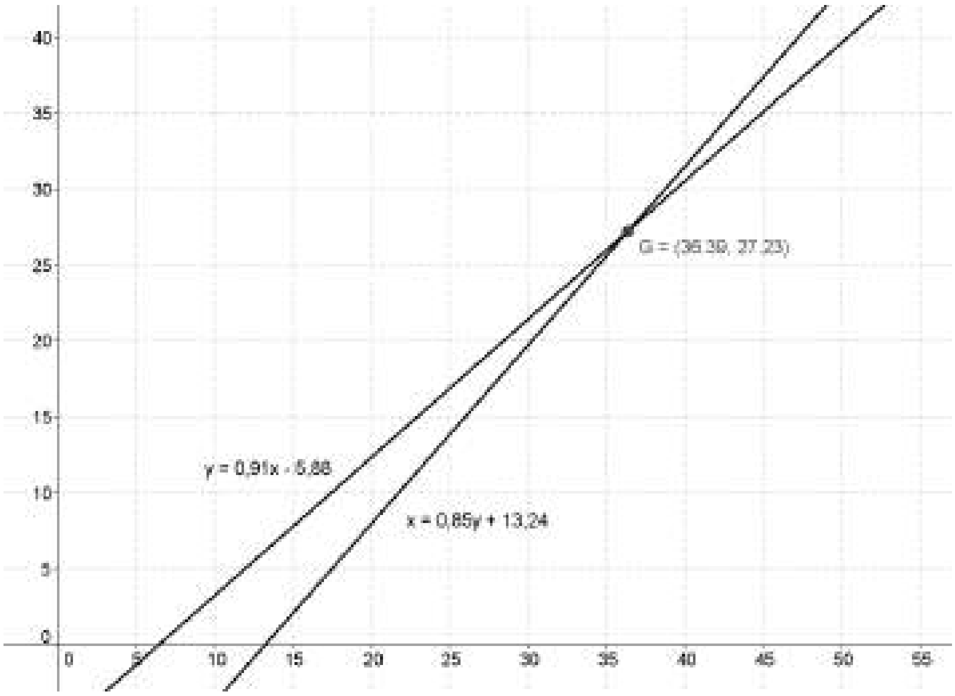
b) Sabemos que las dos rectas de regresión pasan por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, centro de gravedad de la nube de puntos.

Para calcular las medias de las variables, calculamos el punto de corte de las dos rectas. Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

La nota media en teoría es $\bar{x} = 3$ y la nota media en práctica es $\bar{y} = 4$.

17. La representación gráfica puede verse en el dibujo.



El centro de gravedad de la distribución es el punto de corte de las rectas de regresión. Por tanto:

$$\begin{cases} y = 0{,}91x - 5{,}88 \\ x = 0{,}85y + 13{,}24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 36{,}39 \\ y = 27{,}23 \end{cases}$$

El centro de gravedad es el punto $G\left(\bar{x} = 36{,}39;\ \bar{y} = 27{,}23\right)$.

El cuadrado del coeficiente de correlación lineal es igual al producto de los coeficientes de regresión. Sustituyendo, obtenemos:

$$r^2 = m \cdot m' \quad \Rightarrow \quad r^2 = 0{,}91 \cdot 0{,}85 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{0{,}7735} = 0{,}8795.$$

18. Observando los gráficos vemos que el ángulo formado por las rectas es más pequeño en las distribuciones II) y IV). Por tanto, en estos casos es más significativo.

Analizando las ecuaciones de las rectas obtenemos los resultados que siguen.

I) El coeficiente de regresión de la recta y = x + 2 vale m = 1, lo que significa que la covarianza σ_{xy} es no nula. Por lo tanto, no puede ser el coeficiente de regresión de la otra recta m´ = 0, como ocurre con la recta x = 4. Es decir, esta situación carece de sentido, ya que no es posible que haya una distribución con estas dos rectas de regresión.

II) En este caso, $m = \frac{4}{5}$, $m´ = \frac{5}{6}$ y $r = \sqrt{\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}82$.

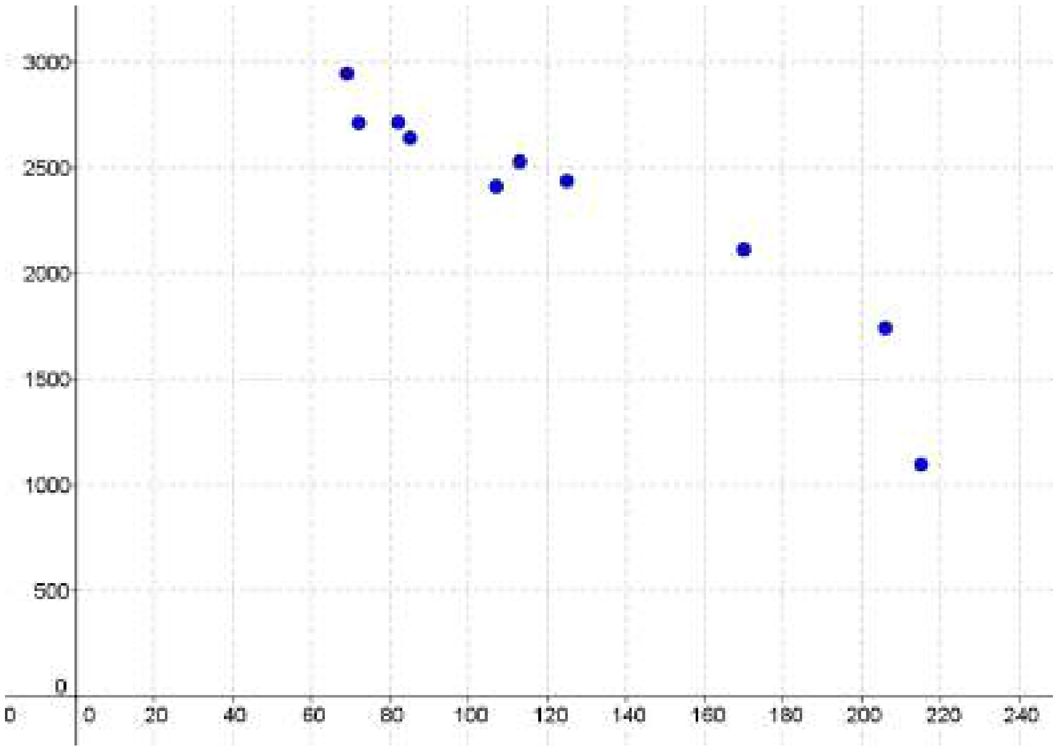
III) Para esta distribución $m = 0$, $m´ = 0$ y r = 0.

IV) En esta distribución, $m = 1$, $m´ = \frac{4}{5}$ y $r = \sqrt{\frac{4}{5}} = 0{,}89$.

De nuevo podemos ver que la correlación es significativa en los apartados II) y IV).

ACTIVIDADES-PÁG. 294

19. El diagrama de dispersión puede verse en el dibujo.



Los parámetros que se obtienen en el cálculo del coeficiente de correlación lineal son:

$$\bar{x} = 124{,}4 \qquad \sigma_X = 51{,}52 \qquad \bar{y} = 2333{,}7 \qquad \sigma_Y = 523{,}61 \qquad \sigma_{XY} = -25593{,}18$$

El valor del coeficiente es:

$$r = \frac{-25593{,}18}{51{,}52 \cdot 523{,}61} = -0{,}9487$$

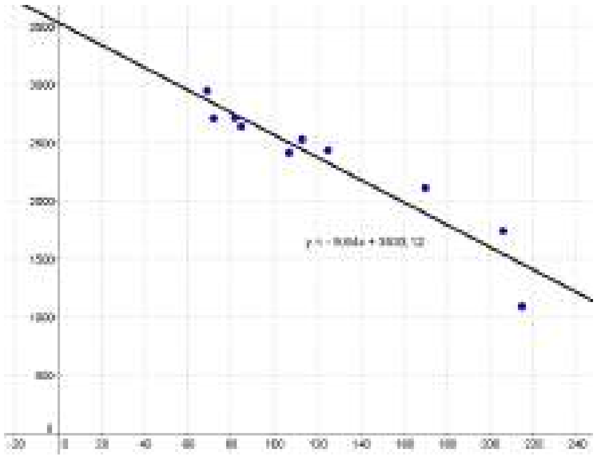
Se trata de una correlación negativa, en los lugares con más días de lluvia hay menos horas de sol y recíprocamente.

La recta de regresión de Y sobre X es:

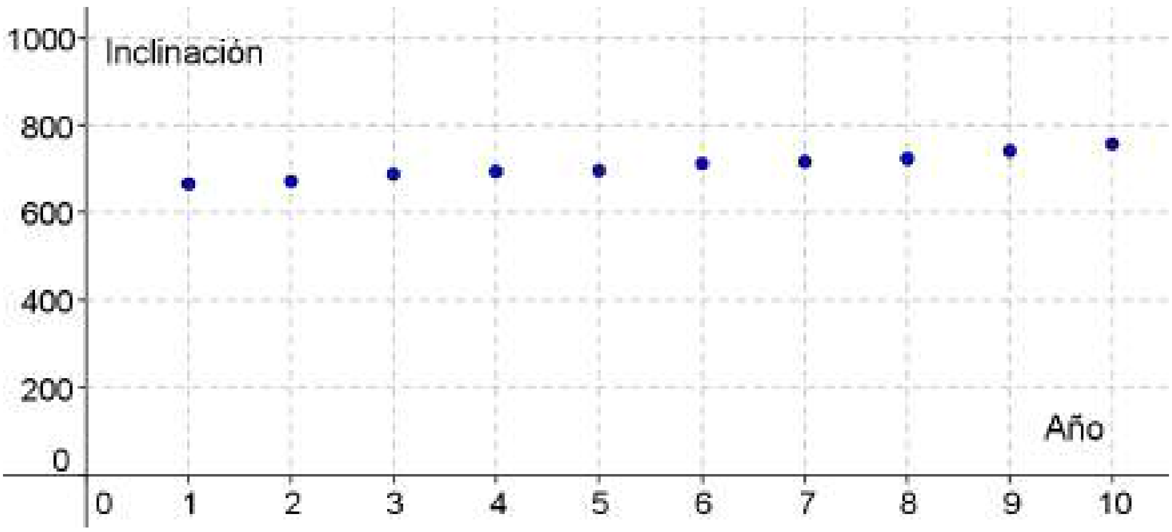
$$y - 2333{,}7 = \frac{-25593{,}18}{51{,}52^2}(x - 124{,}4) \quad \Rightarrow \quad y = -9{,}64x + 3533{,}12$$

Si se han registrado x = 100 días de lluvia se predicen:

y = - 9,64 · 100 + 3533,12 ≈ 2568 horas de sol.



20. a) Tomando el año 1978 como año 1, la representación gráfica puede verse en el dibujo.



A la vista de la nube de puntos parece que tiene una tendencia lineal que crece con el tiempo.

Para poder confirmarlo hallamos el coeficiente de correlación lineal.

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	667	1	444889	667
2	673	4	452929	1346
3	688	9	473344	2064
4	696	16	484416	2784
5	698	25	487204	3490
6	713	36	508369	4278
7	717	49	514089	5019
8	725	64	525625	5800
9	742	81	550564	6678
10	757	100	573049	7570
55	**7076**	**385**	**5014478**	**39696**

$$\bar{x} = \frac{55}{10} = 5{,}5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{385}{10} - 5{,}5^2} = 2{,}87$$

$$\bar{y} = \frac{7076}{10} = 707{,}6$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{5014478}{10} - (707{,}6)^2} = 27{,}39$$

$$\sigma_{xy} = \frac{39696}{10} - 5{,}5 \cdot 707{,}6 = 77{,}8$$

El coeficiente de correlación lineal vale $r = \dfrac{77{,}8}{2{,}87 \cdot 27{,}39} = 0{,}99$.

b) La ecuación de la recta de regresión de la inclinación (Y) en función del tiempo (X) es:

$$y - 707{,}6 = \frac{77{,}8}{8{,}24}(x - 5{,}5) \quad \Rightarrow \quad y = 9{,}44x + 655{,}68$$

c) Calculamos el coeficiente de determinación.

x_i	y_i	$\hat{y}_i = 9{,}44x_i + 655{,}68$	$e_i = \hat{y}_i - y_i$	e_i^2
1	667	665,12	-1,88	3,5344
2	673	674,56	1,56	2,4336
3	688	684	-4	16
4	696	693,44	-2,56	6,5536
5	698	702,88	4,88	23,8144
6	713	712,32	-0,68	0,4624
7	717	721,76	4,76	22,6576
8	725	731,2	6,20	38,44
9	742	740,64	1,36	1,8496
10	757	750,08	-6,92	47,8864
				163,6322

La varianza residual vale: $\sigma_e^2 = \dfrac{163{,}6322}{10} = 16{,}37$

El coeficiente de determinación es: $R^2 = 1 - \dfrac{16{,}37}{750{,}21} = 0{,}98$

d) El valor ajustado para 1918 en la recta de regresión es:

$$\hat{y}\,(-59) = 9{,}47 \cdot (-59) + 655{,}68 = 96{,}95$$

El valor obtenido es muy diferente de 71, esto es debido a que el año 1918 está muy alejado del intervalo de años que estamos considerando.

21. Calculamos los parámetros de la distribución bidimensional considerando el número de horas como variable X y el número de gérmenes como la variable Y.

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
0	20	0	400	0
1	26	1	676	26
2	33	4	1089	66
3	41	9	1681	123
4	47	16	2209	188
5	53	25	2809	265
15	**220**	**55**	**8864**	**668**

$$\bar{x} = \frac{15}{6} = 2{,}5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{55}{6} - 2{,}5^2} = 1{,}71$$

$$\bar{y} = \frac{220}{5} = 36{,}67$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{8864}{6} - (36{,}67)^2} = 11{,}53$$

$$\sigma_{xy} = \frac{668}{6} - 2{,}5 \cdot 36{,}67 = 19{,}67$$

a) La ecuación de la recta de regresión del número de gérmenes (Y), por centímetro cúbico, en función del tiempo (X) es:

$$y - 36{,}67 = \frac{19{,}67}{1{,}71^2}(x - 2{,}5) \qquad \Rightarrow \qquad y = 6{,}73x + 19{,}85$$

b) Calculamos el coeficiente de determinación.

x_i	y_i	$\hat{y}_i = 6{,}73x_i + 19{,}85$	$e_i = \hat{y}_i - y_i$	e_i^2
0	20	19,85	0,15	0,0225
1	267	26,58	- 0,58	0,3364
2	33	33,31	- 0,31	0,0961
3	41	40,04	0,96	0,9216
4	47	46,77	0,23	0,0529
5	53	53,50	- 0,50	0,2500
				1,6795

La varianza residual vale: $\sigma_e^2 = \dfrac{1{,}6795}{6} = 0{,}2799$

El coeficiente de determinación vale $R^2 = 1 - \dfrac{0{,}2799}{11{,}53^2} = 0{,}9979$

El coeficiente de correlación es $r = \sqrt{0{,}9979} = 0{,}9989$.

c) Estimamos el número de gérmenes a las 6 horas:

$$\hat{y}\,(6) = 6{,}73 \cdot 6 + 19{,}85 = 60{,}26$$

Al cabo de 6 horas habrá uno 60 miles de gérmenes por centímetro cúbico. Esta estimación tiene una gran probabilidad de ser válida ya que el coeficiente de determinación es muy alto.

22. De las rectas de regresión no podemos asegurar cuál es la de regresión de Y sobre X y cuál la de X sobre Y.

Supongamos que la primera de ellas es la de regresión de Y sobre X, se tiene:

$$y = -2x - 1$$

y su coeficiente de regresión es m = - 2.

La segunda corresponderá a la de regresión de X sobre Y, se tiene:

$$x = -\frac{3}{5}y - \frac{4}{5}$$

y su coeficiente de regresión es $m\,' = -\dfrac{3}{5}$.

Con los datos anteriores se obtiene el coeficiente de determinación es:

$$R^2 = m \cdot m\,' = (-2) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{6}{5} > 1$$

lo cual carece de sentido.

En consecuencia, es necesario elegir las rectas de la otra forma posible.

La recta de regresión de Y sobre X es 5x + 3y + 4 = 0, se tiene:

$$y = -\frac{5}{3}y - \frac{4}{3}$$

y su coeficiente de regresión es $m = -\dfrac{5}{3}$.

La recta de regresión de X sobre Y es 2x + y + 1 = 0, se tiene:

$$x = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

y su coeficiente de regresión es $m\,' = -\dfrac{1}{2}$.

El sigo negativo de m y m ´ nos indica que la dependencia lineal entre las variables es de tipo inverso, y el coeficiente de determinación es:

$$R^2 = m \cdot m´ = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \quad = \frac{5}{6} = 0{,}83$$

Como el coeficiente de correlación es $r = \pm\sqrt{R^2}$ y estamos ante una dependencia de tipo inverso, este coeficiente vale:

$$r = -\sqrt{0{,}83} = -\,0{,}91.$$

UNIDAD 13: Probabilidad

ACTIVIDADES-PÁG. 296

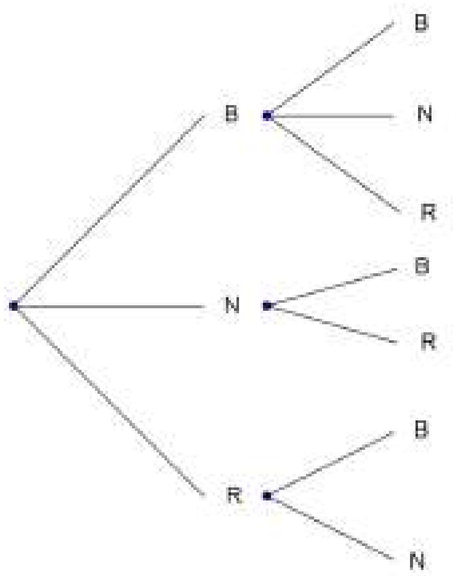
1. Como las nevadas se pueden producir, con la misma probabilidad, cualquier día de la semana, el porcentaje esperado será:

$$\frac{2}{7} \cdot 100 = 28{,}57\%.$$

2. Podemos sospechar que el dado está trucado ya que la frecuencia de obtener 6 es el doble de las frecuencias de obtener los otros resultados.

Habría que realizar más tiradas para confirmar esa sospecha.

3. Si llamamos a los sucesos B = “Salir blanca”, N = “Salir negra” y R = “Salir roja”, el diagrama de árbol puede quedar en la forma:



4. La probabilidad de cada uno de los resultados es:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Por tanto, la probabilidad de que salga 2 es $\frac{1}{8}$

5. Si llamamos a los clientes: Cliente 1, Cliente 2 y Cliente 3 (C) y a las cartas: Carta 1 (A), Carta 2 (B) y Carta 3 (C), todas las posibilidades de entrega de las cartaza son:

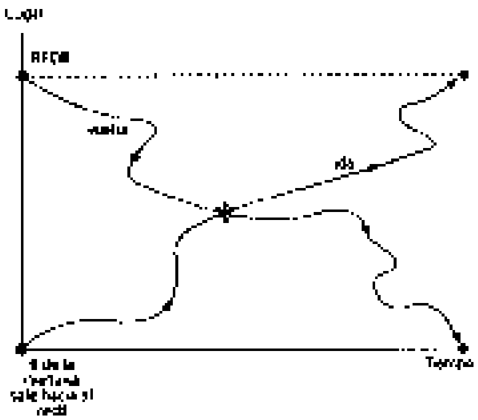
Cliente 1	**Cliente 2**	**Cliente 3**

A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

Observamos que solo hay una posibilidad, entre seis, de entregar las cartas correctamente, por tanto, la probabilidad pedida es $\frac{1}{6}$.

ACTIVIDADES-PÁG. 311

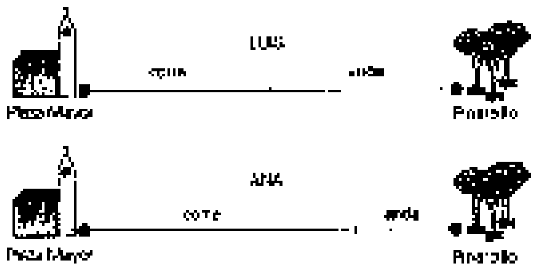
1. Podemos representar el problema en un gráfico.



En el gráfico está muy clara la situación del problema y la solución del mismo.

Efectivamente, hay un punto por el que pasa a la misma hora, y es el punto (*) en el que se encuentran los dos trayectos, el de ida y el de vuelta.

2. Cuando Luis está en la mitad del camino, comienza a andar, luego la otra mitad va a velocidad más lenta.



En cambio, Ana, al correr la mitad del tiempo, corre más de la mitad del camino, por lo que menos de la mitad lo hace andando, así llega antes Ana.

3. El primer cirujano se pone el guante (A) dentro del otro (B), es decir, se pone (A) y encima se pone (B).

El segundo cirujano se pone el guante (B) por la cara que no ha tocado al herido.

El tercer cirujano se pone el guante (A) dándole la vuelta y encima de éste (B) con que han operado los otros dos cirujanos.

ACTIVIDADES-PÁG. 314

1. El espacio muestral tiene $2^4 = 16$ elementos:

E = {CCCC, CCCX, CCXC, CXCC, XCCC, CCXX, CXCX, CXXC, XXCC, XCXC, XCCX, XXXC, XXCX, XCXX, CXXX, XXXX}

2. Los sucesos son:

a) $A \cap \overline{C}$ = {Sacar oros}

b) $A \cap B \cap C$ = {Ø}

c) $A \cup B$ = {Sacar oros o rey}

d) $B \cap A$ = {sacar el rey de oros}

3. Las respuestas son:

a) Las probabilidades asignadas serían:

Resultado	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Probabilidad	0,10	0,15	0,10	0,30	0,20	0,15

b) La probabilidad de obtener un resultado menor que 4 es: P (menor que 4) = 0,10 + 0,15 + 0,10 = 0,35.

4. La moneda parece trucada. Las probabilidades asignadas serían: P (cara) = 0,6 y P (cruz) = 0,4.

5. Respecto a la primera ley de los grandes números, al aumentar el número de lanzamientos, observamos en la tabla que las frecuencias relativas tiene menores oscilaciones y una mayor aproximación a la frecuencia relativa esperada que es 1/ 4 = 0,25.

Para observar el cumplimiento de la segunda ley de los grandes números, construimos la tabla siguiente:

Nº lanzamientos	100	500	1 000	5 000	10 000	50 000	100 000
Fr. absoluta esperada	25	125	250	1 250	2 500	12 500	25 000
Fr. absoluta obtenida	25	134	261	1 215	2 441	12 231	24 675
Dif. En valor absoluto	0	9	9	35	49	269	325

Vemos que al aumentar el número de lanzamientos, tiende a aumentar la diferencia en valor absoluto entre las frecuencias absoluta obtenida y esperada.

Las diferencias entre las frecuencias absolutas obtenida y esperada son: 0, 9, 9, 35, 49, 269 y 325.

6. Los resultados son:

a) No es una probabilidad ya que P (A) + P (B) + P (C) = $\frac{13}{12} \neq 1$.

b) Es una probabilidad pues P (A) + P (B) + P (C) = 1.

7. Las probabilidades son:

a) P (A) = 1 – P (B) – P (C) = $\frac{1}{3}$

b) Llamando P (C) = x, tenemos:

P (A) = 6x; P (B) = 2x y P (A) + P (B) + P (C) = 1; entonces, 9x = 1 y $x = \frac{1}{9}$.

Por tanto, $P(A) = \frac{2}{3}$.

8. La probabilidad es $P(cruz) = \frac{1}{4}$

9. Las probabilidades son:

$P(al\ menos\ un\, seis) = \frac{11}{36}$ $\qquad$ $P(Suma\ 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

10. El espacio muestral tiene 16 elementos. Las probabilidades son:

a) $P(2\ caras\ \ y\ 2\ cruces) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ $\qquad$ c) $P(a\lg una\ cara) = \frac{15}{16}$

b) $P(como\ máximo\ una\ cruz) = \frac{5}{16}$ $\qquad$ d) $P(como\ mínimo\ 3\ caras) = \frac{5}{16}$

ACTIVIDADES-PÁG. 315

11. Las probabilidades son:

a) $P(copas) = \frac{1}{4}$ $\qquad$ b) $P(figura) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$ $\qquad$ c) $P(oros\ o\ sota) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

12. Las probabilidades son:

a) $P(2\ negras) = \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{10}{91}$

b) $P(1\ roja\ \ y\ 1\ negra) = \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot 2 = \frac{45}{91}$

c) $P(al\ menos\ 1\ roja) = 1 - \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{81}{91}$

13. Las probabilidades son:

Extracción con devolución: $P(sabores\ dist\operatorname{int} os) = \frac{6}{18} \cdot \frac{7}{18} \cdot \frac{5}{18} \cdot 6 = \frac{35}{162}$

Extracción sin devolución: $P(sabores\ dist\operatorname{int} os) = \frac{6}{18} \cdot \frac{7}{17} \cdot \frac{5}{16} \cdot 6 = \frac{35}{136}$

14. Las probabilidades son:

a) $P(2\ de\, alu\min io) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{13} = \frac{3}{13}$ $\qquad$ $P(materiales\ \ dist\operatorname{int} os) = \frac{6}{10} \cdot \frac{8}{13} + \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{13} = \frac{34}{65}$

b) $P(2\ monedas\ de\,cobre) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}=\frac{16}{65}$

15. Las probabilidades pedidas son:

a) $P(persona\ con\ gafas) = 0{,}8\cdot 0{,}6 + 0{,}2\cdot 0{,}25 = 0{,}48 + 0{,}05 = 0{,}53$

b) $P(mujer\ con\ gafas) = 0{,}8\cdot 0{,}6 = 0{,}48$

16. a) La tabla completa aparece a continuación:

	Alumnas	**Alumnos**	**Total**
Ciencias	300	300	600
Letras	250	150	400
Total	550	450	100

b) La probabilidad pedida es: $P(ciencias) = \frac{600}{1000} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

17. La probabilidad es $P\left(3/_{>3}\right) = \frac{0}{3} = 0$.

18. La tabla completa aparece a continuación:

	Hombres	**Mujeres**	**Total**
≥ 40 años	60	70	130
< 40 años	40	30	70
Total	100	100	200

Las probabilidades son:

a) $P(mujer) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

b) $P(<40\ años) = \frac{7}{20} = 0{,}35$

c) $P\left(mujer/_{\geq 40\ años}\right) = \frac{70}{130} = \frac{7}{13} = 0{,}54$

19. La tabla completa aparece a continuación:

	Hombres	**Mujeres**	**Total**
Enfermo	12	11	23
No enfermo	188	89	277
Total	200	100	300

Las probabilidades son:

a) $P(\text{hombre}) = \dfrac{200}{300} = 0{,}67$

b) $P(enfermo) = \dfrac{23}{300} = 0{,}077$

c) $P\left(\text{hombre}/_{enfermo}\right) = \dfrac{0{,}04}{0{,}0767} = 0{,}52$

20. Las probabilidades de los sucesos A y B son: $P(A) = P(B) = \dfrac{2}{3}$.

Por la expresión de la probabilidad de la unión, tenemos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12} \neq 0$$

Por tanto, los sucesos A y B no son incompatibles.

Al ser $P(A \cap B) = \dfrac{7}{12}$ y $P(A) \cdot P(B) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$, los sucesos A y B no son independientes.

ACTIVIDADES-PÁG. 316

21. Si llamamos C al suceso elemental "salir cara" y X a "salir curz", tenemos que los sucesos A, B, C y sus intersecciones son:

A = {CCC, CCX} B = {CCX, CXX} C = {CCX, CXX, XCX, XXX}

$A \cap B = \{CCX\}$ $A \cap C = \{CCX\}$ $B \cap C = \{CCX, CXX\}$

Las probabilidades de los sucesos anteriores son:

$P(A) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ $P(B) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ $P(C) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \dfrac{1}{8}$ $P(A \cap C) = \dfrac{1}{8}$ $P(B \cap C) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

Como $P(A \cap B) = \dfrac{1}{8} \neq \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$, los sucesos A y B no son independientes.

Como $P(A \cap C) = \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} = P(A) \cdot P(C)$, los sucesos A y C son independientes.

Como $P(B \cap C) = \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} = P(B) \cdot P(C)$, los sucesos B y C no son independientes.

22. Llamamos E_i al suceso "Salir espadas en la extracción número i".

a) Se pide calcular $P\ (E_1 \cap E_2 \cap E_3)$. Utilizando la probabilidad compuesta o del producto:

$$P\ (E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P\ (E_1) \cdot P\ (E_2\ /\ E_1) \cdot P\ (E_3\ /\ E_1 \cap E_2) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} = 0{,}0121$$

b) Como la carta extraída se vuelve a introducir, los sucesos son independientes, y la probabilidad buscada es:

$$P\ (E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P\ (E_1) \cdot P\ (E_2) \cdot P\ (E_3) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = 0{,}0156$$

23. Completamos la tabla con la fila y columna de totales:

	Positivo (Pos)	**Negativo (Neg)**	**Totales**
Mujeres (Muj)	7	73	80
Hombres (Hom)	23	47	70
Totales	30	120	150

a) La probabilidad pedida es $P\ (Pos) = \frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

b) La probabilidad de que resulte positivo al hacérselo a un hombre es:

$$P\ (Pos\,/\,Hom) = \frac{P\ (Pos \cap Hom)}{P\ (Hom)} = \frac{23/150}{70/150} = \frac{23}{70} = 0{,}3286$$

c) Como $P\ (Neg \cap Muj) = \frac{73}{150} = 0{,}4867 \neq 0{,}4267 = \frac{120}{150} \cdot \frac{80}{150} = P\ (Neg) \cdot P\ (Muj)$, los sucesos "Salir negativo" y "Ser mujer" no son independientes.

24. Sean A y B, respectivamente, la primera y la segunda prueba.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}9$.

b) P (no pase ninguna) = 1 - P (pase al menos una) = 1 – 0,9 = 0,1.

c) No son independientes ya que P (A) · P (B) ≠ P (A $\cap$ B).

d) $P\left(B/\overline{A}\right) = \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$

25. La tabla completa aparece a continuación:

	Diurno	**Nocturno**	**Total**
Defectuosa	4	8	12
No defectuosa	196	92	288
Total	200	100	300

Las probabilidades son:

a) $P(defectuosa) = \dfrac{12}{300} = 0{,}04$

b) $P(nocturno/defectuoso) = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} = 0{,}6667$

$P(diurno/defectuoso) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} = 0{,}3333$

26. Llamamos x a la probabilidad de que se averíe un smartphone y obtenemos:

$$\frac{100}{800} \cdot 0{,}15 + \frac{200}{800} \cdot 0{,}10 + \frac{500}{800} \cdot x = 0{,}06$$

Operando hallamos x = 0,026

27. Las soluciones a los apartados son:

a) Como $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{8} = \dfrac{1}{8}$, los sucesos son compatibles.

Además, como $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, los sucesos son independientes.

b) Las probabilidades son:

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = \dfrac{7}{8}$.

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8}$.

$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{4}$.

UNIDAD 14: Distribuciones discretas. Distribución binomial

ACTIVIDADES-PÁG. 318

1. La probabilidad es: $P(2\,V \;\; y \;\; 2\,M) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$.

2. Las probabilidades buscadas son:

a) $P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}2304$.

b) $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$

$$= \binom{5}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^1 + \binom{5}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^0 = 0{,}2304 + 0{,}0768 + 0{,}0102 = 0{,}3174$$

La probabilidad es $1 - 0{,}3174 = 0{,}6826$

3. Las probabilidades son, en este caso:

a) $P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0{,}1157$

b) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$

$$= \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 = 0{,}1157 + 0{,}3858 + 0{,}4823 = 0{,}9838$$

4. Sabemos que $\mu = 1{,}125 \;\; y \;\; \sigma = 1{,}452$.

En $(\mu - \sigma, \; \mu + \sigma) = (-0{,}327; \; 2{,}577)$ hay 65 cajas defectuosas, es decir, el 81,25%.

En $(\mu - 2\sigma, \; \mu + 2\sigma) = (-1{,}779; \; 4{,}029)$ hay 77 cajas defectuosas, es decir, el 96,25%.

En $(\mu - 3\sigma, \; \mu + 3\sigma) = (-3{,}231; \; 5{,}481)$ hay 79 cajas defectuosas, es decir, el 98,75%.

Esta distribución no tiene un comportamiento "normal".

ACTIVIDADES-PÁG. 331

1. Veamos los dos casos límite:

1º: Si r = 0, entonces, $V = \pi \cdot h \cdot R^2$, que coincide con el volumen del cilindro.

2º: Si r = R, entonces, $V = \pi \cdot h \cdot (R^2 + R^2) = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$, pero si r = R el volumen es cero.

Luego la fórmula es falsa.

2. Los números felices de una cifra son 1 y 7.

Los números felices de dos cifras son: 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94 y 97.

Los primeros números felices de tres cifras son: 100, 103, 109, 129, 130, 133, 139, 167…

3. Después de varios intentos vemos que la situación final, para lograr el objetivo buscado, que debe quedar en la vía muerta superior es: W_1 W_2 L.

Llamamos A al lugar en que inicialmente está el vagón W_1 y B al lugar donde está inicuamente el vagón W_2.

Los pasos a seguir son:

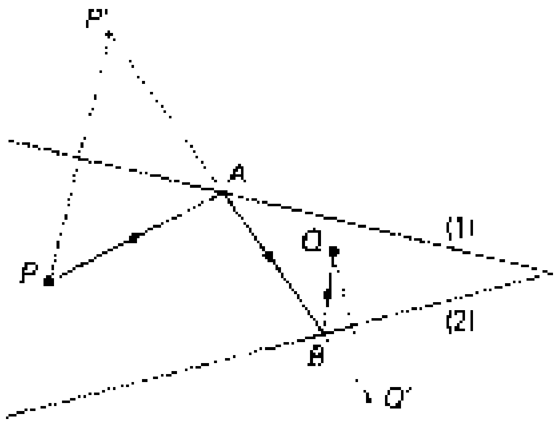
1º L coge W_1 y lo lleva a la vía muerta de abajo.
2º L da la vuelta al circuito pasando por el túnel y empuja a W_2 hasta el punto A.
3º L coge W_1 y lo lleva junto a W_2.
4º L da la vuelta al circuito y empuja a ambos vagones a la vía muerta de arriba, quedando la situación que buscábamos, W_1 W_2 L.
5º L remolca a W_2 hasta el punto A.
6º L da la vuelta al circuito y engancha a W_1 llevándolo a la posición B.
7º L vuelve a la vía muerta de arriba y los vagones han cambiado de posición.

4. Este problema es una doble simetría.

Construimos P ´, simétrico de P respecto a la banda (1), y Q ´ simétrico de Q respecto a la banda (2).

Unimos P ´ y Q ´ y llamamos A y B a los puntos en que la recta P ´Q ´ corta a las bandas.

La trayectoria pedida es PABQ.



ACTIVIDADES-PÁG. 333

1. Las probabilidades pedidas son:

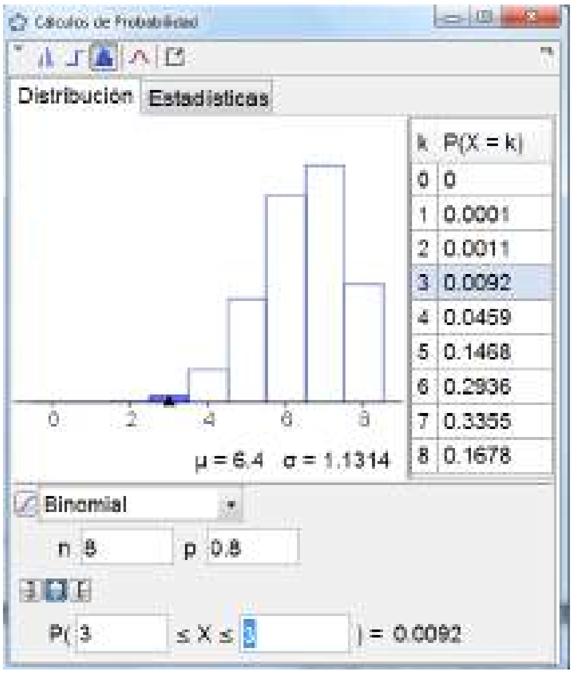
a) $P(X = 3) = \binom{8}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^5 = 0{,}0092$

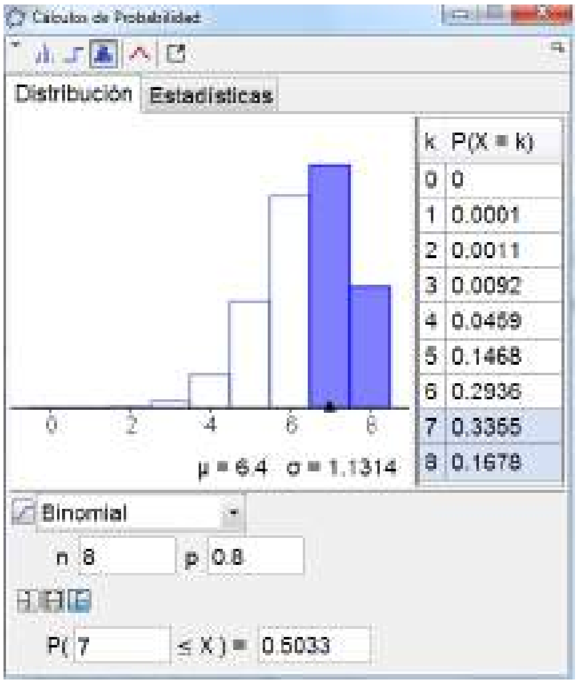
b) $P(X > 6) = P(X = 7) + P(X = 8) = \binom{8}{7} \cdot 0{,}8^7 \cdot 0{,}2^1 + \binom{8}{8} \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^0 = 0{,}5033$

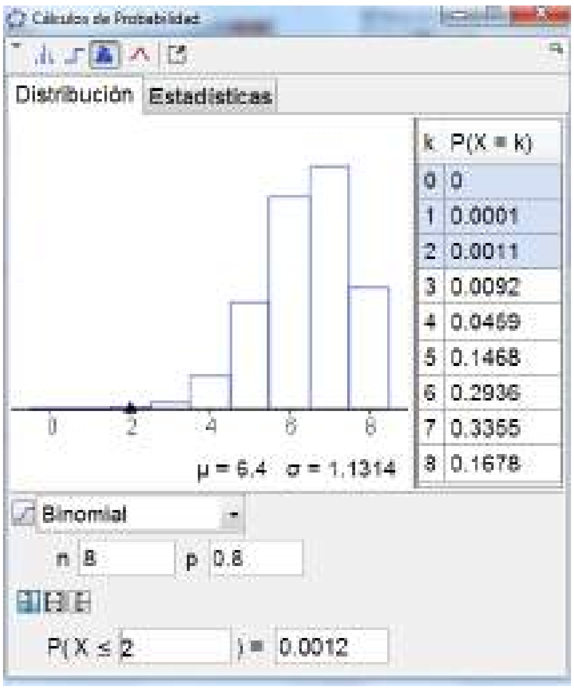
c) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}000003 + 0{,}000082 + 0{,}001147 = 0{,}0012$

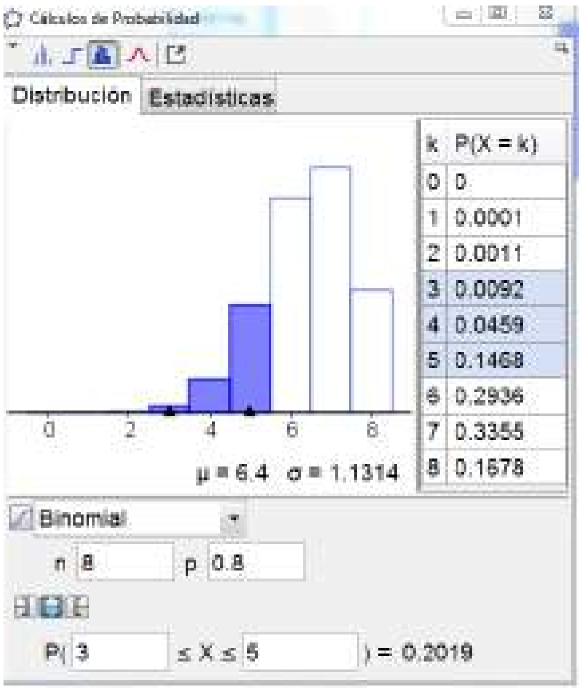
d) $P(2 < X < 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0{,}0092 + 0{,}0459 + 0{,}1468 = 0{,}2019$

Todas las probabilidades anteriores pueden verse en las imágenes que siguen.







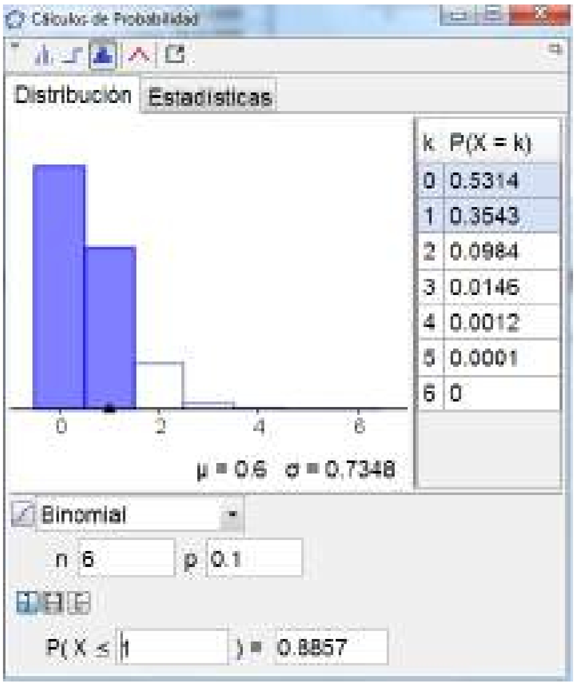


(Junio 2011)

2. Los huevos rotos siguen una distribución B (6; 0,1).

La probabilidad pedida es:

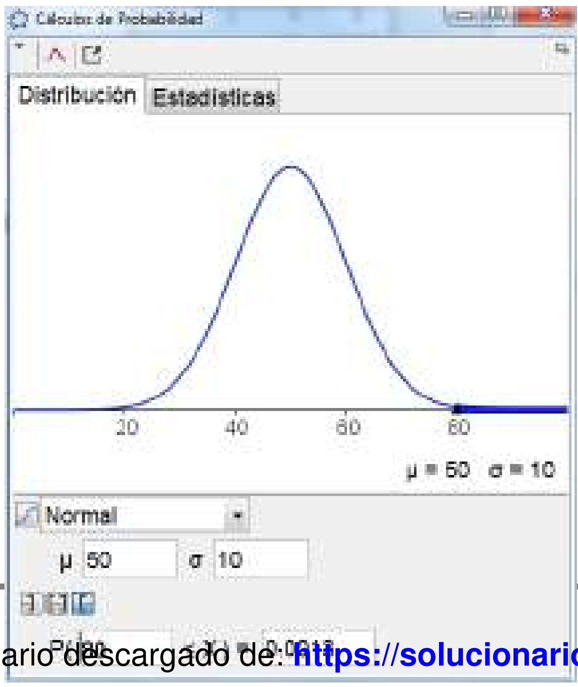
P (como mucho uno roto) = P (X = 0) + P (X = 1) = 0,5314 + 0,3543 = 0,8857.



3. La probabilidad pedida es:

$$P\ (X \geq 80) = P\left(z = \frac{X-50}{10} \geq \frac{80-50}{10}\right) = P\ (z \geq 3) = 1 - P\ (z < 3) =$$

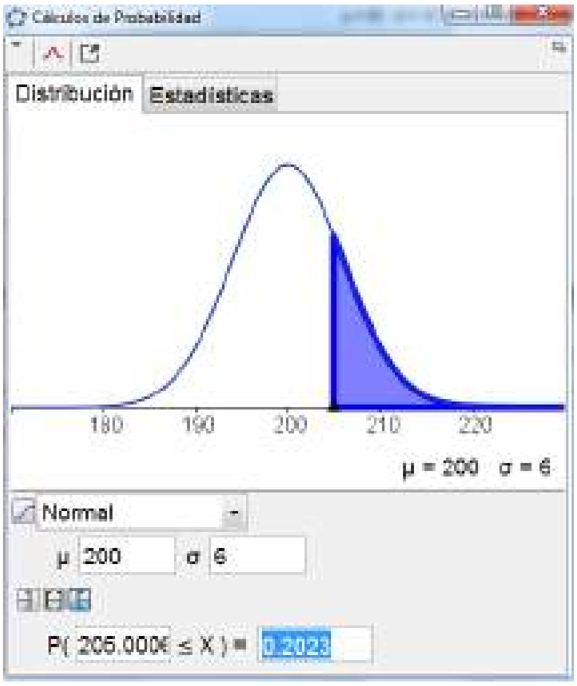
$$= 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$$



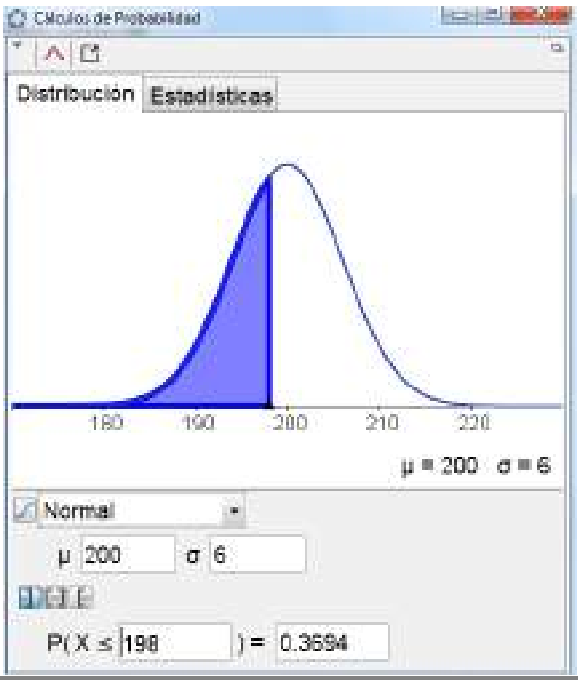
4. La máquina sigue una distribución normal de media $\mu = 200$ cm^3 y desviación típica $\sigma = 6$ cm^3.

Las probabilidades pedidas son:

$P(X > 205) = P(Z > 0{,}83) = 1 - P(Z < 0{,}83) = 1 - 0{,}7977 = 0{,}2023$



$P(X < 198) = P(Z < -0{,}33) = 1 - P(Z < 0{,}33) = 1 - 0{,}6306 = 0{,}3694$



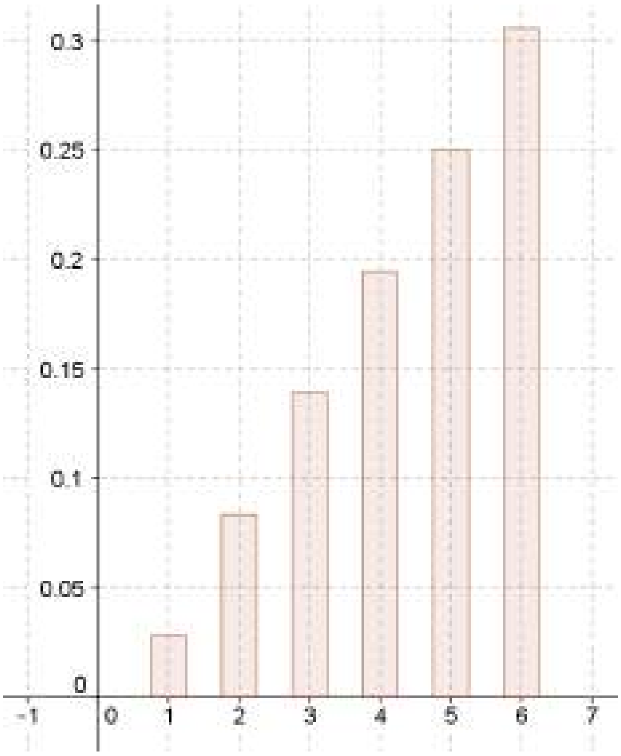
ACTIVIDADES-PÁG. 334

1. La solución queda:

a) La función de probabilidad es:

Mayor número	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

b) El gráfico queda:



c) La media y la desviación típica son:

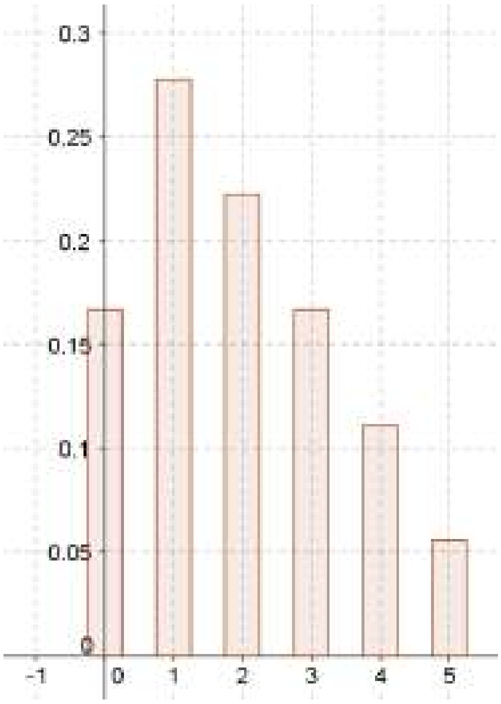
$$\mu = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = 4{,}47$$

$$\sigma = \sqrt{1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + 4^2 \cdot \frac{7}{36} + 5^2 \cdot \frac{9}{36} + 6^2 \cdot \frac{11}{36} - 4{,}47^2} = 1{,}41$$

2. a) La función de probabilidad es:

Diferencia de puntos	0	1	2	3	4	5
Probabilidad	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

b) El gráfico queda:



c) La media y la desviación típica son:

$$\mu = 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{8}{36} + 3 \cdot \frac{6}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot \frac{2}{36} = 1{,}94$$

$$\sigma = \sqrt{0^2 \cdot \frac{6}{36} + 1^2 \cdot \frac{10}{36} + 2^2 \cdot \frac{8}{36} + 3^2 \cdot \frac{6}{36} + 4^2 \cdot \frac{4}{36} + 5^2 \cdot \frac{2}{36} - 1{,}94^2} = 1{,}44$$

3. La función de probabilidad es:

X = Nº cruces	0	1	2	3	4
Probabilidad	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

La media y la desviación típica son:

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2$$

$$\sigma = \sqrt{0^2 \cdot \frac{1}{16} + 1^2 \cdot \frac{4}{16} + 2^2 \cdot \frac{6}{16} + 3^2 \cdot \frac{4}{16} + 4^2 \cdot \frac{1}{16} - 2^2} = 1$$

4. Consideramos que reemplazamos las bolas:

a) La función de probabilidad es:

Nº bolas blancas	0	1	2	3
Probabilidad	$\frac{720}{3360}$	$\frac{1620}{3360}$	$\frac{900}{360}$	$\frac{120}{3360}$

b) $P\ (X \geq 2) = \dfrac{900}{3360} + \dfrac{120}{3360} = \dfrac{17}{56} = 0{,}3036$

c) $P\ (X \leq 2) = 1 - P\ (X > 2) = 1 - \dfrac{120}{3360} = \dfrac{27}{28} = 0{,}9643$

d) La esperanza matemática y la desviación típica son: $\mu = 1{,}125$; $\sigma = 0{,}58$.

5. La función de probabilidad es:

Suma de puntos X	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidad P_i	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$

Suma de puntos X	7	8	9	10	11	12
Probabilidad P_i	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

La media y la desviación típica son: $\mu = 6$ y $\sigma = 3$.

6. Se debe cumplir:

$$\begin{cases} x + y = 0{,}8 \\ 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot x + 2 \cdot y = 1{,}1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = 0{,}3 \end{cases}$$

La desviación típica es: $\sigma = 0{,}7$

7. La solución es la del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a + b + c = 0{,}8 \\ a + 2b + 3c = 1{,}6 \\ b + c = 0{,}6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0{,}2 \\ b = 0{,}4 \\ c = 0{,}2 \end{cases}$$

8. La solución queda:

Nº Doses	0	1	2
Probabilidad	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Esperanza: $90 \cdot \dfrac{1}{9} + 45 \cdot \dfrac{4}{9} - 81 \cdot \dfrac{4}{9} = -6$ euros. La esperanza del jugador es – 6 euros.

9. No es justo pues: $4 \cdot \frac{6}{36} - 1 \cdot \frac{30}{36} - \frac{6}{36} = -\frac{1}{6}$

10. El juego es justo pues la esperanza es: $(7-1) \cdot \frac{1}{20} + (3-1) \cdot \frac{3}{20} + (0{,}25-1) \cdot \frac{16}{20} = 0.$

ACTIVIDADES-PÁG. 335

11. La solución queda:

a) La función de probabilidad es:

X	0	1	2	3	4	5
P_i	0,1681	0,3602	0,3087	0,1323	0,0284	0,0024

b) La media y la desviación típica son μ = n · p = 5 · 0,3 = 1,5; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = 1{,}025.$

c) P (X = 2) = 0,3087

P (X = 3) = 0,1323

P (X < 2) = P (X = 0) + P (X = 1) = 0,1681 + 0,3602 = 0,5283

P (X $\geq$ 3) = P (X = 3) + P (X = 4) + P (X = 5) = 0,1631

12. Es una distribución binomial $B\left(6; \frac{4}{5}\right)$, con $P\ (cara) = \frac{4}{5}$ y $P(cruz) = \frac{1}{5}$.

a) $P(X = 4\ caras) = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0{,}2458$

b) $P(X \geq 4\ caras) = P\ (X = 4) + P\ (X = 5) + P\ (X = 6) =$

$$= \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \frac{1}{5} + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6 = 0{,}90112$$

13. Es una distribución binomial B (10; 0,96), con X el suceso disco sin fallo.

$P(X \geq 8) = P\ (X = 8) + P\ (X = 9) + P\ (X = 10) =$

$$= \binom{10}{8} \cdot (0{,}96)^8 \cdot 0{,}04^2 + \binom{10}{9} \cdot (0{,}96)^9 \cdot (0{,}04)^1 + \binom{10}{10} \cdot (0{,}96)^{10} = 0{,}9938$$

14. Es una distribución binomial B (10; 0,7).

a) $P(X=10)=\binom{10}{10}\cdot(0,7)^{10}=0,0282$

b) $P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)=$

$$=1-\binom{10}{0}\cdot(0,3)^{10}-\binom{10}{1}\cdot(0,3)^{9}\cdot(0,7)^{1}=0,9999$$

c) $P(X\leq 9)=1-P(X=10)= =1-\binom{10}{10}\cdot(0,7)^{10}=0,9718$

15. Es una distribución binomial B (20; 0,6), con X el suceso no estudie la asignatura.

$$P(X=7)=\binom{20}{7}\cdot(0,6)^{7}\cdot(0,4)^{13}=0,0146$$

16. Es una distribución binomial B (7; 0,45).

a) $P(X=3)=\binom{7}{3}\cdot(0,45)^{3}\cdot(0,55)^{4}=0,2918$

b) $P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=$

$$=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=$$

$$=1-\binom{7}{0}\cdot(0,55)^{7}-\binom{7}{1}\cdot(0,55)^{6}\cdot(0,45)^{1}-\binom{7}{2}\cdot(0,55)^{5}\cdot(0,45)^{2}=0,6836$$

c) $P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$

$$=\binom{7}{0}\cdot(0,55)^{7}+\binom{7}{1}\cdot(0,55)^{6}\cdot(0,45)^{1}+\binom{7}{2}\cdot(0,55)^{5}\cdot(0,45)^{2}+\binom{7}{3}\cdot(0,55)^{4}\cdot(0,45)^{3}=0,6083$$

17. Es una distribución binomial B (8; 0,7).

La probabilidad de que aprueben los 8 alumnos es $P(X=8)=\binom{8}{8}\cdot(0,7)^{8}=0,0576$

La probabilidad de que apruebe sólo uno es $P(X=1)=\binom{8}{1}\cdot(0,7)^{1}\cdot(0,3)^{7}=0,0012$

18. Es una distribución binomial B (12; 0,3). Llamamos X al suceso jugar al baloncesto.

$$P\ (X \geq 2) = 1 - P\ (X = 0) - P\ (X = 1) = \quad 1 - \binom{12}{0} \cdot (0{,}7)^{12} - \binom{12}{1} \cdot (0{,}7)^{11} \cdot (0{,}3)^{1} = 0{,}9150$$

Por otro lado: $\mu = 12 \cdot 0{,}3 = 4$ socios se espera que practiquen baloncesto.

19. Es una distribución binomial $B\left(10; \frac{1}{4}\right)$.

a) Acertará, por termino medio, $\mu = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}5$ respuestas.

b) La desviación típica es: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = 1{,}37$.

c) La probabilidad pedida es:

$$P\ (X \geq 5) = P\ (X = 5) + P\ (X = 6) + P\ (X = 7) + P\ (X = 8) + P\ (X = 9) + P\ (X = 10) = 0{,}0781.$$

ACTIVIDADES-PÁG. 336

20. Es una distribución binomial $B\ (6;\ 0{,}483)$. Sea X el número de niñas.

a) $P\ (X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot (0{,}517)^{6} = 0{,}9809$

b) P (al menos un chico) = 1 – P (ningún chico) = 1 – P (X = 6) = $1 - \binom{6}{6} \cdot (0{,}483)^{6} = 0{,}9873$

21. Es una distribución binomial B (20; 0,95). Sea X el número de trenes que llegan a la hora.

$$P\ (X \geq 18) = P\ (X = 18) + P(X = 19) + P\ (X = 20) =$$

$$= \binom{20}{18} \cdot (0{,}95)^{18} \cdot (0{,}05)^{2} + \binom{20}{19} \cdot (0{,}95)^{19} \cdot (0{,}05)^{1} + \binom{20}{20} \cdot (0{,}95)^{20} = 0{,}9245$$

$$P\ (X \geq 19) = P(X = 19) + P\ (X = 20) = \binom{20}{19} \cdot (0{,}95)^{19} \cdot (0{,}05)^{1} + \binom{20}{20} \cdot (0{,}95)^{20} = 0{,}7358$$

22. Es una distribución binomial B (60; 0,05). Sea X el número de personas con grupo ORh $^{-}$.

$$P\ (X = 0) = \binom{60}{0} \cdot (0{,}95)^{60} = 0{,}0461$$

La esperanza es: $\mu = 60 \cdot 0{,}05 = 3$ personas cabe esperar que haya con ORh$^-$.

23. Es una distribución binomial B (4; p).

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot p^4 = 0{,}4096 \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}8$$

La probabilidad de que sea defectuoso es 0,2.

24. a) Calculamos la media de los datos: $\bar{x} = \dfrac{154}{500} = 0{,}308$.

La media de la distribución binomial es $\mu = np = 3p$. Hacemos coincidir las dos medias, y calculamos las probabilidades p y q: $3p = 0{,}308 \Rightarrow p = 0{,}1$ y $q = 0{,}9$

Comparamos la distribución estadística con la distribución binomial B (3; 0,1). En la tabla aparecen todos los cálculos.

x_i	$P_i = P(X = x_i)$	$500 \cdot P_i$	**Valores teóricos**	**Valores observados**	**Diferencias**
0	$0{,}9^3 = 0{,}729$	364,5	365	361	4
1	$3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243$	121,5	122	124	2
2	$3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}027$	13,5	14	15	1
3	$0{,}1^3 = 0{,}001$	0,5	1	0	1

Las diferencias son muy pequeñas. Podemos afirmar que el ajuste es bueno, es decir, los datos iniciales provenían de una distribución binomial.

b) La probabilidad de que fallen al menos dos componentes es:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 + 3 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}027 + 0{,}001 = 0{,}028.$$

La frecuencia relativa de que fallen al menos dos componentes es: $\dfrac{15+0}{500} = 0{,}030$, que está muy próxima a la probabilidad anterior.

25. Calculamos la media de los datos: $\bar{x} = \dfrac{288}{300} = 0{,}96$.

La media de la distribución binomial es $\mu = np = 3p$. Hacemos coincidir las dos medias, y calculamos las probabilidades p y q: $3p = 0{,}96 \Rightarrow p = 0{,}32$ y $q = 0{,}68$

Comparamos la distribución estadística con la distribución binomial B (3; 0,32). En la tabla aparecen todos los cálculos.

x_i	$P_i = P(X = x_i)$	$300 \cdot P_i$	Valores teóricos	Valores observados	Diferencias
0	$0{,}68^3 = 0{,}3144$	94,32	94	114	20
1	$3 \cdot 0{,}32 \cdot 0{,}68^2 = 0{,}4439$	133,17	133	100	33
2	$3 \cdot 0{,}32^2 \cdot 0{,}68 = 0{,}2089$	62,67	63	70	7
3	$0{,}32^3 = 0{,}0328$	9,84	10	16	6

Las diferencias son muy grandes. Podemos afirmar que el ajuste no es bueno, es decir, los datos iniciales no provenían de una distribución binomial.

26. Calculamos la media de los datos: $\bar{x} = \dfrac{41}{150} = 0{,}2733$.

La media de la distribución binomial es $\mu = np = 2p$. Hacemos coincidir las dos medias, y calculamos las probabilidades p y q: $2p = 0{,}2733 \Rightarrow p = 0{,}1367 \approx 0{,}14$ y $q = 0{,}8633 \approx 0{,}86$.

Comparamos la distribución estadística con la distribución binomial B (2; 0,14). En la tabla aparecen todos los cálculos.

x_i	$P_i = P(X = x_i)$	$150 \cdot P_i$	Valores teóricos	Valores observados	Diferencias
0	$0{,}86^2 = 0{,}7396$	110,94	111	113	2
1	$2 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}86 = 0{,}2408$	36,12	36	33	3
23	$0{,}14^2 = 0{,}0196$	2,94	3	4	1

Las diferencias son muy pequeñas. Podemos afirmar que el ajuste es bueno, es decir, los datos iniciales provenían de una distribución binomial.

27. Calculamos la media de los datos: $\bar{x} = \dfrac{192}{150} = 1{,}28$.

La media de la distribución binomial es $\mu = np = 4p$. Hacemos coincidir las dos medias, y calculamos las probabilidades p y q: $4p = 1{,}28 \Rightarrow p = 0{,}32$ y $q = 0{,}68$

Comparamos la distribución estadística con la distribución binomial B (4; 0,32). En la tabla aparecen todos los cálculos.

x_i	$P_i = P(X = x_i)$	$150 \cdot P_i$	Valores teóricos	Valores observados	Diferencias
0	$0{,}68^4 = 0{,}2138$	32,07	32	30	2
1	$4 \cdot 0{,}32 \cdot 0{,}68^3 = 0{,}4025$	60,375	60	62	2
2	$6 \cdot 0{,}32^2 \cdot 0{,}68^2 = 0{,}2840$	42,6	43	46	3

3	$4 \cdot 0{,}32^3 \cdot 0{,}68 = 0{,}0891$	13,365	13	10	3
4	$0{,}32^4 = 0{,}0105$	1,575	2	2	0

Las diferencias son muy pequeñas. Podemos afirmar que el ajuste es bueno, es decir, los datos iniciales provenían de una distribución binomial.

UNIDAD 15: Distribuciones bidimensionales. Correlación y regresión

ACTIVIDADES-PÁG. 338

1. La media y la desviación típica valen: μ = 39,825 y σ = 14,76.

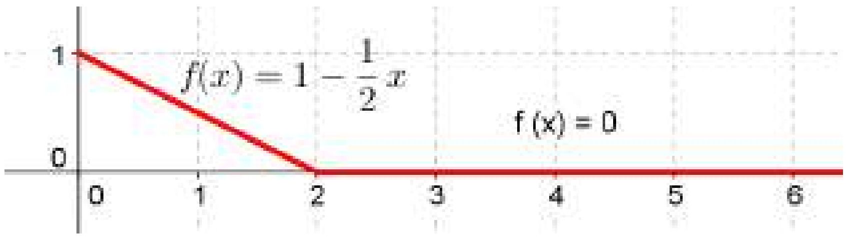
En $(\mu - \sigma,\ \mu + \sigma)$ = (25,065; 54,585) hay 410 personas, es decir, el 68,33%.

En $(\mu - 2\sigma,\ \mu + 2\sigma)$ = (10,305; 69,345) hay 558 personas, es decir, el 93%.

En $(\mu - 3\sigma,\ \mu + 3\sigma)$ = (- 4,455; 84,105) hay 594 personas, es decir, el 99%.

2. Ambas áreas miden 1,5 unidades cuadradas.

3. La representación gráfica la podemos ver en el gráfico:



El área del recinto señalado es $\frac{9}{16} = 0{,}5625\ u^2$

ACTIVIDADES-PÁG. 353

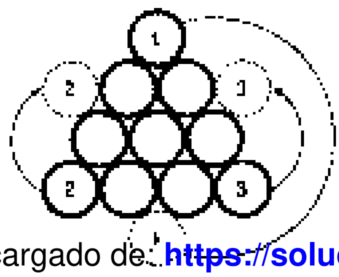
1. Cada día asciende 30 m y resbala 20 m, en realidad asciende 10 m.

Luego al cabo de 27 días ha ascendido 270 m, y ya el día 28 asciende a la superficie, pues asciende 30 m y 270 + 30 = 300 m.

El caracol tarda 28 días en salir.

2. La solución puede verse en el esquema:

Simplemente cambiando tres monedas, las señaladas con los números 1, 2 y 3, el triángulo se invierte.



3. Llamamos $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}$ y elevamos al cuadrado: $x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}$

Operamos y obtenemos:

$$x^2 = 1 + x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{5}$$

La solución con sentido es $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{5}$, que es el número de oro.

4. Comenzando el problema desde el final:

Ave 8ª le da 1 + 1 = 2
Ave 7ª (tiene 6), le da 3 + 1 = 4 y le quedan 2.
Ave 6ª (tiene 14), le da 7 + 1 = 8 y le quedan 6.
Ave 5ª (tiene 30), le da 15 + 1 = 16 y le quedan 14.
Ave 4ª (tiene 62), le da 31 + 1 = 32 y le quedan 30.
Ave 3ª (tiene 126), le da 63 + 1 = 64 y le quedan 62.
Ave 2ª (tiene 254), le da 127 + 1 = 128 y le quedan 126.
Ave 1ª (tiene 510), le da 255 + 1 = 256 y le quedan 254.

Al principio tenía 510 granos de maíz.

5. Las pesas que necesitamos ha de ser de 1, 3, 9 y 27 kg.

Las pesadas son:

1 kg = 1
2 kg = 3 – 1
3 kg = 3
4 kg = 3 + 1
5 kg = 9 – 3 – 1
6 kg = 9 – 3
7 kg = 9 – 3 + 1
8 kg = 9 – 1
9 kg = 9
10 kg = 9 + 1
Y así sucesivamente.

La suma de los números significa que las pesas se colocan en el mismo plato de la balanza, y la diferencia, que se colocan en platos diferentes.

ACTIVIDADES-PÁG. 354

1. En este ejercicio la variable aleatoria tiene una distribución normal N (100, 15). Lo resolvemos accediendo al menú DISTR de la calculadora.

a) Queremos hallar P (X = 80) y para ello elegimos **normalpdf(80,100,15)** y obtenemos 0,0109.

b) Queremos hallar P (92 ≤ X ≤ 112) y para ello elegimos **normalcdf(92,112,100,15)** y obtenemos 0,4912.

2. En este ejercicio la variable aleatoria tiene una distribución normal N (150000, 8000). Lo resolvemos accediendo al menú DISTR de la calculadora.

a) Queremos hallar P (X ≥ 165000) y para ello elegimos **normalcdf(1650000,1000000,150000,8000)** y obtenemos 0,0304 . Al no tener el límite superior ponemos un valor muy grande.

b) Queremos hallar P (130000 ≤ X ≤ 160000) y para ello elegimos **normalcdf(130000,160000,150000,8000)** y obtenemos 0,8881 es decir el 88,81% de los congeladores.

c) En este caso queremos hallar el valor de a de modo que P(X ≤ a) = 0,68 y para ello elegimos **invNorm(0.68, 150000, 8000)** y obtenemos 153741,59 , es decir que 153 742 es el número máximo de horas que duran el 68% de los congeladores.

3. En este ejercicio la variable aleatoria tiene una distribución binomial B(25; 0,03). Lo resolvemos accediendo al menú DISTR de la calculadora.

a) Queremos hallar P(X ≤ 4) y para ello elegimos **binomcdf(25,0.03,4)** y obtenemos 0,9992.

b) Para hallar la probabilidad de que al menos haya 18 chips buenos, hallamos la probabilidad de que como máximo haya 7 defectuosos. Para ello hallamos P(X ≤ 7) mediante **binomcdf(25,0.03,7)** y obtenemos 0,9999.

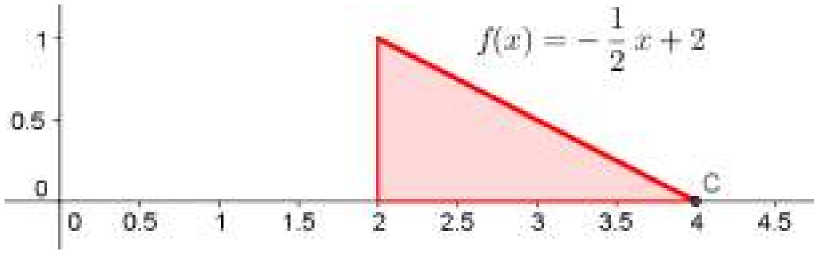
b) Queremos hallar P (8 ≤ X ≤ 10) y como sabemos que P (8 ≤ X ≤ 10) = P (X = 8) + P (X = 9) + P(X = 10) introducimos en la calculadora: **binompdf(25,0.03,8)+ binompdf(25,0.03,9)+ binompdf(25,0.03,10)** y obtenemos $4{,}4873\cdot 10^{-7}$.

ACTIVIDADES-PÁG. 356

1. I) La representación gráfica puede verse en el gráfico.

Es una función de densidad al cumplirse:

- $f_1\ (x) \geq 0 \ \ \forall\ x$
- Área recinto $= \dfrac{2 \cdot 1}{2} = 1$



Las probabilidades pedidas son:

a) $P(2{,}5 \leq X \leq 3{,}5) = 0{,}5$

b) $P(X \leq 3) = 0{,}75$

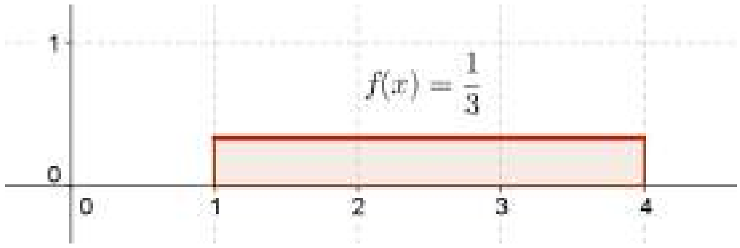
c) $P(X \geq 2{,}4) = 0{,}64$

d) $P(X = 3{,}65) = 0$

II) La representación gráfica puede verse en el gráfico.

Es una función de densidad al cumplirse:

- $f_1\ (x) \geq 0 \ \ \forall\ x$
- Área recinto $= 3 \cdot \dfrac{1}{3} = 1$



Las probabilidades pedidas son:

a) $P(2{,}5 \leq X \leq 3{,}5) = 0{,}33$

b) $P(X \leq 3) = 0{,}67$

c) $P(X \geq 2{,}4) = 0{,}53$

d) $P(X = 3{,}65) = 0$

2. Los valores del parámetro son: a) $m = \dfrac{1}{6}$ y b) $m = -\dfrac{1}{2}$

3. La solución es:

a) La gráfica 1 se corresponde con la distribución N (7; 1,5).
La gráfica 2 se corresponde con la distribución N (5; 1,5).
La gráfica 3 se corresponde con la distribución N (5; 3,5).

b) Las plantas más altas corresponden a la distribución N (7; 1,5). En las otras distribuciones, las medias de las alturas coinciden, y en N (5; 1,5) están más agrupadas, respecto a la media, que en N (5; 3,5).

4. En la tabla de la distribución normal encontramos:

a) P (Z ≤ 1,25) = 0,8944

b) P (Z ≥ 0,75) = 1 – P (Z ≤ 0,75) = 0,2266

c) P (Z ≤ - 1,56) = P (Z ≥ 1,56) = 0,0594

d) P (- 0,32 ≤ Z ≤ 0,32) = 2 · P (0 ≤ Z ≤ 0,32) = 2 · [P (Z ≤ 0,32) – P (Z ≤ 0)] = 0,251

5. En la tabla de la distribución normal encontramos:

a) a = 2,48 b) a = 1,36 c) a = 2,10 d) a = -1,28

6. Tipificamos la variable y posteriormente consultamos la tabla de la distribución normal:

a) P (X ≤ 6,32) = 0,5636

b) P(X ≥ 5,2) = 0,6554

c) P (X ≤ 4,5) = 0,2266

d) P (5 ≤ X ≤ 7) = 0,3829

7. Tipificamos la variable y posteriormente consultamos la tabla de la distribución normal:

a) k = 7,14

b) k = 6,74

c) P (0 ≤ X ≤ k) = P (X ≤ k) – 0,5; k = 11,61

d) P (6 - k ≤ X ≤ 6 + k) = P (X ≤ 6 + k) – P (X ≤ 6 - k); k = 2,35

8. La probabilidad es: P (18 ≤ X ≤ 30) = 0,4339.

ACTIVIDADES-PÁG. 357

9. Es una distribución normal N (192; 12).

La probabilidad pedida es:
P (X ≤ 186) = P (Z ≤ - 0,5) = P (Z ≥ 0,5) = 1 – P (Z ≤ 0,5) = 0,3085

10. Es una distribución normal N (170; 3).

- P (155 ≤ X ≤ 165) = P (- 5 ≤ Z ≤ - 1,67) = P (Z ≤ 5) - P (Z ≤ 1,67) = 0,0478, es decir, 48 batas.
- P (165 ≤ X ≤ 175) = P (- 1,67 ≤ Z ≤ 1,67) = 2 · P (0 ≤ Z ≤ 5) =

  = 2 · (0,9525 – 0,5) = 0,905, es decir, 905 batas.
- P (175 ≤ X ≤ 185) = P (1,67 ≤ Z ≤ 5) = P (Z ≤ 5) - P (Z ≤ 1,67) = 0,0475, es decir, 48 batas.

11. La solución queda:

a) $P\left(X \geq 8\right) = P\left(\frac{X-9}{3} \geq \frac{8-9}{3}\right) = P\left(Z \geq -\frac{1}{3}\right) = P\left(Z \leq \frac{1}{3}\right) = 0{,}6306$

b) $P\left(X \leq 5\right) = P\left(\frac{X-9}{3} \leq \frac{5-9}{3}\right) = P\left(Z \leq -\frac{4}{3}\right) = P\left(Z \geq \frac{4}{3}\right) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$

c) $P\left(11 \le X \le 13\right) = P\left(\dfrac{11-9}{3} \le \dfrac{X-9}{3} \le \dfrac{13-9}{3}\right) = P\left(\dfrac{2}{3} \le Z \le \dfrac{4}{3}\right) =$

$= P\left(Z \le \dfrac{4}{3}\right) - P\left(Z \le \dfrac{2}{3}\right) = 0{,}1613$

12. La solución queda:

a) $P\left(13 \le t \le 21\right) = P\left(\dfrac{13-17}{3} \le Z \le \dfrac{21-17}{3}\right) = P\left(-1{,}33 \le Z \le 1{,}33\right) =$

$= 2 \cdot P\ (Z \le 1{,}33) = 2 \cdot P(\ Z \le 1{,}33) - 1 = 0{,}8176$

b) $P\left(X \le t\right) = P\left(Z \le \dfrac{t-17}{3}\right) = 0{,}95 \ \Rightarrow \ \dfrac{t-17}{3} = 1{,}645 \ \Rightarrow \ t = 21{,}935 \approx 22$ minutos.

13. La solución es:

a) $P\left(X \le 28\right) = P\left(Z \le \dfrac{28-30}{5}\right) = P\left(Z \le -0{,}4\right) = 1 - P\left(Z \ge 0{,}4\right) = 0{,}3346$

b) $P\left(25 \le X \le 35\right) = P\left(\dfrac{25-30}{5} \le Z \le \dfrac{35-30}{5}\right) = P\left(-1 \le Z \le 1\right) =$

$= 2 \cdot [P\ (Z \le 1) - P(Z \le 0)] = 0{,}6826$

Es decir, el 68,26%.

c) $P\left(X \le t\right) = 0{,}80 \ \Rightarrow \ P\left(Z \le \dfrac{t-30}{5}\right) = 0{,}80 \ \Rightarrow \ \dfrac{t-30}{5} = 0{,}84 \ \Rightarrow \ t = 34{,}2$ minutos.

14. La variable se ajusta a una normal N (60; 3).

a) $P\left(X \ge 62\right) = P\left(Z \ge \dfrac{62-60}{3}\right) = P\left(Z \ge 0{,}67\right) = 1 - P\left(Z \le 0{,}67\right) = 0{,}2514 \ \Rightarrow \ 25{,}14\%$

Por lo tanto hay 201 adultos con el dedo corazón más largo de 62 mm.

b) $P\left(X \le 57\right) = P\left(Z \le -1\right) = P\left(Z \ge 1\right) = 1 - P\left(Z \le 1\right) = 0{,}1587$

Es el 16,87% que suponen 127 adultos.

c) $P\left(60 \le X \le 66\right) = P\left(0 \le Z \le 2\right) = P\left(Z \le 2\right) - P(Z \le 0) = 0{,}4772$

Es el 47,72% que suponen 382 adultos.

15. La solución queda:

a) P (salga 0 una sola vez) = $\frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot 3 = 0{,}243$

b) Es una distribución binomial B (100; 0,1) y la aproximamos a una distribución normal N (10; 3).

$$P\left(X > 12\right) = P\ (X' \geq 12{,}5) = P\left(Z \geq \frac{12{,}5 - 10}{3}\right) = P\left(Z \geq 0{,}83\right) =$$
$$= 1 - P\left(Z \leq 0{,}83\right) = 1 - 0{,}7967 = 0{,}2033$$

16. Llamamos k a la nota mínima a partir de la cual se conseguirá el sobresaliente. Debe cumplirse:

$$P\left(X \leq k\right) = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{X - 5{,}5}{1{,}5} \leq \frac{k - 5{,}5}{1{,}5}\right) = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad \frac{k - 5{,}5}{1{,}55} = 1{,}282 \ \Rightarrow \ k = 7{,}423$$

De igual forma, la calificación de notable:

$$P\left(X \leq k\right) = 0{,}7 \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{X - 5{,}5}{1{,}5} \leq \frac{k - 5{,}5}{1{,}5}\right) = 0{,}7 \quad \Rightarrow \quad \frac{k - 5{,}5}{1{,}55} = 0{,}525 \ \Rightarrow \ k = 6{,}2875$$

ACTIVIDADES-PÁG. 358

17. Es una distribución binomial $B\left(360, \frac{1}{6}\right)$ y la aproximaremos por una distribución normal.

Quedaría: $\mu = 360 \cdot \frac{1}{6} = 60 \ y \ \sigma = \sqrt{360 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 7{,}07$

La probabilidad es:

$$P\left(X \leq 55\right) = P\ (\ X' \leq 55{,}5) = P\left(\frac{X' - 60}{7{,}07} \leq \frac{55{,}5 - 60}{7{,}07}\right) = P\ (Z \leq -\ 0{,}64) = 1 - P(Z \leq 0{,}64) = 0{,}2611$$

18. Las probabilidades son:

a) P (X ≥ 13) = 0,2119 b) P (X ≤ 7) = 0,0548 c) P (X ≥ 10) = 0,6554

19. La probabilidad es: P (0,3 ≤ X ≤ 0,75) = 0,9710

20. La desviación típica es 0,8.

Las probabilidades son:

a) P (1 ≤ X ≤ 3) = 0,7887 b) P (X ≤ p) = 0,25; p = 1,46

21. La longitud sigue una distribución normal N(60, 5). Las probabilidades son:

a) $P\ (X \geq 64) = 0{,}2119$

b) $P\ (55 \leq X \leq 65) = 0{,}6827$

c) $P\left(X \geq 66 \big/ \geq 64\right) = \dfrac{P\ (X \geq 66)}{P\ (X \geq 64)} = 0{,}5432$

22. El peso sigue una distribución normal N (1,5; σ).

Se cumple:

$P\ (X \geq 2{,}5) = 0{,}15$, entones, $P\ (X \leq 2{,}5) = 0{,}85$, por tanto $\dfrac{2{,}5 - 1{,}5}{\sigma} = 1{,}0364$ y $\sigma = 0{,}965$.

23. Hallamos la media μ y la desviación típica σ.

$P\ (X \geq 100) = 0{,}2$; $P\left(Z \geq \dfrac{100 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{100 - \mu}{\sigma} = 0{,}842$

$P(X \leq 60) = 0{,}08$; $P\left(Z \leq \dfrac{60 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}08 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{60 - \mu}{\sigma} = -\,1{,}405$

Resolvemos el sistema y obtenemos $\mu = 85$ y $\sigma = 17{,}8$

24. Es una distribución binomial B (1000; 0,03) que aproximamos a una distribución normal N (30; 5,39) al ser la media $\mu = 1000 \cdot 0{,}03 = 30$ y la desviación típica $\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97} = 5{,}39$.

Hallamos la probabilidad $P\ (25 < X < 40) = P\ (25{,}5 \leq X' \leq 39{,}5) = 0{,}7591$.

25. Es una distribución binomial B (75; 0,9) que aproximamos a distribución normal N (67,5; 2,6) al ser La media $\mu = 75 \cdot 0{,}9 = 67{,}5$ y la desviación típica $\sigma = \sqrt{75 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = 2{,}6$.

Hallamos la probabilidad $P\ (X \geq 65) = P\ (X' \geq 64{,}5) = 0{,}8757$

26. Las soluciones son:

a) Es una distribución binomial B (20 ; 0,85).

Hallamos la probabilidad $P\ (X \leq 18) = 1 - P\ (X = 19) - P\ (X = 20) = 0{,}8244$

b) Es una distribución binomial B (500; 0,85) que aproximamos a una normal N (425; 7,98) al ser la media $\mu = 500 \cdot 0{,}85 = 425$ y la desviación típica $\sigma = \sqrt{500 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15} = 7{,}98$.

Hallamos la probabilidad $P\ (X > 450) = P\ (X \geq 450{,}5) = 0{,}0007$.

27. Es una distribución normal N (6,5; 1,75).

a) Calculamos la nota S a partir de la cual calificará con sobresaliente: P (X ≥ S) = 0,12 por lo que P (X ≤ S) = 0,88, entonces:

$$P\left(Z \le \frac{S-6{,}5}{1{,}75}\right) = 0{,}88 \;\Rightarrow\; \frac{S-6{,}5}{1{,}75} = 1{,}175 \;\Rightarrow S = 8{,}56$$

La nota a partir de la cual calificará el profesor con sobresaliente es S = 8,56.

b) Si quiere calificar con notable al 35% de los alumnos, contando los sobresalientes, quedaría que la nota N a partir de la cual obtendrá notable es P (X ≥ N) = 0,47, es decir, P (X ≤ N) = 0,53, entonces:

$$P\left(Z \le \frac{N-6{,}5}{1{,}75}\right) = 0{,}53 \;\Rightarrow\; \frac{N-6{,}5}{1{,}75} = 0{,}076 \;\Rightarrow N = 6{,}63.$$

El valor 6,63 es la nota a partir de la cual calificará el profesor con notable, hasta el 8,56 a partir del cual calificará con sobresaliente.

ACTIVIDADES-PÁG. 359

a) $24\,(1+0{,}08)^{390} = 2{,}6 \cdot 10^{14}$ $

b) $24\,(1+r)^{390} = 1000$ $; r = 0,961% anual