Números reales

1

ACTIVIDADES

1. Calcula el representante canónico de estos números.

a) $\frac{-16}{24}$ b) $\frac{18}{39}$ c) $\frac{-24}{-60}$

a) $\frac{-16}{24} = -\frac{2}{3}$ b) $\frac{18}{39} = \frac{6}{13}$ c) $\frac{-24}{-60} = \frac{2}{5}$

2. Escribe dos representantes de los números racionales.

a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{9}{2}$ c) $\frac{8}{25}$

Respuesta abierta.

a) $\frac{7}{12} = \left\{\ldots, \frac{14}{24}, \frac{21}{36}, \ldots\right\}$

b) $\frac{9}{2} = \left\{\ldots, \frac{18}{4}, \frac{27}{6}, \ldots\right\}$

c) $\frac{8}{25} = \left\{\ldots, \frac{16}{50}, \frac{24}{75}, \ldots\right\}$

3. Halla cuántos números racionales distintos hay en esta secuencia.

$$\frac{5}{3} \qquad -\frac{5}{3} \qquad \frac{-5}{3} \qquad \frac{5}{-3} \qquad \frac{10}{6} \qquad 1,\widehat{6}$$

Hay dos números racionales distintos, que son:

$\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = 1,\widehat{6}$ $\qquad -\frac{5}{3} = \frac{-5}{3} = \frac{5}{-3}$

4. Una fracción que tenga un término negativo y otra que tenga sus dos términos positivos, ¿pueden ser representantes del mismo número racional?

No pueden representar el mismo número racional, puesto que si una fracción tiene un término negativo, el cociente es negativo; y si sus dos términos son positivos, el cociente es positivo.

5. Escribe cuatro números irracionales, especificando su regla de formación.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Tras la coma se sitúan todos los múltiplos de 3: 0,3691215…

Tras la coma se sitúan todos los múltiplos de 4: 0,481216…

Al número irracional $\sqrt{2}$ se le suma el número 1: $\sqrt{2}+1$.

Al número irracional $\sqrt{2}$ se le suma el número 2: $\sqrt{2}+2$.

6. **Decide si los siguientes números son irracionales.**

a) 0,51015202530… b) $\frac{3\pi}{4\pi}$ c) $2 - \pi$ d) $\frac{10}{17}$

a) Es un número irracional, ya que tiene infinitas cifras decimales que no se repiten de forma periódica.

b) Es un número decimal exacto, luego no es un número irracional.

c) Es un número irracional, porque si a un número irracional se le resta un número entero, el resultado es un número irracional.

d) No es un número irracional, puesto que es una fracción.

7. **Encuentra, sin hacer operaciones con decimales, un número irracional comprendido entre $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.**

Respuesta abierta.

$\sqrt{2} - 1$

8. **Razona si son ciertas o no las siguientes afirmaciones.**

a) La raíz de un número irracional es irracional.

b) Un número irracional al cuadrado no es racional.

a) Cierta, ya que sigue teniendo infinitas cifras decimales no periódicas.

b) Falsa, por ejemplo: $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

9. **Indica el conjunto numérico mínimo al que pertenece cada número.**

a) 8,0999… c) $\sqrt{15}$ e) 2,5

b) 1,223334444… d) $6,1\overset{\frown}{26}$ f) -11

a) $\mathbb{Q}$ d) $\mathbb{Q}$

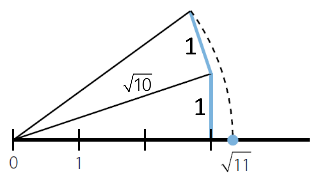
b) $\mathbb{I}$ e) $\mathbb{Q}$

c) $\mathbb{I}$ f) $\mathbb{Z}$

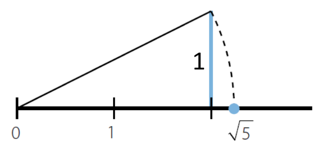
10. **Representa las raíces.**

a) $\sqrt{11}$ b) $\sqrt{101}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{36}$

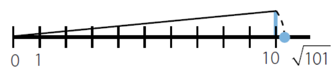
a)



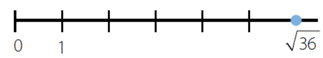
c)



b)

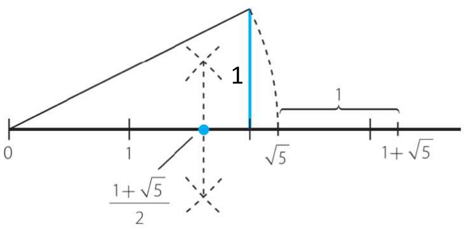


d)

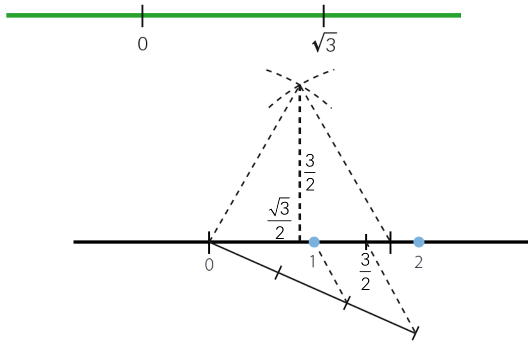


11. **Coloca, en la recta real, el número:**

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



12. **Representa, en la siguiente recta real, los números 1 y 2.**



13. **Aplica la propiedad distributiva y opera.**

a) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{5}\right)$ b) $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}-\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}+3\cdot\frac{2}{7}$

a) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{30-42}{140}=-\frac{12}{140}=-\frac{3}{35}$

b) $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}-\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}+3\cdot\frac{2}{7}=\frac{2}{7}\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}+3\right)=\frac{2}{7}\cdot\frac{67}{20}=\frac{67}{70}$

14. **Encuentra tres números situados entre estos.**

a) $\frac{301}{200}$ y $\frac{302}{200}$ b) $\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}+\frac{1}{10}$

a) Respuesta abierta, por ejemplo: $\frac{3011}{2000}$, $\frac{3012}{2000}$ y $\frac{3013}{2000}$.

b) Respuesta abierta, por ejemplo: $\sqrt{5}+\frac{1}{100}$, $\sqrt{5}+\frac{2}{100}$ y $\sqrt{5}+\frac{3}{100}$.

15. **Ordena, de menor a mayor, los siguientes números racionales e irracionales.**

$$3 \qquad \frac{22}{7} \qquad \pi \qquad \frac{2\,827}{900}$$

$3<\frac{2827}{900}<\pi<\frac{22}{7}$

16. Con ayuda de la propiedad distributiva, calcula sin realizar los cuadrados.

a) 99^2 b) 999^2

a) $99^2 = 99 \cdot 99 = 99(100 - 1) = 9\,900 - 99 = 9\,801$

b) $999^2 = 999 \cdot 999 = 999(1\,000 - 1) = 999\,000 - 999 = 998\,001$

17. Representa los siguientes conjuntos numéricos de todas las formas que conozcas.

a) Números menores que π.

b) Números mayores que $\sqrt{3}$ y menores o iguales que 7.

c) Números menores o iguales que 2 y mayores que -2.

d) Números comprendidos entre los dos primeros números pares, ambos incluidos.

e) Números comprendidos entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.

a) $(-\infty, \pi) = \{x: x < \pi\}$

b) $(\sqrt{3}, 7] = \{x: \sqrt{3} < x \leq 7\}$

c) $(-2, 2] = \{x: -2 < x \leq 2\}$

d) $[2, 4] = \{x: 2 \leq x \leq 4\}$

e) $(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{x: \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\}$

18. Escribe, de todas las maneras que conozcas, estos intervalos de la recta real.

a)

c)

b)

d)

a) $(-\infty, -3) = \{x: x < -3\}$

b) $[-3, 2) = \{x: -3 \leq x < 2\}$

c) $(3, +\infty) = \{x: x > 3\}$

d) $(-1, 1) = \{x: |x| < 1\}$

19. Representa el conjunto $\{x: |x - 3| \leq 1\}$ de todas las formas que conozcas.

$[2, 4] = \{x: 2 \leq x \leq 4\}$

20. **Con ayuda de la calculadora, escribe $\sqrt{3}$ en forma decimal y sus aproximaciones por exceso y por defecto a las diezmilésimas y a las cienmilésimas.**

$\sqrt{3} = 1{,}73205080...$

Aproximación por exceso a las diezmilésimas: 1,7321

Aproximación por defecto a las diezmilésimas: 1,7320

Aproximación por exceso a las cienmilésimas: 1,73206

Aproximación por defecto a las cienmilésimas: 1,73205

21. **Piensa en una situación en la que dos mediciones tengan los mismos errores absolutos, pero distintos errores relativos.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Valor real = 12,5 Valores aproximados: 12 y 13

En ambos casos, el error absoluto es 0,5; pero los errores relativos son distintos:

$E_r = \left|\dfrac{0{,}5}{12}\right| = 0{,}0417$ $E_r = \left|\dfrac{0{,}5}{13}\right| = 0{,}0385$

22. **Indica dos ejemplos de medida y da sus correspondientes cotas de error.**

- Velocidad en autopista: 115,45 km/h

$$\text{Aproximación: } 115 \text{ km/h} \rightarrow \begin{cases} \text{Cota de error absoluto} = \left|\dfrac{1}{2\cdot 10^0}\right| = 0{,}5 \\ \text{Cota de error relativo} = \dfrac{0{,}5}{115 - 0{,}5} = 0{,}00437 \end{cases}$$

- Media de edad de jubilación: 64,3 años

$$\text{Aproximación: } 64 \text{ años} \rightarrow \begin{cases} \text{Cota de error absoluto} = \left|\dfrac{1}{2\cdot 10^0}\right| = 0{,}5 \\ \text{Cota de error relativo} = \dfrac{0{,}5}{64 - 0{,}5} = 0{,}007874 \end{cases}$$

23. **Calcula las cotas de error absoluto y relativo al redondear el número $\sqrt{2}$:**

a) A las centésimas. b) A las milésimas.

a) $E_a = \left|\dfrac{1}{2\cdot 10^2}\right| = 0{,}005$ $E_r = \left|\dfrac{0{,}005}{1{,}41 - 0{,}005}\right| = 0{,}0035$

b) $E_a = 0{,}0005$ $E_r = \left|\dfrac{0{,}0005}{1{,}414 - 0{,}0005}\right| = 0{,}00035$

24. **La población de un pueblo, redondeada a las decenas, es de 310 habitantes. ¿Puedes indicar los errores? ¿Sabrías dar las cotas de error cometido?**

Para calcular los errores relativos y absolutos es necesario conocer el valor real; por tanto, no se pueden calcular.

Las cotas de error son:

$E_a = \left|\dfrac{1}{2\cdot 10^{-1}}\right| = 5$ $E_r = \left|\dfrac{5}{310 - 5}\right| = 0{,}016$

25. Calcula una cota de error absoluto cuando truncamos un número a las décimas. ¿Y si fuera a las centésimas?

$E_a = \left|\frac{1}{2\cdot 10^1}\right| = 0{,}05$ $\qquad$ $E_a = \left|\frac{1}{2\cdot 10^2}\right| = 0{,}005$

26. Escribe en notación científica los siguientes números.

a) 0,0000085 $\qquad$ c) 31 940 000 000

b) 5 000 000 000 000 $\qquad$ d) 0,000000000479

a) $0{,}0000085 = 8{,}5 \cdot 10^{-6}$ $\qquad$ c) $31\,940\,000\,000 = 3{,}194 \cdot 10^{10}$

b) $5\,000\,000\,000\,000 = 5 \cdot 10^{12}$ $\qquad$ d) $0{,}000000000479 = 4{,}79 \cdot 10^{-10}$

27. Opera y expresa el resultado en notación científica.

a) $(5{,}2 \cdot 10^3 + 4{,}75 \cdot 10^{-2}) : 8{,}05 \cdot 10^{-4}$

b) $3{,}79 \cdot 10^8 \cdot (7{,}73 \cdot 10^4 - 6{,}54 \cdot 10^{-2})$

a) $(5{,}2 \cdot 10^3 + 4{,}75 \cdot 10^{-2}) : 8{,}05 \cdot 10^{-4} = 6{,}45968 \cdot 10^6$

b) $3{,}79 \cdot 10^8 \cdot (7{,}73 \cdot 10^4 - 6{,}54 \cdot 10^{-2}) = 2{,}92966 \cdot 10^{13}$

28. Decide si son ciertas las siguientes igualdades. Razona la respuesta.

a) $\sqrt[4]{-16} = -2$ $\qquad$ c) $\sqrt[3]{1\,000\,000} = \pm 1\,000$

b) $\sqrt[8]{256} = \pm 4$ $\qquad$ d) $\sqrt[5]{32} = \pm 2$

a) Falsa: $(-2)^4 = 16$ $\qquad$ c) Falsa: $(-1\,000)^3 = -1\,000\,000\,000$

b) Falsa: $4^8 = 65\,536$ $\qquad$ d) Falsa: $(-2)^5 = -32$

29. Calcula el valor numérico, si existe, de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{16}$ $\qquad$ c) $\sqrt[4]{-10\,000}$

b) $\sqrt[3]{-8}$ $\qquad$ d) $\sqrt[5]{243}$

a) $\sqrt[4]{16} = 2$ $\qquad$ c) No existe ninguna raíz real.

b) $\sqrt[3]{-8} = -2$ $\qquad$ d) $\sqrt[5]{243} = 3$

30. Transforma los radicales en potencias, y viceversa.

a) $3^{\frac{1}{4}}$ $\qquad$ c) $2^{\frac{1}{6}}$ $\qquad$ e) $10^{\frac{2}{7}}$

b) $5^{\frac{2}{3}}$ $\qquad$ d) $7^{\frac{3}{5}}$ $\qquad$ f) $\sqrt[4]{5^7}$

a) $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$ $\qquad$ d) $7^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{7^3}$

b) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$ $\qquad$ e) $10^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{10^2}$

c) $2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$ $\qquad$ f) $\sqrt[4]{5^7} = 5^{\frac{7}{4}}$

31. Indica si son equivalentes los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{3^6}$ y $\sqrt{3^3}$ $\qquad$ c) $\sqrt[4]{36}$ y $\sqrt{6}$

b) $\sqrt[5]{2^{10}}$ y $\sqrt{2}$ $\qquad$ d) $\sqrt[4]{5^{10}}$ y $\sqrt{5^4}$

a) Son equivalentes. $\qquad$ c) Son equivalentes.

b) No son equivalentes. $\qquad$ d) No son equivalentes.

32. Efectúa estas operaciones.

a) $\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{45}$ b) $7\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[6]{3^2} + \frac{\sqrt[3]{3}}{5}$

a) $\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{45} = 2\sqrt{5} - 15\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = -7\sqrt{5}$

b) $7\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[6]{3^2} + \frac{\sqrt[3]{3}}{5} = 21\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} + \frac{\sqrt[3]{3}}{5} = \frac{96\sqrt[3]{3}}{5}$

33. Opera y simplifica.

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$ b) $\left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}}$

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6} = 20\sqrt{162} = 180\sqrt{2}$

b) $\left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3 = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8^3}} = \sqrt{\frac{2^5}{2^9}} = \frac{1}{4}$

c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{108}$

d) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[12]{\frac{3^6 \cdot 3^4}{3^3}} = \sqrt[12]{3^7}$

34. Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{-3}{5\sqrt[4]{2^3}}$ c) $\frac{2+\sqrt{3}}{6\sqrt[5]{7^3}}$

a) $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{-3}{5\sqrt[4]{2^3}} = \frac{-3\sqrt[4]{2}}{10}$

c) $\frac{2+\sqrt{3}}{6\sqrt[5]{7^3}} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt[5]{7^2}}{42}$

35. Racionaliza y opera.

a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ b) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}+7}$ c) $\frac{5\sqrt{3}}{9-\sqrt{5}}$

a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = -1+\sqrt{2}$

b) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}+7} = \frac{8\sqrt{6} - 56\sqrt{2}}{-46} = \frac{-4\sqrt{6} + 28\sqrt{2}}{23}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{9-\sqrt{5}} = \frac{45\sqrt{3} + 5\sqrt{15}}{76}$

36. **Calcula, mediante la definición, estos logaritmos.**

a) $\log_2 8$
b) $\log_3 81$
c) $\log 1\,000$
d) $\log 0{,}0001$
e) $\ln e^{33}$
f) $\ln e^{-4}$
g) $\log_4 16$
h) $\log_4 0{,}25$

a) $\log_2 8 = 3$
b) $\log_3 81 = 4$
c) $\log 1\,000 = 3$
d) $\log 0{,}0001 = -4$
e) $\ln e^{33} = 33$
f) $\ln e^{-4} = -4$
g) $\log_4 16 = 2$
h) $\log_4 0{,}25 = -1$

37. **Halla, mediante la definición, los siguientes logaritmos.**

a) $\log_3 243$
b) $\log_9 81$
c) $\log 1\,000\,000$
d) $\log 0{,}00001$
e) $\ln e^2$
f) $\ln e^{-14}$
g) $\log_7 343$
h) $\log_4 0{,}0625$

a) $\log_3 243 = 5$
b) $\log_9 81 = 2$
c) $\log 1\,000\,000 = 6$
d) $\log 0{,}00001 = -5$
e) $\ln e^2 = 2$
f) $\ln e^{-14} = -14$
g) $\log_7 343 = 3$
h) $\log_4 0{,}0625 = -2$

38. **Calcula los logaritmos y deja indicado el resultado.**

a) $\log_4 32$
b) $\log_2 32$
c) $\log_3 100$
d) $\log_5 32$
e) $\log_{32} 4$
f) $\log_2 304$

a) $\log_4 32 = \dfrac{\log_2 32}{\log_2 4} = \dfrac{5}{2}$

b) $\log_2 32 = 5$

c) $\log_3 100 = \dfrac{\log 100}{\log 3} = 4{,}1918\ldots$

d) $\log_5 32 = \dfrac{\log 32}{\log 5} = 2{,}1533\ldots$

e) $\log_{32} 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 32} = \dfrac{2}{5}$

f) $\log_2 304 = \dfrac{\log 304}{\log 2} = 8{,}2479\ldots$

39. **Sabiendo que log 2 = 0,3010; log 3 = 0,4771 y log 7 = 0,8451, determina los logaritmos decimales de los 10 primeros números naturales. Con estos datos, ¿sabrías calcular log 3,5? ¿Y log 1,5?**

$\log 4 = \log (2 \cdot 2) = \log 2 + \log 2 = 2 \cdot 0{,}3010 = 0{,}6020$

$\log 5 = \log\left(\dfrac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}3010 = 0{,}6990$

$\log 6 = \log (3 \cdot 2) = \log 3 + \log 2 = 0{,}4771 + 0{,}3010 = 0{,}7781$

$\log 8 = \log (4 \cdot 2) = \log 4 + \log 2 = 0{,}6020 + 0{,}3010 = 0{,}9030$

$\log 9 = \log (3 \cdot 3) = \log 3 + \log 3 = 0{,}4771 + 0{,}4771 = 0{,}9542$

$\log 10 = 1$

$\log 3{,}5 = \log\left(\dfrac{7}{2}\right) = \log 7 - \log 2 = 0{,}8451 - 0{,}3010 = 0{,}5441$

$\log 1{,}5 = \log\left(\dfrac{3}{2}\right) = \log 3 - \log 2 = 0{,}4771 - 0{,}3010 = 0{,}1761$

40. Halla, sin ayuda de la calculadora, $\log_2 5$ y $\log_5 2$. Comprueba que su producto es 1.

En la actividad anterior, se ha visto que log 2 = 0,3010. Si se utilizan cambios de base, resulta:

$$\log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} = \frac{1}{0{,}3010} = 3{,}32$$

$$\log_2 10 = \log_2 (2 \cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 5 \rightarrow \log_2 5 = 2{,}32$$

$$\log_5 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 5} = \frac{1}{\log_2 5} = 0{,}43$$

Como los dos números son inversos, su producto es 1. También se puede comprobar de este modo:

$$\log_2 5 \cdot \log_5 2 = \frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{\log 2}{\log 5} = 1$$

41. Obtén el valor de *x* en las siguientes igualdades.

a) $\log_x 256 = -8$

b) $\log_3 x = \frac{2}{3}$

c) $\log_5 \sqrt[6]{625} = x$

d) $\log_x 3 = 2$

a) $\frac{1}{2}$ b) 2,0801… c) $\frac{2}{3}$ d) $\sqrt{3}$

42. Calcula cuánto vale $\log_a b \cdot \log_b a$.

$$\log_a b \cdot \log_b a = \frac{\log b}{\log a} \cdot \frac{\log a}{\log b} = 1$$

SABER HACER

43. Suma y resta.

a) $2,\overset{\frown}{7} + 4,\overset{\frown}{3}$

b) $20,2\overset{\frown}{1} - 7,\overset{\frown}{5}$

c) $6,\overset{\frown}{13} + 5,\overset{\frown}{2}$

d) $5,\overset{\frown}{4} + 7,\overset{\frown}{6}$

e) $6,\overset{\frown}{34} + 4,2\overset{\frown}{13}$

f) $1,\overset{\frown}{23} - 1,0\overset{\frown}{12}$

a) $2,\overset{\frown}{7} + 4,\overset{\frown}{3} = \frac{27-2}{9} + \frac{43-4}{9} = \frac{64}{9} = 7,\overset{\frown}{1}$

b) $20,2\overset{\frown}{1} - 7,\overset{\frown}{5} = \frac{1819}{90} - \frac{68}{9} = \frac{1139}{90} = 12,6\overset{\frown}{5}$

c) $6,\overset{\frown}{13} + 5,\overset{\frown}{2} = \frac{607}{99} + \frac{47}{9} = \frac{1124}{99} = 11,\overset{\frown}{35}$

d) $5,\overset{\frown}{4} + 7,\overset{\frown}{6} = \frac{49}{9} + \frac{69}{9} = \frac{118}{9} = 13,\overset{\frown}{1}$

e) $6,\overset{\frown}{34} + 4,2\overset{\frown}{13} = \frac{628}{99} + \frac{4171}{990} = \frac{10451}{990} = 10,5\overset{\frown}{56}$

f) $1,\overset{\frown}{23} - 1,0\overset{\frown}{12} = \frac{122}{99} - \frac{167}{165} = \frac{109}{495} = 0,2\overset{\frown}{20}$

44. Multiplica y divide.

a) $1,2 \cdot 2,\overset{\frown}{1}$

b) $1,2 : 2,\overset{\frown}{1}$

c) $6,3\overset{\frown}{7} \cdot 8,\overset{\frown}{4}$

d) $6,3\overset{\frown}{7} : 8,\overset{\frown}{4}$

a) $1,2 \cdot 2,\overset{\frown}{1} = \frac{6}{5} \cdot \frac{19}{9} = \frac{38}{15} = 2,5\overset{\frown}{3}$

b) $1,2 : 2,\overset{\frown}{1} = \frac{6}{5} : \frac{19}{9} = \frac{54}{95} = 0,5\overset{\frown}{684210526315789473}$

c) $6,3\overset{\frown}{7} \cdot 8,\overset{\frown}{4} = \frac{287}{45} \cdot \frac{76}{9} = \frac{21812}{405} = 53,8\overset{\frown}{567901234}$

d) $6,3\overset{\frown}{7} : 8,\overset{\frown}{4} = \frac{287}{45} : \frac{76}{9} = \frac{287}{380} = 0,75\overset{\frown}{526315789473684210}$

45. **Opera.**

a) $\left(\frac{5}{6}+\frac{4}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$ b) $\left(\frac{5}{6}-\frac{4}{5}\right)^{2}:\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

a) $\left(\frac{5}{6}+\frac{4}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\left(\frac{25}{30}+\frac{24}{30}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{9}=\frac{30^2}{49^2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9}=\frac{600}{2401}+\frac{4}{9}=\frac{15004}{21609}$

b) $\left(\frac{5}{6}-\frac{4}{5}\right)^{2}:\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{25}{30}-\frac{24}{30}\right)^{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{9}{4}=\frac{1}{30^2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{9}{4}=\frac{1}{1350}+\frac{9}{4}=\frac{6077}{2700}$

46. **Factoriza.**

a) $\frac{6}{35}-\frac{30}{105}+\frac{54}{245}$ b) $\frac{9}{4}+\frac{45}{32}+\frac{81}{100}$

a) $\frac{6}{35}-\frac{30}{105}+\frac{54}{245}=\frac{2\cdot3}{5\cdot7}-\frac{2\cdot3\cdot5}{3\cdot5\cdot7}+\frac{2\cdot3^3}{5\cdot7^2}=\frac{2\cdot3}{5\cdot7}\cdot\left(1-\frac{5}{3}+\frac{3^2}{7}\right)=\frac{6}{35}\cdot\left(1-\frac{5}{3}+\frac{9}{7}\right)$

b) $\frac{9}{4}+\frac{45}{32}+\frac{81}{100}=\frac{3^2}{2^2}+\frac{5\cdot3^2}{2^5}+\frac{3^4}{2^2\cdot5^2}=\frac{3^2}{2^2}\cdot\left(1+\frac{5}{2^3}+\frac{3^2}{5^2}\right)=\frac{9}{4}\cdot\left(1+\frac{5}{8}+\frac{9}{25}\right)$

47. **Halla la unión de estos intervalos.**

a) $(-4,-2]\cup(-3,0)$ b) $(2,8]\cup[-2,0)$

a) $(-4,-2]\cup(-3,0)=(-4,0)$ b) $(2,8]\cup[-2,0)=[-2,0)\cup(2,8]$

48. **Halla la intersección de estos intervalos.**

a) $(-4,-2]\cap(-3,0)$ b) $(2,8]\cap[-2,0)$

a) $(-4,-2]\cap(-3,0)=(-3,-2]$ b) $(2,8]\cap[-2,0)=\varnothing$

49. **Escribe los cinco primeros intervalos encajados, y da una cota del error cometido, de los números $\sqrt{22}$, π y Φ.**

a) $\sqrt{22}=4{,}690415759823429554565630113544 5\ldots$

$4<\sqrt{22}<5\rightarrow$ (4, 5) → Error < 5 – 4 = 1

$4{,}6<\sqrt{22}<4{,}7\rightarrow$ (4,6; 4,7) → Error < 4,7 – 4,6 = 0,1

$4{,}69<\sqrt{22}<4{,}70\rightarrow$ (4,69; 4,7) → Error < 4,7 – 4,69 = 0,01

$4{,}690<\sqrt{22}<4{,}691\rightarrow$ (4,69; 4,691) → Error < 4,691 – 4,69 = 0,001

$4{,}6904<\sqrt{22}<4{,}6905\rightarrow$ (4,6904; 4,691) → Error < 4,691 – 4,6904 = 0,0001

b) $\pi=3{,}14159265358979323846264338327 95\ldots$

$3<\pi<4\rightarrow$ (3, 4) → Error < 4 – 3 = 1

$3{,}1<\pi<3{,}2\rightarrow$ (3,1; 3,2) → Error < 3,2 – 3,1 = 0,1

$3{,}14<\pi<3{,}15\rightarrow$ (3,14; 3,15) → Error < 3,15 – 3,14 = 0,01

$3{,}141<\pi<3{,}142\rightarrow$ (3,141; 3,142) → Error < 3,142 – 3,141 = 0,001

$3{,}1415<\pi<3{,}1416\rightarrow$ (3,1415; 3,1416) → Error < 3,1416 – 3,1415 = 0,0001

c) $\Phi = 1{,}6180339887498948482045868343656...$

$1 < \Phi < 2 \rightarrow (1, 2) \rightarrow$ Error < 2 − 1 = 1

$1{,}6 < \Phi < 1{,}7 \rightarrow (1{,}6;\ 1{,}7) \rightarrow$ Error < 1,7 − 1,6 = 0,1

$1{,}61 < \Phi < 1{,}62 \rightarrow (1{,}61;\ 1{,}62) \rightarrow$ Error < 1,62 − 1,61 = 0,01

$1{,}618 < \Phi < 1{,}619 \rightarrow (1{,}618;\ 1{,}619) \rightarrow$ Error < 1,619 − 1,618 = 0,001

$1{,}6180 < \Phi < 1{,}6181 \rightarrow (1{,}618;\ 1{,}6181) \rightarrow$ Error < 1,6181 − 1,618 = 0,0001

50. Opera en notación científica.

a) $6{,}4 \cdot 10^{-6} - 5{,}1 \cdot 10^{-4} + 9{,}3 \cdot 10^{-2}$ b) $5{,}1 \cdot 10^{6} - 5{,}2 \cdot 10^{4} + 5{,}3 \cdot 10^{2}$

a) $6{,}4 \cdot 10^{-6} - 5{,}1 \cdot 10^{-4} + 9{,}3 \cdot 10^{-2} = 9{,}24964 \cdot 10^{-2}$ b) $5{,}1 \cdot 10^{6} - 5{,}2 \cdot 10^{4} + 5{,}3 \cdot 10^{2} = 5{,}04853 \cdot 10^{6}$

51. Convierte las siguientes expresiones en un solo radical.

a) $5^{-\frac{2}{3}}$ c) $(-5)^{\frac{2}{3}}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{23}}$

b) $-5^{\frac{2}{3}}$ d) $(-5)^{-\frac{2}{3}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$

a) $5^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{1}{5}\sqrt[3]{5}$ c) $(-5)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{23}} = \sqrt[12]{23}$

b) $-5^{\frac{2}{3}} = -\sqrt[3]{5^2}$ d) $(-5)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(-5)^2}} = \frac{1}{5}\sqrt[3]{5}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[9]{3}$

52. Introduce los factores de las siguientes expresiones dentro del signo radical.

a) $3x^2\sqrt[3]{3y}$ c) $2ab^2c\sqrt[4]{4}$

b) $8b\sqrt{8a^3b}$ d) $(2a - b)\sqrt{b}$

a) $3x^2\sqrt[3]{3y} = \sqrt[3]{27x^6 3y} = \sqrt[3]{81x^6y}$ c) $2ab^2c\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{64a^4b^8c^4}$

b) $8b\sqrt{8a^3b} = \sqrt{512a^3b^3}$ d) $(2a-b)\sqrt{b} = \sqrt{(2a-b)^2 b} = \sqrt{4a^2b + b^3 - 4ab^2}$

53. Racionaliza estas expresiones.

a) $\frac{3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{5}}$ b) $\frac{6}{\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(2 - \sqrt{5})}$

a) $\frac{3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{5^3}}{5}$

b) $\frac{6}{\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{6}{\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})}{\sqrt[3]{2^2} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})} = -3 \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 3\sqrt[3]{2^2} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})$

c) $\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(2 - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(2 - \sqrt{5})} \cdot \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(2 + \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(2 + \sqrt{5})} = -\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})(2 + \sqrt{5})$

ACTIVIDADES FINALES

54. Clasifica las fracciones en reducibles e irreducibles.

a) $\frac{-5}{12}$ c) $\frac{15}{18}$ e) $-\frac{15}{28}$

b) $\frac{9}{6}$ d) $\frac{3}{8}$ f) $\frac{104}{-206}$

a) $\frac{-5}{12} \rightarrow$ Es irreducible, porque el m.c.d.(5, 12) = 1.

b) $\frac{9}{6}=\frac{3}{2} \rightarrow$ Es una fracción reducible.

c) $\frac{15}{18}=\frac{5}{6} \rightarrow$ Es una fracción reducible.

d) $\frac{3}{8} \rightarrow$ Es irreducible, porque el m.c.d.(3, 8) = 1.

e) $-\frac{15}{28} \rightarrow$ Es irreducible, porque el m.c.d.(15, 28) = 1.

f) $\frac{104}{-206}=-\frac{52}{103} \rightarrow$ Es una fracción reducible.

55. Calcula la fracción irreducible de:

a) $\frac{5}{200}$ c) $\frac{26}{130}$ e) $\frac{12}{400}$ g) $\frac{88}{176}$

b) $\frac{-1080}{432}$ d) $\frac{-702}{1053}$ f) $\frac{72}{243}$ h) $\frac{104}{216}$

a) $\frac{5}{200}=\frac{1}{40}$ c) $\frac{26}{130}=\frac{1}{5}$ e) $\frac{12}{400}=\frac{3}{100}$ f) $\frac{88}{176}=\frac{1}{2}$

b) $\frac{-1080}{432}=\frac{-5}{2}$ d) $\frac{-702}{1053}=\frac{-2}{3}$ f) $\frac{72}{243}=\frac{8}{27}$ g) $\frac{104}{216}=\frac{13}{27}$

56. Halla *x* para que las fracciones sean equivalentes.

a) $\frac{3}{5}=\frac{6}{x}$ c) $\frac{x}{-3}=\frac{4}{6}$

b) $\frac{-5}{2}=\frac{x}{8}$ d) $\frac{4}{x}=-\frac{1}{3}$

a) $\frac{3}{5}=\frac{6}{x} \rightarrow 3x=30 \rightarrow x=10$

b) $\frac{-5}{2}=\frac{x}{8} \rightarrow -40=2x \rightarrow x=-20$

c) $\frac{x}{-3}=\frac{4}{6} \rightarrow 6x=-12 \rightarrow x=-2$

d) $\frac{4}{x}=-\frac{1}{3} \rightarrow 12=-x \rightarrow x=-12$

57. Encuentra los valores de *x* para que sea irreducible:

a) La fracción propia $\frac{x}{18}$. b) La fracción impropia $\frac{12}{x}$.

a) m.c.d.$(x, 18)=1$, $x<18 \rightarrow x=\{5, 7, 11, 13, 17\}$

b) m.c.d.$(12, x)=1$, $x<12 \rightarrow x=\{5, 7, 11\}$

58. Haz estas operaciones con fracciones.

a) $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)^{2}$ b) $\left(\frac{4}{3}:\frac{1}{6}\right)^{-2}+\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{6}\right)^{2}$

a) $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)^{2}=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{2}+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{17}{16}$

b) $\left(\frac{4}{3}:\frac{1}{6}\right)^{-2}+\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{6}\right)^{2}=\left(\frac{1}{8}\right)^{2}+\left(\frac{5}{12}\right)^{2}=\frac{109}{576}$

59. Realiza las siguientes operaciones.

a) $\left(\frac{5}{6}-\frac{4}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$

b) $\left(\frac{5}{2}+\frac{2}{5}\right)^{-1}:\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}-\left(\frac{4}{3}\right)^{2}$

a) $\left(\frac{5}{6}-\frac{4}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\left(\frac{25}{30}-\frac{24}{30}\right)^{-2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{30}\right)^{-2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=900\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=1350+\frac{1}{4}=\frac{5401}{4}$

b) $\left(\frac{5}{2}+\frac{2}{5}\right)^{-1}:\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}-\left(\frac{4}{3}\right)^{2}=\left(\frac{25}{10}+\frac{4}{10}\right)^{-1}:\frac{3}{7}-\frac{16}{9}=\left(\frac{29}{10}\right)^{-1}:\frac{3}{7}-\frac{16}{9}=\frac{10}{29}:\frac{3}{7}-\frac{16}{9}=\frac{70}{87}-\frac{16}{9}=-\frac{254}{261}$

60. Expresa los siguientes números en forma decimal.

a) $\frac{22}{13}$ b) $\frac{43}{1000}$ c) $\frac{12}{1100}$ d) $\frac{42}{5}$

a) $\frac{22}{13}=1,\widehat{692307}$ b) $\frac{43}{1000}=0,043$ c) $\frac{12}{1100}=0,01\widehat{09}$ d) $\frac{42}{5}=8,4$

61. Indica de qué tipo son estos números decimales.

a) 2,331 c) 6,2727… e) 4
b) 4,1234… d) 0,03131… f) −32,207

a) 2,331	Decimal exacto.
b) 4,1234…	Irracional.
c) 6,2727…	Decimal periódico puro.
d) 0,03131…	Decimal periódico mixto.
e) 4	Decimal exacto.
f) −32,207	Decimal exacto.

62. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales.

a) 0,2 d) 8,0002 g) 0,01
b) $3,\widehat{5}$ e) $42,\widehat{78}$ h) $5,\widehat{902}$
c) 2,37 f) $10,5\widehat{23}$ i) $0,01\widehat{57}$

a) $0,2=\frac{1}{5}$ d) $8,0002=\frac{40001}{5000}$ g) $0,01=\frac{1}{100}$

b) $3,\widehat{5}=\frac{32}{9}$ e) $42,\widehat{78}=\frac{1412}{33}$ h) $5,\widehat{902}=\frac{5897}{999}$

c) $2,37=\frac{237}{100}$ f) $10,5\widehat{23}=\frac{5209}{495}$ i) $0,01\widehat{57}=\frac{13}{825}$

63. Efectúa, utilizando las fracciones generatrices.

a) $1,\widehat{3}+3,4$ c) $6,3\widehat{4}+2,\widehat{5}$
b) $10,2\widehat{5}-5,\widehat{7}$ d) $4,32-7,0\widehat{2}$

a) $1,\widehat{3}+3,4=\frac{4}{3}+\frac{17}{5}=\frac{71}{15}$ c) $6,3\widehat{4}+2,\widehat{5}=\frac{571}{90}+\frac{23}{9}=\frac{89}{10}$

b) $10,2\widehat{5}-5,\widehat{7}=\frac{923}{90}-\frac{52}{9}=\frac{403}{90}$ d) $4,32-7,0\widehat{2}=\frac{108}{25}-\frac{316}{45}=-\frac{608}{225}$

64. **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $1{,}25 \cdot 2{,}\widehat{5}$

b) $0{,}0\widehat{3} : 2{,}9\widehat{2}$

c) $3{,}7\widehat{6} \cdot 4{,}\widehat{8}$

d) $1{,}25 : 2{,}2\widehat{5}$

a) $\dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{23}{9} = \dfrac{115}{36}$

b) $\dfrac{1}{30} : \dfrac{263}{90} = \dfrac{90}{7\,890} = \dfrac{3}{263}$

c) $\dfrac{113}{30} \cdot \dfrac{44}{9} = \dfrac{4\,972}{270} = \dfrac{2\,486}{135}$

d) $\dfrac{5}{4} : \dfrac{203}{90} = \dfrac{450}{812} = \dfrac{225}{406}$

65. **Utilizando las fracciones generatrices, comprueba si son verdaderas o falsas las igualdades.**

a) $1{,}\widehat{9} = 2$

b) $1{,}\widehat{3} : 3 = 0{,}\widehat{4}$

c) $1{,}8\widehat{9} + 0{,}1\widehat{1} = 2$

d) $0{,}\widehat{3} + 0{,}\widehat{6} = 1$

a) Verdadera: $\dfrac{19-1}{9} = 2$

b) Verdadera: $\dfrac{13-1}{9} : 3 = \dfrac{12}{9} : 3 = \dfrac{12}{27} = \dfrac{4}{9}$

c) Falsa: $\dfrac{189-18}{90} + \dfrac{11-1}{90} = \dfrac{171}{90} + \dfrac{10}{90} = \dfrac{181}{90} \neq 2$

d) Verdadera: $\dfrac{3}{9} + \dfrac{6}{9} = \dfrac{9}{9} = 1$

66. **Ordena estos números decimales de menor a mayor.**

a) $2{,}9\widehat{95}$ $\quad 2{,}\widehat{9}$ $\quad 2{,}\widehat{95}$ $\quad 2{,}9\widehat{59}$ $\quad 2{,}9\widehat{5}$

b) $4{,}75$ $\quad 4{,}\widehat{75}$ $\quad 4{,}7\widehat{5}$ $\quad 4{,}775$ $\quad 4{,}757$ $\quad 4{,}7\widehat{57}$

Se ordenan los números, de menor a mayor:

a) $2{,}9\widehat{5} < 2{,}9\widehat{59} = 2{,}\widehat{95} < 2{,}9\widehat{95} < 2{,}\widehat{9}$

b) $4{,}75 < 4{,}7\widehat{5} < 4{,}757 < 4{,}\widehat{75} = 4{,}7\widehat{57} < 4{,}775$

67. **Da un número racional y otro irracional comprendidos entre:**

a) $3{,}4$ y $3{,}400\widehat{23}$

b) $2{,}5\widehat{2}$ y $2{,}\widehat{52}$

c) 1 y 2

d) $5{,}6$ y $5{,}\widehat{68}$

e) $-2{,}6\widehat{8}$ y $-2{,}\widehat{68}$

f) $0{,}2$ y $0{,}25$

Respuesta abierta.

a) Racional: 3,40022
Irracional: 3,4002201001…

b) Racional: 2,523
Irracional: 2,52301001…

c) Racional: 1,1
Irracional: 1,101001…

d) Racional: 5,62
Irracional: 5,6201001…

e) Racional: −2,67
Irracional: −2,6701001…

f) Racional: 0,21
Irracional: 0,2101001…

68. **Encuentra, sin hacer operaciones, un número irracional comprendido entre $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

69. **Demuestra que $2 \cdot \sqrt{5}$ es un número irracional.**

La prueba más sencilla para demostrar que es irracional es mediante reducción al absurdo.

Suponemos que es un número racional, y entonces se puede escribir como $2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, con a y b primos entre sí.

Ahora se elevan ambos lados de la igualdad al cuadrado, y se obtiene:

$$20 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \rightarrow 20 = \frac{a^2}{b^2} \rightarrow 20b^2 = a^2$$

De aquí se entiende que se puede escribir $a^2 = (2k)^2$, con k un entero divisor de a, así que se tiene, por tanto, $5b^2 = k^2$.

Esto asegura que 5 es múltiplo de k^2, lo que implica que 5 también es múltiplo de k, y aquí está el absurdo: se suponía que b y k no tenían factores comunes y se sigue que los dos son múltiplos de 5, es decir, que tienen al 5 como factor común, y por tanto su m.c.d. debe ser al menos 5.

Esta es la contradicción que se buscaba, por lo que $\sqrt{5}$ es irracional y, por tanto, $2\sqrt{5}$ también lo es.

70. **Distingue entre números racionales e irracionales.**

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{8}$ c) $\sqrt{11}$ d) $\sqrt{15}$ e) $\sqrt{16}$ f) $\sqrt{20}$

Son todos números irracionales salvo $\sqrt{16} = \pm 4$, que es un número entero y, por tanto, racional.

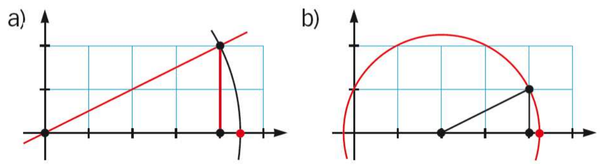
71. **Señala los números que son irracionales.**

a) $2 + \sqrt{3}$ c) $\sqrt{12} - 2$ e) $1 - \sqrt{16}$
b) $2 \cdot \sqrt{9}$ d) $\sqrt{16} + \sqrt{2}$ f) $5\sqrt{19}$

Irracionales → a), c), d), y f)

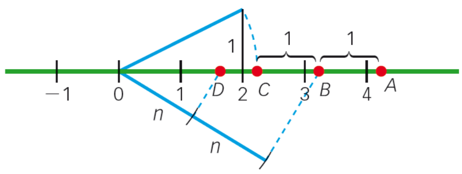
Racionales → b) $2\sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$ y e) $1 - \sqrt{16} = 1 - 4 = -3$

72. **¿Qué números están representados en cada construcción?**



a) $\sqrt{20}$ b) $2 + \sqrt{5}$

73. **¿Qué números representan sobre esta recta numérica los puntos *A*, *B*, *C* y *D*, donde *n* es un segmento cualquiera?**



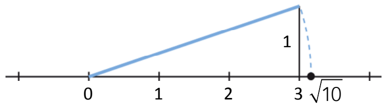
$C = \sqrt{5}$ $B = 1 + \sqrt{5}$ $D = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ $A = 2 + \sqrt{5}$

74. **Representa los siguientes números en la recta real.**

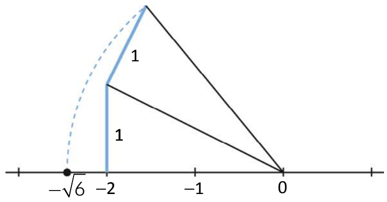
a) $\sqrt{10}$ c) $1-\sqrt{2}$ e) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

b) $-\sqrt{6}$ d) $\sqrt{3}-1$ f) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

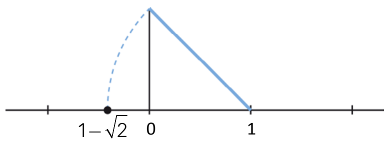
a) $\sqrt{10}=\sqrt{3^2+1^2}$



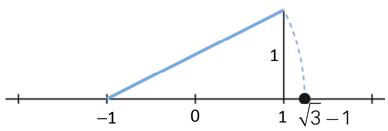
b) $-\sqrt{6}=-\sqrt{2^2+1^2+1^2}$



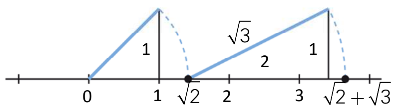
c) $1-\sqrt{2}=1-\sqrt{1^2+1^2}$



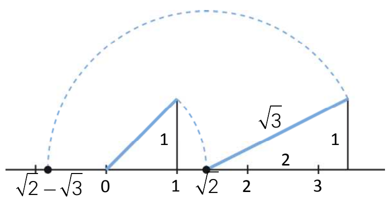
d) $\sqrt{3}-1=\sqrt{2^2+1^2}-1$



e) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{1^2+1^2}+\sqrt{2^2+1^2}$



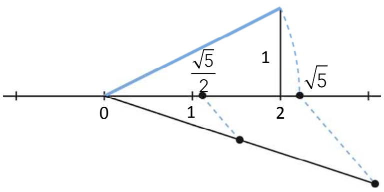
f) $\sqrt{2}-\sqrt{3}=\sqrt{1^2+1^2}-\sqrt{2^2+1^2}$



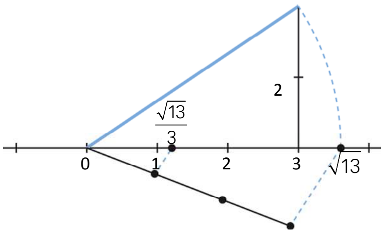
75. **Representa los siguientes números en la recta real.**

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{13}}{3}$ c) $\dfrac{\sqrt{18}}{5}$

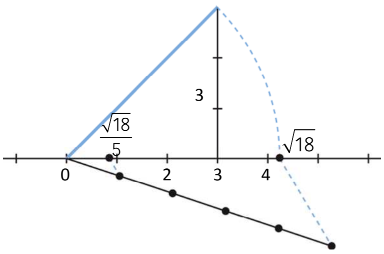
a) $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1^2}$



b) $\sqrt{13}=\sqrt{3^2+2^2}$



c) $\sqrt{18}=\sqrt{3^2+3^2}$



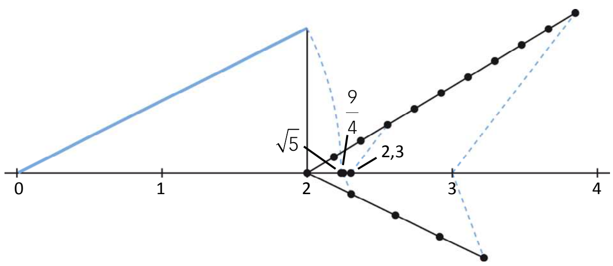
76. **Ordena y representa los siguientes números en la recta real.**

a) 2,3 b) $\sqrt{5}$ c) $\dfrac{9}{4}$

a) $2{,}3=2+0{,}3$

b) $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1^2}$

c) $\dfrac{9}{4}=2+\dfrac{1}{4}$



77. **Opera y clasifica el tipo de número real.**

a) $\sqrt{2{,}\widehat{7}}$ b) $\sqrt{4{,}\widehat{9}}$ c) $\sqrt{\dfrac{1{,}\widehat{3}}{3}}$

a) Es un número racional: $\sqrt{2{,}\widehat{7}}=\sqrt{\dfrac{25}{9}}=\pm\dfrac{5}{3}$

b) Es un número irracional: $\sqrt{4{,}\widehat{9}}=\sqrt{\dfrac{45}{9}}=\sqrt{5}$

c) Es un número racional: $\sqrt{\dfrac{1{,}\widehat{3}}{3}}=\sqrt{\dfrac{12}{27}}=\sqrt{\dfrac{4}{9}}=\pm\dfrac{2}{3}$

78. **Expresa estos intervalos de todas las formas posibles.**

a) 

c) 

b) 

d) 

a) $x \in (2, 3]$ y $2 < x \leq 3$

c) $x \in (-\infty, 0]$ y $x \leq 0$

b) $x \in [1, 4]$ y $1 \leq x \leq 4$

d) $x \in [8, +\infty)$ y $x \geq 8$

79. **Describe y representa los siguientes intervalos.**

a) $(0, 10)$ d) $[2, 5]$ g) $(-\infty, 6]$

b) $(3, 7]$ e) $[5, 10)$ h) $(100, +\infty)$

c) $(-\infty, -2)$ f) $[-4, +\infty)$ i) $(-7, \sqrt{2})$

a) $\{x: 0 < x < 10\}$

b) $\{x: 3 < x \leq 7\}$

c) $\{x: x < -2\}$

d) $\{x: 2 \leq x \leq 5\}$

e) $\{x: 5 \leq x < 10\}$

f) $\{x: -4 \leq x\}$

g) $\{x: x \leq 6\}$

h) $\{x: 100 < x\}$

i) $\{x: -7 < x < \sqrt{2}\}$

80. **Escribe el intervalo que corresponde a estas desigualdades.**

a) $1 < x < 3$ c) $5 \leq x < 9$

b) $6 < x \leq 7$ d) $10 \leq x \leq 12$

a) $(1, 3)$ b) $(6, 7]$ c) $[5, 9)$ d) $[10, 12]$

81. **Escribe el intervalo que corresponde a lo siguiente.**

a) $x \leq -2$ c) $x > -3$ e) $x < -9$

b) $x < 5$ d) $x \geq 7$ f) $x \geq -6$

a) $(-\infty, -2]$ c) $(-3, +\infty)$ e) $(-\infty, -9)$

b) $(-\infty, 5)$ d) $[7, +\infty)$ f) $[-6, +\infty)$

82. **Calcula las siguientes uniones de intervalos.**

a) $(3, 16) \cup (-2, 5)$ c) $\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{3}\right] \cup \left[-\frac{15}{2}, \frac{9}{5}\right]$

b) $[-2, 2) \cup [-11, 0]$ d) $\left[-\sqrt{7}, \sqrt{5}\right] \cup \left[-\sqrt{5}, \sqrt{7}\right]$

a) $(3, 16) \cup (-2, 5) = (-2, 16)$

b) $[-2, 2) \cup [-11, 0] = [-11, 2)$

c) $\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{3}\right] \cup \left[-\frac{15}{2}, \frac{9}{5}\right] = \left[-\frac{15}{2}, \frac{7}{3}\right]$

d) $[-\sqrt{7}, \sqrt{5}] \cup [-\sqrt{5}, \sqrt{7}] = [-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$

83. **Halla las intersecciones de estos intervalos.**

a) $(-1, 10) \cap (-3, 8)$

b) $\left[-\frac{4}{7}, 5\right) \cap \left[-\frac{5}{8}, 0\right]$

c) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{7}{3}\right] \cap \left[-\frac{15}{4}, \frac{9}{5}\right]$

d) $\left[-\sqrt{7}, \sqrt{5}\right] \cap \left[-\sqrt{5}, \sqrt{7}\right]$

a) $(-1, 10) \cap (-3, 8) = (-1, 8)$

b) $\left[-\frac{4}{7}, 5\right) \cap \left[-\frac{5}{8}, 0\right] = \left[-\frac{4}{7}, 0\right]$

c) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{7}{3}\right] \cap \left[-\frac{15}{4}, \frac{9}{5}\right] = \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{9}{5}\right]$

d) $[-\sqrt{7}, \sqrt{5}] \cap [-\sqrt{5}, \sqrt{7}] = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

84. **Dados los intervalos siguientes, calcula.**

$A = [-4, -1]$ $B = [-3, 2)$ $C = (-2, 4)$

a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $B \cap C$ d) $A \cap B \cap C$

a) $A \cup B = [-4, 2)$

b) $A \cup C = [-4, 4)$

c) $B \cap C = (-2, 2)$

d) $A \cap B \cap C = (-2, -1]$

85. Dados los intervalos siguientes, calcula.

$A = (-\infty, 1]$ $B = [0, 5)$ $C = [-1, 3]$

a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $B \cap C$ d) $A \cap B \cap C$

a) $A \cup B = (-\infty, 5)$

b) $A \cup C = (-\infty, 3]$

c) $B \cap C = [0, 3]$

d) $A \cap B \cap C = [0, 1]$

86. Expresa los siguientes intervalos como intersección de dos semirrectas.

a) $\left(-1, \frac{13}{2}\right]$

b) $[5, 5\sqrt{3}]$

c) $\{x: 6 < x \leq \sqrt{40}\}$

d) $\left\{x: -\frac{51}{4} \leq x \leq 3\right\}$

e) $\left[-3, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

f) $\left(\frac{\sqrt{30}}{2}, \sqrt{90}\right)$

g) $\left\{x: -\frac{7}{2} \leq x < -\sqrt{3}\right\}$

h) $\{x: -\sqrt[3]{5} < x < \sqrt[3]{5}\}$

a) $\left(-1, \frac{13}{2}\right] = (-1, +\infty) \cap \left(-\infty, \frac{13}{2}\right]$

b) $[5, 5\sqrt{3}] = (-\infty, 5\sqrt{3}] \cap [5, +\infty)$

c) $\left\{x : 6 < x \leq \sqrt{40}\right\} = (6, \sqrt{40}) = (-\infty, \sqrt{40}] \cap (6, +\infty)$

d) $\left\{x : -\frac{51}{4} \leq x \leq 3\right\} = \left[-\frac{51}{4}, 3\right] = \left[-\frac{51}{4}, +\infty\right) \cap (-\infty, 3]$

e) $\left[-3, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = [-3, +\infty) \cap \left(-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

f) $\left(\frac{\sqrt{30}}{2}, \sqrt{90}\right) = \left(\frac{\sqrt{30}}{2}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \sqrt{90}\right)$

g) $\left\{x : -\frac{7}{2} \leq x < -\sqrt{3}\right\} = \left[-\frac{7}{2}, -\sqrt{3}\right) = \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$

h) $\left\{x : -\sqrt[3]{5} < x < \sqrt[3]{5}\right\} = \left(-\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}\right) = \left(-\infty, \sqrt[3]{5}\right) \cap \left(-\sqrt[3]{5}, +\infty\right)$

87. Escribe en forma de intervalo y exprésalo después como intersección de dos semirrectas.

a) La temperatura prevista para mañana variará entre -1 °C de mínima y 13 °C de máxima.
b) Este jugador de fútbol tiene menos de 27 años.
c) El agua se mantiene en estado líquido entre 0 y 100 °C.
d) A partir de los 18 años ya se puede votar.
e) Mi presupuesto máximo para comprar un coche es de 11 000 €.

a) $[-1, 13] = (-\infty, 13] \cap [-1, +\infty)$

b) $[0, 27) = [0, +\infty) \cap (-\infty, 27)$

c) $(0, 100) = (0, +\infty) \cap (-\infty, 100)$

d) $[18, +\infty) \rightarrow$ Ya está escrito en forma de semirrecta.

e) $(0, 11\,000] = (0, +\infty) \cap (-\infty, 11\,000]$

88. **Opera y redondea el resultado a las décimas.**

a) $43{,}295 + 4{,}57 - 7{,}367$ c) $3{,}56 \cdot (7{,}4009 - 3{,}48)$
b) $5{,}32 + 4{,}05 \cdot 7{,}361$ d) $7{,}37 - 5{,}3519 : 2{,}1$

a) $43{,}295 + 4{,}57 - 7{,}367 = 40{,}498 \rightarrow 40{,}5$ c) $3{,}56 \cdot (7{,}4009 - 3{,}48) = 13{,}958404 \rightarrow 14{,}0$

b) $5{,}32 + 4{,}05 \cdot 7{,}361 = 35{,}31205 \rightarrow 35{,}3$ d) $7{,}37 - 5{,}3519 : 2{,}1 = 4{,}8214\overparen{761904} \rightarrow 4{,}8$

89. **A lo largo de la Historia se han utilizado diferentes aproximaciones del número π (cuyo valor es 3,14159265…).**

- En la Biblia, el valor de π es 3.
- En el antiguo Egipto se estimaba dicho valor en $\frac{256}{81}$, fracción que resulta de suponer que el área de un círculo coincide con la de un cuadrado que tenga como lado $\frac{8}{9}$ de la medida de su diámetro.
- En Mesopotamia, el valor de π era $3 \cdot \frac{1}{8} = 3{,}125$.
- En la antigua China, $\frac{355}{113}$.
- Y, finalmente, en los cálculos prácticos se usa 3,14.

Halla los errores absoluto y relativo de cada aproximación, tomando como valor exacto de $\pi = 3{,}14159265$.

- Biblia→ Error absoluto = 0,14159265
  Error relativo = 0,0450703
- En el antiguo Egipto → Error absoluto = 0,01890
  Error relativo = 0,006016
- Mesopotamia → Error absoluto = 0,01659265
  Error relativo = 0,0052816
- En la antigua China → Error absoluto = $2{,}70 \cdot 10^{-7}$
  Error relativo = $8{,}60 \cdot 10^{-8}$
- En cálculos prácticos → Error absoluto = 0,00159265
  Error relativo = 0,00050696

90. **Halla la aproximación por redondeo hasta las diezmilésimas para cada caso.**

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ c) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$
b) $\frac{6}{7} + \sqrt{7}$ d) $\frac{4}{15} + \sqrt{8}$

a) 3,1463 b) 3,5029 c) 0,5040 d) 3,0951

91. **Calcula el error absoluto y el relativo al truncar 5,73691 a la centésima.**

El número 5,73691, truncado a las centésimas, es 5,73, por lo que sus errores absoluto y relativo serán:

$$E_a = |5{,}73691 - 5{,}73| = 0{,}00691 \qquad E_r = \frac{E_a}{5{,}73691} = 0{,}00120$$

92. **Obtén el error absoluto y relativo al redondear los siguientes números.**

a) $\frac{3}{11}$ a la diezmilésima.

b) 4,3964 a la centésima.

c) $\frac{29}{4}$ a la décima.

a) $\frac{3}{11}$ a la diezmilésima $\rightarrow$ 0,2727

$$E_a = |0,272727 - 0,2727| = 0,000027 \qquad E_r = \frac{E_a}{0,272727} = 0,000099$$

b) 4,3964 a la centésima $\rightarrow$ 4,4

$$E_a = |4,3965 - 4,4| = 0,0035 \qquad E_r = \frac{0,0035}{4,3965} = 0,000796$$

c) $\frac{29}{4}$ a la décima $\rightarrow$ 7,3

$$E_a = |7,3 - 7,25| = 0,05 \qquad E_r = \frac{E_a}{7,25} = 0,0068$$

93. **Aproxima el número $\frac{1}{7}$ para que el error sea menor que una centésima.**

Para que el error absoluto cometido sea menor que una centésima, hay que calcular el cociente con dos cifras decimales. La aproximación pedida es 0,14.

94. **Aproxima el número 12,3456 de forma que el error absoluto sea menor que 0,001.**

Para que el error absoluto sea menor que una milésima, se escribe el número con tres cifras decimales. Por tanto, la aproximación pedida es 12,345.

95. **¿Para qué número sería 5 432,723 una aproximación a las milésimas por defecto? ¿Es la respuesta única? ¿Cuántas respuestas hay?**

Una aproximación a las milésimas es 5 432,7 231. La respuesta no es única, ya que hay infinitos números.

96. **Halla una aproximación a los siguientes números.**

a) π con una cota de error inferior a una milésima.

b) $\sqrt{2}$ con una cota de error inferior a media centésima.

c) $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ con una cota de error menor que 0,0001.

d) $\frac{22}{7}$ con una cota de error inferior a 0,00001.

a) $\pi \xrightarrow{\text{aproximación}} 3,141 \rightarrow \text{cota de error absoluto} = \frac{1}{2 \cdot 10^3} = 0,0005 < 0,001$

b) $\sqrt{2} \xrightarrow{\text{aproximación}} 1,4142 \rightarrow \text{cota de error absoluto} = \frac{1}{2 \cdot 10^4} = 0,00005 < 0,0005$

c) $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\text{aproximación}} 0,2236 \rightarrow \text{cota de error absoluto} = \frac{1}{2 \cdot 10^4} = 0,00005 < 0,0001$

d) $\frac{22}{7} \xrightarrow{\text{aproximación}} 3,14285 \rightarrow \text{cota de error absoluto} = \frac{1}{2 \cdot 10^5} = 0,000005 < 0,00001$

97. **Indica cuáles de estos números están escritos en notación científica.**

a) 4,678
b) $0,45 \cdot 10^5$
c) $3,001 \cdot 10^{17}$
d) $9,34 \cdot 2^{10}$
e) $4,62 \cdot 10^{-6}$
f) $34,709 \cdot 10^5$

Están escritos en notación científica $3,001 \cdot 10^{17}$ y $4,62 \cdot 10^{-6}$.

98. **Escribe en notación científica los siguientes números, e indica su mantisa y su orden de magnitud.**

a) 15 000 000 000
b) 0,00000051
c) 31 940 000
d) 0,0000000009
e) 4 598 000 000
f) 0,0967254
g) 329 000 000
h) 111 000

a) $5\,000\,000\,000 = 5 \cdot 10^9$	Mantisa: 5	Orden de magnitud: 9
b) $0,00000051 = 5,1 \cdot 10^{-7}$	Mantisa: 5,1	Orden de magnitud: –7
c) $31\,940\,000 = 3,194 \cdot 10^7$	Mantisa: 3,194	Orden de magnitud: 7
d) $0,0000000009 = 9 \cdot 10^{-10}$	Mantisa: 9	Orden de magnitud: –10
e) $4\,598\,000\,000 = 4,598 \cdot 10^9$	Mantisa: 4,598	Orden de magnitud: 9
f) $0,0967254 = 9,67254 \cdot 10^{-2}$	Mantisa: 9,67254	Orden de magnitud: –2
g) $329\,000\,000 = 3,29 \cdot 10^8$	Mantisa: 3,29	Orden de magnitud: 8
h) $111\,000 = 1,11 \cdot 10^5$	Mantisa: 1,11	Orden de magnitud: 5

99. **Realiza estas operaciones con números en notación científica.**

a) $1,32 \cdot 10^4 + 2,57 \cdot 10^4$
b) $8,75 \cdot 10^2 + 9,46 \cdot 10^3$
c) $3,62 \cdot 10^4 + 5,85 \cdot 10^{-3}$
d) $2,3 \cdot 10^2 + 3,5 \cdot 10^{-1} + 4,75 \cdot 10^{-2}$
e) $3,46 \cdot 10^{-2} + 5,9 \cdot 10^4 + 3,83 \cdot 10^2$

a) $1,32 \cdot 10^4 + 2,57 \cdot 10^4 = 3,89 \cdot 10^4$
b) $8,75 \cdot 10^2 + 9,46 \cdot 10^3 = 1,0335 \cdot 10^4$
c) $3,62 \cdot 10^4 + 5,85 \cdot 10^{-3} = 3,620000585 \cdot 10^4$
d) $2,3 \cdot 10^2 + 3,5 \cdot 10^{-1} + 4,75 \cdot 10^{-2} = 2,303975 \cdot 10^2$
e) $3,46 \cdot 10^{-2} + 5,9 \cdot 10^4 + 3,83 \cdot 10^2 = 5,93830346 \cdot 10^4$

100. **Halla el resultado de estas operaciones.**

a) $9,5 \cdot 10^4 - 3,72 \cdot 10^4$
b) $8,6 \cdot 10^3 - 5,45 \cdot 10^2$
c) $7,9 \cdot 10^{-4} - 1,3 \cdot 10^{-6}$
d) $4,6 \cdot 10^6 + 5,3 \cdot 10^4 - 3,9 \cdot 10^2$
e) $5 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$

a) $9,5 \cdot 10^4 - 3,72 \cdot 10^4 = 5,78 \cdot 10^4$
b) $8,6 \cdot 10^3 - 5,45 \cdot 10^2 = 8,055 \cdot 10^3$
c) $7,9 \cdot 10^{-4} - 1,3 \cdot 10^{-6} = 7,887 \cdot 10^{-4}$
d) $4,6 \cdot 10^6 + 5,3 \cdot 10^4 - 3,9 \cdot 10^2 = 4,652610 \cdot 10^6$
e) $5 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} = 4,997 \cdot 10^2$

101. **Efectúa las siguientes operaciones.**

a) $7,3 \cdot 10^4 \cdot 5,25 \cdot 10^{-3}$

b) $8,91 \cdot 10^{-5} \cdot 5,7 \cdot 10^{14}$

c) $(8,3 \cdot 10^6) : (5,37 \cdot 10^2)$

d) $(9,5 \cdot 10^{-6}) : (3,2 \cdot 10^3)$

a) $7,3 \cdot 10^4 \cdot 5,25 \cdot 10^{-3} = 3,8325 \cdot 10^2$

b) $8,91 \cdot 10^{-5} \cdot 5,7 \cdot 10^{14} = 5,0787 \cdot 10^{10}$

c) $8,3 \cdot 10^6 : 5,37 \cdot 10^2 = 1,545623836 \cdot 10^4$

d) $9,5 \cdot 10^{-6} : 3,2 \cdot 10^3 = 2,96875 \cdot 10^{-9}$

102. **Simplifica el resultado de estas operaciones.**

a) $\dfrac{6,147 \cdot 10^{-2} \cdot 4,6 \cdot 10^3}{7,9 \cdot 10^8 \cdot 6,57 \cdot 10^{-5}}$

b) $\dfrac{3,92 \cdot 10^4 \cdot 5,86 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-8} \cdot 9,2 \cdot 10^{13}}$

a) $\dfrac{6,147 \cdot 10^{-2} \cdot 4,6 \cdot 10^3}{7,9 \cdot 10^8 \cdot 6,57 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{2,82762 \cdot 10^2}{5,1903 \cdot 10^4} = 5,447893185 \cdot 10^{-3}$

b) $\dfrac{3,92 \cdot 10^4 \cdot 5,86 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-8} \cdot 9,2 \cdot 10^{13}} = \dfrac{2,29712 \cdot 10^{-1}}{6,44 \cdot 10^6} = 3,566956522 \cdot 10^{-8}$

103. **Dados los siguientes números escritos en notación científica, calcula.**

$$A = 2,7 \cdot 10^8 \qquad B = 5,4 \cdot 10^9 \qquad C = 7,1 \cdot 10^{12}$$

a) $A \cdot B : C$

b) $B - A + C$

c) $A + B \cdot C$

d) $(B + C) : A$

a) $A \cdot B : C = 2,7 \cdot 10^8 \cdot 5,4 \cdot 10^9 : (7,1 \cdot 10^{12}) = 2,0535211 \cdot 10^5$

b) $B - A + C = 7,10513 \cdot 10^{12}$

c) $A + B \cdot C = 2,7 \cdot 10^8 + 5,4 \cdot 10^9 \cdot 7,1 \cdot 10^{12} = 2,7 \cdot 10^8 + 3,834 \cdot 10^{22} = 3,834 \cdot 10^{22}$

d) $(B + C) : A = (5,4 \cdot 10^9 + 7,1 \cdot 10^{12}) : (2,7 \cdot 10^8) = 2,63 \cdot 10^4$

104. **Dados los siguientes números en notación científica, calcula.**

$$A = 3,2 \cdot 10^6 \qquad B = 8,2 \cdot 10^{11} \qquad C = 5,1 \cdot 10^{-6}$$

a) $A \cdot B \cdot C$

b) $(A : C) \cdot B$

c) $A + B \cdot C$

d) $A \cdot C^2$

a) $A \cdot B \cdot C = 3,2 \cdot 10^6 \cdot 8,2 \cdot 10^{11} \cdot 5,1 \cdot 10^{-6} = 1,33824 \cdot 10^{13}$

b) $(A : C) \cdot B = [3,2 \cdot 10^6 : (5,1 \cdot 10^{-6})] \cdot 8,2 \cdot 10^{11} = 5,145 \cdot 10^{23}$

c) $A + B \cdot C = 3,2 \cdot 10^6 + 8,2 \cdot 10^{11} \cdot 5,1 \cdot 10^{-6} = 7,382 \cdot 10^6$

d) $A \cdot C^2 = 3,2 \cdot 10^6 \cdot (5,1 \cdot 10^{-6})^2 = 3,2 \cdot 10^6 \cdot 26,01 \cdot 10^{-12} = 8,3232 \cdot 10^{-5}$

105. **Halla el valor numérico de los radicales que aparecen a continuación.**

a) $\sqrt[4]{81}$

b) $\sqrt[3]{-27}$

c) $\sqrt[5]{-100\,000}$

d) $\sqrt[3]{-216}$

e) $\sqrt[4]{625}$

f) $\sqrt[7]{-128}$

a) $\sqrt[4]{81} = \pm 3$

b) $\sqrt[3]{-27} = -3$

c) $\sqrt[5]{-100\,000} = -10$

d) $\sqrt[3]{-216} = -6$

e) $\sqrt[4]{625} = \pm 5$

f) $\sqrt[7]{-128} = -2$

106. Escribe dos radicales equivalentes a cada uno de los siguientes.

a) $\sqrt[3]{2^5}$ c) $\sqrt[6]{5^3}$ e) $\sqrt[8]{2^6}$

b) $\sqrt[12]{7^4}$ d) $\sqrt{2^3}$ f) $\sqrt[20]{3^{15}}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\sqrt[3]{2^5} = \sqrt[6]{2^{10}} = \sqrt[9]{2^{15}}$ c) $\sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5} = \sqrt[4]{5^2}$ e) $\sqrt[8]{2^6} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{2^9}$

b) $\sqrt[12]{7^4} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[120]{7^{40}}$ d) $\sqrt{2^3} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[6]{2^9}$ f) $\sqrt[20]{3^{15}} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[8]{3^6}$

107. Simplifica los radicales que aparecen a continuación.

a) $\sqrt[3]{16}$ d) $\sqrt{27}$ g) $\sqrt[6]{27}$

b) $\sqrt[3]{54}$ e) $\sqrt{75}$ h) $\sqrt[8]{625}$

c) $\sqrt[4]{32}$ f) $\sqrt[5]{128}$ i) $\sqrt[3]{343}$

a) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3^{\frac{3}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt[4]{2}$

d) $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}$

e) $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5 = 5\sqrt{3}$

f) $\sqrt[5]{128} = \sqrt[5]{2^7} = 2^{\frac{7}{5}} = 2 \cdot 2^{\frac{2}{5}} = 2\sqrt[5]{2^2}$

g) $\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

h) $\sqrt[8]{625} = \sqrt[8]{5^4} = 5^{\frac{4}{8}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

i) $\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7$

108. Escribe en cada caso si el desarrollo de la igualdad es verdadero o falso. Si es falso, corrígelo.

a) $\sqrt{8} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[3]{8^3}$ c) $\sqrt[5]{25^{10}} = \sqrt{5^{10}} = \sqrt[3]{5^{12}}$

b) $\sqrt[3]{3^4} = \sqrt[6]{9^4} = \sqrt{3^8}$ d) $\sqrt[8]{3^6} = \sqrt[4]{27} = \sqrt[12]{3^9}$

a) Falso, porque $\sqrt{8} = \sqrt[4]{2^6} = 2\sqrt{2}$ c) Falso, porque $\sqrt[5]{25^{10}} = 5^4 = \sqrt{5^8}$

b) Falso, porque $\sqrt[3]{3^4} = \sqrt[6]{9^4} = 3\sqrt[3]{3}$ d) Verdadero.

109. Escribe las siguientes potencias de exponente fraccionario como un radical.

a) $\dfrac{2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{1}{5}}}$ c) $\left(5 \cdot 5^{-\frac{2}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 5^3$

b) $3^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(3^{-2} : 3^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}}$ d) $\dfrac{\left(7^{\frac{1}{5}} \cdot 7\right)^{-\frac{1}{2}}}{7^{\frac{4}{5}}}$

a) $\dfrac{2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{1}{5}}} = 2^{\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{1}{5}\right)} = 2^{\frac{79}{30}} = \sqrt[30]{2^{79}}$ c) $\left(5 \cdot 5^{-\frac{2}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 5^3 = 5^{\frac{16}{5}} = \sqrt[5]{5^{16}}$

b) $3^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(3^{-2} : 3^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}} = 3^{\frac{47}{36}} = \sqrt[36]{3^{47}}$ d) $\dfrac{\left(7^{\frac{1}{5}} \cdot 7\right)^{-\frac{1}{2}}}{7^{\frac{4}{5}}} = 7^{-\frac{7}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{7^7}}$

110. Escribe como potencias de exponente fraccionario estos radicales.

a) $\sqrt{a\sqrt{a}}$ d) $\sqrt[4]{a^{-5}}$ g) $\left(\sqrt{a}\right)^3$

b) $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ h) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}$

c) $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$ i) $\sqrt[4]{\sqrt{\dfrac{1}{a}}}$

a) $\sqrt{a\sqrt{a}}=\left(a\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{4}}$

b) $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=\left(a\left(a\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(a\cdot a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{7}{12}}$

c) $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}}=\left(\dfrac{a}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{4}}$

d) $\sqrt[4]{a^{-5}}=a^{-\frac{5}{4}}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}}=a^{-\frac{1}{2}}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}}=a^{-\frac{1}{4}}$

g) $(\sqrt{a})^3=a^{\frac{3}{2}}$

h) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}=a^{-\frac{1}{3}}$

i) $\sqrt[4]{\sqrt{\dfrac{1}{a}}}=\sqrt[8]{\dfrac{1}{a}}=a^{-\frac{1}{8}}$

111. Expresa mediante un solo radical.

a) $\sqrt[5]{3\sqrt{5}}$ d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$ g) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$

b) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}}$ e) $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}$ f) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{\sqrt[3]{3}}}}$ i) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{256}}}}$

a) $\sqrt[5]{3\sqrt{5}}=\left(3\cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{1}{5}}\cdot 5^{\frac{1}{10}}=3^{\frac{2}{10}}\cdot 5^{\frac{1}{10}}=\sqrt[10]{3^2\cdot 5}$

b) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}}=\left(\dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(2^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}=\left(\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{3}$

e) $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\left(\dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(2^{\frac{-1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{-1}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

f) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{\sqrt[3]{3}}}}=\sqrt[4]{\dfrac{2}{\sqrt[6]{3}}}=\sqrt[24]{\dfrac{2^6}{3}}$

g) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}=\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{2}$

h) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}=\dfrac{1}{\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{5^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$

i) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{256}}}}=\sqrt[120]{256}=\sqrt[15]{2}$

112. Extrae todos los factores posibles de los radicales siguientes.

a) $\sqrt{a^3b^4}$ c) $\sqrt[3]{a^3b^2c^7}$ e) $\sqrt[3]{a^3b^3+c^3}$

b) $\sqrt{a^2b^5c^3}$ d) $\sqrt{a^3b^4+a^2b^2}$ f) $\sqrt{a^4c^2+a^4b^2}$

a) $\sqrt{a^3b^4}=ab^2\sqrt{a}$

b) $\sqrt{a^2b^5c^3}=ab^2c\sqrt{bc}$

c) $\sqrt[3]{a^3b^2c^7}=ac^2\sqrt[3]{b^2c}$

d) $\sqrt{a^3b^4+a^2b^2}=ab\sqrt{ab^2+1}$

e) $\sqrt[3]{a^3b^3+c^3}=\sqrt[3]{a^3b^3+c^3}$

f) $\sqrt{a^4c^2+a^4b^2}=a^2\sqrt{c^2+b^2}$

113. Extrae los factores que puedas de cada radical.

a) $\sqrt{125}$ d) $\sqrt[3]{250}$ g) $\sqrt[4]{224}$

b) $\sqrt{80}$ e) $\sqrt[3]{1080}$ h) $\sqrt[5]{-486}$

c) $\sqrt[3]{189}$ f) $\sqrt[4]{720}$ i) $\sqrt{3528}$

a) $\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ d) $\sqrt[3]{250}=5\sqrt[3]{2}$ g) $\sqrt[4]{224}=2\sqrt[4]{14}$

b) $\sqrt{80}=4\sqrt{5}$ e) $\sqrt[3]{1080}=6\sqrt[3]{5}$ h) $\sqrt[5]{-486}=-3\sqrt[5]{2}$

c) $\sqrt[3]{189}=3\sqrt[3]{7}$ f) $\sqrt[4]{720}=2\sqrt[4]{45}$ i) $\sqrt{3528}=42\sqrt{2}$

114. La siguiente expresión con radicales es un número entero. Halla dicho número.

$$2\sqrt{10}\cdot\sqrt[4]{25}\cdot\sqrt[6]{8}$$

$$2\sqrt{10}\cdot\sqrt[4]{25}\cdot\sqrt[6]{8}=2(2\cdot 5)^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{2}{4}}\cdot 2^{\frac{3}{6}}=2\cdot 2\cdot 5=20\in\mathbb{Z}$$

115. Extrae factores de los radicales.

a) $\sqrt{32x^3y^2}$ d) $\sqrt[4]{256x^3y^{15}}$

b) $\sqrt[3]{5^5x^6}$ e) $\sqrt[4]{x^{12}y^9z^{19}}$

c) $\sqrt[3]{125x^7y^2}$ f) $\sqrt[5]{729x^4y^{22}z^{15}}$

a) $\sqrt{32x^3y^2}=4xy\sqrt{2x}$ d) $\sqrt[4]{256x^3y^{15}}=4y^3\sqrt[4]{x^3y^3}$

b) $\sqrt[3]{5^5x^6}=5x^2\sqrt[3]{5^2}$ e) $\sqrt[4]{x^{12}y^9z^{19}}=x^3y^2z^4\sqrt[4]{yz^3}$

c) $\sqrt[3]{125x^7y^2}=5x^2\sqrt[3]{xy^2}$ f) $\sqrt[5]{729x^4y^{22}z^{15}}=3y^4z^3\sqrt[5]{3x^4y^2}$

116. La expresión $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ es un número entero. Averigua cuál es.

Al elevar al cuadrado la expresión se obtiene:

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2=3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}=6-2\cdot 1=4$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{4}\rightarrow\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=2$$

117. **Simplifica las siguientes expresiones.**

a) $\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{a^{12}}{a^{18}}}}$

b) $\sqrt[4]{32a^5b^{-8}c^{-12}}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{8a^4}{81b^3}}$

d) $\dfrac{-\sqrt[3]{8a^3b^5c^{-2}}}{\sqrt[3]{-32a^6b^4}}$

e) $\sqrt[6]{729a^7b^{-12}}$

f) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

a) $\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{a^{12}}{a^{18}}}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^{-6}}} = \left(a^{\frac{-6}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

b) $\sqrt[4]{32a^5b^{-8}c^{-12}} = \sqrt[4]{2^5a^5b^{-8}c^{-12}} = 2ab^{-2}c^{-3}\sqrt[4]{2a}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{8a^4}{81b^3}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3a^4}{3^4b^3}} = \dfrac{2a}{3b}\sqrt[3]{\dfrac{a}{3}}$

d) $\dfrac{-\sqrt[3]{8a^3b^5c^{-2}}}{\sqrt[3]{-32a^6b^4}} = \dfrac{-\sqrt[3]{2^3a^3b^5c^{-2}}}{-\sqrt[3]{2^5a^6b^4}} = \sqrt[3]{\dfrac{b}{2^2a^3c^2}} = \dfrac{1}{a}\sqrt[3]{\dfrac{b}{2^2c^2}}$

e) $\sqrt[6]{729a^7b^{-12}} = \sqrt[6]{3^6a^7b^{-12}} = 3ab^{-2}\sqrt[6]{a}$

f) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(a^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

118. **Copia y completa las potencias que faltan.**

a) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^{\square}\cdot 5}$

b) $3^{\square}\sqrt{2} = \sqrt{3^6\cdot 2}$

c) $\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{\dfrac{5}{2^{\square}}}$

d) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{\dfrac{2^{\square}\cdot 7}{3^{\square}}}$

e) $3^{\square}\sqrt{\dfrac{2}{5}} = \sqrt{\dfrac{3^6\cdot 2}{5}}$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3^2} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{3^{\square}}}$

a) 3　　d) 3

b) 3　　e) 3

c) 4　　f) 6

119. **Realiza las siguientes sumas y restas de radicales.**

a) $\sqrt{32} - \sqrt{8} + \sqrt{98}$

b) $5\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{108}$

c) $\sqrt{6} + 7\sqrt{24} - \dfrac{2}{3}\sqrt{54} - \sqrt{18}$

d) $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} - \sqrt{363} + 4\sqrt{3}$

a) $\sqrt{32} - \sqrt{8} + \sqrt{98} = 9\sqrt{2}$

b) $5\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{108} = 15\sqrt[3]{3} + 12\sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt{6} + 7\sqrt{24} - \dfrac{2}{3}\sqrt{54} - \sqrt{18} = 13\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$

d) $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} - \sqrt{363} + 4\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$

120. **Introduce los factores dentro del radical.**

a) $2\sqrt[3]{5}$ d) $\frac{3}{5}\sqrt{2}$

b) $4\sqrt[4]{20}$ e) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{6}$

c) $3\sqrt[5]{15}$ f) $2\sqrt[3]{7}$

a) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$

b) $4\sqrt[4]{20} = \sqrt[4]{4^4 \cdot 20} = \sqrt[4]{5.120}$

c) $3\sqrt[5]{15} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 15} = \sqrt[5]{3.645}$

d) $\frac{3}{5}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{3^2 \cdot 2}{5^2}} = \sqrt{\frac{18}{25}}$

e) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{\frac{1 \cdot 6}{2^4}} = \sqrt[4]{\frac{6}{16}} = \sqrt[4]{\frac{3}{8}}$

f) $2\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{56}$

121. **Introduce los factores dentro del radical.**

a) $5\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ b) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ c) $\frac{1}{7} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{4}$

a) $5\sqrt[3]{\frac{1}{5}} = \sqrt[3]{25}$ b) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{18}{125}}$ c) $\frac{1}{7} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{4} = \sqrt[3]{\frac{3}{21\,952}}$

122. **Introduce los factores dentro del radical, si es posible.**

a) $a \cdot \sqrt{\frac{4a-1}{2a}}$ c) $-2ab^2\sqrt[3]{ab}$ e) $5 + \sqrt{2}$

b) $\frac{4ab}{c} \cdot \sqrt[4]{\frac{c^2b}{8a}}$ d) $\frac{2}{a} \cdot \sqrt{\frac{3a}{8}}$ f) $-a^2\sqrt[3]{a}$

a) $a \cdot \sqrt{\frac{4a-1}{2a}} = \sqrt{\frac{a^2(4a-1)}{2a}} = \sqrt{\frac{4a^2 - a}{2}}$

b) $\frac{4ab}{c} \cdot \sqrt[4]{\frac{c^2b}{8a}} = \sqrt[4]{\frac{4^4a^4b^4c^2b}{c^4\,8a}} = \sqrt[4]{\frac{2^8a^4b^5c^2}{2^3ac^4}} = \sqrt[4]{\frac{2^5a^3b^5}{c^2}}$

c) $-2ab^2\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{-2^3a^3b^6ab} = \sqrt[3]{-2^3a^4b^7}$

d) $\frac{2}{a} \cdot \sqrt{\frac{3a}{8}} = \sqrt{\frac{2^2\,3a}{2^3a^2}} = \sqrt{\frac{3}{2a}}$

e) No es posible introducir factores, puesto que 5 no es factor.

f) $-a^2\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{-a^6a} = \sqrt[3]{-a^7}$

123. Realiza las siguientes operaciones y simplifica.

a) $\left(5\sqrt{2}+3\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)$

b) $\left(1-2\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)$

c) $\left(-\sqrt{3}+5\right)\cdot\left(5-2\sqrt{3}\right)$

d) $\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)$

e) $\left(\sqrt{2}-5\right)\cdot\left(4\sqrt{2}-3\right)$

f) $\left(-2\sqrt{7}-5\right)\cdot\left(\sqrt{7}-3\sqrt{5}\right)$

a) $\left(5\sqrt{2}+3\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)=16+13\sqrt{2}$

b) $\left(1-2\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)=3+\sqrt{2}-6\sqrt{5}-2\sqrt{10}$

c) $\left(-\sqrt{3}+5\right)\cdot\left(5-2\sqrt{3}\right)=31-15\sqrt{3}$

d) $\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)=3\sqrt{2}-2+6\sqrt{3}-2\sqrt{6}$

e) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(4\sqrt{2}-3\right)=23\left(1-\sqrt{2}\right)$

f) $\left(-2\sqrt{7}-5\right)\cdot\left(\sqrt{7}-3\sqrt{5}\right)=-14+15\sqrt{5}-5\sqrt{7}+6\sqrt{35}$

124. Expresa el resultado de las siguientes operaciones mediante un solo radical.

a) $\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt[6]{5^3}\cdot\sqrt{5^3}$

b) $\left(\sqrt[3]{7^2\cdot 8}\cdot\sqrt[4]{8^5}\right):\sqrt{7\cdot 8^3}$

c) $\sqrt{3\cdot 4\cdot 5}\cdot\sqrt[4]{2\cdot 4^2}\cdot\sqrt[8]{4^5\cdot 5^3}$

d) $\sqrt[3]{2\cdot 3\cdot 5}:\left(\sqrt{2\cdot 3}\cdot\sqrt[3]{2\cdot 3}\right)$

a) $\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt[6]{5^3}\cdot\sqrt{5^3}=\sqrt[12]{5^9}\cdot\sqrt[12]{5^6}\cdot\sqrt[12]{5^{18}}=5^2\sqrt[4]{5^3}$

b) $\left(\sqrt[3]{7^2\cdot 8}\cdot\sqrt[4]{8^5}\right):\sqrt{7\cdot 8^3}=\sqrt[12]{7^8\cdot 8^{19}}:\sqrt[12]{7^6\cdot 8^{18}}=\sqrt[12]{7^2\cdot 8}$

c) $\sqrt{3\cdot 4\cdot 5}\cdot\sqrt[4]{2\cdot 4^2}\cdot\sqrt[8]{4^5\cdot 5^3}=\sqrt[8]{3^4\cdot 4^4\cdot 5^4}\cdot\sqrt[8]{2^2\cdot 4^4}\cdot\sqrt[8]{4^5\cdot 5^3}=\sqrt[8]{2^2\cdot 3^4\cdot 4^{13}\cdot 5^7}=\sqrt[8]{2^{28}\cdot 3^4\cdot 5^7}=2^3\sqrt[8]{2^4\cdot 3^4\cdot 5^7}$

d) $\sqrt[3]{2\cdot 3\cdot 5}:\left(\sqrt{2\cdot 3}\cdot\sqrt[3]{2\cdot 3}\right)=\sqrt[6]{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2}:\sqrt[6]{2^5\cdot 3^5}=\sqrt[6]{2^{-3}\cdot 3^{-3}\cdot 5^2}$

125. Realiza las siguientes operaciones con radicales.

a) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a^4}$

b) $\sqrt[3]{3a^2b}\cdot\sqrt{2ab^3}$

c) $\sqrt[5]{2a^3b^4}:\sqrt[3]{4ab^2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{b}}$

a) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a^4}=a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{3}}\cdot a^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{9}{12}}\cdot a^{\frac{20}{12}}\cdot a^{\frac{8}{12}}=\sqrt[12]{a^{37}}=a^3\sqrt[12]{a}$

b) $\sqrt[3]{3a^2b}\cdot\sqrt{2ab^3}=(3a^2b)^{\frac{1}{3}}\cdot(2ab^3)^{\frac{1}{2}}=(3a^2b)^{\frac{2}{6}}\cdot(2ab^3)^{\frac{3}{6}}=\sqrt[6]{3^2a^4b^22^3a^3b^9}=\sqrt[6]{2^33^2a^7b^{11}}=ab\sqrt[6]{2^33^2ab^5}$

c) $\sqrt[5]{2a^3b^4}:\sqrt[3]{4ab^2}=(2a^3b^4)^{\frac{1}{5}}\cdot(4ab^2)^{\frac{1}{3}}=(2a^3b^4)^{\frac{3}{15}}\cdot(4ab^2)^{\frac{5}{15}}=\sqrt[15]{\frac{2^3a^9b^{12}}{4^5a^5b^{10}}}=\sqrt[15]{\frac{a^4b^2}{2^7}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{b}}=\left((ab)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(a(b)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a^2b}$

126. Halla el resultado de estos productos.

a) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}$

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{3}+1}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

d) $\sqrt[3]{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

a) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}=\sqrt{(7-2\sqrt{6})(7+2\sqrt{6})}=\sqrt{49-24}=\sqrt{25}$

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{3}+1}=\sqrt[3]{(5\sqrt{3}+1)(5\sqrt{3}-1)}=\sqrt[3]{75-1}=\sqrt[3]{74}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt[4]{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt[4]{3-2}=1$

d) $\sqrt[3]{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=\sqrt[3]{(4\sqrt{2}+2\sqrt{3})\cdot(4\sqrt{2}-2\sqrt{3})}=\sqrt[3]{32-12}=\sqrt[3]{20}$

127. Realiza las operaciones que aparecen a continuación y simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt[4]{2^3}\cdot 2^{-4}\cdot\sqrt[3]{2}}{2^2\cdot\sqrt{2}\cdot 2^{-\frac{5}{2}}}$

b) $\left(81^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}}\right):\sqrt{3}$

c) $\left(\sqrt{14+\sqrt{7-\sqrt[4]{81}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt{6+\sqrt[3]{20+\sqrt{47+\sqrt[4]{16}}}}$

a) $\dfrac{\sqrt[4]{2^3}\cdot 2^{-4}\cdot\sqrt[3]{2}}{2^2\cdot\sqrt{2}\cdot 2^{-\frac{5}{2}}}=\dfrac{2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{-4}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{5}{2}}}=\dfrac{2^{\frac{13}{12}}}{2^4}=\dfrac{2^{\frac{13}{12}}}{2^{\frac{48}{12}}}=\dfrac{1}{\sqrt[12]{2^{35}}}=\dfrac{\sqrt[12]{2}}{2^3}$

b) $\left(81^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}}\right):\sqrt{3}=\left(3\cdot 3^{-\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{1}{8}}\right):3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{8}}:3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{3}$

c) $\left(\sqrt{14+\sqrt{7-\sqrt[4]{81}}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{14+\sqrt{7-3}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{14+2}\right)^{-\frac{1}{2}}=4^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}$

d) $\sqrt{6+\sqrt[3]{20+\sqrt{47+\sqrt[4]{16}}}}=\sqrt{6+\sqrt[3]{20+7}}=\sqrt{6+3}=\sqrt{9}=3$

128. Realiza las operaciones con radicales que aparecen a continuación.

a) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{9}+\dfrac{a}{16}}\right)^{-2}$

b) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}+\dfrac{2a}{5}}\right)^{-4}$

c) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\sqrt{2a}\right)^{2}$

d) $\left(\sqrt{6a}+\sqrt{\dfrac{2a}{3}}\right)^{2}$

a) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{9}+\dfrac{a}{16}}\right)^{-2}=\left(\sqrt{\dfrac{16a+9a}{144}}\right)^{-2}=\left(\sqrt{\dfrac{25a}{144}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{5}{12}\sqrt{a}\right)^{-2}=\dfrac{144}{25a}$

b) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}+\dfrac{2a}{5}}\right)^{-4}=\left(\sqrt{\dfrac{9a}{10}}\right)^{-4}=\left(\dfrac{9a}{10}\right)^{\frac{-4}{2}}=\left(\dfrac{10}{9a}\right)^{2}=\dfrac{100}{81a^2}$

c) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\sqrt{2a}\right)^{2}=\dfrac{a}{2}+2a-2a=\dfrac{a}{2}$

d) $\left(\sqrt{6a}+\sqrt{\dfrac{2a}{3}}\right)^{2}=6a+\dfrac{2a}{3}+4a=10a+\dfrac{2a}{3}=\dfrac{32a}{3}$

129. Simplifica los siguientes radicales.

a) $\sqrt{a^2+4-4a}$

b) $\sqrt{\dfrac{1}{2}+2a^2+2a}$

a) $\sqrt{a^2+4-4a}=\sqrt{(a-2)^2}=a-2$

b) $\sqrt{\dfrac{1}{2}+2a^2+2a}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}a\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}a$

130. **Racionaliza las siguientes expresiones y simplifica el resultado.**

a) $\dfrac{3}{4\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{9}}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{4}}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{12}}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt[4]{3^3}}$ f) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}}$

a) $\dfrac{3}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{12}}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2\cdot 3^2}}{\sqrt[3]{2^2\cdot 3}\cdot\sqrt[3]{2\cdot 3^2}}=\dfrac{\sqrt[6]{2^3\cdot 2^2\cdot 3^4}}{2\cdot 3}=\dfrac{\sqrt[6]{2^5\cdot 3^4}}{6}$

c) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{9}}=4\sqrt[3]{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt[4]{3^3}}=\dfrac{\sqrt[4]{3^3}}{9}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{4}}=1$

f) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}}=3\sqrt[3]{3}$

131. **Racionaliza las siguientes expresiones y simplifica el resultado.**

a) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\dfrac{3\sqrt{5}-2}{\sqrt[4]{5^3}}$

b) $\dfrac{7\sqrt{7}-7}{\sqrt[3]{7}}$ d) $\dfrac{3\sqrt{5}-1}{\sqrt[5]{-5^3}}$

a) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}(3+\sqrt{2})}{2}=\dfrac{3\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{2^5}}{2}$

b) $\dfrac{7\sqrt{7}-7}{\sqrt[3]{7}}=(\sqrt{7}-1)\sqrt[3]{7^2}$

c) $\dfrac{3\sqrt{5}-2}{\sqrt[4]{5^3}}=\dfrac{3\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{5}-2\cdot\sqrt[4]{5}}{5}=\dfrac{3\sqrt[4]{5^3}-2\sqrt[4]{5}}{5}$

d) $\dfrac{3\sqrt{5}-1}{\sqrt[5]{-5^3}}=-\dfrac{3\sqrt[10]{5^7}-\sqrt[5]{5^2}}{5}$

132. **Elimina las raíces del denominador.**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ d) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{7}{\sqrt{11}-3}$

c) $\dfrac{-5}{\sqrt{3}-2}$ f) $\dfrac{-5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{3(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\dfrac{3(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2-3}=-3(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

c) $\dfrac{-5}{\sqrt{3}-2}=\dfrac{-5(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}=\dfrac{-5\sqrt{3}-10}{3-4}=5\sqrt{3}+10$

d) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(3\sqrt{2}-\sqrt{5})(3\sqrt{2}+\sqrt{5})}=\dfrac{24+4\sqrt{10}}{18-5}=\dfrac{24+4\sqrt{10}}{13}$

e) $\dfrac{7}{\sqrt{11}-3}=\dfrac{7(\sqrt{11}+3)}{(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)}=\dfrac{7\sqrt{11}+21}{11-9}=\dfrac{7\sqrt{11}+21}{2}$

f) $\dfrac{-5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}=\dfrac{-5(\sqrt{6}-\sqrt{7})}{(\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{6}-\sqrt{7})}=\dfrac{-5\sqrt{6}+5\sqrt{7}}{6-7}=5\sqrt{6}-5\sqrt{7}$

133. **Racionaliza las siguientes expresiones.**

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-2}$ c) $\dfrac{-3}{\sqrt{2}-2}$ e) $\dfrac{2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}$ g) $\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}$ f) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$ h) $\dfrac{3\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-2}=-2(\sqrt{3}+2)$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$

c) $\dfrac{-3}{\sqrt{2}-2}=3+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}=\dfrac{6+2\sqrt{2}}{7}$

e) $\dfrac{2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}=-\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$

f) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}=-2-\sqrt{6}$

g) $\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{3}$

h) $\dfrac{3\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{-30+3\sqrt{15}}{17}$

134. **Elimina raíces del denominador de las expresiones que aparecen a continuación.**

a) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{1-2\sqrt{5}}$ d) $\dfrac{\sqrt{8}(5-\sqrt{18})}{\sqrt{2}(\sqrt{8}-2)}$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}-5\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}(\sqrt{5}+2)}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}-3\sqrt{5}}$ f) $\dfrac{3\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{5}}$

a) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{1-2\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt[6]{5^2}+2\cdot\sqrt[6]{5^5}}{19}$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}-5\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt{2}-3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt[5]{2}\cdot(\sqrt{2}+3\sqrt{3})}{2-27}=-\dfrac{\sqrt[10]{2^7}+3\sqrt[10]{2^2\cdot 3^5}}{25}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}-3\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{43}(\sqrt[6]{200}+3\sqrt[6]{3125})$

d) $\dfrac{\sqrt{8}(5-\sqrt{18})}{\sqrt{2}(\sqrt{8}-2)}=2\sqrt{2}-1$

e) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}(\sqrt{5}+2)}=\dfrac{2}{3}(\sqrt{5}-2)$

f) $\dfrac{3\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{5}}=\dfrac{3}{13}(3\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{50})$

135. **Racionaliza las siguientes expresiones y simplifica el resultado.**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{6}}}$ c) $\dfrac{5\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

b) $\dfrac{1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ d) $\dfrac{4\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$

a) $\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{6}}}=\frac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6}}}=\frac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{3+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot(3-\sqrt{6})}{(3+\sqrt{6})\cdot(3-\sqrt{6})}=\frac{3\sqrt{3+\sqrt{6}}-\sqrt{18+6\sqrt{6}}}{9-6}=\frac{3\sqrt{3+\sqrt{6}}-\sqrt{18+6\sqrt{6}}}{3}$

b) $\frac{1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{(1-\sqrt{5}+\sqrt{7})(1+\sqrt{5}-\sqrt{7})}=\frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{1+\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{5}-5+\sqrt{35}+\sqrt{7}+\sqrt{35}-7}=$

$=\frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{-11+2\sqrt{35}}=\frac{(1+\sqrt{5}-\sqrt{7})\cdot(-11-2\sqrt{35})}{(-11+2\sqrt{35})\cdot(-11-2\sqrt{35})}=\frac{-11+3\sqrt{5}+\sqrt{7}-2\sqrt{35}}{-19}$

c) $\frac{5\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=\frac{(5\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{18}}{\left(\sqrt{18}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3^3\cdot 2^2}-6}{18}=\frac{5\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}-6}{18}=\frac{6(5\sqrt{3}-1)}{6\cdot 3}=\frac{5\sqrt{3}-1}{3}$

d) $\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{12}}=\frac{(4\sqrt{3}+\sqrt{7})\sqrt{12}}{\left(\sqrt{12}\right)^2}=\frac{24+\sqrt{84}}{12}=\frac{2(12+\sqrt{21})}{6\cdot 2}=\frac{12+\sqrt{21}}{6}$

136. **Racionaliza estas expresiones.**

a) $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ b) $\frac{12\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

a) $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}=-\frac{1}{3}(3+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{6})-\frac{5}{4}\sqrt{5}(\sqrt{3}-\sqrt{7})=\frac{-12\sqrt{3}+12\sqrt{6}-19\sqrt{15}+4\sqrt{30}+15\sqrt{35}}{12}$

b) $\frac{12\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}=-12(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

137. **Racionaliza las siguientes expresiones.**

a) $\frac{3}{(3\sqrt{2}-5)\cdot(4\sqrt{2}-3)}$ c) $\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt{125}+2)}$

b) $\frac{-2}{\sqrt[3]{4}\cdot(5\sqrt{3}-1)}$ d) $\frac{-4}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{2}}$

a) $\frac{3}{(3\sqrt{2}-5)\cdot(4\sqrt{2}-3)}=\frac{3}{24-9\sqrt{2}-20\sqrt{2}+15}=\frac{3}{39-29\sqrt{2}}=$

$=\frac{3(39+29\sqrt{2})}{(39-29\sqrt{2})(39+29\sqrt{2})}=\frac{117+87\sqrt{2}}{1.521-1.682}=\frac{117+87\sqrt{2}}{-161}$

b) $\frac{-2}{\sqrt[3]{4}\cdot(5\sqrt{3}-1)}=\frac{-2(5\sqrt{3}+1)}{\sqrt[3]{4}\cdot(5\sqrt{3}-1)(5\sqrt{3}+1)}=\frac{-2(5\sqrt{3}+1)}{74\sqrt[3]{4}}=$

$=\frac{-5\sqrt{3}-1}{37\sqrt[3]{4}}=\frac{(-5\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{4^2}}{37\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4^2}}=\frac{-5\sqrt[6]{3^3\cdot 4^4}-\sqrt[3]{4^2}}{148}$

c) $\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt{125}+2)}=\frac{-\sqrt{2}(\sqrt{125}-2)}{\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt{125}+2)(\sqrt{125}-2)}=\frac{-\sqrt{250}+2\sqrt{2}}{121\sqrt[3]{2}}=$

$=\frac{(-\sqrt{250}+2\sqrt{2})\sqrt[3]{2^2}}{121\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\frac{-\sqrt[6]{5^9\cdot 2^7}+2\sqrt[6]{2^7}}{121\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\frac{-5\cdot 2\sqrt[6]{5^3\cdot 2}+2^2\sqrt[6]{2}}{242}=$

$=\frac{2(-5\sqrt[6]{5^3\cdot 2}+2\sqrt[6]{2})}{242}=\frac{-5\sqrt[6]{5^3\cdot 2}+2\sqrt[6]{2}}{121}$

d) $\frac{-4}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{2}}=\frac{-4}{3^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}=\frac{-4}{3^{\frac{3}{12}}\cdot 2^{\frac{4}{12}}}=\frac{-4}{\sqrt[12]{3^3\cdot 2^4}}=\frac{-4\sqrt[12]{3^9\cdot 2^8}}{\sqrt[12]{3^3\cdot 2^4}\,\sqrt[12]{3^9\cdot 2^8}}=$

$=\frac{-4\sqrt[12]{3^9\cdot 2^8}}{6}=\frac{-2\sqrt[12]{3^9\cdot 2^8}}{3}$

138. **Realiza estas operaciones.**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[9]{6}} + \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}}{\sqrt[6]{2^5}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[9]{6}} + \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[18]{6^{11}}}{\sqrt[9]{6 \cdot 2^3}}$

139. **Realiza estas operaciones.**

a) $\dfrac{2}{3 - 2\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{2}{1 + \sqrt{3}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3} - 7}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} + \dfrac{1}{\sqrt[6]{5}}$

d) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{10}} + \dfrac{4}{\sqrt{2} - 5} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{2}{3 - 2\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} = -\dfrac{30 + 9\sqrt{5}}{55}$

b) $\dfrac{2}{1 + \sqrt{3}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3} - 7} = \dfrac{3}{37}(13\sqrt{3} - 10)$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} + \dfrac{1}{\sqrt[6]{5}} = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt[3]{5^2} + \sqrt[6]{5^5}}{5}$

d) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{10}} + \dfrac{4}{\sqrt{2} - 5} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{15\sqrt{2}}{46} - \dfrac{43}{23}$

140. **Calcula la siguiente expresión.**

$$\frac{\sqrt{128} + 2\sqrt{8} + 3\sqrt{2}}{2\sqrt{32}} - 4\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{128} + 2\sqrt{8} + 3\sqrt{2}}{2\sqrt{32}} - 4\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} - 4\sqrt{2} = \frac{15}{8} - 4\sqrt{2}$$

141. **Calcula, mediante la definición, los logaritmos que aparecen a continuación.**

a) $\log_3 243$

b) $\log_9 81$

c) $\log 1\,000\,000$

d) $\log 0{,}00001$

e) $\ln e^2$

f) $\ln e^{-14}$

g) $\log_7 343$

h) $\log_4 0{,}0625$

a) $\log_3 243 = 5$

b) $\log_9 81 = 2$

c) $\log 1\,000\,000 = 6$

d) $\log 0{,}00001 = -5$

e) $\ln e^2 = 2$

f) $\ln e^{-14} = -14$

g) $\log_7 343 = 3$

h) $\log_4 0{,}0625 = -2$

142. **Calcula los siguientes logaritmos utilizando su definición.**

a) $\log_9 243$

b) $\log_{25} 125$

c) $\log_{32} 4$

d) $\log_4 512$

a) $\log_9 243 = \dfrac{5}{2}$

b) $\log_{25} 125 = \dfrac{3}{2}$

c) $\log_{32} 4 = \dfrac{2}{5}$

d) $\log_4 512 = \dfrac{9}{2}$

143. **Determina cuáles de las siguientes igualdades son ciertas y corrige las que no lo sean.**

a) $\log(a + b) = \log a + \log b$
b) $\log 0 = 1$
c) $\log(a : b) = \log a - \log b$
d) $\log(a^b) = \log b \cdot \log a$

a) Falsa: $\log(a+b) \neq \log a + \log b \rightarrow \log(a \cdot b) = \log a + \log b$

b) Falsa: $\log 0 \neq 1 \rightarrow \log 1 = 0$

c) Cierta: $\log(a : b) = \log a - \log b$

d) Falsa: $\log(a^b) \neq \log b \cdot \log a \rightarrow \log(a^b) = b \cdot \log a$

144. **Halla el resultado de las expresiones mediante las propiedades de los logaritmos.**

a) $2\log_4 16 + \log_2 32 - 3\log_7 49$
b) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125$
c) $\log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64$

a) $2\log_4 16 + \log_2 32 - 3\log_7 49 = 2 \cdot 2 + 5 - 3 \cdot 2 = 3$
b) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125 = 3 + 3 + 3 = 9$
c) $\log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64 = 4 - 2 + 2 = 4$

145. **Sabiendo que $\log 7 = 0{,}8451$ calcula aplicando las propiedades de los logaritmos.**

$$\log 28 + \log 15 - \log 6$$

$$\log 28 + \log 15 - \log 6 = \log\left(\frac{28 \cdot 15}{6}\right) = \log 70 = \log 7 + \log 10 = \log 7 + 1 = 1{,}8451$$

146. **Calcula los siguientes logaritmos utilizando la calculadora.**

a) $\log_5 36^2$
b) $\log_2 \sqrt{31}$
c) $\log_6 100$
d) $\log_4 31^5$

a) $\log_5 36^2 = 2\log_5 36 = 2 \cdot \frac{\log 36}{\log 5} = 4{,}4531$

b) $\log_2 \sqrt{31} = \frac{1}{2}\log_2 31 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log 31}{\log 2} = 2{,}4771$

c) $\log_6 100 = \log_6 10^2 = 2 \cdot \frac{\log 10}{\log 6} = 2{,}5701$

d) $\log_4 31^5 = 5\log_4 31 = 5 \cdot \frac{\log 31}{\log 4} = 12{,}3855$

147. **Si $\log e = 0{,}4343$; ¿cuánto vale $\ln 10$? ¿Y $\ln 0{,}1$?**

$\ln 10 = \frac{\log 10}{\log e} = \frac{1}{0{,}4343} = 2{,}3025$ $\quad \ln 0{,}1 = \frac{\log 0{,}1}{\log e} = \frac{-1}{0{,}4343} = -2{,}3025$

148. **Sabiendo que log 4 = 0,6021 calcula los siguientes logaritmos.**

a) $\log 2$

b) $\log \frac{1}{4}$

c) $\log 0{,}2$

d) $\log 4000$

a) $\log 2 = \frac{\log 4}{2} = 0{,}30105$

b) $\log \frac{1}{4} = -\log 4 = -0{,}6021$

c) $\log 0{,}2 = \frac{\log 4}{2} - \log 10 = 0{,}30105 - 1 = -0{,}69895$

d) $\log 4000 = \log 4 + \log 1000 = 0{,}3021 + 3 = 3{,}6021$

149. **Sabiendo que ln *a* = 0,6 y que ln *b* = 2,2 calcula los siguientes logaritmos.**

a) $\ln \sqrt{a}$

b) $\ln \sqrt[3]{b}$

c) $\ln \sqrt[4]{\frac{ab}{e^2}}$

d) $\ln \frac{\sqrt{a^{-5}}}{\sqrt[3]{b}}$

a) $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a = 0{,}3$

b) $\ln \sqrt[3]{b} = \frac{1}{3}\ln b = 0{,}7333$

c) $\ln \sqrt[4]{\frac{ab}{e^2}} = \frac{1}{4}(\ln a + \ln b - 2\ln e) = 0{,}2$

d) $\ln \frac{\sqrt{a^{-5}}}{\sqrt[3]{b}} = -\frac{5}{2}\ln a - \frac{1}{3}\ln b = -2{,}23333$

150. **Calcula el valor de *x*.**

a) $\log_3 x = 5$

b) $\log_5 x = 3$

c) $\log_2 x = -1$

d) $\log_{\frac{2}{3}} x = 4$

e) $\log_3 x = -5$

f) $\log_5 x = -3$

g) $\log_2 x = 0$

h) $\log_{23} x = 4$

a) $\log_3 x = 5 \rightarrow x = 3^5 \rightarrow x = 243$

b) $\log_5 x = 3 \rightarrow x = 5^3 \rightarrow x = 125$

c) $\log_2 x = -1 \rightarrow x = 2^{-1} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

d) $\log_{\frac{2}{3}} x = 4 \rightarrow x = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \rightarrow x = \frac{16}{81}$

e) $\log_3 x = -5 \rightarrow x = 3^{-5} \rightarrow x = \frac{1}{243}$

f) $\log_5 x = -3 \rightarrow x = 5^{-3} \rightarrow x = \frac{1}{125}$

g) $\log_2 x = 0 \rightarrow x = 2^0 \rightarrow x = 1$

h) $\log_{23} x = 4 \rightarrow x = 23^4 \rightarrow x = 279\,841$

151. **Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Razona tu respuesta.**

a) Todos los números decimales se pueden escribir en forma de fracción.
b) Todos los números reales son racionales.
c) Cualquier número irracional es real.
d) Hay números enteros que son irracionales.
e) Existen números reales que son racionales.
f) Todo número decimal es racional.
g) Cada número irracional tiene infinitas cifras decimales.
h) Todos los números racionales tienen infinitas cifras decimales que se repiten.
i) Todos los números racionales se pueden escribir mediante fracciones.

a) Falsa, pues los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas y no se pueden escribir como fracción.

b) Falsa, porque hay números reales que son irracionales.

c) Verdadera, ya que los números racionales y los irracionales forman el conjunto de los números reales.

d) Falsa, porque si son enteros no pueden tener infinitas cifras decimales no periódicas.

e) Verdadero, pues todos los números que se pueden expresar como fracción son números racionales, que además son reales.

f) Falsa, porque los números decimales con infinitas cifras decimales no periódicas son irracionales.

g) Verdadero, ya que tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

h) Falsa, pues los decimales exactos también son racionales.

i) Verdadero, por definición.

152. ¿Por qué la raíz cuadrada de cualquier número terminado en 2 es un número irracional? ¿Existe otro conjunto de números con esta característica?

Porque no hay ningún número que al multiplicarlo por sí mismo dé un número terminado en 2.

Todas las familias de números terminadas en 3, 7 y 8 tienen esta característica.

153. Escribe en notación científica las siguientes cantidades.

a) El año-luz: 9 460 000 000 km.
b) Velocidad de la luz: 300 000 km/s.
c) Diámetro del Sol: 1 400 000 km.
d) Carga eléctrica del electrón: 0,0000000000000000001602 C.
e) Masa del protón: 0,000000000000000000001673 kg.
f) Distancia de Mercurio al Sol: 58 000 000 km.
g) Masa del electrón: 0,00000000000000000000000000009109 kg.
h) Distancia entre la Tierra y la Luna: 384 000 000 m.

a) Año–luz→ 9 460 000 000 km $= 9{,}46 \cdot 10^{9}$ km

b) Velocidad de la luz → 300 000 km/s $= 3 \cdot 10^{5}$ km/s

c) Diámetro del Sol → 1 400 000 km $= 1{,}4 \cdot 10^{6}$ km

d) Carga eléctrica del electrón → 0,0000000000000000001602 C $= 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C

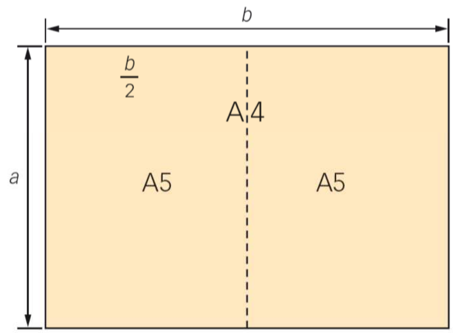
e) Masa del protón → 0,000000000000000000001673 kg $= 1{,}673 \cdot 10^{-22}$ kg

f) Distancia de Mercurio al Sol → 58 000 000 km $= 5{,}8 \cdot 10^{7}$ km

g) Masa del electrón → 0,00000000000000000000000000009109 kg $= 9{,}109 \cdot 10^{-29}$ kg

h) Distancia entre la Tierra y la Luna → 384 000 000 m $= 3{,}84 \cdot 10^{8}$ m

154. **Los formatos de papel estándar se basan en una norma internacional. Estos tamaños de papel tienen unas medidas tales que, al cortar por la mitad uno de los rectángulos estándar, se obtienen dos rectángulos semejantes al primero. Así, al dividir por la mitad un folio DIN A4 resultan dos rectángulos iguales (de la medida DIN A5) semejantes al primero.**



a) ¿Qué relación hay entre los lados de los rectángulos?

b) Se sabe que un rectángulo de tamaño DIN A0 tiene un área de 1 m². ¿Cuáles son, entonces, las dimensiones del folio de tamaño DIN A4?

a) $\frac{b}{a}=\frac{a}{\frac{b}{2}} \rightarrow 2a^2=b^2 \rightarrow a=b\sqrt{2}$

b) $\text{Área A0}=1\text{ m}^2 \rightarrow \text{Área A4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}\text{ m}^2$

$$ab=a^2\sqrt{2}=\frac{1}{16} \rightarrow a=\sqrt{\frac{1}{16\sqrt{2}}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{2}}=0,21\text{ m}=21\text{ cm} \rightarrow b=21\sqrt{2}=29,7\text{ cm}$$

155. **La distancia entre la Tierra y Júpiter es de $6,32 \cdot 10^6$ km. Una nave que hiciera el viaje entre los dos planetas en un año, ¿qué velocidad debería llevar?**

Un año en horas es 24 · 365 ⟶ $v=\frac{espacio}{tiempo}=\frac{6,32\cdot 10^6}{8,76\cdot 10^3}=7,2\cdot 10^2\text{ km/h}$

156. **Desde la antigüedad aparece con frecuencia el número de oro, Φ, en proporciones de la naturaleza, así como en obras de arte, o en construcciones como el Partenón griego.**

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Comprueba la siguiente propiedad del inverso del número de oro.

$$\frac{1}{\Phi}=\Phi-1$$

$$\frac{1}{\Phi}=\Phi-1 \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\Phi}=\frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=-\frac{2-2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \Phi-1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$$

157. **¿Qué tipo de decimal se obtiene de la fracción $\frac{a}{2^2\cdot 5^3}$, siendo *a* un número entero?**

Como nuestro sistema de numeración es decimal, al dividir un número entero entre un número que sea potencia de 2 o 5, o de ambos, se obtiene un decimal exacto. Si el numerador es múltiplo del denominador, se obtiene un número entero.

158. **¿Existe algún caso en que la aproximación por exceso y por defecto coincidan?**

Y si consideramos el redondeo, ¿puede coincidir esta aproximación con la aproximación por exceso o por defecto?

No pueden coincidir, ya que para aproximar por defecto se eliminan las cifras a partir del orden considerado, y para aproximar por exceso se eliminan las cifras a partir del orden considerado, pero se aumenta en una unidad la última cifra que queda.

La aproximación por redondeo coincide con la aproximación por defecto si la cifra anterior al orden considerado es menor que cinco, y coincide con la aproximación por exceso en el resto de casos.

159. **Comprueba la veracidad de cada una de las igualdades que aparecen a continuación.**

a) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[n\cdot m]{ab}$

b) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[n+m]{a\cdot b}$

c) $\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$

d) $a\sqrt[n]{b^m}=\sqrt[n]{(a\cdot b)^m}$

e) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{a\cdot b}$

f) $a\sqrt{b+c}=\sqrt{ab+ac}$

g) $\sqrt[4]{a^8b^2}=a\sqrt{b}$

h) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

a) Falso: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}\neq\sqrt[n\cdot m]{ab}$, ya que $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{m}{n\cdot m}}\cdot b^{\frac{n}{m\cdot n}}=\sqrt[n\cdot m]{a^m\cdot b^n}$

b) Falso: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}\neq\sqrt[n+m]{ab}\rightarrow\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[n\cdot m]{a^m\cdot b^n}$

c) Falso: $\sqrt[n]{a+b}\neq\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$, ya que $\sqrt[n]{a+b}=(a+b)^{\frac{1}{n}}\neq a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$

d) Falso: $a\sqrt[n]{b^m}\neq\sqrt[n]{(a\cdot b)^m}$, ya que $a\sqrt[n]{b^m}=a\cdot b^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{n}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^nb^m}$

e) Verdadero: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{a\cdot b}$

f) Falso: $a\sqrt{b+c}\neq\sqrt{ab+ac}\rightarrow a\sqrt{b+c}=\sqrt{a^2b+a^2c}$

g) Falso: $\sqrt[4]{a^8b^2}\neq a\sqrt{b}\rightarrow\sqrt[4]{a^8b^2}=a^2\sqrt{b}$

h) Falso: $\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b\rightarrow\sqrt{a^2+b^2+2ab}=a+b$

160. **Escribe el número 2^{500} en notación científica.**

a) Sabiendo que $\log 2=0{,}3010$ y que $\sqrt{10}=3{,}1622$.

b) ¿Podrías hacerlo con una calculadora científica?

c) Expresa 5^{500} en notación científica, teniendo en cuenta el primer apartado.

a) $x=2^{500}$ Tenemos que encontrar un número *y* tal que $10^y=x$:

$$2^{500}=x\rightarrow 500=\log_2 x=\frac{\log x}{\log 2}$$

Por otro lado, como $\log x=y$, se tiene que $y=500\cdot\log 2=150{,}5\rightarrow 10^{150{,}5}=10^{0{,}5}\cdot 10^{150}=3{,}1622\cdot 10^{150}$.

b) No se puede hallar con calculadora, ya que es un número demasiado grande.

c) $x=5^{500}$ Tenemos que encontrar un número *y* tal que $10^y=x$:

$$5^{500}=x\rightarrow 500=\log_5 x=\frac{\log x}{\log 5}$$

Por otro lado, como $\log x=y$, se tiene que $y=500\cdot\log 5=349{,}5\rightarrow 10^{349{,}5}=10^{0{,}5}\cdot 10^{349}=3{,}1622\cdot 10^{349}$.

PARA PROFUNDIZAR

161. Elige la respuesta adecuada. (Concurso de Primavera)

Si $\log_x y + \log_y x = 7$, $(\log_x y)^2 + (\log_y x)^2$ es igual a:	40	43	45	47	49
¿Qué número de los siguientes es $\sqrt{9-6\sqrt{2}} + \sqrt{9+6\sqrt{2}}$?	$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{6}$	$\frac{7\sqrt{2}}{2}$	$3\sqrt{3}$	-6
¿Cuántos números formados por tres cifras consecutivas (no necesariamente ordenadas) tienen un número impar de divisores?	1	2	3	4	5
¿En qué intervalo está el número $\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{3}\right)}$?	$(-2, -1)$	$(1, 2)$	$(-3, -2)$	$(2, 3)$	$(3, 4)$
Si $y = \frac{x}{x + \frac{x}{x+y}}$, ¿para qué valores de x resulta que y no es un número real?	-6	-3	1	3	6

- $\log_x y + \log_y x = 7 \rightarrow (\log_x y + \log_y x)^2 = 49 \rightarrow (\log_x y)^2 + (\log_y x)^2 + 2\log_x y \log_y x = 49 \rightarrow$

  $\rightarrow (\log_x y)^2 + (\log_y x)^2 + 2\frac{\log y \log x}{\log x \log y} = 49 \rightarrow (\log_x y)^2 + (\log_y x)^2 + 2 = 49 \rightarrow (\log_x y)^2 + (\log_y x)^2 = 47$

- Al elevar ambos términos al cuadrado se obtiene:

  $\left(\sqrt{9-6\sqrt{2}} + \sqrt{9+6\sqrt{2}}\right)^2 = 9 - 6\sqrt{2} + 9 + 6\sqrt{2} + 6 = 24$

  Así que al calcular su raíz cuadrada para obtener el valor inicial, resulta $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

- Para que tenga un número impar de divisores tiene que ser un número cuya raíz cuadrada sea exacta, por lo que solo quedan como posibles los números de tres cifras menores que 32^2.

  Los únicos dos números que cumplen esta propiedad son $18^2 = 324$ y $24^2 = 576$.

- $\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{3}\right)} = \log_3 10 \rightarrow 2 < \log_3 10 < 3 \rightarrow \log_3 10 \in (2,3)$

- $y = \frac{x}{x + \frac{x}{x+y}} = \frac{x+y}{x+y+1} \rightarrow y(x+y+1) = x+y \rightarrow yx + y^2 + y - x - y = 0 \rightarrow y^2 + xy - x = 0$

  Cuando $x = -3$, $y = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} \notin \mathbb{R}$.

162. Si una fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible, ¿son las fracciones $\frac{a+b}{a \cdot b}$ y $\frac{a-b}{a \cdot b}$ irreducibles?

Como los divisores de $a+b$ son los divisores comunes de a y b:

$(a+b)$ y $a \cdot b$ no tienen divisores comunes, y la fracción $\frac{a+b}{a \cdot b}$ es irreducible.

Como los divisores de $a-b$ son los divisores comunes de a y b:

$(a-b)$ y $a \cdot b$ no tienen divisores comunes, y la fracción $\frac{a-b}{a \cdot b}$ es irreducible.

163. Razona cómo se racionalizan las fracciones del tipo:

$$\frac{1}{\sqrt[2^n]{a}-\sqrt[2^n]{b}}$$

Multiplicamos el denominador por el conjugado:

$$\frac{\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b}}{\left(\sqrt[2^n]{a}-\sqrt[2^n]{b}\right)\left(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b}\right)}=\frac{\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b}}{\sqrt[2^{n-1}]{a}-\sqrt[2^{n-1}]{b}}$$

$$\frac{\left(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b}\right)\left(\sqrt[2^{n-1}]{a}+\sqrt[2^{n-1}]{b}\right)}{\left(\sqrt[2^{n-1}]{a}-\sqrt[2^{n-1}]{b}\right)\left(\sqrt[2^{n-1}]{a}+\sqrt[2^{n-1}]{b}\right)}=\frac{\left(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b}\right)\left(\sqrt[2^{n-1}]{a}+\sqrt[2^{n-1}]{b}\right)}{\sqrt[2^{n-2}]{a}-\sqrt[2^{n-2}]{b}}$$

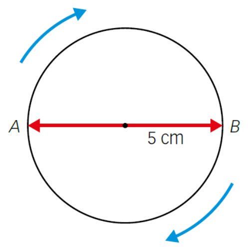
Por tanto, multiplicando por el conjugado n veces: $\dfrac{\left(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b}\right)\left(\sqrt[2^{n-1}]{a}+\sqrt[2^{n-1}]{b}\right)\ldots\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$

164. Dos piezas móviles de una máquina se desplazan a la misma velocidad.

La primera pieza describe una circunferencia de radio 5 cm y la segunda se desplaza de un extremo al otro del diámetro de esa circunferencia. Si ambas piezas parten del mismo punto, ¿coincidirán en algún momento?

CLAVE

Ten en cuenta el siguiente esquema.



Además, recuerda que el número π es irracional.

Suponemos que ambas piezas parten de A. Llamamos v a la velocidad que llevan los dos móviles.

La distancia recorrida por el móvil que se desplaza por la circunferencia en los puntos A y B es $5\pi(k-1)$, siendo k un número natural. La distancia recorrida por el móvil que se desplaza por el diámetro en los puntos A y B es $10(k-1)$, siendo k un número natural. Las distancias recorridas por el móvil que se desplaza por la circunferencia son números irracionales, mientras que las distancias recorridas por el móvil que se desplaza por el diámetro son números naturales.

Por tanto, nunca coincidirán ambos móviles.

165. Demuestra la siguiente igualdad.

$$\sum_{k=1}^{99}\log\sqrt{\frac{1+k}{k}}=1$$

$$\sum_{k=1}^{99}\log\sqrt{\frac{1+k}{k}}=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{2}\log\frac{1+k}{k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{99}\log\frac{1+k}{k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{99}\left(\log(1+k)-\log k\right)=\frac{1}{2}\left(\log 100-\log 1\right)=1$$

166. Demuestra que $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}$, expresado en forma decimal, es un número mixto para cualquier valor de n.

(Olimpiadas matemáticas, Madrid)

Para que una fracción irreducible genere un número decimal periódico mixto, debe tener en el denominador algún factor primo 2 o 5 y alguno que no sea 2 ni 5.

Hallamos la suma:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{3n^2+6n+2}{n(n+1)(n+2)}$$

Vemos que es irreducible, pues el numerador no se anula para ningún valor natural de n y, además, el denominador es el producto de tres números consecutivos y tiene como divisores, al menos, el 2 y el 3.

167. **Un montón de naranjas se apila en capas, de forma que en el hueco de 4 naranjas de una capa se coloca otra de la capa superior.**

La primera capa, contando por debajo, tiene *m* filas y *n* columnas y la última capa tiene una sola fila; siendo *m* el número de diagonales de un decágono y *n* el menor número que dividido entre 4 da resto 3, entre 5 da resto 4 y entre 6 da resto 5. ¿Cuántas naranjas hay?

(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)

La cantidad de filas, m, es igual al número de diagonales del decágono:

$$m = \frac{10(10-3)}{2} = 35$$

La cantidad de columnas, n, es un número tal que $n+1$ es el menor múltiplo común de 4, 5 y 6, que es 60, por lo que $n = 59$.

La cantidad de naranjas que hay en cada capa es:

1.ª capa: $59 \cdot 35 = 2.065$

2.ª capa: $(59-1) \cdot (35-1) = 2.065 - 94 + 1$

3.ª capa: $(59-2) \cdot (35-2) = 2.065 - 2 \cdot 94 + 2^2$

…

34.ª capa: $(59-33) \cdot (35-33) = 2.065 - 33 \cdot 94 + 33^2$

35.ª capa: $(59-34) \cdot (35-34) = 2.065 - 34 \cdot 94 + 34^2$

Realizamos la suma:

$$2.065 \cdot 35 - (1+2+3+\ldots+34) \cdot 94 + (1+2^2+3^2+\ldots+34^2) =$$
$$= 72.275 - \frac{1+34}{2} \cdot 94 + \frac{34(34+1)(68+1)}{6} = 30.030 \text{ naranjas}$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **Responde.**

a) ¿Por qué se hacen marcas en la carretera al frenar bruscamente el automóvil?

b) ¿Cuál es el valor de la gravedad g?

a) Porque dos o cuatro de las ruedas se bloquean y se produce una transferencia del peso del coche sobre ellas.

b) $g = 9{,}8$ m/s^2.

2. **Consulta qué es el coeficiente de rozamiento de una superficie.**

El coeficiente de rozamiento es una constante adimensional que expresa la oposición al deslizamiento que ofrecen las superficies de dos cuerpos en contacto. Es una característica de cada par de materiales en contacto. Depende además de factores como la temperatura, la velocidad relativa entre las superficies, etc.

3. **¿Qué magnitudes representan las variables μ, g y x en la expresión de la velocidad inicial con respecto a la distancia de frenado?**

μ representa el coeficiente de rozamiento. Es una magnitud sin unidades.

g representa la aceleración de la gravedad. Es una constante fija, que vale 9,8 m/s^2.

x representa la longitud de las marcas de frenado expresadas en metros.

4. **¿Es correcta esta igualdad?**

$$v = \sqrt{2\mu g x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\mu} \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{x}$$

Sí, la igualdad es correcta, pues se ha aplicado una propiedad elemental de las raíces.

5. **¿Cuál es el índice de la expresión radical?**

El índice de la expresión radical es 2 (raíz cuadrada).

6. **Calcula la velocidad de un automóvil si se sabe que frenó bruscamente y dejó una marca de frenado de 30 m en una carretera de asfalto.**

Se toma $\mu = 0{,}75$ por ser la carretera de asfalto. Entonces:

$$v = \sqrt{2 \cdot 0{,}75 \cdot 9{,}8 \cdot 30} = \sqrt{441} = 21\ \text{m/s} = 75{,}6\ \text{km/h}$$

7. **Averigua cuáles son las campañas de los responsables de tráfico de tu ciudad o comunidad para evitar accidentes.**

Algunas campañas para evitar accidentes son:

- Campaña del uso del cinturón de seguridad y sistemas de retención infantil adecuados a la estatura y peso de los niños.
- Campaña contra las drogas y el alcoholismo.
- Campaña contra las distracciones al volante, como el uso del teléfono móvil.
- Campaña de control de motocicletas y ciclomotores.

Ecuaciones e inecuaciones

ACTIVIDADES

1. Escribe un polinomio de grado 3 y con término independiente -1. Determina sus términos y su valor numérico para $x = 2$ y $x = -2$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$P(x)=2x^3+3x-1\rightarrow\begin{cases}P(2)=2\cdot 2^3+3\cdot 2-1=21\\ P(-2)=2\cdot(-2)^3+3\cdot(-2)-1=-23\end{cases}$$

2. Efectúa la siguiente operación de polinomios.

$$(-2x^3+x^2+x-1)(x-2)+(3x+1)(x+3)$$

$$\left(-2x^3+x^2+x-1\right)(x-2)+(3x+1)(x+3)=-2x^4+5x^3+2x^2+7x+5$$

3. Dados los siguientes polinomios, calcula.

$$P(x)=x^3-3x^2+1 \qquad Q(x)=3x^2-2x-2$$

a) $P(1)+P(-1)$
b) $P(0)-2Q(0)$
c) $P(3)+Q(2)$
d) $P(-2)\cdot Q(-2)$
e) $P(-1)-3Q(-1)$
f) $Q(-4)+4Q(1)$

a) $P(1)+P(-1)=-1-3=-4$

b) $P(0)-2Q(0)=1+4=5$

c) $P(3)+Q(2)=1+6=7$

d) $P(-2)\cdot Q(-2)=(-19)\cdot 14=-266$

e) $P(-1)-3Q(-1)=-3-9=-12$

f) $Q(-4)+4Q(1)=54-4=50$

4. Realiza estas divisiones de polinomios.

a) $(10x^4-3x^2+1):(x^2-1)$
b) $(6x^3+5x):(2x^2)$

a) $\left(10x^4-3x^2+1\right):\left(x^2-1\right)=10x^2+7$ y el resto es 8.

b) $\left(6x^3+5x\right):\left(2x^2\right)=3xy$ y el resto es $5x$.

5. Divide estos polinomios utilizando la regla de Ruffini.

a) $(x^3+3):(x+1)$
b) $(4x^5-12x^3-20x+2):(x+2)$

a) $\left(x^3+3\right):(x+1)=x^2-x+1$ y el resto es 2.

	1	0	0	3
–1		–1	1	–1
	1	–1	1	2

b) $\left(4x^5-12x^3-20x+2\right):(x+2)=4x^4-8x^3+4x^2-8x-4$ y el resto es 10.

	4	0	–12	0	–20	2
–2		–8	16	–8	16	8
	4	–8	4	–8	–4	10

6. **Comprueba si los siguientes números son raíces del polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 8$.**

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = -1$ d) $x = -4$

a) $P(1) = 1^4 + 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 8 = 0$

Por tanto, $x = 1$ es una raíz del polinomio.

b) $P(2) = 2^4 + 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 8 = 36$

c) $P(-1) = (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 8 = -18$

d) $P(-4) = (-4)^4 + 3 \cdot (-4)^3 - 2 \cdot (-4)^2 + 6 \cdot (-4) - 8 = 0$

Por tanto, $x = -4$ es una raíz del polinomio.

7. **Calcula las raíces enteras de los polinomios que aparecen a continuación.**

a) $x^5 + 4x^4 + x^3 - 6x^2$ b) $x^3 - 5x^2 - 29x + 105$

a) $x^5 + 4x^4 + x^3 - 6x^2 = x^2(x^3 + 4x^2 + x - 6) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$

	1	4	1	–6
1		1	5	6
	1	5	6	0
–2		–2	–6	
	1	3	0	
–3		–3		
	1	0		

Las raíces enteras son {–3, –2, 0, 1}.

b) Se aplica Ruffini directamente:

	1	–5	–29	105
7		7	14	–105
	1	2	–15	0
–5		–5	15	
	1	–3	0	
3		3		
	1	0		

Las raíces enteras son {–5, 3, 7}.

8. **Factoriza estos polinomios.**

a) $2x^4 - 2x^2$ b) $x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 4x$

a) $2x^4 - 2x^2 = 2x^2(x-1)(x+1)$

b) $x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 4x = x(x-2)^2(x^2+1)$

9. **Encuentra las raíces enteras de estos polinomios.**

a) $2x^4 - 13x^3 + 27x^2 - 18x$ b) $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3$

a) $2x^4-13x^3+27x^2-18x=x\left(2x^3-13x^2+27x-18\right)\rightarrow\begin{cases}x=0\\2x^3-13x^2+27x-18=0\end{cases}$

	2	−13	27	−18
2		4	−18	18
	2	−9	9	0
3		6	−9	
	2	−3	0	

La última raíz no es entera: $2x-3=0\rightarrow x=\frac{3}{2}$ Entonces, las raíces enteras son {0, 2, 3}.

b) Se aplica Ruffini directamente:

	3	−7	−7	3
−1		−3	10	−3
	3	−10	3	0
3		9	−3	
	3	−1	0	

La última raíz no es entera: $3x-1=0\rightarrow x=\frac{1}{3}$ Entonces, las raíces enteras son {−1, 3}.

10. **Simplifica estas fracciones algebraicas.**

a) $\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ b) $\frac{2x^2+2x-12}{4x+12}$

a) $\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}=\frac{x(x+1)}{(x+1)(x+1)}=\frac{x}{x+1}$ b) $\frac{2x^2+2x-12}{4x+12}=\frac{2(x-2)(x+3)}{4(x+3)}=\frac{x-2}{2}$

11. **Reduce a común denominador estas fracciones.**

$\frac{5}{x^2+2x-3}$ $\frac{3x}{x^2-1}$ $\frac{x-1}{x^2+2x+1}$

m.c.m. $(x^2+2x-3,\ x^2-1,\ x^2+2x+1)=(x+1)^2(x+3)(x-1)$

$\frac{5}{x^2+2x-3}=\frac{5(x+1)^2}{(x+1)^2(x+3)(x-1)}$ $\frac{3x}{x^2-1}=\frac{3x(x+1)(x+3)}{(x+1)^2(x+3)(x-1)}$ $\frac{x-1}{x^2+2x+1}=\frac{(x-1)^2(x+3)}{(x+1)^2(x+3)(x-1)}$

12. **Opera y simplifica.**

$\frac{3}{3x^2+6x}+\frac{1}{x}-\frac{2-x}{6x+12}$

$\frac{3}{3x^2+6x}+\frac{1}{x}-\frac{2-x}{6x+12}=\frac{x^2+4x+18}{6x(x+2)}$

13. **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $\frac{5}{x^2+2x-3}\cdot\frac{x^2-1}{3x}$ b) $\frac{x-1}{x^2+2x+1}:\frac{x^2-3x+2}{x+1}$

a) $\frac{5}{x^2+2x-3}\cdot\frac{x^2-1}{3x}=\frac{5(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-1)\cdot 3x}=\frac{5x+5}{3x^2+9x}$

b) $\frac{x-1}{x^2+2x+1}:\frac{x^2-3x+2}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)(x-2)}=\frac{1}{(x+1)(x-2)}$

14. Clasifica y resuelve estas ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 - 10x + 21 = 0$

b) $3x^2 + 20x + 12 = 0$

c) $3x^2 + 9x - 4 = 0$

d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

e) $3x^2 - 18x = 0$

f) $4x^2 - 36 = 0$

g) $-8x^2 + 40 = 0$

h) $-5x^2 + 30x = 0$

a) Ecuación completa:

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2 \cdot 1}$$

$$\rightarrow x = \frac{10 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

b) Ecuación completa:

$$3x^2 + 20x + 12 = 0 \rightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 3}$$

$$\rightarrow x = \frac{-20 \pm 16}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{3} \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

c) Ecuación completa:

$$3x^2 + 9x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3}$$

$$\rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{129}}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-9 + \sqrt{129}}{6} = 0{,}39 \\ x_2 = \dfrac{-9 - \sqrt{129}}{6} = -3{,}39 \end{cases}$$

d) Ecuación completa:

$$4x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4}$$

$$\rightarrow x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

e) Ecuación incompleta:

$3x^2 - 18x = 0 \rightarrow 3x(x - 6) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 = 6$

f) Ecuación incompleta:

$4x^2 - 36 = 0 \rightarrow x = \sqrt{9} \rightarrow x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$

g) Ecuación incompleta:

$-8x^2 + 40 = 0 \rightarrow x = \sqrt{5}$

h) Ecuación incompleta:

$-5x^2 + 30x = 0 \rightarrow 5x(-x + 6) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 = 6$

15. Resuelve estas ecuaciones.

a) $x^2 + 2x = 15$

b) $2x^2 = 7x + 2$

c) $3x^2 - 3 = 20 - 2(x - 5)$

d) $8x^2 + (2 - x)(5x + 1) = 15x + (3 + x)(x - 1) - 3$

a) $x^2 + 2x = 15 \rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \qquad x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \dfrac{-2 \pm 8}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

b) $2x^2 = 7x + 2 \rightarrow 2x^2 - 7x - 2 = 0 \qquad x = \dfrac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} \rightarrow x = \dfrac{7 \pm \sqrt{65}}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{7 - \sqrt{65}}{4} = -0{,}27 \\ x_2 = \dfrac{7 + \sqrt{65}}{4} = 3{,}77 \end{cases}$

c) $3x^2-3=20-2(x-5)\to 3x^2+2x-33=0$ $\qquad x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 3\cdot(-33)}}{2\cdot 3}\to x=\dfrac{-2\pm 20}{6}\to\begin{cases}x_1=-\dfrac{11}{3}\\ x_2=3\end{cases}$

d) $8x^2+(2-x)(5x+1)=15x+(3+x)(x-1)-3\to 2x^2-8x+8=0$ $\qquad x=\dfrac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 2\cdot 8}}{2\cdot 2}\to x=\dfrac{8\pm 0}{4}\to x=2$

16. Determina el número de soluciones que tiene cada ecuación sin resolverla.

a) $-2x^2+5x-8=0$ d) $2x^2-x-3=0$
b) $9x^2+30x+25=0$ e) $-x^2+9x-2=0$
c) $-5x^2+9x-6=0$ f) $0{,}34x^2+0{,}5x-1=0$

Calculamos el discriminante:

a) $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\cdot(-2)\cdot(-8)=-39<0$. No tiene solución real.
b) $\Delta=b^2-4ac=30^2-4\cdot 9\cdot 25=0$. Tiene una solución.
c) $\Delta=b^2-4ac=9^2-4\cdot(-5)\cdot(-6)=-39<0$. No tiene solución real.
d) $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-3)=25>0$. Tiene dos soluciones.
e) $\Delta=b^2-4ac=9^2-4\cdot(-1)\cdot(-2)=73>0$. Tiene dos soluciones.
f) $\Delta=b^2-4ac=0{,}5^2-4\cdot 0{,}34\cdot(-1)=1{,}61>0$. Tiene dos soluciones.

17. Resuelve las ecuaciones bicuadradas que aparecen a continuación.

a) $x^4+5x^2-36=0$
b) $x^4-x^2+2=16x^2-14$
c) $11(x^4+1)-7=25x^2(1-x^2)$

a) $x^4+5x^2-36=0\to z^2+5z-36=0$ $\qquad z=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot(-36)}}{2\cdot 1}\to z=\dfrac{-5\pm 13}{2}\to\begin{cases}z_1=-9\\ z_2=4\end{cases}$

$z_1=-9\to x^2=-9\to$ No tiene solución real. $\qquad z_2=4\to x_1=-2\quad x_2=2$

b) $x^4-x^2+2=16x^2-14\to x^4-17x^2+16=0\to z^2-17z+16=0$

$$z=\frac{17\pm\sqrt{(-17)^2-4\cdot 1\cdot 16}}{2\cdot 1}\to z=\frac{17\pm 15}{2}\to\begin{cases}z_1=1\\ z_2=16\end{cases}$$

$z_1=1\to x_1=-1\quad x_2=1$ $\qquad z_2=16\to x_3=-4\quad x_4=4$

c) $11(x^4+1)-7=25x^2(1-x^2)\to 36x^4-25x^2+4=0\to 36z^2-25z+4=0$

$$z=\frac{25\pm\sqrt{(-25)^2-4\cdot 4\cdot 36}}{2\cdot 36}\to z=\frac{25\pm 7}{72}\to\begin{cases}z_1=\dfrac{1}{4}\\ z_2=\dfrac{4}{9}\end{cases}$$

$z_1=\dfrac{1}{4}\to x_1=-\dfrac{1}{2}\quad x_2=\dfrac{1}{2}$ $\qquad z_2=\dfrac{4}{9}\to x_3=-\dfrac{2}{3}\quad x_4=\dfrac{2}{3}$

18. Resuelve estas ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x+1}{x-1}-1=\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ b) $\dfrac{2x^4+4}{x^4}=\dfrac{x^2-3}{x^2}+2$

a) $\frac{x+1}{x-1}-1=\frac{1}{x}\to\frac{x(x+1)}{x(x-1)}-\frac{x(x-1)}{x(x-1)}=\frac{x-1}{x(x-1)}\to x=-1$

b) $\frac{2x^4+4}{x^4}=\frac{x^2-3}{x^2}+2\to\frac{2x^4+4}{x^4}=\frac{x^2(x^2-3)}{x^4}+\frac{2x^4}{x^4}\to x^4-3x^2-4=0$

$x^4-3x^2-4=0\to z^2-3z-4=0$

$z=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}\to z=\frac{3\pm5}{2}\to\begin{cases}z_1=-1\\z_2=4\end{cases}$

$z_1=-1\to x^2=-1\to$ No tiene solución real.

$z_2=4\to x_1=-2\quad x_2=2$

19. **Resuelve estas ecuaciones con radicales.**

a) $x-41=2\sqrt{x+1}$

b) $1+2\sqrt{x+1}=3\sqrt{4x-3}-4$

a) $x-41=2\sqrt{x+1}\to x^2-82x+1681=4(x+1)\to x^2-86x+1677=0$

$x=\frac{86\pm\sqrt{(-86)^2-4\cdot1\cdot1677}}{2\cdot1}\to x=\frac{86\pm\sqrt{688}}{2}\to\begin{cases}x_1=43-2\sqrt{43}\\x_2=43+2\sqrt{43}\end{cases}$

Tras la comprobación, se obtiene que $x_1=43+2\sqrt{43}$ es la única solución válida.

b) $1+2\sqrt{x+1}=3\sqrt{4x-3}-4\to4(x+1)=36x-30\sqrt{4x-3}-2\to$

$\to900(4x-3)=1024x^2-384x+36\to64x^2-249x+171=0$

$x=\frac{249\pm\sqrt{(-249)^2-4\cdot64\cdot171}}{2\cdot64}\to x=\frac{249\pm135}{128}\to\begin{cases}x_1=\frac{57}{64}\\x_2=3\end{cases}$

Tras la comprobación, se obtiene que $x_2=3$ es la única solución válida.

20. **Resuelve las siguientes ecuaciones que se encuentran en forma factorizada.**

a) $2(x-3)(x+5)(x-1)=0$

b) $x^2(x+4)(x-4)(x-9)=0$

c) $(3x-1)(2x+3)(x+2)=0$

d) $3x(x+5)^3(3x-1)=0$

e) $(x^2+x-2)(x^2-9)=0$

a) $x_1=-5\quad x_2=1\quad x_3=3$

b) $x_1=-4\quad x_2=0\quad x_3=0\quad x_4=4\quad x_5=9$

c) $x_1=-2\quad x_2=-\frac{3}{2}\quad x_3=\frac{1}{3}$

d) $x_1=-5\quad x_2=-5\quad x_3=-5\quad x_4=0\quad x_5=\frac{1}{3}$

e) $x_1=-3\quad x_2=-2\quad x_3=1\quad x_4=3$

21. **Factoriza las ecuaciones y resuélvelas.**

a) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$
b) $x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 9x = 0$
c) $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 16 = 0$

a) $(x-1)(x-2)(x-3)(x+4) = 0 \rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = -4$

b) $x(x-3)^2(x^2+1) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 3$

c) $(x+4)^2(x^2+1) = 0 \rightarrow x = -4$

22. **Escribe una ecuación que tenga como soluciones 2, 3 y 7. ¿Cuál es el mínimo grado que puede tener?**

Respuesta abierta, por ejemplo:

$(x-2)(x-3)(x-7) = 0 \rightarrow$ El mínimo grado que puede tener es 3.

23. **Resuelve de estas ecuaciones logarítmicas.**

a) $\log(x-2) + \log(2x-1) = \log(3x-4)$
b) $\log(x+3) = \log(7x-27) - \log(x-4)$

a) $\log(x-2) + \log(2x-1) = \log(3x-4) \rightarrow (x-2)(2x-1) = 3x-4 \rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 3$

b) $\log(x+3) = \log(7x-27) - \log(x-4) \rightarrow (x+3)(x-4) = 7x-27 \rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \rightarrow x_1 = 5 \quad x_2 = 3$

24. **Soluciona las siguientes ecuaciones.**

a) $\log_3(2x-1) = 1$
b) $\log_2(3x-2) = 2$
c) $\log_x 2 + \log_x 5 = 1$
d) $\log_x 12 + \log_x 18 = 3$

a) $\log_3(2x-1) = 1 \rightarrow 3 = 2x-1 \rightarrow x = 2$

b) $\log_2(3x-2) = 2 \rightarrow 4 = 3x-2 \rightarrow x = 2$

c) $\log_x 2 + \log_x 5 = 1 \rightarrow \log_x 10 = 1 \rightarrow x = 10$

d) $\log_x 12 + \log_x 18 = 3 \rightarrow \log_x 216 = 3 \rightarrow x^3 = 216 \rightarrow x = 6$

25. **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $5^{3x+1} = 625$
b) $2^{\frac{3x+1}{4}} = \frac{1}{32}$
c) $3^{x^2-7x+12} = 729$
d) $5^{\frac{x-1}{x+2}} = 25$
e) $4^{x^3-7x^2+12x+3} = 64$
f) $4^{x-6} = 32$
g) $3^{\frac{x-2}{3}} = \frac{1}{3}$
h) $6^{2x^2+\frac{3}{5}} = 6^{\frac{23x}{10}}$
i) $17^{\frac{x-3}{3x-2}} = 289$
j) $3^{x^4+13x^2+4} = 3^{6x^3-12x}$

a) $5^{3x+1}=625\rightarrow 3x+1=4\rightarrow x=1$

b) $2^{\frac{3x+1}{4}}=\frac{1}{32}\rightarrow\frac{3x+1}{4}=-5\rightarrow x=-7$

c) $3^{x^2-7x+12}=729\rightarrow x^2-7x+12=6\rightarrow x^2-7x+6=0\rightarrow x_1=-6\quad x_2=-1$

d) $5^{\frac{x-1}{x+2}}=25\rightarrow\frac{x-1}{x+2}=2\rightarrow x=-5$

e) $4^{x^3-7x^2+12x+3}=64\rightarrow x^3-7x^2+12x+3=3\rightarrow x\left(x^2-7x+12\right)=0\rightarrow x_1=0\quad x_2=3\quad x_3=4$

f) $4^{x-6}=32\rightarrow 2(x-6)=5\rightarrow x=\frac{17}{2}$

g) $3^{\frac{x-2}{3}}=\frac{1}{3}\rightarrow\frac{x-2}{3}=-1\rightarrow x=-1$

h) $6^{2x^2+\frac{3}{5}}=6^{\frac{23}{10}}\rightarrow 2x^2+\frac{3}{5}=\frac{23}{10}\rightarrow 20x^2+6=23\rightarrow 20x^2=17\rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{17}{20}}$

i) $17^{\frac{x-3}{3x-2}}=289\rightarrow\frac{x-3}{3x-2}=2\rightarrow 5x=1\rightarrow x=\frac{1}{5}$

j) $3^{x^4+13x^2+4}=3^{6x^3-12x}\rightarrow x^4-6x^3+13x^2+12x+4=0\rightarrow\begin{cases}x_1=-\sqrt{2}\\x_2=\sqrt{2}\end{cases}$

26. Halla el valor de *x* en las siguientes ecuaciones.

a) $4^x=2^{x-6}$

b) $3^{\frac{7x-3}{4}}=9^{x-2}$

c) $49^x=7^{3-x^2}$

d) $5^{x^4+4}=25^{\frac{5x^2}{2}}$

a) $4^x=2^{x-6}\rightarrow 2x=x-6\rightarrow x=-6$

b) $3^{\frac{7x-3}{4}}=9^{x-2}\rightarrow\frac{7x-3}{4}=2(x-2)\rightarrow x=12$

c) $49^x=7^{3-x^2}\rightarrow 2x=3-x^2\rightarrow x^2+2x-3=0\rightarrow\begin{cases}x_1=-4\\x_2=1\end{cases}$

d) $5^{x^4+4}=25^{\frac{5x^2}{2}}\rightarrow x^4+4=5x^2\rightarrow\begin{cases}x_1=2\text{ y }x_2=-2\\x_3=1\text{ y }x_4=-1\end{cases}$

27. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $3^{2x-1}-2^x=0$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}+3^{2-x}=0$

c) $5^{3x+2}=3^{5x+2}$

d) $\sqrt[3]{3^{x^2}}=9^{x-1}$

a) $3^{2x-1}=2^x\rightarrow(2x-1)\log 3=x\log 2\rightarrow x(2\log 3-\log 2)=\log 3\rightarrow x=\frac{\log 3}{2\log 3-\log 2}\approx 0{,}7304$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}+3^{2-x}=0\rightarrow(3-x)\log\left(\frac{1}{2}\right)=(2-x)\log(-3)$

No existen logaritmos de números mayores o iguales que 0. La ecuación no tiene solución real.

c) $5^{3x+2}=3^{5x+2}\rightarrow(3x+2)\log 5=(5x+2)\log 3\rightarrow x(3\log 5-5\log 3)=2\log 3-2\log 5\rightarrow x=\frac{2\log 3-2\log 5}{3\log 5-5\log 3}\approx 1{,}5369$

d) $\sqrt[3]{3^{x^2}}=9^{x-1}\rightarrow 3^{\frac{x^2}{3}}=3^{2(x-1)}\rightarrow x^2-6x+6=0\rightarrow x_1=3+\sqrt{3}\quad x_2=3-\sqrt{3}$

28. **Resuelve las siguientes inecuaciones.**

a) $3x - 5 < 4x - 7$

b) $2x - 30 \leq 5x + 3$

c) $5 - (2 - 3x) \geq 2(3x - 5) + x$

d) $2(2 - x) > x - 5$

a) $3x-5<4x-7 \rightarrow x>2 \rightarrow 2<x<+\infty \rightarrow (2,+\infty)$

b) $2x-30 \leq 5x+3 \rightarrow x \geq -11 \rightarrow -11 \leq x<+\infty \rightarrow [-11,+\infty)$

c) $5-(2-3x) \geq 2(3x-5)+x \rightarrow x \leq \frac{13}{4} \rightarrow -\infty<x \leq \frac{13}{4} \rightarrow \left(-\infty, \frac{13}{4}\right]$

d) $2(2-x)>x-5 \rightarrow x<3 \rightarrow -\infty<x<3 \rightarrow (-\infty,3)$

29. **Resuelve las inecuaciones que aparecen a continuación.**

a) $1 - \frac{3 - 2x}{3} \leq \frac{x}{4}$

b) $\frac{2x - 5}{3} - \frac{1 - 3x}{6} > 1 - \frac{x}{4}$

a) $1-\frac{3-2x}{3} \leq \frac{x}{4} \rightarrow x \leq 0 \rightarrow -\infty<x \leq 0 \rightarrow (-\infty,0]$

b) $\frac{2x-5}{3}-\frac{1-3x}{6}>1-\frac{x}{4} \rightarrow x>2 \rightarrow 2<x<+\infty \rightarrow (2,+\infty)$

30. **Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado con una incógnita.**

a) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$

b) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

c) $x^2 - 9x > 0$

d) $x^2 - 9 < 0$

e) $x^2 + 2 \leq 0$

f) $(x - 3)(x + 4) \geq 0$

g) $(x + 3)x < 4$

h) $x^2 - 30 > x$

i) $x^2 + x + 3 < 0$

j) $4x^2 - 4x + 1 < 0$

a) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = 0 \qquad x = 1{,}5 \qquad x = 3$

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 > 0 \rightarrow (-\infty, 1)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 1{,}5 \rightarrow 1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 + 2 < 0 \rightarrow (1, 2)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 3 \rightarrow 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 > 0 \rightarrow (2, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son también de la inecuación.

Por tanto, la solución es $[1, 2]$.

b) Se deduce del apartado anterior que las soluciones de la inecuación son:

$(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

c) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 9x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 9 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -1 \qquad x = 1 \qquad x = 10$

Si $x = -1 \rightarrow (-1)^2 - 9 \cdot (-1) > 0 \rightarrow (-\infty, 0)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 1 \rightarrow 1^2 - 9 \cdot 1 < 0 \rightarrow (0, 9)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 9 \cdot 10 > 0 \rightarrow (9, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, 0) \cup (9, +\infty)$.

d) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 9 > 0 \rightarrow (-\infty, -3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 9 < 0 \rightarrow (-3, 3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 9 > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-3, 3)$.

e) El primer miembro de la inecuación siempre será positivo.
Por tanto, la inecuación no tiene solución.

f) Resolvemos la ecuación: $(x - 3)(x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10 - 3)(-10 + 4) > 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow (0 - 3)(0 + 4) < 0 \rightarrow (-4, 3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow (10 - 3)(10 + 4) > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son también de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$.

g) Resolvemos la ecuación: $(x + 3)x = 4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10 + 3) \cdot (-10) - 4 > 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow (0 - 3) \cdot 0 - 4 < 0 \rightarrow (-4, 1)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow (10 - 3) \cdot 10 + 4 > 0 \rightarrow (1, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-4, 1)$.

h) Resolvemos la ecuación: $x^2 - x - 30 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 10 - 30 > 0 \rightarrow (-\infty, -5)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 0 - 30 < 0 \rightarrow (-5, 6)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 10 - 30 > 0 \rightarrow (6, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-5, 6)$.

i) El primer miembro de la inecuación es siempre mayor o igual que cero.
Por tanto, la inecuación no tiene solución.

j) El primer miembro de la inecuación es siempre mayor o igual que cero.
Por tanto, la inecuación no tiene solución.

31. Resuelve estas inecuaciones de grado superior, siguiendo el método utilizado para las inecuaciones de segundo grado.

a) $(x - 2)(x - 3)(x^2 - 2) \geq 0$

b) $x(x - 4)(x + 1)(x^3 - 1) \leq 0$

c) $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 < 0$

d) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 9x - 9 > 0$

a) Resolvemos la ecuación: $(x-2)(x-3)(x^2-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2} \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=-10 \qquad x=0 \qquad x=1{,}5 \qquad x=2{,}5 \qquad x=10$

Si $x=-10 \rightarrow (-10-2)(-10-3)((-10)^2-2)>0 \rightarrow \left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$ es solución

Si $x=0 \rightarrow (0-2)(0-3)(0^2-2)<0 \rightarrow \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ no es solución.

Si $x=1{,}5 \rightarrow (1{,}5-2)(1{,}5-3)(1{,}5^2-2)>0 \rightarrow \left(\sqrt{2}, 2\right)$ es solución.

Si $x=2{,}5 \rightarrow (2{,}5-2)(2{,}5-3)(2{,}5^2-2)<0 \rightarrow (2, 3)$ no es solución.

Si $x=10 \rightarrow (10-2)(10-3)(10^2-2)>0 \rightarrow (3, +\infty)$ es solución.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, 2\right] \cup [3, +\infty)$.

b) Resolvemos la ecuación: $x(x-4)(x+1)(x^3-1)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 4 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=-10 \qquad x=-0{,}5 \qquad x=0{,}5 \qquad x=2 \qquad x=10$

Si $x=-10 \rightarrow -10\cdot(-10-4)(-10+1)((-10)^3-1)>0 \rightarrow (-\infty, -1)$ no es solución.

Si $x=-0{,}5 \rightarrow -0{,}5\cdot(-0{,}5-4)(-0{,}5+1)((-0{,}5)^3-1)<0 \rightarrow (-1, 0)$ es solución.

Si $x=0{,}5 \rightarrow 0{,}5\cdot(0{,}5-4)(0{,}5+1)(0{,}5^3-1)>0 \rightarrow (0, 1)$ no es solución.

Si $x=2 \rightarrow 2\cdot(2-4)(2+1)(2^3-1)<0 \rightarrow (1, 4)$ es solución.

Si $x=10 \rightarrow 10\cdot(10-4)(10+1)(10^3-1)>0 \rightarrow (4, +\infty)$ no es solución.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $[-1, 0] \cup [1, 4]$.

c) Resolvemos la ecuación: $x^3+2x^2+3x-6=0 \rightarrow x=1$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=0 \qquad x=10$

Si $x=0 \rightarrow 0^3+2\cdot 0^2+3\cdot 0-6<0 \rightarrow (-\infty, 1)$ es solución.

Si $x=10 \rightarrow 10^3+2\cdot 10^2+3\cdot 10-6>0 \rightarrow (1, +\infty)$ no es solución.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, 1)$.

d) Resolvemos la ecuación: $x^4-5x^3+4x^2+9x-9=0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x_4 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=-10 \qquad x=0 \qquad x=2 \qquad x=2{,}5 \qquad x=10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^4 - 5 \cdot (-10)^3 + 4 \cdot (-10)^2 + 9 \cdot (-10) - 9 > 0$

$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$ es solución.

Si $x = 0 \rightarrow 0^4 - 5 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 9 < 0 \rightarrow \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, 1\right)$ no es solución.

Si $x = 2 \rightarrow 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 9 > 0 \rightarrow \left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ es solución.

Si $x = 2{,}5 \rightarrow 2{,}5^4 - 5 \cdot 2{,}5^3 + 4 \cdot 2{,}5^2 + 9 \cdot 2{,}5 - 9 < 0 \rightarrow \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, 3\right)$ no es solución.

Si $x = 10 \rightarrow 10^4 - 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 - 9 > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ es solución.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \cup (3, +\infty)$.

SABER HACER

32. Determina el valor de *k* en cada uno de los siguientes casos.

a) $3x^2 - 6x + k = 0$ tenga 2 soluciones.

b) $3x^2 - 6x + k = 0$ tenga 1 solución.

c) $3x^2 - 6x + k = 0$ no tenga solución.

d) $x^2 + kx + 25 = 0$ tenga 2 soluciones.

e) $x^2 + kx + 25 = 0$ tenga 1 solución.

f) $x^2 + kx + 25 = 0$ no tenga solución.

a) $(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot k > 0 \rightarrow 36 - 12k > 0 \rightarrow k < 3 \rightarrow k \in (-\infty, 3)$

b) $(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot k = 0 \rightarrow 36 - 12k = 0 \rightarrow k = 3$

c) $(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot k < 0 \rightarrow 36 - 12k < 0 \rightarrow k > 3 \rightarrow k \in (3, +\infty)$

d) $k^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1 > 0 \rightarrow k^2 - 100 > 0 \rightarrow k \in (-\infty, -10) \cup (10, +\infty)$

e) $k^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1 = 0 \rightarrow k^2 - 100 = 0 \rightarrow k_1 = -10 \quad k_2 = 10$

f) $k^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1 < 0 \rightarrow k^2 - 100 < 0 \rightarrow k \in (-10, 10)$

33. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

b) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

d) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$

e) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

f) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0 \rightarrow z^2 - 9z + 8 = 0$

$$z = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} \rightarrow z = \frac{9 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 8 \end{cases}$$

$z_1 = 1 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x_1 = 1$

$z_2 = 8 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x_2 = 2$

b) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \rightarrow z^2 + 7z - 8 = 0$

$$z = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \rightarrow z = \frac{-7 \pm 9}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = -8 \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

$z_1 = -8 \rightarrow x^3 = -8 \rightarrow x_1 = -2$

$z_2 = 1 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x_2 = 1$

c) $x^6-7x^3-8=0 \rightarrow z^2-7z-8=0$

$$z=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot(-8)}}{2\cdot1} \rightarrow z=\frac{7\pm9}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1=-1 \\ z_2=8 \end{cases}$$

$z_1=-1 \rightarrow x^3=-1 \rightarrow x_1=-1$ $\qquad$ $z_2=8 \rightarrow x^3=8 \rightarrow x_2=2$

d) $x^6+9x^3+8=0 \rightarrow z^2+9z+8=0$

$$z=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1} \rightarrow z=\frac{-9\pm7}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1=-8 \\ z_2=-1 \end{cases}$$

$z_1=-8 \rightarrow x^3=-8 \rightarrow x_1=-2$ $\qquad$ $z_2=-1 \rightarrow x^3=-1 \rightarrow x_2=-1$

e) $x^8-15x^4-16=0 \rightarrow z^2-15z-16=0$

$$z=\frac{15\pm\sqrt{(-15)^2-4\cdot1\cdot(-16)}}{2\cdot1} \rightarrow z=\frac{15\pm17}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1=-1 \\ z_2=16 \end{cases}$$

$z_1=-1 \rightarrow x^4=-1 \rightarrow$ No tiene solución real. $\qquad$ $z_2=16 \rightarrow x^4=16 \rightarrow x_1=-2 \quad x_2=2$

f) $x^8-17x^4+16=0 \rightarrow z^2-17z+16=0$

$$z=\frac{17\pm\sqrt{(-17)^2-4\cdot1\cdot16}}{2\cdot1} \rightarrow z=\frac{17\pm15}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1=1 \\ z_2=16 \end{cases}$$

$z_1=1 \rightarrow x^4=1 \rightarrow x_1=-1 \quad x_2=1$ $\qquad$ $z_2=16 \rightarrow x^4=16 \rightarrow x_3=-2 \quad x_4=2$

34. Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{2x^3-x^2-2x+25}{x^2-1}=2x$ $\qquad$ b) $\dfrac{x^3+x^2+7x+2}{x^2+2x+4}=x-2$ $\qquad$ c) $\dfrac{x^3+5x^2-5x-21}{x^2+x-6}=x+3$

a) $\dfrac{2x^3-x^2-2x+25}{x^2-1}=2x \rightarrow x^2-25=0 \rightarrow x_1=-5 \quad x_2=5$

b) $\dfrac{x^3+x^2+7x+2}{x^2+2x+4}=x-2 \rightarrow x^2+7x+10=0 \rightarrow x_1=-2 \quad x_2=-5$

c) $\dfrac{x^3+5x^2-5x-21}{x^2+x-6}=x+3 \rightarrow x^2-2x-3=0 \rightarrow x_1=-1 \quad x_2=3$

35. Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^2-x}{3x+1}=\dfrac{-x}{2x-1}$ $\qquad$ c) $\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{x-2}{x-4}$

b) $\dfrac{x}{x+6}=\dfrac{x-5}{x-3}$ $\qquad$ d) $\dfrac{x-3}{x-1}=\dfrac{x-4}{x-2}$

a) $\dfrac{x^2-x}{3x+1}=\dfrac{-x}{2x-1} \rightarrow 2x^3+2x=0 \rightarrow x=0$

b) $\dfrac{x}{x+6}=\dfrac{x-5}{x-3} \rightarrow 4x-30=0 \rightarrow x=\dfrac{15}{2}$

c) $\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{x-2}{x-4} \rightarrow 2=0 \rightarrow$ No tiene solución.

d) $\dfrac{x-3}{x-1}=\dfrac{x-4}{x-2} \rightarrow \rightarrow 2=0 \rightarrow$ No tiene solución.

36. Resuelve estas ecuaciones.

a) $\sqrt{x^2-3}=1$

b) $x=\sqrt{x+6}$

c) $\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{x}{2}+6}$

d) $\sqrt{3x+19}=x+3$

a) $\sqrt{x^2-3}=1 \rightarrow x^2-4=0 \rightarrow x_1=-2 \quad x_2=2$

b) $x=\sqrt{x+6} \rightarrow x^2-x-6=0 \rightarrow x_1=-2 \quad x_2=3$

c) $\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{x}{2}+6} \rightarrow x^2-2x-24=0 \rightarrow x_1=-4 \quad x_2=6$

d) $\sqrt{3x+19}=x+3 \rightarrow x^2+3x-10=0 \rightarrow x_1=2 \quad x_2=-5$

Tras sustituir las soluciones obtenidas en su correspondiente ecuación, se verifica que todas son válidas.

37. Resuelve estas ecuaciones.

a) $\sqrt{2x+8}-\sqrt{x}=2$

b) $\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x-2}=3$

c) $\sqrt{2x}+\sqrt{4x-7}=x+1$

d) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^2+3x+9}=2x+1$

a) $\sqrt{2x+8}-\sqrt{x}=2 \rightarrow x^2-8x+16=0 \rightarrow x=4$

b) $\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x-2}=3 \rightarrow x^4-2x^3-23x^2-12x+216=0 \rightarrow x=3$

c) $\sqrt{2x}+\sqrt{4x-7}=x+1 \rightarrow x^4-8x^3-8x+64=0 \rightarrow x=2 \quad x=8$

d) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^2+3x+9}=2x+1 \rightarrow 9x^4-24x^3-90x^2-84x+45=0 \rightarrow x=5$

38. Resuelve estas ecuaciones.

a) $x^3-3x^2+2x=0$

b) $3x^5-13x^4+16x^3-4x^2=0$

c) $4x^5-12x^4+9x^3-2x^2=0$

d) $x^4-1=0$

a) $x^3-3x^2+2x=0 \rightarrow x(x-1)(x-2)=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=1 \quad x_3=2$

b) $3x^5-13x^4+16x^3-4x^2=0 \rightarrow x^2(3x-1)(x-2)^2=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=\frac{1}{3} \quad x_3=2$

c) $4x^5-12x^4+9x^3-2x^2=0 \rightarrow x^2(2x-1)^2(x-2)=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=\frac{1}{2} \quad x_3=2$

d) $x^4-1=0 \rightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1)=0 \rightarrow x_1=-1 \quad x_2=1$

39. Calcula el valor de *x* en los logaritmos que aparecen a continuación.

a) $\log_5 x=4$

b) $\log(x-1)=2$

c) $\log_3(7x-1)=3$

d) $\log(x^2+36)=2$

a) $\log_5 x=4 \rightarrow x=5^4=625$

b) $\log(x-1)=2 \rightarrow x-1=100 \rightarrow x=101$

c) $\log_3(7x-1)=3 \rightarrow 7x-1=27 \rightarrow x=4$

d) $\log(x^2+36)=2 \rightarrow x^2+36=100 \rightarrow x^2=64 \rightarrow x_1=8 \quad x_2=-8$

40. Calcula el valor de *x* en las expresiones que aparecen a continuación.

a) $\log_x 32=5$

b) $\log_x 0{,}1=-1$

c) $\log_{x^2} 64=3$

d) $\log_{(x-2)} 27=3$

a) $\log_x 32=5 \rightarrow x^5=2^5 \rightarrow x=2$

b) $\log_x 0{,}1=-1 \rightarrow x^{-1}=10^{-1} \rightarrow x=10$

c) $\log_{x^2} 64=3 \rightarrow x^6=2^6 \rightarrow x=2$

d) $\log_{(x-2)} 27=3 \rightarrow (x-2)^3=3^3 \rightarrow x-2=3 \rightarrow x=5$

41. **Resuelve la inecuación $\dfrac{x^2-2x+4}{x-4} \geq x$.**

$$\frac{x^2-2x+4}{x-4} \geq x \rightarrow \frac{2(x+2)}{x-4} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} 2(x+2)=0 \rightarrow x=-2 \\ x-4=0 \rightarrow x=4 \end{cases}$$

Se forman tres intervalos:

$x=-10 \in (-\infty,-2) \rightarrow \dfrac{2(-10+2)}{-10-4}=\dfrac{-16}{-14}=\dfrac{8}{7} \geq 0 \rightarrow$ Es intervalo solución.

$x=0 \in (-2,4) \rightarrow \dfrac{2(0+2)}{0-4}=\dfrac{4}{-4}=-1<0 \rightarrow$ No es intervalo solución.

$x=10 \in (4,+\infty) \rightarrow \dfrac{2(10+2)}{10-4}=\dfrac{24}{6}=4 \geq 0 \rightarrow$ Es intervalo solución.

A continuación se comprueba si los extremos de los intervalos son soluciones:

$x=-2 \rightarrow \dfrac{2(-2+2)}{-2-4}=\dfrac{0}{-6}=0 \geq 0 \rightarrow$ Es solución.

$x=4 \rightarrow \dfrac{2(4+2)}{4-4}=\dfrac{12}{0} \rightarrow$ No es solución.

Por tanto, la solución es $(-\infty,-2] \cup (4,+\infty)$.

ACTIVIDADES FINALES

42. **Escribe en cada caso un polinomio como se indica y halla su valor para $x=3$ y $x=-1$.**

a) De grado 4 y sin término independiente.
b) De grado 3 y sin términos de grado 2 ni 1.
c) De grado 2 y la suma de sus coeficientes sea 10.
d) Que sea un binomio de grado 3 con término independiente.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $P(x)=x^4+x \rightarrow \begin{cases} P(3)=3^4+3=84 \\ P(-1)=(-1)^4-1=0 \end{cases}$

b) $P(x)=4x^3+2 \rightarrow \begin{cases} P(3)=4\cdot 3^3+2=110 \\ P(-1)=4\cdot(-1)^3+2=-2 \end{cases}$

c) $P(x)=2x^2+5x+3 \rightarrow \begin{cases} P(3)=2\cdot 3^2+5\cdot 3+3=36 \\ P(-1)=2\cdot(-1)^2+5\cdot(-1)+3=0 \end{cases}$

d) $P(x)=x^3-1 \rightarrow \begin{cases} P(3)=3^3-1=26 \\ P(-1)=(-1)^3-1=-2 \end{cases}$

43. **Efectúa las siguientes operaciones de polinomios.**

a) $(3x^2-2x+5)+(x^3-5x^2+2x-1)-(x^4+1)$

b) $\left(-2x^3+\dfrac{5}{2}x-1\right)\cdot\left(x+\dfrac{2}{3}\right)$

c) $(5+3x^2)\left[\left(9-\dfrac{x^3}{3}\right)-\left(x^4+\dfrac{1}{5}x^2+5\right)\right]$

d) $(3x-2)\cdot(2x-3)-\left[\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}\right)\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)\right]$

a) $(3x^2-2x+5)+(x^3-5x^2+2x-1)-(x^4+1)=-x^4-2x^2+3$

b) $\left(-2x^3+\frac{5}{2}x-1\right)\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)=-2x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$

c) $(5+3x^2)\left[\left(9-\frac{x^3}{3}\right)-\left(x^4+\frac{1}{5}x^2+5\right)\right]=-3x^6-x^5-\frac{28}{5}x^4-\frac{5}{3}x^3+11x^2+20$

d) $(3x-2)\cdot(2x-3)-\left[\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\right]=6x^2-9x-4x+6-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^4}{3}+\frac{x^5}{6}+\frac{x^5}{4}-\frac{x^6}{8}=$

$=-\frac{x^6}{8}+\frac{5}{12}x^5-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}x^3+6x^2-13x+6$

44. Halla el valor numérico del polinomio para los siguientes valores de *x*.

$$P(x) = 6x^4 - 61x^3 + 185x^2 - 158x + 40$$

a) $x=-5$ c) $x=4$ e) $x=-\frac{1}{2}$ g) $x=-\frac{2}{3}$

b) $x=5$ d) $x=-4$ f) $x=\frac{1}{2}$ h) $x=\frac{2}{3}$

a) $P(-5)=6\cdot(-5)^4-61\cdot(-5)^3+185\cdot(-5)^2-158\cdot(-5)+40=16830$

b) $P(5)=6\cdot 5^4-61\cdot 5^3+185\cdot 5^2-158\cdot 5+40=0$

c) $P(4)=6\cdot 4^4-61\cdot 4^3+185\cdot 4^2-158\cdot 4+40=0$

d) $P(-4)=6\cdot(-4)^4-61\cdot(-4)^3+185\cdot(-4)^2-158\cdot(-4)+40=1264$

e) $P\left(-\frac{1}{2}\right)=6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4-61\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3+185\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-158\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+40=\frac{693}{4}$

f) $P\left(\frac{1}{2}\right)=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4-61\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+185\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-158\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+40=0$

g) $P\left(-\frac{2}{3}\right)=6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^4-61\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3+185\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-158\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+40=\frac{6664}{27}$

h) $P\left(\frac{2}{3}\right)=6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4-61\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+185\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-158\cdot\left(\frac{2}{3}\right)+40=0$

45. Realiza las siguientes divisiones de polinomios y di cuál es el polinomio cociente y el resto en cada caso.

a) $(x^5+x^4+x^3+x^2+1):(x^2-3)$
b) $(5x^2-3x+2):(2x-3)$
c) $(3x^6+5x^3-x+3):(x^3-2x+1)$
d) $(x^8-x^6+x^4-x^2+1):(x^3-x+1)$

a) $(x^5+x^4+x^3+x^2+1):(x^2-3)=x^3+x^2+4x+4$ con resto $-12x-11$

b) $(5x^2-3x+2):(2x-3)=\frac{5}{2}x+\frac{9}{4}$ con resto $\frac{35}{4}$

c) $(3x^6+5x^3-x+3):(x^3-2x+1)=3x^3+6x+2$ con resto $12x^2-3x+1$

d) $(x^8-x^6+x^4-x^2+1):(x^3-x+1)=x^5-x^2+x-1$ con resto x^2-2x+2

46. **Divide los siguientes polinomios utilizando la regla de Ruffini.**

a) $(2x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 11x^2 - 1) : (x - 1)$

b) $(4x^2 - x + 1) : (x + 1)$

c) $(3x^6 + 5x^3 - x + 3) : (x + 3)$

d) $(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) : (x - 2)$

a)

	2	3	7	−11	0	−1
1		2	5	12	1	1
	2	5	12	1	1	0

Cociente: $2x^4 + 5x^3 + 12x^2 + x + 1$ Resto: 0

b)

	4	−1	1
−1		−4	5
	4	−5	6

Cociente: $4x - 5$ Resto: 6

c)

	3	0	0	5	0	−1	3
−3		−9	27	−81	228	−684	2 055
	3	−9	27	−76	228	−685	2 058

Cociente: $3x^5 - 9x^4 + 27x^3 - 76x^2 + 228x - 685$ Resto: 2058

d)

	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1
2		2	4	6	12	26	52	102	204
	1	2	3	6	13	26	51	102	205

Cociente: $x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 26x^2 + 51x + 102$ Resto: 205

47. **Comprueba si los valores $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$ son raíces de estos polinomios.**

a) $x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x$

b) $x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 10$

c) $x^5 - 1$

d) $x^5 - x^4 - \frac{13}{4}x^3 + \frac{13}{4}x^2 - 3x + 3$

	$P(x)$	$P(-1)$	$P(0)$	$P(1)$	Raíces
a)	$x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x$	0	0	0	$x_1 = -1$ $x_2 = 1$ $x_3 = 0$
b)	$x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 10$	0	−10	−24	$x = -1$
c)	$x^5 - 1$	−2	−1	0	$x = 1$
d)	$x^5 - x^4 - \frac{13}{4}x^3 + \frac{13}{4}x^2 - 3x + 3$	$\frac{21}{2}$	3	0	$x = 1$

48. **Señala cuáles de los siguientes polinomios tienen entre sus raíces los valores $x = -2$ y $x = 1$.**

a) $4x^3 + 3x^2 - 9x + 2$

b) $x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 27x^2 - 18x$

c) $x^5 - 2x^4 - 22x^3 + 8x^2 + 117x + 90$

d) $x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 64x^2 - 27x - 90$

	$P(x)$	$P(-2)$	$P(1)$	Raíces
a)	$4x^3 + 3x^2 - 9x + 2$	0	0	$x = -2$ $x = 1$
b)	$x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 27x^2 - 18x$	120	0	$x = 1$
c)	$x^5 - 2x^4 - 22x^3 + 8x^2 - 117x + 90$	468	−43	Ninguna es raíz
d)	$x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 64x^2 - 27x - 90$	140	−64	Ninguna es raíz

49. **Comprueba si $M(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 4$ es divisible entre $x - 2$ y, en caso afirmativo, encuentra un polinomio $N(x)$ que permita escribir $M(x)$ de la forma $M(x) = (x - 2) \cdot N(x)$.**

Dividimos el polinomio entre $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 4 & -4\\ 2 & & 4 & -2 & 4\\ \hline & 2 & -1 & 2 & \boxed{0}\end{array}$$

El polinomio $N(x)$ es el cociente:

$N(x) = 2x^2 - x + 2$

50. **Determina las raíces de los siguientes polinomios.**

a) $(x - 3)(x + 5)(x - 2)$
b) $x(x - 2)^2(2x + 1)$
c) $(2x - 1)(3x + 2)(x + 3)^2$
d) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$
e) $x^3 + 8x^2 + 17x + 10$
f) $3x^3 + 7x^2 - 22x - 8$
g) $2x^4 - 11x^3 + 21x^2 - 16x + 4$
h) $x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x + 64$

a) $x_1 = -5 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 3$

b) $x_1 = -\dfrac{1}{2} \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 2$

c) $x_1 = -3 \qquad x_2 = -\dfrac{2}{3} \qquad x_3 = \dfrac{1}{2}$

f)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 7 & -22 & -8\\ 2 & & 6 & 26 & 8\\ \hline & 3 & 13 & 4 & \boxed{0}\\ -4 & & -12 & -4 & \\ \hline & 3 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$3x + 1 = 0 \qquad x = -\dfrac{1}{3}$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = -\dfrac{1}{3} \qquad x_3 = 2$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -6 & 8\\ 1 & & 1 & -2 & -8\\ \hline & 1 & -2 & -8 & \boxed{0}\\ -2 & & -2 & 8 & \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} & \\ 4 & & 4 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 4$

g)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -11 & 21 & -16 & 4\\ 1 & & 2 & -9 & 12 & -4\\ \hline & 2 & -9 & 12 & -4 & \boxed{0}\\ 2 & & 4 & -10 & 4 & \\ \hline & 2 & -5 & 2 & \boxed{0} & \\ 2 & & 4 & -2 & & \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$2x - 1 = 0 \qquad x = \dfrac{1}{2}$

$x_1 = \dfrac{1}{2} \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 2$

e)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 8 & 17 & 10\\ -1 & & -1 & -7 & -10\\ \hline & 1 & 7 & 10 & \boxed{0}\\ -2 & & -2 & -10 & \\ \hline & 1 & 5 & \boxed{0} & \\ -5 & & -5 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$x_1 = -5 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = -1$

h)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & -12 & 32 & 64\\ -2 & & -2 & 12 & 0 & -64\\ \hline & 1 & -6 & 0 & 32 & \boxed{0}\\ -2 & & -2 & 16 & -32 & \\ \hline & 1 & -8 & 16 & \boxed{0} & \\ 4 & & 4 & -16 & & \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} & & \\ 4 & & 4 & & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & & \end{array}$$

51. **Halla las raíces de estos polinomios.**

a) $(x+2)(x-5)(x-1)$

b) $x^2(x+2)(3x-1)$

c) $(x^2-4)(x^2-9)$

d) $6x^4+13x^3-18x^2-7x+6$

a) $x_1=-2 \qquad x_2=1 \qquad x_3=5$

b) $x_1=-2 \qquad x_2=0 \qquad x_3=\frac{1}{3}$

c) $x_1=-3 \qquad x_2=-2 \qquad x_3=2 \qquad x_4=3$

d) $x_1=-3 \qquad x_2=-\frac{2}{3} \qquad x_3=\frac{1}{2} \qquad x_4=1$

52. **Escribe un polinomio de segundo grado, $Q(x)$, que tenga las raíces 1 y 3, y tal que $Q(0)=6$.**

$Q(x)=c\cdot(x-1)(x-3)=cx^2-4cx+3c$

$Q(0)=3c=6 \rightarrow c=2 \rightarrow Q(x)=2x^2-8x+6$

53. **Obtén el valor de m para que el polinomio $P(x)=mx^3-6x^2-4x+8$ tenga 2 por raíz.**

$P(2)=8m-24-8+8=0 \rightarrow 8m-24=0 \rightarrow m=3$

54. **Halla q para que el polinomio x^3-2x^2+qx+5 sea divisible entre el polinomio $x+1$.**

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & q & 5 \\ -1 & & -1 & 3 & -3-q \\ \hline & 1 & -3 & 3+q & \boxed{2-q} \end{array} \rightarrow 2-q=0 \rightarrow q=2$$

55. **¿Qué valor debe tomar a para que el resto de dividir x^3+ax^2-3x-a entre $x-4$ sea 67?**

Dividimos el polinomio entre $x-4$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & -3 & -a \\ 4 & & 4 & 16+4a & 52+16a \\ \hline & 1 & 4+a & 13+4a & \boxed{52+15a} \end{array}$$

Igualamos el resto a 67:

$52+15a=67 \rightarrow a=1$

56. **Halla a y b para que el polinomio x^3+ax^2+bx-6 sea divisible entre $x-2$ y entre $x+3$.**

Dividimos el polinomio entre $x-2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & b & -6 \\ 2 & & 2 & 4+2a & 8+4a+2b \\ \hline & 1 & 2+a & 4+2a+b & \boxed{2+4a+2b} \end{array}$$

Dividimos el polinomio entre $x+3$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & b & -6 \\ -3 & & -3 & 9-3a & -27+9a-3b \\ \hline & 1 & -3+a & 9-3a+b & \boxed{-33+9a-3b} \end{array}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2+4a+2b=0 \\ -33+9a-3b=0 \end{array}\right\} \rightarrow a=2 \qquad b=-5$$

57. **Escribe dos polinomios de segundo grado cuyas raíces sean 2 y −3.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$P(x) = x^2 + x - 6 \qquad Q(x) = 2x^2 + 2x - 12$

58. **Escribe un polinomio de tercer grado cuya única raíz sea −1.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

59. **Encuentra un polinomio *P*(*x*) de segundo grado cuyas raíces sean 1 y −2, y tal que *P*(3) = 30.**

$P(x) = c \cdot (x-1)(x+2) = cx^2 + cx - 2c$

$P(3) = 9c + 3c - 2c = 30 \rightarrow c = 3 \rightarrow P(x) = 3x^2 + 3x - 6$

60. **Escribe un polinomio *Q*(*x*) de tercer grado cuyas raíces sean 1, −1 y −2, y tal que *Q*(0) = −6.**

$Q(x) = c \cdot (x-1)(x+1)(x+2) = cx^3 + 2cx^2 - cx - 2c$

$Q(0) = -2c = -6 \rightarrow c = 3 \rightarrow Q(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6$

61. **Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones algebraicas.**

a) $\frac{y^2}{x} + \frac{x^3}{y^2} - \frac{3}{x^2}$

b) $\frac{5}{x} + \frac{3x-2}{x+1}$

c) $\frac{3x^2}{x^2-4} + \frac{2}{x-2} + \frac{5x}{x+2}$

d) $\frac{1-x}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$

a) $\frac{y^2}{x} + \frac{x^3}{y^2} - \frac{3}{x^2} = \frac{xy^4}{x^2y^2} + \frac{x^5}{x^2y^2} - \frac{3y^2}{x^2y^2} = \frac{x^5 + xy^4 - 3y^2}{x^2y^2}$

b) $\frac{5}{x} + \frac{3x-2}{x+1} = \frac{5x+5}{x(x+1)} + \frac{3x^2-2x}{x(x+1)} = \frac{3x^2+3x+5}{x^2+x}$

c) $\frac{3x^2}{x^2-4} + \frac{2}{x-2} + \frac{5x}{x+2} = \frac{3x^2}{x^2-4} + \frac{2x+4}{x^2-4} + \frac{5x^2-10x}{x^2-4} = \frac{8x^2-8x+4}{x^2-4}$

d) $\frac{1-x}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{-x^2+2x-1}{x^2-1} + \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{4x-2}{x^2-1}$

62. **Realiza las operaciones y simplifica el resultado.**

a) $\frac{3x-1}{4x+12} - \frac{x+2}{4x-12}$

b) $\frac{2-x}{x^2-3x} - \frac{1}{4x-12} + \frac{5}{6x-18}$

c) $\frac{4}{a+b} - \frac{5}{a-b}$

d) $\frac{4-x^2}{x+2} + \frac{9-x^2}{x+3}$

a) $\frac{3x-1}{4x+12} - \frac{x+2}{4x-12} = \frac{2x^2-15x-3}{4(x+3)(x-3)}$

b) $\frac{2-x}{x^2-3x} - \frac{1}{4x-12} + \frac{5}{6x-18} = \frac{5x-24}{12x(3-x)}$

c) $\frac{4}{a+b} - \frac{5}{a-b} = \frac{a+9b}{(a+b)(b-a)}$

d) $\frac{4-x^2}{x+2} + \frac{9-x^2}{x+3} = 5-2x$

63. Comprueba si el número indicado en cada apartado es solución de la ecuación.

a) $2(x^2 - x - 2) + 6(3 - x) - 2(x - 3) - 8 = 0$
$x = -2$

b) $2(-x - 2)(1 - x) - 2(x + 1) = 0$
$x = \sqrt{3}$

c) $(2 + x)5x - (3x - 4) + 3(x - 1) - x^2 + 2(x + 4) = 0$
$x = -\dfrac{3}{2}$

d) $3x(x - 2) + 2(1 + 9x) + 11 = 0$
$x = \dfrac{1}{2}$

a) No, las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.
b) Sí, las soluciones son $x_1 = -\sqrt{3}$ y $x_2 = \sqrt{3}$.
c) Sí, la solución es $x = -\dfrac{3}{2}$.
d) No, esta ecuación no tiene solución real.

64. Resuelve estas ecuaciones de segundo grado.

a) $3x^2 - 48 = 0$
b) $3x^2 - 48x = 0$
c) $3x^2 + 48 = 0$
d) $x^2 + 3x + 9 = 0$
e) $x^2 - 3x + 9 = 0$
f) $-3x^2 + 18x - 3 = 0$
g) $-3x^2 - 18x + 3 = 0$
h) $x^2 + x - 18 = 0$

a) $3x^2 - 48 = 0 \to x^2 = 16 \to x_1 = -4 \quad x_2 = 4$

b) $3x^2 - 48x = 0 \to x(3x - 48) = 0 \to x_1 = 0 \quad x_2 = 16$

c) $3x^2 + 48 = 0 \to x^2 = -16 \to$ No tiene solución real.

d) $x^2 + 3x + 9 = 0 \to x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} \to x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2} \to$ No tiene solución real.

e) $x^2 - 3x + 9 = 0 \to x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} \to x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2} \to$ No tiene solución real.

f) $-3x^2 + 18x - 3 = 0 \to x = \dfrac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-3)} \to x = \dfrac{-18 \pm \sqrt{288}}{-6} \to x_1 = 3 - 2\sqrt{2} \quad x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$

g) $-3x^2 - 18x + 3 = 0 \to x = \dfrac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 3}}{2 \cdot (-3)} \to x = \dfrac{18 \pm \sqrt{360}}{-6} \to x_1 = -3 - \sqrt{10} \quad x_2 = -3 + \sqrt{10}$

h) $x^2 + x - 18 = 0 \to x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1} \to x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{73}}{2} \to x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{73}}{2} \quad x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{73}}{2}$

65. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado con denominadores.

a) $\dfrac{3x^2 - 1}{2} + \dfrac{x^2 - x}{3} - x^2 = 0$

b) $\dfrac{x - 2}{2} + 1 = \dfrac{3x^2 - 2x + 3}{3} + \dfrac{19x}{6}$

c) $\dfrac{x(x + 1) - 10}{5} = \dfrac{x^2 + 2x}{2} - 2$

d) $x^2 + \dfrac{11x - 5}{6} = \dfrac{2x^2 - 1}{3} + x$

a) $\frac{3x^2-1}{2}+\frac{x^2-x}{3}-x^2=0 \rightarrow 5x^2-2x-3=0 \rightarrow x_1=-\frac{3}{5} \quad x_2=1$

b) $\frac{x-2}{2}+1=\frac{3x^2-2x+3}{3}+\frac{19x}{6} \rightarrow x^2+2x+1=0 \rightarrow x=-1$

c) $\frac{x(x+1)-10}{5}=\frac{x^2+2x}{2}-2 \rightarrow 3x^2+8x=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=-\frac{8}{3}$

d) $x^2+\frac{11x-5}{6}=\frac{2x^2-1}{3}+x \rightarrow 2x^2+5x-3=0 \rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$

66. La suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es 4 y su producto es −21.

a) Escribe la ecuación correspondiente.

b) Determina dichas soluciones.

a) $x(4-x)=-21$

b) $-x^2+4x+21=0 \rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot 21}}{2\cdot(-1)} \rightarrow \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=7 \end{cases}$

Las soluciones son −3 y 7.

67. Indica el número de soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $3x^2-4x+5=0$

b) $12-2x^2+3x=0$

c) $-x+x^2-3=0$

d) $6x-x^2+9=0$

a) $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 3\cdot 5=-44<0 \rightarrow$ No tiene soluciones reales.

b) $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\cdot(-2)\cdot 12=105>0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones.

c) $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=13>0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones.

d) $\Delta=b^2-4ac=6^2-4\cdot(-1)\cdot 9=72>0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones.

68. Resuelve la ecuación general de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ utilizando las igualdades notables. Relaciona el resultado obtenido con el número de soluciones que tiene la ecuación de segundo grado.

$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$

$x^2+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a} \rightarrow x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$

$x=\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Si $\sqrt{b^2-4ac}<0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $\sqrt{b^2-4ac}=0 \rightarrow$ Tiene una solución.

Si $\sqrt{b^2-4ac}>0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones.

69. Halla el valor de k para que esta ecuación tenga por solución $x = 7$.

$$x^2 - 13x + k = 0$$

Para este valor de k, ¿cuál es la otra solución?

$7^2 - 13\cdot 7 + k = 0 \rightarrow k = 42$

$$x^2 - 13x + 42 = 0 \rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4\cdot 1\cdot 42}}{2\cdot 1} = \frac{13 \pm 1}{2} \rightarrow x_1 = 6 \quad x_2 = 7$$

70. ¿Cuáles son los valores que deben tomar a y b para que la ecuación $ax^2 + bx - 30 = 0$ tenga las soluciones, $x_1 = 5$ y $x_2 = -3$?

Sustituimos las dos soluciones en la ecuación y formamos un sistema donde las incógnitas son a y b:

$$\left.\begin{array}{l} 25a + 5b - 30 = 0 \\ 9a - 3b - 30 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot 3} 75a + 15b = 90 \\ \xrightarrow{\cdot 5} 45a - 15b = 150 \end{array}\right\} \rightarrow 120a = 240 \rightarrow a = 2 \rightarrow b = -4$$

71. Di, sin resolverlas, cuál es la suma y el producto de las raíces de las siguientes ecuaciones, y luego calcúlalas para comprobarlo.

a) $x^2 + 5x - 14 = 0$

b) $x^2 + x = 0$

c) $6x^2 + 13x - 5 = 0$

d) $9x^2 + 9x - 10 = 0$

e) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

f) $10x^2 + 3x - 1 = 0$

Partimos de una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son a y b:

$(x - a)(x - b)$

Después, multiplicamos: $x^2 - ax - bx + ab = 0 \rightarrow x^2 - (a + b)x + ab = 0$

Por tanto, el producto de las raíces es el término independiente y la suma de las raíces es el opuesto al coeficiente del término de primer grado.

a) El producto de las raíces es –14 y la suma es –1. Las raíces son $x_1 = -7$ y $x_2 = 2$.

b) El producto de las raíces es 0 y la suma es –5. Las raíces son $x_1 = -1$ y $x_2 = 0$.

c) El producto de las raíces es $-\frac{5}{6}$ y la suma es $-\frac{13}{6}$. Las raíces son $x_1 = -\frac{5}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{3}$.

d) El producto de las raíces es $-\frac{10}{9}$ y la suma es –1. Las raíces son $x_1 = -\frac{5}{3}$ y $x_2 = \frac{2}{3}$.

e) El producto de las raíces es $\frac{1}{4}$ y la suma es 1. La raíz es $x = \frac{1}{2}$.

f) El producto de las raíces es $-\frac{1}{10}$ y la suma es $-\frac{3}{10}$. Las raíces son $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{5}$.

72. Escribe ecuaciones de segundo grado cuyas soluciones sean las siguientes.

a) $x_1 = 2, x_2 = -5$

b) $x_1 = -4, x_2 = 4$

c) $x_1 = 0, x_2 = -2$

d) $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{2}{3}$

a) $(x-2)(x+5) = x^2 + 3x - 10$

b) $(x-4)(x+4) = x^2 - 16$

c) $x(x+2) = x^2 + 2x$

d) $9\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right) = 9x^2 + 9x + 2$

73. Resuelve las ecuaciones bicuadradas que aparecen a continuación.

a) $25x^4 - 101x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

c) $3x^4 - 30x^2 + 27 = 0$

a) $25x^4 - 101x^2 + 4 = 0 \rightarrow 25z^2 - 101z + 4 = 0$ $\quad z = \frac{101 \pm \sqrt{(-101)^2 - 4\cdot 25\cdot 4}}{2\cdot 25} \rightarrow z = \frac{101 \pm 99}{50} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{25} \\ z_2 = 4 \end{cases}$

$z_1 = \frac{1}{25} \rightarrow x_1 = -\frac{1}{5} \quad x_2 = \frac{1}{5}$ $\qquad z_2 = 4 \rightarrow x_3 = -2 \quad x_4 = 2$

b) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \rightarrow z^2 - 25z + 144 = 0$ $\quad z = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4\cdot 1\cdot 144}}{2\cdot 1} \rightarrow z = \frac{25 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = 16 \end{cases}$

$z_1 = 9 \rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = 3$ $\qquad z_2 = 16 \rightarrow x_3 = -4 \quad x_4 = 4$

c) $3x^4 - 30x^2 + 27 = 0 \rightarrow 3z^2 - 30z + 27 = 0$ $\quad z = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4\cdot 3\cdot 27}}{2\cdot 3} \rightarrow z = \frac{30 \pm 24}{6} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 9 \end{cases}$

$z_1 = 1 \rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1$ $\qquad z_2 = 9 \rightarrow x_3 = -3 \quad x_4 = 3$

74. Encuentra las soluciones de las ecuaciones que aparecen a continuación.

a) $\frac{x^3 - x}{x^2 - 1} - \frac{1}{4x} = 0$

b) $9(1 - x^2)(1 + x^2) + 80x^2 = 0$

c) $1 - \frac{18}{x^2} + \frac{81}{x^4} = 0$

a) $\frac{x^3 - x}{x^2 - 1} - \frac{1}{4x} = 0 \rightarrow 4x(x^3 - x) - (x^2 - 1) = 0 \rightarrow 4x^4 - 5x^2 + 1 \rightarrow$ Es una ecuación bicuadrada:

$z = x^2 \rightarrow 4z^2 - 5z + 1 \rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$ $\qquad z_1 = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ $\qquad z_2 = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{1}{2} \\ x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

b) $9(1 - x^2)(1 + x^2) + 80x^2 = 0 \rightarrow -9x^4 + 80x^2 + 9 = 0 \rightarrow$ Es una ecuación bicuadrada:

$z = x^2 \rightarrow -9z^2 + 80z + 9 \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = -\frac{1}{9} \end{cases}$ $\qquad z_1 = 9 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$ $\qquad z_2 = -\frac{1}{9} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{1}{3} \\ x_4 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

c) $1 - \frac{18}{x^2} + \frac{18}{x^4} = 0 \rightarrow x^4 - 18x^2 + 81 = 0 \rightarrow$ Es una ecuación bicuadrada:

$z = x^2 \rightarrow z^2 - 18z + 81 \rightarrow z = 9 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

75. Resuelve las ecuaciones bicuadradas que aparecen a continuación.

a) $x^8 + 3x^4 - 4 = 0$

b) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$

c) $x^{12} + 7x^6 + 12 = 0$

d) $36x^{10} + x^5 - 6 = 0$

a) $x^8+3x^4-4=0 \rightarrow z^2+3z-4=0$

$$z=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1} \rightarrow z=\frac{-3\pm5}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1=-4 \\ z_2=1 \end{cases} \quad z_1=-4 \rightarrow x^4=-4 \rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$z_2=1 \rightarrow x^4=1 \rightarrow x_1=-1 \quad x_2=1$

b) $x^6-19x^3-216=0 \rightarrow z^2-19z-216=0$

$$z=\frac{19\pm\sqrt{19^2-4\cdot1\cdot(-216)}}{2\cdot1} \rightarrow z=\frac{19\pm\sqrt{1225}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1=\dfrac{19-35}{2}=-8 \\ z_2=\dfrac{19+35}{2}=27 \end{cases}$$

$z_1=-8 \rightarrow x^3=-8 \rightarrow x=-2 \qquad z_2=27 \rightarrow x^3=27 \rightarrow x=3$

c) $x^{12}+7x^6+12=0 \rightarrow z^2+7z+12=0$

$$z=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot1\cdot12}}{2\cdot1} \rightarrow z=\frac{-7\pm1}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1=-4 \\ z_2=-3 \end{cases}$$

$z_1=-4 \rightarrow x^6=-4 \rightarrow$ No tiene solución real. $\qquad z_2=-3 \rightarrow x^6=-3 \rightarrow$ No tiene solución real.

d) $36x^{10}+x^5-6=0 \rightarrow 36z^2+z-6=0$

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot36\cdot(-6)}}{2\cdot36} \rightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{865}}{72} \rightarrow \begin{cases} z_1=\dfrac{-1-\sqrt{865}}{72}\simeq-0{,}42 \\ z_2=\dfrac{-1+\sqrt{865}}{72}\simeq0{,}39 \end{cases}$$

$$z_1=\frac{-1-\sqrt{865}}{72} \rightarrow x^5=\frac{-1-\sqrt{865}}{72} \rightarrow x_1=\sqrt[5]{\frac{-1-\sqrt{865}}{72}}\simeq-0{,}84$$

$$z_2=\frac{-1+\sqrt{865}}{72} \rightarrow x^5=\frac{-1+\sqrt{865}}{72} \rightarrow x_2=\sqrt[5]{\frac{-1+\sqrt{865}}{72}}\simeq0{,}83$$

76. Busca las soluciones de las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas y comprueba, al menos, una de las soluciones.

a) $\dfrac{1-x^2}{x}+\dfrac{3x+1}{4}+\dfrac{1}{6}=0$

b) $\dfrac{x^2+4}{x}+\dfrac{1-4x}{3}+\dfrac{8}{15}=0$

c) $\dfrac{2-x}{2x}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{3x^2-2x}{3x}$

a) $\frac{1-x^2}{x}+\frac{3x+1}{4}+\frac{1}{6}=0 \rightarrow 12-12x^2+9x^2+3x+2x=0 \rightarrow -3x^2+5x+12=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-3)\cdot 12}}{2\cdot(-3)} \rightarrow x=\frac{-5\pm 13}{-6} \rightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{4}{3} \\ x_2=3 \end{cases}$$

$$\frac{1-3^2}{3}+\frac{3\cdot 3+1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{-8}{3}+\frac{10}{4}+\frac{1}{6}=0$$

b) $\frac{x^2+4}{x}+\frac{1-4x}{3}+\frac{8}{15}=0 \rightarrow 15x^2+60+5x-20x^2+8x=0$

$\rightarrow -5x^2+13x+60=0$

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-4\cdot(-5)\cdot 60}}{2\cdot(-5)} \rightarrow x=\frac{-13\pm 37}{-10} \rightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{12}{5} \\ x_2=5 \end{cases}$$

$$\frac{5^2+4}{5}+\frac{1-4\cdot 5}{3}+\frac{8}{15}=\frac{29}{5}-\frac{19}{3}+\frac{8}{15}=0$$

c) $\frac{2-x}{2x}=\frac{5}{6}-\frac{3x^2-2x}{3x} \rightarrow 6-3x=5x-6x^2+4x \rightarrow x^2-2x+1=0$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \rightarrow x=1$$

$$\frac{2-1}{2\cdot 1}-\frac{5}{6}+\frac{3\cdot 1^2-2\cdot 1}{3\cdot 1}=\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}=0$$

77. **Resuelve las ecuaciones con fracciones algebraicas que aparecen a continuación.**

a) $\frac{x^2+1}{x}-x=\frac{7x^2-7-6x}{6x^2-6}$

b) $\frac{x+4}{4x+7}=\frac{x-3}{x^2-x-6}$

c) $\frac{x+1}{2x-1}-\frac{7}{4x^2-1}=\frac{x}{2x+1}$

d) $\frac{4}{x^2-1}+1=\frac{x}{x+1}$

e) $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x^2-9}$

a) $\frac{x^2+1}{x}-x=\frac{7x^2-7-6x}{6x^2-6} \rightarrow \frac{6x^4-6}{6x(x^2-1)}-\frac{6x^4-6x^2}{6x(x^2-1)}=\frac{7x^3-6x^2-7x}{6x(x^2-1)} \rightarrow$

$\rightarrow 7x^3-12x^2-7x+6=0 \rightarrow x_1=2 \quad x_2=\frac{-1-\sqrt{22}}{7} \quad x_3=\frac{-1+\sqrt{22}}{7}$

b) $\frac{x+4}{4x+7}=\frac{x-3}{x^2-x-6} \rightarrow (x+4)(x^2-x-6)=(4x+7)(x-3) \rightarrow x^3-x^2-5x-3=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-1 \end{cases}$

La única solución válida es $x=-1$, pues $x=3$ se descarta por hacer 0 el segundo denominador.

c) $\frac{x+1}{2x-1}-\frac{7}{4x^2-1}=\frac{x}{2x+1} \rightarrow \frac{2x^2+3x+1}{4x^2-1}-\frac{7}{4x^2-1}=\frac{2x^2-x}{4x^2-1} \rightarrow 4x-6=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

d) $\frac{4}{x^2-1}+1=\frac{x}{x+1} \rightarrow \frac{4}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{x^2-1}=\frac{x^2-x}{x^2-1} \rightarrow 3+x=0 \rightarrow x=-3$

e) $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x^2-9} \rightarrow \frac{x-3}{x^2-9}-\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{1}{x^2-9} \rightarrow -7=0 \rightarrow$ No tiene solución real.

78. **Obtén las soluciones de las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{2x(x^3-7x)}{2x^2-12}=6$

b) $3x^2(x^2-2)=\dfrac{x^2-2}{3}$

c) $8x+\dfrac{12}{x}=\dfrac{20}{x^3}$

d) $\dfrac{9x}{2x^2}=1-3x^2$

a) $\dfrac{2x(x^3-7x)}{2x^2-12}=6\rightarrow x^4-13x^2+36=0\xrightarrow{z=x^2}z^2-13z+36=0$

$$z=\frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot1\cdot36}}{2\cdot1}=\frac{13\pm5}{2}\rightarrow\begin{cases}z_1=9\\z_2=4\end{cases}$$

$z_1=9\rightarrow x_1=-3\quad x_2=3$

$z_2=4\rightarrow x_3=-2\quad x_4=2$

b) $3x^2(x^2-2)=\dfrac{x^2-2}{3}\rightarrow 9x^4-19x^2+2=0\xrightarrow{z=x^2}9z^2-19z+2=0$

$$z=\frac{-(-19)\pm\sqrt{(-19)^2-4\cdot9\cdot2}}{2\cdot9}=\frac{19\pm17}{18}\rightarrow\begin{cases}z_1=2\\z_2=\dfrac{1}{9}\end{cases}$$

$z_1=2\rightarrow x_1=-\sqrt{2}\quad x_2=\sqrt{2}$

$z_2=\dfrac{1}{9}\rightarrow x_3=-\dfrac{1}{3}\quad x_4=\dfrac{1}{3}$

c) $8x+\dfrac{12}{x}=\dfrac{20}{x^3}\rightarrow 2x^4+3x^2-5=0\xrightarrow{z=x^2}2z^2+3z-5=0$

$$z=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot(-5)}}{2\cdot2}=\frac{-3\pm7}{4}\rightarrow\begin{cases}z_1=1\\z_2=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

$z_1=1\rightarrow x_1=-1\quad x_2=1$

$z_2=-\dfrac{5}{2}\rightarrow$ No tiene solución real.

d) $\dfrac{9}{2x^2}=1-3x^2\rightarrow 6x^4-2x^2+9=0\xrightarrow{z=x^2}6z^2-2z+9=0$

$$z=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot6\cdot9}}{2\cdot6}=\frac{2\pm\sqrt{-212}}{12}$$

No tiene solución real.

79. **Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{4}{x+3}=\dfrac{1}{2x+1}$

b) $\dfrac{x+2}{2-x}+\dfrac{3x}{2x-1}=0$

c) $\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{2}{3x+5}=0$

d) $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{x-3}{x-2}$

a) $\dfrac{4}{x+3}=\dfrac{1}{2x+1}\rightarrow 8x+4=x+3\rightarrow 7x=-1\rightarrow x=-\dfrac{1}{7}$

b) $\dfrac{x+2}{2-x}+\dfrac{3x}{2x-1}=0\rightarrow\dfrac{x+2}{2-x}=\dfrac{3x}{1-2x}\rightarrow x^2-9x+2=0\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{9+\sqrt{73}}{2}\\x_2=\dfrac{9-\sqrt{73}}{2}\end{cases}$

c) $\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{2}{3x+5}=0\rightarrow\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{2}{3x+5}\rightarrow 9x+15=2x-6\rightarrow x=-3$

d) $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{x-3}{x-2}\rightarrow x^2-2x=x^2-4x+3\rightarrow -2x=-4x+3\rightarrow x=\dfrac{3}{2}$

80. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\frac{x-1}{x}=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2x}$

b) $x^2-3x-4+\frac{12}{x}=0$

c) $\frac{x^2+x-6}{x}+3=0$

d) $\frac{2x}{3x-4}-\frac{x}{x-1}=0$

a) $\frac{x-1}{x}=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2x}\rightarrow\frac{2(x+1)(x-1)}{2x^2(x+1)}=\frac{4x^2+x(x+1)}{2x^2(x+1)}\rightarrow 2x^2-2=4x^2+x^2+1\rightarrow x^2=-1\rightarrow$ No existe solución real.

b) $x^2-3x-4+\frac{12}{x}=0\rightarrow x^3-3x^2-4x+12=0\rightarrow x_1=2\quad x_2=-2\quad x_3=3$

c) $\frac{x^2+x-6}{x}+3=0\rightarrow x^2+x-6+3x=0\rightarrow x^2+4x-6=0\rightarrow x_1=-2+\sqrt{10}\quad x_2=-2-\sqrt{10}$

d) $\frac{2x}{3x-4}-\frac{x}{x-1}=0\rightarrow 2x(x-1)=(3x-4)x\rightarrow x^2-2x=0\rightarrow x(x-2)=0\rightarrow x_1=0\quad x_2=2$

81. Halla el valor de *x* en las siguientes ecuaciones.

a) $1+\frac{5}{1+x}+\frac{x}{1-x}=0$

b) $\frac{10x+1}{2(x+1)}-\frac{4x^2+3x-4}{2(x+1)^2}=3$

c) $\frac{2x-1}{x-4}+\frac{x}{x-1}-\frac{2x+3}{x}=1$

d) $\frac{1}{x-1}+1=\frac{x^2}{x^2+3x-4}$

e) $\frac{x^2-5x+2}{2x-5}+\frac{x-2}{x+1}+\frac{2x-5}{x-1}=-1+\frac{-3x}{4}$

f) $\frac{x^2-4}{x^2+x+1}-\frac{x+1}{x-2}+2x+\frac{1}{7}=0$

g) $\frac{x}{x^2-1}+\frac{x}{x^3-1}+\frac{2x}{x^2+x+1}=0$

a) $1+\frac{5}{1+x}+\frac{x}{1-x}=0\rightarrow 1-x^2+5(1-x)+x(1+x)=0\rightarrow 6=4x\rightarrow x=\frac{3}{2}$

b) $\frac{10x+1}{2(x+1)}-\frac{4x^2+3x-4}{2(x+1)^2}=3\rightarrow(10x+1)(x+1)-(4x^2+3x-4)=6(x+1)^2\rightarrow$

$\rightarrow 10x^2+x+10x+1-4x^2-3x+4=6x^2+12x+6\rightarrow -4x-1=0\rightarrow x=-\frac{1}{4}$

c) $\frac{2x-1}{x-4}+\frac{x}{x-1}-\frac{2x+3}{x}=1\rightarrow(2x-1)(x-1)x+x^2(x-4)-(2x+3)(x-4)(x-1)=x(x-4)(x-1)\rightarrow$

$\rightarrow 5x^2+4x-12=0\rightarrow x_1=-2\quad x_2=\frac{6}{5}$

d) $\frac{1}{x-1}+1=\frac{x^2}{x^2+3x-4}\rightarrow\frac{1}{x-1}+1=\frac{x^2}{(x+4)(x-1)}\rightarrow(x+4)+(x^2+3x-4)=x^2\rightarrow 4x=0\rightarrow x=0$

e) $\frac{x^2-5x+2}{2x-5}+\frac{x-2}{x+1}+\frac{2x-5}{x-1}=-1+\frac{-3x}{4}\rightarrow$

$\rightarrow 4(x^2-5x+2)(x^2-1)+4(x-2)(2x-5)(x-1)+4(2x-5)^2(x+1)=-4(2x-5)(x^2-1)-3x(2x-5)(x^2-1)\rightarrow$

$\rightarrow 10x^4-3x^3-130x^2+123x+72=0\rightarrow x_1=3\quad x_2=-3{,}8186\quad x_3=-0{,}41092\quad x_4=1{,}5295$

La única solución que se puede obtener con los métodos vistos en el curso es $x=3$.

f) $\frac{x^2-4}{x^2+x+1}-\frac{x+1}{x-2}+2x+\frac{1}{7}=0\rightarrow$

$\rightarrow 7(x^2-4)(x-2)-7(x+1)(x^2+x+1)+14x(x^2+x+1)(x-2)+(x^2+x+1)(x-2)=0\rightarrow$

$14x^4+43x^3+13x^2-15x+47=0\rightarrow$ No tiene solución real.

g) $\frac{x}{x^2-1}+\frac{x}{x^3-1}+\frac{2x}{x^2+x+1}=0\rightarrow\frac{x}{(x+1)(x-1)}+\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}+\frac{2x}{x^2+x+1}=0\rightarrow$

$x(x^2+x+1)+x(x+1)+2x(x+1)(x-1)=0\rightarrow 3x^3+2x^2=0\rightarrow x^2(3x+2)=0\rightarrow x_1=0\quad x_2=-\frac{2}{3}$

82. **Completa las siguientes ecuaciones escribiendo un número en el segundo miembro, de manera que tengan la solución indicada.**

a) $\sqrt{x+7} - 2\sqrt{4x+1} = \blacksquare$
$x = 2$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+5}} = \blacksquare - \dfrac{1}{\sqrt{4x}}$
$x = 4$

a) $\sqrt{x+7} - 2\sqrt{4x+1} = -3$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+5}} = \dfrac{13}{12} - \dfrac{1}{\sqrt{4x}}$

83. **Halla la solución de las ecuaciones con radicales.**

a) $\sqrt{6x-2} = 4$

b) $\sqrt{6x-8} = x$

c) $\sqrt{x^2+9} - 1 = x$

d) $\sqrt{2x^2+7x-1} = x+1$

a) $\sqrt{6x-2} = 4 \rightarrow 6x-2=16 \rightarrow 6x-18=0 \rightarrow x=3$

b) $\sqrt{6x-8} = x \rightarrow 6x-8=x^2 \rightarrow x^2-6x+8=0 \rightarrow x_1=2 \quad x_2=4$

c) $\sqrt{x^2+9}-1=x \rightarrow x^2+9=x^2+2x+1 \rightarrow 2x-8=0 \rightarrow x=4$

d) $\sqrt{2x^2+7x-1}=x+1 \rightarrow 2x^2+7x-1=x^2+2x+1 \rightarrow x^2+5x-2=0 \rightarrow x_1=\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2} \quad x_2=\dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}$

84. **Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.**

a) $\sqrt[3]{x+9} = 4$

b) $\sqrt[3]{x^2-7x} = 2$

a) $\sqrt[3]{x+9}=4 \rightarrow x+9=64 \rightarrow x-55=0 \rightarrow x=55$

b) $\sqrt[3]{x^2-7x}=2 \rightarrow x^2-7x=8 \rightarrow x^2-7x-8=0 \rightarrow x_1=-1 \quad x_2=8$

85. **Resuelve estas ecuaciones con radicales.**

a) $\sqrt{2x-10} = 5\sqrt{x-10}$

b) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3} = 5$

c) $\sqrt{4x-11} = 7\sqrt{2x-29}$

d) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1} = 3$

a) $\sqrt{2x-10}=5\sqrt{x-10} \rightarrow 2x-10=25(x-10) \rightarrow 23x-240=0 \rightarrow x=\dfrac{240}{23}$

b) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}=5 \rightarrow x+2=x+10\sqrt{x+3}+28 \rightarrow x-\dfrac{94}{25}=0 \rightarrow x=\dfrac{94}{25}$

Al comprobar el resultado se observa que no es solución.

c) $\sqrt{4x-11}=7\sqrt{2x-29} \rightarrow 4x-11=49(2x-29) \rightarrow 94x-1410=0 \rightarrow x=15$

d) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}=3 \rightarrow x+3=x+6\sqrt{x+1}+10 \rightarrow x-\dfrac{13}{36}=0 \rightarrow x=\dfrac{13}{36}$

Al comprobar el resultado se observa que no es solución.

86. Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\sqrt{3x^2 - 4x + 5} + 3x + 5 = \frac{x^2}{5}$

b) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x + 3} = 5$

c) $\sqrt{x^2 + x + \frac{5}{9}} = 4 - \sqrt{3x + 8}$

d) $\sqrt{5 - 8x} + \sqrt{x^2 - 6x + \frac{3}{4}} = -10x$

a) $\sqrt{3x^2-4x+5}+3x+5=\frac{x^2}{5} \rightarrow \left(\sqrt{3x^2-4x+5}\right)^2=\left(\frac{x^2}{5}-3x-5\right)^2 \rightarrow$

$$\rightarrow 3x^2-4x+5=\frac{x^4}{25}-\frac{6x^3}{5}+7x^2+30x+25 \rightarrow -\frac{x^4}{25}+\frac{6x^3}{5}-4x^2-34x-20=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=-3{,}3205 \\ x_2=24{,}456 \\ x_3=-0{,}64731 \\ x_4=9{,}5122 \end{cases}$$

Tras la comprobación, las únicas soluciones válidas son x_1 y x_2.

Ninguna de estas dos soluciones se puede obtener con los métodos vistos en el curso.

b) $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x+3}=5 \rightarrow \left(\sqrt{x^2+4x+4}\right)^2=\left(5-\sqrt{x+3}\right)^2 \rightarrow$

$$\rightarrow x^2+4x+4=x+28-10\sqrt{x+3} \rightarrow \left(x^2+3x-24\right)^2=\left(-10\sqrt{x+3}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^4+6x^3-39x^2-244x+276=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=6 \end{cases}$$

Tras la comprobación, se observa que la única solución válida es $x_1=1$.

c) $\sqrt{x^2+x+\frac{5}{9}}=4-\sqrt{3x+8} \rightarrow \left(\sqrt{x^2+x+\frac{5}{9}}\right)^2=\left(4-\sqrt{3x+8}\right)^2 \rightarrow$

$$\rightarrow x^2+x+\frac{5}{9}=16+3x+8-8\sqrt{3x+8} \rightarrow \left(x^2-2x-\frac{211}{9}\right)^2=\left(-8\sqrt{3x+8}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^4-4x^3-\frac{386}{9}x^2-\frac{884}{9}x=+\frac{3049}{81}=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{3} \\ x_2=9{,}535 \end{cases}$$

Tras la comprobación, la única solución válida es $x_1=\frac{1}{3}$.

d) $\sqrt{5-8x}+\sqrt{x^2-6x+\frac{3}{4}}=-10x \rightarrow \left(\sqrt{5-8x}\right)^2=\left(-10x-\sqrt{x^2-6x+\frac{3}{4}}\right)^2 \rightarrow$

$$5-8x=101x^2-6x+\frac{3}{4}+10x\sqrt{4x^2-24x+3} \rightarrow \left(101x^2-2x+\frac{17}{4}\right)^2=100x^2(4x^2-24x+3) \rightarrow$$

$$\rightarrow 9801x^4+2804x^3-\frac{2309x^2}{2}-17x+\frac{289}{16}=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{1}{2} \\ x_2=-0{,}1221 \end{cases}$$

La única solución que se puede obtener con los métodos vistos en el curso es $x_1=-\frac{1}{2}$.

87. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+2}=0$

b) $\sqrt{x-\sqrt{1-x}}+\sqrt{x}=1$

a) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+2}=0 \rightarrow 2x+2\sqrt{x+7}\sqrt{x-1}+6=4x+8 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{x+7}\sqrt{x-1}=x+1 \rightarrow x^2+6x-7=x^2+2x+1 \rightarrow 4x-8=0 \rightarrow x=2$

b) $\sqrt{x-\sqrt{1-x}}+\sqrt{x}=1 \rightarrow x-\sqrt{1-x}=x-2\sqrt{x}+1 \rightarrow$

$\rightarrow 2\sqrt{x}=1+\sqrt{1-x} \rightarrow 4x=-x+2\sqrt{1-x}+2 \rightarrow 5x-2=2\sqrt{1-x} \rightarrow$

$\rightarrow 25x^2-20x+4=4-4x \rightarrow 25x^2-16x=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=\dfrac{16}{25} \end{cases}$

Al comprobar el resultado vemos que la única solución válida es $x_2=\dfrac{16}{25}$.

88. Calcula la solución de las siguientes ecuaciones.

a) $(x^2-4)(x^2-3x+2)=0$

b) $(x^2-x)(x^2+16)=0$

c) $(x-1)(x^2+4)(x^2-9)=0$

d) $(x^2-4x-5)(x^2-2x-8)=0$

a) $(x^2-4)(x^2-3x+2)=0 \rightarrow (x-1)(x+2)(x-2)^2=0 \rightarrow x_1=-2 \quad x_2=1 \quad x_3=2$

b) $(x^2-x)(x^2+16)=0 \rightarrow x(x-1)(x^2+16)=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=1$

c) $(x-1)(x^2+4)(x^2-9)=0 \rightarrow (x-1)(x-3)(x+3)(x^2+4)=0 \rightarrow x_1=-3 \quad x_2=1 \quad x_3=3$

d) $(x^2-4x-5)(x^2-2x-8)=0 \rightarrow (x+1)(x+2)(x-5)(x-4)=0 \rightarrow \rightarrow x_1=-2 \quad x_2=-1 \quad x_3=4 \quad x_4=5$

89. Halla la solución de las ecuaciones que aparecen a continuación.

a) $x^3+4x^2+x-6=0$

b) $x^2(x+6)=32$

c) $x^2(x^2+1)+2x^3+36=12x(x+1)$

d) $2x^3-5x^2-14x+8=0$

a)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 4 & 1 & -6 \\
1 & & 1 & 5 & 6 \\
\hline
 & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & -6 & \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$x_1=-3 \qquad x_2=-2 \qquad x_3=1$

b) $x^2(x+6)=32 \rightarrow x^3+6x^2-32=0$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 6 & 0 & -32 \\
2 & & 2 & 16 & 32 \\
\hline
 & 1 & 8 & 16 & \boxed{0} \\
-4 & & -4 & -16 & \\
\hline
 & 1 & 4 & \boxed{0} & \\
-4 & & -4 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$x_1=-4 \qquad x_2=2$

c) $x^2(x^2+1)+2x^3+36=12x(x+1) \rightarrow x^4+2x^3-11x^2-12x+36=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 2 & -11 & -12 & 36 \\
2 & & 2 & 8 & -6 & -36 \\ \hline
 & 1 & 4 & -3 & -18 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & 12 & 18 & \\ \hline
 & 1 & 6 & 9 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & -9 & & \\ \hline
 & 1 & 3 & \boxed{0} & & \\
-3 & & -3 & & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

$x_1=-3 \qquad x_2=2$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -5 & -14 & 8 \\
-2 & & -4 & 18 & -8 \\ \hline
 & 2 & -9 & 4 & \boxed{0} \\
4 & & 8 & -4 & \\ \hline
 & 2 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$2x-1=0$

$x=\dfrac{1}{2}$

$x_1=\dfrac{1}{2} \qquad x_2=-2 \qquad x_3=4$

90. Halla las soluciones de estas ecuaciones.

a) $6x^3-7x^2-x+2=0$

b) $4x^3(x-3)+2x^2+30(x+1)=23x(x-1)$

c) $x^4+3x^3-11x^2+2x=0$

d) $x^2(x^2-x-6)=3(x^2-3x)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 6 & -7 & -1 & 2 \\
1 & & 6 & -1 & -2 \\ \hline
 & 6 & -1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

Resolvemos la ecuación $6x^2-x-2=0$:

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 6\cdot(-2)}}{2\cdot 6}=\frac{1\pm 7}{12}\rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}\\[2mm] x_2=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

$x_1=-\dfrac{1}{2} \qquad x_2=\dfrac{2}{3} \qquad x_3=1$

b) $4x^3(x-3)+2x^2+30(x+1)=23x(x-1) \rightarrow 4x^4-12x^3-21x^2+53x+30=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & -12 & -21 & 53 & 30 \\
-2 & & -8 & 40 & -38 & -30 \\ \hline
 & 4 & -20 & 19 & 15 & \boxed{0} \\
3 & & 12 & -24 & -15 & \\ \hline
 & 4 & -8 & -5 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Resolvemos la ecuación $4x^2-8x-5=0$:

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 4\cdot(-5)}}{2\cdot 4}=\frac{8\pm 12}{8}\rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}\\[2mm] x_2=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

$x_1=-\dfrac{1}{2} \qquad x_2=-2 \qquad x_3=\dfrac{5}{2} \qquad x_4=3$

c) $x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x^3 + 3x^2 - 11x + 2) = 0$

	1	3	−11	2
2		2	10	−2
	1	5	−1	0

Resolvemos la ecuación $x^2 + 5x - 1 = 0$:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \qquad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \qquad x_3 = 0 \qquad x_4 = 2$$

d) $x^2(x^2 - x - 6) = 3(x^2 - 3x) \rightarrow x^2(x-3)(x+2) - 3x(x-3) = 0 \rightarrow x(x-3)[x(x+2) - 3] \rightarrow$

$\rightarrow x(x-3)(x^2 + 2x - 3) = 0 \rightarrow x(x-3)(x+3)(x-1) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = -3 \qquad x_4 = 1$

91. Halla la solución de las ecuaciones que aparecen a continuación.

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

b) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$

c) $x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0$

d) $x^3 - 7x^2 + 4x - 28 = 0$

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

	1	−6	11	−6
1		1	−5	6
	1	−5	6	0
2		2	−6	
	1	−3	0	
3		3		
	1	0		

Las raíces enteras son {1, 2, 3}.

b) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$

	1	−3	−13	15
1		1	−2	−15
	1	−2	−15	0
5		5	15	
	1	3	0	
−3		−3		
	1	0		

Las raíces enteras son {3, 1, 5}.

c) $x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0$

	1	1	−5	−5	4	4
1		1	2	−3	−8	−4
	1	2	−3	−8	−4	0
−1		−1	−1	4	4	
	1	1	−4	−4	0	
2		2	6	4		
	1	3	2	0		
−2		−2	−2			
	1	1	0			
−1		−1				
	1	0				

Las raíces enteras son {−2, −1, 1, 2}.

d) $x^3 - 7x^2 + 4x - 28 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 4 & -28 \\ 7 & & 7 & 0 & 28 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2 + 4 = 0$ no tiene soluciones reales, por tanto, la única raíz entera es $x = 7$.

92. **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $\dfrac{x^3 + x^2}{3} + x \cdot \dfrac{x+1}{6} = x + 1$

b) $3x^2\left(4 + \dfrac{7}{x}\right) = \dfrac{6(17x - 4)}{x}$

c) $\dfrac{x^2}{16}(x + 7) + x + 1 = 0$

d) $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}$

e) $\dfrac{2x^2(x-2) + 4x}{x^2 + 1} = 3$

a) $\dfrac{x^3 + x^2}{3} + x\dfrac{x+1}{6} = x + 1 \rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & -5 & -6 \\ -1 & & -2 & -1 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & \boxed{0} \\ -2 & & -4 & 6 & \\ \hline & 2 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$2x - 3 = 0$

$x = \dfrac{3}{2}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = \dfrac{3}{2}$

b) $3x^2\left(4 + \dfrac{7}{x}\right) = \dfrac{6(17x - 4)}{x} \rightarrow 4x^3 + 7x^2 - 34x + 8 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 7 & -34 & 8 \\ 2 & & 8 & 30 & -8 \\ \hline & 4 & 15 & -4 & \boxed{0} \\ -4 & & -16 & 4 & \\ \hline & 4 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$4x - 1 = 0$

$x = \dfrac{1}{4}$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = \dfrac{1}{4} \qquad x_3 = 2$

c) $\dfrac{x^2}{16}(x + 7) + x + 1 = 0 \rightarrow x^3 + 7x^2 + 16x + 16 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 7 & 16 & 16 \\ -4 & & -4 & -12 & -16 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $x^2 + 3x + 4 = 0$:

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2} \rightarrow$ No tiene solución real.

$x = -4$

d) $\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \to -5x^3+8x^2+3x+2=0$

$$\begin{array}{c|cccc} & -5 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & & -10 & -4 & -2 \\ \hline & -5 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $-5x^2-2x-1=0$:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-5)\cdot(-1)}}{2\cdot(-5)}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{-10} \to \text{No tiene solución real.}$$

$x=2$

e) $\frac{2x^2(x-2)+4x}{x^2+1}=3 \to 2x^3-7x^2+4x-3=0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -7 & 4 & -3 \\ 3 & & 6 & -3 & 3 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $2x^2-x+1=0$:

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{4} \to \text{No tiene solución real.}$$

$x=3$

93. Escribe alguna ecuación que tenga las siguientes características.

a) Los valores $x=1$, $x=2$ y $x=3$ son soluciones de la ecuación.

b) Es una ecuación de grado 3 con una sola solución real que es $x=\frac{1}{2}$.

c) Una ecuación de grado 3 con dos soluciones reales que sean una opuesta de la otra.

d) Una ecuación de grado 2 con coeficientes enteros y cuyas soluciones sean $x=-\frac{1}{3}$ y $x=\frac{2}{5}$.

e) Una ecuación de grado 3 con coeficientes enteros y los valores $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x=-3$ son dos de sus soluciones.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $7(x-1)(x-2)(x-3)=0 \to 7x^3-42x^2+77x-42=0$

b) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^3=0 \to x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}=0 \to 8x^3-12x^2+6x-1=0$

c) Si dos de las soluciones son reales, entonces la tercera solución también será real.

$(x-1)(x+1)x=0 \to x^3-x=0$

d) $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{5}\right)=0 \to x^2-\frac{x}{15}-\frac{2}{15}=0 \to 15x^2-x-2=0$

e) Tomando como tercera solución $x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x+3)=0 \to 2x^3+6x^2-x-3=0$$

94. Halla cuánto vale *x* en las siguientes expresiones.

a) $\log_x 3 = -1$
b) $\log_x 5 = 2$
c) $\log_x 3 = -2$
d) $\log_x 2 = 5$

a) $\log_x 3 = -1 \to x^{-1} = 3 \to x = \frac{1}{3}$

b) $\log_x 5 = 2 \to x^2 = 5 \to x_1 = \sqrt{5} \quad x_2 = -\sqrt{5}$

La única solución válida es $x_1 = \sqrt{5}$.

c) $\log_x 3 = -2 \to x^{-2} = 3 \to x^2 = \frac{1}{3} \to x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

La única solución válida es $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) $\log_x 2 = 5 \to x^5 = 2 \to x = \sqrt[5]{2}$

95. Calcula el valor de *x* en las siguientes expresiones.

a) $\log_x 8 = 4$
b) $\log_x \frac{1}{4} = -4$
c) $\log_x 3 = 5$
d) $\log_x \frac{4}{9} = -2$
e) $\log_x 343 = 3$
f) $\log_x 2 = 4$
g) $\log_x \left(-\frac{125}{8}\right) = -3$
h) $\log_x 49 = 6$

a) $\log_x 8 = 4 \to x^4 = 8 \to x = \sqrt[4]{8}$

b) $\log_x \frac{1}{4} = -4 \to x^{-4} = \frac{1}{4} \to x = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

c) $\log_x 3 = 5 \to x^5 = 3 \to x = \sqrt[5]{3}$

d) $\log_x \frac{4}{9} = -2 \to x^{-2} = \frac{4}{9} \to x^2 = \frac{9}{4} \to x_1 = \frac{3}{2} \quad x_2 = -\frac{3}{2}$

La única solución válida es $x_1 = \frac{3}{2}$.

e) $\log_x 343 = 3 \to x^3 = 343 \to x = 7$

f) $\log_x 2 = 4 \to x^4 = 2 \to x = \sqrt[4]{2}$

g) $\log_x \left(-\frac{125}{8}\right) = -3 \to x^{-3} = -\frac{125}{8} \to x = -\frac{2}{5}$

h) $\log_x 49 = 6 \to x^6 = 49 \to x = \sqrt[6]{49} = \sqrt[3]{7}$

96. Calcula el valor de *x* en las expresiones que aparecen a continuación.

a) $\log_3 9^x = 2$
b) $\log 2^x = \frac{3}{2}$
c) $\ln 3^x = -1$
d) $\log_2 4^{x+4} = -2$
e) $\log_3 9^{x+3} = 3$
f) $\log 2^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2}$
g) $\ln 3^{x+6} = 3$
h) $\log_3 27^{3x+4} = -2$

a) $\log_3 9^x = 2 \to 3^2 = 9^x \to x = 1$

b) $\log 2^x = \frac{3}{2} \to x \log 2 = \frac{3}{2} \to x = \frac{3}{2\log 2} \approx 4{,}983$

c) $\ln 3^x = -1 \to x \ln 3 = -1 \to x = -\frac{1}{\ln 3} \approx -0{,}91$

d) $\log_2 4^{x+4} = -2 \to 2^{-2} = 4^{x+4} \to 4^{-1} = 4^{x+4} \to -1 = x + 4 \to x = -5$

e) $\log_3 9^{x+3} = 3 \to 3^3 = 9^{x+3} \to 3^3 = 3^{2x+6} \to 3 = 2x + 6 \to x = -\frac{3}{2}$

f) $\log 2^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2} \to \frac{x}{2}\log 2 = \frac{3}{2} \to x = \frac{3}{\log 2} \approx 9{,}966$

g) $\ln 3^{x+6} = 3 \to (x+6)\ln 3 = 3 \to x = \frac{3}{\ln 3} - 6 \approx -3{,}269$

h) $\log_3 27^{3x+4} = -2 \to (3x+4)\log_3 27 = -2 \to 3 \cdot (3x+4) = -2 \to x = -\frac{14}{9}$

97. **Resuelve estas ecuaciones logarítmicas.**

a) $\log x = -1 + \log 5$
b) $\log_5 x = 2 + \log_5 7$
c) $\log_2 x = 3 + \log_2 9$

a) $\log x = -1 + \log 5 \rightarrow \log \frac{x}{5} = -1 \rightarrow \frac{x}{5} = \frac{1}{10} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $\log_5 x = 2 + \log_5 7 \rightarrow \log_5 \frac{x}{7} = 2 \rightarrow \frac{x}{7} = 25 \rightarrow x = 175$

c) $\log_2 x = 3 + \log_2 9 \rightarrow \log_2 \frac{x}{9} = 3 \rightarrow \frac{x}{9} = 8 \rightarrow x = 72$

98. **Resuelve las ecuaciones logarítmicas que aparecen a continuación.**

a) $\log_4 x = 2 + \log_4 \frac{1}{2}$
b) $\log(3x - 1) = -2 + \log 50$
c) $\log_2 \frac{3x-1}{4} = 2 + \log_2 \frac{1}{16}$

a) $\log_4 x = 2 + \log_4 \frac{1}{2} \rightarrow \log_4 2x = 2 \rightarrow 2x = 16 \rightarrow x = 8$

b) $\log(3x-1) = -2 + \log 50 \rightarrow \log \frac{3x-1}{50} = -2 \rightarrow \frac{3x-1}{50} = \frac{1}{100} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $\log_2 \frac{3x-1}{4} = 2 + \log_2 \frac{1}{16} \rightarrow \log_2 \frac{16(3x-1)}{4} = 2 \rightarrow 12x - 4 = 4 \rightarrow x = \frac{2}{3}$

99. **Calcula el valor de *x* en las siguientes ecuaciones.**

a) $\log_x 9 + \frac{1}{2}\log_x 16 = 2$
b) $\log_{x+1}(6x + 1) = 2$
c) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 3) = 0$
d) $\log_2 x^3 - \log_2 x^2 = 4$
e) $\log_2(x^2 + 4x - 1) = 2$

a) $\log_x 9 + \frac{1}{2}\log_x 16 = 2 \rightarrow \log_x\left(9 \cdot \sqrt{16}\right) = 2 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -6 \end{cases}$

La única solución válida es $x_1 = 6$.

b) $\log_{x+1}(6x+1) = 2 \rightarrow (x+1)^2 = 6x + 1 \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

La única solución válida es $x_2 = 4$.

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 3) = 0 \rightarrow 1 = x^2 - 3x + 3 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

d) $\log_2 x^3 - \log_2 x^2 = 4 \rightarrow \log_2 x = 4 \rightarrow x = 16$

e) $\log_2(x^2 + 4x - 1) = 2 \rightarrow 4 = x^2 + 4x - 1 \rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

100. **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $\log(x-3)+\log(x+1)=1-\log(x-5)$

b) $\log_3(x^2+x+1)=27$

c) $\log_5\left(x+\frac{1}{2}\right)+\log_5\left(x+\frac{3}{4}\right)=1-\log_5\left(x+\frac{1}{3}\right)$

d) $\log\left(\frac{x-2}{2}\right)+\log\left(\frac{x-3}{2}\right)+\log\left(\frac{2x-1}{3}\right)=1$

a) $\log(x-3)+\log(x+1)=1-\log(x-5)\rightarrow\log[(x-3)(x+1)(x-5)]=1\rightarrow$

$\rightarrow(x-3)(x+1)(x-5)=10\rightarrow x^3-7x^2+7x+5=0\rightarrow\begin{cases}x_1=-0{,}47419\\x_2=1{,}8873\\x_3=5{,}5869\end{cases}$

La única solución válida es $x_3=5{,}5869$.

b) $\log_3(x^2+x+1)=27\rightarrow x^2+x+1=3^{27}\rightarrow\begin{cases}x_1=-2{,}7614\cdot10^6\\x_2=2{,}7614\cdot10^6\end{cases}$

c) $\log_5\left(x+\frac{1}{2}\right)+\log_5\left(x+\frac{3}{4}\right)=1-\log_5\left(x+\frac{1}{3}\right)\rightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=5\rightarrow x^3+\frac{19}{12}x^2+\frac{19}{24}x-\frac{39}{8}=0\rightarrow x=1{,}1906$

d) $\log\left(\frac{x-2}{2}\right)+\log\left(\frac{x-3}{2}\right)+\log\left(\frac{2x-1}{3}\right)=1\rightarrow\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{x-3}{2}\right)\left(\frac{2x-1}{3}\right)=10\rightarrow\frac{1}{6}x^3-\frac{11}{12}x^2+\frac{17}{12}x-\frac{21}{2}=0\rightarrow x=5{,}8775$

101. **Halla el valor de *x* en las siguientes ecuaciones.**

a) $\log_3\sqrt{x-5}+\log_3\sqrt{2x-3}=1$

b) $\log_2\sqrt{x}-\log_2\sqrt[3]{x}=\frac{2}{3}$

a) $\log_3\sqrt{x-5}+\log_3\sqrt{2x-3}=1\rightarrow\frac{1}{2}\log_3[(x-5)(2x-3)]=1\rightarrow(x-5)(2x-3)=9\rightarrow2x^2-13x+6=0\rightarrow\begin{cases}x_1=6\\x_2=\frac{1}{2}\end{cases}$

La única solución válida es $x_1=6$.

b) $\log_2\sqrt{x}-\log_2\sqrt[3]{x}=\frac{2}{3}\rightarrow\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=2^{\frac{2}{3}}\rightarrow x^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{2}{3}}\rightarrow x=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^6=16$

102. **Resuelve las ecuaciones logarítmicas que aparecen a continuación.**

a) $\log_5(x-1)+\log_5(x+1)=\log_5 3x$

b) $\log_2(x-3)-\log_2(2x+21)=1-\log_2(x-2)$

a) $\log_5(x-1)+\log_5(x+1)=\log_5 3x\rightarrow x^2-1=3x\rightarrow x^2-3x-1=0\rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\approx3{,}303\\x_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}\approx-0{,}303\end{cases}$

La única solución válida es $x_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\approx3{,}303$.

b) $\log_2(x-3)-\log_2(2x+21)=1-\log_2(x-2)\rightarrow\frac{(x-3)(x-2)}{2x+21}=2\rightarrow$

$\rightarrow x^2-9x-36=0\rightarrow\begin{cases}x_1=-3\\x_2=12\end{cases}$

La única solución válida es $x_2=12$.

103. Calcula el valor de x en las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $4^x = \frac{1}{64}$

b) $2^{x-5} = 32$

c) $3^{6-x} = 27^{x-2}$

d) $32^{x-2} = 2$

e) $16^{2x-4} = 1$

f) $2^{x+1} = 8$

g) $2^{x+1} = 16$

h) $2^{x+1} = 128$

a) $4^x = \frac{1}{64} \rightarrow 4^x = 4^{-3} \rightarrow x = -3$

b) $2^{x-5} = 32 \rightarrow x - 5 = 5 \rightarrow x = 10$

c) $3^{6-x} = 27^{x-2} \rightarrow 6 - x = 3x - 6 \rightarrow x = 3$

d) $32^{x-2} = 2 \rightarrow 5x - 10 = 1 \rightarrow x = \frac{11}{5}$

e) $16^{2x-4} = 1 \rightarrow 2^{4(2x-4)} = 2^0 \rightarrow 8x = 16 \rightarrow x = 2$

f) $2^{x+1} = 8 \rightarrow x + 1 = 3 \rightarrow x = 2$

g) $2^{x+1} = 16 \rightarrow x + 1 = 4 \rightarrow x = 3$

h) $2^{x+1} = 128 \rightarrow x + 1 = 7 \rightarrow x = 6$

104. Resuelve las ecuaciones exponenciales que aparecen a continuación.

a) $64^{2x-5} = 16^{x-2}$

b) $125^{x-3} = 25^{x-3}$

c) $5^{x-3} = 1$

d) $2^{x+1} = \frac{1}{8}$

e) $2^{x+1} = \frac{1}{16}$

f) $2^{x+1} = \frac{1}{128}$

a) $64^{2x-5} = 16^{x-2} \rightarrow 3(2x-5) = 2(x-2) \rightarrow 6x - 15 = 2x - 4 \rightarrow x = \frac{11}{4}$

b) $125^{x-3} = 25^{x-3} \rightarrow$ No existe solución real.

c) $5^{x-3} = 1 \rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

d) $2^{x+1} = \frac{1}{8} \rightarrow x + 1 = -3 \rightarrow x = -4$

e) $2^{x+1} = \frac{1}{16} \rightarrow x + 1 = -4 \rightarrow x = -5$

f) $2^{x+1} = \frac{1}{128} \rightarrow x + 1 = -7 \rightarrow x = -8$

105. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $3 \cdot 27^{x-2} = 9^x$

b) $5^{x+4} = 125^{x-4}$

c) $\frac{1}{81^{6-x}} = 3^{4-x}$

d) $32^{2x-3} = 2^{x+3}$

e) $125^{x+2} = 5^{2x}$

f) $256^x = 4 \cdot 4^{2x-3}$

a) $3 \cdot 27^{x-2} = 9^x \rightarrow 3^{3x-6+1} = 3^{2x} \rightarrow 3x - 5 = 2x \rightarrow x = 5$

b) $5^{x+4} = 125^{x-4} \rightarrow x + 4 = 3x - 12 \rightarrow x = 8$

c) $\frac{1}{81^{6-x}} = 3^{4-x} \rightarrow 3^{4(x-6)} = 3^{4-x} \rightarrow 4x - 24 = 4 - x \rightarrow x = \frac{28}{5}$

d) $32^{2x-3} = 2^{x+3} \rightarrow 10x - 15 = x + 3 \rightarrow x = 2$

e) $125^{x+2} = 5^{2x} \rightarrow 3x + 6 = 2x \rightarrow x = -6$

f) $256^x = 4 \cdot 4^{2x-3} \rightarrow 4^4 = 4^{2x-2} \rightarrow 6 = 2x \rightarrow x = 3$

106. **Opera con las potencias y calcula el valor de x en las siguientes ecuaciones exponenciales.**

a) $3^{x^3-\frac{x^2}{10}-\frac{4x}{5}+\frac{3}{10}} = 1$

b) $\dfrac{2^{x^3-x^2-5x}}{8} = 1$

a) $3^{x^3-\frac{x^2}{10}-\frac{4x}{5}+\frac{3}{10}} = 1 \rightarrow 10x^3 - x^2 - 8x + 3 = 0 \rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = \dfrac{1}{2} \quad x_3 = \dfrac{3}{5}$

b) $\dfrac{2^{x^3-x^2-5x}}{8} = 1 \rightarrow 2^{x^3-x^2-5x-3} = 2^0 \rightarrow x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

107. **Resuelve las ecuaciones exponenciales que aparecen a continuación.**

a) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^3-\frac{34x^2}{5}-\frac{48x}{5}} = 1$

b) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{x^3} = \left(\dfrac{7}{3}\right)^{-\frac{1}{3}(2x^2+16x)}$

c) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{5-x^3} \cdot \sqrt{7^{13x^2+13x}} = 1$

a) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^3-\frac{34x^2}{5}-\frac{48x}{5}} = 1 \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{5x^3-34x^2-48x}{5}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^0 \rightarrow 5x^3 - 34x^2 - 48x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -\dfrac{6}{5} \quad x_3 = 8$

b) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{x^3} = \left(\dfrac{7}{3}\right)^{-\frac{1}{3}(2x^2+16x)} \rightarrow x^3 = \dfrac{1}{3}(2x^2 + 16x) \rightarrow x^3 - \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{16}{3}x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \dfrac{8}{3} \quad x_3 = -2$

c) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{5-x^3} \cdot \sqrt{7^{13x^2+13x}} = 1 \rightarrow 7^{x^3-5} \cdot 7^{\frac{13x^2+13x}{2}} = 7^0 \rightarrow 2x^3 + 13x^2 + 13x - 10 = 0 \rightarrow x_1 = -5 \quad x_2 = \dfrac{1}{2} \quad x_3 = -2$

108. **Halla el valor de la incógnita x, suponiendo que el resto de letras que aparecen son constantes.**

a) $a^{2x-1} = a^2$

b) $m^{x-3} = (m^2)^{2x}$

c) $(3a)^{2x-5} = 9a^2$

d) $(p - 3)^{5x} = p^2 - 6p + 9$

e) $(a^2 + 2ab + b^2)^2 = (a + b)^{2x}$

f) $(9 - 2x - x^2)^{x-3} = 1$

g) $(x + 1)^{x-1} = 1$

a) $a^{2x-1} = a^2 \rightarrow 2x - 1 = 2 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

b) $m^{x-3} = (m^2)^{2x} \rightarrow x - 3 = 4x \rightarrow x = -1$

c) $(3a)^{2x-5} = 9a^2 \rightarrow (3a)^{2x-5} = (3a)^2 \rightarrow 2x - 5 = 2 \rightarrow x = \dfrac{7}{2}$

d) $(p-3)^{5x} = p^2 - 6p + 9 \rightarrow (p-3)^{5x} = (p-3)^2 \rightarrow 5x = 2 \rightarrow x = \dfrac{2}{5}$

e) $(a^2 + 2ab + b^2)^2 = (a+b)^{2x} \rightarrow (a+b)^4 = (a+b)^{2x} \rightarrow 4 = 2x \rightarrow x = 2$

f) $(9 - 2x - x^2)^{x-3} = 1 \rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 3 \\ 9 - 2x - x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x_2 = -4 \\ x_3 = 2 \end{cases} \end{cases}$

g) $(x+1)^{x-1} = 1 \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \\ x + 1 = 1 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$

109. Resuelve estas ecuaciones exponenciales ayudándote de un cambio de variable.

a) $9^{2x} - 3 \cdot 9^{x} + 2 = 0$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = 35$

c) $7^{4x} - 3 \cdot 7^{3x} - 5 \cdot 7^{2x} + 13 \cdot 7^{x} + 6 = 0$

d) $\left(\frac{5}{6}\right)^{4x} - 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x} + 1 = 0$

a) $$9^{2x} - 3 \cdot 9^{x} + 2 = 0 \xrightarrow{9^x = t} t^2 - 3t + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \rightarrow 9^x = 1 \rightarrow x = 0 \\ t_2 = 2 \rightarrow 9^x = 2 \rightarrow x = \dfrac{\log 2}{\log 9} \approx 0{,}3155 \end{cases}$$

b) $$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = 35 \xrightarrow{\left(\frac{2}{3}\right)^x = t} t^2 - 2t - 35 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = -5 \rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = -5 \rightarrow \text{Imposible} \\ t_2 = 7 \rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 7 \rightarrow x = \dfrac{\log 7}{\log \frac{2}{3}} \approx -4{,}8 \end{cases}$$

La solución obtenida se descarta, pues no verifica la ecuación. Por tanto, esta ecuación no tiene solución.

c) $$7^{4x} - 3 \cdot 7^{3x} - 5 \cdot 7^{2x} + 13 \cdot 7^{x} + 6 = 0 \xrightarrow{7^x = t} t^4 - 3t^3 - 5t^2 + 13t + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \rightarrow 7^x = -2 \rightarrow \text{Imposible} \\ t_2 = 3 \rightarrow 7^x = 3 \rightarrow x = \dfrac{\log 3}{\log 7} \approx 0{,}5646 \\ t_3 = 1 - \sqrt{2} \rightarrow 7^x = 1 - \sqrt{2} \rightarrow \text{Imposible} \\ t_4 = 1 + \sqrt{2} \rightarrow 7^x = 1 + \sqrt{2} \rightarrow \text{Imposible} \end{cases}$$

d) $$\left(\frac{5}{6}\right)^{4x} - 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x} + 1 = 0 \xrightarrow{\left(\frac{5}{6}\right)^x = t} t^4 - 2t + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \rightarrow \left(\dfrac{5}{6}\right)^x = 1 \rightarrow x = 0 \\ t_2 = 0{,}54369 \rightarrow \left(\dfrac{5}{6}\right)^x = 0{,}54369 \rightarrow x = \dfrac{\log 0{,}54369}{\log\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 3{,}3423 \end{cases}$$

110. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales con la ayuda de un cambio de variable.

a) $3^{3x} + 5 \cdot 3^{2x-1} - 11 \cdot 3^{x-1} + 1 = 0$

b) $4\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = 9 \cdot 2^{-2x} - 2^{-x+1}$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x+1} + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$

a) $$3^{3x} + 5 \cdot 3^{2x-1} - 11 \cdot 3^{x-1} + 1 = 0 \xrightarrow{3^x = t} t^3 + \frac{5}{3}t^2 - \frac{11}{3}t + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \rightarrow 3^x = 1 \rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = -3 \rightarrow 3^x = -3 \rightarrow \text{Imposible} \\ t_3 = \dfrac{1}{3} \rightarrow 3^x = \dfrac{1}{3} \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

b) $$4\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = 9 \cdot 2^{-2x} - 2^{-x+1} \rightarrow 4 \cdot (2^x)^{-3} - 9 \cdot (2^x)^{-2} + 2 \cdot (2^x)^{-1} = 0 \xrightarrow{2^x = t} \frac{4}{t^3} - \frac{9}{t^2} + \frac{2}{t} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2t^2 - 9t + 4 = 0 \rightarrow 2^x = \begin{cases} t_1 = 4 \rightarrow 2^x = 4 \rightarrow x_1 = 2 \\ t_2 = \dfrac{1}{2} \rightarrow 2^x = \dfrac{1}{2} \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

c) $$\left(\frac{3}{2}\right)^{3x+1} + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} \xrightarrow{\left(\frac{3}{2}\right)^x = t} \frac{3}{2}t^3 - t^2 - \frac{3}{2}t + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = 1 \rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = -1 \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = -1 \rightarrow \text{Imposible} \\ t_3 = \dfrac{2}{3} \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \dfrac{2}{3} \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

111. Indica si $x = 2$ está entre las soluciones de las siguientes inecuaciones.

a) $3(x - 2) > 1 - 3(2x - 3)$
b) $5(4 - 3x) + 3 \leq 1 + 3x$
c) $2(x - 3) - 4(3 - 2x) > 0$

a) $3(x-2) > 1-3(2x-3) \rightarrow 3(2-2) > 1-3(2\cdot 2-3) \rightarrow 0 > -2$
$x = 2$ es solución de la inecuación.

b) $5(4-3x)+3 \leq 1+3x \rightarrow 5(4-3\cdot 2)+3 \leq 1+3\cdot 2 \rightarrow -7 \leq 7$
$x = 2$ es solución de la inecuación.

c) $2(x-3)-4(3-2x) > 0 \rightarrow 2(2-3)-4(3-2\cdot 2) > 0 \rightarrow 2 > 0$
$x = 2$ es solución de la inecuación.

112. Halla la solución de las inecuaciones siguientes.

a) $2x - 30 \leq 5x + 3$
b) $2x - 6 < 5x + 18$
c) $11 - 3x \leq 23$
d) $3x + 2 \geq x + 10$
e) $6 - 5x > 2x + 3$
f) $-14x + 5 \leq x$

a) $2x-30 \leq 5x+3 \rightarrow -33 \leq 3x \rightarrow x \geq -11, \quad x \in [-11, +\infty)$

b) $2x-6 < 5x+18 \rightarrow -24 < 3x \rightarrow x > -8, \quad x \in (-8, +\infty)$

c) $11-3x \leq 23 \rightarrow -12 \leq 3x \rightarrow x \geq -4, \quad x \in [-4, +\infty)$

d) $3x+2 \geq x+10 \rightarrow 2x \geq 8 \rightarrow x \geq 4, \quad x \in [4, +\infty)$

e) $6-5x > 2x+3 \rightarrow 3 > 7x \rightarrow x < \frac{3}{7}, \quad x \in \left(-\infty, \frac{3}{7}\right)$

f) $-14x+5 \leq x \rightarrow 5 \leq 15x \rightarrow x \geq \frac{1}{3}, \quad x \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

113. Resuelve las inecuaciones que aparecen a continuación.

a) $3(x - 5) + 4(x - 2) \leq 5$
b) $x - 2(x + 2) - 3(2 - 4x) \leq 9$
c) $4(10 - 2x) - 3(2x + 1) \geq -3(x + 1) - (2 - 3x)$

a) $3(x-5)+4(x-2) \leq 5 \rightarrow 7x \leq 28 \rightarrow x \leq 4, \quad x \in (-\infty, 4]$

b) $x-2(x+2)-3(2-4x) \leq 9 \rightarrow 11x \leq 19 \rightarrow x \leq \frac{19}{11}, \quad x \in \left(-\infty, \frac{19}{11}\right]$

c) $4(10-2x)-3(2x+1) \geq -3(x+1)-(2-3x) \rightarrow 42 \geq 14x \rightarrow x \leq 3, \quad x \in (-\infty, 3]$

114. Encuentra la solución de las siguientes inecuaciones.

a) $\frac{x}{3} + 1 < \frac{3x}{4} + 3$

b) $\frac{3(x - 1)}{2} + x \leq \frac{x}{3} + 8$

c) $\frac{x - 1}{10} < \frac{x + 2}{40} + \frac{x - 2}{30}$

a) $\frac{x}{3}+1 < \frac{3x}{4}+3 \rightarrow 4x+12 < 9x+36 \rightarrow -24 < 5x \rightarrow x > -\frac{24}{5}, \quad x \in \left(-\frac{24}{5}, +\infty\right)$

b) $\frac{3(x-1)}{2}+x \leq \frac{x}{3}+8 \rightarrow 9x-9+6x \leq 2x+48 \rightarrow 13x \leq 57 \rightarrow x \leq \frac{57}{13}, \quad x \in \left(-\infty, \frac{57}{13}\right]$

c) $\frac{x-1}{10} < \frac{x+2}{40}+\frac{x-2}{30} \rightarrow 12x-12 < 3x+6+4x-8 \rightarrow 5x < 10 \rightarrow x < 2, \quad x \in (-\infty, 2)$

115. **¿Cuál es la solución de estas inecuaciones?**

a) $x^2 - x - 6 < 0$
b) $-x^2 - 2x + 8 < 0$
c) $2x^2 + 5x + 6 < 0$
d) $-x^2 + 3x - 4 < 0$
e) $2x^2 + 5x - 3 > 0$
f) $6x^2 + 31x + 18 \leq 0$

a) Resolvemos la ecuación: $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 + 10 - 6 > 0 \rightarrow (-\infty, -2)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 0 - 6 < 0 \rightarrow (-2, 3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 10 - 6 > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-2, 3)$.

b) Resolvemos la ecuación: $-x^2 - 2x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow -(-10)^2 - 2 \cdot (-10) + 8 < 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow -0^2 - 2 \cdot 0 + 8 > 0 \rightarrow (-4, 2)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow -10^2 - 2 \cdot 10 + 8 < 0 \rightarrow (2, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$.

c) Resolvemos la ecuación: $2x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow$ No tiene solución real.

El primer miembro de la ecuación siempre toma valores positivos.

No tiene solución.

d) Resolvemos la ecuación: $-x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow$ No tiene solución real.

El primer miembro de la ecuación siempre toma valores negativos.

Es una identidad.

e) Resolvemos la ecuación: $2x^2 + 5x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow 2 \cdot (-10)^2 + 5 \cdot (-10) - 3 > 0 \rightarrow (-\infty, -3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 3 < 0 \rightarrow \left(-3, \dfrac{1}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 3 > 0 \rightarrow \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -3) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

f) Resolvemos la ecuación: $6x^2 + 31x + 18 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{9}{2} \\ x_2 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = -1 \qquad x = 0$

Si $x = -10 \rightarrow 6(-10)^2 + 31 \cdot (-10) + 18 > 0 \rightarrow \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = -1 \rightarrow 6 \cdot (-1)^2 + 31 \cdot (-1) + 18 < 0 \rightarrow \left(-\frac{9}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 6 \cdot 0^2 + 31 \cdot 0 + 18 > 0 \rightarrow \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left[-\frac{9}{2}, -\frac{2}{3}\right]$.

116. Halla la solución de las inecuaciones que aparecen a continuación.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 > 0$ b) $x^4 + 8x^2 - 20 \leq 0$

a) $x^4 - 5x^2 + 4 > 0 \rightarrow z^2 - 5z + 4 > 0 \rightarrow z_1 = 1 \quad z_2 = 4$

$z_1 = 1 \rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1$

$z_2 = 4 \rightarrow x_3 = -2 \quad x_4 = 2$

Nos quedan los intervalos $(-\infty, -2), (-2, -1), (-1, 1), (1, 2), (2, +\infty)$, veamos cuáles cumplen la inecuación tomando un punto de cada uno y viendo si la satisfacen:

$x = -10 \rightarrow (-10)^4 - 5(-10)^2 + 4 = 9504 > 0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x = -1{,}5 \rightarrow (-1{,}5)^4 - 5(-1{,}5)^2 + 4 = -2{,}1875 < 0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x = 0 \rightarrow (0)^4 - 5(0)^2 + 4 = 4 > 0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x = 1{,}5 \rightarrow (1{,}5)^4 - 5(1{,}5)^2 + 4 = -2{,}1875 < 0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x = 10 \rightarrow (10)^4 - 5(10)^2 + 4 = 9504 > 0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

Veamos también qué ocurre en los extremos de los intervalos:

$x = -2 \rightarrow (-2)^4 - 5(-2)^2 + 4 = 0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x = -1 \rightarrow (-1)^4 - 5(-1)^2 + 4 = 0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x = 1 \rightarrow (1)^4 - 5(1)^2 + 4 = 0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x = 2 \rightarrow (2)^4 - 5(2)^2 + 4 = 0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$.

b) $x^4 + 8x^2 - 20 \leq 0 \rightarrow z^2 + 8z - 20 \leq 0 \rightarrow z_1 = -10 \quad z_2 = 2$

$z_1 = -10 \rightarrow$ No tiene soluciones reales.

$z_2 = 2 \rightarrow x_1 = -\sqrt{2} \quad x_2 = \sqrt{2}$

Nos quedan los intervalos $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ y $\left(\sqrt{2}, +\infty\right)$, veamos cuáles cumplen la inecuación tomando un punto de cada uno y viendo si la satisfacen:

$x = -10 \rightarrow (-10)^4 + 8(-10)^2 - 20 = 10\,780 > 0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x = 0 \rightarrow (0)^4 + 8(0)^2 - 20 = -20 \leq 0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x = 10 \rightarrow (10)^4 + 8(10)^2 - 20 = 10780 > 0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

Veamos también qué ocurre en los extremos de los intervalos:

$x=-\sqrt{2} \rightarrow \left(-\sqrt{2}\right)^4+8\left(-\sqrt{2}\right)^2-20=0\leq 0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x=\sqrt{2} \rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^4+8\left(\sqrt{2}\right)^2-20=0\leq 0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

117. Resuelve las inecuaciones que aparecen a continuación.

a) $x^2+6x-1<3x^2+3x-6$

b) $2x^2+25x>x(x-10)$

c) $x^2-(2x+1)(x-1)\leq 7$

d) $(x-1)^2<(2x+1)^2-10$

a) $x^2+6x-1<3x^2+3x-6 \rightarrow 2x^2-3x-5>0 \rightarrow x_1=-1 \quad x_2=\dfrac{5}{2}$

Nos quedan los intervalos $(-\infty,-1), \left(-1,\dfrac{5}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$, veamos cuáles cumplen la inecuación tomando un punto de cada uno y viendo si la satisfacen:

$x=-10 \rightarrow 2(-10)^2-3(-10)-5=225>0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x=0 \rightarrow 2(0)^2-3(0)-5=-5<0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=10 \rightarrow 2(10)^2-3(10)-5=165>0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

Veamos también qué ocurre en los extremos de los intervalos:

$x=-1 \rightarrow 2(-1)^2-3(-1)-5=0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=\dfrac{5}{2} \rightarrow 2\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-3\left(\dfrac{5}{2}\right)-5=0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty,-1)\cup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$.

b) $2x^2+25x>x(x-10) \rightarrow x^2+35x>0 \rightarrow x_1=-35 \quad x_2=0$

Nos quedan los intervalos $(-\infty,-35), (-35,0)$ y $(0,+\infty)$, veamos cuáles cumplen la inecuación tomando un punto de cada uno y viendo si la satisfacen:

$x=-100 \rightarrow (-100)^2+35(-100)=6500>0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x=-10 \rightarrow (-10)^2+35(-10)=-250<0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=100 \rightarrow (100)^2+35(100)=13\,500>0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

Veamos también qué ocurre en los extremos de los intervalos:

$x=-35 \rightarrow (-35)^2+35(-35)=0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=0 \rightarrow (0)^2+35(0)=0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty,-35)\cup(0,+\infty)$.

c) $x^2-(2x+1)\cdot(x-1)\leq 7 \rightarrow x^2-x+6\geq 0 \rightarrow$ No tiene soluciones reales.

Entonces, o todos los puntos cumplen la inecuación o ninguno de ellos lo hace.

Por ejemplo, tomemos $x=0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es todo el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

d) $(x-1)^2 < (2x+1)^2 - 10 \rightarrow 3x^2+6x-10>0 \rightarrow x_1 = \frac{-3-\sqrt{39}}{3} \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{39}}{3}$

Nos quedan los intervalos $\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{39}}{3}\right), \left(\frac{-3-\sqrt{39}}{3}, \frac{-3+\sqrt{39}}{3}\right)$ y $\left(\frac{-3+\sqrt{39}}{3}, +\infty\right)$, veamos cuáles cumplen la inecuación tomando un punto de cada uno y viendo si la satisfacen:

$x=-10 \rightarrow 3(-10)^2+6(-10)-10=230>0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x=0 \rightarrow 3(0)^2+6(0)-10=-10<0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=10 \rightarrow 3(10)^2+6(10)-10=350>0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

Veamos también qué ocurre en los extremos de los intervalos:

$x = \frac{-3-\sqrt{39}}{3} \rightarrow 3\left(\frac{-3-\sqrt{39}}{3}\right)^2 + 6\left(\frac{-3-\sqrt{39}}{3}\right) - 10 = 0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x = \frac{-3+\sqrt{39}}{3} \rightarrow 3\left(\frac{-3+\sqrt{39}}{3}\right)^2 + 6\left(\frac{-3+\sqrt{39}}{3}\right) - 10 = 0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{39}}{3}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{39}}{3}, +\infty\right)$.

118. Determina las soluciones de estas inecuaciones.

a) $\frac{x+2}{3} + \frac{x(x-1)}{5} > 0$

b) $\frac{3x-1}{2} - \frac{x-x^2}{3} + 1 < 0$

c) $x - \frac{1-2x}{3} - \frac{2x^2+1}{4} \geq 5$

d) $3 - \frac{2x-3}{2} + \frac{16x+x^2}{3} \geq 0$

e) $\frac{x-1}{4} - \frac{12x-x^2}{3} \geq \frac{2x^2+1}{3} - x$

a) $\frac{x+2}{3} + \frac{x(x-1)}{5} > 0 \rightarrow 5x+10+3x^2-3x>0 \rightarrow 3x^2+2x+10>0$

El primer miembro de la inecuación es siempre positivo, por lo que siempre se cumple. Es cierta para todos los números reales.

b) $\frac{3x-1}{2} - \frac{x-x^2}{3} + 1 < 0 \rightarrow 9x-3-2x+2x^2+6<0 \rightarrow 2x^2+7x+3<0$

Resolvemos la ecuación:

$$2x^2+7x+3=0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=-10 \qquad x=-1 \qquad x=0$

Si $x=-10 \rightarrow 2\cdot(-10)^2+7\cdot(-10)+3>0 \rightarrow (-\infty, -3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x=-1 \rightarrow 2\cdot(-1)^2+7\cdot(-1)+3<0 \rightarrow \left(-3, -\frac{1}{2}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x=0 \rightarrow 2\cdot 0^2+7\cdot 0+3>0 \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$.

c) $x - \frac{1-2x}{3} - \frac{2x^2+1}{4} \geq 5 \rightarrow 12x - 4 + 8x - 6x^2 - 3 \geq 60 \rightarrow -6x^2 + 20x - 67 \geq 0$

Resolvemos la ecuación:

$$-6x^2 + 20x - 67 = 0$$

No tiene solución real. Como el primer miembro de la ecuación toma siempre valores negativos, la inecuación no tiene solución.

d) $3 - \frac{2x-3}{2} + \frac{16x+x^2}{3} \geq 0 \rightarrow 18 - 6x + 9 + 32x + 2x^2 \geq 0$

$\rightarrow 2x^2 + 26x + 27 \geq 0$

Resolvemos la ecuación:

$$2x^2 + 26x + 27 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-13-\sqrt{115}}{2} \\ x_2 = \frac{-13+\sqrt{115}}{2} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = -5 \qquad x = 0$

Si $x = -10 \rightarrow 2 \cdot (-10)^2 + 26 \cdot (-10) + 27 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \frac{-13-\sqrt{115}}{2}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = -5 \rightarrow \cdot 2 \cdot (-5)^2 + 26 \cdot (-5) + 27 < 0 \rightarrow \left(\frac{-13-\sqrt{115}}{2}, \frac{-13+\sqrt{115}}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow \cdot 2 \cdot 0^2 + 26 \cdot 0 + 27 > 0 \rightarrow \left(\frac{-13+\sqrt{115}}{2}, +\infty\right)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \frac{-13-\sqrt{115}}{2}\right] \cup \left[\frac{-13+\sqrt{115}}{2}, +\infty\right)$.

e) $\frac{x-1}{4} - \frac{12x-x^2}{3} \geq \frac{2x^2+1}{3} - x \rightarrow 4x^2 + 33x + 7 \geq 0$

Resolvemos la ecuación:

$$4x^2 + 33x + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-33-\sqrt{977}}{8} \\ x_2 = \frac{-33+\sqrt{977}}{8} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = -5 \qquad x = 0$

Si $x = -10 \rightarrow 4 \cdot (-10)^2 + 33 \cdot (-10) + 7 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \frac{-33-\sqrt{977}}{8}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = -5 \rightarrow 4 \cdot (-5)^2 + 33 \cdot (-5) + 7 < 0 \rightarrow \left(\frac{-33-\sqrt{977}}{8}, \frac{-33+\sqrt{977}}{8}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 4 \cdot 0^2 + 33 \cdot 0 + 7 > 0 \rightarrow \left(\frac{-33+\sqrt{977}}{8}, +\infty\right)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \frac{-33-\sqrt{977}}{8}\right] \cup \left[\frac{-33+\sqrt{977}}{8}, +\infty\right)$.

119. Resuelve estas inecuaciones que contienen fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x+3}{x-5} < 0$

b) $\dfrac{2x-3}{x+3} < 0$

c) $\dfrac{-x+1}{2-3x} > 0$

d) $\dfrac{2-x}{2x+5} - 1 > 0$

a) $\dfrac{x+3}{x-5} < 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} x+3>0 \\ x-5<0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x>-3 \\ x<5 \end{matrix}\right\}$

$(-3, 5)$

b) $\dfrac{2x-3}{x+3} < 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} 2x-3<0 \\ x+3>0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x<\dfrac{3}{2} \\ x>-3 \end{matrix}\right\}$

$\left(-3, \dfrac{3}{2}\right)$

c) $\dfrac{-x+1}{2-3x} > 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} -x+1<0 \\ 2-3x>0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x>1 \\ x<\dfrac{2}{3} \end{matrix}\right\}$

$\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

d) $\dfrac{2-x}{2x+5} - 1 > 0 \rightarrow \dfrac{-3x-3}{2x+5} > 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} x<-1 \\ x>-\dfrac{5}{2} \end{matrix}\right\}$

$\left(-\dfrac{5}{2}, -1\right)$

120. Encuentra las soluciones de las siguientes inecuaciones.

a) $\dfrac{x^2-1}{x+1} \leq 0$

b) $\dfrac{-x^2+3}{2x-3} < 0$

c) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-4} > 0$

d) $\dfrac{-x+3}{2x^2-18} \geq 0$

a) $\dfrac{x^2-1}{x+1} \leq 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} x^2-1=0 \\ x+1=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-1 \quad x_2=1 \\ x_3=x_1=-1 \end{matrix}\right\}$

Nos quedan los intervalos $(-\infty,-1), (-1,1)$ y $(1,+\infty)$, veamos cuáles cumplen la inecuación tomando un punto de cada uno y viendo si la satisfacen:

$x=-10 \rightarrow \dfrac{(-10)^2-1}{(-10)+1} = \dfrac{99}{-9} = -11 < 0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x=0 \rightarrow \dfrac{(0)^2-1}{(0)+1} = \dfrac{-1}{1} = -1 < 0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x=10 \rightarrow \dfrac{(10)^2-1}{(10)+1} = \dfrac{99}{11} = 9 > 0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

Veamos también qué ocurre en los extremos de los intervalos:

$x=-1 \rightarrow \dfrac{(-1)^2-1}{(-1)+1} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ No existe solución.

$x=1 \rightarrow \dfrac{(1)^2-1}{(1)+1} = \dfrac{0}{2} = 0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty,-1) \cup (-1,1]$.

b) $\frac{-x^2+3}{2x-3}<0 \rightarrow \left.\begin{array}{r}-x^2+3=0\\ 2x-3=0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{ll}x_1=-\sqrt{3} & x_2=\sqrt{3}\\ x=\frac{3}{2} & \end{array}\right\}$

Nos quedan los intervalos $(-\infty,-\sqrt{3}),\left(-\sqrt{3},\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2},\sqrt{3}\right)$ y $(\sqrt{3},+\infty)$, veamos cuáles cumplen la inecuación tomando un punto de cada uno y viendo si la satisfacen:

$x=-10 \rightarrow \frac{-(-10)^2+3}{2(-10)-3}=\frac{-97}{-23}=\frac{97}{23}>0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=0 \rightarrow \frac{-(0)^2+3}{2(0)-3}=\frac{3}{-3}=-1<0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x=1{,}6 \rightarrow \frac{-(1{,}6)^2+3}{2(1{,}6)-3}=\frac{0{,}44}{0{,}2}=\frac{11}{5}>0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=10 \rightarrow \frac{-(10)^2+3}{2(10)-3}=\frac{-97}{17}=-\frac{97}{17}<0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

Veamos también qué ocurre en los extremos de los intervalos:

$x=-\sqrt{3} \rightarrow \frac{-\left(-\sqrt{3}\right)^2+3}{2\left(-\sqrt{3}\right)-3}=\frac{0}{2\sqrt{3}+3}=0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=\frac{3}{2} \rightarrow \frac{-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3}{2\left(\frac{3}{2}\right)-3}=\frac{\frac{3}{4}}{0}=0 \rightarrow$ No existe solución.

$x=\sqrt{3} \rightarrow \frac{-\left(\sqrt{3}\right)^2+3}{2\left(\sqrt{3}\right)-3}=\frac{0}{2\sqrt{3}-3}=0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$.

c) $\frac{x^2-3x}{x^2-4}>0 \rightarrow \left.\begin{array}{r}x^2-3x=0\\ x^2-4=0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{ll}x_1=0 & x_2=3\\ x_3=-2 & x_4=2\end{array}\right\}$

Nos quedan los intervalos $(-\infty,-2),(-2,0),(0,2),(2,3)$ y $(3,+\infty)$, veamos cuáles cumplen la inecuación tomando un punto de cada uno y viendo si la satisfacen:

$x=-10 \rightarrow \frac{(-10)^2-3(-10)}{(-10)^2-4}=\frac{130}{96}=\frac{65}{48}>0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x=-1 \rightarrow \frac{(-1)^2-3(-1)}{(-1)^2-4}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}<0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=1 \rightarrow \frac{(1)^2-3(1)}{(1)^2-4}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}>0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x=2{,}5 \rightarrow \frac{(2{,}5)^2-3(2{,}5)}{(2{,}5)^2-4}=\frac{-1{,}25}{2{,}25}=-\frac{5}{9}<0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=10 \rightarrow \frac{(10)^2-3(10)}{(10)^2-4}=\frac{70}{96}=\frac{35}{48}>0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

Veamos también qué ocurre en los extremos de los intervalos:

$x=-2 \to \frac{(-2)^2-3(-2)}{(-2)^2-4}=\frac{10}{0} \to$ No existe solución.

$x=0 \to \frac{(0)^2-3(0)}{(0)^2-4}=\frac{0}{-4}=0 \to$ No cumple la inecuación.

$x=2 \to \frac{(2)^2-3(2)}{(2)^2-4}=\frac{-2}{0} \to$ No existe solución.

$x=3 \to \frac{(3)^2-3(3)}{(3)^2-4}=\frac{0}{5}=0 \to$ No cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty,-2)\cup(0,2)\cup(3,+\infty)$.

d) $\frac{-x+3}{2x^2-18}\geq 0 \to \left.\begin{array}{r}-x+3=0\\ 2x^2-18=0\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l}x=3\\ x_1=-3 \quad x_2=3\end{array}\right\}$

Nos quedan los intervalos $(-\infty,-3),(-3,3)$ y $(3,+\infty)$, veamos cuáles cumplen la inecuación tomando un punto de cada uno y viendo si la satisfacen:

$x=-10 \to \frac{-(-10)+3}{2(-10)^2-18}=\frac{13}{182}=\frac{1}{14}>0 \to$ Cumple la inecuación.

$x=0 \to \frac{-(0)+3}{2(0)^2-18}=\frac{3}{-18}=-\frac{1}{6}<0 \to$ No cumple la inecuación.

$x=10 \to \frac{-(10)+3}{2(10)^2-18}=\frac{-7}{182}=-\frac{1}{26}<0 \to$ No cumple la inecuación.

Veamos también qué ocurre en los extremos de los intervalos:

$x=-3 \to \frac{-(-3)+3}{2(-3)^2-18}=\frac{6}{0} \to$ No existe solución.

$x=3 \to \frac{-(3)+3}{2(3)^2-18}=\frac{0}{0} \to$ No existe solución.

Por tanto, la solución es $(-\infty,-3)$.

121. Determina para qué valores de *x* es posible realizar las operaciones indicadas.

a) $\sqrt{5-3x}$

b) $\sqrt{x-3}$

c) $\sqrt{4-3x-x^2}$

d) $\log(2-5x)$

e) $\log(6-x-x^2)$

f) $\log(x^2-2^x+1)$

a) $5-3x\geq 0 \to 5\geq 3x \to x\leq\frac{5}{3} \to$ Se puede realizar la operación para valores de $x\in\left(-\infty,\frac{5}{3}\right]$.

b) $x-3\geq 0 \to x\geq 3 \to$ Se puede realizar la operación para valores de $x\in[3,+\infty)$.

c) $4-3x-x^2 \geq 0 \rightarrow (x+4)(x-1) \geq 0 \rightarrow$ La recta real queda dividida en tres intervalos: $(-\infty, -4)$, $(-4, 1)$ y $(1, +\infty)$

Tomando un punto de cada uno de ellos se obtienen los intervalos que satisfacen la inecuación:

$x=-5 \rightarrow (-5+4)(-5+1)=4 \geq 0 \rightarrow$ El intervalo $(-\infty, -4)$ sí satisface la inecuación.

$x=0 \rightarrow (0+4)(0-1)=-4 \leq 0 \rightarrow$ El intervalo $(-4, 1)$ no satisface la inecuación.

$x=2 \rightarrow (2+4)(2-1)=6 \geq 0 \rightarrow$ El intervalo $(1, +\infty)$ sí satisface la inecuación.

Los puntos $x=-4$ y $x=1$ están incluidos, pues son los que hacen 0 la inecuación.

Por tanto, los valores de *x* para los que se puede realizar la operación son $x \in (-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$.

d) $2-5x>0 \rightarrow 2>5x \rightarrow x<\frac{2}{5} \rightarrow$ Se puede realizar la operación para valores de $x \in \left(-\infty, \frac{2}{5}\right)$.

e) $6-x-x^2>0 \rightarrow (x+3)(x-2)>0 \rightarrow$ La recta real queda dividida en tres intervalos: $(-\infty, -3)$, $(-3, 2)$ y $(2, \infty)$

Tomando un punto de cada uno de ellos, se obtienen los intervalos que satisfacen la inecuación:

$x=-4 \rightarrow (-4+3)(-4-2)=6>0 \rightarrow$ El intervalo $(-\infty, -3)$ sí satisface la inecuación.

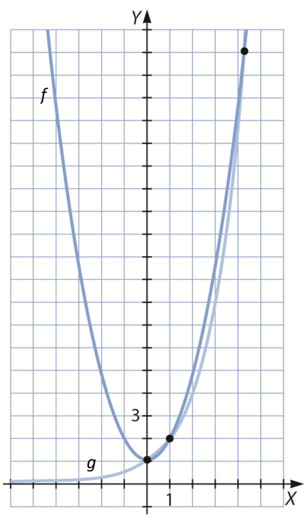
$x=0 \rightarrow (0+3)(0-2)=-6<0 \rightarrow$ El intervalo $(-3, 2)$ no satisface la inecuación.

$x=3 \rightarrow (3+3)(3-2)=6>0 \rightarrow$ El intervalo $(2, +\infty)$ sí satisface la inecuación.

Los puntos $x=-3$ y $x=2$ no están incluidos, pues son los que hacen 0 la inecuación, y por definición, no existe log 0.

Por tanto, los valores de *x* para los que se puede realizar la operación son $x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$.

f) $x^2-2^x+1>0 \rightarrow$ Para resolver esta inecuación no se ha estudiado en el curso un método particular. Por ello, las raíces de la ecuación $x^2-2^x+1=0$ se obtendrán representando gráficamente $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=2^x$
Sus puntos de corte serán las raíces de la ecuación: $x^2+1=2^x$.



Observando la gráfica se ve que los puntos de corte son $x=0$, $x=1$ y aproximadamente $x=4{,}255$. Por tanto, la recta real queda dividida en cuatro intervalos: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1;\ 4{,}255)$ y $(4{,}255;\ +\infty)$. Tomando un punto de cada uno de ellos, se obtienen los intervalos que satisfacen la inecuación:

$x=-1 \rightarrow 1-\frac{1}{2}+1>0 \rightarrow$ El intervalo $(-\infty, 0)$ sí satisface la inecuación.

$x=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4}-\sqrt{2}+1<0 \rightarrow$ El intervalo $(0, 1)$ no satisface la inecuación.

$x=3 \rightarrow 9-8+1>0 \rightarrow$ El intervalo $(1; 4{,}255)$ sí satisface la inecuación.

$x=5 \rightarrow 25-32+1<0 \rightarrow$ El intervalo $(4{,}255;\ +\infty)$ no satisface la inecuación.

Los puntos $x=0$, $x=1$ y $x=4{,}255$ no están incluidos, pues son los que hacen 0 la inecuación y, por definición, no existe log 0.

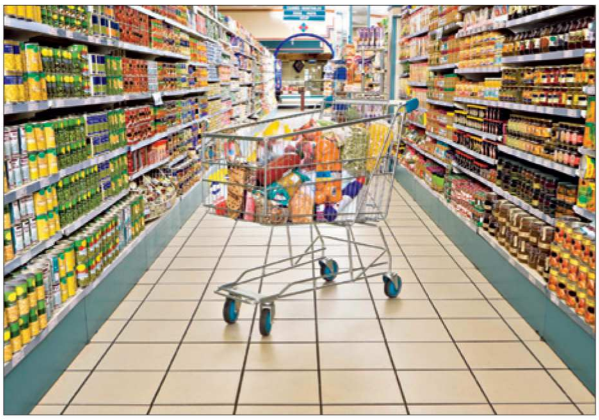
Por tanto, los valores de *x* para los que se puede realizar la operación son:

$x \in (-\infty, 0) \cup (1; 4{,}255)$

122. **El director de un supermercado ha observado que el número de clientes atendidos cada hora por un dependiente está relacionado con su experiencia. Ha estimado que ese número puede calcularse de forma aproximada con la función:**

$$C(d) = \frac{40d}{d+3}$$

donde d es el número de días que el dependiente lleva trabajando y C es el número de clientes atendidos en una hora.



a) ¿Cuántos clientes por hora atendería un dependiente que lleve trabajando dos días?

b) El director sabe que un dependiente empieza a ser rentable a la empresa cuando atiende a 32 clientes por hora. ¿Cuándo sucede eso?

c) Investiga lo que sucede con el número de clientes atendidos por dependientes que tienen mucha experiencia. ¿Puedes constatar alguna característica especial?

a) $C(2) = \frac{40 \cdot 2}{2+3} = 16 \rightarrow$ Un dependiente que lleve trabajando 2 días atenderá en una hora a 16 clientes.

b) $32 = \frac{40d}{d+3} \rightarrow 32d + 96 = 40d \rightarrow 8d = 96 \rightarrow d = 12 \rightarrow$ Un dependiente empieza a ser rentable a partir de 12 días trabajados.

c) Calculando el número de clientes atendidos por dependientes con mucha experiencia se observa que, como máximo, cada uno podrá atender a 40 clientes por hora:

$C(100) = \frac{40 \cdot 100}{100+3} = 38{,}835$, $C(500) = \frac{40 \cdot 500}{500+3} = 39{,}761$, $C(10\,000) = \frac{40 \cdot 10\,000}{10\,000+3} = 39{,}988$

123. **Determina la suma y el producto de las soluciones de esta ecuación.**

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

Encuentra las soluciones de la ecuación. ¿Puedes explicar lo que sucede?

El producto de las raíces es 4 y la suma es 9.

Las raíces son $x_1 = 2$ y $x_2 = 7$.

Si el coeficiente del término de segundo grado es 1, el producto de las raíces es el término independiente y la suma de las raíces es el opuesto al coeficiente del término de primer grado.

124. Estudia el valor de los coeficientes de la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ para que tenga cuatro, tres, dos, una o ninguna solución.

Analizamos el número de raíces de la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ a partir de las raíces obtenidas en la ecuación de segundo grado asociada, $az^2 + bz + c = 0$.

Si $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} = 0 \rightarrow z = \dfrac{-b}{2a} \rightarrow$ Si $\dfrac{-b}{2a} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

$\rightarrow$ Si $\dfrac{-b}{2a} = 0$ $(b = 0,\ c = 0) \rightarrow$ Tiene una solución: $x = 0$.

$\rightarrow$ Si $\dfrac{-b}{2a} > 0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones opuestas.

Si $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} > 0 \rightarrow$ La ecuación de segundo grado tiene dos soluciones.

Si las dos soluciones son negativas, la ecuación bicuadrada no tiene solución.

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0 \text{ y } \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

Si una solución es negativa y la otra es cero:

$c = 0$ y $\dfrac{-b}{a} < 0 \rightarrow$ Tiene una solución: $x = 0$.

Si una solución es positiva y la otra es cero:

$c = 0$ y $\dfrac{-b}{a} > 0 \rightarrow$ Tiene tres soluciones: $x = 0$, $x = \pm\sqrt{\dfrac{-b}{a}}$.

Si las dos soluciones son positivas, la ecuación bicuadrada tiene cuatro soluciones.

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > 0 \text{ y } \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > 0 \rightarrow \text{Tiene cuatro soluciones.}$$

$$x = \begin{cases} \pm\sqrt{\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \\ \pm\sqrt{\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \end{cases}$$

125. Hace cuatro años un individuo tenía la mitad más la tercera parte de la edad que tiene ahora. ¿Cuál es su edad?

Llamamos x a la edad actual del individuo y planteamos la ecuación:

$$x - 4 = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} \rightarrow 6x - 24 = 3x + 2x \rightarrow x = 24$$

Actualmente tiene 24 años.

126. Una lancha recorre 50 metros por minuto al bajar un río y 20 metros por minuto al subirlo. ¿A qué distancia se puede bajar por el río si solo se dispone de 3 horas para la excursión teniendo que volver al punto de partida?

Llamamos x a la distancia que podemos recorrer en 3 horas, es decir, en 180 minutos. Para recorrer 50 metros hacia arriba y hacia abajo se necesitan 3 minutos y medio (uno para bajar y dos y medio para subir), por lo que:

$$\left.\begin{array}{l} 50 \text{ m} \longrightarrow 3{,}5 \text{ min} \\ x \text{ m} \longrightarrow 180 \text{ min} \end{array}\right\} \rightarrow 9000 = \frac{7}{2}x \rightarrow x = \frac{18000}{7} = 2571{,}43 \text{ m}$$

Se pueden bajar hasta 2 571,43 metros del río.

127. **Descompón el número 60 en dos partes de manera que dividiendo una entre la otra el cociente dé 3 y el resto 8.**

Si x es uno de los sumandos, el otro será $60 - x$. Entonces, utilizando el algoritmo de la prueba de la división, se tiene la siguiente ecuación:

$x = 3(60 - x) + 8 \rightarrow x = 180 - 3x + 8 \rightarrow 4x = 188 \rightarrow x = 47$. Por tanto, el segundo sumando será 13.

128. **Halla dos números consecutivos, sabiendo que la suma de la cuarta parte y la quinta parte del menor y la suma de la tercera parte y la séptima parte del mayor son también números consecutivos.**

Llamando x al número menor, $x + 1$ es el número mayor consecutivo. Entonces:

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 1 = \frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{7} \rightarrow 105x + 84x + 420 = 140x + 140 + 60x + 60 \rightarrow 220 = 11x \rightarrow x = 20$$

Los números buscados son $x = 20,\ x + 1 = 21$.

129. **Un comerciante compra melones a 40 céntimos/kg y los vende a 60 céntimos/kg. Halla cuántos kilogramos de melones compró si se le estropearon 10 kg y obtuvo 42 €.**

Llamamos x al número de kilogramos de melones que compró:

$0{,}20(x - 10) = 42$

$x = 220$

El comerciante compró 220 kg de melones.

130. **Entre dos cubos A y B de igual capacidad se distribuyen en partes desiguales 10 litros de agua. El cubo A se llenaría si se vertiesen los dos tercios del agua contenida en B. Este se llenaría si se le añadiese la mitad del agua de A. Se desea saber cuánta es el agua contenida en cada cubo y su capacidad lleno.**

Si en el cubo A hay x litros de agua, entonces, el cubo B contendrá $10 - x$ litros.

La capacidad total del cubo A viene dada por $x + \frac{2}{3}(10 - x)$ y la capacidad del cubo B, por $(10 - x) + \frac{x}{2}$.

Como el volumen de ambos cubos es igual:

$$x + \frac{2}{3}(10 - x) = (10 - x) + \frac{x}{2} \rightarrow 6x + 40 - 4x = 60 - 6x + 3x \rightarrow 5x = 20 \rightarrow x = 4$$

El cubo A contiene 4 litros de agua; y el cubo B, 6 litros.

La capacidad total de ambos cubos es de $10 - 4 + \frac{4}{2} = 8$ litros.

131. **Una madre, para estimular a su hijo, le da un euro por cada ejercicio que haga bien. Si le sale mal, este debe darle 50 céntimos a su madre. Después de 20 ejercicios, el hijo lleva ganados 15,50 €. ¿Cuántos ejercicios hizo bien?**

Sean x el número de ejercicios que ha realizado mal. Entonces, $20 - x$ será el número de ejercicios bien resueltos. Como lleva ganados 15,50 €, se plantea y se resuelve la siguiente ecuación:

$(20 - x) - 0{,}5x = 15{,}50 \rightarrow 20 - 1{,}5x = 15{,}5 \rightarrow x = 1{,}5x = 4{,}5 \rightarrow x = 3$

Es decir, ha realizado 3 ejercicios mal y 17 bien.

132. **Si aumentáramos en 4 cm la arista de un cubo, su volumen se multiplicaría por 8. Halla la medida de la arista.**

Sea x la longitud en cm de la arista del cubo pequeño. Entonces, la arista del cubo grande medirá

$x+4$ cm. Como el volumen del cubo grande es 8 veces el del cubo pequeño, se tiene la siguiente ecuación:

$$8x^3=(x+4)^3 \to 8x^3=x^3+12x^2+48+64 \to 7x^3-12x^2-48-64=0 \to x=4$$

Luego, las aristas miden 4 cm y 8 cm, respectivamente.

133. **Si r y s son las soluciones de $ax^2+bx+c=0$, ¿cuáles son las soluciones de $cx^2-bx+a=0$?**

Por ser r y s las raíces de $ax^2+bx+c=0$, se tiene que $ax^2+bx+c=k(x-r)(x-s)=kx^2+(-kr-ks)x+(krs)$, de donde se obtienen los valores de a, b y c en función de k, r y s:

$$a=k \qquad b=-k(r+s) \qquad c=krs$$

Ahora se sustituyen los valores en la nueva ecuación y se resuelve:

$$cx^2-bx+a=0 \to krsx^2+k(r+s)x+k=0$$

$$x=\frac{-k(r+s)\pm\sqrt{(k(r+s))^2-4\cdot krs\cdot k}}{2\cdot krs} \to x=\frac{-k(r+s)\pm\sqrt{k^2s^2+2k^2rs+k^2r^2-4rsk^2}}{2krs} \to$$

$$\to x=\frac{-k(r+s)\pm\sqrt{k^2r^2-2rsk^2+k^2s^2}}{2krs} \to x=\frac{-k(r+s)\pm\sqrt{k^2(r-s)^2}}{2krs} \to$$

$$\to x=\frac{-k(r+s)\pm k(r-s)}{2krs} \to x=\frac{-(r+s)\pm(r-s)}{2rs} \to \begin{cases} x_1=\dfrac{-(r+s)-(r-s)}{2rs}=-\dfrac{1}{s} \\ x_2=\dfrac{-(r+s)+(r-s)}{2rs}=-\dfrac{1}{r} \end{cases}$$

Hay que contemplar el caso en el que r y s son cero. Para ello, se estudian varios casos y se despeja x de la ecuación $krsx^2+k(r+s)x+k=k\left(rsx^2+(r+s)x+1\right)=0$.

Se supone que $k\neq 0$, pues así se evita llegar a $0=0$.

Caso 1: $r\neq 0$ y $s\neq 0 \to$ Las raíces son $x_1=-\dfrac{1}{r}$ y $x_2=-\dfrac{1}{s}$

Caso 2: $r=0$ y $s\neq 0 \to sx+1=0 \to x=-\dfrac{1}{s}$

Caso 3: $r\neq 0$ y $s=0 \to rx+1=0 \to x=-\dfrac{1}{r}$

Caso 4: $r=0$ y $s=0 \to k=0 \to 1=0 \to$ No existe solución.

134. **En una empresa que se dedica a la fabricación de recipientes de cristal se ha calculado que para fabricar un tipo de vaso de vidrio hay unos gastos fijos de 3 000 € y un gasto en materia prima de 1,50 € por vaso. ¿Cuántos vasos se podrán fabricar en dicha fábrica con un gasto máximo de 7 000 €?**

Sea x el número máximo de vasos que se podrá fabricar. Entonces, como el gasto máximo permitido es de 7 000 €:

$$3000+1{,}5x\leq 7000 \to 1{,}5x\leq 4000 \to x\leq 2666{,}667$$

Por tanto, como máximo se podrán fabricar 2 666 vasos.

135. **Doblando 8 m de alambre se quiere formar un rectángulo. ¿Entre qué valores estará el área de ese rectángulo?**

Como el alambre tiene una longitud de 8 m, el semiperímetro del rectángulo será de 4 m.

Si x es la base del rectángulo, entonces $4 - x$ será su altura, con $x \in (0, 4)$.

El área del rectángulo viene determinada por la expresión $A = x(4 - x) = 4x - x^2$, que es una parábola, cuya imagen para $x \in (0, 4)$ es el intervalo $(0, 4]$.

Es decir, el área mínima es prácticamente nula, y el área máxima vale 4 m^2.

136. **Una madre de 24 años acaba de tener a su hijo. ¿Cuándo estará su edad entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{5}$ de la de su madre?**

	Actualidad	Dentro de *x* años
Madre	24	$24 + x$
Hijo	0	x

$$\frac{1}{5}(24+x) \le x \le \frac{2}{5}(24+x) \to \left.\begin{array}{r} x \le \frac{2}{5}(24+x) \\ \frac{1}{5}(24+x) \le x \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 5x \le 48 + 2x \\ 24 + x \le 5x \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x \le 16 \\ x \ge 6 \end{array}\right\}$$

Cuando el hijo tenga entre 6 y 16 años, su edad estará comprendida entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{5}$ de la de su madre.

137. **El triple de un número menos su mitad es siempre mayor que 3. ¿Qué números cumplen esta propiedad?**

$$3x - \frac{x}{2} > 3 \to 6x - x > 6 \to x > \frac{6}{5}$$

Los números que cumplen esta propiedad son los números mayores que $\frac{6}{5}$, es decir $x \in \left(\frac{6}{5}, +\infty\right)$.

138. **De un número se sabe que si a su cuadrado le restamos su mitad, se obtiene un número menor que 1. ¿Qué número puede ser?**

$$x^2 - \frac{x}{2} < 1 \to 2x^2 - x - 2 < 0 \to \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \approx 1{,}281 \\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \approx -0{,}781 \end{cases}$$

La recta real queda dividida en tres tramos. Tomando un valor de cada uno de ellos comprobamos si se satisface la inecuación:

$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right) \xrightarrow{x=-1} (-1)^2 - \frac{(-1)}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1 \to$ No se satisface la inecuación en este intervalo.

$\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}, \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \xrightarrow{x=0} 0^2 - \frac{0}{2} = 0 < 1 \to$ Sí se satisface la inecuación en este intervalo.

$\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right) \xrightarrow{x=2} 2^2 - \frac{2}{2} = 4 - 1 = 3 > 1 \to$ No se satisface la inecuación en este intervalo.

En $x_1=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ y $x_2=\frac{1-\sqrt{17}}{4}$, se cumple que $x^2-\frac{x}{2}=1$, y por tanto no pueden formar parte del conjunto de números buscados.

Así, los números que satisfacen la propiedad dada son $x\in\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4},\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$.

139. Una compañía eléctrica ofrece tres tarifas que tienen una parte fija y una parte proporcional al consumo.

- **Tarifa *A*: 6,70 € cantidad fija más 0,18 € por kilovatio hora de consumo.**
- **Tarifa *B*: 9,60 € cantidad fija más 0,13 € por kilovatio hora de consumo.**
- **Tarifa *C*: 14 € cantidad fija más 0,09 € por kilovatio hora de consumo.**

a) ¿A partir de qué cantidad de consumo la tarifa *B* es mejor que la *A*?
b) ¿A partir de qué cantidad de consumo es la *C* mejor tarifa que la *A*?
c) ¿A partir de qué cantidad de consumo la tarifa *C* es la mejor de todas?

Que una tarifa sea mejor que otra quiere decir que un cliente gaste menos con la primera tarifa que con la segunda.

Llamando *x* a los kilovatios hora consumidos, se tiene:

a) $6{,}70+0{,}18x>9{,}60+0{,}13x\to 5x>290\to x>58$

Cuando se consuman más de 58 kilovatios hora, la tarifa *B* será más rentable que la tarifa *A*.

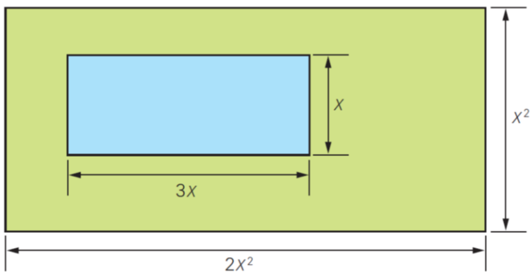
b) $6{,}70+0{,}18x>14+0{,}09x\to 9x>730\to x>\frac{730}{9}\to x>81{,}11$

Cuando se consuman más de 81,11 kilovatios hora, la tarifa *C* será más rentable que la tarifa *A*.

c) $\left.\begin{array}{l}6{,}70+0{,}18x>14+0{,}09x\\9{,}60+0{,}13x>14+0{,}09x\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}9x>730\\4x>440\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}x>81{,}11\\x>110\end{array}\right\}\to x>110$

Cuando se consuman más de 110 kilovatios hora, la tarifa *C* será la más rentable de todas.

140. Se quiere construir una piscina rectangular en un jardín y para ello se dibuja un esquema con las dimensiones del jardín y de la piscina. ¿Cuáles son las dimensiones de la piscina, si la diferencia de áreas entre el jardín y la piscina es de 135 m²?



Llamando *x* al lado menor de la piscina, se tiene: $2x^4-3x^2=135\to 2x^4-3x^2-135=0\to 2z^2-3z-135=0$

$$z=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-135)}}{2\cdot 2}\to z=\frac{3\pm 33}{4}\to z_1=-\frac{15}{2}\quad z_2=9$$

$z_1=-\frac{15}{2}\to x^2=-\frac{15}{2}\to$ No tiene solución real. $\qquad z_2=9\to x_1=-3\quad x_2=3$

Se descarta $x_1=-3$ como solución, pues la longitud tiene que ser positiva. Por lo tanto, la piscina mide 9 metros de largo y 3 metros de ancho.

PARA PROFUNDIZAR

141. **Elige la respuesta adecuada.** **(Concurso de Primavera)**

Un granjero tiene ovejas y gallinas. Si la media del número de patas por animal es l, el cociente entre el número de ovejas y gallinas es:	$\frac{1}{3(4-l)}$	$\frac{l-2}{4-l}$	$\frac{3(l-2)}{l}$	$\frac{(l-2)^2}{16-l^2}$	$\frac{7(l^2-4)}{5(16-l^2)}$
Si $b>1$, $x>0$ y $(2x)^{\log_b 2}-(3x)^{\log_b 3}=0$, x es igual a:	$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{6}$	1	6	No se puede determinar
¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $\lvert x-\lvert 2x+1\rvert\rvert=3$?	0	1	2	3	4
¿Cuál es el producto de las soluciones de la ecuación $\sqrt{5\lvert x\rvert+8}=\sqrt{x^2-16}$?	-64	-24	-9	24	576
La edad de Juan, t años, es la suma de las edades de sus tres hijos. Si hace n años su edad era el doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿cuánto vale el cociente $\frac{t}{n}$?	2	$\frac{11}{3}$	4	$\frac{25}{6}$	5

- Sea x el número de ovejas e y el número de gallinas. Como cada oveja tiene 4 patas y cada gallina 2, hay en total $x+y$ animales y $4x+2y$ patas.

$$\frac{4x+2y}{x+y}=l\to 4x+2y=lx+ly\to(4-l)x=(l-2)y\to\frac{x}{y}=\frac{l-2}{4-l}$$

- $b>1,\quad x>0,\quad (2x)^{\log_b 2}-(3x)^{\log_b 3}=0$

Se toman logaritmos en la igualdad $(2x)^{\log_b 2}=(3x)^{\log_b 3}$, se aplican propiedades de los logaritmos, se simplifica y se despeja:

$$\log_b 2\cdot\log_b 2x=\log_b 3\cdot\log_b 3x$$

$$\log_b 2\cdot(\log_b 2+\log_b x)=\log_b 3\cdot(\log_b 3+\log_b x)$$

$$(\log_b 2)^2+\log_b 2\cdot\log_b x=(\log_b 3)^2+\log_b 3\cdot\log_b x$$

$$(\log_b 2)^2-(\log_b 3)^2=\log_b 3\cdot\log_b x-\log_b 2\cdot\log_b x$$

$$(\log_b 2)^2-(\log_b 3)^2=(\log_b 3-\log_b 2)\cdot\log_b x$$

$$(\log_b 2+\log_b 3)\cdot(\log_b 2-\log_b 3)=(-1)(\log_b 2-\log_b 3)\cdot\log_b x$$

$$(-1)\cdot(\log_b 2+\log_b 3)=\log_b x$$

$$-\log_b 2-\log_b 3=\log_b x\to\log_b\frac{1}{6}=\log_b x\to x=\frac{1}{6}$$

□ $|x-|2x+1||=3 \to \begin{cases} |x-2x-1|=3, & x \geq -\frac{1}{2} \\ |x+2x+1|=3, & x \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \to \begin{cases} x+1=3, & x \geq -\frac{1}{2}, \; x \geq -1 \\ -x-1=3, & x \geq -\frac{1}{2}, \; x \leq -1 \\ 3x+1=3, & x \leq -\frac{1}{2}, \; x \geq -\frac{1}{3} \\ -3x-1=3, & x \leq -\frac{1}{2}, \; x \leq -\frac{1}{3} \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} x=2, & x \geq -\frac{1}{2}, \; x \geq -1 \to x=2 \\ x=-4, & x \geq -\frac{1}{2}, \; x \leq -1 \to \text{No tiene solución.} \\ x=\frac{2}{3}, & x \leq -\frac{1}{2}, \; x \geq -\frac{1}{3} \to \text{No tiene solución.} \\ x=-\frac{4}{3}, & x \leq -\frac{1}{2}, \; x \leq -\frac{1}{3} \to x=-\frac{4}{3} \end{cases}$

Por tanto, hay dos soluciones reales.

□ $\sqrt{5|x|+8}=\sqrt{x^2-16} \to 5|x|+8=x^2-16 \to \begin{cases} x^2-5x-24=0, & x \geq 0 \\ x^2+5x-24=0, & x \leq 0 \end{cases}$

$$x^2-5x-24=0 \to x=\frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2-4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} \to x=\frac{5 \pm \sqrt{121}}{2} \to \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=8 \end{cases}$$

$$x^2+5x-24=0 \to x=\frac{-5 \pm \sqrt{5^2-4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} \to x=\frac{-5 \pm \sqrt{121}}{2} \to \begin{cases} x_1=-8 \\ x_2=3 \end{cases}$$

$\begin{cases} x^2-5x-24=0, & x \geq 0 \to x=8 \\ x^2+5x-24=0, & x \leq 0 \to x=-8 \end{cases} \to$ El producto de las soluciones es $8 \cdot (-8)=-64$.

□ Llamando *x*, *y*, *z* a las edades de sus hijos:

$$\left.\begin{array}{l} t=x+y+z \\ t-n=2(x-n+y-n+z-n) \end{array}\right\} \to t-n=2(t-3n) \to t-n=2t-6n \to 5n=t \to \frac{t}{n}=5$$

142. Halla la relación entre los coeficientes de la siguiente ecuación y la suma, el producto y la suma de los dobles productos de sus tres raíces.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Sean x_1, x_2 y x_3 las raíces de la ecuación dada. Entonces:

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=ax^3+bx^2+cx+d \to$

$\to x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3=ax^3+bx^2+cx+d$

Comparando los términos se obtienen las relaciones pedidas:

$x_1+x_2+x_3=-b \qquad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=c \qquad x_1x_2x_3=-d$

143. Discute las soluciones de la siguiente ecuación según los valores de *m*.

$$x^2 - 2x + \log m = 0$$

Por la definición de logaritmo, $m > 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \log m$

Para que la ecuación no tenga solución: $4 - 4 \log m < 0 \to (10, +\infty)$

Para que la ecuación tenga una solución: $4 - 4 \log m = 0 \to m = 10$

Para que la ecuación tenga dos soluciones: $4 - 4 \log m > 0 \to (-\infty, 10)$

144. **Si las soluciones de la ecuación**

$$ax^2 + bx + c = 0$$

son x_1 y x_2, escribe ecuaciones de segundo grado cuyas soluciones sean:

a) Los cuadrados de x_1 y x_2.
b) Los inversos de x_1 y x_2.
c) Los opuestos de x_1 y x_2.

a) $(x - x_1^2)(x - x_2^2) = 0 \rightarrow x^2 - (x_1^2 + x_2^2)x + x_1^2 \cdot x_2^2$

b) $\left(x - \dfrac{1}{x_1}\right)\left(x - \dfrac{1}{x_2}\right) = 0 \rightarrow x^2 - \left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}\right)x + \dfrac{1}{x_1} \cdot \dfrac{1}{x_2} = 0$

c) $(x + x_1)(x + x_2) = 0 \rightarrow x^2 + (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = 0$

145. **Juan y Luis suben en una escalera mecánica. Juan sube tres veces más rápido que su amigo, haciéndolo ambos de peldaño en peldaño.**
Al terminar de subir, Juan contó 75 escalones y Luis contó 50 escalones. Con estos datos calcula los peldaños «visibles» de la escalera.

Mientras Juan sube un escalón, la escalera mecánica ha subido x escalones, y el número de escalones visibles es $75 + 75x$.

Luis sube 50 escalones. Como lo hace tres veces más despacio que Juan, mientras Luis sube un escalón, la escalera sube $3x$. El número de escalones visibles es $50 + 150x$.

$75 + 75x = 50 + 150x \rightarrow x = \dfrac{1}{3}$ Por tanto, el número de peldaños visibles es 100.

146. **Calcula las soluciones reales de la ecuación**

$$\sqrt[3]{1729 - x} + \sqrt[3]{x} = 19$$

(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)

$\sqrt[3]{1729 - x} + \sqrt[3]{x} = 19 \rightarrow 1729 - x = \left(19 - \sqrt[3]{x}\right)^3 \rightarrow 1729 - x = 57\sqrt[3]{x^2} - x - 1083\sqrt[3]{x} + 6859 \rightarrow \sqrt[3]{x^2} - 19\sqrt[3]{x} + 90 = 0$

Hacemos $z = \sqrt[3]{x}$ y resolvemos la ecuación de segundo grado resultante:

$$z^2 - 19z + 90 = 0 \rightarrow z = \frac{19 \pm \sqrt{(-19)^2 - 4\cdot 1\cdot 90}}{2\cdot 1} \rightarrow z = \frac{19 \pm \sqrt{1}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \rightarrow \sqrt[3]{x} = 9 \rightarrow x_1 = 729 \\ z_2 = 10 \rightarrow \sqrt[3]{x} = 10 \rightarrow x_2 = 1000 \end{cases}$$

147. **Descompón el polinomio**

$$P(x) = x^5 - 209x + 56$$

en producto de dos factores, sabiendo que se anula para dos valores, x_1 y x_2, inversos entre sí.

(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)

Sean r y $\dfrac{1}{r}$ las dos raíces inversas del polinomio $P(x)$.

El polinomio que tiene esas raíces es:

$$(x - r)\left(x - \frac{1}{r}\right) = x^2 - \frac{1 + r^2}{r}x + 1 = x^2 + mx + 1$$

Así, resulta que $P(x) = x^5 - 209x + 56 = (x^2 + mx + 1)(x^3 + bx^2 + cx + d)$.

148. **Prueba que las sumas de las primeras, segundas y terceras potencias de las raíces del polinomio**

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

valen lo mismo.

(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)

Sea ax^3+bx^2+cx+d la ecuación general de tercer grado. Entonces, en este caso se tiene que $a=1 \quad b=2 \quad c=3 \quad d=4$.

Por otro lado, sean x_1, x_2 y x_3 las raíces de la ecuación dada. Usando las fórmulas obtenidas en la actividad 142:

$$x_1+x_2+x_3=-b=-2 \qquad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=c=3 \qquad x_1x_2x_3=-d=-4$$

- Suma de las primeras potencias de las raíces:

$$x_1+x_2+x_3=-2$$

- Suma de las segundas potencias de las raíces:

$$x_1+x_2+x_3=-2 \rightarrow (x_1+x_2+x_3)^2=(-2)^2 \rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\cdot 3=4 \rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2$$

- Suma de las terceras potencias de las raíces:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2 \rightarrow (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(x_1+x_2+x_3)=-2\cdot(-2) \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_1^2(x_2+x_3)+x_2^2(x_1+x_3)+x_3^2(x_1+x_2)=4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_1(x_1x_2+x_1x_3)+x_2(x_1x_2+x_2x_3)+x_3(x_1x_3+x_2x_3)=4 \xrightarrow{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=3}$$

$$\rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_1(3-x_2x_3)+x_2(3-x_1x_3)+x_3(3-x_1x_2)=4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1+4+3x_2+4+3x_3+4=4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3+3(x_1+x_2+x_3)+12=4 \xrightarrow{x_1+x_2+x_3=-2} =-2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3+3(-2)+12=4 \rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3=4-12+6 \rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3=-2$$

149. **Determina justificadamente todos los pares de números enteros (*x*, *y*) que verifican la ecuación $x^2 - y^4 = 2009$.**

(Olimpiadas matemáticas. Fase Nacional)

$$x^2-y^4=2009 \rightarrow (x-y^2)(x+y^2)=2009.$$

Sea $a=x-y^2$ y $b=x+y^2$. Entonces se tiene que $ab=2009$.

Por un lado, se busca una expresión para *x* y para y^2 en función de *a* y *b* $\rightarrow \begin{cases} a+b=2x \rightarrow x=\dfrac{a+b}{2} \\ b-a=2y^2 \rightarrow y^2=\dfrac{b-a}{2} \end{cases}$

Por otro lado, se descompone 2 009 en factores primos y se estudian todos los productos posibles, teniendo en cuenta que *x* e *y* son números enteros, y por tanto, los dos factores polinómicos, $a=(x-y^2)$ y $b=(x+y^2)$ también lo son:

$$2009=7\cdot 7\cdot 41=49\cdot 41=7\cdot 287=1\cdot 2009$$

Ahora se estudian los casos posibles, teniendo en cuenta que $a<b$ y que para que *y* sea entero es necesario que $\dfrac{b-a}{2}$ sea un cuadrado perfecto:

- $2009 = 1 \cdot 2009 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2\,009 \end{cases} \xrightarrow{x=\frac{a+b}{2},\quad y^2=\frac{b-a}{2}} x = \frac{1+2009}{2} = 1500 \qquad y^2 = \frac{2009-1}{2} = 1004 \rightarrow$ No es cuadrado perfecto.
- $2009 = 7 \cdot 287 \rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 287 \end{cases} \xrightarrow{x=\frac{a+b}{2},\quad y^2=\frac{b-a}{2}} x = \frac{7+287}{2} = 147 \qquad y^2 = \frac{287-7}{2} = 140 \rightarrow$ No es cuadrado perfecto.
- $2009 = 49 \cdot 41 \rightarrow \begin{cases} a = 41 \\ b = 49 \end{cases} \xrightarrow{x=\frac{a+b}{2},\quad y^2=\frac{b-a}{2}} x = \frac{41+49}{2} = 45 \qquad y^2 = \frac{49-41}{2} = 4 \rightarrow y = \pm 2$

El tercer caso es el único que cumple todas las características, y como existe simetría par, los únicos pares enteros que resuelven la ecuación dada son $(45, 2), (45, -2), (-45, 2)$ y $(-45, -2)$.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. ¿Qué ventajas tiene el uso del teléfono móvil frente al del teléfono fijo?

La principal ventaja del teléfono móvil es su portabilidad, que permite:

- La comunicación (escrita y hablada) entre personas que estén en cualquier lugar del mundo.
- La conexión a internet instantánea, cuando sea requerida por el usuario.

2. Explica qué representan las variables *M* y *N* en la inecuación del texto.

N son las llamadas que puede realizar.

M son los minutos que puede hablar en cada llamada a partir del primero.

3. Plantea una inecuación similar a la del ejemplo para el plan *C* y un consumo máximo de 42 €.

$0{,}0968(N+M) + 0{,}1815N \leq 42$

4. Paula llama una única vez al día a su familia. ¿Cuántos minutos puede hablar por término medio cada día para que su consumo no supere los 40 € si tiene la tarifa *B*? ¿Y si tiene la tarifa *E*?

- Inecuación para la tarifa B: $14{,}52 + 0{,}0726(N+M) + 0{,}1815N \leq 40$

  Realiza 30 llamadas al mes, una por día. Así, $N = 30$: $\quad 14{,}52 + 0{,}0726(30+M) + 0{,}1815 \cdot 30 \leq 40 \rightarrow M \leq 245{,}96$

  Además, dispone de 60 minutos gratuitos, que suponen realmente 305,96 minutos al mes para hablar. Esto equivale a 10,20 minutos cada día.

- Inecuación para la tarifa E: $29{,}50 + 0{,}2124(N+M) + 0{,}1815N \leq 40$

  Realiza 30 llamadas al mes, una por día. Así, $N = 30$: $\quad 29{,}50 + 0{,}2124(30+M) + 0{,}1815 \cdot 30 \leq 40 \rightarrow M \leq -1{,}317$

  Los minutos no pueden ser negativos, así que no puede pagar menos de 40 euros si realiza 30 llamadas. Por tanto, solo podría hablar los 300 minutos gratis, que son equivalentes a 10 minutos al día.

5. Detalla y compara tres ofertas de diversas compañías de telefonía móvil que estén en vigor en este momento.

Respuesta abierta, por ejemplo:

Plan	Cuota en €	Mínimo en €	Céntimos/minuto	Establecimiento de llamada en céntimos
1	4	0	2,70	15
2	14,90	0	8,50	0
3	9	0	3 desde el minuto 6	15

Sistemas de ecuaciones

ACTIVIDADES

1. **Determina las incógnitas, los coeficientes, el término independiente y una solución de estas ecuaciones lineales.**

a) $3x - 2y = -3$

b) $5y + 2x + z = 8$

c) $8 - 4x + 2y = z$

d) $2t + 4x - 7 = y + 4z$

	Ecuación reordenada	Incógnitas	Coeficientes	Término independiente	Solución cualquiera
a)	$3x - 2y = -3$	x, y	3, −2	−3	(−1, 0)
b)	$2x + 5y + z = 8$	x, y, z	2, 5, 1	8	(0, 0, 8)
c)	$-4x + 2y - z = -8$	x, y, z	−4, 2, −1	−8	(1, 1, 6)
d)	$4x - y - 4z + 2t = 7$	x, y, z, t	4, −1, −4, 2	7	(0, 1, 0, 4)

2. **¿Cuáles de estos pares de valores son solución del sistema** $\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x - 2y &= -3 \end{aligned}\right\}$**?**

a) $x = 1, y = 0$ b) $x = -1, y = 1$ c) $x = 5, y = 4$

El único par que satisface las dos ecuaciones que forman el sistema es $x = 5$, $y = 4$.

3. **Clasifica estos sistemas de ecuaciones y resuélvelos por el método más adecuado.**

a) $\left.\begin{aligned} 8x - 2y &= 4 \\ -12x + 3y &= -6 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} p + 2q &= 1 \\ 3p - q &= 11 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 4x + 6y &= 2 \\ 3y + 2x &= 1 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 2x - y &= -4 \\ -x + 2y &= 7 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} 8x - 2y &= 4 \\ -12x + 3y &= -6 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{:2} 4x - y = 2 \\ &\xrightarrow{:(-3)} 4x - y = 2 \end{aligned}\Bigg\} \to$ Sistema compatible indeterminado.

b) $\left.\begin{aligned} p + 2q &= 1 \\ 3p - q &= 11 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\qquad p + 2q = 1 \\ &\xrightarrow{\cdot 2} 6p - 2q = 22 \end{aligned}\Bigg\} \xrightarrow{\text{Reducción}} 7p = 23 \to p = \dfrac{23}{7} \to 3 \cdot \dfrac{23}{7} - q = 11 \to q = -\dfrac{8}{7} \to$

$\to$ Sistema compatible determinado.

c) $\left.\begin{aligned} 4x + 6y &= 2 \\ 3y + 2x &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{:2} 2x + 3y = 1 \\ &\qquad 2x + 3y = 1 \end{aligned}\Bigg\} \to$ Sistema compatible indeterminado.

d) $\left.\begin{aligned} 2x - y &= -4 \\ -x + 2y &= 7 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 2x + 4 &= y \\ -x + 2y &= 7 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{Sustitución}} -x + 2(2x + 4) = 7 \to 3x = -1 \to x = -\dfrac{1}{3} \to y = \dfrac{10}{3} \to$

$\to$ Sistema compatible determinado.

4. **Decide de qué tipo son estos sistemas de ecuaciones y representa gráficamente su solución.**

a) $\left.\begin{array}{r}3x-2y=5\\-6x+4y=0\end{array}\right\}$

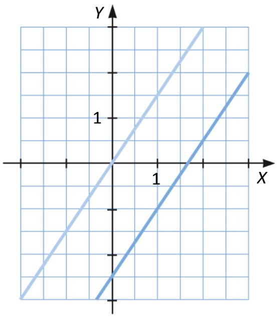
c) $\left.\begin{array}{r}-x+y=3\\2x-y=-1\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}4x-6y=2\\-6x+9y=-3\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}10x+y=-3\\-4x+2y=-6\end{array}\right\}$

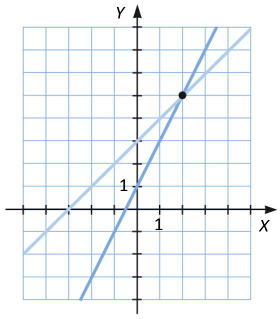
a) $\left.\begin{array}{r}3x-2y=5\\-6x+4y=0\end{array}\right\}\xrightarrow{:(-2)}\left.\begin{array}{r}3x-2y=5\\3x-2y=0\end{array}\right\}$

Sistema incompatible. No existe solución:



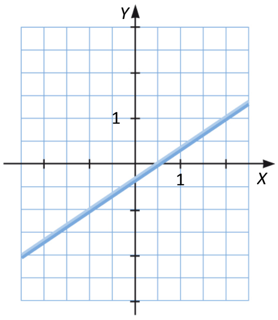
c) $\left.\begin{array}{r}-x+y=3\\2x-y=-1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducción}}x=2\xrightarrow{y=3+x}y=5$

Sistema compatible determinado. Solución única:



b) $\left.\begin{array}{r}4x-6y=2\\-6x+9y=-3\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{:2}\\\xrightarrow{:(-3)}\end{array}\left.\begin{array}{r}2x-3y=1\\2x-3y=1\end{array}\right\}$

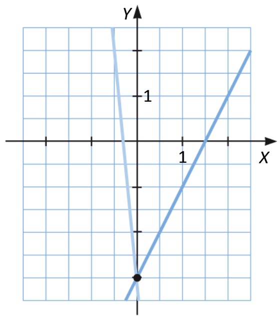
Sistema compatible indeterminado.
Infinitas soluciones:



d) $\left.\begin{array}{r}10x+y=-3\\-4x+2y=-6\end{array}\right\}\xrightarrow{:(-2)}\left.\begin{array}{r}10x+y=-3\\2x-y=3\end{array}\right\}\to$

$\xrightarrow{\text{Reducción}}12x=0\to x=0\xrightarrow{y=-3-10x}y=-3$

Sistema compatible determinado. Solución única:



5. **Resuelve utilizando los métodos de sustitución e igualación.**

a) $\left.\begin{array}{r}3x-5y=2\\-2x+3y=5\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}2x-7y=4\\-6x+2y=3\end{array}\right\}$

a) ▪ Sustitución:

$$\left.\begin{array}{r}3x-5y=2\\-2x+3y=5\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x=\dfrac{2+5y}{3}\\-2x+3y=5\end{array}\right\}\to-2\left(\frac{2+5y}{3}\right)+3y=5\to-4-10y+9y=15\to y=-19\to x=-31$$

▪ Igualación:

$$\left.\begin{array}{r}3x-5y=2\\-2x+3y=5\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x=\dfrac{2+5y}{3}\\x=\dfrac{3y-5}{2}\end{array}\right\}\to\frac{2+5y}{3}=\frac{3y-5}{2}\to4+10y=9y-15\to y=-19\to x=-31$$

b) ▪ Sustitución:

$$\left.\begin{matrix} 2x-7y=4 \\ -6x+2y=3 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x=\dfrac{4+7y}{2} \\ -6x+2y=3 \end{matrix}\right\} \to -6\left(\frac{4+7y}{2}\right)+2y=3 \to -12-21y+2y=3 \to y=-\frac{15}{19} \to x=-\frac{29}{38}$$

▪ Igualación:

$$\left.\begin{matrix} 2x-7y=4 \\ -6x+2y=3 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x=\dfrac{4+7y}{2} \\ x=\dfrac{2y-3}{6} \end{matrix}\right\} \to \frac{4+7y}{2}=\frac{2y-3}{6} \to 12+21y=2y-3 \to y=-\frac{15}{19} \to x=-\frac{29}{38}$$

6. **Halla la solución del sistema de ecuaciones.**

$$\left.\begin{matrix} 3(2x+y-1)-6(4x-y)=15 \\ -x+y+3(x-2y+6)=4 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} 3(2x+y-1)-6(4x-y)=15 \\ -x+y+3(x-2y+6)=4 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} -2x+y=2 \\ 2x-5y=-14 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} -4y=-12 \to y=3$$

$$-2x+y=2 \xrightarrow{y=3} -2x+3=2 \to x=\frac{1}{2}$$

7. **Resuelve por el método de reducción.**

a) $\left.\begin{matrix} 3x-2y=4 \\ 2x-3y=2 \end{matrix}\right\}$

b) $\left.\begin{matrix} x-3y=1 \\ 4x+5y=-2 \end{matrix}\right\}$

a) $\left.\begin{matrix} 3x-2y=4 \\ 2x-3y=2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \xrightarrow{\cdot(-2)} \\ \xrightarrow{\cdot 3} \end{matrix} \left.\begin{matrix} -6x+4y=-8 \\ 6x-9y=6 \end{matrix}\right\} \to -5y=-2 \to y=\dfrac{2}{5} \to x=\dfrac{4+2\cdot\frac{2}{5}}{3}=\dfrac{16}{15}$

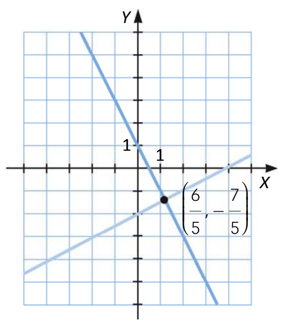
b) $\left.\begin{matrix} x-3y=1 \\ 4x+5y=-2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cdot(-4)} \left.\begin{matrix} -4x+12y=-4 \\ 4x+5y=-2 \end{matrix}\right\} \to 17y=-6 \to y=-\dfrac{6}{17} \to x=1+3\cdot\left(-\dfrac{6}{17}\right)=\dfrac{11}{17}$

8. **Resuelve gráficamente los sistemas.**

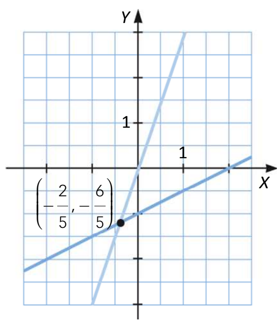
a) $\left.\begin{matrix} x-2y=4 \\ 2x+y=1 \end{matrix}\right\}$

b) $\left.\begin{matrix} 3x-y=0 \\ x-2y=2 \end{matrix}\right\}$

a)



b)



9. **Halla la solución de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{aligned} x + z &= 1 \\ 2x - y - 2z &= 4 \\ x + 3y + z &= 3 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y + z &= 2 \\ -x + y + z &= 4 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x+z&=1 \\ 2x-y-2z&=4 \\ x+3y+z&=3 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=1-z} \left.\begin{aligned} 2(1-z)-y-2z&=4 \\ 1-z+3y+z&=3 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} -y-4z&=2 \\ 3y&=2 \end{aligned}\right\} \to y=\frac{2}{3} \to -\frac{2}{3}-4z=2 \to z=-\frac{2}{3} \xrightarrow{x=1-z} x=\frac{5}{3}$

La solución es la terna $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

b) $\left.\begin{aligned} x+y-z&=0 \\ x-y+z&=2 \\ -x+y+z&=4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=z-y} \left.\begin{aligned} z-y-y+z&=2 \\ -z+y+y+z&=4 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} z-y&=1 \\ 2y&=4 \end{aligned}\right\} \to y=2 \xrightarrow{z=1+y} z=3 \xrightarrow{x=z-y} x=1$

La solución es la terna $(1, 2, 3)$.

10. **Resuelve los siguientes sistemas.**

a) $\left.\begin{aligned} x - 2y + 5z &= 4 \\ -2x + 3y - z &= 1 \\ 3x + y + 2z &= -1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + z &= 1 \\ y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x-2y+5z&=4 \\ -2x+3y-z&=1 \\ 3x+y+2z&=-1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=4-5z+2y} \left.\begin{aligned} -2(4-5z+2y)+3y-z&=1 \\ 3(4-5z+2y)+y+2z&=-1 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} -y+9z&=9 \\ 7y-13z&=-13 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{y=9z-9}$

$\to 7(9z-9)-13z=-13 \to 50z=50 \to z=1 \xrightarrow{y=9z-9} y=0 \xrightarrow{x=4-5z+2y} x=-1$

La solución es la terna $(-1, 0, 1)$.

b) $\left.\begin{aligned} x+y&=1 \\ x+z&=1 \\ y+z&=1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=1-y} \left.\begin{aligned} 1-y+z&=1 \\ y+z&=1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{y=z} 2z=1 \to z=\frac{1}{2} \to y=\frac{1}{2} \to x=\frac{1}{2}$

La solución es la terna $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

11. **Resuelve estos sistemas.**

a) $\left.\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 3x + 2y &= 19 \\ 2x + 3y &= 16 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 5y - 6z &= 0 \\ 3x + 4y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x-y&=3 \\ 3x+2y&=19 \\ 2x+3y&=16 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{E_2=-3E_1+E_2} \\ &\xrightarrow{E_3=-2E_1+E_3} \end{aligned} \left.\begin{aligned} x-y&=3 \\ 5y&=10 \\ 5y&=10 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x-y&=3 \\ 5y&=10 \end{aligned}\right\} \to y=2 \to x=5$

La solución es el par (5, 2).

b) $\left.\begin{aligned} x+y+2z&=0 \\ 2x+5y-6z&=0 \\ 3x+4y+z&=0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2} \\ &\xrightarrow{E_3=-3E_1+E_3} \end{aligned} \left.\begin{aligned} x+y+2z&=0 \\ 3y-10z&=0 \\ y-5z&=0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{E_3=E_2-3E_3} \left.\begin{aligned} x+y+2z&=0 \\ 3y-10z&=0 \\ 5z&=0 \end{aligned}\right\} \to z=0 \to y=0 \to x=0$

La solución es la terna (0, 0, 0).

12. Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 3x-y=1 \\ 5x+7y-3z=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-y-2z=8 \\ 2x+y-3z=11 \\ x+2y+3z=5 \end{array}\right\}$

a) $$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 3x-y=1 \\ 5x+7y-3z=3 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2=-3E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-5E_1+E_3} \end{array} \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ -4y-3z=-5 \\ 2y-8z=-7 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_3=2E_3+E_2} \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ -4y-3z=-5 \\ -19z=-19 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow z=1 \xrightarrow{y=\frac{-5+3z}{-4}} y=\frac{1}{2} \xrightarrow{x=2-y-z} x=\frac{1}{2}$$

La solución es la terna $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$.

b) $$\left.\begin{array}{r} x-y-2z=8 \\ 2x+y-3z=11 \\ x+2y+3z=5 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-E_1+E_3} \end{array} \left.\begin{array}{r} x-y-2z=8 \\ 3y+z=-5 \\ 3y+5z=-3 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_3=-E_2+E_3} \left.\begin{array}{r} x-y-2z=8 \\ 3y+z=-5 \\ 4z=2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow z=2 \xrightarrow{y=\frac{-5-z}{3}} y=-\frac{11}{6} \xrightarrow{x=8+y+2z} x=\frac{43}{6}$$

La solución es la terna $\left(\frac{43}{6},-\frac{11}{6},\frac{1}{2}\right)$.

13. Expresa de forma matricial y resuelve.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x+4y+5z=2 \\ x-y+2z=-6 \\ -2x-y+z=8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-3y+2z=1 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x-y=7 \end{array}\right\}$

a) $$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \\ -2 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1\leftrightarrow E_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2=-3E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=2E_1+E_3} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 7 & -1 & 20 \\ 0 & -3 & 5 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=3E_2+7E_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 7 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 32 & 32 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+2z=-6 \\ 7y-z=20 \\ 32z=32 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \xrightarrow{y=3,\,z=1} x=-6+3-2 \rightarrow x=-5 \\ \xrightarrow{z=1} 7y=21 \rightarrow y=3 \\ \longrightarrow z=1 \end{array}$$

La solución es la terna $(-5,3,1)$.

b) $$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-3E_1+E_3} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 8 & -6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=E_3/2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=-4E_2+7E_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y+2z=1 \\ 7y-5z=1 \\ -z=10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{y=-7,\,z=-10} x+21-20=1 \rightarrow x=0 \\ \xrightarrow{z=-10} 7y+50=1 \rightarrow y=-7 \\ \longrightarrow z=-10 \end{array}$$

La solución es la terna $(0,-7,-10)$.

14. **Expresa de forma matricial y resuelve.**

a) $\left.\begin{array}{l} x-y=3 \\ x-z=2 \\ y-z=-1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x-y+z=1 \\ x+3y-z=2 \\ 4x+2y=1 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2=-E_1+E_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

Como una fila se repite, el sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones, que se dan en función de un parámetro:

$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x-y=3 \\ y-z=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{z=\lambda,\ y=-1+\lambda} x-(-1+\lambda)=3 \to x=2+\lambda \\ \xrightarrow{z=\lambda} y=-1+\lambda \end{array}$

Las soluciones vienen determinadas por la terna $(2+\lambda, -1+\lambda, \lambda)$.

b) $\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2=-3E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-4E_1+E_3} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -10 & 4 & -5 \\ 0 & -10 & 4 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=-E_2+E_3}$

$\to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -10 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \to$ Sistema incompatible. No existe solución.

15. **Determina el número de soluciones de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} x+4y-z=2 \\ 3x-y+z=1 \\ -2x+y-z=0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+5z=1 \\ 2x+y-z=3 \\ 2y-3z=1 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2=-3E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=2E_1+E_3} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -13 & 4 & -5 \\ 0 & 9 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=9E_2+13E_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -13 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. Existe una única solución.

b) $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2=-E_1+E_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=-E_2+2E_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Existen infinitas soluciones.

16. **Discute estos sistemas y resuélvelos.**

a) $\left.\begin{array}{r} y-3z=3 \\ 3y-2z=1 \\ 2x+5y-5z=4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-3y+4z=1 \\ 2x-2y-z=2 \\ x+y-3z=-2 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 = -E_2 + 3E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 8 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. Existe una única solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 8 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} 2x + 5y - 5z = 4 \\ 3y - 2z = 1 \\ -7z = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{y = -\frac{3}{7},\, z = -\frac{8}{7}} x = \dfrac{3}{14} \\ \xrightarrow{z = -\frac{8}{7}} y = -\dfrac{3}{7} \\ \longrightarrow z = -\dfrac{8}{7} \end{array}$$

La solución es la terna $\left(\dfrac{3}{14}, -\dfrac{3}{7}, -\dfrac{8}{7}\right)$.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 = -E_1 + E_3]{E_2 = -2E_1 + E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 = -E_2 + E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. Existe una única solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x - 3y + 4z = 1 \\ 4y - 9z = 0 \\ 2z = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{y = -\frac{27}{8},\, z = -\frac{3}{2}} x = -\dfrac{25}{8} \\ \xrightarrow{z = -\frac{3}{2}} y = -\dfrac{27}{8} \\ \longrightarrow z = -\dfrac{3}{2} \end{array}$$

La solución es la terna $\left(-\dfrac{25}{8}, -\dfrac{27}{8}, -\dfrac{3}{2}\right)$.

17. Resuelve estos sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+1}{2} = y - 3 \\ 2x^2 = y^2 - 7 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} xy - 2x = -9 \\ \dfrac{x+y}{y} = 2y \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+1}{2} = y - 3 \\ 2x^2 = y^2 - 7 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x = 2y - 7 \\ 2x^2 = y^2 - 7 \end{array}\right\} \to 2(2y-7)^2 = y^2 - 7 \to 8y^2 + 98 - 56y = y^2 - 7 \to$

$\to 7y^2 - 56y + 105 = 0 \to y^2 - 8y + 15 = 0 \to \begin{cases} y_1 = 5 \xrightarrow{2y-7} x_1 = 3 \\ y_2 = 3 \xrightarrow{2y-7} x_2 = -1 \end{cases}$

Las dos soluciones son los pares $(3, 5)$ y $(-1, 3)$.

b) $\left.\begin{array}{r} xy - 2x = -9 \\ \dfrac{x+y}{y} = 2y \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} xy - 2x = -9 \\ x = 2y^2 - y \end{array}\right\} \to (2y^2 - y)y - 2(2y^2 - y) = -9 \to 2y^3 - 5y^2 + 2y + 9 = 0$

Se obtienen las soluciones con Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 2 & 9 \\ -1 & & -2 & 7 & -9 \\ \hline & 2 & -7 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

$\to y = -1$ es la única solución real, y por tanto, $x = 2 - 1 = 1$.

La solución del sistema es el par $(1, 1)$.

18. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} 6x + 6y = 5 \\ x^2 - y^2 = \dfrac{5}{36} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \sqrt{x+y+4} + x = y + 2 \\ y^2 - x^2 = 2(x+y) \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 6x+6y=5 \\ x^2-y^2=\dfrac{5}{36} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=\dfrac{5-6y}{6} \\ 36x^2-36y^2=5 \end{array}\right\} \rightarrow 36\left(\dfrac{5-6y}{6}\right)^2-36y^2=5 \rightarrow$

$\rightarrow 25+36y^2-60y-36y^2=5 \rightarrow 60y=20 \rightarrow y=\dfrac{1}{3} \xrightarrow{x=\frac{5-6y}{6}} x=\dfrac{1}{2}$

La única solución es el par $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$.

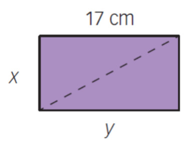
b) $\left.\begin{array}{r} \sqrt{x+y+4}+x=y+2 \\ y^2-x^2=2(x+y) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Factorizando}]{} \left.\begin{array}{r} \sqrt{x+y+4}+x=y+2 \\ (y+x)(y-x)=2(x+y) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \sqrt{x+y+4}+x=y+2 \\ y-x=2 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} \sqrt{x+y+4}+x=y+2 \\ y=2+x \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{x+2+x+4}+x=2+x+2 \rightarrow \sqrt{2x+6}=4 \rightarrow$

$\rightarrow 2x+6=16 \rightarrow 2x=10 \rightarrow x=5 \rightarrow y=7$.

Al simplificar la segunda ecuación del sistema, se pierde la solución trivial nula, que también es válida. Por tanto, las dos soluciones son los pares $(0, 0)$ y $(5, 7)$.

19. La diagonal de un rectángulo mide 17 cm, y su perímetro, 46 cm. Plantea un sistema de ecuaciones y calcula la longitud de sus lados.



Por definición de perímetro y aplicando el teorema de Pitágoras, se llega al sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas siguientes:

$\left.\begin{array}{r} 2x+2y=46 \\ x^2+y^2=17^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=23 \\ x^2+y^2=289 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Sustitución}} \left.\begin{array}{r} y=23-x \\ x^2+y^2=289 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow x^2+(23-x)^2=289 \rightarrow 2x^2-46x+240=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=8 \rightarrow y_1=15 \\ x_2=15 \rightarrow y_2=8 \end{cases}$

Para que la solución se ajuste a la ilustración, *x* e *y* deben medir 8 cm y 15 cm, respectivamente.

20. La suma de un número más cinco veces el inverso de otro es 2. Por otro lado, el segundo número más el cuádruple del primero es 9. Determina cuáles son esos números.

Sea *x* el primer número e *y* el segundo. Entonces, el sistema de ecuaciones es el siguiente:

$\left.\begin{array}{r} x+\dfrac{5}{y}=2 \\ 4x+y=9 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Sustitución}} \left.\begin{array}{r} xy+5=2y \\ y=9-4x \end{array}\right\} \rightarrow x(9-4x)+5=2(9-4x) \rightarrow 4x^2-17x+13=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \rightarrow y_1=5 \\ x_2=\dfrac{13}{4} \rightarrow y_2=-4 \end{cases}$

Hay dos posibles soluciones, que están determinadas por los pares $(1, 5)$ y $\left(\dfrac{13}{4},-4\right)$.

SABER HACER

21. Resuelve estos sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r}-x+3y=\dfrac{2}{5}\\ 5x-15y=2\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{3}-y=\dfrac{5}{2}\\ 2x-6y=15\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}-x+3y=\dfrac{2}{5}\\ 5x-15y=2\end{array}\right\}\xrightarrow{\cdot 5}\left.\begin{array}{r}-5x+15y=2\\ 5x-15y=2\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducción}}0=0\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Se buscan las soluciones en función de un parámetro:

$$5x-15y=2\rightarrow\left.\begin{array}{l}5x-15\lambda=2\\ y=\lambda\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{2+15\lambda}{5}\\ y=\lambda\end{array}\right\}$$

Las infinitas soluciones están determinadas por los pares $\left(\dfrac{2+15\lambda}{5},\lambda\right)$.

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{3}-y=\dfrac{5}{2}\\ 2x-6y=15\end{array}\right\}\xrightarrow{\cdot(-6)}\left.\begin{array}{r}-2x+6y=-15\\ 2x-6y=15\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducción}}0=0\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Se buscan las soluciones en función de un parámetro:

$$2x-6y=15\rightarrow\left.\begin{array}{l}2x-6\lambda=15\\ y=\lambda\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{15+6\lambda}{2}\\ y=\lambda\end{array}\right\}$$

Las infinitas soluciones están determinadas por los pares $\left(\dfrac{15+6\lambda}{2},\lambda\right)$.

22. Resuelve en función del parámetro *a*.

a) $\left.\begin{array}{r}2x+y=7\\ ax+2y=12\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}3x+5y=20\\ 7x+ay=39\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}2x+y=7\\ ax+2y=12\end{array}\right\}\xrightarrow{\cdot(-2)}\left.\begin{array}{r}-4x-2y=-14\\ ax+2y=12\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducción}}(a-4)x=-2\rightarrow x=\dfrac{-2}{a-4}\rightarrow x=\dfrac{2}{4-a}$

- Si $a=4\rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.
- Si $a\neq 4\rightarrow$ Sistema compatible determinado. Existe una única solución.

b) $\left.\begin{array}{r}3x+5y=20\\ 7x+ay=39\end{array}\right\}\begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot(-7)}\\ \xrightarrow{\cdot 3}\end{array}\left.\begin{array}{r}-21x-35y=-140\\ 21x+3ay=117\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducción}}$

$$\rightarrow(3a-35)y=-23\rightarrow y=\frac{-23}{3a-35}\rightarrow x=\frac{23}{35-3a}$$

- Si $a=\dfrac{35}{3}\rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.
- Si $a\neq\dfrac{35}{3}\rightarrow$ Sistema compatible determinado. Existe una única solución.

23. La diferencia de las dos cifras de un número es 2 y la diferencia entre dicho número y el obtenido intercambiando sus cifras es 18. ¿Cuál es el número?

Sea x la cifra de las decenas, e y la cifra de las unidades. Entonces, se diferencian dos casos:

- $y > x$:

$$\left.\begin{array}{r} y-x=2 \\ 10x+y-(10y+x)=18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y-x=2 \\ 10x+y-10y-x=18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y-x=2 \\ 9x-9y=18 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} y=2+x \\ 9x-9y=18 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Sustitución}} 9x-9(2+x)=18 \rightarrow 9x-18-9x=18 \rightarrow \text{Imposible. No existe solución.}$$

- $x > y$:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ 10x+y-(10y+x)=18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ 10x+y-10y-x=18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

Se buscan las soluciones en función de un parámetro:

$$x-y=2 \xrightarrow{y=\lambda} \left.\begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=\lambda \end{array}\right\}$$

Las infinitas soluciones están determinadas por los pares $(2+\lambda, \lambda)$. Por ejemplo, para $\lambda=3$ se tiene que el número 53 cumple las condiciones dadas.

24. Determina el número de soluciones.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x-6y=9 \\ -x+2y=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x-6y=9 \\ -x+2y=-3 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x-6y=9 \\ -x+2y=3 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{\cdot 3} \end{array} \left.\begin{array}{r} 3x-6y=9 \\ -3x+6y=9 \end{array}\right\} \rightarrow 0 \neq 18 \rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.

b) $\left.\begin{array}{r} 3x-6y=9 \\ -x+2y=-3 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{\cdot 3} \end{array} \left.\begin{array}{r} 3x-6y=9 \\ -3x+6y=-9 \end{array}\right\} \rightarrow 0=0 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones.

25. Resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x-3y=1 \\ 2x-y+z=4 \\ 3x-4y+z=5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 3x-3y+3z=0 \\ -x+y-z=0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x-3y=1 \\ 2x-y+z=4 \\ 3x-4y+z=5 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-3E_1+E_3} \end{array} \left.\begin{array}{r} x-3y=1 \\ 5y+z=2 \\ 5y+z=2 \end{array}\right\}$

Como se repite una ecuación, el sistema es compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y=1 \\ 5y+z=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{z=\lambda,\, y=\frac{2-\lambda}{5}} x=1+3\left(\frac{2-\lambda}{5}\right) \rightarrow x=\frac{11-3\lambda}{5} \\ \xrightarrow{z=\lambda} y=\frac{2-\lambda}{5} \end{array}$$

Las infinitas soluciones están determinadas por las ternas $\left(\frac{11-3\lambda}{5}, \frac{2-\lambda}{5}, \lambda\right)$.

b) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=0\\ 3x-3y+3z=0\\ -x+y-z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{c}\xrightarrow{E_2=-3E_1+E_2}\\ \xrightarrow{E_3=E_1+E_3}\end{array} \left.\begin{array}{r} x-y+z=0\\ 0=0\\ 0=0 \end{array}\right\}$

Sistema compatible indeterminado. Como hay una ecuación y tres incógnitas es necesario dar las soluciones en función de dos parámetros:

$x-y+z=0 \xrightarrow{y=\mu,\ z=\lambda} x=\mu-\lambda$

Las infinitas soluciones están determinadas por las ternas $(\mu-\lambda,\mu,\lambda)$.

26. **Resuelve el sistema** $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x-y+z=0}\\ \boldsymbol{2x-y-2z=1}\\ \boldsymbol{x-az=2} \end{array}\right\}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -a & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c}\xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2}\\ \xrightarrow{E_3=-E_1+E3}\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 1 & -1-a & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=-E_2+E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 3-a & 1 \end{array}\right)$$

- $3-a=0 \to a=3 \to$ Sistema incompatible. Ninguna solución.
- $3-a\neq 0 \to a\neq 3 \to$ Sistema compatible determinado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 3-a & 1 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x-y+z=0\\ y-4z=1\\ (3-a)z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{y=\frac{a+1}{a-3},\ z=\frac{1}{3-a}} x=\dfrac{a+1}{a-3}-\dfrac{1}{3-a} \to x=\dfrac{a+2}{a-3}\\ \xrightarrow{z=\frac{1}{3-a}} y=1-\dfrac{4}{3-a} \to y=\dfrac{a+1}{a-3}\\ \longrightarrow z=\dfrac{1}{3-a} \end{array}$$

Para cada valor de $a\neq 3$ la terna $\left(\dfrac{a+2}{a-3},\dfrac{a+1}{a-3},\dfrac{1}{3-a}\right)$ es la solución del sistema.

27. **María, Marisa y Manuela quieren reunir 260 € para comprar un regalo. Si María pone el doble que Marisa y Manuela pone dos terceras partes de lo que pone María, ¿cuánto debe poner cada una?**

	Dinero en € que aporta
María	$y=2x$
Marisa	x
Manuela	$z=\frac{2}{3}y$
TOTAL	260

El sistema es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=260\\ y=2x\\ z=\frac{2}{3}y \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=260\\ 2x-y=0\\ 2y-3z=0 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 260\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 260\\ 0 & -3 & -2 & -520\\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=2E_2+3E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 260\\ 0 & -3 & -2 & -520\\ 0 & 0 & -13 & -1\,040 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x=60\\ y=120\\ z=80 \end{array}\right\}$$

Así, María, Marisa y Manuela aportan para el regalo 120 €, 60 € y 80 €, respectivamente.

28. Resuelve estos sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r}\sqrt{3x^2-y}-y=1\\ 5x-7y=-2\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}\sqrt[3]{5y+2x}=3x+1\\ x-y=1\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}\sqrt{3x^2-y}-y=1\\ 5x-7y=-2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}\left(\sqrt{3x^2-y}\right)^2=(y+1)^2\\ 5x-7y=-2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}3x^2-y^2-3y+1=0\\ x=\dfrac{-2+7y}{5}\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow 3\left(\dfrac{7y-2}{5}\right)^2-y^2-3y+1=0\rightarrow 122y^2-75y-47=0\rightarrow$

$\rightarrow\begin{cases}y_1=1\rightarrow x_1=1\\ y_2=-\dfrac{47}{122}\approx-0{,}385\rightarrow x_2=-\dfrac{939}{1000}=-0{,}939\end{cases}$

Las soluciones son los pares $(1,1)$ y $(-0{,}939;-0{,}385)$.

b) $\left.\begin{array}{r}\sqrt[3]{5y+2x}=3x+1\\ x-y=1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}\left(\sqrt[3]{5y+2x}\right)^3=(3x+1)^3\\ x-y=1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}27x^3+27x^2+7x-5y+1=0\\ y=x-1\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow 27x^3+27x^2+7x-5(x-1)+1=0\rightarrow 27x^3+27x^2+2x+6=0\rightarrow\begin{cases}x_1=-1{,}1129\rightarrow y_1=-2{,}1129\\ x_2=-2{,}1129\rightarrow y_2=-3{,}1129\end{cases}$

Las soluciones son los pares $(-1{,}1129;-2{,}1129)$ y $(-2{,}1129;-3{,}1129)$.

29. Resuelve estos sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1\\ x+2y=5\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}3x-y=2\\ \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{1}{y}=-3\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1\\ x+2y=5\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}y+x=xy\\ x+2y=5\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}y+x=xy\\ x=5-2y\end{array}\right\}\rightarrow y+5-2y=(5-2y)y\rightarrow 2y^2-6y+5=0$

No existe solución real.

b) $\left.\begin{array}{r}3x-y=2\\ \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{1}{y}=-3\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}y=3x-2\\ 2y-(x-2)=-3y(x-2)\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}y=3x-2\\ -3xy+4y+x-2=0\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow -3x(3x-2)+4(3x-2)+x-2=0\rightarrow\begin{cases}x_1=1\rightarrow y_1=1\\ x_2=\dfrac{10}{9}\rightarrow y_2=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

Las soluciones son los pares $(1, 1)$ y $\left(\dfrac{10}{9},\dfrac{4}{3}\right)$.

ACTIVIDADES FINALES

30. Completa para que los siguientes pares de valores sean solución de la ecuación $-x+5y=4$.

a) $(1, ■)$

b) $(■, 3)$

c) $(-4, ■)$

d) $(■, -2)$

a) $-1+5y=4\rightarrow y=1\rightarrow ■=1$

b) $-x+15=4\rightarrow x=11\rightarrow ■=11$

c) $4+5y=4\rightarrow y=0\rightarrow ■=0$

d) $-x-10=4\rightarrow x=-14\rightarrow ■=-14$

31. Completa para que las siguientes ternas de valores sean solución de la ecuación $2x - 3y + z = 8$.

a) (1, ■, 9)
b) (■, −1, 1)
c) (−1, −2, ■)
d) (0, ■, 2)
e) (−1, −5, ■)
f) (■, −2, 10)

a) $2-3y+9=8 \to y=1 \to$ ■ $=1$

b) $2x+3+1=8 \to x=2 \to$ ■ $=2$

c) $-2+6+z=8 \to z=4 \to$ ■ $=4$

d) $0-3y+2=8 \to y=-2 \to$ ■ $=-2$

e) $-2+15+z=8 \to z=-5 \to$ ■ $=-5$

f) $2x+6+10=8 \to x=-4 \to$ ■ $=-4$

32. Considera la ecuación $2x + y = 5$.

a) Escribe todas sus soluciones.
b) Razona si (5, −15) es una de sus soluciones.
c) Completa los siguientes pares de valores para que sean solución: (3, ■) y (■, 3).

a) $2x+y=5 \xrightarrow{y=\lambda} \left.\begin{matrix} 2x+\lambda=5 \\ y=\lambda \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x=\dfrac{5-\lambda}{2} \\ y=\lambda \end{matrix}\right\}$

Las infinitas soluciones las determina el par $\left(\dfrac{5-\lambda}{2}, \lambda\right)$.

b) $\left.\begin{matrix} \dfrac{5-\lambda}{2}=5 \\ \lambda=-15 \end{matrix}\right\} \to \dfrac{5+15}{2}=10 \neq 5 \to$ No es solución.

c) $x=3 \to \dfrac{5-\lambda}{2}=3 \to \lambda=-1 \to$ ■ $=1$ $\qquad y=3 \to \lambda=3 \to x=\dfrac{5-3}{2} \to x=1 \to$ ■ $=1$

33. Identifica los sistemas para los cuales el par de valores $x = 5$, $y = 2$ es solución.

a) $\left.\begin{matrix} 3x - 4y = 7 \\ \dfrac{x-1}{2} + y = 0 \end{matrix}\right\}$

b) $\left.\begin{matrix} x + \dfrac{y}{2} = 6 \\ \dfrac{x-y}{3} = \dfrac{x}{5} \end{matrix}\right\}$

c) $\left.\begin{matrix} 2(x-y) = x + 1 \\ \dfrac{2x-y}{4} = y \end{matrix}\right\}$

d) $\left.\begin{matrix} 5y - 3x = 19 \\ \dfrac{y-x}{3} = 1 \end{matrix}\right\}$

a) $\left.\begin{matrix} 15-8=7 \\ \dfrac{4}{2}+2=0 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} 7=7 \\ 4\neq 0 \end{matrix}\right\} \to$ No es solución de este sistema.

b) $\left.\begin{matrix} 5+\dfrac{2}{2}=6 \\ \dfrac{3}{3}=\dfrac{5}{5} \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} 6=6 \\ 1=1 \end{matrix}\right\} \to$ Sí es solución de este sistema.

c) $\left.\begin{matrix} 2\cdot(5-2)=6 \\ \dfrac{10-2}{4}=2 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} 6=6 \\ 2=2 \end{matrix}\right\} \to$ Sí es solución de este sistema.

d) $\left.\begin{matrix} 10-15=19 \\ \dfrac{2-5}{3}=1 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} -5\neq 19 \\ -1\neq 1 \end{matrix}\right\} \to$ No es solución de este sistema.

34. **Completa estos sistemas para que $x = 1$, $y = 4$ sea solución.**

a) $\left.\begin{array}{r} \blacksquare x - 3y = -10 \\ -5x + \blacksquare y = 11 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \blacksquare x + 3y = 16 \\ -2x + 7y = \blacksquare \end{array}\right\}$

Por comodidad, denotamos al $\blacksquare$ de la primera ecuación por a, y al de la segunda ecuación, por b. Entonces, sustituyendo:

a) $\left.\begin{array}{r} a-12=-10 \\ -5+4b=11 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a=2 \\ b=4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} a+12=16 \\ -2+28=b \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a=4 \\ b=26 \end{array}\right\}$

35. **Calcula el valor de a y b para que el siguiente sistema tenga por soluciones $x = 1$ e $y = -2$.**

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2(5x - y) - 3 = a \\ 4(x - 2y) + 3x - 2 = b \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2(5x-y)-3=a \\ 4(x-2y)+3x-2=b \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3\cdot1-2(5\cdot1+2)-3=a \\ 4(1+2\cdot2)+3\cdot1-2=b \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a=-14 \\ b=21 \end{array}\right\}$$

36. **Indica los sistemas para los que el par de valores $x = 3$, $y = -2$ es solución.**

a) $\left.\begin{array}{r} y - \dfrac{x+1}{2} = 0 \\ x - y = 5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 5x + 2y = 10 \\ x - \dfrac{y}{2} = 4 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - \dfrac{y+3x}{7} = 2 \\ 2x + y = 8 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{8x-4}{5} + y = 2 \\ 4x + \dfrac{5}{2}y = 7 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -2-\dfrac{3+1}{2}=0 \\ 3+2=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -4\neq 0 \\ 5=5 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución de este sistema.

b) $\left.\begin{array}{r} 15-4=10 \\ 3-\dfrac{-2}{2}=4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 11\neq 10 \\ 4=4 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución de este sistema.

c) $\left.\begin{array}{r} 3-\dfrac{-2+9}{7}=2 \\ 6-2=8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ 4\neq 8 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución de este sistema.

d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{24-4}{5}-2=2 \\ 12-5=7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ 7=7 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí es solución de este sistema.

37. **Agrupa de dos en dos estas ecuaciones lineales:**

$4x - y - 1 = 0$	$y + 1 = -2x$
$2y = 8x + 10$	$y + 2x = 3$
$6x - 9 + 3y = 0$	$y - 4x = 5$

Para formar:

a) Dos sistemas compatibles determinados.

b) Dos sistemas compatibles indeterminados.

c) Dos sistemas incompatibles.

a) $\left.\begin{array}{r}4x-y-1=0\\ y+2x=3\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}2y=8x+10\\ y+2x=3\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}6x-9+3y=0\\ y+2x=3\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}2y=8x+10\\ y-4x=5\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}4x-y-1=0\\ y-4x=5\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}y+1=-2x\\ y+2x=3\end{array}\right\}$

38. Añade a la ecuación $3x-5y=3$ otra ecuación, de forma que resulte un sistema:

a) Determinado. b) Indeterminado. c) Incompatible.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $\left.\begin{array}{r}3x-5y=3\\ 2x-y=1\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}3x-5y=3\\ 10y=6x-6\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}3x-5y=3\\ 12x=20y\end{array}\right\}$

39. Considera las ecuaciones:

$3x-y=1$ $ax+by=c$

Calcula los valores de a, b y c para que las dos ecuaciones formen un sistema con estas características:

a) $ax+by=c$ pasa por $(2,-3)$ y el sistema tiene como solución $(-2,-7)$.
b) $ax+by=c$ pasa por $(4, 3)$ y el sistema tiene como solución un punto de ordenada 5.
c) $ax+by=c$ pasa por $(-2, 0)$ y el sistema es incompatible.

a) $$\left.\begin{array}{r}ax+by=c\xrightarrow{(2,-3)}2x-3y=c\\ \xrightarrow{(-2,-7)}\left.\begin{array}{r}1=1\\ -2a-7b=c\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

Se forma un sistema con variables a, b y c, que es compatible indeterminado, porque hay dos ecuaciones y tres incógnitas. Las posibles soluciones se dan en función de un parámetro:

$$\left.\begin{array}{r}2a-3b=c\\ -2a-7b=c\end{array}\right\}\to -10b=2c\to c=-5b\xrightarrow{b=\lambda,\ a=\frac{c+3\lambda}{2}}\left.\begin{array}{r}a=-\lambda\\ b=\lambda\\ c=-5\lambda\end{array}\right\}$$

Por ejemplo, si $\lambda=1\to\left.\begin{array}{r}a=-1\\ b=1\\ c=-5\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}3x-y=1\\ -x+y=-5\end{array}\right\}$

b) $$\left.\begin{array}{l}x+by=c\xrightarrow{(4,3)}4a+3b=c\\ \left.\begin{array}{r}3x-y=1\\ ax+by=c\end{array}\right\}\xrightarrow{y=5}\left.\begin{array}{r}3x-5=1\\ ax+5b=c\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x=2\\ 2a+5b=c\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

Se forma un sistema con variables a, b y c, que es compatible indeterminado, porque hay dos ecuaciones y tres incógnitas. Las posibles soluciones se dan en función de un parámetro:

$$\left.\begin{array}{r}4a+3b=c\\ 2a+5b=c\end{array}\right\}\to c=7b\to\xrightarrow{b=\lambda,\ a=\frac{c-5\lambda}{2}}\left.\begin{array}{r}a=\lambda\\ b=\lambda\\ c=7\lambda\end{array}\right\}$$

Por ejemplo, si $\lambda=1\to\left.\begin{array}{r}a=1\\ b=1\\ c=7\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}3x-y=1\\ x+y=7\end{array}\right\}$

c) $ax+by=c \xrightarrow{(-2,0)} -2a=c$

$$\left.\begin{array}{r} 3x-y=1 \\ ax+by=c \end{array}\right\}$$

Para que sea sistema incompatible, el par (a, b) debe ser proporcional al par (3, −1) y además $c\neq 1$.

Entonces, por ejemplo, si $c=2$ se tiene que $-2a=2\rightarrow a=-1\rightarrow b=\frac{1}{3}$, quedando el sistema así:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-y=1 \\ -x+\frac{1}{3}y=2 \end{array}\right\}$$

40. ¿Cuáles de los siguientes sistemas tienen la misma solución? Resuelve gráficamente.

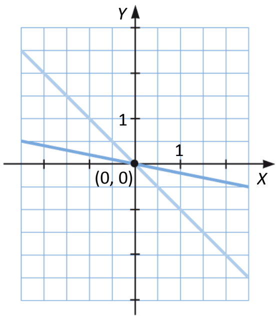
a) $\left.\begin{array}{r} x+3y=-2y \\ x-y=2x \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3y-x=16 \\ 2x+4=y-1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \frac{x+y}{4}+2=0 \\ x=-5y \end{array}\right\}$

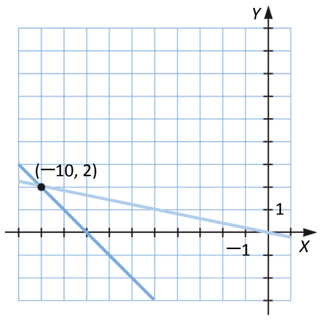
d) $\left.\begin{array}{r} \frac{x}{5}-\frac{y}{2}=-3 \\ \frac{x}{2}+4y=3 \end{array}\right\}$

a)



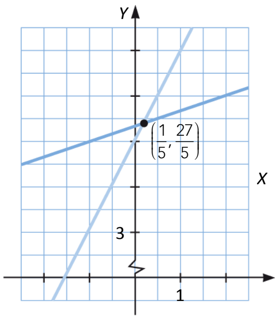
La solución es el par $(0,0)$.

c)



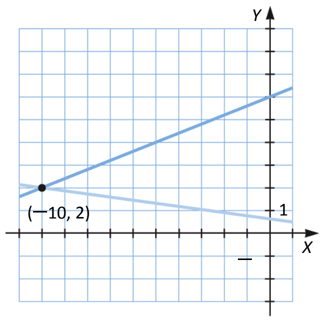
La solución es el par $(-10,2)$.

b)



La solución es el par $\left(\frac{1}{5},\frac{27}{5}\right)$.

d)



La solución es el par $(-10,2)$.

Por tanto, tienen la misma solución los sistemas c) y d).

41. Determina el número de soluciones de estos sistemas.

a) $\left.\begin{aligned} x-2y&=-2\\ \frac{x}{4}+y&=7\\ x-y&=3 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x-\frac{2y}{3}&=2\\ 2x+7y&=4\\ 2y-3x&=-6 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x+y&=8\\ \frac{x+2y}{5}&=-1\\ x-1&=-y \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} -x+4y&=15\\ \frac{x-3y}{3}&=-1\\ 5y-3x&=0 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x-2y&=-2\\ \frac{x}{4}+y&=7\\ x-y&=3 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot 4} \left.\begin{aligned} x-2y&=-2\\ x+4y&=28\\ x-y&=3 \end{aligned}\right\} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2\\ 1 & 4 & 28\\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Existe una única solución.

b) $\left.\begin{aligned} x-\frac{2y}{3}&=2\\ 2x+7y&=4\\ 2y-3x&=-6 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{\cdot 3}\\ &\\ &\longrightarrow \end{aligned} \left.\begin{aligned} 3x-2y&=6\\ 2x+7y&=4\\ -3x+2y&=-6 \end{aligned}\right\} \to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 6\\ 2 & 7 & 4\\ -3 & 2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2\\ 0 & 25 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Existe una única solución.

c) $\left.\begin{aligned} 2x+y&=8\\ \frac{x+2y}{5}&=-1\\ x-1&=-y \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{\cdot 5}\\ &\longrightarrow \end{aligned} \left.\begin{aligned} 2x+y&=8\\ x+2y&=-5\\ x+y&=1 \end{aligned}\right\} \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8\\ 1 & 2 & -5\\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8\\ 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Existe una única solución.

d) $\left.\begin{aligned} -x+4y&=15\\ \frac{x-3y}{3}&=-1\\ 5y-3x&=0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{\cdot 3}\\ &\longrightarrow \end{aligned} \left.\begin{aligned} -x+4y&=15\\ x-3y&=-3\\ 3x-5y&=0 \end{aligned}\right\} \to \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 15\\ 1 & -3 & -3\\ 3 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8\\ 0 & 1 & 12\\ 0 & 7 & 45 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8\\ 0 & 1 & 12\\ 0 & 0 & -39 \end{array}\right) \to 0 \neq -39$

Sistema incompatible. Es imposible que se cumpla la tercera ecuación. No existe ninguna solución.

42. Resuelve estos sistemas por sustitución.

a) $\left.\begin{aligned} 2x+y&=1\\ \frac{x}{3}-\frac{y}{5}&=2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 3x+2y&=0\\ \frac{x}{4}+\frac{y-1}{2}&=\frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 6x-2y&=6\\ 3(x+1)-(y-2)&=8 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 2(x-y)+4y&=-4\\ x+3(y+2)&=8 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} 2x+y&=1\\ \frac{x}{3}-\frac{y}{5}&=2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{y=1-2x} \frac{x}{3}-\frac{1-2x}{5}=2 \to 5x-3+6x=30 \to x=\frac{27}{11} \xrightarrow{y=1-2x} y=-\frac{43}{11}$

b) $\left.\begin{aligned} 3x+2y&=0\\ \frac{x}{4}+\frac{y-1}{2}&=\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 3x+2y&=0\\ x+2(y-1)&=2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=2-2(y-1)} 3(2-2(y-1))+2y=0 \to$

$\to 12-6y+2y=0 \to 12=4y \to y=3 \xrightarrow{x=2-2(y-1)} x=-2$

c) $\left.\begin{array}{r}6x-2y=6\\3(x+1)-(y-2)=8\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}6x-2y=6\\3x+3-y+2=8\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}6x-2y=6\\3x-y=3\end{array}\right\}\xrightarrow{y=3x-3}6x-2(3x-3)=6\to 6=6$

Sistema compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones, dependientes de un parámetro: $\left.\begin{array}{l}x=\lambda\\y=3\lambda-3\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}2(x-y)+4y=-4\\x+3(y+2)=8\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}2x+2y=-4\\x+3y+6=8\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}2x+2y=-4\\x+3y=2\end{array}\right\}\xrightarrow{x=2-3y}2(2-3y)+2y=-4\to$

$\to 4-6y+2y=-4\to 8=4y\to y=2\xrightarrow{x=2-3y}x=-4$

43. Resuelve por igualación.

a) $\left.\begin{array}{r}y-x+2=6\\2(x-y)+1=-y\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}4x+y=\dfrac{27}{2}\\x+3y=13\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\\dfrac{x-y}{4}=\dfrac{-3}{8}\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{3}{16}\\\dfrac{x}{y}=-3\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}y-x+2=6\\2(x-y)+1=-y\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}y=4+x\\y=2x+1\end{array}\right\}\to 4+x=2x+1\to x=3\to y=7$

b) $\left.\begin{array}{r}4x+y=\dfrac{27}{2}\\x+3y=13\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}8x+2y=27\\x+3y=13\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x=\dfrac{27-2y}{8}\\x=13-3y\end{array}\right\}\to\dfrac{27-2y}{8}=13-3y\to$

$27-2y=104-24y\to 22y=77\to y=\dfrac{7}{2}\to x=\dfrac{5}{2}$

c) $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\\dfrac{x-y}{4}=\dfrac{-3}{8}\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}y=1-x\\2x-2y=-3\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}y=1-x\\y=\dfrac{2x+3}{2}\end{array}\right\}\to 1-x=\dfrac{2x+3}{2}\to$

$2-2x=2x+3\to -1=4x\to x=-\dfrac{1}{4}\to y=\dfrac{5}{4}$

d) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{3}{16}\\\dfrac{x}{y}=-3\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}32x+24y=9\\x=-3y\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x=\dfrac{9-24y}{32}\\x=-3y\end{array}\right\}\to\dfrac{9-24y}{32}=-3y\to$

$9-24y=-96y\to 72y=-9\to y=-8\to x=24$

44. Resuelve por reducción.

a) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+7}{3}-y=2x\\4y-\dfrac{2x+1}{5}=-5\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}4x-2=y-5\\3x-\dfrac{y-2}{5}=2\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}2x+y=7\\\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{5}{4}\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}x+y=2\\3x+\dfrac{10}{3}=y\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+7}{3}-y=2x\\ 4y-\dfrac{2x+1}{5}=-5\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}5x+3y=7\\ 2x-20y=24\end{array}\right\}\xrightarrow{E_2=-\frac{5}{2}E_2}\left.\begin{array}{r}5x+3y=7\\ -5x+50y=-60\end{array}\right\}\to 53y=-53\to y=-1\xrightarrow{x=\frac{7-3y}{5}}x=2$

b) $\left.\begin{array}{r}4x-2=y-5\\ 3x-\dfrac{y-2}{5}=2\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}4x-y=-3\\ -15x+y=-8\end{array}\right\}\to -11x=-11\to x=1\xrightarrow{y=4x+3}y=7$

c) $\left.\begin{array}{r}2x+y=7\\ \dfrac{x-y}{2}=\dfrac{5}{4}\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}2x+y=7\\ -2x+2y=-5\end{array}\right\}\to 3y=2\to y=\dfrac{2}{3}\xrightarrow{x=\frac{7-y}{2}}x=\dfrac{19}{6}$

d) $\left.\begin{array}{r}x+y=2\\ 3x+\dfrac{10}{3}=y\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x+y=2\\ 9x-3y=-10\end{array}\right\}\xrightarrow{E_1=3\cdot E_1}\left.\begin{array}{r}3x+3y=6\\ 9x-3y=-10\end{array}\right\}\to 12x=-4\to x=-\dfrac{1}{3}\xrightarrow{y=2-x}y=\dfrac{7}{3}$

45. **Resuelve estos sistemas de ecuaciones.**

a) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{3}{2}\\ 2(x-1)-3(1-y)=-3x+1\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{4x}{3}+\dfrac{3y-2}{6}=\dfrac{5}{6}\\ \dfrac{x+y}{4}=-x\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{y-3}{4}-5(x+3)=16\\ \dfrac{3(2+x)}{5}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{-1}{15}\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}y-\dfrac{1+2x+3y}{6}=1\\ x+y+\dfrac{2(x-2y+3)}{5}=-6\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{3}{2}\\ 2(x-1)-3(1-y)=-3x+1\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}2x-y=9\\ 5x+3y=6\end{array}\right\}\xrightarrow{E_1=3\cdot E_1}\left.\begin{array}{r}6x-3y=27\\ 5x+3y=6\end{array}\right\}\to$

$\to 11x=33\to x=3\xrightarrow{y=2x-9}y=-3$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{4x}{3}+\dfrac{3y-2}{6}=\dfrac{5}{6}\\ \dfrac{x+y}{4}=-x\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}8x+3y=7\\ 5x+y=0\end{array}\right\}\xrightarrow{E_2=-3E_2}\left.\begin{array}{r}8x+3y=7\\ -15x-3y=0\end{array}\right\}\to -7x=7\to x=-1\xrightarrow{y=-5x}y=5$

c) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{y-3}{4}-5(x+3)=16\\ \dfrac{3(2+x)}{5}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{-1}{15}\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}20x-y=-127\\ 9x+5y=-19\end{array}\right\}\xrightarrow{E_1=5E_1}\left.\begin{array}{r}100x-5y=-635\\ 9x+5y=-19\end{array}\right\}\to$

$\to 109x=-654\to x=-6\xrightarrow{y=127+20x}y=7$

d) $\left.\begin{array}{r}y-\dfrac{1+2x+3y}{6}=1\\ x+y+\dfrac{2(x-2y+3)}{5}=-6\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}2x-3y=-7\\ 7x+y=-36\end{array}\right\}\xrightarrow{E_2=3E_2}\left.\begin{array}{r}2x-3y=-7\\ 21x+3y=-108\end{array}\right\}\to$

$\to 23x=-115\to x=-5\xrightarrow{y=-36-7x}y=-1$

46. **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.**

a) $\left.\begin{array}{r}-2(x+4)+3(3-2y)-1=12\\ 5(x+y)-4(x+1)-2y+10=0\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{2x+3}{3}+\dfrac{y+1}{5}=3\\ \dfrac{x-5}{2}-\dfrac{2y-1}{3}=0\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+3}{9}-\dfrac{y-5}{8}=0\\ \dfrac{2x-y+1}{2}-\dfrac{x+2y-3}{5}=0\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}-(2x+3y-2)-6(x-y+1)=-15\\ 4(x+3)-12(x-y+3)=-32\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r}x-2y-3-\dfrac{2x+y-3}{2}+\dfrac{x+7}{6}=0\\ \dfrac{x-6y}{2}-\dfrac{x-y}{3}+\dfrac{y}{6}=0\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}-2(x+4)+3(3-2y)-1=12\\ 5(x+y)-4(x+1)-2y+10=0\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}-2x-6y=12\\ x+3y+6=0\end{array}\right\}\to x=-3y-6$

Sistema compatible indeterminado.

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{2x+3}{3}+\dfrac{y+1}{5}=3\\ \dfrac{x-5}{2}-\dfrac{2y-1}{3}=0\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}10x+3y=27\\ 3x-4y=13\end{array}\right\}\begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot(-3)}\\ \xrightarrow{\cdot 10}\end{array}\left.\begin{array}{r}-30x-9y=-81\\ 30x-40y=130\end{array}\right\}$

$\to y=-1\to 3x-4\cdot(-1)=13\to x=3$

$x=3\qquad y=-1$

c) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+3}{9}-\dfrac{y-5}{8}=0\\ \dfrac{2x-y+1}{2}-\dfrac{x+2y-3}{5}=0\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}8x-9y=-69\\ 8x-9y=-11\end{array}\right\}$

Sistema incompatible.

d) $\left.\begin{array}{r}-(2x+3y-2)-6(x-y+1)=-15\\ 4(x+3)-12(x-y+3)=-32\end{array}\right\}$

$\to\left.\begin{array}{r}-8x+3y=-11\\ -8x+12y=-8\end{array}\right\}\begin{array}{c}\longrightarrow\\ \xrightarrow{\cdot(-1)}\end{array}\left.\begin{array}{r}-8x+3y=-11\\ 8x-12y=8\end{array}\right\}\to y=\dfrac{1}{3}\to 8x-4=8\to x=\dfrac{3}{2}$

$x=\dfrac{3}{2}\qquad y=\dfrac{1}{3}$

e) $\left.\begin{array}{r}x-2y-3-\dfrac{2x+y-3}{2}+\dfrac{x+7}{6}=0\\ \dfrac{x-6y}{2}-\dfrac{x-y}{3}+\dfrac{y}{6}=0\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x-15y=2\\ x-15y=0\end{array}\right\}\to$ Sistema incompatible. No existe solución.

47. Resuelve los sistemas de ecuaciones que aparecen a continuación.

a) $\left.\begin{array}{r} 3(x-1)-5(2y-3)=2x+8 \\ 4(x-y)-3x+2=1-(1-y) \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{3}-\dfrac{y-4}{4}=0 \\ \dfrac{x-4}{2}+\dfrac{y+2}{5}=3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{6}-\dfrac{y-4}{2}=3 \\ 2(x+3)=3(y-1)+2 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{3-2x}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1-2x}{6} \\ 1=\dfrac{x+3}{2}-\dfrac{3+3y}{8} \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 6(x+2y-3)-5(-2x+3y-1)+3=6 \\ 16=\dfrac{3y}{x-1} \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3(x-1)-5(2y-3)=2x+8 \\ 4(x-y)-3x+2=-(1-y) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-10y=-4 \\ x-5y=-3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-10y=-4 \\ -x+5y=3 \end{array}\right\} \rightarrow x=-2 \quad y=\dfrac{1}{5}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{3}-\dfrac{y-4}{4}=0 \\ \dfrac{x-4}{2}+\dfrac{y+2}{5}=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x-3y=0 \\ 5x+2y=46 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 20x-15y=0 \\ -20x-8y=-184 \end{array}\right\} \rightarrow x=6 \quad y=8$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{6}-\dfrac{y-4}{2}=3 \\ 2(x+3)=3(y-1)+2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y=9 \\ 2x-3y=-7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-6y=18 \\ -2x+3y=7 \end{array}\right\} \rightarrow x=-16 \quad y=-\dfrac{25}{3}$

d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{3-2x}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1-2x}{6} \\ 1=\dfrac{x+3}{2}-\dfrac{3+3y}{8} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=2 \\ 4x-3y=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=2 \\ y=\dfrac{4x+1}{3} \end{array}\right\} \rightarrow x=2 \quad y=3$

f) $\left.\begin{array}{r} 6(x+2y-3)-5(-2x+3y-1)+3=6 \\ 16=\dfrac{3y}{x-1} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 16x-3y=16 \\ 16x-3y=16 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

48. ¿Cuántas soluciones tienen estos sistemas de ecuaciones si $a=-1$? ¿Y si $a=-2$?

a) $\left.\begin{array}{r} ax-y=3 \\ 2x+2y=7 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 2x+3ay=8 \\ -x+3y=-4 \end{array}\right\}$

a) Si $a=-1 \rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-y=3 \\ 2x+2y=7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=-3 \\ x+y=\dfrac{7}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$ Sistema incompatible. No existe ninguna solución.

Si $a=-2 \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-y=3 \\ 2x+2y=7 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sistema compatible determinado. Una única solución.

b) Si $a=-1 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-3y=8 \\ -x+3y=-4 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sistema compatible determinado. Una única solución.

Si $a=-2 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-6y=8 \\ -x+3y=-4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y=4 \\ -x+3y=-4 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones.

49. **Halla el valor de *k* para que el siguiente sistema sea compatible determinado.**

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y=-1 \\ x-k\cdot y=-3 \\ 4x-y=2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y=-1 \\ x-k\cdot y=-3 \\ 4x-y=2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x-2y=-1 \\ -3x+3ky=+9 \\ -3x+\frac{3}{4}y=-\frac{3}{2} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} (3k-2)y=8 \\ -\frac{5}{4}y=-\frac{5}{2} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} y=\frac{8}{3k-2} \\ y=2 \end{array}\right\} \to \frac{8}{3k-2}=2 \to k=2$$

50. **Encuentra, si es posible, un valor de *a* para que el sistema de ecuaciones**

$$\left.\begin{array}{r} 8x-12y=20 \\ 4x+9y=a \end{array}\right\}$$

a) Sea incompatible.
b) Sea compatible indeterminado.
c) Sea compatible determinado.

$\frac{8}{4} \neq -\frac{12}{9} \to$ El sistema es siempre compatible determinado.

51. **Encuentra, si es posible, valores de *a* para que el sistema**

$$\left.\begin{array}{r} ax+2y=2 \\ -2x+\frac{y}{2}=a \end{array}\right\}$$

a) Sea incompatible.
b) Sea compatible indeterminado.
c) Sea compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} ax+2y=2 \\ -2x+\frac{y}{2}=a \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} ax+2y=2 \\ -8x+2y=4a \end{array}\right\} \to -\frac{a}{8}=\frac{2}{2} \to a=-8$$

El sistema es incompatible si $a=-8$. En los demás casos el sistema es compatible determinado.

52. **Clasifica los siguientes sistemas según el valor del parámetro *a*.**

a) $\left.\begin{array}{r} 3x+ay=5 \\ 3x+y=-a \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -x+2y=a \\ ax+y=-3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} ax-y=0 \\ x+3ay=0 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x-y=-a+1 \\ -2ax+2y=4 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & a & 5 \\ 3 & 1 & -a \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & a & 5 \\ 0 & a-1 & 5+a \end{array}\right)$

Si $a-1=0 \to a=1 \to$ Sistema incompatible, pues $0 \neq 6$.

Si $a-1 \neq 0 \to a \neq 1 \to$ Sistema compatible determinado.

No se puede dar el caso compatible indeterminado porque $a-1$ y $5+a$ no se anulan a la vez.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & a \\ a & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & a \\ 0 & 1+2a & a^2-3 \end{array}\right) \rightarrow$

Si $1+2a=0 \rightarrow a=-\frac{1}{2} \rightarrow$ Sistema incompatible, pues $0 \neq -\frac{11}{4}$.

Si $1+2a \neq 0 \rightarrow a \neq -\frac{1}{2} \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

No se puede dar el caso compatible indeterminado porque $1+2a$ y a^2-3 no se anulan a la vez.

c) $\left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 0 \\ 1 & 3a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 0 \\ 0 & -1-3a^2 & 0 \end{array}\right)$

Como $-1-3a^2$ nunca se anula, el sistema es siempre compatible determinado.

d) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -a+1 \\ -2a & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -a+1 \\ 0 & 3-a & -a^2+a-6 \end{array}\right)$

Si $3-a=0 \rightarrow a=3 \rightarrow$ Sistema incompatible, pues $0 \neq -12$.

Si $3-a \neq 0 \rightarrow a \neq 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

No se puede dar el caso compatible indeterminado porque $3-a$ y $-a^2+a-6$ no se anulan a la vez, de hecho, $-a^2+a-6$ no se anula nunca en los reales.

53. Considera el par de valores (3λ, λ), donde λ puede ser cualquier número.

a) Escribe una ecuación cuyas soluciones sean ese par de valores.
b) Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales cuyas soluciones sean ese par de valores.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $x-3y=0$

b) $\left.\begin{array}{r} x=3y \\ 6y-2x=0 \end{array}\right\}$

54. Dado el par de valores (1 − λ, 2λ), donde λ es cualquier número real:

a) Escribe una ecuación lineal que tenga como soluciones ese par de valores.
b) Escribe un sistema de ecuaciones lineales que tenga como soluciones ese par de valores.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $2(1-x)=y$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=2 \\ 10x-10=-5y \end{array}\right\}$

55. Encuentra tres sistemas de ecuaciones compatibles indeterminados cuya solución sea $x=\lambda-2$, $y=\lambda$, donde λ puede ser cualquier número.

Respuesta abierta, por ejemplo:

$\left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ 3x-6=3y \end{array}\right\}$ $\quad$ $\left.\begin{array}{r} 20x-10=10(1+y) \\ 5(x-y)-2=8 \end{array}\right\}$ $\quad$ $\left.\begin{array}{r} 6x-6(y+2)=0 \\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2} \end{array}\right\}$

56. **Si las soluciones de la ecuación $ax + by = c$ son de la forma $(\lambda, 2\lambda)$ y las de la ecuación $dx + ey = f$ son de la forma $(\lambda, -3\lambda + 10)$, encuentra la solución del sistema formado por ambas ecuaciones.**

Se obtiene una ecuación equivalente de cada una de las ecuaciones dadas a partir de la forma que tiene su solución:

$$\left.\begin{array}{r} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{x=\lambda,\ y=2\lambda} \\ \xrightarrow{x=\lambda,\ y=10-3\lambda} \end{array} \left.\begin{array}{l} y=2x \\ y=10-3x \end{array}\right\} \to 2x=10-3x \to x=2 \to y=4$$

57. **La ecuación $ax + by = c$ tiene por solución los pares $(\lambda + 1, \lambda - 3)$ y la ecuación $dx + ey = f$ tiene por solución los pares $(\lambda - 2, 2\lambda + 1)$.**

Calcula la solución del siguiente sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right\}$.

Se obtiene una ecuación equivalente de cada una de las ecuaciones dadas a partir de la forma que tiene su solución:

$$\left.\begin{array}{r} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{x=\lambda+1,\ y=\lambda-3} \\ \xrightarrow{x=\lambda-2,\ y=\lambda+1} \end{array} \left.\begin{array}{l} x-y=4 \\ x-y=-3 \end{array}\right\} \to \text{ Sistema incompatible. No existe solución.}$$

58. **Resuelve los siguientes sistemas con tres ecuaciones y dos incógnitas, y representa las soluciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=-1 \\ -x+y=-4 \\ -4x-y=-1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y=7 \\ 2x-y=2 \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ -3x-2y=1 \\ x-3y=7 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} -4x+2y=0 \\ 6x-3y=2 \\ 3x-2y=-2 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to y=-3 \xrightarrow{2x+y=-1} x=1$

b) $\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -21 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \to$ Sistema incompatible. No existe solución.

c) $\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to y=-2 \xrightarrow{2x+y=0} x=-1$

d) $\left(\begin{array}{rr|r} -4 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 8 \end{array}\right) \to$ Sistema incompatible. No existe solución.

59. **Resuelve estos sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas.**

a) $\left.\begin{array}{r} -2(x-4-1)=y-1 \\ -4x+y=-2x-3y+2 \\ 2x+3y-1=\dfrac{3x+2y}{5} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{-x+y-1}{2}=\dfrac{5-x}{3} \\ x+y-2=\dfrac{2(x+y)-3}{3} \\ x+y+5=7+2(x-y) \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -2(x-4-1)=y-1 \\ -4x+y=-2x-3y+2 \\ 2x+3y-1=\dfrac{3x+2y}{5} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=11 \\ x-2y=-1 \\ 7x+13y=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 11 \\ 1 & -2 & -1 \\ 7 & 13 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 13 \\ 0 & 19 & -67 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 582 \end{array}\right)$

Sistema incompatible. No existe solución.

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{-x+y-1}{2}=\dfrac{5-x}{3} \\ x+y-2=\dfrac{2(x+y)-3}{3} \\ x+y+5=7+2(x-y) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y=-13 \\ x+y=3 \\ -x+3y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -13 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -13 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 13 \\ 0 & 19 & -67 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 582 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.

60. Añade al siguiente sistema una ecuación de la forma $ax + by = c$ (distinta de las anteriores) para que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas que resulta siga siendo compatible.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=0 \\ 3x-y=\dfrac{11}{6} \end{array}\right\}$$

Para que el sistema siga siendo compatible, la ecuación nueva debe ser una ecuación equivalente a algunas de las dadas. Por ejemplo, $6x-24y=11$.

61. Escribe, en cada caso, un sistema de tres ecuaciones cuya solución sea la que se indica.

a) $x = 4, y = -2, z = 0$

b) $x = -3, y = 5, z = 1$

c) $x = 2, y = 7, z = -1$

d) $x = 0, y = 1, z = \dfrac{1}{2}$

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $x+2y+3z$ b) $2x+y-2z=-3$ c) $5x-y+z=2$ d) $3x+2y-2z=1$

62. Halla el valor de *a* y *b* en la ecuación $ax - 4y + bz = -4$ sabiendo que $(-1, 3, 2)$ y $(3, 5, 2)$ son dos de sus soluciones. Luego escribe otras dos soluciones.

$\left.\begin{array}{r} ax-4y+bz=-4 \xrightarrow{(-1,\,3,\,2)} -a-12+2b=-4 \\ ax-4y+bz=-4 \xrightarrow{(3,\,5,\,2)} 3a-20+2b=-4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -3a+6b=24 \\ 3a+2b=16 \end{array}\right\} \rightarrow 8b=40 \rightarrow b=5 \xrightarrow{a=2b-8} a=2$

Por tanto, la ecuación resultante es $2x-4y+5z=-4$.

Dos soluciones son, por ejemplo, $(0,1,0)$ y $(2,7,4)$.

63. Halla el valor de *a* y *b* en la ecuación $3x + ay + bz = 6$ sabiendo que $(1, 5, 1)$ y $(-1, 7, -1)$ son dos de sus soluciones. Después escribe tres soluciones que cumplan:

a) Solución en la que $x = 2$.

b) Solución en la que $y = -3$.

c) Solución en la que $z = 5$.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+ay+bz=6 \xrightarrow{(1,5,1)} 5a+b=3 \\ 3x+ay+bz=6 \xrightarrow{(-1,7,-1)} 7a-b=9 \end{array}\right\} \to 12a=12 \to a=1 \xrightarrow{b=7a-9} b=-2$$

Por tanto, la ecuación resultante es $3x+y-2z=6$.

a) $3x+y-2z=6 \xrightarrow{x=2} y-2z=0 \to$ Una solución es $(2,2,1)$.

b) $3x+y-2z=6 \xrightarrow{y=-3} 3x-2z=9 \to$ Una solución es $(3,-3,0)$.

c) $3x+y-2z=6 \xrightarrow{z=5} 3x+y=16 \to$ Una solución es $(7,-5,5)$.

64. **Resuelve los sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ x-2y+z=11 \\ 2x+y-2z=4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ x+2y=5 \\ 2x-y-2z=2 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x-2y+5z=4 \\ x+3y-4z=9 \\ -x-y+4z=11 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x-2y+2z=7 \\ 2x+3y-2z=-2 \\ -x-2y-3z=-2 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=-2 \\ z=2 \end{array}\right\}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=-1 \end{array}\right\}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -4 & 9 \\ -1 & -1 & 4 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & -9 & 5 \\ 0 & -3 & 9 & 15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=10 \\ z=5 \end{array}\right\}$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -6 & -16 \\ 0 & -4 & -1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -6 & -16 \\ 0 & 0 & -31 & -29 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x=\frac{67}{31} \\ y=-\frac{46}{31} \\ z=\frac{29}{31} \end{array}\right\}$

65. **Resuelve los sistemas utilizando el método de Gauss.**

a) $\left.\begin{array}{r} -x+y+z=5 \\ 2x-y+4z=-5 \\ x+y-5z=5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-2y-z=-1 \\ x-y+2z=2 \\ x+2y+z=3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x-y-z=24 \\ 7x+10y+2z=6 \\ 2x+6y+4z=-10 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} -x+3y+z=-15 \\ 3x-y+3z=9 \\ x+4y-2z=-4 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y+2z=1 \\ 2x+y+z=0 \\ 3y+2z=-1 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+4z=5 \\ 5x+2y-2z=-1 \\ -x+6y-10x=-11 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -5 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=5 \\ z=0 \end{array}\right\}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=2 \\ y=0 \\ z=1 \end{array}\right\}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 24 \\ 7 & 10 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & -10 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 24 \\ 0 & 27 & 11 & -156 \\ 0 & 7 & 5 & -34 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 24 \\ 0 & 27 & 11 & -156 \\ 0 & 0 & 58 & -174 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=10 \\ y=-7 \\ z=3 \end{array}\right\}$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -15 \\ 3 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -15 \\ 0 & 4 & 3 & -18 \\ 0 & 7 & -1 & -19 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -15 \\ 0 & 4 & 3 & -18 \\ 0 & 0 & 25 & -50 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=4 \\ y=-3 \\ z=-2 \end{array}\right\}$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=-1 \\ y=-5 \\ z=7 \end{array}\right\}$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 6 & -10 & -11 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & -8 & 13 & 14 \\ 0 & 8 & -13 & -14 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & -8 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ:

$$\left(\frac{2-\lambda}{4}, \frac{13\lambda-14}{8}, \lambda\right)$$

66. Resuelve estos sistemas por el método de Gauss utilizando su forma matricial.

a) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=3 \\ 2x-y-5z=0 \\ \dfrac{x}{2}+3y+2z=\dfrac{13}{2} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=1 \\ -2x+y-z=-4 \\ x+2y-2z=7 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} -x+y+z=5 \\ 2x-y-4z=-5 \\ x+y-5z=5 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x+y-5z=2 \\ x-y-z=-4 \\ y-2z=3 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x-2z=-11 \\ 2y-z=-5 \\ x-4y=-1 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} -x+y-z=-7 \\ 3x-y-z=15 \\ 4x-2y=22 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 & \frac{13}{2} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ:

$$(1+2\lambda, 2-\lambda, \lambda)$$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ :

$$(3, 2+\lambda, \lambda)$$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -5 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ :

$$(3\lambda, 5+2\lambda, \lambda)$$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ :

$$(3\lambda-1, 3+2\lambda, \lambda)$$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & -4 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & 2 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ :

$$\left(2\lambda-11, \frac{\lambda-5}{2}, \lambda\right)$$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -7 \\ 3 & -1 & -1 & 15 \\ 4 & -2 & 0 & 22 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ :

$$(\lambda+4, 2\lambda-3, \lambda)$$

67. Comprueba si estos sistemas de ecuaciones tienen solución o no.

a) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=3 \\ 2x+4z=2 \\ 2x-y+3z=1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ x+3y-2z=1 \\ x-2y+z=2 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} -x-y+2z=3 \\ 2x+3y+z=-2 \\ 2y+10z=8 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=5 \\ 2x+y-2z=7 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x+5y-5z=12 \\ -2x-3y+3z=-1 \\ 3x+y-z=0 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} x-5y+3z=10 \\ 2x-2y+z=-4 \\ 3x+y-z=5 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$ Sistema incompatible. No existe solución.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \to$ Sistema incompatible. No existe solución.

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 10 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$ Sistema compatible indeterminado.

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \to$ Sistema incompatible. No existe solución.

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 12 \\ -2 & -3 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 12 \\ 0 & 7 & -7 & 23 \\ 0 & -14 & 14 & -36 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 12 \\ 0 & 7 & -7 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right) \to$ Sistema incompatible. No existe solución.

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & 8 & -5 & -24 \\ 0 & 16 & -10 & -25 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & 8 & -5 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{2} \end{array}\right) \to$ Sistema incompatible. No existe solución.

68. **Expresa matricialmente estos sistemas y aplica el método de Gauss para resolverlos.**

a) $\left.\begin{array}{r} -x + y - z = 6 \\ y - 4z = -7 \\ -x = 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 5z - y = 2x - 3 \\ 7x + z = 2 + 5y \\ x + 3y + 2z = 2(1 - x) \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - y + z = -4 \\ x = -10 + z \\ y = z + 2 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} y = 2(z - x + 2) \\ 2(z - y) = 3(1 - x) \\ z = 5x - 3y + 2 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -x+y-z=6 \\ y-4z=-7 \\ -x=4 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x=-4 \\ y=5 \\ z=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 5z-y=2x-3 \\ 7x+z=2+5y \\ x+3y+2z=2(1-x) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -2x-y+5z=-3 \\ 7x-5y+z=2 \\ 3x+3y+2z=2 \end{array}\right\} \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 5 & -3 \\ 7 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -17 & 37 & -17 \\ 0 & 3 & 19 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -17 & 37 & -17 \\ 0 & 0 & 434 & -136 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x=\frac{121}{217} \\ y=\frac{69}{217} \\ z=-\frac{68}{217} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=-4 \\ x=-10+z \\ y=z+2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x-y+z=-4 \\ x-z=-10 \\ y-z=2 \end{array}\right\} \to \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x=-2 \\ y=10 \\ z=8 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} y=2(z-x+2) \\ 2(z-y)=3(1-x) \\ z=5x-3y+2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y-2z=2 \\ 3x-2y+2z=3 \\ -5x+3y+z=2 \end{array}\right\} \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & 10 & -6 \\ 0 & 11 & -8 & 24 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 54 & 102 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{19}{9} \\ y=\dfrac{32}{9} \\ z=\dfrac{17}{9} \end{array}\right\}$$

69. **Determina, aplicando el método de Gauss, el número de soluciones de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+4y+z=0 \\ x-y+2z=0 \\ -3x+2y+z=0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0 \\ x+9y-3z=0 \\ 5x+3y-z=0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 6x+4y-12z=6 \\ 7x+6y+18z=7 \\ 6z-2y-3x=-3 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x-7y+4z=4 \\ -10x+71y+9z=9 \\ 6x-3y-2z=10 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 16 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right\}$

b) $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -3 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ:

$$\left(0, \frac{\lambda}{3}, \lambda\right)$$

c) $\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 4 & -12 & 6 \\ 7 & 6 & 18 & 7 \\ -3 & -2 & 6 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 4 & -12 & 6 \\ 0 & 1 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ:

$$(1+18\lambda, -24\lambda, \lambda)$$

d) $\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -7 & 4 & 4 \\ -10 & 71 & 9 & 9 \\ 6 & -3 & -2 & 10 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -7 & 4 & 4 \\ 0 & 143 & 67 & 67 \\ 0 & -11 & 10 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -7 & 4 & 4 \\ 0 & 143 & 67 & 67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{4164}{2167} \\ y=\dfrac{804}{2167} \\ z=\dfrac{41}{197} \end{array}\right\}$

70. **Opera y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Gauss.**

a) $\left.\begin{array}{r} x+3y=2-y \\ -y+2z=1-2x \\ 3(x+y)+4x=3(1+y) \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y=2(2-z) \\ y-z=2x+3 \\ x+2y+z=1+2x \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x+3y=2-y \\ -y+2z=1-2x \\ 3(x+y)+4x=3(1+y) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+4y=2 \\ 2x-y+2z=1 \\ 7x=3 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 2 & -3 \\ 0 & 28 & 0 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 56 & 15 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x=\frac{3}{7} \\ y=\frac{11}{28} \\ z=\frac{15}{56} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y=2(2-z) \\ y-z=2x+3 \\ x+2y+z=1+2x \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+2z=4 \\ -2x+y-z=3 \\ -x+2y+z=1 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$

Sistema incompatible. No existe solución.

71. Opera y resuelve por el método de Gauss estos sistemas de ecuaciones utilizando su forma matricial.

a) $\left.\begin{array}{r} \frac{x+1}{2}-\frac{y-3}{4}=12-z \\ 2x+\frac{y}{5}+\frac{z-6}{2}=6 \\ \frac{x-y}{2}=z-4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -3(x+y)+4z=1 \\ 2x-(y+z)=-5 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{5}{6}=\frac{z+4}{5} \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} \frac{x+1}{2}-\frac{y-3}{4}=12-z \\ 2x+\frac{y}{5}+\frac{z-6}{2}=6 \\ \frac{x-y}{2}=z-4 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2x-y+4z=43 \\ 20x+2y+5z=90 \\ x-y-2z=-8 \end{array}\right\} \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 43 \\ 20 & 2 & 5 & 90 \\ 1 & -1 & -2 & -8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 43 \\ 0 & 12 & -35 & -340 \\ 0 & -1 & -8 & -59 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 43 \\ 0 & 12 & -35 & -340 \\ 0 & 0 & -131 & 1048 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=-5 \\ z=8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -3(x+y)+4z=1 \\ 2x-(y+z)=-5 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{5}{6}=\frac{z+4}{5} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -3x-3y+4z=1 \\ 2x-y-z=-5 \\ 15x+10y-6z=-1 \end{array}\right\} \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -5 \\ 15 & 10 & -6 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & 5 & -13 \\ 0 & -5 & 14 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 101 & 101 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}\right\}$

72. Los valores $x = 3\lambda$, $y = \frac{\lambda}{2}$, $z = \lambda$ son solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Escribe cinco soluciones distintas para el sistema.

Respuesta abierta, según los valores que se elijan para λ. Por ejemplo:

Si $\lambda=-2 \to (-6,-1,-2)$ Si $\lambda=1 \to \left(3,\frac{1}{2},1\right)$ Si $\lambda=2 \to (6,1,2)$.

Si $\lambda=-1 \to \left(-3,-\frac{1}{2},-1\right)$ Si $\lambda=0 \to (0,0,0)$

73. **Los valores $(2\lambda, \lambda - 3, \lambda)$ son solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Completa en tu cuaderno para que las siguientes ternas de valores sean solución del mismo sistema.**

a) (4, ■, ■)
b) (■, ■, 3)
c) (■, 5, ■)
d) (■, ■, −2)
e) (1, ■, ■)
f) (■, 1, ■)

a) $x = 4 \to 2\lambda = 4 \to \lambda = 2 \to (4, -1, 2)$

b) $z = 3 \to \lambda = 3 \to (6, 0, 3)$

c) $y = 5 \to \lambda - 3 = 5 \to \lambda = 8 \to (16, 5, 8)$

d) $z = -2 \to \lambda = -2 \to (-4, -5, -2)$

e) $x = 1 \to 2\lambda = 1 \to \lambda = \frac{1}{2} \to \left(1, -\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

f) $y = 1 \to \lambda - 3 = 1 \to \lambda = 4 \to (8, 1, 4)$

74. **¿Cuáles de los siguientes valores son solución de este sistema?**

$$\left.\begin{aligned} 2x - y - z &= 8 \\ x - z &= 3 \\ x - y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

a) $(\lambda, \lambda + 2, \lambda + 6)$
b) $(\lambda + 3, \lambda - 2, \lambda)$
c) $(\lambda + 3, \lambda, \lambda - 3)$
d) $(\lambda + 5, \lambda, \lambda + 2)$
e) $(\lambda, \lambda - 5, \lambda - 3)$
f) $(\lambda, \lambda - 3, \lambda - 5)$

a) $\left.\begin{aligned} 2\lambda - (\lambda + 2) - (\lambda + 6) &= 8 \\ \lambda - (\lambda - 6) &= 3 \\ \lambda - (\lambda + 2) &= 5 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} -8 &\neq 8 \\ 6 &\neq 3 \\ -2 &\neq 5 \end{aligned}\right\} \to$ No es solución del sistema.

b) $\left.\begin{aligned} 2(\lambda + 3) - (\lambda - 2) - \lambda &= 8 \\ (\lambda + 3) - \lambda &= 3 \\ (\lambda + 3) - (\lambda - 2) &= 5 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 8 &= 8 \\ 3 &= 3 \\ 5 &= 5 \end{aligned}\right\} \to$ Sí es solución del sistema.

c) $\left.\begin{aligned} 2(\lambda + 3) - \lambda - (\lambda - 3) &= 8 \\ (\lambda + 3) - (\lambda - 3) &= 3 \\ (\lambda + 3) - \lambda &= 5 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 9 &\neq 8 \\ 6 &\neq 3 \\ 3 &\neq 5 \end{aligned}\right\} \to$ No es solución del sistema.

d) $\left.\begin{aligned} 2(\lambda + 5) - \lambda - (\lambda + 2) &= 8 \\ (\lambda + 5) - (\lambda + 2) &= 3 \\ (\lambda + 5) - \lambda &= 5 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 8 &= 8 \\ 3 &= 3 \\ 5 &= 5 \end{aligned}\right\} \to$ Sí es solución del sistema.

e) $\left.\begin{aligned} 2\lambda - (\lambda - 5) - (\lambda - 3) &= 8 \\ \lambda - (\lambda - 3) &= 3 \\ \lambda - (\lambda - 5) &= 5 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 8 &= 8 \\ 3 &= 3 \\ 5 &= 5 \end{aligned}\right\} \to$ Sí es solución del sistema.

f) $\left.\begin{aligned} 2\lambda - (\lambda - 3) - (\lambda - 5) &= 8 \\ \lambda - (\lambda - 5) &= 3 \\ \lambda - (\lambda - 3) &= 5 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 8 &= 8 \\ 5 &\neq 3 \\ 3 &\neq 5 \end{aligned}\right\} \to$ No es solución del sistema.

75. **Sabiendo que los valores $(3\lambda - 1, 4\lambda + 3, \lambda)$ son solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, averigua qué soluciones son de la forma:**

a) $(a, a, ■)$
b) $(■, a, a)$

a) $\left.\begin{aligned} a &= 3\lambda - 1 \\ a &= 4\lambda + 3 \end{aligned}\right\} \to 3\lambda - 1 = 4\lambda + 3 \to \lambda = -4 \to (-13, -13, -4)$

b) $\left.\begin{aligned} a &= 4\lambda + 3 \\ a &= \lambda \end{aligned}\right\} \to 4\lambda + 3 = \lambda \to \lambda = -1 \to (-4, -1, -1)$

76. Si la terna (λ, λ + 1, λ − 3) es solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, averigua cuáles de las siguientes también lo son y razona por qué.

a) $(2\lambda, 2\lambda + 2, 2\lambda - 6)$
b) $(2\lambda, 2\lambda + 1, 2\lambda - 3)$
c) $(\lambda + 1, \lambda + 2, \lambda - 2)$
d) $(\lambda - 3, \lambda - 2, \lambda - 6)$
e) $(\lambda - 1, \lambda, \lambda - 4)$

Un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas del cual $(\lambda, \lambda+1, \lambda-3)$ es solución, es, por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y-z=2 \\ x-y=-1 \\ x-z=3 \end{array}\right\}$$

Sustituyendo cada terna dada en el sistema, se observa si es o no solución:

a) $\left.\begin{array}{r} 2(2\lambda)-(2\lambda+2)-(2\lambda-6)=2 \\ 2\lambda-(2\lambda+2)=-1 \\ 2\lambda-(2\lambda-6)=3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 4\neq 2 \\ -2\neq -1 \\ 6\neq 3 \end{array}\right\} \to$ No

b) $\left.\begin{array}{r} 2(2\lambda)-(2\lambda+1)-(2\lambda-3)=2 \\ 2\lambda-(2\lambda+1)=-1 \\ 2\lambda-(2\lambda-3)=3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ -1=-1 \\ 3=3 \end{array}\right\} \to$ Sí

c) $\left.\begin{array}{r} 2(\lambda+1)-(\lambda+2)-(\lambda-2)=2 \\ \lambda+1-(\lambda+2)=-1 \\ \lambda+1-(\lambda-2)=3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ -1=-1 \\ 3=3 \end{array}\right\} \to$ Sí

d) $\left.\begin{array}{r} 2(\lambda-3)-(\lambda-2)-(\lambda-6)=2 \\ \lambda-3-(\lambda-2)=-1 \\ \lambda-3-(\lambda-6)=3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ -1=-1 \\ 3=3 \end{array}\right\} \to$ Sí

e) $\left.\begin{array}{r} 2(\lambda-1)-\lambda-(\lambda-4)=2 \\ \lambda-1-\lambda=-1 \\ \lambda-1-(\lambda-4)=3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ -1=-1 \\ 3=3 \end{array}\right\} \to$ Sí

77. Completa en tu cuaderno las ternas de valores para que sean solución de este sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x-y-3z=2 \\ 2x+\dfrac{y}{2}-z=4 \end{array}\right\}$$

a) (■, ■, λ)
b) (■, ■, 3)
c) (■, λ, ■)
d) (■, 3, ■)
e) (λ, ■, ■)
f) (3, ■, ■)

Primero se resuelve el sistema en función de un parámetro μ, y después se calculan las soluciones pedidas:

$\left.\begin{array}{r} x-y-3z=2 \\ 2x+\dfrac{y}{2}-z=4 \end{array}\right\} \to \ldots \to$ Las infinitas soluciones están determinadas por la terna $\left(\dfrac{6+4\mu}{3}, -\dfrac{5}{3}\mu, \mu\right)$.

a) $\mu=\lambda \to \left(\dfrac{6+4\lambda}{3}, -\dfrac{5}{3}\lambda, \lambda\right)$

b) $\mu=3 \to (6, -5, 3)$

c) $-\frac{5}{3}\mu=\lambda\to\left(\frac{6+4\cdot\left(-\frac{3}{5}\lambda\right)}{3},\lambda,-\frac{3}{5}\lambda\right)=\left(\frac{10-4\lambda}{5},\lambda,-\frac{3}{5}\lambda\right)$

d) $-\frac{5}{3}\mu=3\to\mu=-\frac{9}{5}\to\left(-\frac{2}{5},3,-\frac{9}{5}\right)$

e) $\frac{6+4\mu}{3}=\lambda\to\mu=\frac{3\lambda-6}{4}\to\left(\lambda,-\frac{5}{3}\left(\frac{3\lambda-6}{4}\right),\frac{3\lambda-6}{4}\right)=\left(\lambda,\frac{10-5\lambda}{4},\frac{3\lambda-6}{4}\right)$

f) $\frac{6+4\mu}{3}=3\to\mu=\frac{3}{4}\to\left(3,-\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$

78. **Resuelve el sistema** $\left.\begin{array}{r}x=y+z\\ x-3y+2z=13\end{array}\right\}$.

a) Para $x=1$.
b) Para $x=-4$.
c) Para cualquier valor de x.

a) $x=1\to\left.\begin{array}{r}1=y+z\\ 1-3y+2z=13\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}y+z=1\\ -3y+2z=12\end{array}\right\}\xrightarrow{z=1-y}-3y+2(1-y)=12\to\left.\begin{array}{r}y=-2\\ z=3\end{array}\right\}\to(1,-2,3)$

b) $x=-4\to\left.\begin{array}{r}-4=y+z\\ -4-3y+2z=13\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}y+z=-4\\ -3y+2z=17\end{array}\right\}\xrightarrow{z=-4-y}-3y+2(-4-y)=17\to\left.\begin{array}{r}y=-5\\ z=1\end{array}\right\}\to(-4,-5,1)$

c) Se tiene infinitas soluciones, dependientes de un parámetro λ:

$$x=\lambda\to\left.\begin{array}{r}\lambda=y+z\\ \lambda-3y+2z=13\end{array}\right\}\xrightarrow{y=\lambda-z}\lambda-3(\lambda-z)+2z=13\to\left.\begin{array}{r}y=-\frac{13}{2}\\ z=\frac{13+2\lambda}{2}\end{array}\right\}\to\left(\lambda,-\frac{13}{2},\frac{13+2\lambda}{2}\right)$$

79. **Considera el sistema** $\left.\begin{array}{r}x-2=z-y\\ 3x+y=1-2z\end{array}\right\}$.

a) Resuélvelo para $y=3$.
b) Resuélvelo para cualquier valor de y.
c) Halla y para $x=7$.
d) Halla z para $x=-2$.

a) $y=3\to\left.\begin{array}{r}x-2=z-3\\ 3x+3=1-2z\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x-z=-1\\ 3x+2z=-2\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducción}}5z=1\to\left.\begin{array}{r}x=-\frac{4}{5}\\ z=\frac{1}{5}\end{array}\right\}\to\left(-\frac{4}{5},3,\frac{1}{5}\right)$

b) Obviamente en este caso se tienen infinitas soluciones, determinadas por un parámetro λ:

$$y=\lambda\to\left.\begin{array}{r}x-2=z-\lambda\\ 3x+\lambda=1-2z\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x-z=2-\lambda\\ 3x+2z=1-\lambda\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducción}}\left.\begin{array}{r}z=\frac{2\lambda-5}{5}\\ x=\frac{5-3\lambda}{5}\end{array}\right\}\to\left(\frac{5-3\lambda}{5},\lambda,\frac{2\lambda-5}{5}\right)$$

c) Utilizando el apartado anterior:

$$x=7\to\frac{5-3\lambda}{5}=7\to\lambda=y=-10$$

d) De nuevo, recurriendo al apartado b):

$$x=-2\to\frac{5-3\lambda}{5}=-2\to\lambda=5\to z=\frac{2\cdot5-5}{5}=1$$

80. Resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x-y-z=0 \\ x+z=1 \\ y+z=1 \end{array}\right\}$
c) $\left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=-4 \\ -x+y-z=4 \\ x+y+z=2 \\ x+2z=0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-2y+3z=10 \\ -x+2z=-5 \\ 4x-3y+z=5 \\ 3x-y-4z=-4 \end{array}\right\}$
d) $\left.\begin{array}{r} 2x+3y+5z=0 \\ x+5y+3x=-7 \\ 6x+7y-10z=4 \\ x-2y+2z=7 \end{array}\right\}$

a)
$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x-y-z=0 \\ x+z=1 \\ y+z=1 \end{array}\right\} \xrightarrow[E_3=-E_1+E_3]{E_2=-2E_1+E_2} \left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ -3y-z=-2 \\ -y+z=0 \\ y+z=1 \end{array}\right\} \xrightarrow[E_4=3E_4+E_2]{E_3=-3E_3+E_2} \left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ -3y-z=-2 \\ -4z=-2 \\ 2z=1 \end{array}\right\}$$

Las ecuaciones tercera y cuarta son proporcionales. Se elimina una de ellas y se continúa resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ -3y-z=-2 \\ 2z=1 \end{array}\right\} \rightarrow z=\frac{1}{2} \xrightarrow{-3y-\frac{1}{2}=-2} y=\frac{1}{2} \xrightarrow{x+y=1} x=\frac{1}{2}$$

b)
$$\left.\begin{array}{r} 2x-2y+3z=10 \\ -x+2z=-5 \\ 4x-3y+z=5 \\ 3x-y-4z=-4 \end{array}\right\} \xrightarrow[\substack{E_3=-2E_1+E_3 \\ E_4=-3E_1+2E_4}]{E_2=E_1+2E_2} \left.\begin{array}{r} 2x-2y+3z=10 \\ -2y+7z=0 \\ y-5z=-15 \\ 4y-17z=-38 \end{array}\right\} \xrightarrow[E_4=E_4+2E_2]{E_3=2E_3+E_2} \left.\begin{array}{r} 2x-2y+3z=10 \\ -2y+7z=0 \\ -3z=-30 \\ -3z=-38 \end{array}\right\}$$

Sistema incompatible.

c)
$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=-4 \\ -x+y-z=4 \\ x+y+z=2 \\ x+2z=0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\substack{E_3=-2E_3+E_1 \\ E_4=-2E_4+E_1}]{E_2=2E_2+E_1} \left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=-4 \\ y+z=4 \\ -3y+z=-8 \\ -y-z=-4 \end{array}\right\}$$

Las ecuaciones segunda y cuarta son proporcionales. Se elimina una de ellas y se continúa resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=-4 \\ y+z=4 \\ -3y+z=-8 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_3=E_3+3E_1} \left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=-4 \\ y+z=4 \\ 4z=4 \end{array}\right\} \rightarrow z=1 \xrightarrow{y+z=4} y=3 \xrightarrow{2x-y+3z=-4} x=-2$$

d)
$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y+5z=0 \\ x+5y+3x=-7 \\ 6x+7y-10z=4 \\ x-2y+2z=7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y+5z=0 \\ 4x+5y=-7 \\ 6x+7y-10z=4 \\ x-2y+2z=7 \end{array}\right\} \xrightarrow[\substack{E_3=--3E_1+E_3 \\ E_4=-2E_4+E_1}]{E_2=-2E_2+E_1} \left.\begin{array}{r} 2x+3y+5z=0 \\ -7y-10z=14 \\ 2y+25z=-4 \\ 7y+z=-14 \end{array}\right\} \xrightarrow[E_4=7E_2+E_4]{E_3=2E_2+E_3} \left.\begin{array}{r} 2x+3y+5z=0 \\ -7y-10z=14 \\ 5z=-18 \\ 23z=21 \end{array}\right\}$$

El sistema es incompatible, porque de las ecuaciones tercera y cuarta se obtienen valores diferentes de z. Por tanto, no existe ninguna solución.

81. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales.

a) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{array}\right\}$
d) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=10 \\ -x+y=-2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-y=3 \\ xy=2 \end{array}\right\}$
e) $\left.\begin{array}{r} x^2-3y^2=6 \\ x-y=-2 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=0 \\ xy-3y=20 \end{array}\right\}$
f) $\left.\begin{array}{r} xy=-2 \\ x^2-y^2=3 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=7-y} (7-y)^2+y^2=25 \to y^2-7y+12=0 \to \begin{cases} y_1=3 \to x_1=4 \\ y_2=4 \to x_2=3 \end{cases}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-y=3 \\ xy=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=y+3} (y+3)y=2 \to y^2+3y-2=0 \to \begin{cases} y_1=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2} \to x_1=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \\ y_2=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} \to x_2=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=0 \\ xy-3y=20 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=2x} 2x^2-6x=20 \to x^2-3x-10=0 \to \begin{cases} x_1=5 \to y_1=10 \\ x_2=-2 \to y_2=-4 \end{cases}$

d) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=10 \\ -x+y=-2 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=x-2} x^2+(x-2)^2=10 \to x^2-2x-3=0 \to \begin{cases} x_1=3 \to y_1=1 \\ x_2=-1 \to y_2=-3 \end{cases}$

e) $\left.\begin{array}{r} x^2-3y^2=6 \\ x-y=-2 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=y-2} (y-2)^2-3y^2=6 \to y^2+2y+1=0 \to y=-1 \to x=-3$

f) $\left.\begin{array}{r} xy=-2 \\ x^2-y^2=3 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=-\frac{2}{x}} x^2-\left(-\dfrac{2}{x}\right)^2=3 \to x^2-\dfrac{4}{x^2}=3 \to x^4-3x^2-4=0 \to$ Es una ecuación bicuadrada.

$x^4-3x^2-4=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2-3t-4=0 \to \begin{cases} t_1=4 \to \begin{cases} x_1=2 \to y_1=-1 \\ x_2=-2 \to y_2=1 \end{cases} \\ t_2=-1 \to \text{Imposible} \end{cases}$

82. Encuentra las soluciones de los siguientes sistemas no lineales.

a) $\left.\begin{array}{r} x-3y+5=0 \\ xy-10=\dfrac{x}{2} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=4 \\ x^2+y^2=13 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x-\dfrac{x+1}{y}=11 \\ x+y=4 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} (x-2y)^2=4 \\ -2x+y=-16 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} (y-x)^2-xy=31 \\ x-(y-1)^2=xy \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x^2}{9y}=2 \\ x-\dfrac{x}{y}=-3 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x-3y+5=0 \\ xy-10=\dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \xrightarrow{x=3y-5} (3y-5)y-10=\dfrac{3y-5}{2} \to 6y^2-13y-15=0 \to \begin{cases} y_1=3 \to x_1=4 \\ y_2=-\dfrac{5}{6} \to x_2=-\dfrac{15}{2} \end{cases}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=4 \\ x^2+y^2=13 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=4-2x} x^2+(4-2x)^2=13 \to 5x^2-16x+3=0 \to \begin{cases} x_1=3 \to y_1=-2 \\ x_2=\dfrac{1}{5} \to y_2=\dfrac{18}{5} \end{cases}$

c) $\left.\begin{array}{r} x-\dfrac{x+1}{y}=11 \\ x+y=4 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=4-y} 4-y-\dfrac{(4-y)+1}{y}=11 \to y^2+6y+5=0 \to \begin{cases} y_1=-5 \to x_1=9 \\ y_2=-1 \to x_2=5 \end{cases}$

d) $\left.\begin{array}{r} (x-2y)^2=4 \\ -2x+y=-16 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=2x-16} (x-2(2x-16))^2=4 \to 3x^2-64x+340=0 \to \begin{cases} x_1=10 \to y_1=4 \\ x_2=\dfrac{34}{3} \to y_2=\dfrac{20}{3} \end{cases}$

e) $\left.\begin{array}{r}(y-x)^2-xy=31\\ x-(y-1)^2=xy\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x^2+y^2-3xy=31\\ x(1-y)-y^2+2y=1\end{array}\right\}\xrightarrow{x=\frac{1-2y+y^2}{1-y}}$

$$\rightarrow\left(\frac{1-2y+y^2}{1-y}\right)^2+y^2-3y\left(\frac{1-2y+y^2}{1-y}\right)=31\rightarrow y^2-y-6=0\rightarrow\begin{cases}y_1=3\rightarrow x_1=-2\\ y_2=-2\rightarrow x_2=3\\ y_3=1\rightarrow\begin{cases}x_3=\dfrac{3+\sqrt{129}}{2}\\ x_4=\dfrac{3-\sqrt{129}}{2}\end{cases}\end{cases}$$

f) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x^2}{9y}=2\\ x-\dfrac{x}{y}=-3\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x^2=18y\\ xy-x=-3y\end{array}\right\}\xrightarrow{y=\frac{x^2}{18}}x\left(\frac{x^2}{18}\right)-x=-3\left(\frac{x^2}{18}\right)\rightarrow$

$$\rightarrow x^3+3x^2-18x=0\rightarrow x(x^2+3x-18)=0\rightarrow\begin{cases}x_1=0\rightarrow y_1=0\rightarrow \text{No es válida.}\\ x_2=3\rightarrow y_2=\dfrac{1}{2}\\ x_3=-6\rightarrow y_3=2\end{cases}$$

83. **Resuelve estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r}3xy-2x=100\\ \dfrac{x}{y+1}=2\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=-1\\ 5x+6y=-1\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}(x-3)(y+1)=50\\ \dfrac{x+2}{y-4}=2\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+3}{7}=y-1\\ \sqrt{x-2}=y\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r}\sqrt{y}+2\sqrt{x}=15\\ \sqrt{y+x-1}=1\end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r}x^2-xy+y=-1\\ \sqrt{y-1}=x\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}3xy-2x=100\\ \dfrac{x}{y+1}=2\end{array}\right\}\xrightarrow{x=2(y+1)}3\cdot 2(y+1)y-2\cdot 2(y+1)=100\rightarrow 3y^2+y-52=0\rightarrow\begin{cases}y_1=4\rightarrow x_1=10\\ y_2=-\dfrac{13}{3}\rightarrow x_2=-\dfrac{20}{3}\end{cases}$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=-1\\ 5x+6y=-1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}4x+3y=-xy\\ 5x+6y=-1\end{array}\right\}\xrightarrow{y=\frac{-1-5x}{6}}4x+3\left(\frac{-1-5x}{6}\right)=-x\left(\frac{-1-5x}{6}\right)\rightarrow$

$$\rightarrow -5x^2+8x-3=0\rightarrow\begin{cases}x_1=1\rightarrow y_1=-1\\ x_2=\dfrac{3}{5}\rightarrow y_2=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

c) $\left.\begin{array}{r}(x-3)(y+1)=50\\ \dfrac{x+2}{y-4}=2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}(x-3)(y+1)=50\\ x+2=2y-8\end{array}\right\}\xrightarrow{x=2y-10}(2y-10-3)(y+1)=50\rightarrow$

$$\rightarrow 2y^2+2y-10y-10-3y-3-50=0\rightarrow 2y^2-11y-63=0\rightarrow\begin{cases}y_1=9\rightarrow x_1=8\\ y_2=-\dfrac{7}{2}\rightarrow x_2=-17\end{cases}$$

d) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+3}{7}=y-1\\ \sqrt{x-2}=y\end{array}\right\}\rightarrow\dfrac{x+3}{7}=\sqrt{x-2}-1\rightarrow(x+10)^2=\left(7\sqrt{x-2}\right)^2\rightarrow x^2-29x+198\rightarrow\begin{cases}x_1=11\rightarrow y_1=3\\ x_2=18\rightarrow y_2=4\end{cases}$

e) $\left.\begin{array}{r}\sqrt{y}+2\sqrt{x}=15\\ \sqrt{y+x-1}=1\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}\left(\sqrt{y}\right)^2=\left(15-2\sqrt{x}\right)^2\\ \left(\sqrt{y+x-1}\right)^2=1^2\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l}y=225+4x-6\sqrt{x}\\ y=2-x\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Igualación}} 225+4x-6\sqrt{x}=2-x \to$

$\to (5x+223)^2=\left(6\sqrt{x}\right)^2 \to 25x^2+2194x+49729=0 \to$ No existe solución.

f) $\left.\begin{array}{r}x^2-xy+y=-1\\ \sqrt{y-1}=x\end{array}\right\} \to \left(\sqrt{y-1}\right)^2-y\sqrt{y-1}+y=-1 \to y\left(2-\sqrt{y-1}\right)=0 \to \begin{cases} y_1=0 \to x_1 \to \text{ No existe.}\\ y_2=5 \to \begin{cases} x_2=2\\ x_3=-2 \to \text{No válida.}\end{cases}\end{cases}$

84. Halla la solución de estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r}2^x\cdot 2^y=16\\ 9^x=\dfrac{3^y}{3}\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}xy=2\\ \dfrac{125^x}{625}=25^y\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}\log 2x=1+\log y\\ \sqrt{x-1}=y+1\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}25^x\cdot 5^y=\dfrac{1}{5}\\ \sqrt{x+11}=y\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}2^x\cdot 2^y=16\\ 9^x=\dfrac{3^y}{3}\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}2^{x+y}=2^4\\ 3^{2x}=3^{y-1}\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}x+y=4\\ 2x=y-1\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}x+y=4\\ 2x-y=-1\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} 3x=3 \to x=1 \to y=3$

b) $\left.\begin{array}{r}xy=2\\ \dfrac{125^x}{625}=25^y\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}xy=2\\ 5^{3x-4}=5^{2y}\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}xy=2\\ 3x-4=2y\end{array}\right\} \xrightarrow{y=\frac{2}{x}} 3x-4=\dfrac{4}{x} \to 3x^2-4x-4=0 \to \begin{cases} x_1=2 \to y_1=1\\ x_2=-\dfrac{2}{3} \to y_2=-3\end{cases}$

c) $\left.\begin{array}{r}\log 2x=1+\log y\\ \sqrt{x-1}=y+1\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}\log 2x=\log 10y\\ \sqrt{x-1}=y+1\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}x=5y\\ \sqrt{x-1}=y+1\end{array}\right\} \to \left(\sqrt{5y-1}\right)^2=(y+1)^2 \to$

$\to 5y-1=y^2+2y+1 \to y^2-3y+2=0 \to \begin{cases} y_1=1 \to x_1=5\\ y_2=2 \to x_2=10\end{cases}$

d) $\left.\begin{array}{r}25^x\cdot 5^y=\dfrac{1}{5}\\ \sqrt{x+11}=y\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}5^{2x}\cdot 5^y=5^{-1}\\ \sqrt{x+11}=y\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}2x+y=-1\\ \sqrt{x+11}=y\end{array}\right\} \to 2x+\sqrt{x+11}=-1 \to$

$\to 4x^2+3x-10=0 \to \begin{cases} x_1=\dfrac{5}{4} \to \begin{cases} y_1=-\dfrac{7}{2}\\ y_2=\dfrac{7}{2} \to \text{ No válida.}\end{cases}\\ x_2=-2 \to \begin{cases} y_3=3\\ y_4=-3 \to \text{ No válida.}\end{cases}\end{cases}$

85. Para producir leche semidesnatada que conserve el 40 % de su grasa se mezclan dos tipos de leche: una con un 20 % de grasa y otra con el 70 % de grasa. ¿Cuántos litros de cada tipo de leche se necesitan para producir 200 litros de leche con el 40 % de grasa?

Sean x e y el número de litros que se necesitan de la leche con un 20 % de grasa y con un 70 % de grasa, respectivamente. El sistema que se plantea es el siguiente:

$\left.\begin{array}{r}x+y=200\\ \dfrac{20}{100}x+\dfrac{70}{100}y=\dfrac{40}{100}\cdot 200\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}x+y=200\\ 2x+7y=800\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}2x+2y=400\\ -2x-7y=-800\end{array}\right\} \to -5y=-400 \to \begin{cases} x=120\\ y=80\end{cases}$

Por tanto, se necesitan 120 litros de la leche con un 20 % de grasa y 80 litros de la leche con un 70 % de grasa.

86. **En una bodega venden dos tipos de vino: crianza y reserva. Averigua cuál es su precio si sabemos que Juan compró 3 botellas de reserva y 12 botellas de crianza y pagó 69 €, mientras que Belén compró 6 botellas de crianza y 8 botellas de reserva y pagó 80 €.**

Sean x e y los precios en € de las botella de crianza y de reserva, respectivamente. Entonces, el gasto que han realizado Juan y Belén queda reflejado en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}12x+3y=69\\6x+8y=80\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}4x+y=23\\3x+4y=40\end{array}\right\}\xrightarrow{y=23-4x}3x+4(23-4x)=40\rightarrow\begin{cases}x=4\\y=7\end{cases}$$

Es decir, una botella de crianza cuesta 4 €; y una de reserva, 7 €.

87. **Un ciclista y un coche parten uno al encuentro del otro desde dos ciudades separadas por 180 km. Sabiendo que el ciclista avanza 4 veces más despacio que el coche y que tardan 1 h 48 min en encontrarse, ¿cuál es la velocidad de cada uno?**

Planteamos un sistema de ecuaciones, teniendo en cuenta que $e=v\cdot t$.

Llamamos x a la distancia recorrida por el ciclista e y a la velocidad del mismo:

1 h 48 min = 1,8 h

$$\left.\begin{array}{r}x=1{,}8y\\180-x=7{,}2y\end{array}\right\}\rightarrow 180-1{,}8y=7{,}2y\rightarrow y=20$$

$x=1{,}8\cdot 20=36$

La velocidad del ciclista es 20 km/h, y la velocidad del coche es 80 km/h.

88. **Calcula un número, sabiendo que la suma de sus cifras es 14, y que si se invierte el orden en que están colocadas, el número disminuye en 18 unidades.**

Llamamos x a la cifra de las decenas e y a la de las unidades:

$$\left.\begin{array}{r}x+y=14\\10y+x+18=10x+y\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}y=14-x\\9y-9x+18=0\end{array}\right\}\rightarrow 126-9x-9x+18=0\rightarrow 18x=144\rightarrow x=8\rightarrow y=14-8=6$$

El número es 86.

89. **Un camión sale de una ciudad a 80 km/h y dos horas después parte en la misma dirección un coche a 100 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzarlo y cuánta distancia habrá recorrido hasta ese momento?**

Planteamos un sistema de ecuaciones, teniendo en cuenta que $e=v\cdot t$.

Llamamos x a la distancia recorrida por el camión e y al tiempo que tarda en alcanzarlo:

$$\left.\begin{array}{r}x=80y\\x+160=100y\end{array}\right\}\rightarrow 80y+160=100y\rightarrow y=8$$

$x=80\cdot 8=640$

Tardará 8 horas en alcanzarlo y habrá recorrido 800 kilómetros.

90. **Los lados de un rectángulo se diferencian en 2 m. Si aumentáramos 2 m cada lado, el área se incrementaría en 40 m². Halla las dimensiones del polígono.**

Llamamos x al lado menor del polígono e y a su área:

$$\left.\begin{aligned} x(x+2) &= y \\ (x+2)(x+4) &= y+40 \end{aligned}\right\} \to x^2+6x+8 = x^2+2x+40 \to 4x = 32 \to x = 8$$

$y = 8(8+2) = 80$

Los lados del polígono original miden 8 y 10 m, respectivamente.

91. **Jacinto está cercando un terreno de forma rectangular. Cuando lleva puesto alambre a dos lados consecutivos del terreno, se da cuenta de que ha gastado 170 m de alambre. Si sabe que la diagonal del rectángulo mide 130 m, ¿cuáles son las dimensiones y el área del terreno?**

Llamamos x e y a las dimensiones del terreno:

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 170 \\ x^2+y^2 &= 130^2 \end{aligned}\right\} \to y^2-170y+6000=0 \to y = \frac{-(-170)\pm\sqrt{(-170)^2-4\cdot 1\cdot 6000}}{2\cdot 1} = \frac{170\pm 70}{2} \to \begin{cases} y_1 = 120 \\ y_2 = 50 \end{cases}$$

$y_1 = 120 \to x_1 = 170-120 = 50$

$y_2 = 50 \to x_2 = 170-50 = 120$

Las dimensiones del terreno son 120 y 50 m, respectivamente.

El área del terreno mide 6 000 m².

92. **Averigua las dimensiones que tiene un pliego rectangular de papel, sabiendo que si dejamos los márgenes laterales de 1 cm y los verticales de 2,5 cm, el área es 360 cm², y que si los márgenes laterales son de 2 cm y los verticales son de 1,25 cm, el área es la misma.**

Llamamos x e y a las dimensiones del pliego:

$$\left.\begin{aligned} (x-2)(y-5) &= 360 \\ (x-4)(y-2,5) &= 360 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x &= \frac{350+2y}{y-5} \\ x &= \frac{350+4y}{y-2,5} \end{aligned}\right\} \to 2y^2-15y-875=0$$

$$y = \frac{-(-15)\pm\sqrt{(-15)^2-4\cdot 2\cdot(-875)}}{2\cdot 2} = \frac{15\pm 85}{4} \to \begin{cases} y_1 = -\dfrac{35}{2} \\ y_2 = 25 \end{cases}$$

Si $y_1 = -\dfrac{35}{2} \to x_1 = \dfrac{350+2\dfrac{-35}{2}}{\dfrac{-35}{2}-5} = -14$ Si $y_2 = 25 \to x_2 = \dfrac{350+2\cdot 25}{25-5} = 20$

Las dimensiones del pliego son 20 y 25 cm, respectivamente.

93. **Las habitaciones de Alicia y Marta tienen forma cuadrada. La suma de sus superficies es 29,89 m² y la diferencia de estas superficies es 5,39 m². Calcula sus dimensiones.**

Sean x e y las longitudes de los lados de las respectivas habitaciones. Se supone $x > y$, entonces:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= 29,89 \\ x^2-y^2 &= 5,39 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} 2x^2 = 35,28 \to \begin{cases} x_1 = 4,2 \xrightarrow{y^2=29,89-x^2} \begin{cases} y_1 = 3,5 \\ y_2 = -3,5 \to \text{No válida.} \end{cases} \\ x_2 = -4,2 \to \text{No válida.} \end{cases}$$

Las soluciones negativas carecen de sentido, por ello, las únicas medidas válidas de las habitaciones son 4,2 m y 3,5 m, respectivamente.

94. Considera un cuadrado y la diagonal de este. Se forma un rectángulo cuya base mide igual que la diagonal del cuadrado, siendo el perímetro del rectángulo $4 + 6\sqrt{2}$ cm. Halla las dimensiones de ambas figuras sabiendo que la suma de sus áreas es $9 + 6\sqrt{2}$ cm².

Sea x la longitud del lado del cuadrado en cm.

Primero, por el teorema de Pitágoras, se calcula la longitud de la diagonal del cuadrado, en función de x:

$d^2 = x^2 + x^2 \rightarrow d = x\sqrt{2}$ cm

Sea y la longitud de la altura del rectángulo. Las ecuaciones que formarán el sistema son:

- Perímetro = $4+6\sqrt{2} = 2x\sqrt{2}+2y$
- Suma de áreas = $9+6\sqrt{2} = x^2 + xy\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{r} 4+6\sqrt{2}=2x\sqrt{2}+2y \\ 9+6\sqrt{2}=x^2+xy\sqrt{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 2+3\sqrt{2}-x\sqrt{2} \\ y=\dfrac{9+6\sqrt{2}-x^2}{x\sqrt{2}} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Igualación}} 2+3\sqrt{2}-x\sqrt{2}=\dfrac{9+6\sqrt{2}-x^2}{x\sqrt{2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - x(6+2\sqrt{2})+9+6\sqrt{2}=0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \rightarrow y_1 = 2 \\ x_2 = 3+2\sqrt{2} \rightarrow y_2 = -2 \rightarrow \text{No válida.} \end{cases}$$

Por tanto, el lado del cuadrado mide 3 cm; la altura del rectángulo, 2 cm; y la base del rectángulo, $3\sqrt{2}$ cm.

95. Calcula las dimensiones de un rectángulo de perímetro 40 cm del que se conoce que la suma de sus diagonales es $8\sqrt{13}$ cm.

Sea x la longitud de la base del rectángulo, e y su altura. Primero, se calcula la longitud de la diagonal con el teorema de Pitágoras. Después, teniendo en cuenta que las diagonales de un rectángulo son iguales y que el semiperímetro mide 20 cm, se plantea y se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2\sqrt{x^2+y^2}=8\sqrt{13} \\ x+y=20 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=20-x} \left(2\sqrt{x^2+(20-x)^2}\right)^2 = \left(8\sqrt{13}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4(x^2+400+x^2-40x)=832 \rightarrow x^2-20x+96=0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \rightarrow y_1 = 12 \\ x_2 = 12 \rightarrow y_2 = 8 \end{cases}$$

Por tanto, el rectángulo tiene unas dimensiones de 8 × 12 cm.

96. La altura de un rectángulo es tres quintas partes de la base. La tercera parte de la diagonal del rectángulo mide $\sqrt{34}$ cm. Halla las dimensiones del rectángulo.

Sea x la longitud de la base del rectángulo, e y su altura, entonces, por el teorema de Pitágoras se obtiene la diagonal, y con ella se plantea y resuelve el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} y=\dfrac{3}{5}x \\ \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}=\sqrt{34} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{\sqrt{x^2+\left(\dfrac{3}{5}x\right)^2}}{3}=\sqrt{34} \rightarrow \left(\sqrt{x^2+\left(\dfrac{3}{5}x\right)^2}\right)^2 = \left(3\sqrt{34}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2+\left(\dfrac{3}{5}x\right)^2 = 306 \rightarrow 34x^2 = 7650 \rightarrow x^2 = 225 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 15 \rightarrow y_1 = 9 \\ x_2 = -15 \rightarrow \text{No válida.} \end{cases}$$

Por tanto, el rectángulo tiene unas dimensiones de 15 × 9 cm.

97. **La cifra de las unidades de un número de dos cifras es tres unidades mayor que el cuadrado de la cifra de las decenas. El cuadrado del consecutivo del número original supera en 55 unidades al cuadrado del original. Encuentra el número de partida.**

Sean *x* e *y* las cifras de las unidades y las decenas, respectivamente. El sistema que se debe resolver para encontrar el número de partida es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x = 3 + y^2 \\ (x + 10y + 1)^2 = 55 + (x + 10y)^2 \end{array}\right\} \rightarrow (3 + y^2 + 10y + 1)^2 = 55 + (3 + y^2 + 10y)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 108y^2 + 80y + 16 = 55 + 106y^2 + 60y + 9 \rightarrow y^2 + 10y - 24 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = -12 \rightarrow \text{No válida.} \\ y_2 = 2 \rightarrow x_2 = 7 \end{cases}$$

Entonces, el número de partida es 27.

98. **El alquiler de una tienda de campaña cuesta 80 € al día. Inés está preparando una excursión con sus amigos y hace la siguiente reflexión: «Si fuéramos tres amigos más, tendríamos que pagar 6 € menos cada uno». ¿Cuántos amigos van de excursión?**

N.° de amigos	Precio en € por persona	TOTAL en €
x	y	80
$x + 3$	$y - 6$	80

El sistema que hay que resolver es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} xy = 80 \\ (x + 3)(y - 6) = 80 \end{array}\right\} \xrightarrow{y = \frac{80}{x}} (x + 3)\left(\frac{80}{x} - 6\right) = 80 \rightarrow x^2 + 3x - 40 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \rightarrow y_1 = 16 \\ x_2 = -8 \rightarrow \text{No válida.} \end{cases}$$

Por tanto, van de excursión 5 amigos, y cada uno paga 16 €.

99. **La diferencia de dos números es 5. La diferencia de los cuadrados de sus consecutivos es 95. Halla los dos números.**

Sean *x* e *y* los números buscados. Se supone $x > y$. Entonces, hay que resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 5 \\ (x + 1)^2 - (y + 1)^2 = 95 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = y + 5} (y + 5 + 1)^2 - (y + 1)^2 = 85 \rightarrow 10y = 60 \rightarrow y = 6 \rightarrow x = 11$$

Los números son 6 y 11.

100. La suma de las raíces cuadradas de dos números es 6. El cociente de ambos números es igual al menor de ellos. Encuentra esos números.

Sean *x* e *y* los números buscados. Se supone $x > y$. Entonces, hay que resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{x}+\sqrt{y}=6\\ \dfrac{x}{y}=y\end{array}\right\}\xrightarrow{x=y^2}\sqrt{y^2}+\sqrt{y}=6\rightarrow y^2-13y+36=0\rightarrow\begin{cases}y_1=4\rightarrow x_1=16\\ y_2=9\rightarrow x_2=81\end{cases}$$

Tras la comprobación de las soluciones se descarta $(81, 9)$. Por ello, los números buscados son 16 y 4.

101. Busca dos números naturales de forma que su producto disminuido 12 unidades coincide con el cuádruple del menor, sabiendo además que la diferencia del triple del menor y el mayor es una unidad.

Sean *x* e *y* los números naturales buscados. Se supone $x > y$. Entonces, hay que resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}xy-12=4y\\ 3y-x=1\end{array}\right\}\xrightarrow{x=3y-1}(3y-1)y-12=4y\rightarrow 3y^2-5y-12=0\rightarrow\begin{cases}y_1=3\rightarrow x_1=8\\ y_2=-\dfrac{4}{3}\rightarrow \text{No válida.}\end{cases}\rightarrow \text{Los números son 8 y 3.}$$

102. Dos vacas y tres terneros valen lo mismo que dieciséis ovejas. Una vaca y cuatro ovejas valen igual que tres terneros. Tres terneros y ocho ovejas cuestan lo mismo que cuatro vacas. Averigua el precio de cada animal.

Sean *x*, *y*, *z* los precios respectivos, en €, de una vaca, un ternero y una oveja. Entonces:

$$\left.\begin{array}{r}2x+3y=16z\\ x+4z=3y\\ 3y+8z=4x\end{array}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}2&3&-16&0\\1&-3&4&0\\-4&3&8&0\end{array}\right)\xrightarrow[E_3=2E_1+E_3]{E_2=-2E_2+E_1}\left(\begin{array}{rrr|r}2&3&-16&0\\0&-9&36&0\\0&9&-24&0\end{array}\right)\xrightarrow{E_3=E_2+E_3}\left(\begin{array}{rrr|r}2&3&-16&0\\0&-9&36&0\\0&0&12&0\end{array}\right)\rightarrow x=y=z=0$$

Se obtiene la solución trivial nula. Obviamente, carece de sentido para este problema.

103. Encuentra dos números naturales sabiendo que la quinta parte de su diferencia es 2 y la suma de sus inversos es $\frac{13}{72}$.

Sean *x* e *y* los números naturales buscados. Se supone $x > y$. Entonces, hay que resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-y}{5}=2\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{13}{72}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x=y+10\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{13}{72}\end{array}\right\}\xrightarrow{x=y+10}\frac{1}{y+10}+\frac{1}{y}=\frac{13}{72}\rightarrow 72(2y+10)=13y(y+10)\rightarrow$$

$$\rightarrow 13y^2-14y-720=0\rightarrow\begin{cases}y_1=8\rightarrow x_1=18\\ y_2=-\dfrac{90}{13}\rightarrow \text{No válida.}\end{cases}\rightarrow \text{Los números buscados son 18 y 8.}$$

104. Halla dos números naturales tales que el inverso del primero más el triple del segundo es $\frac{31}{5}$ y la diferencia entre el doble del primero y el inverso del segundo es $\frac{19}{2}$.

Sean *x* e *y* los números naturales buscados. Se supone $x > y$. Entonces, hay que resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{1}{x}+3y=\dfrac{31}{5}\\ 2x-\dfrac{1}{y}=\dfrac{19}{2}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x(31-15y)=5\\ y(4x-19)=2\end{array}\right\}\xrightarrow{x=\frac{5}{31-15y}}y\left(\frac{20}{31-15y}-19\right)=2\rightarrow 285y^2-539y-62=0\rightarrow\begin{cases}y_1=2\rightarrow x_1=5\\ y_2=-\dfrac{31}{285}\rightarrow \text{No válida.}\end{cases}$$

Los números buscados son 5 y 2.

105. **Calcula tres números sabiendo que su suma es 6, la suma del doble del mayor y el triple de la diferencia de los otros dos es −4, y la diferencia del triple del mayor y el doble de la suma de los otros dos es 8.**

Sean *x*, *y*, *z* los números buscados. Se supone $x > y, z$ y se plantea y resuelve el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ 2x+3(y-z)=-4 \\ 3x-2(y+z)=8 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -2 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -16 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -16 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=4 \\ y=-1 \\ z=3 \end{array}\right.$$

Luego, los números son 4, –1 y 3.

106. **La suma de las tres cifras de un número es 16. Calcula el número sabiendo que la diferencia de las unidades y las decenas es el doble de las centenas, y la suma de las unidades y las centenas supera en una unidad al doble de las decenas.**

Sean *x*, *y*, *z* las cifras de las centenas, decenas y unidades, respectivamente. Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=16 \\ z-y=2x \\ z+x=1+2y \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & -1 & -3 & -32 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & -1 & -3 & -32 \\ 0 & 0 & 3 & 27 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=5 \\ z=9 \end{array}\right.$$

Por tanto, el número buscado es 259.

107. **En el monedero de Martín hay 11 monedas de 1, 0,5 y 0,2 € con un valor total de 4,9 €. Halla cuántas monedas hay de cada tipo sabiendo que la suma del doble de monedas de 1 € más las monedas de 0,5 € coincide con el número de monedas de 0,2 €.**

	1 €	0,5 €	0,2 €	TOTAL
Número de monedas	x	y	z	11
€ que aportan	x	0,5y	0,2z	4,9

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=11 \\ 2x+y=z \\ x+0{,}5y+0{,}2z=4{,}9 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 4{,}9 \end{array}\right) \rightarrow \ldots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -22 \\ 0 & 0 & 1{,}4 & 9{,}8 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \\ z=7 \end{array}\right.$$

Luego, Martín tiene tres monedas de 1 €**,** una moneda de 0,5 € y siete monedas de 0,2 €.

108. **Un cuaderno grande, uno mediano y uno pequeño cuestan juntos 3,9 €. Tres grandes, cuatro medianos y uno pequeño cuestan 11,1 €, y seis pequeños y tres medianos cuestan lo mismo que cinco grandes. Calcula el precio de cada tipo de cuaderno.**

Sean *x*, *y*, *z* los precios de un cuaderno grande, uno mediano y uno pequeño, respectivamente. Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3{,}9 \\ 3x+4y+z=11{,}1 \\ 6z+3y=5x \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3{,}9 \\ 3 & 4 & 1 & 11{,}1 \\ -5 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3{,}9 \\ 0 & 1 & -2 & -0{,}6 \\ 0 & 8 & 11 & 19{,}5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3{,}9 \\ 0 & 1 & -2 & -0{,}6 \\ 0 & 0 & 27 & 24{,}3 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1{,}8 \\ y=1{,}2 \\ z=0{,}9 \end{array}\right.$$

Por tanto, el cuaderno grande cuesta 1,8 €; el mediano, 1,2 €; y el pequeño, 0,9 €.

109. **Laura tiene billetes de 5, 10 y 20 €. En total son 16. El triple de los billetes de más valor es igual al total del resto y la mitad de los billetes de más valor es igual a la diferencia de los de menor valor y los de valor intermedio. Calcula cuántos billetes de cada tipo tiene Laura.**

Sean x, y, z el número de billetes de 5, 10 y 20 €, respectivamente. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} 3z = x+y \\ \dfrac{z}{2} = x-y \\ x+y+z=16 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} x=7 \\ y=5 \\ z=4 \end{array}\right.$$

Por tanto, Laura tiene 7 billetes de 5 €, 5 de 10 € y 4 de 20 €.

110. **Sobre un camión se cargan tres bidones. El doble del peso del primero menos el triple del segundo es 4 kg. El quíntuplo del peso del segundo menos un tercio del peso del tercero es 50 kg. Halla el peso de cada bidón si entre los tres pesan 275 kg.**

Sea x, y, z los pesos del primer, segundo y tercer bidón, respectivamente. Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=275 \\ 2x-3y=4 \\ 5y-\dfrac{1}{3}z=50 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x = 275-y-z \\ 2(275-y-z)-3y=4 \\ 5y-\dfrac{1}{3}z=50 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 5y+2z=546 \\ 15y-z=150 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 5y+2z=546 \\ 30y-2z=300 \end{array}\right\} \to 35y=846 \to \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1339}{35}\approx 38,26 \\ y=\dfrac{846}{35}\approx 24,17 \\ z=\dfrac{1488}{7}\approx 212,57 \end{array}\right.$$

El primer bidón pesa 38,26 kg; el segundo, 24,17 kg; y el tercero, 212,57 kg.

111. **Un número que tiene tres cifras lo representamos en la forma *abc*. Determínalo, sabiendo que si escribes *cab*, el número disminuye en 459 unidades; si escribes *bac*, el número disminuye en 360 unidades, y que *bca* es 45 unidades menor que *bac*.**

a = cifra de las centenas $\quad$ b = cifra de las decenas $\quad$ c = cifra de las unidades

$$\left.\begin{array}{r} 100a+10b+c=100c+10a+b+459 \\ 100a+10b+c=100b+10a+c+360 \\ 100b+10c+a=100b+10a+c-45 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 90a+9b-99c=459 \\ 90a-90b=360 \\ -9a+9c=-45 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 10a+b-11c=51 \\ 10a-10b=40 \\ -a+c=-5 \end{array}\right\} \xrightarrow{a=c+5} \left.\begin{array}{r} b-c=1 \\ -10b+10c=-10 \end{array}\right\} \to$$

Entonces $a=c+5$ y $b=c+1$

Para determinar la solución sabemos que los tres números son enteros y, por tanto, c es un número de 0 a 9. Como $a=c+5$, c solo puede valer 0, 1, 2, 3 y 4.

Para cada uno de estos valores de c resultan a y b.

Si $c = 0$, entonces: $a=5$ y $b = 1$. El número es 510.

Si $c = 1$, entonces: $a=6$ y $b = 2$. El número es 621.

Si $c = 2$, entonces: $a=7$ y $b = 3$. El número es 732.

Si $c = 3$, entonces: $a=8$ y $b = 4$. El número es 843.

Si $c = 4$, entonces: $a=9$ y $b = 5$. El número es 954.

112. El bloque de pisos en el que vivo ha estado de obras. El administrador de la comunidad está tratando de descubrir cuánto cobran a la hora un electricista, un fontanero y un albañil. Sabe que:

- **En el 4.º A el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas y tuvieron que pagar 78 € de mano de obra.**
- **En el 3.º D pagaron 85 € por las dos horas que estuvo el fontanero y la hora que estuvo el albañil.**
- **En mi casa estuvieron 1 hora el fontanero, 1 hora el electricista y 3 horas el albañil y nos cobraron 133 €.**

¿Cuánto cobra por hora cada profesional?

	€/h	horas 4.ºA	horas 3.ºD	horas en casa
Electricista	x	1	0	1
Fontanero	y	0	2	1
Albañil	z	2	1	3
TOTAL en €		87	85	133

$$\left.\begin{array}{r} x+2z=87 \\ 2y+z=85 \\ x+y+3z=133 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 87 \\ 0 & 2 & 1 & 85 \\ 1 & 1 & 3 & 133 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 87 \\ 0 & 2 & 1 & 85 \\ 0 & 1 & 1 & 46 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 87 \\ 0 & 2 & 1 & 85 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} x=73 \\ y=39 \\ z=7 \end{array}\right.$$

Luego, el electricista cobra por hora 73 €; el fontanero, 39 €; y el albañil, 7 €.

113. Cuando en el año 1800 Beethoven escribe su primera sinfonía, su edad es diez veces mayor que la del jovencito Franz Schubert. Pasa el tiempo y es Schubert el que compone su célebre *Sinfonía incompleta*. Entonces la suma de las edades de ambos músicos es igual a 77 años. Cinco años después muere Beethoven y en ese momento Schubert tiene los mismos años que tenía Beethoven cuando compuso su primera sinfonía.

Determina el año de nacimiento de cada uno de estos dos compositores.

	Beethoven	Schubert	ECUACIÓN
Edad en 1800	$10x$	x	
Edad en 1800 + y años	$10x+y$	$x+y$	$10x+y+x+y=77$
Edad en 1800 + y + 5 años	$10x+y+5$	$x+y+5$	$x+y+5=10x$

$$\left.\begin{array}{r} 10x+y+x+y=77 \\ x+y+5=10x \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 11x+2y=77 \\ 9x-y=5 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 11x+2y=77 \\ 18x-2y=10 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} 29x=87 \to \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=22 \end{array}\right.$$

Entonces, Beethoven murió en el año 1800 + 22 + 5 = 1827 a la edad de 30 + 3 + 22 + 5 = 57 años. Por tanto, su año de nacimiento fue 1770.

Schubert tenía 3 años en 1800. Por tanto, su año de nacimiento fue 1797.

PARA PROFUNDIZAR

114. Elige la respuesta adecuada. (Concurso de Primavera)

Si a, b, c y d son números reales con $a - 1 = b + 2 = c - 3 = d + 4$, el mayor de los cuatro es:	a	b	c	d	No se puede determinar
Si m y n son enteros con $2m - n = 3$, $m - 2n$ debe ser:	Igual a -3	Igual a 0	Múltiplo de 3	Un entero impar	Un entero par
Isa tiene un perro cuya edad actual, en meses, es la mitad que la edad de Isa, en años. Pero dentro de cinco años la edad del perrito, en meses, será cinco unidades más que el doble de la edad de Isa, en años, en ese momento. ¿Cuál es la edad actual del perrito en meses?	13	14	15	16	17
Ya sabes que en un partido de baloncesto hay tiros de 3 puntos, tiros de 2 puntos y tiros libres, que valen 1 punto cada uno. En un extraño partido, un equipo hizo tantos puntos con tiros de 3 como con tiros de 2 puntos y el número de aciertos en tiros libres superó en 1 al número de aciertos en tiros de 2 puntos. Si al final sumaron 61 puntos, ¿cuántos tiros libres encestaron?	13	14	15	16	17

□ De la sucesión de igualdades se obtiene el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a-1=b+2 \\ a-1=c-3 \\ a-1=d+4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} a-b=3 \\ a-c=-2 \\ a-d=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \ldots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

Es un sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones vienen dadas por un parámetro λ :

$$a=\lambda+5 \qquad b=\lambda+2 \qquad c=\lambda+7 \qquad d=\lambda$$

A la vista de los resultados, se observa que la variable c siempre es la mayor de las cuatro.

□ Se plantea el siguiente sistema, donde $(*)$ representa el dato desconocido:

$$\left.\begin{array}{l} 2m-n=3 \\ m-2n=(*) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} \left.\begin{array}{r} -4m+2n=-6 \\ m-2n=(*) \end{array}\right\} \rightarrow -3m=-6+(*) \rightarrow 3(2-m)=(*) \rightarrow$$

$\rightarrow m-2n=(*)$ debe ser un múltiplo de 3.

□

	Edad del perro en meses	Edad de Isa en meses
Actualmente	y	x
Dentro de 5 años = 60 meses	$y+60$	$x+60$

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x}{2\cdot 12} \\ y+60=5+2\cdot\dfrac{x+60}{12} \end{array}\right\} \xrightarrow{y=\frac{x}{24}} \frac{x}{24}+60=5+\frac{x+60}{6} \rightarrow x+1440=120+4x+240 \rightarrow \begin{cases} x=360 \\ y=15 \end{cases}$$

Luego, el perro tiene 15 meses de edad.

□

	Tiros de 3 puntos (z)	Tiros de 2 puntos (y)	Tiros de 1 punto (x)
Puntos	$3z$	$2y$	x

Se plantea y resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}3z+2y+x=61\\ x=1+y\\ 3z=2y\end{array}\right\}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&61\\1&-1&0&1\\0&2&-3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&61\\0&1&1&20\\0&2&-3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&61\\0&1&1&20\\0&0&1&8\end{array}\right)\to\left\{\begin{array}{l}x=13\\y=12\\z=8\end{array}\right.$$

Por tanto, se encestaron 13 tiros libres.

115. Escribe un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas de modo que cumpla la condición indicada en cada caso.

a) Sea compatible determinado con solución $x=-1$, $y=-2$.

b) Sea compatible indeterminado y $x=-1$, $y=-2$, una solución del sistema.

c) Sea compatible indeterminado y todas las soluciones de la forma $x=-1$, $y=\lambda$.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $\left.\begin{array}{r}4x-y=-2\\5x-y=-3\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}7x-5y=3\\5(2y-x)+3=3(3x-1)\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}2x-1+4y=-3\cdot(1-y)+y\\3y-2(y+1)=y-2\end{array}\right\}$

116. Escribe un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas que cumplan las condiciones en cada caso.

a) Sea compatible determinado con solución $x=3$, $y=2$, $z=2$.

b) Sea compatible indeterminado y $x=3$, $y=2$ y $z=2$, una solución del sistema.

c) Sea compatible indeterminado y $x=3$, $y=2$ y $z=2$ y $x=1$, $y=1$ y $z=1$, dos soluciones.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $\left.\begin{array}{r}3x+2y-3z=7\\x+y-2z=1\\7x-y-8z=3\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}x+y-2z=1\\7x-y-8z=3\\6x-6z=2(y+1)\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}x-2y=-1\\x-2z=-1\\x-y-z=-1\end{array}\right\}$

117. Resuelve este sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1\\ \frac{2}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=\frac{17}{3}\\ \frac{3}{x}+\frac{6}{y}-\frac{2}{z}=\frac{2}{3}\end{array}\right\}$$

Siguiendo la sugerencia, se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1\\ \frac{2}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=\frac{17}{3}\\ \frac{3}{x}+\frac{6}{y}-\frac{2}{z}=\frac{2}{3}\end{array}\right\}\begin{array}{c}\xrightarrow{X=\frac{1}{x}}\\ \xrightarrow{Y=\frac{1}{y}}\\ \xrightarrow{Z=\frac{1}{z}}\end{array}\left.\begin{array}{r}X+2Y-3Z=1\\2X-4Y+5Z=\frac{17}{3}\\3X+6Y-2Z=\frac{2}{3}\end{array}\right\}\to\ldots\to\left\{\begin{array}{l}X=\frac{11}{6}\\Y=-\frac{11}{12}\\Z=-\frac{1}{3}\end{array}\right.\begin{array}{c}\xrightarrow{x=\frac{1}{X}}\\ \xrightarrow{y=\frac{1}{Y}}\\ \xrightarrow{z=\frac{1}{Z}}\end{array}\left\{\begin{array}{l}x=\frac{6}{11}\\y=-\frac{12}{11}\\z=-3\end{array}\right.$$

118. **Tres números, *a*, *b* y *c*, distintos de cero, están en progresión aritmética. Si se aumenta *a* en 1 unidad o *c* en 2 unidades, resultan progresiones geométricas. Averigua esos números.**

(Concurso de Primavera)

Sea *d* la diferencia de la progresión aritmética.

Sean r_1 y r_2 las razones de las dos progresiones geométricas que se pueden obtener. Los datos del enunciado se expresan de la siguiente manera:

- Progresión aritmética:

  a
  $b = a + d$
  $c = b + d = a + 2d$

- Progresión geométrica 1:

  $a + 1$
  $b = (a+1)r_1$
  $c = br_1 = ar_1^2$

- Progresión geométrica 2:

  a
  $b = ar_2$
  $c + 2 = br_2 = ar_2^2$

Eliminando *d* de los datos de la progresión aritmética se obtiene $a = 2b - c$.

Eliminando r_1 de los datos de la progresión geométrica 1 se obtiene $b = \sqrt{c(a+1)}$.

Eliminando r_1 de los datos de la progresión geométrica 1 se obtiene $b = \sqrt{a(c+2)}$.

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones anteriores se determinan *a*, *b* y *c*:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2b - c \\ b = \sqrt{c(a+1)} \\ b = \sqrt{a(c+2)} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Igualando } E_2 \text{ y } E_3]{\text{Sustituyendo } E_2 \text{ en } E_1} \left.\begin{array}{l} a = 2\sqrt{c(a+1)} - c \\ \sqrt{c(a+1)} = \sqrt{a(c+2)} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} a = 2\sqrt{c(a+1)} - c \\ c = 2a \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Sustitución}} a = 2\sqrt{2a(a+1)} - 2a \to \left\{\begin{array}{l} a = 8 \\ b = 12 \\ c = 16 \end{array}\right.$$

119. **En una cafetería, un vaso de limonada, tres bocadillos y siete bizcochos han costado 1 chelín y 2 peniques. Teniendo en cuenta que 1 chelín es 12 peniques, halla el precio de:**

a) Un vaso de limonada, un bocadillo y un bizcocho.

b) Dos vasos de limonada, tres bocadillos y cinco bizcochos.

(Olimpiadas matemáticas. Fase Nacional)

Sean *x*, *y*, *z* los precios respectivos de un vaso de limonada, un bocadillo y un bizcocho, y *a*, *b*, son los precios pedidos. Se verifica que:

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + 7z = 14 \\ x + 4y + 10z = 17 \\ x + y + z = a \\ 2x + 3y + 5z = b \end{array}\right\}$$

Considerando las dos primeras ecuaciones del sistema, tomando como parámetro *z* y sustituyendo estos valores en las ecuaciones tercera y cuarta:

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y = 14 - 7z \\ x + 4y = 17 - 10z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = 5 + 2z \\ y = 3 - 3z \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 5 + 2z + 3 - 3z + z = a \\ 10 + 4z + 9 - 9z + 5z = b \end{array}\right\} \to a = 8 \text{ y } b = 19$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **Explica por qué la demanda y la oferta no suben o bajan al mismo tiempo.**

   Si la demanda de un determinado producto sube, se realizan más compras del mismo, por lo que hay menor cantidad de ejemplares para la venta y, por tanto, la oferta disminuye.

   De manera contraria, si la oferta aumenta, hay más ejemplares para la venta y, por tanto, la demanda disminuye.

2. **El día del espectador los encargados del cine deciden poner las entradas a 4 €. Si las ecuaciones de oferta y demanda se mantienen, ¿crees que habrá un exceso de demanda o un exceso de oferta?**

   Como el precio disminuye, la demanda aumenta, y por ello, la oferta disminuye. Esto se refleja en las ecuaciones del enunciado:

   $$D(P_x) = 1\,500 - 100P_x \xrightarrow{P_x=4} D(P_x) = 1\,100 \qquad O(P_x) = \frac{700(P_x-1)}{3} \xrightarrow{P_x=4} O(P_x) = 700$$

3. **Cuando el precio de un producto, por ejemplo, el pan, está intervenido, ¿se puede aplicar la ley de la oferta y la demanda?**

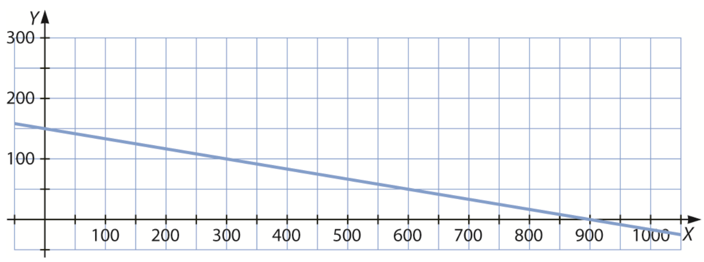
   No, dado que en este caso el precio del producto no depende directamente ni de la oferta ni de la demanda, sino de otros factores.

4. **Resuelve, de forma gráfica, el sistema que varía la ecuación de oferta para que el precio de mercado:**

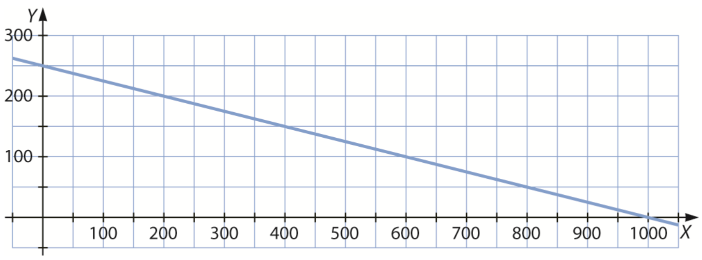
   a) Ascienda a 6 €.

   b) Baje a 5 €.

a)



b)



4 Trigonometría

ACTIVIDADES

1. Encuentra la equivalencia en radianes de estos ángulos.

a) 10°　　b) 135°　　c) −60°

a) $\frac{2\pi}{360} = \frac{x}{10} \rightarrow x = \frac{20\pi}{360} = \frac{\pi}{18}$ rad

b) $\frac{2\pi}{360} = \frac{x}{135} \rightarrow x = \frac{270\pi}{360} = \frac{3\pi}{4}$ rad

c) $\frac{2\pi}{360} = \frac{x}{-60} \rightarrow x = \frac{-120\pi}{360} = \frac{-\pi}{3}$ rad

2. Halla la medida en grados de estos ángulos.

a) $\frac{2\pi}{3}$ rad　　b) 3 rad　　c) $-\frac{4\pi}{3}$ rad

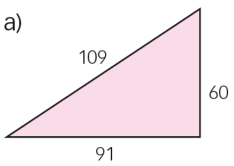
a) $\frac{360}{2\pi} = \frac{x}{\frac{2\pi}{3}} \rightarrow x = \frac{360 \cdot 2\pi}{6\pi} = 120°$

b) $\frac{360}{2\pi} = \frac{x}{3} \rightarrow x = \frac{360 \cdot 3}{2\pi} = 171{,}88°$

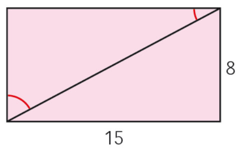
c) $\frac{360}{2\pi} = \frac{x}{-\frac{4\pi}{3}} \rightarrow x = \frac{-360 \cdot 4\pi}{6\pi} = -240°$

3. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos agudos.

a)



b)



a) $sen\ \alpha = \frac{60}{109}$　　$tg\ \alpha = \frac{60}{91}$　　$sec\ \alpha = \frac{109}{91}$

$cos\ \alpha = \frac{91}{109}$　　$cosec\ \alpha = \frac{109}{60}$　　$cotg\ \alpha = \frac{91}{60}$

$sen\ \beta = \frac{91}{109}$　　$tg\ \beta = \frac{91}{60}$　　$sec\ \beta = \frac{109}{60}$

$cos\ \beta = \frac{60}{109}$　　$cosec\ \beta = \frac{109}{91}$　　$cotg\ \beta = \frac{60}{91}$

b) $sen\ \alpha = sen\ \gamma = \frac{8}{17}$　　$tg\ \alpha = tg\ \gamma = \frac{8}{15}$　　$sec\ \alpha = sec\ \gamma = \frac{17}{15}$

$cos\ \alpha = cos\ \gamma = \frac{15}{17}$　　$cosec\ \alpha = cosec\ \gamma = \frac{17}{8}$　　$cotg\ \alpha = cotg\ \gamma = \frac{15}{8}$

$sen\ \beta = sen\ \delta = \frac{15}{17}$　　$tg\ \beta = tg\ \delta = \frac{15}{8}$　　$sec\ \beta = sec\ \delta = \frac{17}{8}$

$cos\ \beta = cos\ \delta = \frac{8}{17}$　　$cosec\ \beta = cosec\ \delta = \frac{17}{15}$　　$cotg\ \beta = cotg\ \delta = \frac{8}{15}$

4. **Demuestra que se cumplen las siguientes igualdades.**

a) $sec\ \alpha = \dfrac{1}{cos\ \alpha}$

b) $cosec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha}$

c) $cotg\ \alpha = \dfrac{1}{tg\ \alpha} = \dfrac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$

a) $sec\ \alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{\frac{c}{a}} = \dfrac{1}{cos\ \alpha}$

b) $cosec\ \alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\frac{b}{a}} = \dfrac{1}{sen\ \alpha}$

c) $cotg\ \alpha = \dfrac{c}{b} = \dfrac{1}{\frac{b}{c}} = \dfrac{1}{tg\ \alpha} = \dfrac{1}{\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}} = \dfrac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$

5. **Calcula las razones trigonométricas del ángulo α si:**

a) $cos\ \alpha = \dfrac{7}{25}$

b) $tg\ \alpha = 1{,}67$

c) $sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $tg\ \alpha = 0{,}3$

a) $cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \rightarrow sen\alpha = \sqrt{1-\left(\dfrac{7}{25}\right)^2} = \dfrac{24}{25}$

$tg\ \alpha = \dfrac{24}{7}$ $\quad cosec\ \alpha = \dfrac{25}{24}$ $\quad sec\ \alpha = \dfrac{25}{7}$ $\quad cotg\ \alpha = \dfrac{7}{24}$

b) $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{\dfrac{1}{1+1{,}67^2}} = 0{,}51$

$sen\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha = 1{,}67 \cdot 0{,}51 = 0{,}85$

$cotg\ \alpha = 0{,}60$ $\quad cosec\ \alpha = 1{,}18$ $\quad sec\ \alpha = 1{,}96$

c) $cos\ \alpha = \sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad tg\ \alpha = 1$ $\quad cosec\ \alpha = \sqrt{2}$

$sec\ \alpha = \sqrt{2}$ $\quad cotg\ \alpha = 1$

d) $cos\ \alpha = \sqrt{\dfrac{1}{1+0{,}3^2}} = 0{,}96$ $\quad sen\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha = 0{,}3 \cdot 0{,}96 = 0{,}29$

$cosec\ \alpha = 3{,}45$ $\quad sec\ \alpha = 1{,}04$ $\quad cotg\ \alpha = 3{,}33$

6. **Razona si existe algún ángulo para el que se verifique:**

a) $sen\ \alpha = 0{,}3$ y $cos\ \alpha = 0{,}8$

b) $sen\ \alpha = 0{,}72$ y $tg\ \alpha = 1{,}04$

c) $cos\ \alpha = 0{,}1$ y $sen\ \alpha = 0{,}99$

a) No existe, ya que no cumple las relaciones trigonométricas.
$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1;\ 0{,}3^2 + 0{,}8^2 = 0{,}73 \neq 1$

b) Sí existe, pues cumple las relaciones trigonométricas.
Calculamos el coseno: $1{,}04 = \dfrac{0{,}72}{cos\ \alpha} \rightarrow cos\ \alpha = 0{,}69 \rightarrow 0{,}72^2 + 0{,}69^2 = 1$

c) Sí existe, porque cumple las relaciones trigonométricas.
$0{,}1^2 + 0{,}99^2 = 1$

7. **Halla el valor de las siguientes expresiones.**

a) $cos\ 30° - sen\ 60° + tg\ 45°$

b) $cos^2\ 60° - sen^2\ 45°$

c) $tg\ 60° + sen\ 45° - cos^2\ 30°$

d) $tg\ 30° + tg\ 60° - sen\ 30° \cdot cos\ 30°$

a) $cos\ 30° - sen\ 60° + tg\ 45° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 1$

b) $cos^2\ 60° - sen^2\ 45° = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\dfrac{1}{4}$

c) $tg\ 60° + sen\ 45° - cos^2\ 30° = \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{-3 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{4}$

d) $tg\ 30° + tg\ 60° - sen\ 30° \cdot cos\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{13\sqrt{3}}{12}$

8. **Halla con ayuda de la calculadora.**

a) $cos\ 79°$

b) $sen\ 43{,}5°$

c) $tg\ 10°\ 28'$

a) $cos\ 79° = 0{,}19$

b) $sen\ 43{,}5° = 0{,}69$

c) $10°\ 28' = 10{,}4\widehat{6}° \rightarrow tg\ 10°\ 8' = 0{,}18$

9. **Calcula las razones trigonométricas con la calculadora.**

a) $sen\ (0{,}35\ rad)$

b) $cos\ (1\ rad)$

c) $tg\ (1{,}27\ rad)$

a) $sen\ (0{,}35\ rad) = 0{,}34$

b) $cos\ (1\ rad) = 0{,}54$

c) $tg\ (1{,}27\ rad) = 3{,}22$

10. **Indica el signo de las razones trigonométricas de los ángulos, identificando el cuadrante donde están.**

a) 66°

b) 18°

c) 175°

d) 135°

e) 342°

f) 120°

a) Es del 1.er cuadrante; todas las razones trigonométricas son positivas.

b) Es del 1.er cuadrante; todas las razones trigonométricas son positivas.

c) Es del 2.º cuadrante; el seno y la cosecante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.

d) Es del 2.º cuadrante; el seno y la cosecante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.

e) Es del 4.º cuadrante; el coseno y la secante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.

f) Es del 2.º cuadrante; el seno y la cosecante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.

11. **Ordena de menor a mayor los cosenos de los siguientes ángulos sin calcularlos.**

34° 72° 98° 160° 251° 345°

Se ordenan teniendo en cuenta que el coseno es positivo en ángulos del primer y cuarto cuadrante:

$$\cos 160° < \cos 251° < \cos 98° < \cos 72° < \cos 34° < \cos 345°$$

12. **Razona la respuesta.**

a) ¿Por qué no existe $tg\ 90°$?

b) ¿Ocurre lo mismo con todos los ángulos que son múltiplos de 90°?

a) No existe, porque $\cos 90° = 0$.

b) Si multiplicamos 90° por un número par, la tangente es cero, ya que el seno vale 0 y el coseno vale 1.

Si multiplicamos 90° por un número impar, la tangente no está definida, puesto que el coseno vale 0.

13. **Ordena de menor a mayor las tangentes de los siguientes ángulos sin calcularlas.**

65° 110° 170° 210° 315°

Las tangentes del primer y tercer cuadrantes son positivas, las del segundo y cuarto cuadrantes son negativas.

$$tg\ 110° < tg\ 315° < tg\ 170° < tg\ 210° < tg\ 65°$$

14. **Sabiendo que $\cos 50° = 0{,}6428$ halla las razones trigonométricas de estos ángulos.**

a) 130° b) 230° c) −50° d) 310°

Calculamos el seno de 50°:

$sen^2\ 50° + 0{,}6428^2 = 1$ $sen\ 50° = 0{,}766$

a) $-\cos 50° = \cos 130° = -0{,}6428$; $sen\ 50° = sen\ 130° = 0{,}766$; $tg\ 130° = -1{,}1918$
$sec\ 130° = -1{,}5557$; $cosec\ 130° = 1{,}3054$; $cotg\ 130° = -0{,}8391$

b) $-\cos 50° = \cos 230° = -0{,}6428$; $-sen\ 50° = sen\ 230° = -0{,}766$
$tg\ 230° = 1{,}1918$; $sec\ 230° = -1{,}5557$; $cosec\ 230° = -1{,}3054$; $cotg\ 230° = 0{,}8391$

c) $\cos 50° = \cos(-50°) = 0{,}6428$; $-sen\ 50° = sen(-50°) = -0{,}766$
$tg(-50°) = -1{,}1918$; $sec(-50°) = 1{,}5557$; $cosec(-50°) = -1{,}3054$
$cotg(-50°) = -0{,}8391$

d) $\cos 50° = \cos 310° = 0{,}6428$; $-sen\ 50° = sen\ 310° = -0{,}766$
$tg\ 310° = -1{,}1918$; $sec\ 310° = 1{,}5557$; $cosec\ 310° = -1{,}3054$
$cotg\ 310° = -0{,}8391$

15. **Sabiendo que $sen\ 25° = 0{,}4226$ halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.**

a) 745° b) 565° c) 1 055° d) 1 235°

a) $745° = 2\cdot 360° + 25° \to sen\ 745° = 0{,}4226$ $\cos 745° = 0{,}9063$ $tg\ 745° = 0{,}4663$

b) $565° = 360° + 180° + 25° \to sen\ 565° = -0{,}4226$ $\cos 565° = -0{,}9063$ $tg\ 565° = 0{,}4663$

c) $1055° = 3\cdot 360° - 25°$ $sen\ 1055° = -0{,}4226$
$\cos 1055° = 0{,}9063$ $tg\ 1055° = -0{,}4663$

d) $1235° = 3\cdot 360° + 180° - 25°$ $sen\ 1235° = 0{,}4226$
$\cos 1235° = -0{,}9063$ $tg\ 1235° = -0{,}4663$

16. **Sabiendo que *sen* $\alpha = \frac{1}{5}$, calcula.**

a) *sen* $(90° - \alpha)$ b) *sen* $(180° - \alpha)$ c) *sen* $(-\alpha)$

a) $\frac{1}{5} = sen\ \alpha = cos\ (90° - \alpha)$

Sustituimos en la expresión para calcular *sen* $(180° - \alpha)$:

$cos^2\ (90° - \alpha) + sen^2\ (90° - \alpha) = 1;\ sen\ (90° - \alpha) = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

b) $sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha = \frac{1}{5}$

c) $sen\ (-\alpha) = -sen\ \alpha = -\frac{1}{5}$

17. **Si *sen* $18° = 0{,}309$ y *cos* $18° = 0{,}951$; calcula.**

a) *sen* 72° b) *cos* 162° c) *tg* (−72°)

a) $sen\ 72° = sen\ (90° - 18°) = cos\ 18° = 0{,}951$

b) $cos\ 162° = cos\ (180° - 18°) = -cos\ 18° = -0{,}951$

c) $tg\ (-72°) = -tg\ 72° = -tg\ (90° - 18°) =$

$$= -\frac{1}{tg\ 18°} = -\frac{cos\ 18°}{sen\ 18°} = -\frac{0{,}951}{0{,}309} = -3{,}0777$$

18. **Dados los siguientes ángulos, contesta a las preguntas que aparecen a continuación.**

25° 65° 115° 155° −25° −65°

a) ¿Cuáles tienen el mismo seno? ¿Y el mismo coseno?

b) ¿Qué ángulos tienen igual la tangente?

a) $sen\ 25° = sen\ 155°$ $sen\ 65° = sen\ 115°$ $cos\ 65° = cos(-65)°$ $cos\ 25° = cos(-25)°$

b) $tg\ 115° = tg(-65)°$ $tg\ 155° = tg(-25)°$

19. **A partir de las razones de 45° y 60° calcula las razones trigonométricas de 105° y 15°.**

$$sen(60° + 45°) = sen\ 60°\ cos\ 45° + cos\ 60°\ sen\ 45° = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}9659$$

$$cos\ (60° + 45°) = cos\ 60°\ cos\ 45° - sen\ 60°\ sen\ 45° = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}2588$$

$$tg(60° + 45°) = \frac{tg\ 60° + tg\ 45°}{1 - tg\ 60°\ tg\ 45°} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -3{,}7321$$

$$sen(60° - 45°) = sen\ 60°\ cos\ 45° - cos\ 60°\ sen\ 45° = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}2588$$

$$cos(60° - 45°) = cos\ 60°\ cos\ 45° + sen\ 60°\ sen\ 45° = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}9659$$

$$tg(60° - 45°) = \frac{tg\ 60° - tg\ 45°}{1 + tg\ 60°\ tg\ 45°} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = 0{,}2679$$

20. Calcula las razones trigonométricas de 76° y 19°, sabiendo que *cos* 38° = 0,788 y *sen* 38° = 0,6157

$$\cos 76^\circ = \cos(2\cdot 38^\circ) = \cos^2 38^\circ - \operatorname{sen}^2 38^\circ = 0{,}2419$$

$$\operatorname{sen} 76^\circ = \operatorname{sen}(2\cdot 38^\circ) = 2\operatorname{sen} 38^\circ \cos 38^\circ = 0{,}9703$$

$$\operatorname{tg} 38^\circ = \frac{0{,}6157}{0{,}788} = 0{,}7813$$

$$\operatorname{tg} 76^\circ = \operatorname{tg}(2\cdot 38^\circ) = \frac{2\operatorname{tg} 38^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 38^\circ} = 4{,}011$$

$$\cos 19^\circ = \cos\frac{38^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 38^\circ}{2}} = 0{,}9455$$

$$\operatorname{sen} 19^\circ = \operatorname{sen}\frac{38^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 38^\circ}{2}} = 0{,}3256$$

$$\operatorname{tg} 19^\circ = \operatorname{tg}\frac{38^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 38^\circ}{1+\cos 38^\circ}} = 0{,}3443$$

21. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo [0°, 360°].

a) $5\operatorname{sen} x = 2$

b) $7\cos x = -1$

c) $5\operatorname{tg} x = 12$

d) $2\operatorname{tg} x = 2$

a) $5\operatorname{sen} x = 2 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{2}{5} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 23^\circ\ 34'\ 41{,}44'' \\ x_2 = 156^\circ\ 25'\ 18{,}56'' \end{cases}$

b) $7\cos x = -1 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{7} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 98^\circ\ 12'\ 47{,}56'' \\ x_2 = 261^\circ\ 47'\ 12{,}44'' \end{cases}$

c) $5\operatorname{tg} x = 12 \rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{12}{5} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 67^\circ\ 22'\ 48{,}49'' \\ x_2 = 247^\circ\ 22'\ 48{,}49'' \end{cases}$

d) $2\operatorname{tg} x = 2 \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45^\circ \\ x_2 = 225^\circ \end{cases}$

22. Resuelve estas ecuaciones trigonométricas y simplifica el resultado.

a) $\cos 2x = 1$

b) $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 1$

c) $\operatorname{sen} 2x - \cos x = 0$

d) $2\operatorname{tg} 4x = 1$

a) $\cos 2x = 1 \rightarrow x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow -2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0$

$x_1 = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

c) $\operatorname{sen} 2x - \cos x = 0 \rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x - \cos x = \cos x(2\operatorname{sen} x - 1) = 0$

$x_1 = \frac{(2k-1)\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

d) $2\operatorname{tg} 4x = 1 \rightarrow \operatorname{tg} 4x = \frac{1}{2} \rightarrow 4x = 26{,}56^\circ + 180^\circ\cdot k \rightarrow x = \frac{26{,}56^\circ + 180^\circ\cdot k}{4}$ con $k \in \mathbb{Z}$

23. De un triángulo se sabe que sus catetos miden 7 y 24 m. Halla su hipotenusa y la amplitud de sus ángulos.

Calculamos la hipotenusa utilizando el Teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$ m

$\alpha = arc\ sen\ \dfrac{7}{25} = 16{,}26^\circ$ $\qquad \beta = arc\ sen\ \dfrac{24}{25} = 73{,}74^\circ$

24. De un triángulo rectángulo, $\widehat{ABC}$, conocemos que $\hat{C} = 62^\circ$ y que la hipotenusa *a* mide 1 m. Halla sus elementos.

Aplicamos la relación de ángulos complementarios para calcular el tercer ángulo:

$\hat{B} = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$

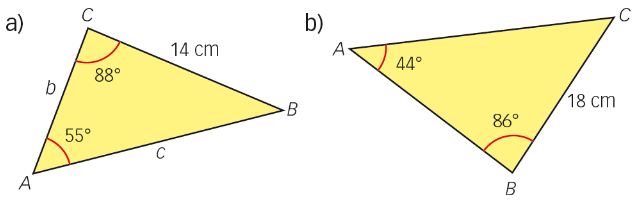
Utilizamos una de sus razones trigonométricas para hallar otro de sus lados:

$sen\ \hat{B} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{b}{1} \rightarrow b = sen\ 28^\circ = 0{,}4695$ m

Usamos el teorema de Pitágoras para determinar el tercer lado:

$c = \sqrt{1^2 - 0{,}4695^2} = 0{,}8829$ m

25. Calcula *b* y *c* en estos triángulos.



a) $\hat{B} = 180^\circ - 88^\circ - 55^\circ = 37^\circ$

$\dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{c}{sen\ \hat{C}} \rightarrow \dfrac{b}{sen\ 37^\circ} = \dfrac{14}{sen\ 55^\circ} \rightarrow b = 10{,}29$ cm

$\dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{c}{sen\ \hat{C}} \rightarrow \dfrac{c}{sen\ 88^\circ} = \dfrac{14}{sen\ 55^\circ} \rightarrow c = 17{,}08$ cm

b) $\hat{C} = 180^\circ - 44^\circ - 86^\circ = 50^\circ$

Aplicamos el teorema del seno como en el apartado anterior y resulta:

$b = 25{,}85$ cm $\qquad c = 19{,}85$ cm

26. Razona, en cada caso, si pueden ser ciertas las siguientes igualdades.

a) $a = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{c}{sen\ \hat{C}}$

b) $a = b = \dfrac{c}{sen\ \hat{C}}$

c) $a = b = c$

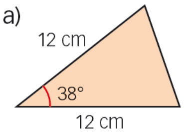
a) Es posible si $sen\ \hat{A} = 1$, es decir, si $\hat{A} = 90^\circ$.

b) No es posible, ya que entonces $a = \dfrac{c}{sen\ C} \rightarrow \hat{A} = 90^\circ$ y $b = \dfrac{c}{sen\ C} \rightarrow \hat{B} = 90^\circ$, pero no existe un triángulo con dos ángulos rectos.

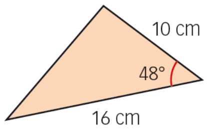
c) Es posible si $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$.

27. **Calcula la longitud del lado desconocido.**

a)



b)



a) $a = \sqrt{12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cos 38°} = 7{,}81$ cm

b) $a = \sqrt{10^2 + 16^2 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cos 48°} = 11{,}91$ cm

28. **Decide si las siguientes medidas corresponden a las longitudes de los lados de un triángulo e indica si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.**

a) 12, 11 y 9 cm

b) 23, 14 y 8 cm

c) 26, 24 y 10 cm

d) 40, 30 y 20 m

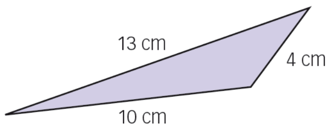
a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 12^2 = 11^2 + 9^2 - 2 \cdot 11 \cdot 9 \cdot \cos \widehat{A}$
$\rightarrow \cos \widehat{A} = 0{,}2929 \rightarrow \widehat{A} = 72°\ 57'\ 59{,}7'' \rightarrow$ El triángulo es acutángulo.

b) Las medidas no forman un triángulo, ya que la suma de los lados menores es menor que el lado mayor.

c) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 26^2 = 24^2 + 10^2 - 2 \cdot 24 \cdot 10 \cdot \cos \widehat{A}$
$\rightarrow \cos \widehat{A} = 0 \rightarrow \widehat{A} = 90° \rightarrow$ El triángulo es rectángulo.

d) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 40^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20 \cdot \cos \widehat{A}$
$\rightarrow \cos \widehat{A} = -0{,}25 \rightarrow \widehat{A} = 104°\ 28'\ 39'' \rightarrow$ El triángulo es obtusángulo.

29. **Resuelve este triángulo.**

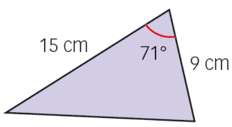


$13^2 = 10^2 + 4^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4 \cos \widehat{A} \rightarrow \widehat{A} = 131{,}49°$

$10^2 = 13^2 + 4^2 - 2 \cdot 13 \cdot 4 \cos \hat{B} \rightarrow \hat{B} = 35{,}18°$

$180° - 131{,}49° - 35{,}18° = 13{,}33°$

30. **Resuelve este triángulo.**



$a = \sqrt{15^2 + 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 15 \cos 71°} = 14{,}77$ cm

Aplicando el teorema del seno:

$\dfrac{14{,}77}{sen\ 71°} = \dfrac{9}{sen\ \hat{B}} \rightarrow \hat{B} = 35{,}18°$

$\hat{B} = 180° - 71° - 35{,}18° = 73{,}82°$

31. **Resuelve el triángulo, sabiendo que dos de sus lados miden 14 cm y 18 cm, respectivamente, y el ángulo opuesto a uno de ellos mide 70°. Dibuja el triángulo.**

Aplicamos el teorema del seno para calcular el ángulo opuesto al lado conocido:

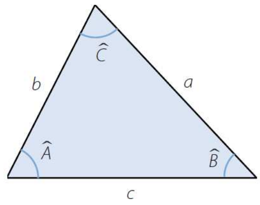
$$\frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}}=\frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}}=\frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}}\to\frac{14}{\text{sen}\,\widehat{B}}=\frac{18}{\text{sen}\,70°}\to\widehat{B}=46°\,57'\,34{,}4''$$

Utilizamos la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo mide 180°, para calcular el tercer ángulo:

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°\to\widehat{A}+46°\,57'\,34{,}4''+70°=180°\to\widehat{A}=63°\,2'\,25{,}6''$$

Usamos el teorema del seno para calcular el tercer lado:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}}=\frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}}=\frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}}\to\frac{a}{\text{sen}\,63°\,2'\,25{,}6''}=\frac{18}{\text{sen}\,70°}\to a=17{,}07\text{ cm}$$



32. **Al resolver el triángulo con $a = 4$ m, $c = 6$ m y $\widehat{A} = 25°$, obtenemos como soluciones dos triángulos obtusángulos. Comprueba que esto es posible y dibuja las soluciones.**

Aplicamos el teorema del seno para calcular el ángulo opuesto al lado conocido:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}}=\frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}}=\frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}}\to\frac{4}{\text{sen}\,25°}=\frac{6}{\text{sen}\,\widehat{C}}\to\begin{cases}\widehat{C}=39°\,20'\,25{,}7''\\ \widehat{C}=140°\,39'\,34''\end{cases}$$

Utilizamos la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo mide 180°, para calcular el tercer ángulo:

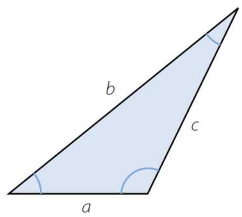
1.ª solución: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°\to25°+\widehat{B}+39°\,20'\,25{,}7''=180°\to\widehat{B}=115°\,39'\,34''$

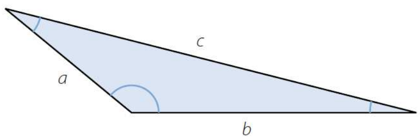
2.ª solución: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°\to25°+\widehat{B}+140°\,39'\,34''=180°\to\widehat{B}=14°\,20'\,26''$

Usamos el teorema del seno para calcular el tercer lado:

1.ª solución: $\frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}}=\frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}}=\frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}}\to\frac{b}{\text{sen}\,115°\,39'\,34''}=\frac{4}{\text{sen}\,25°}\to b=8{,}53\text{ m}$

2.ª solución: $\frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}}=\frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}}=\frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}}\to\frac{b}{\text{sen}\,14°\,20'\,26''}=\frac{4}{\text{sen}\,25°}\to b=2{,}34\text{ m}$





SABER HACER

33. **Calcula el seno, el coseno y la tangente de α.**

a) $\cos\alpha=\frac{1}{4}$ con $270°<\alpha<360°$

b) $\text{tg}\,\alpha=-2$ con $90°<\alpha<180°$

a) $\text{sen}\,\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=-0{,}9682$ $\quad$ $\text{tg}\,\alpha=\frac{-0{,}9682}{0{,}25}=-3{,}8728$

b) $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{1}{1+\text{tg}^2\alpha}}=-0{,}4472$ $\quad$ $\text{sen}\,\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=0{,}8944$

34. **Calcula los siguientes cosenos ayudándote de las razones trigonométricas de 50°.**

a) *cos* 40°
b) *cos* 130°
c) *cos* 310°
d) *cos* 80°
e) *cos* 5°
f) *cos* 100°
g) *cos* 25°

$\cos 50^\circ = 0{,}6428$ $\quad$ $\operatorname{sen} 50^\circ = 0{,}7660$ $\quad$ $\operatorname{tg} 50^\circ = 1{,}1918$

a) $\cos 40^\circ = \cos(90^\circ - 50^\circ) = \cos 90^\circ \cos 50^\circ + \operatorname{sen} 90^\circ \operatorname{sen} 50^\circ = 0{,}7660$

b) $\cos 130^\circ = \cos(180^\circ - 50^\circ) = \cos 180^\circ \cos 50^\circ + \operatorname{sen} 180^\circ \operatorname{sen} 50^\circ = -0{,}6428$

c) $\cos 310^\circ = \cos(360^\circ - 50^\circ) = \cos 360^\circ \cos 50^\circ + \operatorname{sen} 360^\circ \operatorname{sen} 50^\circ = 0{,}6428$

d) $\cos 80^\circ = \cos(30^\circ + 50^\circ) = \cos 30^\circ \cos 50^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 50^\circ = 0{,}1736$

e) $\cos 5^\circ = \cos(50^\circ - 45^\circ) = \cos 50^\circ \cos 45^\circ + \operatorname{sen} 50^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = 0{,}9962$

f) $\cos 100^\circ = \cos(2 \cdot 50^\circ) = \cos^2 50^\circ - \operatorname{sen}^2 50^\circ = -0{,}1736$

g) $\cos 25^\circ = \cos \dfrac{50^\circ}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos 50^\circ}{2}} = 0{,}9063$

35. **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $\operatorname{sen}(2x + 5^\circ) = 1$
b) $\cos(2x + 5^\circ) = 1$

a) $\operatorname{sen}(90^\circ + k \cdot 360^\circ) = 1 \rightarrow 2x + 5^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \rightarrow x = \dfrac{85^\circ}{2} + k \cdot 180^\circ$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos(k \cdot 360^\circ) = 1 \rightarrow 2x + 5^\circ = k \cdot 360^\circ \rightarrow x = k \cdot 180^\circ - \dfrac{5^\circ}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$

36. **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $\operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x = 0$
b) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0$

a) $\operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x - 2 \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} x (\cos x - 1) = 0$

$x_1 = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $x_2 = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x (2 \cos x + 1) = 0$

$x_1 = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $x_3 = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

37. **Resuelve esta ecuación.**

$\boldsymbol{\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0}$

$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 3 \cos x + 2 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$

$\cos x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\qquad$ $x_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ $\qquad$ $x_2 = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ $\qquad$ $x_3 = 2k\pi$

38. **Resuelve la siguiente ecuación.**

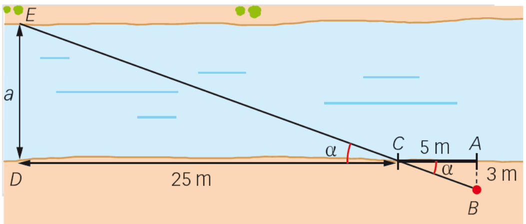
$$\cos 3x + \cos x = 0$$

$$\cos 2x \cos x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x + \cos x = 0 \rightarrow (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{sen} x + \cos x = 0$$

$$2\cos^3 x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 0 \rightarrow 2\cos x(2\cos^2 x - 1) = 0$$

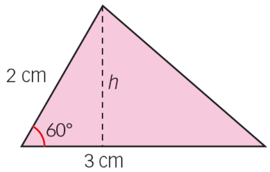
$$x_1 = \frac{(2k-1)\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \qquad x_2 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

39. **Juan quiere saber la anchura de un río sin tener que desplazarse a la otra orilla. Midiendo con sus pasos llega a la siguiente situación.**



$$tg\, \alpha = \frac{3}{5} = \frac{a}{25} \rightarrow a = 15 \text{ m}$$

40. **Calcula el área de este triángulo.**



$$\operatorname{sen} 60° = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = \sqrt{3} \qquad \text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2{,}60 \text{ cm}^2$$

41. **Halla la altura de un triángulo de base 100 cm y cuyos ángulos adyacentes son $\alpha = 45°$ y $\beta = 60°$.**

$$\left.\begin{array}{l} tg\, 45° = \dfrac{h}{100-x} = 1 \\ tg\, 60° = \dfrac{h}{x} = \sqrt{3} \end{array}\right\} \rightarrow 100 - x = \sqrt{3}x \rightarrow x = \frac{100}{\sqrt{3}+1} = 36{,}6 \text{ cm}$$

$$h = 63{,}4 \text{ cm}$$

42. **Determina el área del pentágono regular cuyo radio mide 15 cm.**

$$\operatorname{sen} 36° = \frac{l/2}{15} \rightarrow l = 17{,}64 \text{ cm}$$

$$15^2 - (l/2)^2 = ap^2 \rightarrow ap = 12{,}13 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{p \cdot ap}{2} = \frac{88{,}167 \cdot 12{,}13}{2} = 534{,}86 \text{ cm}^2$$

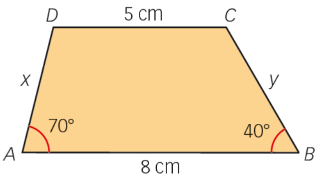
43. **Dos barcos salen simultáneamente de un puerto con rumbos que forman un ángulo de 82°. El primero navega a una velocidad de 18 millas por hora, y el segundo a 25 millas por hora. Si mantienen inalterados los rumbos y el alcance de sus equipos de radio es de 180 millas, ¿podrán ponerse en contacto al cabo de 3 horas?**

El primero habrá recorrido 54 millas, y el segundo, 75.

$$a = \sqrt{54^2 + 75^2 - 2 \cdot 54 \cdot 75 \cdot \cos 82^\circ} = 86{,}1 \text{ millas}$$

Como 86,1 < 180 podrán ponerse en contacto.

44. **Calcula la longitud de los lados que faltan en el siguiente trapecio rectángulo.**



Añadimos un triángulo con ángulos de 40º, 70º y 70º.

$$\frac{3}{sen\ 70^\circ} = \frac{y}{sen\ 70^\circ} = \frac{x}{sen\ 40^\circ} \rightarrow y = 3 \text{ cm},\ x = 2{,}05 \text{ cm}$$

ACTIVIDADES FINALES

45. **Halla la equivalencia en radianes de los siguientes ángulos dados en grados sexagesimales.**

a) 35°
b) 185°
c) 84° 12'
d) 62° 25'

a) $\frac{7\pi}{36}$ rad   b) $\frac{37\pi}{36}$ rad   c) $84{,}2^\circ = \frac{42{,}1\pi}{90}$ rad=1,47 rad   d) $62{,}42^\circ = \frac{31{,}21\pi}{90}$ rad=1,09 rad

46. **Halla la equivalencia en grados de los siguientes ángulos dados en radianes.**

a) 1,5 rad
b) 3,5 rad
c) 1,5 π rad
d) $\frac{6\pi}{5}$ rad

a) 85,94º   b) 200,54º   c) 270º   d) 216º

47. **En los triángulos rectángulos *ABC* que siguen, *A* es el vértice del ángulo recto. Se dan medidas de la hipotenusa, *a*, y de los catetos, *b* y *c*. Contesta las cuestiones que se plantean en cada caso.**

a) Halla $sen\ \widehat{B}$ y $tg\ \widehat{B}$ si $b = 12$ cm, $c = 16$ cm.
b) Halla $\cos \widehat{B}$ y $cotg\ \widehat{B}$ si $a = 30$ cm, $c = 22$ cm.
c) Halla $\cos \widehat{C}$ y $cosec\ \widehat{C}$ si $a = 3$ cm, $b = 2$ cm.
d) Halla $\cos \widehat{B}$ y $tg\ \widehat{B}$ si $b = 20$ cm, $c = 20$ cm.

a) $a = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ cm $sen\ B = \frac{b}{a} = 0{,}6$ $tg\ B = \frac{b}{c} = 0{,}75$

b) $b = \sqrt{30^2 - 22^2} = \sqrt{416}$ cm $\cos B = \frac{c}{a} = \frac{11}{15}$ $cotg\ B = \frac{c}{b} = \frac{11}{\sqrt{104}}$

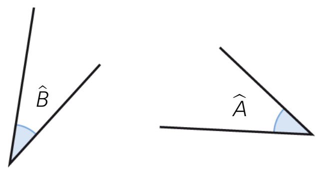
c) $c = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ cm $\cos C = \frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ $cosec\ C = \frac{a}{c} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

d) $a = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800}$ cm $\cos B = \frac{c}{a} = \frac{20}{\sqrt{800}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $tg\ B = \frac{b}{c} = 1$

48. Dibuja dos ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ tales que:

$$sen\ \widehat{A} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\ \widehat{B} = \sqrt{5}$$

Respuesta abierta. Por ejemplo:



49. Sin utilizar la calculadora, determina el valor más simplificado posible de las siguientes expresiones.

a) $sen\ 30° + sen\ 60°$

b) $tg\,\frac{\pi}{3} + sec\,\frac{\pi}{6}$

c) $cotg\ 90° - cotg\ 30°$

d) $cosec\ 60° - cos\ 60°$

a) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

b) $\sqrt{3}+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{3+2}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$

c) $0-\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=-\sqrt{3}$

d) $\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{2}=\frac{4-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

50. Determina, sin utilizar la calculadora, si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) $sen\ 30° + sen\ 60° = sen\ 90°$

b) $cos\ 30° + cos\ 60° = cos\ 90°$

c) $sen\ 90° = 2\,sen\ 45°$

d) $cos\ 90° = 2\,cos\ 45°$

a) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 1 \rightarrow$ Falsa.

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\neq 0 \rightarrow$ Falsa.

c) $1\neq 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$ Falsa.

d) $0\neq 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$ Falsa.

51. Halla la cosecante, la secante y la cotangente:

a) Del ángulo de 30°.

b) Del ángulo de 45°.

c) Del ángulo de 60°.

d) Del ángulo de 90°.

a) $cosec\ 30° = 2$ $\qquad sec\ 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\qquad cotg\ 30° = \sqrt{3}$

b) $cosec\ 45° = \sqrt{2}$ $\qquad sec\ 45° = \sqrt{2}$ $\qquad cotg\ 45° = 1$

c) $cosec\ 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\qquad sec\ 60° = 2$ $\qquad cotg\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $cosec\ 90° = 1$ $\qquad$ La secante no existe. $\qquad cotg\ 90° = 0$

52. **Los ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son agudos. Completa la siguiente tabla en tu cuaderno sin llegar a determinar los ángulos.**

Seno	Coseno	Tangente
$sen\,\widehat{A} = 0{,}5602$		
	$cos\,\widehat{B} = 0{,}1849$	
		$tg\,\widehat{C} = 2{,}7804$

Seno	Coseno	Tangente
$sen\,\widehat{A} = 0{,}5602$	$cos\,\widehat{A} = 0{,}8284$	$tg\,\widehat{A} = 0{,}6763$
$sen\,\widehat{B} = 0{,}9828$	$cos\,\widehat{B} = 0{,}1849$	$tg\,\widehat{B} = 5{,}3151$
$sen\,\widehat{C} = 0{,}6616$	$cos\,\widehat{C} = 0{,}3384$	$tg\,\widehat{C} = 2{,}7804$

$$0{,}5602^2 + cos^2\,\widehat{A} = 1 \to cos\,\widehat{A} = \sqrt{1-0{,}5602^2} = 0{,}8284$$

$$tg\,\widehat{A} = \frac{0{,}5602}{0{,}8284} = 0{,}6763$$

$$sen^2\,\widehat{B} + 0{,}1849^2 = 1 \to sen\,\widehat{B} = \sqrt{1-0{,}1849^2} = 0{,}9828$$

$$tg\,\widehat{B} = \frac{0{,}5602}{0{,}8284} = 0{,}6763$$

$$cos\,\widehat{C} = \sqrt{\frac{1}{1+2{,}7804^2}} = 0{,}3384$$

$$sen^2\,\widehat{C} + 0{,}3384^2 = 1 \to sen\,\widehat{C} = \sqrt{1-0{,}3384^2} = 0{,}6616$$

53. **Emplea la calculadora para determinar los ángulos agudos que cumplen lo siguiente.**

a) $cos\,\widehat{A} = 0{,}3453$
b) $tg\,\widehat{B} = 2{,}3688$
c) $cosec\,\widehat{C} = 1{,}9044$
d) $cos\,\widehat{D} = 0{,}9726$
e) $tg\,\widehat{E} = 0{,}3554$
f) $sen\,\widehat{F} = 0{,}0968$
g) $sen\,\widehat{G} = 0{,}2494$
h) $cotg\,\widehat{H} = 2{,}5$

a) $cos\,\widehat{A} = 0{,}3453 \to \widehat{A} = 69°\ 47'\ 59{,}6''$
b) $tg\,\widehat{B} = 2{,}3688 \to \widehat{B} = 67°\ 6'\ 45{,}84''$
c) $cosec\,\widehat{C} = 1{,}9044 \to sen\,\widehat{C} = 0{,}5251 \to \widehat{C} = 31°\ 40'\ 29{,}9''$
d) $cos\,\widehat{D} = 0{,}9726 \to \widehat{D} = 13°\ 26'\ 36{,}3''$
e) $tg\,\widehat{E} = 0{,}3554 \to \widehat{E} = 19°\ 33'\ 54{,}8''$
f) $sen\,\widehat{F} = 0{,}0968 \to \widehat{F} = 5°\ 33'\ 17{,}75''$
g) $sen\,\widehat{G} = 0{,}2494 \to \widehat{G} = 14°\ 26'\ 31{,}2''$
h) $cotg\,\widehat{H} = 2{,}5 \to tg\,\widehat{H} = 0{,}4 \to \widehat{H} = 21°\ 48'\ 5{,}07''$

54. **Determina las siguientes razones trigonométricas.**

a) $sen\ 19°\ 22'\ 37''$
b) $cos\ 44°\ 52'$
c) $cos\ 1{,}03$
d) $sen\,\frac{2\pi}{5}$
e) $sec\ 54°\ 28'$
f) $cosec\ \pi$
g) $tg\ 83°\ 41'\ 57''$
h) $sen\ 37°\ 25''$
i) $tg\,\frac{\pi}{8}$
j) $cos\ 0{,}845$
k) $cotg\ 35°\ 40'$
l) $sec\,\frac{\pi}{6}$

a) $sen\ 19^\circ\ 22'\ 37'' = 0{,}3318$

b) $cos\ 44^\circ\ 52' = 0{,}7088$

c) $cos\ 1{,}03 = 0{,}5148$

d) $sen\ \dfrac{2\pi}{5} = 0{,}9511$

e) $sec\ 54^\circ\ 28' = 1{,}7206$

f) No está definida.

g) $tg\ 83^\circ\ 41'\ 57'' = 9{,}0567$

h) $sen\ 37^\circ\ 25'' = 0{,}6019$

i) $tg\dfrac{\pi}{8} = 0{,}4142$

j) $cos\ 0{,}845 = 0{,}6637$

k) $cotg\ 35^\circ\ 40' = 1{,}3934$

l) $sec\dfrac{\pi}{6} = 1{,}1547$

55. Resuelve los triángulos rectángulos correspondientes, considerando que $\widehat{A}$ es el ángulo recto.

a) $b = 7$ m, $\widehat{B} = 48^\circ$

b) $c = 12$ m, $\widehat{B} = 28^\circ$

c) $a = 13$ m, $c = 5$ m

d) $a = 6$ cm, $\widehat{C} = 42^\circ\ 12'$

e) $b = 3$ m, $c = 6$ m

f) $b = 8$ m, $a = 10$ m

a) Aplicamos la relación de ángulos complementarios para calcular el tercer ángulo:

$\widehat{C} = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$

Usamos una de sus razones trigonométricas para hallar otro de sus lados:

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \to \frac{7}{sen\ 48^\circ} = a \to a = 9{,}42 \text{ m}$$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener el tercer lado:

$c = \sqrt{9{,}42^2 - 7^2} = 6{,}3$ m

b) Aplicamos la relación de ángulos complementarios para hallar el tercer ángulo:

$\widehat{C} = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$

Usamos una de sus razones trigonométricas para obtener otro de sus lados:

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{c}{sen\,\widehat{C}} \to \frac{b}{sen\ 28^\circ} = \frac{12}{sen\ 62^\circ} \to b = 6{,}38 \text{ m}$$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para hallar el tercer lado:

$a = \sqrt{12^2 + 6{,}38^2} = 13{,}59$ m

c) Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular el tercer lado:

$b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ m

$$sen\,\widehat{B} = \frac{12}{13} \to \widehat{B} = 67^\circ\ 22'\ 48{,}5''$$

$$sen\,\widehat{C} = \frac{5}{13} \to \widehat{C} = 22^\circ\ 37'\ 11{,}5''$$

d) Aplicamos la relación de ángulos complementarios para obtener el tercer ángulo:

$\widehat{B} = 90^\circ - 42^\circ\ 12' = 47^\circ\ 48'$

Usamos una de sus razones trigonométricas para hallar otro de sus lados:

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \to \frac{b}{sen\ 47^\circ\ 48'} = 6 \to b = 4{,}44 \text{ m}$$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener el tercer lado:

$c = \sqrt{6^2 - 4{,}44^2} = 4{,}04$ m

e) Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar el tercer lado:

$a = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6{,}71$ m

$$sen\,\widehat{B} = \frac{3}{6{,}71} \to \widehat{B} = 26^\circ\ 33'\ 26{,}6''$$

$$sen\,\widehat{C} = \frac{6}{6{,}71} \to \widehat{C} = 63^\circ\ 26'\ 33{,}4''$$

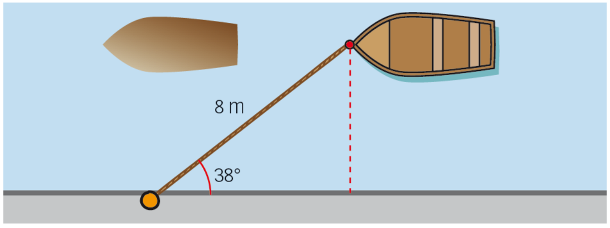
f) Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular el tercer lado:

$c = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ m

$sen\,\widehat{B} = \dfrac{8}{10} \rightarrow \widehat{B} = 53°\ 7'\ 48{,}37''$

$sen\,\widehat{C} = \dfrac{6}{10} \rightarrow \widehat{C} = 36°\ 52'\ 11{,}63''$

56. Una barca está atada a la orilla de un canal con una cuerda que mide 8 m. En cierto momento, esta cuerda forma un ángulo de 38° con el borde. ¿A qué distancia de la orilla se encuentra la barca?



Distancia $= 8\ sen\ 38° = 4{,}93$ m

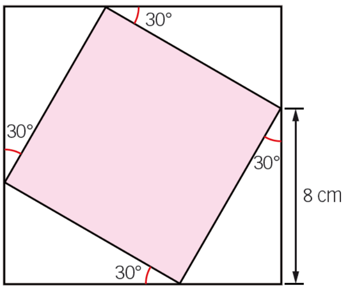
57. Si estamos a 40 m de la chimenea de una fábrica y la vemos bajo un ángulo de 26°, ¿qué altura tiene? Considera que los ojos del observador están situados a 175 cm del suelo.

$tg\ 26° = \dfrac{a}{40} \rightarrow a = 19{,}51$ m

$19{,}51 + 1{,}75 = 21{,}26$ m

La altura de la chimenea es 21,26 m.

58. Halla el área del cuadrado interior.



$cos\ 30° = \dfrac{8}{l} \rightarrow l = 9{,}24$ cm

Área $= l^2 = 85{,}3$ cm^2

59. Determina la longitud de la apotema del hexágono regular de lado 4 cm.

El hexágono regular se puede dividir en doce triángulos rectángulos.

Calculamos el ángulo central: $\dfrac{360°}{12} = 30°$

$cos\ 30° = \dfrac{ap}{4} \rightarrow ap = 3{,}46$ cm

60. **Un pentágono regular está inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio. Determina la medida de su lado.**

El pentágono regular se puede dividir en cinco triángulos isósceles.

Calculamos el ángulo central: $\frac{360°}{5} = 72°$

El ángulo central mide 72°.

Hallamos los restantes ángulos del triángulo:

$180° = 72° + 2\widehat{A} \rightarrow \widehat{A} = 54°$

Aplicamos el teorema del seno:

$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{b}{sen\,72°} = \frac{20}{sen\,54°} \rightarrow b = 23{,}51$ cm

El lado mide 23,51 cm.

61. **Escribe de menor a mayor los cosenos, sin calcularlos, de los ángulos siguientes.**

55° 110° 165° 220° 275° 330°

Los cosenos son negativos en el segundo y tercer cuadrantes.

$cos\,165° < cos\,220° < cos\,110° < cos\,275° < cos\,55° < cos\,330°$

62. **Escribe de menor a mayor los senos, sin calcularlos, de los ángulos siguientes.**

45° 120° 135° 200° 225° 310°

Los senos son negativos en el tercer y cuarto cuadrantes.

$sen\,310° < sen\,225° < sen\,200° < sen\,45° = sen\,135° < sen\,120°$

63. **La tabla muestra las razones trigonométricas de ángulos de distintos cuadrantes. Sin determinarlos, complétala en tu cuaderno con las razones que faltan.**

Cuadrante	*sen*	*cos*	*tg*
Segundo	0,6702		
Tercero		−0,4539	
Cuarto			−0,7459
Tercero	−0,7822		
Segundo			−1,9004
Cuarto		0,6983	

Cuadrante	*sen*	*cos*	*tg*
Segundo	**0,6702**	−0,7422	−0,903
Tercero	0,8911	**−0,4539**	−1,9631
Cuarto	0,8016	−0,5979	**−0,7459**
Tercero	**−0,7822**	−0,623	1,2555
Segundo	0,8849	−0,4657	**−1,9004**
Cuarto	−0,7158	**0,6983**	−1,0251

$0{,}6702^2 + \cos^2 \hat{A} = 1 \rightarrow \cos \hat{A} = \sqrt{1 - 0{,}6702^2} = -0{,}7422$

$tg\, \hat{A} = \dfrac{0{,}6702}{-0{,}7422} = -0{,}903$

$sen^2 \hat{B} + (-0{,}4539)^2 = 1 \rightarrow sen\, \hat{B} = \sqrt{1 - 0{,}4539^2} = 0{,}8911$

$tg\, \hat{B} = \dfrac{0{,}8911}{-0{,}4539} = -1{,}9631$

$\cos \hat{C} = \sqrt{\dfrac{1}{1 + (-0{,}7459)^2}} = 0{,}8016$

$sen^2 \hat{C} + 0{,}8016^2 = 1 \rightarrow sen\, \hat{C} = \sqrt{1 - 0{,}8016^2} = -0{,}5979$

$(-0{,}7822)^2 + \cos^2 \hat{D} = 1 \rightarrow \cos \hat{D} = \sqrt{1 - 0{,}7822^2} = -0{,}623$

$tg\, \hat{D} = \dfrac{-0{,}7822}{-0{,}623} = 1{,}2555 \qquad \cos \hat{E} = \sqrt{\dfrac{1}{1 + (-1{,}9004)^2}} = -0{,}4657$

$sen^2 \hat{E} + (-0{,}4657)^2 = 1 \rightarrow sen\, \hat{E} = \sqrt{1 - 0{,}4657^2} = 0{,}8849$

$sen^2 \hat{F} + 0{,}6983^2 = 1 \rightarrow sen\, \hat{F} = \sqrt{1 - 0{,}6983^2} = -0{,}7158$

$tg\, \hat{F} = \dfrac{-0{,}7158}{0{,}6983} = -1{,}0251$

64. Calcula, sin utilizar la calculadora, el valor del seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos medidos en radianes.

a) $-\pi$ rad
b) $-\dfrac{\pi}{2}$ rad
c) $-\dfrac{\pi}{6}$ rad
d) $\dfrac{\pi}{4}$ rad
e) $\dfrac{\pi}{3}$ rad
f) $\dfrac{\pi}{2}$ rad
g) $-\dfrac{3\pi}{2}$ rad
h) π rad
i) $\dfrac{3\pi}{2}$ rad
j) 2π rad
k) $\dfrac{7\pi}{2}$ rad
l) $\dfrac{9\pi}{2}$ rad

a) $sen(-\pi) = 0 \qquad \cos(-\pi) = -1 \qquad tg(-\pi) = 0$

b) $sen\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \qquad \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ La tangente no existe.

c) $sen\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2} \qquad \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad tg\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) $sen\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

e) $sen\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \qquad tg\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

f) $sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ La tangente no existe.

g) $sen\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1 \qquad \cos\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$ La tangente no existe.

h) $sen\, \pi = 0 \qquad \cos \pi = -1 \qquad tg\, \pi = 0$

i) $sen\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1 \qquad \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$ La tangente no existe.

j) $sen\, 2\pi = 0 \qquad \cos 2\pi = 1 \qquad tg\, 2\pi = 0$

k) $sen\left(\dfrac{7\pi}{2}\right) = -1 \qquad \cos\left(\dfrac{7\pi}{2}\right) = 0$ La tangente no existe.

l) $sen\left(\dfrac{9\pi}{2}\right) = 1 \qquad \cos\left(\dfrac{9\pi}{2}\right) = 0$ La tangente no existe.

65. **Calcula, sin utilizar la calculadora, el valor del seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos medidos en grados.**

a) $-60°$
b) $-45°$
c) $-30°$
d) $0°$
e) $120°$
f) $135°$
g) $150°$
h) $180°$
i) $210°$
j) $225°$
k) $240°$
l) $270°$

a) $sen(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad cos(-60°) = \frac{1}{2}$ $\quad tg(-60°) = -\sqrt{3}$

b) $sen(-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad cos(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad tg(-45°) = -1$

c) $sen(-30°) = -\frac{1}{2}$ $\quad cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad tg(-30°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $sen\ 0° = 0$ $\quad cos\ 0° = 1$ $\quad tg\ 0° = 0$

e) $sen\ 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad cos\ 120° = -\frac{1}{2}$ $\quad tg\ 120° = -\sqrt{3}$

f) $sen\ 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad cos\ 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad tg\ 135° = -1$

g) $sen\ 150° = \frac{1}{2}$ $\quad cos\ 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad tg\ 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

h) $sen\ 180° = 0$ $\quad cos\ 180° = -1$ $\quad tg\ 180° = 0$

i) $sen\ 210° = -\frac{1}{2}$ $\quad cos\ 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad tg\ 210° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

j) $sen\ 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad cos\ 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad tg\ 225° = 1$

k) $sen\ 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad cos\ 240° = -\frac{1}{2}$ $\quad tg\ 240° = \sqrt{3}$

l) $sen\ 270° = -1$ $\quad cos\ 270° = 0$ $\quad$ La tangente no existe.

66. **Utiliza la calculadora para hallar estas razones.**

a) $sen\ 319°\ 12'\ 52''$
b) $cos\ 434°\ 26'$
c) $tg\ 7{,}03$
d) $sen\ \frac{8\pi}{5}$
e) $cosec\ 200°\ 16'$
f) $sec\ \frac{5\pi}{4}$
g) $tg\ 183°\ 13'\ 53''$
h) $sen\ 333°\ 55''$
i) $tg\ \frac{11\pi}{8}$
j) $cos\ 3{,}845$
k) $cotg\ \frac{11\pi}{6}$
l) $cosec\ 5{,}24$

a) $sen\ 319°\ 12'\ 52'' = -0{,}6532$
b) $cos\ 434°\ 26' = 0{,}2684$
c) $tg\ 7{,}03 = 0{,}9257$
d) $sen\ \frac{8\pi}{5} = -0{,}9511$
e) $cosec\ 200°\ 16' = -2{,}8869$
f) $sec\ \frac{5\pi}{4} = -1{,}4142$
g) $tg\ 183°\ 13'\ 53'' = 0{,}0565$
h) $sen\ 333°\ 55'' = -0{,}4538$
i) $tg\ \frac{11\pi}{8} = 2{,}4142$
j) $cos\ 3{,}845 = -0{,}7626$
k) $cotg\ \frac{11\pi}{6} = -1{,}7321$
l) $cosec\ 5{,}24 = -1{,}1574$

67. **Halla las razones trigonométricas relacionándolas con las de un ángulo del primer cuadrante.**

a) 301° 21' 15"
b) 902° 40'
c) 190° 43"
d) 295° 12' 45"
e) 386° 56'
f) 612° 43' 2"

a) $301^\circ\ 21'\ 15'' = 360^\circ - (58^\circ\ 38'\ 45'')$

$sen(301^\circ\ 21'\ 15'') = -sen(58^\circ\ 38'\ 45'') = -0{,}8540$

$cos(301^\circ\ 21'\ 15'') = cos(58^\circ\ 38'\ 45'') = 0{,}5203$

$tg(301^\circ\ 21'\ 15'') = -tg(58^\circ\ 38'\ 45'') = -1{,}6412$

b) $902^\circ\ 40' = 2\cdot 360^\circ + 180^\circ + 2^\circ\ 40'$

$sen(902^\circ\ 40') = -sen(2^\circ\ 40') = -0{,}0465$

$cos(902^\circ\ 40') = -cos(2^\circ\ 40') = -0{,}9989$

$tg(902^\circ\ 40') = tg(2^\circ\ 40') = 0{,}0466$

c) $190^\circ\ 43'' = 180^\circ + 10^\circ\ 43''$

$sen(190^\circ\ 43'') = -sen(10^\circ\ 43'') = -0{,}1739$

$cos(190^\circ\ 43'') = -cos(10^\circ\ 43'') = -0{,}9848$

$tg(190^\circ\ 43'') = tg(10^\circ\ 43'') = 0{,}1765$

d) $295^\circ\ 12'\ 45'' = 360^\circ - (64^\circ\ 47'\ 15'')$

$sen(295^\circ\ 12'\ 45'') = -sen(64^\circ\ 47'\ 15'') = -0{,}9047$

$cos(295^\circ\ 12'\ 45'') = cos(64^\circ\ 47'\ 15'') = 0{,}4260$

$tg(295^\circ\ 12'\ 45'') = -tg(64^\circ\ 47'\ 15'') = -2{,}1239$

e) $386^\circ\ 56' = 360^\circ + 26^\circ\ 56'$

$sen(386^\circ\ 56') = sen(26^\circ\ 56') = 0{,}4530$

$cos(386^\circ\ 56') = cos(26^\circ\ 56') = 0{,}8915$

$tg(386^\circ\ 56') = tg(26^\circ\ 56') = 0{,}5081$

f) $612^\circ\ 43'\ 2'' = 360^\circ + 180^\circ + 72^\circ\ 43'\ 2''$

$sen(612^\circ\ 43'\ 2'') = -sen(72^\circ\ 43'\ 2'') = -0{,}9549$

$cos(612^\circ\ 43'\ 2'') = -cos(72^\circ\ 43'\ 2'') = -0{,}2971$

$tg(612^\circ\ 43'\ 2'') = tg(72^\circ\ 43'\ 2'') = 3{,}2140$

68. **Dibuja todos los ángulos posibles, menores que 360°, que verifiquen las siguientes condiciones.**

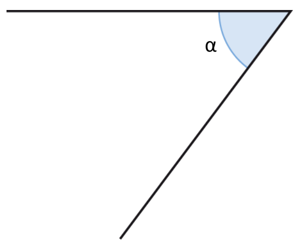
a) Su seno valga 0,8.

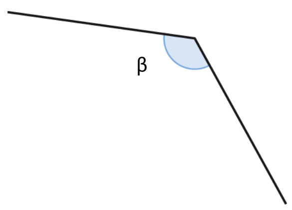
b) Su coseno valga −0,4.

c) Su tangente valga 0,5.

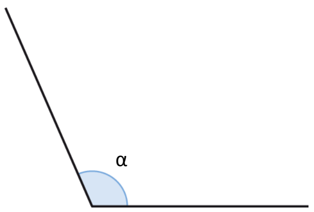
d) Su seno valga −0,4.

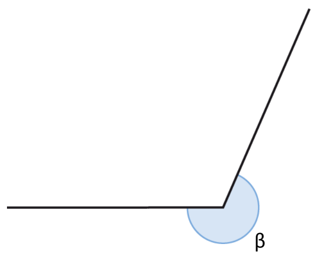
a) $\alpha = 53{,}13^\circ$ $\beta = 126{,}87^\circ$



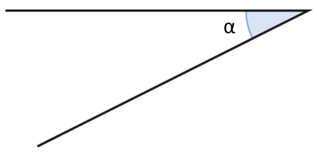


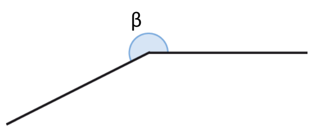
b) $\alpha = 113{,}58^\circ$ $\beta = 246{,}42^\circ$



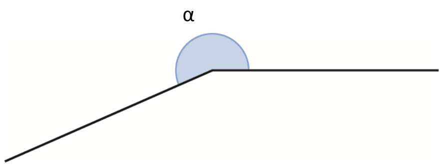


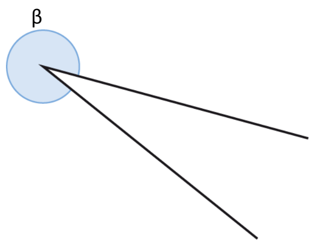
c) $\alpha = 26{,}57^\circ$ $\beta = 206{,}57^\circ$





d) $\alpha = 203{,}58^\circ$ $\beta = 336{,}42^\circ$





69. **Halla estos ángulos usando la calculadora.**

a) *arc cos* 0,4539

b) *arc sen* 0,9284

c) *arc tg* (−0,5459)

d) *arc tg* 2,1618

e) *arc cos* (−0,2926)

f) *arc sen* (−0,3308)

a) $arc\ cos\ 0{,}4539 = 63^\circ\ 20{,}95''$

b) $arc\ sen\ 0{,}9284 = 68^\circ\ 11'\ 12{,}3''$

c) $arc\ tg(-0{,}5459) = 331^\circ\ 22'\ 12''$

d) $arc\ tg\ 2{,}1618 = 65^\circ\ 10'\ 32{,}9''$

e) $arc\ cos(-0{,}2926) = 107^\circ\ 49{,}2''$

f) $arc\ sen(-0{,}3308) = 340^\circ\ 40'\ 58''$

70. **Determina el ángulo α del 1.er cuadrante cuyas razones trigonométricas verifican lo siguiente.**

a) $sen\ \alpha = |sen\ 249°\ 31'|$

b) $cos\ \alpha = |cos\ 249°\ 31'|$

c) $tg\ \alpha = |tg\ 249°\ 31'|$

d) $tg\ \alpha = |tg\ 183°\ 30'|$

Halla el resto de sus razones trigonométricas.

a) $sen\ \alpha = |sen\ 249°\ 31'| = 0{,}9368 \rightarrow \alpha = 69°\ 31'$

b) $cos\ \alpha = |cos\ 249°\ 31'| = 0{,}3499 \rightarrow \alpha = 69°\ 31'$

c) $tg\ \alpha = |tg\ 249°\ 31'| = 2{,}6770 \rightarrow \alpha = 69°\ 31'$

d) $tg\ \alpha = |tg\ 183°\ 30'| = 0{,}0612 \rightarrow \alpha = 3°\ 30'\ 7{,}68'' \rightarrow \begin{cases} sen\ 3°\ 30'\ 7{,}68'' = 0{,}0611 \\ cos\ 3°\ 30'\ 7{,}68'' = 0{,}9981 \end{cases}$

71. **De un ángulo de un triángulo se sabe que su seno vale 0,7. ¿Podrías determinar de qué ángulo se trata?**

$sen\ \alpha = 0{,}7 \rightarrow \alpha = 44{,}43°$ o bien $\alpha = 135{,}57°$

Los dos ángulos pueden pertenecer a un triángulo, por lo que no podemos determinar de qué ángulo se trata.

72. **De un ángulo de un triángulo se conoce su coseno, que vale 0,2. ¿Podrías determinar qué ángulo es?**

$cos\ \alpha = 0{,}2 \rightarrow \alpha = 78{,}46°$ o bien $\alpha = 281{,}54°$

Solo puede pertenecer a un triángulo el ángulo $\alpha = 78{,}46°$.

73. **De un ángulo dado, α, se sabe que *sen* $\alpha = 0{,}3$ y que su tangente es negativa. Determina a qué cuadrante pertenece dicho ángulo y calcula el valor de la tangente.**

Como $sen\ \alpha > 0$ y $tg\ \alpha < 0$ el ángulo está en el segundo cuadrante.

$sen\ \alpha = 0{,}3 \rightarrow \alpha = 162{,}54°$

$tg\ 162{,}54° = -0{,}3145$

74. **Sabiendo que la tangente de un ángulo es dos veces su seno, que el signo de este es positivo y el del coseno negativo, determina a qué cuadrante pertenece el ángulo y calcula sus restantes razones trigonométricas.**

$\left.\begin{matrix} sen\ \alpha > 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ El ángulo está en el segundo cuadrante.

$$tg\ \alpha = 2\ sen\ \alpha \rightarrow \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 2\ sen\ \alpha \rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 120° \rightarrow \begin{cases} sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ tg\ \alpha = -\sqrt{3} \end{cases}$$

75. **De un ángulo α del 2.º cuadrante se sabe únicamente que su seno es 0,5. Calcula las restantes razones trigonométricas de dicho ángulo.**

$sen\ \alpha = 0{,}5 \rightarrow \alpha = 150°$

$cos\ 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

76. **Sabiendo que *sen* $\alpha = 0{,}23$ y que α es un ángulo agudo, determina estas razones trigonométricas.**

a) $\cos\alpha$
b) $tg\,\alpha$
c) $tg\,(-\alpha)$
d) $\cos(180° - \alpha)$
e) $sen\,(180° + \alpha)$
f) $sen\,(720° + \alpha)$

a) $0{,}23^2 + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - 0{,}23^2} = 0{,}9732$

b) $tg\,\alpha = \dfrac{0{,}23}{0{,}9732} = 0{,}2363$

c) $tg\,(-\alpha) = -tg\,\alpha = -0{,}2363$

d) $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = -0{,}9732$

e) $sen\,(180° + \alpha) = -sen\,\alpha = -0{,}23$

f) $sen\,(720° + \alpha) = sen\,\alpha = 0{,}23$

77. **Sabiendo que la tangente de un ángulo es tres veces su seno y que ambas razones son negativas, halla las restantes razones trigonométricas.**

Se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} sen\,\alpha < 0 \\ tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \cos\alpha > 0 \rightarrow \text{El ángulo está en el cuarto cuadrante.}$$

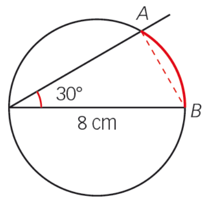
Por otra parte:

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = 3\,sen\,\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha = 289{,}47°\ .$$

Entonces, las demás razones trigonométricas son:

$sen\,289{,}47° = -0{,}9428$ $\qquad$ $tg\,289{,}47° = -2{,}8284$.

78. **En la siguiente circunferencia, calcula la medida del segmento *AB* y del arco de circunferencia $\widehat{AB}$.**



Como el ángulo $\widehat{A} = 90°$, el ángulo $\widehat{B} = 90° - 30° = 60°$.

$sen\,30° = \dfrac{AB}{8} \rightarrow AB = 4$ cm

El segmento *AB* mide 4 cm.

Como el ángulo de 30° es inscrito, el ángulo central que abarca el arco $\widehat{AB}$ mide 60°.

Calculamos la longitud de un arco de 60° en una circunferencia de 4 cm de radio:

$$\widehat{AB} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 60°}{360°} = \frac{4\pi}{3} = 4{,}19 \text{ cm}$$

El arco $\widehat{AB}$ mide 4,19 cm.

79. **Halla las razones trigonométricas de estos ángulos.**

a) $\cos\gamma = -0{,}54$ con $\pi < \gamma < \dfrac{3\pi}{2}$

b) $sen\,\delta = 0$ con $\dfrac{3\pi}{2} < \delta < 2\pi$

a) $sen^2\gamma + (-0{,}54)^2 = 1 \rightarrow sen\,\gamma = -\sqrt{1-(-0{,}54)^2} = -0{,}8417$

$tg\,\gamma = \dfrac{-0{,}8417}{-0{,}54} = 1{,}5587$

b) No existe ningún ángulo con estas condiciones, pues si $sen\,\delta = 0$, entonces $\delta = 2k\pi$.

80. **Resuelve los triángulos que aparecen a continuación.**

a) $a = 10$ cm $\quad b = 14$ cm $\quad c = 8$ cm

b) $b = 6$ cm $\quad c = 9$ cm $\quad \widehat{A} = 39°\ 12'$

c) $a = 7$ cm $\quad \widehat{B} = 38°\ 49'$ $\quad \widehat{C} = 66°\ 40'$

a) Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\widehat{A} \rightarrow \cos\widehat{A} = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = \frac{-100+196+64}{2\cdot 14\cdot 8} = 0{,}7143$$

$\widehat{A} = 44°\ 24'\ 55{,}1''$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\widehat{B} \rightarrow \cos\widehat{B} = \frac{-b^2+a^2+c^2}{2ac} = \frac{-196+100+64}{2\cdot 10\cdot 8} = -0{,}2$$

$\widehat{B} = 101°\ 32'\ 13''$

$\widehat{C} = 180° - 44°\ 24'\ 55{,}1'' - 101°\ 32'\ 13'' = 34°\ 2'\ 51{,}85''$

b) Aplicamos el teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\widehat{A} \rightarrow a^2 = 6^2 + 9^2 - 2\cdot 6\cdot 9\cdot\cos 39°\ 12' \rightarrow a = 5{,}77$ cm

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\widehat{B} \rightarrow \cos\widehat{B} = \frac{-b^2+a^2+c^2}{2ac} = \frac{-36+33{,}3+81}{2\cdot 5{,}77\cdot 9} = 0{,}7534$$

$\widehat{B} = 41°\ 4'\ 14{,}51'' \rightarrow \widehat{C} = 180° - 39°\ 12' - 41°\ 4'\ 14{,}51'' = 99°\ 43'\ 45{,}49''$

c) $\widehat{A} = 180° - 38°\ 49' - 66°\ 40' = 74°\ 31°$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{b}{sen\,38°\ 49'} = \frac{7}{sen\,74°\ 31'} \rightarrow b = 4{,}55 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{c}{sen\,66°\ 40'} = \frac{7}{sen\,74°\ 31'} \rightarrow c = 6{,}67 \text{ cm}$$

81. **Resuelve los siguientes triángulos.**

a) $a = 9$ cm $\quad c = 5$ cm $\quad \widehat{B} = 103°\ 27'$

b) $b = 8{,}3$ cm $\quad c = 9{,}1$ cm $\quad \widehat{C} = 112°\ 50'$

c) $c = 6$ cm $\quad \widehat{A} = 27°\ 42'$ $\quad \widehat{B} = 98°\ 20'$

a) Aplicamos el teorema del coseno:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\widehat{B} \rightarrow b = \sqrt{81 + 25 - 90\cdot\cos 103°\ 27'} = 11{,}27$ cm

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{11{,}27}{sen\,103°\ 27'} = \frac{9}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow sen\,\widehat{A} = 0{,}7767$$

$\widehat{A} = 50°\ 57'\ 26{,}6'' \rightarrow \widehat{C} = 180° - 50°\ 57'\ 26{,}6'' - 103°\ 27' = 25°\ 35'\ 33{,}4''$

b) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} \rightarrow \frac{9{,}1}{sen\,112°\ 50'} = \frac{8{,}3}{sen\,\widehat{B}} \rightarrow sen\,\widehat{B} = 0{,}8406$$

$\widehat{B} = 57°\ 12'\ 18{,}2'' \rightarrow \widehat{A} = 180° - 112°\ 50' - 57°\ 12'\ 18{,}2'' = 9°\ 57'\ 41{,}8''$

$$a = \frac{9{,}1\cdot sen\,91°\ 57'\ 41{,}8''}{sen\,112°\ 50'} = 1{,}71 \text{ cm}$$

c) $\widehat{C} = 180° - 27° 42' - 98° 20' = 53° 58'$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}} = \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{6}{\text{sen}\,53° 58'} = \frac{a}{\text{sen}\,27° 42'} \rightarrow a = 3{,}45 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}} = \frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} \rightarrow \frac{6}{\text{sen}\,53° 58'} = \frac{b}{\text{sen}\,98° 20'} \rightarrow b = 7{,}34 \text{ cm}$$

82. Encuentra las soluciones para los siguientes triángulos.

a) $a = 12$ cm $\quad b = 7$ cm $\quad c = 6$ cm

b) $a = 8$ cm $\quad c = 9$ cm $\quad \widehat{A} = 42° 55'$

c) $a = 10$ cm $\quad c = 9$ cm $\quad \widehat{A} = 72° 55'$

a) Aplicamos el teorema del coseno:

$$\cos\widehat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-144 + 49 + 36}{2 \cdot 7 \cdot 6} = -0{,}7024$$

$\widehat{A} = 134° 37' 6''$

$$\cos\widehat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-49 + 144 + 36}{2 \cdot 12 \cdot 6} = 0{,}9097$$

$\widehat{B} = 24° 31' 58{,}8''$

$\widehat{C} = 180° - 24° 31' 58{,}8'' - 134° 37' 6'' = 20° 50' 55{,}2''$

b) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}} = \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{9}{\text{sen}\,\widehat{C}} = \frac{8}{\text{sen}\,42° 55'} \rightarrow \text{sen}\,\widehat{C} = 0{,}7661$$

$\widehat{C} = 50° 2''$ $\qquad \widehat{B} = 180° - 42° 55' - 50° 2'' = 87° 4' 58''$

$$\frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} = \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{b}{\text{sen}\,87° 4' 58''} = \frac{8}{\text{sen}\,42° 55'} \rightarrow b = 11{,}73 \text{ cm}$$

c) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}} = \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{9}{\text{sen}\,\widehat{C}} = \frac{10}{\text{sen}\,72° 55'} \rightarrow \text{sen}\,\widehat{C} = 0{,}8603$$

$\widehat{C} = 59° 20' 57{,}2''$ $\qquad \widehat{B} = 180° - 59° 20' 57{,}2'' - 72° 55' = 47° 44' 2{,}76''$

$$\frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} = \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{b}{\text{sen}\,47° 44' 2{,}76''} = \frac{10}{\text{sen}\,72° 55'} \rightarrow b = 7{,}74 \text{ cm}$$

83. Resuelve los siguientes triángulos.

a) $a = 10$ cm, $\widehat{A} = 30°$, $\widehat{B} = 70°$

b) $a = 25$ cm, $\widehat{A} = 60°$, $\widehat{C} = 80°$

a) $\widehat{C} = 180° - 30° - 70° = 80°$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} \rightarrow b = \frac{10\,\text{sen}\,70°}{\text{sen}\,30°} = 18{,}79 \text{ cm} \qquad \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}} \rightarrow c = \frac{10\,\text{sen}\,80°}{\text{sen}\,30°} = 19{,}70 \text{ cm}$$

b) $\widehat{B} = 180° - 60° - 80° = 50°$

Aplicando el teorema del seno:

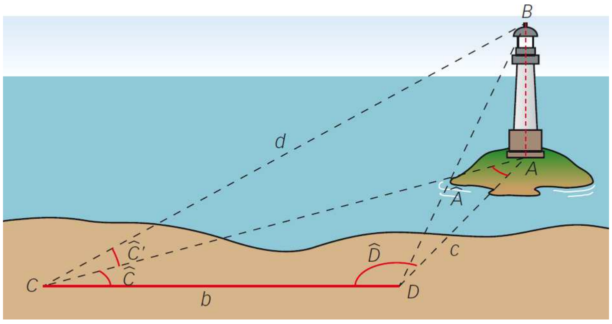
$$\frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} \rightarrow b = \frac{25\,\text{sen}\,50°}{\text{sen}\,60°} = 22{,}11 \text{ cm} \qquad \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}} \rightarrow c = \frac{25\,\text{sen}\,80°}{\text{sen}\,60°} = 28{,}43 \text{ cm}$$

84. El pedestal de una estatua mide 8 m y cuando nos separamos 15 m de su base la estatua se ve bajo un ángulo de 38°. ¿Cuál es la altura de la estatua?

$$\frac{8 + x}{15} = \text{tg}\,38° \rightarrow 8 + x = 0{,}7813 \cdot 15 \rightarrow x = 3{,}7193 \text{ m}$$

85. **Halla la altura del faro situado en un islote con los siguientes datos.**

$\widehat{C} = 73°$ $\widehat{D} = 61°$ $\widehat{C}' = 28°$ $b = 50$ m



$\widehat{A} = 180° - 73° - 61° = 46°$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{50}{sen\,\widehat{A}} = \frac{x}{sen\,\widehat{D}} \rightarrow \frac{50}{sen\,46°} = \frac{x}{sen\,61°} \rightarrow x = 60{,}79 \text{ m}$$

$h = 60{,}79 \cdot tg\ 28° = 32{,}32$ m

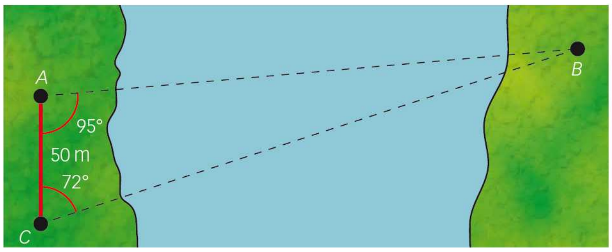
86. **En una construcción, dos vigas de 10 m están soldadas por sus extremos y forman un triángulo con otra viga de 15 m. Halla los ángulos que forman entre sí.**

Aplicando el teorema del seno:

$$\widehat{A} = \widehat{B} \rightarrow \frac{10}{sen\,\widehat{A}} = \frac{10}{sen\,\widehat{B}} = \frac{15}{sen(180° - 2\widehat{A})} = \frac{15}{sen\,2\widehat{A}} = \frac{15}{2\,sen\,\widehat{A} \cdot cos\,\widehat{A}}$$

$$cos\,\widehat{A} = \frac{3}{4} \rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = 41{,}41° \rightarrow \widehat{C} = 97{,}18°$$

87. **Calcula la distancia que hay entre los puntos *A* y *B* con los datos del gráfico.**

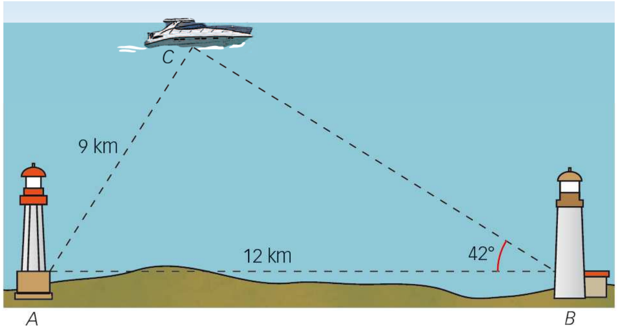


$\widehat{B} = 180° - 72° - 95° = 13°$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{50}{sen\,13°} = \frac{c}{sen\,72°} \rightarrow c = 211{,}39 \text{ m}$$

88. **Un faro *A* se encuentra a 12 km al oeste de otro faro *B*. Un bote parte del faro *A* y navega 9 km en línea recta. En ese instante, desde el faro *B*, el bote observa sobre la línea que forma un ángulo de 42° con la dirección este-oeste. Determina la distancia del bote al faro *B*.**



Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{9}{sen\,42^\circ}=\frac{12}{sen\,\hat{C}}\rightarrow \hat{C}=63,15^\circ$$

$$\hat{A}=180^\circ-42^\circ-63,15^\circ=74,85^\circ$$

$$\frac{a}{sen\,74,85^\circ}=\frac{9}{sen\,42^\circ}\rightarrow a=12,98\text{ km}$$

89. **Dos cables de 10 m y 6 m sujetan una antena vertical situada sobre un pedestal formando entre sí un ángulo de 25°. Halla la altura de la antena.**

Aplicando el teorema del coseno obtenemos la distancia a la que están enganchados los cables al suelo:

$$a=\sqrt{10^2+6^2-2\cdot 10\cdot 6\cdot cos\,25^\circ}=5,22\text{ m}$$

Sea *x* la distancia que hay desde la base de la antena hasta el enganche de uno de los cables. De esta forma tenemos que la distancia de la base de la antena al otro enganche es 5,22 – *x*. Así:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Altura}=\sqrt{10^2-x^2}\\ \text{Altura}=\sqrt{6^2-(5,22-x)^2}\end{array}\right\}\rightarrow\sqrt{10^2-x^2}=\sqrt{6^2-(5,22-x)^2}\rightarrow x=8,74\text{ m}$$

Sustituimos *x* por su valor y obtenemos la altura:

$$\text{Altura}=\sqrt{10^2-8,74^2}=4,86\text{ m}$$

90. **En una pared hay dos argollas distantes 8 m entre sí. Un niño ata cada argolla a un extremo de una cuerda y se aleja de la pared hasta que la cuerda queda tensa. En ese momento, la cuerda forma ángulos de 50° y 37° con la pared.**

a) ¿Cuánto mide la cuerda?

b) ¿A qué distancia está el niño de la pared?

La altura del lado conocido divide al triángulo inicial en dos triángulos rectángulos. Aplicamos la definición de tangente en los ángulos conocidos y formamos un sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}tg\,50^\circ=\dfrac{h}{x}\\ tg\,37^\circ=\dfrac{h}{8-x}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\rightarrow h=x\cdot tg\,50^\circ\\ \rightarrow h=(8-x)\cdot tg\,37^\circ\end{array}\Bigg\}\rightarrow x=\frac{8\cdot tg\,37^\circ}{tg\,37^\circ+tg\,50^\circ}=3,1\text{ m}$$

$$h=3,1\cdot tg\,50^\circ=3,69\text{ m}$$

$$sen\ 50° = \frac{3,69}{BA} \rightarrow BA = \frac{3,69}{sen\ 50°} = 4,82\text{ m}$$

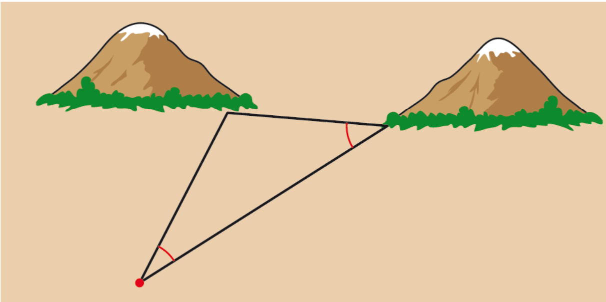
$$sen\ 37° = \frac{3,69}{CA} \rightarrow CA = \frac{3,69}{sen\ 37°} = 6,13\text{ m}$$

Calculamos la longitud de la cuerda:

$8 + 4,82 + 6,13 = 18,95$ m

La cuerda mide 18,95 m.

91. Para hallar la distancia entre dos cerros, se tienen los datos del dibujo y se sabe que la distancia del observador al cerro *A* es 1 km. ¿Cuál es la distancia entre los dos cerros?



$$\frac{1}{sen\ 40°} = \frac{d}{sen\ 30°} \rightarrow d = 0,78\text{ km}$$

92. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $sen\ (\alpha - 120°) + sen\ \alpha + sen(\alpha + 120°)$

b) $sen\ (\alpha + 30°) + cos\ (\alpha + 45°)$

c) $cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right)$

d) $tg\ (\alpha + \pi) - tg\ (\alpha - \pi)$

e) $cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + cos(-\alpha)$

a) $sen(\alpha - 120°) + sen\ \alpha + sen(\alpha + 120°) =$

$= sen\ \alpha \cdot cos\ 120° - sen\ 120° \cdot cos\ \alpha + sen\ \alpha + sen\ \alpha \cdot cos\ 120° + sen\ 120° \cdot cos\ \alpha = 0$

b) $sen(\alpha + 30°) + cos(\alpha + 45°) = sen\ \alpha \cdot cos\ 30° + sen\ 30° \cdot cos\ \alpha + cos\ \alpha \cdot cos\ 45° - sen\ \alpha \cdot sen\ 45° =$

$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} sen\ \alpha + \frac{\sqrt{2} + 1}{2} cos\ \alpha$

c) $cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) = cos\ \alpha \cdot cos\ \frac{\pi}{2} - sen\ \alpha \cdot sen\ \frac{\pi}{2} + cos\ \alpha \cdot cos\ \frac{3\pi}{4} - sen\ \alpha \cdot sen\ \frac{3\pi}{4} =$

$= -sen\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} cos\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{2} + 1}{2} sen\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} cos\ \alpha$

d) $tg(\alpha + \pi) - tg(\alpha - \pi) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \pi}{1 - tg\ \alpha \cdot tg\ \pi} - \frac{tg\ \alpha - tg\ \pi}{1 + tg\ \alpha \cdot tg\ \pi} = 0$

e) $cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + cos(-\alpha) = cos\ \frac{\pi}{2} \cdot cos\ \alpha - sen\ \frac{\pi}{2} \cdot sen\ \alpha + cos\ \alpha = -sen\ \alpha + cos\ \alpha$

93. **Simplifica estas expresiones trigonométricas.**

a) $2\,tg\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\alpha}{2}$

b) $2 + cos\,2\alpha - cos^2\alpha$

c) $\frac{2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha}{1 - 2\,sen^2\alpha}$

d) $cos\,\alpha\,(1 + cos\,\alpha) + sen^2\alpha$

e) $2\cdot\frac{tg\,\frac{\alpha}{2}}{cos\,\alpha}$

a) $2\,tg\,\frac{\alpha}{2}\cdot cos\,\frac{\alpha}{2} = 2\cdot\frac{sen\,\frac{\alpha}{2}}{cos\,\frac{\alpha}{2}}\cdot cos\,\frac{\alpha}{2} = 2\,sen\,\frac{\alpha}{2}$

b) $2 + cos\,2\alpha - cos^2\alpha = 2 + cos^2\alpha - sen^2\alpha - cos^2\alpha = 2 - sen^2\alpha$

c) $\frac{2\,sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha}{1-2\,sen^2\alpha} = \frac{sen\,2\alpha}{sen^2\alpha + cos^2\alpha - 2\,sen^2\alpha} = \frac{sen\,2\alpha}{cos^2\alpha - sen^2\alpha} = \frac{sen\,2\alpha}{cos\,2\alpha} = tg\,2\alpha$

d) $cos\,\alpha(1+cos\,\alpha) + sen^2\alpha = cos\,\alpha + cos^2\alpha + sen^2\alpha = cos\,\alpha + 1$

e) $2\cdot\frac{tg\,\frac{\alpha}{2}}{cos\,\alpha} = 2\frac{\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}}}{cos\,\alpha} = 2\frac{\sqrt{\frac{1-cos^2\alpha}{(1+cos\,\alpha)^2}}}{cos\,\alpha} = 2\frac{\sqrt{\frac{sen^2\alpha}{(1+cos\,\alpha)^2}}}{cos\,\alpha} = \frac{\frac{2\,sen\,\alpha}{1+cos\,\alpha}}{cos\,\alpha} = 2\,tg\,\alpha(1+cos\,\alpha)$

94. **Sabiendo que la tangente de α es 2,5 y que α es un ángulo del primer cuadrante, halla *tg*$(\alpha + 45°)$. Determina también en qué cuadrante está el ángulo $\alpha + 45°$.**

$$tg(\alpha + 45°) = \frac{tg\,\alpha + tg\,45°}{1 - tg\,\alpha\cdot tg\,45°} = \frac{2{,}5+1}{1-2{,}5} = -2{,}33$$

El ángulo está en el segundo cuadrante.

95. **De un ángulo agudo sabemos que $tg\,\alpha = \frac{5}{4}$. Calcula $tg\,2\alpha$.**

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{5}{4}}{1-\frac{25}{16}} = -\frac{40}{9}$$

96. **Halla una fórmula para calcular *sen* 3*x* en función de *sen x*. Aplícala para calcular *sen* 3*x* sabiendo que $sen\,x = \frac{1}{3}$.**

$$sen(2x + x) = sen\,2x\cdot cos\,x + sen\,x\cdot cos\,2x = 2\,sen\,x\cdot cos^2x + sen\,x\left(cos^2x - sen^2x\right) =$$

$$= 3\,sen\,x\,(1 - sen^2x) - sen^3x = 3\,sen\,x - 4\,sen^3x$$

Si $sen\,x = \frac{1}{3}$ entonces $sen\,3x = 3\cdot\frac{1}{3} - 4\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{23}{27}$

97. **Sabemos que *sen* 56° = 0,83 y *cos* 23° = 0,92.**

a) Calcula el resto de razones de esos ángulos.

b) Halla las razones trigonométricas de 79°.

c) Determina las razones de 33°.

d) ¿Podrías hallar las razones de 28°?

e) ¿Y las de 46°?

a) $0{,}83^2 + \cos^2 56° = 1 \rightarrow \cos 56° = \sqrt{1 - 0{,}83^2} = 0{,}56$

$$tg\ 56° = \frac{0{,}83}{0{,}56} = 1{,}48$$

$sen^2\ 23° + 0{,}92^2 = 1 \rightarrow sen\ 23° = \sqrt{1 - 0{,}92^2} = 0{,}39$

$$tg\ 23° = \frac{0{,}39}{0{,}92} = 0{,}42$$

b) $sen\ 79° = sen\ (56° + 23°) = sen\ 56° \cdot \cos 23° + \cos 56° \cdot sen\ 23° =$
$= 0{,}83 \cdot 0{,}92 + 0{,}56 \cdot 0{,}39 = 0{,}98$

$\cos 79° = \cos (56° + 23°) = \cos 56° \cdot \cos 23° - sen\ 56° \cdot sen\ 23° =$
$= 0{,}56 \cdot 0{,}92 - 0{,}83 \cdot 0{,}39 = 0{,}19$

$$tg\ 79° = tg\ (56° + 23°) = \frac{tg\ 56° + tg\ 23°}{1 - tg\ 56° \cdot tg\ 23°} = \frac{1{,}48 + 0{,}42}{1 - 1{,}48 \cdot 0{,}42} = 5{,}02$$

c) $sen\ 33° = sen\ (56° - 23°) = sen\ 56° \cdot \cos 23° - \cos 56° \cdot sen\ 23° =$
$= 0{,}83 \cdot 0{,}92 - 0{,}56 \cdot 0{,}39 = 0{,}55$

$\cos 33° = \cos (56° - 23°) = \cos 56° \cdot \cos 23° + sen\ 56° \cdot sen\ 23° =$
$= 0{,}56 \cdot 0{,}92 + 0{,}83 \cdot 0{,}39 = 0{,}84$

$$tg\ 33° = tg\ (56° - 23°) = \frac{tg\ 56° - tg\ 23°}{1 + tg\ 56° \cdot tg\ 23°} = \frac{1{,}48 - 0{,}42}{1 + 1{,}48 \cdot 0{,}42} = 0{,}65$$

d) $$sen\ 28° = sen\ \frac{56°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 56°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}56}{2}} = 0{,}47$$

$$\cos 28° = \cos \frac{56°}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 56°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0{,}56}{2}} = 0{,}88$$

$$tg\ 28° = tg\ \frac{56°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 56°}{1 + \cos 56°}} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}56}{1 + 0{,}56}} = 0{,}53$$

e) $sen\ 46° = sen\ (2 \cdot 23°) = 2 \cdot sen\ 23° \cdot \cos 23° = 2 \cdot 0{,}39 \cdot 0{,}92 = 0{,}72$

$\cos 46° = \cos (2 \cdot 23°) = \cos^2 23° - sen^2\ 23° = 0{,}92^2 - 0{,}39^2 = 0{,}69$

$$tg\ 46° = tg\ (2 \cdot 23°) = \frac{2 \cdot tg\ 23°}{1 - tg^2\ 23°} = \frac{2 \cdot 0{,}42}{1 - 0{,}42^2} = 1{,}02$$

98. **Obtén una fórmula simplificada de:**

a) $sen\ (30° + \widehat{A})$

b) $\cos (\widehat{B} - 60°)$

c) $tg\ (45° - \widehat{C})$

d) $\cos (\widehat{D} + 30°)$

a) $sen\ (30° + \widehat{A}) = sen\ 30° \cdot \cos \widehat{A} + \cos 30° \cdot sen\ \widehat{A} = \frac{1}{2} \cos \widehat{A} + \frac{\sqrt{3}}{2} sen\ \widehat{A} =$
$= \frac{1}{2} (\cos \widehat{A} + \sqrt{3}\ sen\ \widehat{A})$

b) $\cos (\widehat{B} - 60°) = \cos \widehat{B} \cdot \cos 60° + sen\ \widehat{B} \cdot sen\ 60° = \frac{1}{2} \cos \widehat{B} + \frac{\sqrt{3}}{2} sen\ \widehat{B} =$
$= \frac{1}{2} (\cos \widehat{B} + \sqrt{3}\ sen\ \widehat{B})$

c) $tg\,(45° - \widehat{C}) = \dfrac{1 - tg\,\widehat{C}}{1 + tg\,\widehat{C}}$

d) $cos\,(\widehat{D} + 30°) = cos\,\widehat{D} \cdot cos\,30° - sen\,\widehat{D} \cdot sen\,30° =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,cos\,\widehat{D} - \frac{1}{2}\,sen\,\widehat{D} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\,cos\,\widehat{D} - sen\,\widehat{D})$$

99. Sabiendo que $sen\ x = \dfrac{2}{5}$ y que $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, sin hallar previamente el valor de x, calcula.

$$sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad\qquad tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

a) Expresa los resultados utilizando radicales.

b) Explica cómo determinarías las razones de $\dfrac{\pi}{4}$ rad y $\dfrac{\pi}{3}$ rad.

Hallamos las razones trigonométricas de x:

$$cos\ x = -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = -\frac{\sqrt{21}}{5} \qquad tg\ x = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

a) y b) Las razones trigonométricas de $\dfrac{\pi}{4}$ rad, 45° y $\dfrac{\pi}{3}$ rad, 60° son conocidas.

$$sen\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad cos\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad sen\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad tg\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = sen\ x \cdot cos\,\frac{\pi}{4} + cos\ x \cdot sen\,\frac{\pi}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{42}}{10}$$

$$tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{tg\ x - tg\,\dfrac{\pi}{3}}{1 + tg\ x \cdot tg\,\dfrac{\pi}{3}} = -\frac{8\sqrt{21} + 25\sqrt{3}}{9}$$

100. Se sabe que $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$ y $tg\ x = \dfrac{3}{4}$.

a) Halla $sen\ x$ y $cos\ x$.

b) Determina, utilizando radicales, las razones de los ángulos $\dfrac{\pi}{6}$ y $\dfrac{\pi}{4}$.

c) Sin determinar el ángulo x, calcula.

$$cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \qquad\qquad tg\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

d) Sin determinar el ángulo x, decide razonadamente en qué cuadrante están estos ángulos.

$$x - \frac{\pi}{4} \qquad\qquad x + \frac{\pi}{6}$$

a) $cos\,x = \sqrt{\dfrac{1}{1 + 0{,}75^2}} = -0{,}8 \qquad sen^2\,x + 0{,}8^2 = 1 \rightarrow sen\,x = \sqrt{1 - 0{,}8^2} = -0{,}6$

b) $sen\,\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \qquad cos\,\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad tg\,\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$sen\,\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad cos\,\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\,\dfrac{\pi}{4} = 1$

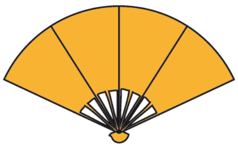
c) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -0{,}8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}7\sqrt{2}$

$$tg\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{tg\, x + tg\,\frac{\pi}{6}}{1 - tg\, x \cdot tg\,\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{48+25\sqrt{3}}{39}$$

d) Como el seno del ángulo $x-\frac{\pi}{4}$ es positivo, el ángulo está en el 2.º cuadrante.

Y como la tangente del ángulo $x+\frac{\pi}{6}$ es positiva, el ángulo está en el 3.er cuadrante.

101. **El ángulo que forma un abanico es 170°. Si el abanico tiene tres nervios centrales, calcula las razones trigonométricas de los ángulos que se forman al desplegarlo nervio a nervio sabiendo que *cos* 170° = −0,98 y que *sen* 170° = 0,17.**



Los ángulos que se forman son de 42,5º, 85º, 127,5º y 170º.

$x = 170º$

$\operatorname{sen} 85º = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = 0{,}99$ $\qquad \cos 85º = \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = 0{,}1$

$\operatorname{sen} 42{,}5º = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2}} = 0{,}67$ $\qquad \cos 42{,}5º = \cos\left(\frac{x}{4}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2}} = 0{,}74$

$\operatorname{sen} 127{,}5º = \operatorname{sen}(42{,}5º+85º) = \operatorname{sen} 42{,}5º \cos 85º + \operatorname{sen} 85º \cos 42{,}5º = 0{,}79$

$\cos 127{,}5º = \cos(42{,}5º+85º) = \cos 42{,}5º \cos 85º - \operatorname{sen} 42{,}5º \operatorname{sen} 85º = -0{,}59$

102. **Calcula *cos* 285° a partir de las razones de los ángulos de 330° y de 45°.**

$\cos 285º = \cos(330º-45º) = \cos 330º \cos 45º + \operatorname{sen} 330º \operatorname{sen} 45º = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}2588$

103. **Sabiendo que las razones de 32° son:**

***sen* 32° = 0,53** $\qquad$ ***cos* 32° = 0,848**

a) Calcula las razones trigonométricas de 62°.

b) Halla las razones de 31°.

c) ¿Puedes calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo cuya medida en grados no tenga minutos ni segundos?

a) $\operatorname{sen} 62° = \operatorname{sen}(32° + 30°) = \operatorname{sen} 32° \cdot \cos 30° + \cos 32° \cdot \operatorname{sen} 30° =$

$= 0{,}53 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}848 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}88$

$\cos 62° = \cos(32° + 30°) = \cos 32° \cdot \cos 30° - \operatorname{sen} 32° \cdot \operatorname{sen} 30° =$

$= 0{,}848 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}53 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}46$

$tg\ 62° = \frac{0{,}88}{0{,}46} = 1{,}91$

b) $sen\ 31° = sen\ \frac{62°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 62°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}46}{2}} = 0{,}52$

$cos\ 31° = cos\ \frac{62°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 62°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0{,}46}{2}} = 0{,}85$

$tg\ 31° = \frac{0{,}52}{0{,}85} = 0{,}61$

c) Sí podemos calcular las razones de cualquier ángulo, ya que a partir de las medidas de 32° y de 31° hallamos las medidas de 1°, y a partir de ellas, las demás.

104. Escribe las expresiones que aparecen a continuación en forma de producto.

a) $cos\ 2\alpha - cos\ \alpha$

b) $cos\ \alpha - cos\ 4\alpha$

c) $sen\ 8\alpha - sen\ 2\alpha$

d) $sen\ \alpha - cos\ \alpha$

e) $cos\ \alpha + sen\ 3\alpha$

f) $sen\ \alpha - sen\ 3\alpha$

a) $cos\ 2\alpha - cos\ \alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha - cos\ \alpha = cos\ \alpha(cos\ \alpha - 1) - (1 - cos^2\alpha) =$

$= cos\ \alpha(cos\alpha - 1) - (1 - cos\ \alpha)(1 + cos\ \alpha) = (cos\ \alpha - 1) \cdot (2\ cos\ \alpha + 1)$

b) $cos\ \alpha - cos\ 4\alpha = cos\ \alpha - cos(3\alpha + \alpha) = cos\ \alpha + tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha \cdot sen\ 3\alpha - cos\ \alpha \cdot cos\ 3\alpha =$

$= cos\ \alpha(1 + tg\ \alpha \cdot sen\ 3\alpha - cos\ 3\alpha)$

c) $sen\ 8\alpha - sen\ 2\alpha = sen(2\alpha + 6\alpha) - sen\ 2\alpha = sen\ 2\alpha \cdot cos\ 6\alpha + sen\ 6\alpha \cdot cos\ 2\alpha - sen\ 2\alpha =$

$= sen\ 2\alpha \cdot cos\ 6\alpha + (sen\ 2\alpha \cdot cos\ 4\alpha + 2\ sen\ 2\alpha \cdot cos\ 2\alpha \cdot cos\ 2\alpha)\ cos\ 2\alpha - sen\ 2\alpha =$

$= sen\ 2\alpha(cos\ 6\alpha + cos\ 4\alpha \cdot cos\ 2\alpha + 2\ cos^3 2\alpha - 1)$

d) $sen\ \alpha - cos\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha - cos\ \alpha = cos\ \alpha(tg\ \alpha - 1)$

e) $cos\ \alpha + sen\ 3\alpha = cos\ \alpha + sen(\alpha + 2\alpha) = cos\ \alpha + sen\ \alpha \cdot cos\ 2\alpha + cos\ \alpha \cdot sen\ 2\alpha =$

$= cos\ \alpha + cos\ \alpha \cdot tg\ \alpha \cdot cos\ 2\alpha + cos\ \alpha \cdot sen\ 2\alpha = cos\ \alpha(1 + tg\ \alpha \cdot cos\ 2\alpha + sen\ 2\alpha)$

f) $sen\ \alpha - sen\ 3\alpha = sen\ \alpha - sen(2\alpha + \alpha) = sen\ \alpha - sen\ 2\alpha\ cos\ \alpha - sen\ \alpha \cdot cos\ 2\alpha =$

$= sen\ \alpha - 2\ sen\ \alpha \cdot cos^2\alpha - sen\ \alpha \cdot cos\ 2\alpha = sen\ \alpha(1 - 2\ cos^2\alpha - cos\ 2\alpha)$

105. Simplifica y escribe la expresión con una sola razón trigonométrica.

a) $\frac{sen\ \alpha - sen^3\ \alpha}{cos^4\ \alpha + cos^2\ \alpha\ sen^2\ \alpha}$

b) $cos^2\ 5\alpha - sen^2\ 5\alpha$

c) $sec\ \alpha\ (sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha) - sen\ \alpha$

d) $sen^4\ \alpha - cos^4\ \alpha + cos^2\ \alpha$

a) $\frac{sen\ \alpha - sen^3\alpha}{cos^4\alpha + cos^2\alpha\ sen^2\alpha} = \frac{sen\ \alpha(1 - sen^2\alpha)}{(1 - sen^2\alpha)^2 + (1 - sen^2\alpha)sen^2\alpha} = \frac{sen\ \alpha(1 - sen^2\alpha)}{1 - sen^2\alpha} = sen\ \alpha$

b) $cos^2 5\alpha - sen^2 5\alpha = cos\ 10\alpha$

c) $sec\ \alpha(sen\ \alpha \cdot cos\ \alpha + cos^2\alpha) - sen\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}(cos\ \alpha(sen\ \alpha + cos\ \alpha)) - sen\ \alpha = cos\ \alpha$

d) $sen^4\alpha - cos^4\alpha + cos^2\alpha = sen^2\alpha(1 - cos^2\alpha) - cos^2\alpha(1 - sen^2\alpha) + cos^2\alpha = sen^2\alpha$

106. **Demuestra que se verifican las igualdades que aparecen a continuación.**

a) $1 + sen\,2\alpha = 2\,sen\,(\alpha + 45°)\,cos\,(\alpha - 45°)$

b) $cos\,2\alpha = 2\,sen\,(\alpha + 45°)\,cos\,(\alpha + 45°)$

c) $sen\,2\alpha = -2\,tg\,(\alpha + \pi)[sen^2\,(\alpha + \pi) - 1]$

d) $cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = sen\left(\frac{\alpha + \pi}{2}\right)$

a) $2\,sen\,(\alpha + 45°)\,cos\,(\alpha - 45°) =$

$= 2\,(sen\,\alpha \cdot cos\,45° + cos\,\alpha \cdot sen\,45°)(cos\,\alpha \cdot cos\,45° + sen\,\alpha \cdot sen\,45°) =$

$= 2\left(\frac{\sqrt{2} \cdot sen\,\alpha}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot cos\,\alpha}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2} \cdot cos\,\alpha}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot sen\,\alpha}{2}\right) =$

$= 2\left(\frac{2 \cdot cos^2\,\alpha}{4} + \frac{4\,sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}{4} + \frac{2 \cdot sen^2\,\alpha}{4}\right) =$

$= cos^2\,\alpha + sen^2\,\alpha + 2\,sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha = 1 + sen\,2\alpha$

b) $2\,sen\,(\alpha + 45°)\,cos\,(\alpha + 45°) =$

$= 2\,(sen\,\alpha \cdot cos\,45° + cos\,\alpha \cdot sen\,45°)(cos\,\alpha \cdot cos\,45° - sen\,\alpha \cdot sen\,45°) =$

$= 2\left(\frac{\sqrt{2} \cdot sen\,\alpha}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot cos\,\alpha}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2} \cdot cos\,\alpha}{2} - \frac{\sqrt{2} \cdot sen\,\alpha}{2}\right) =$

$= 2\left(\frac{2 \cdot cos^2\,\alpha}{4} - \frac{2 \cdot sen^2\,\alpha}{4}\right) = cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha = cos\,2\alpha$

c) $-2tg(\alpha + \pi)\left[sen^2(\alpha + \pi) - 1\right] = \frac{-(-2sen\alpha)}{-cos\alpha}\left[sen^2\alpha - 1\right] = -\frac{2sen\alpha(-cos^2\alpha)}{cos\alpha} = 2sen\alpha \cdot cos\alpha = sen2\alpha$

d) $sen\left(\frac{\alpha + \pi}{2}\right) = \frac{sen(\alpha + \pi)}{2cos\left(\frac{\alpha + \pi}{2}\right)} = \frac{-sen\,\alpha}{2\sqrt{\frac{1 + cos\,\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{cos^2\alpha - 1}{\frac{4(1 + cos\,\alpha)}{2}}} = \sqrt{\frac{(1 + cos\,\alpha)(1 - cos\,\alpha)}{2(1 + cos\,\alpha)}} = \sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{2}} = cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

107. **Demuestra que es cierta la siguiente igualdad.**

$$sen\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 + tg^2\,\alpha}$$

$sen\,2\alpha = 2\,sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha = \frac{2\,sen\,\alpha \cdot cos^2\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{2\,tg\,\alpha}{\frac{1}{cos^2\,\alpha}} = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 + tg^2\,\alpha}$

108. **Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas.**

a) $\frac{sen\,2\alpha}{sen\,\alpha} - \frac{cos\,2\alpha}{cos\,\alpha} = sec\,\alpha$

b) $tg\,\alpha + cotg\,\alpha = sec\,\alpha \cdot cosec\,\alpha$

c) $\frac{1}{1 - sen\,\alpha} + \frac{1}{1 + sen\,\alpha} = 2\,sec^2\alpha$

d) $cos\,\alpha + tg\,\alpha \cdot sen\,\alpha = sec\,\alpha$

a) $\frac{2\,sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}{sen\,\alpha} - \frac{cos^2\alpha - sen^2\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha \cdot cos^2\alpha - sen\,\alpha \cdot (cos^2\alpha - sen^2\alpha)}{sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha} = \frac{sen^2\alpha + cos^2\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{1}{cos\,\alpha} = sec\,\alpha$

b) $\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} + \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} = \frac{sen^2\alpha + cos^2\alpha}{cos\,\alpha \cdot sen\,\alpha} = \frac{1}{cos\,\alpha} \cdot \frac{1}{sen\,\alpha} = sec\,\alpha \cdot cosec\,\alpha$

c) $\frac{1 + sen\,\alpha + 1 - sen\,\alpha}{1 - sen^2\alpha} = \frac{2}{cos^2\alpha} = 2\,sec^2\alpha$

d) $cos\,\alpha + \frac{sen^2\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{cos^2\alpha + sen^2\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{1}{cos\,\alpha} = sec\,\alpha$

109. **Comprueba, sustituyendo α por un ángulo conocido, que la siguiente igualdad es cierta.**

$$\frac{2\,sen\,\alpha}{tg\,2\alpha} = cos\,\alpha - sen\,\alpha\,tg\,\alpha$$

Demuestra que esta propiedad se cumple para cualquier ángulo α.

Elegimos el ángulo de 30 º:

$$\frac{2\,sen\,30°}{tg\,2\cdot 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad cos\,30° - sen\,30°\cdot tg\,30° = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Demostramos para cualquier ángulo:

$$\frac{2\,sen\,\alpha}{tg\,2\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha}{\dfrac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}} = \frac{sen\,\alpha\cdot(1-tg^2\alpha)}{tg\,\alpha} = \frac{sen\,\alpha}{tg\,\alpha} - \frac{sen\,\alpha\cdot tg^2\alpha}{tg\,\alpha} = cos\,\alpha - sen\,\alpha\cdot tg\,\alpha$$

110. **Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones.**

a) $cos\,x\,tg\,x = \frac{1}{2}$

b) $cos\,2x + sen\,2x = 1$

c) $cos\,2x - sen\,2x = 0$

d) $sen\,2x + cos\,x = 1$

e) $sen\,x\,cotg\,x = -\frac{1}{4}$

f) $sen\,2x + sen\,2x = 0$

g) $tg\,x + sen\,x = 0$

h) $tg\,x - sen\,2x = 0$

a) $cos\,x\,tg\,x = \frac{1}{2} \rightarrow sen\,x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360°\cdot k \\ x_2 = 150° + 360°\cdot k \end{cases}$

b) $cos\,2x + sen\,2x = 1 \rightarrow cos^2 x - sen^2 x + 2\,sen\,x\cdot cos\,x = cos^2 x + sen^2 x$

$\rightarrow -2\,sen^2 x + 2\,sen\,x\cdot cos\,x = 0 \rightarrow 2\,sen\,x\,(-sen\,x + cos\,x) = 0$

$sen\,x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360°\cdot k \\ x_2 = 180° + 360°\cdot k \end{cases}$

$sen\,x = cos\,x \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45° + 360°\cdot k \\ x_2 = 225° + 360°\cdot k \end{cases}$

c) $cos\,2x - sen\,2x = 0 \rightarrow cos\,2x = sen\,2x \rightarrow \begin{cases} x_1 = 22{,}5° + 180°\cdot k \\ x_2 = 112{,}5° + 180°\cdot k \end{cases}$

d) $sen\,2x + cos\,x = (2\,sen\,x + 1)\,cos\,x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 360°\cdot k \quad x_3 = 210° + k\cdot 360° \\ x_2 = 270° + 360°\cdot k \quad x_4 = 330° + k\cdot 360° \end{cases}$

e) $sen\,x\cdot cotg\,x = -\frac{1}{4} \rightarrow cos\,x = -\frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 104{,}48° + 360°\cdot k \\ x_2 = 255{,}52° + 360°\cdot k \end{cases}$

f) $sen\,2x + sen\,2x = 0 \rightarrow 2\,sen\,2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 180°\cdot k \\ x_2 = 90° + 180°\cdot k \end{cases}$

g) $tg\,x + sen\,x = 0 \rightarrow sen\,x\left(\frac{1}{cos\,x} + 1\right) = 0$

$sen\,x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360°\cdot k \\ x_2 = 180° + 360°\cdot k \end{cases}$

$\frac{1}{cos\,x} + 1 = 0 \rightarrow x_3 = 180° + 360°\cdot k$

h) $tg\,x - sen\,2x = 0 \rightarrow \frac{sen\,x}{cos\,x} - 2\,sen\,x\cdot cos\,x = 0 \rightarrow sen\,x(1 - 2\,cos^2 x) = 0$

$sen\,x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360°\cdot k \\ x_2 = 180° + 360°\cdot k \end{cases}$

$1 - 2\,cos^2 x = 0 \rightarrow cos\,x = \sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow x_3 = 45° + 360°\cdot k$

111. **Resuelva las ecuaciones trigonométricas que aparecen a continuación.**

a) $\dfrac{sen\,(60° - x)}{cos\,x} = 1$

b) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + tg\,x - 1 = 0$

c) $sen\,(x + 30°) + cos\,(x + 60°) = 1 + cos\,2x$

a) $\dfrac{sen\,(60° - x)}{cos\,x} = 1 \rightarrow \dfrac{\sqrt{3}\,cos\,x - sen\,x}{2\,cos\,x} = 1 \rightarrow \sqrt{3} - tg\,x = 2$

$\rightarrow tg\,x = -0{,}2679 \rightarrow x = 345° + 360° \cdot k$

b) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + tg\,x - 1 = 0 \rightarrow \dfrac{1 - tg\,x}{1 + tg\,x} + tg\,x - 1 = 0$

$\rightarrow tg^2\,x - tg\,x = 0 \rightarrow tg\,x(tg\,x - 1) = 0$

$tg\,x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$tg\,x - 1 = 0 \rightarrow tg\,x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45° + 360° \cdot k \\ x_2 = 225° + 360° \cdot k \end{cases}$

c) $sen\,(x + 30°) + cos\,(x + 60°) = 1 + cos\,2x$

$\rightarrow \dfrac{\sqrt{3}\,sen\,x}{2} + \dfrac{cos\,x}{2} + \dfrac{cos\,x}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\,sen\,x}{2} =$

$= cos^2\,x + sen^2\,x + cos^2\,x - sen^2\,x \rightarrow cos\,x = 2\,cos^2\,x \rightarrow cos\,x(2\,cos\,x - 1) = 0$

$cos\,x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 360° \cdot k \\ x_2 = 270° + 360° \cdot k \end{cases}$

$2\,cos\,x - 1 = 0 \rightarrow cos\,x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 60° + 360° \cdot k \\ x_2 = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$

112. **Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas.**

a) $tg(x + 45°) + tg(x - 45°) = 2\,cotg\,x$

b) $4\,sen\,2(x + 30°) = 1$

c) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) - 1 = 0$

d) $sen(x + 30°) - cos\,x = 0$

a) $tg(x+45°)+tg(x-45°)=2\,cotg\,x \rightarrow \dfrac{tg\,x+tg\,45°}{1-tg\,x\,tg\,45°}+\dfrac{tg\,x-tg\,45°}{1+tg\,x\,tg\,45°}=\dfrac{2}{tg\,x} \rightarrow$

$(tg\,x+1)^2\,tg\,x+(tg\,x-1)(tg\,x+1)tg\,x=2\left(1-tg^2x\right) \rightarrow 6\,tg^2x=2 \rightarrow tg\,x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x=30°+180°\cdot k,\ 150°+180°\cdot k$

b) $sen(2x+60°)=0{,}25 \rightarrow \begin{cases} 2x+60°=14{,}48° \rightarrow x=-22{,}76°+180°k \\ 2x+60°=165{,}52° \rightarrow x=52{,}76°+180°k \end{cases}$

c) $tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)-1=0 \rightarrow \dfrac{tg\,\frac{\pi}{4}-tg\,x}{1+tg\,\frac{\pi}{4}\,tg\,x}=1 \rightarrow \dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}=1 \rightarrow tg\,x=0 \rightarrow x=0°+180°k$

d) $sen(x+30°) - cos\ x = 0 \rightarrow sen\ x \cdot cos\ 30° + sen\ 30° \cdot cos\ x - cos\ x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} sen\ x + \frac{1}{2} cos\ x = cos\ x \rightarrow \sqrt{3}\ sen\ x = cos\ x \rightarrow \left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{1-cos^2 x}\right)^2 = (cos\ x)^2 \rightarrow$

$$\rightarrow 3 - 3\ cos^2 x = cos^2 x \rightarrow 3 = 4\ cos^2 x \rightarrow cos\ x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} cos\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 30° + 360°k,\ 330° + 360°k \\ cos\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 150° + 360°k,\ 210° + 360°k \end{cases}$$

Comprobando las posibles soluciones, se observa que solo son válidas:

$x = 30° + 360°k$ $\qquad$ $x = 210° + 360°k$

113. **Resuelve estos sistemas de ecuaciones trigonométricas.**

a) $\left.\begin{array}{r} sen^2 x + sen^2 y = 1 \\ cos^2 x - cos^2 y = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 120 \\ cos\ x = \frac{1}{2\ cos\ y} + sen\ x \cdot tg\ y \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} sen^2\ x + sen^2\ y = 1 \\ cos^2\ x - cos^2\ y = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} sen^2\ x = 1 - sen^2\ y = cos^2\ y \\ cos^2\ x - sen^2\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$

$cos\ 2x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30° + 180° \cdot k$

$cos^2\ y = sen^2\ 30° \rightarrow cos\ y = \sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow y = 60° + 180° \cdot k$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 120 \\ cos\ x = \frac{1}{2\ cos\ y} + sen\ x \cdot tg\ y \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 120° - y} cos\ (120° - y) =$

$= \frac{1}{2\ cos\ y} + sen\ (120° - y)\ tg\ y$

$-cos^2 y + \sqrt{3}\ sen\ y \cdot cos\ y = 1 + \sqrt{3}\ sen\ y \cdot cos\ y - sen^2 y$

$\rightarrow cos^2 y - sen^2 y = 1 \rightarrow cos\ 2y = -1 \rightarrow y = 90° + 180° \cdot k$

$x = 120° - y = 120° - 90° - 180° \cdot k = 30° - 180° \cdot k$

114. **Resuelve estos sistemas de ecuaciones trigonométricas.**

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 60° \\ cos\ x = sen\ y \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} y - x = 30° \\ tg\ y = tg\ (y - 3x) \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} sen\ x + 2\ cos\ y = 2 \\ 3\ sen\ x - 4\ cos\ y = 1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 4\ sen\ x + cos^2\ y = 2 \\ 2\ sen\ x + cos\ y = 1 \end{array}\right\}$

a) $x = 60° - y \rightarrow cos(60° - y) = sen\ y \rightarrow cos\ 60°\ cos\ y + \frac{\sqrt{3}}{2} sen\ y = sen\ y$

$\frac{1}{2} cos\ y = \frac{2-\sqrt{3}}{2} sen\ y \rightarrow \frac{1}{2-\sqrt{3}} = tg\ y \rightarrow y = 75° + 360°k,\ x = -15° + 360°k$

b) $y = 30° + x \rightarrow tg(30° + x) = tg(30° - 2x) \rightarrow \frac{tg\ 30° + tg\ x}{1 - tg\ 30° \cdot tg\ x} = \frac{tg\ 30° - tg\ 2x}{1 + tg\ 30° \cdot tg\ 2x}$

$tg\ 30° + tg^2 30° \cdot tg\ 2x + tg\ x + tg\ 30° \cdot tg\ 2x \cdot tg\ x = tg\ 30° - tg^2 30° \cdot tg\ x - tg\ 2x + tg\ 30° \cdot tg\ 2x \cdot tg\ x$

$\frac{4}{3} tg\ 2x + \frac{4}{3} tg\ x = 0 \rightarrow \frac{2\ tg\ x}{1 - tg^2 x} + tg\ x = 0 \rightarrow tg\ x(3 - tg^2 x) = 0$

$x = 180°k,\ y = 180°k + 30°$ $\qquad$ $x = 60° + 180°k,\ y = 90° + 180°k$ $\qquad$ $x = 120° + 180°k,\ y = 150° + 180°k$

c)
$$\begin{array}{r} 2\,sen\,x+4\cos y=4 \\ +\quad 3\,sen\,x-4\cos y=1 \\ \hline 5\,sen\,x=5 \end{array}$$

$$5\,sen\,x=5\rightarrow sen\,x=1\rightarrow \cos y=\frac{1}{2}\rightarrow x=90°+360°k,\ y=60°+360°k$$

d)
$$\begin{array}{r} 4\,sen\,x+\cos^2 x=2 \\ -\quad 4\,sen\,x+2\cos y=2 \\ \hline \cos^2 y-2\cos y=0 \end{array}$$

$$\cos^2 y-2\cos y=0\rightarrow\begin{cases}\cos y=0\rightarrow sen\,x=\frac{1}{2}\rightarrow y=180°k,\ x=30°+360°k\\ \cos y=2\rightarrow \text{Sin solución.}\end{cases}$$

115. **Resuelve las ecuaciones trigonométricas.**

a) $4\,sen\,x-\sec x=0$

b) $\dfrac{\cos^2 x}{2\cos x+sen\,x}=sen\,x$

c) $\dfrac{1}{\cos x+sen\,x}+2\,sen\,x=2\cos x$

d) $sen\,x\,(sen\,x-1)=5\cos^2 x-4$

e) $2\cos x-1=\sec x$

f) $2\cos x+sen\,x=1$

g) $sen\,x+\cos x=0$

a) $4\,sen\,x-\sec x=0\rightarrow 4\,sen\,x\cdot\cos x-1=0\rightarrow 2\,sen\,2x=1\rightarrow sen\,2x=\dfrac{1}{2}$

$$\rightarrow\begin{cases}x_1=15°+180°\cdot k\\ x_2=75°+180°\cdot k\end{cases}$$

b) $\dfrac{\cos^2 x}{2\cos x+sen\,x}=sen\,x\rightarrow\cos^2 x=2\cos x\cdot sen\,x+sen^2 x\rightarrow\cos 2x=sen\,2x$

$$\rightarrow\begin{cases}x_1=22{,}5°+180°\cdot k\\ x_2=112{,}5°+180°\cdot k\end{cases}$$

c) $\dfrac{1}{\cos x+sen\,x}+2\,sen\,x=2\cos x\rightarrow\dfrac{2\,sen\,x\cdot\cos x+2\,sen^2 x}{2\cos^2 x+2\,sen\,x\cdot\cos x}=1$

$$\rightarrow\frac{sen\,x(\cos x+sen\,x)}{\cos x(\cos x+sen\,x)}=1\rightarrow tg\,x=1\rightarrow\begin{cases}x_1=45°+360°\cdot k\\ x_2=225°+360°\cdot k\end{cases}$$

d) $sen\,x\,(sen\,x-1)=5\cos^2 x-4\rightarrow sen^2 x-sen\,x=5(1-sen^2 x)-4$

$6\,sen^2 x-sen\,x-1=0$

$$\rightarrow sen\,x=-\frac{1}{3}\rightarrow\begin{cases}x_1=340°\,31'\,44''+360°\cdot k\\ x_2=199°\,28'\,16''+360°\cdot k\end{cases}$$

$$\rightarrow sen\,x=\frac{1}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=30°+360°\cdot k\\ x_2=150°+360°\cdot k\end{cases}$$

e) $2\cos x-1=\sec x\rightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1=0$

$$\rightarrow\cos x=1\rightarrow\begin{cases}x_1=0°+360°\cdot k\\ x_2=180°+360°\cdot k\end{cases}$$

$$\rightarrow\cos x=-\frac{1}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=120°+360°\cdot k\\ x_2=240°+360°\cdot k\end{cases}$$

f) $2\cos x + \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \sqrt{1-\cos^2 x} = 1 - 2\cos x \rightarrow 5\cos^2 x - 4\cos x = 0$

$$\rightarrow \cos x(5\cos x - 4) = 0 \rightarrow \cos x = \frac{4}{5} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 36°\ 52'\ 11{,}6'' + 360° \cdot k \\ x_2 = 323°\ 7'\ 48{,}4'' + 360° \cdot k \end{cases}$$

g) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \rightarrow \begin{cases} x_1 = 135° + 360° \cdot k \\ x_2 = 315° + 360° \cdot k \end{cases}$

116. ¿Cuál es el ángulo agudo tal que el triple de su tangente es igual al doble de su coseno?

$$3\operatorname{tg} x = 2\cos x \rightarrow 3\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 2\cos x \rightarrow 3\operatorname{sen} x = 2\cos^2 x \rightarrow 3\operatorname{sen} x = 2(1-\operatorname{sen}^2 x)$$

$$2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 2 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \begin{cases} -2 \rightarrow \text{No puede ser.} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

El ángulo agudo es $x = 30°$.

117. ¿Cuál es el ángulo obtuso tal que su seno sumado con el triple de su coseno da -1?

$$\operatorname{sen} x + 3\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = -1 \rightarrow -3\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = (1+\operatorname{sen} x)$$

$$9(1-\operatorname{sen}^2 x) = 1 + 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x \rightarrow 5\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 4 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \begin{cases} -1 \rightarrow x = 270° \\ \frac{4}{5} \rightarrow x = 126{,}87° \end{cases}$$

118. ¿Cuál es el ángulo agudo tal que su seno multiplicado por su coseno da $\frac{1}{4}$?

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{4} \rightarrow \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x = 30° \rightarrow x = 15° \\ 2x = 150° \rightarrow x = 75° \end{cases}$$

119. Sabiendo que el área de un triángulo rectángulo es 28 cm² y que uno de sus ángulos mide 60°:

a) ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos?

b) Calcula la longitud de sus lados y su perímetro.

a) El ángulo desconocido mide: $90° - 60° = 30°$

b) Tomamos como base y altura los catetos del triángulo rectángulo:

$$28 = \frac{b \cdot a}{2} \rightarrow b = \frac{56}{a}$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\frac{56}{a}}{a} \rightarrow a = \sqrt{\frac{56}{\operatorname{tg} 30°}} = 9{,}85 \text{ cm}$$

$b = 5{,}68$ cm

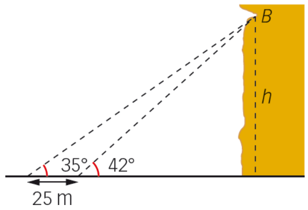
Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa:

$c = \sqrt{9{,}85^2 + 5{,}68^2} = 11{,}37$ cm

Los lados miden 11,37; 5,68 y 9,85 cm.

El perímetro es 26,9 cm.

120. **Observa la situación y, con ayuda de la trigonometría, calcula la altura, *h*, a la que está el punto *B*.**

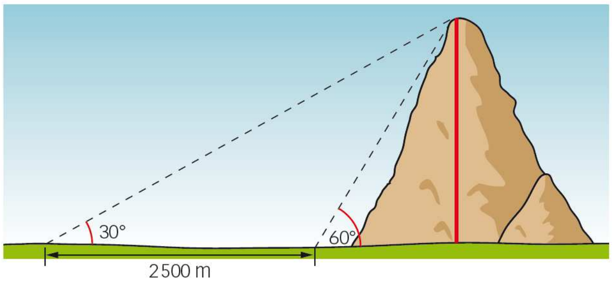


Llamamos h a la altura a la que está B.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 35^\circ = \dfrac{h}{25 + x} \\ tg\ 42^\circ = \dfrac{h}{x} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1{,}11h} h = 17{,}51 + 0{,}63h \to h = 47{,}38 \text{ m}$$

El punto B está a una altura de 47,38 m.

121. **Determina la altura de la montaña de la figura a partir de los datos que se proporcionan.**



$180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ $\qquad$ $180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

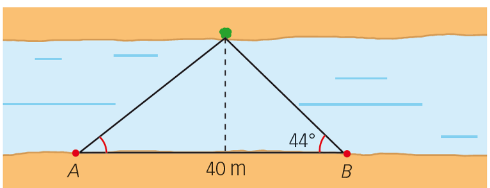
Los ángulos del primer triángulo miden 30°, 120°, 30°.Por el teorema del seno:

$$\frac{2500}{sen\ 30^\circ} = \frac{a}{sen\ 30^\circ} \to a = 2500 \text{ m}$$

Se resuelve el triángulo rectángulo sabiendo que un ángulo mide 60° y su hipotenusa mide 2500 m.

$$\frac{h}{2500} = sen\ 60^\circ \to h = 2\,165{,}06 \text{ m}$$

122. **Dos amigos están separados por una distancia de 40 m y ven un árbol en la orilla opuesta de un río, como indica la figura. Calcula la anchura del río.**

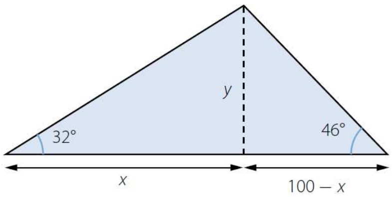


Llamamos h a la anchura del río.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 38^\circ = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 44^\circ = \dfrac{h}{40 - x} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1{,}28h} 38{,}63 - 1{,}24h = h \to h = 17{,}25 \text{ m}$$

La anchura del río es 17,25 m.

123. **Dos focos, situados en el suelo y en lados distintos, iluminan el campanario de una iglesia. La suma de las distancias de los focos hasta el pie de la torre es de 100 m. Si los ángulos que forman los haces de luz con el suelo son de 32° y 46°, respectivamente, ¿qué altura tiene el campanario?**



Llamamos y a la altura del campanario.

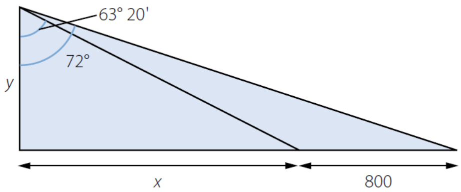
$$\left.\begin{array}{l} tg\ 32° = \dfrac{y}{x} \\ tg\ 46° = \dfrac{y}{100 - x} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1,64} 103,55 - 1,66y = y \rightarrow y = 38,93 \text{ m}$$

La altura del campanario es 38,93 m.

124. **En una colina se ven, en línea recta hacia el este, dos barrios que están separados por 800 m. Desde la cima se observan con ángulos de 18° y 26° 40′, respectivamente.**

a) ¿Cuál es la altura de la colina?

b) ¿A qué distancia se encuentra cada barrio del observador?



a) Llamamos y a la altura de la colina.

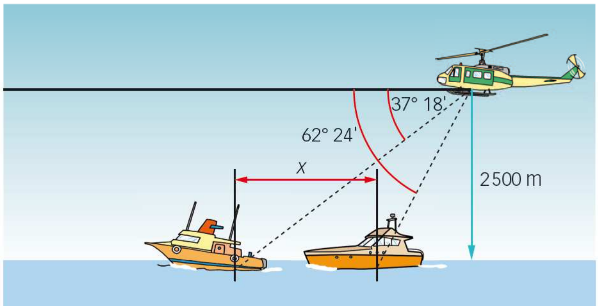
$90° - 18° = 72°$ $\qquad$ $90° - 26°\ 40' = 63°\ 20'$

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 72° = \dfrac{x + 800}{y} \\ tg\ 63°\ 20' = \dfrac{x}{y} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1,99y} 3,08y = 1,99y + 800 \rightarrow y = 735,94 \text{ m}$$

b) $x = 199y = 1\,504,42$ m $\qquad$ $800 + x = 2\,304,42$ m

La distancia del observador a cada barrio es 1 674,78 m y 2 419,18 m, respectivamente.

125. **El piloto de un helicóptero de reconocimiento que vuela sobre el mar a una altura de 2 500 m, divisa dos embarcaciones que se encuentran en un mismo plano vertical, con ángulos de depresión de 62° 24' y 37° 18', respectivamente. Calcula la distancia que separa una embarcación de otra.**



$$a = \frac{2500}{sen(37°18')} = 4125{,}49 \text{ m}$$

Se calculan los ángulos del dibujo:

$62° \, 24' - 37° \, 18' = 25° \, 6'$

$90° - 62° \, 24' = 27° \, 36'$

$180° - 90° - 27° \, 36' = 62° \, 24'$

$180° - 62° \, 24' = 117° \, 36'$

$180° - 117° \, 36' - 25° \, 6' = 37° \, 18'$

Por el teorema del seno:

$$\frac{4125{,}49}{sen\, 117° \, 36'} = \frac{x}{sen\, 25° \, 6'} \rightarrow x = 1974{,}52 \text{ m}$$

126. **Entre las dos plantas de un edificio se tiene que instalar una escalera. La diferencia de altura entre las plantas es de 3,5 m y se dispone de 5 m en horizontal para poner la escalera.**

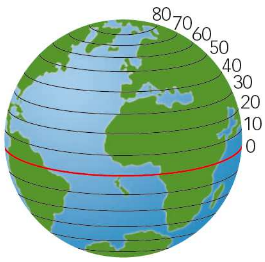
a) ¿Cuál será el ángulo de inclinación de la escalera?

b) ¿Cuál será la longitud de la escalera?

a) $tg\, \alpha = \frac{3{,}5}{5} \rightarrow \alpha = 35°$

b) $sen\, 35° = \frac{3{,}5}{l} \rightarrow l = 6{,}10 \text{ m}$

127. **Calcula la longitud del paralelo 38° norte considerando que el radio de la Tierra es de 6 370 km.**

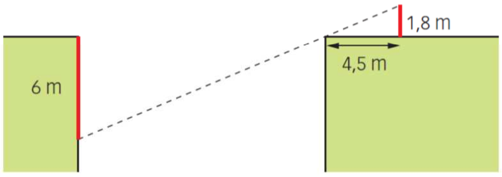


$90° - 38° = 52°$

$r = 6370 \cdot sen\, 52° = 5\,019{,}63 \text{ km}$

$2\pi r = 31539{,}26 \text{ km}$

128. **Esther y María desean medir la anchura de un desfiladero. Para ello se colocan en uno de los bordes del mismo. Esther deja deslizarse una cuerda que tiene 6 m de largo, sosteniéndola desde el borde del precipicio. Por su parte, María, cuyos ojos se hallan a 1,8 m del suelo, debe retirarse 4,5 m para ver el borde más próximo coincidiendo con el final de la cuerda.**



a) ¿Qué anchura tiene el desfiladero?

b) ¿Se podría calcular sin hacer uso de la trigonometría?

Llamamos x a la anchura del desfiladero.

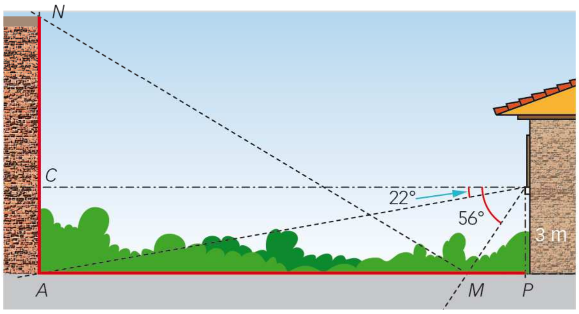
$$tg\ a = \frac{1,8}{4,5} = 0,4$$

$$0,4 = \frac{6}{x} \to x = 15 \text{ m}$$

a) La anchura del desfiladero es 15 m.

b) Se podría aplicar la semejanza de triángulos para resolver el problema.

129. **Desde la ventana de un edificio, situada a 3 m de altura, se ve la base de un edificio con un ángulo de 22° por debajo de la horizontal. La parte superior de ese edificio no se puede ver pero, sin embargo, se observa su reflejo en un estanque con un ángulo de 56° bajo la horizontal. ¿Cuál es la altura de ese edificio? ¿Qué distancia hay entre los dos edificios?**



Sea V el punto que representa la ventana. Entonces:

$$90° - 56° = 34°$$

$$\overline{MP} = 3 \cdot tg\ 34° = 2 \text{ m} \qquad \overline{MV} = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,6 \text{ m}$$

Por el teorema del seno:

$$\frac{3,6}{sen\ 22°} = \frac{\overline{AM}}{sen\ 34°} \to \overline{AM} = 5,4 \text{ m}$$

La distancia entre los dos edificios es: $2 + 5,4 = 7,4$ m

Como el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, se utiliza la semejanza de triángulos para hallar la altura.

$$\frac{3}{\overline{AN}} = \frac{2}{5,4} \to \overline{AN} = 8,1 \text{ m}$$

130. **Las pirámides de Gizeh (Egipto) son de un gran interés arqueológico, artístico e histórico. Estas tres pirámides –Keops, Kefrén y Micerino– fueron construidas por los antiguos egipcios como cámaras mortuorias para los faraones con cuyos nombres se conocen. La mayor de ellas –Keops– fue considerada por los antiguos como una de las siete maravillas del mundo, es una pirámide recta de base cuadrada de 233 m de lado.**

Calcula su altura si al separarse de ella 80 m se ve su vértice con un ángulo 29° 30' con la horizontal.

$$\frac{233}{2} = 116{,}5 \text{ m}$$

$$tg(29^\circ\, 30') = \frac{h}{116{,}5 \text{ m} + 80 \text{ m}} \rightarrow h = 111{,}17 \text{ m}$$

131. **Una casa de planta rectangular mide 12 m de largo y 8 m de ancho. El tejado, con una inclinación de 18°, es una superficie plana inclinada cuya parte más elevada está situada sobre uno de los lados mayores del rectángulo. Calcula el área del tejado.**

Como sabemos que el tejado tiene forma rectangular y que uno de sus lados mide 12 m, hallamos la longitud del otro lado, x.

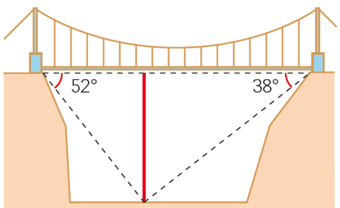
$$\cos 18^\circ = \frac{8}{x} \rightarrow x = 8{,}41 \text{ m}$$

Calculamos el área del tejado:

$$A = 12 \cdot 8{,}41 = 100{,}92 \text{ m}^2$$

El área del tejado es 100,92 m^2.

132. **Calcula la altura a la que caminan los viajeros cuando cruzan un desfiladero por un puente colgante como el de la figura.**



Llamamos y a la altura del puente colgante.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 52^\circ = \dfrac{y}{x} \\[2ex] tg\ 38^\circ = \dfrac{y}{82 - x} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 0{,}78y} 64{,}07 - 0{,}61y = y \rightarrow y = 39{,}8 \text{ m}$$

La altura del puente colgante es 39,8 m.

133. **Demuestra que la suma de las tangentes de los tres ángulos de un triángulo es igual que su producto.**

La suma de los ángulos de un triángulo es 180°.

$a + b + c = 180°$

$tg\, c = tg\,[180° - (a+b)] = -tg\,(a+b) = -\dfrac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a \cdot tg\, b}$

Por tanto, la suma de las tangentes es:

$tg\, a + tg\, b + tg\, c = tg\, a + tg\, b - \dfrac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a \cdot tg\, b}$

$tg\, c = -\dfrac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a \cdot tg\, b} \to tg\, c(1 - tg\, a \cdot tg\, b) = -tg\, a - tg\, b$

$\to tg\, c - tg\, a \cdot tg\, b \cdot tg\, c = -tg\, a - tg\, b$

$\to tg\, a + tg\, b + tg\, c = tg\, a \cdot tg\, b \cdot tg\, c$

134. **Las medidas de los lados de un triángulo son proporcionales a 5, 6 y 7, respectivamente, y su área es $24\sqrt{6}$. Determina la medida de sus lados y de sus ángulos.**

Como los lados son proporcionales, los triángulos son semejantes y sus ángulos son iguales. Aplicamos el teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\widehat{A} \to cos\,\widehat{A} = \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \dfrac{-49 + 36 + 25}{2 \cdot 6 \cdot 5} = 0{,}2$

$\widehat{A} = 78°\ 27'\ 46{,}9''$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\,\widehat{B} \to cos\,\widehat{B} = \dfrac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \dfrac{-36 + 49 + 25}{2 \cdot 7 \cdot 5} = 0{,}5429$

$\widehat{B} = 57°\ 7'\ 7{,}42''$

$\widehat{C} = 180° - 78°\ 27'\ 46{,}9'' - 57°\ 7'\ 7{,}42'' = 44°\ 25'\ 5{,}68''$

Para hallar la longitud de los lados aplicamos la fórmula de Herón.

Si llamamos p al semiperímetro, entonces:

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$a = 5t;\ b = 6t;\ c = 7t;\ p = \dfrac{5t + 6t + 7t}{2} = \dfrac{18t}{2} = 9t$

$24\sqrt{6} = \sqrt{9t(9t - 7t)(9t - 6t)(9t - 5t)} \to 3{,}456 = 9t \cdot 2t \cdot 3t \cdot 4t \to t = 2$

Los lados miden 10, 12 y 14, respectivamente.

135. **Expresa, utilizando razones trigonométricas de grado 1, las siguientes razones trigonométricas.**

a) $cos^2\, x$ b) $sen^2\, x$

a) $cos^2 x = \dfrac{1 + cos\, 2x}{2}$

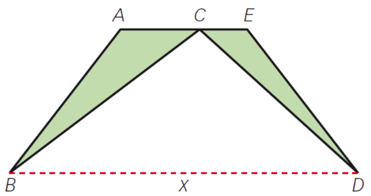
b) $sen^2 x = \dfrac{1 - cos\, 2x}{2}$

136. **En la estructura de la figura los puntos *A*, *C* y *E* están alineados y se conocen los siguientes datos:**

$\overline{AB} = 15$ cm $\overline{AC} = 1$ m $\widehat{C} = 30°$

$\overline{DE} = 2$ m $\widehat{D} = 14°$ $\widehat{E} = 124°$

Halla el valor de *x*.



$180° - 124° - 14° = 42°$

Por el teorema del seno: $\frac{2}{sen\ 42°} = \frac{a}{sen\ 124°} \rightarrow a = 2{,}48$ m

$sen\ 42° = \frac{h}{a} \rightarrow h = 2{,}48 \cdot sen\ 42° = 1{,}66$ m

$cos\ 42° = \frac{b}{a} \rightarrow b = 2{,}48 \cdot cos\ 42° = 1{,}84$ m

$tg\ 60° = \frac{c}{h} \rightarrow c = 1{,}66 \cdot tg\ 60° = 2{,}88$ m

$x = 2{,}88 + 1{,}84 = 4{,}72$ m

137. **Sabemos que $tg\ z = 1{,}5$. Con estos datos, ¿puedes calcular $tg\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$ sin determinar el ángulo z?**

Si aplicas la fórmula del ángulo suma tendrás dificultades. Utiliza esta expresión.

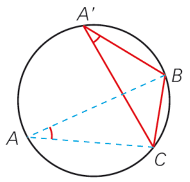
$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$

$$tg\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = tg\left(\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + 1}{1 - tg\left(z + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 + \frac{tg\ z + 1}{1 - tg\ z}}{1 - \frac{tg\ z + 1}{1 - tg\ z}} = \frac{2}{-2\ tg\ z} = -cotg\ z$$

138. **Dos ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco miden igual. Utilízalo para demostrar que:**

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{b}{sen\ \widehat{B}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}}$$

siendo d el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



El triángulo $\widehat{CBA'}$ es recto por ser uno de sus lados el diámetro de la circunferencia.
Los lados opuestos a los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$ son iguales.

Los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{A}'$ son iguales por abarcar el mismo arco, luego sus senos son iguales.

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{a}{sen\ \widehat{A}'} = \frac{a}{\frac{a}{d}} = d$$

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}} = \frac{b}{sen\ \widehat{B}} = d$$

PARA PROFUNDIZAR

139. **Elige la respuesta adecuada.** (Concurso de Primavera)

¿Cuál es el valor de $sen\frac{\pi}{32}\cdot cos\frac{\pi}{32}\cdot cos\frac{\pi}{16}\cdot cos\frac{\pi}{8}\cdot cos\frac{\pi}{4}$?	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
En el triángulo *ABC* se verifica que $cos(2A - B) + sen(A + B) = 2$. Si el lado *AB* mide 4, ¿cuánto mide el lado *BC*?	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$
Un triángulo de lados *a*, *b* y *c* verifica que $(a + b + c)\cdot(a + b - c) = 3ab$. El valor del ángulo opuesto al lado *c* es:	15°	30°	45°	60°	150°
En un triángulo acutángulo, un lado mide 7 m, su ángulo opuesto 60° y otro lado 8 m. ¿Cuántos metros mide el tercer lado?	2	3	4	5	6

- $\left(sen\frac{\pi}{32}\cdot cos\frac{\pi}{32}\right)\cdot cos\frac{\pi}{16}\cdot cos\frac{\pi}{8}\cdot cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\left(sen\frac{\pi}{16}\cdot cos\frac{\pi}{16}\right)\cdot cos\frac{\pi}{8}\cdot cos\frac{\pi}{4}=$

  $=\frac{1}{4}\left(sen\frac{\pi}{8}\cdot cos\frac{\pi}{8}\right)\cdot cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{8}\left(sen\frac{\pi}{4}\cdot cos\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{16}sen\frac{\pi}{2}=\frac{1}{16}$.

- Como el coseno y el seno solo pueden valer como mucho 1:

  $$\left.\begin{array}{l}2A-B\\A+B=90\end{array}\right\}\rightarrow A=30^\circ \qquad B=60^\circ$$

  $$sen\,30^\circ=\frac{\overline{BC}}{4}\rightarrow\overline{BC}=2$$

- $(a+b+c)\cdot(a+b-c)=a^2+b^2-c^2+2ab=3ab$

  $$\left.\begin{array}{l}c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\\c^2=a^2+b^2-ab\end{array}\right\}\rightarrow \cos C=\frac{1}{2}\rightarrow C=60^\circ$$

- $7^2=8^2+x^2-2\cdot8\cdot x\cos60^\circ\rightarrow x^2-8x+15=0\rightarrow x_1=5,\ x_2=3$

  $3^2=7^2+8^2-2\cdot7\cdot8\cdot\cos\alpha\rightarrow\alpha=21{,}79^\circ\rightarrow$ El tercer ángulo no sería agudo.

  $5^2=7^2+8^2-2\cdot7\cdot8\cdot\cos\alpha\rightarrow\alpha=38{,}21^\circ\rightarrow$ Todos los ángulos son agudos.

  El tercer lado mide 5 m.

140. **¿Para qué valores de *k* tiene solución la ecuación $sen\,x\cos x = k$? Acota las posibles soluciones.**

$sen\,x\cdot\cos x=k\rightarrow 2\,sen\,x\cdot\cos x=2k\rightarrow sen\,2x=2k$

Como $sen\,x<|1|\rightarrow\ -\frac{1}{2}\le k\le\frac{1}{2}$

Las soluciones estarán acotadas en $[0°, 180°] + 180°\cdot k$.

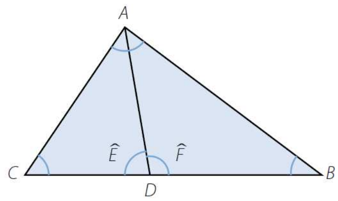
141. **Demuestra que la bisectriz interior del ángulo $\hat{A}$ en el triángulo *ABC* divide el lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados *AB* y *AC*.**

Llamamos *D* al punto de corte de la bisectriz con el lado *CB*.

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{CD}{sen\,\frac{\hat{A}}{2}} = \frac{AD}{sen\,\hat{C}} = \frac{AC}{sen\,\hat{E}} \rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{sen\,\frac{\hat{A}}{2}}{sen\,\hat{E}}$$

$$\frac{DB}{sen\,\frac{\hat{A}}{2}} = \frac{AD}{sen\,\hat{B}} = \frac{AB}{sen\,\hat{F}} \rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{sen\,\frac{\hat{A}}{2}}{sen\,\hat{F}}$$



Como los ángulos son suplementarios, sus senos son iguales.

$$\frac{CD}{AC} = \frac{DB}{AB}$$

142. **De un puerto salen dos barcos con rumbos diferentes. El rumbo de uno de ellos es N 23° E, a una velocidad de 11 millas/h.**

El segundo navega en dirección S 67° E a 15 millas/h.

Calcula, aproximadamente, el rumbo desde el segundo barco hacia el primero, una hora después.

Resuélvelo también en el caso de que el segundo ángulo sea de 77°.

$\omega = 180° - 90° - 67° = 23°$

$\sqrt{11^2 + 15^2} = 18,6$ millas

$sen\,\alpha = \frac{11}{18,6} \rightarrow \alpha = 36,25°$

$\omega + \alpha = 23° + 36,25° = 59,25°$

El rumbo desde el segundo barco hacia el primero será N 59,25ºO.

En el caso de que el segundo ángulo sea de 77º:

$\omega = 180° - 90° - 77° = 13°$

$d^2 = 11^2 + 15^2 - 2 \cdot 11 \cdot 15 \cdot cos\,80° \rightarrow d = 17$ millas

Por el teorema del seno: $\frac{sen\,\alpha}{11} = \frac{sen\,80°}{17} \rightarrow \alpha = 39,59°$

$\omega + \alpha = 13° + 39,59° = 52,59°$

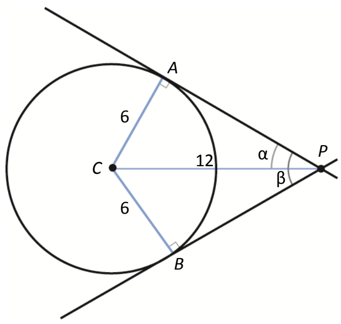
El rumbo desde el segundo barco hacia el primero será N 52,59ºO.

143. **Un punto *P* dista 12 cm del centro de una circunferencia de 6 cm de radio. Averigua el ángulo que forman entre sí las dos tangentes trazadas desde dicho punto a la circunferencia.**

(Premio extraordinario de Bachillerato)

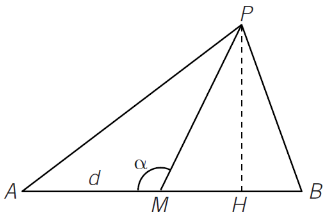
En el triángulo $\widehat{CPA}$ $sen\,\alpha = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 30°$

Como $\beta = 2\alpha \rightarrow \beta = 60°$, que es el ángulo comprendido entre las dos tangentes.



144. **Siendo *M* el punto medio del segmento de extremos *A* y *B*, estudia el lugar geométrico de los puntos *P* del plano, tales que *PM* sea media proporcional entre *PA* y *PB*.**

(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)



PM es una mediana del triángulo $\widehat{PAB}$.

Aplicamos el teorema del coseno en los triángulos $\widehat{PAM}$ y $\widehat{PMB}$:

$$PA^2 = d^2 + PM^2 - 2d \cdot PM \cdot \cos \alpha$$

$$PB^2 = d^2 + PM^2 - 2d \cdot PM \cdot \cos(180° - \alpha) = d^2 + PM^2 + 2d \cdot PM \cdot \cos \alpha$$

Sumando, se obtiene: $PA^2 + PB^2 = 2d^2 + 2PM^2$

Como $PM^2 = PA \cdot PB$, resulta que:

$$PA^2 + PB^2 = 2d^2 + 2PA \cdot PB \rightarrow PA^2 + PB^2 - 2PA \cdot PB = 2d^2 \rightarrow (PA - PB)^2 = 2d^2$$

Por tanto, tenemos que $PA - PB = d\sqrt{2}$, es decir, la diferencia de las distancias de P a los puntos A y B es constante, por lo que el lugar pedido es una hipérbola de focos A y B, luego la distancia focal es $2c = 2d$ y el eje real es $2a = d\sqrt{2}$.

En una hipérbola se verifica que $b^2 = c^2 - a^2$:

$$b^2 = d^2 - \left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{2} \rightarrow 2b = d\sqrt{2}$$

Al ser los dos ejes iguales, la hipérbola es equilátera.

145. **Calcula los valores de los cosenos de los ángulos *x* que satisfacen la siguiente ecuación.**

$$\mathbf{sen^2\, x - 2\cos^2 x + \frac{1}{2} sen\, 2x = 0}$$ (Olimpiadas matemáticas. Fase Nacional)

$$\frac{1-\cos 2x}{2} - 2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) + \frac{1}{2} sen\, 2x = 0$$

$sen\, 2x = -1 + \cos 2x + 2 + 2\cos 2x$ $\qquad$ $3\cos 2x - sen\, 2x + 1 = 0$

Sea $t = \cos 2x$. Entonces: $3t - \sqrt{1-t^2} + 1 = 0 \rightarrow (3t+1)^2 = 1 - t^2 \rightarrow 10t^2 + 6t = 0 \rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = -\frac{3}{5}$

$t_2 = -\frac{3}{5}$ no es solución.

$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} \rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\rightarrow$ Las soluciones son $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

146. **Obtén los dos valores enteros de *x* más próximos a 2013°, tanto por defecto como por exceso, que cumple esta ecuación trigonométrica.**

$$\mathbf{2^{sen^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2\sqrt{2}}$$ (Olimpiadas matemáticas. Fase Nacional)

$$2^{sen^2 x} + 2^{1 - sen^2 x} = 2\sqrt{2}$$

Sea $t = 2^{sen^2 x} \rightarrow t + \frac{2}{t} = 2\sqrt{2} \rightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 2 = 0 \rightarrow t = \sqrt{2}$

$$2^{sen^2 x} = \sqrt{2} \rightarrow sen^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow sen\, x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 45°,\ 135°,\ 225°,\ 315°$$

$$2\,013 = 5 \cdot 360 + 213 = 1800 + 213$$

Aproximación por defecto: $1800° + 135° = 1935°$ $\qquad$ Aproximación por exceso: $1800° + 225° = 2\,025°$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **¿Qué es la fibra óptica? ¿Qué condición cumple el rayo de luz para permanecer en el núcleo hasta el final de la fibra óptica?**

   La fibra óptica es un hilo muy fino de material transparente, vidrio o materiales plásticos, por el que se envían pulsos de luz que representan datos.

   Un haz luminoso cuyo ángulo de incidencia es menor que el ángulo de refracción, permanecerá en el núcleo hasta llegar al final de la fibra óptica.

2. **La conclusión del texto anterior es que un haz luminoso cuyo ángulo de incidencia es menor que el ángulo de refracción, permanecerá en el núcleo hasta llegar al final de la fibra óptica. ¿Cómo se deduce esta conclusión a partir de la ley de Snell?**

   Como $sen\,90° = 1 \rightarrow sen\,\theta_1 = \frac{n_2}{n_1}$

   Pero como $sen\,\theta_1 \leq 1$ es necesario que $n_1 > n_2$ para que haya refracción y cambie de medio.

3. **Investiga y enumera algunas ventajas e inconvenientes de utilizar la fibra óptica en lugar del tradicional cable de cobre.**

   Respuesta abierta. Por ejemplo:

   - Ventajas: Es de menor coste que el cobre y permite la transmisión de una mayor cantidad de datos por unidad de tiempo.
   - Inconvenientes: La fibra es más frágil que el cable de cobre, además su reparación es más difícil en caso de ruptura.

4. **Si el índice de refracción del aire es 1,0003 y el ángulo límite a la entrada de una fibra óptica es 41,8°, ¿cuál será entonces el índice de refracción del material que forma la fibra óptica?**

   $n_2 = \frac{1{,}0003}{sen\,41{,}8°} = 1{,}5$

Números complejos

ACTIVIDADES

1. Escribe estos números como números complejos.

a) $\sqrt{-3}$ b) $\sqrt[4]{-16}$ c) 3 d) -3

a) $\sqrt{-3}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{3}\,i$

b) $\sqrt[4]{-16}=\sqrt{4i}=2\sqrt{i}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$

c) $3=3+0i$

d) $-3=-3+0i$

2. Halla *a* y *b* para que sean ciertas las siguientes igualdades.

a) $2+3bi=a-1$ b) $4a-2b=2-ai$

a) $a=2+1=3$ $b=0$

b) $a=0$ $4a-2b=2\rightarrow b=-1$

3. Dado el número complejo $z=-2x+\frac{y}{2}i$, determina el valor de *x* e *y* para que sea:

a) Un número real.
b) Un número imaginario puro.
c) Un número complejo que no sea real ni imaginario puro.

a) $y=0$ b) $x=0$ c) $x\neq 0,\ y\neq 0$

4. Halla el opuesto y el conjugado de los siguientes números complejos.

a) $\sqrt{2}-3i$ c) $3-2i$ e) $\frac{3}{5}i$ g) 0

b) $\frac{2}{3}-\frac{1}{5}i$ d) $-3+\frac{2}{5}i$ f) -7 h) $-2i$

a) Opuesto: $-\sqrt{2}+3i$ Conjugado: $\sqrt{2}+3i$

b) Opuesto: $-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}i$ Conjugado: $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}i$

c) Opuesto: $-3+2i$ Conjugado: $3+2i$

d) Opuesto: $3-\frac{2}{5}i$ Conjugado: $-3-\frac{2}{5}i$

e) Opuesto: $-\frac{3}{5}i$ Conjugado: $-\frac{3}{5}i$

f) Opuesto: 7 Conjugado: -7

g) Opuesto: 0 Conjugado: 0

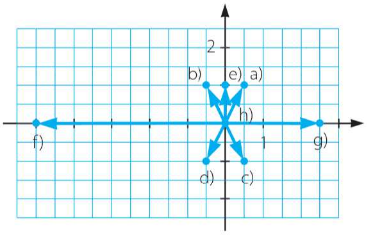
h) Opuesto: $2i$ Conjugado: $2i$

5. Representa gráficamente los siguientes números complejos.

a) $\frac{1}{2}+i$ c) $\frac{1}{2}-i$ e) i g) $\frac{5}{2}$

b) $-\frac{1}{2}+i$ d) $-\frac{1}{2}-i$ f) -5 h) 0

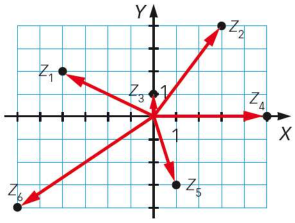
Ahora contesta, ¿dónde estará situado un número real? ¿Y si el número es imaginario puro?



Un número real estará situado en el eje de abscisas.

Un número imaginario puro se situará en el eje de ordenadas.

6. **Escribe los números complejos representados gráficamente.**



$z_1 = -4 + 2i$ $\quad z_3 = i$ $\quad z_5 = 1 - 3i$

$z_2 = 3 + 4i$ $\quad z_4 = 5$ $\quad z_6 = 6 - 4i$

7. **Resuelve las siguientes operaciones.**

a) $(-1 - i) + (-4 + 5i)$ c) $(-1 - i)(-4 + 5i)$

b) $\dfrac{-1 - i}{-4 + 5i}$ d) $\dfrac{(-2 + i)(1 + 3i)}{-1 + 2i} - 2i$

a) $(-1 - i) + (-4 + 5i) = -5 + 4i$

b) $\dfrac{-1 - i}{-4 + 5i} = \dfrac{(-1 - i)(-4 - 5i)}{(-4 + 5i)(-4 - 5i)} = \dfrac{-1 + 9i}{41}$

c) $(-1 - i)(-4 + 5i) = 4 - 5i + 4i + 5 = 9 - i$

d) $\dfrac{(-2 + i)(1 + 3i)}{-1 + 2i} - 2i = \dfrac{(-5 - 5i)(-1 - 2i)}{(-1 + 2i)(-1 - 2i)} - 2i = 3 - i - 2i = 3 - 3i$

8. **Halla el inverso de los números complejos que aparecen a continuación.**

a) i c) $-1 - i$ e) $4 - 3i$

b) $3 + 4i$ d) $i + 3$ f) $6 + 5i$

a) $\dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{-i}{-i} = \dfrac{-i}{1} = -i$

b) $\dfrac{1}{3 + 4i} = \dfrac{1}{3 + 4i} \cdot \dfrac{3 - 4i}{3 - 4i} = \dfrac{3 - 4i}{25}$

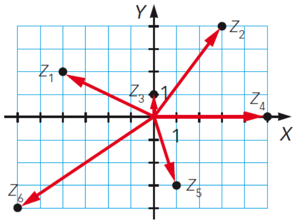
c) $\dfrac{1}{-1 - i} \cdot \dfrac{-1 + i}{-1 + i} = \dfrac{-1 + i}{2}$

d) $\dfrac{1}{i + 3} = \dfrac{1}{i + 3} \cdot \dfrac{-i + 3}{-i + 3} = \dfrac{-i + 3}{10}$

e) $\dfrac{1}{4 - 3i} = \dfrac{1}{4 - 3i} \cdot \dfrac{4 + 3i}{4 + 3i} = \dfrac{4 + 3i}{25}$

f) $\dfrac{1}{6 + 5i} = \dfrac{1}{6 + 5i} \cdot \dfrac{6 - 5i}{6 - 5i} = \dfrac{6 - 5i}{61}$

6. **Escribe los números complejos representados gráficamente.**



$$Z_1 \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13} \\ tg\ \alpha = \dfrac{2}{-3} \rightarrow \alpha = 146{,}31^\circ \end{cases} \rightarrow Z_1 = \sqrt{13}_{146{,}31^\circ}$$

$$Z_4 \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{4^2} = 4 \\ \alpha = 0^\circ \end{cases} \rightarrow Z_4 = 4_{0^\circ}$$

$$Z_2 \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{1^2} = 1 \\ \alpha = 90^\circ \end{cases} \rightarrow Z_2 = 1_{90^\circ}$$

$$Z_5 \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \\ tg\ \alpha = \dfrac{-2}{1} \rightarrow \alpha = 296{,}57^\circ \end{cases} \rightarrow Z_5 = \sqrt{5}_{296{,}57^\circ}$$

$$Z_3 \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \\ tg\ \alpha = \dfrac{2}{3} \rightarrow \alpha = 33{,}7^\circ \end{cases} \rightarrow Z_3 = \sqrt{13}_{33{,}7^\circ}$$

$$Z_6 \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ tg\ \alpha = \dfrac{-2}{-4} \rightarrow \alpha = 206{,}57^\circ \end{cases} \rightarrow Z_6 = 2\sqrt{5}_{206{,}57^\circ}$$

10. **Expresa en forma polar.**

a) $2 + i$ c) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ e) $-4i$

b) $-2 - i$ d) $2 - \sqrt{3}i$ f) 12

a) $2 + i = \sqrt{5}_{26^\circ 33' 54{,}2''}$

b) $-2 - i = \sqrt{5}_{206^\circ 33' 54''}$

c) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i = \dfrac{\sqrt{2}}{2}_{135^\circ}$

d) $2 - \sqrt{3}i = \sqrt{7}_{310^\circ 53' 36{,}2''}$

e) $-4i = 4_{270^\circ}$

f) $12 = 12_{0^\circ}$

11. **Expresa en formas binómica y trigonométrica.**

a) 1_{120° b) 3_{240° c) $2_{\frac{\pi}{3}}$ d) $3_{\frac{3\pi}{2}}$

a) $1_{120^\circ} = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = (\cos 120^\circ + i\ sen\ 120^\circ)$

b) $3_{240^\circ} = \left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 3\,(\cos 240^\circ + i\ sen\ 240^\circ)$

c) $2_{\frac{\pi}{3}} = \left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos \dfrac{\pi}{3} + i\ sen\dfrac{\pi}{3}\right)$

d) $3_{\frac{3\pi}{2}} = (0, -3) = 3\left(\cos \dfrac{3\pi}{2} + i\ sen\dfrac{3\pi}{2}\right)$

12. **Expresa en forma polar y trigonométrica.**

a) $3 - 4i$ b) $2 + 2i$ c) $-\sqrt{3} + i$ d) $-1 - i$

a) $3-4i = 5_{306,9^\circ} = 5(\cos 306,9^\circ + i \operatorname{sen} 306,9^\circ)$

b) $2+2i = 2\sqrt{2}_{45^\circ} = 2\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$

c) $-\sqrt{3}+i = 2_{150^\circ} = 2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$

d) $-1-i = \sqrt{2}_{225^\circ} = \sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ)$

13. **Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en forma polar.**

a) $4_{120^\circ} \cdot 3_{60^\circ}$ c) $1_{260^\circ} : 6_{120^\circ}$ e) $3_{100^\circ} : 3_{40^\circ}$

b) $2_{230^\circ} \cdot 3_{130^\circ}$ d) $4_{0^\circ} : 2_{180^\circ}$ f) $1_{260^\circ} \cdot 6_{120^\circ}$

a) $4_{120^\circ} \cdot 3_{60^\circ} = (4 \cdot 3)_{120^\circ + 60^\circ} = 12_{180^\circ}$

b) $2_{230^\circ} \cdot 3_{130^\circ} = (2 \cdot 3)_{230^\circ + 130^\circ} = 6_{360^\circ} = 6_{0^\circ}$

c) $1_{260^\circ} : 6_{120^\circ} = \left(\frac{1}{6}\right)_{260^\circ - 120^\circ} = \left(\frac{1}{6}\right)_{140^\circ}$

d) $4_{0^\circ} : 2_{180^\circ} = \left(\frac{4}{2}\right)_{360^\circ - 180^\circ} = 2_{180^\circ}$

e) $3_{100^\circ} : 3_{40^\circ} = \left(\frac{3}{3}\right)_{100^\circ - 40^\circ} = 1_{60^\circ}$

f) $1_{260^\circ} \cdot 6_{120^\circ} = (1 \cdot 6)_{260^\circ + 120^\circ} = 6_{20^\circ}$

14. **Dados estos números complejos, calcula.**

$z_1 = 1_{210^\circ}$ $z_2 = 3\,[\cos(-30^\circ) + i \operatorname{sen}(-30^\circ)]$

a) $\dfrac{z_1}{z_2}$ b) $\dfrac{(z_1)^2 \cdot \overline{z}_2}{z_2}$

$z_1 = 1_{210^\circ}$ $z_2 = 3_{330^\circ}$

a) $\dfrac{1_{210^\circ}}{3_{330^\circ}} = \dfrac{1}{3_{240^\circ}}$

b) $\dfrac{(1_{210^\circ})^2 \cdot 3_{30^\circ}}{3_{330^\circ}} = \dfrac{1_{420^\circ} \cdot 3_{30^\circ}}{3_{330^\circ}} = \dfrac{3_{450^\circ}}{3_{330^\circ}} = 1_{120^\circ}$

15. **Realiza estas operaciones.**

a) $(3_{45^\circ})^2$ c) $\left(2_{\frac{\pi}{6}}\right)^6$ e) $(4_{330^\circ})^3$

b) $(3 - 3i)^5$ d) $\left(\sqrt{5} + \sqrt{5}\,i\right)^8$ f) $(-3i)^5$

a) $\left(3_{45^\circ}\right)^2 = 3^2_{2 \cdot 45^\circ} = 9_{90^\circ} = 9i$

b) $(3-3i)^5 = \left(3\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^5 = \left(3\sqrt{2}\right)^5_{5 \cdot 315^\circ} = 972\sqrt{2}_{135^\circ}$

c) $\left(2_{\frac{\pi}{6}}\right)^6 = 2^6_{6 \cdot \frac{\pi}{6}} = 64_{\pi} = -64$

d) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}i\right)^8 = \left(\sqrt{10}_{45^\circ}\right)^8 = \sqrt{10^8}_{8 \cdot 45^\circ} = 10\,000_{360^\circ} = 10\,000$

e) $\left(4_{330^\circ}\right)^3 = 64_{3 \cdot 330^\circ} = 64_{270^\circ} = -64i$

f) $(-3i)^5 = \left(3_{270^\circ}\right)^5 = 3^5_{5 \cdot 270^\circ} = 243_{270^\circ} = -243i$

16. **Resuelve [16 (*cos* 60° + *i sen* 60°)] · $(2_{210°})^4$.**

[16 (*cos* 60° + *i sen* 60°)] · $(2_{210°})^4 = 16_{60°} \cdot 16_{840°} = 256_{900°} = 256_{180°}$

17. **Utilizando la fórmula de De Moivre, expresa *cos* 3α y *sen* 3α en función de *cos* α y *sen* α.**

Consideramos un número complejo de módulo la unidad:

$(1_\alpha)^3 = (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\,\text{sen}\,3\alpha$

Desarrollamos la primera parte de la igualdad:

$\cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha - i\,\text{sen}^3\alpha =$
$= (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha) + (3\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}^3\alpha)i$

Igualamos este resultado con la segunda parte de la igualdad:

$(\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha) + (3\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}^3\alpha)i = \cos 3\alpha + i\,\text{sen}\,3\alpha$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias resulta:

$$\begin{cases} \cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha \\ \text{sen}\,3\alpha = 3\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}^3\alpha \end{cases}$$

18. **Calcula las siguientes raíces.**

a) $\sqrt{3_{150°}}$

b) $\sqrt[3]{-27}$

c) $\sqrt[4]{-i}$

d) $\sqrt[3]{-1+i}$

a) $\sqrt{3_{150°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuadrada del módulo: $\sqrt{3}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{150° + 0 \cdot 360°}{2} = 75°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{150° + 1 \cdot 360°}{2} = 255°$$

Por tanto, las raíces son $\sqrt{3}_{75°}$ y $\sqrt{3}_{255°}$.

b) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: 3.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180° + 0 \cdot 360°}{3} = 60°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180° + 1 \cdot 360°}{3} = 180°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{180° + 2 \cdot 360°}{3} = 300°$$

Por tanto, las raíces son $3_{60°}$, $3_{180°} = -3$ y $3_{300°}$.

c) $\sqrt[4]{-i} = \sqrt[4]{1_{270°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta del módulo: 1.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{270° + 0 \cdot 360°}{4} = 67°\,30'$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{270° + 1 \cdot 360°}{4} = 157°\,30'$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{270° + 2 \cdot 360°}{4} = 247°\,30'$$

$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{270° + 3 \cdot 360°}{4} = 337°\,30'$$

Por tanto, las raíces son $1_{67°\,30'}$, $1_{157°\,30'}$, $1_{247°\,30'}$ y $1_{337°\,30'}$.

d) $\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{135°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: $\sqrt[6]{2}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{135° + 0 \cdot 360°}{3} = 45°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{135° + 1 \cdot 360°}{3} = 165°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{135° + 2 \cdot 360°}{3} = 285°$$

Por tanto, las raíces son $\sqrt[6]{2}_{45°}$, $\sqrt[6]{2}_{165°}$ y $\sqrt[6]{2}_{285°}$.

19. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $z^3 - 1 = 0$ c) $z^4 + 16 = 0$

b) $z^5 + 32 = 0$ d) $z^4 - 81 = 0$

a) $z^3 - 1 = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{1_{0°}}$

El módulo de las soluciones será 1.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = 0°$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{0° + 1 \cdot 360°}{3} = 120°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{0° + 2 \cdot 360^0}{3} = 240°$$

Por tanto, las raíces de z son $1_{0°}$, $1_{120°}$, $1_{240°}$.

b) $z^5 + 32 = 0 \rightarrow z = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32_{180^\circ}}$

El módulo de las soluciones será 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{5} = 108^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{180^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{5} = 180^\circ$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{180^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{5} = 252^\circ$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \frac{180^\circ + 4 \cdot 360^\circ}{5} = 324^\circ$

Por tanto, las raíces de z son 2_{36°, 2_{108°, 2_{180°, 2_{252°, 2_{324°.

c) $z^4 + 16 = 0 \rightarrow z = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^\circ}}$

El módulo de las soluciones será 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180^\circ + 360^\circ}{4} = 135^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{180^\circ + 360^\circ \cdot 2}{4} = 225^\circ$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{180^\circ + 360^\circ \cdot 3}{4} = 315^\circ$

Por tanto, las raíces de z son 2_{45°, 2_{135°, 2_{225°, 2_{315°.

d) $z^4 - 81 = 0 \rightarrow z = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{81_{0^\circ}}$

El módulo de las soluciones será 3.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = 0^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{360^\circ \cdot 2}{4} = 180^\circ$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_3 = \frac{360^\circ \cdot 3}{4} = 270^\circ$

Por tanto, las raíces de z son 3_{0°, 3_{90°, 3_{180°, 3_{270°.

20. **Calcula y representa las raíces cúbicas de este número.**

$$\frac{1+i}{-1-i}$$

$$\frac{1+i}{-1-i} = \frac{(1+i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{-1-1}{1+1} = -1 = 1_{180°}$$

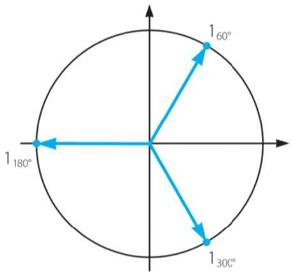
Módulo: $\sqrt[3]{1} = 1$

Argumentos:

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{180° + 0 \cdot 360°}{3} = 60°$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{180° + 1 \cdot 360°}{3} = 180°$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{180° + 2 \cdot 360°}{3} = 300°$



Por tanto, las raíces son $1_{60°}$, $1_{180°}$ y $1_{300°}$.

21. **Un cuadrado, con centro en el origen de coordenadas, tiene uno de sus vértices en el punto $A(3, 2)$. Determina los demás vértices.**

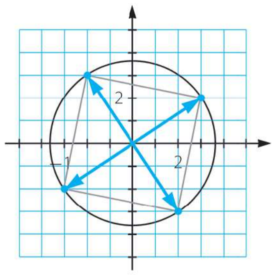
Calculamos las raíces cuartas de $3 + 2i$.

Módulo: $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Argumentos: $tg\ \alpha = \dfrac{2}{3} \rightarrow \alpha = 33°\ 41'\ 24{,}2''$

Sumamos 90° al argumento de cada vértice para obtener el siguiente.

Por tanto, las raíces son $\sqrt{13}_{33°\ 41'\ 24{,}2''}$, $\sqrt{13}_{123°\ 41'\ 24{,}2''}$, $\sqrt{13}_{213°\ 41'\ 24{,}2''}$ y $\sqrt{13}_{303°\ 41'\ 24{,}2''}$.



SABER HACER

22. Resuelve las ecuaciones y expresa sus soluciones con números complejos.

a) $x^2 + 2x + 2 = 0$

b) $x^2 + 6x + 10 = 0$

c) $x^2 + 10x + 29 = 0$

d) $x^2 - 10x + 26 = 0$

a) $x^2+2x+2=0 \rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=-1\pm i$

b) $x^2+6x+10=0 \rightarrow x=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-40}}{2}=-3\pm i$

c) $x^2+10x+29=0 \rightarrow x=\dfrac{-10\pm\sqrt{100-116}}{2}=-5\pm 2i$

d) $x^2-10x+26=0 \rightarrow x=\dfrac{10\pm\sqrt{100-104}}{2}=5\pm i$

23. Calcula estas operaciones.

a) $\dfrac{i^{241}}{1-i} - \dfrac{2i^{42}}{1+i^9} + i^{83}$ b) $i^{333} - \dfrac{i^{27}}{1-i^{27}} + \dfrac{i^{72}}{1-i^{25}}$

a) $\dfrac{i^{241}}{1-i}-\dfrac{2i^{42}}{1+i^9}+i^{83}=\dfrac{i}{1-i}-\dfrac{-2}{1+i}-i=\dfrac{i(1+i)+2(1-i)-i(1-i^2)}{1-i^2}=\dfrac{1-3i}{2}$

b) $i^{333}-\dfrac{i^{27}}{1-i^{27}}+\dfrac{i^{72}}{1-i^{25}}=i-\dfrac{-i}{1-(-i)}+\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{i(1-i^2)+i(1-i)+(1+i)}{2}=1+2i$

24. Halla los inversos de estos números complejos.

a) $z = 2 - 2i$ b) $z = -1 + i$ c) $z = 1 + 4i$

a) $\dfrac{1}{2-2i}\cdot\dfrac{2+2i}{2+2i}=\dfrac{2+2i}{8}=\dfrac{1+i}{4}$

b) $\dfrac{1}{-1+i}\cdot\dfrac{-1-i}{-1-i}=\dfrac{-1-i}{2}$

c) $\dfrac{1}{1+4i}\cdot\dfrac{1-4i}{1-4i}=\dfrac{1-4i}{17}$

25. Resuelve las ecuaciones sabiendo que *z* es un número complejo.

a) $\dfrac{3 - z\cdot i + 2i}{2} = z + i$ b) $\dfrac{5 + 2z\cdot i - 4i}{3} = z - 2i$

a) $3-z\cdot i+2i=2z+2i \rightarrow 3=2z+zi \rightarrow z=\dfrac{3}{2+i} \rightarrow z=\dfrac{3}{2+i}\cdot\dfrac{2-i}{2-i}=\dfrac{6-3i}{5}$

b) $5+2z\cdot i-4i=3z-6i \rightarrow 5+2i=z(3-2i) \rightarrow z=\dfrac{5+2i}{3-2i} \rightarrow z=\dfrac{5+2i}{3-2i}\cdot\dfrac{3+2i}{3+2i}=\dfrac{11+16i}{13}$

26. **Calcula los conjugados de los siguientes números escritos en forma polar.**

a) $2_{33°}$ b) $3_{22°}$ c) $1_{105°}$ d) $2_{222°}$

a) El conjugado de $2_{33°}$ es $2_{-33°} = 2_{327°}$.

b) El conjugado de $3_{22°}$ es $3_{-22°} = 3_{338°}$.

c) El conjugado de $1_{105°}$ es $1_{-105°} = 1_{255°}$.

d) El conjugado de $2_{222°}$ es $2_{-222°} = 2_{138°}$.

27. **Calcula los opuestos de los siguientes números escritos en forma polar.**

a) $2_{33°}$ b) $3_{22°}$ c) $1_{105°}$ d) $2_{222°}$

a) El opuesto de $2_{33°}$ es $2_{33° + 180°} = 2_{213°}$.

b) El opuesto de $3_{22°}$ es $3_{22° + 180°} = 3_{202°}$.

c) El opuesto de $1_{105°}$ es $1_{105° + 180°} = 1_{285°}$.

d) El opuesto de $2_{222°}$ es $2_{222° + 180°} = 2_{42°}$.

28. **Calcula los inversos de los siguientes números complejos en forma polar.**

a) $2_{33°}$ b) $3_{22°}$ c) $1_{105°}$ d) $2_{222°}$

a) El inverso de $2_{33°}$ es $\left(\frac{1}{2}\right)_{-33°} = \left(\frac{1}{2}\right)_{327°}$.

b) El inverso de $3_{22°}$ es $\left(\frac{1}{3}\right)_{-22°} = \left(\frac{1}{3}\right)_{338°}$.

c) El inverso de $1_{105°}$ es $1_{-105°} = 1_{255°}$.

d) El inverso de $2_{222°}$ es $\left(\frac{1}{2}\right)_{-222°} = \left(\frac{1}{2}\right)_{138°}$.

29. **Resuelve estas operaciones.**

a) $2_{30°} + 3_{135°} - 3_{270°}$ b) $1_{45°} + 1_{135°} + 1_{225°} + 1_{315°}$

a) $((2\,cos\ 30° + i\ 2\ sen\ 30°) + (3\ cos\ 135° + i\ 3\ sen\ 135°)) - (3\ cos\ 270° + i\ 3\ sen\ 270°) =$

$$= \left(\sqrt{3} + i - \frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) - (-3i) = \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{2}}{2} + i\left(4 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

b) $(cos\ 45° + i\ sen\ 45°) + (cos\ 135° + i\ sen\ 135°) + (cos\ 225° + i\ sen\ 225°) + (cos\ 315° + i\ sen\ 315°) =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

30. **Calcula.**

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4\left(-\sqrt{7}-\sqrt{7}i\right)^2}{\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^3}$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4\left(-\sqrt{7}-\sqrt{7}i\right)^2}{\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^3}=\frac{\left(1_{120°}\right)^4\left(\sqrt{14}_{225°}\right)^2}{\left(\left(\frac{1}{2}\right)_{60°}\right)^3}=\frac{1_{120°}14_{90°}}{\left(\frac{1}{8}\right)_{180°}}=\frac{14_{210°}}{\left(\frac{1}{8}\right)_{180°}}=112_{30°}$$

31. **Determina las coordenadas de los vértices del triángulo *ABC* sabiendo que son los afijos de las raíces cúbicas de -27.**

$\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{27_{180°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica de 27, que es 3.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k=0\ \rightarrow\ \beta_1=\frac{180°}{3}=60°$

Si $k=1\ \rightarrow \beta_2=\frac{180°+360°\cdot 1}{3}=180°$

Si $k=2\ \rightarrow \beta_3=\frac{180°+360°\cdot 2}{3}=300°$

Por tanto, las raíces son $3_{60°}$, $3_{180°}$, $3_{300°}$.

Las coordenadas de los vértices son:

$A(3\cos 60°, 3\operatorname{sen} 60°)=\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$B(3\cos 180°, 3\operatorname{sen} 180°)=(-3, 0)$

$C(3\cos 300°, 3\operatorname{sen} 300°)=\left(\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

32. **Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones.**

a) $z^4-16=0$ b) $z^3+8=0$ c) $z^4-9=0$ d) $z^3+9=0$

a) $z=\sqrt[4]{16_{0°}}\rightarrow z_1=2_{0°}, z_2=2_{90°}, z_3=2_{180°}, z_4=2_{270°}$

b) $z=\sqrt[3]{8_{180°}}\rightarrow z_1=2_{60°}, z_2=2_{180°}, z_3=2_{300°}$

c) $z=\sqrt[4]{9_{0°}}\rightarrow z_1=\sqrt{3}_{0°},\ z_2=\sqrt{3}_{90°},\ z_3=\sqrt{3}_{180°},\ z_4=\sqrt{3}_{270°}$

d) $z=\sqrt[3]{9_{180°}}\rightarrow z_1=\sqrt[3]{9}_{60°},\ z_2=\sqrt[3]{9}_{180°},\ z_3=\sqrt[3]{9}_{300°}$

ACTIVIDADES FINALES

33. **Expresa estos números complejos en forma binómica.**

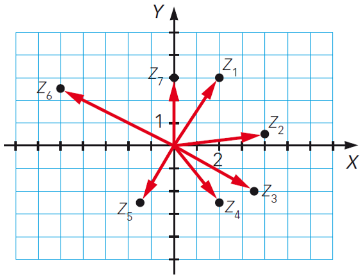
a) $\sqrt{-16}+3$ b) $-2-\sqrt{-4}$ c) $\sqrt{-8}+\sqrt{2}$

a) $\sqrt{-16}+3=3+4i$

b) $-2-\sqrt{-4}=-2-2i$

c) $\sqrt{-8}+\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{8}\,i$

34. **Expresa en forma binómica estos números complejos.**



$Z_1=2+3i$

$Z_2=4+\frac{1}{2}i$

$Z_3=\frac{7}{2}-2i$

$Z_4=2-\frac{5}{2}i$

$Z_5=\frac{-3-5i}{2}$

$Z_6=-5+\frac{5}{2}i$

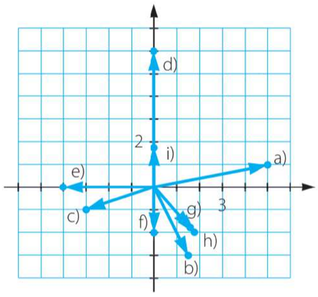
$Z_7=3i$

35. **Representa estos números en el plano complejo.**

a) $5+i$ d) $6i$ g) $\frac{3}{2}-\frac{5}{3}i$

b) $\sqrt{2}-3i$ e) -4 h) $\sqrt{3}-2i$

c) $-3-i$ f) $-2i$ i) $\sqrt{3}\,i$



36. **Resuelve las siguientes ecuaciones y expresa sus soluciones mediante números complejos.**

a) $x^2 + 7 = -42$
b) $-x^2 - 64 = 0$
c) $1 - (-x^2) = -120$
d) $-3 + x^2 = 2x^2 + 1$
e) $(x - 10)^2 = -20x$

a) $x^2 = -49 \to x = \pm\sqrt{-49} = \pm 7i$

b) $x^2 = -64 \to x = \pm\sqrt{-64} = \pm 8i$

c) $x^2 = -121 \to x = \pm\sqrt{-121} = \pm 11i$

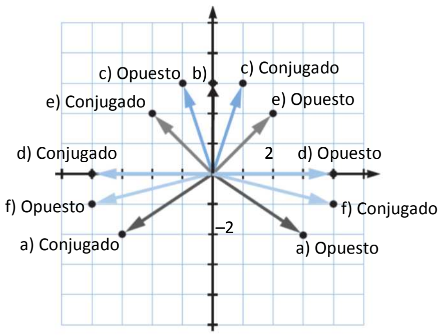
d) $x^2 = -4 \to x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

e) $x^2 = -100 \to x = \pm\sqrt{-100} = \pm 10i$

37. **Escribe y dibuja el conjugado y el opuesto de los siguientes números complejos.**

a) $-3 + 2i$
b) $-3i$
c) $1 - 3i$
d) -4
e) $-2 - 2i$
f) $4 + i$

a) Conjugado: $-3 - 2i$	Opuesto: $3 - 2i$	d) Conjugado: -4	Opuesto: 4
b) Conjugado: $3i$	Opuesto: $3i$	e) Conjugado: $-2 + 2i$	Opuesto: $2 + 2i$
c) Conjugado: $1 + 3i$	Opuesto: $-1 + 3i$	f) Conjugado: $4 - i$	Opuesto: $-4 - i$



38. **Escribe el conjugado y el opuesto de los siguientes números complejos.**

$$2 - 3i \qquad 3 - 2i \qquad -2 + i$$

A la vista de estos ejemplos deduce:

a) ¿Cómo es la representación del conjugado de un número complejo?
b) ¿Cómo es la representación del opuesto de un número complejo?

- $2 - 3i \to$ Conjugado: $2 + 3i$ Opuesto: $-2 + 3i$
- $3 - 2i \to$ Conjugado: $3 + 2i$ Opuesto: $-3 + 2i$
- $-2 + i \to$ Conjugado: $-2 - i$ Opuesto: $2 - i$

a) Es simétrica respecto del eje X.

b) Es simétrica respecto del origen de coordenadas.

39. **Calcula el valor de k para que el número $k + (k - 3)i$ cumpla las siguientes condiciones.**

a) Sea un número imaginario puro.

b) Sea un número real.

a) $k = 0$ b) $k - 3 = 0 \rightarrow k = 3$

40. **Calcula y representa en el plano complejo los números $i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, \ldots$**

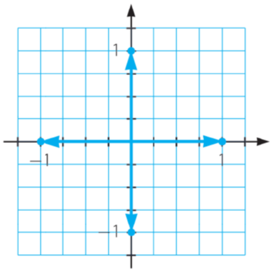
Investiga también lo que ocurre con $i^{-1}, i^{-2}, i^{-3}, i^{-4}, i^{-5}, i^{-6}, \ldots$

$i^{4n-3} = i$ $i^{-4n+3} = -i$

$i^{4n-2} = -1$ $i^{-4n+2} = -1$

$i^{4n-1} = -i$ $i^{-4n+1} = i$

$i^{4n} = 1$ $i^{-4n} = 1$



41. **Calcula el resultado de estas operaciones.**

a) $(4 - i) + (-2 + 3i)$

b) $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}i\right)$

c) $5 - (2 - i)$

d) $\left(\frac{2}{5} - i\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}i\right)$

a) $2 + 2i$ b) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4}i$ c) $3 + i$ d) $\frac{11}{15} - \frac{7}{5}i$

42. **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $(3 - 5i) + (2 - 7i) + (-4 + 8i)$

b) $(-1 + 2i) - (3 + 6i) - (-4 - i)$

c) $-(1 - 2i) - (-7i) - (-4 - 3i)$

d) $2(1 - 4i) - 2(1 + 4i) - 3(4 - 4i)$

e) $2\left(\sqrt{3} + i\right) - 3\left(2\sqrt{3} + 4i\right)$

f) $\left(\sqrt{2} - 3i\right) + 2\left(2 - \sqrt{3}i\right)$

a) $(3 - 5i) + (2 - 7i) + (-4 + 8i) = 1 - 4i$

b) $(-1 + 2i) - (3 + 6i) - (-4 - i) = (-1 + 2i) + (-3 - 6i) + (4 + i) = -3i$

c) $-(1 - 2i) - (-7i) - (-4 - 3i) = (-1 + 2i) + (7i) + (4 + 3i) = 3 + 12i$

d) $2(1 - 4i) - 2(1 + 4i) - 3(4 - 4i) = -12 - 4i$

e) $2\left(\sqrt{3} + i\right) - 3\left(2\sqrt{3} + 4i\right) = \left(2\sqrt{3} + 2i\right) + \left(-6\sqrt{3} - 12i\right) = -4\sqrt{3} - 10i$

f) $\left(\sqrt{2} - 3i\right) + 2\left(2 - \sqrt{3}i\right) = \left(\sqrt{2} - 3i\right) + \left(4 - 2\sqrt{3}i\right) = \left(\sqrt{2} + 4\right) - \left(3 + 2\sqrt{3}\right)i$

43. **Calcula estos productos y potencias.**

a) $(1 - 3i)(2 - 6i)$
b) $(-3 - 4i)(7 - i)$
c) $(-2 + 5i)^2$
d) $(5 - 4i)(5 + 4i)$
e) $\left(-3 - 2\sqrt{2}\,i\right)\left(-3 + 2\sqrt{2}\,i\right)$
f) $\left(\sqrt{2} - i\right)^3$

a) $(1 - 3i)(2 - 6i) = 2 - 6i - 6i - 18 = -16 - 12i$

b) $(-3 - 4i)(7 - i) = -21 + 3i - 28i - 4 = -25 - 25i$

c) $(-2 + 5i)^2 = 4 - 25 - 20i = -21 - 20i$

d) $(5 - 4i)(5 + 4i) = 25 + 16 = 41$

e) $\left(-3 - 2\sqrt{2}\,i\right)\left(-3 + 2\sqrt{2}\,i\right) = 9 + 8 = 17$

f) $\left(\sqrt{2} - i\right)^3 = \sqrt{2^3} - 6i - 3\sqrt{2} + i = -\sqrt{2} - 5i$

44. **Efectúa las siguientes divisiones.**

a) $\dfrac{-1 + 5i}{3 - 2i}$
b) $\dfrac{20 + 40i}{8 + 6i}$
c) $\dfrac{-1 + 5i}{2 - i}$

a) $\dfrac{-1+5i}{3-2i} = \dfrac{(-1+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \dfrac{-3-2i+15i-10}{9+4} = \dfrac{-13+13i}{13} = -1+i$

b) $\dfrac{20+40i}{8+6i} = \dfrac{(20+40i)(8-6i)}{(8+6i)(8-6i)} = \dfrac{160-120i+320i+240}{64+36} = 4+2i$

c) $\dfrac{-1+5i}{2-i} = \dfrac{(-1+5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{-2-i+10i-5}{4+1} = \dfrac{-7+9i}{5}$

45. **Realiza las siguientes divisiones de números complejos.**

a) $(3 - i) : (1 - i)$
b) $\dfrac{5}{2 + 4i}$
c) $(5 + 2i) : (2i)$
d) $\dfrac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}\,i}$

a) $\dfrac{3-i}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{3+2i+1}{2} = 2+i$

b) $\dfrac{5}{2+4i}\cdot\dfrac{2-4i}{2-4i} = \dfrac{10-20i}{20} = \dfrac{1-2i}{2}$

c) $\dfrac{5+2i}{2i}\cdot\dfrac{-2i}{-2i} = \dfrac{-10i+4}{4} = \dfrac{-5i+2}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}i}\cdot\dfrac{1-\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} = \dfrac{\sqrt{2}-2i}{3}$

46. **Obtén, en forma binómica, el resultado de las siguientes operaciones.**

a) $\dfrac{30(1 - i)}{-4 - 2i} + (2 - 3i)i$

b) $2i - \dfrac{(2 + 3i)3}{-3 + i}$

c) $\dfrac{4(10 - i) + 8}{2 - 6i} - (3 - i)(2 + 6i)$

d) $(-2 - 5i) - \dfrac{10 - 10i - 5(1 + i)}{(8 + 2i) - (5 + 3i)}$

e) $\dfrac{(1 + 3i)^2 - (2i)^2}{-3 + 4i}$

a) $\frac{30(1-i)}{-4-2i}+(2-3i)i=-3+9i+(3+2i)=11i$

b) $2i-\frac{(2+3i)3}{-3+i}=2i+\frac{9}{10}+\frac{33}{10}i=\frac{9}{10}+\frac{53}{10}i$

c) $\frac{4(10-i)+8}{2-6i}-(3-i)(2+6i)=\frac{48-4i}{2-6i}-(6+18i-2i+6)=$
$=3+7i-(12+16i)=-9-9i$

d) $(-2-5i)-\frac{10-10i-5(1+i)}{(8+2i)-(5+3i)}=(-2-5i)-\frac{5-15i}{3-i}=$
$=(-2-5i)-(3-4i)=-5-i$

e) $\frac{(1+3i)^2-(2i)^2}{-3+4i}=\frac{-8+6i+4}{-3+4i}=\frac{36}{25}-\frac{2}{25}i$

47. Realiza la siguiente operación.

$$\frac{1}{i}+\frac{1+i}{i^3}-\frac{(1+i)\cdot(1-i)}{i^2-1}-\frac{2(1+i)}{i-1}$$

$$\frac{1}{i}+\frac{1+i}{-i}-\frac{1-i^2}{i^2-1}-\frac{2+2i}{i-1}=\frac{1}{i}-\frac{1+i}{i}+1-\frac{2+2i}{i-1}=-\frac{2+2i}{i-1}=-\frac{2+2i}{i-1}\cdot\frac{i+1}{i+1}=-\frac{(2+2i)(i+1)}{-2}=2i$$

48. Calcula y simplifica las expresiones que aparecen a continuación.

a) $i^{49}\cdot i^{87}$

b) $i^{34}\cdot i^{103}+i^{78}\cdot i^{116}$

c) $(-3i)^3+(2i)^6:(12i^{18})$

d) $i^{19}\cdot(2i^{33}-3i^{28})$

a) $i^{49}\cdot i^{87}=i^{136}=1$

b) $i^{34}\cdot i^{103}+i^{78}\cdot i^{116}=i^{137}+i^{194}=i-1$

c) $(-3i)^3+(2i)^6:(12i^{18})=27i-64:(-12)=27i+\frac{16}{3}$

d) $i^{19}\cdot(2i^{33}-3i^{28})=-i\cdot(2i-3)=2+3i$

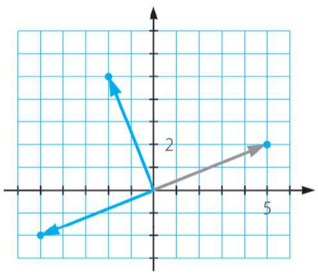
49. Representa 5 + 2*i*. Multiplícalo por *i* y representa el resultado. Multiplica dos veces por *i* y explica qué se obtiene.

$(5+2i)i=-2+5i$

$(5+2i)i^2=-5-2i$

Al multiplicar por i el punto se desplaza 90°, mediante un giro de centro el origen, en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Al multiplicar por i^2 se obtiene el punto simétrico respecto del origen (su opuesto).



50. Comprueba si los valores de z que se dan son soluciones de cada ecuación.

Solución	Ecuación
$z = 1 + 2i$	$z^2 - 2z + 5 = 0$
$z = 1 + i$	$z^2 + (3 - i)z - (4 + 4i) = 0$
$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$z^3 + 1 = 0$

- $(1+2i)^2 - 2(1+2i) + 5 = 0 \longrightarrow 1 + 4i - 4 - 2 - 4i + 5 = 0 \longrightarrow$ Sí es solución.
- $(1+i)^2 + (3-i)(1+i) - (4+4i) = 0 \longrightarrow 1 + 2i - 1 + 3 + 2i + 1 - 4 - 4i = 0 \longrightarrow$ Sí es solución.
- $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 + 1 = 0 \rightarrow \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = 1 + 1 = 2 \rightarrow$ No es solución.

51. Halla el valor de k para que las siguientes expresiones sean números imaginarios puros.

a) $\frac{3 + ki}{k + 2i}$ b) $3ki \cdot \frac{1 - ki}{1 - i}$

a) $\frac{3+ki}{k+2i} \cdot \frac{k-2i}{k-2i} = \frac{5k + i(-6+k^2)}{k^2+4} \rightarrow k = 0$

b) $3ki \cdot \frac{1-ki}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(3ki+3k^2)(1+i)}{2} = \frac{-3k+3k^2+i(3k+3k^2)}{2} \rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=1 \end{cases}$

Descartamos $k = 0$ porque al sustituir en la expresión original se obtiene el número $0 + 0i = 0$, que no se considera imaginario puro.

52. Encuentra p y q para que se cumpla la siguiente igualdad.

$$(p + 3i)(4 + qi) = 15 + 9i$$

$(p+3i)(4+qi) = 15 + 9i \rightarrow (4p - 3q) + (12 + pq)i = 15 + 9i$

$$\left.\begin{array}{l} 4p - 3q = 15 \\ 12 + pq = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} p_1 = 3;\ q_1 = -1 \\ p_2 = \frac{3}{4};\ q_2 = -4 \end{cases}$$

53. Demuestra que el número complejo $z = 1 - 3i$ verifica la igualdad $\frac{z^2}{2} = z - 5$.

$$\frac{z^2}{2} = \frac{(1-3i)^2}{2} = \frac{-8-6i}{2} = -4 - 3i = 1 - 3i - 5 = z - 5$$

54. La suma de dos números complejos es $3 + 2i$ y la parte real del segundo es 2. Halla los dos números sabiendo que el cociente del primero entre el segundo es un número imaginario puro.

$(a + bi) + (2 + di) = 3 + 2i \longrightarrow a = 1,\ b + d = 2$

$\frac{1+bi}{2+di} \cdot \frac{2-di}{2-di} = \frac{2+bd+(2b-d)i}{2+d^2} \rightarrow 2 + bd = 0$

$\left.\begin{array}{l} b+d=2 \\ 2+bd=0 \end{array}\right\} \rightarrow d = 1+\sqrt{3},\ b = 1-\sqrt{3}$ o bien $d = 1-\sqrt{3},\ b = 1+\sqrt{3}$

Los números son:

$z_1 = 1 + \left(1 + \sqrt{3}\right)i$ y $z_2 = 2 + \left(1 - \sqrt{3}\right)i$

$z_1 = 1 + \left(1 - \sqrt{3}\right)i$ y $z_2 = 2 + \left(1 + \sqrt{3}\right)i$

55. Encuentra dos números complejos sabiendo que su suma vale 3 y su cociente es *i*.

$(a + bi) + (c + di) = 3 \rightarrow a + c = 3,\ b + d = 0$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{3-c-di}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{3c-c^2-d^2-3di}{c^2+d^2} = i \rightarrow 3c - c^2 - d^2 - 3di = i\left(c^2+d^2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3c - c^2 - d^2 = 0 \\ -3d = c^2 + d^2 \end{array}\right\} \rightarrow c = \frac{3}{2},\ d = -\frac{3}{2},\ a = \frac{3}{2},\ b = \frac{3}{2}$$

Los números son:

$z_1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$ $\qquad$ $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

56. Representa gráficamente cada número complejo y exprésalo en forma binómica.

a) $1_{60°}$ $\qquad$ c) $2_{135°}$ $\qquad$ e) $\sqrt{5}_{60°}$

b) $5_{90°}$ $\qquad$ d) $3_{120°}$ $\qquad$ f) $\sqrt{3}_{45°}$

a) $\cos 60° + i \operatorname{sen} 60° = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

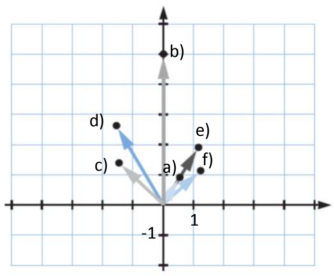
b) $5 \cos 90° + i \operatorname{sen} 90° = 5i$

c) $2 \cos 135° + i\, 2 \operatorname{sen} 135° = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

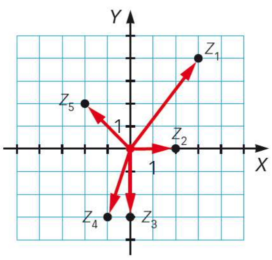
d) $3 \cos 120° + i\, 3 \operatorname{sen} 120° = -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

e) $\sqrt{5} \cos 60° + i\sqrt{5} \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{5}}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2}$

f) $\sqrt{3} \cos 45° + i\sqrt{3} \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$



57. Expresa estos números complejos en forma polar.



$z_1 = 3 + 4i = 5_{53,13°}$ $\qquad$ $z_3 = -3i = 3_{270°}$ $\qquad$ $z_5 = -2 + 2i = 2\sqrt{2}_{135°}$

$z_2 = 2 = 2_{0°}$ $\qquad$ $z_4 = -1 - 3i = \sqrt{10}_{251,57°}$

58. **Escribe estos números en forma polar y represéntalos gráficamente.**

a) $3 - 4i$ d) $-3i$

b) $\sqrt{3} + i$ e) -3

c) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ f) $\frac{1}{2}i$

a) $3 - 4i = 5_{306°\,52'\,11{,}63''}$

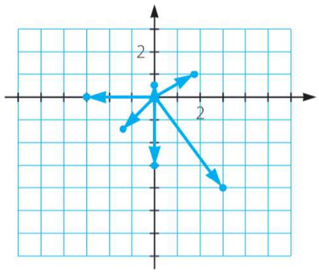
b) $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$

c) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2_{225°}$

d) $-3i = 3_{270°}$

e) $-3 = 3_{180°}$

f) $\frac{1}{2}i = \frac{1}{2}_{90°}$



59. **Escribe en forma binómica los siguientes números complejos.**

a) $4_{60°}$ c) $3_{\frac{\pi}{2}}$ e) $3_{150°}$ g) $\sqrt{2}_{\frac{7\pi}{4}}$

b) $2_{215°}$ d) 2_{π} f) $1_{\frac{3\pi}{2}}$ h) $\sqrt{3}_{300°}$

a) $2 + 2\sqrt{3}i$ c) $3i$ e) $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ g) $1 - i$

b) $-1{,}64 - 1{,}15i$ d) -2 f) $-i$ h) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

60. **Dados los números complejos:**

$$z_1 = 5_{240°} \qquad z_2 = 3_{135°} \qquad z_3 = \sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}}$$

escribe, en forma polar y binómica, el conjugado y el opuesto de cada uno de ellos.

Tenemos en cuenta que el conjugado es el punto simétrico respecto del eje de abscisas y el opuesto es el simétrico respecto del origen.

Número		Conjugado		Opuesto	
Polar	Binómica	Polar	Binómica	Polar	Binómica
$5_{240°}$	$\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$	$5_{120°}$	$\left(-\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$	$5_{60°}$	$\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$
$3_{135°}$	$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$	$3_{225°}$	$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$	$3_{315°}$	$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$
$\sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}}$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\sqrt{3}_{\frac{11\pi}{6}}$	$\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\sqrt{3}_{\frac{7\pi}{6}}$	$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

61. **Escribe en forma polar los números complejos que aparecen a continuación.**

a) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ b) $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

a) $\sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}}$ b) $3_{\frac{\pi}{2}}$

62. **Dado el número escrito en forma polar r_α, di cómo sería su opuesto y su conjugado.**

Opuesto: $-r_\alpha = r_{180^\circ+\alpha}$ Conjugado: $r_{-\alpha}$

63. **Efectúa las siguientes operaciones con números complejos.**

a) $4_{120^\circ}\cdot 3_{60^\circ}$ d) $\dfrac{8_{170^\circ}}{2_{50^\circ}}$ g) $\dfrac{7_{\frac{2\pi}{3}}}{5_{\frac{5\pi}{2}}}$

b) $\dfrac{6_\pi}{2_{\frac{\pi}{4}}}$ e) $\left(5_{\frac{\pi}{3}}\right)^2$ h) $(2_{120^\circ})^5$

c) $4_{\frac{\pi}{3}}\cdot 2_{270^\circ}$ f) $2_{260^\circ}\cdot 5_{130^\circ}$ i) $\left(\sqrt{3}_{\frac{5\pi}{2}}\right)^6$

a) $4_{120^\circ}\cdot 3_{60^\circ} = 12_{180^\circ}$ d) $\dfrac{8_{170^\circ}}{2_{50^\circ}} = 4_{120^\circ}$ g) $\dfrac{7_{\frac{2\pi}{3}}}{5_{\frac{5\pi}{2}}} = \dfrac{7}{5}_{\frac{\pi}{6}}$

b) $\dfrac{6_\pi}{2_{\frac{\pi}{4}}} = 3_{\frac{3\pi}{4}}$ e) $\left(5_{\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 25_{\frac{2\pi}{3}}$ h) $(2_{120^\circ})^5 = 32_{600^\circ} = 32_{240^\circ}$

c) $4_{\frac{\pi}{3}}\cdot 2_{270^\circ} = 4_{60^\circ}\cdot 2_{270^\circ} = 8_{330^\circ}$ f) $2_{260^\circ}\cdot 5_{130^\circ} = 10_{390^\circ} = 10_{30^\circ}$ i) $\dfrac{10_{120^\circ}}{5_{240^\circ}} = 2_{240^\circ}$

64. **Expresa en forma polar el inverso de estos números.**

a) 2_{150° c) $4_{\frac{\pi}{3}}$ e) $e_{\frac{\pi}{6}}$

b) $3_{\frac{\pi}{2}}$ d) $\left(\dfrac{1}{4}\right)_\pi$ f) $\sqrt{7}_{35^\circ}$

Para calcular el inverso de un número en forma polar, hallamos el inverso del módulo y el opuesto del argumento.

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)_{210^\circ}$ c) $\left(\dfrac{1}{4}\right)_{\frac{5\pi}{3}}$ e) $\left(\dfrac{1}{e}\right)_{\frac{11\pi}{6}}$

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)_{\frac{3\pi}{2}}$ d) 4_π f) $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{7}\right)_{325^\circ}$

65. **Calcula las siguientes potencias de números complejos en forma polar.**

a) $(2_{105^\circ})^4$ b) $\left(4_{\frac{\pi}{3}}\right)^2$ c) $(3_{-25^\circ})^6$ d) $\left(\sqrt{5}_{\frac{3\pi}{4}}\right)^6$

a) 16_{60° b) $16_{\frac{2\pi}{3}}$ c) 729_{210° d) $125_{\frac{9\pi}{2}}$

66. **Efectúa las siguientes operaciones combinadas de números complejos.**

a) $(4_{20^\circ}\cdot 1_{50^\circ})\cdot 3_{35^\circ}$ c) $\dfrac{6_{60^\circ}\cdot 3_{40^\circ}}{9_{56^\circ}}$

b) $(9_{39^\circ} : 3_{25^\circ})\cdot 5_{100^\circ}$ d) $(1_{105^\circ})^8\cdot(1_{65^\circ})^5$

a) $4_{70^\circ}\cdot 3_{35^\circ} = 12_{105^\circ}$ b) $3_{14^\circ}\cdot 5_{100^\circ} = 15_{114^\circ}$ c) $\dfrac{18_{100^\circ}}{9_{56^\circ}} = 2_{44^\circ}$ d) $1_{120^\circ}\cdot 1_{325^\circ} = 1_{85^\circ}$

67. **Realiza las siguientes operaciones combinadas con números complejos.**

a) $\left[(4-2i)-\left(3-2\sqrt{2}\,i\right)\cdot 2_{30^\circ}\right]^2$ b) $\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^2-4_{\frac{3\pi}{2}}}{-3+3i}$

a) $\left((4-2i)-\left(3-2\sqrt{2}i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)\right)^2=\left((4-2i)-\left(3\sqrt{3}+3i-2\sqrt{6}i+2\sqrt{2}\right)\right)^2$

$\left(4-3\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\left(-5+2\sqrt{6}\right)i\right)^2=2-40i-(16+16i)\sqrt{2}-(24-14i)\sqrt{3}+(32+16i)\sqrt{6}$

b) $\dfrac{\left(2_{60^\circ}\right)^2+4i}{-3+3i}=\dfrac{4_{120^\circ}+4i}{-3+3i}=\dfrac{-2+2\sqrt{3}i+4i}{-3+3i}\cdot\dfrac{-3-3i}{-3-3i}=\dfrac{18+6\sqrt{3}-6i-6\sqrt{3}i}{18}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}-i\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$

68. **Realiza estas operaciones, expresando primero los números en forma polar.**

a) $(1-i)^4$ c) $\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)^4$

b) $\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i\right)^6$ d) $\left(\sqrt{2}-i\right)^7$

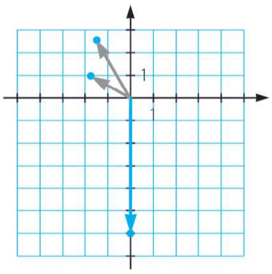
a) $(1-i)^4=\left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^4=4_{180^\circ}$ c) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^4=(2_{120^\circ})^4=16_{120^\circ}$

b) $\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^6=(2_{135^\circ})^6=64_{90^\circ}$ d) $\left(\sqrt{2}-i\right)^7=\sqrt{3}_{\,324^\circ\,44'\,8,2''}$

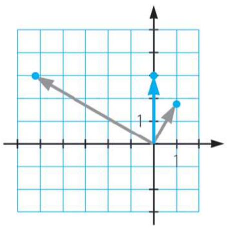
69. **Representa en el plano complejo estos números y los resultados de sus operaciones. Explica lo que sucede en cada caso.**

a) $2_{150^\circ}\cdot 3_{120^\circ}$ b) $\dfrac{6_{150^\circ}}{2_{60^\circ}}$ c) $\left(2_{\frac{\pi}{3}}\right)^4$

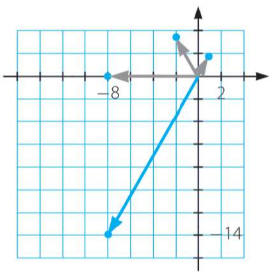
a) El módulo del resultado es el producto de los módulos, y el argumento es la suma de los argumentos de los números dados.



b) El módulo del resultado es el cociente de los módulos, y el argumento es la resta de los argumentos de los números dados.



c) El módulo del resultado es la cuarta potencia del módulo, y el argumento es el cuádruple del argumento del número dado.



70. **Realiza las siguientes potencias empleando la fórmula de De Moivre.**

a) $[3(\cos 25° + i \operatorname{sen} 25°)]^4$

b) $[2(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)]^9$

c) $[5(\cos 115° + i \operatorname{sen} 115°)]^7$

d) $\left(\cos \dfrac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}\right)^3$

e) $\left[3\left(\cos \dfrac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{2}\right)\right]^4$

a) $(3(\cos 25° + i \operatorname{sen} 25°))^4 = 81(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°)$

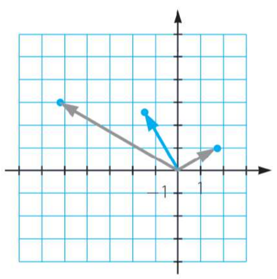
b) $(2(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°))^4 = 512(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°) = 512$

c) $(5(\cos 115° + i \operatorname{sen} 115°))^7 = 78\,125(\cos 85° + i \operatorname{sen} 85°)$

d) $\left(\cos \dfrac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}\right)^3 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1$

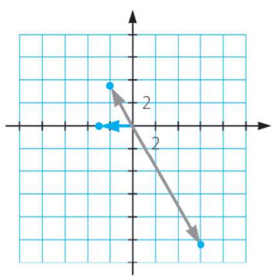
e) $\left(3\left(\cos \dfrac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{2}\right)\right)^4 = 81(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 81$

71. **Dibuja los números $2_{30°}$ y $6_{150°}$. ¿Por qué número complejo hay que multiplicar al primero para obtener el segundo?**



Hay que multiplicar por $3_{120°}$.

72. **Dibuja los números $12_{300°}$ y $4_{120°}$. ¿Por qué númerocomplejo hay que dividir al primero para obtener el segundo?**



Hay que dividir entre $3_{180°}$.

73. Calcula las soluciones de las siguientes raíces.

a) $\sqrt[3]{64_{120°}}$ c) $\sqrt[5]{32_{\frac{5\pi}{4}}}$ e) $\sqrt[4]{9_{220°}}$

b) $\sqrt[5]{1_{150°}}$ d) $\sqrt[6]{64_{180°}}$ f) $\sqrt[6]{2_{75°}}$

a) $\sqrt[3]{64_{120°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo $= 4$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{120° + 0 \cdot 360°}{3} = 40°$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{120° + 1 \cdot 360°}{3} = 160°$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{120° + 2 \cdot 360°}{3} = 280°$

Por tanto, las raíces son $4_{40°}$, $4_{160°}$, $4_{280°}$.

b) El módulo de las soluciones será la raíz quinta de $1 = 1$.

Existirán tantos números como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{150° + 0 \cdot 360°}{5} = 30°$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{150° + 1 \cdot 360°}{5} = 102°$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{150° + 2 \cdot 360°}{5} = 174°$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{150° + 3 \cdot 360°}{5} = 246°$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \dfrac{150° + 4 \cdot 360°}{5} = 318°$

Por tanto, las raíces son $1_{30°}$, $1_{102°}$, $1_{174°}$, $1_{246°}$, $1_{318°}$.

c) El módulo de las soluciones será la raíz quinta de $32 = 2$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{225° + 0 \cdot 360°}{5} = 45°$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{225° + 1 \cdot 360°}{5} = 117°$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{225° + 2 \cdot 360°}{5} = 189°$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{225° + 3 \cdot 360°}{5} = 261°$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \dfrac{225° + 4 \cdot 360°}{5} = 333°$

Por tanto, las raíces son $2_{45°}$, $2_{117°}$, $2_{189°}$, $2_{261°}$, $2_{333°}$.

d) El módulo de las soluciones será la raíz sexta de 64 = 2.

Existirán tantos números como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{6} = 30^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{6} = 90^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{180^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{6} = 150^\circ$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{180^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{6} = 210^\circ$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \frac{180^\circ + 4 \cdot 360^\circ}{6} = 270^\circ$

Si $k = 5 \rightarrow \beta_6 = \frac{180^\circ + 5 \cdot 360^\circ}{6} = 330^\circ$

Por tanto, las raíces son 2_{30°, 2_{90°, 2_{150°, 2_{210°, 2_{270°, 2_{330°.

e) El módulo de las soluciones será la raíz cuarta de 9 = $\sqrt{3}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{220^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{4} = 55^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{220^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{4} = 145^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{220^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{4} = 235^\circ$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{220^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{4} = 325^\circ$

Por tanto, las raíces son $\sqrt{3}_{55^\circ}$, $\sqrt{3}_{145^\circ}$, $\sqrt{3}_{235^\circ}$, $\sqrt{3}_{325^\circ}$.

f) El módulo de las soluciones será la raíz sexta de 2.

Existirán tantos números como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{75^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{6} = 12{,}5^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{75^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{6} = 72{,}5^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{75^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{6} = 132{,}5^\circ$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{75^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{6} = 192{,}5^\circ$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \frac{75^\circ + 4 \cdot 360^\circ}{6} = 252{,}5^\circ$

Si $k = 5 \rightarrow \beta_6 = \frac{75^\circ + 5 \cdot 360^\circ}{6} = 312{,}5^\circ$

Por tanto, las raíces son $\sqrt[6]{2}_{12{,}5^\circ}$, $\sqrt[6]{2}_{72{,}5^\circ}$, $\sqrt[6]{2}_{132{,}5^\circ}$, $\sqrt[6]{2}_{192{,}5^\circ}$, $\sqrt[6]{2}_{252{,}5^\circ}$, $\sqrt[6]{2}_{312{,}5^\circ}$.

74. **Calcula las siguientes raíces de números complejos.**

a) $\sqrt{1}$ c) $\sqrt[4]{1}$ e) $\sqrt[3]{i}$

b) $\sqrt[3]{1}$ d) $\sqrt{i}$ f) $\sqrt[4]{i}$

a) $\sqrt{1} = 1_{\frac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{2}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{180^\circ} = -1$ Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{0^\circ} = 1$

b) $\sqrt[3]{1} = 1_{\frac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{120^\circ}$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{0^\circ} = 1$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{240^\circ}$

c) $\sqrt[4]{1} = 1_{\frac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{4}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{90^\circ} = i$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{270^\circ} = -i$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{180^\circ} = -1$ Si $k = 3 \rightarrow x_4 = 1_{0^\circ} = 1$

d) $\sqrt{i} = 1_{\frac{90^\circ + k\cdot 360^\circ}{2}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{45^\circ}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{225^\circ}$

e) $\sqrt[3]{i} = 1_{\frac{90^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{30^\circ}$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{270^\circ} = -i$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{150^\circ}$

f) $\sqrt[4]{i} = 1_{\frac{90^\circ + k\cdot 360^\circ}{4}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{22,5^\circ}$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{202,5^\circ}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{112,5^\circ}$ Si $k = 3 \rightarrow x_4 = 1_{292,5^\circ}$

75. **Realiza las raíces y represéntalas.**

a) $\sqrt[6]{-16}$ c) $\sqrt[3]{16i}$ e) $\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i}$

b) $\sqrt[3]{-i}$ d) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}$ f) $\sqrt[4]{625}$

a) $\sqrt[6]{-16} = \sqrt[6]{16_{180^\circ}}$

El módulo de las raíces será la raíz sexta de 16 = $\sqrt[3]{4}$.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180^\circ + 0\cdot 360^\circ}{6} = 30^\circ$

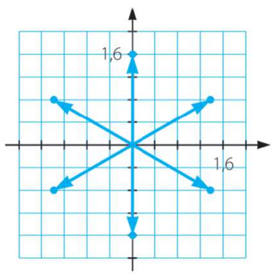
Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180^\circ + 1\cdot 360^\circ}{6} = 90^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{180^\circ + 2\cdot 360^\circ}{6} = 150^\circ$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{180^\circ + 3\cdot 360^\circ}{6} = 210^\circ$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \frac{180^\circ + 4\cdot 360^\circ}{6} = 270^\circ$

Si $k = 5 \rightarrow \beta_6 = \frac{180^\circ + 5\cdot 360^\circ}{6} = 330^\circ$



Por tanto, las raíces son $\sqrt[3]{4}_{30^\circ}$, $\sqrt[3]{4}_{90^\circ} = \sqrt[3]{4}i$, $\sqrt[3]{4}_{150^\circ}$, $\sqrt[3]{4}_{210^\circ}$, $\sqrt[3]{4}_{270^\circ} = -\sqrt[3]{4}i$, $\sqrt[3]{4}_{330^\circ}$.

b) $\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270^\circ}}$

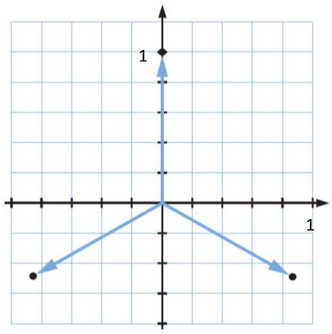
El módulo de las raíces será la raíz cúbica de $1 = 1$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \longrightarrow \beta_1 = \dfrac{270^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} = 90^\circ$

Si $k = 1 \longrightarrow \beta_2 = \dfrac{270^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} = 210^\circ$

Si $k = 2 \longrightarrow \beta_3 = \dfrac{270^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} = 330^\circ$



Por tanto, las raíces son 1_{90°, 1_{210°, 1_{330°.

c) $\sqrt[3]{16i} = \sqrt[3]{16_{90^\circ}}$

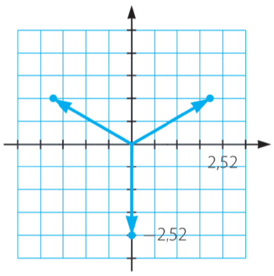
El módulo de las raíces será la raíz cúbica de $16 = 2\sqrt[3]{2}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \longrightarrow \beta_1 = \dfrac{90^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} = 30^\circ$

Si $k = 1 \longrightarrow \beta_2 = \dfrac{90^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} = 150^\circ$

Si $k = 2 \longrightarrow \beta_3 = \dfrac{90^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} = 270^\circ$



Por tanto, las raíces son $2\sqrt[3]{2}_{30^\circ}$, $2\sqrt[3]{2}_{150^\circ}$, $2\sqrt[3]{2}_{270^\circ} = -2\sqrt[3]{2}i$.

d) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i} = \sqrt[3]{1_{45^\circ}}$

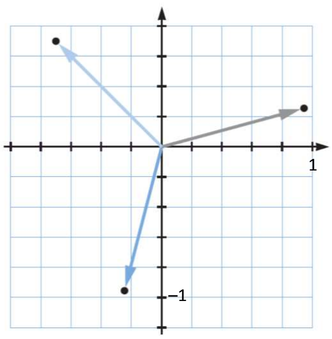
El módulo de las raíces será la raíz cúbica de $1 = 1$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \longrightarrow \beta_1 = \dfrac{45^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} = 15^\circ$

Si $k = 1 \longrightarrow \beta_2 = \dfrac{45^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} = 135^\circ$

Si $k = 2 \longrightarrow \beta_3 = \dfrac{45^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} = 255^\circ$



Por tanto, las raíces son 1_{15°, 1_{135°, 1_{255°.

e) $\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i} = \sqrt[5]{2_{300^\circ}}$

El módulo de las raíces será la raíz quinta de 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

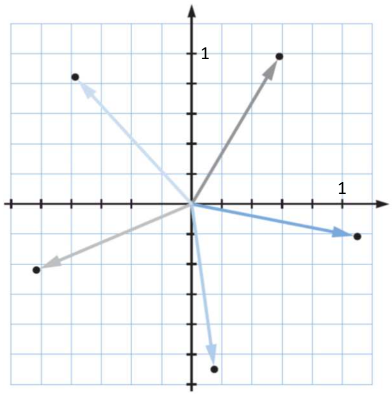
Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{300^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{5} = 60^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{300^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{5} = 132^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{300^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{5} = 204^\circ$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{300^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{5} = 276^\circ$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \dfrac{300^\circ + 4 \cdot 360^\circ}{5} = 348^\circ$



Por tanto, las raíces son $\sqrt[5]{2}_{60^\circ}$, $\sqrt[5]{2}_{132^\circ}$, $\sqrt[5]{2}_{204^\circ}$, $\sqrt[5]{2}_{276^\circ}$, $\sqrt[5]{2}_{348^\circ}$.

f) $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{625_{0^\circ}}$

El módulo de las raíces será la raíz cuarta de $625 = 5$.

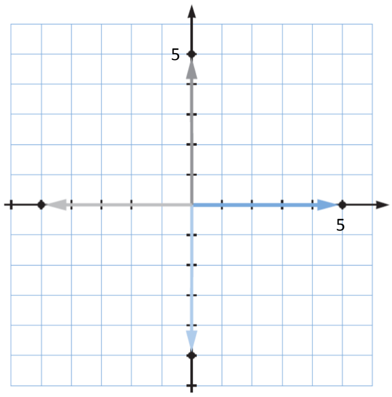
Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{0^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{4} = 0^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{0^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{4} = 90^\circ$

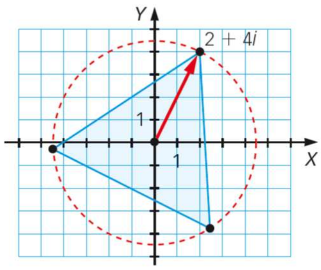
Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{0^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{4} = 180^\circ$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{0^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{4} = 270^\circ$



Por tanto, las raíces son 5_{0°, 5_{90°, 5_{180°, 5_{270°.

76. Una de las raíces cúbicas de un número complejo es $2 + 4i$. Halla las otras dos.



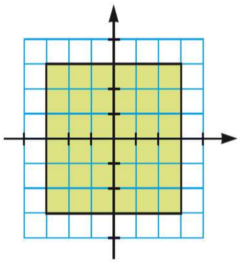
Las otras dos raíces tendrán el mismo módulo.

$z_1 = 2 + 4i = \sqrt{20}_{63,435^\circ}$

$z_2 = \sqrt{20}_{63,435^\circ} \cdot 1_{120^\circ} = \sqrt{20}_{183,435^\circ}$

$z_3 = \sqrt{20}_{63,435^\circ} \cdot 1_{240^\circ} = \sqrt{20}_{303,435^\circ}$

77. **Los vértices del polígono representado son las raíces cuartas de un número complejo.**



Determina el número y sus raíces.

Las raíces son:

$z_1 = 4 + 4i = \sqrt{32}_{45°}$ $\quad z_2 = -4 + 4i = \sqrt{32}_{135°}$ $\quad z_3 = -4 - 4i = \sqrt{32}_{225°}$ $\quad z_4 = 4 - 4i = \sqrt{32}_{315°}$

El número es:

$z = 1\,024_{180°} = -1\,024$.

78. **El número complejo $2_{30°}$ es uno de los vértices de un pentágono regular. Calcula los otros cuatro vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son dichos números.**

Las raíces son:

$z_1 = 2_{30°}$ $\quad z_2 = 2_{102°}$ $\quad z_3 = 2_{174°}$ $\quad z_4 = 2_{246°}$ $\quad z_5 = 2_{318°}$.

El número es $z = 32_{150°}$.

79. **Encuentra n y z de manera que dos de las soluciones de $\sqrt[n]{z}$ sean $6_{30°}$ y $6_{120°}$. ¿Hay una única solución? ¿Cuál es el menor número n que puedes encontrar?**

Sea $z = r_\alpha$.

La raíz n-ésima de r debe ser 6.

El argumento debe ser múltiplo de 30 y de 120.

La solución no es única.

El menor número que cumple las condiciones es $n = 4$.

$z_1 = 1\,296_{120°}$

Otra solución es $n = 8$.

$z_2 = 1\,679\,616_{240°}$

80. **Calcula todas las soluciones complejas de las siguientes ecuaciones.**

a) $x^5 + 1 = 0$

b) $x^4 - 625 = 0$

c) $x^5 - 1 = 0$

d) $x^4 + 16 = 0$

a) $x = \sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{1_{180^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz quinta de 1.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{180^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{5} = 36^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{180^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{5} = 108^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{180^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{5} = 180^\circ$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{0^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{5} = 252^\circ$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \dfrac{180^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{5} = 324^\circ$

Por tanto, las raíces son 1_{36°, 1_{108°, 1_{180°, 1_{252°, 1_{324°.

b) $x = \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{625_{0^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta de $625 = 5$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{0^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{4} = 0^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{0^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{4} = 90^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{0^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{4} = 180^\circ$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{0^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{4} = 270^\circ$

Por tanto, las raíces son 5_{0°, 5_{90°, 5_{180°, 5_{270°.

c) $x = \sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{1_{0^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz quinta de 1.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{0^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{5} = 0^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{0^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{5} = 72^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{0^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{5} = 144^\circ$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{0^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{5} = 216^\circ$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \dfrac{0^\circ + 4 \cdot 360^\circ}{5} = 288^\circ$

Por tanto, las raíces son 1_{0°, 1_{72°, 1_{144°, 1_{216°, 1_{288°.

d) $x=\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16_{180°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta de 16 = 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k=0 \rightarrow \beta_1=\frac{180°+0\cdot 360°}{4}=45°$

Si $k=1 \rightarrow \beta_2=\frac{180°+1\cdot 360°}{4}=135°$

Si $k=2 \rightarrow \beta_3=\frac{180°+2\cdot 360°}{4}=225°$

Si $k=3 \rightarrow \beta_4=\frac{180°+3\cdot 360°}{4}=315°$

Por tanto, las raíces son $2_{45°}$, $2_{135°}$, $2_{225°}$, $2_{315°}$.

81. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2-4x+13=0$

b) $x^4-8x=0$

c) $x^4-6x^2-9=0$

d) $x^4+27x=0$

a) $x=\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=2\pm 3i$

b) $x\left(x^3-8\right)=0 \rightarrow x=\sqrt[3]{8_{0°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica de 8 = 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k=0 \rightarrow \beta_1=\frac{0°+0\cdot 360°}{3}=0°$

Si $k=1 \rightarrow \beta_2=\frac{0°+1\cdot 360°}{3}=120°$

Si $k=2 \rightarrow \beta_3=\frac{0°+2\cdot 360°}{3}=240°$

Por tanto, las raíces son 0, 2, $2_{120°}$, $2_{140°}$.

c) $t=x^2$

$t=\frac{6\pm\sqrt{36+36}}{2}=3\pm 3\sqrt{2}$

$x_1=\sqrt{3+3\sqrt{2}}$

$x_2=-\sqrt{3+3\sqrt{2}}$

$x_3=\sqrt{3-3\sqrt{2}}=i\sqrt{3\left(\sqrt{2}-1\right)}$

$x_4=-\sqrt{3-3\sqrt{2}}=-i\sqrt{3\left(\sqrt{2}-1\right)}$

d) $x\,(x^3 + 27) = 0$

$$x = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^\circ}}$$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica de $27 = 3$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \longrightarrow \beta_1 = \dfrac{180^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} = 60^\circ$

Si $k = 1 \longrightarrow \beta_2 = \dfrac{180^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} = 180^\circ$

Si $k = 2 \longrightarrow \beta_3 = \dfrac{180^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} = 300^\circ$

Por tanto, las raíces son 0, 3_{60°, 3_{180°, 3_{300°.

82. **Realiza las siguientes operaciones con complejos.**

a) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{i}}$ b) $\sqrt{\dfrac{-1+i}{1+i}}$ c) $\sqrt[3]{(2-i)^2 - 3(1-i)}$

a) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{i}} = \sqrt[4]{-16i} = \sqrt[4]{16_{270^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta de $16 = 2$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \longrightarrow \beta_1 = \dfrac{270^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{4} = 67{,}5^\circ$

Si $k = 1 \longrightarrow \beta_2 = \dfrac{270^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{4} = 157{,}5^\circ$

Si $k = 2 \longrightarrow \beta_3 = \dfrac{270^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{4} = 247{,}5^\circ$

Si $k = 3 \longrightarrow \beta_4 = \dfrac{270^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{4} = 337{,}5^\circ$

Por tanto, las raíces son $2_{67{,}5^\circ}$, $2_{157{,}5^\circ}$, $2_{247{,}5^\circ}$, $2_{337{,}5^\circ}$.

b) $\sqrt{\dfrac{-1+i}{1+i}} = \sqrt{\dfrac{-1+i}{1+i} \cdot \dfrac{1-i}{1-i}} = \sqrt{i} = \sqrt{1_{90^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuadrada de $1 = 1$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \longrightarrow \beta_1 = \dfrac{90^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{2} = 45^\circ$

Si $k = 1 \longrightarrow \beta_2 = \dfrac{90^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{2} = 225^\circ$

Por tanto, las raíces son 1_{45°, 1_{225°.

c) $\sqrt[3]{(2-i)^2-3(1-i)}=\sqrt[3]{-i}=\sqrt[3]{1_{270°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica de 1 = 1.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k=0 \rightarrow \beta_1=\dfrac{270°+0\cdot 360°}{3}=90°$

Si $k=1 \rightarrow \beta_2=\dfrac{270°+1\cdot 360°}{3}=210°$

Si $k=2 \rightarrow \beta_3=\dfrac{270°+2\cdot 360°}{3}=330°$

Por tanto, las raíces son $1_{90°}$, $1_{210°}$, $1_{330°}$.

83. **Calcula y expresa el resultado en forma binómica.**

$$\sqrt[4]{\frac{12_{70°}\cdot(1_{20})^4}{3+3\sqrt{3}i}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{12_{70°}\cdot(1_{20})^4}{3+3\sqrt{3}i}}=\sqrt[4]{\frac{12_{70°}\cdot 1_{80°}}{6_{60°}}}=\sqrt[4]{2_{90°}}$$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta de 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k=0 \rightarrow \beta_1=\dfrac{90°+0\cdot 360°}{4}=22{,}5°$

Si $k=1 \rightarrow \beta_2=\dfrac{90°+1\cdot 360°}{4}=112{,}5°$

Si $k=2 \rightarrow \beta_3=\dfrac{90°+2\cdot 360°}{4}=202{,}5°$

Si $k=3 \rightarrow \beta_4=\dfrac{90°+3\cdot 360°}{4}=292{,}5°$

Por tanto, las raíces son $\sqrt[4]{2}_{22,5°}$, $\sqrt[4]{2}_{112,5°}$, $\sqrt[4]{2}_{202,5°}$, $\sqrt[4]{2}_{292,5°}$.

84. **Escribe una ecuación de segundo grado con coeficientes reales que tenga por soluciones estos números complejos.**

a) $1-i$ b) $3-2i$

a) Como $1-i$ es solución, entonces $1+i$ también lo es.

$(x-(1+i))(x-(1-i))=x^2-2x+2$

b) Como $3-2i$ es solución, entonces $3+2i$ también lo es.

$(x-(3+2i))(x-(3-2i))=x^2-6x+13$

85. **Calcula el valor de *m* para que el polinomio**

$$x^2 - 6x - m$$

tenga la raíz $3 - i$. Halla la raíz que falta.

$(3 - i)^2 - 6(3 - i) - m = 0 \rightarrow 8 - 6i - 18 + 6i = m \rightarrow m = -10$

La raíz que falta es $3 + i$.

86. **Calcula el valor de los números complejos *p* y *q* para que el polinomio**

$$x^3 + px^2 + qx - 2$$

tenga las raíces *i* y 2*i*. Halla la raíz que falta.

$(x - i)(x - 2i) = x^2 - 3xi - 2$

$(x^2 - 3xi - 2)(x - a) = x^3 + (-a - 3i)x^2 + (-2 + 3ia)x + 2a \rightarrow a = -1$

$p = 1 - 3i$

$q = -2 - 3i$

La raíz que falta es $x = a = -1$.

87. **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $x^2 + ix + 1 = 0$

b) $x^2 - 2x + 3i = 0$

c) $ix^2 + 7x - 12i = 0$

d) $ix^3 + 27 = 0$

a) $x = \dfrac{-i \pm \sqrt{-1-4}}{2} = \dfrac{-i \pm \sqrt{5}i}{2} \rightarrow x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}i,\ x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}i$

b) $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \dfrac{2 \pm 2i\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_1 = 1 + i\sqrt{2},\ x_2 = 1 - i\sqrt{2}$

c) $x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{2i} = \dfrac{-7 \pm 1}{2i} \rightarrow x_1 = 3i,\ x_2 = 4i$

d) $x^3 = \dfrac{-27}{i} = 27i \rightarrow x = \sqrt[3]{27_{90^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica de 27 = 3.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{90^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} = 30^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{90^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} = 150^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{90^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} = 270^\circ$

Por tanto, las raíces son 3_{30°, 3_{150°, 3_{270°.

88. **Halla el valor de *b* para que la siguiente operación sea cierta.**

$$4_{72°} \cdot (1 + bi) = 8_{132°}$$

$1 + bi = \dfrac{8_{132°}}{4_{72°}} = 2_{60°} \rightarrow tg\ 60° = \sqrt{3} = b$

89. **¿Qué número complejo hay que sumarle a $-3 + 2i$ para que resulte $5_{270°}$? ¿Y para que resulte $6_{\frac{5\pi}{3}}$?**

$(-3 + 2i) + (a + bi) = -5i \rightarrow a = 3, b = -7$

$(-3 + 2i) + (a + bi) = 3 - 3\sqrt{3}\,i \rightarrow a = 6, b = -2 - 3\sqrt{3}$

90. **Comprueba que las siguientes raíces suman 0.**

a) Las raíces cuartas de $-1 + \sqrt{3}\,i$.

b) Las raíces sextas de 64.

a) Las soluciones de $\sqrt[4]{2}_{120°}$ son $\sqrt[4]{2}_{120°}$, $\sqrt[4]{2}_{120°}$, $\sqrt[4]{2}_{210°}$, $\sqrt[4]{2}_{300°}$.

$\sqrt[4]{2}\left(cos\ 30° + i\ sen\ 30°\right) + \sqrt[4]{2}\left(cos\ 120° + i\ sen\ 120°\right) + \sqrt[4]{2}\left(cos\ 210° + i\ sen\ 210°\right) + \sqrt[4]{2}\left(cos\ 300° + i\ sen\ 300°\right) =$

$= \sqrt[4]{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

b) Las soluciones de $\sqrt[6]{64}$ son $2_{0°}$, $2_{60°}$, $2_{120°}$, $2_{180°}$, $2_{240°}$, $2_{300°}$.

$2(cos\ 0° + i\ sen\ 0°) + 2(cos\ 60° + i\ sen\ 60°) + 2(cos\ 120° + i\ sen\ 120°) +$

$+ 2(cos\ 180° + i\ sen\ 180°) + 2(cos\ 240° + i\ sen\ 240°) + 2(cos\ 300° + i\ sen\ 300°) =$

$= 2\left(1 + \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

91. **Averigua el valor que debe tener *k* para que $\dfrac{2 + i}{k - i}$ sea un número real. ¿De qué número real se trata?**

$\dfrac{2 + i}{k - i} \cdot \dfrac{k + i}{k + i} = \dfrac{2k - 1 + (2 + k)i}{k^2 + 1} \rightarrow k = -2$

El número es $\dfrac{-4 - 1}{4 + 1} = -1$.

92. **Averigua el valor que debe tener *k* para que $\dfrac{k - \sqrt{2}i}{\sqrt{2} - i}$ sea un número imaginario puro. ¿De qué número imaginario se trata?**

$\dfrac{k - \sqrt{2}i}{\sqrt{2} - i} \cdot \dfrac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} + i} = \dfrac{\sqrt{2}k + \sqrt{2} + (k - 2)i}{2 + 1} \rightarrow k = -1$

El número es $\dfrac{-3i}{3} = -i$.

93. **Calcula el valor de *a* para que el número $\frac{6-2i}{1+ai}$ sea:**

a) Un número imaginario puro.

b) Un número real.

c) El número complejo $2-4i$.

d) Un número complejo con módulo 1.

e) Un número complejo con argumento $\frac{7\pi}{4}$.

$$\frac{6-2i}{1+ai}\cdot\frac{1-ai}{1-ai}=\frac{6-2a+(-6a-2)i}{1+a^2}$$

a) $6-2a=0\rightarrow a=3$

b) $-6-2a=0\rightarrow a=-3$

c) $\frac{6-2i}{2-4i}=\frac{3-i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i}=\frac{5+5i}{5}=1+i\rightarrow a=1$

d) $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{1+a^2}}=1\rightarrow 40=1+a^2\rightarrow a=\pm\sqrt{39}$

e) $\frac{\sqrt{40}_{arc\,tg\left(-\frac{1}{3}\right)}}{\sqrt{1+a^2}_{arc\,tg\,a}}=r_{\frac{7\pi}{4}}$

$$arc\,tg\left(-\frac{1}{3}\right)-arc\,tg\,a=\frac{7\pi}{4}\rightarrow arc\,tg\,a=arc\,tg\left(-\frac{1}{3}\right)-315^{\circ}\rightarrow a=\frac{1}{2}$$

94. **Halla el valor de *a* para que el siguiente número complejo cumpla que su cuadrado sea igual a su conjugado.**

$$a+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Calculamos el cuadrado: $\left(a+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=a^2-\frac{3}{4}+\sqrt{3}ai$

Hallamos el conjugado: $a-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\left.\begin{cases}a^2-\frac{3}{4}=a\\ \sqrt{3}a=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\right\}\rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

95. **Resuelve la ecuación $\frac{xi}{1+3i}-\frac{2x}{4-i}=1$.**

$xi\,(4-i)-2x\,(1+3i)=(1+3i)(4-i)\rightarrow x\,(4i+1-2-6i)=7+11i\rightarrow x=\frac{7+11i}{-1-2i}\cdot\frac{-1+2i}{-1+2i}=\frac{-29+3i}{5}$

96. **Halla el número complejo que cumple que su cubo es un número real y que la parte real del mismo número es una unidad superior a la parte imaginaria.**

$a = b + 1$

$(b + 1 + bi)^3 = -2b^3 + 6b^2i + 2b^3i + 3b + 3bi + 1$

$2b^3 + 6b^2 + 3b = 0 \rightarrow b\,(2b^2 + 6b + 3) = 0$

Los números son (1, 0), $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)$.

97. **Halla los números complejos cuyo cubo es igual a su conjugado.**

$(r_\alpha)^3 = r_{-\alpha} \rightarrow r = 1$

$3\alpha = -\alpha \rightarrow \alpha = 0°$ $\quad$ $3\alpha = 720° - \alpha \rightarrow \alpha = 180°$

$3\alpha = 360° - \alpha \rightarrow \alpha = 90°$ $\quad$ $3\alpha = 1\,080° - \alpha \rightarrow \alpha = 270°$

Los números son 1, i, -1, $-i$.

98. **Calcula c sabiendo que la representación gráfica de $\frac{12 + ci}{-5 + 2i}$ está sobre la bisectriz del primer cuadrante.**

Para que esté sobre la bisectriz del primer cuadrante, la parte imaginaria debe ser igual a la parte real.

$$\frac{12 + ci}{-5 + 2i} = \frac{(12 + ci)(-5 - 2i)}{(-5 + 2i)(-5 - 2i)} = \frac{-60 + 2c + (-24 - 5c)i}{29}$$

$$-60 + 2c = -24 - 5c \rightarrow c = \frac{36}{7}$$

99. **Halla dos números complejos conjugados tales que su diferencia sea $6i$ y su cociente la unidad imaginaria.**

$(a + bi) - (a - bi) = 2bi = 6i \rightarrow b = 3$

$$\frac{a+bi}{a-bi} \cdot \frac{a+bi}{a+bi} = \frac{a^2 - b^2 + 2abi}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - 9 + 6ai}{9 + a^2} = i$$

$$a^2 - 9 = 0 \text{ y } \frac{6a}{18} = 1 \rightarrow a = 3$$

Los números son $3 + 3i$ y $3 - 3i$.

100. **La ecuación $z^3 + az^2 + bz - 6i = 0$ tiene por raíces 2 y 3. Calcula el valor de a, b y el resto de raíces.**

$$\left.\begin{array}{l} 8 + 4a + 2b - 6i = 0 \\ 27 + 9a + 3b - 6i = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = -5 - i,\ b = 6 + 5i$$

$$z^3 - (5 + i)z^2 + (6 + 5i)z - 6i = (z - 3)(z - 2)(z - a) = z^3 - az^2 - 5z^2 + 5za + 6z - 6a \rightarrow a = i$$

La otra raíz es $z = i$.

101. **Halla dos números complejos, *z* y *w*, tales que su suma sea *i*, y 2*i* sea una raíz cuadrada de su cociente.**

$z = a + bi \qquad\qquad w = c + di$

$(a + bi) + (c + di) = i \rightarrow a = -c,\ b = 1 - d$

$\sqrt{\frac{-c+(1-d)i}{c+di}} = 2i \rightarrow -c+(1-d)i = -4(c+di) \rightarrow c = 0,\ d = -\frac{1}{3}$

$z = \frac{4}{3}i \qquad\qquad w = -\frac{1}{3}i$

102. **Encuentra un número complejo que al sumarle $\frac{1}{2}$ dé como resultado otro número complejo de módulo *c* y argumento 60°.**

$a + bi + \frac{1}{2} = a + \frac{1}{2} + bi$

$c = \sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + b^2}$

$tg\ 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{b}{a+\frac{1}{2}} \rightarrow b = \sqrt{3}\left(a+\frac{1}{2}\right)$

$c = \sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(a+\frac{1}{2}\right)^2} = 2\left(a+\frac{1}{2}\right)$

$a = \frac{c-1}{2},\ b = \sqrt{3}\,\frac{c}{2}$

El número complejo es de la forma $\frac{c-1}{2} + \sqrt{3}\,\frac{c}{2}i$.

103. **Busca un número complejo que sumándole $\frac{1+i}{2-2i}$ dé otro complejo de módulo $\sqrt{2}$ y argumento 45°.**

$\frac{1+i}{2-2i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{i}{2}$

$a + bi + \frac{1}{2}i = a + \left(b+\frac{1}{2}\right)i$

$\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + \left(b+\frac{1}{2}\right)^2} \rightarrow a^2 + \left(b+\frac{1}{2}\right)^2 = 2$

$tg\ 45^\circ = 1 = \frac{b+\frac{1}{2}}{a} \rightarrow a = b + \frac{1}{2}$

$a = 1,\ b = \frac{1}{2}$

El número complejo es $1 + \frac{1}{2}i$.

104. **Halla el área del cuadrilátero cuyos vértices son las soluciones de la ecuación $x^4 + 4 = 0$.**

$x = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4_{180^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta de $4 = \sqrt{2}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \to \beta_1 = \dfrac{180^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{4} = 45^\circ$

Si $k = 1 \to \beta_2 = \dfrac{180^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{4} = 135^\circ$

Si $k = 2 \to \beta_3 = \dfrac{180^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{4} = 225^\circ$

Si $k = 3 \to \beta_4 = \dfrac{180^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{4} = 315^\circ$

Por tanto, las raíces son $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$, $-1 - i$.

Es un cuadrado de lado 2: $A = l^2 = 2^2 = 4$.

105. **Un pentágono regular, con centro en el origen de coordenadas, tiene en $(-3, -2)$ uno de sus vértices. Halla los demás vértices usando números complejos.**

$z_2 = -3 - 2i$

Elevamos a la quinta: $z = \sqrt{13^5}_{213^\circ 41' 24,2''}$

Calculamos el resto de las raíces: $\sqrt{13}_{\frac{213^\circ 41' 24,2'' + k \cdot 360^\circ}{5}}$

Si $k = 0 \to x_1 = \sqrt{13}_{42^\circ 44' 16,85''}$

Si $k = 1 \to x_2 = \sqrt{13}_{114^\circ 44' 16,85''}$

Si $k = 2 \to x_3 = \sqrt{13}_{186^\circ 44' 16,85''}$

Si $k = 3 \to x_4 = \sqrt{13}_{258^\circ 44' 16,85''}$

106. **¿Qué número complejo forma un triángulo equilátero con su conjugado y con -5?**

Sea L la longitud del lado del triángulo equilátero, uno de los vértices es el complejo $a + bi$ y el otro vértice es su conjugado $a - bi$.

$b = L \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{L}{2}$ $\qquad a = -5 + L \cdot \cos 30^\circ = -5 + \dfrac{L \cdot \sqrt{3}}{2}$

Todos los triángulos tienen -5 como el vértice situado más a la izquierda.

Si el vértice -5 estuviera situado a la derecha del triángulo, las coordenadas de los otros vértices serían:

$b = L \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{L}{2}$ $\qquad a = -5 - L \cdot \cos 30^\circ = -5 - \dfrac{L \cdot \sqrt{3}}{2}$

107. Calcula el área del hexágono regular que determinan los afijos de las raíces sextas de −64.

$\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz sexta de 64: 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \longrightarrow \beta_1 = \dfrac{180^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{6} = 30^\circ$

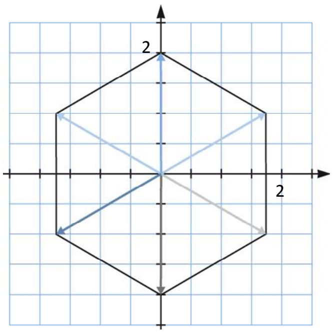
Si $k = 1 \longrightarrow \beta_2 = \dfrac{180^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{6} = 90^\circ$

Si $k = 2 \longrightarrow \beta_3 = \dfrac{180^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{6} = 150^\circ$

Si $k = 3 \longrightarrow \beta_4 = \dfrac{180^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{6} = 210^\circ$

Si $k = 4 \longrightarrow \beta_5 = \dfrac{180^\circ + 4 \cdot 360^\circ}{6} = 270^\circ$

Si $k = 5 \longrightarrow \beta_6 = \dfrac{180^\circ + 5 \cdot 360^\circ}{6} = 330^\circ$



Por tanto, las raíces son 2_{30°, 2_{90°, 2_{150°, 2_{210°, 2_{270°, 2_{330°.

El área del hexágono es $A = \dfrac{p \cdot ap}{2} = \dfrac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ u^2.

108. Las cuatro raíces cuartas de −4096 describen un cuadrado. Calcula su área. Además, sus raíces cúbicas describen un triángulo equilátero. Determina su área.

Las raíces cuartas de –4 096 son:

$z_1 = 8_{45^\circ} = \left(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ $\qquad$ $z_3 = 8_{225^\circ} = \left(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}\right)$

$z_2 = 8_{135^\circ} = \left(-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ $\qquad$ $z_4 = 8_{315^\circ} = \left(4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}\right)$

Calculamos el lado: $\sqrt{\left(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\right)^2} = 8\sqrt{2}$.

Por tanto, el área es de 128.

Las raíces cúbicas de –4 096 son:

$z_1 = 16_{60^\circ} = \left(8, 8\sqrt{3}\right)$ $\qquad$ $z_2 = 16_{180^\circ} = (-16, 0)$ $\qquad$ $z_3 = 16_{300^\circ} = \left(8, -8\sqrt{3}\right)$

Se forma un triángulo cuya base mide 16 y su altura es de 24.

Por tanto, su área mide $192\sqrt{3}$ u^2.

109. Dos vértices consecutivos de un cuadrado son los afijos de los números 6 + 5*i* y 3 + *i*. Determina el resto de sus vértices sabiendo que tiene uno en el cuarto cuadrante.

El vector del lado es $(6 + 5i) - (3 + i) = 3 + 4i$ y el perpendicular es $4 - 3i$.

En el cuarto cuadrante estará el vértice $(3 + i) + (4 - 3i) = 7 - 2i$.

El vértice que falta es $(6 + 5i) + (4 - 3i) = 10 + 2i$.

110. El número complejo $3 + 5i$ es una de las raíces cúbicas de z. Halla las otras dos raíces.

$z_1 = 3 + 5i = \sqrt{35}_{59^\circ\,2'\,10{,}48''}$

Las raíces tendrán el mismo módulo.

Calculamos el resto de las raíces: $\sqrt{35}_{59^\circ\,2'\,10{,}48'' + \frac{k\cdot 360^\circ}{3}}$

Si $k = 0 \to x_1 = \sqrt{35}_{59^\circ\,2'\,10{,}48''}$ Si $k = 2 \to x_3 = \sqrt{35}_{299^\circ\,2'\,10{,}48''}$

Si $k = 1 \to x_2 = \sqrt{35}_{179^\circ\,2'\,10{,}48''}$

111. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean $3 + i$ y $3 - i$. Haz lo mismo con $-2 - 5i$ y $-2 + 5i$.

$$(x - 3 + i)(x - 3 - i) = 0 \to x^2 - 3x - ix - 3x + 9 + 3i + ix - 3i + 1 = 0$$
$$\to x^2 - 6x + 10 = 0$$

$$(x + 2 + 5i)(x + 2 - 5i) = 0 \to x^2 + 2x - 5ix + 2x + 4 - 10i + 5ix + 10i + 25 = 0$$
$$\to x^2 + 4x + 29 = 0$$

112. Demuestra que si una ecuación de segundo grado cuyos coeficientes son números reales tiene dos raíces complejas, estas deben ser números conjugados.

Tenemos una ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$

Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \to \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \left(\sqrt{-b^2 + 4ac}\right)i}{2a} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-b - \left(\sqrt{-b^2 + 4ac}\right)i}{2a} \end{cases}$$

Luego sus soluciones son dos números complejos conjugados.

113. Calcula el producto de las dos raíces de $\sqrt{1}$ y el producto de las tres raíces de $\sqrt[3]{1}$. Ahora halla una fórmula para el producto de las n raíces n-ésimas de la unidad.

Las raíces cuadradas de 1 son 1_{0°, 1_{180° y su producto es $1_{180^\circ} = -1$.

Las raíces cúbicas de 1 son 1_{0°, 1_{120°, 1_{240°y su producto es $1_{360^\circ} = 1$.

El módulo del producto de las n raíces n-ésimas será 1.

El argumento del producto de las n raíces n-ésimas será:

$$\frac{360^\circ \cdot 0}{n} + \frac{360^\circ \cdot 1}{n} + \ldots + \frac{360^\circ \cdot (n-1)}{n} = \frac{360^\circ}{n} \cdot \left(0 + 1 + \ldots + (n-1)\right) = \frac{360^\circ \cdot n \cdot (n-1)}{2n} = 180^\circ (n-1)$$

El producto de las n raíces n-ésimas será $(-1)^{n+1}$.

114. Averigua la relación que existe entre el módulo de la suma de dos complejos y la suma de sus módulos.

El módulo de la suma de dos números complejos es siempre inferior a la suma de los módulos de los números.

115. **¿Es cierto que siempre que multiplicas un número real por un número complejo *z* el resultado tiene el mismo argumento que *z*?**

Si no es cierto, enuncia una propiedad correcta.

No es cierto, ya que: $1_{180°} \cdot 1_{90°} = 1_{270°}$.

Solo es cierto si el número real es positivo.

Si multiplicamos un número real positivo por un número complejo z, el resultado tiene el mismo argumento que z.

116. **¿Es cierto que el inverso del producto de dos números complejos es el producto de sus inversos?**

Es cierto, pues, dados z_1 y z_2 dos números complejos cualesquiera, se tiene que:

$$(z_1 \cdot z_2)^{-1} = \frac{1}{z_1 \cdot z_2} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} = z_1^{-1} \cdot z_2^{-1}$$

117. **Demuestra que para cualquier par de números complejos se cumple que:**

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Usando estas propiedades, demuestra que si $z = a + bi$ es una solución de la ecuación de grado n siguiente:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, entonces el valor $\overline{z}$ también es solución de la misma ecuación.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{a + bi + c + di} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = a + c - (b+d)i = a - bi + c - di = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{ac - db + (bc + ad)i} = ac - bd - (bc + ad)i = (a - bi)(c - di) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Veamos que si $z = a + bi$ es una solución de la ecuación de grado n, entonces $\overline{z}$ también es solución de la misma ecuación:

$$a_n(a+bi)^n + \ldots + a_1(a+bi) + a_0 = 0 \rightarrow \overline{a_n(a+bi)^n + \ldots + a_1(a+bi) + a_0} = \overline{0} = 0$$

$$\overline{a_n(a+bi)^n} + \ldots + \overline{a_1(a+bi)} + \overline{a_0} = a_n\overline{(a+bi)^n} + \ldots + a_1\overline{(a+bi)} + a_0 =$$

$$= a_n\overline{(a+bi)}^n + \ldots + a_1\overline{(a+bi)} + a_0 = a_n(a-bi)^n + \ldots + a_1(a-bi) + a_0 = 0$$

118. **Resuelve en los números complejos las siguientes ecuaciones.**

a) $z^2 - 2z - 2 + 4i = 0$

b) $z^4 + (4 - 2i)z^2 - 8i = 0$

c) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$

a) $z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-2+4i)}}{2} = 1 \pm \sqrt{3 - 4i} = 1 \pm \sqrt{5}_{306,87°} = 1 \pm (-2 + i)$

$z_1 = -1 + i \qquad z_2 = 3 - i$

b) $t = \dfrac{-4 + 2i \pm \sqrt{12 + 16i}}{2} = -2 + i \pm \sqrt{3 + 4i} = -2 + i \pm \sqrt{5}_{53,13°} = -2 + i \pm (-2 - i)$

$t_1 = 2i$, $t_2 = -4$

$z_1 = \sqrt{2}_{\frac{90°}{2}} = 1 + i \qquad z_2 = \sqrt{2}_{\frac{90° + 360°}{2}} = -1 - i \qquad z_3 = \sqrt{4}_{\frac{180°}{2}} = 2i \qquad z_4 = \sqrt{4}_{\frac{180° + 360°}{2}} = -2i$

c) $t = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100-676}}{2} = -5 \pm 12i$

$t_1 = -5 + 12i$, $t_2 = -5 - 12i$

$z_1 = \sqrt{13}_{56,31°} = 2 + 3i$ $\quad z_2 = \sqrt{13}_{236,31°} = -2 - 3i$ $\quad z_3 = \sqrt{13}_{123,69°} = -2 + 3i$ $\quad z_4 = \sqrt{13}_{303,69°} = 2 - 3i$

119. **Resuelve las siguientes ecuaciones con números complejos.**

a) $\dfrac{z}{5-i} + (2-i)6i = -3 + 2i$

b) $z(-2+6i) + \dfrac{-41+37i}{4-3i} + 10 - 8i = z(1+7i)$

a) $\dfrac{z}{5-i} + (2-i)6i = -3+2i \rightarrow \dfrac{z}{5-i} + 6 + 12i = -3 + 2i$

$\rightarrow \dfrac{z}{5-i} = -9 - 10i \rightarrow z = (5-i)(-9-10i) \rightarrow z = -55 - 41i$

b) $z(-2+6i) + \dfrac{-41+37i}{4-3i} + 10 - 8i = z(1+7i) \rightarrow z(-2+6i) - 11 +$

$+ i + 10 - 8i = z(1+7i) \rightarrow z(-2+6i) - 1 - 7i = z(1+7i)$

$\rightarrow z(-2+6i) - z(1+7i) = 1 + 7i \rightarrow z(-2+6i-1-7i) = 1+7i$

$\rightarrow z = \dfrac{1+7i}{-3-i} \rightarrow z = -1 - 2i$

120. **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $x^2 - 8ix + 4i - 19 = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} x - iy = 0 \\ y - ix = 4 - 6i \end{array}\right\}$

a) $x^2 - 8ix + 4i - 19 = 0 \rightarrow x = \dfrac{8i \pm \sqrt{-64 - 4\cdot 1\cdot(4i-19)}}{2\cdot 1} = \dfrac{8i \pm \sqrt{10-16i}}{2}$

b) $\left.\begin{array}{l} x - iy = 0 \\ y - ix = 4 - 6i \end{array}\right\} \xrightarrow{x = iy} y - i(iy) = 4 - 6i \rightarrow y + y = 4 - 6i \rightarrow y = 2 - 3i$

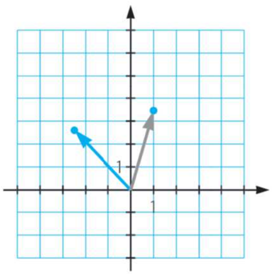
$x = i(2-3i) = 3 + 2i$

121. **Representa el número complejo $1 + 2\sqrt{3}i$ y realiza en este punto un giro de 60° centrado en el origen. Halla las expresiones binómica y polar del número complejo resultante.**

$z = 1 + 2\sqrt{3}i = \sqrt{13}_{73°\,53'\,52,39''}$

Hacemos un giro de 60°:

$\sqrt{13}_{133°\,53'\,52,39''} = -2,5 + 2,6i$



122. **La suma de dos números complejos conjugados es 16 y la suma de sus módulos es 20. ¿Cuáles son estos números?**

Sea $z = a + bi$.

$$\left.\begin{array}{r} a + bi + a - bi = 16 \\ \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + (-b)^2} = 20 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a = 8 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow 64 + b^2 = 100 \rightarrow b = \pm 6$$

Los números son: $8 + 6i$ y $8 - 6i$.

123. **Sea $u = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Comprueba que si $z = -2 + 5i$, entonces z, $u \cdot z$ y $u^2 \cdot z$ son las tres raíces cúbicas de un número complejo. Demuestra que eso sucede para cualquier número z. ¿Qué tiene de particular el número u?**

$$z = -2 + 5i = \sqrt{29}_{111^\circ\, 48'\, 5{,}07''}$$

$$u \cdot z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2 + 5i) = 1_{120^\circ} \cdot \sqrt{29}_{111^\circ\, 48'\, 5{,}07''} = \sqrt{29}_{231^\circ\, 48'\, 5{,}07''}$$

$$u^2 \cdot z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 (-2 + 5i) = 1_{120^\circ} \cdot \sqrt{29}_{111^\circ\, 48'\, 5{,}07''} = \sqrt{29}_{351^\circ\, 48'\, 5{,}07''}$$

Son las raíces cúbicas de $29_{335^\circ\, 24'\, 15{,}2''}$.

Esto sucede para cualquier número complejo, ya que las raíces cúbicas de un número complejo tienen el mismo módulo y su argumento se diferencia en 120°.

Al multiplicar cualquier número por u, su módulo no varía y su argumento aumenta 120°.

124. **Del número complejo z_1 se sabe que su argumento es 150°, y el módulo de z_2 es 2. Calcula z_1 y z_2 sabiendo que su producto es $-8i$.**

$$z_1 = r_{150^\circ}$$

$$z_2 = 2_\alpha$$

$$-8i = 8_{270^\circ}$$

$$r_{150^\circ} \cdot 2_\alpha = 8_{270^\circ}$$

$$\left.\begin{array}{r} r \cdot 2 = 8 \\ 150^\circ + \alpha = 270^\circ \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} r = 4 \\ \alpha = 120^\circ \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} z_1 = 4_{150^\circ} \\ z_2 = 2_{120^\circ} \end{array}$$

125. **Uno de los vértices de un cuadrado con centro en el origen tiene coordenadas $(-1, 3)$. Utiliza los números complejos para determinar los otros vértices y su área.**

Módulo: $\sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

Argumento: $tg\ \alpha = \frac{3}{-1} \rightarrow \alpha = 108{,}43^\circ$

Los vértices son: $\sqrt{10}_{18{,}43^\circ} = \sqrt{10}(\cos 18{,}43^\circ + i\ sen\ 18{,}43^\circ) = 3 + i \rightarrow (3, 1)$

$\sqrt{10}_{108{,}43^\circ} \rightarrow (-1, 3)$ $\sqrt{10}_{198{,}43^\circ} \rightarrow (-3, -1)$ $\sqrt{10}_{288{,}43^\circ} \rightarrow (1, -3)$

El área del cuadrado es $\left(2\sqrt{10}\right)^2 = 40\ u^2$.

126. Calcula la suma de los 10 primeros términos de una progresión aritmética de diferencia $1 + 2i$ y cuyo primer término es $-6 - 2i$.

$d = 1 + 2i$

$a_1 = -6 - 2i$

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

$a_{10} = -6 - 2i + (10 - 1)(1 + 2i) = 3 + 16i$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_{10} = \frac{(-6 - 2i + 3 + 16i)10}{2} = -15 + 70i$$

127. Simplifica la siguiente expresión para cada $n \in \mathbb{N}$.

$$1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^n$$

Observamos que $1 + i + i^2 + i^3 = 0$.

Sea $m \in \mathbb{N}$:

Si $n = 4m - 4$ entonces la expresión vale 1.

Si $n = 4m - 3$ entonces la expresión vale $1 + i$.

Si $n = 4m - 2$ entonces la expresión vale i.

Si $n = 4m - 1$ entonces la expresión vale 0.

128. Si el número complejo $a + bi$ tiene módulo m y argumento α, ¿cómo expresarías en forma binómica un número complejo con módulo $6m$ y argumento $2\pi - \alpha$? ¿Y si el módulo es $3m$ y el argumento es $\alpha + \frac{3\pi}{2}$?

Sea $w = c + di$ el número complejo que tiene por módulo $6m$ y argumento $2\pi - \alpha$.

$c = 6\sqrt{a^2 + b^2}\ \cos(2\pi - \alpha) = 6\sqrt{a^2 + b^2}\ \cos\alpha$

$d = 6\sqrt{a^2 + b^2}\ \operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -6\sqrt{a^2 + b^2}\ \operatorname{sen}\alpha$

Sea $v = e + fi$ el número complejo que tiene por módulo $3m$ y argumento $\alpha + \frac{3\pi}{2}$.

$$e = 3\sqrt{a^2 + b^2}\ \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = 3\sqrt{a^2 + b^2}\ \operatorname{sen}\alpha$$

$$f = 3\sqrt{a^2 + b^2}\ \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -3\sqrt{a^2 + b^2}\ \cos\alpha$$

129. **Sea $z = r_\alpha$ un número complejo en forma polar y $\bar{z}$ su conjugado. Calcula el valor del cociente.**

$$\frac{\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\ldots\cdot\cos n\alpha}{(z+\bar{z})\cdot[z^2+(\bar{z})^2]\cdot\ldots\cdot[z^n+(\bar{z})^n]}$$

$z = r_\alpha = r\,(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$

$\bar{z} = r_{360^\circ-\alpha} = r\,(\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha)$

$$\frac{\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\ldots\cdot\cos n\alpha}{(z+\bar{z})\cdot\left(z^2+(\bar{z})^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(z^n+(\bar{z})^n\right)} =$$

$$= \frac{\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\ldots\cdot\cos n\alpha}{(r\,(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)+r\,(\cos\alpha-i\,\text{sen}\,\alpha))\cdot\ldots\cdot(r^n\,(\cos n\alpha+i\,\text{sen}\,n\alpha)+r^n\,(\cos n\alpha-i\,\text{sen}\,n\alpha))} =$$

$$= \frac{\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\ldots\cdot\cos n\alpha}{2r\cos\alpha\cdot 2r^2\cos 2\alpha\cdot 2r^n\cos n\alpha} = \frac{1}{2^n\cdot r^{\frac{n+n^2}{2}}}$$

130. **Dada la ecuación $z^2 + (a + bi)z + c + di = 0$, con a, b, c y d números reales, encuentra la relación entre ellos para que sus raíces tengan el mismo argumento.**

$z^2 + (a+bi)z + c + di = 0$

$$z = \frac{-a-bi\pm\sqrt{(a+bi)^2-4(c+di)}}{2} = \frac{-a-bi\pm\sqrt{a^2-b^2+2abi-4c-4di}}{2}$$

Para que tengan el mismo argumento, el cociente entre la parte imaginaria y la parte entera debe ser el mismo.

$a^2 - b^2 + 2abi - 4c - 4di = 0$

$$\left.\begin{aligned} a^2-b^2-4c&=0\\ 2ab-4d&=0\end{aligned}\right\}$$

Como solo tenemos dos ecuaciones y cuatro incógnitas tenemos que dejar dos de las incógnitas en función de las otras.

$$a_1 = \frac{\left(\sqrt{2c^2+2d^2}+\sqrt{2}c\right)\sqrt{\sqrt{c^2+d^2}-c}}{d} \qquad b_1 = \sqrt{2\sqrt{c^2+d^2}-2c}$$

$$a_2 = -\frac{\left(\sqrt{2c^2+2d^2}+\sqrt{2}c\right)\sqrt{\sqrt{c^2+d^2}-c}}{d} \qquad b_2 = -\sqrt{2\sqrt{c^2+d^2}-2c}$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{\sqrt{c^2+d^2}+c}\left(\sqrt{2c^2+2d^2}-\sqrt{2}c\right)i}{d} \qquad b_3 = -\sqrt{2\sqrt{c^2+d^2}+2ci}$$

$$a_4 = \frac{\sqrt{-\sqrt{c^2+d^2}+c}\left(\sqrt{2c^2+2d^2}-\sqrt{2}c\right)i}{d} \qquad b_4 = \sqrt{2\sqrt{c^2+d^2}+2ci}$$

PARA PROFUNDIZAR

131. Elige la respuesta adecuada. (Concurso de Primavera)

¿Cuántas ternas ordenadas (x, y, z) de enteros no negativos menores que 20 verifican que hay justamente dos elementos distintos en el conjunto $\{i^x, (1+i)^y, z\}$, siendo $i^2 = -1$?	149	205	215	225	235
Uno de los números complejos z que verifican el sistema $\begin{cases} z \cdot t = 6_{60} \\ \dfrac{z}{t} = 3_{30°} \end{cases}$ es:	$2 + 2\sqrt{3}i$	$2\sqrt{3} - 2i$	$3 + 3i$	$2 + 2i$	$\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
¿Cuál de los siguientes números no es raíz del polinomio $z^4 - 5z^2 - 36$?	$2i$	$2_{180°}$	$2_{270°}$	$3_{180°}$	3
¿Para qué valor de n se verifica que $i + 2i^2 + 3i^3 + + 4i^4 + ... + ni^n$ es el número complejo $48 + 49i$?	24	48	49	97	98
El valor de $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i}\right)^{12}$ es:	1	16	243	1024	$-1-\sqrt{3}$

□ Para que en una terna dos elementos sean distintos, tiene que suceder que dos de ellos sean iguales y el tercero diferente. En este caso puede suceder que $i^x = z$, $i^x = (1+i)^y$ o $(1+i)^y = z$.

Si lo pasamos a polares, tenemos $\{1_{90x}, \sqrt{2^y}_{45 \cdot y}, z_0\}$.

Si $i^x = z$ e $y \neq z$, implica que $1_{90x} = z_0$ y $\sqrt{2^y}_{45 \cdot y} \neq 1_{90x}$.

$1_{90x} = z_0 \rightarrow z = 1$ y x es múltiplo de 4 (0 mod 4).

$\sqrt{2^y}_{45 \cdot y} \neq 1_0 \rightarrow y \neq 0$

Por lo que hay 5 casos para la x (0, 4, 8, 12, 16), 19 casos para la y (1, 2, 3, 4, ..., 18 y 19), un caso para la z (1). En total $5 \cdot 19 \cdot 1 = 95$ casos.

Si $i^x = (1+i)^y$ e $i^x \neq z$, implica que $1_{90x} = \sqrt{2^y}_{45 \cdot y}$ y $z_0 \neq 1_{90x}$.

$1_{90x} = \sqrt{2^y}_{45 \cdot y} \rightarrow y = 0$ y x es múltiplo de 4 (0 mod 4).

$z_0 \neq 1_{90x} \rightarrow z \neq 1$ o x no es múltiplo de 4 (0 mod 4) (esto no es posible porque tiene que ser múltiplo de 4 por lo anterior).

Por lo que hay 5 casos para la x (0, 4, 8, 12, 16), un casos para la y (0), 19 casos para la z (1, 2, 3, 4, ..., 18 y 19). En total, $5 \cdot 19 \cdot 1 = 95$ casos.

Si $(1+i)^y = z$ e $i^x \neq z$, implica que $\sqrt{2^y}_{45 \cdot y} = z_0$ y $z_0 \neq 1_{90x}$.

$\sqrt{2^y}_{45 \cdot y} = z_0 \rightarrow z = 2^{y/2}$ e y es múltiplo de 8 (0 mod 8) (el valor 16 de y no es válido porque $z = 2^8 > 19$).

$z_0 \neq 1_{90x} \rightarrow x$ no es múltiplo de 4 (0 mod 4) o $z \neq 1$.

Por lo que hay 2 casos para la y (0, 8), para cada y un solo valor de z ($y = 0$, $z = 1$; $y = 8$, $z = 16$), para $y = 0$, $z = 1$, x puede ser cualquier no múltiplo de 4; 15 posibilidades; para $y = 8$, $z = 16$, x puede tomar cualquier valor; 20 posibilidades. En total hay $15 + 20 = 35$ casos.

Sumando los tres casos tenemos $95 + 95 + 35 = 215$.

- Despejando z de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, se tiene:

  $z = t \cdot 3_{30^\circ} \rightarrow t^2 \cdot 3_{30^\circ} = 6_{60^\circ}$

  Despejando t:

  $$t^2 = 2_{30^\circ} \rightarrow t = \sqrt{2_{30^\circ}} \rightarrow t_1 = \sqrt{2}_{15^\circ},\ t_2 = \sqrt{2}_{195^\circ}$$

  $$z = \frac{6_{60^\circ}}{\sqrt{2}_{15^\circ}} = 3\sqrt{2}_{45^\circ} = 3 + 3i$$

- $$t = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} \rightarrow t_1 = 9,\ t_2 = -4$$

  $z_1 = 3$ $z_2 = -3$ $z_3 = 2i$ $z_4 = -2i$

  No es solución $2_{180^\circ} = -2$.

- Observamos que cada cuatro números estamos sumando $2 - 2i$.

  Para llegar a 48 necesitamos $24 \cdot 4 = 96$ números, y obtenemos $48 - 48i$.

  El siguiente número será $97i^{97} = 97i$.

  Por lo que $i + 2i^2 + 3i^3 + \ldots + 97i^{97} = 48 - 48i + 97i = 48 + 49i \rightarrow n = 97$.

- $1 + i\sqrt{3} = 2_{60^\circ}$ y $-1 + i\sqrt{3} = 2_{300^\circ}$. Entonces, realizando la operación dada en coordenadas polares:

  $$\left(\frac{2_{60^\circ}}{2_{300^\circ}}\right)^{12} = \left(1_{-240^\circ}\right)^{12} = \left(1_{120^\circ}\right)^{12} = 1_{1440^\circ} = 1_{0^\circ} = 1$$

132. Demuestra que si un número complejo cualquiera z es una raíz del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales, su conjugado $\bar{z}$ es también una raíz de dicho polinomio.

$z = d + ei$

$$\begin{aligned} P(d+ei) &= a(d+ei)^2 + b(d+ei) + c = a(d^2 - e^2 + 2dei) + bd + ebi + c = \\ &= ad^2 - ae^2 + 2adei + bd + ebi + c = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, resulta que: $ad^2 - ae^2 + bd + c = 0$ $2adei + ebi = 0$

$$\begin{aligned} P(d-ei) &= a(d-ei)^2 + b(d-ei) + c = a(d^2 - e^2 - 2dei) + bd - ebi + c = \\ &= ad^2 - ae^2 - 2adei + bd - ebi + c = \\ &= ad^2 - ae^2 + bd + c - (2adei + ebi) = 0 \end{aligned}$$

133. Calcula las cinco soluciones complejas de la siguiente ecuación.

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

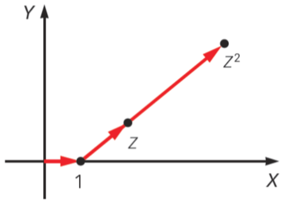
El primer término es la suma de los términos de una progresión geométrica.

$a_1 = 1, r = x$ $S_5 = \dfrac{(x^6 - 1)}{x - 1}$

Por tanto, resulta que: $\dfrac{(x^6-1)}{x-1} = 0 \rightarrow x^6 - 1 = 0 \rightarrow x = \sqrt[5]{1} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1_{60^\circ} \\ x_3 = 1_{120^\circ} \\ x_4 = 1_{180^\circ} \\ x_5 = 1_{240^\circ} \\ x_6 = 1_{300^\circ} \end{cases}$

Las soluciones son: x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6.

134. **Halla la expresión de z sabiendo que los afijos de los números complejos 1, z y z^2 están alineados.**



Las coordenadas de los números complejos son:

$A(1, 0) \qquad B(a, b) \qquad C(a^2 - b^2, 2ab)$

Calculamos los vectores:

$\overrightarrow{AB} = (a - 1, b) \qquad \overrightarrow{AC} = (a^2 - b^2 - 1, 2ab)$

Los puntos están alineados si los vectores son proporcionales.

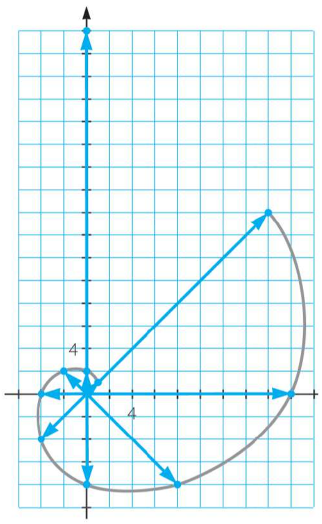
$\overrightarrow{AB} = t\,\overrightarrow{AC} \to (a - 1, b) = t\,(a^2 - b^2 - 1, 2ab)$

$$\left.\begin{array}{l} a - 1 = t(a^2 - b^2 - 1) \\ b = t \cdot 2ab \end{array}\right\} \xrightarrow{t = \frac{1}{2a}} a - 1 = \left(\frac{1}{2a}\right)(a^2 - b^2 - 1)$$

$$\to a^2 - 2a + 1 = b \to b = a - 1$$

Por tanto, resulta que: $z = a + (a - 1)i$

135. **Representa el número $1 + i$. Pásalo a forma polar, calcula sus 10 primeras potencias y represéntalas en el plano complejo. Observa que los afijos de esos números complejos describen una curva espiral.**



$z = 1 + i = \sqrt{2}_{45°}$
$z^2 = 2_{90°}$
$z^3 = 2\sqrt{2}_{135°}$
$z^4 = 4_{180°}$
$z^5 = 4\sqrt{2}_{225°}$
$z^6 = 8_{270°}$
$z^7 = 8\sqrt{2}_{315°}$
$z^8 = 16_{0°}$
$z^9 = 16\sqrt{2}_{45°}$
$z^{10} = 32_{90°}$

136. **Calcula, en el campo complejo, las raíces del polinomio $ax^2 + bx + c$, sabiendo que son iguales que las de los polinomios $cx^2 + ax + b$ y $bx^2 + cx + a$.**

(Certamen Número de Oro. Argentina)

Aplicando la propiedad de la suma de las raíces de un polinomio de segundo grado, y suponiendo que las raíces comunes son α y β:

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{a}{c} = -\frac{c}{b} \to a = b = c \to$ El polinomio es $ax^2 + ax + a$, con raíces $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

137. **Sean los conjuntos de números complejos:**

$$A = \{z: \arg[z - (2 + 3i)] = \frac{\pi}{4}$$

$$B = \{z: |z - (2 + i)| < 2\}$$

Determina la proyección ortogonal del conjunto intersección de *A* y *B* sobre el eje *X*.

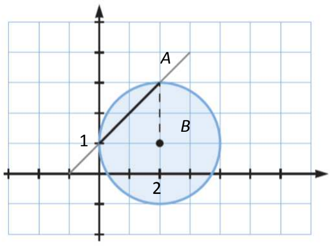
(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)

Los conjuntos *A* y *B* son:

$$A = \left\{z = x + yi : \arg[z-(2+3i)] = \frac{\pi}{4}\right\} = \{(x, y) \,/\, x - y + 1 = 0\}$$

$$B = \{z = x + yi : |z-(2+i) < 2|\} = \{(x, y) \,/\, (x-2)^2 + (y-1)^2 < 4\}$$

Sea *A* el conjunto formado por los puntos de la recta $x - y + 1 = 0$, y *B* el de los puntos interiores de la circunferencia de ecuación $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ con centro $C\,(2, 1)$ y radio $r = 2$.



La intersección de ambos conjuntos es la solución del sistema $\left.\begin{matrix} x-y+1=0 \\ (x-2)^2+(y-1)^2<4 \end{matrix}\right\}$, que es el segmento abierto *D* (0, 1) y *E* (2, 3).

Su proyección sobre el eje *X* es el segmento de extremos *O* (0, 0) y *E'* (2, 0), sin incluir *O* y *E'*.

138. **Sea la sucesión de números complejos $\{a_n\}$, $n \geq 1$:**

$$a_n = (1 + i) \cdot \left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n}}\right)$$

Averigua si existe un número natural *m* tal que:

$$\sum_{n=1}^{m} |a_n - a_{n+1}| = 1\,990$$

(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)

Los módulos de las diferencias de los términos de la sucesión valen:

$$|a_n - a_{n+1}| = \left|(1+i)\cdot\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right) - (1+i)\cdot\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(1+\frac{i}{\sqrt{n+1}}\right)\right| =$$

$$= \left|\left[(1+i)\cdot\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right)\right]\cdot\left[1-\left(1+\frac{i}{\sqrt{n+1}}\right)\right]\right|$$

Como el módulo del producto es el producto de los módulos, resulta:

$$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{m}|a_n - a_{n+1}| = 1 + 1 + \ldots + 1 = m \rightarrow m = 1990$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. ¿Qué es un circuito eléctrico y por qué elementos está formado?

Un circuito eléctrico es un camino cerrado por el que circula la corriente. Está formado por resistencias, inductancias, condensadores y fuentes o dispositivos electrónicos semiconductores.

2. ¿Qué son la impedancia y la admitancia en un circuito eléctrico?

La impedancia y la admitancia son parámetros para analizar un circuito eléctrico. La impedancia es la oposición de un conductor al flujo de una corriente alterna.

La admitancia es la facilidad que el circuito ofrece al paso de la corriente.

3. ¿Qué relación numérica existe entre la impedancia y la admitancia?

La admitancia, Y, es la inversa de la impedancia, Z, es decir, $Y=\frac{1}{Z}$.

4. Averigua las aplicaciones de la impedancia y la admitancia. Por ejemplo, ¿qué es la impedancia del cuerpo humano? ¿Qué importancia crees que tiene?

La impedancia y la admitancia se utilizan en la resolución de circuitos eléctricos.

La impedancia es la generalización de la resistencia que opone el cuerpo humano a la electrocución, según las condiciones de la piel.

5. Si un circuito eléctrico tiene una impedancia de $Z = 3 + 4j$, determina su magnitud a partir del módulo del número complejo y, por otro lado, calcula la admitancia en siemens como un número complejo.

Magnitud: $\sqrt{3^2+4^2}=5\ \Omega$ Admitancia: $\frac{1}{3+4j}\cdot\frac{3-4j}{3-4j}=\frac{3-4j}{5}\ S$

6. Si en un circuito eléctrico la admitancia es 0,25 S, calcula su impedancia.

$$Z=\frac{1}{Y}=\frac{1}{0,25}=4\ \Omega$$

7. Multiplica el numerador y el denominador en la expresión de admitancia (Y) por el conjugado $R - Xj$ para obtener la parte real de la admitancia, conocida como conductancia, y la parte imaginaria, conocida como susceptancia.

$Y=\frac{1}{R+Xj}\cdot\frac{R-Xj}{R-Xj}=\frac{R-Xj}{R^2+X^2}\rightarrow$ Conductancia: $\frac{R}{R^2+X^2}$ Susceptancia: $\frac{-X}{R^2+X^2}$

8. Si un circuito eléctrico tiene una impedancia de $Z = 6 - 4j$, halla su conductancia y su susceptancia.

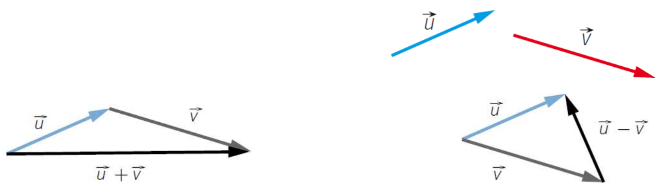
Si un circuito tiene una impedancia de $Z = 6 - 4j$, halla su conductancia y su susceptancia.

$\frac{1}{6-4j}\cdot\frac{6+4j}{6+4j}=\frac{3+2j}{26}\rightarrow$ Conductancia: $\frac{3}{26}$ Susceptancia: $\frac{1}{13}$

Geometría analítica

ACTIVIDADES

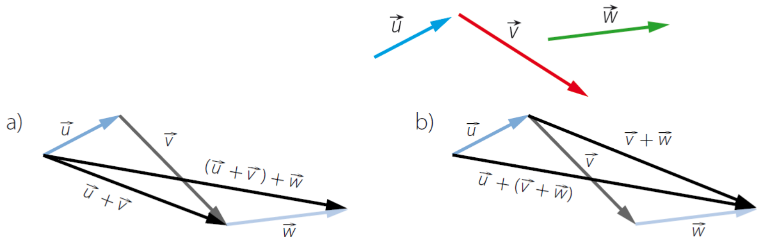
1. **Copia estos vectores y calcula gráficamente $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.**



2. **Realiza estas sumas.**

a) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

b) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

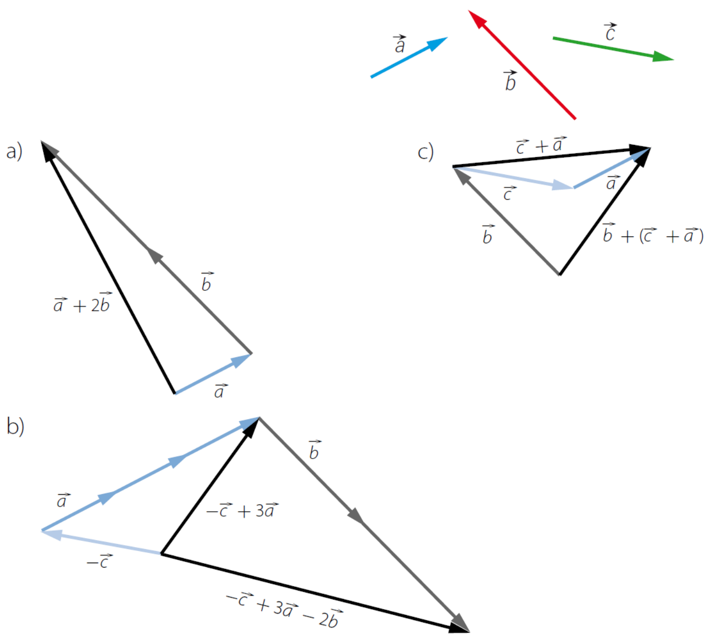


3. **Copia los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, y realiza gráficamente las siguientes operaciones.**

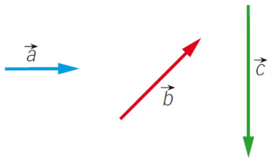
a) $\vec{a} + 2\vec{b}$

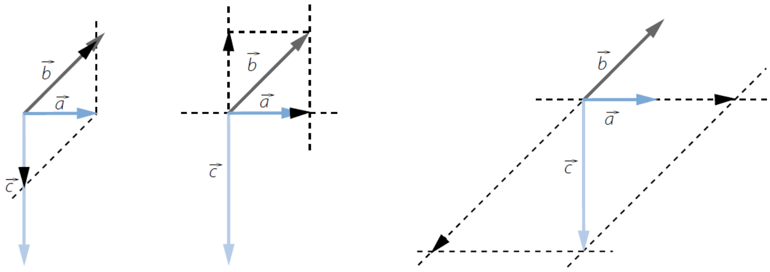
b) $-\vec{c} + 3\vec{a} - 2\vec{b}$

c) $\vec{b} + (\vec{c} + \vec{a})$

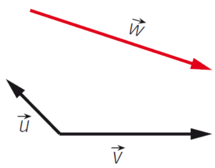


4. **Escribe el vector $\vec{a}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$.**
Expresa $\vec{b}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{c}$, y también $\vec{c}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

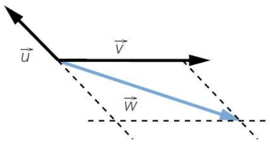




5. **Comprueba que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base, y expresa el vector $\vec{w}$ en función de ellos.**



Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección, por lo que forman una base.

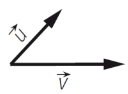


6. **Dada la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$:**

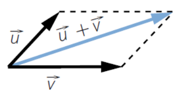
a) Calcula $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$.

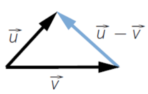
b) Comprueba que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman una base.

c) Expresa $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



a)





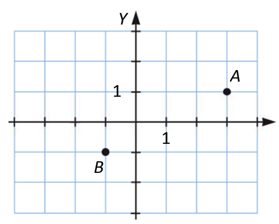
b) Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen distinta dirección, luego forman una base.

c) $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{2} + \dfrac{\vec{b}}{2}$; $\vec{v} = \dfrac{\vec{a}}{2} - \dfrac{\vec{b}}{2}$

7. **Dibuja los puntos $A(3, 1)$ y $B(-1, -1)$ y calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, y sus módulos.**

$\overrightarrow{AB} = (-1-3, -1-1) = (-4, -2)$ $\qquad$ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$

$\overrightarrow{BA} = (3-(-1), 1-(-1)) = (4, 2)$ $\qquad$ $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$



8. Encuentra *x* para que estos pares de vectores sean paralelos.

a) (3, 2) y (9, *x*)

b) (−1, 4) y (*x*, −2)

a) $\frac{9}{3}=\frac{x}{2}\to x=\frac{2\cdot 9}{3}=6$

b) $\frac{-1}{x}=\frac{4}{-2}\to x=\frac{-2\cdot(-1)}{4}=\frac{1}{2}$

9. Dados los puntos *A*(3, −1), *B*(−1, 2), *C*(0, 2) y *D*(−1, −2), halla estos vectores.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

b) $2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$

c) $-\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AD}$

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(-4,3)+(-1,-4)=(-5,-1)$

b) $2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2(-3,3)-(0,-4)=(-6,6)-(0,-4)=(-6,10)$

c) $-\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AD}=-(1,0)+2(-4,-1)=(-1,0)+(-8,-2)=(-9,-2)$

10. Dados $\vec{u}=(2,-1)$ y $\vec{v}=(0,3)$, realiza las siguientes operaciones de vectores.

a) $\vec{u}-3\vec{v}$

b) $5\vec{u}+\vec{v}$

c) $-\vec{u}+2\vec{v}$

a) $\vec{u}-3\vec{v}=(2,-1)-(0,-9)=(2,8)$

b) $5\vec{u}+\vec{v}=(10,-5)+(0,3)=(10,-2)$

c) $-\vec{u}+2\vec{v}=(-2,1)+(0,6)=(-2,7)$

11. Dados $\vec{u}=(0,2)$, $\vec{v}=(1,-1)$ y $\vec{w}=(0,-1)$, calcula.

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$

b) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$

c) $\vec{w}\cdot\vec{v}$

d) $\vec{u}\cdot\vec{w}$

e) $\vec{u}\cdot(\vec{v}-2\vec{w})$

f) $-2\vec{u}\cdot 3\vec{v}$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(0,2)\cdot(1,-1)=-2$

b) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=(0,2)\cdot((1,-1)+(0,-1))=(0,2)\cdot(1,-2)=-4$

c) $\vec{w}\cdot\vec{v}=(0,-1)\cdot(1,-1)=1$

d) $\vec{u}\cdot\vec{w}=(0,2)\cdot(0,-1)=-2$

e) $\vec{u}\cdot(\vec{v}-2\vec{w})=(0,2)\cdot((1,-1)-(0,-2))=(0,2)\cdot(1,1)=2$

f) $-2\vec{u}\cdot 3\vec{v}=(0,-4)\cdot(3,-3)=12$

12. Señala cuáles de los siguientes vectores son perpendiculares entre sí y cuáles no.

$$\vec{u}=(-1,3)\qquad \vec{v}=(12,4)\qquad \vec{w}=\left(\frac{1}{3},-1\right)$$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=-1\cdot 12+3\cdot 4=0$

$\vec{u}\cdot\vec{w}=-1\cdot\frac{1}{3}+3\cdot(-1)=-\frac{10}{3}\neq 0$

$\vec{v}\cdot\vec{w}=12\cdot\frac{1}{3}+4\cdot(-1)=0$

Son perpendiculares $\vec{u}$ y $\vec{w}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

13. Halla el ángulo de los siguientes vectores.

a) $\vec{a}=(2,-1)$ y $\vec{b}=(3,2)$

b) $\vec{a}=(5,2)$ y $\vec{b}=(-1,1)$

c) $\vec{a}=(-3,-1)$ y $\vec{b}=(2,3)$

d) $\vec{a}=(-1,5)$ y $\vec{b}=(4,-2)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{2\cdot 3 + 2\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{3^2+2^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{65}} \to \alpha = 60{,}3^\circ$

b) $\cos\alpha = \dfrac{-1\cdot 5 + 2\cdot 1}{\sqrt{5^2+2^2}\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{-3}{\sqrt{58}} \to \alpha = 113{,}2^\circ$

c) $\cos\alpha = \dfrac{-3\cdot 2 + 3\cdot(-1)}{\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+3^2}} = \dfrac{-9}{\sqrt{130}} \to \alpha = 217{,}9^\circ$

d) $\cos\alpha = \dfrac{-1\cdot 4 + 5\cdot(-2)}{\sqrt{(-1)^2+5^2}\sqrt{4^2+(-2)^2}} = \dfrac{-14}{\sqrt{520}} \to \alpha = 232{,}1^\circ$

14. Encuentra tres vectores perpendiculares y otros tres paralelos a los siguientes vectores.

a) $\vec{a} = (1, 1)$ b) $\vec{b} = (3, 2)$ c) $\vec{c} = (0, 1)$

Respuesta abierta.

a) $\vec{a} = (1, 1)$

Vectores paralelos: (2, 2), (3, 3) y (4, 4)

Vectores perpendiculares: (−1, 1), (−2, 2) y (−3, 3)

b) $\vec{b} = (3, 2)$

Vectores paralelos: (6, 4), (9, 6) y (12, 8)

Vectores perpendiculares: (2, −3), (4, −6) y (6, −9)

c) $\vec{c} = (0, 1)$

Vectores paralelos: (0, 2), (0, 3) y (0, 4)

Vectores perpendiculares: (1, 0), (2, 0) y (3, 0)

15. Dados los puntos $A(-1, 3)$, $B(5, 1)$ y $C(0, 3)$, calcula la distancia del punto C al punto medio de A y B.

Punto medio de A y B: $M\left(\dfrac{-1+5}{2}, \dfrac{3+1}{2}\right) = (2, 2)$

$d(C, M) = \left|\overrightarrow{CM}\right| = \sqrt{(2-0)^2+(2-3)^2} = \sqrt{5}$

16. Halla los simétricos de los puntos $A(2, -5)$ y $B(-1, 3)$, respecto del punto $C(2, -1)$.

$(2, -1) = \left(\dfrac{2+x}{2}, \dfrac{-5+y}{2}\right) \to x = 2,\ y = 3$

El simétrico respecto de A es $(2, 3)$.

$(2, -1) = \left(\dfrac{-1+x}{2}, \dfrac{3+y}{2}\right) \to x = 5,\ y = -5$

El simétrico respecto de B es $(5, -5)$.

17. Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(7, 3)$ y $B(2, 2)$.

$\overrightarrow{AB} = (-5, -1)$

Ecuación vectorial:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \to (x, y) = (7, 3) + t(-5, -1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 7 - 5t \\ y = 3 - t \end{array}\right\}$$

18. **Halla las ecuaciones paramétricas de la recta cuyo vector director es $\vec{v} = (-1, 0)$ y pasa por el punto $A(3, 2)$.**

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 \end{array}\right\}$$

19. **Calcula las ecuaciones vectorial y paramétricas de las rectas bisectrices de los cuadrantes.**

Bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

Ecuación vectorial:

$(x, y) = t(1, 1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t \end{array}\right\}$$

Bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.

Ecuación vectorial:

$(x, y) = t(1, -1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -t \end{array}\right\}$$

20. **Halla la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto medio de $A(3, 1)$ y $B(5, -3)$ y por el punto $C(0, 3)$.**

$$\left.\begin{array}{l} M\left(\dfrac{3+5}{2}, \dfrac{1-3}{2}\right) = (4, -1) \\ \overrightarrow{CM} = (4, -4) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = t \cdot 4 \\ y = 3 - t \cdot 4 \end{array}\right\}$$

21. **Halla la ecuación continua de la recta que pasa por $A(2, -1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{d} = (2, -1)$.**

Averigua si el punto $P(3, 1)$ está en la recta.

Calculamos la ecuación continua de la recta:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-(-1)}{-1}$$

Comprobamos si el punto P cumple las ecuaciones de la recta:

$$\frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1-(-1)}{-1} = -2$$

Luego el punto P no pertenece a la recta.

22. **Escribe la ecuación general de la recta que pasa por $A(0, -2)$ y $B(4, -1)$.**

$$\overrightarrow{AB} = (4, 1) \rightarrow \frac{x-0}{4} = \frac{y-(-2)}{1} \rightarrow \frac{x}{4} - (y+2) = 0 \rightarrow x - 4y - 8 = 0$$

23. Dadas las siguientes ecuaciones paramétricas de una recta, determina.

$$\left.\begin{matrix} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \end{matrix}\right\}$$

a) La ecuación continua de la recta.

b) La ecuación general de la recta.

a) $\left.\begin{matrix} x = 1-2t \\ y = -3+t \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} t = \dfrac{x-1}{-2} \\ t = y+3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \dfrac{x-1}{-2} = y+3$

b) $\dfrac{x-1}{-2} = y+3 \rightarrow -2y-6 = x-1 \rightarrow x+2y+5 = 0$

24. Halla las ecuaciones punto-pendiente y explícita de la recta que pasa por $A(2, -3)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (-2, 1)$.

$m = \dfrac{d_2}{d_1} = -\dfrac{1}{2}$

Ecuación punto-pendiente: $y+3 = -\dfrac{1}{2}(x-2)$

$y = -\dfrac{1}{2}x + n \rightarrow -3 = -\dfrac{1}{2} \cdot 2 + n \rightarrow n = -2$

Ecuación explícita: $y = -\dfrac{1}{2}x - 2$

25. Calcula la recta que pasa por el punto $A(2, 7)$ y forma con el eje de abscisas un ángulo de 60°. Explica cómo lo haces.

Calculamos la pendiente: $tg\ 60° = m \rightarrow m = \sqrt{3}$

Hallamos la ecuación punto-pendiente: $y - 7 = \sqrt{3}(x - 2)$

26. Estudia la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

$r: \dfrac{x}{3} = y - 5$

$s: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \end{cases}$

Las ecuaciones generales de *r* y *s* son:

$r: x - 3y + 15 = 0$ $\qquad$ $s: 3x + y - 6 = 0$

Como $\dfrac{1}{3} \neq \dfrac{-3}{1}$, las rectas son secantes.

27. Estudia la posición relativa de dos rectas que tienen vectores directores no proporcionales. ¿Qué condición han de verificar para que las rectas sean perpendiculares?

Si los vectores directores no son proporcionales, las rectas son secantes.

Sea $\vec{d} = (d_1, d_2)$ el vector director de la recta *r*, y sea $\vec{c} = (c_1, c_2)$ el vector director de la recta *s*.

Las rectas son perpendiculares si el producto escalar de los vectores es cero.

$d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2 = 0 \rightarrow d_1 \cdot c_1 = -d_2 \cdot c_2 \rightarrow \vec{c} = (-d_2, d_1)$

28. **Halla la distancia que existe entre el punto $P(2, -1)$ y la recta r, cuya ecuación es la siguiente:**

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2}$$

Expresamos la recta en forma general:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2} \rightarrow 2x + 3y - 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}\ u$$

29. **Calcula la distancia que separa la siguiente recta del origen de coordenadas.**

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\}$$

Expresamos la recta en forma general:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\} \rightarrow -x + 3 = \frac{y-2}{2} \rightarrow -2x - y + 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}\ u$$

30. **Halla la distancia entre estas dos rectas paralelas.**

$$r: 5x - 2y + 2 = 0 \qquad s: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{5}$$

Tomamos el punto $P(0, 1)$ que pertenece a la recta r.

La ecuación general de la recta s es $5x - 2y + 6 = 0$.

$$d(P, s) = \frac{|5 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{4\sqrt{29}}{29}$$

31. **Calcula el ángulo que forman estas dos rectas al cortarse.**

$$r: y = x - 3 \qquad s: \frac{x-1}{-2} = y + 3$$

$r: -x + y + 3 = 0 \qquad s: x + 2y + 5 = 0$

$$\cos\alpha = \frac{|-1 \cdot 1 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \rightarrow \alpha = 71{,}57^\circ$$

SABER HACER

32. **Determina si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base y halla las coordenadas del vector $\vec{w}$ especto de ella en cada caso.**

a) $\vec{u} = (-1, 0), \vec{v} = (2, -3)$ y $\vec{w} = (3, -3)$

b) $\vec{u} = (3, -3), \vec{v} = (1, -4)$ y $\vec{w} = (5, -2)$

a) Forman una base, pues $\frac{-1}{2} \neq \frac{0}{-3}$.

$$(3, -3) = a(-1, 0) + b(2, -3)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = -a + 2b \\ -3 = -3b \end{array}\right\} \rightarrow b = 1,\ a = -1 \rightarrow \vec{w} = -\vec{u} + \vec{v}$$

b) Forman una base, pues $\frac{3}{1} \neq \frac{-3}{-4}$.

$(5,-2) = a(3,-3) + b(1,-4)$

$$\left.\begin{array}{l} 5 = 3a + b \\ -2 = -3a - 4b \end{array}\right\} \rightarrow b = -1,\ a = 2 \rightarrow \vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$$

33. **Si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equivalentes, con A (2, 1) y B (0, −2), calcula el extremo desconocido en cada caso.**

a) $C(-5, 7)$
b) $D(-5, 7)$
c) $C(0, -2)$
d) $D(0, -2)$
e) $C(7, -5)$
f) $D(7, -5)$
g) $C(0, 0)$
h) $D(0, 0)$

$\overrightarrow{AB} = (-2, -3)$

a) $\overrightarrow{CD} = (a+5, b-7) = (-2,-3) \rightarrow D(-7, 4)$

b) $\overrightarrow{CD} = (-5-a, 7-b) = (-2,-3) \rightarrow C(-3, 10)$

c) $\overrightarrow{CD} = (a, b+2) = (-2,-3) \rightarrow D(-2,-5)$

d) $\overrightarrow{CD} = (-a, -2-b) = (-2,-3) \rightarrow C(2, 1)$

e) $\overrightarrow{CD} = (a-7, b+5) = (-2,-3) \rightarrow D(5,-8)$

f) $\overrightarrow{CD} = (7-a, -5-b) = (-2,-3) \rightarrow C(9,-2)$

g) $\overrightarrow{CD} = (a, b) = (-2,-3) \rightarrow D(-2,-3)$

h) $\overrightarrow{CD} = (-a, -b) = (-2,-3) \rightarrow C(2, 3)$

34. **Halla las coordenadas de dos vectores sabiendo que su suma y su diferencia son:**

$\vec{u} + \vec{v} = (2, 3)$ $\qquad$ $\vec{u} - \vec{v} = (-1, 4)$

$\vec{u} = (a, b)$ $\qquad$ $\vec{v} = (c, d)$

$\vec{u} + \vec{v} = (a+c, b+d) = (2, 3)$ $\qquad$ $\vec{u} - \vec{v} = (a-c, b-d) = (-1, 4)$

$$\left.\begin{array}{l} a + c = 2 \\ a - c = -1 \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{1}{2},\ c = \frac{3}{2} \qquad \left.\begin{array}{l} b + d = 3 \\ b - d = 4 \end{array}\right\} \rightarrow b = \frac{7}{2},\ d = -\frac{1}{2}$$

35. **Halla los vectores que se piden a continuación.**

a) Perpendicular a $\vec{u} = (-2, 1)$ y de módulo 2.
b) Perpendicular a $\vec{u} = (3, 1)$ y de módulo 1.
c) Perpendicular a $\vec{u} = (-3, 4)$ y de módulo 5.
d) Perpendicular a $\vec{u} = (1, 1)$ y de módulo 1.

a) Un vector perpendicular a $\vec{u} = (-1, 1)$ es $\vec{v} = (1, 2)$.

Para obtener el vector de módulo 2, multiplicamos por 2 y dividimos entre el módulo del vector $\vec{v}$:

$$\vec{w} = \frac{2(1,2)}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

b) Un vector perpendicular a $\vec{u}=(-3,1)$ es $\vec{v}=(-1,3)$.

Para obtener el vector de módulo 1, dividimos entre el módulo del vector $\vec{v}$:

$$\vec{w}=\frac{(-1,3)}{\sqrt{(-1)^2+3^2}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

c) Un vector perpendicular a $\vec{u}=(-3,4)$ es $\vec{v}=(4,3)$.

Para obtener el vector de módulo 5, multiplicamos por 5 y dividimos entre el módulo del vector $\vec{v}$:

$$\vec{w}=\frac{5(4,3)}{\sqrt{4^2+3^2}}=(4,3)$$

d) Un vector perpendicular a $\vec{u}=(1,1)$ es $\vec{v}=(-1,1)$.

Para obtener el vector de módulo 1, dividimos entre el módulo del vector $\vec{v}$:

$$\vec{w}=\frac{(-1,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

36. Dibuja el cuadrilátero *ABCD* en unos ejes de coordenadas y halla su perímetro, teniendo en cuenta que las coordenadas de sus vértices son *A*(−4, −3), *B*(2, −3), *C*(2, 1) y *D*(−2, 2).

$|\overrightarrow{AB}|=|(6,0)|=6$ $\quad |\overrightarrow{BC}|=|(0,4)|=4$ $\quad |\overrightarrow{CD}|=|(-4,1)|=\sqrt{17}$ $\quad |\overrightarrow{DA}|=|(-2,-5)|=\sqrt{29}$

El perímetro del cuadrilátero es $P=10+\sqrt{17}+\sqrt{29}$.

37. Divide el segmento *AB* en tres partes iguales.

a) $A(-2,3)$ y $B(0,-1)$

b) $A(1,1)$ y $B(3,6)$

a) $\overrightarrow{AB}=(2,-4)$

$$P_1=A+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=(-2,3)+\frac{1}{3}(2,-4)=\left(-\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$$

$$P_2=A+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=(-2,3)+\frac{2}{3}(2,-4)=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

b) $\overrightarrow{AB}=(2,5)$

$$P_1=A+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=(1,1)+\frac{1}{3}(2,5)=\left(\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$$

$$P_2=A+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=(1,1)+\frac{2}{3}(2,5)=\left(\frac{7}{3},\frac{13}{3}\right)$$

38. Comprueba si los puntos *A*, *B* y *C* están alineados.

a) $A(-2,0)$, $B(1,-1)$ y $C(-5,-1)$

b) $A(0,0)$, $B(3,-1)$ y $C(2,-2)$

a) $\overrightarrow{AB}=(3,-1)$ $\quad \overrightarrow{AC}=(-3,-1)$

No están alineados, pues $\frac{3}{-3}\neq\frac{-1}{-1}$.

b) $\overrightarrow{AB}=(3,-1)$ $\quad \overrightarrow{AC}=(2,-2)$

No están alineados, pues $\frac{3}{2}\neq\frac{-1}{-2}$.

39. Halla la ecuación de la recta que pasa por *O*(0, 0):

a) Y pasa también por el punto $A(-5,2)$.

b) Y tiene pendiente $m=-2$.

a) El vector director es $\vec{d}=(-5,2)$ y pasa por el punto *O*.

Ecuaciones paramétricas $\longrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-5t \\ y=2t \end{array}\right\}$

b) Ecuación punto-pendiente $\longrightarrow$ $y=-2x$

40. Determina la ecuación de la recta paralela a $r: 3x - y - 3 = 0$ que pasa por el punto $P(0, -4)$.

El vector director es $\vec{d} = (1, 3)$.

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -4 + 3t \end{array}\right\}$

41. Halla la recta s paralela a $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{4}$ que está a 2 unidades de distancia.

La ecuación de la recta *s* es $4x - 3y + C = 0$.

Un punto de la recta *r* es $P(1, 1)$.

$$d(P, s) = \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + C|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|1 + C|}{5} = 2 \rightarrow C_1 = 9,\ C_2 = -11$$

42. Determina la ecuación de la recta perpendicular a $r: 3x - y - 3 = 0$ que pasa por el punto $P(0, -4)$.

El vector perpendicular al vector director de *r* es $(3, -1)$.

Ecuación en forma continua $\rightarrow \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+4}{-1}$

43. Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(0, 1)$ y forma un ángulo de 45° con $r: x + y - 1 = 0$.

Ecuación punto-pendiente $\rightarrow y - 1 = mx$

Ecuación general $\rightarrow mx - y + 1 = 0$

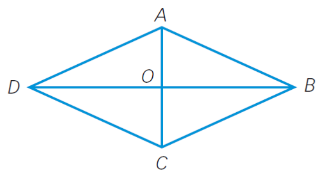
$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|m \cdot 2 - 1 \cdot 1|}{\sqrt{m^2 + 1} \cdot \sqrt{5}}$$

$$(2m - 1)^2 = \frac{5}{2}(m^2 + 1) \rightarrow 3m^2 - 8m - 3 = 0 \rightarrow m_1 = 3,\ m_2 = -\frac{1}{3}$$

Hay dos rectas: $s_1: y - 1 = 3x$ $\qquad$ $s_2: y - 1 = -\dfrac{1}{3}x$

ACTIVIDADES FINALES

44. Observa la figura y realiza las operaciones indicadas.



a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
b) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}$
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$
d) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$
e) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA}$
f) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AC}$
g) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$
h) $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC}$
i) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CD}$

d) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$

e) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{DC}$

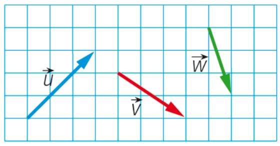
f) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$

g) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$

h) $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$

i) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD}$

45. **Realiza las siguientes operaciones.**

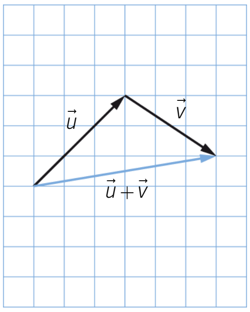


a) $\vec{u} + \vec{v}$
b) $\vec{v} + \vec{w}$
c) $\vec{u} + \vec{w}$

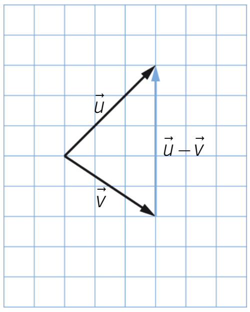
d) $\vec{u} - \vec{v}$
e) $\vec{v} - \vec{w}$
f) $\vec{u} - \vec{w}$

g) $2\vec{u} - \vec{v}$
h) $-\vec{v} + 2\vec{w}$
i) $-\vec{u} - 2\vec{w}$

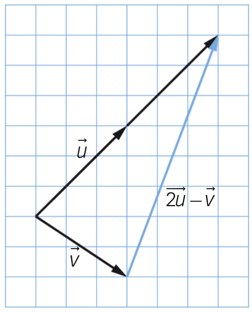
a)



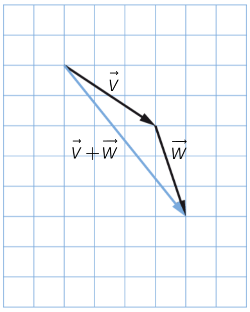
d)



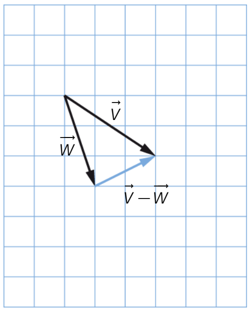
g)



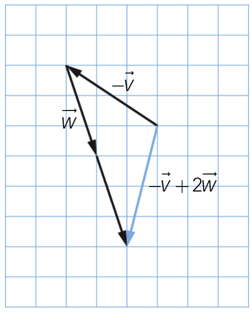
b)



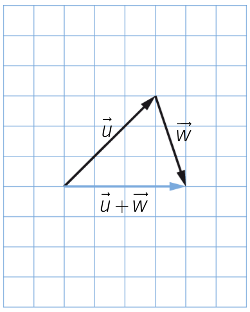
e)



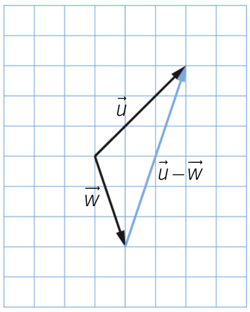
h)



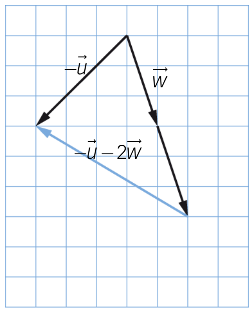
c)



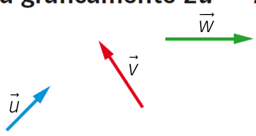
f)

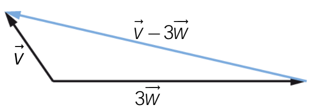


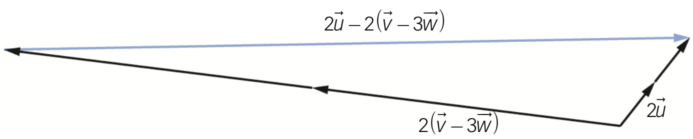
i)



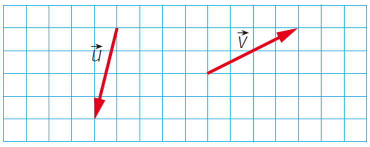
46. **Dados los siguientes vectores, calcula gráficamente $2\vec{u} - 2(\vec{v} - 3\vec{w})$.**







47. **Comprueba que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura forman una base.**

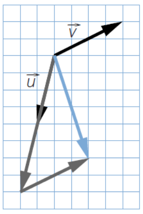


Dibuja los vectores con estas coordenadas en esa base.

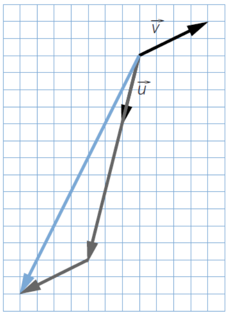
a) (2, 1) b) (3, −1) c) (−2, 3)

Como los vectores tienen distinta dirección, forman una base.

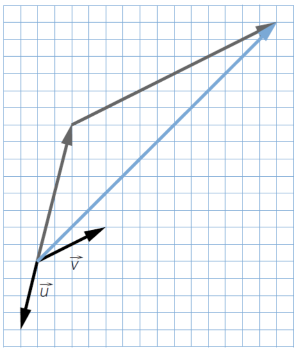
a)



b)



c)



48. **Comprueba si los vectores $\vec{u} = (-1, -3)$ y $\vec{v} = (4, 2)$ forman una base y, si es así, halla las coordenadas de los siguientes vectores respecto de ella.**

a) $\vec{a} = (2, 1)$ b) $\vec{b} = (3, -1)$ c) $\vec{c} = (-2, 3)$

Forman una base, pues $\frac{-1}{4} \neq \frac{-3}{2}$.

a) $(2, 1) = a(-1, -3) + b(4, 2)$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = -a + 4b \\ 1 = -3a + 2b \end{array}\right\} \rightarrow a = 0,\ b = \frac{1}{2}$$

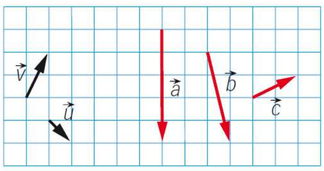
b) $(3, -1) = a(-1, -3) + b(4, 2)$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = -a + 4b \\ -1 = -3a + 2b \end{array}\right\} \rightarrow a = 1,\ b = 1$$

c) $(-2, 3) = a(-1, -3) + b(4, 2)$

$$\left.\begin{array}{l} -2 = -a + 4b \\ 3 = -3a + 2b \end{array}\right\} \rightarrow a = -\frac{8}{5},\ b = -\frac{9}{10}$$

49. **Escribe los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**



Escribe las coordenadas de cada vector respecto de la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

$\vec{u}=(1,-1)$ $\quad \vec{v}=(1,2)$ $\quad \vec{a}=(0,-5)$ $\quad \vec{b}=(1,-4)$ $\quad \vec{c}=(2,1)$

$$(0,-5)=a(1,-1)+b(1,2)\rightarrow \left.\begin{array}{l}0=a+b\\-5=-a+2b\end{array}\right\}\rightarrow a=\frac{5}{3},\ b=-\frac{5}{3}$$

$$(1,-4)=a(1,2)+b(1,-1)\rightarrow \left.\begin{array}{l}1=a+b\\-4=-a+2b\end{array}\right\}\rightarrow a=2,\ b=-1$$

$$(2,1)=a(1,2)+b(1,-1)\rightarrow \left.\begin{array}{l}2=a+b\\1=-a+2b\end{array}\right\}\rightarrow a=1,\ b=1$$

50. Expresa el vector $\vec{u}(7,6)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}=(6,-3)$ y $\vec{b}=(-1,3)$.

$$(7,6)=a(6,-3)+b(-1,3)\rightarrow \left.\begin{array}{l}7=6a-b\\6=-3a+3b\end{array}\right\}\rightarrow a=\frac{27}{15},\ b=\frac{19}{5}$$

51. Halla el módulo de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}$ y $2\vec{b}-\vec{c}$, dados $\vec{a}=(-3,4)$, $\vec{b}=(-5,-12)$ y $\vec{c}=(3,-1)$.

$|\vec{a}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}=13$

$|\vec{c}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

$\vec{a}+\vec{b}=(-8,-8)$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(-8)^2+(-8)^2}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$

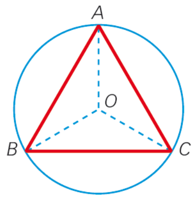
$2\vec{b}-\vec{c}=(-10,-24)+(-3,1)=(-13,-23)$

$|2\vec{b}-\vec{c}|=\sqrt{(-13)^2+(-23)^2}=\sqrt{698}$

52. Calcula las coordenadas del punto B para que los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AB}$ sean equivalentes, sabiendo que $\vec{u}=(2,-3)$ y $A(-1,2)$.

$\overrightarrow{AB}=(x+1,y-2)=(2,-3)\rightarrow B=(1,-1)$

53. El siguiente triángulo equilátero está inscrito en una circunferencia de radio 5 cm.



Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ $\qquad$ b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\cos\alpha=25\cdot\cos\left(-120^\circ\right)=-12,5$

b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|\cdot\cos\alpha=25\cdot\cos 120^\circ=-12,5$

54. **Considera que *A*, *B*, *C* y *D* son los vértices de un cuadrado de lado 1 cm. Calcula los siguientes productos escalares.**

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$

c) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$

d) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$

Tomamos el punto *A* como origen y obtenemos las siguientes coordenadas: $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(1,0), \overrightarrow{BC}=(0,1)$

$(1,0)\cdot(0,1)=0$

b) $\overrightarrow{AC}=(1,1), \overrightarrow{DB}=(1,-1)$

$(1,1)\cdot(1,-1)=1-1=0$

c) $\overrightarrow{AD}=(0,1), \overrightarrow{CB}=(0,-1)$

$(0,1)\cdot(0,-1)=-1$

d) $\overrightarrow{AC}=(1,1), \overrightarrow{CB}=(0,-1)$

$(1,1)\cdot(0,-1)=-1$

55. **Si $\vec{u}=(3,1)$ y $\vec{v}=(2,-1)$, calcula.**

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$

b) $\vec{u}\cdot 2\vec{v}$

c) $(2\vec{u}+3\vec{v})\cdot\vec{v}$

d) $\vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(3,1)\cdot(2,-1)=6-1=5$

b) $\vec{u}\cdot 2\vec{v}=(3,1)\cdot(4,-2)=12-2=10$

c) $(2\vec{u}+3\vec{v})\cdot\vec{v}=((6,2)+(6,-3))\cdot(2,-1)=(12,-1)\cdot(2,-1)=24+1=25$

d) $\vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v})=(3,1)\cdot((3,1)+(-2,1))=(3,1)\cdot(1,2)=3+2=5$

56. **Dados los vectores $\vec{a}=(2,-1)$, $\vec{b}=(-3,1)$ y $\vec{c}=(4,3)$, calcula.**

a) $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{c}$

b) $\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

a) $((2,-1)-2(-3,1))\cdot(4,3)=(8,-3)\cdot(4,3)=23$

b) $(2,-1)\cdot(-3,1)-(-3,1)\cdot(4,3)=-7-(-9)=2$

57. **Calcula el valor de *t* para que $\vec{u}\cdot\vec{v}=7$, si $\vec{u}=(-1,2)$ y $\vec{v}=(3,t)$. Halla el módulo de los dos vectores.**

$\vec{u}\cdot\vec{v}=7$

$(-1,2)\cdot(3,t)=7\rightarrow -3+2t=7\rightarrow t=5$

$|\vec{u}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

$|\vec{v}|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$

58. **Encuentra un vector perpendicular a $\vec{u}=(-3,2)$ con módulo 2.**

Un vector perpendicular a $\vec{u}$ es $\vec{v}=(2,3)$. Para que tenga módulo 2, multiplicamos por 2 y dividimos entre el módulo de $\vec{v}$:

$$\vec{w}=\frac{2(2,3)}{\sqrt{13}}=\left(\frac{4}{\sqrt{13}},\frac{6}{\sqrt{13}}\right)$$

59. **Dado el vector $\vec{p} = (6, 2)$, obtén un vector $\vec{q}$ con módulo $\sqrt{89}$ y tal que $\vec{p} \cdot \vec{q} = 14$.**

$\vec{p} \cdot \vec{q} = (6, 2) \cdot (a, b) = 6a + 2b = 14 \rightarrow b = 7 - 3a$

$|\vec{q}| = \sqrt{a^2 + (7-3a)^2} = \sqrt{89} \rightarrow 10a^2 - 42a - 40 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = -\dfrac{4}{5} \\ a_2 = 5 \end{cases}$

Si $a = -\dfrac{4}{5} \rightarrow b = \dfrac{47}{5}$

Si $a = 5 \rightarrow b = -8$

60. **Calcula el valor de k para que los vectores sean perpendiculares.**

a) $\vec{u} = (2, k), \vec{v} = (1, -6)$

b) $\vec{u} = \left(-\dfrac{2}{3}, k\right), \vec{v} = (5, -1)$

c) $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}\right), \vec{v} = (k, -1)$

d) $\vec{u} = (2, -3), \vec{v} = (1, k)$

a) $(2, k) \cdot (1, -6) = 2 - 6k = 0 \rightarrow k = \dfrac{1}{3}$

b) $\left(-\dfrac{2}{3}, k\right) \cdot (5, -1) = -\dfrac{10}{3} - k = 0 \rightarrow k = -\dfrac{10}{3}$

c) $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}\right) \cdot (k, -1) = \dfrac{1}{3}k - \dfrac{2}{5} = 0 \rightarrow k = \dfrac{6}{5}$

d) $(2, -3) \cdot (1, k) = 2 - 3k = 0 \rightarrow k = \dfrac{2}{3}$

61. **Calcula m para que $\vec{v} = (7, -2)$ y $\vec{w} = (m, 6)$:**

a) Sean perpendiculares.

b) Sean paralelos.

c) Tengan el mismo módulo.

a) $(7, -2) \cdot (m, 6) = 7m - 12 \rightarrow m = \dfrac{12}{7}$

b) $\dfrac{7}{m} = \dfrac{-2}{6} \rightarrow m = -21$

c) $|\vec{v}| = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$

$|\vec{w}| = \sqrt{m^2 + 6^2}$

$53 = m^2 + 36 \rightarrow m = \sqrt{17}$

62. **Dados $\vec{a} = (6, -2)$ y $\vec{b} = (16, 12)$, calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$ sean perpendiculares. ¿Hay una solución única?**

$\vec{u} = m(6, -2) + (16, 12) = (16 + 6m, 12 - 2m)$

$\vec{v} = m(6, -2) - (16, 12) = (-16 + 6m, -12 - 2m)$

Para que los vectores sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero.

$(16 + 6m, 12 - 2m) \cdot (-16 + 6m, -12 - 2m) = 36m^2 - 256 + 4m^2 - 144 = 0$

$\rightarrow m = \pm\sqrt{10}$

La solución no es única.

63. **Calcula el ángulo que forman los siguientes pares de vectores.**

a) $\vec{a} = (0, -2)$ y $\vec{b} = (-4, -3)$

b) $\vec{a} = \left(\frac{1}{3}, 5\right)$ y $\vec{b} = (3, -1)$

c) $\vec{a} = (-4, -3)$ y $\vec{b} = (1, 1)$

d) $\vec{a} = \left(1, -\sqrt{3}\right)$ y $\vec{b} = \left(1, \sqrt{3}\right)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{(0,-2)\cdot(-4,-3)}{2\cdot 5} = \dfrac{3}{5} \rightarrow \alpha = 306{,}87^\circ$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\left(\frac{1}{3}, 5\right)\cdot(3,-1)}{\sqrt{\frac{226}{9}}\sqrt{10}} = \dfrac{-12}{\sqrt{2260}} \rightarrow \alpha = 255{,}38^\circ$

c) $\cos\alpha = \dfrac{(-4,-3)\cdot(1,1)}{5\sqrt{2}} = \dfrac{-7}{5\sqrt{2}} \rightarrow \alpha = 188{,}13^\circ$

d) $\cos\alpha = \dfrac{\left(1,-\sqrt{3}\right)\cdot\left(1,\sqrt{3}\right)}{2\cdot 2} = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \alpha = 120^\circ$

64. **Halla el valor de k para que los vectores $\vec{a} = (1, k)$ y $\vec{b} = (2, -3)$ formen un ángulo de 120°.**

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2} = \frac{2-3k}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{13}} \rightarrow k = \frac{24+13\sqrt{3}}{23}$$

65. **Encuentra un vector $\vec{a}$ que forme un ángulo de 30° con $\vec{b} = (3, -4)$ y tal que $|\vec{a}| = \sqrt{3}\cdot|\vec{b}|$.**

$$\cos 30^\circ = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a-4b}{5\sqrt{3}+5} \rightarrow 15+5\sqrt{3} = 6a-8b$$

$$\sqrt{a^2+b^2} = 5\sqrt{3} \rightarrow a^2+b^2 = 75$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 6a-8b = 15+5\sqrt{3} \\ a^2+b^2 = 75 \end{array}\right\} \xrightarrow{a=\frac{15+5\sqrt{3}+8b}{6}} \left(\frac{15+5\sqrt{3}+8b}{6}\right)^2 + b^2 = 75$$

$$50b^2 + 40\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)b + 75\sqrt{3} - 1\,200 = 0 \rightarrow b = -\frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{5} \pm \sqrt{\frac{1\,296-27\sqrt{3}}{50}}$$

66. **Determina si el triángulo de vértices $A(12, 10)$, $B(20, 16)$ y $C(8, 32)$ es rectángulo.**

Calculamos los vectores formados por los vértices del triángulo:

$\overrightarrow{AB} = (8, 6)$, $\overrightarrow{BC} = (-12, 16)$ y $\overrightarrow{AC} = (-4, 22)$

Hallamos los módulos de los vectores:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64+36} = 10\ u$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{144+256} = \sqrt{400} = 20\ u$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16+484} = \sqrt{500}\ u$

Si el triángulo es rectángulo, debe verificar el teorema de Pitágoras.

$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$

$10^2 + 20^2 = 500$

Luego el triángulo es rectángulo.

67. **Tres de los vértices de un paralelogramo son $A(2,1)$, $B(6, -1)$ y $C(7, 1)$. ¿Cuáles son las posibles coordenadas del otro vértice?**

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \to (4,-2) = (7-a, 1-b) \to D(3,3)$
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} \to (5,0) = (6-a, -1-b) \to D(1,-1)$
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \to (5,0) = (a-6, b+1) \to D(11,-1)$

68. **Dados los vectores $\vec{a} = (1, 5)$ y $\vec{b} = (-4, -3)$, calcula.**

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ y $\vec{b} \cdot \vec{a}$

b) $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$

c) El ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

d) El valor de k para que el vector $(3, k)$ sea perpendicular al vector $\vec{a}$.

e) El valor de k para que el vector $(k, -1)$ sea paralelo al vector $\vec{b}$.

f) Un vector perpendicular al vector $\vec{b}$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = (1,5) \cdot (-4,-3) = -19$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{26}$ $\qquad |\vec{b}| = 5$

c) $\cos\alpha = \dfrac{-19}{5\sqrt{26}} \to \alpha = 138,18^\circ$

d) $(3,k) \cdot (1,5) = 3 + 5k = 0 \to k = -\dfrac{3}{5}$

e) $\dfrac{k}{-4} = \dfrac{-1}{-3} \to k = -\dfrac{4}{3}$

f) Un vector perpendicular a $\vec{b}$ es, por ejemplo, $\vec{c} = (3,-4)$.

69. **¿Qué condiciones tienen que cumplir los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$?**

Con este resultado, demuestra que si un paralelogramo tiene las diagonales perpendiculares, solo puede ser un cuadrado o un rombo.

$\vec{u} = (a, b) \qquad \vec{v} = (c, d)$

$(a + c, b + d) \cdot (a - c, b - d) = 0 \to a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 0 \to a^2 + b^2 = c^2 + d^2$
$\to |\vec{u}| = |\vec{v}|$

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los lados de un paralelogramo, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son sus diagonales.
Por tanto, si las diagonales son perpendiculares, los módulos miden lo mismo, por lo que solo puede ser un cuadrado o un rombo.

70. **Calcula el perímetro de un triángulo cuyos vértices están situados en los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ y $C(-1, 3)$.**

Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$:

$\overrightarrow{AB} = (2, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-4, 1)$ y $\overrightarrow{CA} = (2, -1)$

Hallamos el módulo de los vectores:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

El perímetro mide:

$2 + \sqrt{17} + \sqrt{5} = 8,36$ u

71. **Demuestra que el cuadrilátero formado por los puntos *A*(2, −2), *B*(5, 3), *C*(0, 6) y *D*(−3, 1) es un cuadrado.**

Los lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son paralelos:

$\overrightarrow{AB} = (3, 5) = \overrightarrow{DC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC} = (-5, 3) = \overrightarrow{AD}$

Además, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son perpendiculares:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (3, 5) \cdot (-5, 3) = 0$$

Como todos los lados son iguales:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{34}$$

Entonces es un cuadrado.

72. **Demuestra que el triángulo de vértices *A*(3, 1), *B*(9, −1) y *C*(5, −5) es isósceles. ¿Es también equilátero? ¿Cuáles son sus lados iguales? Calcula su área.**

Hallamos los vectores formados por los vértices del triángulo:

$\overrightarrow{AB} = (6, -2)$, $\overrightarrow{BC} = (-4, -4)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, -6)$

Calculamos los módulos de los vectores:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}\ \text{u}$$
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}\ \text{u}$$
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}\ \text{u}$$

Como el triángulo tiene dos lados iguales, *AB* y *AC*, es un triángulo isósceles.

Para hallar el área calculamos la altura, *h*, sobre el lado *BC* aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{\left(\sqrt{40}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2} = \sqrt{40 - 8} = \sqrt{32}\ \text{u}$$

$$A = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{32}}{2} = 16\ \text{u}^2$$

73. **Halla el punto medio de los segmentos cuyos extremos aparecen a continuación.**

a) *A*(3, 5) y *B*(9, 11)

b) *A*(−3, 1) y *B*(7, −4)

c) *A*(4, 5) y *B*(7, 1)

d) *A*(−6, −1) y *B*(−9, −3)

Llamamos *M* al punto medio de *A* y *B*.

a) $M = \left(\frac{3+9}{2}, \frac{5+11}{2}\right) = (6, 8)$

b) $M = \left(\frac{-3+7}{2}, \frac{1-4}{2}\right) = \left(2, -\frac{3}{2}\right)$

c) $M = \left(\frac{4+7}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 3\right)$

d) $M = \left(\frac{-6-9}{2}, \frac{-1-3}{2}\right) = \left(-\frac{15}{2}, -2\right)$

74. Si el punto medio del segmento AB es $M(3, 5)$, dado $A(9, 7)$, calcula el punto B. Luego obtén A con $M(-1, 5)$ y $B(4, -9)$.

Sea $B(x, y)$.

$$(3, 5) = \left(\frac{9+x}{2}, \frac{7+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 = \dfrac{9+x}{2} \\ 5 = \dfrac{7+y}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -3 \\ y = 3 \end{array}\right\}$$

Sea $A(x, y)$.

$$(-1, 5) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{-9+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} -1 = \dfrac{4+x}{2} \\ 5 = \dfrac{-9+y}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -6 \\ y = 19 \end{array}\right\}$$

75. Dos vértices consecutivos de un cuadrado son $A(-2, 3)$ y $B(1, -2)$. Si sus dos diagonales se cortan en el punto $O(2, 2)$, calcula los dos vértices que faltan.

$\overrightarrow{AO} = (4, -1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{BO} = (1, 4)$

$C = A + 2\overrightarrow{AO} = (-2, 3) + (8, -2) = (6, 1)$

$D = B + 2\overrightarrow{BO} = (1, -2) + (2, 8) = (3, 6)$

76. Tres vértices consecutivos de un hexágono regular tienen como coordenadas (0, 0), (2, 0) y $\left(3, \sqrt{3}\right)$. Halla los otros tres vértices.

Sabemos que $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ y $C\left(3, \sqrt{3}\right)$.

Calculamos el vértice D, con una traslación con origen en C y vector guía $\left(-1, \sqrt{3}\right)$:

$D = \left(3, \sqrt{3}\right) + \left(-1, \sqrt{3}\right) = \left(2, 2\sqrt{3}\right)$

Hallamos el vértice E, con una traslación con origen en D y vector guía $(-2, 0)$:

$E = \left(2, 2\sqrt{3}\right) + (-2, 0) = \left(0, 2\sqrt{3}\right)$

Determinamos el vértice F, con una traslación con origen en E y vector guía $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$:

$F = \left(0, 2\sqrt{3}\right) + \left(-1, -\sqrt{3}\right) = \left(-1, \sqrt{3}\right)$

77. Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento de extremos $A(5, -1)$ y $B(17, 8)$ en tres partes iguales.

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (12, 9)$

El primer punto estará situado a $\frac{1}{3}$ de distancia de uno de los extremos del segmento, y el segundo, a $\frac{2}{3}$ de distancia.

$$P_1 = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (5, -1) + \frac{1}{3}(12, 9) = (9, 2)$$

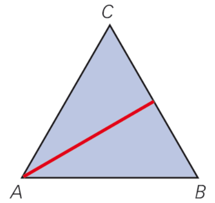
$$P_2 = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (5, -1) + \frac{2}{3}(12, 9) = (13, 5)$$

78. Determina el valor de k para que los puntos $A(2, -3)$, $B(9, k)$ y $C(6, -1)$ estén alineados.

$\overrightarrow{AB} = (7, k+3)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (4, 2)$

$$\frac{7}{4} = \frac{k+3}{2} \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

79. **Halla la longitud de la mediana que parte de *A* en el triángulo de vértices *A*(−1, 4), *B*(6, 5) y *C*(10, −3). ¿En el caso de este triángulo coincide la mediana con la altura? Justifica tu respuesta.**



Calculamos el punto medio, M, del segmento CB:

$$M = \left(\frac{6+10}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = (8, 1)$$

Para hallar la longitud de la mediana, determinamos el módulo del vector $\overrightarrow{AM}$:

$\overrightarrow{AM} = (9, -3) \qquad |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}$

Para que la mediana, AM, coincida con la altura sobre el lado CB, los lados AC y AB deben ser iguales.

$\overrightarrow{AC} = (11, -7) \qquad \overrightarrow{AB} = (7, 1)$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{121+49} = \sqrt{170} \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

Luego la mediana no coincide con la altura.

80. **Dos vértices de un triángulo equilátero son *A*(3, 1) y *B*(5, −2). Calcula cuáles pueden ser las coordenadas del vértice que falta.**

$\overrightarrow{AB} = (2, -3)$

La recta que pasa por el tercer vértice, $C(c_x, c_y)$, y por el punto medio de A y B y tiene como vector director $\vec{d} = (3, 2)$. El punto medio del vector $\overrightarrow{AB}$ es $M\left(4, -\frac{1}{2}\right)$. Así, esta recta tiene como ecuación:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y+\frac{1}{2}}{2} \rightarrow 4x - 6y - 19 = 0$$

Además, el módulo de $\overrightarrow{AC}$ es el mismo que el módulo de $\overrightarrow{AB}$.

$$\sqrt{13} = \sqrt{(c_x-3)^2 + (c_y-1)^2} \rightarrow c_x^{\,2} - 6_x + c_y^{\,2} - 2c_y - 3 = 0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} c_x = \dfrac{19+6c_y}{4} \\ c_x^{\,2} - 6c_x + c_y^{\,2} - 2c_y - 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} c_x = 4 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ c_y = -\dfrac{1}{2} - \sqrt{3} \\ c_x = 4 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ c_y = -\dfrac{1}{2} + \sqrt{3} \end{array}\right\}$$

→ Serían las posibles coordenadas del punto C.

81. **Dados los puntos *A*(3, 0) y *B*(−3, 0), obtén un punto *C* sobre el eje de ordenadas, de modo que el triángulo que describan sea equilátero. ¿Hay una solución única? Halla el área de los triángulos que resulten.**

Los vectores formados por los vértices deben tener la misma longitud.

Si $C(0, c)$:

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{9+c^2} \qquad |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{9+c^2} \qquad |\overrightarrow{AB}| = 6$

$6 = \sqrt{9+c^2} \rightarrow c = \sqrt{27}$

Los puntos pedidos son: $C_1\left(0, 3\sqrt{3}\right)$ y $C_2\left(0, -3\sqrt{3}\right)$

Calculamos el área de los triángulos:

$$A = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\ \text{u}^2$$

82. **Dos vértices consecutivos de un cuadrado son *A*(2, −4) y *B*(8, −2). Calcula el resto de vértices sabiendo que uno de los vértices que faltan está sobre el eje de ordenadas.**

$\overrightarrow{AB}=(6,2)$ $\quad\quad\quad$ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{40}$

El vértice *D* está en el eje *Y*: $D(0,y)$

$\overrightarrow{AD}=(-2,y+4)$ $\quad\quad\quad$ $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{(-2)^2+(y+4)^2}=\sqrt{40}\rightarrow y^2+8y-20=0\rightarrow y=2$

$C=D+\overrightarrow{AB}=(0,2)+(6,2)=(6,4)$

83. **Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua, explícita y general de la recta que pasa por el punto *P*(0, −3) cuyo vector director es $\vec{v}=(3,-1)$.**

Ecuación vectorial $\longrightarrow$ $(x,y)=(0,-3)+t(3,-1)$

Ecuación paramétrica $\longrightarrow$ $\left.\begin{matrix} x=3t \\ y=-3-t \end{matrix}\right\}$

Ecuación continua $\longrightarrow$ $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+3}{-1}$

Ecuación explícita $\longrightarrow$ $y=-\dfrac{1}{3}x-3$

Ecuación general $\longrightarrow$ $x+3y+9=0$

84. **Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua, explícita y general de la recta que pasa por los puntos *P*(−2, 3) y *Q*(5, 1).**

El vector director es $\vec{v}=(7,-2)$. Entonces:

Ecuación vectorial $\longrightarrow$ $(x,y)=(-2,3)+t(7,-2)$

Ecuación paramétrica $\longrightarrow$ $\left.\begin{matrix} x=-2+7t \\ y=3-2t \end{matrix}\right\}$

Ecuación continua $\longrightarrow$ $\dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y-3}{-2}$

Ecuación explícita $\longrightarrow$ $y=-\dfrac{2}{7}x+\dfrac{17}{7}$

Ecuación general $\longrightarrow$ $2x+7y-17=0$

85. **Halla la ecuación continua y general de las rectas que contienen los lados del triángulo cuyos vértices son *A*(1, 4), *B*(−6,−5) y *C*(3, −1).**

- Lado 1:

  El vector director es $\overrightarrow{AB}=(-7,-9)$. Entonces:

  Ecuación continua $\longrightarrow$ $\dfrac{x-1}{-7}=\dfrac{y-4}{-9}$

  Ecuación general $\longrightarrow$ $9x-7y+19=0$

- Lado 2:

  El vector director es $\overrightarrow{BC}=(9,4)$. Entonces:

  Ecuación continua $\rightarrow \frac{x+6}{9}=\frac{y+5}{4}$

  Ecuación general $\rightarrow 4x-9y-21=0$

- Lado 3:

  El vector director es $\overrightarrow{CA}=(-2,5)$

  Ecuación continua $\rightarrow \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{5}$

  Ecuación general $\rightarrow 5x+2y-13=0$

86. Escribe las siguientes ecuaciones de rectas en la forma que se pide.

a) $y=-3x+4$ en forma paramétrica.

b) $-2x+y+7=0$ en forma continua.

c) $\frac{x}{-2}=\frac{y-3}{5}$ en forma explícita.

d) $\left.\begin{array}{l} x=3t \\ y=-2-t \end{array}\right\}$ en forma general.

a) Un punto de la recta es el (0, 4) y el vector director es el (1, –3) $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x=t \\ y=4-3t \end{array}\right\}$

b) Un punto de la recta es el (0, –7) y el vector director es el (1, 2) $\rightarrow x=\frac{y+7}{2}$

c) La pendiente de la recta es $-\frac{5}{2}$ y la ordenada en el origen es 3 $\rightarrow y=-\frac{5}{2}x+3$

d) Un punto de la recta es el (0, –2) y el vector normal es el (1, 3) $\rightarrow x+3y+6=0$

87. Comprueba si los puntos $A(-3,2)$ y $B(5,-1)$ están en las siguientes rectas.

a) $\left.\begin{array}{l} x=3-2t \\ y=3+4t \end{array}\right\}$

b) $y=\frac{5x-3}{3}$

c) $5x-2y+19=0$

d) $\frac{x+4}{3}=\frac{y+7}{2}$

a) $\left.\begin{array}{l} -3=3-2\lambda \\ 2=3+4\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda=3 \\ \lambda=\frac{-1}{4} \end{array}\right\}$

El punto $(-3,2)$ no pertenece a la recta.

$\left.\begin{array}{l} 5=3-2\lambda \\ -1=3+4\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda=-1 \\ \lambda=-1 \end{array}\right\}$

El punto $(5,-1)$ pertenece a la recta.

b) $2\neq\frac{-15-3}{3}$

El punto $(-3,2)$ no pertenece a la recta.

$-1\neq\frac{25-3}{3}$

El punto $(5,-1)$ no pertenece a la recta.

c) $-15-4+19=0$

El punto $(-3, 2)$ pertenece a la recta.

$25+2+19 \neq 0$

El punto $(5, -1)$ no pertenece a la recta.

d) $\dfrac{-3+4}{3} \neq \dfrac{2+7}{2}$

El punto $(-3, 2)$ no pertenece a la recta.

$\dfrac{5+4}{3} = \dfrac{-1+7}{2} \rightarrow$ El punto $(5, -1)$ pertenece a la recta.

88. Calcula el valor de k para que la recta $3x + 7y + k = 0$ pase por el punto $P(-1, 4)$.

$3 \cdot (-1) + 4 \cdot 7 + k = 0 \rightarrow k = -25$

89. Calcula el valor de k para que la recta $4x - y + k = 0$ pase por el origen de coordenadas.

$4 \cdot 0 - 0 + k = 0 \rightarrow k = 0$

90. Escribe dos puntos de estas rectas.

a) $y = 3x - 1$

b) $\left.\begin{array}{l} x = -2 - t \\ y = 4 - 3t \end{array}\right\}$

c) $4x - 3y + 1 = 0$

d) $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-1}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $(0, -1)$ y $(1, 2)$

b) $(-2, 4)$ y $(-3, 1)$

c) $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$ y $\left(-\dfrac{1}{4}, 0\right)$

d) $(2, -1)$ y $(-1, 0)$

91. Escribe la ecuación punto-pendiente de la recta que cumple las siguientes condiciones.

a) Pasa por los puntos $A(2, -3)$ y $B(0, -2)$.

b) Pasa por el punto $A(0, 3)$ y tiene por dirección la del vector $\vec{v} = (3, -1)$.

a) $\left.\begin{array}{l} A(2, -3) \\ B(0, -2) \end{array}\right\} \rightarrow m = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, 1) \rightarrow y + 3 = -\dfrac{1}{2}(x-2)$

b) $\left.\begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{3} \\ A(0, 3) \end{array}\right\} \rightarrow y - 3 = -\dfrac{1}{3}x$

92. Calcula el valor de k para que la recta $8x - ky + 7 = 0$ tenga pendiente 2.

El vector director es $(k, 8) \longrightarrow m = \dfrac{8}{k} = 2 \rightarrow k = 4$

93. Determina la ecuación de una recta que pasa por los puntos $(-1, -10)$ y $(2, c)$, sabiendo que su pendiente es 7. Expresa la recta en forma continua y general.

Hallamos el vector director: $(3, c+10)$

Como sabemos que la pendiente es: $7 = \dfrac{c+10}{3} \rightarrow 21 = c + 10 \rightarrow c = 11$

$\vec{u}_r = (3, 21)$

Expresamos la recta en forma continua:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+10}{21}$$

Y la expresamos en forma general:

$21x + 21 = 3y + 30 \rightarrow 21x - 3y - 9 = 0$

94. Determina la ecuación en forma continua, paramétrica, general y explícita de la recta que pasa por el punto $A(2, -4)$ y es perpendicular a la dirección del vector $\vec{v} = (4, -1)$.

El vector director de la recta es el (1, 4).

Ecuación continua $\rightarrow x - 2 = \dfrac{y+4}{4}$

Ecuación paramétrica $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -4 + 4t \end{array}\right\}$

Ecuación general $\rightarrow 4x - y - 12 = 0$

Ecuación explícita $\rightarrow y = 4x - 12$

95. Expresa en forma vectorial, paramétrica y continua la ecuación de la recta que:

a) Pasa por el punto (1, 3) y es paralela a la recta $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-4}$.

b) Es paralela a la recta $5x - 2y + 12 = 0$ y pasa por el punto $(-2, 5)$.

a) Vector director de la recta: $(2, -4)$

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (1, 3) + t(2, -4)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \end{array}\right\}$

Ecuación continua $\rightarrow \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-4}$

b) Vector director de la recta: (2, 5)

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (-2, 5) + t(2, 5)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -2 + 2t \\ y = 5 + 5t \end{array}\right\}$

Ecuación continua $\rightarrow \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-5}{5}$

96. Expresa en forma explícita la recta que:

a) Pasa por el punto $(0, -1)$ y es paralela a la recta $\left.\begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = -4 \end{array}\right\}$.

b) Es paralela a la recta $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y}{-1}$ y pasa por el punto $(5, -2)$.

a) Vector director de la recta: (3, 0)

Pendiente: $m = 0$

$-1 = 0x + n \rightarrow n = -1$

Ecuación explícita $\rightarrow y = -1$

b) Vector director de la recta: $(4, -1)$

Pendiente: $m = -\dfrac{1}{4}$

$-2 = -\dfrac{5}{4} + n \rightarrow n = -\dfrac{3}{4}$

Ecuación explícita $\rightarrow y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{4}$

97. Escribe la ecuación general de la recta que:

a) Pasa por el punto (10, −2) y es paralela a la recta $\left.\begin{array}{l} x = -1 - 3t \\ y = 2 - 2t \end{array}\right\}$.

b) Es paralela a la recta $y = \dfrac{8x - 3}{2}$ y pasa por el punto (4, 0).

a) Expresamos la recta en forma continua: $\dfrac{x-10}{-3} = \dfrac{y+2}{-2}$

Y la expresamos en forma general: $-2x + 20 = -3y - 6 \rightarrow -2x + 3y + 26 = 0$

b) Vector director de la recta: (1, 4)

Expresamos la recta en forma continua: $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y}{4}$

Y la expresamos en forma general: $4x - 16 = y \rightarrow 4x - y - 16 = 0$

98. Escribe en forma vectorial y paramétrica la recta que:

a) Pasa por el punto (0, −3) y es perpendicular a la recta $\dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y+1}{4}$.

b) Pasa por el punto (−5, 0) y es perpendicular a la recta $-3x - 2y + 7 = 0$.

a) Un vector perpendicular a (−3, 4) es (4, 3).

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (0, -3) + t(4, 3)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{array}\right\}$

b) Calculamos el vector director de la recta:

$A(1, 2), B(-1, 5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, 3)$

Un vector perpendicular a (−2, 3) es (−3, −2)

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (-5, 0) + t(-3, -2)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -5 - 3t \\ y = -2t \end{array}\right\}$

99. Determina la ecuación continua de la recta que cumple estas condiciones.

a) Pasa por el punto (7, −1) y es perpendicular a la recta $y = \dfrac{-x + 6}{3}$.

b) Pasa por el punto (−4, 4) y es perpendicular a la recta $-2x + y + 7 = 0$.

a) Calculamos el vector director de la recta:

$\overrightarrow{AB} = (3, -1)$

Un vector perpendicular a (3, −1) es (1, 3).

Expresamos la recta en forma continua:

$\dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y+1}{3}$

b) Calculamos el vector director de la recta:

$A(0, -7), B(1, -5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, 2)$

Un vector perpendicular a (1, 2) es (−2, 1).

Expresamos la recta en forma continua:

$\dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y-4}{1}$

100. **Determina el punto de la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1}$ que dista 2 unidades del punto $P(-2, 2)$.**

Expresamos la recta en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \end{array}\right\}$$

Los puntos de la recta son de la forma:

$A_r(1 + 2t, -1 - t)$

Calculamos los vectores que van de la recta al punto P:

$\overrightarrow{A_rP} = (-3 - 2t, 3 + t)$

Veamos cuáles de estos vectores tienen módulo 2.

$$2 = \sqrt{(-3-2t)^2 + (3+t)^2} \rightarrow 4 = 9 + 12t + 4t^2 + 9 + 6t + t^2$$

$$\rightarrow 5t^2 + 18t + 14 = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{-9-\sqrt{11}}{5} \\ t_2 = \dfrac{-9+\sqrt{11}}{5} \end{array}\right\}$$

Por tanto, los puntos son:

$$A_1\left(1 + \frac{-18 - 2\sqrt{11}}{5}, -1 + \frac{9 + \sqrt{11}}{5}\right) \qquad A_2\left(1 + \frac{-18 + 2\sqrt{11}}{5}, -1 + \frac{9 - \sqrt{11}}{5}\right)$$

101. **Estudia la posición relativa de estos pares de rectas.**

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = 2 - 3t \\ y = t \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = -1 + 6t \\ y = 1 - 2t \end{array}\right\}$

b) $r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 6t \\ y = -3 + 2t \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = -t \end{array}\right\}$

a) $\vec{u_r} = (-3, 1)$ y $\vec{u_s} = (6, -2)$.

Son vectores paralelos y además las rectas coinciden en un punto, por ejemplo $(2, 0)$, entonces son rectas coincidentes.

b) $\vec{u_r} = (-6, 2)$

$\vec{u_s} = (3, -1)$

Como los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_r(1, -3)$, de la recta r, pertenece a la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 2 + 3\mu \\ -3 = -\mu \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu = -\dfrac{1}{3} \\ \mu = 3 \end{array}\right\}$$

Las rectas son paralelas.

102. **Analiza la posición relativa de las rectas *r* y *s*.**

a) $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} \qquad s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-4}$

b) $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} \qquad s: \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{-3}$

a) $\vec{u_r} = (3, -2) \qquad \vec{u_s} = (2, -4)$.

$\frac{3}{2} \neq \frac{-2}{-4} \rightarrow$ Son rectas secantes.

b) $\vec{u}_r = (2, -3)$ $\vec{u}_s = (2, -3)$

Como los vectores son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_r(-1, 2)$, de la recta r, pertenece a la recta s.

$$\frac{-1+1}{2} \neq \frac{-2+3}{-3}$$

Las rectas son paralelas.

103. **Investiga qué posición relativa tienen los siguientes pares de rectas.**

a) $r\colon 2x - 6y + 4 = 0$ $\quad s\colon -x + 3y - 2 = 0$

b) $r\colon 6x - 4y + 11 = 0$ $\quad s\colon -9x + 6y - 1 = 0$

c) $r\colon 4x - y + 1 = 0$ $\quad s\colon 2x - 3y + 13 = 0$

a) $\frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} = \frac{4}{-2} \rightarrow$ Las rectas son coincidentes.

b) $\frac{-9}{6} = \frac{6}{-4} \neq \frac{-1}{11} \rightarrow$ Las rectas son paralelas.

c) $\frac{4}{2} \neq \frac{-1}{-3} \rightarrow$ Las rectas son secantes.

104. **Discute la posición relativa de estas rectas.**

a) $r\colon y = \frac{6x - 1}{4}$ $\quad s\colon y = \frac{-3x + 5}{-2}$

b) $r\colon y = \frac{-3x + 1}{2}$ $\quad s\colon y = \frac{x - 3}{-3}$

a) La pendiente de la recta r es: $m_r = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

La pendiente de la recta s es: $m_s = \frac{3}{2}$

Como las pendientes son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_s(1, -1)$, de la recta s, pertenece a la recta r.

$-1 \neq \frac{6-1}{4} \rightarrow$ Las rectas son paralelas.

b) La pendiente de la recta r es $m_r = -\frac{3}{2}$ y la de la recta s es $m_s = -\frac{1}{3}$.

Como las pendientes son distintas, son rectas secantes.

105. **¿En qué posición relativa están estas parejas de rectas?**

a) $r\colon \left.\begin{array}{l} x = -1 + 4t \\ y = 3 - 2t \end{array}\right\}$ $\quad s\colon x + 2y - 7 = 0$

b) $r\colon \frac{x}{2} = y - 3$ $\quad s\colon 3x - 6y + 4 = 0$

c) $r\colon y = 3x - 1$ $\quad s\colon \left.\begin{array}{l} x = 4 - 3t \\ y = -2t \end{array}\right\}$

d) $r\colon y = \frac{5x + 1}{-2}$ $\quad s\colon \frac{x + 3}{2} = \frac{y - 7}{-5}$

a) Expresamos la recta r en forma general:

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{-2} \rightarrow -2x - 2 = 4y - 12 \rightarrow -2x - 4y + 10 = 0$$

Las rectas son paralelas.

b) Expresamos la recta r en forma general:

$r: x-2y+6=0$

Las rectas son paralelas.

c) Expresamos las rectas en forma general:

$r: 3x-y-1=0 \qquad s: 2x-3y-8=0$

Las rectas son secantes.

d) Expresamos las rectas en forma general:

$r: \; -2y = 5x+1$
$\quad 5x+2y+1=0$

$s: \; -5x-15 = 2y-14$
$\quad 5x+2y+1=0$

Las rectas son coincidentes.

106. Discute la posición relativa de la recta *r* que pasa por los puntos (−1, 2) y (3, 4), y la recta *s* que queda definida por los puntos (−3, 4) y (2, −1).

Escribimos las rectas en forma general:

$r: x-2y+5=0 \qquad s: x+y-1=0$

Las rectas son secantes.

107. ¿Qué posición relativa mantienen los siguientes pares de rectas?

a) r pasa por $(-3, 4)$ y por $(8, -1)$.
$s: x-2y+15=0$

b) r pasa por $(-1, 4)$ y por $(2, -5)$.
$s: \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-7}{3}$

a) $$\left.\begin{array}{l} y = mx+n \xrightarrow{(-3,4)} 4 = -3m+n \\ y = mx+n \xrightarrow{(8,-1)} -1 = 8m+n \end{array}\right\}$$

$$y = -\frac{5}{11}x + \frac{29}{11} \to 5x+11y-29=0 \to \text{Las rectas son secantes.}$$

b) $\vec{u}_r = (3, -9)$

$\vec{u}_s = (-1, 3)$

Como los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_r(-1, 4)$, de la recta r, pertenece a la recta s.

$$\frac{-1+2}{-1} = \frac{4-7}{3} \to \text{Las rectas son coincidentes.}$$

108. ¿En qué posición relativa están las siguientes parejas de rectas?

a) r es perpendicular a $3x-4y+11=0$.
$$s: \left.\begin{array}{l} x = -6t \\ y = -3+8t \end{array}\right\}$$

b) r es paralela a $y = 2x-3$.
$s: \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y}{6}$

a) Calculamos el vector director de la recta:

$$m = \frac{3}{4} \to (4, 3)$$

Este vector es perpendicular al vector director de la recta s.

$\vec{u}_r = (4, 3) \qquad \vec{u}_s = (-6, 8)$

Las rectas r y s son perpendiculares.

b) Sea $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} r: 2x-y=a \to m_r = 2 \\ s: 2x-y=8 \to m_s = 2 \end{array}\right\} \to \text{Son paralelas o coincidentes: } \begin{cases} \text{Si } a = 8 \to \text{Coincidentes} \\ \text{Si } a \neq 8 \to \text{Paralelas} \end{cases}$$

109. **Determina si las rectas *r* y *s* se cortan. En caso afirmativo calcula el punto de corte.**

a) $r: 2x + 3y - 3 = 0$ $\quad s: 3x - 4y - 13 = 0$

b) $r: 6x + 9y - 3 = 0$ $\quad s: 2x + 3y - 1 = 0$

c) $r: x - 2y + 3 = 0$ $\quad s: -3x + 6y - 8 = 0$

a) $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{-4} \rightarrow$ Se cortan.

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y - 3 = 0 \\ 3x - 4y - 13 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 3,\ y = -1$$

b) $\frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{-3}{-1} \rightarrow$ Son rectas coincidentes, cortan en todos los puntos.

c) $\frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} \neq \frac{3}{-8} \rightarrow$ No se cortan, son rectas paralelas.

110. **Indica, si es posible, los puntos de corte de los siguientes pares de rectas.**

a) $r: \left.\begin{array}{r} x = 3 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{array}\right\}$ $\quad s: \left.\begin{array}{r} x = -1 - 4\mu \\ y = 5 + 3\mu \end{array}\right\}$

b) $r: \left.\begin{array}{r} x = 7 - 2\lambda \\ y = 3\lambda \end{array}\right\}$ $\quad s: \left.\begin{array}{r} x = 5 - 4\mu \\ y = 3 - 6\mu \end{array}\right\}$

c) $r: \left.\begin{array}{r} x = 1 - 2\lambda \\ y = -4 + 4\lambda \end{array}\right\}$ $\quad s: \left.\begin{array}{r} x = -3 + \mu \\ y = -1 + 2\mu \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3 - \lambda = -1 - 4\mu \\ -1 + 2\lambda = 5 + 3\mu \end{array}\right\} \xrightarrow{\lambda = 4(\mu+1)} -1 + 8(\mu + 1) = 5 + 3\mu \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu = -\frac{2}{5} \\ \lambda = \frac{12}{5} \end{array}\right. \rightarrow$ El punto de intersección es $\left(\frac{3}{5}, \frac{19}{5}\right)$.

b) $\left.\begin{array}{l} 7 - 2\lambda = 5 - 4\mu \\ 3\lambda = 3 - 6\mu \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda - 2\mu = 1 \\ \lambda + 2\mu = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \lambda = 1 \rightarrow \mu = 0 \rightarrow$ El punto de intersección es $(5, 3)$.

c) $\left.\begin{array}{l} 1 - 2\lambda = -3 + \mu \\ -4 + 4\lambda = -1 + 2\mu \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\lambda + \mu = 4 \\ 4\lambda - 2\mu = 3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\mu = 4 - 2\lambda} 4\lambda - 2(4 - 2\lambda) = 3 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \frac{11}{8} \\ \mu = \frac{5}{4} \end{array}\right. \rightarrow$ El punto de intersección es $\left(-\frac{7}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

111. **Calcula los puntos de corte, si es posible, de las parejas de rectas.**

a) $r: 2x - y + 8 = 0$ $\quad s: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = 7 + t \end{array}\right\}$

b) $r: y = \frac{-2x + 7}{3}$ $\quad s: \frac{x - 2}{3} = \frac{y - 1}{-2}$

c) $r: \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{-6}$ $\quad s: 3x + y + 2 = 0$

d) $r: \left.\begin{array}{l} x = -1 - 3t \\ y = 5 + 8t \end{array}\right\}$ $\quad s: \frac{x - 3}{1} = \frac{y + 7}{-4}$

e) $r: y = \frac{6x + 3}{2}$ $\quad s: \left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = \frac{3}{2} + 3t \end{array}\right\}$

a) $2(2+3t)-(7+t)+8=0 \rightarrow 4+6t-7-t+8=0 \rightarrow t=-1$

El punto de corte es $P(-1, 6)$.

b) $\left.\begin{array}{l} 3y=-2x+7 \\ -2x+4=3y-3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=7 \\ -2x-3y=-7 \end{array}\right\}$

Hay infinitos puntos de corte, y las rectas son coincidentes.

c) $\left.\begin{array}{l} -6x+6=2y+6 \\ 3x+y+2=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -6x-2y=0 \\ 3x+y=-2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+y=0 \\ 3x+y=-2 \end{array}\right\}$

No hay puntos de corte, y las rectas son paralelas.

d) $\dfrac{-1-3t-3}{1}=\dfrac{5+8t+7}{-4} \rightarrow 12t+16=8t+12 \rightarrow t=-1$

El punto de corte es $P(2, -3)$.

e) $\dfrac{3}{2}+3t=\dfrac{6+6t+3}{2} \rightarrow 3+6t=6t+9$

No tiene solución, las rectas son paralelas.

112. Calcula los puntos de corte de estas rectas.

a) $r: x+2y-5=0$ $\qquad s: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}$

b) $r: \left.\begin{array}{l} x=2-3t \\ y=5+t \end{array}\right\}$ $\qquad s: x+3y-2=0$

c) $r: \left.\begin{array}{l} x=2+t \\ y=3-5t \end{array}\right\}$ $\qquad s: 2x-y+5=0$

a) $s: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-1} \rightarrow -x+3=2y-2 \rightarrow x+2y-5=0$

Son rectas coincidentes, todos sus puntos son de corte.

b) $(2-3t)+3(5+t)-2=0 \rightarrow 2-3t+15+3t-2 \neq 0 \rightarrow$ No se cortan.

c) $2(2+t)-(3-5t)+5=0 \rightarrow 4+2t-3+5t+5=0 \rightarrow t=-\dfrac{6}{7} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{8}{7} \\ y=\dfrac{51}{7} \end{cases}$

113. Halla el valor que debe tomar k para que la recta $\dfrac{x+1}{k}=\dfrac{y-2}{3}$ sea paralela a $\left.\begin{array}{l} x=3-t \\ y=2+5t \end{array}\right\}$.

Para que las rectas sean paralelas, los vectores directores deben ser proporcionales.

$\dfrac{k}{-1}=\dfrac{3}{5} \rightarrow k=-\dfrac{3}{5}$

114. Encuentra el valor de a para que la recta $ax+3y-7=0$ sea paralela a $\dfrac{x-1}{5}=y+2$.

Para que las rectas sean paralelas, los vectores directores deben ser proporcionales.

$\dfrac{-3}{5}=\dfrac{a}{1} \rightarrow a=-\dfrac{3}{5}$

115. Calcula el valor de k para que las rectas r y s sean paralelas.

$r: kx+(k+1)y+8=0$ $\qquad s: 5x+6y-12=0$

$\dfrac{k}{5}=\dfrac{k+1}{6} \neq \dfrac{8}{-12} \rightarrow 6k=5k+5 \rightarrow k=5$

116. **Determina el valor de k para que las rectas r y s sean perpendiculares.**

$r: k^2x + (k+1)y + 8 = 0 \qquad s: 16x - 9y - 5 = 0$

$(a,b) \perp t(-b,a)$ o bien $(a,b) \perp t(b,-a)$.

$$\left.\begin{array}{l} k^2 = -9t \\ k+1 = -16t \end{array}\right\} \to t = \frac{k^2}{-9} = \frac{k+1}{-16} \to k = \frac{9 \pm \sqrt{657}}{32}$$

117. **Prueba que todas las rectas cuya ecuación es del tipo $y = ax + a$ pasan por el mismo punto. Halla el punto y la recta de ese tipo que es paralela a $\left.\begin{array}{l} x = 21 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{array}\right\}$.**

Hallamos el punto de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax + a \\ y = bx + b \end{array}\right\} \to ax + a = bx + b \to (a-b)x = -(a-b) \to x = -1 \to y = 0$$

Todas las rectas pasan por $(-1, 0)$.

Como la recta es paralela a la recta dada, su vector director es $(-3, 2)$.

$$m = -\frac{2}{3}$$

La recta es: $y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}$

118. **Calcula la distancia entre el punto P y la recta r en los siguientes casos.**

a) $P(0, 0) \qquad r: x - 4y + 1 = 0$

b) $P(2, 1) \qquad r: 2x + 3y - 1 = 0$

c) $P(-3, -1) \qquad r: 3x - 2y - 3 = 0$

a) $d(P,r) = \dfrac{|1 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{17}} = \dfrac{\sqrt{17}}{17}$

b) $d(P,r) = \dfrac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{13}} = \dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

c) $d(P,r) = \dfrac{|3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1) - 3|}{\sqrt{13}} = \dfrac{10\sqrt{13}}{13}$

119. **Halla la distancia del punto $P(4, -2)$ a estas rectas.**

a) $-6x + 8y - 5 = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\}$

c) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{6}$

d) $y = \dfrac{4x-5}{3}$

a) $d(P, r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|-6 \cdot 4 + 8 \cdot (-2) - 5|}{\sqrt{(-6)^2 + 8^2}} = \dfrac{45}{10} = \dfrac{9}{2}$ u

b) Calculamos la ecuación general de la recta:

$$-x + 2 = \frac{y-2}{2} \to 2x + y - 6 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 0 \text{ u}$$

c) Hallamos la ecuación general de la recta:

$$6x - 6 = 3y - 6 \to 6x - 3y = 0 \to 2x - y = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 4 - 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \text{ u}$$

d) Determinamos la ecuación general de la recta:

$3y = 4x - 5 \rightarrow -4x + 3y + 5 = 0$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-4 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{17}{5} \text{ u}$$

120. Determina la distancia entre la recta que pasa por los puntos $A(-2, 4)$ y $B(4, -2)$, y el punto $P(-3, 2)$.

Escribimos la recta en forma general:

$$r: x + y - 2 = 0 \rightarrow d(P, r) = \frac{|1 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

121. Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por $(-3, 6)$ y es paralela a $\frac{x-1}{-6} = \frac{y-2}{8}$.

Determinamos la recta pedida: $\frac{x+3}{-6} = \frac{y-6}{8}$

Calculamos la ecuación general de la recta:

$8x + 24 = -6y + 36 \rightarrow 8x + 6y - 12 = 0$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \text{ } u$$

122. Calcula la distancia entre las siguientes rectas paralelas.

a) $r: 4x - 3y + 1 = 0$ $\quad s: 8x - 6y - 5 = 0$

b) $r: x + 2y - 5 = 0$ $\quad s: 4x + 8y + 2 = 0$

c) $r: 5x - y - 16 = 0$ $\quad s: 5x - y + 16 = 0$

a) Un punto de la recta r es $P(2, 3)$.

$$d(P, s) = \frac{|8 \cdot 2 - 6 \cdot 3 - 5|}{10} = \frac{7}{10}$$

b) Un punto de la recta r es $P(-1, 3)$.

$$d(P, s) = \frac{|4 \cdot (-1) + 8 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{96}} = \frac{11\sqrt{6}}{12}$$

c) Un punto de la recta r es $P(3, -1)$.

$$d(P, s) = \frac{|5 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) + 16|}{\sqrt{26}} = \frac{16\sqrt{26}}{13}$$

123. ¿Qué distancia hay entre las rectas *r* y *s*?

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = -1 + 2t \\ y = 3 + t \end{array}\right\}$ $\quad s: -x + 2y + 5 = 0$

b) $r: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{6}$ $\quad s: y = \frac{8x-3}{4}$

c) $r: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = -1 - t \end{array}\right\}$ $\quad s: y = \frac{-x-1}{3}$

a) $\vec{u_r} = (2, 1)$, $\vec{u_s} = (-2, -1)$. Los vectores son proporcionales. Un punto de r es $P(-1, 3)$

$$d(r, s) = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

b) $\vec{u_r} = (2, 6)$, $\vec{u_s} = (4, 8)$. Los vectores no son proporcionales; por tanto, las rectas son secantes.

c) $\vec{u_r} = (3, -1)$, $\vec{u_s} = (3, -1)$. Como los vectores son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Tomamos un punto de la recta r, $A(2, -1)$, y vemos si pertenece a s: $-1 = \frac{-2-1}{3}$.

Las rectas son coincidentes.

124. Calcula el valor de a para que la distancia entre el punto $A(2, a)$ y la recta r: $13x - 12y + 2 = 0$ sea de 3 unidades.

$$d(A, r) = \frac{|13 \cdot 2 - 12 \cdot a + 2|}{\sqrt{313}} = 3 \rightarrow |28 - 12a| = 3\sqrt{313}$$

- Si $28 - 12a \geq 0$:

$$28 - 12a = 3\sqrt{313} \rightarrow a = \frac{28 - 3\sqrt{313}}{12}$$

- Si $28 - 12a \leq 0$:

$$-28 + 12a = 3\sqrt{313} \rightarrow a = \frac{3\sqrt{313} + 28}{12}$$

125. Halla el valor de b para que la recta r y el punto P se encuentren a 5 unidades de distancia.

$$r: \frac{x+1}{b} = \frac{y+3}{3} \qquad P(-4, 1)$$

Expresamos la recta en forma general:

$$3x + 3 = by + 3b \rightarrow 3x - by + 3 - 3b = 0$$

$$5 = \frac{|3 \cdot (-4) - b \cdot 1 + 3 - 3b|}{\sqrt{3^2 + (-b)^2}} \rightarrow 5\sqrt{9 + b^2} = |-9 - 4b|$$

$$9b^2 - 72b + 144 = 0 \rightarrow b = 4$$

126. Calcula el valor de k para que la distancia entre las rectas r: $3x + 4y + k = 0$ y s: $6x - 8y - 10 = 0$ sea 4.

Un punto de la recta s es $P(-5, -5)$.

$$d(P, r) = \frac{|3 \cdot (-5) + 4 \cdot (-5) + k|}{5} = 4 \rightarrow |-35 + k| = 20$$

- Si $-35 + k \geq 0$:

$$-35 + k = 20 \rightarrow k = 55$$

- Si $-35 + k \leq 0$:

$$35 - k = 20 \rightarrow k = 15$$

127. **Encuentra la ecuación de una recta que sea paralela a $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-5}{4}$ y que esté a 8 unidades de distancia de ella.**

La recta tiene esta ecuación general.

$4x + 3y + C = 0$

$8 = \frac{|4\cdot(-1)+3\cdot 5 + C|}{\sqrt{4^2+3^2}} \rightarrow 40 = |11 + C|$

$C = 29, C = -51$

Las siguientes rectas cumplen las condiciones indicadas.

$4x + 3y + 29 = 0$

$4x + 3y - 51 = 0$

128. **Determina el ángulo que forman las rectas *r* y *s*.**

a) $r: \begin{rcases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \end{rcases}$ $s: \begin{rcases} x = 2\mu \\ y = 5 + 3\mu \end{rcases}$

b) $r: y = 3x + 2$ $s: y = \frac{4x+1}{-2}$

c) $r: \frac{x}{2} = \frac{y-4}{6}$ $s: \frac{2x+3}{-1} = \frac{y}{2}$

d) $r: 20x - 4y + 1 = 0$ $s: -15x + 3y + 7 = 0$

a) $\vec{u_r} = (3, 2), \vec{u_s} = (2, 3)$

$\cos\alpha = \frac{|d_1\cdot c_1 + d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \frac{|3\cdot 2 + 2\cdot 3|}{\sqrt{3^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{12}{13}$

$\alpha = 22°\ 37'\ 11{,}51''$

b) $\vec{u_r} = (1, 3), \vec{u_s} = (-4, 8)$

$\cos\alpha = \frac{|d_1\cdot c_1 + d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \frac{|1\cdot(-4) + 3\cdot 8|}{\sqrt{1^2+3^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+8^2}} =$

$= \frac{20}{\sqrt{800}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha = 45°$

c) $\vec{u_r} = (2, 6)$, $\vec{u_s} = (-1, 4)$

$\cos\alpha = \frac{|2\cdot(-1)+6\cdot 4|}{\sqrt{40}\sqrt{17}} = \frac{11}{\sqrt{170}} \rightarrow \alpha = 32°\ 28'\ 16{,}3''$

d) $\vec{u_r} = (4, 20), \vec{u_s} = (3, 15)$

$\cos\alpha = \frac{|d_1\cdot c_1 + d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \frac{|4\cdot 3 + 20\cdot 15|}{\sqrt{4^2+20^2}\cdot\sqrt{3^2+15^2}} = \frac{312}{312} = 1$

$\alpha = 0°$

129. **¿Qué ángulo forman entre sí estos pares de rectas?**

a) $r: \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3}$ $s: y = -5x + 3$

b) $r: y = 3x - 2$ $s: \begin{rcases} x = 2 - t \\ y = 5 + 3t \end{rcases}$

c) $r: \begin{rcases} x = t \\ y = 3 + t \end{rcases}$ $s: 2x + 2y - 1 = 0$

d) $r: 3x - y - 3 = 0$ $s: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-4}$

a) $\vec{u_r} = (-2, 3)$, $\vec{u_s} = (1, -5)$

$$\cos\alpha = \frac{|-2-15|}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \frac{17\sqrt{2}}{26} \to \alpha = 22^\circ\ 22'\ 48''$$

b) $\vec{u_r} = (1, 3)$, $\vec{u_s} = (-1, 3)$

$$\cos\alpha = \frac{|-1+9|}{\sqrt{10}\sqrt{10}} = \frac{4}{5} \to \alpha = 36^\circ\ 52'\ 11{,}6''$$

c) $\vec{u_r} = (1, 1)$, $\vec{u_s} = (2, -2)$

$$\cos\alpha = \frac{|1\cdot 2 + 1\cdot(-2)|}{\sqrt{1^2+2^2}\ \sqrt{1^2+(-2)^2}} = 0 \to \alpha = 90^\circ$$

d) $\vec{u_r} = (1, 3)$, $\vec{u_s} = (2, -4)$

$$\cos\alpha = \frac{|1\cdot 2 + 3\cdot(-4)|}{\sqrt{1^2+3^2}\ \sqrt{2^2+(-4)^2}} = \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \alpha = 45^\circ$$

130. Calcula el ángulo que forman entre sí las rectas $r\colon y = x + 1$, $s\colon x + 4y + 4 = 0$ y $t\colon \dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y+3}{-3}$.

$r: x - y + 1 = 0$

$s: x + 4y + 4 = 0$

$t = 3x + 2y - 12 = 0$

$$\cos(\widehat{r,s}) = \frac{|1\cdot 1 - 1\cdot 4|}{\sqrt{2}\sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{34}} \to \alpha = 59^\circ$$

$$\cos(\widehat{r,t}) = \frac{|1\cdot 1 - 1\cdot 2|}{\sqrt{2}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \to \beta = 78{,}7^\circ$$

$$\cos(\widehat{s,t}) = \frac{|1\cdot 3 + 4\cdot 2|}{\sqrt{17}\sqrt{13}} = \frac{11}{\sqrt{221}} \to \alpha = 42{,}3^\circ$$

131. Encuentra el ángulo que forman la recta que pasa por los puntos $P(-1, 4)$ y $Q(3, 8)$ y la recta $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{8}$.

$\overrightarrow{PQ} = (4, 4)$, $\vec{u_r} = (2, 8)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1\cdot c_1 + d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \frac{|4\cdot 2 + 4\cdot 8|}{\sqrt{4^2+4^2}\cdot\sqrt{2^2+8^2}} = \frac{40}{\sqrt{2.176}}$$

$\alpha = 30^\circ\ 57'\ 49{,}52''$

132. Obtén la medida de los ángulos que forman las parejas de rectas r y s.

a) $r\colon y = \dfrac{4x-3}{2}$

s pasa por $(-1, 6)$ y es paralela a $4x + 2y + 7 = 0$.

b) $r\colon x + 3 = \dfrac{y}{2}$

s pasa por $(3, 8)$ y es paralela a $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+9}{4}$.

c) $r\colon 8x - 2y - 3 = 0$

s es perpendicular a $\left.\begin{aligned} x &= 6 - t \\ y &= -1 + 3t \end{aligned}\right\}$ y pasa por $(3, -2)$.

a) $\vec{u_r} = (2, 4)$, $\vec{u_s} = (2, -4)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1\cdot c_1 + d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \frac{|2\cdot 2 + 4\cdot(-4)|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{4^2+2^2}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$\alpha = 53^\circ\ 7'\ 48''$

b) $\vec{u}_r = (1, 2), \vec{u}_s = (2, 4)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{10}{10} = 1$$

$\alpha = 0° \rightarrow$ Las rectas son paralelas.

c) $\vec{u}_r = (2, 8)$

El vector $\vec{u}_s$ debe ser perpendicular a $(-1, 3)$; por tanto, puede ser $\vec{u}_s = (3, 1)$.

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 8 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 8^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{680}} = \frac{7\sqrt{170}}{170}$$

$\alpha = 57° \, 31' \, 43{,}71''$

133. Obtén el valor que debe tener b para que la recta $3x + by + 6 = 0$ forme un ángulo de 60° con la recta $y = \frac{x+4}{-3}$.

$\vec{u}_r = (-3, 1), \vec{u}_s = (b, -3)$

$$\cos 60° = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|-3 \cdot b + 1 \cdot (-3)|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{b^2 + (-3)^2}}$$

$$\rightarrow m = \frac{-18 - 15\sqrt{3}}{13}, \; m = \frac{-18 + 15\sqrt{3}}{13}$$

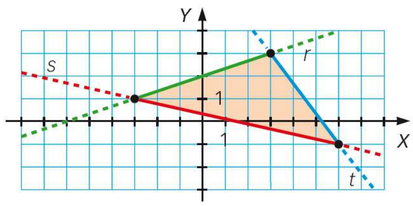
134. Halla el valor de k para que las rectas r y s formen un ángulo de 45°.

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \end{array}\right\} \qquad s: kx - 2y + 1 = 0$$

$r: 2x - y - 7 = 0$

$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|2k + 2|}{\sqrt{k^2 + 4}\sqrt{5}} \rightarrow k_1 = \frac{1}{3}, \; k_2 = -3$$

135. Escribe las ecuaciones, en la forma general, de las rectas que forman el siguiente triángulo.



La recta r pasa por los puntos $(-3, 1)$ y $\left(3, \frac{5}{2}\right)$:

$\vec{u}_r = (4, 1)$ $\qquad r: -x + 4y - 7 = 0$

La recta s pasa por los puntos $\left(3, \frac{5}{2}\right)$ y $\left(6, -\frac{5}{4}\right)$:

$\vec{u}_s = (4, -5)$ $\qquad s: 5x + 4y - 25 = 0$

La recta t pasa por los puntos $\left(6, -\frac{5}{4}\right)$ y $(-3, 1)$:

$\vec{u}_t = (-4, 1)$ $\qquad t: x + 4y - 1 = 0$

136. **Determina la recta paralela a *r* que pasa por el punto simétrico de *P* respecto de la recta *r*.**

a) $r: 2x - 3y + 10 = 0$ $\quad P(4, -7)$

b) $r: \left.\begin{array}{l} x = -2t \\ y = 2 - t \end{array}\right\}$ $\quad P(4, 4)$

c) $r: y = \dfrac{3x - 1}{4}$ $\quad P(5, -9)$

a) Calculamos la recta *s*, perpendicular a *r*, y que pasa por *P*:

$s: \dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y+7}{3}$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + 10 = 0 \\ 3x - 12 = -2y - 14 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 2x - 3y = -10 \\ 3x + 2y = -2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 \end{array}\right\}$

$(-2, 2)$ es el punto medio de *P* y su simétrico, *P'*, respecto de *r*.

Calculamos $P'(x, y)$:

$(-2, 2) = \left(\dfrac{4+x}{2}, \dfrac{-7+y}{2}\right) \to \left.\begin{array}{l} x = -8 \\ y = 11 \end{array}\right\}$

La recta es: $\left.\begin{array}{l} x = -8 + 3t \\ y = 11 + 2t \end{array}\right\}$

b) Calculamos la recta *s*, perpendicular a *r*, y que pasa por *P*:

$s: \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-4}{-2}$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$\dfrac{-2t - 4}{1} = \dfrac{2 - t - 4}{-2} \to t = 2$

$(-4, 0)$ es el punto medio de *P* y su simétrico, *P'*, respecto de *r*.

Calculamos $P'(x, y)$:

$(-4, 0) = \left(\dfrac{4+x}{2}, \dfrac{4+y}{2}\right) \to \left.\begin{array}{l} x = -12 \\ y = -4 \end{array}\right\}$

La recta es: $\left.\begin{array}{l} x = -12 - 2t \\ y = -4 - t \end{array}\right\}$

c) Calculamos la recta *s*, perpendicular a *r*, y que pasa por *P*:

$s: \dfrac{x-5}{-3} = \dfrac{y+9}{4}$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$\left.\begin{array}{l} 4y = 3x - 1 \\ 4x - 20 = -3y - 27 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} -3x + 4y = -1 \\ 4x + 3y = -7 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \end{array}\right\}$

$(-1, -1)$ es el punto medio de *P* y su simétrico, *P'*, respecto de *r*.

Calculamos $P'(x, y)$:

$(-1, -1) = \left(\dfrac{5+x}{2}, \dfrac{-9+y}{2}\right) \to \left.\begin{array}{l} x = -7 \\ y = 7 \end{array}\right\}$

La recta es: $\left.\begin{array}{l} x = -7 + 4t \\ y = 7 + 3t \end{array}\right\}$

137. **Encuentra la ecuación de la recta simétrica de *r* respecto de la recta *s*.**

a) $r: y = \dfrac{x-4}{2}$ $\quad s: -x + 2y + 4 = 0$

b) $r: \left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \end{array}\right\}$ $\quad s: 2x + y - 7 = 0$

a) $\vec{u_r} = (2, 1), \vec{u_s} = (2, 1)$

Las rectas son paralelas o coincidentes.

Elegimos un punto, P, de r y calculamos la distancia hasta s:

$P(4, 0) \qquad d(P, s) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|-4 + 2 \cdot 0 + 4|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = 0$

Las rectas son coincidentes y, por tanto, la recta simétrica es la misma.

b) $\vec{u_r} = (-1, 2), \vec{u_s} = (1, -2)$

Como los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Elegimos un punto, P, de r y calculamos la distancia hasta s:

$P(2, 3) \qquad d(P, s) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 0$

Las rectas son coincidentes y, por tanto, la recta simétrica es la misma.

138. Los puntos $P(3, 3)$ y $Q(6, -1)$ son simétricos respecto de una recta. Halla la ecuación general de esta recta.

$\overrightarrow{PQ} = (3, -4)$ es el vector normal de la recta. $\qquad M\left(\dfrac{3+6}{2}, \dfrac{-1+3}{2}\right) = \left(\dfrac{9}{2}, 1\right)$

$r: 3x - 4y - \dfrac{19}{2} = 0 \rightarrow 6x - 8y - 19 = 0$

139. Comprueba si están alineados los puntos $P(-1, 4)$, $Q(3, 1)$ y $R(11, -5)$. En caso afirmativo, escribe la ecuación de la recta que los contiene.

Calculamos los vectores formados por los puntos:

$\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$

$\overrightarrow{PR} = (12, -9)$

Como los vectores son proporcionales, los puntos están alineados.

Calculamos la ecuación de la recta que los contiene:

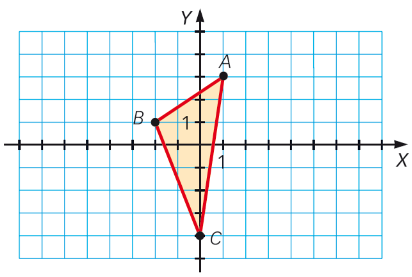
$r: \left.\begin{array}{l} x = -1 + 4t \\ y = 4 - 3t \end{array}\right\}$

140. Demuestra que los puntos $A(3, -2)$, $B(9, 6)$ y $C(10, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

$\overrightarrow{AC} = (7, 7) \qquad \overrightarrow{BC} = (1, -1)$

Son ortogonales: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 7 \cdot 1 + 7 \cdot (-1) = 0$

141. Para este triángulo calcula lo siguiente.



a) La longitud del segmento AC.

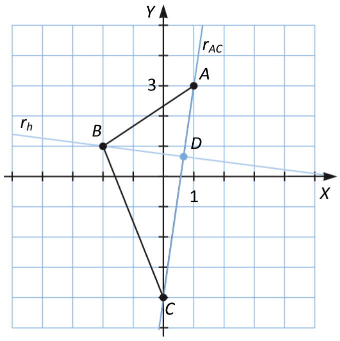
b) La ecuación de la recta que pasa por A y por C.

c) El área del triángulo ABC.

a) $\left.\begin{array}{l}A(1,3)\\C(0,-4)\end{array}\right\}\rightarrow \overrightarrow{AC}=C-A=(-1,-7)\rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-7)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

b) La recta pasa por el punto *A* y tiene vector director $\overrightarrow{AC}$. Por tanto, su ecuación es r_{AC}: $7x-y=4$.

c) Para calcular el área se necesitan conocer la base, *b*, y la altura, *h*, del triángulo:



$b=\left|\overrightarrow{AC}\right|=5\sqrt{2}$.

La recta que definirá *h* cumple lo siguiente:

$$r_h:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{v_h}\perp\overrightarrow{AC}\\B(-2,1)\end{array}\right.\rightarrow r_h:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{v_h}=(7,-1)\\B(-2,1)\end{array}\right.\rightarrow\frac{x+2}{7}=\frac{y-1}{-1}\rightarrow r_h: x+7y=5$$

El punto de intersección de r_h con la recta r_{AC} permite obtener la longitud de la altura, *h*:

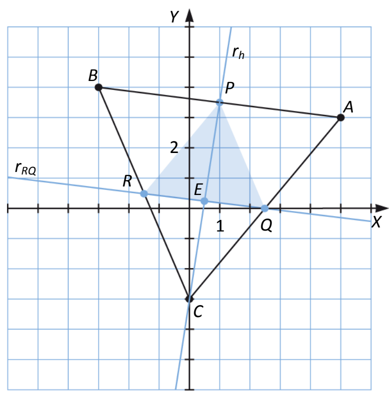
$$\left.\begin{array}{r}7x-y=4\\x+7y=5\end{array}\right\}\rightarrow D\left(\frac{33}{50},\frac{31}{50}\right)\rightarrow h=\left|\overrightarrow{BD}\right|=\left|\left(\frac{133}{50},-\frac{19}{50}\right)\right|=\frac{19\sqrt{2}}{10}$$

Por tanto, $A_{\text{triángulo}}=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}\cdot\dfrac{19\sqrt{2}}{10}}{2}=\dfrac{19}{2}\ \text{u}^2$.

142. Calcula el área del triángulo formado al unir los puntos medios del triángulo cuyos vértices son los puntos *A*(5, 3), *B*(−3, 4) y *C*(0, −3).

Primero, se localizan los vértices del triángulo del que se va a calcular el área:

- Punto medio de $\overline{AB}$: $P=\left(\frac{5-3}{2},\frac{3+4}{2}\right)=\left(1,\frac{7}{2}\right)$
- Punto medio de $\overline{AC}$: $Q=\left(\frac{5+0}{2},\frac{3-3}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},0\right)$
- Punto medio de $\overline{BC}$: $R=\left(\frac{-3+0}{2},\frac{4-3}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$



Se toma como base el segmento $\overline{RQ}$, es decir:

$$b=\left|\overrightarrow{RQ}\right|=\sqrt{(4)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{65}}{2}\approx 4{,}03$$

$$r_{RQ}:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{RQ}=\left(4,-\frac{1}{2}\right)\\Q=\left(\frac{5}{2},0\right)\end{array}\right.\rightarrow 2x+16y=5$$

La recta que definirá h cumple lo siguiente:

$$r_h:\begin{cases}\overrightarrow{v_h}\perp \overline{RQ}\\ P\left(1,\dfrac{7}{2}\right)\end{cases}\text{, es decir, } r_h:\begin{cases}\overrightarrow{v_h}=\left(\dfrac{1}{2},4\right)\\ P\left(1,\dfrac{7}{2}\right)\end{cases}\rightarrow \frac{x-1}{\frac{1}{2}}=\frac{y-\frac{7}{2}}{4}\rightarrow 16x-2y=9$$

El punto de intersección de r_h con r_{RQ} permite obtener la longitud de la altura:

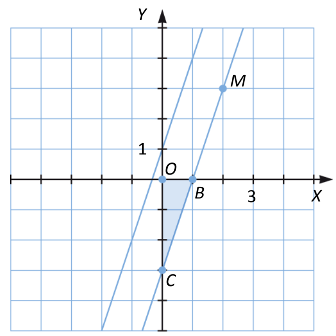
$$\left.\begin{array}{l}2x+16y=5\\16x-2y=9\end{array}\right\}\rightarrow E\left(\frac{31}{130},-\frac{337}{130}\right)\rightarrow h=\left|\overrightarrow{EP}\right|=\left|\left(\frac{99}{130},\frac{396}{65}\right)\right|\approx 6{,}14$$

Por tanto, $A_{triángulo}=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{4{,}03\cdot 6{,}14}{2}=12{,}3721\ \text{u}^2$.

143. La recta que pasa por $M(2,3)$ y es paralela a la recta $r: y=3x+1$ determina con los ejes coordenados un triángulo. Halla su área.

Primero se calcula la ecuación de la recta s:

$$s:\begin{cases}s\parallel r\\ M\in s\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_s}=(1,3)\\ M(2,3)\end{cases}\rightarrow 3x-y=3$$



A continuación se obtienen los puntos de intersección de la recta s con los ejes de coordenadas:

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\3x-y=3\end{array}\right\}\rightarrow B(0,-3) \qquad \left.\begin{array}{l}y=0\\3x-y=3\end{array}\right\}\rightarrow C(1,0)$$

El triángulo está formado por los puntos O, B, C. Como son puntos que están sobre los ejes de coordenadas, los vectores $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OB}$ son perpendiculares. Entonces:

$$\left|\overrightarrow{OC}\right|=\sqrt{1^2+0^2}=1\quad \left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=3$$

Y finalmente se obtiene el área: $A_{\text{triángulo}}=\dfrac{\left|\overrightarrow{OC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|}{2}=\dfrac{1\cdot 3}{2}=\dfrac{3}{2}\ \text{u}^2$

144. Los puntos $A(2,2)$ y $B(-10,-2)$ son los vértices correspondientes al lado desigual de un triángulo isósceles. El otro lado está sobre la recta $\left.\begin{array}{l}x=1-6t\\y=1+2t\end{array}\right\}$. Determina el triángulo y halla su área.

Igualamos el módulo de los vectores que van de la recta hasta los puntos A y B.

$$\sqrt{(1-6t-2)^2+(1+2t-2)^2}=\sqrt{(1-6t+10)^2+(1+2t+2)^2}$$
$$\rightarrow t=1\rightarrow C(-5,3)$$

Hallamos las longitudes de los lados: $\overrightarrow{AB}=(-12,-4)$, $\overrightarrow{AC}=(-7,1)$ y $\overrightarrow{BC}=(5,5)$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-12)^2+(-4)^2}=\sqrt{160}$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-7)^2+1^2}=\sqrt{50}$$

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}$$

Determinamos la altura sobre el lado desigual, utilizando el teorema de Pitágoras:

$$h=\sqrt{\left(\sqrt{50}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{160}}{2}\right)^2}=\sqrt{10}\ \text{u}$$

Por tanto, el área es: $A=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{\sqrt{160}\cdot\sqrt{10}}{2}=20\ \text{u}^2$

145. Halla el área del cuadrilátero formado por los puntos (1, 3), (−2, 4), (−1, −3) y (3, −2).

Sean $A(1, 3)$, $B(-2, 4)$, $C(-1, -3)$, $D(3, -2)$los puntos dados. La representación gráfica muestra que el cuadrilátero no es un paralelogramo. Entonces, para calcular el área hay que dividirlo en dos triángulos mediante una de sus diagonales:

La diagonal, r_{AC}, tiene por ecuación $r_{AC}: \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (-2, -6) \\ A(1{,}3) \end{cases} \to y = 3x$

- Triángulo *ABC*:

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (-2, -6) \cdot (-3, 1) = 6 - 6 = 0 \to$ Los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ son perpendiculares. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \end{array}\right\} \to A_{ABC} = \frac{2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2} = 10 \text{ u}^2.$$

- Triángulo *ADC*:

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = (2, -5) \cdot (4, 1) = 8 - 5 \neq 0 \to$ Los lados $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ son perpendiculares. Entonces, hay que calcular la altura, *h*, relativa al lado del triángulo que se tome como base:

Base $= \left|\overrightarrow{AC}\right| = 2\sqrt{10}$

La recta que definirá la altura, h, cumple lo siguiente:

$$r_h: \begin{cases} \overrightarrow{v_h} \perp \overrightarrow{AC} \\ D(3,-2) \end{cases}, \text{ es decir, } r_h: \begin{cases} \overrightarrow{v_h} = (6, -2) \\ D(3, -2) \end{cases} \to x + 3y = -3$$

El punto de intersección de r_h con r_{AC} permite obtener la longitud de la altura:

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x \\ x + 3y = -3 \end{array}\right\} \to E\left(-\frac{3}{10}, -\frac{-9}{10}\right) \to h = \left|\overrightarrow{ED}\right| = \left|\left(\frac{33}{10}, -\frac{11}{10}\right)\right| = \frac{11\sqrt{10}}{10}$$

Por tanto, $A_{ADC} = \dfrac{2\sqrt{10} \cdot \dfrac{11\sqrt{10}}{10}}{2} = 11 \text{ u}^2$.

Así, $A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ADC} = 10 + 11 = 21 \text{ u}^2$.

146. Calcula el centro de un paralelogramo del que conocemos los vértices (5, −1), (9, 5) y (−1, −5). ¿Cuántas soluciones tiene este problema? ¿Por qué? Haz un dibujo en el que se muestren todas las soluciones.

Llamamos a los puntos $A(5, -1)$, $B(9, 5)$ y $C(-1, -5)$.

$\overrightarrow{AB} = (4, 6)$

Hacemos una traslación con origen en C y vector $(4, 6)$, y obtenemos un punto D, que forma un paralelogramo: $D(3, 1)$

Calculamos el centro del paralelogramo, E:

$$(x, y) = \left(\frac{9-1}{2}, \frac{5-5}{2}\right) \to E(4, 0)$$

Hacemos una traslación con origen en C y vector $(-4, -6)$, y obtenemos un punto D', que forma un paralelogramo: $D'(-5, -11)$

Calculamos el centro del paralelogramo, E':

$$(x, y) = \left(\frac{9-5}{2}, \frac{5-11}{2}\right) \to E'(2, -3)$$

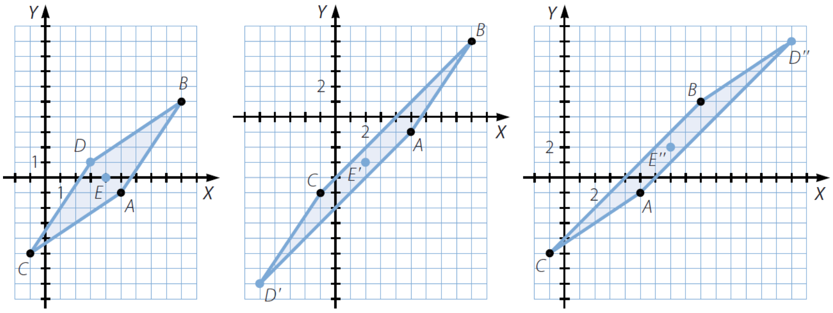
$\overrightarrow{CB} = (10, 10)$

Hacemos una traslación con origen en A y vector (10, 10),
y obtenemos un punto D'', que forma un paralelogramo: $D''=(15,9)$

Calculamos el centro del paralelogramo, E'':

$$(x,\ y)=\left(\frac{15-1}{2},\frac{9-5}{2}\right)\rightarrow E''(7,2)$$

Este problema tiene tres soluciones.



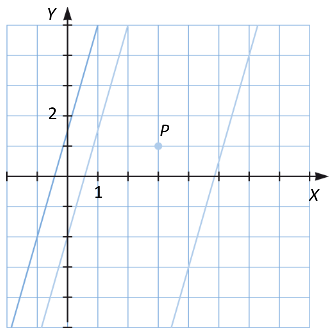
147. **Calcula la ecuación de las rectas paralelas a la recta *r*: 10*x* − 3*y* + 4 = 0 cuya distancia al punto *P*(3, 1) es 2.**

Sólo hay dos rectas que cumplan las características dadas. Como son paralelas a r, tienen el mismo vector director, es decir son:

$s:10x-3y+c=0 \qquad t:10x-3y+c'=0$

Entonces, imponiendo la condición de la distancia:

$$d=\frac{|10\cdot3-3\cdot1+c|}{\sqrt{9+100}}=2\rightarrow\frac{|27+c|}{\sqrt{109}}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{27+c}{\sqrt{109}}=2 & \text{si } c\geq-27\\[2mm] \dfrac{-27-c}{\sqrt{109}}=2 & \text{si } c<-27\end{cases}\rightarrow\begin{cases}c=2\sqrt{109}-27\\ c'=-2\sqrt{109}-27\end{cases}$$

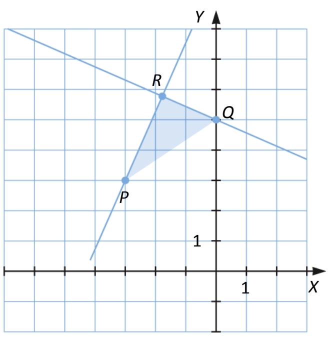


148. **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto *P*(−3, 3) y se encuentra a una distancia de 2 unidades del punto *Q*(0, 5).**

Como la recta pasa por el punto P:

$$ax+by+c=0\xrightarrow{P(-3,3)}-3a+3b+c=0$$

Se crea un triángulo rectángulo, cuyos vértices son P, Q y R, donde R es la proyección del punto Q sobre la recta buscada:



$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$ $\qquad$ $\left|\overrightarrow{QR}\right|=2=\left|(x_R,y_R-5)\right|=\sqrt{x_R^2+(y_R-5)^2}\rightarrow4=x_R^2+(y_R-5)^2$

Por el teorema de Pitágoras:

$$13 = 4 + \left|\overrightarrow{PR}\right|^2 \rightarrow 3 = \left|\overrightarrow{PR}\right| \rightarrow (x_R + 3)^2 + (y_R - 3)^2 = 9$$

Resolviendo el sistema, se obtienen las coordenadas del punto R:

$$\left.\begin{array}{l} 4 = x_R{}^2 + (y_R - 5)^2 \\ (x_R + 3)^2 + (y_R - 3)^2 = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x_R = 0,\ \ y_R = 3 \rightarrow \text{No válida.} \\ x_R = -\dfrac{24}{13},\ \ y_R = \dfrac{75}{13} \end{cases} \rightarrow R\left(-\frac{24}{13}, \frac{75}{13}\right)$$

La recta buscada está determinada por los puntos P y R:

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{PR} = R - P = \left(\dfrac{15}{13}, \dfrac{36}{13}\right) \rightarrow r: 36x - 15y = -153 \\ P(-3, 3) \end{cases}$$

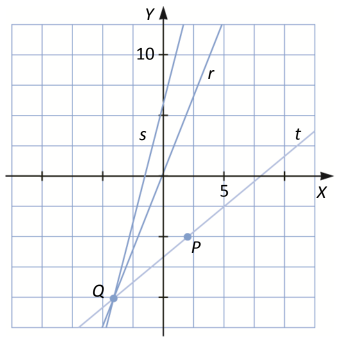
149. Obtén la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, -5)$ y por la intersección de las rectas r: $5x - 2y + 1 = 0$ y s: $4x - y + 7 = 0$.

Primero se obtiene el punto Q, intersección de las rectas r y s:

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 2y + 1 = 0 \\ 4x - y + 7 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{y = 4x + 7} 5x - 2(4x + 7) + 1 = 0 \rightarrow Q\left(-\frac{13}{3}, -\frac{31}{3}\right)$$

Para terminar se calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q:

$$\left.\begin{array}{l} P(2, -5) \\ Q\left(-\dfrac{13}{3}, -\dfrac{31}{3}\right) \end{array}\right\} \rightarrow m = \frac{-5 + \dfrac{31}{3}}{2 + \dfrac{13}{3}} = \frac{16}{19} \rightarrow t: 16x - 19y - 127 = 0$$



150. Calcula el valor de k para que estas tres rectas se corten en el mismo punto. Determina las coordenadas de dicho punto.

$2x + 5y - 1 = 0 \quad -x + 2y + k = 0 \quad 4x + 7y - 5 = 0$

Se denotan por r, s y t a las rectas dadas:

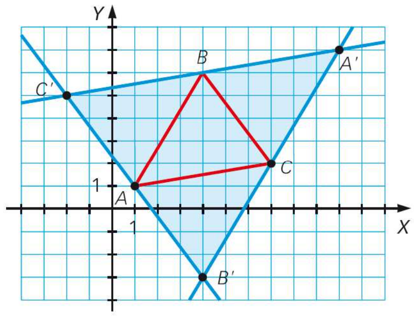
$$r: 2x + 5y - 1 = 0$$
$$s: -x + 2y + k = 0$$
$$t: 4x + 7y - 5 = 0$$

Calculando el punto de intersección, P, de las rectas r y t, y obligando a que este punto pertenezca a la recta, se obtiene k:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 5y - 1 = 0 \\ 4x + 7y - 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -4x - 10y + 2 = 0 \\ 4x + 7y - 5 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} -3y - 3 = 0 \rightarrow P(3, -1)$$

$$-x + 2y + k = 0 \xrightarrow{P(3,-1)\, \in\, s} -3 - 2 + k = 0 \rightarrow k = 5$$

151. **Sea el triángulo de vértices *A*(1, 1), *B*(4, 6) y *C*(7, 2). Las rectas paralelas por cada vértice al lado opuesto forman un triángulo *A'B'C'*.**



Determina las coordenadas de estos vértices y comprueba que los dos triángulos son semejantes calculando los ángulos de ambos triángulos.

Primero se calculan las ecuaciones de las rectas determinadas por los puntos *A'*, *B'* y *C'* dos a dos:

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{v_{AB}}=\overrightarrow{v_{A'B'}}=B-A=(3,5)\\ C(7,2)\end{array}\right\}\rightarrow r_{A'B'}:\ 5x-3y=29$$

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{v_{AC}}=\overrightarrow{v_{A'C'}}=C-A=(6,1)\\ B(4,\ 6)\end{array}\right\}\rightarrow r_{A'C'}:\ x-6y=-32$$

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{v_{BC}}=\overrightarrow{v_{B'C'}}=C-B=(3,-4)\\ A(1,1)\end{array}\right\}\rightarrow r_{B'C'}:\ 4x+3y=7$$

A continuación se obtienen las coordenadas de *A'*, *B'* y *C'* hallando las respectivas intersecciones de las rectas anteriores:

$$A'=r_{A'B'}\cap r_{A'C'}\rightarrow\left.\begin{array}{r}5x-3y=29\\ x-6y=-32\end{array}\right\}\xrightarrow{x=6y-32}5(6y-32)-3y=29\rightarrow A'(10,7)$$

$$B'=r_{A'B'}\cap r_{B'C'}\rightarrow\left.\begin{array}{r}5x-3y=29\\ 4x+3y=7\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducción}}B'(4,-3)$$

$$C'=r_{A'C'}\cap r_{B'C'}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x-6y=-32\\ 4x+3y=7\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}-4x+24y=128\\ 4x+3y=7\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducción}}C'(-2,5)$$

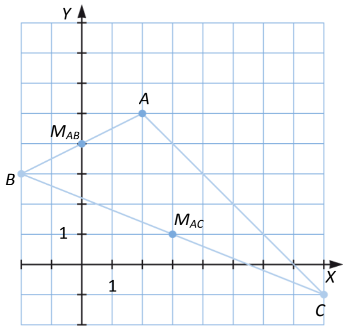
Para terminar, se comprueba que los dos triángulos son semejantes:

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{v_{AB}}\cdot\overrightarrow{v_{BC}}}{\left|\overrightarrow{v_{AB}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_{BC}}\right|}=\frac{\overrightarrow{v_{A'B'}}\cdot\overrightarrow{v_{B'C'}}}{\left|\overrightarrow{v_{A'B'}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_{B'C'}}\right|}=\cos\beta'=\frac{-11}{\sqrt{9+25}\cdot\sqrt{9+16}}\rightarrow\beta=\beta'=67{,}834°\rightarrow\widehat{ABC}=\widehat{A'B'C'}$$

$$\cos\gamma=\frac{\overrightarrow{v_{AC}}\cdot\overrightarrow{v_{BC}}}{\left|\overrightarrow{v_{AC}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_{BC}}\right|}=\frac{\overrightarrow{v_{A'C'}}\cdot\overrightarrow{v_{B'C'}}}{\left|\overrightarrow{v_{A'C'}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_{B'C'}}\right|}=\cos\gamma'=\frac{14}{\sqrt{36+1}\cdot\sqrt{9+16}}\rightarrow\gamma=\gamma'=62{,}592°\rightarrow\widehat{BCA}=\widehat{B'C'A'}$$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{v_{AB}}\cdot\overrightarrow{v_{AC}}}{\left|\overrightarrow{v_{AB}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_{AC}}\right|}=\frac{\overrightarrow{v_{A'B'}}\cdot\overrightarrow{v_{A'C'}}}{\left|\overrightarrow{v_{A'B'}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_{A'C'}}\right|}=\cos\alpha'=\frac{23}{\sqrt{9+25}\cdot\sqrt{36+1}}\rightarrow\alpha=49{,}574°\rightarrow\widehat{CAB}=\widehat{C'A'B'}$$

152. **En un triángulo *ABC*, un vértice es *A*(2, 5). El punto medio del lado *BC* es (3, 1) y el punto medio del lado *AB* es (0, 4). Calcula los vértices *B* y *C* del triángulo.**



$$M_{AB}=\frac{A+B}{2}\rightarrow(0,4)=\frac{(2,5)+(b_1+b_2)}{2}\rightarrow B(-2,3)$$

$$M_{BC}=\frac{B+C}{2}\rightarrow(3,1)=\frac{(-2,3)+(c_1+c_2)}{2}\rightarrow C(8,-1)$$

153. **Determina las coordenadas de un punto *P*, sabiendo que pertenece a la recta *r*: $x-y+1=0$ y dista 5 unidades del origen de coordenadas.**

Sea el punto $P(x,y)$. *P* debe cumplir $\left.\begin{matrix} d(P,O)=5 \\ P\in r\end{matrix}\right\}$. Por tanto:

$$\left.\begin{matrix}\left|\overline{PO}\right|=\sqrt{a^2+b^2}=5\rightarrow a^2+b^2=25 \\ a-b+1=0\end{matrix}\right\}\xrightarrow{a=b-1}(b-1)^2+b^2=25\rightarrow\begin{cases}P_1(-4,-3)\\ P_2=(3,4)\end{cases}$$

154. **Halla las coordenadas de los puntos de la recta*r*: $2x+3y+4=0$ que están a una distancia de 2 unidades de la recta *s*: $3x+4y-6=0$.**

Se denota por $P(a,b)$ al punto o puntos buscados:

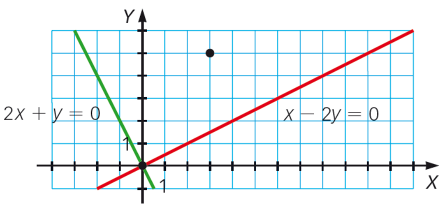
- Por un lado, $P\in r\rightarrow 2a+3b+4=0$.
- Por otro lado, imponiendo la condición de la distancia: $d(P,s)=\frac{|3a+4b-6|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|3a+4b-6|}{5}=2$

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, se obtiene *P*:

$$\left.\begin{matrix}2a+3b+4=0\\ \frac{3a+4b-6}{5}=2\end{matrix}\right\}\rightarrow x=64\rightarrow y=-44\rightarrow P_1(64,-44)\qquad \left.\begin{matrix}2a+3b+4=0\\ \frac{-3a-4b+6}{5}=2\end{matrix}\right\}\rightarrow x=4\rightarrow y=-4\rightarrow P_2(4,-4)$$

155. **Uno de los vértices de un paralelogramo es el origen de coordenadas y otro es el punto (3, 5).**

Halla las coordenadas de los otros dos vértices si uno está en la recta de ecuación $x-2y=0$ y el otro está en la recta de ecuación $2x+y=0$.



Sea $A(3, 5)$, $r: x - 2y = 0$ y $s: 2x + y = 0$ el punto y las rectas conocidas.

Las rectas dadas son perpendiculares, pues su producto escalar es nulo.

$(2, 1) \cdot (-1, 2) = -2 + 2 = 0$

Con esta observación es fácil calcular las ecuaciones de los lados que faltan:

- Recta *t*:

  Aquella paralela a *s* que pasa por *A*:

  $\vec{v}_s = (-1, 2) \rightarrow \vec{v}_t = (-1, 2) \xrightarrow{A \in t} t: 2x + y = 11$

- Recta *z*:

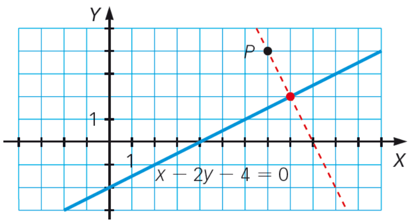
  Aquella paralela a *r* que pasa por *A*:

  $\vec{v}_r = (2, 1) \rightarrow \vec{v}_z = (2, 1) \xrightarrow{A \in z} z: x - 2y = -7$

Entonces, los vértices desconocidos del rectángulo son los puntos de intersección siguientes:

$B = r \cap t \rightarrow \left.\begin{matrix} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 11 \end{matrix}\right\} \rightarrow B\left(\frac{22}{5}, \frac{11}{5}\right)$ $\qquad$ $C = s \cap z \rightarrow \left.\begin{matrix} 2x + y = 0 \\ x - 2y = -7 \end{matrix}\right\} \rightarrow C\left(-\frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right)$

156. Halla la proyección ortogonal del punto $P(7, 4)$ sobre la recta $x - 2y - 4 = 0$.



Sea $r: x - 2y - 4 = 0$.

Primero se calcula la recta, *s*, perpendicular a *r* que pasa por *P*:

$\vec{v}_r = (2, 1) \rightarrow \vec{v}_s = (-1, 2) \xrightarrow{P \in s} s:\ 2x + y = 18$

Así, la proyección ortogonal del punto *P* sobre la recta *r* es otro punto *Q*, que viene determinado por la intersección entre *r* y *s*:

$\left.\begin{matrix} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 18 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{x = 2y + 4} 2(2y + 4) + y = 18 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = 8 \rightarrow Q(8, 2)$

157. Encuentra un punto en el eje de abscisas que esté a la misma distancia del punto $A(5, 4)$ que de la recta $r: \frac{x + 1}{4} = \frac{y - 4}{3}$.

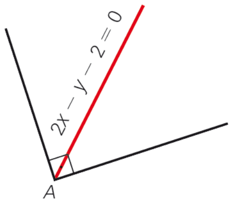
Sea $P(a, 0)$ el punto buscado. Entonces:

$$d(P, A) = d(P, r) \rightarrow \sqrt{(5 - a)^2 + 4^2} = \frac{|3a + 19|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \rightarrow \left(\sqrt{(5 - a)^2 + 4^2}\right)^2 = \frac{(3a + 19)^2}{25} \rightarrow 16a^2 - 364a + 664 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{83}{4} \end{cases}$$

Es sencillo comprobar que ambas soluciones son válidas. Por tanto, hay dos puntos solución:

$P_1(2, 0)$ $\qquad$ $P_2\left(\frac{83}{4}, 0\right)$

158. **Un ángulo recto tiene su vértice en el punto $A(3, 4)$ y su bisectriz tiene por ecuación $2x - y - 2 = 0$. Halla las ecuaciones de sus lados.**



La bisectriz tiene por vector director $(1, 2)$.

Escribimos la ecuación punto-pendiente de los lados:

$y - 4 = m(x - 3) \rightarrow -mx + y - 4 + 3m = 0$

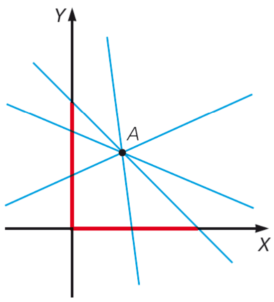
Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas:

$$\cos 45^\circ = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot m|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}}$$

$$\rightarrow m = -3,\ m = \frac{1}{3}$$

Las ecuaciones son: $3x + y - 13 = 0 \qquad -\frac{1}{3}x + y - 3 = 0$

159. **De todas las rectas que pasan por el punto $A(2, 3)$, calcula la que determina segmentos iguales al cortar a los dos ejes cartesianos.**



Las rectas que pasan por A son de la forma:

$y - 3 = m(x - 2)$

Estas rectas cortan a los ejes en los puntos:

$(0, 3 - 2m) \qquad \left(\frac{-3 + 2m}{m}, 0\right)$

La distancia al origen $(0, 0)$ debe ser igual:

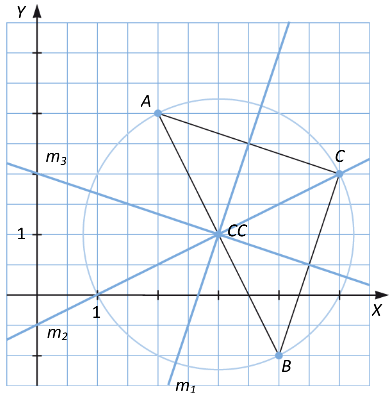
$$\sqrt{(3 - 2m)^2} = \sqrt{\left(\frac{-3 + 2m}{m}\right)^2} \rightarrow \text{Hay tres soluciones.}$$

$m_1 = -1 \rightarrow y = -x + 5$

$m_2 = 1 \longrightarrow y = x + 1$

$m_3 = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x$

160. **Halla las coordenadas del circuncentro del triángulo de vértices A... que el circuncentro equidista de los vértices.**



Para hallar las coordenadas del circuncentro basta con calcular las ecuaciones de dos de las mediatrices del triángulo y obtener su intersección:

- Mediatriz 1:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(3,-1)\rightarrow \overrightarrow{v_{m_1}}=(1,3)\\ M_1=\dfrac{A+C}{2}\rightarrow M_1=\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{5}{2}\right)\end{array}\right\}\rightarrow m_1: 3x-y=8$$

- Mediatriz 2:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(2,-4)\rightarrow \overrightarrow{v_{m_2}}=(4,2)\\ M_2=\dfrac{A+B}{2}\rightarrow M_2=(3,1)\end{array}\right\}\rightarrow m_2: x-2y=1$$

Así, el circuncentro es el punto $CC=m_1\cap m_2\rightarrow \left.\begin{array}{l}3x-y=8\\ x-2y=1\end{array}\right\}\xrightarrow{x=2y+1} CC(3,1)$

Obteniendo la tercera mediatriz, y viendo si pasa por el circuncentro, se comprueba si está bien calculado:

$m_3: x+3y=6 \xrightarrow{CC(3,1)} 3+3=6\rightarrow$ Es correcto.

161. **Halla la ecuación de la recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (3, 0) y (0, 5).**
Confirma que esa ecuación puede escribirse en la forma $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=1$.
Comprueba que si una recta corta a los ejes en los puntos (*a*, 0) y (0, *b*), su ecuación puede escribirse en la forma $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.
Esta manera de escribir una recta se llama forma canónica o segmentaria.

Sean $A(3,0)$ y $B(0,5)$. La recta *r* que pasa por (3, 0) y (0, 5) es:

$$\left.\begin{array}{r}\vec{v}_r=(3,0)-(0,5)=(3,-5)\\ A(3,0)\end{array}\right\}\rightarrow r:\ 5x+3y=15$$

En general, si una recta corta a los ejes en los puntos $P(a,0)$ y $Q(0,b)$, su ecuación es:

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-a,b)\\ P(a,0)\end{array}\right\}\rightarrow \frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}\rightarrow -\frac{x}{a}+1=\frac{y}{b}\rightarrow\ s: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

162. **Dado el segmento *AB*, donde *A*(−2, 1) y *B*(2, 3), construye los posibles triángulos equiláteros en los que *AB* es uno de sus lados.**

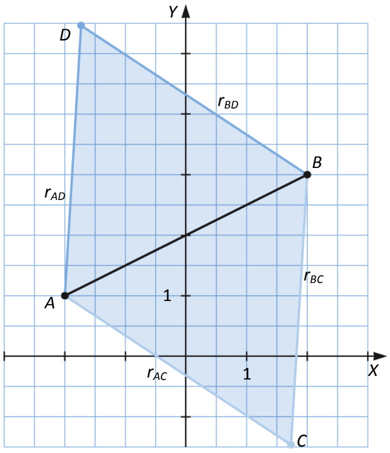
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(4,2)\\ A(-2,1)\end{array}\right\}\rightarrow\ r_{AB}: x-2y=-4$$

La ecuación genérica de las rectas buscadas que pasan por *A* es:

$y+2=m(x-1)\rightarrow mx-y-(2+m)=0$

Así, aplicando la condición del ángulo, se obtienen las posibles pendientes:

$$\cos 60° = \frac{|m+2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+m^2}} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{|m+2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+m^2}}\right)^2 \rightarrow m^2 - 16m - 11 = 0 \rightarrow \begin{cases} m_1 = 8 - 5\sqrt{3} \\ m_2 = 8 + 5\sqrt{3} \end{cases}$$



Entonces, se tiene que:

$$\begin{cases} m_1 = 8 - 5\sqrt{3} \rightarrow \quad r_{AC}: (8-5\sqrt{3})x - y - (10-5\sqrt{3}) = 0 \\ m_2 = 8 + 5\sqrt{3} \rightarrow \quad r_{AD}: (8+5\sqrt{3})x - y - (10+5\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

La ecuación genérica de las rectas buscadas que pasan por B es $y - 3 = m(x-2) \rightarrow mx - y + (3-2m) = 0$:

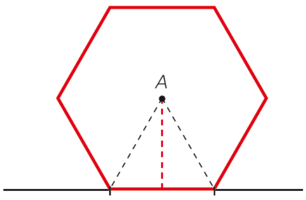
Así, se tiene que $\begin{cases} m_1 = 8 - 5\sqrt{3} \rightarrow \quad r_{BD}: (8-5\sqrt{3})x - y + (-13+10\sqrt{3}) = 0 \\ m_2 = 8 + 5\sqrt{3} \rightarrow \quad r_{CB}: (8+5\sqrt{3})x - y + (-13-10\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$

Realizando las correspondientes intersecciones se obtienen los puntos C y D, vértices de los dos triángulos posibles:

$$C = r_{AC} \cap r_{CB} \rightarrow \left.\begin{matrix} (8-5\sqrt{3})x - y - (10-5\sqrt{3}) = 0 \\ (8+5\sqrt{3})x - y + (-13-10\sqrt{3}) = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \ldots \rightarrow C\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{10}, \frac{1}{2} - \frac{17\sqrt{3}}{10}\right)$$

$$D = r_{AD} \cap r_{BD} \rightarrow \left.\begin{matrix} (8+5\sqrt{3})x - y - (10+5\sqrt{3}) = 0 \\ (8-5\sqrt{3})x - y + (-13+10\sqrt{3}) = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \ldots \rightarrow D\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{10}, \frac{1}{2} + \frac{17\sqrt{3}}{10}\right)$$

163. El centro de un hexágono regular es el punto $A(6, -2)$ y un lado se halla sobre la recta de ecuación $-4x + 3y + 5 = 0$. Determina las coordenadas de los vértices y su área.



Calculamos la longitud de la apotema:

$$d(A, r) = \frac{|-4\cdot 6 + 3\cdot(-2) + 5|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = 5$$

Hallamos la longitud del lado: $l = \sqrt{5^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \rightarrow l = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ u

Determinamos el área: $A = \frac{P\cdot a_p}{2} = \frac{6\cdot\frac{10\sqrt{3}}{3}\cdot 5}{2} = 50\sqrt{3}$ u^2

Calculamos los puntos que distan $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ de A y pertenecen a la recta dada:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{10\sqrt{3}}{3}=\sqrt{(6-x)^2+(-2-y)^2}\\ -4x+3y+5=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\sqrt{3}+2,\ y_1=1+\frac{4\sqrt{3}}{3}\\ x_2=-\sqrt{3}+2,\ y_2=1-\frac{4\sqrt{3}}{3}\end{array}\right\}$$

$$B\left(\sqrt{3}+2,\ 1+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\qquad C\left(-\sqrt{3}+2,\ 1-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

Otros dos vértices son simétricos a los vértices calculados respecto de A.

$$(6,-2)=\left(\frac{\sqrt{3}+2+x}{2},\frac{1+\frac{4\sqrt{3}}{3}+y}{2}\right)\rightarrow D\left(10-\sqrt{3},\ -5-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$(6,-2)=\left(\frac{-\sqrt{3}+2+x}{2},\frac{1-\frac{4\sqrt{3}}{3}+y}{2}\right)\rightarrow E\left(10+\sqrt{3},\ -5+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

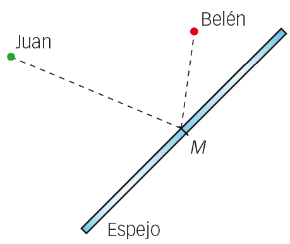
Para calcular los restantes vértices tenemos en cuenta la longitud de los lados.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\left(10+\sqrt{3}-x\right)^2+\left(-5+\frac{4\sqrt{3}}{3}-y\right)^2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\\ \sqrt{\left(\sqrt{3}+2-x\right)^2+\left(1+\frac{4\sqrt{3}}{3}-y\right)^2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=6,\ y=-2\\ x=2\sqrt{3}+6,\ y=\frac{8\sqrt{3}}{3}-2\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\left(10-\sqrt{3}-x\right)^2+\left(-5-\frac{4\sqrt{3}}{3}-y\right)^2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\\ \sqrt{\left(-\sqrt{3}+2-x\right)^2+\left(1-\frac{4\sqrt{3}}{3}-y\right)^2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=6,\ y=-2\\ x=-2\sqrt{3}+6,\ y=-\frac{8\sqrt{3}}{3}-2\end{array}\right\}$$

$$F\left(2\sqrt{3}+6,\ \frac{8\sqrt{3}}{3}-2\right)\qquad G\left(-2\sqrt{3}+6,\ -\frac{8\sqrt{3}}{3}-2\right)$$

164. Juan y Belén se están mirando uno al otro a través de un espejo situado según la recta de ecuación $y=-x+2$. Belén se encuentra en el punto $(-9,-1)$ y Juan en $(-4, 3)$. ¿Qué coordenadas tiene el punto M al que miran?



Hallamos el vector director de la recta dada:

$\vec{u_r}=(1,-1)$

Un vector perpendicular es $\vec{u_s}=(1, 1)$.

La recta, perpendicular al espejo, que pasa por donde está Belén es:

$$\left.\begin{array}{l}x=-9+\lambda\\ y=-1+\lambda\end{array}\right\}$$

Determinamos el punto de corte de las dos rectas:

$-1+\lambda=9-\lambda+2\rightarrow\lambda=6\rightarrow(-3,5)$

Calculamos el punto simétrico respecto del espejo, B':

$$(-3, 5) = \left(\frac{x-9}{2}, \frac{y-1}{2}\right) \rightarrow B' = (3, 11)$$

Repitiendo el proceso con el otro punto dado obtenemos J':

$$\left.\begin{array}{l} x = -4 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \end{array}\right\}$$

$$3 + \lambda = 4 - \lambda + 2 \rightarrow \lambda = \frac{3}{2} \rightarrow \left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right) = \left(\frac{x-4}{2}, \frac{y+3}{2}\right) \rightarrow J'(-1, 6)$$

Determinamos la recta que pasa por $(-9, 1)$ y por J':

$$\left.\begin{array}{l} x = -9 + 8\lambda \\ y = -1 + 7\lambda \end{array}\right\}$$

Calculamos la recta que pasa por $(-4, 3)$ y por B':

$$\left.\begin{array}{l} x = -4 + 7\mu \\ y = 3 + 8\mu \end{array}\right\}$$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} -9 + 8\lambda = -4 + 7\mu \\ -1 + 7\lambda = 3 + 8\mu \end{array}\right\} \rightarrow \lambda = \frac{4}{5} \rightarrow \mu = \frac{1}{5}$$

El punto de corte es: $\left(-\frac{13}{5}, \frac{23}{5}\right)$

165. La recta $-2x + y = -3$ es la mediatriz de un segmento AB con $A(-2, 3)$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto B?

La recta perpendicular a la mediatriz que contiene al punto A, es decir, la recta que contiene al segmento AB es:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_{AB}} = (2, -1) \\ A(-2, 3) \end{array}\right\} \rightarrow r: x + 2y = 4$$

Su punto de corte con la mediatriz es $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ -2x + y = -3 \end{array}\right\} \rightarrow C(2, 1)$, que es el punto medio del segmento AB.

Entonces, las coordenadas de B, punto simétrico de A respecto a C son:

$$B(2 \cdot 2 + 2, 2 \cdot 1 - 3) = (6, -1)$$

PARA PROFUNDIZAR

166. **Elige la respuesta adecuada.** (Concurso de Primavera)

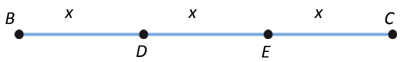
Si la recta $y = mx$ divide al triángulo de vértices (0, 0), (1, 1) y (6m, 0) en dos triángulos de igual área, la suma de todos los valores posibles de m es:	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
En el segmento BC marcamos los puntos D y E que lo dividen en tres segmentos iguales. Si $BD^2 + BE^2 = k \cdot BC^2$, el valor de k es:	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{4}$
¿Cuál es el área del triángulo de vértices $A(4, 0)$, $B(0, 4)$ y $C(-2010, 4020)$?	4010	4012	4014	4016	4018
Si la recta $y = 3x + 4$ se refleja sobre la recta $y = -x$, ¿cuál es la ecuación de la recta imagen?	$3y = x + 4$	$3y = x - 4$	$y = 3x - 4$	$y = -3x - 4$	$y = 4x + 3$
Las rectas r_1 y r_2 son simétricas respecto de la recta $y = x$. Si la ecuación de r_1 es $y = ax + b$, con $a \neq 0$, la ecuación de r_2 es:	$y = \frac{x}{a} + b$	$y = -\frac{x}{a} + b$	$y = -\frac{x}{a} - \frac{b}{a}$	$y = \frac{x}{a} + \frac{b}{a}$	$y = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$

- La recta $y = mx$ y pasa por el origen de coordenadas. Para que divida al triángulo dado en otros dos de igual área, el punto medio del lado opuesto:

$$M = \frac{(1, 1) + (6m, 0)}{2} = \left(\frac{1+6m}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$M \in r : y = mx \to \frac{1}{2} = m \cdot \frac{1+6m}{2} \to 6m^2 + m - 1 = 0 \to \begin{cases} m_1 = -\frac{1}{2} \\ m_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \to m_1 + m_2 = -\frac{1}{6}$$

- Sea x la longitud del segmento BD. Entonces:



$$x^2 + (2x)^2 = k(3x)^2 \to 5x^2 = 9kx^2 \to k = \frac{5}{9}$$

- $\overrightarrow{AB} = (-4, 4) \to \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

$$\overrightarrow{AC} = (-2\,014, 4020) \to \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2\,014^2 + 4\,020^2} = 4\,496{,}29$$

$$\overrightarrow{BC} = (-2\,010, 4\,016) \to \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{2\,010^2 + 4\,016^2} = 4\,490{,}92$$

  - Base: segmento $AC \to b = 4\,496{,}29$
  - Altura: se calcula la recta perpendicular a la recta r_{AC}; después, el punto de intersección entre ellas; y, para terminar, la distancia entre el punto obtenido y B:

$$r_{AC} : 2\,010x + 1\,007y = 8\,040$$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{v}_h = (-2\,010, -1\,007) \\ B(0, 4) \end{array}\right\} \to r_h : 1\,007x - 2\,010y = -8\,040$$

$$D = r_{AC} \cap r_h = (1{,}595;\ 4{,}799) \to h = \left|\overrightarrow{BD}\right| = 1{,}784$$

Así, el área será $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4\,496{,}29 \cdot 1{,}784}{2} = 4\,010{,}546$ Por tanto, la respuesta más aproximada es 4 010.

- Primero se calcula el ángulo entre las dos rectas dadas:

$$\cos\alpha = \frac{|3-1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}} \rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow \alpha = 63{,}435°$$

A continuación se obtiene el punto de corte entre estas rectas:

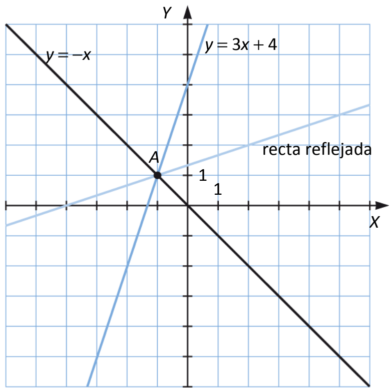
$$\left.\begin{array}{l} y=-x \\ y=3x+4 \end{array}\right\} \rightarrow -4x = 4 \rightarrow P(-1, 1)$$

Por otro lado, la ecuación de la recta reflejada, dada en su forma punto-pendiente es:

$$y-1 = m(x+1) \rightarrow mx - y + m - 1 = 0$$

El ángulo entre la recta reflejada y la recta $y=-x$ debe ser el obtenido anteriormente:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \left(\frac{|m-1|}{\sqrt{2+2m^2}}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{5} = \frac{m^2+1-2m}{2+2m^2} \rightarrow 3m^2 - 10m + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$



La pendiente de la recta dada es 3, por tanto, la pendiente de la recta reflejada es $\frac{1}{3}$.

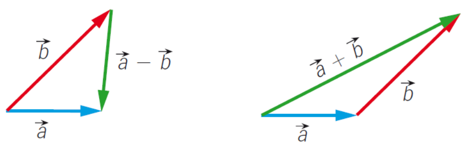
Entonces, la ecuación de la recta reflejada es $y - 1 = \frac{1}{3}(x+1) \rightarrow 3y = x + 4$

- Repitiendo de forma general el procedimiento del apartado anterior, se obtiene que la ecuación de la recta reflejada es $y = \frac{x}{a} + \frac{b}{a}$.

167. **Calcula el ángulo que deben formar dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, para que sus módulos coincidan con el módulo de su diferencia, $\vec{a} - \vec{b}$.**

Es decir, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

¿Y para que coincidan con el módulo de su suma, $\vec{a} + \vec{b}$?



$\vec{a} = (x, y)$

$\vec{b} = (z, t)$

$\vec{a} - \vec{b} = (x - z, y - t)$

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|\vec{b}| = \sqrt{z^2 + t^2}$

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(x-z)^2 + (y-t)^2} = \sqrt{x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + t^2 - 2yt}$

Igualando, resulta que:

$$x^2 + y^2 = x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + t^2 - 2yt \rightarrow \frac{z^2 + t^2}{2} = xz + yt$$

Calculamos el ángulo que forman:

$$\cos\alpha = \frac{xz + yt}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{z^2 + t^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60°$$

Para que los módulos de dos vectores del mismo módulo coincidan con su diferencia deben formar un ángulo de 60°.

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(x-z)^2 + (y-t)^2} = \sqrt{x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + t^2 - 2yt}$

Igualando, tenemos que:

$$x^2 + y^2 = x^2 + z^2 + 2xz + y^2 + t^2 + 2yt \rightarrow \frac{z^2 + t^2}{-2} = xz + yt$$

Calculamos el ángulo que forman:

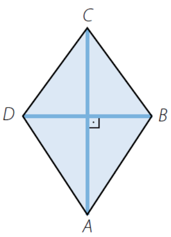
$$\cos\alpha = \frac{xz + yt}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{z^2 + t^2}} = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 120°$$

Para que los módulos de dos vectores del mismo módulo coincidan con su suma deben formar un ángulo de 120°.

168. **Demuestra que si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen el mismo módulo, entonces $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ forman un ángulo recto.**

Deduce de este resultado que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

Sean $\vec{a} = \vec{u}$ y $\vec{b} = \vec{v}$ dos vectores cualquiera.



Aplicamos los resultados de la actividad anterior:

$\vec{u} = (x, y)$

$\vec{v} = (z, t)$

$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(x-z)^2 + (y-t)^2} = \sqrt{x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + t^2 - 2yt}$

$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(x+z)^2 + (y+t)^2} = \sqrt{x^2 + z^2 + 2xz + y^2 + t^2 + 2yt}$

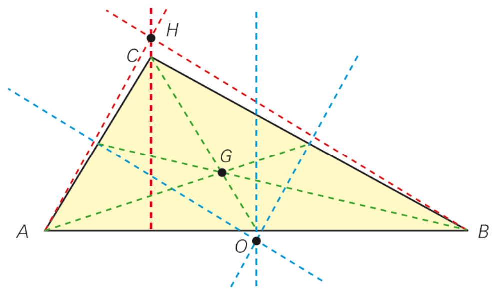
$\sqrt{x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + t^2 - 2yt} = \sqrt{x^2 + z^2 + 2xz + y^2 + t^2 + 2yt} \rightarrow 0 = xz + yt$

$$\cos\alpha = \frac{xz + yt}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{z^2 + t^2}} = 0 \rightarrow \alpha = 90°$$

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores de los lados del rombo, que tienen el mismo módulo.

Las diagonales del rombo se obtienen, respectivamente, sumando y restando $\vec{u}$ y $\vec{v}$, por lo que las diagonales son perpendiculares.

169. **La recta de Euler de un triángulo es aquella que contiene al ortocentro, al circuncentro y al baricentro del triángulo. Se llama así en honor al matemático suizo Leonhard Euler, quien descubrió este hecho a mediados del siglo XVIII.**



Halla la recta de Euler en el triángulo de vértices *A*(−5, 6), *B*(−1, 4) y *C*(3, −2) y comprueba que tanto el baricentro *G*, el ortocentro *H* y el circuncentro están en esa recta y que verifican la relación $\overline{GH} = 2\overline{GO}$.

Calculamos el baricentro, *G*, y para ello sumamos las coordenadas de los puntos y dividimos entre tres: $G\left(-1, \frac{8}{3}\right)$.

Para hallar el ortocentro, calculamos una recta perpendicular al lado *AB* que pase por *C*:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{2}$$

Determinamos una recta perpendicular al lado *AC* que pase por *B*:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1}$$

El punto de corte de estas rectas es el ortocentro: *H*(13, 18).

Para hallar el circuncentro, calculamos la recta que pasa por el punto medio del lado *AB* y es perpendicular al mismo.

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-5}{2}$$

Determinamos la recta que pasa por el punto medio de *AC* y es perpendicular al mismo.

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1}$$

El punto de corte de estas dos rectas es el circuncentro: *O*(–8, –5).

Calculamos la recta que pasa por *GH:*

$$\frac{x-13}{14} = \frac{y-18}{46/3} \rightarrow 23x - 21y + 79 = 0$$

Como *O* verifica las ecuaciones de la ecuación de la recta, los tres puntos están alineados.

Hallamos la distancia *GH*: $|GH| = \sqrt{(13+1)^2 + \left(18 - \frac{8}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3\,880}}{3} = 20{,}76$

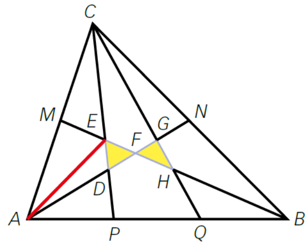
Hallamos la distancia *GO:* $|GO| = \sqrt{(-8+1)^2 + \left(-5 - \frac{8}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{970}}{3} = 10{,}38$

Efectivamente $|GH| = 2|GO|$.

170. **Por los puntos medios de los lados de un triángulo *ABC* trazamos las medianas y unimos los puntos que trisecan el tercer lado con el vértice opuesto. Así, en el interior se obtiene una pajarita (dos triángulos unidos por un vértice).**

¿Se puede calcular la fracción de superficie total del triángulo que representa la pajarita?

(Olimpiadas matemáticas. Fase Local)



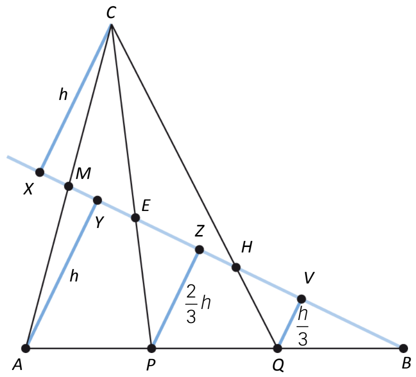
Para empezar, se supone que el área del triángulo dado es uno, es decir, $A_{ABC}=1$.

Las medianas dividen al triángulo en seis partes iguales, por ello:

$$A_{AMF}=A_{FNB}=\frac{1}{6} \qquad A_{AFB}=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

Se trazan desde *A*, *C*, *P* y *Q* perpendiculares sobre la mediana *BM*, siendo *X, Y, Z* y *V* sus respectivos pies.

Observando la figura, se tiene las siguientes relaciones:



- $AMY\equiv CMX$. Como $AM=MC\rightarrow AY=XC=h$.
- $AYB\cong PZB\cong QVB$. Como $AP=PQ=QB\rightarrow PZ=\frac{2}{3}h$ y $QV=\frac{1}{3}h$.
- $PEZ\cong XCE$. Como $PZ=\frac{2}{3}XC\rightarrow PE=\frac{2}{3}EC\rightarrow PE=\frac{2}{5}PC$ y $EC=\frac{3}{5}PC$.
- $QHV\cong XCH$. Como $QV=\frac{1}{3}QC\rightarrow QH=\frac{1}{3}HC\rightarrow QH=\frac{1}{4}QC$.

Realizando el mismo procedimiento sobre la mediana *AN*:

$$QG=\frac{2}{5}QC \qquad GB=\frac{3}{5}QC \qquad PD=\frac{1}{4}PC$$

Observando la mediana *PC*, y los puntos *D* y *E*:

$$DE=PE-PD=\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)PC=\frac{3}{20}PC\rightarrow\begin{cases}PD=\frac{5}{20}PC\\DE=\frac{3}{20}PC\\EC=\frac{12}{20}PC\end{cases}$$

Se traza la línea auxiliar *AE*, y se observa que los triángulos *ACE*, *AED* y *ADP* tienen igual altura. Así:

$$\frac{A_{ADP}}{A_{ACP}}=\frac{PD}{PC}=\frac{5}{20} \qquad \frac{A_{AED}}{A_{ACP}}=\frac{DE}{PC}=\frac{3}{20} \qquad \frac{A_{ACE}}{A_{ACP}}=\frac{EC}{PC}=\frac{12}{20}$$

Como $A_{ACP}=\frac{1}{3}\rightarrow\begin{cases}A_{ADP}=\frac{5}{60}\\A_{AED}=\frac{3}{60}\\A_{ACE}=\frac{12}{60}\end{cases}$

Por otra parte, como *EM* es mediana del triángulo *ACE*, $A_{AME}=\frac{1}{2}A_{ACE}=\frac{6}{60}$. Y entonces:

$$\frac{1}{6} = A_{AMF} = A_{AME} + A_{AED} + A_{DEF} = \frac{1}{10} + \frac{3}{60} + A_{DEF} \rightarrow A_{DEF} = \frac{1}{60}$$

Análogamente, $A_{FGH} = \frac{1}{60}$, y así: $A_{\text{Pajarita}} = \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{30}$

Luego, el área del triángulo *ABC* es 30 veces el área de la pajarita.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. ¿Por qué crees que influyen el viento y las mareas en el rumbo del barco siniestrado?

El viento y las mareas pueden variar la dirección del rumbo, alejando o acercando el barco hacia la costa. Cuanto más tiempo pase el barco a la deriva, más probable es que esto ocurra.

2. ¿Qué relación existe entre el vector $\overrightarrow{OP}$ y los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BP}$ y $\overrightarrow{OA}$?

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$$

3. ¿Crees que es posible aplicar un método similar si se quiere interceptar un barco sospechoso de contrabando avistado desde un avión?

Sí, siempre y cuando el avión se posicione encima del barco y emita la señal de radio a la base de los guardacostas.

4. Halla las ecuaciones de las rectas que se describen a continuación.

a) La dirección del barco guardacostas cuando va a efectuar el rescate.

b) La recta que une la base con el primer punto de contacto.

c) La recta que une la base con el segundo punto de contacto.

d) La dirección del barco siniestrado cuando va a la deriva.

Sean $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $P(p_1, p_2)$ y $O(0, 0)$. Entonces:

a) La dirección que lleva el barco guardacostas es la dirección del vector $\overrightarrow{OP} = P - O = (p_1, p_2)$.

La recta que marca esta dirección es $y = \frac{p_2}{p_1}x$.

b) La recta que une la base con el punto *A*, es $y = \frac{a_2}{a_1}x$.

c) La recta que une la base con el punto *B*, es $y = \frac{b_2}{b_1}x$.

d) La dirección del barco cuando va a la deriva es la del vector $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

La recta correspondiente es $y = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}x + \frac{b_1a_2 - b_2a_1}{b_1 - a_1}$

5. Halla los puntos de corte que tienen las rectas anteriores entre sí.

El punto $O(0, 0)$ es el punto de corte entre las rectas de los apartados a), b) y c).

- El punto *A* es el punto de corte entre las rectas r_{OA} y r_{AB}.
- El punto *B* es el punto de corte entre las rectas r_{OB} y r_{AB}.
- El punto *P* es el punto de corte entre las rectas r_{OP} y r_{AB}, pues está alineado con *A* y *B*.

Lugares geométricos. Cónicas

7

ACTIVIDADES

1. **Si en vez de una superficie cónica se utiliza un cilindro, ¿qué cónicas se pueden obtener?**

   Si el plano es perpendicular a la generatriz del cilindro, la sección es una circunferencia.

   Si no es perpendicular, la sección es una elipse.

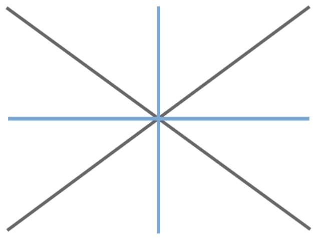
2. **Razona por qué la parábola es una sección cónica que no tiene dos ramas.**

   Porque el plano solo corta a uno de los conos de la superficie cónica.

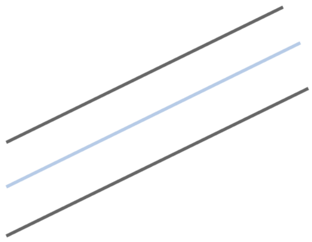
3. **Dibuja el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas:**

   a) Que se cortan en un punto. b) Que son paralelas.

   a) El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de los ángulos que forman las rectas al cortarse.



   b) El lugar geométrico es otra recta paralela a ambas.



4. **Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de coordenadas cartesianas es 10.**

   ¿Y si la condición del lugar geométrico es que su producto sea 10?

   Los puntos que verifican la primera condición forman una recta de ecuación: $x + y = 10$

   Los puntos que verifican la segunda condición forman una hipérbola equilátera de ecuación: $xy = 10$

5. **La distancia que existe entre los focos de una elipse es de 6 cm. Halla la medida del eje menor teniendo en cuenta que el eje mayor mide 10 cm.**

   $2c = 6$ cm $\rightarrow c = 3$ cm

   $2a = 10$ cm $\rightarrow a = 5$ cm

   Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 4$ cm

   Así, la medida del eje menor es de 8 cm.

6. **Un punto de una elipse dista de cada uno de los focos 6 y 7 cm, respectivamente, y el eje menor mide 6,6 cm. Halla la medida del eje mayor y la distancia entre los focos.**

$2a = d(P, F) + d(P, F') = 6 + 7 = 13$ cm

El eje mayor mide 13 cm.

$2a = 13$ cm $\rightarrow a = 6,5$ cm $\quad 2b = 6,6$ cm $\rightarrow b = 3,3$ cm

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 5,6$ cm

Así, la distancia entre los focos mide $2c = 11,2$ cm.

7. **Calcula la ecuación de una elipse cuyos focos son los puntos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y dos de sus vértices se sitúan en los puntos $A(8, 0)$ y $A'(-8, 0)$.**

$$\left.\begin{matrix} c = 5 \\ a = 8 \end{matrix}\right\} \rightarrow b = \sqrt{39} \rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$$

8. **Halla la ecuación de la elipse cuyos vértices son los siguientes puntos.**

$(-4, 0)$ $\quad (0, -2)$ $\quad (4, 0)$ $\quad (0, 2)$

$$\left.\begin{matrix} a = 4 \\ b = 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

9. **Calcula las excentricidades de estas elipses.**

a) $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{121} = 1$ $\qquad$ b) $\dfrac{x^2}{225} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

a) $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{121} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 11 \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{23} \rightarrow e = \dfrac{\sqrt{23}}{12} = 0,39$

b) $\dfrac{x^2}{225} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 15 \\ b = 3 \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{216} = 6\sqrt{6} \rightarrow e = \dfrac{6\sqrt{6}}{15} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5} = 0,97$

10. **De una elipse sabemos que su excentricidad es 0,6 y dos de sus vértices se sitúan en los puntos $F(6, 0)$ y $F'(-6, 0)$. Halla los vértices.**

$a = 6 \qquad e = 0,6 = \dfrac{c}{a} \rightarrow c = 3,6$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = 23,04 \rightarrow B(0; 4,8)$ y $B'(0; -4,8)$

11. **En una hipérbola la distancia entre los vértices es de 8 cm, si $B(0, 3)$ y su punto simétrico es $B'(0, -3)$. Calcula los focos de la hipérbola.**

$2a = 8 \rightarrow a = 4 \qquad b = 3$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = 5 \rightarrow F(5, 0)\ F'(-5, 0)$

12. **En una hipérbola la distancia entre sus focos es de 25 unidades y la distancia entre sus vértices es de 16 unidades. Halla B y B'.**

$2c = 25 \rightarrow c = 12,5 \qquad 2a = 16 \rightarrow a = 8$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b = 9,6 \rightarrow B(0; 9,6)$ y $B'(0; -9,6)$

13. **Halla la ecuación de la hipérbola que tiene sus focos en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ y sus vértices en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.**

$$\left.\begin{array}{l} c = 2 \\ a = 1 \end{array}\right\} \to b = \sqrt{3} \to \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$$

14. **Calcula la ecuación de la hipérbola que tiene sus focos en los puntos $(5, 0)$ y $(-5, 0)$ y que pasa por el punto $\left(6, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$.**

$c = 5$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \to 25 = a^2 + b^2 \to b^2 = 25 - a^2$

Así, la ecuación de la hipérbola es de la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \to \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{25 - a^2} = 1$

Como el punto $\left(6, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ pertenece a la hipérbola: $\frac{36}{a^2} - \frac{45}{100 - 4a^2} = 1 \to 4a^4 - 289a^2 + 3\,600 = 0$

Tenemos dos soluciones para a^2: $\frac{225}{4}$ y 16

Como $b^2 = 25 - a^2 > 0 \to a^2 = 16 \to b^2 = 9$

La ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

15. **Determina los focos y los vértices de la hipérbola cuya ecuación aparece a continuación.**

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{225} = 1$$

$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{225} = 1$

$a^2 = 64 \to a = 8 \to A(8, 0)$ y $A'(-8, 0)$

$b^2 = 225 \to b = 15 \to B(0, 15)$ y $B'(0, -15)$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \to c^2 = 289 \to c = 17 \to F(17, 0)$ y $F'(-17, 0)$

16. **Calcula la excentricidad de las hipérbolas que vienen dadas por estas ecuaciones.**

a) $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{49} = 1$

b) $\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{36} = 1$

a) $a^2 = 576 \to a = 24$ $b^2 = 49 \to b = 7$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \to c = 25$

$e = \frac{c}{a} = \frac{25}{24} = 1{,}04$

b) $\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{36} = 1 \to \begin{cases} a = 11 \\ b = 6 \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \to c = \sqrt{157} \to e = \frac{\sqrt{157}}{11} = 1{,}13$

17. **Halla la ecuación de la parábola con vértice en el origen de coordenadas y foco $F(0, 2)$.**

$p = 4 \to x^2 = 8y$

18. **Calcula la ecuación de la parábola que tiene el vértice en el origen de coordenadas y foco *F*(2, 0).**

$p = 4 \rightarrow y^2 = 8x$

19. **Determina la ecuación de la circunferencia con centro *C*(−3, 1) que pasa por el origen de coordenadas.**

$r = d(P, C) = \sqrt{(-3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$

La ecuación de la circunferencia es: $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 10 \rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$

20. **Comprueba si esta ecuación corresponde a una circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 11 = 0$.**

$A = -6 \rightarrow a = 3 \qquad B = 2 \rightarrow b = -1$

$C = 11 = a^2 + b^2 - r^2 = 10 - r^2 \rightarrow r^2 = -1 \rightarrow$ No tiene solución.

Por tanto, esta ecuación no corresponde a una circunferencia.

21. **Estudia la posición relativa de las circunferencias que aparecen a continuación.**

$$x^2 + y^2 - 9 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

$x^2 + y^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} C_1(0, 0) \\ r_1 = 3 \end{cases}$

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} C_2(1, 1) \\ r_2 = 1 \end{cases}$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} < r_1 - r_2 = 2$

Las circunferencias son interiores.

22. **Encuentra una circunferencia tangente interior a la circunferencia cuya ecuación es la siguiente.**

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

Respuesta abierta.

Una de las circunferencias tangentes interiores es: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$

23. **Discute la posición relativa de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ y los ejes de coordenadas.**

$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} C(3, -2) \\ r = 3 \end{cases}$

La distancia del centro al eje de abscisas es: $d(C, r) = \dfrac{|-2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 2$

Al ser menor que el radio, el eje es secante a la circunferencia.

La distancia del centro al eje de ordenadas es: $d(C, s) = \dfrac{|3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 3$

Al coincidir con el radio, el eje es tangente a la circunferencia.

24. **Encuentra tres rectas no paralelas que sean secante, tangente y exterior a la circunferencia $x^2 + (y - 3)^2 = 36$.**

Respuesta abierta.

Una recta secante es: $x - y = 0$

Una recta tangente es: $y + 3 = 0$

Una recta exterior es: $x - 7 = 0$

SABER HACER

25. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $y = 5x - 2$ y del eje Y.

Se toma $P(x, y)$ un punto genérico del lugar geométrico

$$d(P, r) = \frac{|5x - y - 2|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{|5x - y - 2|}{\sqrt{26}} \qquad d(P, OY) = |x|$$

Como $d(P, r) = d(P, OY) \rightarrow \frac{|5x - y - 2|}{\sqrt{26}} = |x| \rightarrow 5x - y - 2 = \sqrt{26}x \rightarrow \left(5 - \sqrt{26}\right)x - y - 2 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow 5x - y - 2 = -\sqrt{26}x \rightarrow \left(5 + \sqrt{26}\right)x - y - 2 = 0$$

El lugar geométrico son las dos ecuaciones obtenidas que, al ser de grado 1, equivalen a dos rectas que son las bisectrices de los ángulos que forman la recta dada y el eje Y.

26. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $3y = x + 1$ y del eje X.

Se toma $P(x, y)$ un punto genérico del lugar geométrico.

$$d(P, r) = \frac{|x - 3y + 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|x - 3y + 1|}{\sqrt{10}} \qquad d(P, OX) = |y|$$

Como $d(P, r) = d(P, OX) \rightarrow \frac{|x - 3y + 1|}{\sqrt{10}} = |y| \rightarrow x - 3y + 1 = \sqrt{10}y \rightarrow x - \left(3 + \sqrt{10}\right)y + 1 = 0$

$$x - 3y + 1 = -\sqrt{10}y \rightarrow x - \left(3 - \sqrt{10}\right)y + 1 = 0$$

El lugar geométrico son las dos ecuaciones obtenidas que, al ser de grado 1, equivalen a dos rectas que son las bisectrices de los ángulos que forman la recta dada y el eje X.

27. Halla la ecuación de la elipse cuya excentricidad es 0,8 y cuya distancia focal es 8.

$2c = 8 \rightarrow c = 4$ $\qquad$ $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{a} = 0{,}8 \rightarrow a = 5$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = 9$

La ecuación de la elipse es de la forma: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

28. Halla la ecuación de una elipse, con ejes paralelos a los ejes X e Y, de centro C (4, 1) y vértices $A'(1, 1)$ y $B'(4, -1)$.

Se traslada el centro $C(4, 1)$ al origen de coordenadas:

$A'(1, 1) \rightarrow A''(1 - 4, 1 - 1) = (-3, 0) \rightarrow a = 3$

$B'(4, -1) \rightarrow B''(4 - 4, -1 - 1) = (0, -2) \rightarrow b = 2$

La ecuación de la elipse es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

29. **Halla la ecuación de la hipérbola con ejes paralelos a los ejes *X* e *Y*, sabiendo que su centro es *C* (−1, 2), uno de sus focos es *F* (3, 2) y su excentricidad es 1,5.**

Se traslada el centro $C(-1, 2)$ al origen de coordenadas:

$F(3, 2) \to F''(3-(-1), 2-2) = (4, 0) \to c = 4$

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{a} = 1{,}5 \to a = \frac{8}{3}$ $\qquad c^2 = a^2 + b^2 \to b^2 = \frac{80}{9}$

La ecuación de la hipérbola es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \to \frac{9(x+1)^2}{64} - \frac{9(y-2)^2}{80} = 1$$

30. **Halla la ecuación de la hipérbola con ejes paralelos a los ejes *X* e *Y*, sabiendo que su centro es *C* (4, 0), uno de sus focos es *F* (1, −3) y su excentricidad es 2.**

Se traslada el centro $C(4, 0)$ al origen de coordenadas:

$F(1, 0) \to F''(1-4, 0) = (-3, 0) \to c = 3$

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{a} = 2 \to a = \frac{3}{2}$ $\qquad c^2 = a^2 + b^2 \to b^2 = \frac{27}{4}$

La ecuación de la hipérbola es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \to \frac{4(x-4)^2}{9} - \frac{4y^2}{27} = 1$$

31. **Halla la ecuación de una parábola cuyo vértice es *V* (−2, 1) y cuya directriz es la recta *y* = −1.**

Se traslada el vértice $V(-2, 1)$ al origen de coordenadas.

$$y = -1 \to y' = -1 - 1 = -2 = -\frac{p}{2} \to p = 4$$

La ecuación de la parábola es de la forma:

$(x+2)^2 = 2p(y-1) \to (x+2)^2 = 8(y-1) \to x^2 + 4x - 8y + 12 = 0$

32. **Halla la ecuación de una parábola cuyo vértice es *V* (3, 5) y cuya directriz es la recta *y* = 1.**

Se traslada el vértice $V(3, 5)$ al origen de coordenadas.

$$y = 1 \to y' = 1 - 5 = -4 = -\frac{p}{2} \to p = 8$$

La ecuación de la parábola es de la forma:

$(x-3)^2 = 2p(y-5) \to (x-3)^2 = 16(y-5) \to x^2 - 6x - 16y + 89 = 0$

33. **Halla la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos *P* (1, 4), *Q* (1, 0) y *R* (3, 2).**

Como $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} P(1,4) \to A + 4B + C = -17 \\ Q(1,0) \to A + C = -1 \\ R(1,4) \to 3A + 2B + C = -13 \end{array}\right\} \to A = -2B = -4C = 1 \to x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

34. **Calcula el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos $P(-4, 4)$, $Q(-5, 1)$ y $R(-1, 3)$.**

Como $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$:

$$\left.\begin{array}{l} P(-4,4)\rightarrow(-4-a)^2+(4-b)^2=r^2 \\ Q(1,0)\rightarrow(1-a)^2+b^2=r^2 \\ R(1,4)\rightarrow(1-a)^2+(4-b)^2=r^2 \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} 16+a^2+8a+16+b^2-8b=r^2 \\ 1+a^2-2a+b^2=r^2 \\ 1+a^2-2a+16+b^2-8b=r^2 \end{array}\right\}\rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{15}{10} \\ b=2 \\ r^2=\dfrac{41}{4} \end{cases}$$

$C(a, b) \rightarrow C\left(-\dfrac{15}{10}, 2\right)$ $\qquad r=\dfrac{\sqrt{41}}{2}$

35. **Halla la ecuación de una circunferéncia que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(-3, 0)$ y cuyo centro está en la recta de ecuación $y = 5 - 2x$.**

Se calcula el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que equidistan de A y B:

$d(A, P) = d(B, P) \rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+3)^2+y^2} \rightarrow$

$\rightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=x^2+6x+9+y^2 \rightarrow 8x-4y=-4 \rightarrow 2x-y=-1$

El centro será la intersección de este lugar geométrico y la recta dada:

$\left.\begin{array}{l} 2x-y=-1 \\ 2x+y=5 \end{array}\right\}\rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}\rightarrow C(1, 3)$ $\qquad d(C, A)=\sqrt{(1-1)^2+(-2-3)^2}=5\rightarrow r=5$

La ecuación de la circunferencia: $(x-1)^2+(y-3)^2=25 \rightarrow x^2+y^2-2x-6y-15=0$

36. **Calcula el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, 1)$ y $B(2, 4)$ y su centro está en la recta de ecuación $3x + y - 11 = 0$.**

Se calcula el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$que equidistan de A y B:

$d(A, P) = d(B, P) \rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} \rightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2-4x+4+y^2-8y+16 \rightarrow$

$\rightarrow 2x+6y=18 \rightarrow x+3y=9$

El centro será la intersección de este lugar geométrico y la recta dada:

$\left.\begin{array}{l} x+3y=9 \\ 3x+y=11 \end{array}\right\}\rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}\rightarrow C(3, 2)$ $\qquad d(C, A)=\sqrt{(1-3)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}\rightarrow r=5$

La ecuación de la circunferencia: $(x-3)^2+(y-2)^2=5 \rightarrow x^2+y^2-6x-4y+8=0$

37. **Identifica qué cónicas son las que tienen estas ecuaciones.**

a) $x^2 + y^2 + 11 = 4y - 8x$ $\qquad$ c) $x^2 - 2x - 10y = 19$ $\qquad$ e) $\dfrac{x^2}{225} = 1 + \dfrac{y^2}{81}$

b) $\dfrac{x^2}{16} + 9y^2 = 1$ $\qquad$ d) $x^2 - 4y = 0$ $\qquad$ f) $x^2 + y^2 + 6y = 7$

a) Aparecen las dos variables al cuadrado con coeficiente +1; por tanto, es una circunferencia:

$x^2+y^2+8x-4y+11=0 \rightarrow A=8$, $B=-4$ y $C=11$

$A=-2a \rightarrow a=-4$ $\qquad B=-2b \rightarrow b=2$ $\qquad C=a^2+b^2-r^2 \rightarrow r^2=9$

La cónica es una circunferencia de centro $C(-4, 2)$ y $r=3$.

b) Aparecen las dos variables al cuadrado con mismo signo y distinto coeficiente, por tanto es una elipse:

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=1 \rightarrow a=4, b=\frac{1}{3}$ $\qquad c^2=\frac{143}{9} \rightarrow c=\frac{\sqrt{143}}{3}$

La cónica es una elipse de focos $F\left(\frac{\sqrt{143}}{3}, 0\right)$ y $F'\left(-\frac{\sqrt{143}}{3}, 0\right)$.

c) Aparece una variable al cuadrado y la otra con grado 1; por tanto, es una parábola:

$x^2 - 2x + 1 = 10y + 19 + 1 \longrightarrow (x-1)^2 = 10(y+2)$

La cónica es una parábola de vértice $V(1, -2)$ y directriz paralela al eje Y.

d) Aparece una variable al cuadrado y la otra con grado 1; por tanto, es una parábola:

$x^2 = 4y$

La cónica es una parábola de vértice el origen de coordenadas y directriz paralela al eje Y.

e) Aparecen las dos variables al cuadrado con distinto signo, por tanto es una hipérbola:

$\frac{x^2}{15^2}-\frac{y^2}{9^2}=1 \longrightarrow a=15, b=9$

Como $a^2 + b^2 = c^2 \longrightarrow c^2 = 306 = 3\sqrt{54}$

La cónica es una hipérbola de focos $F\left(3\sqrt{54}, 0\right)$ y $F'\left(-3\sqrt{54}, 0\right)$.

f) Aparecen las dos variables al cuadrado con coeficiente + 1; por tanto, es una circunferencia:

$x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0 \longrightarrow A = 0, B = 6$ y $C = -7$

$A = -2a \longrightarrow a = 0 B = -2b \longrightarrow b = -3 C = a^2 + b^2 - r^2 \longrightarrow r^2 = 16$

La cónica es una circunferencia de centro $C(0, -3)$ y $r = 4$.

38. Estudia la posición de los puntos $A(0, 2)$ y $B(4, 1)$ respecto a la circunferencia $x^2 + (y - m)^2 = 16$, según el valor de m.

Centro y radio de la circunferencia: $C(0, m)$ y $r = 4$.

Posición de $A(0, 2)$ con respecto a la circunferencia dada:

$d(C, A) = \sqrt{(0-0)^2 + (2-m)^2} = \sqrt{m^2 - 4m + 4}$

$\sqrt{m^2 - 4m + 4} = 4 \longrightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \longrightarrow m_1 = 6$ y $m_2 = -2$

$\sqrt{m^2 - 4m + 4} > 4 \longrightarrow m^2 - 4m - 12 > 0 \longrightarrow m < -2$ y $m > 6$

$\sqrt{m^2 - 4m + 4} < 4 \longrightarrow m^2 - 4m - 12 < 0 \longrightarrow -2 < m < 6$

Si $m < -2$ o $m > 6 \longrightarrow$ El punto A es exterior.

Si $m = 6$ o $m = -2 \longrightarrow$ El punto A pertenece a la circunferencia.

Si $-2 < m < 6 \longrightarrow$ El punto A es interior.

Posición de $B(4, 1)$ con respecto a la circunferencia dada:

$d(C, B) = \sqrt{(4-0)^2 + (1-m)^2} = \sqrt{m^2 - 2m + 17}$

$\sqrt{m^2 - 2m + 17} = 4 \rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow m = 1$

$\sqrt{m^2 - 2m + 17} > 4 \rightarrow m^2 - 2m + 1 > 0 \rightarrow m \neq 1$

$\sqrt{m^2 - 2m + 17} < 4 \rightarrow m^2 - 2m + 1 < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $m = 1 \rightarrow$ El punto B pertenece a la circunferencia.

Si $m \neq 1 \rightarrow$ El punto B es exterior.

39. Dada la circunferencia $(x - m)^2 + (y - 1)^2 = 9$, estudia la posición de los puntos $A(0, -2)$ y $B(-5, 1)$ con respecto a ella en función del valor de m.

Centro y radio de la circunferencia: $C(m, 1)$ y $r = 3$.

Posición de $A(0, -2)$ con respecto a la circunferencia dada:

$d(C, A) = \sqrt{(0-m)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{m^2 + 9}$

$\sqrt{m^2 + 9} = 3 \rightarrow m^2 = 0 \rightarrow m = 0$

$\sqrt{m^2 + 9} > 3 \rightarrow m^2 > 0 \rightarrow m \neq 0$

$\sqrt{m^2 + 9} < 3 \rightarrow m^2 < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $m = 0 \rightarrow$ El punto A pertenece a la circunferencia.

Si $m \neq 0 \rightarrow$ El punto A es exterior.

Posición de $B(-5, 1)$con respecto a la circunferencia dada:

$d(C, B) = \sqrt{(-5-m)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{m^2 + 10m + 25}$

$\sqrt{m^2 + 10m + 25} = 3 \rightarrow m^2 + 10m + 16 = 0 \rightarrow m_1 = -8$ y $m_2 = -2$

$\sqrt{m^2 + 10m + 25} > 3 \rightarrow m^2 + 10m + 16 > 0 \rightarrow m < -8$ y $m > -2$

$\sqrt{m^2 + 10m + 25} < 3 \rightarrow m^2 + 10m + 16 < 0 \rightarrow -8 < m < -2$

Si $m < -8$ o $m > -2 \rightarrow$ El punto B es exterior.

Si $m = -8$ o $m = -2 \rightarrow$ El punto B pertenece a la circunferencia.

Si $-8 < m < -2 \rightarrow$ El punto B es interior.

ACTIVIDADES FINALES

40. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos A y B.

a) $A(-6, 0)$ y $B(-1, 0)$
b) $A(-2, -1)$ y $B(4, 1)$
c) $A(3, -5)$ y $B(7, 1)$
d) $A(0, -2)$ y $B(0, 7)$

a) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$d(A, P) = \sqrt{(x-(-6))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 12x + 36}$ $\quad d(B, P) = \sqrt{(x-(-1))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1}$

$\sqrt{x^2 + y^2 + 12x + 36} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} \rightarrow 12x + 36 = 2x + 1 \rightarrow x = -\frac{7}{2}$

El lugar geométrico es la recta, mediatriz del segmento AB, paralela al eje Y con ecuación $x = -\frac{7}{2}$.

b) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$d(A, P) = \sqrt{(x-(-2))^2 + (y-(-1))^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 2y + 17}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 2y + 17} \to 4x + 2y + 5 = -8x - 2y + 17 \to 3x + y - 3 = 0$$

El lugar geométrico es la recta, mediatriz del segmente AB, con ecuación $3x + y - 3 = 0$.

c) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$d(A, P) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-(-5))^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14x - 2y + 50}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14x - 2y + 50} \to -6x + 10y + 34 = -14x - 2y + 50 \to 2x + 3y - 4 = 0$$

El lugar geométrico es la recta, mediatriz del segmente AB, con ecuación $2x + 3y - 4 = 0$.

d) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$:

$$d(A, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-2))^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14y + 49}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14y + 49} \to 4y + 4 = -14y + 49 \to y = \frac{5}{2}$$

El lugar geométrico es la recta, mediatriz del segmente AB, paralela al eje X con ecuación $y = \frac{5}{2}$.

41. Calcula la mediatriz del segmento cuyos extremos son $A(5, -2)$ y $B(4, 3)$.

Sea $P(x, y)$ un punto de la mediatriz, entonces $d(P, A) = d(P, B)$:

$$d(A, P) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-(-2))^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25}$$

$$d(A, P) = d(B, P) \to \sqrt{x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25} \to -10x + 4y + 29 = -8x - 6y + 25 \to$$

$$\to x - 5y - 2 = 0$$

La mediatriz es la recta $x - 5y - 2 = 0$.

42. Halla el lugar geométrico de los puntos, P, del plano cuya distancia a $A(-3, 0)$ sea el doble de la distancia a $B(1, 0)$. Identifica la figura resultante.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(A, P) = 2d(B, P)$.

$$d(A, P) = \sqrt{(x-(-3))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 9}$$

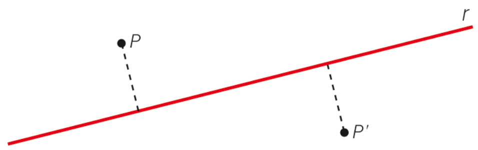
$$d(B, P) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 9} = 2\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} \to x^2 + y^2 + 6x + 9 = 4(x^2 + y^2 - 2x + 1) \to 3x^2 + 3y^2 - 14x - 5 = 0$$

La figura resultante es la circunferencia de ecuación:

$$x^2 + y^2 - \frac{14}{3}x - \frac{5}{3} = 0$$

43. **Calcula el lugar geométrico de los puntos que distan 4 unidades de la recta r: $4x - 2y + 5 = 0$.**



Sea (x, y) un punto del lugar geométrico, entonces: $\dfrac{|4x - 2y + 5|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = 4$

$$\rightarrow |4x - 2y + 5| = 4\sqrt{20} \rightarrow |4x - 2y + 5| = 8\sqrt{5} \rightarrow \begin{cases} 4x - 2y + 5 - 8\sqrt{5} = 0 \\ -4x + 2y - 5 - 8\sqrt{5} = 0 \end{cases}$$

44. **Calcula el lugar geométrico de los puntos que distan 2 unidades de la recta r: $x - 3y + 1 = 0$.**

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(r, P) = 2$.

$$\frac{|x - 3y + 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = 2 \rightarrow |x - 3y + 1| = 2\sqrt{10} \rightarrow \begin{cases} x - 3y + 1 - 2\sqrt{10} = 0 \\ -x + 3y - 1 - 2\sqrt{10} = 0 \end{cases}$$

45. **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los siguientes pares de rectas.**

a) $3x - 4y - 26 = 0$
$12x + 5y + 1 = 0$

b) $-2x + 7y + 9 = 0$
$4x - 14y + 11 = 0$

c) $2x - 3y + 3 = 0$
$3x - 2 = 0$

d) $2y - 5 = 0$
$2x - 3y + 5 = 0$

a) $$\frac{|3x - 4y - 26|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|12x + 5y + 1|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x - 4y - 26}{5} = \dfrac{12x + 5y + 1}{13} \\ \dfrac{3x - 4y - 26}{5} = \dfrac{-12x - 5y - 1}{13} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 39x - 52y - 338 = 60x + 25y + 5 \\ 39x - 52y - 338 = -60x - 25y - 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 11y + 49 = 0 \\ 11x - 3y - 37 = 0 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de las rectas.

b) $$\frac{|-2x + 7y + 9|}{\sqrt{(-2)^2 + 7^2}} = \frac{|4x - 14y + 11|}{\sqrt{4^2 + (-14)^2}} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{-2x + 7y + 9}{\sqrt{53}} = \dfrac{4x - 14y + 11}{2\sqrt{53}} \\ \dfrac{-2x + 7y + 9}{\sqrt{53}} = \dfrac{-4x + 14y - 11}{2\sqrt{53}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -4x + 14y + 18 = 4x - 14y + 11 \\ -4x + 14y + 18 = -4x + 14y - 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x - 28y - 7 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Como las rectas son paralelas, el lugar geométrico es otra recta paralela a ambas.

c) $$\frac{|2x - 3y + 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|3x - 2|}{\sqrt{3^2 + 0^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x - 3y + 3}{\sqrt{13}} = \dfrac{3x - 2}{3} \\ \dfrac{2x - 3y + 3}{\sqrt{13}} = \dfrac{-3x + 2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x - 9y + 9 = 3\sqrt{13}x - 2\sqrt{13} \\ 6x - 9y + 9 = -3\sqrt{13}x + 2\sqrt{13} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(6 - 3\sqrt{13}\right)x - 9y + 9 + 2\sqrt{13} = 0 \\ \left(6 + 3\sqrt{13}\right)x - 9y + 9 - 2\sqrt{13} = 0 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de las rectas.

d) $\dfrac{|2y-5|}{\sqrt{2^2+0^2}}=\dfrac{|2x-3y+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}\rightarrow$

$$\rightarrow\begin{cases}\dfrac{2y-5}{2}=\dfrac{2x-3y+5}{\sqrt{13}}\\ \dfrac{2y-5}{2}=\dfrac{-2x+3y-5}{\sqrt{13}}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2\sqrt{13}y-5\sqrt{13}=4x-6y+10\\ 2\sqrt{13}y-5\sqrt{13}=-4x+6y110\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-4x+\left(6+2\sqrt{13}\right)y-10-5\sqrt{13}=0\\ 4x+\left(-6+2\sqrt{13}\right)y+10-5\sqrt{13}=0\end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de las rectas.

46. Determina las bisectrices de las siguientes rectas.

$$\mathbf{3x-2y-1=0}\qquad \mathbf{4x+2y-6=0}$$

$$\frac{|3x-2y-1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{|4x+2y-6|}{\sqrt{4^2+2^2}}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{3x-2y-1}{\sqrt{13}}=\dfrac{2x+y-3}{\sqrt{5}}\\ \dfrac{3x-2y-1}{\sqrt{13}}=\dfrac{-2x-y+3}{\sqrt{5}}\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}3\sqrt{5}x-2\sqrt{5}y-\sqrt{5}=2\sqrt{13}x+\sqrt{13}y-3\sqrt{13}\\ 3\sqrt{5}x-2\sqrt{5}y-\sqrt{5}=-2\sqrt{13}x-\sqrt{13}y+3\sqrt{13}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{13}\right)x-\left(2\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)y-\sqrt{5}+3\sqrt{13}=0\\ \left(3\sqrt{5}+2\sqrt{13}\right)x-\left(2\sqrt{5}-\sqrt{13}\right)y-\sqrt{5}-3\sqrt{13}=0\end{cases}$$

47. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia del eje *X* sea la misma que al punto *A*(3, 2).

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(OX, P)=d(A, P)$.

$d(OX, P)=|y|$

$d(A, P)=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}\ \rightarrow\ \sqrt{x^2+y^2-6x-4y+13}=|y|\ \rightarrow\ x^2-6x-4y+13=0$

El lugar geométrico es una parábola cuya directriz es paralela al eje *X*.

48. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el triángulo *ABP* sea rectángulo en *P*, siendo *A*(−3, 1) y *B*(4, 3). ¿De qué figura se trata?

ABP es triángulo rectángulo en $P(x, y)$ si sus lados *AP* y *BP* son perpendiculares:

$AP=(x+3, y-1)$ $\qquad\qquad$ $BP=(x-4, y-3)$

Para que sean perpendiculares su producto escalar debe ser 0, así:

$AP\cdot BP=(x+3)(x-4)+(y-1)(y-3)=0\rightarrow x^2+y^2-x-4y-9=0$

El lugar geométrico es una circunferencia con ecuación $x^2+y^2-x-4y-9=0$ cuyo centro es el punto medio del segmento *AB* y su radio la mitad de su módulo.

49. Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto *A*(2, −3) es la misma que el cuadrado de su distancia al origen de coordenadas.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(A, P)=d(O, P)^2$.

$d(A, P)=\sqrt{(x-2)^2+(y-(-3))^2}=\sqrt{x^2+y^2-4x+6y+13}$

$d(O, P)=\sqrt{x^2+y^2}$

$\sqrt{x^2+y^2-4x+6y+13}=x^2+y^2\rightarrow x^2+y^2-4x+6y+13=x^4+2x^2y^2+y^4\rightarrow$

$\rightarrow x^4+y^4-x^2-y^2+2x^2y^2+4x-6y-13=0$

50. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano Q tales que el punto medio del segmento PQ es un punto de la recta que tiene por ecuación $2x + 4y - 5 = 0$, con $P(2, 6)$.

Sea $Q(x, y)$ un punto del lugar geométrico. El punto medio de PQ es $\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+6}{2}\right)$.

Este punto pertenece a la recta $\rightarrow 2\left(\frac{x+2}{2}\right) + 4\left(\frac{y+6}{2}\right) - 5 = 0 \rightarrow x + 2y + 9 = 0$

El lugar geométrico es una recta paralela a la $2x + 4y - 5 = 0$ con ecuación $x + 2y + 9 = 0$.

51. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(3, 1)$ y $B(5, 1)$ sea igual a 8.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(A, P)^2 + d(P, B)^2 = 8$.

$d(A, P) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10}$

$d(B, P) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 10x - 2y + 26}$

$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10 + x^2 + y^2 - 10x - 2y + 26 = 8 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y + 14 = 0$

El lugar geométrico es una circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 14 = 0$.

52. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano P cuya diferencia de cuadrados de las distancias a los puntos $A(-1, 0)$ y $B(3, 2)$ es 4. ¿De qué figura se trata?

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(A, P)^2 - d(P, B)^2 = 4$.

$d(A, P) = \sqrt{(x-(-1))^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1}$

$d(B, P) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13}$

$x^2 + y^2 + 2x + 1 - (x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13) = 4 \rightarrow 2x + y - 4 = 0$

El lugar geométrico es una recta de ecuación $2x + 4 - y = 0$.

53. Halla los vértices, los focos y las excentricidades de las siguientes elipses.

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

c) $25x^2 + 16y^2 = 1600$

d) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 5 \rightarrow A(5, 0) \quad A'(-5, 0) \\ b = 3 \rightarrow B(0, 3) \quad B'(0, -3) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 4 \rightarrow F(4, 0) \qquad F'(-4, 0)$

La excentricidad es: $e = \frac{4}{5} = 0{,}8$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 \rightarrow \begin{cases} b = 4 \rightarrow B(4, 0) \quad B'(-4, 0) \\ a = 5 \rightarrow A(0, 5) \quad A'(0, -5) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 3 \rightarrow F(0, 4) \qquad F'(0, -4)$

La excentricidad es: $e = \frac{3}{5} = 0{,}6$

c) $25x^2 + 16y^2 = 1\,600 \rightarrow \dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{100} = 1 \rightarrow \begin{cases} b = 8 \rightarrow A(8, 0) & A'(-8, 0) \\ a = 10 \rightarrow B(0, 10) & B'(0, -10) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 6 \rightarrow F(0, 6) \quad F'(0, -6)$

La excentricidad es: $e = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$

d) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 5 \rightarrow A(5, 0) & A'(-5, 0) \\ b = 4 \rightarrow B(0, 4) & B'(0, -4) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 3 \rightarrow F(3, 0) \quad F'(-3, 0)$

La excentricidad es: $e = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

54. Encuentra los vértices, los focos y calcula las excentricidades de las siguientes elipses.

a) $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{54} = 6$

b) $\dfrac{x^2}{5} + 5y^2 = 245$

c) $9x^2 + 25y^2 = 900$

d) $x^2 + 2y^2 = 16$

a) $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{54} = 6$

$a = 3\sqrt{6} \rightarrow A\left(3\sqrt{6}, 0\right),\ A'\left(-3\sqrt{6}, 0\right)$

$b = \sqrt{6} \rightarrow B\left(0, \sqrt{6}\right),\ B'\left(0, -\sqrt{6}\right)$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c^2 = 48 \rightarrow c = 4\sqrt{3} \rightarrow F\left(4\sqrt{3}, 0\right), F'\left(-4\sqrt{3}, 0\right)$

La excentricidad es: $e = \dfrac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = 0{,}94$

b) $\dfrac{x^2}{5} + 5y^2 = 245$

$a = 35 \rightarrow A(35, 0),\ A'(-35, 0)$

$b = 7 \rightarrow B(0, 7),\ B'(0, -7)$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c^2 = 1\,176 \rightarrow c = 14\sqrt{6} \rightarrow F\left(14\sqrt{6}, 0\right),\ F'\left(-14\sqrt{6}, 0\right)$

La excentricidad es: $e = \dfrac{14\sqrt{6}}{35} = 0{,}98$

c) $9x^2 + 25y^2 = 900 \rightarrow \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 10 \rightarrow A(10, 0) & A'(-10, 0) \\ b = 6 \rightarrow B(0, 6) & B'(0, -6) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 8 \rightarrow F(8, 0) \quad F'(-8, 0)$

La excentricidad es: $e = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$

d) $x^2 + 2y^2 = 16 \rightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{8} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 4 \longrightarrow A(4, 0) & A'(-4, 0) \\ b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \rightarrow B\left(0, 2\sqrt{2}\right) & B'\left(0, -2\sqrt{2}\right) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 2\sqrt{2} \rightarrow F\left(2\sqrt{2}, 0\right) \quad F'\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$

La excentricidad es: $e = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$

55. Halla la ecuación de la elipse que cumple las condiciones en cada uno de los casos.

a) La distancia focal es 4 y el semieje menor es 3.

b) La semidistancia focal es 3 y el eje mayor es 10.

c) Pasa por el punto (8, 3) y su excentricidad es $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) Pasa por el punto (−4, 1) y el eje menor es 6.

a) $c = 2$ y $b = 3$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 13$

Ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $c = 3$ y $a = 5$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = 16$

Ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

c) $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = \frac{a^2}{4} \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{4}} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2} = 1$

Como (8, 3) es un punto de la elipse: $\frac{8^2}{a^2} + \frac{4 \cdot 3^2}{a^2} = 1 \rightarrow a^2 = 100 \rightarrow b^2 = \frac{a^2}{4} = 25$

Ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$

d) Como (−4, 1) es un punto de la elipse y $b = 3$: $\frac{(-4)^2}{a^2} + \frac{1^2}{3^2} = 1 \rightarrow a^2 = 18$

Ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

56. Encuentra las ecuaciones de las elipses que cumplen las siguientes condiciones.

a) La excentricidad es 0,6 y su eje mayor mide 20.

b) Los focos son (6, 0) y (−6, 0) y su excentricidad es $\frac{1}{3}$.

c) Pasa por el punto (3, 2) y su eje mayor mide 10.

d) Sus focos están en (4, 0) y (−4, 0) y dos de sus vértices son (5, 0) y (−5, 0).

a) $2a = 20 \rightarrow a = 10$

Si $e = 0{,}6 \rightarrow c = 6$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 8 \rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

b) $c = 6$

Si $e = \frac{1}{3} \rightarrow a = 18$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 12\sqrt{2} \rightarrow \frac{x^2}{324} + \frac{y^2}{288} = 1$

c) $2a = 10 \to a = 5$

Por ser el punto (3, 2) un punto de la elipse:

$$\frac{9}{25} + \frac{4}{b^2} = 1 \to \frac{4}{b^2} = \frac{16}{25} \to b^2 = \frac{25}{4} \to b = \frac{5}{2}$$

Así, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1 \to x^2 + 4y^2 = 25$$

d) $\left.\begin{array}{l} c = 4 \\ a = 5 \end{array}\right\}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \to b = 3 \to \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

57. Halla la ecuación que responde a los siguientes lugares geométricos.

a) Puntos cuya suma de distancias a $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$ es 10.

b) Puntos cuya suma de distancias a $P(-5, 0)$ y $Q(5, 0)$ es 21.

a) Sea $R(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(P, R) + d(Q, R) = 10$.

$d(P, R) = \sqrt{(x-(-4))^2 + (y-0)^2}$

$d(Q, R) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$

$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10 \to \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \to$

$\to (x+4)^2 + y^2 = 100 + (x-4)^2 + y^2 - 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} \to$

$\to 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 100 - 16x \to 400(x^2 + y^2 - 8x + 16) = 10\,000 - 3\,200x + 256x^2 \to$

$\to 144x^2 + 400y^2 = 3\,600$

La ecuación del lugar geométrico es una elipse de ecuación: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) Sea $R(x, y)$ punto del lugar geométrico, entonces, $d(P, R) + d(Q, R) = 21$

$d(P, R) = \sqrt{(x-(-5))^2 + (y-0)^2}$

$d(Q, R) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2}$

$\sqrt{(x+5)^2 + y^2} + \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 21 \to \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 21 - \sqrt{(x-5)^2 + y^2} \to$

$\to (x+5)^2 + y^2 = 21^2 + (x-5)^2 + y^2 - 42\sqrt{(x-5)^2 + y^2} \to$

$\to 42\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 441 - 20x \to 1\,764(x^2 + y^2 - 10x + 25) = 194\,481 - 17\,640x + 400x^2 \to$

$\to 1\,364x^2 + 1\,764y^2 = 150\,381$

La ecuación del lugar geométrico es una elipse de ecuación: $\frac{4x^2}{441} + \frac{4y^2}{341} = 1$

58. **Escribe la ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas, los focos sobre el eje X y pasa por los puntos $\left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.**

La ecuación de la elipse es de la forma $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Como $\left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ es un punto de la elipse: $\dfrac{1^2}{a^2} + \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{3}{4b^2} = 1 \rightarrow 4b^2 + 3a^2 = 4a^2b^2$

Como $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es un punto de la elipse: $\dfrac{\sqrt{2}^2}{a^2} + \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{2}{4b^2} = 1 \rightarrow 8b^2 + 2a^2 = 4a^2b^2$

Igualamos las dos ecuaciones: $4b^2 + 3a^2 = 8b^2 + 2a^2 \rightarrow a^2 = 4b^2$

Sustituyendo en la primera ecuación: $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{3}{a^2} = 1 \rightarrow a^2 = 4,\ b^2 = \dfrac{a^2}{4} \rightarrow b^2 = 1$

Ecuación de la elipse: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

59. **Determina la ecuación reducida de una elipse cuya distancia focal es 8 y el área del rectángulo construido sobre sus ejes es de $48\sqrt{5}$ unidades cuadradas.**

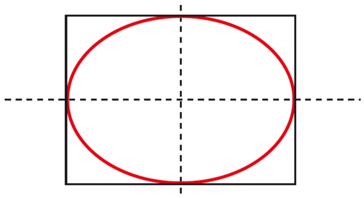
$c = 4 \rightarrow 2a \cdot 2b = 48\sqrt{5} \rightarrow b = \dfrac{12\sqrt{5}}{a}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = \left(\dfrac{12\sqrt{5}}{a}\right)^2 + 16 \rightarrow a^4 - 16a^2 - 720 = 0 \rightarrow a^2 = 36$

Como $b^2 = \left(\dfrac{12\sqrt{5}}{a}\right)^2 \rightarrow b^2 = 20$

Ecuación de la elipse: $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{20} = 1$

60. **Una elipse es tangente a los lados del rectángulo definido por las rectas $y = 8$, $y = -8$, $x = 10$ y $x = -10$. Halla su ecuación y las coordenadas de cinco puntos.**



$\left.\begin{array}{l} a = 10 \\ b = 8 \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

Cinco puntos de la elipse son: $A(10, 0)$, $A'(-10, 0)$, $B(0, 8)$, $B'(0, -8)$ y $C\left(5, 4\sqrt{3}\right)$

61. **Halla la posición relativa de la elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 3$ con la recta de ecuación $x + 2y - 1 = 0$.**

$x + 2y - 1 = 0 \rightarrow x = 1 - 2y$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse: $x^2 + 2y^2 = 3 \rightarrow (1 - 2y)^2 + 2y^2 = 3 \rightarrow 3y^2 - 2y - 1 = 0$

$\Delta = 16 > 0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones; por tanto, la elipse y la recta son secantes

62. **Escribe la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a (0, −12) y a (0, 12) es 26.**

$$\sqrt{(x-0)^2+(y+12)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y-12)^2}=26$$
$$\to \sqrt{x^2+(y+12)^2}=26-\sqrt{x^2+(y-12)^2}$$
$$\to x^2+(y+12)^2=26^2+x^2+(y-12)^2-52\sqrt{x^2+(y-12)^2}$$
$$\to y^2+144+24y=676+y^2+144-24y-52\sqrt{x^2+y^2+144-24y}$$
$$\to 52\sqrt{x^2+y^2+144-24y}=676-48y$$
$$\to 13\sqrt{x^2+y^2+144-24y}=169-12y$$
$$\to 169x^2+169y^2+24\,336-4\,056y=28\,561+144y^2-4\,056y$$
$$\to 169x^2+25y^2=4\,225\to \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$$

63. **Escribe en forma general la ecuación de la elipse $4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$. Halla también sus focos y su excentricidad.**

$4(x^2-2x)+9(y^2+4y)+4=0$

$4(x^2-2x+1)+9(y^2+4y+4)+4=4+36\to 4(x-1)^2+9(y+2)^2=36$

En forma general:

$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1\to a=3,\ b=2$

Como $a^2=b^2+c^2\to c^2=5\to c=\sqrt{5}$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Como $C(1,-2)$ y $c=\sqrt{5}\to F\left(1+\sqrt{5},-2\right)$ y $F'\left(1-\sqrt{5},-2\right)$.

64. **Escribe en forma general la ecuación de la siguiente elipse, encuentra sus focos y calcula su excentricidad.**

$$x^2+400y^2=6x-800y-309$$

$(x^2-6x)+400(y^2+2y)+309=0$

$(x^2-6x+9)+400(y^2+2y+1)+309=9+400\to (x-3)^2+400(y+1)^2=100$

Forma general:

$\frac{(x-3)^2}{100}+\frac{(y+1)^2}{\frac{1}{4}}=1\to a=10,\ b=\frac{1}{2}$

Como $a^2=b^2+c^2\to c^2=\frac{399}{4}\to c=\frac{\sqrt{399}}{2}$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{399}}{20}$

Como $C(3,-1)$ y $c=\frac{\sqrt{399}}{2}\to F\left(3+\frac{\sqrt{399}}{2},-1\right)$ y $F'\left(3-\frac{\sqrt{399}}{2},-1\right)\to F\left(\frac{6+\sqrt{399}}{2},-1\right)$ y $F'\left(\frac{6-\sqrt{399}}{2},-1\right)$

65. Determina los focos, los vértices, las asíntotas y las excentricidades de las siguientes hipérbolas.

a) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$

b) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$

c) $16y^2-25x^2=1600$

d) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

e) $9x^2-25y^2=900$

f) $x^2-2y^2=16$

a) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1\rightarrow\begin{cases}a=5\rightarrow A(5,0) & A'(-5,0)\\ b=3\rightarrow B(0,3) & B'(0,-3)\end{cases}$

Como $c^2=a^2+b^2\rightarrow c=\sqrt{34}\rightarrow F\left(\sqrt{34},0\right)\quad F'\left(-\sqrt{34},0\right)$

La excentricidad es: $e=\frac{\sqrt{34}}{5}=1{,}16$

Las asíntotas son $y=\pm\frac{b}{a}x\rightarrow\begin{cases}r\colon y=\frac{3}{5}x\\ r'\colon y=-\frac{3}{5}x\end{cases}$

b) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1\rightarrow\begin{cases}a=5\rightarrow A(0,5) & A'(0,-5)\\ b=4\rightarrow B(4,0) & B'(-4,0)\end{cases}$

Como $c^2=a^2+b^2\rightarrow c=\sqrt{41}\rightarrow F\left(0,\sqrt{41}\right)\quad F'\left(0,-\sqrt{41}\right)$

La excentricidad es: $e=\frac{\sqrt{41}}{5}=1{,}28$

Las asíntotas son $y=\pm\frac{b}{a}x\rightarrow\begin{cases}r\colon y=\frac{4}{5}x\\ r'\colon y=-\frac{4}{5}x\end{cases}$

c) $16y^2-25x^2=1600\rightarrow\frac{y^2}{100}-\frac{x^2}{64}=1\rightarrow\begin{cases}a=10\rightarrow A(0,10) & A'(0,-10)\\ b=8\rightarrow B(8,0) & B'(-8,0)\end{cases}$

Como $c^2=a^2+b^2\rightarrow c=2\sqrt{41}\rightarrow F\left(0,2\sqrt{41}\right)\quad F'\left(0,-2\sqrt{41}\right)$

La excentricidad es: $e=\frac{2\sqrt{41}}{10}=1{,}28$

Las asíntotas son $y=\pm\frac{b}{a}x\rightarrow\begin{cases}r\colon y=\frac{4}{5}x\\ r'\colon y=-\frac{4}{5}x\end{cases}$

d) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1\rightarrow\begin{cases}a=5\rightarrow A(5,0) & A'(-5,0)\\ b=4\rightarrow B(0,4) & B'(0,-4)\end{cases}$

Como $c^2=a^2+b^2\rightarrow c=\sqrt{41}\rightarrow F\left(\sqrt{41},0\right)\quad F'\left(-\sqrt{41},0\right)$

La excentricidad es: $e=\frac{\sqrt{41}}{5}=1{,}28$

Las asíntotas son $y=\pm\frac{b}{a}x\rightarrow\begin{cases}r\colon y=\frac{4}{5}x\\ r'\colon y=-\frac{4}{5}x\end{cases}$

e) $9x^2-25y^2=900\rightarrow\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{36}=1\rightarrow\begin{cases}a=10\rightarrow A(10,0) & A'(-10,0)\\ b=6\rightarrow B(0,6) & B'(0,-6)\end{cases}$

Como $c^2=a^2+b^2\rightarrow c=2\sqrt{34}\rightarrow F\left(2\sqrt{34},0\right)\quad F'\left(-2\sqrt{34},0\right)$

La excentricidad es: $e=\frac{2\sqrt{34}}{10}=1{,}16$

Las asíntotas son $y = \pm\frac{b}{a}x \rightarrow \begin{cases} r: y = \frac{3}{5}x \\ r': y = -\frac{3}{5}x \end{cases}$

f) $x^2 - 2y^2 = 16 \rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 4 \longrightarrow A(4, 0) \quad A'(-4, 0) \\ b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \rightarrow B(0, 2\sqrt{2}) \quad B'(0, -2\sqrt{2}) \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = 2\sqrt{6} \rightarrow F(2\sqrt{6}, 0) \quad F'(-2\sqrt{6}, 0)$

La excentricidad es: $e = \frac{2\sqrt{6}}{4} = 1{,}22$

Las asíntotas son $y = \pm\frac{b}{a}x \rightarrow \begin{cases} r: y = \frac{\sqrt{2}}{2}x \\ r': y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x \end{cases}$

66. Halla la ecuación de la hipérbola que cumple las condiciones en cada caso.

a) La distancia entre los focos es 12 y la curva pasa por el punto $P(8, 14)$.

b) La distancia focal es 34 y la distancia de un foco al vértice más próximo es 2.

c) Pasa por los puntos $(4, \sqrt{8})$ y $(2\sqrt{3}, 2)$.

a) $c = 6$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = 36 - a^2 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{36 - a^2} = 1$

Como $P(8, 14)$ pertenece a la hipérbola: $\frac{8^2}{a^2} - \frac{14^2}{36 - a^2} = 1 \rightarrow a^4 - 296a^2 + 2\,304 = 0 \rightarrow a_1^2 = 8$ y $a_2^2 = 288$

Como $b^2 > 0$, $a^2 = 8 \rightarrow b^2 = 28$

Ecuación de la hipérbola: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{28} = 1$

b) $c = 17$

$a = 17 - 2 = 15$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = 64$

Ecuación de la hipérbola: $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = 1$

c) $\frac{4^2}{a^2} - \frac{\sqrt{8}^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{16}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 1 \rightarrow 16b^2 - 8a^2 = a^2b^2 \rightarrow b^2 = \frac{8a^2}{16 - a^2}$

$\frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{2^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{12}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$

Se sustituye en la segunda ecuación: $\frac{12}{a^2} - \frac{4(16 - a^2)}{8a^2} = 1 \rightarrow a^2 = 8 \rightarrow b^2 = 8$

Ecuación de la hipérbola: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

67. Encuentra las ecuaciones de las hipérbolas que cumplen las siguientes condiciones.

a) Sus asíntotas son $y = 2x$ e $y = -2x$ y un foco tiene por coordenadas $\left(3\sqrt{5}, 0\right)$.

b) Los focos son $(-5, 0)$ y $(5, 0)$ y la distancia entre sus vértices es 8.

c) Las asíntotas son $y = \frac{1}{3}x$ e $y = -\frac{1}{3}x$ y pasa por el punto $\left(3\sqrt{29}, 5\right)$.

d) Un foco es $(6, 0)$ y su excentricidad es 1,2.

a) $\frac{b}{a} = 2 \rightarrow b = 2a \qquad c = 3\sqrt{5}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 45 = a^2 + 4a^2 \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = 3 \rightarrow b = 6 \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

b) $c = 5 \qquad 2a = 8 \rightarrow a = 4$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 25 = 16 + b^2 \rightarrow b^2 = 9 \rightarrow b = 3 \rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

c) $\frac{b}{a} = \frac{1}{3} \rightarrow a = 3b$

Por ser el punto $\left(3\sqrt{29}, 5\right)$ un punto de la hipérbola:

$\frac{261}{9b^2} - \frac{25}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{36}{9b^2} = 1 \rightarrow b^2 = 4 \rightarrow b = 2 \rightarrow a = 6$

Así, la ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$

d) $c = 6 \qquad e = \frac{c}{a} = 1,2 \rightarrow a = 5$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b = \sqrt{11} \rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$

68. Determina los focos, los vértices, las asíntotas y la excentricidad de las siguientes hipérbolas no centradas en el origen.

a) $\frac{(x+5)^2}{10} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1$

b) $\frac{(y+3)^2}{25} - \frac{x^2}{7} = 1$

c) $\frac{y^2}{11} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$

d) $\frac{(x-4)^2}{14} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

a) $C(-5, 4)$

$a^2 = 10 \rightarrow a = \sqrt{10} \rightarrow$ Vértices: $A(-5 + \sqrt{10}, 4)$, $A'(-5 - \sqrt{10}, 4)$

$b^2 = 9 \rightarrow$ Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 19 \rightarrow c = \sqrt{19} \rightarrow$ Focos: $F(-5 + \sqrt{19}, 4)$, $F'(-5 - \sqrt{19}, 4)$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{19}{10}}$

$\frac{b}{a} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \rightarrow$ Asíntotas: $r: y = \frac{3\sqrt{10}x}{10}$, $r': y = \frac{-3\sqrt{10}x}{10}$

b) $C(0, -3)$

$a^2 = 25 \rightarrow a = 5 \rightarrow$ Vértices: $A(0, -3 + 5)$, $A'(0, -3 - 5) \rightarrow A(0, 2)$, $A'(0, -8)$

$b^2 = 7 \rightarrow$ Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 32 \rightarrow c = 4\sqrt{2} \rightarrow$ Focos: $F(0, -3 + 4\sqrt{2})$, $F'(0, -3 - 4\sqrt{2})$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$

$\frac{a}{b} = \frac{5\sqrt{7}}{7} \rightarrow$ Asíntotas: $r: y = \frac{5\sqrt{7}}{7}x$, $r': y = -\frac{5\sqrt{7}}{7}x$

c) $C(-4, 0)$

$a^2 = 11 \rightarrow a = \sqrt{11} \rightarrow$ Vértices: $A(-4, \sqrt{11})$, $A'(-4, -\sqrt{11})$

$b^2 = 9 \rightarrow$ Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 20 \rightarrow c = 2\sqrt{5} \rightarrow$ Focos: $F(-4, 2\sqrt{5})$, $F'(-4, -2\sqrt{5})$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{55}}{11}$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{11}}{3} \rightarrow$ Asíntotas: $r: y = \dfrac{\sqrt{11}}{3}x$, $r': y = -\dfrac{\sqrt{11}}{3}x$

d) $C(4, -1)$

$a^2 = 14 \rightarrow a = \sqrt{14} \rightarrow$ Vértices: $A(4 + \sqrt{14}, -1)$, $A'(4 - \sqrt{14}, -1)$

$b^2 = 9 \rightarrow$ Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 23 \rightarrow c = \sqrt{23} \rightarrow$ Focos: $F(4 + \sqrt{23}, -1)$, $F'(4 - \sqrt{23}, -1)$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{\dfrac{23}{14}}$

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{3\sqrt{14}}{14} \rightarrow$ Asíntotas: $r: y = \dfrac{3\sqrt{14}}{14}x$, $r': y = -\dfrac{3\sqrt{14}}{14}x$

69. Halla la ecuación de la hipérbola no centrada en el origen que cumple las condiciones en cada caso.

a) El centro es $C(1, 0)$, la excentricidad es $\dfrac{4}{3}$ y pasa por el punto $P(4, 3)$.

b) El centro es $C(2, 3)$, un vértice es $(-3, 3)$ y un foco es $(9, 3)$.

c) El centro es $C(-5, 2)$, un vértice es $(0, 2)$ y su excentricidad es 2.

a) $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{3} \rightarrow c = \dfrac{4a}{3}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = \dfrac{7a^2}{9}$

La ecuación de la hipérbola es de la forma: $\dfrac{(x-1)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{\frac{7a^2}{9}} = 1 \rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{a^2} - \dfrac{9y^2}{7a^2} = 1$

Como $P(4, 3)$ pertenece a la hipérbola: $\dfrac{(4-1)^2}{a^2} - \dfrac{9 \cdot 3^2}{7a^2} = 1 \rightarrow a^2 < 0 \rightarrow$ Imposible, no existe la hipérbola.

b) $C(2, 3)$

$A(-3, 3) \rightarrow A(2 - 5, 3) \rightarrow a = 5$

$F(9, 3) \rightarrow F(2 + 7, 3) \rightarrow c = 7$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = 24$

Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{(x-2)^2}{25} - \dfrac{(y-3)^2}{24} = 1$

c) $C(-5, 2)$

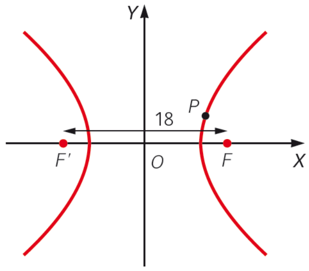
$A(0, 2) \rightarrow A(0 - 5, 2) \rightarrow a = 5$

$e = 2 \qquad c = e \cdot a \rightarrow c = 10$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = 75$

Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{(x+5)^2}{25} - \dfrac{(y-2)^2}{75} = 1$

70. Encuentra la ecuación de una hipérbola cuyo eje focal mide 18 y pasa por el punto *P*(15, 4).



$2c = 18 \to c = 9$

$c^2 = a^2 + b^2 \to 81 - a^2 = b^2$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{81-a^2} = 1 \to \frac{225}{a^2} - \frac{16}{81-a^2} = 1 \to a^2 = 161 - 4\sqrt{481}$

Por tanto, la ecuación de la hipérbola pedida es:

$$\frac{x^2}{161-4\sqrt{481}} - \frac{y^2}{4\sqrt{481}-80} = 1$$

71. Escribe la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de las distancias a (0, −12) y a (0, 12) es 10.

$\sqrt{(x-0)^2+(y+12)^2} - \sqrt{(x-0)^2+(y-12)^2} = 10$

$\to \sqrt{x^2+(y+12)^2} = 10 + \sqrt{x^2+(y-12)^2} \to$

$\to x^2+(y+12)^2 = 10^2 + x^2 + (y-12)^2 + 20\sqrt{x^2+(y-12)^2} \to$

$\to y^2+144+24y = 100 + y^2 + 144 - 24y + 20\sqrt{x^2+y^2+144-24y} \to$

$\to 48y - 100 = 20\sqrt{x^2+y^2+144-24y} \to$

$\to 12y - 25 = 5\sqrt{x^2+y^2+144-24y}$

$\to 144y^2 - 600y + 625 = 25x^2 + 25y^2 + 3\,600 - 600y \to$

$\to 119y^2 - 25x^2 = 2\,975 \to \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{119} = 1$

72. Sean los puntos *A*(−5, −1) y *A'*(−5, −11). ¿Qué ecuación tiene el lugar geométrico formado por los puntos cuya diferencia de distancias a *A* y *A'* es 8?

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(A, P) - d(A', P) = 8$.

$\sqrt{(x+5)^2+(y+1)^2} - \sqrt{(x+5)^2+(y+11)^2} = 8$

$\to \sqrt{(x+5)^2+(y+1)^2} = 8 + \sqrt{(x+5)^2+(y+11)^2} \to$

$\to (x+5)^2+(y+1)^2 = 8^2 + (x+5)^2 + (y+11)^2 + 16\sqrt{(x+5)^2+(y+11)^2} \to$

$\to -5y - 46 = 4\sqrt{(x+5)^2+(y+11)^2} \to (-5y-46)^2 = 16(x+5)^2 + 16(y+11)^2 \to$

$\to 25y^2 + 460y + 2\,116 = 16x^2 + 160x + 400 + 16y^2 + 352y + 1\,936 \to$

$\to 9(y^2+12y) - 16(x^2+10x) - 220 = 0 \to 9(y^2+12y+36) - 16(x^2+10x+25) - 220 = 324 - 400 \to$

$\to 9(y+6)^2 - 16(x+5)^2 = 144 \to \frac{9(y+6)^2}{144} - \frac{16(x+5)^2}{144} = 1$

El lugar geométrico es una hipérbola con eje paralelo a OY y ecuación: $\frac{(y+6)^2}{16} - \frac{(x+5)^2}{19} = 1$

73. **Halla la ecuación de la parábola con vértice el origen de coordenadas, que pasa por el punto (3, −6) y cuyo eje coincide con el eje de abscisas.**

La ecuación de la parábola con $V(0, 0)$ y eje en el eje X es de la forma: $y^2 = 2px$

Como (3, −6) pertenece a la parábola:

$(-6)^2 = 2p3 \rightarrow p = 6$

Ecuación de la parábola: $y^2 = 12x$

74. **Encuentra el foco y la directriz de las siguientes parábolas, y represéntalas gráficamente.**

a) $y^2 = 10x$

b) $y^2 = 7x$

c) $x^2 = 6y$

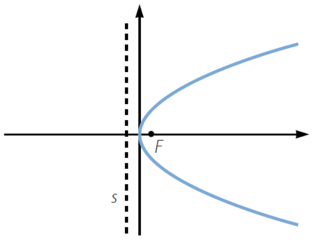
d) $x^2 = y$

e) $y^2 = -10x$

f) $x^2 = -6y$

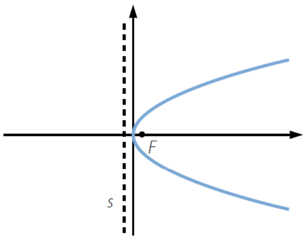
a) $2p = 10 \rightarrow p = 5 \rightarrow F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

Directriz: $x = -\frac{5}{2}$



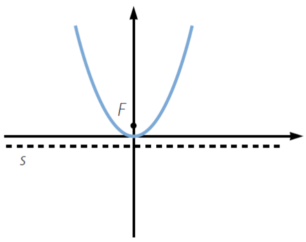
b) $2p = 7 \rightarrow p = \frac{7}{2} \rightarrow F\left(\frac{7}{4}, 0\right)$

Directriz: $x = -\frac{7}{2}$



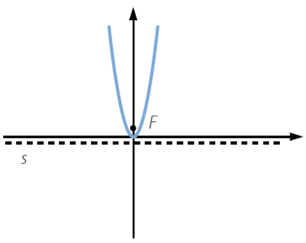
c) $2p = 6 \rightarrow p = 3 \rightarrow F\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = -\frac{3}{2}$



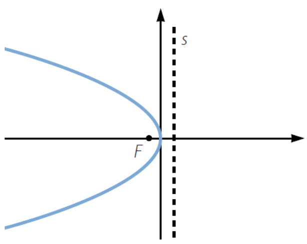
d) $2p = 1 \rightarrow p = \frac{1}{2} \rightarrow F\left(0, \frac{1}{4}\right)$

Directriz: $y = -\frac{1}{4}$



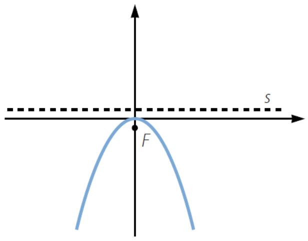
e) $2p = -10 \rightarrow p = -5 \rightarrow F\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

Directriz: $x = \frac{5}{2}$



f) $2p = -6 \rightarrow p = -3 \rightarrow F\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = \frac{3}{2}$



75. Obtén la ecuación de la parábola en cada uno de los siguientes casos.

a) Foco en (5, 0) y su directriz es $x = -5$.

b) Foco en (0, 2) y su directriz es $y = -2$.

a) $P(x, y)$ punto de la parábola $\rightarrow d(P, F) = d(P, s) \rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = |x+5| \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 = x^2 + 10x + 25 \rightarrow y^2 = 20x$

b) $P(x, y)$ punto de la parábola $\rightarrow d(P, F) = d(P, s) \rightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y+2| \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4 \rightarrow x^2 = 8y$

76. Halla la ecuación reducida de la parábola con vértice el origen de coordenadas que cumple las condiciones de cada caso.

a) Pasa por el punto $(-3, 8)$ y su directriz es horizontal.

b) Pasa por el punto $(5, -4)$ y su directriz es vertical.

a) La ecuación de la parábola es de la forma: $x^2 = 2py$

Como pasa por el punto $(-3, 8)$: $9 = 2p \cdot 8 \rightarrow p = \frac{9}{16} \rightarrow x^2 = \frac{9}{8}y$

b) La ecuación de la parábola es de la forma: $y^2 = 2px$

Como pasa por el punto $(5, -4)$: $16 = 2p \cdot 5 \rightarrow p = \frac{8}{5} \rightarrow y^2 = \frac{16}{5}x$

77. Encuentra la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el punto $V(-1, 3)$, pasa por el punto $(2, -2)$ y su eje es paralelo al eje Y.

La ecuación es de la forma:

$(x + 1)^2 = 2p(y - 3)$

Como $(2, -2)$ está en la parábola:

$(2 + 1)^2 = 2p(-2 - 3) \rightarrow p = -\frac{9}{10}$

Ecuación de la parábola:

$(x + 1)^2 = -\frac{9}{5}(y - 3) \rightarrow 5x^2 + 10x + 9y = 22$

78. Obtén los vértices, los focos y las directrices de las siguientes parábolas.

a) $y^2 = 2(x - 3)$

b) $(y - 1)^2 = 4(x - 4)$

c) $x^2 = 6(y - 2)$

d) $(x - 3)^2 = 8(y + 1)$

e) $x^2 = -4(y + 1)$

f) $(y + 3)^2 = -8(x - 1)$

a) $V(3, 0)$ $\quad 2p = 2 \rightarrow p = 1 \rightarrow F\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ $\quad$ Directriz: $x = \frac{5}{2}$

b) $V(4, 1)$ $2p = 4 \rightarrow p = 2 \rightarrow F(5, 1)$ Directriz: $x = 3$

c) $V(0, 2)$ $2p = 6 \rightarrow p = 3 \rightarrow F\left(0, \frac{7}{2}\right)$ Directriz: $y = \frac{1}{2}$

d) $V(3, -1)$ $2p = 8 \rightarrow p = 4 \rightarrow F(3, 1)$ Directriz: $y = -3$

e) $V(0, -1)$ $2p = -4 \rightarrow p = -2 \rightarrow F(0, -2)$ Directriz: $y = 0$

f) $V(1, -3)$ $2p = -8 \rightarrow p = -4 \rightarrow F(-1, -3)$ Directriz: $x = 3$

79. Obtén los vértices, los focos y las directrices de las siguientes parábolas.

a) $(x - 5)^2 = 14(y - 3)$
b) $(y + 6)^2 = 24(x - 1)$
c) $(y + 4)^2 = -8(x - 6)$
d) $(x + 4)^2 = -4(y + 7)$
e) $(y - 2)^2 = -18x$
f) $x^2 = -9(y + 1)$

a) $V(5, 3)$ $2p = 14 \rightarrow p = 7 \rightarrow$ Foco: $F\left(5, 3 + \frac{7}{2}\right) \rightarrow F\left(5, \frac{13}{2}\right)$ Directriz: $y = 3 - \frac{7}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}$

b) $V(1, -6)$ $2p = 24 \rightarrow p = 12 \rightarrow$ Foco: $F\left(1 + \frac{12}{2}, -6\right) \rightarrow F(7, -6)$ Directriz: $x = 1 - \frac{12}{2} \rightarrow x = -5$

c) $V(6, -4)$ $2p = -8 \rightarrow p = -4 \rightarrow$ Foco: $F\left(6 + \frac{-4}{2}, -4\right) \rightarrow F(4, -4)$ Directriz: $x = 6 - \frac{-4}{2} \rightarrow x = 8$

d) $V(-4, -7)$ $2p = -4 \rightarrow p = -2 \rightarrow$ Foco: $F\left(-4, -7 + \frac{-2}{2}\right) \rightarrow F(-4, -8)$ Directriz: $y = -7 - \frac{-2}{2} \rightarrow y = -6$

e) $V(0, 2)$ $2p = -18 \rightarrow p = -9 \rightarrow$ Foco: $F\left(0 + \frac{-9}{2}, 2\right) \rightarrow F\left(-\frac{9}{2}, 2\right)$ Directriz: $x = 0 - \frac{-9}{2} \rightarrow x = \frac{9}{2}$

f) $V(0, -1)$ $2p = -4 \rightarrow p = -2 \rightarrow$ Foco: $F\left(0, -1 + \frac{-2}{2}\right) \rightarrow F(0, -2)$ Directriz: $y = -1 - \frac{-2}{2} \rightarrow y = 0$

80. Halla la ecuación de la parábola en cada caso.

a) Vértice en $(-5, 8)$ y foco en $(-5, 2)$.
b) Vértice en $(3, 7)$ y foco en $(0, 7)$.
c) Foco en $(3, 5)$ y su directriz es $x = 10$.
d) Vertice en $(2, 3)$ y su directriz es $x = -3$.

a) Ecuación de la forma: $(x + 5)^2 = 2p(y - 8)$

$F\left(-5, 8 + \frac{p}{2}\right) \rightarrow 2 = 8 + \frac{p}{2} \rightarrow p = -12$

Ecuación de la parábola:

$(x + 5)^2 = 2(-12)(y - 8) \rightarrow (x + 5)^2 = -24(y - 8) \rightarrow x^2 + 10x + 24y - 167 = 0$

b) Ecuación de la forma: $(y - 7)^2 = 2p(x - 3)$

$F\left(3 + \frac{p}{2}, 7\right) \rightarrow 0 = 3 + \frac{p}{2} \rightarrow p = -6$

Ecuación de la parábola:

$(y - 7)^2 = 2(-6)(x - 3) \rightarrow y^2 - 14y + 12x + 13 = 0$

c) Sea $P(x, y)$ un punto de la parábola, entonces $d(P, F) = d(P, s)$:

$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 5)^2} = |x - 10| \rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = x^2 - 20x + 100$

Ecuación de la parábola:

$y^2 - 10y + 14x - 66 = 0$

d) $s: x = -3 \rightarrow$ Ecuación de la forma: $(y-3)^2 = 2p(x-2)$ y $s: x - 2 = -\frac{9}{2}$

$-3 - 2 = -\frac{p}{2} \rightarrow p = 10$

Ecuación de la parábola:

$(y-3)^2 = 2 \cdot 10(x-2) \rightarrow (y-3)^2 = 20(x-2) \rightarrow y^2 - 6y - 20x + 49 = 0$

81. **Obtén la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje Y, que pasa por los puntos $A(2, -4)$, $B(-2, 4)$ y $C(-3, 2)$.**

La parábola es de la forma $(x-h)^2 = 2p(y-k)$, siendo $V(h, k)$

Como A, B y C pertenecen a la parábola:

$$\left.\begin{array}{l}(2-h)^2 = 2p(-4-k) \rightarrow h^2 - 4h + 8p + 2pk + 4 = 0\\ (-2-h)^2 = 2p(4-k) \rightarrow h^2 + 4h - 8p + 2pk + 4 = 0\\ (-3-h)^2 = 2p(2-k) \rightarrow h^2 + 6h - 4p + 2pk + 9 = 0\end{array}\right\}$$

Se resta la primera ecuación a las otras dos:

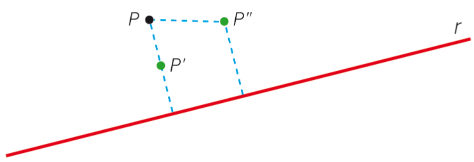
$$\left.\begin{array}{l}8h - 16p = 0\\ 10h - 12p + 5 = 0\end{array}\right\} \rightarrow h = 2p \rightarrow 10 \cdot 2p - 12p + 5 = 0 \rightarrow p = -\frac{5}{8} h = -\frac{5}{4}$$

Se sustituye p y h en la primera ecuación:

$$\left(\frac{-5}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{-5}{4}\right) + 8\left(\frac{-5}{8}\right) + 2\left(\frac{-5}{8}\right)\left(\frac{-5}{4}\right) + 4 = 0 \rightarrow k = \frac{89}{20}$$

Ecuación de la parábola: $\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = -\frac{5}{4}\left(y - \frac{89}{20}\right)$

82. **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto $P(3, 1)$ y de la recta r: $3x - 4y + 5 = 0$.**



Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico.

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1} = \frac{|3x - 4y + 5|}{5} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = \frac{9x^2 + 16y^2 + 25 + 30x - 40y - 24xy}{25} \rightarrow$$

$$\rightarrow 25x^2 - 150x + 225 + 25y^2 - 50y + 25 = 9x^2 + 16y^2 + 25 + 30x - 40y - 24xy \rightarrow$$

$$\rightarrow 16x^2 + 9y^2 + 24xy - 180x - 10y + 225 = 0$$

83. En cada uno de los siguientes casos escribe la ecuación de la circunferencia correspondiente.

a) $C(0, 0); r = \frac{3}{5}$

b) $C(0, 7); r = 14$

c) $C(5, 0); r = 7$

d) $C(7, -1); r = 5$

e) $C(2, -1); r = \frac{\sqrt{2}}{3}$

f) $C(6, 8); r = \sqrt{2}$

g) $C(12, 4); r = \frac{1}{2}$

h) $C(-4, -3); r = 8$

a) $x^2 + y^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2$ $\rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $25x^2 + 25y^2 = 9$

b) $x^2 + (y - 7)^2 = 14^2$ $\rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 14y - 147 = 0$

c) $(x - 5)^2 + y^2 = 7^2$ $\rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 10x - 24 = 0$

d) $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 5^2$ $\rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 14x + 2y + 25 = 0$

e) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$ $\rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $9x^2 + 9y^2 - 36x + 18y + 43 = 0$

f) $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$ $\rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 98 = 0$

g) $(x - 12)^2 + (y - 4)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $4x^2 + 4y^2 - 96x - 32y + 639 = 0$

h) $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 8^2$ $\rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 39 = 0$

84. Obtén la ecuación de la circunferencia en cada uno de los siguientes casos.

a) Centro en $(-2, -5)$ y pasa por $(6, 1)$.

b) Centro en $(7, 2)$ y pasa por $(0, 0)$.

c) Tangente al eje Y y con centro en $(4, -2)$.

d) Tangente al eje X y con centro en $(0, -3)$.

e) Los extremos de un diámetro son $(5, -4)$ y $(-5, 1)$.

f) Los puntos $(7, -6)$ y $(1, 3)$ son diametralmente opuestos.

a) La ecuación es de la forma: $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = r^2$

Como $(6, 1)$ está en la circunferencia: $(6 + 2)^2 + (1 + 5)^2 = r^2 \rightarrow r = 10$

Ecuación de la circunferencia: $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 10^2 \rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 10y - 71 = 0$

b) La ecuación es de la forma: $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = r^2$

Como $(0, 0)$ está en la circunferencia: $(-7)^2 + (-2)^2 = r^2 \rightarrow r = \sqrt{53}$

Ecuación de la circunferencia: $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = \left(\sqrt{53}\right)^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 14x - 4y = 0$

c) La ecuación es de la forma: $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = r^2$

$d(C, OY) = 4 = r \rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 4^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$

d) La ecuación es de la forma: $x^2 + (y + 3)^2 = r^2$

$d(C, OX) = 3 = r \rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $x^2 + (y + 3)^2 = 3^2 \rightarrow x^2 + y^2 + 6y = 0$

e) Longitud del diámetro: $d((5, -4),(-5, 1)) = \sqrt{(-5-5)^2+(1+4)^2} = 5\sqrt{5} \rightarrow r = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

$$\left(\frac{5+(-5)}{2}, \frac{-4+1}{2}\right) = \left(0, -\frac{3}{2}\right) \rightarrow C\left(0, -\frac{3}{2}\right)$$

Ecuación de la circunferencia: $x^2 + \left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2 \rightarrow 4x^2 + 4y^2 + 12y - 116 = 0$

f) Longitud del diámetro: $d((7, -6), (1, 3)) = \sqrt{(1-7)^2+(3+6)^2} = 3\sqrt{13} \rightarrow r = \dfrac{3\sqrt{13}}{2}$

$$\left(\frac{7+1}{2}, \frac{-6+3}{2}\right) = \left(4, -\frac{3}{2}\right) \rightarrow C\left(4, -\frac{3}{2}\right)$$

Ecuación de la circunferencia: $(x-4)^2 + \left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3\sqrt{13}}{2}\right)^2 \rightarrow 4x^2 + 4y^2 - 32x + 12y - 44 = 0$

85. Determina la ecuación de una circunferencia con centro en $(-1, 6)$ y que pasa por el punto $(3, -3)$. ¿Está el punto $(-2, -8)$ situado en esa circunferencia?

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x+1)^2 + (y-6)^2 = r^2$

Si pasa por el punto $(3, -3)$: $(3+1)^2 + (-3-6)^2 = 97 \rightarrow r = \sqrt{97}$

La ecuación simplificada es: $x^2 + y^2 + 2x - 12y - 60 = 0$

Sustituimos: $(-2)^2 + (-8)^2 + 2(-2) - 12(-8) - 60 = 100 \neq 0$

$(-2, -8)$ No pertenece a la circunferencia.

86. Halla, en cada caso, la ecuación de la circunferencia que cumple estas condiciones.

a) Pasa por los puntos $(-3, 7)$ y $(11, 3)$ y tiene radio de 2 unidades.

b) Pasa por los puntos $(5, 4)$ y $(-2, 3)$ y tiene radio de 5 unidades.

a) La distancia entre los dos puntos es mayor que 4, con lo que no pueden estar los dos en una circunferencia de diámetro 4.

b) La ecuación es de la forma: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 25$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pasa por } (5,4) \rightarrow (5-a)^2+(4-b)^2 = 25 \rightarrow a^2+b^2-10a-8b+16=0 \\ \text{Pasa por } (-2,3) \rightarrow (-2-a)^2+(3-b)^2 = 25 \rightarrow a^2+b^2+4a-6b-12=0\end{array}\right\}$$

Restamos la segunda ecuación a la primera:

$-14a - 2b + 28 = 0 \rightarrow b = 14 - 7a$

Sustituimos en la primera ecuación:

$a^2 + (14-7a)^2 - 10a - 8(14-7a) + 16 = 0 \rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \rightarrow a_1 = 1$ y $a_2 = 2$

Si $a = 1 \rightarrow b = 7$ y la ecuación de la circunferencia es $(x-1)^2 + (y-7)^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 14y + 25 = 0$

Si $a = 2 \rightarrow b = 0$ y la ecuación de la circunferencia es $(x-2)^2 + y^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$

87. **Estudia si las siguientes ecuaciones corresponden a circunferencias. En caso afirmativo, calcula su centro y su radio.**

a) $x^2 + y^2 - 9x + 6y + 41 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 3 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 10x + 12y + 33 = 0$
d) $x^2 + y^2 - x + 12y + 41 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 10 = 0$
f) $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 41 = 0$

a) $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y+3)^2 = -\frac{47}{4}$ → No es una circunferencia.

b) $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 38$ → Corresponde a una circunferencia con $C(-4, 5)$ y $r = \sqrt{38}$.

c) $(x+5)^2 + (y+6)^2 = 28$ → Corresponde a una circunferencia con $C(-5, -6)$ y $r = 2\sqrt{7}$.

d) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+6)^2 = -\frac{19}{4}$ → No es una circunferencia.

e) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 0$ → No es una circunferencia.

f) $(x+4)^2 + (y+5)^2 = 0$ → No es una circunferencia.

88. **Halla en cada caso la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos *A*, *B* y *C*.**

a) $A(2, 8)$, $B(2, -5)$ y $C(0, 0)$
b) $A(4, 0)$, $B(-1, -2)$ y $C(1, 4)$
c) $A(0, 2)$, $B(1, 7)$ y $C(-3, -4)$

a) La ecuación es de la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Como D, E, F están en la circunferencia:

$2^2 + 8^2 + D2 + E8 + F = 0 \rightarrow 2D + 8E + F + 68 = 0$

$2^2 + (-5)^2 + D2 + E(-5) + F = 0 \rightarrow 2D - 5E + F + 29 = 0$

$F = 0$

$$\left.\begin{array}{r} 2D + 8E + 68 = 0 \\ 2D - 5E + 29 = 0 \end{array}\right\}$$

Restamos la segunda ecuación a la primera: $13E + 39 = 0 \rightarrow E = -3$

Sustituimos en la primera: $2D + 8 \cdot (-3) + 68 = 0 \rightarrow D = -22$

Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 22x - 3y = 0$

b) La ecuación es de la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Como D, E, F están en la circunferencia:

$4^2 + 0 + 4D + 0 + F = 0 \rightarrow 4D + F + 16 = 0 \rightarrow F = -4D - 16$

$(-1)^2 + (-2)^2 + D(-1) + E(-2) + F = 0 \rightarrow -D - 2E + F + 5 = 0$

$1 + 4^2 + D + E4 + F = 0 \rightarrow D + 4E + F + 17 = 0$

Sustituimos en las dos ecuaciones:

$D - 2E - 4D - 16 + 5 = 0 \rightarrow -5D - 2E - 11 = 0$

$D + 4E - 4D - 16 + 17 = 0 \rightarrow -3D + 4E + 1 = 0$

$D = -\frac{21}{13}$ $\quad F = \frac{124}{13}$ $\quad E = -\frac{19}{13}$

Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 - \frac{21x}{13} - \frac{19y}{13} - \frac{124}{13} = 0 \rightarrow 13x^2 + 13y^2 - 21x - 19y - 124 = 0$

c) La ecuación es de la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Como D, E, F están en la circunferencia:

$0 + 2^2 + 0 + E2 + F = 0 \rightarrow 2E + F + 4 = 0 \rightarrow F = -2E - 4$

$1 + 7^2 + D + E7 + F = 0 \rightarrow D + 7E + F + 50 = 0$

$(-3)^2 + (-4)^2 + D(-3) + E(-4) + F = 0 \rightarrow -3D - 4E + F + 25 = 0$

Sustituimos en las dos ecuaciones:

$D + 7E - 2E - 4 + 50 = 0 \rightarrow D + 5E + 46 = 0 \qquad E = -\dfrac{53}{3} \rightarrow F = \dfrac{94}{3}$

$-3D - 4E - 2E - 4 + 25 = 0 \rightarrow -3D - 6E + 21 = 0 \qquad D = \dfrac{127}{3}$

Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 + \dfrac{127x}{3} - \dfrac{53y}{3} + \dfrac{94}{3} = 0 \rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 127x - 53y + 94 = 0$

89. Determina el punto de la circunferencia de centro (2, 8) y radio 5 que esté más próximo a cada uno de los siguientes puntos.

a) $P(7, 18)$ b) $Q(-1, 6)$ c) $R(5, 4)$

La ecuación de la circunferencia es: $(x-2)^2 + (y-8)^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 16y + 43 = 0$

a) La recta que pasa por P y el centro de la circunferencia es: $2x - y + 4 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x - 16y + 43 = 0 \\ y = 2x + 4 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$$

Las coordenadas del punto más próximo son: $A\left(2 + \sqrt{5}, 8 + 2\sqrt{5}\right)$

b) La recta que pasa por Q y el centro de la circunferencia es: $2x - 3y + 20 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x - 16y + 43 = 0 \\ y = \dfrac{2x + 20}{3} \end{array}\right\} \rightarrow 13x^2 - 52x - 173 = 0 \rightarrow x = \frac{26 \pm 15\sqrt{13}}{13}$$

Las coordenadas del punto más próximo son: $M\left(\dfrac{26 - 15\sqrt{13}}{13}, 24 - 10\sqrt{13}\right)$

c) $5^2 + 4^2 - 4 \cdot 5 - 16 \cdot 4 + 43 = 0 \rightarrow R$ pertenece a la circunferencia y coincide con el punto pedido.

90. Dada la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$ halla la ecuación de las rectas tangente y normal en el punto (2, 2).

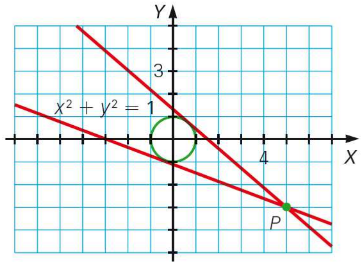
$A = 4 \rightarrow a = -2$ $\qquad B = 2 \rightarrow b = -1$ $\qquad$ Centro $= (-2, -1)$

$C = -20 \rightarrow$ Como $C = a^2 + b^2 - r^2 \rightarrow r = 5$

La recta normal pasa por el punto (2, 2) y el centro (–2, –1) $\rightarrow 3x - 4y + 2 = 0$

La recta tangente pasa por el punto (2, 2) y es perpendicular a la normal $\rightarrow 4x + 3y - 14 = 0$

91. **Obtén la ecuación de las rectas que pasan por $P(5, -3)$ y que son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.**



La ecuación de la tangente es de la forma: $y = Ax + B$

Como es tangente a la circunferencia, la intersección entre la recta y la circunferencia es un único punto:

$x^2 + (Ax + B)^2 = 1 \to (1 + A^2)x^2 + 2ABx + B^2 - 1 = 0$

Discriminante: $(2AB)^2 - 4(1 + A^2)(B^2 - 1) = 0 \to -B^2 + A^2 + 1 = 0$

Como $P(5, -3)$ pertenece a la tangente: $-3 = A5 + B \to B = -3 - 5A$

Sustituyendo B en la ecuación del discriminante se tiene $12A^2 + 15A + 4 = 0$, y resolviendo esta ecuación:

$A = \dfrac{-15+\sqrt{33}}{24} \to B = \dfrac{3-5\sqrt{33}}{24}$ $\qquad$ $A = \dfrac{-15-\sqrt{33}}{24} \to B = \dfrac{3+5\sqrt{33}}{24}$

Rectas tangentes: $y = \dfrac{-15+\sqrt{33}}{24}x + \dfrac{3-5\sqrt{33}}{24} \to 24y = \left(-15+\sqrt{33}\right)x + \left(3-5\sqrt{33}\right)$

Rectas tangentes: $y = \dfrac{-15-\sqrt{33}}{24}x + \dfrac{3+5\sqrt{33}}{24} \to 24y = \left(-15-\sqrt{33}\right)x + \left(3+5\sqrt{33}\right)$

92. **Determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de radio 3 y centro $(5, -2)$, que es paralela a la recta $2x + y - 11 = 0$.**

Las rectas paralelas a la recta dada son de la forma: $2x + y + k = 0$

$$\left.\begin{aligned}(x-5)^2 + (y+2)^2 &= 9\\ 2x + y + k &= 0\end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned}x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 &= 0\\ y &= -2x - k\end{aligned}\right\}$$

$$\to 5x^2 + (4k - 18)x + k^2 - 4k + 20 = 0$$

Si la recta es tangente, entonces la intersección con la circunferencia es un solo punto, luego la ecuación de segundo grado debe tener una única solución.

$(4k - 18)^2 - 20(k^2 - 4k + 20) = 0 \to k^2 + 16k + 19 = 0 \to k = -8 \pm 3\sqrt{5}$

Las dos rectas que cumplen las condiciones son: $\begin{cases}2x + y - 8 + 3\sqrt{5} = 0\\ 2x + y - 8 - 3\sqrt{5} = 0\end{cases}$

93. **Determina la ecuación de la circunferencia de centro $(1, -3)$ que es tangente a la recta $3x + y - 2 = 0$.**

$$r = d(C, t) = \frac{|3-3-2|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = \dfrac{2}{5} \to 5x^2 + 5y^2 - 10x + 30y + 48 = 0$

94. **Determina la ecuación de la circunferencia de centro $(3, -4)$ que es tangente a la siguiente recta.**

$$3x + 4y - 18 = 0$$

$$r = d(C, t) = \frac{|9-16-18|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5$$

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25 \to x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$

95. **Determina la ecuación de la circunferencia de centro (4, −2) que es tangente a la recta $x - 3y = -5$.**

$$r = d(C, t) = \frac{|4+6+5|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x-4)^2 + (y+2)^2 = \frac{45}{2} \rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 16x + 8y - 5 = 0$

96. **Determina la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $x + y + 5 = 0$ en (−3, −2) y cuyo centro está sobre el eje Y.**

$$C(0, k) \rightarrow r = d(C, t) = \frac{|0+k+5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|k+5|}{\sqrt{2}} = \frac{|k+5|\sqrt{2}}{2}$$

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $x^2 + (y-k)^2 = \frac{2(k+5)^2}{4} \rightarrow x^2 + (y-k)^2 = \frac{(k+5)^2}{2}$

Como (−3, −2) está en la circunferencia: $(-3)^2 + (-2-k)^2 = \frac{(k+5)^2}{2} \rightarrow k = 1$

Ecuación de la circunferencia: $x^2 + (y-1)^2 = 18 \rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 17 = 0$

97. **Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(3, 9)$ y $B(8, 4)$ y tiene su centro en la recta cuya ecuación es $2x - 5y + 14 = 0$.**

El centro equidista de los puntos A y B, entonces, se encuentra en la mediatriz del segmento AB. Sea $P(x, y)$ un punto de esa mediatriz, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-9)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (y-4)^2} \rightarrow x^2 - 6x + y^2 - 18y + 90 = x^2 - 16x + y^2 - 8y + 80 \rightarrow x - y + 1 = 0$$

El centro es la intersección de esa recta y la recta dada:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 1 = 0 \\ 2x - 5y + 14 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow C(3, 4) \rightarrow r^2 = (3-3)^2 + (4-9)^2 = 25$$

Ecuación de la circunferencia: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

98. **Determina la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $2x - 5y + 1 = 0$ en el punto (2, 1) cuyo centro está en la recta de ecuación $x + y = 0$.**

El centro está en la recta $x + y = 0$, por tanto, sus coordenadas serán de la forma $C(h, -h)$.

$$C(h, -h) \rightarrow r = d(C, t) = \frac{|2h+5h+1|}{\sqrt{2^2+5^2}} = \frac{|7h+1|}{\sqrt{29}}$$

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x-h)^2 + (y+h)^2 = \frac{(7h+1)^2}{29}$

Como (2, 1) está en la circunferencia: $(2-h)^2 + (1+h)^2 = \frac{(7h+1)^2}{29} \rightarrow h^2 - 8h + 16 = 0 \rightarrow h = 4$

Ecuación de la circunferencia: $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 29 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 8y + 3 = 0$

99. Determina la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $x + y + 4 = 0$ en el punto $(-3, -1)$ cuyo centro está en la recta $3x - 4y + 2 = 0$.

El centro está en la recta $3x - 4y + 2 = 0$, por tanto, sus coordenadas serán de la forma $C\left(h, \frac{3h+2}{4}\right)$.

$$C\left(h, \frac{3h+2}{4}\right) \rightarrow r = d(C, t) = \frac{\left|h + \frac{3h+2}{4} + 4\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} =$$

$$\frac{|7h+18|}{4\sqrt{2}}$$

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x-h)^2 + \left(y - \frac{3h+2}{4}\right)^2 = \frac{(7h+18)^2}{32}$

Como $(-3, -1)$ está en la circunferencia: $(-3-h)^2 + \left(-1 - \frac{3h+2}{4}\right)^2 = \frac{(7h+18)^2}{32} \rightarrow h^2 + 12h + 36 = 0 \rightarrow h = -6$

Ecuación de la circunferencia: $(x+6)^2 + (y+4)^2 = 18 \rightarrow x^2 + y^2 + 12x + 8y + 34 = 0$

100. Determina la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $3x - 2y + 4 = 0$ en $(2, 5)$ cuyo centro está sobre el eje X.

$$C(h, 0) \rightarrow r = d(C, t) = \frac{|3h+4|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{|3h+4|}{\sqrt{13}}$$

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x-h)^2 + y^2 = \frac{(3h+4)^2}{13}$

Como $(2, 5)$ está en la circunferencia: $(2-h)^2 + 5^2 = \frac{(3h+4)^2}{13} \rightarrow h = \frac{19}{2}$

Ecuación de la circunferencia: $\left(x - \frac{19}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{4225}{52} \rightarrow 52x^2 + 52y^2 - 988x + 468 = 0$

101. Halla la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $4x + 3y - 4 = 0$ en el punto $(4, -4)$ cuyo centro está en la recta $x - y - 7 = 0$.

El centro está en la recta $x + y - 7 = 0$, por tanto, sus coordenadas serán de la forma $C(h, h-7)$.

$$C(h, h-7) \rightarrow r = d(C, t) = \frac{|4h + 3(h-7) - 4|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|7h-25|}{5}$$

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x-h)^2 + (y - \mathrm{h} + 7)^2 = \frac{(7h-25)^2}{25}$

Como $(4, -4)$ está en la circunferencia: $(4-h)^2 + (-4 - \mathrm{h} + 7)^2 = \frac{(7h-25)^2}{25} \rightarrow h = 0$

Ecuación de la circunferencia: $x^2 + (y+7)^2 = 25$

102. Halla los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 28 = 0$ con estas rectas.

a) $r: x + 9y - 16 = 0$

b) $s: x + y + 2 = 0$

c) $t: 4x - 5y - 23 = 0$

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x + 6y - 28 = 0 \\ x + 9y - 16 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0$

Los puntos de intersección son: $(7, 1)$ y $(-2, 2)$

b) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x + 6y - 28 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{array}\right\} \to x^2 - 3x - 18 = 0$

Los puntos de intersección son: (6, −8) y (−3, 1)

c) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x + 6y - 28 = 0 \\ 4x - 5y - 23 = 0 \end{array}\right\} \to x^2 - 4x - 21 = 0$

Los puntos de intersección son: (7, 1) y (−3, −7)

103. **Estudia, según el valor de m, la posición relativa de la recta $y = mx + 2$ con respecto a la circunferencia $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.**

$(x - 3)^2 + (mx + 2 - 2)^2 = 4 \to (1 + m^2)x^2 - 6x + 5 = 0$

Discriminante: $36 - 4 \cdot (1 + m^2) \cdot 5 = 16 + 20m^2$

$16 - 20m^2 = 0 \to m^2 = \frac{4}{5} \to m = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5} \to$ Tangente.

$16 - 20m^2 < 0 \to m < -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ y $m > \frac{2\sqrt{5}}{5} \to$ Exterior.

$16 - 20m^2 > 0 \to -\frac{2\sqrt{5}}{5} < m < \frac{2\sqrt{5}}{5} \to$ Secante.

104. **En función del valor que tome m, estudia la posición relativa de la recta $y = mx + 2$ respecto a la circunferencia $x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$.**

$x^2 + 4x + (mx + 2)^2 - 6(mx + 2) - 12 = 0 \to (1 + m^2)x^2 - (4 - 2m)x - 20 = 0$

Discriminante: $(4 - 2m)^2 - 4 \cdot (-20) \cdot (1 + m^2) = 84m^2 - 16m + 96$

$84m^2 - 16m + 96 = 0 \to$ No tiene solución.

$84m^2 - 16m + 96 < 0 \to$ No tiene solución.

$84m^2 - 16m + 96 > 0 \to$ Siempre $\to$ La recta es secante para cualquier valor de m.

105. **Calcula el valor que debe tener k para que la recta r y la circunferencia C sean tangentes.**

a) $r: 3x + 2y + k = 0$ $\quad C: x^2 + y^2 - 6x + 8y - 6 = 0$

b) $r: 4x + 2y + k = 0$ $\quad C: x^2 + y^2 + 6x + 10y - 1 = 0$

a) $x = -\frac{2y + k}{3}$

$\left(\frac{2y + k}{3}\right)^2 + y^2 + 6\left(\frac{2y + k}{3}\right) + 8y - 6 = 0 \to 13y^2 + (108 + 4k)y + k^2 + 18k - 54 = 0$

Para que la recta sea tangente a la circunferencia, la solución debe ser única:

Discriminante: $(108 + 4k)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (k^2 + 18k - 54) = 0 \to k = -1 \pm \sqrt{403}$

b) $x = -\frac{2y + k}{4}$

$\left(-\frac{2y + k}{4}\right)^2 + y^2 + 6\left(-\frac{2y + k}{4}\right) + 10y - 1 = 0 \to 20y^2 + (112 + 4k)y + k^2 - 24k - 16 = 0$

Para que la recta sea tangente a la circunferencia, la solución debe ser única:

Discriminante: $(112 + 4k)^2 - 4 \cdot 20 \cdot (k^2 - 24k - 16) = 0 \to k = 22 \pm 10\sqrt{7}$

106. **Obtén el valor del coeficiente C en la circunferencia $x^2 + y^2 + 10x + 2y + C = 0$ para que sea tangente a la recta $2x + 3y = 0$.**

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+10x+2y+C=0 \\ 2x+3y=0 \end{array}\right\} \to 13x^2+78x+9C=0$$

Si la recta es tangente, entonces la intersección con la circunferencia es un solo punto, luego la ecuación de segundo grado debe tener una única solución.

$6\,084 - 468C = 0 \to C = 13$

107. **Estudia la posición relativa de los siguientes pares de circunferencias.**

a) $C_1: x^2 + y^2 - 8x + 5y - 7 = 0$
$C_2: x^2 + y^2 - 8x + 5y - 15 = 0$

b) $C_1: x^2 + y^2 - 7x - 11y - 3 = 0$
$C_2: x^2 + y^2 - 7x - 10y + 2 = 0$

c) $C_1: x^2 + y^2 + 8x + 4y - 11 = 0$
$C_2: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$

d) $C_1: x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$
$C_2: x^2 + y^2 - 2x - 8y - 32 = 0$

e) $C_1: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$
$C_2: x^2 + y^2 - 12x - 10y + 45 = 0$

f) $C_1: x^2 + y^2 + 8x - 4y + 18 = 0$
$C_2: x^2 + y^2 - 2x + 6y - 22 = 0$

a) $C_1: (x-4)^2 + \left(y+\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{117}{4} \to$ Centro $\left(4, -\frac{5}{2}\right)$ y $r_1 = \frac{\sqrt{117}}{2}$

$C_2: (x-4)^2 + \left(y+\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{149}{4} \to$ Centro $\left(4, -\frac{5}{2}\right)$ y $r_2 = \frac{\sqrt{149}}{2}$

El centro es el mismo y $r_2 > r_1 \to$ Son concéntricas.

b) $C_1: \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{182}{4} \to$ Centro $\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$ y $r_1 = \frac{\sqrt{182}}{2}$

$C_2: \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + (y-5)^2 = \frac{141}{4} \to$ Centro $\left(\frac{7}{2}, 5\right)$ y $r_2 = \frac{\sqrt{141}}{2}$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{0 + \left(5 - \frac{11}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} < r_1 - r_2 \to$ Son interiores.

c) $C_1: (x+4)^2 + (y+2)^2 = 31 \to$ Centro $(-4, -2)$ y $r_1 = \sqrt{31}$

$C_2: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4 \to$ Centro $(3, 4)$ y $r_2 = 2$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(-4-3)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{85} > r_1 + r_2 \to$ Son exteriores.

d) $C_1: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 1 \to$ Centro $(-2, -1)$ y $r_1 = 1$

$C_2: (x-1)^2 + (y-4)^2 = 49 \to$ Centro $(1, 4)$ y $r_2 = 7$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(1+2)^2 + (4+1)^2} = 5{,}83 < r_2 - r_1 \to$ Son interiores.

e) $C_1: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 20 \to$ Centro $(-2, 1)$ y $r_1 = 2\sqrt{5}$

$C_2: (x-6)^2 + (y-5)^2 = 16 \to$ Centro $(6, 5)$ y $r_2 = 4$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(6+2)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{5} > r_2 + r_1 \to$ Son exteriores.

f) $C_1: (x+4)^2 + (y-2)^2 = 2 \to$ Centro $(-4, 2)$ y $r_1 = \sqrt{2}$

$C_2: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 32 \to$ Centro $(1, -3)$ y $r_2 = \sqrt{32}$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(1+4)^2 + (-3-2)^2} = 5\sqrt{2} = r_2 + r_1 \to$ Son tangentes exteriores.

108. Halla los puntos de intersección de las siguientes circunferencias.

a) $C_1: x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = 0$
$C_2: x^2 + y^2 - 8x + 11 = 0$

b) $C_1: x^2 + y^2 + 6x - 4y + 8 = 0$
$C_2: x^2 + y^2 + 4x - 10y + 24 = 0$

a) C_1: $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 5 \rightarrow$ Centro (3, 3) y $r_1 = \sqrt{5}$

C_2: $(x-4)^2 + y^2 = 5 \rightarrow$ Centro (4, 0) y $r_1 = \sqrt{5}$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(4-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10} < r_1 + r_2$ y $\sqrt{10} > r_1 - r_2 \rightarrow$ Secantes (dos puntos de intersección).

Se resuelve el sistema formado por C_1 y C_2:

Se resta C_2 a C_1: $x - 3y + 1 = 0 \rightarrow x = 3y - 1$

Se sustituye en C_2: $(3y-1)^2 + y^2 - 8(3y-1) + 11 = 0 \rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \rightarrow y_1 = 1, y_2 = 2 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 5$

Puntos de intersección: (2, 1) y (5, 2)

b) C_1: $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 5 \rightarrow$ Centro (–3, 2) y $r_1 = \sqrt{5}$

C_2: $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 5 \rightarrow$ Centro (–2, 5) y $r_1 = \sqrt{5}$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(-2+3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10} < r_1 + r_2$ y $\sqrt{10} > r_1 - r_2 \rightarrow$ Secantes (dos puntos de intersección).

Se resuelve el sistema formado por C_1 y C_2:

Se resta C_2 a C_1: $x + 3y - 8 = 0 \rightarrow x = -3y + 8$

Se sustituye en C_1: $(8-3y)^2 + y^2 + 6(8-3y) - 4y + 8 = 0 \rightarrow y^2 - 7y + 12 = 0 \rightarrow y_1 = 3, y_2 = 4 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = -4$

Puntos de intersección: (–1, 3) y (–4, 4)

109. Estudia la posición del punto $P(-3, 2)$ respecto de la circunferencia $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = k$, según el valor de k.

$C(1, -3)$ $\qquad r = \sqrt{k}$ $\qquad d(P, C) = \sqrt{(1+3)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{41}$

Si $k = 41 \rightarrow P$ pertenece a la circunferencia.

Si $k > 41 \rightarrow P$ es interior.

Si $0 < k < 41 \rightarrow P$ es exterior.

110. Halla el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan, a la vez, por los puntos (4, 1) y (−2, 5). ¿De qué figura se trata?

Los centros de las circunferencias se encuentran a la misma distancia de ambos puntos; por tanto, forman la mediatriz del segmento que determinan.

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2} \rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 =$$
$$= x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 \rightarrow 3x - 2y + 3 = 0$$

111. Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de cuadrados a los puntos (1, −2) y (0, 3) sea siempre 5 unidades.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $(x-1)^2 + (y+2)^2 - x^2 - (y-3)^2 = 5 \rightarrow 2x - 10y + 9 = 0$

112. **Calcula la longitud de la cuerda que forma la recta $x + 2y - 5 = 0$ sobre la circunferencia de $x^2 + y^2 = 25$.**

Calculamos la intersección de la recta y la circunferencia:

$x = 5 - 2y$

$(5 - 2y)^2 + y^2 = 25 \rightarrow y^2 - 4y = 0 \rightarrow y_1 = 0,\ y_2 = 4 \rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = -3$

Los puntos de intersección de la recta y la circunferencia son $A(5, 0)$ y $B(-3, 4)$.

Longitud de la cuerda: $d(A, B) = \sqrt{(5+3)^2 + (0+4)^2} = 4\sqrt{5}$

113. **Calcula el área de la circunferencia que viene dada por la siguiente ecuación.**

$$x^2 + y^2 - 3x + 5y - 14 = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{90}{4} \rightarrow r^2 = \frac{45}{2}$$

$$\text{Área} = \pi \cdot r^2 = \frac{45\pi}{2}$$

114. **Halla el área de la corona circular formada por las circunferencias C_1 y C_2.**

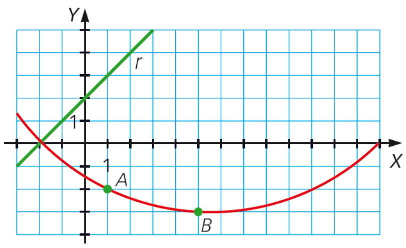
C_1: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ $\qquad$ C_2: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$

C_1: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1 \rightarrow r_1^2 = 1 \rightarrow A_1 = \pi \cdot r^2 = \pi$

C_2: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4 \rightarrow r_2^2 = 4 \rightarrow A_2 = \pi \cdot r^2 = 4\pi$

$\text{Área corona circular} = A_2 - A_1 = 4\pi - \pi = 3\pi$

115. **Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(5, -3)$ y tiene su centro en la recta r: $x - y + 2 = 0$.**



Como el centro equidista de los puntos, se encuentra en la mediatriz de AB:

$P(x, y)$ punto de la mediatriz: $d(A, P) = d(B, P) \rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2} \rightarrow 8x - 2y - 29 = 0$

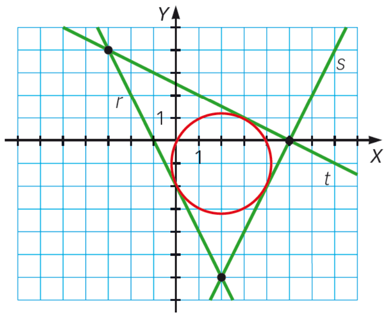
El centro es el punto de intersección de la mediatriz y la recta dada:

$$\left.\begin{array}{r} 8x - 2y - 29 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = y - 2 \\ \rightarrow 8(y-2) - 2y - 29 = 0 \rightarrow y = \frac{15}{2} \rightarrow x = \frac{11}{2} \rightarrow C\left(\frac{11}{2}, \frac{15}{2}\right) \end{array}$$

$$r = d(A, C) = \sqrt{\left(\frac{11}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{15}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{\frac{442}{4}}$$

Ecuación de la circunferencia: $\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = \frac{221}{2}$

116. **Un triángulo tiene sus lados sobre las rectas cuyas ecuaciones son r: $2x + y + 2 = 0$, s: $2x - y - 10 = 0$ y t: $x + 2y - 5 = 0$. Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en este triángulo.**



Como (–3, 4), (2, –6) pertenecen a $r \rightarrow r$: $2x + y + 2 = 0$

Como (5, 0) y (2, –6) pertenecen a $s \rightarrow s$: $2x - y - 10 = 0$

Como (5, 0) y (–3, 4) pertenecen a $t \rightarrow t$: $x + 2y - 5 = 0$

El centro de la circunferencia es la intersección de las bisectrices de las intersecciones de las rectas.

Sea $P(x, y)$ un punto de la bisectriz del ángulo formado por las rectas r y t, entonces $d(P, r) = d(P, t)$:

$$\frac{|2x + y + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

La solución son dos ecuaciones. Se elige la recta adecuada que pasa por la circunferencia:

$2x + y + 2 = -x - 2y + 5 \rightarrow x + y - 1 = 0$

Sea $P(x, y)$ un punto de la bisectriz del ángulo formado por las rectas s y t, entonces $d(P, s) = d(P, t)$:

$$\frac{|2x - y - 10|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

La solución son dos ecuaciones. Se elige la recta adecuada que pasa por la circunferencia:

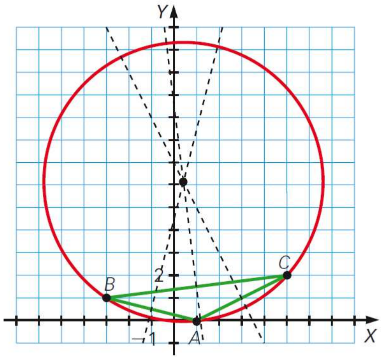
$2x - y - 10 = x + 2y - 5 \rightarrow x - 3y - 5 = 0$

Intersección de las dos rectas: $\left.\begin{array}{r} x + y - 1 = 0 \\ x - 3y - 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 2,\ y = -1 \rightarrow$ Centro de la circunferencia: $C(2, -1)$

Radio de la circunferencia: $r = d(C, t) = \dfrac{|2 - 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

Ecuación de la circunferencia: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$

117. **Halla la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $A(1, 0)$, $B(-3, 1)$ y $C(5, 2)$.**



Encuentra las coordenadas del circuncentro del triángulo *ABC*.

La ecuación es de la forma: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Como $A(1, 0)$ pertenece a la circunferencia: $1 + 0 + A + C = 0 \rightarrow A + C + 1 = 0$

Como $B(-3, 1)$ pertenece a la circunferencia: $9 + 1 - 3A + B + C = 0 \rightarrow -3A + B + C + 10 = 0$

Como $C(5, 2)$ pertenece a la circunferencia: $25 + 4 + 5A + 2B + C = 0 \rightarrow 5A + 2B + C + 29 = 0$

Se resuelve el sistema: $A = -\frac{5}{6}, B = -\frac{37}{3}, C = -\frac{1}{6}$

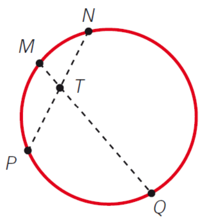
Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 - \frac{5}{6}x - \frac{37}{3}y - \frac{1}{6} = 0 \rightarrow 6x^2 + 6y^2 - 5x - 74y - 1 = 0$

El circuncentro del triángulo es el centro de la circunferencia:

$$\left(x - \frac{5}{12}\right)^2 + \left(y - \frac{37}{6}\right)^2 = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{12}\right)^2 + \left(\frac{37}{12}\right)^2 \rightarrow \left(x - \frac{5}{12}\right)^2 + \left(y - \frac{37}{6}\right)^2 = \frac{709}{72} \rightarrow \text{Circuncentro: } \left(\frac{5}{12}, \frac{37}{6}\right)$$

118. **Si dibujas cuatro puntos sobre una circunferencia y los unes, según se observa en la figura, resulta que:**

$$|TM| \cdot |TQ| = |TN| \cdot |TP|$$



Compruébalo tomando los puntos $M(5, 1)$, $N(4, 2)$, $P(-3, -5)$ y $Q(-2, 2)$ y demostrando que están sobre la misma circunferencia. Halla su ecuación. Después, calcula el punto T y prueba que se verifica la igualdad inicial.

Sea la ecuación de la circunferencia de la forma: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} 25 + 1 + 5A + B + C = 0 \\ 16 + 4 + 4A + 2B + C = 0 \\ 9 + 25 - 3A - 5B + C = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 5A + B + C = -26 \\ 4A + 2B + C = -20 \\ 3A + 5B - C = 34 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 5A + B + C = -26 \\ A - B = -6 \\ 4A + 3B = 4 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} 5A + B + C = -26 \\ A - B = -6 \\ 7A = -14 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} A = -2 \\ B = 4 \\ C = -20 \end{array}\right\} \to x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$$

Obtenemos la ecuación de la circunferencia que pasa por M, N y P.

Como $(-2)^2 + 2^2 - 2(-2) + 4 \cdot 2 - 20 = 0$, Q pertenece también a la circunferencia.

La recta que pasa por M y Q tiene por ecuación: $\frac{x-5}{-7} = \frac{y-1}{1} \to x + 7y - 12 = 0$

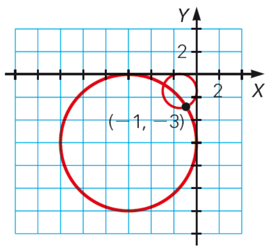
La recta que pasa por N y P tiene por ecuación: $\frac{x-4}{-7} = \frac{y-2}{-7} \to x - y - 2 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} x + 7y - 12 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{array}\right\} \to T\left(\frac{13}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$$\overline{TM} \cdot \overline{TQ} = \sqrt{\left(5 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(-2 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{16}} \cdot \sqrt{\frac{450}{16}} = \frac{75}{2}$$

$$\overline{TN} \cdot \overline{TP} = \sqrt{\left(4 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(-3 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(-5 - \frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{16}} \cdot \sqrt{\frac{1\,250}{16}} = \frac{75}{2}$$

119. Obtén la ecuación de las circunferencias tangentes a los ejes de coordenadas que pasan por el punto (−1, −3).



Los centros de las se encuentran en la bisectriz del ángulo formado por los ejes: $x - y = 0 \to$ Los centros serán de la forma $C(h, h)$.

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x - h)^2 + (y - h)^2 = r^2$

La intersección de las circunferencias con los ejes es un único punto.

Con el eje Y: $x = 0 \to (0 - h)^2 + (y - h)^2 = r^2 \to y^2 - 2hy + 2h^2 - r^2 = 0$

Como la solución es única $\to 4h^2 - 4(2h^2 - r^2) = 0 \to h^2 = r^2$

La ecuación queda de la forma: $x^2 + y^2 - 2hx - 2hy + h^2 = 0$

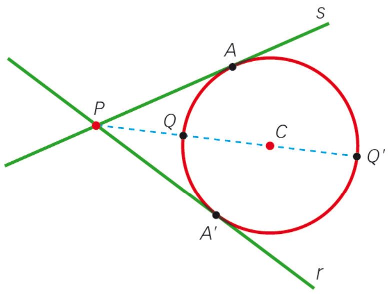
$P(-1, -3)$ pertenece a la circunferencia: $(-1)^2 + (-3)^2 - 2h(-1) - 2h(-3) + h^2 = 0 \to h = r = -4 \pm \sqrt{6}$

Ecuaciones de las circunferencias:

C_1: $\left(x + 4 + \sqrt{6}\right)^2 + \left(y + 4 + \sqrt{6}\right)^2 = \left(-4 - \sqrt{6}\right)^2$

C_2: $\left(x + 4 - \sqrt{6}\right)^2 + \left(y + 4 - \sqrt{6}\right)^2 = \left(-4 + \sqrt{6}\right)^2$

120. **Dadas las rectas r: $3x + 4y - 10 = 0$, s: $5x - 12y + 2 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0$.**



a) Comprueba que las dos rectas son tangentes a la circunferencia.

b) Halla el punto P de intersección de ambas rectas, el punto C, que es centro de la circunferencia, y los puntos A y A', en los que las rectas son tangentes a la circunferencia.

c) Si llamamos d a la distancia que separa P de C, la distancia de P a Q es $d - r$, y la distancia de P a Q' es $d + r$. Demuestra que $|PQ| \cdot |PQ'| = |PA|^2$.

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0 \\ 3x + 4y - 10 = 0 \end{array}\right\} \to 25x^2 - 380x + 1\,444 = 0$

$\Delta = 0 \to$ La ecuación tiene una solución; por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0 \\ 5x - 12y + 2 = 0 \end{array}\right\} \to 169x^2 - 2\,860x + 12\,100 = 0$

$\Delta = 0 \to$ La ecuación tiene una solución; por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 4y - 10 = 0 \\ 5x - 12y + 2 = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 9x + 12y - 30 = 0 \\ 5x - 12y + 2 = 0 \end{array}\right\} \to P(2, 1)$

$x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0 \to (x - 10)^2 + y^2 = 16 \to C(10, 0)$

$25x^2 - 380x + 1\,444 = 0 \to x = \dfrac{38}{5} \to A\left(\dfrac{38}{5}, -\dfrac{16}{5}\right)$

$169x^2 - 2\,860x + 12\,100 = 0 \to x = \dfrac{110}{13} \to A'\left(\dfrac{110}{13}, \dfrac{48}{13}\right)$

c) $x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0 \to (x - 10)^2 + y^2 = 16 \to r = 4$

$d = \sqrt{(10 - 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{65}$

$\overline{PQ} \cdot \overline{PQ'} = \left(\sqrt{65} - 4\right) \cdot \left(\sqrt{65} + 4\right) = 65 - 16 = 49$

$\overline{PA}^2 = \left(\dfrac{38}{5} - 2\right)^2 + \left(-\dfrac{16}{5} - 1\right)^2 = \dfrac{784}{25} + \dfrac{441}{25} = 49$

121. **Dadas las rectas r: $3x + 4y + 7 = 0$ y s: $12x - 5y + 7 = 0$, ¿se puede trazar una circunferencia de centro (4, 4) que sea tangente a ambas rectas? ¿Y con centro en el punto (10, 2)? Escribe la ecuación de dicha circunferencia en el caso de que la respuesta haya sido afirmativa.**

Circunferencia de centro (4, 4):

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{3\cdot 4+4\cdot 4+7}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=7\\[2ex]\left|\dfrac{12\cdot 4-5\cdot 4+7}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}\right|=\dfrac{35}{13}\end{array}\right\}\rightarrow$$ No se puede trazar la circunferencia, ya que el centro no se encuentra a la misma distancia de las dos rectas.

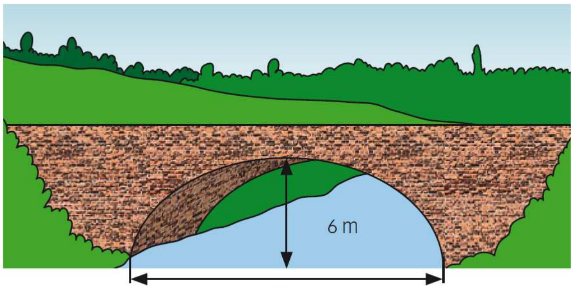
Circunferencia de centro (10, 2):

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{3\cdot 10+4\cdot 2+7}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=9\\[2ex]\left|\dfrac{12\cdot 10-5\cdot 2+7}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}\right|=9\end{array}\right\}\rightarrow$$ El centro está a la misma distancia de las dos rectas.

La ecuación de la circunferencia es:

$(x-4)^2+(y-4)^2=81 \rightarrow x^2+y^2-8x-8y-49=0$

122. El arco del puente de la figura tiene forma de media elipse con las medidas que aparecen.



¿Cuál es la ecuación de la elipse que forma el arco?

Consideramos el centro $O(0, 0)$ en el vértice de la parábola.

La ecuación de la parábola es de la forma: $x^2 = 2py$

Son puntos de la parábola: $(10, -6)$ y $(-10, -6) \rightarrow 10^2 = 2p(-6) \rightarrow p = -\dfrac{25}{3}$

Ecuación de la parábola: $x^2 = -\dfrac{50}{3}y$

123. **Dada la elipse de ecuación $9x^2 + 7y^2 - 63 = 0$, determina la longitud de la cuerda que forma esta elipse con la recta de ecuación $2x - y - 1 = 0$.**

Despejamos y en la ecuación de la recta: $y = 2x - 1$

Calculamos los puntos de intersección de la recta y la elipse sustituyendo en la ecuación de la elipse:

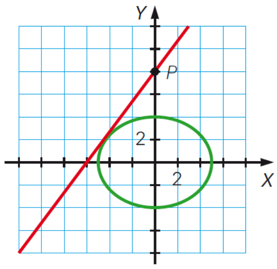
$$9x^2 + 7(2x - 1)^2 - 63 = 0 \rightarrow 37x^2 - 28x - 56 = 0 \rightarrow x = \frac{14 \pm 18\sqrt{7}}{37},\ y = \frac{-9 \pm 36\sqrt{7}}{37}$$

Los puntos son: $\left(\frac{14+18\sqrt{7}}{37}, \frac{-9+36\sqrt{7}}{37}\right)$ y $\left(\frac{14-18\sqrt{7}}{37}, \frac{-9-36\sqrt{7}}{37}\right)$

Longitud de la cuerda es la distancia entre los puntos:

$$\sqrt{\left(\frac{14+18\sqrt{7}}{37} - \frac{14-18\sqrt{7}}{37}\right)^2 + \left(\frac{-9+36\sqrt{7}}{37} - \frac{-9-36\sqrt{7}}{37}\right)^2} = \sqrt{\frac{36^2 \cdot 7}{37^2} + \frac{72^2 \cdot 7}{37^2}} = \sqrt{\frac{36^2 \cdot (1+4) \cdot 7}{37^2}} = \frac{36\sqrt{35}}{37}$$

124. **Calcula la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ que pasa por el punto $P(0, 8)$.**



(Las rectas que pasan por (0, 8) tienen como ecuación $y = mx + 8$).

$y = mx + 8$

$$\left.\begin{array}{r} 16x^2 + 25y^2 = 400 \\ y = mx + 8 \end{array}\right\} \rightarrow (16 + 25m^2)x^2 + 400mx + 1\,200 = 0$$

La recta es tangente a la elipse si la ecuación tiene solo una solución, es decir, si el discriminante de la ecuación es igual a cero.

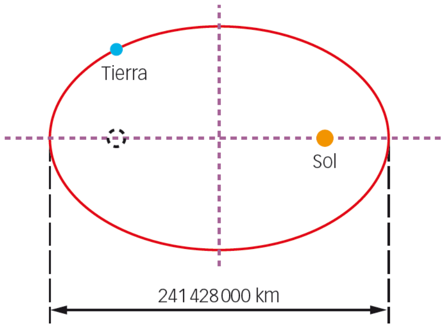
$$\Delta = 160\,000m^2 - 4\,800(16 + 25m^2) = 40\,000m^2 - 76\,800 = 0 \rightarrow m = \pm\frac{4\sqrt{3}}{5}$$

Hay dos rectas tangentes a la elipse que pasan por el punto (0, 8):

$$\begin{cases} 4\sqrt{3}x - 5y + 40 = 0 \\ 4\sqrt{3}x + 5y - 40 = 0 \end{cases}$$

125. **Los ingenieros de la NASA pretenden enviar una sonda espacial a la Luna. El departamento de ingeniería ha determinado que el mejor momento para lanzar la sonda es cuando la Tierra está en su punto más lejano del Sol.**

Determina la máxima distancia entre la Tierra y el Sol si se sabe que la órbita terrestre alrededor del Sol es una elipse, con el Sol en uno de sus focos, que la longitud del eje mayor es de 241 428 000 kilómetros y que la excentricidad de la órbita es 0,016. Determina también una ecuación de la elipse que representa la órbita de la Tierra.



$2a = 241\,428\,000 \rightarrow a = 120\,714\,000$

$e = 0{,}016 = \dfrac{c}{a} \rightarrow c = 0{,}016 \cdot 120\,714\,000 = 1\,931\,424$

La distancia máxima entre la Tierra y el Sol es cuando la Tierra se sitúa en el eje focal. Su distancia en ese punto es: $a + c = 122\,645\,424$ km

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = 14\,568\,139\,397\,332\,224$

Ecuación de la elipse: $\dfrac{x^2}{14\,571\,869\,796\,000\,000} + \dfrac{y^2}{14\,568\,139\,397\,332\,224} = 1$

126. **Halla los puntos de intersección de las siguientes cónicas.**

a) La elipse $2x^2 - 3y^2 = 6$ y la hipérbola $6x^2 + y^2 = 58$.

b) Las parábolas $y^2 = 9x$, $x^2 = \dfrac{1}{3}y$.

a) De la hipérbola se tiene: $y^2 = 58 - 6x^2$

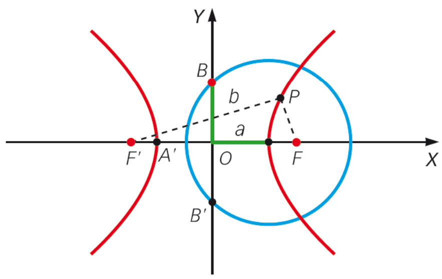
Sustituyendo en la ecuación de la elipse: $2x^2 - 3(58 - 6x^2) = 6 \rightarrow 20x^2 - 180 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

Los puntos de corte son: (3, 2), (−3, 2), (3, −2), (−3, −2)

b) $\left.\begin{array}{l} y^2 = 9x \\ 3x^2 = y \end{array}\right\} \rightarrow 9x^4 - 9x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1) = 0$

Los puntos de corte son: (0, 0) y (1, 3)

127. **Una hipérbola en la que se cumple que $a = b$ decimos que es equilátera. Supón que tiene su centro en (0, 0) y que el eje focal es horizontal. Calcula su ecuación y halla las coordenadas de los focos en función de a. Determina las ecuaciones de sus asíntotas.**



La ecuación de la hipérbola equilátera es de la forma: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow x^2 - y^2 = a^2$

Como $a = b$ y $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{2}a \rightarrow F\left(\sqrt{2}a, 0\right) \quad F'\left(-\sqrt{2}a, 0\right)$

Al ser $a = b$, las ecuaciones de las asíntotas son: $y = \pm x$

128. **Comprueba que la hipérbola cuyos focos son $\left(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ y $\left(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}\right)$ y su constante es $8\sqrt{2}$ es equilátera. Comprueba que (8, 2) está situado en esa hipérbola. Obtén su ecuación.**

$$2c = \sqrt{\left(-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\right)^2} = 16$$

$$\left.\begin{array}{r} c = 8 \\ a = 4\sqrt{2} \end{array}\right\} \rightarrow b = 4\sqrt{2}$$

Al ser $a = b$, la hipérbola es equilátera.

$$\sqrt{\left(x - 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y - 4\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{\left(x + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 4\sqrt{2}\right)^2} = 8\sqrt{2}$$

$$\rightarrow \sqrt{\left(x - 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y - 4\sqrt{2}\right)^2} = 8\sqrt{2} + \sqrt{\left(x + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 4\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow x^2 - 8\sqrt{2}x + 32 + y^2 - 8\sqrt{2}y + 32 = 128 + x^2 + 8\sqrt{2}x + 32 + y^2 +$$

$$+ 8\sqrt{2}y + 32 + 16\sqrt{2}\sqrt{\left(x + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 4\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow -16\sqrt{2}x - 16\sqrt{2}y - 128 = 16\sqrt{2}\sqrt{\left(x + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 4\sqrt{2}\right)^2}$$

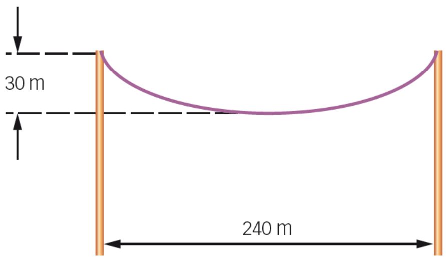
$$\rightarrow x + y + 4\sqrt{2} = -\sqrt{\left(x + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 4\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 2xy + 8\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y + 32 = x^2 + 8\sqrt{2}x + 32 + y^2 + 8\sqrt{2}y + 32$$

$\rightarrow 2xy = 32 \rightarrow xy = 16$ es la ecuación de la hipérbola.

$8 \cdot 2 = 16 \rightarrow$ (8, 2) es un punto de la hipérbola.

129. **Un cable suspendido por soportes a la misma altura, que distan 240 m entre sí, cuelga 30 m en el centro. Si el cable cuelga en forma de parábola, encuentra su ecuación colocando el origen en el punto más bajo del cable.**



Consideramos el centro $O(0, 0)$ en el vértice de la parábola. La ecuación de la parábola es de la forma: $x^2 = 2py$

Son puntos de la parábola: (120, 30) y (–120, 30) $\rightarrow 120^2 = 2p30 \rightarrow p = 240$

Ecuación de la parábola: $x^2 = 480y$

130. **Un puente como el de la imagen, construido como un arco parabólico, salva una distancia de 320 m. Si la altura del arco a 128 m del centro del puente, medida desde el apoyo de los pilares, es de 32 m, ¿cuál es la altura del arco que forma el puente en su centro?**

Consideramos el centro $O(0, 0)$ en el vértice de la parábola.

La ecuación de la parábola es de la forma: $x^2 = 2py$

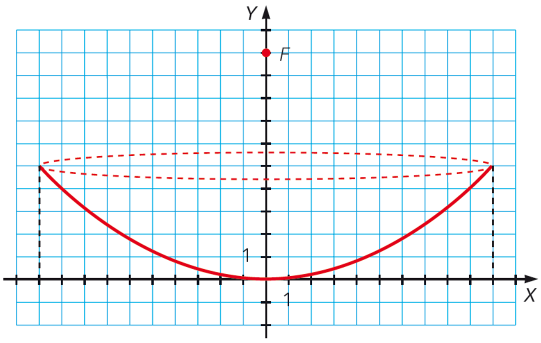
Los puntos $\left(\frac{320}{2}, -h\right) = (160, -h)$ y $(128, -(h - 32)) = (128, 32 - h)$

pertenecen a la parábola, por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} 160^2 = 2p(-h) \rightarrow p = \dfrac{25\,600}{-2h} = -\dfrac{12\,800}{h} \\ 128^2 = 2p(32 - h) \rightarrow p = \dfrac{16\,384}{2(32 - h)} = \dfrac{8\,192}{32 - h} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{12\,800}{h} = -\frac{8\,192}{32 - h} \rightarrow$$

$\rightarrow 409\,600 = 4\,608h \rightarrow h \approx 89$ m

131. **Un diseñador de una antena electromagnética parabólica de 20 m de diámetro para rastrear espacios de prueba desea ubicar el foco 10 m por arriba del vértice.**

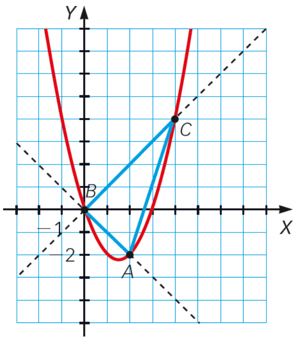


Escribe la ecuación de la parábola que forma la sección de la antena.

La ecuación de la parábola es de la forma: $x^2 = 2py$ $\qquad F(0, 10) \rightarrow p = 20$

Ecuación de la parábola: $x^2 = 40y$

132. **Las bisectrices de los cuatro cuadrantes cortan a la parábola $y = x^2 - 3x$ en tres puntos. Halla el área del triángulo que forman.**



Las bisectrices de los cuatro cuadrantes tienen como ecuaciones: $\begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = x^2 - 3x \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 4x = 0$

Los puntos de intersección son: (0, 0) y (4, 4)

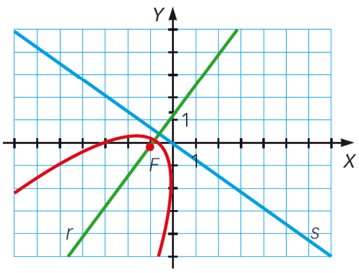
$\left.\begin{array}{l} y = -x \\ y = x^2 - 3x \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 2x = 0$

Los puntos de intersección son: (0, 0) y (2, −2)

Como el ángulo en el vértice O es recto, el área del triángulo es:

$$\frac{\overline{OA} \cdot \overline{OC}}{2} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{32}}{2} = 8 \text{ u}^2$$

133. **Como la parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta llamada directriz y un punto denominado foco, emplea la definición para calcular la ecuación de una parábola que tenga como directriz a la recta r: $3x + 4y = 0$ y cuyo foco sea el punto $F(-1, 0)$.**



$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \frac{|3x + 4y|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 1 + y^2} = \frac{|3x + 4y|}{5}$$

$$\rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = \frac{9x^2 + 16y^2 + 24xy}{25}$$

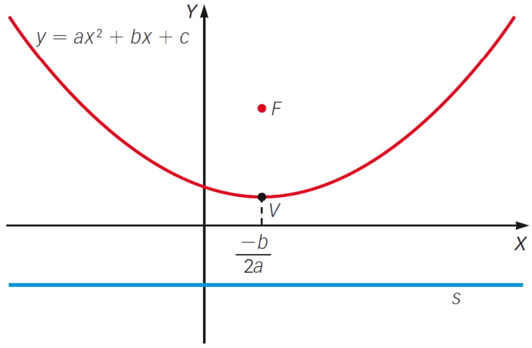
$$\rightarrow 25x^2 + 50x + 25 + 25y^2 = 9x^2 + 16y^2 + 24xy$$

$$\rightarrow 16x^2 + 9y^2 - 24xy + 50x + 25 = 0$$

134. **Halla los focos, los vértices y las directrices de las siguientes parábolas.**

a) $y = x^2 + 2x + 1$
b) $4y = -x^2 + 8x - 6$
c) $y = 4x^2 - 8x + 12$
d) $y = 6x^2 + 9x - 10$

(Recuerda que, en una parábola del tipo* y = ax² + bx + c*, la directriz es horizontal y el vértice es un punto de abscisa* $-\frac{b}{2a}$*).



a) $y = (x+1)^2$

Vértice: $(-1, 0)$ $\quad 2p = 1 \rightarrow p = \frac{1}{2} \rightarrow F\left(-1, \frac{1}{4}\right)$ $\quad$ Directriz: $y = -\frac{1}{4}$

b) $4y - 10 = -(x^2 - 8x + 16) \rightarrow -4\left(y - \frac{5}{2}\right) = (x-4)^2$

Vértice: $\left(4, \frac{5}{2}\right)$ $\quad 2p = -4 \rightarrow p = -2 \rightarrow F\left(4, \frac{3}{2}\right)$ $\quad$ Directriz: $y = \frac{7}{2}$

c) $y - 8 = 4(x^2 - 2x + 1) \rightarrow \frac{1}{4}(y-8) = (x-1)^2$

Vértice: $(1, 8)$ $\quad 2p = \frac{1}{4} \rightarrow p = \frac{1}{8} \rightarrow F\left(1, \frac{129}{16}\right)$ $\quad$ Directriz: $y = \frac{127}{16}$

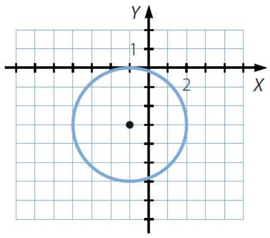
d) $y + \frac{107}{8} = 6\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) \rightarrow \frac{1}{6}\left(y + \frac{107}{8}\right) = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2$

Vértice: $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{107}{8}\right)$ $\quad 2p = \frac{1}{6} \rightarrow p = \frac{1}{12} \rightarrow F\left(-\frac{3}{4}, -\frac{40}{3}\right)$ $\quad$ Directriz: $y = \frac{-161}{12}$

135. **Decide qué tipo de cónicas son las siguientes, halla sus elementos y haz una representación gráfica aproximada.**

a) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$
b) $x^2 - 4y^2 + 16y - 32 = 0$
c) $16x^2 + 9y^2 - 32x + 54y - 47 = 0$
d) $x^2 + 6x - 4y + 17 = 0$
e) $x^2 - y^2 + 3x + 5y + 3 = 0$

a) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$
$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$
La cónica es una circunferencia de centro $C(-1, -3)$ y radio 3.



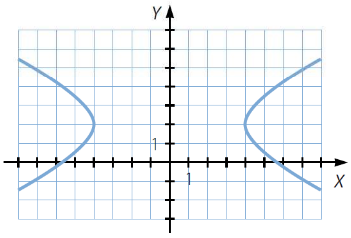
b) $x^2 - 4y^2 + 16y - 32 = 0 \rightarrow x^2 - 4(y - 2)^2 = 16 \rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$

La cónica es una hipérbola de centro $C(0, 2)$.

Como $a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \rightarrow \begin{cases} A(4, 2) \\ A'(-4, 2) \end{cases}$

Si $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{20}$

$\rightarrow \begin{cases} F\left(\sqrt{20}, 2\right) \\ F'\left(-\sqrt{20}, 2\right) \end{cases}$

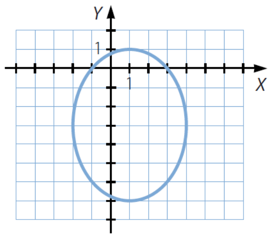


c) $16x^2 + 9y^2 - 32x + 54y - 47 = 0 \rightarrow 16(x - 1)^2 + 9(y + 3)^2 = 144$
$\rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1 \rightarrow$ La cónica es una elipse de centro $C(1, -3)$

Como $a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \rightarrow \begin{cases} A(1, 1) \\ A'(1, -7) \end{cases}$

Si $b^2 = 9 \rightarrow b = 3 \rightarrow \begin{cases} B(-2, -3) \\ B'(4, -3) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{7} \rightarrow \begin{cases} F\left(1, -3 + \sqrt{7}\right) \\ F'\left(1, -3 - \sqrt{7}\right) \end{cases}$



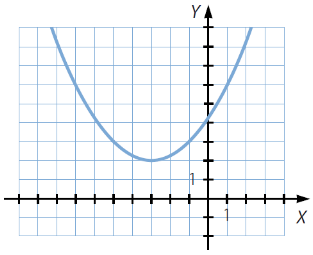
d) $x^2 + 6x - 4y + 17 = 0 \rightarrow (x + 3)^2 = 4(y - 2)$

$\rightarrow y - 2 = \dfrac{1}{4}(x + 3)^2$

La cónica es una parábola de vértice $V(-3, 2)$.

Como $2p = \dfrac{1}{4} \rightarrow p = \dfrac{1}{8} \rightarrow F\left(-3, \dfrac{17}{8}\right)$

La directriz es la recta $y = \dfrac{15}{8}$.



e) $x^2 - y^2 + 3x + 5y + 3 = 0 \rightarrow \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \left(y - \dfrac{5}{2}\right)^2 = -7 \rightarrow \left(y - \dfrac{5}{2}\right)^2 - \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 = 7$

La cónica es una hipérbola de centro $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ con eje focal paralelo al eje Y:

$a = b = \sqrt{7} \rightarrow A\left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{5}{2} + \sqrt{7}\right) = \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5 + 2\sqrt{7}}{2}\right)$, $A'\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2} - \sqrt{7}\right) = \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5 - 2\sqrt{7}}{2}\right)$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{14} \rightarrow F\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5 + 2\sqrt{14}}{2}\right)$, $F'\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5 - 2\sqrt{14}}{2}\right)$

PARA PROFUNDIZAR

136. Elige la respuesta adecuada. (Concurso de Primavera)

Hay dos circunferencias tangentes a la parte positiva de los ejes de coordenadas y tangentes exteriores a la circunferencia de centro $O(3, 0)$ y radio 1. La suma de sus radios es:	9	$\frac{17}{2}$	8	$\frac{15}{2}$	7
Las circunferencias $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0$, $x^2 + 2x + + y^2 + 2y = 18$ se cortan en puntos de la recta:	$x + y = 3$	$2x - y = 6$	$3x - 4y = 2$	$x + y = \sqrt{3}$	$3x + 2y = 9$
¿Cuál es el camino más corto que, partiendo del punto $A(2, 5)$, pasa por el eje de abscisas y acaba en algún punto de la circunferencia $(x + 6)^2 + (y - 10)^2 = 16$?	12	13	$4\sqrt{10}$	$6\sqrt{5}$	$4 + \sqrt{89}$
¿Para cuántos valores enteros k resulta que las gráficas de $x^2 + y^2 = k^2$ y $xy = k$ no se cortan?	0	1	2	4	8

- Las circunferencias son tangentes a los ejes, con lo que sus distancias a ellos es su radio (r); como son también tangentes exteriores a la circunferencia, la distancia entre sus centros es $r + 1$ (la suma de sus radios).

  Se obtiene un triángulo rectángulo; aplicando Pitágoras:

  $(r+1)^2 = (3-r)^2 + r^2 \rightarrow r^2 - 8r + 8 = 0 \rightarrow r = 4 \pm \sqrt{2} \rightarrow$ Su suma es 8.

- Se resuelve el sistema que forma la intersección de las dos circunferencias:

  $$\left.\begin{array}{l} x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0 \\ x^2 + 2x + y^2 + 2y - 18 = 0 \end{array}\right\}$$

  Si se resta la segunda ecuación a la primera se obtiene la recta:

  $3x + 2y = 9$

- Distancia mínima: $\sqrt{5^2 + 2^2} + \sqrt{10^2 + 6^2} - 4 = \sqrt{29} + \sqrt{136} - 4 \approx 13$

- Se resuelve sistema formado por las dos ecuaciones para hallar su intersección:

  De la segunda ecuación se obtiene $y = \frac{k}{x}$. Se sustituye en la primera:

  $x^2 + \left(\frac{k}{x}\right)^2 = k^2 \rightarrow x^4 - k^2x^2 + k^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{k^2 \pm \sqrt{k^4 - 4k^2}}{2} \rightarrow$ No tiene solución si $k^4 - 4k^2 < 0 \rightarrow k^2 < 4$

  Los valores enteros que cumplen esta condición son el 1 y el –1. El 0 no cuenta, pues en ambas ecuaciones resulta el origen. Por tanto, la respuesta sería 2.

137. Dados los puntos $A(2,1)$ y $B(6, 4)$, determina el lugar geométrico de los puntos P tales que el área del triángulo ABP sea 10 unidades cuadradas.

$d(A, B) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Si el área del triángulo mide 10, entonces la altura debe medir 4.

Sea r es la recta determinada por A y por B: $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} \rightarrow 3x - 4y - 2 = 0$

$d(P, r) = 4 \rightarrow \frac{|3x - 4y - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4 \rightarrow \begin{cases} 3x - 4y - 2 = 20 \\ -3x + 4y + 2 = 20 \end{cases}$

El lugar geométrico está formado por dos rectas paralelas: $\begin{cases} 3x - 4y - 22 = 0 \\ 3x - 4y + 18 = 0 \end{cases}$

138. Describe el lugar geométrico de los puntos que verifican la siguiente ecuación.

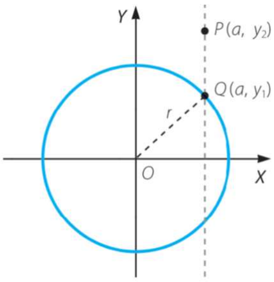
$$x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$$

$x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0 \rightarrow (x^2 - 4x + 4) - (y^2 - 6y + 9) - 5 = 4 - 9$

$$\rightarrow (x-2)^2 - (y-3)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = y - 3 \\ x - 2 = -y + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por dos rectas perpendiculares.

139. Considera un punto *Q* de una circunferencia con centro en el origen y radio *r*, y otro punto *P* con la misma abscisa que *Q*. Halla el lugar geométrico de los puntos *P*, sabiendo que la razón de las ordenadas de *P* y *Q* es *k*.



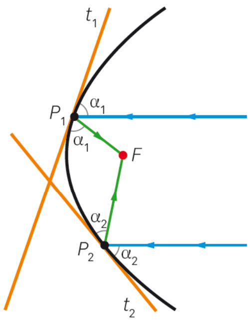
Tenemos que $Q(a, y_1)$ cumple $a^2 + y_1^2 = r^2 \rightarrow y_1 = \sqrt{r^2 - a^2}$.

Sabemos que $y_2 = ky_1$, con $k \neq 0$. Sustituyendo, obtenemos:

$$y_2 = k \cdot \sqrt{r^2 - a^2} \rightarrow a^2 + \frac{y_2^2}{k^2} = r^2 \rightarrow \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{kr}\right)^2 = 1 \rightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{kr}\right)^2 = 1$$

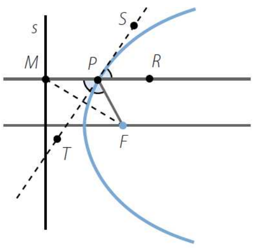
Por lo que el lugar geométrico pedido sería una elipse con un semieje de longitud el radio de la circunferencia el otro de longitud la constante *k* multiplicada por el radio.

140. Si una señal incide sobre una antena parabólica en dirección perpendicular a su directriz, esta se refleja como si chocara contra la recta tangente en ese punto.



Demuestra que el rayo reflejado pasa siempre por el foco de la parábola.

Esta propiedad es la que confiere su utilidad a las antenas parabólicas, puesto que concentran la señal en un solo punto, el foco.



Se considera un punto *F*, una recta *s* y un punto *M* que pertenezca a ella.

Si se traza la perpendicular a *d* que pasa por *M*, esta recta corta a la mediatriz del segmento *MF* en un punto *P*, que pertenece a la parábola de foco *F* y directriz *s* por ser $\overline{MP} = \overline{PF}$. Como la recta es perpendicular, la medida del segmento *MP* coincide con la distancia del punto *P* a la recta *s*.

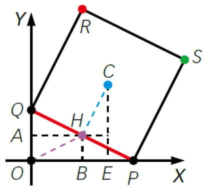
Esta mediatriz es la tangente a la parábola de foco *F* y directriz *s*. Además, los ángulos $\widehat{RPS}$ y $\widehat{FPT}$ son iguales, por ser los ángulos que forman el rayo que incide y el rayo que se refleja. Y por ser opuestos por el vértice, los ángulos $\widehat{MPT}$ y $\widehat{TPF}$ también son iguales.

Por tanto, un rayo que incide perpendicularmente a la directriz se refleja pasando por el foco *F*.

141. **Deslizamos un cuadrado de 10 cm de lado por el plano *XY* de forma que los vértices de uno de sus lados estén siempre en contacto con los ejes de coordenadas, uno con el eje *X* y otro con el eje *Y*. Determina el lugar geométrico que en ese movimiento describen:**

a) El punto medio de lado de contacto con los ejes.
b) El centro del cuadrado.
c) Los vértices del lado de contacto y del opuesto en el primer cuadrante.

(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)



a) Sea $L(x, y)$ un punto de ese lugar geométrico:

Como es el punto medio del segmento $PQ \rightarrow P(2x, 0)$ y $Q(0, 2y)$

Se aplica Pitágoras al triángulo OPQ:

$$d(O, Q) = \sqrt{10^2 - 4x^2} \rightarrow y = \frac{\sqrt{10^2 - 4x^2}}{2} \rightarrow 4y^2 = 100 - 4x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

El lugar geométrico es una circunferencia de centro (0, 0) y radio 5.

b) Sea $L(x, y)$ un punto de ese lugar geométrico:

Como es el centro del rectángulo la distancia $d(C, P) = d(C, Q) = \frac{\text{Diagonal}}{2}$

Aplicando Pitágoras al cuadrado se obtiene: $\text{Diagonal} = 10\sqrt{2} \rightarrow \frac{\text{Diagonal}}{2} = 5\sqrt{2}$

Aplicando Pitágoras al triángulo CEP: $d(E, P) = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - y^2}$

Se aplica lo mismo para el triángulo con base en el eje Y, con lo que:

$$\sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - y^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - x^2} \rightarrow \left(5\sqrt{2}\right)^2 - y^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 - x^2 \rightarrow x^2 = y^2$$

Las coordenadas del centro del cuadrado son iguales moviéndose este en un segmento de las bisectrices de los cuadrantes:

$C(c_1, c_2) = (\pm 5\alpha, \pm 5\alpha)$ siendo $\alpha \in \left[1, \sqrt{2}\right]$.

c)
- Vértice Q: su lugar geométrico es la recta: $x = 0$ en el intervalo $[-10, 10]$.
- Vértice P: su lugar geométrico es la recta: $y = 0$ en el intervalo $[-10, 10]$.
- Vértice R:

  Sea $L(x, y)$ un punto del lugar geométrico. Se aplica Pitágoras a los triángulos rayados del dibujo para obtener los lados del triángulo sombreado.

  Se aplica en él Pitágoras de nuevo: $100 = \left(y - \sqrt{100 - x^2}\right)^2 + \left(x - \sqrt{200 - y^2}\right)^2$

  El lugar geométrico es la ecuación: $2x\sqrt{200 - y^2} + 2y\sqrt{100 - x^2} - 300 = 0$

- Vértice S:

  Sea $L(x, y)$ un punto del lugar geométrico. Se aplica Pitágoras a los triángulos rayados del dibujo para obtener los lados del triángulo sombreado.

  Se aplica en él Pitágoras de nuevo: $100 = \left(y - \sqrt{200 - x^2}\right)^2 + \left(x - \sqrt{100 - y^2}\right)^2$

  El lugar geométrico es la ecuación: $2y\sqrt{200 - x^2} - 2x\sqrt{100 - y^2} + 300 = 0$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **¿Qué es una antena parabólica y cuáles son sus usos?**

Una antena parabólica es una superficie metálica con forma de paraboloide de revolución que sirve de reflector de las señales y un elemento radiante situado en el foco que recibe las señales reflectadas.

Usos: televisión vía satélite.

2. **Explica cómo se forma un paraboloide de revolución. ¿Es una figura plana?**

Se forma al girar una parábola alrededor de un eje.

No es una figura plana, es tridimensional.

3. **Explica la propiedad que permite a las antenas parabólicas recibir y emitir de manera óptima señales vía satélite.**

Al ser parabólicas reflejan las señales transmitidas que inciden paralelas al eje y se concentran en el foco, donde son convertidas por un receptor al formato adecuado.

4. **Enumera algunas ventajas e inconvenientes de usar antenas parabólicas en Internet.**

- Ventajas: inalámbrico; accesible para personas que no pueden optar a otra tecnología.
- Inconvenientes: la recepción puede alterarse según las condiciones meteorológicas; la velocidad puede ser más lenta si se envía o recibe señal a largas distancias; pueden ser algo más caras que otras tecnologías.

5. **Si una antena parabólica mide 1 m de diámetro en su abertura y el receptor, ubicado en el foco, está a 25 cm del vértice, ¿qué profundidad tiene?**

La ecuación de la parábola es de la forma: $x^2 = 2py$

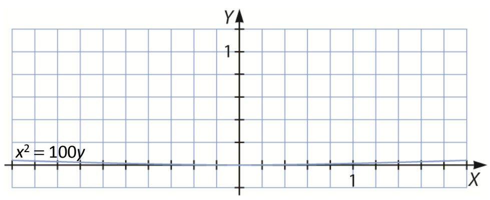
$F(0, 25) \longrightarrow p = 50 \longrightarrow x^2 = 100y$

Como el diámetro es 1 m = 100 cm, uno de los extremos es $x = 50$ cm:

$50^2 = 100y \longrightarrow y = 25$ cm

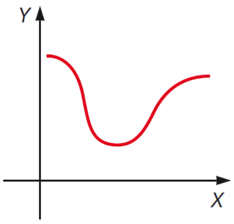
La profundidad de la parábola es de 25 centímetros.

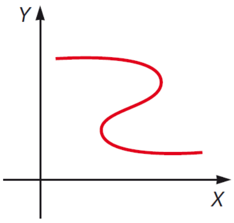
6. **Dibuja la gráfica de la parábola que genera la antena de la actividad anterior al girar sobre su eje.**



ACTIVIDADES

1. Justifica si las siguientes gráficas corresponden a funciones.

a) 

b) 

a) La gráfica corresponde a una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

b) La gráfica no corresponde a una función, porque hay valores de x a los que les corresponden varios valores de y.

2. Indica, en cada caso, si la relación entre las dos magnitudes es una función o no.

a) La cantidad de fruta que compra una familia, en kilos, y el número de piezas de fruta que se lleva.

b) La cantidad de fruta que compra una familia, en kilos, y el precio de la compra.

c) La cantidad de fruta que compra una familia, en kilos, y el precio de un kilo de fruta.

a) No se trata de una función, ya que el tamaño y el peso de cada fruta varía.

b) Es una función, ya que para cada cantidad de fruta comprada hay un único precio según el peso en kilos.

c) No es una función.

3. Determina el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 9}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

e) $f(x) = \cos(x + 1)$

f) $f(x) = \sqrt{3x - 1}$

g) $f(x) = \log(x - 16)$

h) $f(x) = e^{x^2 - 1}$

a) Dom $f = \mathbb{R}$

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

c) Dom $f = \mathbb{R}$

d) Dom $f = \mathbb{R}$

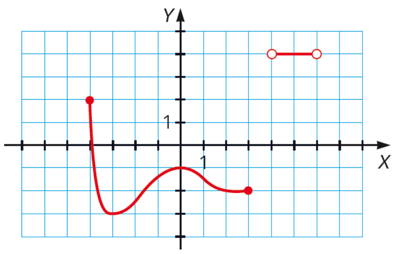
e) Dom $f = \mathbb{R}$

f) Dom $f = \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$

g) Dom $f = (16, +\infty)$

h) Dom $f = \mathbb{R}$

4. Halla el dominio y el recorrido de la función cuya gráfica es la siguiente.



Dom $f = [-4, 3] \cup (4, 6)$

Im $f = [-3, 2] \cup \{4\}$

5. Estudia la simetría de las siguientes funciones.

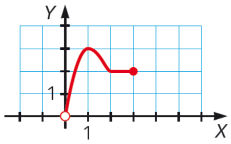
a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{x^2}$ c) $f(x) = \dfrac{x^4 - 5}{3x^2}$

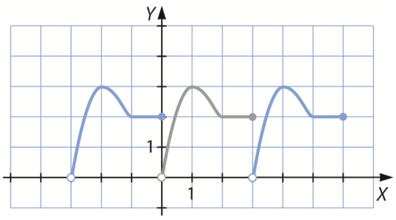
a) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 1}{2(-x)} = \dfrac{x^2 - 1}{-2x} = -\dfrac{x^2 - 1}{2x} = -f(x) \rightarrow f(x)$ es impar.

b) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 6(-x) - 7}{(-x)^2} = \dfrac{x^2 + 6x - 7}{x^2} \rightarrow f(x)$ no es par ni impar.

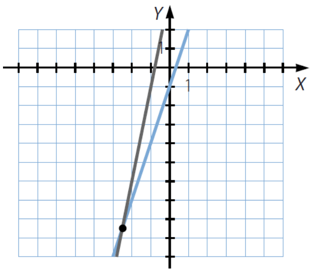
c) $f(-x) = \dfrac{(-x)^4 - 5}{3(-x)^2} = \dfrac{x^4 - 5}{3x^2} = f(x) \rightarrow f(x)$ es par.

6. Completa la gráfica de esta función periódica de período 3.





7. Representa, sobre los mismos ejes, las funciones $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = 5x + 4$. Halla su punto en común.



El punto de intersección es:

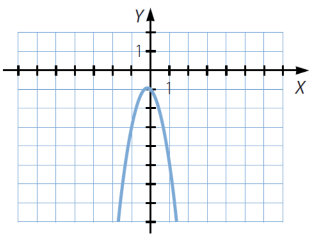
$\left(-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{17}{2}\right)$

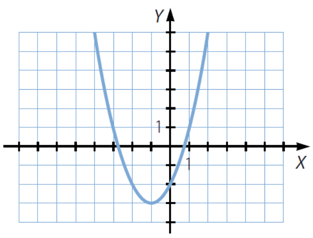
8. Representa gráficamente estas funciones cuadráticas.

a) $f(x) = -3x^2 - x - 1$ b) $f(x) = x^2 + 2x - 2$

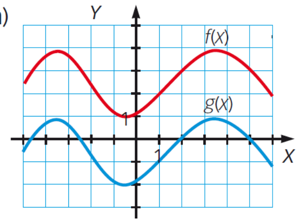
a) $V\left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{11}{12}\right)$

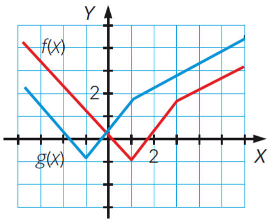
b) $V(-1, -3)$





9. **Teniendo en cuenta la gráfica de $f(x)$, expresa $g(x)$ utilizando $f(x)$.**

a) 

b) 

a) $g(x) = f(x) - 3$

b) $g(x) = f(x + 2)$

10. **Representa gráficamente esta función.**

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

A partir de ella, representa las siguientes funciones:

a) $g(x) = x^2 - 2x + 3$
b) $h(x) = x^2 - 2x - 2$
c) $i(x) = (x - 1)^2 - 2(x - 1) + 1$
d) $j(x) = x^2 + 2x + 1$
e) $k(x) = -x^2 + 2x - 1$

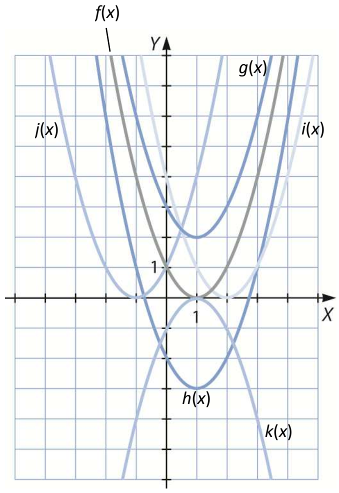
a) $g(x) = f(x) + 2$

b) $h(x) = f(x) - 3$

c) $i(x) = f(x - 1)$

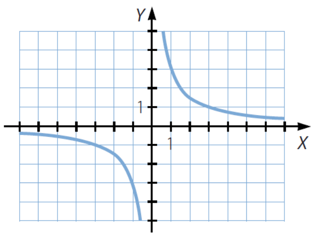
d) $j(x) = f(-x)$

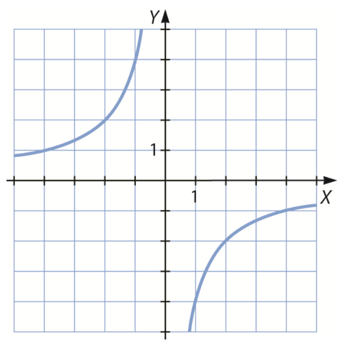
e) $k(x) = -f(x)$

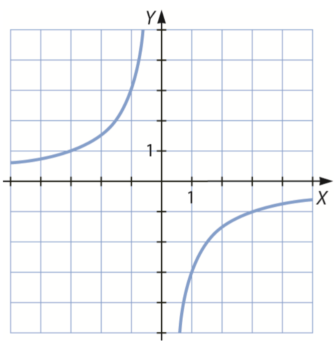


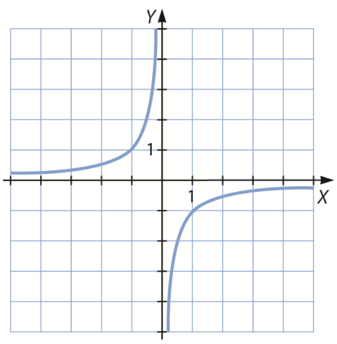
11. **Representa gráficamente estas funciones.**

a) $f(x) = \frac{3}{x}$ b) $f(x) = -\frac{3}{x}$ c) $f(x) = \frac{-4}{x}$ d) $f(x) = \frac{-1}{x}$

a) 

c) 

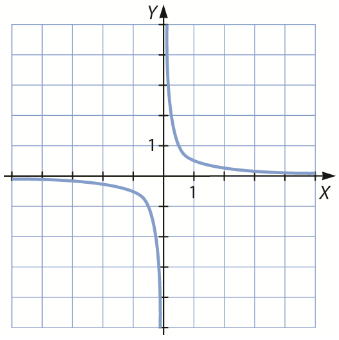
b) 

d) 

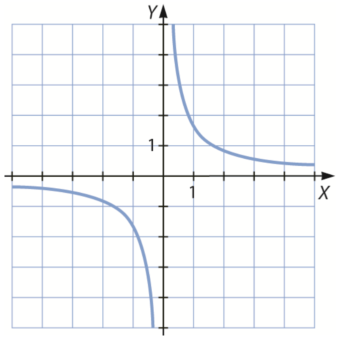
12. **Representa gráficamente las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$ b) $f(x) = -\dfrac{1}{2x}$ c) $f(x) = \dfrac{5}{3x}$ d) $f(x) = \dfrac{-2}{5x}$

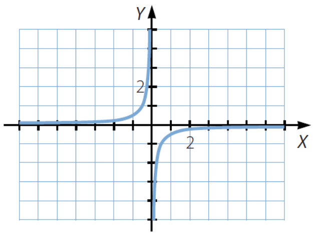
a)



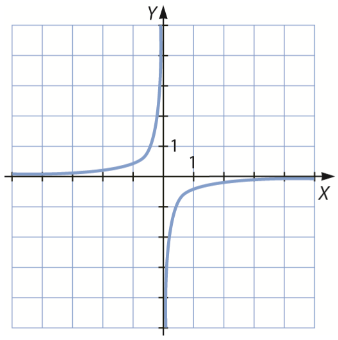
c)



b)



d)



13. **Halla el dominio de las funciones con radicales.**

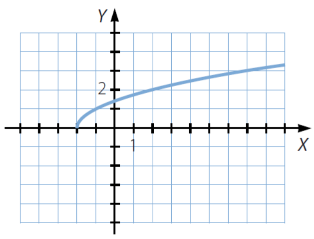
a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 36}$

a) Dom $f = \mathbb{R}$ b) Dom $f = (-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$

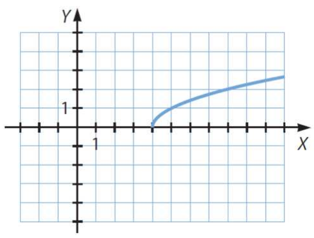
14. **Representa gráficamente estas funciones.**

a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ b) $f(x) = \sqrt{x - 4}$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

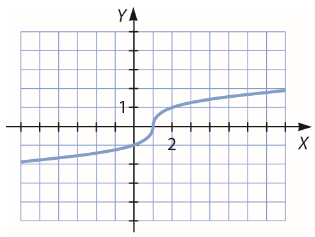
a)



b)



c)



15. **Calcula la función inversa de las funciones que aparecen a continuación.**

a) $f(x) = -\dfrac{x}{2} + 1$ c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2} - 2}$

b) $f(x) = -x^2 + 4$ d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

a) $x = -\dfrac{y}{2} + 1 \rightarrow f^{-1}(x) = -2x + 2$ c) $x = \sqrt{\dfrac{y}{2} - 2} \rightarrow f^{-1}(x) = 2x^2 + 4$

b) $x = -y^2 + 4 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x}$ d) $x = \sqrt[3]{y^2 - 1} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

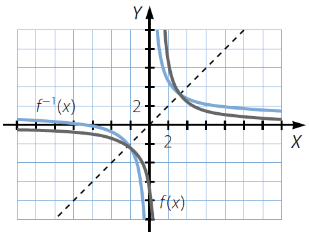
16. **Averigua cuál es la función inversa de $f(x) = \dfrac{7 + x}{x}$ y realiza lo siguiente.**

a) Representa las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

b) Comprueba si sus gráficas son simétricas respecto a la recta $y = x$.

$$y = \frac{7 + x}{x} \rightarrow xy = 7 + x \rightarrow xy - x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{y - 1} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{7}{x - 1}$$

a)



b) Las funciones son simétricas respecto a la recta $y = x$.

17. **Razona, sin hacer la gráfica, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.**

a) $f(x) = 1{,}2^x$

b) $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

c) $f(x) = 0{,}8^x$

d) $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$

a) Creciente, pues $a > 1$.

b) Decreciente, pues $a < 1$.

c) Decreciente, pues $a < 1$.

d) Creciente, pues $a > 1$.

18. **Representa gráficamente estas funciones.**

a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = -(3^x)$

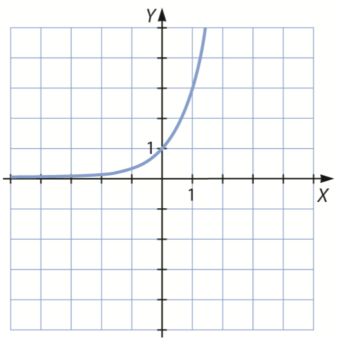
c) $f(x) = 3^{-x}$

d) $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

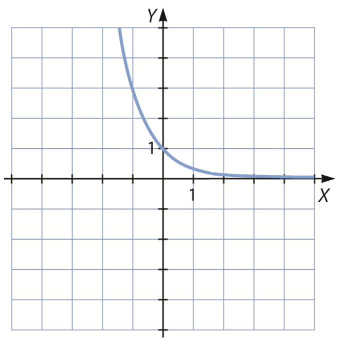
e) $f(x) = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^x$

f) $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-x}$

a)

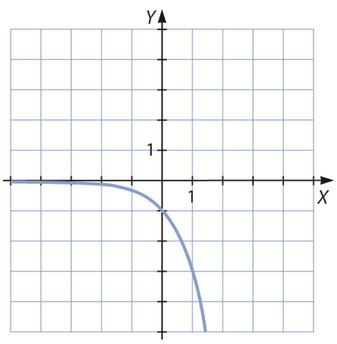


c)

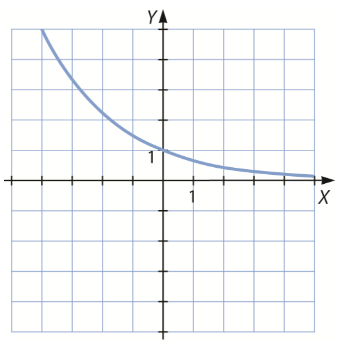


e) $a < 0 \rightarrow$ no se puede representar.

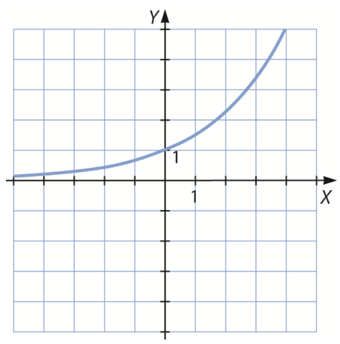
b)



d)



f)



19. **Razona, sin hacer la gráfica, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.**

a) $f(x) = \log_{1,2} x$ c) $f(x) = \log_7 x$ e) $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$

b) $f(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$ d) $f(x) = \log_{0,8} x$ f) $f(x) = \log_{8,2} x$

a) Creciente, pues $a > 1$.

b) Decreciente, pues $a < 1$.

c) Creciente, pues $a > 1$.

d) Decreciente, pues $a < 1$.

e) Creciente, pues $a > 1$.

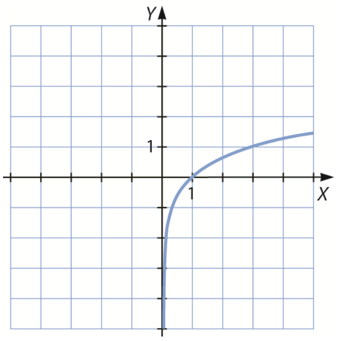
f) Creciente, pues $a > 1$.

20. **Representa gráficamente las funciones que aparecen a continuación.**

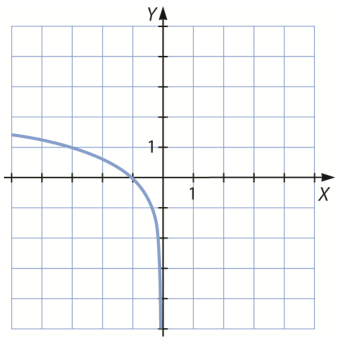
a) $f(x) = \log_3 x$ c) $f(x) = \log_3 (-x)$ e) $f(x) = -\log_3 (-x)$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ d) $f(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x$ f) $f(x) = -\log_{\frac{1}{3}}(-x)$

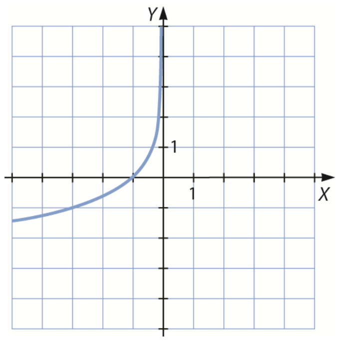
a)



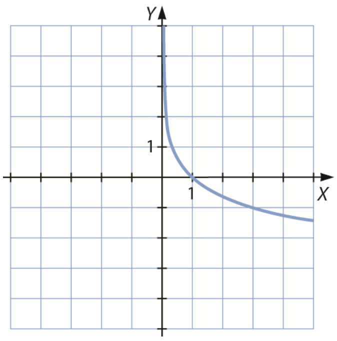
c)



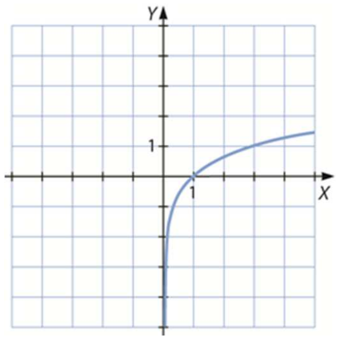
e)



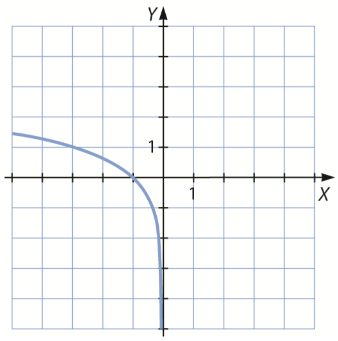
b)



d)



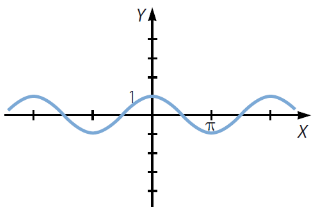
f)



21. **Representa gráficamente estas funciones.**

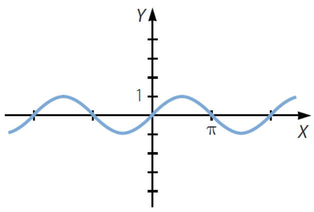
a) $f(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ b) $f(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

a)



$f(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cos\ x$

b)

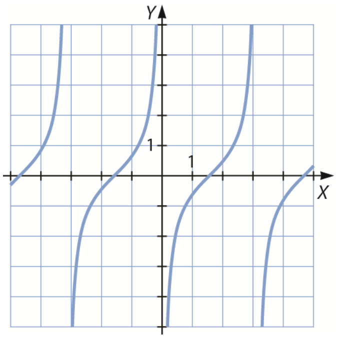


$g(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = sen\ x$

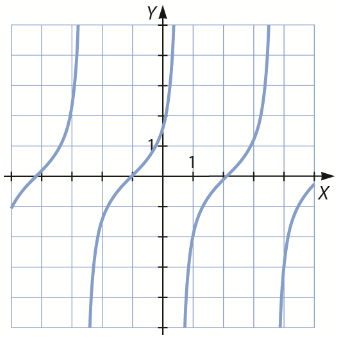
22. **Representa estas funciones.**

a) $f(x) = tg\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ b) $f(x) = tg\,(x + 1)$

a)



b)



23. **Calcula las siguientes expresiones.**

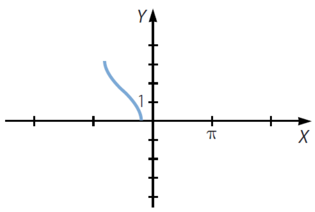
a) $arc\ sen\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $arc\ cos\ 0$ c) $arc\ tg\,(-1)$

a) $arc\ sen\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ b) $arc\ cos\ 0 = \frac{\pi}{2}$ c) $arc\ tg\,(-1) = -\frac{\pi}{4}$

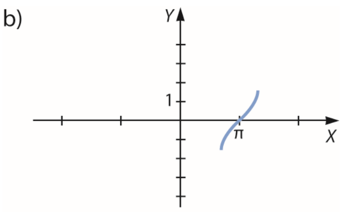
24. **Representa gráficamente estas funciones.**

a) $f(x) = arc\ cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ b) $f(x) = arc\ sen\,(x - \pi)$

a)



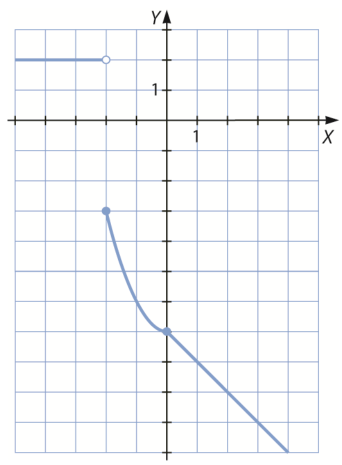
b)



25. **Representa gráficamente esta función definida a trozos.**

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ x^2 - 7 & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ -7 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Describe sus principales características.



- Primer intervalo $(-\infty, -2)$:

  $f(x) = 2 \longrightarrow$ Recta horizontal, paralela al eje X en $y = 2$ con extremo en $(-2, 2)$.

- Segundo intervalo $[-2, 0]$:

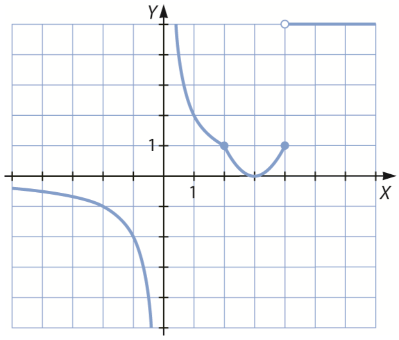
  $f(x) = x^2 - 7 \longrightarrow$ Parábola con mínimo $(a = 1 > 0)$ en el vértice $(0, -7)$ y con extremos en $(-2, -3)$ y $(0, -7)$.

- Tercer intervalo $(0, +\infty)$:

  $f(x) = -7 - x \longrightarrow$ Recta decreciente $(m = -1 < 0)$ con extremo en $f(0) = (0, -7)$.

26. **Representa la gráfica de esta función describiendo sus principales características**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 9 & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ 5 & \text{si } x < 4 \end{cases}$$



- Primer intervalo $(-\infty, 2]$:

  $f(x) = \dfrac{x}{2} \longrightarrow$ Decreciente en ese intervalo, con extremo en (2, 1).

- Segundo intervalo (2, 4]:

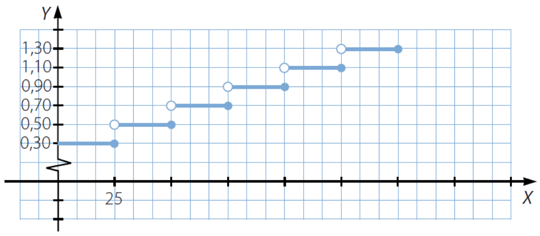
  $f(x) = x^2 - 6x + 9 \longrightarrow$ Parábola con mínimo ($a = 1 > 0$) en el vértice (3, 0) y con extremos en (2, 1) y (4, 1).

- Tercer intervalo $(4, +\infty)$:

  $f(x) = 5 \longrightarrow$ Recta horizontal, paralela al eje X en $y = 5$ con extremo en (4, 5).

27. **El servicio de correos cobra 0,30 € por los primeros 25 g de envío y, a partir de esa cantidad, cobra 0,20 € por cada 25 g (o fracción) de peso extra. Representa la gráfica del coste del envío de cartas hasta 150 g.**

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}30 \text{ si } x \in (0, 25] \\ 0{,}30 + 0{,}20 \text{ si } x \in (25, 50] \\ 0{,}30 + 0{,}20 \cdot 2 \text{ si } x \in (50, 75] \\ \ldots \end{cases} \rightarrow f(x) = 0{,}30 + 20 \cdot \left[\frac{x}{25}\right]$$



28. **La función que asocia a cada número su parte decimal es:**

$$f(x) = x - [x]$$

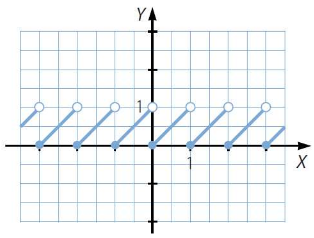
Representa la función y analiza sus propiedades.

Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = [0, 1)$

La función no es continua. Todos los números enteros son puntos de discontinuidad inevitable de salto finito.

Es periódica, de período 1. No es simétrica.

Es creciente en $(k, k + 1)$, siendo $k \in \mathbb{Z}$.
No tiene máximos ni mínimos.



29. **Determina el valor de las siguientes funciones en el punto $x = -2$, teniendo en cuenta que:**

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \qquad g(x) = 3x^2 - 1$$

a) $(f - g)(x)$
b) $(f \cdot g)(x)$
c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

a) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x}{x+1} - (3x^2-1) = \frac{-3x^3-3x^2+2x+1}{x+1} \rightarrow (f-g)(-2) = \frac{-3(-2)^3-3(-2)^2+2(-2)+1}{(-2)+1} = -9$

b) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)(3x^2-1) = \frac{3x^3-x}{x+1} \rightarrow (f \cdot g)(-2) = \frac{3(-2)^3-(-2)}{(-2)+1} = 22$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x}{x+1}}{3x^2-1} = \frac{x}{3x^3+3x^2-x-1} \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{(-2)}{3(-2)^3+3(-2)^2-(-2)-1} = \frac{2}{11}$

30. **Halla el valor de las siguientes funciones en los puntos que se indican, teniendo en cuenta que:**

$$f(x) = \sqrt{x^5} \qquad g(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$$

a) $(f \cdot g)(4)$
b) $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$
c) $(f^2)(2)$

a) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x^5} \cdot \frac{x^2+3}{x+1} \rightarrow (f \cdot g)(4) = \sqrt{4^5} \cdot \frac{4^2+3}{4+1} = \sqrt{(2)^{2 \cdot 5}} \cdot \frac{19}{5} = \frac{608}{5}$

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x^5}}{\frac{x^2+3}{x+1}} = \frac{(x+1)\sqrt{x^5}}{x^2+3}$

No existe $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$, porque $\sqrt{(-1)^5}$ no es real por ser el radicando negativo.

c) $(f^2)(x) = \left(\sqrt{x^5}\right)^2 = x^5 \rightarrow (f^2)(2) = 2^5 = 32$

31. **Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{2x-1}$, calcula el valor de las composiciones que aparecen a continuación en $x = 2$.**

a) $(f \circ g)(x)$
b) $(g \circ f)(x)$
c) $(f \circ f)(x)$
d) $(g \circ g)(x)$

a) $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$

b) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = \frac{1}{7}$

c) $(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(4) = 16$

d) $(g \circ g)(2) = g(g(2)) = g\left(\frac{1}{3}\right) = -3$

32. **Si $f(x) = \sqrt{2x^3}$ y $g(x) = x - 4$, halla el valor de las siguientes funciones en los puntos indicados, determinando primero la composición de funciones.**

a) $(f \circ g)(5)$
b) $(g \circ f)(5)$

Justifica, a partir de los resultados, si la composición de funciones es conmutativa.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-4) = \sqrt{2(x-4)^3}$

$(f \circ g)(5) = \sqrt{2}$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{2x^3}\right) = \sqrt{2x^3} - 4$

$(g \circ f)(5) = \sqrt{250} - 4 = 5\sqrt{10} - 4$

$(f \circ g)(5) \neq (g \circ f)(5) \rightarrow$ La composición de funciones no es conmutativa.

SABER HACER

33. **Calcula el dominio de $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x+3}$.**

$\dfrac{1}{x}$ está definida en $x \neq 0$.

$\sqrt{x+3}$ está definida en $x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3$.

Dom $f = [-3, 0) \cup [0, +\infty) = [-3, +\infty) - \{0\}$

34. **Determina el período de $f(x) = \cos 2x$.**

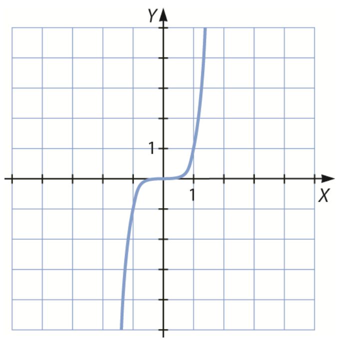
$\cos x = \cos(x + 2\pi) \rightarrow f(x) = \cos 2x = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2(x + \pi)) = f(x + \pi) \rightarrow$ Período $= \pi$

35. **Representa gráficamente estas funciones.**

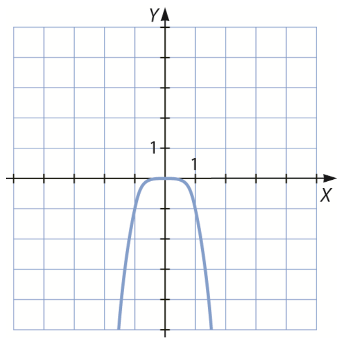
a) $f(x) = x^5$

b) $f(x) = -x^4$

a)



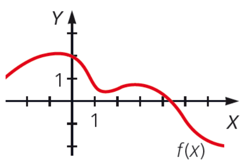
b)



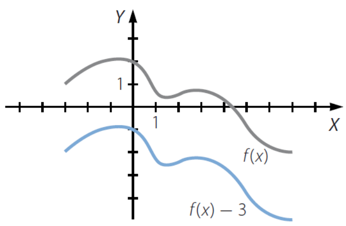
36. **A partir de la gráfica de $f(x)$, representa:**

a) $g(x) = f(x) - 3$

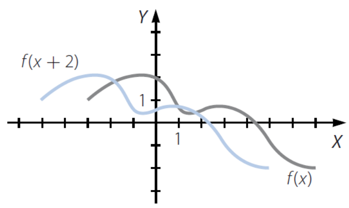
b) $g(x) = f(x + 2)$



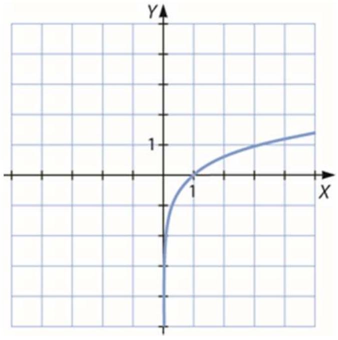
a)



b)



37. **Representa la función $f(x) = 2 \log x$.**

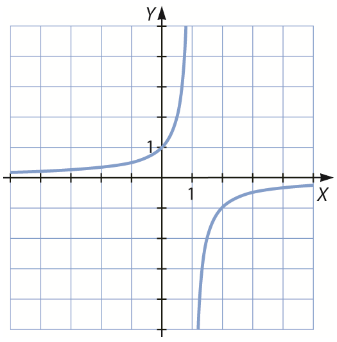


38. **Representa gráficamente las siguientes funciones.**

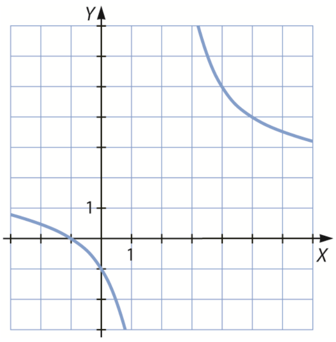
a) $f(x) = \dfrac{-1}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-2}$

a) $f(x) = -g(x-1)$ con $g(x) = \dfrac{1}{x}$



b) $f(x) = 2 + \dfrac{6}{x-2} \rightarrow g(x) = \dfrac{6}{x} \rightarrow f(x) = 2 + g(x-2)$



39. **Representa la gráfica de las funciones inversas de estas funciones.**

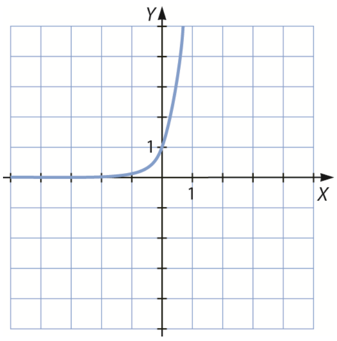
a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \log(x-1)$

a) $y = x^2 \rightarrow x = y^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{x} \rightarrow f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$

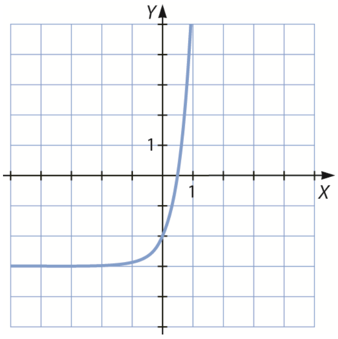
No es una función, ya que para cada valor de x, se tienen dos valores y.

b) $y = \log x \rightarrow x = \log y \rightarrow 10^x = y \rightarrow f^{-1}(x) = 10^x$



40. **Representa gráficamente la función exponencial $f(x) = 3^{2x} - 3$.**

$g(x) = 9^x \rightarrow f(x) = g(x) - 3$

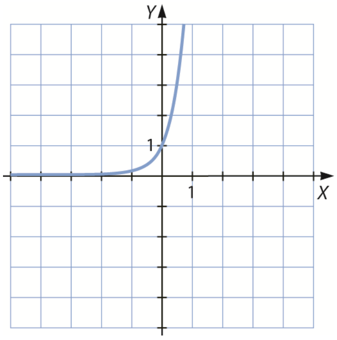


41. **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.**

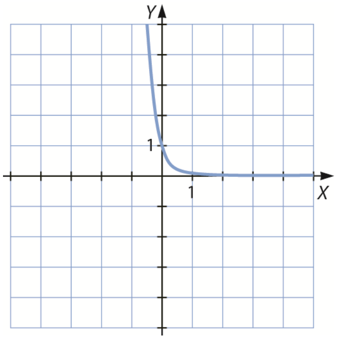
a) $f(x) = 3^{2x}$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3x}$

a) $f(x) = 9^x$

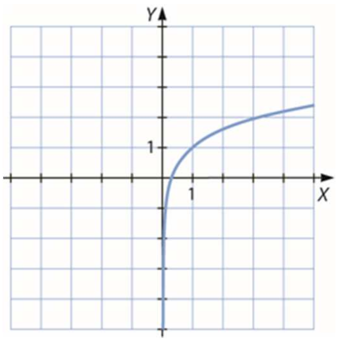


b) $f(x) = \left(\frac{1}{27}\right)^x$



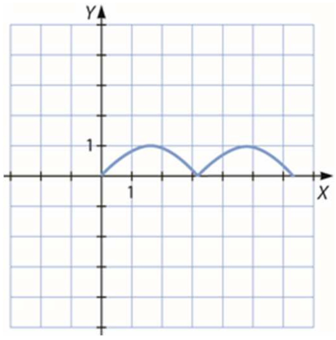
42. **Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \log 10x^2$.**

$f(x) = \log 10x^2 = \log 10 + 2 \log x = 1 + 2 \log x$



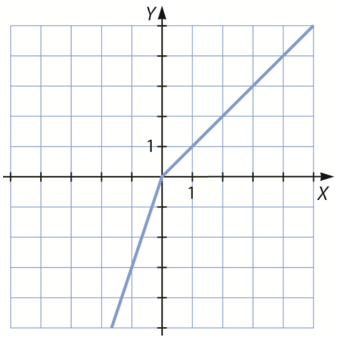
43. **Dibuja la gráfica de la función $f(x) = |sen\ x|$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.**

$$f(x) = \begin{cases} sen\ x & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -sen\ x & \text{si } x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$



44. **Dibuja la gráfica de la función $f(x) = 2x - |x|$.**

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 3x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



45. **Expresa estas funciones como composición de funciones más sencillas.**

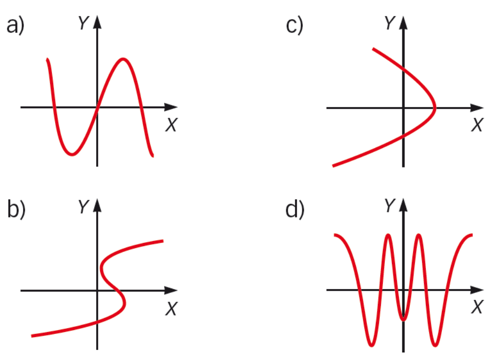
a) $f(x) = sen^2(x^2 + 1)$ b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$

a) $f_1(x) = x^2 + 1$ $f_2(x) = sen\ x$ $f_3(x) = x^2 \rightarrow f(x) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$

b) $f_1(x) = x - 1$ $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$ $f_3(x) = \sqrt{x} \rightarrow f(x) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$

ACTIVIDADES FINALES

46. **Di si estas gráficas corresponden a una función.**



a) La gráfica corresponde a una función porque a cada valor de *x* le corresponde un único valor de *y*.

b) La gráfica no corresponde a una función porque hay valores de *x* a los que les corresponden dos valores de *y*.

c) La gráfica no corresponde a una función porque hay valores de *x* a los que les corresponden dos valores de *y*.

d) La gráfica corresponde a una función porque a cada valor de *x* le corresponde un único valor de *y*.

47. Observa estos ejemplos de tarificación telefónica.

- **Establecimiento de llamada 0,15 € y 3 cént. el minuto o fracción.**
- **Cada minuto o fracción 5 cént.**
- **Cada minuto o fracción entre semana 4 cént., y si es fin de semana, 3 cént.**

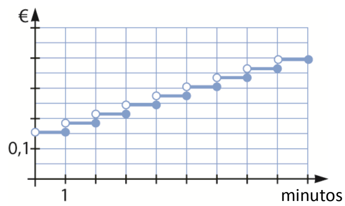
Completa una tabla como esta para cada tipo de tarificación y determina si definen una función. En caso afirmativo, dibuja su gráfica.

Minutos	1	5	7	9	12
Precio (€)					

- Tarificación 1:

Minutos	1	5	7	9	12
Precio (€)	0,18	0,30	0,36	0,42	0,51

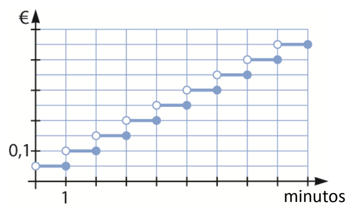
Corresponde a una función porque por cada duración de la llamada le corresponde un único precio.



- Tarificación 2:

Minutos	1	5	7	9	12
Precio (€)	0,05	0,25	0,35	0,45	0,60

Corresponde a una función porque por cada duración de la llamada le corresponde un único precio.



- Tarificación 3:
  - Entre semana:

Minutos	1	5	7	9	12
Precio (€)	0,04	0,20	0,28	0,36	0,48

– Fin de semana:

Minutos	1	5	7	9	12
Precio (€)	0,03	0,15	0,21	0, 27	0,36

No corresponde a una función porque a cada duración de la llamada le corresponden dos precios, dependiendo del día de la semana en el que se realice la llamada.

48. Comprueba si los puntos $x = -3$, $x = 0$, $x = 2$ pertenecen al dominio de estas funciones.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 3x}$

c) $f(x) = \sqrt{-2x + 1}$

d) $f(x) = \ln(-x - 4)$

a) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} \rightarrow$ Los tres puntos pertenecen al dominio de la función.

b) $x^2 + 3x = 0 \rightarrow \text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0, -3\} \rightarrow$ Solo $x = 2$ pertenece al dominio de la función.

c) $-2(-3) + 1 = 7 > 0 \rightarrow x = -3$ pertenece al dominio.

$0 + 1 = 1 > 0 \rightarrow x = 0$ pertenece al dominio.

$-2 \cdot 2 + 1 = -3 < 0 \rightarrow x = 2$ no pertenece al dominio.

d) $-(-3) - 4 = -1 < 0 \rightarrow x = -3$ no pertenece al dominio.

$0 - 4 = -4 < 0 \rightarrow x = 0$ no pertenece al domino.

$-2 - 4 = -6 < 0 \rightarrow x = 2$ no pertenece al dominio.

49. Estudia si los valores de la ordenada, y, están incluidos en los recorridos de estas funciones.

a) $y = 3$, $y = 2$, $y = -5$ para $f(x) = \sqrt{3x - 3}$

b) $y = 0$, $y = 30$, $y = -3$ para $f(x) = x^2 - 5x + 6$

a) $\sqrt{3x - 3} = 3 \rightarrow 3x - 3 = 9 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 3 \in \text{Im}\, f$

$\sqrt{3x - 3} = 2 \rightarrow 3x - 3 = 4 \rightarrow x = \dfrac{7}{3} \rightarrow y = 2 \in \text{Im}\, f$

$y = -5 \notin \text{Im}\, f$, porque la raíz no puede tomar valores negativos.

b) $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = 2$ o $x = 3 \rightarrow y = 0 \in \text{Im}\, f$

$x^2 - 5x + 6 = 30 \rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \rightarrow x = 8$ o $x = -3 \rightarrow y = 30 \in \text{Im}\, f$

$x^2 - 5x + 6 = -3 \rightarrow x^2 - 5x + 9 = 0 \rightarrow \Delta = -11 < 0$

$\rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones $\rightarrow y = -3 \in \text{Im}\, f$

50. Halla el dominio de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{4 - 3x + x^2}{2}$

b) $f(x) = \dfrac{12x - x^2}{x - 5}$

c) $f(x) = \dfrac{5x - 3}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 4x + 4}$

a) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$ b) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{5\}$ c) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$ d) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-2\}$

51. **Estudia el dominio de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \sqrt{3x - 7}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 10}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$

d) $f(x) = \sqrt{3x^2 - x}$

a) Dom $f = \left[\frac{7}{3}, +\infty\right)$

b) Dom $f = \mathbb{R}$

c) Dom $f = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

d) Dom $f = (-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

52. **Escribe el dominio de las funciones.**

a) $f(x) = \log_4 (x - 4)$

b) $f(x) = \cos (1 - x)$

c) $f(x) = 3^{\ln x}$

d) $f(x) = \operatorname{sen} (x - \pi)$

a) Dom $f = (4, +\infty)$

b) Dom $f = \mathbb{R}$

c) Dom $f = (0, +\infty)$

d) Dom $f = \mathbb{R}$

53. **Determina el dominio de las funciones.**

a) $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{8 - x}$

b) $f(x) = \sqrt{2x - 4} \cdot \sqrt{1 - x}$

a) Dom $f = [-1, 8]$

b) Dom $f = \varnothing$

54. **Determina si estas funciones tienen algún tipo de simetría.**

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = x^4 - 1$

c) $f(x) = x^2 - x$

d) $f(x) = x^4 - 2x^2$

a) $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x) \rightarrow$ La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.

b) $f(-x) = (-x)^4 - 1 = x^4 - 1 = f(x) \rightarrow$ La función es par, es simétrica respecto al eje Y.

c) $f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x \rightarrow$ La función no es simétrica.

d) $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x) \rightarrow$ La función es par, es simétrica respecto al eje Y.

55. **Determina el tipo de simetría de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x}{x}$

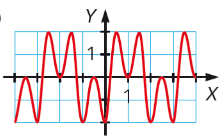
b) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x}{x^2 + 1}$

a) $f(-x) = \dfrac{3(-x)^2 - (-x)}{(-x)} = \dfrac{3x^2 + x}{-x} = -\dfrac{3x^2 + x}{x} \rightarrow$ La función no tiene simetría.

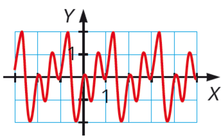
b) $f(-x) = \dfrac{2(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{-2x^3 + x}{x^2 + 1} = -f(x) \rightarrow$ La función es impar, es simétrica respecto el origen de coordenadas.

56. **Determina el período de estas funciones.**

a)



b)



a) $T = 3 - 0 = 3$

b) $T = 2 - 0 = 2$

57. **Considera la función que relaciona el tiempo, en días, con la superficie visible de la Luna. ¿Es una función periódica? En caso afirmativo, indica el período.**

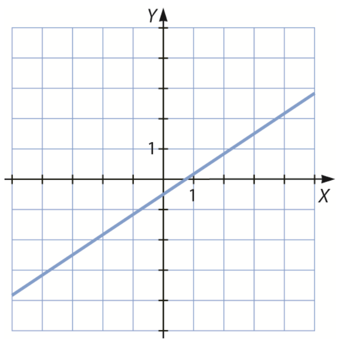
Al depender la superficie visible de las fases en la rotación de la Luna alrededor de la Tierra, la función es periódica. El período es de 28 días.

58. **Representa, sin hacer las tablas de valores correspondientes, las funciones lineales y afines.**

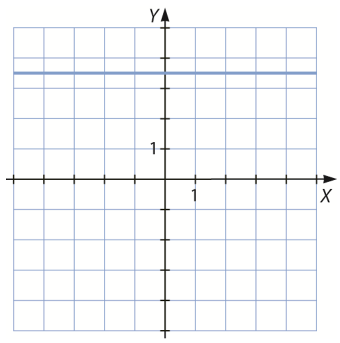
a) $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$ c) $f(x) = \frac{7}{2}$ e) $f(x) = -3x + \frac{5}{2}$

b) $f(x) = -2$ d) $f(x) = \frac{2x - 3}{5}$ f) $f(x) = -\frac{2}{3}x$

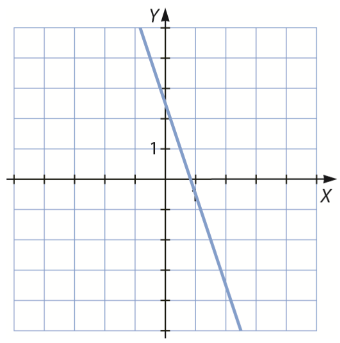
a)



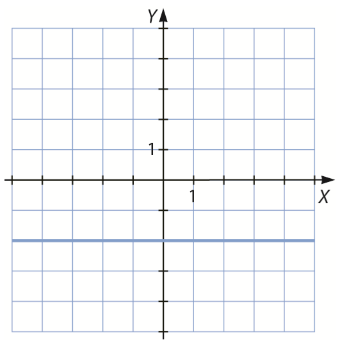
c)



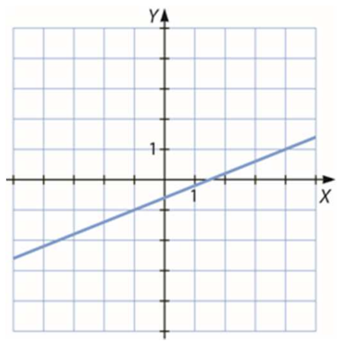
e)



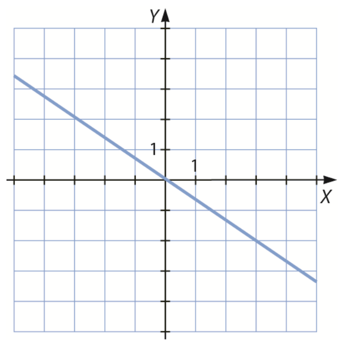
b)



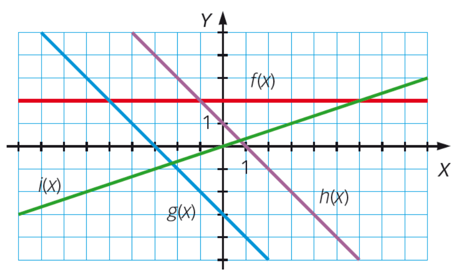
d)



f)



59. **Escribe la expresión algebraica de las funciones representadas, y calcula su pendiente y su ordenada en el origen.**



$f(x) = 2 \rightarrow$ Pendiente: $m = 0$ Ordenada en el origen: $n = 2$

$g(x) = -x - 3 \rightarrow$ Pendiente: $m = -1$ Ordenada en el origen: $n = -3$

$h(x) = -x + 1 \rightarrow$ Pendiente: $m = -1$ Ordenada en el origen: $n = 1$

$i(x) = \frac{1}{3}x \rightarrow$ Pendiente: $m = \frac{1}{3}$ Ordenada en el origen: $n = 0$

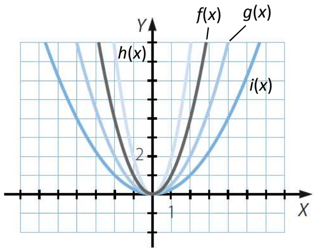
60. **Representa estas funciones en los mismos ejes de coordenadas y relaciona la abertura de las ramas de cada parábola con el coeficiente de x^2.**

a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

c) $h(x) = 2x^2$

d) $i(x) = \frac{1}{4}x^2$



La abertura es menor cuando el coeficiente es mayor.

61. **Encuentra las coordenadas del vértice de las siguientes funciones cuadráticas.**

a) $f(x) = x^2 - 6x + 10$

b) $f(x) = -x^2 - 4x + 10$

c) $f(x) = x^2 - 4$

d) $f(x) = -x^2 - 4x + 2$

a) $V\left(\frac{-(-6)}{2\cdot 1}, -\frac{6^2 - 4\cdot 1\cdot 10}{4\cdot 1}\right) = V(3, 1)$

c) $V\left(0, -\frac{-4\cdot 1\cdot (-4)}{4\cdot 1}\right) = V(0, -4)$

b) $V\left(\frac{-(-4)}{2\cdot(-1)}, -\frac{4^2 - 4\cdot(-1)\cdot 10}{4\cdot(-1)}\right) = V(-2, 14)$

d) $V\left(\frac{-(-4)}{2\cdot(-1)}, -\frac{4^2 - 4\cdot(-1)\cdot 2}{4\cdot(-1)}\right) = V(-2, 6)$

62. **Representa gráficamente las siguientes parábolas.**

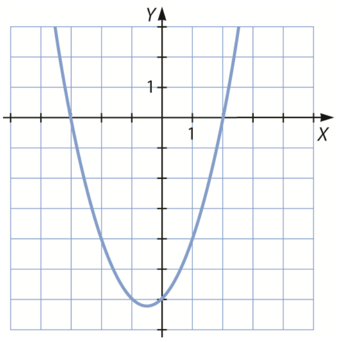
a) $f(x) = x^2 + x - 6$

b) $f(x) = x^2 - 10x + 25$

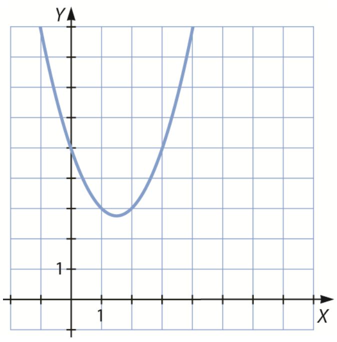
c) $f(x) = x^2 - 3x + 5$

d) $f(x) = -x^2 - 3x + 1$

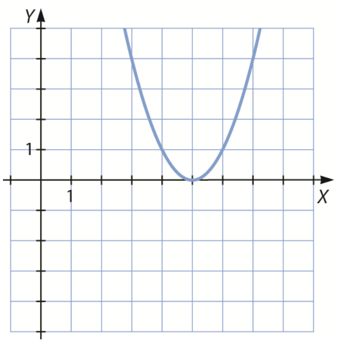
a)



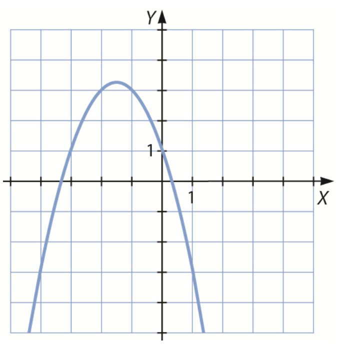
c)



b)



d)



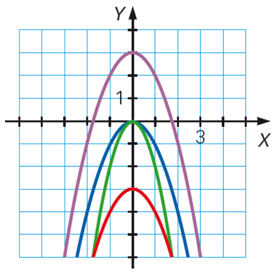
63. **Asocia cada función con su gráfica.**

a) $f(x) = -x^2$

b) $g(x) = -x^2 + 3$

c) $h(x) = -x^2 - 3$

d) $i(x) = -2x^2$



a) Azul. b) Morada. c) Roja. d) Verde.

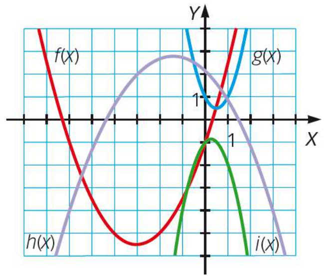
64. **Relaciona cada gráfica con su expresión algebraica.**

a) $y = \dfrac{x^2}{2} + 3x - 1$

b) $y = 2x^2 - 2x + 1$

c) $y = -\dfrac{x^2}{3} - x + 2$

d) $y = -2x^2 + x - 1$



a) $y = f(x)$, porque si $a = \dfrac{1}{2} > 0$, la parábola es abierta hacia arriba y $c = -1$.

b) $y = g(x)$, pues si $a = 2 > 0$, la parábola es abierta hacia arriba y $c = 1$.

c) $y = h(x)$, porque si $a = -\dfrac{1}{3} < 0$, la parábola es abierta hacia abajo y $c = 2$.

d) $y = i(x)$, ya que si $a = -2 < 0$, la parábola es abierta hacia abajo y $c = -1$.

65. **Representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes funciones.**

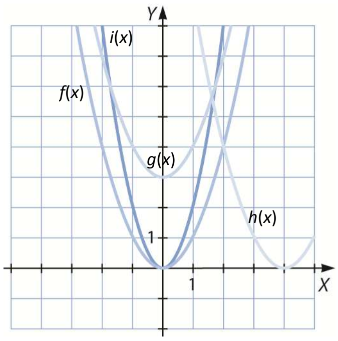
a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = x^2 + 3$

c) $h(x) = (x - 4)^2$

d) $i(x) = 2x^2$

¿En qué se parecen y en qué se diferencian estas funciones?



Todas son parábolas cuyo vértice es un mínimo, pues el coeficiente de x^2 es mayor que 0.

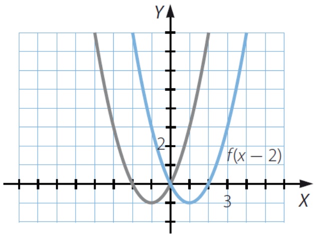
Se obtienen desplazando la parábola x^2 o ampliando/reduciendo la apertura de sus ramas.

66. **Haz la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x$. Obtén la expresión algebraica de las siguientes funciones y represéntalas.**

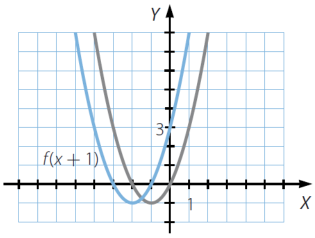
a) $f(x - 2)$ b) $f(x) - 4$ c) $f(x + 1)$ d) $f(x) + 2$

¿Hay alguna relación entre estas gráficas?

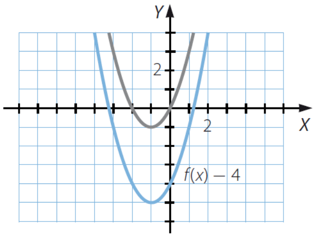
a) $f(x - 2) = (x - 2)^2 + 2(x - 2) = x^2 - 2x$



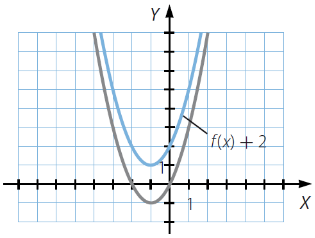
c) $f(x + 1) = (x + 1)^2 + 2(x + 1) = x^2 + 4x + 3$



b) $f(x) - 4 = x^2 + 2x - 4$



d) $f(x) + 2 = x^2 + 2x + 2$

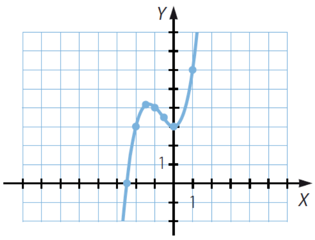


67. **Construye la tabla de valores y dibuja la gráfica de estas funciones.**

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3$ b) $f(x) = -x^3 + 6x + 1$

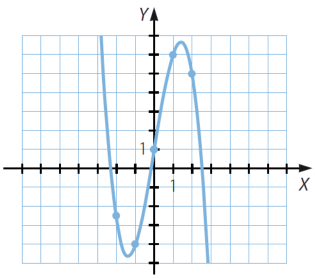
a)

x	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	1	2
$f(x)$	−0,125	3	4,125	4	3,375	3	6	19



b)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	10	−3	−4	1	6	5	−8



68. **Representa las siguientes funciones polinómicas, indicando los puntos de corte con los ejes.**

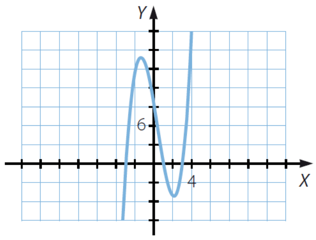
a) $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$

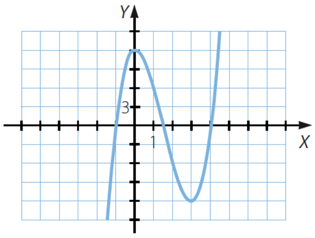
c) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

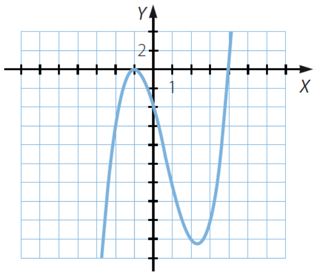
a) Puntos de corte con el eje X: $(-3, 0)$, $(1, 0)$ y $(3, 0)$
Punto de corte con el eje Y: $(0, 9)$



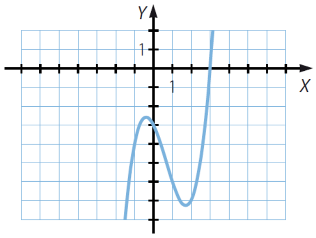
b) Puntos de corte con el eje X: $(-1, 0), \left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y $(4, 0)$
Punto de corte con el eje Y: $(0, 12)$



c) Puntos de corte con el eje X: $(-1, 0)$ y $(4, 0)$
Punto de corte con el eje Y: $(0, 4)$



d) Punto de corte con el eje X: $(3, 0)$
Punto de corte con el eje Y: $(0, -3)$



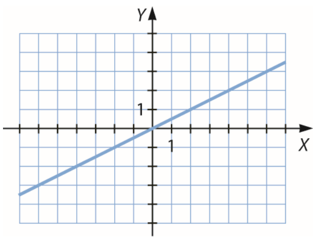
69. **Halla y representa las funciones polinómicas de grado mínimo que pasan por los siguientes puntos.**

a) $A(0, 0)$, $B\left(5, \frac{5}{2}\right)$ y $C(-2, -1)$

b) $A(3, 0)$, $B(4, 1)$ y $C(5, 0)$

c) $A(1, 0)$, $B(2, 1)$, $C(3, 0)$ y $D(4, 1)$

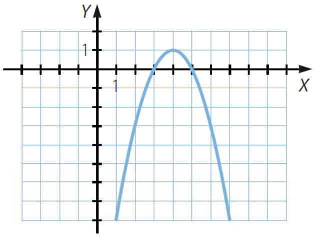
a) Los puntos A, B y C están alineados. La función que pasa por ellos es $f(x) = \frac{x}{2}$.



b) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\left.\begin{array}{r} 9a + 3b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 1 \\ 25a + 5b + c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 9a + 3b + c = 0 \\ 7a + b \quad = 1 \\ 16a + 2b \quad = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 9a + 3b + c = 0 \\ 7a + b \quad = 1 \\ 2a \quad = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 8 \\ c = -15 \end{array}$$

La expresión de la función es:
$f(x) = -x^2 + 8x - 15$



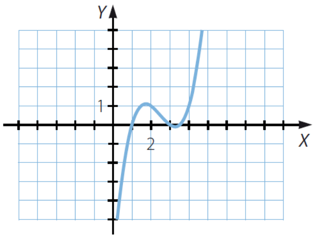
c) Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$$\left.\begin{array}{r} a + b + c + d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ 27a + 9b + 3c + d = 0 \\ 64a + 16b + 4c + d = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a + b + c + d = 0 \\ 7a + 3b + c \quad = 1 \\ 13a + 4b + c \quad = 0 \\ 63a + 15b + 3c \quad = 1 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} a + b + c + d = 0 \\ 7a + 3b + c \quad = 1 \\ 6a + b \quad = -1 \\ 21a + 3b \quad = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a + b + c + d = 0 \\ 7a + 3b + c \quad = 1 \\ 6a + b \quad = -1 \\ 3a \quad = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = \dfrac{2}{3} \\ b = -5 \\ c = \dfrac{34}{3} \\ d = -7 \end{array}$$

La expresión de la función es:

$f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 5x^2 + \dfrac{34}{3}x - 7$

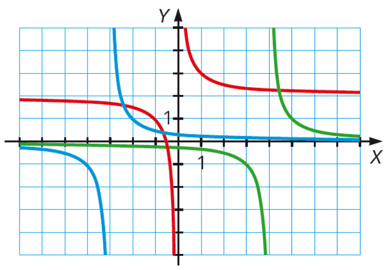


70. Asocia cada gráfica con su función.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x-4}$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x} + 2$

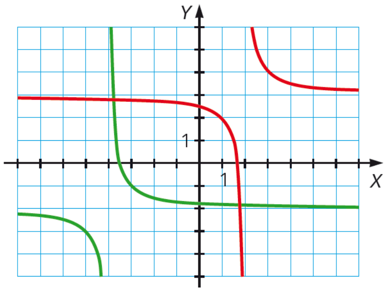


a) Azul. b) Verde. c) Roja.

71. **Asocia cada gráfica con su función.**

a) $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

b) $g(x) = \frac{1}{x+4} - 2$



a) Roja. b) Verde.

72. **Dada la función $f(x) = \frac{2}{x}$, determina la expresión algebraica de las siguientes funciones.**

a) $g(x) = f(x - 3)$

b) $g(x) = f(x + 1)$

c) $g(x) = f(x) - 2$

d) $g(x) = f(x) + 3$

e) $g(x) = f(-x)$

f) $g(x) = -f(x)$

a) $g(x) = \frac{2}{x-3}$

b) $g(x) = \frac{2}{x+1}$

c) $g(x) = \frac{2}{x} - 2 = \frac{2-2x}{x}$

d) $g(x) = \frac{2}{x} + 3 = \frac{2+3x}{x}$

e) $g(x) = \frac{2}{-x} = -\frac{2}{x}$

f) $g(x) = -\frac{2}{x}$

73. **Sin representarlas, escribe la relación que hay entre las gráficas de estas funciones y la de $f(x) = \frac{12}{x}$.**

a) $g(x) = \frac{12}{x+4}$

b) $h(x) = \frac{12}{x} + 1$

c) $i(x) = -\frac{12}{x}$

a) La gráfica de $g(x)$ se obtiene desplazando la gráfica de $f(x)$ 4 unidades a la izquierda sobre el eje X.

b) La gráfica de $h(x)$ se obtiene desplazando la gráfica de $f(x)$ una unidad hacia arriba sobre el eje Y.

c) La gráfica de $i(x)$ es la simétrica de $f(x)$ con respecto al eje X; que equivale a la simétrica con respecto al eje Y.

74. **Representa la gráfica de la función $f(x) = \frac{3}{x}$. A partir de ella representa las siguientes funciones.**

a) $g(x) = \frac{x+4}{x+1}$

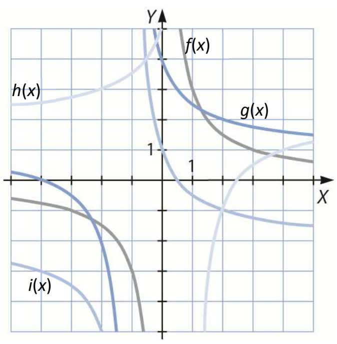
b) $h(x) = \frac{2x-5}{x-1}$

c) $i(x) = \frac{-2x+1}{x+1}$

a) $g(x) = \frac{3}{x+1} + 1 \rightarrow g(x) = f(x+1) + 1$

b) $h(x) = 2 - \frac{3}{x-1} \rightarrow h(x) = -f(x-1) + 2$

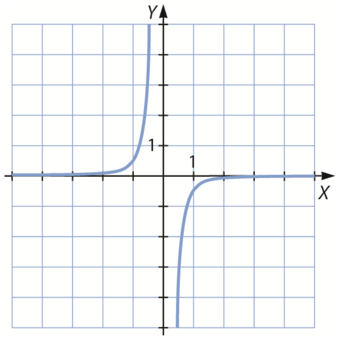
c) $i(x) = -2 + \frac{3}{x+1} \rightarrow i(x) = f(x+1) - 2$



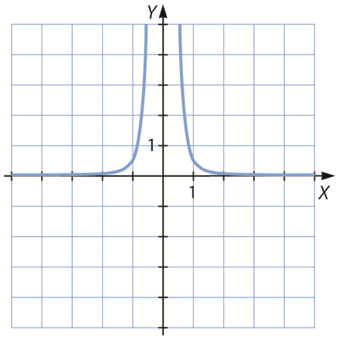
75. **Representa gráficamente las siguientes funciones.**

a) $f(x) = -\dfrac{1}{2x^3}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2x^4}$ c) $f(x) = -\dfrac{1}{2x^6}$

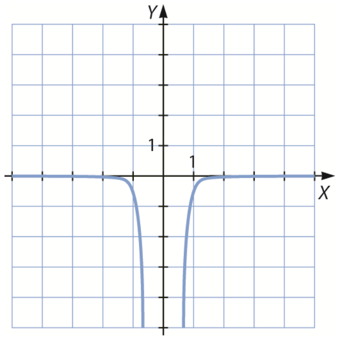
a)



b)



c)



76. **Calcula el dominio de estas funciones.**

a) $f(x) = \sqrt{3x-1}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{-x^2-1}$

d) $f(x) = 1-\sqrt{x}$

a) $3x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq \dfrac{1}{3} \rightarrow \text{Dom } f = \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$

b) $x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow 2 \leq x,\ x \leq -2 \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

d) $\text{Dom } f = [0, +\infty)$

77. **¿Cuál es el dominio de estas funciones con radicales?**

a) $f(x) = \dfrac{7x}{2-\sqrt{x-5}}$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-1}}{4-\sqrt{x+1}}$

a) $x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5$ $\sqrt{x-5} \neq 2 \rightarrow x - 5 \neq 4 \rightarrow x \neq 9$

$\text{Dom } f = [5, 9) \cup (9, +\infty) = [5, +\infty) - \{9\}$

b) $3x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq \dfrac{1}{3}$ $x + 1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$ $\sqrt{x+1} \neq 4 \rightarrow x + 1 \neq 16 \rightarrow x \neq 15$

$\text{Dom } f = \left[\dfrac{1}{3}, 15\right) \cup (15, +\infty) = \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right) - \{15\}$

78. **Representa gráficamente las siguientes funciones.**

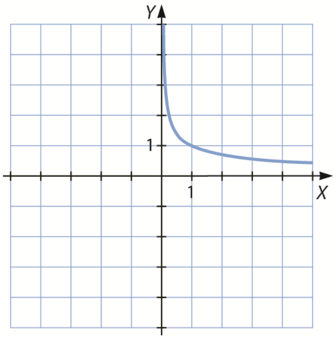
a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

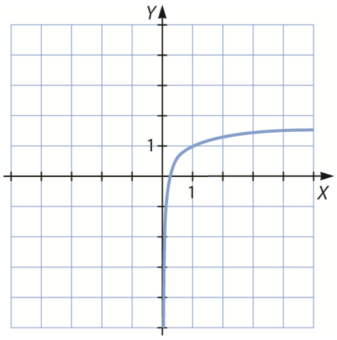
c) $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2$

d) $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x-2}} - 3$

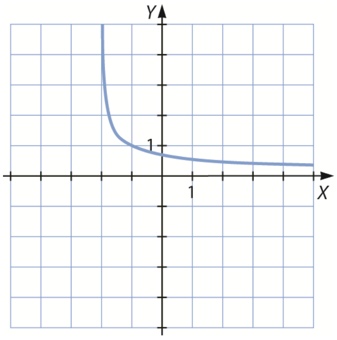
a)



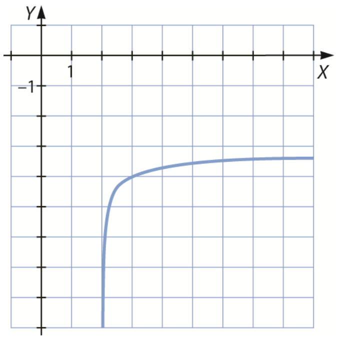
c)



b)



d)



79. Comprueba si estos pares de funciones son inversas.

a) $f(x) = 2x - 5 \qquad g(x) = \dfrac{x+5}{2}$

b) $f(x) = \dfrac{3-x}{4} \qquad g(x) = 3 - 4x$

c) $f(x) = x^3 + 1 \qquad g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

a) $x = 2y - 5 \rightarrow y = \dfrac{x+5}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = g(x) \rightarrow$ Son inversas.

b) $x = \dfrac{3-y}{4} \rightarrow y = 3 - 4x \rightarrow f^{-1}(x) = g(x) \rightarrow$ Son inversas.

c) $x = y^3 + 1 \rightarrow y = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow f^{-1}(x) = g(x) \rightarrow$ Son inversas.

80. Calcula, si es posible, la inversa de estas funciones.

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 - 5$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

d) $f(x) = x^2 + x$

e) $f(x) = \sqrt{2-5x}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

a) $x = 2y - 1 \rightarrow y = \dfrac{x+1}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$

b) $x = y^2 - 5 \rightarrow y = \pm\sqrt{x+5} \rightarrow$ No existe la inversa, $f^{-1}(x)$ no es una función, porque para cada valor de x se obtienen dos imágenes.

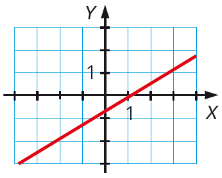
c) $x = \dfrac{1}{y+2} \rightarrow y = \dfrac{1-2x}{x} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1-2x}{x}$

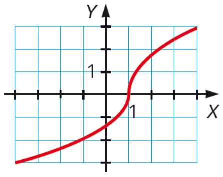
d) $x = y^2 - y \rightarrow$ No existe la inversa; $f^{-1}(x)$ no es una función, porque para cada valor de x se obtienen dos imágenes.

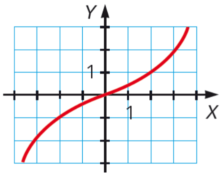
e) $x = \sqrt{2-5y} \rightarrow y = \dfrac{2-x^2}{5} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{2-x^2}{5}$

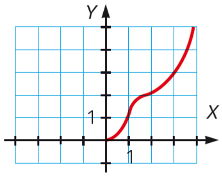
f) $x = \dfrac{1}{y-2} \rightarrow y = \dfrac{2x+1}{x} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x}$

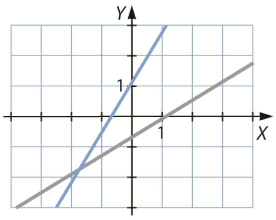
81. Dibuja la gráfica de la inversa de cada función.

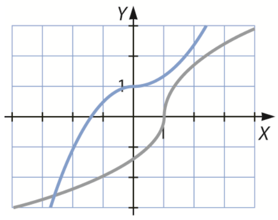
a)


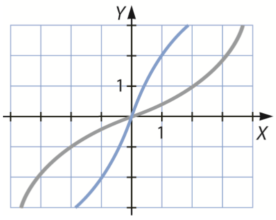
c)


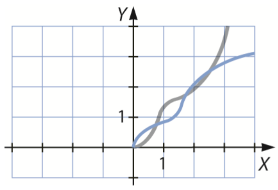
b)


d)


a)


c)


b)


d)


82. Calcula las funciones inversas de estas funciones.

a) $f(x) = \ln(x + 3)$

b) $f(x) = 3 + 4 \cdot 5^x$

c) $f(x) = \dfrac{1 + tg\ x}{2}$

d) $f(x) = sen\ 2x$

e) $f(x) = |x + 1|$

f) $f(x) = \dfrac{1 + \log_3 x}{5}$

a) $x = \ln(y+3) \rightarrow e^x = y + 3 \rightarrow y = e^x - 3 \rightarrow f^{-1}(x) = e^x - 3$

b) $x = 3 + 4 \cdot 5^y \rightarrow \log_5 \dfrac{x-3}{4} = y \rightarrow y = \log_5(x-3) - \log_5 4 \rightarrow f^{-1}(x) = \log_5(x-3) - \log_5 4$

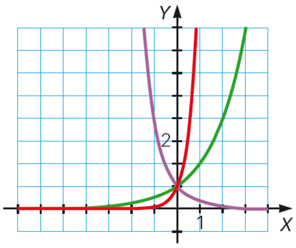
c) $x = \dfrac{1+tg\ y}{2} \rightarrow y = arc\ tg(2x-1) \rightarrow f^{-1}(x) = arc\ tg(2x-1)$

d) $x = sen\ 2y \rightarrow y = \dfrac{arc\,sen\ x}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{arc\,sen\ x}{2}$

e) $x = |y+1| \rightarrow$ No existe inversa, ya que para cada valor de x, $f^{-1}(x)$ devuelve dos imágenes; $f^{-1}(x)$ no es una función.

f) $x = \dfrac{1+\log_3 y}{5} \rightarrow 5x - 1 = \log_3 y \rightarrow y = 3^{5x-1} \rightarrow f^{-1}(x) = 3^{5x-1}$

83. **Asocia cada gráfica con su función.**



a) $f(x) = 12^x$ b) $g(x) = 2^x$ c) $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

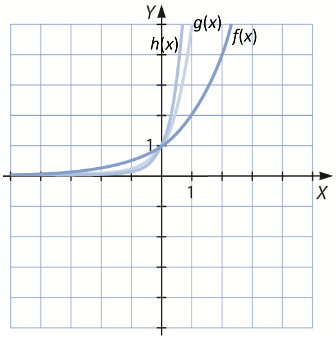
a) $f(x) \rightarrow$ Roja. b) $g(x) \rightarrow$ Verde. c) $h(x) \rightarrow$ Morada.

84. **Representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes ternas de funciones exponenciales.**

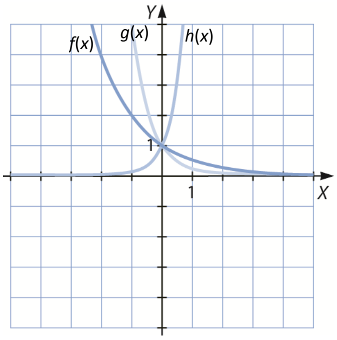
a) $f(x) = 2^x$ $g(x) = 5^x$ $h(x) = 10^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ $h(x) = 10^x$

a)

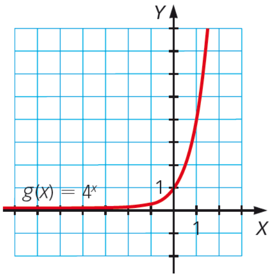


b)

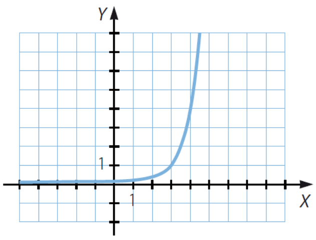


85. **A partir de la gráfica de la función exponencial $g(x) = 4^x$ representa las siguientes funciones.**

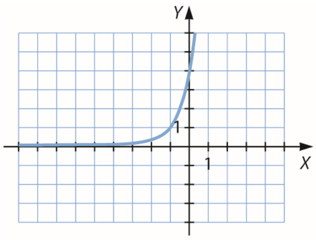
a) $f(x) = 4^{x-3}$
b) $f(x) = 4^{x+1}$
c) $f(x) = 1 + 4^x$
d) $f(x) = -4^x$
e) $f(x) = 2 - 4^x$
f) $f(x) = 4^x - 1$



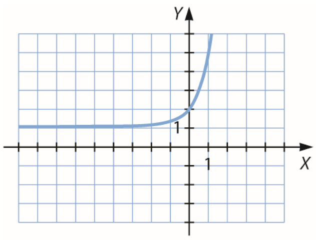
a) $4^{x-3} = g(x-3)$



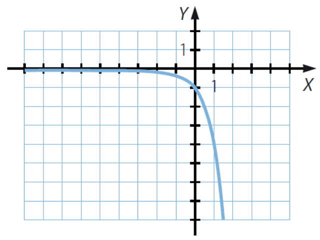
b) $4^{x+1} = g(x+1)$



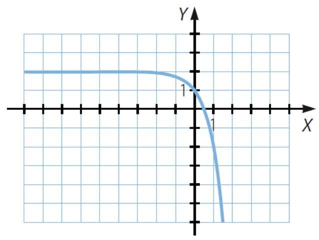
c) $1 + f(x) = 1 + 4^x$



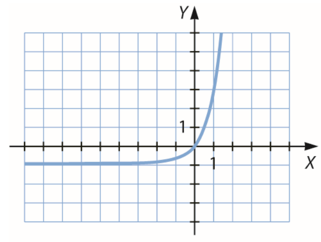
d) $-f(x) = -4^x$



e) $2 - f(x) = 2 - 4^x$



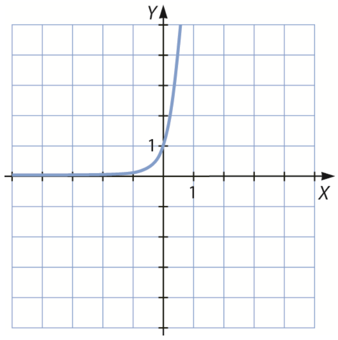
f) $f(x) - 1 = 4^x - 1$



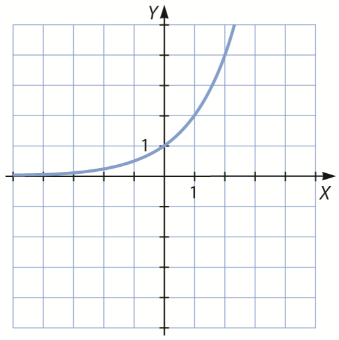
86. **A partir de la gráfica de la función exponencial $g(x) = 4^x$ representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = 4^{2x}$ b) $f(x) = 4^{\frac{x}{2}}$

a)



b)

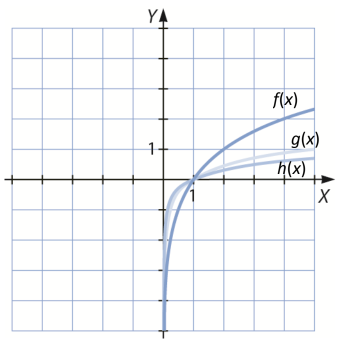


87. **Representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes ternas de funciones logarítmicas.**

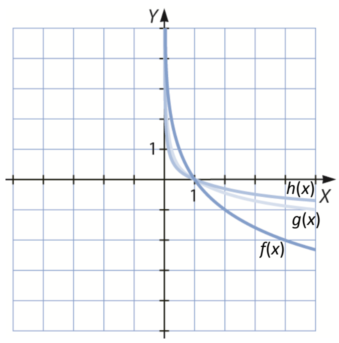
a) $f(x) = \log_2 x$ $g(x) = \log_5 x$ $h(x) = \log_{10} x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ $g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ $h(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$

a)



b)

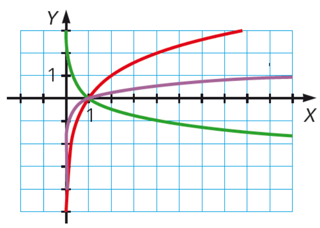


88. **Asocia cada gráfica con su función.**

a) $f(x) = \log_{12} x$

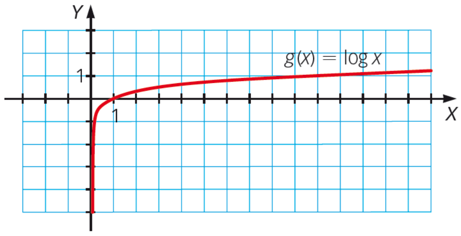
b) $g(x) = \log_2 x$

c) $h(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$



a) Morada. b) Roja. c) Verde.

89. **A partir de la gráfica de la función logarítmica $g(x) = \log x$ representa las siguientes funciones.**



a) $f(x) = \log x - 3$

b) $f(x) = \log x + 1$

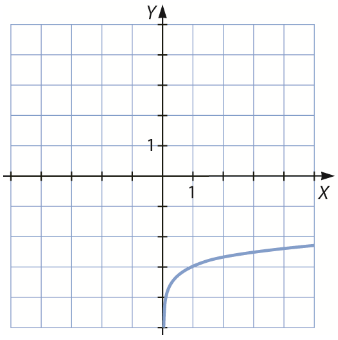
c) $f(x) = 1 - \log x$

d) $f(x) = -\log x$

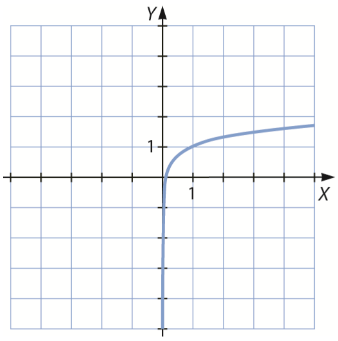
e) $f(x) = 2 - \log x$

f) $f(x) = \log x - 1$

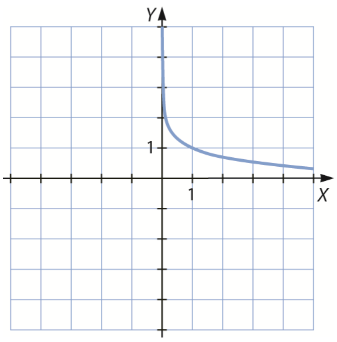
a)



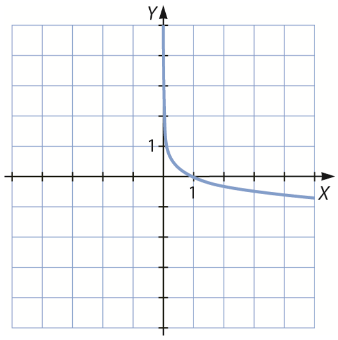
b)



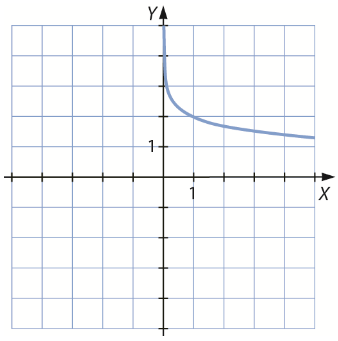
c)



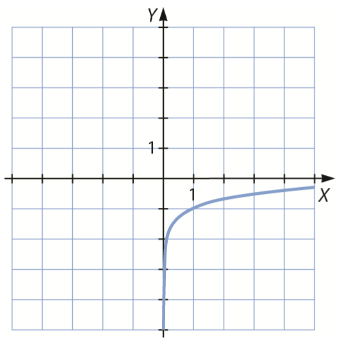
d)



e)



f)

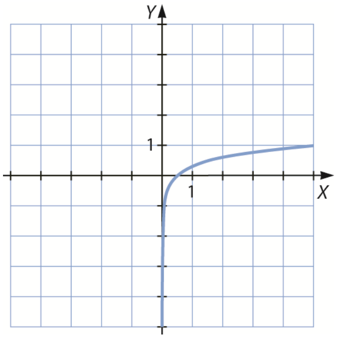


90. **A partir de la gráfica de la función logarítmica $g(x) = \log x$ representa las siguientes funciones.**

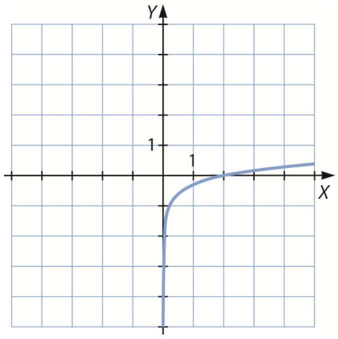
a) $f(x) = \log 2x$

b) $f(x) = \log \dfrac{x}{2}$

a) $f(x) = \log 2x = \log 2 + \log x$



b) $f(x) = \log\left(\frac{x}{2}\right) = \log x - \log 2$



91. **Dibuja la gráfica de la función $g(x) = \cos x$. A partir de ella representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \cos(-x)$

b) $f(x) = -\cos x$

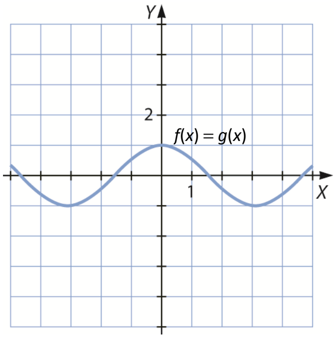
c) $f(x) = \cos(x + \pi)$

d) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

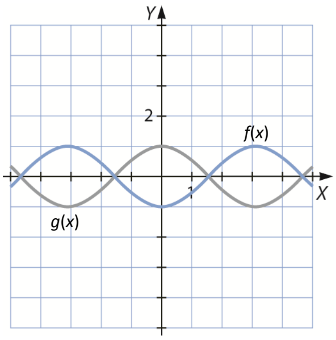
e) $f(x) = \cos x + 2$

f) $f(x) = 1 - \cos x$

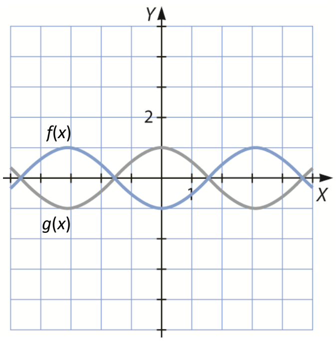
a)



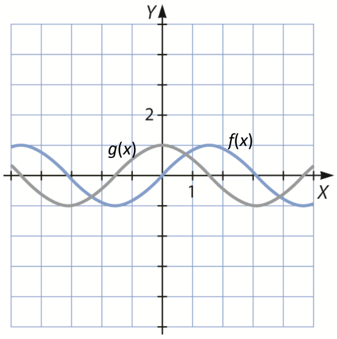
b)



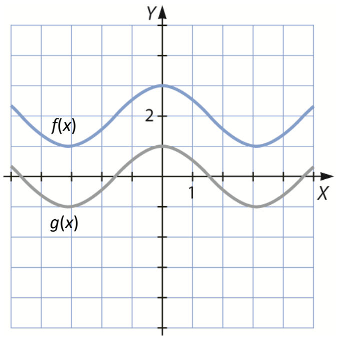
c)



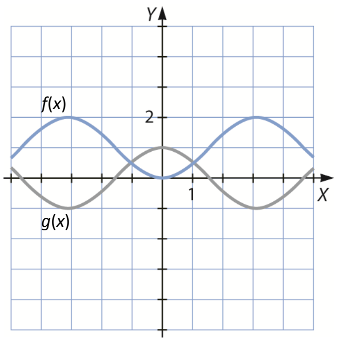
d)



e)



f)



92. **Dibuja la gráfica de la función $g(x) = sen\ x$. A partir de ella representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = sen\ (-x)$

b) $f(x) = -sen\ x$

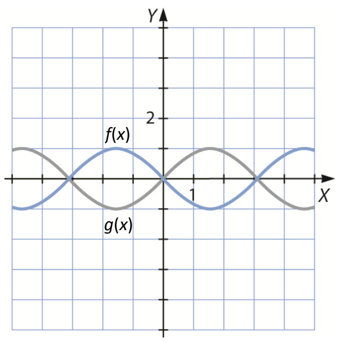
c) $f(x) = sen\ (x + \pi)$

d) $f(x) = sen\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

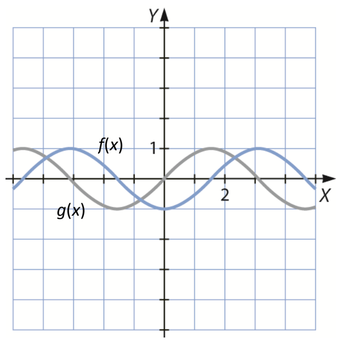
e) $f(x) = sen\ x + 2$

f) $f(x) = 1 - sen\ x$

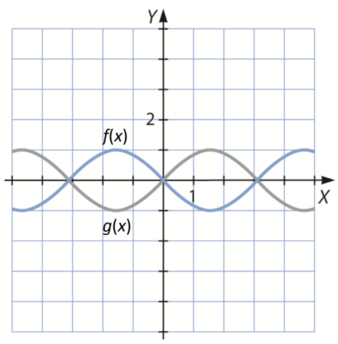
a)



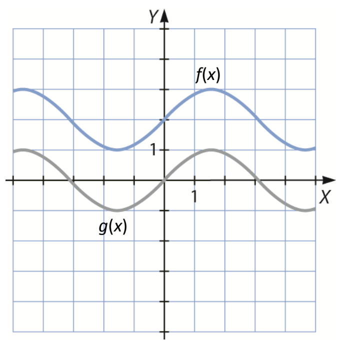
d)



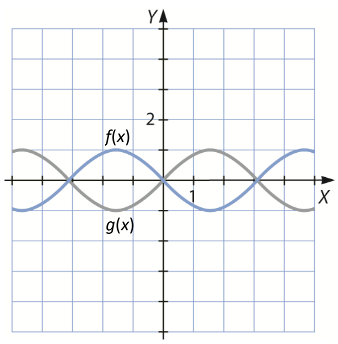
b)



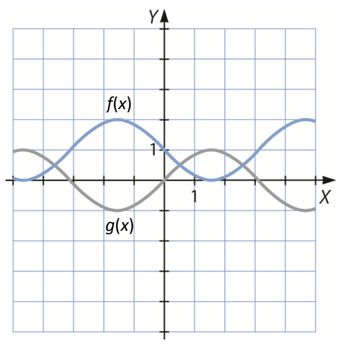
e)



c)



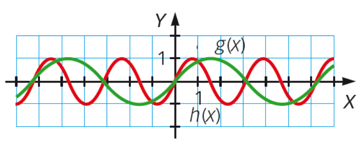
f)



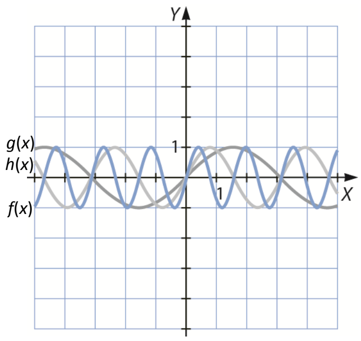
93. **A partir de las gráficas de las funciones $g(x) = sen\ x$, $h(x) = sen\ 2x$ representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = sen\ 4x$

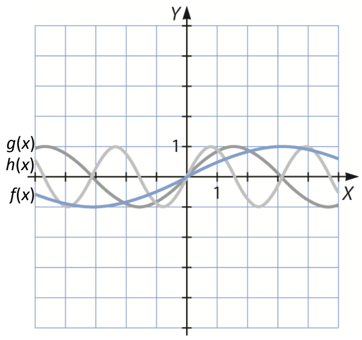
b) $f(x) = sen\ \dfrac{x}{2}$



a)



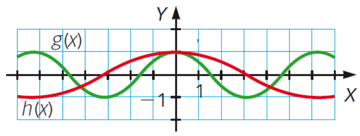
b)



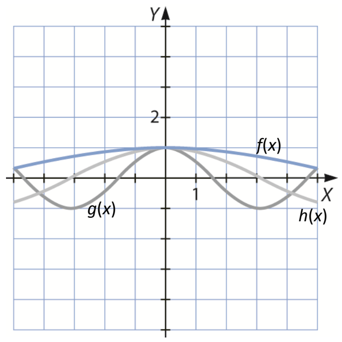
94. **A partir de las gráficas de las funciones $g(x) = \cos x$, $h(x) = \cos \frac{x}{2}$ representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \cos \frac{x}{4}$

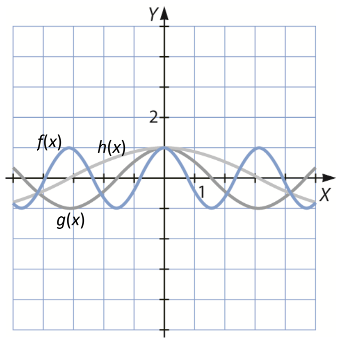
b) $f(x) = \cos 2x$



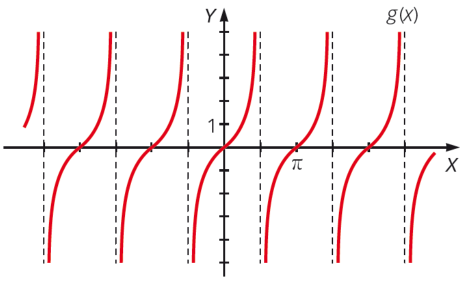
a)



b)

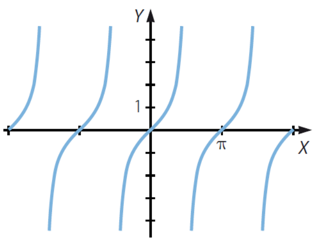


95. **A partir de la gráfica de la función trigonométrica $g(x) = \operatorname{tg} x$ representa las siguientes funciones.**

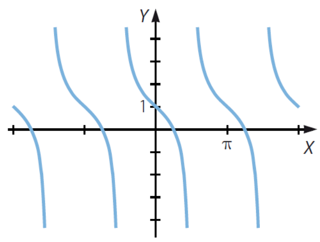


a) $f(x) = \operatorname{tg}(x + \pi)$　　b) $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$

a)



b)



96. **A partir de la gráfica de la función $g(x) = \textit{arc sen } x$ realiza las gráficas de las funciones.**

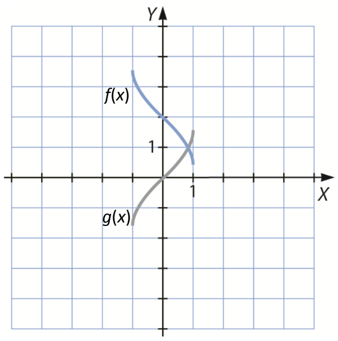
a) $f(x) = 2 - \text{arc sen}\, x$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2} + \text{arc sen}\, x$

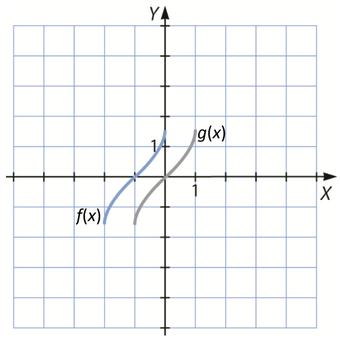
c) $f(x) = \text{arc sen}\,(x + 1)$

d) $f(x) = \text{arc sen}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

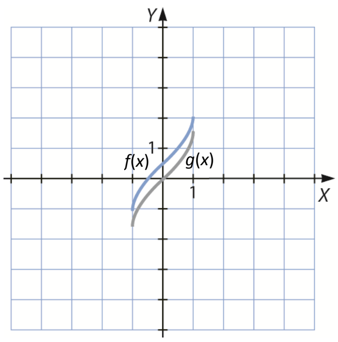
a)



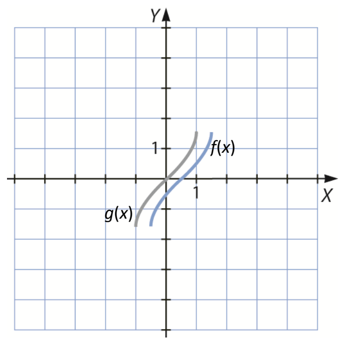
c)



b)



d)



97. **A partir de la gráfica de la función $g(x) = \textit{arc cos } x$ realiza las gráficas de las funciones.**

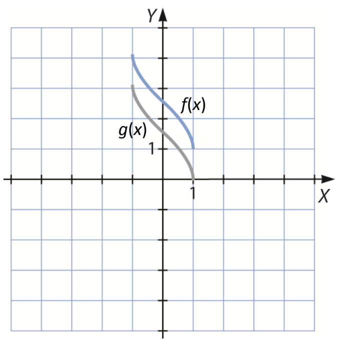
a) $f(x) = 1 + \text{arc cos}\, x$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2} - \text{arc cos}\, x$

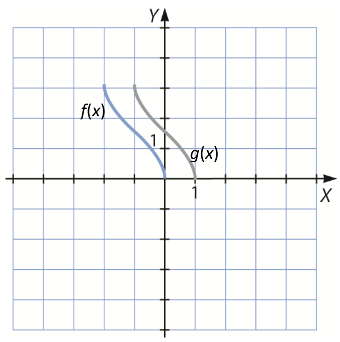
c) $f(x) = \text{arc cos}\,(x + 1)$

d) $f(x) = \text{arc cos}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

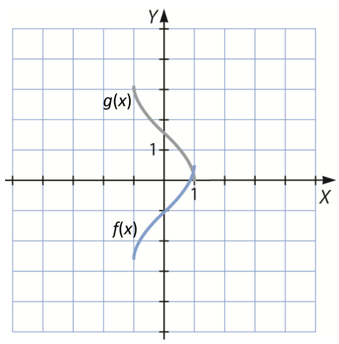
a)



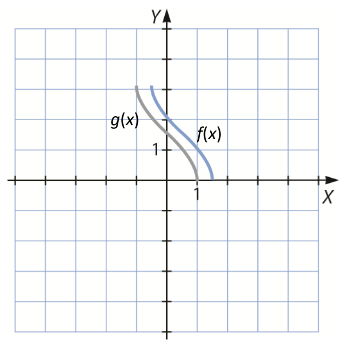
c)



b)



d)



98. **Halla $f(-1)$, $f(0)$ y $f\left(\frac{1}{2}\right)$ en esta función.**

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x=0 \\ x^2-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

- $x=-1$:

  $x<0 \rightarrow f(-1)=(-1)^2+1 \rightarrow f(-1)=2$

- $x=0$:

  $f(0)=0^2 \rightarrow f(0)=0$

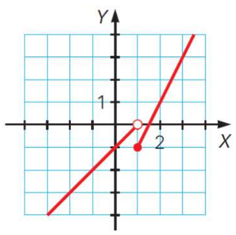
- $x=\frac{1}{2}$:

  $x>0 \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-1 \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$

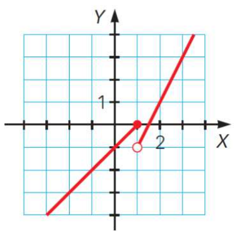
99. **Indica cuál de las siguientes gráficas le corresponde a esta función.**

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x<1 \\ 2x-3 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

a)



b)



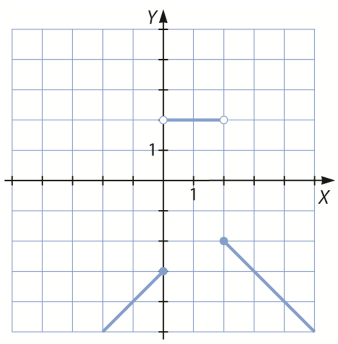
A $f(x)$ le corresponde la gráfica a), ya que el punto $x=1$ pertenece al segundo trozo.

100. **Representa gráficamente las siguientes funciones.**

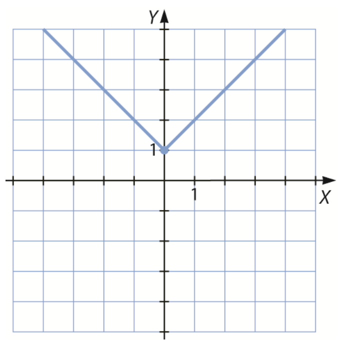
a) $f(x)=\begin{cases} x-3 & \text{si } x\leq 0 \\ 2 & \text{si } 0<x<3 \\ -x & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ -x+1 & \text{si } x<0 \end{cases}$

a)



b)



101. **Representa esta función.**

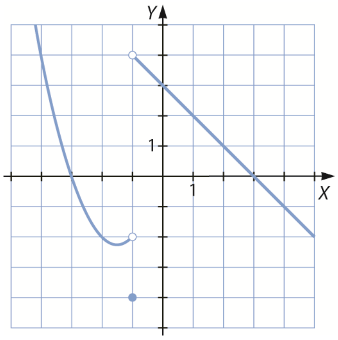
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{si } x < -1 \\ -4 & \text{si } x = -1 \\ -x + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Estudia el valor que toma la función en los puntos próximos a -1, completando las tablas.

Izquierda de -1	-2	$-1,5$	$-1,1$	$-1,05$
$f(x)$				

Derecha de -1	0	$-0,5$	$-0,9$	$-0,95$
$f(x)$				

Describe lo que le sucede a la función en las proximidades de -1.

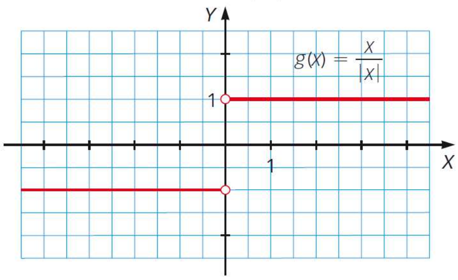


Izquierda de –1	–2	–1,5	–1,17	–1,05
***f*(x)**	**–2**	**–2, 25**	**–2, 09**	**–2, 0457**

Derecha de –1	0	–0,5	–0,9	–0,95
***f*(x)**	**3**	**3, 5**	**3, 9**	**3, 95**

A la derecha de $x = -1$, las imágenes tienden a 4, es decir, $-(-1) + 3$.

102. **La función cuya expresión algebraica es $g(x) = \dfrac{x}{|x|}$ se llama *función signo de x*.**



Encuentra su expresión algebraica como una función definida a trozos y responde a las siguientes preguntas.

a) ¿Cuánto vale si $x = 3$?

b) ¿Cuánto vale si $x = -5$?

c) ¿Cuánto vale si $x = -3,4$?

d) ¿Cuánto vale si $x = 0$?

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

a) $f(3) = 1$ b) $f(-5) = -1$ c) $f(-3, 4) = -1$ d) No existe imagen de $x = 0$.

103. **Representa y describe las características de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -2 \\ \dfrac{-x + 10}{3} & \text{si } -2 < x < 1 \\ -x^2 + 3x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) ▪ Primer intervalo $(-\infty, 0)$:

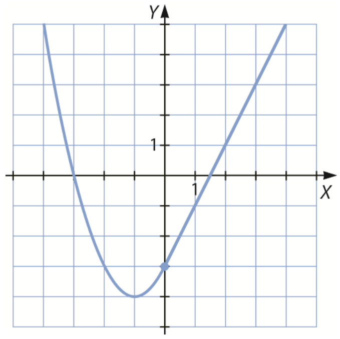
Parábola, decreciente hasta $x = -1$ punto en el que se sitúa el vértice $(-1, -4)$, y creciente en el resto, terminando en el punto $(0, -3)$.

▪ Segundo intervalo $[0, +\infty)$:

Recta creciente empezando en el punto $(-3, 0)$ incluido.

Es continua en todo el dominio.

Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = [-4, +\infty)$



b) ▪ Primer intervalo $(-\infty, -2]$:

Parábola, decreciente en ese intervalo acabando en $(-2, 4)$ incluido.

▪ Segundo intervalo $(-2, 1)$:

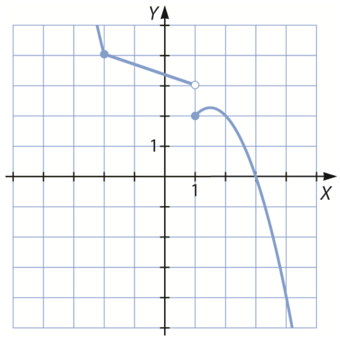
Recta decreciente con extremos en $(-2, 4)$ y $(1, 3)$, este último punto no incluido.

▪ Tercer intervalo $[3, +\infty)$:

Parábola decreciente en ese intervalo empezando en $(3, 0)$ con vértice en $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$.

Tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = \left(-\infty, \dfrac{9}{4}\right] \cup (3, +\infty)$



c) ▪ Primer intervalo $(-\infty, -2)$:

Función racional, decreciente en ese intervalo.

▪ Segundo intervalo $[-2, 2]$:

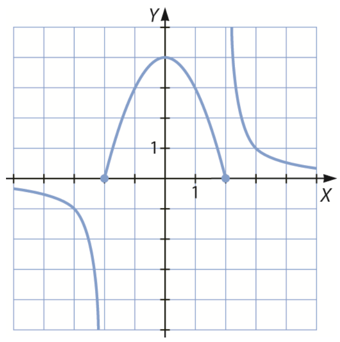
Parábola con máximo en $(0, 4)$ y extremos en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

▪ Tercer intervalo $(2, +\infty)$:

Función racional, decreciente en ese intervalo.

Tiene discontinuidades de salto infinito en $x = -2$ y $x = 2$.

Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = (-\infty, +\infty]$



104. **Representa y describe las características de estas funciones definidas a trozos.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{2}{x-3} & \text{si } 0 < x \le 4 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \le 1 \\ \log x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{3\}$ Im $f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

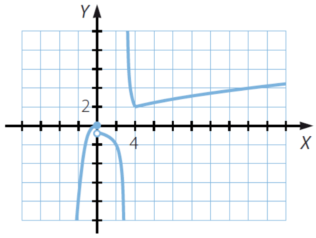
La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y es decreciente en $(0, 3) \cup (3, 4)$.

Tiene un mínimo relativo en $x = 4$.

No es continua en $x = 0$, ni en $x = 3$, y el punto $x = 0$ es de discontinuidad inevitable de salto finito, y el punto $x = 3$ es de discontinuidad inevitable de salto infinito.

Tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

No es simétrica ni periódica.



b) Dom $g = \mathbb{R}$ Im $g = (0, 2]$

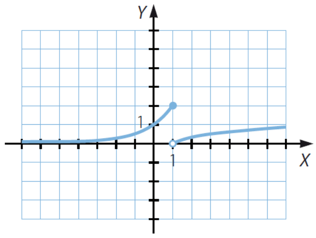
La función es creciente en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

No tiene máximos ni mínimos.

No es continua en $x = 1$, y este punto es de discontinuidad inevitable de salto finito.

No tiene asíntotas.

No es simétrica ni periódica.



105. **Representa gráficamente las siguientes funciones.**

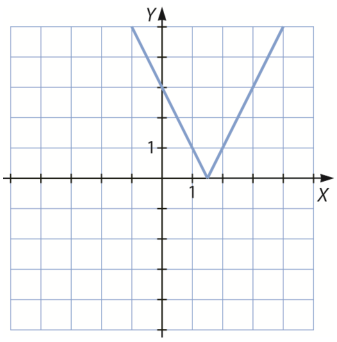
a) $f(x) = |2x - 3|$

b) $f(x) = |-3x + 1|$

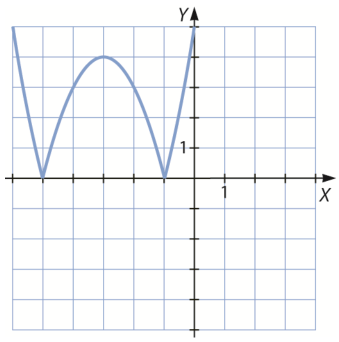
c) $f(x) = |x^2 + 6x + 5|$

d) $f(x) = |-x^2 + x - 2|$

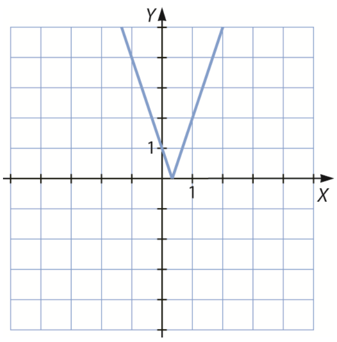
a)



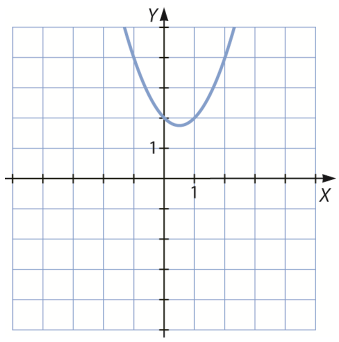
c)



b)



d)



106. Expresa como una función definida a trozos.

a) $f(x) = |x| + |x+2|$

b) $f(x) = |x+1| - |1-x|$

c) $f(x) = |x-1| - |1-x|$

d) $f(x) = |2x+1| - |2-x|$

a) $f(x) = \begin{cases} -2x-2 & \text{si} \quad x \le -2 \\ 2 & \text{si} \quad -2 < x \le 0 \\ 2x+2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ c) $f(x) = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \le -1 \\ 2x & \text{si} \quad -1 < x \le 1 \\ 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{si} \quad x \le -\frac{1}{2} \\ 3x-1 & \text{si} \quad -\frac{1}{2} < x \le 2 \\ x+3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

107. Expresa como función definida a trozos.

a) $|x^2 - 4|$

b) $\left|\dfrac{1}{x+2}\right| - \operatorname{sen} x$

c) $\left|\sqrt[3]{x-3}\right|$

a) $|x^2-4| = \begin{cases} -x^2+4 & \text{si } x^2-4<0 \\ x^2-4 & \text{si } x^2-4 \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x \le -2 \\ -x^2+4 & \text{si } -2<x<2 \\ x^2-4 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$

b) $\left|\dfrac{1}{x+2}\right| = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+2} & \text{si } x+2<0 \\ \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x+2>0 \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+2} & \text{si } x<-2 \\ \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x>-2 \end{cases}$

$$\left|\frac{1}{x+2}\right| - \operatorname{sen} x = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+2} - \operatorname{sen} x & \text{si } x+2<0 \\ \dfrac{1}{x+2} - \operatorname{sen} x & \text{si } x+2>0 \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+2} - \operatorname{sen} x & \text{si } x<-2 \\ \dfrac{1}{x+2} - \operatorname{sen} x & \text{si } x>-2 \end{cases}$$

c) $\left|\sqrt[3]{x-3}\right| = \begin{cases} -\sqrt[3]{x-3} & \text{si } x-3<0 \\ \sqrt[3]{x-3} & \text{si } x-3 \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -\sqrt[3]{x-3} & \text{si } x<3 \\ \sqrt[3]{x-3} & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

108. Dadas $f(x) = \dfrac{5x-1}{x+3}$ y $g(x) = 4$, calcula.

a) $(f+g)(2)$

b) $(f \cdot g)(1)$

c) $(f-g)(3)$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(0)$

a) $(f+g)(2) = \dfrac{5 \cdot 2 - 1}{2+3} + 4 \rightarrow (f+g)(2) = \dfrac{29}{5}$

b) $(f \cdot g)(1) = \dfrac{5 \cdot 1 - 1}{1+3} \cdot 4 \rightarrow (f \cdot g)(1) = 4$

c) $(f-g)(3) = \dfrac{5 \cdot 3 - 1}{3+3} - 4 \rightarrow (f-g)(3) = -\dfrac{5}{3}$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(0) = \dfrac{5 \cdot 0 - 1}{0+3} : 4 \rightarrow \left(\dfrac{f}{g}\right)(0) = -\dfrac{1}{12}$

109. **Calcula el dominio de estas funciones.**

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \qquad g(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

Utiliza el resultado obtenido para calcular el dominio de las siguientes funciones.

a) $(f + g)(x)$ b) $(f \cdot g)(x)$ c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ d) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

Dom $f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

Dom $g = [-5, 5]$

a) Dom $(f + g) = [-5, -2] \cup [2, 5]$

b) Dom $(f \cdot g) = [-5, -2] \cup [2, 5]$

c) Dom $\left(\frac{f}{g}\right) = (-5, -2] \cup [2, 5)$

d) Dom $\left(\frac{g}{f}\right) = [-5, -2) \cup (2, 5]$

110. **Dadas las funciones:**

$$f(x) = 3x - 1 \qquad g(x) = \frac{1}{x-2} \qquad h(x) = \sqrt{x+1}$$

define las siguientes funciones.

a) $(f + g)(x)$
b) $(f - (g + h))(x)$
c) $(f \cdot g)(x)$
d) $\left(\frac{g}{h}\right)(x)$
e) $f^2(x)$
f) $(h^2 + f)(x)$
g) $(g \cdot f + h^2)(x)$
h) $\left(\frac{f+g}{h}\right)(x)$

a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3x - 1 + \frac{1}{x-2} \rightarrow (f+g)(x) = \frac{3x^2-7x+3}{x-2}$

b) $(f-(g+h))(x) = f(x) - (g+h)(x) = f(x) - g(x) - h(x) = 3x - 1 - \frac{1}{x-2} - \sqrt{x+1} = \frac{3x^2-7x+1-(x-2)\sqrt{x+1}}{x-2}$

c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (3x-1) \cdot \frac{1}{x-2} = \frac{3x-1}{x-2}$

d) $\left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{1}{x-2} : \sqrt{x+1} = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-x-2}$

e) $f^2(x) = (3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$

f) $(h^2 + f)(x) = h^2(x) + f(x) = x + 1 + 3x - 1 = 4x$

g) $(g \cdot f + h^2)(x) = (f \cdot g)(x) + h^2(x) = \frac{3x-1}{x-2} + x + 1 = \frac{x^2+2x-3}{x-2}$

h) $\left(\frac{f+g}{h}\right)(x) = \frac{(f+g)(x)}{h(x)} = \frac{3x^2-7x+3}{x-2} : \sqrt{x+1} = \frac{3x^2-7x+3}{(x-2)\sqrt{x+1}} = \frac{(3x^2-7x+3)\sqrt{x+1}}{x^2-x-2}$

111. **Dadas las funciones $f(x) = 4x^2 + 11$ y $g(x) = \frac{5}{2}x$, calcula.**

a) $(f \circ g)(2)$ b) $(g \circ f)(2)$ c) $(f \circ f)(2)$ d) $(g \circ g)(2)$

a) $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = 4\left(\frac{5 \cdot 2}{2}\right)^2 + 11 = 111$

b) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = \frac{5}{2} \cdot (4 \cdot 2^2 + 11) = \frac{135}{2}$

c) $(f \circ f)(2) = f(f(2)) = 4(4 \cdot 2^2 + 11) + 11 = 119$

d) $(g \circ g)(2) = g(g(2)) = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2 = \frac{25}{2}$

112. **Calcula $(f \circ g)(2)$ si f y g son funciones que cumplen que $f(10) + 5 = 0$, $g(2) - 10 = 0$.**

$f(10) = -5$, $g(2) = 10 \rightarrow (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(10) = -5$

113. **Dadas las funciones $f(x) = 4$ y $g(x) = -2x^2 + 6x$, calcula $f \circ g$ y $g \circ f$.**

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4$ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4) = -2 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 = -8$

114. **Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 5$, calcula $f^{-1} \circ g$ y $g \circ f^{-1}$.**

$f^{-1}(x) = x^2$

$(f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = (x^2 - 5)^2 = x^4 - 10x^2 + 25$

$(g \circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = (x^2)^2 - 5 = x^4 - 5$

115. **Comprueba con las funciones $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = 3x - 2$ que la composición de funciones no es conmutativa. Calcula el dominio de $f \circ g$ y de $g \circ f$.**

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 2) = \sqrt{3x - 1}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x+1}\right) = 3\sqrt{x+1} - 2$

$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x) \rightarrow$ La composición de funciones no es conmutativa.

$\text{Dom } (f \circ g) = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

$\text{Dom } (g \circ f) = [-1, +\infty)$

116. **Para la función $h(x)$ encuentra dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que $(f \circ g)(x) = h(x)$.**

a) $h(x) = \sqrt{x - 3}$

b) $h(x) = \sqrt{x} - 3$

c) $h(x) = (3x - 1)^4$

d) $h(x) = \sqrt{\frac{1}{x - 2} + 1}$

a) $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = x - 3$

b) $f(x) = x - 3$ $g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = x^4$ $g(x) = 3x - 1$

d) $f(x) = \sqrt{x + 1}$ $g(x) = \frac{1}{x - 2}$

117. Explica de qué manera hay que componer

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} \qquad g(x) = 5x + 1 \qquad h(x) = \frac{2}{x+1}$$

para obtener las siguientes funciones.

a) $i(x) = 5\sqrt{x^2+4} + 1$

b) $i(x) = 25x + 6$

c) $i(x) = \dfrac{x+11}{x+1}$

d) $i(x) = \sqrt{x^2+8}$

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x^2+4}\right) = 5\sqrt{x^2+4} + 1$

b) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(5x+1) = 5(5x+1) + 1 = 25x + 6$

c) $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\dfrac{2}{x+1}\right) = \dfrac{10}{x+1} + 1 = \dfrac{x+11}{x+1}$

d) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\sqrt{x^2+4}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2 + 4} = \sqrt{x^2+8}$

118. Un objeto que se lanza hacia arriba puede llegar a una altura máxima determinada por la función, $h(t) = v_0 t - 4{,}9t^2 + h_0$ donde v_0 es la velocidad inicial del objeto, h_0 es la altura inicial (desde donde se inicia el movimiento) y t el tiempo.

Se lanza un cohete pirotécnico desde una plataforma situada a 2 m del suelo, con una velocidad inicial de 40 m/s.

a) ¿A qué altura máxima llegará el cohete?

b) Si se programa para que explote a los 5 s del lanzamiento, ¿a qué altura se producirá la explosión?

a) $h_0 = 2$ m $\qquad v_0 = 40$ m/s $\rightarrow h(t) = 40t - 4{,}9t^2 + 2$

La altura máxima se dará en el vértice de la parábola: (4,9; 80,35) → 80,35 m será la altura máxima que alcanzará el cohete.

b) $t = 5$ s $\rightarrow h(t) = 40 \cdot 5 - 4{,}9 \cdot 5^2 + 2 = 79{,}5$ m

119. El precio en euros de un artículo perecedero que empieza a venderse el primer día de un determinado mes, varía con el tiempo, en días, según la función:

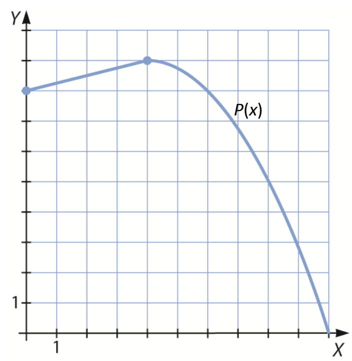
$$P(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{4} + 8 & \text{si } 0 \le t \le 4 \\ \dfrac{-t^2}{4} + 2t + 5 & \text{si } 4 < t \le 10 \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el precio inicial del artículo?

b) Dibuja la gráfica de la función $P(t)$.

a) $t = 0 \rightarrow P(0) = 8 \rightarrow$ El precio es de 8 €.

b)



120. **Un estudio sobre el medio ambiente ha estimado que el nivel medio de monóxido de carbono en el aire es $M(x) = 1 + 0{,}5x$ partes por millón cuando el número de personas es x miles. Si la población en miles en el momento t es:**

$$P(t) = 200 + 257 + 0{,}3t^2$$

a) Escribe la función que expresa el nivel de monóxido de carbono en el aire como una función del tiempo.

b) Calcula para $t = 10$ el nivel de monóxido de carbono.

a) Para calcular en este caso cuál es el nivel de monóxido de carbono en función del tiempo hay que componer ambas funciones, por lo que

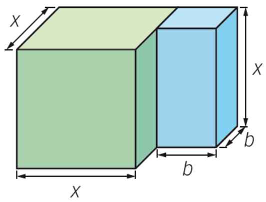
$$(M \circ P)(t) = M(P(t)) = 1 + 0{,}5(457 + 0{,}3t^2)$$

b) Para $t = 10$, el nivel de monóxido de carbono será

$$M(10) = 1 + 0{,}5(457 + 0{,}3 \cdot 10^2) = 1 + 243{,}5 = 244{,}5$$

121. **El dibujo representa un sistema de tanques de agua. Uno de ellos es un tanque cúbico de lado x y el otro un tanque de altura x y base cuadrada de lado b.**

Encuentra una función que exprese el volumen total del sistema de tanques en función de la longitud de las aristas de los mismos.



El volumen total viene dado por la fórmula $V(x, b) = x^3 + xb^2$.

122. **Para repoblar un lago se introducen inicialmente 50 peces de una especie que triplica el número de miembros cada dos meses.**

a) ¿Cuál es la fórmula de la función que representa el crecimiento de la población de peces en función de los meses?

b) ¿Cuántos peces hay después de 4 años?

c) ¿Después de cuánto tiempo la población de peces será de 1 000 individuos?

a) Teniendo en cuenta los datos iniciales, como la población inicial son 50 peces, en dos meses habrá 150 peces, en 4 habrá 450, y en seis 1 350, y así sucesivamente:

$f(m) = 50 \cdot 3^{\frac{m}{2}}$

b) Para calcular cuántos peces hay en cuatro años, se puede usar la misma fórmula del apartado anterior, previa conversión de años a meses: 4 años = 48 meses.

Por tanto, después de 4 años habrá $50 \cdot 3^{24} = 14\,121\,476\,824\,050$ peces.

c) Para estimar cuánto tiempo se necesita, se calcula:

$$50 \cdot 3^{\frac{m}{2}} = 1000 \rightarrow 3^{\frac{m}{2}} = 20 \rightarrow m = 2\log_3 20 = 5,45$$

Y se aproxima al siguiente mes, es decir 6 meses.

123. **En un lago existe una especie de pez grande que se alimenta de una raza de peces más pequeña, y esta, a su vez, se alimenta de plancton. El número de peces grandes es una función $f(x)$ de la cantidad x de peces pequeños, y el número de peces pequeños es una función $g(y)$ de la cantidad y de plancton del lago. Expresa la población de peces grandes en función del plancton del lago si:**

$$f(x) = 30 + \sqrt{\frac{x}{120}} \qquad g(y) = 4y - 1$$

En este caso, lo único que habrá que hacer es componer una función con otra, o lo que es lo mismo:

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = 30 + \sqrt{\frac{4y-1}{120}}$$

124. **Según la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura de un objeto sigue la función:**

$$f(t) = T + (C - t) \cdot e^{-kt}$$

donde T es la temperatura ambiente, C la temperatura inicial, t el tiempo transcurrido y k la tasa de enfriamiento del objeto por unidad de tiempo.

Un objeto con una temperatura de 40 °C se deja al aire libre donde la temperatura es de 25 °C y después de 10 minutos la temperatura del objeto es de 34 °C. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que el objeto se enfríe hasta tener una temperatura de 30 °C?

$f(10) = 34 = 25 + (40 - 10) \cdot e^{-10k} \rightarrow k = 0,12$ $\qquad$ $30 = 25 + (40 - t) \cdot e^{-0,12t} \rightarrow t \approx 13,802$ min

125. **Una ONG ha estimado que el número de personas ingresadas en los hospitales tras un tsunami sigue aproximadamente la fórmula:**

$$P(t) = 1 + \frac{110}{t^2 + 10} \qquad t \in (0, 30)$$

donde P es el número de personas hospitalizadas, en miles, y t es el número de días transcurridos desde el tsunami.

a) ¿Cuántas personas habrá hospitalizadas el primer día?

b) ¿Y cuántas habrá al cabo de tres semanas?

c) Si la capacidad hospitalaria de una isla del área afectada es de 2000 camas, ¿hasta qué día estuvo desbordada la capacidad?

a) 11 000 personas

b) 1 243 personas

c) $1 + \dfrac{110}{t^2 + 10} = 2 \rightarrow t^2 + 120 = 2t^2 + 20 \rightarrow t^2 - 100 = 0 \rightarrow t = \pm 10$

Como el número de personas hospitalizadas decrece según el número de días la capacidad de hospitalización estuvo desbordada hasta el décimo día.

PARA PROFUNDIZAR

126. **Elige la respuesta adecuada.** **(Concurso de Primavera)**

La parábola de eje vertical y vértice $V(2, 1)$ que pasa por $(4, 9)$, ¿por cuál de estos puntos pasa?	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
La función f verifica que $f(3x-1) = x^3 + x + 1$ para cualquier número real x. ¿Cuál es el valor de $f(5)$?	7	13	31	11	131
Sea $f(x)$ una función tal que $f(x) + 2f(-x) = sen\ x$ para todo número real. ¿Cuál es el valor de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$?	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
Si $f(x) = 3^x + 5$, el dominio de f^{-1} es:	$(0, +\infty)$	$(5, +\infty)$	$(8, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(3, +\infty)$
Averigua el número de valores de x pertenecientes al intervalo $(0,01; 1)$ en el que la gráfica de la función $f(x) = sen\ \frac{1}{x}$ corta al eje de abscisas.	31	28	56	14	112

- De los datos del enunciado se puede obtener que, si se formula la parábola como $ax^2 + bx + c$, entonces:

$$\left.\begin{array}{r} -\frac{b}{2a} = 2 \\ 2^2a + 2b + c = 1 \\ 16a - 16a + c = 9 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -b = 4a \\ 4a + 2b + c = 1 \\ c = 9 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 9 \end{array}\right\}$$

La parábola pasa por el punto (1, 3), fruto de sustituir $x = 1$ en $2x^2 - 8x + 9$.

- Como $3x - 1 = 5 \to x = 2$, sustituyendo en la fórmula, con lo que se obtiene el valor:

$$f(5) = f(3\cdot 2 - 1) = 2^3 + 2 + 1 = 8 + 2 + 1 = 11$$

- Lo más fácil para resolver este ejercicio es proponer un sistema de ecuaciones con $x = \frac{\pi}{2}$ y con $x = -\frac{\pi}{2}$. Esto conduce a:

$$\left.\begin{array}{r} f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{array}\right\} \xrightarrow{1^a - 2\cdot 2^a} -3f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \to f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

- Si lo primero que se hace es calcular la inversa de $f(x)$, de esta manera se verá qué dominio tiene

$$f(x) = 3^x + 5 \to x = 3^{f^{-1}(x)} + 5 \to x - 5 = 3^{f^{-1}(x)} \to f^{-1}(x) = \log_3(x-5) \to \text{Dom}\ f^{-1} = (5, +\infty)$$

- Para obtener el número de veces que f corta con el eje X, basta con calcular las raíces de $f(x)$.

$$f(x) = sen\frac{1}{x} = 0 \to x = \frac{1}{\pi n},\ n \neq 0,\ n \in \mathbb{Z}$$

¿Para qué valores se obtendrá $1 > x = \frac{1}{n\pi} > 0{,}01$?

Bastará resolver la inecuación y comprobar a partir de qué n no se aplica:

$x = \frac{1}{\pi n} > 0{,}01 \to \frac{100}{\pi} > n \to n < 31{,}8$ → Corta 31 veces.

127. Considera las funciones *f* y *g* que se definen a continuación:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

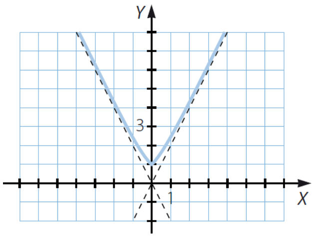
Comprueba que se cumple lo siguiente:

$$[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$$

$$[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2} - \left(\frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} - \frac{1}{2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{e^{2x}}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

128. Razona para qué valores de x se hace mayor la diferencia $\sqrt{x^2 + 1} - |x|$.

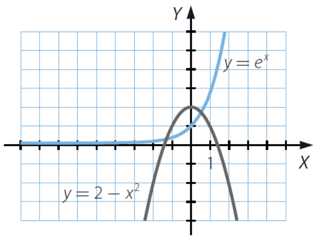


La diferencia alcanza el mayor valor para $x = 0$.

129. ¿Cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones en el intervalo $[-\pi, \pi]$?

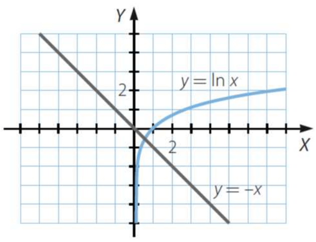
a) $e^x = 2 - x^2$ b) $\ln x = -x$ c) $\text{sen}\, x = \frac{x}{2}$

a)



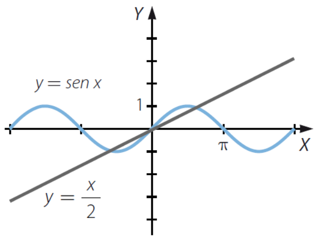
Tiene dos soluciones.

b)



Tiene una solución.

c)



Tiene tres soluciones.

130. Las manecillas de un reloj miden 20 y 30 centímetros, respectivamente. Si en este momento las manecillas están entre las 12:00 h y las 12:30 h, responde a las siguientes preguntas.

a) Expresa el ángulo que forman en función del tiempo, t, medido en minutos.

b) Halla el área del triángulo creado al unir sus extremos en función de t. ¿Puede tomar el valor 0? ¿A qué hora alcanza su mayor valor?

c) Expresa la distancia entre los extremos de las agujas en función de t.

a) Como la manecilla que marca las horas tarda 12 horas en completar una vuelta (2π radianes), su velocidad es: $v_h = \frac{2\pi}{720} = \frac{\pi}{360}$ rad/min

Análogamente, la velocidad de la otra manecilla es: $v_m = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$ rad/min

El ángulo que forman ambas manecillas es la diferencia entre los ángulos recorridos por cada una, en función del tiempo t transcurrido:

$$\alpha = \frac{\pi}{30}t - \frac{\pi}{360}t = \frac{11\pi}{360}t \text{ rad}$$

b) $A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 \cdot sen\left(\frac{11\pi}{360}t\right) = 300\ sen\left(\frac{11\pi}{360}t\right)$

Esta función se anula si el ángulo mide $k\pi$ radianes, con $k \in \mathbb{Z}$. En el intervalo de tiempo dado esta condición solo se cumple a las 12 horas ($\alpha = 0$).

Como el mayor valor de la función seno se alcanza cuando el ángulo mide $\frac{\pi}{2}$ radianes, hay que calcular a qué hora el ángulo formado tiene esta amplitud:

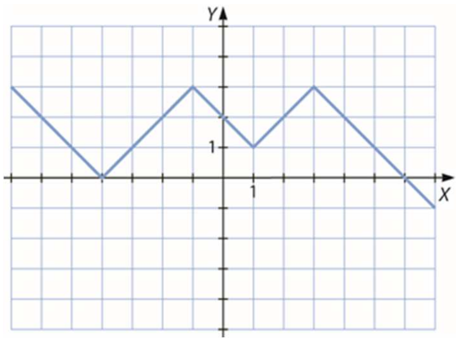
$\frac{11\pi}{360}t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 16{,}36$ El área es máxima a las 12 horas y 16,36 minutos.

c) Por el teorema del coseno, la distancia entre las agujas es:

$$d = \sqrt{20^2 + 30^2 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot cos\left(\frac{11\pi}{360}t\right)} = \sqrt{1\,300 - 1\,200\ cos\left(\frac{11\pi}{360}t\right)} =$$
$$= 10\sqrt{13 - 12\ cos\left(\frac{11\pi}{360}t\right)}$$

131. Representa gráficamente la siguiente función en el intervalo $-8 \leq x \leq 8$.

$$f(x) = |||x - 1| - 2| - 3|$$



132. Sea f una función para la que $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$ si x es distinto de 0 y de 1. ¿Cuál es el valor de $f(2)$?

(Olimpiadas matemáticas)

Al saber que la fórmula es válida siempre que x es distinto de 0 y de 1, la mejor idea es probar a resolver:

$f(2) + f(-1) = 2 \rightarrow f(2) = 2 - f(-1)$

Y falta aún por saber el valor de $f(-1)$. Como $x = -1$ es distinto de 0 y de 1, se puede volver a usar la ecuación para ver el valor de $f(-1)$, porque quizá eso ayude:

$$f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \rightarrow f(-1) = -1 - f\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow f(2) = 3 + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ahora el valor desconocido es $f\left(\frac{1}{2}\right)$, pero como $x = \frac{1}{2}$ es distinto de 0 y de 1, se puede volver a utilizar la ecuación, con lo que se obtiene:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = \frac{1}{2} \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - f(2) \rightarrow f(2) = 3 + \frac{1}{2} - f(2) \rightarrow 2f(2) = \frac{7}{2} \rightarrow f(2) = \frac{7}{4}$$

133. **Tenemos una colección de esferas iguales que apilamos formando un tetraedro cuyas aristas tienen todas *n* esferas.**

Calcula en función de *n* el número total de puntos de tangencia (contactos) que hay entre las esferas del montón.

(Olimpiadas matemáticas)

Podemos sumar los contactos de cada bola y luego dividir por 2. Tenemos entonces:

1. 1 bola en cada uno de los 4 vértices, con tres contactos cada una: $4 \cdot 3 = 12$
2. $n - 2$ bolas internas en cada una de las seis aristas, con 6 contactos cada una: $6 \cdot 6 \cdot (n-2) = 36n - 72$
3. $T(n - 3)$ bolas internas de cada cara, por 4 caras y 9 contactos cada una:

$$36 \cdot T(n-3) = \frac{36(n-3)(n-2)}{2} = 18n^2 - 90n + 108$$

Donde $T(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + \ldots + n$ es el enésimo número triangular.

4. $P(n - 4)$ bolas internas, con 12 contactos cada una, siendo $P(n) = T(1) + T(2) + \ldots + T(n)$ el enésimo número piramidal:

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} T(k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + k = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1+3) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

5. Entonces, $12P(n-4) = 2(n-4)(n-3)(n-2) = 2n^3 - 18n^2 + 52n - 48$ y al sumar los distintos tipos de bolas según sus contactos, y dividiendo entre dos para evitar repetición, obtenemos:

$$\frac{\left(12 + 36n - 72 + 18n^2 - 90n + 108 + 2n^3 - 18n^2 + 52n - 48\right)}{2} = n^3 - n = n\left(n^2 - 1\right)$$

Por tanto, en función del número n de bolas por lado, habrá $n(n^2 - 1)$ contactos, para tetraedros con lados formados por un número de esferas $n = 1, 2, \ldots$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **¿Cuál es el espesor de la estratosfera en el ecuador?**

La estratosfera tiene en el ecuador un espesor de 35 km.

2. **¿Qué relación hay entre la temperatura y las capas de la atmósfera?**

Proporcionalidad directa, donde la temperatura baja a medida que la altura sube, a razón de 6 ºC.

3. **¿En qué capa se registra la menor temperatura?**

En la estratosfera, con temperaturas de hasta –53ºC.

4. **De acuerdo con el gráfico, ¿qué temperatura tiene la atmósfera a 110 km de altura?**

A 110 km de altura se habla de estar dentro de la termosfera, donde puede haber hasta 1 500 ºC, cuando el Sol está activo.

5. **¿Dónde se encuentra la capa de ozono? Investiga cuál es la actual situación de la capa de ozono y por qué es tan importante su recuperación y conservación.**

La capa de ozono se encuentra situada en la estratosfera.

Actualmente la capa de ozono se encuentra en una situación de desgaste grave debido a los conocidos gases de *efecto invernadero*, lo que provoca una menor filtración a los rayos ultravioleta, y que conlleva un crecimiento de problemas varios como derretimiento de los polos, problemas para que las plantas hagan la fotosíntesis, melanomas, cataratas oculares...

Sin esta capa todos estos problemas se incrementarían de forma exponencial, lo que implica un daño enorme en el ecosistema y unas consecuencias horribles para la humanidad. De ahí que se tenga que concienciar a todas las personas para que se fomente su recuperación y posterior conservación, para tener un mundo mejor donde vivir mañana.

6. **Si se asume que la temperatura a nivel del mar es de 20 °C, ¿qué temperatura deberá tener aproximadamente la cima del Everest a 8 848 m de altura?**

Sabiendo que en la troposfera por cada kilómetro que se sube se pierden 6 º C, y con la condición de que a nivel del mar hacen 20 ºC, si aproximamos la altura del Everest a 9 000 m, que son 9 km, implica que habrá perdido 54 ºC en esta subida, así que la temperatura que deberá tener la cima será de $20 - 54 = -34$ ºC.

Límite de una función

9

ACTIVIDADES

1. Calcula los términos a_{100}, a_{101} y a_{102} de la sucesión con este término general.

$$a_n = \frac{n-2}{n^2}$$

$a_{100} = \frac{49}{5\,000}$ $\quad$ $a_{101} = \frac{99}{10\,201}$ $\quad$ $a_{102} = \frac{25}{2\,601}$

2. Obtén el término general de estas sucesiones.

a) 1, 3, 5, 7, …

b) $\frac{3}{5}, \frac{7}{15}, \frac{11}{45}, \dots$

c) 0, 2, 6, 12, 20, …

d) $\frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{9}, \frac{-3}{16}, \dots$

a) $a_n = 2n-1$

b) $a_n = \frac{4n-1}{5\cdot 3^{n-1}}$

c) $a_n = n(n-1)$

d) $a_n = \frac{-2n+5}{n^2}$

3. Usando la calculadora, halla el límite de las sucesiones.

a) $a_n = (-1)^{2n+4}$

b) $a_n = n^2$

c) $a_n = n^2 - n^3$

d) $a_n = 0{,}2^n$

e) $a_n = \frac{n+3}{n}$

f) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 7$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -7$

4. Escribe sucesiones con estos valores como límites.

a) 0

b) $+\infty$

c) $-\infty$

d) 4

e) -3

f) 0,5

g) No tenga límite.

h) Un número a.

i) a^2.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $a_n = \frac{4}{5n+1}$

b) $a_n = 3n^3 - 7$

c) $a_n = 4-n$

d) $a_n = \frac{4n-1}{n+10}$

e) $a_n = \frac{1-3n}{n}$

f) $a_n = \frac{n+5}{2n}$

g) $a_n = (-1)^n$

h) $a_n = \frac{an^2}{(n-1)^2}$

i) $\frac{a^2 n}{n-5}$

5. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\dfrac{1}{2}n^2 - 2n + 7\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\dfrac{1}{2}n^2 - 2n + 7\right) = -\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = +\infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty$

6. Halla los límites de las sucesiones cuyos términos generales son los siguientes.

a) $\dfrac{8n}{2n^2 + 3n - 1}$

b) $\dfrac{(n-1)^{10}}{(n+2)^{10}}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n}{2n^2 + 3n - 1} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)^{10}}{(n+2)^{10}} = 1$

7. Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^5 - n^2}{2n^6 + 1} - \dfrac{3n^2 - 1}{n^2 + 1}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2 - 1}{n^3} \cdot \dfrac{4n^4}{2n^4 + 3}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \dfrac{n^2 + 7}{2n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{3n^2 + 1}{n^2 + n + 2}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n-1} - \dfrac{n-1}{n+1}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3(1-n)}{2n^4 - n - 1} + \dfrac{4}{n^2}\right)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^5 - n^2}{2n^6 + 1} - \dfrac{3n^2 - 1}{n^2 + 1}\right) = -3$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2 - 1}{n^3} \cdot \dfrac{4n^4}{2n^4 + 3}\right) = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \dfrac{n^2 + 7}{2n} = +\infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{3n^2 + 1}{n^2 + n + 2}} = \sqrt{3}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n-1} - \dfrac{n-1}{n+1}\right) = 0$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3(1-n)}{2n^4 - n - 1} + \dfrac{4}{n^2}\right) = -\dfrac{1}{2}$

8. Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^4 + 1}{2n^4 + 1} + \dfrac{-n^3}{3n^3 + n + 1}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \dfrac{2n^3 + 1}{2n^3 + n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \left(\dfrac{2}{n}\right) \dfrac{(n+1)(n-1)}{(n+1)^2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} 9^{\frac{2n^2-1}{n^2+1}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}1^{\frac{n+1}{n^2}}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2 + 1}{n^2}\right)^{\frac{n+1}{n^2}}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^4 + 1}{2n^4 + 1} + \dfrac{-n^3}{3n^3 + n + 1}\right) = \dfrac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \left(\dfrac{2n^3 + 1}{2n^3 + n}\right) = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \left(\dfrac{2}{n}\right) \cdot \dfrac{(n+1)(n-1)}{(n+1)^2} \to$ No existe.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} 9^{\frac{2n^2-1}{n^2+1}} = 81$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}1^{\frac{n+1}{n^2}} = 1$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2 + 1}{n^2}\right)^{\frac{n+1}{n^2}} = 1$

9. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{-n-5}-\dfrac{2n^2}{n+2}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{-2n+1}{n^2-5}-\dfrac{n^2}{n+2}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{2}\right)^n\dfrac{1}{3n-2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n-3}{(0,3)^n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{-n-5}-\dfrac{2n^2}{n+2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{-n-5}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n+2}=-1-\infty=-\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{-2n+1}{n^2-5}-\dfrac{n^2}{n+2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n+1}{n^2-5}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n+2}=0-\infty=-\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{2}\right)^n\dfrac{1}{3n-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{2}\right)^n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3n-2}=+\infty\cdot 0\ \longrightarrow$ Indeterminación.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n-3}{(0,3)^n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}-n-3}{\lim\limits_{n\to\infty}(0,3)^n}=\dfrac{-\infty}{0}=-\infty$

10. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{n-2}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\log\dfrac{3n^2-6}{3n^2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+5}\right)^n$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-n}{n-2}\right)^n$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{n-2}}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-2}}=\sqrt{1}=1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\log\dfrac{3n^2-6}{3n^2}=\log\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-6}{3n^2}=\log 1=0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+5}\right)^n=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+5}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}n}=0^{+\infty}=0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-n}{n-2}\right)^n=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n}{n-2}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}n}=(-1)^{\infty}\ \longrightarrow$ No existe.

11. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3-2n^2+6}}{n-3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2}{\sqrt{n^3-n^2-5}}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3-2n^2+6}}{n-3}\rightarrow\dfrac{+\infty}{+\infty}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3-2n^2+6}}{n-3}\rightarrow$ El mayor grado de n es $\dfrac{3}{2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3-2n^2+6}}{n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{n^3-2n^2+6}}{n^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{n-3}{n^{\frac{3}{2}}}}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-2n^2+6}{n^3}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-3}{n^{\frac{3}{2}}}}=\frac{1}{0}=+\infty$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2}{\sqrt{n^3-n^2-5}}\rightarrow\dfrac{+\infty}{+\infty}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2}{\sqrt{n^3-n^2-5}}\rightarrow$ El mayor grado de n es 3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2}{\sqrt{n^3-n^2-5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^3+3n^2}{n^3}}{\dfrac{\sqrt{n^3-n^2-5}}{n^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2}{n^3}}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-n^2-5}{n^6}}}=\frac{1}{0}=+\infty$$

12. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8n^4+3n-1}}{3n^2-1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{\sqrt[3]{-3n^3+5n^2+7n-1}}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8n^4+3n-1}}{3n^2-1} \to \dfrac{+\infty}{+\infty}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8n^4+3n-1}}{3n^2-1} \to$ El mayor grado de n es 2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8n^4+3n-1}}{3n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[3]{8n^4+3n-1}}{n^2}}{\dfrac{3n^2-1}{n^2}} = 0$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{\sqrt[3]{-3n^3+5n^2+7n-1}} \to \dfrac{+\infty}{-\infty}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{\sqrt[3]{-3n^3+5n^2+7n-1}} \to$ El mayor grado de n es 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{\sqrt[3]{-3n^3+5n^2+7n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n+3}{n}}{\dfrac{\sqrt[3]{-3n^3+5n^2+7n-1}}{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-3}}$$

13. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n} - \dfrac{n^2}{n+1}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1-2n^2}{3n-2} - \dfrac{-3n^2}{n-4}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3+2}{4n^2-n-1} - \dfrac{n^3+2n+1}{n^2+1}\right)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n} - \dfrac{n^2}{n+1}\right) \to \infty - \infty$ $\qquad \left(\dfrac{n^2+1}{n} - \dfrac{n^2}{n+1}\right) = \dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n} - \frac{n^2}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+n} = 1$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1-2n^2}{3n-2} - \dfrac{-3n^2}{n-4}\right) \to -\infty + \infty$ $\qquad \dfrac{1-2n^2}{3n-2} - \dfrac{-3n^2}{n-4} = \dfrac{7n^3+2n^2+n-4}{3n^2-14n+8}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-2n^2}{3n-2} - \frac{-3n^2}{n-4}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{7n^3+2n^2+n-4}{3n^2-14n+8} = +\infty$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3+2}{4n^2-n-1} - \dfrac{n^3+2n+1}{n^2+1}\right) \to \infty - \infty$ $\qquad \dfrac{n^3+2}{4n^2-n-1} - \dfrac{n^3+2n+1}{n^2+1} = \dfrac{-3n^5+n^4-6n^3+3n+3}{n^4-n^3+3n^2-n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+2}{4n^2-n-1} - \frac{n^3+2n+1}{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-3n^5+n^4-6n^3+3n+3}{n^4-n^3+3n^2-n-1} = -\infty$$

14. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-2}-\sqrt{n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{n^2-1}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+1}-n\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n-1}-\sqrt{n^2+1}\right)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-2}-\sqrt{n}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-2}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{n-2}+\sqrt{n}}=0$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{n^2-1}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{n^2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{2n+\sqrt{n^2-1}}=+\infty$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+1}-n\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+1}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+3n+1}{\sqrt{3n+1}+n}=-\infty$$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n-1}-\sqrt{n^2+1}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n-1}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-2}{\sqrt{n^2+4n-1}+\sqrt{n^2+1}}=2$$

15. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n-1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{3}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{\frac{n-1}{3}}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\to 1^{\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{5}}=e^{\frac{1}{5}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n-1}\to 1^{\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{\frac{3}{n}\cdot(n-1)}=e^{3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{3}}\to 1^{\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-\frac{2}{3}}=e^{-\frac{2}{3}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{\frac{n-1}{3}}\to 1^{\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{\frac{n-1}{3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-2n}\right)^{-2n}\right]^{-\frac{1}{2n}\cdot\frac{n-1}{3}}=e^{-\frac{1}{6}}$

16. Halla estos límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{3n-2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^{2n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^{n}\to 1^{\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^{5}=e^{5}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n+1}\right)^{n}\to 1^{\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n+1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-\frac{n+1}{2}}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\right]^{-\frac{2n}{n+1}}=e^{-2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2n}\right)^{3n-2}\to 1^{\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2n}\right)^{3n-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{2n}{3}}\right)^{\frac{2n}{3}}\right]^{\frac{3(3n-2)}{2n}}=e^{\frac{9}{2}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n}{n^2+1}\right)^{2n}\to 1^{\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n}{n^2+1}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{n^2+1}{n}}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}\right]^{\frac{2n^2}{n^2+1}}=e^{2}$

17. **Calcula estos límites.**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{x-2-6x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x(x^2-1)}{2-x^2}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{x-2-6x^2}=-\dfrac{1}{2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x\cdot(x^2-1)}{2-x^2}=-\infty$

18. **Halla los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-1}{2+3x}\right)^{3x^2}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-x\right)=-\infty$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-1}{2+3x}\right)^{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-\frac{3x+2}{3}}\right)^{\left(-\frac{3x+2}{3}\right)}\right]^{\left(-\frac{3}{3x+2}\right)\cdot 3x^2}=0$

19. **Halla los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos indicados.**

a) $\dfrac{-2x+1}{x-1}$ en $x=1$ b) $\dfrac{x}{|x|}$ en $x=0$

a) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-2x+1}{x-1}=-\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-2x+1}{x-1}=+\infty$ b) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{|x|}=1$ $\quad \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{|x|}=-1$

20. **Indica cuáles son los límites laterales en $x=-2$ de la siguiente función.**

$$f(x)=\begin{cases}3x+4 & \text{si } x<-2\\ 1-x^2 & \text{si } x\geq -2\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}3x+4=-2$ $\qquad \lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}1-x^2=-3$

21. Halla los límites de las funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2-2x+3}$ en $x = 1$

b) $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$ en $x = -1$

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x-1}{x^2-2x+3} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2-x}{x+1} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2-x}{x+1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2-x}{x+1} = +\infty \end{cases} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

22. Razona si existe o no el límite en $x = 2$, en $x = 3$ y en $x = 4$ de la función $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3} + \dfrac{x+3}{x-2}$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) \to \dfrac{5}{0}$ $\quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \dfrac{37}{6}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 4} f(x) = \dfrac{53}{14}$

23. Calcula el límite de $f(x)$ en $x = 0$ y en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{x-2}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 3 - x = 3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-2}{x+1} = -2 \end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x-2}{x+1} = \dfrac{1}{4}$

24. Halla el valor de los límites que aparecen a continuación.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} \to \dfrac{0}{0}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 8} \to \dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 8} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x^2+4)(x+2)(x-2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = -\dfrac{8}{3}$

25. Pon un ejemplo de una función que tenga como asíntotas horizontales estas rectas.

a) $y = 1$ b) $y = 2$ c) $y = 3$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $y = 1 \to f(x) = \dfrac{2x-1}{2x+8}$ b) $y = 2 \to f(x) = \dfrac{2x^2}{(x+1)^2}$ c) $y = 3 \to f(x) = \dfrac{3x^2-5}{x^2+7x-3}$

26. ¿Una función puede tener dos asíntotas horizontales? ¿Y tres?

- Sí, basta con que el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ sean distintos de $+\infty$ o $-\infty$ y distintos entre sí.
- No.

27. Halla las asíntotas horizontales de las funciones que aparecen a continuación.

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{1 - 2x^3}{4x^3 - 2x}$

c) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 - 1} = \dfrac{3}{2} \to f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = \dfrac{3}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - 2x^3}{4x^3 - 2x} = -\dfrac{1}{2} \to f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = -\dfrac{1}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x - 1}{x} = 2 \to f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 2$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3} = 1 \to f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.

28. Halla las asíntotas verticales de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 1}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$f(x)$ no tiene asíntotas verticales.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota vertical en } x = -2.$$

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 1.$$

29. Halla, si es que tienen, las asíntotas oblicuas de las funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x}{x^2 - 9}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - x} = 1 \to \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x^2 + x}{x - 1} = 1$

$f(x)$ tiene la asíntota oblicua $y = x + 1$.

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-x^3}=0$

$f(x)$ tiene una asíntota horizontal. Por tanto, no tiene asíntota oblicua.

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2x}{x^3-9x}=3\to\lim_{x\to+\infty}f(x)-3x=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2x-3x^3+9x}{x^2-9}=0$

$f(x)$ tiene la asíntota oblicua $y=3x$.

30. Estudia la continuidad de las funciones que aparecen a continuación.

a) $f(x)=x^{-2}$ b) $f(x)=\sqrt{x-4}$ c) $f(x)=\ln(1-x^2)$

a) Dom $f=\mathbb{R}-\{0\}\to f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$.
b) Dom $f=[4,+\infty)\to f(x)$ es continua en $[4,+\infty)$.
c) Dom $f=(-1,1)\to f(x)$ es continua en $(-1,1)$.

31. Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$ b) $f(x)=e^{x+1}$ c) $f(x)=\operatorname{sen}x^2-1$

a) Dom $f=\mathbb{R}-\{-3\}\to f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{-3\}$.

b) Dom $f=\mathbb{R}\to f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

c) Dom $f=\mathbb{R}\to f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

32. Estudia la continuidad de las funciones que aparecen a continuación.

a) $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{si } x\le 1\\ x & \text{si } 1<x<4\\ 5 & \text{si } x\ge 4\end{cases}$

a) Dom $f=\mathbb{R}-\{2\}$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to2^-}f(x)=-\infty\\ \lim_{x\to2^+}f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim_{x\to2}f(x)$ y $f(x)$ no es continua en $x=2$.

La discontinuidad es inevitable de salto infinito. La función tiene una asíntota vertical en $x=2$.

b) Dom $f=\mathbb{R}-\{0\}$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to0^-}f(x)=-\infty\\ \lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim_{x\to0}f(x)$ y $f(x)$ no es continua en $x=0$.

La discontinuidad es inevitable de salto infinito. La función tiene una asíntota vertical en $x=0$.

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to1^-}f(x)=1\\ \lim_{x\to1^+}f(x)=1\end{array}\right\}\to\exists\lim_{x\to1}f(x)=1$

Como $\exists f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$, la función es continua en $x=1$.

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to4^-}f(x)=4\\ \lim_{x\to4^+}f(x)=5\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim_{x\to4}f(x)$ y $f(x)$ no es continua en $x=4$.

La discontinuidad es inevitable de salto finito.

33. Estudia la continuidad de las funciones e indica el tipo de discontinuidad que presentan.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1} & \text{si } x<1\\ 2x-3 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2-3x+2} & \text{si } x\leq 1\\ \dfrac{1}{2x-1} & \text{si } x>1\end{cases}$

a) Dom $f=\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-1\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 1} f(x) \text{ y } f(x) \text{ no es continua en } x=1.$$

La discontinuidad es de salto infinito. La función tiene una asíntota vertical en $x=1$.

b) Dom $f=\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 1} f(x) \text{ y } f(x) \text{ no es continua en } x=1.$$

La discontinuidad es de salto infinito. La función tiene una asíntota vertical en $x=1$.

SABER HACER

34. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^3+3n-1}}{\sqrt{1+2n^2}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-6n+1}}{7n^3-7}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^2+n+7}}{8n-1}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^3+3n-1}}{\sqrt{1+2n^2}}\to\dfrac{+\infty}{+\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^3+3n-1}}{\sqrt{1+2n^2}}\to$ El mayor grado de n es 1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2n^3+3n-1}}{\sqrt{1+2n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{2n^3+3n-1}}{n}}{\dfrac{\sqrt{1+2n^2}}{n}}=\frac{\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+3n-1}{n^3}}}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n^2}{n^2}}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-6n+1}}{7n^3-7}\to\dfrac{+\infty}{+\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-6n+1}}{7n^3-7}\to$ El mayor grado de n es 3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-6n+1}}{7n^3-7}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{n^2-6n+1}}{n^3}}{\dfrac{7n^3-7}{n^3}}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-6n+1}{n^6}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^3-7}{n^3}}=\frac{0}{7}=0$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^2+n+7}}{8n-1}\to\dfrac{+\infty}{+\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^2+n+7}}{8n-1}\to$ El mayor grado de n es 1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2n^2+n+7}}{8n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{2n^2+n+7}}{n}}{\dfrac{8n-1}{n}}=\frac{\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+7}{n^3}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n-1}{n}}=\frac{0}{8}=0$$

35. **Calcula estos límites.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2n}{n^2-1}\right)^{3n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{5+2n}\right)^{n^2-3}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-n^2}{-n^2+2}\right)^{3n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2n}{n^2-1}\right)^{3n}\to 1^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n}{n^2-1}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-1}{2n}}\right)^{\frac{n^2-1}{2n}}\right]^{\frac{2n}{n^2-1}\cdot 3n}=e^6$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{5+2n}\right)^{n^2-3}\to 1^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{5+2n}\right)^{n^2-3}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{5+2n}{6}}\right)^{-\frac{5+2n}{6}}\right]^{-\frac{6}{5+2n}\cdot(n^2-3)}=e^{-\infty}=0$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-n^2}{-n^2+2}\right)^{3n}\to 1^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-n^2}{-n^2+2}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2-2}\right)^{n^2-2}\right]^{\frac{1}{n^2-2}\cdot 3n}=e^0=1$$

36. **Halla el valor de los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+16}$

b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5x-9}{2x^2+6x}$

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+16}=0$

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{5x-9}{2x^2+6x}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{5x-9}{2x^2+6x}=+\infty\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5x-9}{2x^2+6x}$ no existe.

37. **Determina los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

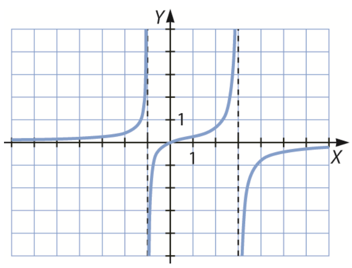
a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\to\dfrac{0}{0}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}\to\dfrac{0}{0}$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\dfrac{2}{3}$

38. **Representa la gráfica de una función que corta a los ejes en el origen, siempre es creciente, tiene asíntotas verticales en $x=-1$ y $x=3$ y una horizontal en $y=0$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$f(x)=-\dfrac{x}{x^2-2x-3}$



39. Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{3x^4-2x^2+5x-1}{1-x}$

b) $f(x)=\dfrac{5x+x^2-3}{4+3x}$

c) $f(x)=\dfrac{2x^4+3x}{1-x^2}$

d) $f(x)=\dfrac{5-2x-x^3}{1-x}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4-2x^2+5x-1}{1-x}=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4-2x^2+5x-1}{1-x}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+x^2-3}{4+3x}=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x+x^2-3}{4+3x}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4+3x}{1-x^2}=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4+3x}{1-x^2}=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-2x-x^3}{1-x}=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5-2x-x^3}{1-x}=+\infty$

40. Halla las asíntotas horizontales y oblicuas de estas funciones.

a) $f(x)=\dfrac{2x^4+3x}{1-x^2}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{-3x}$ c) $f(x)=\dfrac{2x-x^3}{x^2-1}$ d) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-5x}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x}{1-x^2}=-\infty\to f(x)$ no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3}{-3x^2}=-\dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3}{-3x}+\dfrac{1}{3}x=0\to f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y=-\dfrac{1}{3}x$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-x^3}{x^3-x}=-1$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-x^3}{x^2-1}+x=0\to f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y=-x$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{x^2-5x}=0\to f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y=0$.

41. Estudia la continuidad de estas funciones, y determina los tipos de discontinuidad que presentan.

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & \text{si } x\le 2\\ \dfrac{1}{x-2} & \text{si } 2<x<3\\ 2x-5 & \text{si } 3\ge x\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{si } x\le 0\\ 3x & \text{si } 0<x<2\\ \dfrac{1}{x-4} & \text{si } 2\ge x\end{cases}$

a) Dom $f=\mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ y $f(x)$ no es continua en $x=2$.

La discontinuidad es de salto infinito. La función tiene una asíntota vertical en $x=2$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to3^+}f(x)=1\end{array}\right\}\to f(x)$ es continua en $x=3$.

b) Dom $f = [0, +\infty) - \{4\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \to \text{No existe.}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \to f(x) \text{ no es continua en } x = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 6\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 2} f(x) \text{ y } f(x) \text{ no es continua en } x = 2.$$

La discontinuidad es de salto finito.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -\infty\\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 4} f(x) \text{ y } f(x) \text{ no es continua en } x = 4.$$

La discontinuidad es de salto infinito. La función tiene una asíntota vertical en $x = 4$.

42. Halla el valor de *k* para que estas funciones sean continuas.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 1 \\ -kx^2 + 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-k}{x-2} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) $f(x)$ es continua en $x = 1$ si se verifica que $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -k+1\\ f(1) = -k+1\end{array}\right\} \to -k+1 = -1 \to k = 2$$

b) $f(x)$ es continua en $x = 0$ si se verifica que $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{3-k}{-2}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1\\ f(0) = -1\end{array}\right\} \to \frac{3-k}{-2} = -1 \to k = 1$$

ACTIVIDADES FINALES

43. Halla el término general de las sucesiones cuyos primeros términos son los siguientes.

a) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \ldots$

b) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

c) $-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{4}, \frac{8}{5}, \ldots$

d) $2, \frac{3}{8}, \frac{4}{27}, \frac{5}{64}, \ldots$

a) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$

c) $a_n = \dfrac{(n-1)^2 - 1}{n+1}$

d) $a_n = \dfrac{n+1}{n^3}$

44. **Con ayuda de la calculadora, halla el límite de esta sucesión definida de forma recurrente.**

$$a_1 = 1 \qquad a_n = \frac{3a_{n-1} + 2}{4a_{n-1} + 3}$$

$a_1 = 1$

$a_2 = \frac{5}{7} = 0{,}71428\ldots$

$a_3 = \frac{29}{41} = 0{,}70731\ldots$

$a_4 = \frac{169}{239} = 0{,}70711\ldots$

$a_5 = \frac{985}{1\,393} = 0{,}707106\ldots$

Los términos de la sucesión se aproximan a: $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7071\ldots$

45. **Copia y completa la siguiente tabla siendo $a_n = \frac{3n-1}{6n+5}$.**

n	1	10	100	1 000	10 000
a_n					

¿Cuál es $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

n	1	10	100	1 000	10 000
a_n	0,1818	0,4462	0,4942	0,4994	0,4999

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

46. **Copia y completa la siguiente tabla siendo $a_n = \frac{5n+1}{n^2+5}$.**

n	1	10	100	1 000	10 000
a_n					

¿Cuál es $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

n	1	10	100	1 000	10 000
a_n	1	0,4857	0,0501	0,0050	0,0005

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

47. **Realiza los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^6+1}{5n^4+3n^3+2n-1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n^3+2n-5n^2}{2n^3-3n^2+6n-1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2-5n^4+2n-1}{3n-2n^3+5-n^4}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^5+n^3-n^4}{1-4n-n^5}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(4n^2-1)}{n+n^2-2n^3}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n^4+4n^3+2)n^2}{n^5+3n^4+4}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^6+1}{5n^4+3n^3+2n-1} = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n^3+2n-5n^2}{2n^3-3n^2+6n-1} = -\frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2-5n^4+2n-1}{3n-2n^3+5-n^4} = 5$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^5+n^3-n^4}{1-4n-n^5} = -3$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(4n^2-1)}{n+n^2-2n^3} = -2$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n^4+4n^3+2)n^2}{n^5+3n^4+4} = +\infty$

48. **Obtén los resultados de los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+n-3}}{3n+1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n^2+3n+2}{\sqrt{n^3+2n^4}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5-2n+6n^3}}{n^2-n-6}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3n^2+1}{\sqrt{3(n^4+n+1)}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+\sqrt{1+n^2}}{3n+5}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3-3n+2}}{n^2+5}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+n-3}}{3n+1} \to \frac{+\infty}{+\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+n-3}}{3n+1} = \frac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n^2+3n+2}{\sqrt{n^3+2n^4}} \to \frac{+\infty}{+\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n^2+3n+2}{\sqrt{n^3+2n^4}} = 4\sqrt{2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5-2n+6n^3}}{n^2-n-6} \to \frac{+\infty}{+\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5-2n+6n^3}}{n^2-n-6} = 0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3n^2+1}{\sqrt{3(n^4+n+1)}} \to \frac{+\infty}{+\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3n^2+1}{\sqrt{3(n^4+n+1)}} = \sqrt{3}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+\sqrt{1+n^2}}{3n+5} \to \frac{+\infty}{+\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+\sqrt{1+n^2}}{3n+5} = 1$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3-3n+2}}{n^2+5} \to \frac{+\infty}{+\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3-3n+2}}{n^2+5} = 0$

49. **Halla los siguientes límites de estas sucesiones.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n}{n} - \frac{5n^2}{n+1}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-n}{n+1} + \frac{3-n^2}{n}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2}{n-5} + \frac{-2n^3}{n+3}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n^3+4n}{2n} - \frac{4n^2}{7n^3}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{6n^2+4n}{3n} - \frac{4n^3}{2n^2}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{-7n^2+4}{2-n^3} + \frac{5n^3+n}{3-n^4}\right)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n}{n} - \frac{5n^2}{n+1}\right) \to \infty - \infty$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n}{n} - \frac{5n^2}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-4n^2+2n+1}{n+1} = -\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-n}{n+1} + \frac{3-n^2}{n}\right) \to \infty - \infty$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-n}{n+1} + \frac{3-n^2}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-2n^2+3n+3}{n^2+n} = -2$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2}{n-5} + \frac{-2n^3}{n+3}\right) \to \infty - \infty$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2}{n-5} + \frac{-2n^3}{n+3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-2n^4+13n^3+9n^2}{n^2-2n-15} = -\infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n^3+4n}{2n} - \frac{4n^2}{7n^3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3+4n}{2n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2}{7n^3} = +\infty - 0 = +\infty$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{6n^2+4n}{3n} - \frac{4n^3}{2n^2}\right) \to \infty - \infty$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{6n^2+4n}{3n} - \frac{4n^3}{2n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{-7n^2+4}{2-n^3} + \frac{5n^3+n}{3-n^4}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-7n^2+4}{2-n^3} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3+n}{3-n^4} = 0 + 0 = 0$

50. Determina el valor de estos límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+4n-1}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n+31}-3n\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4n-\sqrt{16n^2+2}\right)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+4n-1}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+4n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n+1}{n+\sqrt{n^2+4n-1}}=-2$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n+31}-3n\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n+31}-3n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-5n^2+n+31}{\sqrt{4n^2+n+31}+3n}=-\infty$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4n-\sqrt{16n^2+2}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(4n-\sqrt{16n^2+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{4n+\sqrt{16n^2+2}}=0$$

51. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n+3}\right)^{n-1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+1}\right)^{n^2+1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n+3}\right)^{n-1}\to 1^{\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n+3}\right)^{n-1}=e^{\frac{1}{2}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+1}\right)^{n^2+1}\to 1^{\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+1}\right)^{n^2+1}=0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n}\to 1^{\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n}=1$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}\to 1^{\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}=e$

52. Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+2x^2-3$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\ln|x|}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^2+2x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+2x^2-3)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\ln|x|}=0$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^2+2x+1}=0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$

53. **Calcula los siguientes límites de polinomios.**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 3x + 1)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x - x^2 - 7x^4 - 3)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x - 3x^5 + x^2 - 1)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (4x^2 - x + 3x^4 - 1)$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} (4x^6 - 3x^3 + 2x^2 - 6x - 1)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 - 3x + 1\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x - x^2 - 7x^4 - 3\right) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2x - 3x^5 + x^2 - 1\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(4x^2 - x + 3x^4 - 1\right) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(4x^6 - 3x^3 + 2x^2 - 6x - 1\right) = +\infty$

54. **Halla el valor de estos límites con valores absolutos.**

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left|-x^2 + 5x - 1\right|$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left|3x^3 - 2x^2 + x - 7\right|$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left|1 - x^2 - 5x^6\right|$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|-x^2 + 5x - 1\right| = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left|3x^3 - 2x^2 + x - 7\right| = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left|1 - x^2 - 5x^6\right| = +\infty$

55. **Calcula los límites y comprueba el resultado con la calculadora.**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - 6x + 3}{x^2 - 3x + 5}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - 6x^3 - x + 1}{4x^2 + 5x - 2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^3 + 3x - 1}{6x^2 - 3x^3 + x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2 + x - 12}{x^2 - x^3 + 2}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - 6x + 3}{x^2 - 3x + 5} = 2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - 6x^3 - x + 1}{4x^2 + 5x - 2} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^3 + 3x - 1}{6x^2 - 3x^3 + x} = -\dfrac{5}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2 + x - 12}{x^2 - x^3 + 2} = 0$

56. **Calcula los límites siguientes.**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-5x+3}{2-x^3+x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(7+7x+7x^3)x^2}{x^2(x^2-4x^3)-2x^5}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x(x^3-4+x)}{-7+4x^4+x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x-6x^4+x^3}{3x+2x^2-3}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-5x+3}{2-x^3+x^2}=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(7+7x+7x^3)x^2}{x^2(x^2-4x^3)-2x^5}=\dfrac{-7}{6}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(x^3-4+x)}{-7+4x^4+x^3}=\dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x-6x^4+x^3}{3x+2x^2-3}=-\infty$

57. **Halla estos límites con ayuda de la calculadora, y comprueba el resultado obtenido.**

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+5x+7}{2x^2+x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-2x^2-10x}{-x^2+2x^3-x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4+x-2x^3}{2x^2-3x+11}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^2+3x+21}{5x^2-4x^3+2x}$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+5x+7}{2x^2+x+1}=\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-2x^2-10x}{-x^2+2x^3-x+3}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4+x-2x^3}{2x^2-3x+11}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^2+3x+21}{5x^2-4x^3+2x}=0$

58. **Determina el valor de los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{5x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2-2}{\sqrt{3x^2+2}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2-2x-1}{\sqrt{3x^4-3x^3+1}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2}{\sqrt{x^5-7x+1}}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{5x-1}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2-2}{\sqrt{3x^2+2}}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2-2x-1}{\sqrt{3x^4-3x^3+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2}{\sqrt{x^5-7x+1}}=0$

59. **Obtén los resultados de estos límites.**

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{-3x+6x^2}}{x^2+2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^4+5x^3-2x^2}}{3x-1}$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{-3x+6x^2}}{x^2+2}=0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^4+5x^3-2x^2}}{3x-1}=-\infty$

60. **Halla el valor de los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x^2}{2x+1}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{5x^2+1}{x}+\dfrac{3-x^2}{x+2}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2-2x}-\dfrac{2x^2+1}{2x-4}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2}{2x+1}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)\to\infty-\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2}{2x+1}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)=-\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5x^2+1}{x}+\dfrac{3-x^2}{x+2}\right)\to\infty-\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5x^2+1}{x}+\dfrac{3-x^2}{x+2}\right)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-2x}-\dfrac{2x^2+1}{2x-4}\right)\to\infty-\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-2x}-\dfrac{2x^2+1}{2x-4}\right)=0$

61. Calcula el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+4x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6}-x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x+4}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+4x}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+4x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{x+\sqrt{x^2+4x}}=-2$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6}-x\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{\sqrt{x^2+6}+x}=0$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3}}=0$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x+4}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x+4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-2x+4}}=0$$

62. Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{3x+2}\right)^{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3x-2}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{3x+2}\right)^{x^2}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3x-2}\to1^{\infty}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3x-2}=e^6$

63. Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3-3x}{8x^3+x^2-3x+1}\right)^{\frac{2x+1}{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2-2x+1}{x-8}\right)^{\frac{3x^2-2x+1}{x^2-3}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{x^3-x^2+3x}{x^2+1}\right)^{2x}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3-3x}{8x^3+x^2-3x+1}\right)^{\frac{2x+1}{x}}=\dfrac{1}{16}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2-2x+1}{x-8}\right)^{\frac{3x^2-2x+1}{x^2-3}}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{x^3-x^2+3x}{x^2+1}\right)^{2x}=\dfrac{1}{e^4}$

64. Determina los límites, calculando previamente sus límites laterales.

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x-5}$

b) $\lim\limits_{x\to3}(1+2x)^x$

c) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}}$

d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4-2x}{x^2-2x}$

e) $\lim\limits_{x\to2}\ln\left(\dfrac{x+1}{3}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{5}{\sqrt{4+x}}$

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x-5}=0$

b) $\lim\limits_{x\to3}(1+2x)^x=343$

c) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}}=\sqrt{3}$

d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4-2x}{x^2-2x}=2$

e) $\lim\limits_{x\to2}\ln\left(\dfrac{x+1}{3}\right)=0$

f) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{5}{\sqrt{4+x}}=5$

65. Con ayuda de la calculadora, completa la tabla y comprueba que si $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$, entonces $\lim\limits_{x\to1}f(x)=-0{,}5$.

x	0	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
$f(x)$							

x	0	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	0	−0,38	−0,48	−0,49	−0,501	−0,51	−0,63

66. Determina los límites indicados para esta función.

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & \text{si } x\le 1\\ x^2+1 & \text{si } x>1\end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$

a) $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$

b) $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x^2+1)=2$

67. Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{si } x<0\\ \sqrt{x} & \text{si } 0\le x\le 4\\ 3 & \text{si } x>4\end{cases}$, calcula.

a) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to4^-}f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to4^+}f(x)$

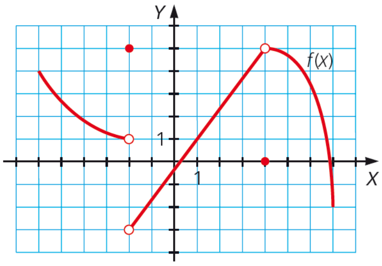
a) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}-x^2=0$

b) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=0$

c) $\lim\limits_{x\to4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to4^-}\sqrt{x}=2$

d) $\lim\limits_{x\to4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to4^+}3=3$

68. **Observa la gráfica de la función y halla los siguientes límites.**



a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$

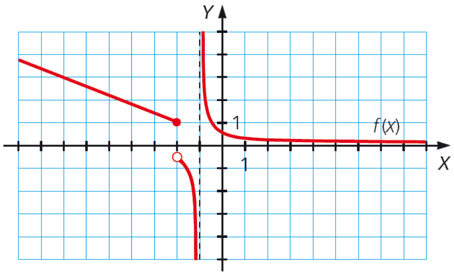
a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 5$

b) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -3$

d) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 5$

69. **Teniendo en cuenta la gráfica de la función, calcula estos límites.**



a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\frac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

70. **Halla los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to \pi} \cos x$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen} x$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$

d) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

a) $\lim\limits_{x \to \pi} \cos x = -1$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \to \frac{1}{0}$ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen} x = -1$

d) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \to -\frac{1}{0}$ $\lim\limits_{x \to \pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = +\infty$

71. Dada la función $f(x)$ definida a trozos encuentra los límites.

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x<-2\\ \dfrac{9}{x-1} & \text{si } -2\le x<3\\ x^2+6x-32 & \text{si } x\ge 3\end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ g) $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$ h) $\lim\limits_{x\to3} f(x)$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ c) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-3$ e) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=-3$ g) $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=-5$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ d) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-3$ f) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\dfrac{9}{2}$ h) $\lim\limits_{x\to3} f(x)\to$ No existe.

72. Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x+1}{x^2+2x}$ d) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x^2+2x}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^2+2x}$ e) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+4}{x^2+2x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x+1}{x^2-1}$ f) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+4}{x^2+2x}$

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x+1}{x^2+2x}\to\dfrac{1}{0}$ $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{3x+1}{x^2+2x}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3x+1}{x^2+2x}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^2+2x}\to\dfrac{0}{0}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x(x+2)}=\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x+1}{x^2-1}=-1$

d) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x^2+2x}\to\dfrac{0}{0}$ $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)}=2$

e) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+4}{x^2+2x+1}=2$

f) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+4}{x^2+2x}\to\dfrac{8}{0}$ $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2+4}{x^2+2x}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^2+4}{x^2+2x}=-\infty$

73. Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$ d) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^3-9x^2+15x+25}{x^3-5x^2+2x-10}$

b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-6x+9}$ e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^3-3x^2}{2x^3-x^2+3x}$

c) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{3x^3+12x^2-x-4}{x^3+7x^2+14x+8}$ f) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2-x+2}$

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}\to\dfrac{0}{0}$ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-6x+9}\to\dfrac{0}{0}$ $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$

c) $\lim_{x\to -4} \frac{3x^3+12x^2-x-4}{x^3+7x^2+14x+8} \to \frac{0}{0}$ $\quad \lim_{x\to -4} \frac{3x^3+12x^2-x-4}{x^3+7x^2+14x+8} = \lim_{x\to -4} \frac{(3x^2-1)(x+4)}{(x+1)(x+2)(x+4)} = \frac{47}{6}$

d) $\lim_{x\to 5} \frac{x^3-9x^2+15x+25}{x^3-5x^2+2x-10} \to \frac{0}{0}$ $\quad \lim_{x\to 5} \frac{x^3-9x^2+15x+25}{x^3-5x^2+2x-10} = \lim_{x\to 5} \frac{(x+1)(x-5)^2}{(x^2+2)(x-5)} = 0$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{5x^3-3x^2}{2x^3-x^2+3x} \to \frac{0}{0}$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{5x^3-3x^2}{2x^3-x^2+3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(5x-3)}{x(2x^2-x+3)} = 0$

f) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2-x+2} \to \frac{0}{0}$ $\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2-x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+1)} = \frac{1}{2}$

74. Calcula estos límites.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

b) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x-3}-1}{x^2-16}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$

e) $\lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{\sqrt{2x-2}}$

f) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-3x-4}{\sqrt{2x+1}-3}$

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} \to \frac{0}{0}$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

b) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x-3}-1}{x^2-16} \to \frac{0}{0}$ $\quad \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x-3}-1}{x^2-16} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x-3}+1)} = \frac{1}{16}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \to \frac{0}{0}$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} \to \frac{0}{0}$ $\quad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{1}{6}$

e) $\lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{\sqrt{2x-2}} \to \frac{1}{0}$ $\quad \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-1}{\sqrt{2x-2}} = +\infty$ $\quad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-1}{\sqrt{2x-2}} \to$ No existe.

f) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-3x-4}{\sqrt{2x+1}-3} \to \frac{0}{0}$ $\quad \lim_{x\to 4} \frac{x^2-3x-4}{\sqrt{2x+1}-3} = \lim_{x\to 4} \frac{(x+1)(\sqrt{2x+1}+3)}{2} = 15$

75. Calcula el límite que aparece a continuación.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2x}{\sqrt{x}-1}$$

$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2x}{\sqrt{x}-1} \to \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2x}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}+1)(x+3-4x^2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3-4x^2}{x-1} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+3}+2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(-4x-3)}{x-1} = -\frac{7}{2}$

76. Calcula el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}\to\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2^2}}{(x-2)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}\right)^2}=\frac{\sqrt[3]{2}}{8}$$

77. Calcula el valor de los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

b) $\lim_{x\to b}\frac{\sqrt{x+b}-\sqrt{b}}{x}$

c) $\lim_{x\to c}\frac{(x^3+2x)-(c^3+2a)}{x-c}$

d) $\lim_{x\to -d}\frac{x^2+(d-4)x-4d}{x^2+(d-1)x-d}$

a) ▪ Si $a\neq 0$:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\to\frac{0}{0}\qquad \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\frac{\sqrt{a}}{2a}$$

▪ Si $a=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}\to\frac{0}{0}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}\to\frac{1}{0}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty\qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x}}{x}\to \text{No existe.}$$

b) ▪ Si $b\neq 0$:

$$\lim_{x\to b}\frac{\sqrt{x+b}-\sqrt{b}}{x}=\lim_{x\to b}\frac{\sqrt{2b}-\sqrt{b}}{b}=\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{\sqrt{b}}{b}$$

▪ Si $b=0$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=+\infty\to \text{Es el mismo límite del apartado anterior.}$$

c) ▪ Si $c\neq a$ y $c\neq 0$:

$$\lim_{x\to c}\frac{\left(x^3+2x\right)-\left(c^3+2a\right)}{x-c}\to\frac{2(c-a)}{0}\qquad \lim_{x\to c}\frac{\left(x^3+2x\right)-\left(c^3+2a\right)}{x-c}=\infty$$

▪ Si $c\neq a$ y $c=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^3+2x\right)-2a}{x}\to\frac{-2a}{0}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\left(x^3+2x\right)-2a}{x}=\infty$$

▪ Si $c=a$ y $c\neq 0$:

$$\lim_{x\to c}\frac{\left(x^3+2x\right)-\left(c^3+2c\right)}{x-c}\to\frac{0}{0}\qquad \lim_{x\to c}\frac{\left(x^3+2x\right)-\left(c^3+2c\right)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{(x-c)\left(x^2+cx+\left(2+c^2\right)\right)}{x-c}=3c^2+2$$

▪ Si $c=a$ y $c=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x}{x}\to\frac{0}{0}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x}{x}=\lim_{x\to 0}x^2+2=2$$

d) ▪ Si $d \neq 0$:

$$\lim_{x\to -d} \frac{x^2+(d-4)x-4d}{x^2+(d-1)x-d} \to \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to -d} \frac{x^2+(d-4)x-4d}{x^2+(d-1)x-d} = \lim_{x\to -d} \frac{(x+d)(x-4)}{(x+d)(x-1)} = \frac{d+4}{d+1}$$

▪ Si $d = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-4x}{x^2-x} \to \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2-4x}{x^2-x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-4)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-4)}{(x-1)} = 4$$

78. **Halla estos límites.**

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \sqrt{\cos x - 3\,\text{sen}\, x}$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \text{tg}^3\, x \cdot \cos^3 x$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x \cdot \text{sen}\, x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x \cdot \text{tg}^2 x + \text{sen}^2 x}{\text{tg}^2 x}$

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \sqrt{\cos x - 3\,\text{sen}\, x} \to$ No existe.

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \text{tg}^3\, x \cdot \cos^3 x \to \infty \cdot 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \text{tg}^3\, x \cdot \cos^3 x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}^3 x}{\cos^3 x} \cdot \cos^3 x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \text{sen}^3 x = 1$$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x \cdot \text{sen}\, x} \to \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x \cdot \text{sen}\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}}{\frac{1}{\cos x} \cdot \text{sen}\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}}{\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\text{sen}\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{\text{sen}\, x} = 1$$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x \cdot \text{tg}^2 x + \text{sen}^2 x}{\text{tg}^2 x} \to \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x \cdot \text{tg}^2 x + \text{sen}^2 x}{\text{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x \cdot \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \text{sen}^2 x}{\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\text{sen}^4 x + \cos^2 x \cdot \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

79. **Encuentra el límite de la función cuando x tiende a 0 y cuando x tiende a 3.**

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 3x^2}$$

Especifica el valor de los límites laterales, si resulta necesario.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^3-3x^2} \to \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^3-3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x-3} = 0$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^4}{x^3-3x^2} \to \frac{81}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x^4}{x^3-3x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^4}{x^3-3x^2} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x\to 3} \frac{x^4}{x^3-3x^2}.$$

80. **Observa las tablas de valores de la función.**

$$f(x) = \frac{4x^2 - 5x}{2x^2 + 7}$$

x	1	10	100	1000	10000
$f(x)$	$-0,11$	1,69	1,974	1,9975	1,99975

x	-1	-10	-100	-1000	-10000
$f(x)$	1	2,17	2,024	2,0025	2,00025

¿Es cierto que $y = 2$ es una asíntota? Cuando $x \to +\infty$, ¿está la función por encima o por debajo de la asíntota? ¿Qué sucede cuando $x \to -\infty$?

Sí, es cierto que $y = 2$ es una asíntota horizontal.
Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por debajo de la asíntota.
Cuando x tiende a $-\infty$, la función está por encima de la asíntota.

81. **Realiza una tabla como la de la actividad anterior y decide si $y = -3$ es una asíntota horizontal de la función $f(x) = \frac{2 - 3x}{x + 1}$. ¿La función está por encima o por debajo de la asíntota?**

x	1	10	100	1 000	10 000
$f(x)$	–0,5	–2,5455	–2,9505	–2,9950	–2,9995

x	–2	–10	–100	–1 000	–10 000
$f(x)$	–2,6666	–3,5556	–3,0505	–3,0050	–3,0005

Sí, es cierto que $y = -3$ es una asíntota horizontal.

Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por encima de la asíntota.

Cuando x tiende a $-\infty$, la función está por debajo de la asíntota.

82. **Observa las tablas de valores de la función.**

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x - 3}$$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999	2,9999
$f(x)$	-7	-17	-97	-997	-9997	-99997

x	3,0001	3,001	3,01	3,1	3,5
$f(x)$	100003	10003	1003	103	23

¿Es cierto que $x = 3$ es una asíntota vertical? Cuando $x \to 3^-$, ¿la rama infinita de la función tiende a $+\infty$ o a $-\infty$? ¿Qué sucede cuando $x \to 3^+$?

Sí, es cierto que $x = 3$ es una asíntota vertical.
Cuando x tiende a 3 por la izquierda, la rama infinita de la función tiende a $-\infty$.
Cuando x tiende a 3 por la derecha, la rama infinita de la función tiende a $+\infty$.

83. **Realiza una tabla como la de la actividad anterior y decide si $x = -2$ es una asíntota vertical de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{2 + x}$. ¿La rama infinita de la función tiende a $+\infty$ o a $-\infty$?**

x	−1	−1,5	−1,9	−1,99	−1,999	−1,9999
$f(x)$	4	13,5	93,1	993,01	9 993,001	99 993,0001

x	−2,0001	−2,001	−2,01	−2,1	−2,5
$f(x)$	−10 0007	−10 007,001	−1 007,01	−107,1	−27,5

Sí, es cierto que $x = -1$ es una asíntota vertical.

Cuando x tiende a −2 por la izquierda, la rama infinita de la función tiende a $-\infty$.

Cuando x tiende a −2 por la derecha, la rama infinita de la función tiende a $+\infty$.

84. **Observa la tabla de valores de la función.**

$$f(x) = \frac{4x^2 + 6x}{2x - 3}$$

x	10	100	1000	10000
$f(x)$	27,06	206,09	2006,009	20006,0009

Esta es la tabla de valores de la recta $y = 2x + 6$.

x	10	100	1000	10000
y	26	206	2006	20006

¿Es cierto que la recta es una asíntota de $f(x)$? ¿Qué posición tiene la función con respecto a la recta cuando x tiende a $+\infty$? Investiga la posición relativa de ambas cuando x tiende a $-\infty$.

Sí, es cierto que $y = 2x + 3$ es una asíntota oblicua.
Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por encima de la asíntota.
Si $x = -1\,000$, $f(x) - 2x - 3 > 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por encima de la asíntota.

85. **Realiza una tabla como la de la actividad anterior y decide si $y = 4x + 2$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{8x^2 + 3}{2x - 1}$. ¿La función está por encima o por debajo de la asíntota?**

x	10	100	1 000	10 000
$f(x)$	42,2632	402,0251	4 002,0025	40 002,0003

Esta es la tabla de valores de la recta $y = 4x + 2$.

x	10	100	1 000	10 000
y	42	402	4 002	40 002

Sí, es cierto que $y = 4x + 2$ es una asíntota oblicua.

Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1\,000 \rightarrow f(x) - 4x - 2 < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

86. Halla las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$ c) $f(x) = \dfrac{-x+5}{-4-x^2}$ e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$ d) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2-3}$ f) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = -3.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+3} = 1 \to f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = 1.$$

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 1.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2-1} = 0 \to f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = 0.$$

c) Dom $f = \mathbb{R}$ $\to f(x)$ no tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x+5}{-4-x^2} = 0 \to f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = 0.$$

d) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\sqrt{3}^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = -\sqrt{3}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \sqrt{3}^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to \sqrt{3}^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = \sqrt{3}.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{x^2-3} = 0 \to f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = 0.$$

e) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 2.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2-4} = 0 \to f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = 0.$$

f) Dom $f = \mathbb{R}$ $\to f(x)$ no tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2 \to f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = 2.$$

87. Determina las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x + 2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{5 - 3x^3}{2x^2 + 8}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x^3}{x^2 + x - 1}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+5x}{x^2+2x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+5x}{x+2} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x+2} = 3 \end{array}\right\} \to f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y = x + 3$.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-4}{x^2-x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x^2-4}{x-1} - 2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-4}{x-1} = 2 \end{array}\right\} \to f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y = 2x + 2$.

c) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5-3x^3}{2x^3+8x} = -\dfrac{3}{2} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5-3x^3}{2x^2+8} + \dfrac{3}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{12x-5}{2x^2+8} = 0 \end{array}\right\} \to f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y = -\dfrac{3}{2}x$.

d) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-6x^3}{x^3+x^2-x} = -6 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2-6x^3}{x^2+x-1} + 6x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^2-6x}{x^2+x-1} = 7 \end{array}\right\} \to f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y = -6x + 7$.

88. Determina las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x^3 + 2x^2 - 11x - 12}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 2x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 3x^2 - 13x + 15}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \to$ La función tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to$ La función tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{x^2-5x+6} = 0 \to f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-4, -1, 3\}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to$ La función tiene una asíntota vertical en $x = -4$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \to$ La función tiene una asíntota vertical en $x = -1$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to$ La función tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+8}{x^3+2x^2-11x-12} = 0 \to f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

c) Dom $f = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 2.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^2-2x} = \infty \to f(x) \text{ no tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+1}{x^3-2x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3+1}{x^2-2x} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2-2x} = 2\end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota oblicua en } y = x+2.$$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x^3-3x^2-13x+15} = \dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-5)(x+3)}$

Dom $f = \mathbb{R} - \{-3, 1, 5\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = -3.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 5.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+4}{x^3-3x^2-13x+15} = 0 \to f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = 0.$$

89. Halla las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-3}}$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-3}}{x-2}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x+3}$

a) Dom $f = (-\infty, 0] \cup (3, +\infty)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \to \text{No existe.} \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 3.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x-3}} = 1 \to f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = 1.$$

b) Dom $f = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

$$\lim_{x\to -3} f(x) \to \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)\left(\sqrt{x^2-9}\right)}{(x+3)(x-3)} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \to \text{No existe.} \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 3.$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}} = 1 \to f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = 1.$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}} = -1 \to f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = -1.$$

c) Dom $f = \left[\frac{3}{2}, 2\right) \cup (2, +\infty)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 2.$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2x-3}}{x-2} = 0 \to f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = 0.$$

d) Dom $f = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = -3.$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} = \infty \to f(x) \text{ no tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^2+3x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} - x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1} - x^2 - 3x}{x+3} = -3 \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota oblicua en } y = x - 3.$$

90. Halla las asíntotas de estas funciones y la posición de las ramas infinitas.

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{(x - 2)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + 4}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x+3} \to \frac{-125}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x+3} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x+3} = -\infty \end{array}\right\} \to$$

La función tiene una asíntota vertical en $x = -3$. Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $+\infty$, y por la derecha tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x + 3} = +\infty \rightarrow$$ La función no tiene asíntota horizontal.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + 3x} = +\infty \rightarrow$$ La función no tiene asíntota oblicua.

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6} \rightarrow \frac{-125}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{La función tiene una asíntota vertical}$$

en $x = -3$. Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 - 4x + 4)}{(x-2)(x+3)} = 0$$

$\rightarrow$ La función no tiene asíntota vertical en $x = 2$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6} = +\infty \rightarrow$$ La función no tiene asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 + x^2 - 6x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6} - x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-7x^2 + 18x - 8}{x^2 + x - 6} = -7 \end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ La función tiene una asíntota oblicua: $y = x - 7$.

c) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 - 4x + 4)}{x - 2} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow$ La función no tiene asíntota vertical en $x = 2$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2} = +\infty \rightarrow$$ La función no tiene asíntota horizontal.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 2x} = +\infty \rightarrow$$ La función no tiene asíntota oblicua.

d) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} \rightarrow \frac{-64}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow$ La función tiene una asíntota vertical en $x = -2$.

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 - 4x + 4)}{(x-2)(x+2)} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow$ La función no tiene asíntota vertical en $x = 2$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4}=+\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-4x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-6x^2+16x-8}{x^2-4}=-6\end{array}\right\}\rightarrow$$

$\rightarrow$ La función tiene una asíntota oblicua: $y=x-6$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-4x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-6x^2+16x-8}{x^2-4}=-6\end{array}\right\}\rightarrow \text{La función tiene una asíntota oblicua: } y=x-6.$$

e) Dom $f=\mathbb{R}-\{2\}$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{(x-2)^2}\rightarrow\frac{0}{0}$$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^3}{(x-2)^2}=0\rightarrow$ La función no tiene asíntota vertical en $x=2$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{(x-2)^2}=+\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-4x^2+4x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4x+4}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2+8x-8}{x^2-4x+4}=-2\end{array}\right\}\rightarrow \text{La función}$$

tiene una asíntota oblicua: $y=x-2$.

$f(x)-x+2=0\rightarrow$ La expresión de la función coincide con la ecuación de la asíntota salvo en $x=2$.

f) Dom $f=\mathbb{R}\rightarrow$ La función no tiene asíntota vertical.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+4}=+\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3+4x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+4}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-6x^2+8x-8}{x^2+4}=-6\end{array}\right\}\rightarrow$$

$\rightarrow$ La función tiene una asíntota oblicua: $y=x-6$.

Si $x=1\,000$, $f(x)-x+6>0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x=-1\,000$, $f(x)-x+6<0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

91. Calcula las ramas infinitas y asíntotas de las funciones.

a) $f(x)=x^2+5x-1$

b) $f(x)=2x-1$

c) $f(x)=\log x$

d) $f(x)=\operatorname{tg} x$

a) Dom $f=\mathbb{R}\rightarrow$ La función no tiene asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+5x-1)=+\infty\rightarrow$ La función no tiene asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+5x-1}{x}=+\infty\rightarrow$ La función no tiene asíntota oblicua.

b) La gráfica de la función es una recta, así que no tiene asíntotas. Ramas parabólicas: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\end{cases}$

c) Dom $f = (0, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \log x = -\infty \to$ La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

La rama infinita de la función tiende a $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty \to$ La función no tiene asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0 \to$ La función no tiene asíntota oblicua.

d) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} tg\ x \to \frac{1}{0}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} tg\ x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} tg\ x = -\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = \frac{\pi}{2}.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $+\infty$, y por la derecha, a $-\infty$.

Al ser una función periódica, de período π, todos los puntos que no pertenecen al dominio son asíntotas del mismo tipo.

Por tanto, la función no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

92. Encuentra las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{|2x - 3|}{x}$

b) $f(x) = \frac{x}{|x - 1|}$

a) $$f(x) = \frac{|2x-3|}{x} = \begin{cases} \frac{3-2x}{x} & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ \frac{2x-3}{x} & \text{si } x \ge \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{3-2x}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{3-2x}{x} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 0.$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3-2x}{x} = -2 \to f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = -2$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-3}{x} = 2 \to f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 2$.

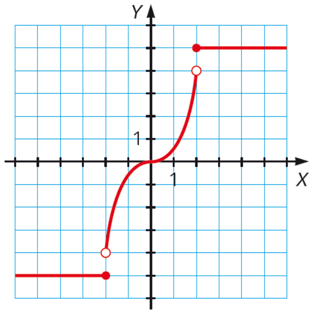
b) $$f(x) = \frac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x}{x-1} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x}{1-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 1.$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{1-x} = -1 \to f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = -1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \to f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.

93. **Estudia la continuidad de la siguiente función en los puntos $x = 2$, $x = 0$ y $x = -2$.**



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 4\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5\end{array}\right\} \to \text{La función no es continua en } x = 2.$$

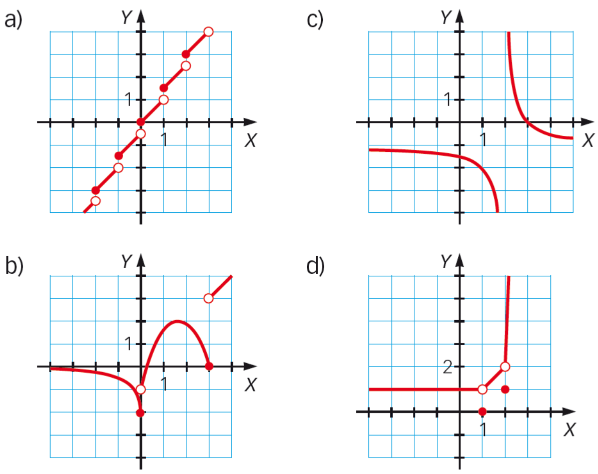
Se trata de un punto de discontinuidad de salto finito.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \to \text{La función es continua en } x = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -5\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -4\end{array}\right\} \to \text{La función no es continua en } x = -2.$$

Se trata de un punto de discontinuidad de salto finito.

94. **Determina los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones e indica de qué tipo son.**



a) La función está definida de la forma:

$$f(x) = x + \frac{1}{2}n \quad \forall x \in [n, n+1), \forall n \in \mathbb{Z}$$

Cada $x \in \mathbb{Z}$ se trata de un punto de discontinuidad de salto finito.

b) Los puntos de discontinuidad son $x = 0$ y $x = 3$, ambos puntos tienen una discontinuidad de salto finito.

c) El único punto de discontinuidad es $x = 2$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

d) Los puntos de discontinuidad son $x = 1$ y $x = 2$, ambos puntos tienen una discontinuidad evitable.

95. **Determina si las siguientes funciones son continuas en el punto que se indica.**

a) $f(x) = 1 - x^2$ en $x = -1$

b) $f(x) = -x^2 + 3x$ en $x = \frac{1}{2}$

c) $f(x) = \sqrt{x-2}$ en $x = 1$

d) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - x - 6}$ en $x = -2$

a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 0\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} f(-1) = 0\\ \lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0\end{array}\right\} \to f(x)$ es continua en $x = -1$.

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = \frac{5}{4}\\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = \frac{5}{4}\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}\\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = \frac{5}{4}\end{array}\right\} \to f(x)$ es continua en $x = \frac{1}{2}$.

c) $f(x)$ no está definida en $x = 1 \to f(x)$ no es continua en $x = 1$.

d) $f(x)$ no está definida en $x = -2 \to f(x)$ no es continua en $x = -2$.

96. **Completa la tabla en tu cuaderno para esta función.**

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$$

x	2,5	2,9	2,999	3,001	3,01	3,1	3,5
$f(x)$							

Comprueba que su límite, cuando x tiende a 3, es:

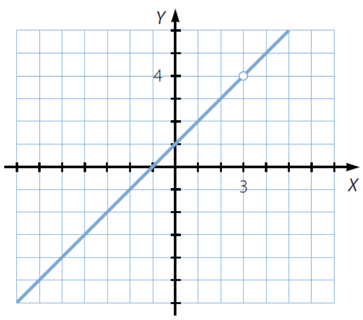
$$\lim_{x\to 3} f(x) = 4$$

¿Cuánto vale $f(3)$? Haz una representación de la función. ¿Qué diferencia hay entre las gráficas de $f(x)$ y de $y = x + 1$?

x	2,5	2,9	2,999	3,001	3,01	3,1	3,5
$f(x)$	3,5	3,9	3,999	4,001	4,01	4,1	4,5

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+1) = 4$$

No existe $f(3)$.



La gráfica de $f(x)$ coincide con la gráfica de la recta $y = x + 1$, salvo en el punto $x = 3$.

97. **Determina los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+3x+5}$

b) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-x-20}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-9}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-3}{x^4-4x^2+3}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-4, 5\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = -\infty\\ \lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to-4} f(x).$$

$x = -4$ es un punto de discontinuidad de salto infinito.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to5^-} f(x) = -\infty\\ \lim\limits_{x\to5^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to5} f(x).$$

$x = 5$ es un punto de discontinuidad de salto infinito.

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to-3} f(x).$$

$x = -3$ es un punto de discontinuidad de salto infinito.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty\\ \lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to3} f(x).$$

$x = 3$ es un punto de discontinuidad de salto infinito.

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^-} f(x) = -\infty\\ \lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to-\sqrt{3}} f(x).$$

$x = -\sqrt{3}$ es un punto de discontinuidad de salto infinito.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to-1} f(x).$$

$x = -1$ es un punto de discontinuidad de salto infinito.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to1} f(x).$$

$x = 1$ es un punto de discontinuidad de salto infinito.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^-} f(x) = -\infty\\ \lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to\sqrt{3}} f(x).$$

$x = \sqrt{3}$ es un punto de discontinuidad de salto infinito.

98. **Indica los puntos de discontinuidad de estas funciones.**

a) $f(x) = \sqrt{4-x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1}$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}}$

a) $\text{Dom } f = (-\infty, 4]$ La función es continua en $(-\infty, 4]$.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

c) $\text{Dom } f = (-1, +\infty)$ La función es continua en $(-1, +\infty)$.

d) $\text{Dom } f = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ La función es continua en $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

e) $\text{Dom } f = [1, +\infty)$ La función es continua en $[1, +\infty)$.

f) $\text{Dom } f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ La función es continua en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

99. **Determina los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-x+12}$

c) $f(x) = \sqrt{4+x}$

d) $f(x) = \sqrt{4-3x-x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-7x+12}$

f) $f(x) = \sqrt{x-5}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2-2x-8}$

h) $f(x) = \sqrt{x^2-2x+8}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{1}{x+3} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{1}{x+3} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to -3} f(x), \text{ y } x = -3 \text{ es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.}$$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \to$ No hay puntos de discontinuidad.

c) $\text{Dom } f = [-4, +\infty) \to$ No hay puntos de discontinuidad.

d) $\text{Dom } f = [-4, 1] \to$ No hay puntos de discontinuidad.

e) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3, 4\}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+2}{x^2-7x+12} \to \frac{5}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x+2}{x^2-7x+12} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x+2}{x^2-7x+12} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 3} f(x), \text{ y } x = 3 \text{ es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.}$$

f) $\text{Dom } f = [5, +\infty) \to$ No hay puntos de discontinuidad.

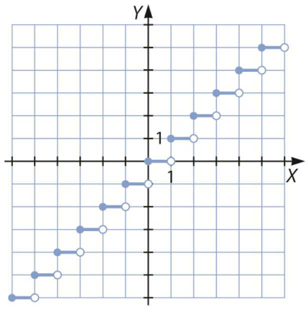
g) $\text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup [4, +\infty) \to$ No hay puntos de discontinuidad en su dominio.

h) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \to$ No hay puntos de discontinuidad.

100. **Estudia la continuidad de la función que asigna a cada número su parte entera.**

$$f(x) = [x]$$

Especifica los tipos de discontinuidades que presenta esta función.



Para cada $x \in \mathbb{Z}$, la función tiene una discontinuidad de salto finito. Por ejemplo, si $x = 1 \rightarrow f(1) = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1\end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x\to 1} f(x).$$

101. **Estudia la continuidad de las siguientes funciones en el punto $x = -2$ y, si son discontinuas, indica el tipo de discontinuidad que tienen.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \le -2 \\ \dfrac{3x + 7}{x + 3} & \text{si } x > -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2 & \text{si } x \ne -2 \\ 2 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{si } x < -2 \\ 3 & \text{si } x = -2 \\ x^2 - 2x - 1 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

a) $f(-2) = 1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 1\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 1\end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x\to -2} f(x) = 1$$

La función es continua en $x = -2$.

b) $f(-2) = 2$

$$\lim\limits_{x\to -2} x^2 - 5x + 2 = 16$$

En $x = -2$, la función tiene una discontinuidad evitable.

c) $f(-2) = 3$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 7\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 7\end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x\to -2} f(x) = 7$$

En $x = -2$, la función tiene una discontinuidad evitable.

102. Define de otra manera las siguientes funciones para que sean continuas en todos los números reales.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{si } x \neq 4 \\ 6 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

a) $f(x)$ no se puede redefinir para que sea continua en todos los números reales, ya que en $x = 0$ tiene una discontinuidad de salto infinito.

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} \to \dfrac{0}{0}$ $\qquad \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} x + 4 = 8$

Para que $f(x)$ sea continua en todos los números reales, redefinimos la función en $f(4) = 8$.

103. Halla el valor que debe tomar *a* para que las siguientes funciones sean continuas.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x - 3}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ a & \text{si } x = -2 \end{cases}$

a) $f(1) = a$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -1 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$$

La función es continua si $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) \to a = -1$.

b) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) \to \dfrac{0}{0}$ $\qquad \lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2} x - 2 = -4$

La función es continua si $f(-2) = \lim\limits_{x \to -2} f(x) \to a = -4$.

104. Encuentra el valor de *a* para que estas funciones sean continuas.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 3x + a & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x - 2 & \text{si } x \leq -1 \\ ax^2 + x + a & \text{si } x > -1 \end{cases}$

a) $f(2) = 12$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 12 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 6 + a \end{array}\right\} \to \text{El límite existe si } 6 + a = 12 \to a = 6.$$

b) $f(-1) = -3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -3 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 2a - 1 \end{array}\right\} \to \text{El límite existe si } 2a - 1 = -3 \to a = -1.$$

105. **¿Qué valor debe tomar *a* para que las funciones sean continuas?**

a) $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & \text{si } x \le -2 \\ ax - 2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} tg\,\dfrac{-\pi}{2x} & \text{si } x \le -2 \\ \log\,(ax+7) & \text{si } x > -2 \end{cases}$

a) $f(-2) = 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} 2^{x-1} = \dfrac{1}{8} \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (ax-2) = -2a-2 \end{array}\right\} \to \exists \lim_{x\to -2} f(x) \text{ si } \frac{1}{8} = -2a-2 \to a = -\frac{17}{16}$$

b) $f(-2) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} tg\dfrac{-\pi}{2x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \log(ax+7) = \log(-2a+7) \end{array}\right\} \to \exists \lim_{x\to -2} f(x) \text{ si } 1 = \log(-2a+7) \to a = -\frac{3}{2}$$

106. **Encuentra los valores de *a* y *b* para que las siguientes funciones sean continuas en todos los números reales.**

a) $f(x) = \begin{cases} |2-x| & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{x}{b} & \text{si } 2 < x \le 4 \\ a & \text{si } x > 4 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2bx + 4 & \text{si } x < 1 \\ ax + 5 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{3x-1}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $f(2) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{2}{b} \end{array}\right\} \to \text{El límite existe si } \frac{2}{b} = 0.$$

No se puede resolver para ningún valor de b por lo que la función no es continua para ningún valor de b, independientemente del valor de a.

b) $f(1) = a + 5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2b+5 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = a+5 \end{array}\right\} \to \text{El límite existe si } 2b - a = 0.$$

$f(2) = 2a + 5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2a+5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{5}{2} \end{array}\right\} \to \text{El límite existe si } 2a + 5 = \frac{5}{2}.$$

La función es continua si $a = -\dfrac{5}{4}$ y $b = -\dfrac{5}{8}$.

107. **Halla el valor de a para que estas funciones sean continuas.**

a) $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \le a \\ \log_2 x & \text{si } x > a \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3+x^2-x-2 & \text{si } x < -a \\ x^2-2 & \text{si } a \le x \le a \\ x^3+x^2-x-2 & \text{si } x > a \end{cases}$

a) $f(a) = a-2$ $\quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = a-2 \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \log_2 a \end{array}\right\} \to$ El límite existe si $a-2=\log_2 a \to a=4$.

b) $f(-a) = a^2-2$ $\quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -a^-} f(x) = -a^3+a^2+a-2 \\ \lim\limits_{x\to -a^+} f(x) = a^2-2 \end{array}\right\} \to$ El límite existe si $-a^3+a=0 \to a=\{-1, 0, 1\}$

$f(a) = a^2-2$ $\quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -a^-} f(x) = a^3+a^2-a-2 \\ \lim\limits_{x\to -a^+} f(x) = a^2-2 \end{array}\right\} \to$ El límite existe si $-a^3-a=0 \to a=0$

Por tanto, la función es continua para $a = 0$.

108. **Halla m y n para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.**

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le 1 \\ mx+n & \text{si } 1 < x \le 3 \\ 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$f(1) = 2 \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = m+n \end{array}\right\} \to$ El límite existe si $m+n=2$.

$f(3) = 3m+n \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 3m+n \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 4 \end{array}\right\} \to$ El límite existe si $3m+n=4$.

$\left.\begin{array}{r} m+n=2 \\ 3m+n=4 \end{array}\right\} \to m=1, n=1$

109. **Estudia la continuidad en todo el dominio de las funciones. Determina los puntos de discontinuidad que presenta cada una de ellas.**

a) $f(x) = sen\,(x+\pi)$

b) $f(x) = \ln\,(x+e)$

c) $f(x) = tg\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

d) $f(x) = 2^{x-3}$

a) Dom $f = \mathbb{R} \to$ No hay puntos de discontinuidad.

b) Dom $f = (-e, +\infty) \to$ No hay puntos de discontinuidad.

c) Dom $f = \mathbb{R} - \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \pi^-} tg\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to \pi^+} tg\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\infty \end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)$, la función no es continua en $x = \pi$.

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

Al ser una función periódica, de período π, todos los puntos en los que falla el dominio son puntos de discontinuidad inevitable de salto infinito.

d) Dom $f = \mathbb{R} \to$ No hay puntos de discontinuidad.

110. **Investiga la continuidad de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x+1}{x^2-x-6} & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{3x+1}{x-5} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \log(x-1) & \text{si } x < 5 \\ 3 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x \le 0 \\ \sqrt{1-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \log\dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x \le 0 \\ \log(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) ▪ Si $x < 1$:

$f(x) = \dfrac{5x+1}{x^2-x-6}$ Dom $f = (-\infty, 1) - \{-2\}$

$f(-2) \to -\dfrac{9}{0}$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

$x = -2$ es un punto de discontinuidad de salto infinito.

▪ Si $x = 1$:

$f(1) = -1$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$

Como $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$, la función es continua en $x = 1$.

▪ Si $x > 1$:

$f(x) = \dfrac{3x+1}{x-5}$ Dom $f = (1, +\infty) - \{5\}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$.

$x = 5$ es un punto de discontinuidad de salto infinito.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 5\}$.

b) ▪ Si $x < 5$:

$f(x) = \log(x-1)$ Dom $f = (1, 5) \to$ No hay puntos de discontinuidad.

▪ Si $x = 5$:

$f(5) = 3$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \log 4 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 3 \end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$.

La función no es continua en $x = 5$.

▪ Si $x > 5$:

$f(x) = 3$ Dom $f = (5, +\infty) \to$ No hay puntos de discontinuidad.

La función es continua en $(1, +\infty) - \{5\}$.

c) ▪ Si $x < 0$:

$f(x) = 3x + 1$ Dom $f = (-\infty, 0) \rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad.

▪ Si $x = 0$:

$f(0) = 1$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1\end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

Como $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, la función es continua en $x = 0$.

▪ Si $x > 0$:

$f(x) = \sqrt{1-x}$ Dom $f = (0, 1] \rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad.

La función es continua en $(-\infty, 1]$.

d) ▪ Si $x < 0$:

$f(x) = \log\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$ Dom $f = (-\infty, 0) \rightarrow$ No hay discontinuidades.

▪ Si $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \log\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = 0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \log(x+1) = 0\end{array}\right\} \rightarrow f \text{ es continua en } x = 0$$

▪ Si $x > 0$:

$f(x) = \log(x+1)$ Dom $f = (0, +\infty) \rightarrow$ No hay discontinuidades.

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

111. Una atleta tiene que recorrer una distancia de 100 km. Si el primer día recorre la mitad, el segundo día la mitad de lo que le falta, el tercer día la mitad de lo que se ha dejado sin recorrer el segundo día, y así sucesivamente, ¿cuántos días tardará la atleta en recorrer los 100 km? Justifica la respuesta.

Nunca llegará a recorrer los 100 km, ya que necesitaría un número «infinito» de días para lograrlo.

El primer día ha recorrido $a_1 = \frac{100}{2} = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$ km.

El segundo día ha recorrido $a_2 = \frac{100}{2^2} + 50 = \frac{300}{2^2} = 100 \cdot \frac{3}{2^2} = 75$ km.

El tercer día ha recorrido $a_3 = \frac{100}{2^3} + 75 = \frac{700}{2^3} = 100 \cdot \frac{7}{2^3} = 87{,}5$ km.

El término general de la sucesión es $a_n = 100 \cdot \frac{2^n - 1}{2^n} = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, donde n representa el día n-ésimo.

Cuando n se hace muy grande la sucesión tiende a 100 $\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 100$

112. **Calcula $\lim\limits_{x \to 3} (f \circ g)$, siendo las funciones:**

$$g(x) = x + 2 \qquad f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 10x}$$

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(x+2) = \frac{(x+2)^2 - 1}{2(x+2)^2 - 10(x+2)} = \frac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 - 2x - 12}$$

$$\lim_{x \to 3}\big(f \circ g(x)\big) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 - 2x - 12} \to \frac{24}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 - 2x - 12} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 - 2x - 12} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe el límite.}$$

113. **Construye la gráfica aproximada de una función que cumpla las condiciones indicadas.**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$

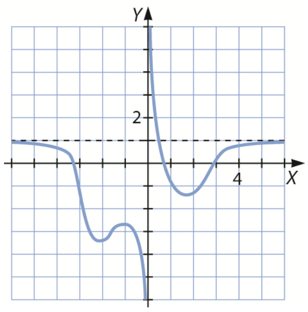
$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

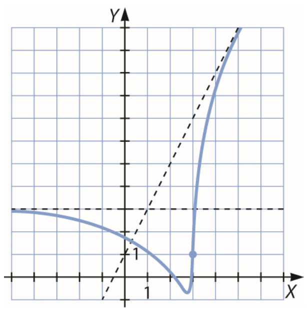
$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a)



b)



114. **Escribe una función racional para cada caso.**

a) Sus únicas asíntotas son $x = 2$ y $x = -3$.

b) Sus únicas asíntotas son $x = -2$ e $y = 3$.

c) Sus asíntotas son $x = 4$ e $y = 2x - 1$.

Repuesta abierta. Por ejemplo:

a) $f(x) = \dfrac{x^4}{(x-2)(x+3)}$

b) $f(x) = \dfrac{3x}{x+2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 9x}{x - 4}$

115. **Estudia la continuidad en todos los números reales de esta función.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Como *cos x* es una función continua en todo $\mathbb{R}$, el único punto de discontinuidad que puede tener $f(x)$ es $x = 0$:

$$f(0) = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

116. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x \le 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcula a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$ y $f(2) = 7$.

$f(1) = 5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = a + b \end{array}\right\} \to \text{El límite existe si } a + b = 5.$$

$f(2) = 2a + b = 7$

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 5 \\ 2a + b = 7 \end{array}\right\} \to a = 2, b = 3$$

117. Estudia la continuidad según los valores de los parámetros a y b en esta función.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + a}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \ne 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$f(0) = b$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{a}{1} = a \end{array}\right\} \to a = b = 0$$

118. El teorema de Bolzano dice:

Si* f *es una función continua en el intervalo* [a, b] *y se cumple que el signo de* f(a) *es distinto del signo de* f(b) *entonces existe un punto* c $\in$ (a, b) *tal que* f(c) $=$ *0.

Aplica el teorema del Bolzano para demostrar que la ecuación $x^2 + x - 4 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo (1, 2).

$$\left.\begin{array}{l} 1^2 + 1 - 4 = -2 < 0 \\ 2^2 + 2 - 4 = 2 > 0 \end{array}\right\} \to$$

Por el teorema de Bolzano, existe al menos un x en el intervalo (1, 2) tal que $x^2 + x - 4 = 0$. Es decir, existe al menos una solución en ese intervalo.

119. Aplica el teorema de Bolzano para demostrar que la ecuación $e^{-x} + 2 = x$ tiene alguna solución.

Si definimos las funciones $f(x)$ y $g(x)$ como $f(x) = e^{-x} + 2$ y $g(x) = x$, se cortan en un punto $x \in (2, 3)$, entonces vamos a aplicar el teorema de Bolzano a $e^{-x} + 2 - x = 0$ en el intervalo (2, 3).

$$\left.\begin{array}{l} e^{-2} + 2 - 2 = \dfrac{1}{e^2} > 0 \\ e^{-3} + 2 - 3 = \dfrac{1}{e^3} - 1 < 0 \end{array}\right\}$$

Por teorema de Bolzano, existe al menos un x en el intervalo (2, 3) tal que $e^{-x} + 2 = x$. Es decir, existe al menos una solución en ese intervalo.

120. **Calcula el valor de *a* para que el límite tenga valor finito.**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3}{x-1} - ax$$

Con ese valor de *a*, halla *b* para que se verifique que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3}{x-1} - ax - b = 0$$

¿Qué relación existe entre la función $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x-1}$ y la recta $y = ax + b$?

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3}{x-1} - ax = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3-ax^2+ax}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2-a)x^2+ax+3}{x-1}$$

Para que tenga límite finito, el grado del numerador y del denominador debe ser el mismo, por lo que:

$$2-a=0 \to a=2 \to \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3}{x-1} - ax - b = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{x-1} - b = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3-bx+b}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2-b)x+(3+b)}{x-1}$$

Para que este límite sea 0, el grado del numerador debe ser menor que el del denominador, por lo que:

$$2-b=0 \to b=2 \to \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x-1} = 0$$

La relación que hay entre ambas funciones es que $y = ax + b$ en una asíntota oblicua de $y = \dfrac{2x^2+3}{x-1}$.

121. **La siguiente fórmula, que se debe a Albert Einstein, expresa la masa, *M*, de un cuerpo en función de su velocidad, *v*, siendo *c* la velocidad de la luz (300 000 km/s).**

$$M = \frac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

a) Calcula el límite de la masa, *M*, cuando *v* tiende a *c*.

b) Analiza si un cuerpo puede alcanzar la velocidad de la luz.

$$\lim_{v\to c} \frac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}} = +\infty$$

Para que la velocidad llegara a ser la de la luz el cuerpo debería tener una masa infinita.

122. **El servicio de traumatología de un hospital va a implantar un nuevo sistema que pretende reducir a corto plazo las listas de espera.**

Se prevé que a partir de ahora la siguiente función, *P*(*t*), indicará en cada momento *t*, en meses, el porcentaje de pacientes que podrá ser operado sin necesidad de entrar en lista de espera.

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & \text{si } 0 \le t \le 10 \\ \dfrac{38t - 100}{0{,}4t} & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

Pasado mucho tiempo, ¿cuál será este porcentaje?

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{38t-100}{0{,}4t} = \frac{38}{0{,}4} = 95 \to \text{El 95\% será atendido.}$$

123. **Un comercial de cierto producto recibe, como sueldo mensual, una cantidad fija de 600 € más una comisión que depende de la expresión $x^2 - x + 1$, donde x representa el número de artículos que vende.**

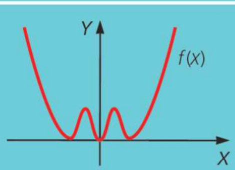
El comercial tiene que correr con sus propios gastos, que son de 50 € más 3 € por cada producto vendido. Obtén la función que recoge el sueldo mensual del vendedor. ¿Es una función continua?

$$f(x) = 600 + \left(x^2 - x + 1\right) - (50 + 3x) = x^2 - 4x + 551$$

No, es una función discreta definida para los $x > 0$ y con $x \in \mathbb{N}$.

PARA PROFUNDIZAR

124. **Elige la respuesta adecuada.** (Concurso de Primavera)

Empezamos con un número, lo duplicamos y luego le restamos 1. Después de aplicar sucesivamente este procedimiento 99 veces se obtiene $2^{100} + 1$. ¿Con qué número empezamos?	1	2	3	4	5
Cuántas funciones continuas $y = f(x)$ hacen que la gráfica de $f(x)$ sea la de la figura. 	16	12	8	4	2
¿Qué número ocupa la posición 2007 en la sucesión 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...?	55	62	63	67	71
Para cada número entero positivo n, $f(n) = n^4 - 360n^2 + 400$. ¿Cuál es la suma de todos los valores $f(n)$ que resultan ser números primos?	794	796	798	800	802
¿Cuál es la penúltima cifra de 11^{48}?	8	6	4	2	0

- La sucesión es de la forma: $a_n = 2^n x - 2^n + 1 = 2^n(x-1) + 1$, donde x representa el número inicial. Despejando:

  $2^{99}(x-1) + 1 = 2^{100} + 1$ nos queda que $x = 3$.

- Hacen falta 4 funciones continuas.

- Dado que el número 1 ocupa una posición, el 2 ocupa dos posiciones, etc., la sucesión que buscamos debe tener los siguientes términos:

  $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + 2 = 3$, $a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$...

  Por lo que el término general es $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Ahora buscamos el número n que cumpla:

  $$2007 = \frac{n(n+1)}{2} \to n = 62$$

  Como $\text{Im}\,(n^2 + 20n + 20) = (0, +\infty)$ e $\text{Im}\,(n^2 - 20n + 20) = (0, 20)$, entonces buscamos entre los $n < 20$.

- Primero nos fijamos que para cualquier n par $f(n)$ es par, por lo que miramos solo los n impares. Los únicos primos que salen son $f(1) = 41$ y $f(19) = 761$, y sumándolos queda 802.

- Definamos la sucesión $a_n = 11^n$, veamos algunos valores:

  $n = 1 \to 11^1 = 11 \to 1$ $\quad$ $n = 2 \to 11^2 = 121 \to 2$ $\quad$ $n = 3 \to 11^3 = 1331 \to 3$ $\quad$ $n = 4 \to 11^4 = 14\,641 \to 4$

  ...

  $n = 48 \to 11^{48} \to 8$

125. **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to 0} sen\,\dfrac{1}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \cdot sen\,\dfrac{1}{x}\right)$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x} \cdot \cos x\right)$

Aunque no sepamos el valor que toman el seno y el coseno de un ángulo cuando el ángulo tiende a infinito, sí sabemos que es una cantidad acotada, pues tanto el seno como el coseno de un ángulo tienen un valor comprendido en $[-1, 1]$, y al multiplicar por cero una cantidad acotada, el resultado es cero.

a) $\lim\limits_{x \to 0} sen\left(\dfrac{1}{x}\right) \rightarrow$ No existe. b) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot sen\,\dfrac{1}{x} = 0$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} \cdot \cos x = 0$

126. **Estudia la continuidad de las funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ b) $f(x) = |x^2 - 1|$ c) $f(x) = \dfrac{1}{|x^2 - 1|}$

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

No existe $f(0)$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ No existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, y la función no es continua en $x = 0$.

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \text{ o si } x > 1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 \le x \le 1 \end{cases}$

Si $x = -1$: $f(-1) = 0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (-x^2 + 1) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$

Como $f(-1) = \lim\limits_{x \to -1} f(x)$, la función es continua en $x = -1$.

Si $x = 1$: $f(1) = 0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-x^2 + 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

Como $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$, la función es continua en $x = 1$.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \text{ o si } x > 1 \\ \dfrac{1}{-x^2 - 1} & \text{si } -1 < x < 1 \end{cases}$

No existe $f(-1)$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{1}{x^2 - 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{-x^2 + 1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ La función no es continua en $x = -1$.

Es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

No existe $f(1)$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{-x^2 + 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^2 - 1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ La función no es continua en $x = -1$.

Es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

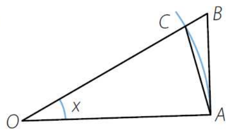
La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

127. **Si medimos el ángulo x en radianes, demuestra que $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$.**

También demuestra que si el ángulo x se mide en grados sexagesimales, entonces:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \frac{\pi}{180}$$

Como la medida de la longitud del arco está comprendida entre la longitud de los segmentos AC y AB, entonces el área del sector circular está comprendida entre el área de los triángulos.



Área de $\widehat{OAC}$ < Área de sector < Área $\widehat{OAB}$

$$\frac{R \cdot R \text{ sen } x}{2} < \pi R^2 \cdot \frac{x}{2\pi} < \frac{R \cdot R \text{ tg } x}{2}$$

$$\frac{R^2 \text{ sen } x}{2} < R^2 \cdot \frac{x}{2} < \frac{R^2 \text{ tg } x}{2}$$

Simplificamos dividiendo entre $\frac{R^2}{2}$: $\text{sen } x < x < \text{tg } x$

Dividimos entre $\text{sen } x$: $\frac{\text{sen } x}{\text{sen } x} < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{\text{tg } x}{\text{sen } x}$

$$\rightarrow \frac{\text{sen } x}{\text{sen } x} > \frac{\text{sen } x}{x} > \frac{\text{sen } x}{\text{tg } x} \rightarrow 1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$$

Hacemos límites con $x \rightarrow 0$:

$\lim_{x \to 0} 1 > \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} > \lim_{x \to 0} \cos x \rightarrow 1 > \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} > 1 \rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$, que es lo que queríamos demostrar.

Si x viene medido en grados:

$$\frac{R \cdot R \text{ sen } x}{2} < \pi R^2 \cdot \frac{x}{360} < \frac{R \cdot R \text{ tg } x}{2} \rightarrow \frac{R^2 \text{ sen } x}{2} < \frac{\pi R^2}{360} \cdot x < \frac{R^2 \text{ tg } x}{2}$$

Simplificamos dividiendo entre $\frac{R^2}{2}$: $\text{sen } x < \frac{\pi}{180} \cdot x < \text{tg } x$

Dividimos entre $\text{sen } x$:

$$\frac{\text{sen } x}{\text{sen } x} < \frac{\pi}{180} \cdot \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{\text{tg } x}{\text{sen } x} \rightarrow 1 < \frac{\pi}{180} \cdot \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\rightarrow 1 > \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$$

Hacemos límites con $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \to 0} 1 > \lim_{x \to 0} \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\text{sen } x}{x} > \lim_{x \to 0} \cos x \rightarrow 1 > \frac{180}{\pi} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} > 1$$

$$\rightarrow \frac{180}{\pi} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Y despejando, resulta que: $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \frac{\pi}{180}$

128. **Comprueba que $\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$ no existe.**

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}.$$

129. **Calcula el siguiente límite**

$$\lim_{x\to\infty} \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}$$

(Olimpiadas matemáticas, Madrid)

Partiendo de la fórmula de *sen* $2x$ y aplicándola sucesivamente, se obtiene:

$$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x = 2^2\cos x\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2^3\cos x\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2} =$$

$$= \ldots = 2^{n+1}\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}$$

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sen}2x}{2^{n+1}\cos x\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}} = \frac{\operatorname{sen}x}{2^n\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}}$$

Como $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$, resulta que: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{2^n\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{2^n\frac{x}{2^n}} = \frac{\operatorname{sen}x}{x}$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x} = 1.$

130. **Razona si se puede verificar la continuidad en el punto $x = 0$ de una función real $f(x)$ de variable real en estos casos.**

a) Para n natural, $f\left(\frac{1}{2n}\right) = 1$ y $f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = -1$.

b) Para x real no negativo, $f(x) = x^2$, y para x real negativo, $f(x) = 0$.

c) Para n natural, $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.

(Olimpiadas matemáticas, Madrid)

Para que una función sea continua en $x = 0$, debe verificarse que, para cualquier sucesión $\{x_n\}$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, se verifique que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$.

a) En este caso se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = 0$$

Sin embargo, la función $f(x)$ es igual a 1 para $x = \frac{1}{2n}$ y es igual a -1 cuando $x = \frac{1}{2n+1}$:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2n}\right) = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = -1$$

No existe el límite y la función no es continua en $x = 0$.

b) La función viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0\end{array}\right\} \rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

La función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

c) Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ debe verificarse que para cualquier sucesión $\{x_n\}$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, se verifique que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$. Como solo se conoce el valor de $f(x)$ para una sucesión de valores de x, no se puede afirmar que la función sea continua.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **¿A qué se le denominó año 1 d.C.?**

   Al año siguiente al nacimiento de Cristo (o al año 754 de la fundación de Roma).

2. **¿Qué acontecimiento marcaba el inicio del calendario que se usaba en Roma antes del implantado por el papa Juan I?**

   La fundación de Roma.

3. **¿Qué valor hay que sustituir en la función para calcular el siglo al que pertenece el año 325 a.C.?**

   Hay que sustituir $x = 325$ en la parte de la función donde $x < 0$.

4. **¿A qué siglo pertenece el año 1616 d.C.? ¿Y el año 325 a.C.?**

   El año 1616 d.C. pertenece al siglo XVII d.C. El año 325 a.C. pertenece al siglo IV a.C.

5. **¿En qué siglo se fundó la ciudad de Roma?**

   Roma se fundó en el año 753 a.C. que pertenece al siglo VIII a.C.

6. **El año cero no existe. Relaciona esta afirmación con el hecho de definir la función siglo mediante una función definida a trozos.**

   $$f(0) = 1 \rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1\end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x\to 0} f(x).$$

7. **¿Cuándo comenzó el siglo XXI?**

   Comenzó en el año 2001.

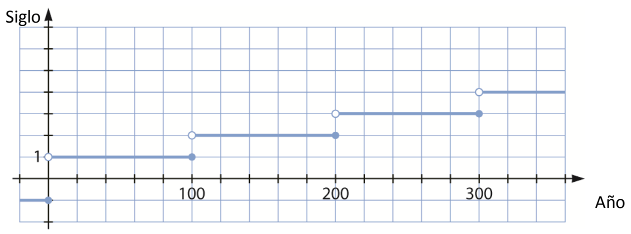
8. **Estudia la continuidad de la función siglo y di qué tipo de discontinuidades presenta.**

   $f(0) = 1 \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1 \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ → Discontinuidad de salto finito en $x = 0$

   Si $x < 0$, la $f(x)$ tiene discontinuidades inevitables de saltos finitos entre los años 99 y 100 a.C., 199 y 200 a.C, etc.

   Si $x > 0$, la $f(x)$ tiene discontinuidades inevitables de saltos finitos entre los años 100 y 101 d.C., 200 y 201 d.C., etc.

9. **Construye la gráfica de la función siglo considerando que x toma valores reales.**



10. **Analiza la continuidad de la función siglo en $x = 2000$, utiliza para ello los límites laterales.**

   $f(2000) = 20 \quad \lim\limits_{x\to 2000^+} f(x) = 21 \quad \lim\limits_{x\to 2000^-} f(x) = 20 \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x\to 2000} f(x).$ → La función no es continua en $x = 2000$.

Derivada de una función

ACTIVIDADES

1. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - x + 3$ en los siguientes intervalos.

[2, 3], [2, 4], [2, 5], [2, 6], [3, 5], [3, 6]

$$T.V.M.([2,3]) = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{9-5}{1} = 4$$

$$T.V.M.([2,6]) = \frac{f(6)-f(2)}{6-2} = \frac{33-5}{4} = 7$$

$$T.V.M.([2,4]) = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{15-5}{2} = 5$$

$$T.V.M.([3,5]) = \frac{f(5)-f(3)}{5-3} = \frac{23-9}{2} = 7$$

$$T.V.M.([2,5]) = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{23-5}{3} = 6$$

$$T.V.M.([3,6]) = \frac{f(6)-f(3)}{6-3} = \frac{33-9}{3} = 8$$

2. Halla la *T.V.M.* de la función $f(x) = x^2 - x + 3$ en los intervalos siguientes.

a) $[2, 2+h]$

b) $[3, 3+h]$

a) $$T.V.M.([2,2+h]) = \frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \frac{(2+h)^2-(2+h)+3-(4-2+3)}{h} = \frac{h^2+3h}{h} = h+3$$

b) $$T.V.M.([3,3+h]) = \frac{f(3+h)-f(3)}{3+h-3} = \frac{(3+h)^2-(3+h)+3-(9-3+3)}{h} = \frac{h^2+5h}{h} = h+5$$

3. Utilizando la definición, calcula la derivada en $x = 2$ y en $x = -1$ de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

b) $f(x) = 2x^2 + x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

a) $$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2+h-3}-\frac{1}{2-3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{-1+h} = -1$$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{-1+h-(-1)} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{-1+h-3}-\frac{1}{-1-3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4-4+h}{4(-4+h)h} = -\frac{1}{16}$$

b) $$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \lim_{h\to 0}\frac{2(2+h)^2+(2+h)-(2\cdot 2^2+2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2(4+h^2+4h)+2+h-10}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h^2+9h}{h} = \lim_{h\to 0}(2h+9) = 9$$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{-1+h-(-1)} = \lim_{h\to 0}\frac{2(-1+h)^2+(-1+h)-\left[2\cdot(-1)^2+(-1)\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2(1+h^2-2h)-1+h-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h^2-3h}{h} = \lim_{h\to 0}(2h-3) = -3$$

c) $$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(2+h)^2}-\frac{1}{2^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4-(2+h)^2}{4h(2+h)^2} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4-(4+h^2+4h)}{4h(4+h^2+4h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-h^2-4h}{16h+4h^3+16h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{-h-4}{16+4h^2+16h} = -\frac{1}{4}$$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{-1+h-(-1)} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(-1+h)^2}-\frac{1}{(-1)^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-(1-2h+h^2)}{h(-1+h)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{2h-h^2}{h(1-2h+h^2)} = \lim_{h\to 0}\frac{2-h}{1-2h+h^2} = 2$$

4. **Calcula la derivada de la función $f(x) = x^3 + 4$ en los siguientes puntos.**

a) $x = 1$ b) $x = -4$ c) $x = 2$ d) $x = -3$

a) $f'(1) = \lim_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^3+4-(1^3+4)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{3h^2+3h+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}(3h+3+h^2) = 3$

b) $f'(-4) = \lim_{h\to 0}\dfrac{(-4+h)^3+4-\left[(-4)^3+4\right]}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{(h^3-12h^2+48h-64)+4-(-64+4)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}(h^2-12h+48) = 48$

c) $f'(2) = \lim_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3+4-(2^3+4)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{8+h^3+6h^2+12h+4-12}{h} = \lim_{h\to 0}(h^2+6h+12) = 12$

d) $f'(-3) = \lim_{h\to 0}\dfrac{(-3+h)^3+4-\left[(-3)^3+4\right]}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{-27+h^3-9h^2+27h+4-(-27+4)}{h} = \lim_{h\to 0}(h^2-9h+27) = 27$

5. **Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x - x^2$ en los puntos de abscisa $x = 2$ y $x = -3$.**

$f'(2) = \lim_{h\to 0}\dfrac{\left[2+h-(2+h)^2\right]-(2-2^2)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{2+h-(4+4h+h^2)-2+4}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{-3h-h^2}{h} = -3$

$f(2) = 2 - 2^2 = -2$

La ecuación de la recta tangente en el punto $P(2, -2)$ es:

$y-(-2) = f'(2)\cdot(x-2) \rightarrow y+2 = -3(x-2) \rightarrow y = -3x+4$

$f'(-3) = \lim_{h\to 0}\dfrac{(-3+h)-(-3+h)^2-\left[-3-(-3)^2\right]}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{-3+h-(9+h^2-6h)+12}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{-h^2+7h}{h} = 7$

$f(-3) = -3-(-3)^2 = -12$

La ecuación de la recta tangente en el punto $P(-3, -12)$ es:

$y-(-12) = f'(-3)\cdot(x-(-3))$

$y+12 = 7(x+3)$

$y = 7x+9$

6. **Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 4x + 3$ en los puntos donde corta los ejes X e Y.**

Cortes con el eje X: $(-1, 0)$, $(-3, 0)$

La derivada $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $P(a, f(a))$.

$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\dfrac{(-1+h)^2+4(-1+h)+3-\left[(-1)^2+4\cdot(-1)+3\right]}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{1+h^2-2h-4+4h+3-1+4-3}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{h^2+2h}{h} = 2$

$f'(-3) = \lim_{h\to 0}\dfrac{(-3+h)^2+4(-3+h)+3-\left[(-3)^2+4\cdot(-3)+3\right]}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{9+h^2-6h-12+4h+3-9+12-3}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{h^2-2h}{h} = -2$

Corte con el eje Y: $(0, 3)$

$f'(0) = \lim_{h\to 0}\dfrac{(0+h)^2+4(0+h)+3-\left[(0)^2+4\cdot(0)+3\right]}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{h^2+4h+3-3}{h} = 4$

7. **Utiliza la definición para calcular la función derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = 4x^3$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4(x+h)^3-4x^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-4x^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{12x^2h+12xh^2+4h^3}{h} = 12x^2$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x+h+3}-\dfrac{1}{x+3}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x+3-(x+h+3)}{(x+3)(x+h+3)h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{(x+3)(x+h+3)h} = -\dfrac{1}{(x+3)^2}$

8. **Halla las derivadas segunda y tercera de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x^3 + 4x^2$ b) $f(x) = x^2 - x + 5$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3+4(x+h)^2-(x^3+4x^2)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+4(x^2+h^2+2xh)-x^3-4x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3x^2h+3xh^2+h^3+4h^2+8xh}{h} = 3x^2+8x$

$f''(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(x+h)^2+8(x+h)-(3x^2+8x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(x^2+h^2+2xh)+8x+8h-3x^2-8x}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h^2+6xh+8h}{h} = 6x+8$

$f'''(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''(x+h)-f''(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{6(x+h)+8-(6x+8)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{6h}{h} = 6$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-(x+h)+5-(x^2-x+5)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^2+h^2+2xh-x-h+5-x^2+x-5}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h+2x-1) = 2x-1$

$f''(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(x+h)-1-(2x-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h}{h} = 2$

$f'''(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''(x+h)-f''(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2-2}{h} = 0$

9. **Halla la derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = 6$ b) $f(x) = x^4$ c) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$

a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = 4\cdot x^{4-1} = 4x^3$

c) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}} \rightarrow f'(x) = \dfrac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^5} = x^{-5} \rightarrow f'(x) = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -5\dfrac{1}{x^6}$

10. **Halla la derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$ b) $f(x) = x^8$ c) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

a) $f(x) = \sqrt[7]{x^4} = x^{\frac{4}{7}} \rightarrow f'(x) = \dfrac{4}{7}x^{\frac{4}{7}-1} = \dfrac{4}{7}x^{-\frac{3}{7}} = \dfrac{4}{7\sqrt[7]{x^3}}$

b) $f'(x) = 8\cdot x^{8-1} = 8x^7$

c) $f(x)=\sqrt[5]{x^3}=x^{\frac{3}{5}} \to f'(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

d) $f(x)=\frac{1}{x^4}=x^{-4} \to f'(x)=-4\cdot x^{-4-1}=-4x^{-5}=\frac{-4}{x^5}$

11. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = 4^x$

a) $f'(x)=2^x \ln 2$ b) $f'(x)=3^x \ln 3$ c) $f'(x)=4^x \ln 4$

12. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \log_2 x$ b) $f(x) = \log_3 x$ c) $f(x) = \log_4 x$

a) $f'(x)=\frac{1}{x\ln 2}$ b) $f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}$ c) $f'(x)=\frac{1}{x\ln 4}$

13. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x} + x$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x^3}$

d) $f(x) = 3^x - \text{arc tg}\, x$

a) $f'(x)=3x^2+2x-1$

b) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+1$

c) $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

d) $f'(x)=3^x\ln 3-\frac{1}{1+x^2}$

14. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 9$

b) $f(x) = 2\,\text{sen}\, x - 3\cos x$

c) $f(x) = 7\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[4]{x^3}$

d) $f(x) = \frac{1}{2x} - 5x$

a) $f'(x)=6x^2+8x-8$

b) $f'(x)=2\cos x-3(-\text{sen}\, x)=2\cos x+3\,\text{sen}\, x$

c) $f'(x)=7\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-3\cdot\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{7}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{9}{4\sqrt[4]{x}}$

d) $f'(x)=-\frac{1}{2x^2}-5$

15. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = x\cdot\sqrt[3]{x^2}$

b) $f(x) = x\cdot e^x$

c) $f(x) = x\cdot \text{sen}\, x$

d) $f(x) = x\cdot \ln x$

e) $f(x) = \text{sen}\, x\cdot\cos x$

f) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

g) $f(x) = (x^2 + 2x)\cdot \text{sen}\, x$

h) $f(x) = (e^x - x)\cdot \ln x$

a) $f'(x)=1\cdot\sqrt[3]{x^2}+x\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3}=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

b) $f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x$

c) $f'(x)=1\cdot \text{sen}\, x+x\cdot\cos x$

d) $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

e) $f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

f) $f(x) = (x^2+1) \cdot \dfrac{1}{x} \rightarrow f'(x) = 2x \cdot \dfrac{1}{x} + (x^2+1) \cdot \dfrac{-1}{x^2} = 2 - 1 - \dfrac{1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

g) $f'(x) = (2x+2) \cdot \operatorname{sen} x + (x^2+2x) \cdot \cos x$

h) $f'(x) = (e^x - 1) \cdot \ln x + \dfrac{e^x - x}{x}$

16. **Calcula la derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = 3x^2 \cdot \log_2 x$

b) $f(x) = e^x \cdot \operatorname{sen} x$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \cos x$

d) $f(x) = \cos x \cdot \operatorname{tg} x$

e) $f(x) = 4x \cdot \operatorname{sen} x + x^3 \cdot \cos x$

f) $f(x) = \ln x \cdot \dfrac{1}{x^4} + x^2 \cdot e^x$

g) $f(x) = (\operatorname{sen} x - \cos x) \cdot \operatorname{tg} x$

h) $f(x) = 4x\sqrt{x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

a) $f'(x) = 6x \cdot \log_2 x + 3x^2 \cdot \dfrac{1}{x \ln 2} = 6x \log_2 x + \dfrac{3x}{\ln 2}$

b) $f'(x) = e^x \cdot \operatorname{sen} x + e^x \cdot \cos x = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \cos x - \sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{sen} x$

d) $f'(x) = -\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x + \cos x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) = -\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x + \cos x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \dfrac{1}{\cos x} = \cos x$

e) $f'(x) = 4 \operatorname{sen} x + 4x \cos x + 3x^2 \cos x - x^3 \operatorname{sen} x = (4 - x^3) \operatorname{sen} x + (4x + 3x^2) \cos x$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x^4} + \ln x \cdot \dfrac{-4}{x^5} + 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = \dfrac{1}{x^5}(1 - 4 \ln x) + x\, e^x (2 + x)$

g) $f'(x) = (\cos x + \operatorname{sen} x) \operatorname{tg} x + (\operatorname{sen} x - \cos x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)$

h) $f'(x) = 4 \cdot \sqrt{x} + 4x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2} = 6\sqrt{x} + \dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

17. **Calcula la derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x+4}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 3}{x + 1}$

a) $f'(x) = \dfrac{1 \cdot x - (x+2) \cdot 1}{x^2} = -\dfrac{2}{x^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (3x+4) - \sqrt{x} \cdot 3}{(3x+4)^2} = \dfrac{-3x+4}{2\sqrt{x} \cdot (3x+4)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x+1) - (x^2 + x - 3) \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)^2}$

18. **Calcula la derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{x^3}$ b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\cos x}$ c) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x + 2x}{x-3}$

a) $f'(x) = \dfrac{\cos x \cdot x^3 - \text{sen}\, x \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{x\cos x - 3\,\text{sen}\, x}{x^4}$

b) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos x - \sqrt{x} \cdot (-\text{sen}\, x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x + 2x\,\text{sen}\, x}{2\sqrt{x}\cos^2 x}$

c) $f'(x) = \dfrac{(\cos x + 2)\cdot(x-3) - (\text{sen}\, x + 2x)\cdot 1}{(x-3)^2} = \dfrac{(x-3)\cdot\cos x - 6 - \text{sen}\, x}{(x-3)^2}$

19. **Calcula la derivada de las funciones que aparecen a continuación.**

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ b) $f(x) = (\text{arc sen}\, x)^3$ c) $f(x) = \ln 4x$

a) $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$ b) $f'(x) = \dfrac{3(\text{arc sen}\, x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

20. **Calcula la derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = (\cos x)^2$ b) $f(x) = tg\left(\dfrac{x}{x-5}\right)$ c) $f(x) = e^{x^2+7x-4}$

a) $f'(x) = -2\cos x\,\text{sen}\, x$ b) $f'(x) = \dfrac{-5}{\cos^2\left(\dfrac{x}{x-5}\right)} \cdot \dfrac{1}{(x-5)^2}$ c) $f'(x) = e^{x^2+7x-4} \cdot (2x+7)$

SABER HACER

21. **Halla el valor de m en la función $f(x) = \dfrac{3x+m}{mx^2}$ sabiendo que $f'(-1) = 5$.**

$$f'(x) = \frac{3\cdot mx^2 - (3x+m)\cdot 2mx}{m^2x^4}$$

$$f'(-1) = \frac{3m + 2m\cdot(-3+m)}{m^2} = \frac{-3m+2m^2}{m^2} = -\frac{3}{m} + 2 = 5 \rightarrow m = -1$$

22. **Di si es derivable $f(x) = \begin{cases} kx+2 & \text{si } x < -1 \\ x^3 - x + k & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ en $x = -1$ según los valores de k.**

Una función es derivable si también es continua, así que primero analizamos si la función es continua en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -k+2 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = k \end{array}\right\} \rightarrow \text{Para que sea continua } -k+2 = k \rightarrow k = 1.$$

$f(x)$ solo es continua para $k = 1$, por tanto, solo puede ser derivable para este valor. Analizamos la derivabilidad para este valor:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 3x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f'(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ no es derivable para ningún valor de } k.$$

23. **Determina la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = sen\ 2x - cos\ x$ en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$.**

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{3} + sen\frac{\pi}{3} = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = sen\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $P\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ es:

$$y - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)x + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

24. **Determina los puntos de la función $f(x) = x^3 - 3x$ cuya tangente sea horizontal.**

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = -2 \rightarrow A(1, -2)$$

$$x = -1 \rightarrow f(-1) = 2 \rightarrow B(-1, 2)$$

25. **¿Cuál tiene que ser el valor de k en la función $f(x) = (k-1)x^3 + x^2 - kx - 4$ si las rectas tangentes en $x = \frac{1}{3}$ y en $x = -1$ son paralelas?**

$$f'(x) = 3(k-1)x^2 + 2x - k$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = f'(-1) \rightarrow 3(k-1)\frac{1}{9} + \frac{2}{3} - k = 3(k-1) - 2 - k \rightarrow k = 2$$

26. **Escribe la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ en el punto $x = \frac{12}{5}$.**

$$y = \sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)}$$

$$x = \frac{12}{5} \rightarrow y = \frac{6}{5}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}}\cdot\left(\frac{-8x}{9}\right) = -\frac{4x}{9\sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}}$$

$$f'\left(\frac{12}{5}\right) = -\frac{8}{9}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $P\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$ es:

$$y - \frac{6}{5} = -\frac{8}{9}\cdot\left(x - \frac{12}{5}\right) \rightarrow y = -\frac{8}{9}x + \frac{96}{45} + \frac{6}{5} \rightarrow y = -\frac{8}{9}x + \frac{10}{3}$$

27. **Calcula las derivadas segunda y tercera para la función $f(x) = e^{2x} + sen\ x$.**

$$f'(x) = 2e^{2x} + \cos x \rightarrow f''(x) = 4e^{2x} - sen\ x \rightarrow f'''(x) = 8e^{2x} - \cos x$$

28. Halla la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = (4x^2 + 5x - 2)^3$

b) $f(x) = \sqrt[5]{sen\, x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{tg^3\, x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 7x - 12}}$

a) $f'(x) = 3(4x^2 + 5x - 2)^2(8x + 5)$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{5} sen^{-\frac{4}{5}} x \cdot cos\, x = \dfrac{cos\, x}{5\sqrt[5]{sen^4 x}}$

c) $f'(x) = -\dfrac{3}{tg^4 x}(1 + tg^2 x)$

d) $f'(x) = \dfrac{-1}{3}(x^2 - 7x - 12)^{-\frac{4}{3}} \cdot (2x - 7) = \dfrac{7 - 2x}{\sqrt[3]{(x^2 - 7x - 12)^4}}$

29. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = 5^{3x^2 - 2x + 1}$

b) $f(x) = 7^{cos\, x^2}$

a) $f'(x) = 5^{3x^2 - 2x + 1} \ln 5 \cdot (6x - 2)$

b) $f'(x) = 7^{cos\, x^2} \ln 7 \cdot 2x \cdot (-sen\, x^2) = -7^{cos\, x^2} \ln 7 \cdot 2x\, sen\, x^2$

30. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln\left(\sqrt{2x}\right)$

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \dfrac{1}{2x}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{x^2}} \cdot \dfrac{-2}{x^3} = \dfrac{-2}{x}$

31. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = tg(2x - 5)$

b) $f(x) = cos\sqrt{x}$

a) $f'(x) = 2\left[1 + tg^2(2x - 5)\right]$

b) $f'(x) = -sen\left(\sqrt{x}\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

32. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (x + 1)^x$

b) $f(x) = (x^2 + 1)^{x^3}$

a) $\ln f(x) = \ln\left[(x + 1)^x\right] = x \ln(x + 1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot \ln(x + 1) + x \cdot \frac{1}{x + 1}$$

$$f'(x) = \left[\ln(x + 1) + \frac{x}{x + 1}\right](x + 1)^x$$

b) $\ln f(x) = \ln\left[(x^2 + 1)^{x^3}\right] = x^3 \ln(x^2 + 1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3x^2 \cdot \ln(x^2 + 1) + x^3 \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = 3x^2 \ln(x^2 + 1) + \frac{2x^4}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \left[3x^2 \ln(x^2 + 1) + \frac{2x^4}{x^2 + 1}\right](x^2 + 1)^{x^3}$$

33. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = arc\ sen(x^3 + x)$ b) $f(x) = arc\ tg\left(\frac{1}{x}\right)$

a) $f'(x) = \frac{3x^2+1}{\sqrt{1-(x^3+x)^2}}$

b) $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2+1}$

34. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = e^{sen\,x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{\ln\sqrt[3]{x}}$

a) $f'(x) = 2x\cos x^2\, e^{sen\,x^2}$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln\sqrt[3]{x}}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{6x\sqrt{\ln\sqrt[3]{x}}}$

ACTIVIDADES FINALES

35. Completa en tu cuaderno esta tabla con las tasas de variación media de la función $f(x) = 2x^2 - x + 1$.

	[−3, −1]	[−5, 2]	[0, 3]	[1, 4]
T.V.M.				

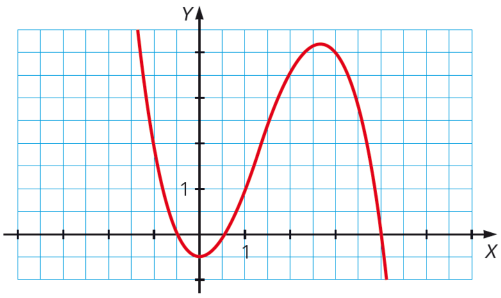
$T.V.M.([-3,-1]) = \frac{f(-1)-f(-3)}{-1-(-3)} = \frac{4-22}{2} = -9$

$T.V.M.([0,3]) = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{16-1}{3} = 5$

$T.V.M.([-5,2]) = \frac{f(2)-f(-5)}{2-(-5)} = \frac{7-56}{7} = -7$

$T.V.M.([1,4]) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{29-2}{3} = 9$

36. Determina la tasa de variación media de esta función en cada uno de los intervalos.



a) [−1, 1] b) [1, 3] c) [−1, 3]

a) $T.V.M.([-1,1]) = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$

b) $T.V.M.([1,3]) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$

c) $T.V.M.([-1,3]) = \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2}$

37. Determina la tasa de variación media de cada función en los intervalos indicados.

a) $f(x) = x$ en $[-1, 1]$

b) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 5$ en $[3, 4]$

c) $f(x) = sen\, x$ en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

a) $T.V.M.([-1,1]) = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{1-(-1)}{1-(-1)} = 1$

b) $T.V.M.([3,4]) = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = 7 - \frac{7}{4} = \frac{21}{4}$

c) $T.V.M.\left(\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right) = \frac{f(\pi)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi - \frac{\pi}{2}} = \frac{0-1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$

38. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 - x$ en el intervalo $[2, 2 + h]$.
Utiliza el resultado para determinar la tasa de variación media de la función en los intervalos que aparecen a continuación.

a) $[2, 3]$ b) $[2, 5]$ c) $[2, 8]$ d) $[2, 10]$

$$T.V.M.\ ([2, 2+h]) = \frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \frac{2(2+h)^2-(2+h)-6}{h} =$$
$$= \frac{8+8h+2h^2-2-h-6}{h} = 7+2h$$

a) $T.V.M.\ ([2,3]) = 7 + 2\cdot 1 = 9$

b) $T.V.M.\ ([2,5]) = 7 + 2\cdot 3 = 13$

c) $T.V.M.([2,8]) = 7 + 2\cdot 6 = 19$

d) $T.V.M.([2,10]) = 7 + 2\cdot 8 = 23$

39. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1, 1 + h]$. Utiliza este resultado para calcular la tasa de variación media de la función en los siguientes intervalos.

a) $[1, 2]$ b) $[1, 3]$ c) $[1, 5]$ d) $[1, 10]$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \frac{\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1}}{h} = \frac{1-(1+h)}{h(1+h)} = \frac{-1}{(1+h)}$$

a) $h = 1 \rightarrow \frac{-1}{(1+1)} = -\frac{1}{2}$

b) $h = 2 \rightarrow \frac{-1}{(1+2)} = -\frac{1}{3}$

c) $h = 4 \rightarrow \frac{-1}{(1+4)} = -\frac{1}{5}$

d) $h = 9 \rightarrow \frac{-1}{(1+9)} = -\frac{1}{10}$

40. Calcula el valor que debe tener a para que la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 + ax - 5$ en el intervalo $[0, 2]$ sea 1.

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{3+2a-(-5)}{2} = 4 + a = 1 \rightarrow a = -3$$

41. **Encuentra dos funciones polinómicas de segundo grado que pasen por los puntos (0, 4) y (3, 10). Comprueba que la tasa de variación media en el intervalo [0, 3] es la misma para las dos funciones.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

La función es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Como la gráfica pasa por el punto (0, 4), se verifica que: $c = 4$

Al pasar también por el punto (3, 10), se cumple que: $9a + 3b + 4 = 10 \rightarrow 3a + b = 2$

Sean $f(x) = x^2 - x + 4$ y $g(x) = 2x^2 - 4x + 4$ las funciones pedidas.

$$T.V.M.\ ([0, 3]) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{10 - 4}{3} = 2$$

$$T.V.M.\ ([0, 3]) = \frac{g(3) - g(0)}{3 - 0} = \frac{10 - 4}{3} = 2$$

42. **¿Por qué la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x - 3$ en cualquier intervalo es siempre 2?**

Porque la gráfica de la función es una recta de pendiente 2, y esta indica su variación en cualquier intervalo.

43. **Aplica la definición de derivada para calcular las derivadas de las funciones en los puntos que se indican.**

a) $f(x) = 3x - 1$ en $x = 2$

b) $f(x) = x^2 + x$ en $x = 3$

c) $f(x) = \dfrac{4x + 3}{2}$ en $x = -1$

d) $f(x) = \dfrac{6}{x}$ en $x = 1$

e) $f(x) = (x - 1)^2$ en $x = -2$

f) $f(x) = x^3 + 5$ en $x = 0$

a) $$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(2 + h) - 1 - 5}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6 + 3h - 6}{h} = 3$$

b) $$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 + 3 + h - 12}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 + h - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (7 + h) = 7$$

c) $$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4(-1 + h) + 3}{2} + \frac{1}{2}}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-4 + 4h + 3 + 1}{2h} = 2$$

d) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{6}{1 + h} - 6}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6 - 6 - 6h}{h(1 + h)} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-6}{1 + h} = -6$$

e) $$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(-2 + h - 1)^2 - 9}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 - 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (-6 + h) = -6$$

f) $$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3 + 5 - 5}{h} = 0$$

44. **A partir de la definición, calcula las funciones derivadas de las funciones que se indican.**

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $f(x) = \dfrac{2x-1}{4}$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = 2x^2 - 3x$

e) $f(x) = \dfrac{12}{x}$

f) $f(x) = (3x^2 + 2)^2$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2(x+h) + 3 - (2x+3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2x + 2h - 2x}{h} = 2$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2(x+h)-1}{4} - \dfrac{2x-1}{4}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2x + 2h - 1 - 2x + 1}{4h} = \dfrac{1}{2}$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2) = 3x^2$

d) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2(x+h)^2 - 3(x+h) - (2x^2 - 3x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2x^2 + 4hx + 2h^2 - 3x - 3h - 2x^2 + 3x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (4x + 2h - 3) = 4x - 3$

e) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{12}{x+h} - \dfrac{12}{x}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{12x - 12x - 12h}{hx(x+h)} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-12}{x(x+h)} = -\dfrac{12}{x^2}$

f) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3(x+h)^2 + 2)^2 - (3x^2 + 2)^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{9(x+h)^4 + 12(x+h)^2 + 4 - 9x^4 - 12x^2 - 4}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{9x^4 + 36hx^3 + 54h^2x^2 + 36h^3x + 9h^4 + 12x^2 + 24hx + 12h^2 - 9x^4 - 12x^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (36x^3 + 54hx^2 + 36h^2x + 9h^3 + 24x + 12h) = 36x^3 + 24x$

45. **Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$ en el intervalo $[1, 1 + h]$.**

a) Utiliza el resultado para determinar la tasa de variación media en los intervalos [1, 3], [1, 5] y [1, 8].

b) Calcula el límite cuando h tiende a cero de la tasa de variación media en el intervalo $[1, 1 + h]$ y comprueba que equivale a $f'(1)$.

$T.V.M.\ ([1, 1+h]) = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{1 + h - 1} = \dfrac{2(1+h)^2 - 2(1+h) + 3 - 3}{h} =$

$= \dfrac{2 + 4h + 2h^2 - 2 - 2h}{h} = 2h + 2$

a) $T.V.M.\ ([1, 3]) = 2 \cdot 2 + 2 = 6$

$T.V.M.\ ([1, 5]) = 2 \cdot 4 + 2 = 10$

$T.V.M.\ ([1, 8]) = 2 \cdot 7 + 2 = 16$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{1 + h - 1} = \lim\limits_{h \to 0} (2h + 2) = 2 \qquad f'(x) = 4x - 2 \rightarrow f'(1) = 2$

46. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones en el punto indicado.

a) $f(x) = (x + 2)^2 - 1$ en $x = 2$

b) $f(x) = 5 - 2x$ en $x = 0$

c) $f(x) = \dfrac{7}{x-4}$ en $x = 1$

d) $f(x) = \sqrt{2-3x}$ en $x = -1$

e) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x+1}}$ en $x = 8$

a) $f'(x) = 2(x+2) \rightarrow f'(2) = 8$

b) $f'(x) = -2 \rightarrow f'(0) = -2$

c) $f'(x) = \dfrac{-7}{(x-4)^2} \rightarrow f'(1) = -\dfrac{7}{9}$

d) $f'(x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{2-3x}} \rightarrow f'(-1) = -\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$

e) $f'(x) = \dfrac{-5}{2\sqrt{(x+1)^3}} \rightarrow f'(8) = -\dfrac{5}{54}$

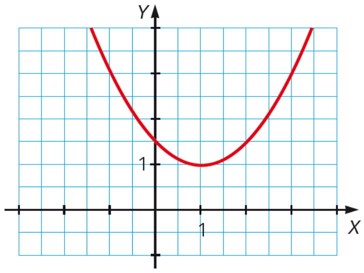
47. Determina la derivada de la función de la gráfica en los puntos indicados.

a) $x = -1$

b) $x = 0$

c) $x = 1$

d) $x = 3$



La parábola pasa por los puntos $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$, (1, 1), (3, 3). Sustituyendo estos puntos en la ecuación cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtenemos la función:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3}{2} = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \\ 1 = a + b + c \\ 3 = 9a + 3b + c \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \rightarrow f'(x) = x - 1$$

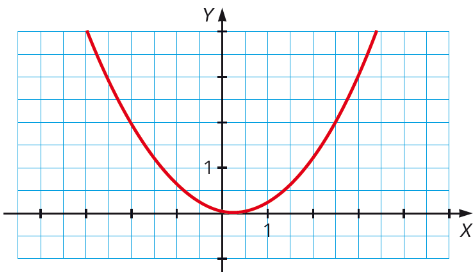
a) $f'(-1) = -2$

b) $f'(0) = -1$

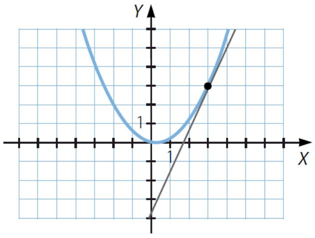
c) $f'(1) = 0$

d) $f'(3) = 2$

48. Demuestra gráficamente que la derivada de esta función en el punto de abscisa 3 tiene un valor comprendido entre 2 y 3.



La derivada de la función en el punto $x = 3$ es la pendiente de la recta tangente, y observando el dibujo de la misma se obtiene que, por cada unidad en horizontal, el avance vertical está comprendido entre 2 y 3 unidades.



49. **Calcula la pendiente de la recta tangente a cada función $f(x)$ en el punto que se indica.**

a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ en $x = -2$
b) $f(x) = x^3 - x^2 + x$ en $x = 3$
c) $f(x) = 4x^2 - x - 5$ en $x = 0$

a) $f'(x) = 6x + 4 \rightarrow f'(-2) = -8$ b) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \rightarrow f'(3) = 22$ c) $f'(x) = 8x - 1 \rightarrow f'(0) = -1$

50. **Calcula la pendiente de las rectas tangentes a la curva $f(x) = x^2 - 4$ en los puntos de corte con los ejes X e Y.**

$f'(x) = 2x$

La derivada $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $P(a, f(a))$.

Cortes con el eje X: (2, 0), (–2, 0).

$f'(2) = 4$ $f'(-2) = -4$

Corte con el eje Y: (0, –4).

$f'(0) = 0$

51. **Encuentra, en cada caso, los puntos en los que la tangente a la curva $f(x)$ es horizontal.**

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$ b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 1$

La tangente a la curva $f(x)$ es horizontal cuando la pendiente de la recta tangente es cero, es decir, cuando la derivada es cero.

a) $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$

Es horizontal en los puntos (0, 0) y (–2, 4).

b) $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = -1$

Es horizontal en el punto (–1, –1).

c) $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3$

Es horizontal en los puntos (–1, –5) y (–3, –1).

52. **Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto indicado.**

a) $f(x) = 3x^2 - 1$ en $x = 1$
b) $f(x) = x^3$ en $x = 2$
c) $f(x) = x^2 - 2x$ en $x = 1$
d) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = -1$

a) $f'(x) = 6x \rightarrow f'(1) = 6$ $f(1) = 2$

$y - 2 = f'(1) \cdot (x - 1) \rightarrow y - 2 = 6 \cdot (x - 1) \rightarrow y = 6x - 4$

b) $f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(2) = 12$ $\qquad f(2) = 8$

$y - 8 = f'(2) \cdot (x - 2) \rightarrow y - 8 = 12 \cdot (x - 2) \rightarrow y = 12x - 16$

c) $f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f'(1) = 0$ $\qquad f(1) = -1$

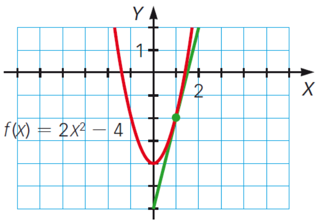
$y - (-1) = f'(1) \cdot (x - 1) \rightarrow y + 1 = 0 \rightarrow y = -1$

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \rightarrow f'(-1) = -1$ $\qquad f(-1) = -1$

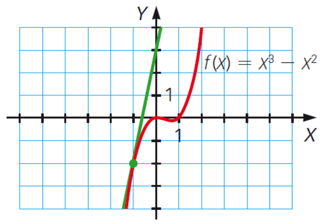
$y - (-1) = f'(-1) \cdot [x - (-1)] \rightarrow y + 1 = -1 \cdot (x + 1) \rightarrow y = -x - 2$

53. Averigua la ecuación de la recta tangente que aparece en cada gráfica.

a)



b)



a) Tenemos que hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en $x = 1$.

$f'(x) = 4x \rightarrow f'(1) = 4$ $\qquad f(1) = -2$

$y - (-2) = f'(1) \cdot (x - 1) \rightarrow y + 2 = 4 \cdot (x - 1) \rightarrow y = 4x - 6$

b) Tenemos que hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en $x = -1$.

$f'(x) = 3x^2 - 2x \rightarrow f'(-1) = 5$ $\qquad f(-1) = -2$

$y - (-2) = f'(-1) \cdot [x - (-1)] \rightarrow y + 2 = 5 \cdot (x + 1) \rightarrow y = 5x + 3$

54. Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x - 5$.

a) En el punto de abscisa 2.

b) En el punto de abscisa −1.

c) En el punto de ordenada −2.

d) En el punto de corte con el eje Y.

$f'(x) = 2x + 2$

a) $f'(2) = 6$ $\qquad f(2) = 3$

$y - 3 = 6 \cdot (x - 2) \rightarrow y = 6x - 9$

b) $f'(-1) = 0$ $\qquad f(-1) = -6$

$y - (-6) = 0 \rightarrow y = -6$

c) $-2 = x^2 + 2x - 5 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -3$

$f'(1) = 4 \rightarrow y + 2 = 4 \cdot (x - 1) \rightarrow y = 4x - 6$

$f'(-3) = -4 \rightarrow y + 2 = -4 \cdot (x + 3) \rightarrow y = -4x - 14$

d) El punto de corte con el eje Y es (0, −5):

$f'(0) = 2 \rightarrow y - (-5) = 2 \cdot x \rightarrow y = 2x - 5$

55. Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2$.

a) En los puntos de corte con los ejes X e Y.

b) En el punto de abscisa 1.

c) En los puntos de ordenada 4.

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

a) Los puntos de corte con el eje X son (0, 0) y (–3, 0).

El punto de corte con el eje Y es (0, 0).

$f'(0) = 0$

La recta tangente en (0, 0) es $y = 0$.

$f'(-3) = 9 \rightarrow y - 0 = 9\cdot[x - (-3)] \rightarrow y = 9x + 27$

b) $f'(1) = 9$ $\quad$ $f(1) = 4$

$y - 4 = 9\cdot(x - 1) \rightarrow y = 9x - 5$

c) $4 = x^3 + 3x^2 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = x_3 = -2$

El caso $x_1 = 1$ coincide con el apartado b).

$f'(-2) = 0 \rightarrow y - 4 = 0 \rightarrow y = 4$

56. Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2 + \ln x$ en el punto de abscisa 1.

$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(1) = 1$ $\quad$ $f(1) = 2$ $\quad$ $y - 2 = 1\cdot(x - 1) \rightarrow y = x + 1$

57. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ paralela a la recta $y = x + 1$.

Como tiene que ser paralela a la recta $y = x + 1$, la pendiente debe ser 1, es decir, la derivada debe valer 1.

$$f'(x) = 3x^2 = 1 \rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}},\ x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \rightarrow y - \frac{1}{3\sqrt{3}} = x - \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow y = x - \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \rightarrow y - \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = x - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \rightarrow y = x + \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

58. Determina, en cada caso, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ que sea paralela a la recta $3x - y + 6 = 0$.

a) $f(x) = x^2 + 4x - 2$

b) $f(x) = \dfrac{3x}{1 - x}$

c) $f(x) = x^3 - 4$

d) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x}$

Como $y = 3x + 6$, la pendiente de la recta es 3.

a) $f'(x) = 2x + 4 = 3 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{4} \rightarrow y - \left(-\frac{15}{4}\right) = 3\cdot\left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] \rightarrow y = 3x - \frac{9}{4}$$

b) $f'(x)=\frac{3(1-x)-3x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{3}{(1-x)^2}=3\to\begin{cases}x_1=0\to f(0)=0\to y=3x\\ x_2=2\to f(2)=-6\to y-(-6)=3(x-2)\to y=3x-12\end{cases}$

c) $f'(x)=3x^2=3\to\begin{cases}x_1=1\to f(1)=-3\to y-(-3)=3(x-1)\to y=3x-6\\ x_2=-1\to f(-1)=-5\to y-(-5)=3[x-(-1)]\to y=3x-2\end{cases}$

d) $f'(x)=\frac{6x\cdot x-3x^2-1}{x^2}=\frac{3x^2-1}{x^2}=3\to 3x^2-1=3x^2\to -1=0\to$ No tiene solución.

59. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\frac{x}{x+3}$ paralela a la recta $y-x=6$.

Como $y=x+6$, la pendiente de la recta es 1.

$$f'(x)=\frac{x+3-x}{(x+3)^2}=\frac{3}{(x+3)^2}=1\to\begin{cases}x_1=-3+\sqrt{3}\to f\left(-3+\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}+1\to y-\left(-\sqrt{3}+1\right)=x-\left(-3+\sqrt{3}\right)\\ x_2=-3-\sqrt{3}\to f\left(-3-\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}+1\to y=x+4+2\sqrt{3}\end{cases}$$

60. Halla el vértice de las siguientes parábolas sabiendo que este punto de la curva tiene por tangente una recta paralela al eje X.

a) $f(x)=x^2-4x+6$
b) $f(x)=-x^2+2x-1$
c) $f(x)=-x^2+2x+1$
d) $f(x)=2x^2+4x-3$
e) $f(x)=3x^2-6x+5$
f) $f(x)=(x-1)(2x+5)$

Como la recta tangente al vértice es horizontal, la pendiente tiene que ser cero, es decir, la derivada tiene que ser cero.

a) $f'(x)=2x-4=0\to x=2, f(2)=2$ $\quad$ $V(2, 2)$

b) $f'(x)=-2x+2=0\to x=1, f(1)=0$ $\quad$ $V(1, 0)$

c) $f'(x)=-2x+2=0\to x=1, f(1)=2$ $\quad$ $V(1, 2)$

d) $f'(x)=4x+4=0\to x=-1, f(-1)=-5$ $\quad$ $V(-1, -5)$

e) $f'(x)=6x-6=0\to x=1, f(1)=2$ $\quad$ $V(1, 2)$

f) $f(x)=(x-1)(2x+5)=2x^2+3x-5$

$f'(x)=4x+3=0\to x=-\frac{3}{4}, f\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{49}{8}$ $\quad$ $V\left(-\frac{3}{4},-\frac{49}{8}\right)$

61. Calcula el punto de corte de las rectas tangentes a la curva $f(x)$ en los puntos de abscisa 2 y 0.

a) $f(x)=x^2-x$
b) $f(x)=x^2-4x+2$
c) $f(x)=x^2+1$
d) $f(x)=\ln(x+1)$

a) $f'(x)=2x-1$

$\left.\begin{matrix}f'(2)=3\\ f(2)=2\end{matrix}\right\}\to y-2=3(x-2)\to y=3x-4$ $\qquad$ $\left.\begin{matrix}f'(0)=-1\\ f(0)=0\end{matrix}\right\}\to y=-x$

El punto de corte de las dos rectas es:

$\left.\begin{matrix}y=-x\\ y=3x-4\end{matrix}\right\}\to 3x-4=-x\to x=1, y=-1\to P(1,-1)$

b) $f'(x) = 2x - 4$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2) = 0 \\ f(2) = -2 \end{array}\right\} \rightarrow y - (-2) = 0 \rightarrow y = -2 \qquad \left.\begin{array}{l} f'(0) = -4 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow y - 2 = -4x \rightarrow y = -4x + 2$$

El punto de corte de las dos rectas es:

$$\left.\begin{array}{l} y = -2 \\ y = -4x + 2 \end{array}\right\} \rightarrow y = -2,\ x = 1 \rightarrow P(1, -2)$$

c) $f'(x) = 2x$

$f'(2) = 4 \qquad f(2) = 5 \qquad y - 5 = 4(x - 2) \rightarrow y = 4x - 3$

$f'(0) = 0 \qquad f(0) = 1 \qquad y - 1 = 0 \rightarrow y = 1$

El punto de corte de las dos rectas es:

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x - 3 \\ y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow y = 1,\ x = 1 \rightarrow P(1, 1)$$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2) = \frac{1}{3} \\ f(2) = \ln 3 \end{array}\right\} \rightarrow y - \ln 3 = \frac{1}{3}(x - 2) \rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + \ln 3 \qquad \left.\begin{array}{l} f'(0) = 1 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y = x$$

El punto de corte de las dos rectas es:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + \ln 3 \\ y = x \end{array}\right\} \rightarrow y = x = -1 + \frac{3}{2}\ln 3 \rightarrow P\left(-1 + \frac{3}{2}\ln 3, -1 + \frac{3}{2}\ln 3\right)$$

62. ¿En qué puntos de la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x^2 + x$ la recta tangente tiene pendiente 2?

La recta tangente tiene pendiente 2 en los puntos en los que la derivada es 2.

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 2 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -\dfrac{1}{3} \qquad A(1, 1),\ B\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{13}{27}\right)$

63. Considera la función $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$. Halla los valores de la variable x en cada caso e interpreta geométricamente lo que se obtiene.

a) $f'(x) = 1$

b) $f'(x) = 4$

c) $f'(x) = 0$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{4}$

$$f'(x) = \frac{x + 2 - (x - 2)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$$

a) $f'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2} = 1 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -4$

La recta tangente a la curva tiene pendiente 1 en los puntos de abscisa 0 y –4.

b) $f'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2} = 4 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3$

La recta tangente a la curva tiene pendiente 4 en los puntos de abscisa –1 y –3.

c) $f'(x)=\frac{4}{(x+2)^2}\neq 0$

No existen puntos en los que la recta tangente a la curva sea paralela al eje *X*.

d) $f'(x)=\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{1}{4}\rightarrow x_1=2,\ x_2=-6$

La recta tangente a la curva tiene pendiente $\frac{1}{4}$ en los puntos de abscisa 2 y –6.

64. Halla el valor de k para que la función $f(x)=\frac{kx-5}{2x+3}$ cumpla que $f'(-1)=19$.

$$f'(x)=\frac{k\cdot(2x+3)-(kx-5)\cdot 2}{(2x+3)^2}=\frac{3k+10}{(2x+3)^2}$$

$$f'(-1)=3k+10=19\rightarrow k=3$$

65. Halla los valores de a y b para que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tengan la misma recta tangente en $x=3$.

$$f(x)=ax^2-1 \qquad g(x)=x^2+3x+b$$

$f'(x)=2ax$ $\qquad$ $g'(x)=2x+3$

Necesitamos que coincidan en el punto $x=3$, es decir, que $f(3)=g(3)$.

También necesitamos que la pendiente sea la misma en ese punto, es decir, que $f'(3)=g'(3)$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}9a-1=9+9+b\\ 2\cdot 3a=2\cdot 3+3\end{array}\right\}\rightarrow a=\frac{3}{2},\ b=-\frac{11}{2}$$

66. Determina la ecuación de la recta normal de cada función $f(x)$ en el punto indicado.

a) $f(x)=x^2-2x$ en $x=2$

b) $f(x)=2-x^2$ en $x=3$

c) $f(x)=x^3$ en $x=1$

d) $f(x)=\frac{1}{x}$ en $x=-1$

a) $f'(x)=2x-2$ $\qquad$ $f'(2)=2$ $\qquad$ $f(2)=0$

La recta tangente es: $y=2(x-2)$

La recta normal es: $y=-\frac{1}{2}(x-2)$

b) $f'(x)=-2x$ $\qquad$ $f'(3)=-6$ $\qquad$ $f(3)=-7$

La recta tangente es: $y+7=-6(x-3)$

La recta normal es: $y+7=\frac{1}{6}(x-3)\rightarrow y=\frac{1}{6}x-\frac{15}{2}$

c) $f'(x)=3x^2$ $\qquad$ $f'(1)=3$ $\qquad$ $f(1)=1$

La recta tangente es: $y-1=3(x-1)$

La recta normal es: $y-1=-\frac{1}{3}(x-1)\rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ $\quad f'(-1) = -1 \quad f(-1) = -1$

La recta tangente es: $y + 1 = -(x + 1)$

La recta normal es: $y + 1 = x + 1 \rightarrow y = x$

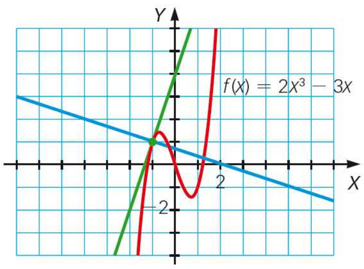
67. Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de $f(x) = x^2$ que sea paralela a la recta $y = 2x - 1$.

Como la pendiente de la recta paralela a la recta normal es 2, la pendiente de la recta tangente deberá ser $-\dfrac{1}{2}$.

$f'(x) = 2x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow x = -\dfrac{1}{4}$ $\qquad f\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{16}$

La ecuación de la recta normal es: $y - \dfrac{1}{16} = 2\left(x + \dfrac{1}{4}\right) \rightarrow y = 2x + \dfrac{9}{16}$

68. Averigua las ecuaciones de las rectas perpendiculares que aparecen en la gráfica.



$f'(x) = 6x^2 - 3 \qquad f'(-1) = 3 \qquad f(-1) = 1$

La recta tangente a la curva es: $y - 1 = 3(x + 1) \rightarrow y = 3x + 4$

La recta normal a la curva es: $y - 1 = -\dfrac{1}{3}(x + 1) \rightarrow y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$

69. Halla la recta tangente y la recta normal a las funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = 2^{3x-8}$ en $x = 3$
b) $f(x) = x^2 \ln(x + 3)$ en $x = -2$
c) $f(x) = (3x - 5)^6$ en $x = 2$

a) $f'(x) = 3 \cdot 2^{3x-8} \cdot \ln 2$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = 6\ln 2(x - 2) \rightarrow y = 6\ln 2(x - 2) + 2$

La ecuación de la recta normal es: $y - 2 = -\dfrac{1}{6\ln 2}(x - 2) \rightarrow y = -\dfrac{1}{6\ln 2}(x - 2) + 2$

b) $f'(x) = 2x\ln(x + 3) + x^2 \cdot \dfrac{1}{x + 3}$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = 4(x + 2) \rightarrow y = 4x + 8$

La ecuación de la recta normal es: $y - 0 = -\dfrac{1}{4}(x + 2) \rightarrow y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}$

c) $f'(x) = 6(3x - 5)^5 \cdot 3 = 18(3x - 5)^5$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 1 = 18(x - 2) \rightarrow y = 18x - 35$

La ecuación de la recta normal es: $y - 1 = -\dfrac{1}{18}(x - 2) \rightarrow y = -\dfrac{1}{18}x + \dfrac{10}{9}$

70. Determina la recta tangente y la recta normal a las funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = \sqrt{2x+6}$ en $x = 5$

b) $f(x) = sen\,(2x + \pi)$ en $x = 0$

c) $f(x) = tg\,\dfrac{\pi - x}{2}$ en $x = \pi$

d) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ en $x = 0$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2}(2x+6)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2x+6}}$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 4 = \dfrac{1}{4}(x-5) \rightarrow y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{11}{4}$

La ecuación de la recta normal es: $y - 4 = -4(x-5) \rightarrow y = -4x + 16$

b) $f'(x) = cos\,(2x + \pi) \cdot 2$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = -2(x-0) \rightarrow y = -2x$

La ecuación de la recta normal es: $y - 0 = \dfrac{1}{2}(x-0) \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x$

c) $f'(x) = \left(1 + tg^2\,\dfrac{\pi - x}{2}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = -\dfrac{1}{2}(x - \pi) \rightarrow y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{2}$

La ecuación de la recta normal es: $y - 0 = 2(x - \pi) \rightarrow y = 2x - 2\pi$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2+1}$

La ecuación de la recta tangente es: $y = 0$

La ecuación de la recta normal es: $x = 0$

71. Aplica la derivada de la suma a la función $f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 7x + 5$ para calcular lo siguiente.

a) La función derivada.

b) La derivada en los puntos de abscisa $x = -2$, $x = 0$ y $x = 1$.

a) $f'(x) = 12x^3 - 4x - 7$

b) $f'(-2) = 12 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) - 7 = -95$ $\quad f'(0) = 12 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0 - 7 = -7$ $\quad f'(1) = 12 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 - 7 = 1$

72. Considerando la función $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x - 6$, calcula lo siguiente.

a) $f'(x)$

b) $f'(3)$, $f'(-2)$ y $f'(0)$

c) $f'(4-8)$ y $f'(4) - f'(8)$. ¿Son iguales?

a) $f'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 1$

b) $f'(3) = 12 \cdot 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 1 = 190$

$f'(-2) = 12 \cdot (-2)^3 - 15 \cdot (-2)^2 + 1 = -155$

$f'(0) = 12 \cdot 0^3 - 15 \cdot 0^2 + 1 = 1$

c) $f'(4-8) = 12 \cdot (-4)^3 - 15 \cdot (-4)^2 + 1 = -1007$

$f'(4) = 12 \cdot 4^3 - 15 \cdot 4^2 + 1 = 529$

$f'(8) = 12 \cdot 8^3 - 15 \cdot 8^2 + 1 = 5\,185$

$f'(4) - f'(8) = -4\,656 \neq -1007 = f'(4-8)$

73. **Calcula la derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = -3x^3 + 5x^2 - x + 5$

b) $f(x) = -2(x^4 - 9x^2) + x$

c) $f(x) = x(2 + x^2) + 3$

d) $f(x) = x^6 - 10x^2 - x^{-3}$

a) $f'(x) = -9x^2 + 10x - 1$

b) $f'(x) = -8x^3 + 36x + 1$

c) $f'(x) = 3x^2 + 2$

d) $f'(x) = 6x^5 - 20x + \dfrac{3}{x^4}$

74. **Utiliza las reglas de derivación para calcular la función derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 12x - 1$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x}{x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 8x - 9}{2}$

a) $f'(x) = 20x^3 + 9x^2 - 14x + 12$

b) $f'(x) = \dfrac{(6x-5)(x+1) - (3x^2 - 5x)}{(x+1)^2} = \dfrac{3x^2 + 6x - 5}{(x+1)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{-3 \cdot 2x + 8}{2} = -3x + 4$

75. **Aplica la derivada del producto a la función $f(x) = (5x^2 - 3x) \cdot (x^4 - 2x + 5)$ para calcular lo siguiente.**

a) La función derivada.

b) La derivada en los puntos de abscisa -3, 0 y 2.

a) $f'(x) = (10x - 3)(x^4 - 2x + 5) + (4x^3 - 2)(5x^2 - 3x) = 30x^5 - 15x^4 - 30x^2 + 62x - 15$

b) $f'(-3) = 30 \cdot (-3)^5 - 15 \cdot (-3)^4 - 30 \cdot (-3)^2 + 62 \cdot (-3) - 15 = -8\,976$

$f'(0) = 30 \cdot 0^5 - 15 \cdot 0^4 - 30 \cdot 0^2 + 62 \cdot 0 - 15 = -15$

$f'(2) = 30 \cdot 2^5 - 15 \cdot 2^4 - 30 \cdot 2^2 + 62 \cdot 2 - 15 = 709$

76. **Utiliza las reglas de derivación para calcular la función derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = (3x^2 - 1) \cdot 4x$

b) $f(x) = (-3x^2 + x - 1) \cdot \left(\dfrac{2x - 3}{3}\right)$

c) $f(x) = 2x \cdot (5x - 3) \cdot (x^2 - 3x + 1)$

a) $f'(x) = 6x \cdot 4x + (3x^2 - 1) \cdot 4 = 36x^2 - 4$

b) $f'(x) = (-6x + 1)\left(\dfrac{2x - 3}{3}\right) + (-3x^2 + x - 1)\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{-18x^2 + 22x - 5}{3}$

c) $f'(x) = 2\left[(5x - 3)(x^2 - 3x + 1)\right] + 2x\left[5(x^2 - 3x + 1) + (5x - 3)(2x - 3)\right] = 40x^3 - 108x^2 + 56x - 6$

77. **Aplica la regla del cociente a la función $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2-5x}$ para calcular lo siguiente.**

a) La función derivada.

b) La derivada en los puntos de abscisa -1, 1 y 2.

a) $f'(x) = \dfrac{3(x^2-5x)-(3x-1)(2x-5)}{(x^2-5x)^2} = \dfrac{-3x^2+2x-5}{(x^2-5x)^2}$

b) $f'(-1) = \dfrac{-3\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)-5}{\left[(-1)^2-5\cdot(-1)\right]^2} = -\dfrac{10}{36} = -\dfrac{5}{18}$

$f'(1) = \dfrac{-3\cdot 1^2+2\cdot 1-5}{(1^2-5\cdot 1)^2} = -\dfrac{6}{16} = -\dfrac{3}{8}$ $\qquad f'(2) = \dfrac{-3\cdot 2^2+2\cdot 2-5}{(2^2-5\cdot 2)^2} = -\dfrac{13}{36}$

78. **Utiliza las reglas de derivación para calcular la función derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{7x^3-2x+4}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{6x^4}{7x^2-x+3}$

c) $f(x) = \dfrac{4}{x^2-1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+3-x}{2x^2-x}$

a) $f'(x) = \dfrac{(21x^2-2)(x-2)-(7x^3-2x+4)}{(x-2)^2} = \dfrac{14x^3-42x^2}{(x-2)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{24x^3(7x^2-x+3)-6x^4(14x-1)}{(7x^2-x+3)^2} = \dfrac{84x^5-18x^4+72x^3}{(7x^2-x+3)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{-4}{(x^2-1)^2}\cdot 2x = \dfrac{-8x}{(x^2-1)^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{(2x-1)(2x^2-x)-(x^2-x+3)(4x-1)}{(2x^2-x)^2} = \dfrac{x^2-12x+3}{(2x^2-x)^2}$

79. **Realiza la derivada de la siguiente función.**

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} + \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x-1)^2} = -\frac{8x}{(x^2-1)^2}$$

80. **Calcula la derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^7}$

b) $f(x) = \sqrt{x^3} - 3\sqrt[5]{x}$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x}\cdot(1-\sqrt{x})$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$

a) $f'(x) = \dfrac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} = \dfrac{7\sqrt[3]{x^4}}{3}$

b) $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{3}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2} - \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^4}}$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x} - \sqrt[10]{x^7} \to f'(x) = \dfrac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} - \dfrac{7}{10}x^{-\frac{3}{10}} = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} - \dfrac{7}{10\sqrt[10]{x^3}}$

d) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(1-\sqrt[3]{x}) - \sqrt{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)}{(1-\sqrt[3]{x})^2} = \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}-x}{6\sqrt[6]{x^7}(1-\sqrt[3]{x})^2}$

81. **Calcula la derivada de las funciones que aparecen a continuación.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{5x + 2} - \sqrt{x}$

b) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x - 1} \cdot \dfrac{x + 5}{x - 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 1}{2x^2 - x} + \dfrac{\sqrt{x + 5}}{x}$

a) $f'(x) = \dfrac{(2x-4)(5x+2)-(x^2-4x)5}{(5x+2)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2+4x-8}{(5x+2)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-15}{x^2-3x+2} \rightarrow f'(x) = \dfrac{(2x+2)(x^2-3x+2)-(x^2+2x-15)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = \dfrac{-5x^2+34x-41}{(x^2-3x+2)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(2x^2-x)-(x^2-3x-1)(4x-1)}{(2x^2-x)^2} + \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}x - \sqrt{x+5}}{x^2} = \dfrac{5x^2+4x-1}{(2x^2-x)^2} - \dfrac{x+10}{2x^2\sqrt{x+5}}$

82. **Calcula la derivada de esta función.**

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1}} + \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2-1}} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \sqrt{\frac{2x+3}{x+1}} + \frac{1}{x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x+3}{x+1}}} \cdot \left(\frac{2(x+1)-(2x+3)}{(x+1)^2}\right) - \frac{2}{x^3} = \frac{-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{2x+3}(x+1)^2} - \frac{2}{x^3}$$

83. **Calcula la derivada de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas.**

a) $f(x) = \ln x + e^x$

b) $f(x) = x^2 \log x - 1$

c) $f(x) = (x^2 + 3)\log_2 x$

d) $f(x) = \dfrac{\ln x + 4}{e^x}$

e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{e^x} + 4$

f) $f(x) = 5e^x - 3^x$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{x} + e^x$

b) $f'(x) = 2x\log x + x^2\dfrac{1}{x\ln 10} = x\left(2\log x + \dfrac{1}{\ln 10}\right)$

c) $f'(x) = 2x\log_2 x + \dfrac{x^2+3}{x\ln 2}$

d) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot e^x - (\ln x + 4)\cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{1 - x\ln x - 4x}{xe^x}$

e) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot e^x - \ln x \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{1 - x\ln x}{xe^x}$

f) $f'(x) = 5e^x - 3^x \ln 3$

84. **Deriva las siguientes funciones trigonométricas.**

a) $f(x) = sen\,x\cos x$

b) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$

c) $f(x) = sec\,x\,cosec\,x$

d) $f(x) = x\,tg\,x$

e) $f(x) = x\,arc\cos x$

f) $f(x) = \dfrac{1}{tg\,x}$

a) $f'(x) = \cos^2 x - sen^2 x$

b) $f'(x) = \dfrac{-sen\,x\cdot x^2 - \cos x\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{-x\,sen\,x - 2\cos x}{x^3}$

c) $f'(x) = \dfrac{sen\,x}{\cos^2 x}\cdot cosec\,x + sec\,x\cdot\left(-\dfrac{\cos x}{sen^2 x}\right) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{sen^2 x}$

d) $f'(x) = 1\cdot tg\,x + x\cdot(1 + tg^2 x) = x + tg\,x + x\,tg^2 x$

e) $f'(x) = 1\cdot arc\cos x + x\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = arc\cos x - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $f'(x) = -\dfrac{1+tg^2 x}{tg^2 x}$

85. **Calcula la derivada de las siguientes funciones trigonométricas.**

a) $f(x) = 2x + arc\,sen\,x + arc\cos x$

b) $f(x) = (1 + x^2)\,arc\,tg\,x$

c) $f(x) = \ln x\cdot tg\,x$

d) $f(x) = e^x\,sen\,x$

e) $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 - x}$

a) $f'(x) = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2$

b) $f'(x) = 2x\cdot arc\,tg\,x + (1+x^2)\cdot\dfrac{1}{1+x^2} = 1 + 2x\,arc\,tg\,x$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x}\cdot tg\,x + \ln x\cdot(1 + tg^2 x)$

d) $f'(x) = e^x\cdot sen\,x + e^x\cdot\cos x = e^x(sen\,x + \cos x)$

e) $f'(x) = \dfrac{-sen\,x(2-x) - \cos x\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{(x-2)\,sen\,x + \cos x}{(2-x)^2}$

86. **Calcula las seis primeras derivadas de las funciones $f(x) = sen\,x$ y $g(x) = \cos x$.**

$f(x) = sen\,x \to f'(x) = \cos x \to f''(x) = -sen\,x \to f'''(x) = -\cos x \to f^{IV}(x) = sen\,x$
$\to f^{V}(x) = \cos x \to f^{VI}(x) = -sen\,x$

$f(x) = \cos x \to f'(x) = -sen\,x \to f''(x) = -\cos x \to f'''(x) = sen\,x \to f^{IV}(x) = \cos x$
$\to f^{V}(x) = -sen\,x \to f^{VI}(x) = -\cos x$

87. **Determina las tres primeras derivadas de cada una de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x^4 + 7x^3$

b) $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$

c) $f(x) = sen\,x^2$

d) $f(x) = e^{2x}$

a) $f'(x) = 4x^3 + 21x^2$ $\quad f''(x) = 12x^2 + 42x$ $\quad f'''(x) = 24x + 42$

b) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 4}{2\sqrt{x^3 - 4x}}$ $\quad f''(x) = \dfrac{3x^4 - 24x^2 - 16}{4\left(x^3 - 4x\right)^{\frac{3}{2}}}$ $\quad f'''(x) = \dfrac{-3\left(x^6 - 20x^4 - 80x^2 + 64\right)}{8\left(x^3 - 4x\right)^{\frac{5}{2}}}$

c) $f'(x) = 2x\cos x^2$ $\quad f''(x) = 2\cos x^2 - 4x^2 \text{sen}\, x^2$ $\quad f'''(x) = -12x\,\text{sen}\, x^2 - 8x^3\cos x^2$

d) $f'(x) = 2e^{2x}$ $\quad f''(x) = 4e^{2x}$ $\quad f'''(x) = 8e^{2x}$

88. Calcula las derivadas primera, segunda y tercera de estas funciones.

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$

b) $f(x) = \sqrt{x-2}$

c) $f(x) = \ln 2x$

d) $f(x) = e^{\text{sen}\, x + \cos x}$

a) $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$ $\quad f''(x) = 6x + 4$ $\quad f'''(x) = 6$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$ $\quad f''(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{(x-2)^3}}$ $\quad f'''(x) = \dfrac{3}{8\sqrt{(x-2)^5}}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ $\quad f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

d) $f'(x) = (\cos x - \text{sen}\, x)e^{\text{sen}\, x + \cos x}$

$$f''(x) = (\cos x - \text{sen}\, x)^2 e^{\text{sen}\, x + \cos x} - e^{\text{sen}\, x + \cos x}(\text{sen}\, x + \cos x)$$

$$f'''(x) = e^{\text{sen}\, x + \cos x}\left[(\cos x - \text{sen}\, x)^3 - 3(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) - (\cos x - \text{sen}\, x)\right]$$

89. Encuentra los valores donde se anula la derivada segunda de las siguientes funciones.

a) $f(x) = -3x^3 + 4x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 2)$

a) $f'(x) = -9x^2 + 8x - 3$ $\quad f''(x) = -18x + 8 = 0 \rightarrow x = \dfrac{4}{9}$

b) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

90. Dada $f(x) = \dfrac{x^2}{x+3}$ halla el valor de x en cada caso.

a) $f'(x) = 0$

b) $f''(x) = 0$

a) $f'(x) = \dfrac{2x(x+3) - x^2}{(x+3)^2} = \dfrac{x^2+6x}{(x+3)^2} = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -6$

b) $f''(x) = \dfrac{(2x+6)(x+3)^2 - 2(x^2+6x)(x+3)}{(x+3)^4} = \dfrac{18}{(x+3)^3} \neq 0$

No existe ningún valor de x que anule la segunda derivada.

91. Calcula la derivada n-ésima, $f^n(x)$, de esta función.

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

Calculamos las primeras derivadas:

$f'(x) = -2\cdot(x-1)^{-2}$ $\quad f''(x) = 4(x-1)^{-3}$ $\quad f'''(x) = -12(x-1)^{-4}$ $\quad f^{IV}(x) = 48(x-1)^{-5}$

La derivada n-ésima es de la forma:

$$f^n(x) = (-1)^n 2\cdot n!(x-1)^{-(n+1)}$$

92. **Escribe las funciones elementales que componen estas funciones y halla sus derivadas.**

a) $f(x) = \ln(2x^2)$
b) $f(x) = \log_3(x^2 - 1)$
c) $f(x) = 10^{x+3}$
d) $f(x) = e^{3x}$
e) $f(x) = cos\,(3x - 1)$
f) $f(x) = sen\,(x^2 - 3)$

a) $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x) = \ln x$ y $h(x) = 2x^2 \rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{x}$

b) $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x) = \log_3 x$ y $h(x) = x^2 - 1 \rightarrow f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$

c) $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x) = 10^x$ y $h(x) = x + 3 \rightarrow f'(x) = 10^{x+3}\ln 10$

d) $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x) = e^x$ y $h(x) = 3x \rightarrow f'(x) = 3e^{3x}$

e) $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x) = cos\,x$ y $h(x) = 3x - 1 \rightarrow f'(x) = -3\,sen(3x - 1)$

f) $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x) = sen\,x$ y $h(x) = x^2 - 3 \rightarrow f'(x) = 2x\,cos(x^2 - 3)$

93. **Escribe las funciones que componen las siguientes funciones y halla sus derivadas.**

a) $f(x) = \log_3(2x + 1)$
b) $f(x) = (3x^2 - 3x + 1)^4$
c) $f(x) = sen\sqrt{x}$
d) $f(x) = arc\ tg\ e^x$
e) $f(x) = 2^{3x-4}$
f) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 1}$
g) $f(x) = cos\ln x$
h) $f(x) = 3^{cos\,x}$

a) $g(x) = \log_3 x$ y $h(x) = 2x + 1$
$f'(x) = \dfrac{1}{(2x+1)\ln 3}\cdot 2 = \dfrac{2}{(2x+1)\ln 3}$

b) $g(x) = x^4$ y $h(x) = 3x^2 - 3x + 1$
$f'(x) = 4(3x^2 - 3x + 1)^3(6x - 3)$

c) $g(x) = sen\ x$ y $h(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = cos\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

d) $g(x) = arc\ tg\ x$ y $h(x) = e^x$
$f'(x) = \dfrac{1}{1+(e^x)^2}\cdot e^x = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

e) $g(x) = 2^x$ y $h(x) = 3x - 4$
$f'(x) = 2^{3x-4}\cdot\ln 2\cdot 3$

f) $g(x) = \sqrt[4]{x}$ y $h(x) = x^2 - 1$
$f'(x) = \dfrac{1}{4}(x^2-1)^{-\frac{3}{4}}\cdot 2x = \dfrac{x}{2\sqrt[4]{(x^2-1)^3}}$

g) $g(x) = cos\ x$ y $h(x) = \ln x$
$f'(x) = -sen\ln x\cdot\dfrac{1}{x} = -\dfrac{sen\ln x}{x}$

h) $g(x) = 3^x$ y $h(x) = cos\ x$
$f'(x) = 3^{cos\,x}\cdot\ln 3\cdot(-sen\ x)$

94. **Aplica la regla de la cadena para calcular las derivadas de estas funciones exponenciales y logarítmicas.**

a) $f(x) = \ln\dfrac{x^3}{2x+1}$
b) $f(x) = e^x\ln x$
c) $f(x) = e^{\frac{3x^2-1}{x}}$
d) $f(x) = \dfrac{e^{4x+1}}{1+x^4}$
e) $f(x) = \log_2\dfrac{2x^2}{x-7}$
f) $f(x) = 3^{\ln(x^4+2)}$
g) $f(x) = \dfrac{\ln x^3}{e^{-x^2-x}}$
h) $f(x) = \ln\dfrac{e^{3x}+e^x}{e^{\frac{1}{x}}}$

a) $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^3}\cdot\dfrac{3x^2(2x+1)-2x^3}{(2x+1)^2} = \dfrac{4x+3}{x(2x+1)}$

b) $f'(x) = e^x\ln x + \dfrac{e^x}{x}$

c) $f'(x)=e^{\frac{3x^2-1}{x}}\left(\dfrac{6x\cdot x-(3x^2-1)}{x^2}\right)=e^{\frac{3x^2-1}{x}}\left(\dfrac{3x^2+1}{x^2}\right)$

d) $f'(x)=\dfrac{4e^{4x+1}(1+x^4)-4x^3e^{4x+1}}{(1+x^4)^2}=\dfrac{4e^{4x+1}(1-x^3+x^4)}{(1+x^4)^2}$

e) $f'(x)=\dfrac{x-7}{2x^2}\cdot\dfrac{1}{\ln 2}\cdot\dfrac{4x(x-7)-2x^2}{(x-7)^2}=\dfrac{x-14}{x(x-7)\ln 2}$

f) $f'(x)=3^{\ln(x^4+2)}\ln 3\cdot\dfrac{1}{x^4+2}\cdot 4x^3$

g) $f'(x)=\dfrac{\frac{3}{x}e^{-x^2-x}-\ln x^3\cdot e^{-x^2-x}\cdot(-2x-1)}{e^{-2x^2-2x}}=\dfrac{e^{x^2+x}\left[3+(2x^2+x)\ln x^3\right]}{x}$

h) $f'(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{3x}+e^x}\dfrac{(3e^{3x}+e^x)e^{\frac{1}{x}}-(e^{3x}+e^x)\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{2}{x}}}=3+\dfrac{1}{x^2}$

95. **Aplica la regla de la cadena para calcular las siguientes derivadas de funciones trigonométricas.**

a) $f(x)=sen\ 3x^2$

b) $f(x)=cos\ (x^2+1)$

c) $f(x)=tg\ (x^2-3x)$

d) $f(x)=sen\ \sqrt{x^2+3x}$

e) $f(x)=cos\ \dfrac{x-1}{x}$

f) $f(x)=tg\ \sqrt{x-1}$

g) $f(x)=-sen\ \dfrac{x}{-x^4+x-1}$

h) $f(x)=tg\ \dfrac{2}{\sqrt{1-x}}$

a) $f'(x)=6x\ cos\ 3x^2$

b) $f'(x)=-2x\ sen(x^2+1)$

c) $f'(x)=\left[1+tg^2(x^2-3x)\right]\cdot(2x-3)$

d) $f'(x)=cos\sqrt{x^2+3x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3x}}\cdot(2x+3)$

e) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}sen\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

f) $f'(x)=\left(1+tg^2\sqrt{x-1}\right)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

g) $f'(x)=-cos\left(\dfrac{x}{-x^4+x-1}\right)\cdot\dfrac{3x^4-1}{(-x^4+x-1)^2}$

h) $f'(x)=\left(1+tg^2\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}$

96. **Halla la derivada de estas funciones.**

a) $f(x)=(2x+1)^3\cdot 3^x$

b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^3}}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{\sqrt{x^3}}$

d) $f(x)=\dfrac{2x-3}{e^x}$

e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x^3}$

f) $f(x)=x^2-\dfrac{3}{\sqrt{x^3}}$

a) $f'(x) = 3(2x+1)^2 \cdot 2 \cdot 3^x + (2x+1)^3 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = [6 + (2x+1)\ln 3] \cdot (2x+1)^2 \cdot 3^x$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{x^2-3}{x^3}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{2x \cdot x^3 - (x^2-3) \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{-x^2+9}{2x^4} \cdot \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-3}}$

c) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot \sqrt{x^3} - (x^2-3) \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2}{x^3} = \dfrac{4x^3 - 3x(x^2-3)}{2x^2\sqrt{x^3}} = \dfrac{x^2+9}{2x^2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \dfrac{2 \cdot e^x - (2x-3) \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{5-2x}{e^x}$

e) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2} \cdot (x^2-3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot x^3 - \sqrt{x^2-3} \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{x^2 - 3(x^2-3)}{x^4\sqrt{x^2-3}} = \dfrac{-2x^2+9}{x^4\sqrt{x^2-3}}$

f) $f'(x) = 2x + \dfrac{3 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2}{x^3} = 2x + \dfrac{9x^2}{2x^3\sqrt{x^3}} = 2x + \dfrac{9}{2x^2\sqrt{x}}$

97. Aplica la regla de la cadena para calcular las siguientes derivadas de funciones potenciales.

a) $f(x) = (3x^4 - 2x + 1)^5$

b) $f(x) = \left(\dfrac{x}{1-x^3}\right)^5$

c) $f(x) = \left(\sqrt[3]{x^3-1}\right)^5$

d) $f(x) = (1 + 2e^x)^4$

e) $f(x) = \ln^4 (x^2 - 1)^3$

f) $f(x) = (1 - 3e^x)^6$

g) $f(x) = sen^2\, x^2$

h) $f(x) = cos^3\, (x^2 - 7x + 1)$

i) $f(x) = tg^2\, (x^3 - 8)$

j) $f(x) = \left(sen\, \dfrac{1}{x} + cos\, \dfrac{1}{x}\right)^3$

a) $f'(x) = 5(3x^4 - 2x + 1)^4 (12x^3 - 2)$

b) $f'(x) = 5\left(\dfrac{x}{1-x^3}\right)^4 \left(\dfrac{1-x^3 - x\cdot(-3x^2)}{(1-x^3)^2}\right) = \dfrac{5x^4(1+2x^3)}{(1-x^3)^6}$

c) $f'(x) = 5x^2(x^3-1)^{\frac{2}{3}}$

d) $f'(x) = 8(1+2e^x)^3 e^x$

e) $f'(x) = 4\ln^3(x^2-1)^3 \cdot \dfrac{1}{(x^2-1)^3} \cdot 3(x^2-1)^2 \cdot 2x = \dfrac{24x\ln^3(x^2-1)^3}{x^2-1}$

f) $f'(x) = -18e^x(1-3e^x)^5$

g) $f'(x) = 4x\, sen\, x^2\, cos\, x^2 = 2x\, sen(2x^2)$

h) $f'(x) = -3\, cos^2(x^2 - 7x + 1) \cdot sen(x^2 - 7x + 1) \cdot (2x - 7)$

i) $f'(x) = 6x^2\, tg(x^3 - 8) \cdot [1 + tg^2(x^3 - 8)]$

j) $f'(x) = \dfrac{3}{x^2}\left(sen\,\dfrac{1}{x} + cos\,\dfrac{1}{x}\right)^2 \left(sen\,\dfrac{1}{x} - cos\,\dfrac{1}{x}\right)$

98. Aplica la regla de la cadena para determinar la función derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \ln tg\, x$
b) $f(x) = \sqrt{\cos x}$
c) $f(x) = \log_2 x^2$
d) $f(x) = sen\,(\cos x)$
e) $f(x) = arc\, tg\, x^2$
f) $f(x) = tg \ln x$
g) $f(x) = \cos \sqrt{x}$
h) $f(x) = \log_2^2 x$
i) $f(x) = \cos\,(sen\, x)$
j) $f(x) = arc\, tg^2\, x$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{tg\, x} \cdot (1 + tg^2\, x)$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2}(\cos\, x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-sen\, x) = -\dfrac{sen\, x}{2\sqrt{\cos\, x}}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 \cdot \ln 2} \cdot 2x = \dfrac{2}{x \ln 2}$

d) $f'(x) = \cos\,(\cos\, x) \cdot (-sen\, x)$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{1 + (x^2)^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{1 + x^4}$

f) $f'(x) = (1 + tg^2 \ln x) \cdot \dfrac{1}{x}$

g) $f'(x) = \left(-sen\, \sqrt{x}\right) \cdot \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{sen\, \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

h) $f'(x) = 2 \log_2\, x \cdot \dfrac{1}{x \cdot \ln 2}$

i) $f'(x) = -sen\,(sen\, x) \cdot \cos\, x$

j) $f'(x) = 2\, arc\, tg\, x \cdot \dfrac{1}{1 + x^2}$

99. Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x) = e^{(\sqrt{x}+1)^2}$
b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - 1}{e^{2x}}\right)$
c) $f(x) = \sqrt{2e^x + \log_2 3x}$
d) $f(x) = [\ln(\ln x)]^2$
e) $f(x) = 3\, sen\, x^2 + 2\, sen^2\, x$
f) $f(x) = sec\,(x^3 + 1)^2$
g) $f(x) = -\cos(sen(tg\, x^2))$
h) $f(x) = \ln \dfrac{sen\, x^2}{\cos 2x}$
i) $f(x) = e^{2x} \cdot \cos x^2$
j) $f(x) = \sqrt[3]{\cos^2 x^3}$

a) $f'(x) = e^{(\sqrt{x}+1)^2} \dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}$

b) $f'(x) = \dfrac{2x - 2x^2 + 2}{x^2 - 1}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2e^x + \log_2 3x}}\left(2e^x + \dfrac{1}{x \ln 2}\right)$

d) $f'(x) = 2[\ln(\ln x)] \cdot \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x}$

e) $f'(x) = 6x \cos x^2 + 4\, sen\, x \cos x$

f) $f'(x) = \dfrac{6\, sen\left(x^3+1\right)^2 \cdot \left(x^3+1\right) x^2}{\cos^2\left(x^3+1\right)^2}$

g) $f'(x) = 2x\, sen\left[sen\left(tg\, x^2\right)\right] \cos\left(tg\, x^2\right)\left(1 + tg^2 x^2\right)$

h) $f'(x) = \dfrac{2x \cos x^2 \cos 2x + 2\, sen\, x^2 sen\, 2x}{sen\, x^2 \cos 2x}$

i) $f'(x) = 2e^{2x} \cos x^2 - 2xe^{2x}\, sen\, x^2$

j) $f'(x) = \dfrac{-2x^2\, sen\, x^3}{\sqrt[3]{\cos x^3}}$

100. Aplica la regla de la cadena para calcular la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \left(\frac{2x^4}{5} - \frac{3x^3}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{2}{3}\right)^5$

b) $f(x) = \sqrt{sen^3 x - cos^2(3x - 1) + tg\,\frac{-3}{x^2 + 2}}$

c) $f(x) = tg^4\left(\frac{\sqrt{4x^2 + 10x - 1}}{x - 16}\right)$

d) $f(x) = \ln\left(\frac{sen^2 x + cos^2 x}{sen^2 x - cos^2 x} + tg^2 x\right)$

e) $f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{-3x^2 + 10x - 1}}{\sqrt{x^4 - 4}}\right)^{x^2+4}$

a) $f'(x) = 5\left(\frac{2x^4}{5} - \frac{3x^3}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{8x^3}{5} - \frac{9x^2}{2} - \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}\right)$

b) $f'(x) = \dfrac{\left[3\,sen^2 x\,cos\,x + 6\,cos(3x-1)\,sen(3x-1) + 6x\left(1 + tg^2\left(\frac{-3}{x^2+2}\right)\right)\frac{1}{(x^2+2)^2}\right]}{2\sqrt{sen^3 x - cos^2(3x-1) + tg\,\frac{-3}{x^2+2}}}$

c) $f'(x) = 4\,tg^3\left(\frac{\sqrt{4x^2+10x-1}}{x-16}\right)\left(1 + tg^2\left(\frac{\sqrt{4x^2+10x-1}}{x-16}\right)\right) \cdot \dfrac{\frac{4x+5}{\sqrt{4x^2+10x-1}}(x-16) - \sqrt{4x^2+10x-1}}{(x-16)^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{sen^2 x - cos^2 x} + tg^2 x} \cdot \left(\frac{-2\,sen\,2x}{(sen^2 x - cos^2 x)^2} + 1 + tg^2 x\right)$

e) $\ln f(x) = (x^2+4)\left(\frac{1}{3}\ln(-3x^2+10x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^4-4)\right)$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x\ln\left(\frac{\sqrt[3]{-3x^2+10x-1}}{\sqrt{x^4-4}}\right) + (x^2+4)\left[\frac{-6x+10}{3(-3x^2+10x-1)} - \frac{4x^3}{2(x^4-1)}\right]$

$f'(x) = \left(2x\ln\left(\frac{\sqrt[3]{-3x^2+10x-1}}{\sqrt{x^4-4}}\right) + (x^2+4)\left[\frac{-6x+10}{3(-3x^2+10x-1)} - \frac{2x^3}{(x^4-1)}\right]\right) \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{-3x^2+10x-1}}{\sqrt{x^4-4}}\right)^{x^2+4}$

101. Halla los coeficientes y exponentes desconocidos para que se verifique que las funciones y sus derivadas se corresponden.

a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$
$f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$

b) $g(x) = a\ln x + bx$
$g'(x) = \frac{3}{x} - 5$

c) $h(x) = \frac{a^x}{x^b}$
$h'(x) = a^x\left(\frac{\ln 2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

d) $i(x) = \frac{x}{\sqrt[b]{x}}$
$i'(x) = \frac{2}{3\sqrt[b]{x}}$

a) $a = 2, b = -3$

b) $a = 3, b = -5$

c) $a = 2, b = 1$

d) $b = 3$

102. Deriva las siguientes funciones trigonométricas inversas.

a) $f(x) = arc\ sen\ x^2$

b) $f(x) = arc\ cos\ (2x - 1)^2$

c) $f(x) = arc\ tg\ \sqrt{x}$

d) $f(x) = arc\ sen \dfrac{2x}{x-1}$

e) $f(x) = arc\ cos\ e^{2x}$

f) $f(x) = arc\ tg\ \ln x$

a) $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

b) $f'(x) = \dfrac{-4(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^4}}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{1+x}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{(x-1)^2}}} \cdot \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{-2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$

103. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (x^2 + 1)^{3x}$

b) $f(x) = x^{3x^2-7x-1}$

c) $f(x) = (3x^2 + 1)^{\ln x}$

d) $f(x) = sen^x\ x^2$

e) $f(x) = cos^{3x} 2x$

f) $f(x) = \left(\sqrt[5]{-x^3 - 15}\right)^{x^2}$

g) $f(x) = (-x^{10} + 3x^5 - 1)^{sen\ x}$

h) $f(x) = e^{-5x^3+4x-1}$

a) $\ln f(x) = 3x \ln(x^2+1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3\ln(x^2+1) + \frac{6x^2}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \left(3\ln(x^2+1) + \frac{6x^2}{x^2+1}\right)(x^2+1)^{3x}$$

b) $\ln f(x) = (3x^2-7x-1)\ln x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (6x-7)\ln x + \frac{3x^2-7x-1}{x}$$

$$f'(x) = \left((6x-7)\ln x + \frac{3x^2-7x-1}{x}\right)x^{3x^2-7x-1}$$

c) $\ln f(x) = \ln x \ln(3x^2+1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\ln(3x^2+1)}{x} + \ln x \cdot \frac{6x}{3x^2+1}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(3x^2+1)}{x} + \frac{6x\ln x}{3x^2+1}\right)(3x^2+1)^{\ln x}$$

d) $\ln f(x) = x\ln(sen\ x^2)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(sen\ x^2) + \frac{2x^2 \cos x^2}{sen\ x^2}$$

$$f'(x) = \left[\ln(senx^2) + \frac{2x^2\cos x^2}{senx^2}\right] sen^x x^2$$

e) $\ln f(x) = 3x\ln(\cos 2x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3\ln(\cos 2x) + 6x\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$$

$$f'(x) = \left[3\ln(\cos 2x) + 6x\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}\right]\cos^{3x} 2x$$

f) $\ln f(x) = \frac{x^2}{5}\ln\left(-x^3 - 15\right)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{5}\ln\left(-x^3 - 15\right) + \frac{3x^4}{5\left(x^3 + 15\right)}$$

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{5}\ln\left(-x^3 - 15\right) + \frac{3x^4}{5\left(x^3 + 15\right)}\right)\left(\sqrt[5]{-x^3 - 15}\right)^{x^2}$$

g) $\ln f(x) = \operatorname{sen} x \ln\left(-x^{10} + 3x^5 - 1\right)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln\left(-x^{10} + 3x^5 - 1\right) + \frac{\left(-10x^9 + 15x^4\right)\operatorname{sen} x}{-x^{10} + 3x^5 - 1}$$

$$f'(x) = \left(\cos x \ln\left(-x^{10} + 3x^5 - 1\right) + \frac{\left(-10x^9 + 15x^4\right)\operatorname{sen} x}{-x^{10} + 3x^5 - 1}\right)\left(-x^{10} + 3x^5 - 1\right)^{\operatorname{sen} x}$$

h) $\ln f(x) = -5x^3 + 4x - 1$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -15x^2 + 4$$

$$f'(x) = \left(-15x^2 + 4\right)e^{-5x^3 + 4x - 1}$$

104. Calcula *a*, *b* y *c* en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabiendo que su gráfica pasa por (0, −3) y (2, 5), y la recta tangente en $x = -1$ es horizontal.

$f(0) = c = -3$ $\qquad$ $f(2) = 4a + 2b + c = 5$

$f'(x) = 2ax + b$ $\qquad$ $f'(-1) = -2a + b$

$$\left.\begin{array}{r} c = -3 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ -2a + b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = 1,\ b = 2,\ c = -3$$

105. ¿Cuál es la ecuación de una parábola que pasa por el punto (0, 9) y en el punto (2, 9) tiene como recta tangente $y - 6x + 3 = 0$?

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Como la parábola pasa por el punto $(0, 9) \rightarrow c = 9$

Y como también pasa por el punto $(2, 9) \rightarrow 4a + 2b + 9 = 9 \rightarrow 4a + 2b = 0 \rightarrow b = -2a$

Así, resulta que: $f(x) = ax^2 - 2ax + 9 \rightarrow f'(x) = 2ax - 2a$

Si $y = 6x - 3$ es la tangente en el punto $x = 2$, entonces:
$f'(2) = 6 \rightarrow 4a - 2a = 6 \rightarrow a = 3$

La ecuación de la parábola es: $f(x) = 3x^2 - 6x + 9$

106. **Determina los valores de a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el origen de coordenadas, su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente 3 y la segunda derivada en $x = -1$ sea nula.**

$f(0) = c = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ $\qquad f'(1) = 3 + 2a + b = 3$

$f''(x) = 6x + 2a$ $\qquad f''(-1) = -6 + 2a = 0$

$$\left.\begin{array}{r} c = 0 \\ 3 + 2a + b = 3 \\ -6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = 3, b = -6, c = 0$$

107. **Determina los valores de a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por (3, 0) y las rectas tangentes a su gráfica en $x = 2$ y $x = 4$ sean paralelas al eje X.**

$f(3) = 27 + 9a + 3b + c = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ $\qquad f'(2) = 12 + 4a + b = 0$ $\qquad f'(4) = 48 + 8a + b = 0$

$$\left.\begin{array}{r} 27 + 9a + 3b + c = 0 \\ 12 + 4a + b = 0 \\ 48 + 8a + b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = -9, b = 24, c = -18$$

108. **Calcula a, b y c en la función $f(x) = ax^4 + bx + c$, sabiendo que su gráfica pasa por (1, −1), la recta tangente en $x = 1$ es horizontal y la recta tangente en $x = 0$ es paralela a la recta $y = 4x$.**

$f(1) = a + b + c = -1$

$f'(x) = 4ax^3 + b$ $\qquad f'(1) = 4a + b = 0$

La pendiente de la recta $y = 4x$ es 4, entonces:

$f'(0) = b = 4$

$$\left.\begin{array}{r} a + b + c = -1 \\ 4a + cb = 0 \\ b = 4 \end{array}\right\} \rightarrow a = -1, b = 4, c = -4$$

109. **Determina los valores de a, b y c para que la función $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por (1, 6) y las rectas tangentes a la gráfica en $x = 1$ y $x = 2$ sean horizontales.**

$f(1) = 2 + a + b + c = 6$

$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$ $\qquad f'(1) = 6 + 2a + b = 0$ $\qquad f'(2) = 24 + 4a + b = 0$

$$\left.\begin{array}{r} 2 + a + b + c = 6 \\ 6 + 2a + b = 0 \\ 24 + 4a + b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = -9, b = 12, c = 1$$

110. Razona si existe algún punto en el que la tangente a la gráfica de la curva $f(x)$ sea horizontal.

a) $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

b) $f(x) = \frac{x^2-2}{x-3}$

c) $f(x) = \frac{3x}{x-3}$

d) $f(x) = \frac{-x}{x^2+1}$

a) $f'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2} \neq 0$

c) $f'(x) = -\frac{9}{(x-3)^2} \neq 0$

b) $f'(x) = \frac{x^2-6x+2}{(x-3)^2} = 0 \to x = \frac{6 \pm \sqrt{28}}{2} \to x_1 = 3+\sqrt{7}, x_2 = 3-\sqrt{7}$

d) $f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = 0 \to x = \pm 1$

111. Indica si alguna de las rectas tangentes de las siguientes funciones son paralelas a la recta $r: y - 2x + 3 = 0$.

a) $f(x) = x^3 - x + 7$

b) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

c) $f(x) = \ln x^2$

d) $f(x) = \frac{1}{x+3}$

La pendiente de la recta r es 2. Por tanto, para que una recta tangente a $f(x)$ sea paralela a r debemos encontrar la solución de la ecuación $f'(x) = 2$.

a) $f'(x) = 3x^2 - 1 = 2 \to x = \pm 1$

c) $f'(x) = \frac{2}{x} = 2 \to x = 1$

b) $f'(x) = 2x + 4 = 2 \to x = -1$

d) $f'(x) = \frac{-1}{(x+3)^2} = 2 \to$ Sin solución.

112. Encuentra, en cada caso, los puntos en los que la tangente a la curva $f(x)$ es paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = \frac{x}{1-x}$

c) $f(x) = x^3 - x^2$

d) $f(x) = x \ln x$

La bisectriz del primer y tercer cuadrantes tiene por ecuación $y = x$ y su pendiente es 1, por tanto $f'(x) = 1$.

a) $f'(x) = 2x - 3 = 1 \to x = 2$

c) $f'(x) = 3x^2 - 2x = 1 \to x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 1$

b) $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 \to x_1 = 0, x_2 = 2$

d) $f'(x) = \ln x + 1 = 1 \to x = 1$

113. Encuentra, en cada caso, los puntos en los que la tangente a la curva $f(x)$ es paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = x^3 + 2x^2$

c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$

d) $f(x) = -\frac{1}{1-2x}$

La bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes tiene por ecuación $y = -x$ y su pendiente es -1, por tanto $f'(x) = -1$.

a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -1 \to x = \pm 1$

c) $f'(x) = 6x^2 - 6x = -1 \to x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$

b) $f'(x) = 3x^2 + 4x = -1 \to x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -1$

d) $f'(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2} = -1 \to x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

114. **Considera la función $f(x) = \ln x$. Calcula los puntos de la curva en los que la recta tangente tiene la misma pendiente que las siguientes rectas.**

a) r: $y - x = 2$
b) s: $4y = 3 - x$
c) t: $y + x - 1 = 0$
d) u: $2y - x = -4$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

a) $r: y - x = 2 \to y = x + 2 \to$ La pendiente de la recta r es 1.

$$\frac{1}{x} = 1 \to x = 1$$

b) $s: 4y = 3 - x \to y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x \to$ La pendiente de la recta s es $-\frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{4} \to x = -4$$

c) $t: y + x - 1 = 0 \to y = -x + 1 \to$ La pendiente de la recta t es -1.

$$\frac{1}{x} = -1 \to x = -1$$

d) $u: 2y - x = -4 \to y = -2 + \frac{1}{2}x \to$ La pendiente de la recta u es $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \to x = 2$$

115. **Considera la función $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$.**

a) Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función cuya pendiente sea $\frac{-1}{2}$.

b) ¿Es la gráfica de $f(x)$ tangente en algún punto a la recta $y + 2x + 2 = 0$? ¿Es único este punto?

$$f'(x) = -\frac{2}{(x+3)^2}$$

a) $-\frac{2}{(x+3)^2} = -\frac{1}{2} \to x^2 + 6x + 5 = 0 \to x_1 = -1,\ x_2 = -5$

$f(-1) = 1$ $\quad y - 1 = -\frac{1}{2}(x+1) \to y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$f(-5) = -1$ $\quad y + 1 = -\frac{1}{2}(x+5) \to y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

b) $y + 2x + 2 = 0 \to y = -2x - 2 \to$ La pendiente de la recta es -2.

$$-\frac{2}{(x+3)^2} = -2 \to (x+3)^2 = 1 \to x_1 = -4,\ x_2 = -2$$

Existen dos puntos donde la gráfica es tangente a la recta $y + 2x + 2 = 0$.

116. **La recta cuya ecuación es $y = 9x - 14$ es tangente a la función $y = x^3 - 3x + k$. Determina en qué punto son tangentes y halla el valor de k. ¿Hay una sola solución? La función tiene dos puntos en los que la tangente es horizontal. Hállalos y escribe la ecuación de esas rectas.**

$f'(x) = 3x^2 - 3$

Cuando la recta dada es tangente: $3x^2 - 3 = 9 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Si $x = 2 \rightarrow y - (2 + k) = 9(x - 2) \rightarrow y = 9x - 16 + k \rightarrow k = 2$

Si $x = -2 \rightarrow y - (-2 + k) = 9(x + 2) \rightarrow y = 9x + 16 + k \rightarrow k = -2$

Luego hay dos soluciones válidas.

Cuando la tangente es horizontal, se cumple que: $3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

Si $x = 1 \rightarrow y - (-2 + k) = 0 \cdot (x - 1) \rightarrow y = -2 + k$

Si $x = -1 \rightarrow y - (2 + k) = 0 \cdot (x + 1) \rightarrow y = 2 + k$

117. Indica en cuáles de las siguientes parejas de funciones sus gráficas son tangentes en algún punto.

a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$
$g(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = e^x$
$g(x) = x$

c) $f(x) = \ln x$
$g(x) = x - 1$

d) $f(x) = \cos x$
$g(x) = x^2 + 1$

a) $\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2x + 3 \\ g'(x) = 3 \end{array}\right\} \rightarrow 2x + 3 = 3 \rightarrow x = 0$

Además, $f(0) = g(0) = 2$.

Sus gráficas son tangentes en el punto $x = 0$.

b) $\left.\begin{array}{l} f'(x) = e^x \\ g'(x) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = 0$

Pero $f(0) = 1 \neq g(0) = 0$.

Sus gráficas no son tangentes en ningún punto.

c) $\left.\begin{array}{l} f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ g'(x) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{1}{x} = 1 \rightarrow x = 1$

Además, $f(1) = g(1) = 0$.

Sus gráficas son tangentes en el punto $x = 1$.

d) $\left.\begin{array}{l} f'(x) = -\mathrm{sen}\, x \\ g'(x) = 2x \end{array}\right\} \rightarrow -\mathrm{sen}\, x = 2x \rightarrow x = 0$

Además, $f(0) = g(0) = 1$.

Sus gráficas son tangentes en el punto $x = 0$.

118. Obtén la expresión algebraica de una función que pasa por (2, 5), sabiendo que su derivada es:

$$f'(x) = 2x^2 + 6x - 3$$

Si $f'(x) = 2x^2 + 6x - 3 \rightarrow f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 3x + k$

Como la función pasa por el punto $(2, 5) \rightarrow f(2) = 5$

$\dfrac{2}{3} \cdot 8 + 12 - 6 + k = 5 \rightarrow k = -\dfrac{19}{3}$

$f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 3x - \dfrac{19}{3}$

119. La recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $y = 5x - 7$. Halla el valor de la función y de su derivada en el punto de abscisa 2.

La de la recta es 5, por tanto $f'(2) = 5$.

Como la recta es tangente a f en $x = 2$ $\rightarrow f(2) = 5 \cdot 2 - 7 = 3$

120. La recta $y = ax + b$ pasa por (1, 6) y (2, 8) y es tangente a la curva $g(x)$ en $x = 0$. Halla el valor de $g(0)$ y $g'(0)$.

$\left.\begin{array}{l} 6 = a + b \\ 8 = 2a + b \end{array}\right\} \rightarrow a = 2, b = 4$

La ecuación de la recta es $y = 2x + 4$.

$g(0) = y(0) = 4$ $\qquad$ $g'(0) = y'(0) = 2$

121. **La función derivada de una parábola es una recta que pasa por los puntos $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-1, -\frac{11}{2}\right)$. Halla la abscisa del vértice de esa parábola.**

Como la ecuación de una parábola es $y = ax^2 + bx + c$, su derivada es $y' = 2ax + b$.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos es:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{-6} \rightarrow y = 3x - \frac{5}{2}$$

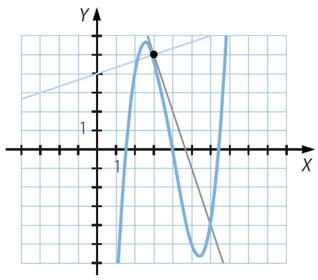
Igualando coeficientes, resulta:

$$2ax = 3x \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$b = -\frac{5}{2}$$

La abscisa del vértice es: $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-\frac{5}{2}}{2\cdot\frac{3}{2}} = \dfrac{5}{6}$

122. **Si trazamos la recta tangente y la recta normal a la función $f(x) = x^3 - 12x^2 + 42x - 40$, en el punto (3, 5) se forma, con los semiejes positivos de coordenadas, un cuadrilátero. Determina su área.**



$f'(x) = 3x^2 - 24x + 42$

$f'(3) = -3$

La ecuación de la recta tangente en (3, 5) es:

$y - 5 = -3(x - 3) \rightarrow y = -3x + 14$

Y la ecuación de la recta normal es:

$y - 5 = \frac{1}{3}(x - 3) \rightarrow y = \frac{1}{3}x + 4$

El cuadrilátero tiene como vértices: (0, 0), (0, 4), (3, 5) y $\left(\frac{14}{3}, 0\right)$.

Para calcular su área se descompone en tres figuras:

- El rectángulo de vértices (0, 0), (4, 0), (3, 4) y (3, 0) mide 12 u^2.
- El triángulo de vértices (4, 0), (3, 4) y (3, 5) mide $\frac{3}{2}$ u^2.
- El triángulo de vértices (3, 5), (3, 0) y $\left(\frac{14}{3}, 0\right)$ mide $\frac{25}{6}$ u^2.

Luego el área del cuadrilátero es: $12 + \frac{3}{2} + \frac{25}{6} = \frac{53}{3}$ u^2

123. **Considera la curva $f_1(x) = \sqrt{5 - x}$ y la recta de ecuación $f_2(x) = ax$. Calcula el valor de a para que la recta tangente a $f_1(x)$ sea:**

a) Perpendicular a $f_2(x)$ en $x = 1$.

b) Paralela a $f_2(x)$ en $x = -4$.

$f_1'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}$ $\qquad f_2'(x) = a$

a) $f_1'(1) = -\frac{1}{4}$ $\qquad f_1(1) = 2$ $\qquad y - 2 = -\frac{1}{4}(x-1) \rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4} \rightarrow -\frac{1}{4} = -\frac{1}{a} \rightarrow a = 4$

b) $f_1'(-4) = -\frac{1}{6}$ $\qquad f_1(-4) = 3$ $\qquad y - 3 = -\frac{1}{6}(x+4) \rightarrow y = -\frac{1}{6}x + \frac{7}{3} \rightarrow a = -\frac{1}{6}$

124. ¿Cuánto tiene que valer a para que la función $f(x) = x \ln x - ax$ tenga, en el punto de abscisa e, una recta tangente paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

La bisectriz del primer cuadrante es: $y = x$

Esta recta y la recta tangente son paralelas si sus pendientes son iguales.

La pendiente de la recta tangente a la función, en $x = e$, es:

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - a = \ln x + 1 - a \rightarrow f'(e) = 2 - a$$

Entonces, tenemos que: $2 - a = 1 \rightarrow a = 1$

125. Considera la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 20$. Escribe la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 4$.

Consideramos la raíz positiva: $y = \sqrt{20 - x^2}$

$$y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{20 - x^2}} \qquad y(4) = 2 \qquad y'(4) = -2$$

$$y - 2 = -2(x - 4) \rightarrow y = -2x + 10$$

126. Considera la función $f(x) = x^2 - 4x + 6$.

a) Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a su gráfica paralelas a las bisectrices de los cuadrantes.

b) Halla el punto de corte entre ellas y el de cada una con el eje de coordenadas X.

c) Determina el área del triángulo cuyos vértices son los puntos anteriormente hallados.

a) $f'(x) = 2x - 4$

La bisectriz del primer y tercer cuadrantes es $y = x$ y tiene pendiente 1.

$$2x - 4 = 1 \rightarrow x = \frac{5}{2} \qquad f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

Llamando r a la recta paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes:

$$r: y - \frac{9}{4} = x - \frac{5}{2} \rightarrow y = x - \frac{1}{4}$$

La bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes es $y = -x$ y tiene pendiente -1.

$$2x - 4 = -1 \rightarrow x = \frac{3}{2} \qquad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

Llamando s a la recta paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes:

$$s: y - \frac{9}{4} = -\left(x - \frac{3}{2}\right) \rightarrow y = -x + \frac{15}{4}$$

b) El punto de corte entre las dos rectas, r y s, es:

$$\left.\begin{array}{l} y = x - \frac{1}{4} \\ y = -x + \frac{15}{4} \end{array}\right\} \rightarrow x = 2,\ y = \frac{7}{4} \rightarrow P\left(2, \frac{7}{4}\right)$$

El punto de corte de la recta r con el eje X es: $y = 0 = x - \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{4} \rightarrow P\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

El punto de corte de la recta s con el eje X es: $y = 0 = -x + \frac{15}{4} \rightarrow x = \frac{15}{4} \rightarrow P\left(\frac{15}{4}, 0\right)$

c) La base mide $\frac{15}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7}{2}$ y la altura mide 2. $\qquad Área_T = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{7}{2}\ \text{u}^2$

127. **Considera la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$.**

a) Calcula los puntos en que la gráfica de la función tiene recta tangente horizontal.
b) Escribe la ecuación de la recta que pasa por esos puntos.
c) Halla los puntos de la curva que tienen por recta tangente una paralela a esa recta.

a) $f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2$ $\quad f(0) = 4$ $\quad f(-2) = 8$

Los puntos son (0, 4) y (–2, 8).

b) Si la ecuación de la recta es de la forma $y = mx + n$, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 4 = n \\ 8 = -2m + n \end{array}\right\} \rightarrow m = -2,\ n = 4$$

La ecuación de la recta es: $y = -2x + 4$

c) La pendiente de la recta es –2: $f'(x) = 3x^2 + 6x = -2 \rightarrow x_1 = -1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = -1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

128. **Considera la función $f(x) = \dfrac{2x - 9}{x - 3}$.**

a) Calcula los puntos de corte de esta función con los ejes de coordenadas.
b) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva en cada uno de esos puntos.
c) Halla el área de los triángulos que determinan esas rectas con los ejes de coordenadas.

$$f'(x) = \frac{3}{(x-3)^2}$$

a) Corte con el eje X: $\dfrac{2x-9}{x-3} = 0 \rightarrow x = \dfrac{9}{2}$ $\qquad$ Corte con el eje Y: $\dfrac{2\cdot 0 - 9}{0-3} = 3$

b) $f'\left(\dfrac{9}{2}\right) = \dfrac{4}{3}$ $\qquad y = \dfrac{4}{3}x - 6$ $\qquad f'(0) = \dfrac{1}{3}$ $\qquad y = \dfrac{1}{3}x + 3$

c) Calculamos los puntos de corte con los ejes de la recta $y = \dfrac{4}{3}x - 6$:

Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -6$ $\qquad$ Corte con el eje X: $y = 0 \rightarrow x = \dfrac{9}{2}$

Área del triángulo que forman: $A_T = \dfrac{b\cdot h}{2} = \dfrac{9\cdot 6}{4} = \dfrac{27}{2}$ u^2

Calculamos los puntos de corte con los ejes de la recta $y = \dfrac{1}{3}x + 3$:

Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 3$ $\qquad$ Corte con el eje X: $y = 0 \rightarrow x = -9$

Área del triángulo que forman: $A_T = \dfrac{b\cdot h}{2} = \dfrac{3\cdot 9}{2} = \dfrac{27}{2}$ u^2

129. **Se lanza verticalmente una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 49 m/s desde la parte superior de un edificio de 39 m de altura. Su altura $h(t)$ sobre el suelo después de t segundos está dada por $h(t) = 39 + 49t - 4{,}9t^2$. Determina la velocidad media de la pelota en cada uno de los siguientes intervalos.**

a) [0, 1] $\qquad$ b) [4, 6] $\qquad$ c) [11, 13]

¿Qué se puede concluir acerca del movimiento de la pelota?

a) $\frac{h(1)-h(0)}{1-0}=\frac{83{,}1-39}{1}=44{,}1$ m/s   b) $\frac{h(6)-h(4)}{6-4}=\frac{156{,}6-156{,}6}{2}=0$ m/s   c) $\frac{h(13)-h(11)}{13-11}=\frac{0-0}{2}=0$ m/s

En el primer intervalo la pelota está subiendo, y por tanto la velocidad media es positiva; en el segundo intervalo la pelota recorre el mismo tramo hacia arriba y hacia abajo; en el último intervalo la pelota ya está en el suelo y no se mueve, por lo que la velocidad media es cero.

130. El espacio recorrido por un objeto, en metros, en un tiempo, *t*, se expresa con esta fórmula.

$$e(t) = 4t^2 + 2t + 1$$

a) ¿Qué espacio ha recorrido a los 4 segundos? ¿Y a los 7 segundos?

b) ¿Cuál es la velocidad media que ha mantenido entre los 4 y los 7 segundos?

a) A los 4 segundos: $e = 73$ m   A los 7 segundos: $e = 211$ m

b) $T.V.M.\ ([4, 7]) = \frac{211-73}{7-4} = 46$ m/s

131. El espacio, en metros, que recorre un móvil en función del tiempo, en segundos, viene descrito por la expresión:

$$e(t) = \frac{2}{3}t^2 + t$$

Calcula la velocidad instantánea del móvil a los 3 segundos.

$f'(t) = \frac{4}{3}t + 1 \rightarrow f'(3) = 5$

La velocidad instantánea del móvil a los 3 segundos es de 5 m/s.

PARA PROFUNDIZAR

132. Elige la respuesta adecuada. (Concurso de Primavera)

La mayor inclinación de la función $f(x) = sen\ x$ en uno de sus puntos es:	1	2	3	4	$\frac{\pi}{2}$
La recta tangente a $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ en (1, 0), además de tocar a la curva en (1, 0), la corta también en:	(0, 1)	(−1, −4)	(2, 1)	(3, 10)	(−2, −11)
¿Cuál de las siguientes rectas es tangente a $f(x) = x^2 - 3x + 1$?	$y = x + 1$	$y = 2x + 3$	$y = 3x - 8$	$y = -3x$	$y = 3x - 1$
Si $f(x) = \frac{1}{x}$ entonces la derivada *n*-ésima de la función es:	$\frac{n!}{x^{n+1}}$	$\frac{n!}{x^{n+1}}$	$(-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$	$-\frac{n!}{x^{n+1}}$	$\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}$

- $f'(x) = \cos x$ Toma valores entre –1 y 1, por tanto la mayor inclinación de la función es 1.
- $f'(x) = 3x^2 - 4x$ $f'(1) = -1$ La recta tangente es: $y = -(x-1) = -x+1$

  $x^3 - 2x^2 + 1 = -x + 1 \rightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1$ Corta también en el (0, 1).
- $f'(x) = 2x - 3 = 3 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 1$ $y - 1 = 3(x-3) \rightarrow y = 3x - 8$

  La recta tangente es $y = 3x - 8$.
- $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ $f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$ $f^{iv}(x) = \frac{24}{x^5}$

  Por tanto: $f^n(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$

133. **Obtén la expresión algebraica de una función que pasa por (2, 5), sabiendo que su derivada es:**

$$f'(x) = 2x^2 + 6x - 3$$

Si $f'(x) = 2x^2 + 6x - 3 \rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 3x + k$

Como la función pasa por el punto $(2, 5) \rightarrow f(2) = 5$

$\frac{2}{3} \cdot 8 + 12 - 6 + k = 5 \rightarrow k = -\frac{19}{3}$

$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 3x - \frac{19}{3}$

134. **Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones inversas, es decir, $(g \circ f)(x) = x$, ¿se verifica que $(g' \circ f')(x) = x$?**

No se verifica. Si se consideran las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$, se tiene que son inversas ya que cumplen que: $(g \circ f)(x) = x$

Sin embargo, resulta que: $(g' \circ f')(x) = g'(f'(x)) = g'(3x^2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(3x^2)^2}} = \frac{1}{3x\sqrt[3]{9x}} \neq x$

Luego $f'(x)$ y $g'(x)$ no son funciones inversas.

135. **Sea $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$. Estudia si $f(x)$ y $f'(x)$ son constantes.**

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\right)^2} \cdot \frac{\cos x(1 + \cos x) + \operatorname{sen}^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x + 1}{1 + 2\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos x + 1}{2\cos x + 2} = \frac{1}{2}$$

Al ser $f'(x)$ constante y no nula, la función $f(x)$ no es constante.

136. **Verifica que si un polinomio tiene una raíz doble, también lo es de su derivada.**
Resuelve la ecuación $12x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = 0$ sabiendo que una de sus raíces es doble.

Si un polinomio tiene una raíz doble a, entonces: $f(x) = (x - a)^2 \cdot p(x)$

$$f'(x) = 2(x - a) \cdot p(x) + (x - a)^2 \cdot p'(x) = (x - a)[2p(x) + (x - a) \cdot p'(x)]$$

Por tanto, a es también una raíz de la derivada.

Sea $f(x) = 12x^3 - 16x^2 + 7x - 1$.

Como $f'(x) = 36x^2 - 32x + 7$, resulta que: $36x^2 - 32x + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{7}{18} \end{cases}$

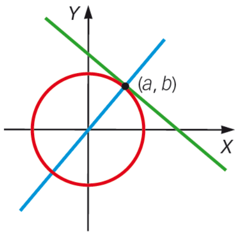
Y como una de las raíces es doble coincide con una de las anteriores:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow 12x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (12x^2 - 10x + 2)$$

$$12x^2 - 10x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son: $\frac{1}{2}$ (doble) y $\frac{1}{3}$

137. Demuestra que la recta tangente a una circunferencia en un punto es perpendicular al radio de dicha circunferencia en ese punto.



Sea una circunferencia centrada en el origen de coordenadas de radio r: $x^2 + y^2 = r^2$

Si $y = \sqrt{r^2 - x^2} \to y' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Entonces la ecuación de la recta tangente en un punto (a, b) es: $y - b = -\dfrac{a}{b}(x - a)$

La recta determinada por el radio de la circunferencia que pasa por este punto es:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \to y = \frac{b}{a}x$$

Las rectas son perpendiculares ya que: $\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{-\dfrac{a}{b}}$

138. Demuestra que una función que no es continua en un punto no puede ser derivable en ese punto.

Sea una función $f(x)$ que no es continua en $x = x_0$. $\to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Si la función es derivable en $x = x_0$, entonces existe el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l \to \lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right) = l\cdot\lim_{h\to 0} h \to \lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right) = 0 \to \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0} f(x_0)$$

Esto no es cierto porque la función no es continua en $x = x_0$, y la función no puede ser derivable en ese punto.

139. Para hallar la derivada de la función implícita tienes que suponer que *y* es una función derivable con respecto a *x* y aplicar la regla de la cadena.

Utiliza esta técnica para calcular la derivada de las funciones implícitas que aparecen a continuación.

a) $y^3 - 2xy^2 = 3x^3y$

b) $3xy + y^3 = 2x$

a) $3y^2y' - 2y^2 - 2x2yy' = 9x^2y + 3x^3y'$

$y'(3y^2 - 4xy - 3x^3) = 9x^2y + 2y^2$

$y' = \dfrac{9x^2y + 2y^2}{3y^2 - 4xy - 3x^3}$

b) $3y + 3xy' + 3y^2y' = 2$

$y'(3x + 3y^2) = 2 - 3y$

$y' = \dfrac{2 - 3y}{3x + 3y^2}$

140. Demuestra que la ecuación de la recta tangente a la curva $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$, siendo *a* un número real positivo, en el punto $P(x_0, y_0)$, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{x}{x_0^{\frac{1}{2}}} + \frac{y}{y_0^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}}$$

(Premio extraordinario de Bachillerato)

Derivamos implícitamente:

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{y}}y' = 0 \to y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2\sqrt{y}$ $\qquad y'(x_0) = -\dfrac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}$

Calculamos la recta tangente que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) \to \frac{y - y_0}{\sqrt{y_0}} + \frac{x - x_0}{\sqrt{x_0}} = 0 \to \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{y}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{y_0}{\sqrt{y_0}} + \frac{x_0}{\sqrt{x_0}}$$

Comprobamos que $\frac{y_0}{\sqrt{y_0}}+\frac{x_0}{\sqrt{x_0}}=a^{\frac{1}{2}}$:

$$\frac{y_0}{\sqrt{y_0}}+\frac{x_0}{\sqrt{x_0}}=\frac{y_0\sqrt{x_0}+x_0\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0y_0}}=\frac{\left(y_0\sqrt{x_0}+x_0\sqrt{y_0}\right)\sqrt{x_0y_0}}{x_0y_0}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}=a^{\frac{1}{2}}$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. ¿Qué es el costo marginal de la producción del que se habla en el texto?

El costo marginal es la derivada del costo total de producción con respecto a la producción.

2. Explica qué es el término insumo que también aparece en el texto anterior.

Los insumos son todos los elementos necesarios para producir un bien.

3. ¿Por qué se puede considerar el costo marginal de producción como una derivada?

Porque mide la tasa de variación del coste entre la variación de la producción.

4. Teniendo en cuenta la función de costo, ¿qué signo crees que tendrá el parámetro a?

Positivo.

5. Halla la función del costo marginal en el ejemplo de la manufactura de medicamentos si *a* y *b* son números reales.

Función costo: $f(x)=3ax^2+2bx$

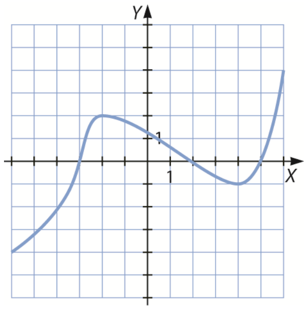
6. ¿Qué tipo de función es el costo marginal?

Es una función cuadrática cuya representación es una parábola cóncava; en el eje de abscisas se representa la producción y en el eje de ordenadas los costes.

ACTIVIDADES

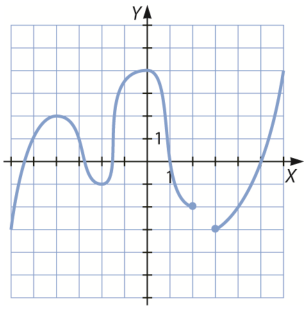
1. Dibuja la gráfica de una función creciente en $(-\infty, -2] \cup (4, \infty]$ y decreciente en el resto.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



2. Dibuja la gráfica de una función con dos máximos y un mínimo y cinco puntos de corte con los ejes *X* e *Y*.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



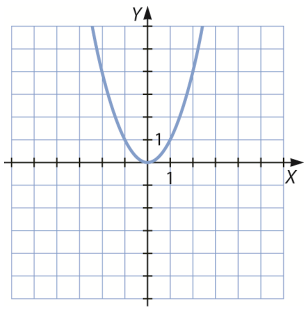
3. Dibuja la gráfica de $f(x) = x^2$. A partir de ella, encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de estas.

a) $f(x) = (x - 1)^2$

b) $f(x) = (x + 2)^2$

c) $f(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = x^2 - 3$



$f(x) = x^2$ decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

a) $f(x) = (x - 1)^2$

En este caso se trata de una traslación de la función original una unidad a la derecha, el intervalo de decrecimiento en este caso será $(-\infty, 1)$ y el de crecimiento será $(1, +\infty)$.

b) $f(x) = (x + 2)^2$

En este caso se trata de una traslación de la función original dos unidades a la izquierda, por lo que el intervalo de decrecimiento será $(-\infty, -2)$ y el de crecimiento será $(-2, +\infty)$.

c) $f(x) = x^2 + 1$

Esta función es el resultado de trasladar una unidad hacia arriba la función original, por lo que el intervalo de decrecimiento en este caso será $(-\infty, 0)$ y el de crecimiento será $(0, +\infty)$.

d) $f(x) = x^2 - 3$

En este caso, como en el apartado anterior, se produce una traslación en vertical de tres unidades hacia abajo, con lo que el intervalo de decrecimiento en este caso será $(-\infty, 0)$ y el de crecimiento será $(0, +\infty)$.

4. Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las funciones.

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

b) $f(x) = -x^2 + 6x + 2$

a) La derivada es $f'(x) = 4x + 4$ y $4x + 4 = 0 \rightarrow x = -1$.

Vemos que $4x + 4 < 0 \rightarrow x \in (-\infty, -1)$ → En este intervalo la función decrece.

$4x + 4 > 0 \rightarrow x \in (-1, +\infty)$ → En este intervalo la función crece.

b) La derivada es $f'(x) = -2x + 6$ y $-2x + 6 = 0 \rightarrow x = 3$. Vemos que:

$-2x + 6 > 0 \rightarrow x \in (-\infty, 3)$ → En este intervalo la función crece.

$-2x + 6 < 0 \rightarrow x \in (3, +\infty)$ → En este intervalo la función decrece.

5. Encuentra los máximos y los mínimos de estas funciones.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$

a) Su derivada es $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, que se anula en $x = 0$ y $x = 2$.

Es creciente a la izquierda de 0 y decreciente a la derecha → Máximo en (0, 0).

Es decreciente a la izquierda de 2 y creciente a la derecha → Mínimo en (2, –4).

b) Su derivada es $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x-3)(x+2)$ y se anula en $x = 3$ y $x = -2$.

Es creciente a la izquierda de –2 y decreciente a la derecha → Máximo en (–2, 45).

Es decreciente a la izquierda de 3 y creciente a la derecha → Mínimo en (0, –80).

6. Encuentra los máximos y los mínimos de estas funciones utilizando la segunda derivada.

a) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$

c) $f(x) = x^2 + 9x$

d) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 4x$

a) Su primera derivada es $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 4x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, que es igual a 0 en $x = 0$, $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$.

Su segunda derivada es $f''(x) = 12x^2 - 8 = 4(3x - 2)$.

Para $x = -\sqrt{2}$: $f''(-\sqrt{2}) = 4(3(-\sqrt{2})^2 - 2) = 4(6 - 2) = 16 > 0$ → Mínimo en $x = -\sqrt{2}$.

Para $x = \sqrt{2}$: $f''(\sqrt{2}) = 4\left(3(\sqrt{2})^2 - 2\right) = 4(6 - 2) = 16 > 0$ → Mínimo en $x = \sqrt{2}$.

Para $x = 0$: $f''(0) = 4(3(0)^2 - 2) = 4(0 - 2) = -8 < 0$ → Máximo en $x = 0$.

b) Su primera derivada es $f'(x)=3x^2+6x=3x(x-2)$, que es igual a 0 en $x=0$ y $x=2$.

Su segunda derivada es $f''(x)=6x+6=6(x-1)$.

Para $x=0$: $f''(0)=6(0-1)=-6<0 \rightarrow$ Máximo en $x=0$.

Para $x=2$: $f''(2)=6(2-1)=6>0 \rightarrow$ Mínimo en $x=2$.

c) Su primera derivada es $f'(x)=2x+9$, que es igual a 0 en $x=\frac{-9}{2}$.

Su segunda derivada es $f''(x)=2$.

Para $x=\frac{-9}{2}$: $f''\left(\frac{-9}{2}\right)=2>0 \rightarrow$ Mínimo en $x=\frac{-9}{2}$.

d) Su primera derivada es $f'(x)=6x^2+18x-4$ que se anula para $x=\frac{-9+\sqrt{105}}{6}$ y $x=\frac{-9-\sqrt{105}}{6}$.

Su segunda derivada es $f''(x)=12x+18$.

Para $x=\frac{-9+\sqrt{105}}{6}$: $f''\left(\frac{-9+\sqrt{105}}{6}\right)>0 \rightarrow$ Mínimo en $x=\frac{-9+\sqrt{105}}{6}$.

Para $x=\frac{-9-\sqrt{105}}{6}$: $f''\left(\frac{-9-\sqrt{105}}{6}\right)<0 \rightarrow$ Máximo en $x=\frac{-9-\sqrt{105}}{6}$.

7. Considera la siguiente función racional.

$$f(x)=\frac{x^2}{x+1}$$

Estudia su crecimiento y encuentra sus máximos y mínimos.

Su primera derivada es $f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

Vemos que es una función racional cuyo denominador es siempre positivo, así que estudiamos el signo del numerador.

$x(x+2)>0 \rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$. Por tanto, en estos intervalos la función es creciente.

$x(x+2)<0 \rightarrow x\in(-2,0)$. Por tanto, en este intervalo la función es decreciente.

Para calcular los valores de x tales que $f'(x)=0$, hacemos $\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}=0$, que es equivalente en este caso a calcular $x(x+2)=0$. Esta ecuación se cumple en $x=0$ y $x=-2$.

Su segunda derivada es:

$$f''(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2x(x+2)(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{(2x+2)(x+1)-2x(x+2)}{(x+1)^3}=\frac{2}{(x+1)^3}$$

Para $x=0$: $f''(0)=\frac{2}{(0+1)^3}=2>0 \rightarrow$ Mínimo en $x=0$.

Para $x=-2$: $f''(-2)=\frac{2}{(-2+1)^3}=-2<0 \rightarrow$ Máximo en $x=-2$.

8. Decide dónde son cóncavas y dónde son convexas estas funciones.

a) $f(x) = 7x^3 - x^2 - x + 2$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

a) Analizamos el signo de $f''(x)$:

$f'(x) = 21x^2 - 2x - 1$ $f''(x) = 42x - 2$

Buscamos los puntos donde $f''(x)$ se anula, que son los posibles puntos de inflexión:

$f''(x) = 42x - 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{21}$

Analizamos el signo de $f''(x)$ a la izquierda y a la derecha de $\dfrac{1}{21}$:

Para $x < \dfrac{1}{21}$: $f''(0) = -2 < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

Para $x > \dfrac{1}{21}$: $f''(1) = 26 > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

b) Analizamos el signo de $f''(x)$:

$f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ $f''(x) = \dfrac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$

Buscamos los puntos donde $f''(x)$ se anula, que son los posibles puntos de inflexión:

$f''(x) = \dfrac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Analizamos el signo de $f''(x)$ en $x < -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y $\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x$:

Para $x < -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$: $f''(-2) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

Para $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$: $f''(0) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

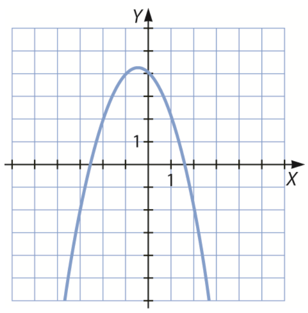
Para $\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x$: $f''(2) < 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

9. Halla los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones, y comprueba el resultado gráficamente.

a) $f(x) = -x^2 - x + 4$ b) $f(x) = -x - 5x^2$

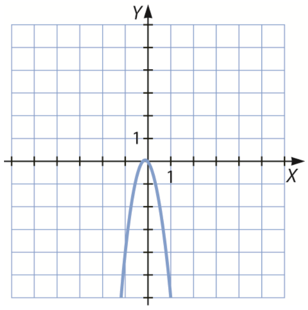
a) $f'(x) = -2x - 1$ $f''(x) = -2$

$f''(x) < 0$ para todo valor de x, por tanto es siembre convexa.



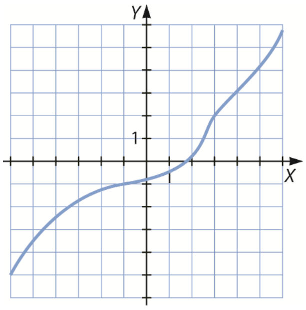
b) $f'(x) = -1 - 10x$ $\qquad$ $f''(x) = -10$

$f''(x) < 0$ para todo valor de x, por tanto es siembre convexa.



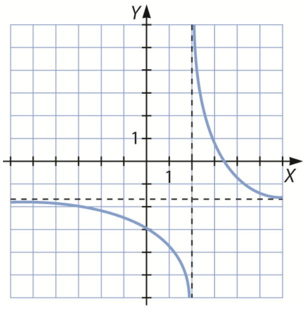
10. **Dibuja la gráfica de una función siempre creciente que no tenga asíntotas.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



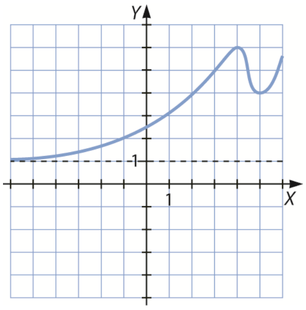
11. **Dibuja la gráfica de una función siempre decreciente que tenga una asíntota vertical y otra horizontal.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



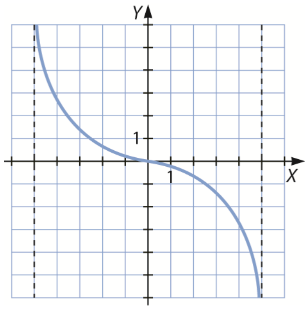
12. **Dibuja la gráfica de una función siempre positiva con un máximo en (4, 6).**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



13. **Dibuja la gráfica de una función cuyo dominio sea $[-5, 5]$, pase por el origen y tal que $\lim_{x \to -5} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to 5} f(x) = -\infty$.**

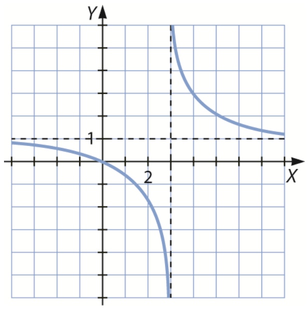
Respuesta abierta. Por ejemplo:



14. **Representa gráficamente una función que cumpla todas las condiciones que se describen a continuación.**

- **Su dominio es $\mathbb{R} - \{3\}$.**
- **Corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.**
- **Tiene una asíntota vertical en el punto $x = 3$ y una horizontal de altura $y = 1$.**
- **Es siempre decreciente.**
- **Es convexa en $(-\infty, 3)$ y cóncava en $(3, +\infty)$.**
- **No tiene puntos de inflexión.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



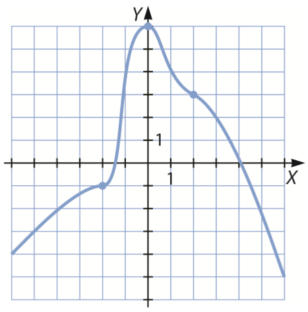
15. **Representa gráficamente una función que cumpla todas las condiciones que se describen a continuación.**

- **Su dominio es $\mathbb{R}$.**
- **Corta al eje X en el punto $(-2, 0)$ y al eje Y en el punto $(0, 1)$.**
- **Tiene dos asíntotas horizontales, $y = 3$ e $y = -2$.**
- **Es siempre creciente.**
- **Es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, +\infty)$.**
- **Tiene un punto de inflexión en $(-1, 0)$.**

No existe una función cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, +\infty)$ con un punto de inflexión en $x = -1$; el punto de inflexión debería estar en $x = 1$.

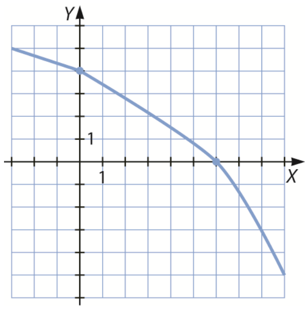
16. **Dibuja la gráfica de una función cuyo dominio es $\mathbb{R}$, que pasa por $(-2, -1)$ y $(2, 3)$, es creciente en $(-\infty, 0]$, decreciente en $(0, \infty)$ y tiene un máximo en $(0, 6)$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



17. **Dibuja la gráfica de una función con dominio $\mathbb{R}$, cuyos puntos de corte son $(0, 4)$ y $(6, 0)$, y tal que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

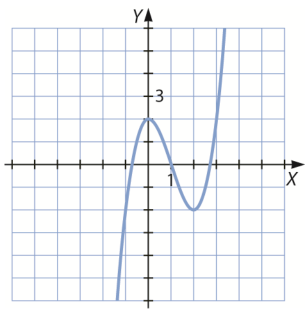


18. **Representa gráficamente estas funciones.**

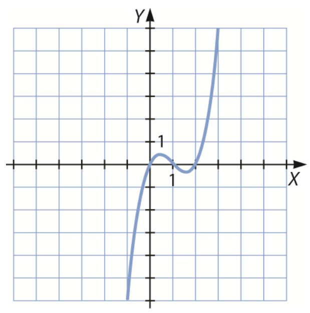
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

a)



b)

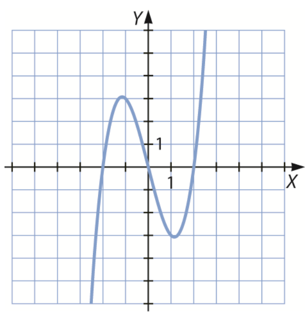


19. **Representa gráficamente estas funciones.**

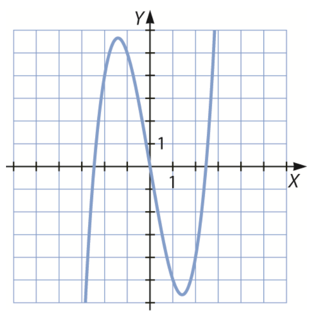
a) $f(x) = x^3 - 4x$

b) $f(x) = x^3 - 6x$

a)



b)



20. Determina cuántas y cuáles son las asíntotas de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

a) ▪ Asíntotas verticales:

El denominador se anula en $x = 2$: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x}{x-2} = \infty \to f$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

▪ Asíntotas horizontales:

Como grado$(3x)$ = grado$(x-2) \longrightarrow$ Existe asíntota horizontal en $y = k$, donde $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{x-2} = 3 \longrightarrow y = 3$.

▪ Asíntotas oblicuas:

No existe asíntota oblicua porque grado$(3x)$ = grado$(x-2) = 1$.

b) ▪ Asíntotas verticales:

El denominador se anula en $x = \pm 1$:

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{x^2-1} = \infty \longrightarrow f$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2}{x^2-1} = \infty \longrightarrow f$ tiene una asíntota vertical en $x = -1$.

▪ Asíntotas horizontales:

Como grado(x^2) = grado$(x^2-1) \longrightarrow$ Existe asíntota horizontal en $y = k$, donde $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-1} = 1 \longrightarrow y = 1$.

▪ Asíntotas oblícuas:

No existe asíntota oblicua porque grado(x^2) = grado$(x^2-1) = 1$.

21. Determina las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ b) $f(x) = x + \dfrac{x}{2-x}$

a) $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2+x} = 1 \to m = 1$

$n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x^2}{x+1} - x\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x^2 - x^2 - x}{x+1}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x}{x+1} = -1 \to n = -1$

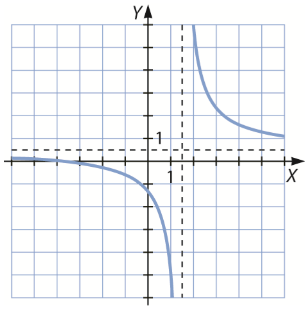
Por lo tanto la asíntota oblicua es $y = x - 1$.

b) $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \frac{x}{2-x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x - x^2}{x(2-x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-x}{2-x} = 1 \to m = 1$

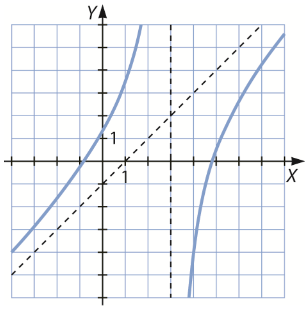
$n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[x + \dfrac{x}{2-x} - x\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x}{2-x}\right] = -1 \to n = -1$

Por tanto, la asíntota oblicua es $y = x - 1$.

22. **Representa la función $f(x) = \dfrac{x+4}{2x-3}$.**



23. **Representa la función $f(x) = x - \dfrac{x+4}{x-3}$.**



SABER HACER

24. **Estudia el crecimiento y el decrecimiento de $f(x)$.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < -2 \\ 1 + \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Analizamos el dominio de $f(x)$ para saber dónde puede haber discontinuidades:

$\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$

Analizamos el signo de $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -2 \\ -\dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Tenemos que ver dónde se anula $f'(x)$. Para ello analizamos dónde se anulan cada una de las partes que la componen:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2 = 0 \to x = -1 \\ -\dfrac{2}{x^3} \neq 0 \end{array}\right\} \to \text{En } x = -1 \ f'(x) \text{ no toma el valor de la primera función. Por tanto, } f'(x) \text{ nunca se anula.}$$

Analizamos el signo de $f'(x)$ si $x < -2$, $-2 \leq x < 0$ y $x > 0$:

Para $x < -2$: $f'(-3) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

Para $-2 \leq x < 0$: $f'(-1) > 0 \to f(x)$ es creciente.

Para $x > 0$: $f'(1) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

25. La función $g(x) = 100 + 5x + x^2$ proporciona el gasto en euros de una empresa para fabricar x unidades. Si cada unidad tiene un precio de venta de 30 €, calcula la función beneficio y cuántas unidades hay que producir para que sea máximo.

Para empezar, si se entiende que la empresa gana 30 € por cada unidad, el ingreso vendrá dado por $f(x) = 30x$, mientras que el gasto será $g(x)$.

Por lo tanto, el beneficio será $b(x) = f(x) - g(x) = 30x - 100 - 5x - x^2 = 25x - x^2 - 100$.

Primero se calcula $b'(x) = 25 - 2x$ y se observa que el candidato a máximo o mínimo es $x = \frac{25}{2}$.

Se calcula ahora $b''(x) = -2$ y se ve entonces que $x = \frac{25}{2}$ es un máximo.

Como $\frac{25}{2} = 1{,}25$ no es un número entero, se mira el valor de $b(12)$ y $b(13)$ y, siendo el beneficio $b(12) = (13) = 56$, se concluye que para maximizar el beneficio se deben fabricar 12 o 13 unidades.

26. Halla el valor de a para que en $x = 2$ haya un mínimo para $f(x) = x^2 + ax + a$.

Se calcula la derivada de la función $f'(x) = 2x + a$ y se impone la condición de que $f'(2) = 0$:

$2 \cdot 2 + a = 0 \rightarrow a = -4$, así que el candidato será $a = -4$.

Se comprueba que es un mínimo mirando que la segunda derivada es positiva:

$f''(x) = 2 \rightarrow f''(2) = 2 > 0$. Con $a = -4$, $x = -2$ es un mínimo.

27. Averigua cómo son las funciones cuya derivada se representa con una recta de pendiente 3.

Se sabe que la derivada de la función es una recta con pendiente 3, por lo que será de la forma $f'(x) = 3x + n$.

La función será de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, pues su derivada es $f'(x) = 2ax + b$.

Se tiene entonces que $2a = 3 \rightarrow a = \frac{3}{2}$, y $b = n$, por lo que las funciones que cumplan las condiciones del enunciado tendrán como ecuación: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + nx + c$ con $n, c \in \mathbb{R}$

28. Halla la ecuación de la parábola cuyo vértice es (3, −8), sabiendo que corta al eje Y en (0, 1).

Una parábola tendrá como ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$, y como pasa por el (0, 1), al sustituir, se obtiene $c = 1$.

Al ser el punto (3, –8) el vértice de la parábola:

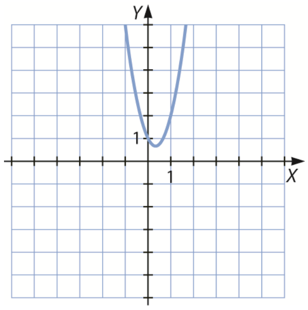
- Es un punto de ella $\rightarrow$ $a3^2 + b3 + 1 = -8$
- Será un máximo o un mínimo global $\rightarrow f'(3) = 0 \rightarrow$ $6a + b = 0$.

$$\left.\begin{aligned} a3^2 + b3 + 1 &= -8 \\ 6a + b &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 9a + 3b &= -1 \\ b &= -6a \end{aligned}\right\} \rightarrow 9a - 18a = -9 \rightarrow a = 1, b = -6$$

Por tanto, $f(x) = x^2 - 6x + 1$.

29. Representa la derivada de $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$.

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$



30. Estudia la concavidad y la convexidad de la función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < -2 \\ 1 + \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Analizamos el dominio de $f(x)$ para saber dónde puede haber discontinuidades:

$\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -2 \\ -\dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geq -2 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{6}{x^4} & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

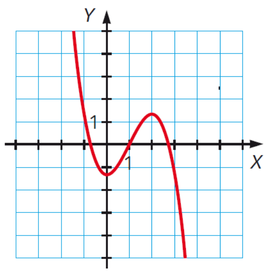
Tenemos que ver dónde se anula $f''(x)$. En este caso, $f''(x) \neq 0$ para cualquier x, por tanto, analizamos el signo de $f''(x)$ si $x < -2$, $-2 \leq x < 0$ y $x > 0$:

Para $x < -2$: $f'' > 0 \to f(x)$ es cóncava.

Para $-2 \leq x < 0$: $f''(-1) > 0 \to f(x)$ es cóncava.

Para $x > 0$: $f'(1) > 0 \to f(x)$ es cóncava.

31. Estudia la concavidad o convexidad en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y $x = 2$.



En $x = -1$ la función es cóncava.

En $x = 1$ la función tiene un punto de inflexión.

En $x = 2$ la función es convexa.

32. Determina si la función $f(x) = \dfrac{2-x^2}{x^2-1}$ tiene asíntotas horizontales y estudia su posición.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-x^2}{x^2-1} = -1 \to f$ tiene una asíntota horizontal en $y=-1$.

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota por la derecha, se dan valores muy grandes a x, y se estudia su valor:

Para $x = 1\,000$: $f(1000) = \dfrac{2-(1000)^2}{(1000)^2-1} = \dfrac{2-1000000}{1000000-1} = \dfrac{-999998}{999999} = -0{,}999998 > -1$

Por la derecha, la gráfica está situada por encima de la asíntota.

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota por la izquierda, se dan valores muy pequeños a x, y se estudia su valor:

Para $x = -1\,000$: $f(-1000) = \dfrac{2-(-1000)^2}{(-1000)^2-1} = \dfrac{-999998}{999999} = -0{,}999998 > -1$

Por la izquierda, la gráfica está situada por encima de la asíntota.

33. Calcula las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{2x^3+3x^2+2}$ y estudia su posición.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{2x^3+3x^2+2} = \dfrac{1}{2} \to f$ tiene una asíntota horizontal en $y = \dfrac{1}{2}$.

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota por la derecha, se dan valores muy grandes a x, y se estudia su valor:

Para $x = 1\,000$: $f(1000) = \dfrac{(1000)^3}{2(1000)^3+3(1000)^2+2} = \dfrac{1000000000}{2003000002} = 0{,}49925\ldots < \dfrac{1}{2}$

Por la derecha, la gráfica está situada por debajo de la asíntota.

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota por la izquierda, se dan valores muy pequeños a x, y se estudia su valor:

Para $x = -1\,000$: $f(-1000) = \dfrac{(-1000)^3}{2(-1000)^3+3(-1000)^2+2} = \dfrac{1000000000}{1996999998} = 0{,}5007\ldots > \dfrac{1}{2}$

Por la izquierda, la gráfica está situada por encima de la asíntota.

34. Determina si la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$ tiene asíntotas verticales y estudia su posición.

Las asíntotas verticales aparecen cuando el denominador vale 0. En este caso:

$x^2-4 = (x+2)(x-2) = 0 \to x = \pm 2$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \infty \to$ Tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \infty \to$ Tiene una asíntota vertical en $x = -2$.

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota $x = -2$ por la izquierda, se dan valores muy cercanos a -2 por la izquierda a x, y se estudia su valor:

Para $x = -2{,}01$: $f(-2{,}01) = \dfrac{-2{,}01+1}{(-2{,}01)^2-4} < 0 \to \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota $x = -2$ por la derecha, se dan valores muy cercanos a -2por la derecha a x, y se estudia su valor:

Para $x=-1{,}99$: $f(-1{,}99)=\dfrac{-1{,}99+1}{(-1{,}99)^2-4}>0 \rightarrow \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty$

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota $x=2$ por la izquierda, se dan valores muy cercanos a 2por la izquierda a x, y se estudia su valor:

Para $x=1{,}99$: $f(1{,}99)=\dfrac{1{,}99+1}{(1{,}99)^2-4}<0 \rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota $x=2$ por la derecha, se dan valores muy cercanos a 2 por la derecha a x, y se estudia su valor:

Para $x=2{,}01$: $f(2{,}01)=\dfrac{2{,}01+1}{(2{,}01)^2-4}>0 \rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

35. Calcula las asíntotas verticales de la función $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-x-6}$ y estudia su posición.

Las asíntotas verticales aparecen cuando el denominador vale 0. En este caso:

$x^2-x-6=(x+2)(x-3)=0 \rightarrow x=-2,\ x=3$ ⟶ Tiene dos asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x-2}{x^2-x-6}=\infty \rightarrow$ Tiene asíntota vertical en $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x-2}{x^2-x-6}=\infty \rightarrow$ Tiene asíntota vertical en $x=3$.

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota $x=-2$ por la izquierda, se dan valores muy cercanos a -2 por la izquierda a x, y se estudia su valor:

Para $x=-2{,}01$: $f(-2{,}01)=\dfrac{3(-2{,}01)-2}{(-2{,}01)^2+2{,}01-6}<0 \rightarrow \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota $x=-2$ por la derecha, se dan valores muy cercanos a -2 por la derecha a x, y se estudia su valor:

Para $x=-1{,}99$: $f(-1{,}99)=\dfrac{3(-1{,}99)-2}{(-1{,}99)^2+1{,}99-6}>0 \rightarrow \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty$

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota $x=3$ por la izquierda, se dan valores muy cercanos a 3 por la izquierda a x, y se estudia su valor:

Para $x=2{,}99$: $f(2{,}99)=\dfrac{3(2{,}99)-2}{(2{,}99)^2-2{,}99-6}<0 \rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota $x=3$ por la derecha, se dan valores muy cercanos a 3 por la derecha a x, y se estudia su valor:

Para $x=3{,}01$: $f(3{,}01)=\dfrac{3(3{,}01)-2}{(3{,}01)^2-3{,}01-6}>0 \rightarrow \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$

ACTIVIDADES FINALES

36. Decide si estas funciones crecen o decrecen en los puntos que se indican.

a) $f(x)=-2x^3+3x^2-x+1$ en $x=1$

b) $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x}$ en $x=-2$

c) $f(x)=2^x+3\ln x-8$ en $x=4$

d) $f(x)=2x+3\sqrt{x}$ en $x=9$

a) $f'(x) = -6x^2 + 6x - 1$

$f'(1) = -1 < 0 \rightarrow$ La función es decreciente en $x = 1$.

b) $f'(x) = \dfrac{(4x-3)x - (2x^2 - 3x + 1)}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2}$

$f'(-2) = \dfrac{9}{4} > 0 \rightarrow$ La función es creciente en $x = -2$.

c) $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 + \dfrac{3}{x}$

$f'(4) = 16 \ln 2 + \dfrac{3}{4} > 0 \rightarrow$ La función es creciente en $x = 4$.

d) $f'(x) = 2 + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

$f'(9) = \dfrac{5}{2} > 0 \rightarrow$ La función es creciente en $x = 9$.

37. Di si las siguientes funciones crecen o decrecen en los puntos que se indican.

a) $f(x) = sen\ x$ en $x = \pi$

b) $f(x) = sen\ x + tg\ x$ en $x = 0$

c) $f(x) = \dfrac{1 + sen\ x}{x^2 - 1}$ en $x = \dfrac{\pi}{2}$

d) $f(x) = sen^2\ x + cos^2\ x$ en $x = 0$

a) $f'(x) = cos\ x \rightarrow f'(\pi) = cos\ \pi = -1 < 0 \rightarrow$ La función decrece en $x = \pi$.

b) $f'(x) = cos\ x + 1 + tg^2 x \rightarrow f'(0) = cos\ 0 + 1 + tg^2\ 0 = 2 > 0 \rightarrow$ La función crece en $x = 0$.

c) $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)cos\ x - 2x(sen\ x + 1)}{(x^2-1)^2} \rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0 \rightarrow$ La función decrece en $x = \dfrac{\pi}{2}$.

d) $f(x) = sen^2 x + cos^2 x = 1\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ Función constante en todo su dominio y no crece ni decrece en $x = 0$.

38. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de estas funciones. ¿Existe algún máximo o mínimo?

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

b) $f(x) = -x^2 + 4$

c) $f(x) = 2x^2 - 8x$

d) $f(x) = -3x - x^2$

e) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

f) $f(x) = 3x^2 - 2x$

a) $f'(x) = 2x - 4 \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = 2$.

En $(-\infty, 2)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(2, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

Por tanto, $x = 2$ es un mínimo.

b) $f'(x) = -2x \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = 0$.

En $(-\infty, 0)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $(0, +\infty)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

Por tanto, $x = 0$ es un máximo.

c) $f'(x)=4x-8 \rightarrow f'(x)=0$ cuando $x=2$.

En $(-\infty, 2)$ $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(2, +\infty)$ $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

Por tanto, $x=2$ es un mínimo.

d) $f'(x)=-3-2x \rightarrow f'(x)=0$ cuando $x=-\frac{3}{2}$.

En $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$ $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$ $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

Por tanto, $x=-\frac{3}{2}$ es un máximo.

e) $f'(x)=2x-6 \rightarrow f'(x)=0$ cuando $x=3$.

En $(-\infty, 3)$ $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(3, +\infty)$ $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

Por tanto, $x=3$ es un mínimo.

f) $f'(x)=6x-2 \rightarrow f'(x)=0$ cuando $x=\frac{1}{3}$.

En $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$ $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

Por tanto, $x=\frac{1}{3}$ es un mínimo.

39. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones, y encuentra los posibles máximos o mínimos.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

c) $f(x) = x^3 - 3x$

d) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 8$

e) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 12$

a) $f'(x)=3x^2-12x+9 \rightarrow f'(x)=0$ cuando $x=1$ y $x=3$. Divide el dominio en 3 intervalos.

En $(-\infty, 1)$ $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $(1, 3)$ $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(3, +\infty)$ $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $x=1$ tiene un máximo y en $x=3$ un mínimo.

b) $f'(x)=3x^2-6x-9 \rightarrow f'(x)=0$ cuando $x=-1$ y $x=3$. Divide el dominio en 3 intervalos.

En $(-\infty, -1)$ $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $(-1, 3)$ $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(3, +\infty)$ $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $x=-1$ tiene un máximo y en $x=3$ un mínimo.

c) $f'(x)=3x^2-3 \rightarrow f'(x)=0$ cuando $x=\pm 1$.

En $(-\infty, -1)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $(-1, 1)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(1, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $x=-1$ tiene un máximo y en $x=1$ un mínimo.

d) $f'(x)=6x^2+6x-36 \rightarrow f'(x)=0$ cuando $x=2$ y $x=-3$.

En $(-\infty, -3)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $(-3, 2)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(2, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $x=-3$ tiene un máximo, y en $x=2$ un mínimo.

e) $f'(x)=6x^2+6x+6>0 \rightarrow f'(x)>0\ \forall x \in \mathbb{R}$

La función es creciente en todo su dominio y no tiene máximos ni mínimos.

40. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de estas funciones.

a) $f(x) = x^4 - 4x$ b) $f(x) = 9x^4 - 2x^3 - 6x^2$ c) $f(x) = \dfrac{3x^4}{4} - x^3 - 3x^2 + 6$ d) $f(x) = x^4 - 2x^2$

a) $f'(x)=4x^3-4 \rightarrow f'(x)=0$ cuando $x=1$.

En $(-\infty, 1)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(1, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

b) $f'(x)=36x^3-6x^2-12x \rightarrow f'(x)=0$ cuando $x=0$, $x=-\dfrac{1}{2}$ y $x=\dfrac{2}{3}$.

En $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $\left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$ es creciente en este intervalo.

c) $f'(x)=3x^3-3x^2-6x \rightarrow f'(x)=0$ cuando $x=0$, $x=-1$ y $x=2$.

En $(-\infty, -1)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(-1, 0)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $(0, 2)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(2, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

d) $f'(x)=4x(x+1)(x-1) \rightarrow f'(x)=0$ cuando $x=0$, $x=-1$ y $x=1$.

En $(-\infty, -1)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(-1, 0)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $(0, 1)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(1, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

41. Estudia el crecimiento de estas funciones.

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = x^4$ c) $f(x) = \sqrt{x}$

a) $f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = 0$.

En $(-\infty, 0)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $(0, +\infty)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

b) $f'(x) = 4x^3 \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = 0$.

En $(-\infty, 0)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(0, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

En $(-\infty, 0)$ la función no está definida.

En $(0, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

42. Analiza en qué intervalos crece y en cuáles decrece cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3\,sen\,2x$ c) $f(x) = e^{2x-1}$

b) $f(x) = 2^{x+1}$ d) $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x + 5$

a) $f'(x) = 6\cos 2x \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

En los intervalos $\left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{3\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En los intervalos $\left(\dfrac{3\pi}{4} + k\pi, \dfrac{5\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

b) $f'(x) = 2^{x+1}\ln 2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Por tanto, la función es creciente en toda la recta real.

c) $f'(x) = 2e^{2x-1} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Por tanto, la función es creciente en toda la recta real.

d) $f'(x) = -\ln 4 \cdot 4^{-x} < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Por tanto, la función es decreciente en toda la recta real.

43. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln x$ d) $f(x) = \log_2 \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ e) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right)$

c) $f(x) = \log_2(x^3 + 1)$ f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x - 1}{x^2 - 1}\right)$

a) $\text{Dom}\, f(x) = (0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ en todo el dominio, por lo que $f(x)$ es siempre creciente.

b) $x^2+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}\to \text{Dom } f(x)=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}\to f'(x)=0\to x=0$$

$f(x)$ decrece en $(-\infty, 0)$ porque $f'(-1)=-1<0$ y crece en $(0, +\infty)$ porque $f'(1)=-1>0$.

c) $x^3+1>0\to x>-1\to \text{Dom } f(x)=(-\infty,-1)$

$$f'(x)=\frac{3x^2}{\left(x^3+1\right)\ln 2}>0$$ en todo el dominio, por lo que $f(x)$ es siempre creciente.

d) $\text{Dom } f(x)=(0,+\infty)$

$$f'(x)=-\frac{1}{x\log 2}<0$$ en todo el dominio, por lo que $f(x)$ es siempre decreciente.

e) $\dfrac{1}{x^2+1}>0\ \forall x\in\mathbb{R}\to \text{Dom } f(x)=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{-2x}{x^2+1}\to f'(x)=0\to x=0$$

En $(-\infty,0)$ $f'(x)>0\to$ La función es creciente.

En $(0,+\infty)$ $f'(x)<0\to$ La función es decreciente.

$f(x)$ tiene un máximo en $x=0$.

f) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ $\qquad \dfrac{1}{x+1}>0\to x>-1\to \text{Dom } f(x)=(-1,+\infty)$

$$f'(x)=-\frac{1}{x+1}<0$$ en todo el dominio, por lo que $f(x)$ es siempre decreciente.

44. Determina los intervalos donde las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

a) $f(x)=\begin{cases} x-3 & \text{si } x\le 1\\ 3-2x & \text{si } x>1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{si } x<0\\ 3x^2+5x-2 & \text{si } x\ge 0\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{x^2}{2}+3 & \text{si } x>0\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-9 & \text{si } x\le 2\\ 8-3x & \text{si } x>2\end{cases}$

a) $f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\le 1\\ -2 & \text{si } x>1\end{cases}\to\begin{cases} f \text{ creciente} & \text{si } x\le 1\\ f \text{ decreciente} & \text{si } x>1\end{cases}$

b) $f'(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x<0\\ 6x+5 & \text{si } x\ge 0\end{cases}\to\begin{cases} f'(x)>0 & \text{si } x<0\\ f'(x)>0 & \text{si } x\ge 0\end{cases}\to f \text{ crece } \forall x\in\mathbb{R}$

c) $f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & \text{si } x\le 0\\ x & \text{si } x>0\end{cases}\to\begin{cases} f'(x)>0 & \text{si } x\le 0\\ f'(x)>0 & \text{si } x>0\end{cases}\to f \text{ crece } \forall x\in\mathbb{R}$

d) $f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si } x\le 2\\ -3 & \text{si } x>2\end{cases}\to\left.\begin{cases} f'(x)<0 & \text{si } x<-1\to f \text{ decrece}\\ f'(x)>0 & \text{si } -1<x\le 2\to f \text{ crece}\\ f'(x)<0 & \text{si } 2<x\to f \text{ decrece}\end{cases}\right\}\to f \text{ tiene un mínimo en } x=-1$

45. Analiza en qué intervalos crece y en cuáles decrece cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$ c) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ d) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$

a) $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = 0$.

Como el denominador es siempre positivo, solo comprobamos el signo del numerador, por lo que:

$f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \rightarrow x \in (-\infty, 0) \rightarrow$ En este intervalo $f(x)$ decrece.

$f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} > 0 \rightarrow x \in (0, +\infty) \rightarrow$ En este intervalo $f(x)$ crece.

b) $\text{Dom}\, f(x) = \mathbb{R} - \{-3\}$ $f'(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2} > 0$ en todo el dominio, por lo que $f(x)$ es siempre creciente.

c) $\text{Dom}\, f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$ $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$ en todo el dominio, por lo que $f(x)$ es siempre creciente.

d) $\text{Dom}\, f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$ $f'(x) = -\dfrac{2}{(x-2)^2} < 0$ en todo el dominio, por lo que $f(x)$ es siempre decreciente.

46. ¿Es cierto que la función $f(x) = x^3$ es siempre creciente? ¿Qué ocurre en el origen de coordenadas?

$f'(x) = 3x^2$

Si $x \neq 0 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Si $x = 0 \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow$ La función no es creciente ni decreciente en este punto.

47. Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x) = |3x+2|$ en $x = 1$ y $x = -4$

b) $f(x) = |-x+3|$ en $x = 0$ y $x = 5$

c) $f(x) = |-(x-3)|$ en $x = -1$ y $x = 2$

d) $f(x) = \left|\dfrac{3x}{2} + 1\right|$ en $x = -2$ y $x = 0$

a) $f(x) = \begin{cases} -3x-2 & \text{si } x < -\dfrac{2}{3} \\ 3x+2 & \text{si } x \geq -\dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < -\dfrac{2}{3} \\ 3 & \text{si } x > -\dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ decrece en } \left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right). \\ f(x) \text{ crece en } \left(-\dfrac{2}{3}, +\infty\right). \end{cases}$

En $x = 1$ crece y en $x = -4$ decrece.

b) $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x > 3 \\ 3-x & \text{si } x \leq 3 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 3 \\ -1 & \text{si } x < 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ crece en } (3, +\infty). \\ f(x) \text{ decrece en } (-\infty, 3). \end{cases}$

En $x = 0$ decrece y en $x = 5$ crece.

c) $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x > 3 \\ 3-x & \text{si } x \leq 3 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 3 \\ -1 & \text{si } x < 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ crece en } (3, +\infty). \\ f(x) \text{ decrece en } (-\infty, 3). \end{cases}$

En $x = -1$ decrece y en $x = 2$ decrece.

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-3x-2}{2} & \text{si } x < -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{3x+2}{2} & \text{si } x \geq -\dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-3}{2} & \text{si } x < -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{3}{2} & \text{si } x > -\dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ decrece en } \left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right). \\ f(x) \text{ crece en } \left(-\dfrac{2}{3}, +\infty\right). \end{cases}$

En $x = -2$ crece y en $x = 0$ crece.

48. Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x) = |x^2 - 3|$ en $x = -3$, $x = -1$ y $x = 4$

b) $f(x) = |-x^2 + 3x|$ en $x = -2$, $x = 2$ y $x = 6$

c) $f(x) = \left|\dfrac{x+7}{4}\right|$ en $x = -10$, $x = -5$ y $x = 1$

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \le -\sqrt{3} \\ 3 - x^2 & \text{si } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ x^2 - 3 & \text{si } \sqrt{3} \le x \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le -\sqrt{3} \\ -2x & \text{si } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ 2x & \text{si } \sqrt{3} \le x \end{cases}$

En $x = -3$: $f'(-3) = -6 < 0 \rightarrow f(x)$ decrece.

En $x = -1$: $f'(-1) = 2 > 0 \rightarrow f(x)$ crece.

En $x = 4$: : $f'(4) = 8 > 0 \rightarrow f(x)$ crece.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x \le 0 \\ 3x - x^2 & \text{si } 0 < x < 3 \\ x^2 - 3x & \text{si } 3 \le x \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \le 0 \\ 3 - 2x & \text{si } 0 < x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } 3 \le x \end{cases}$

En $x = -2$: $f'(-2) = -7 < 0 \rightarrow f(x)$ decrece.

En $x = 2$: $f'(2) = -1 < 0 \rightarrow f(x)$ decrece.

En $x = 6$: $f'(6) = 9 > 0 \rightarrow f(x)$ crece.

c) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x+7}{4} & \text{si } x < -7 \\ \dfrac{x+7}{4} & \text{si } x \ge -7 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4} & \text{si } x < -7 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x > -7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ decrece en } (-\infty, -7). \\ f(x) \text{ crece en } (-7, +\infty). \end{cases}$

En $x = -10$ decrece, en $x = -5$ y $x = 1$ crece.

49. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones que aparecen a continuación.

a) $f(x) = |x^2 - x - 5|$

b) $f(x) = \left|\dfrac{1}{x}\right|$

c) $f(x) = \left|\dfrac{x}{x^2 + 1}\right|$

d) $f(x) = -\sqrt{|x|}$

e) $f(x) = |\ln x|$

f) $f(x) = \ln(|x| + 1)$

a) $f(x) = |x^2 - x - 5| = \begin{cases} x^2 - x - 5 & \text{si } x \in \left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right) \\ -x^2 + x + 5 & \text{si } x \in \left(\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right) \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \in \left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right) \rightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 0 & \text{si } x > \dfrac{1}{2} \\ 2x - 1 < 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ -2x + 1 & \text{si } x \in \left(\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} -2x + 1 > 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ -2x + 1 < 0 & \text{si } x > \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Por lo que la función decrece en $\left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$ y crece en $\left(\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right)$.

b) $f(x)=\left|\frac{1}{x}\right|=\begin{cases}-\frac{1}{x} & \text{si } x<0\\ \frac{1}{x} & \text{si } x\ge 0\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & \text{si } x<0\\ -\frac{1}{x^2} & \text{si } x>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f'(x)>0 & \text{si } x<0\\ f'(x)<0 & \text{si } x>0\end{cases}$

Por tanto, la función crece en el intervalo (–∞, 0) y decrece en el intervalo (0, +∞).

c) $f(x)=\left|\frac{x}{x^2+1}\right|=\begin{cases}-\frac{x}{x^2+1} & \text{si } x<0\\ \frac{x}{x^2+1} & \text{si } x\ge 0\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & \text{si } x<0\\ \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & \text{si } x>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f'(x)<0 & \text{en } x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)\\ f'(x)>0 & \text{en } x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)\end{cases}$

La función decrece en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

d) $f(x)=-\sqrt{|x|}=\begin{cases}-\sqrt{-x} & \text{si } x<0\\ -\sqrt{x} & \text{si } x\ge 0\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x<0\\ -\frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f'(x)<0 \text{ si } x>0\\ f'(x)>0 \text{ si } x<0\end{cases}$

La función crece en el intervalo (–∞, 0) y decrece en (0, +∞).

e) $f(x)=|\ln x|=\begin{cases}-\ln x & \text{si } 0<x\le 1\\ \ln x & \text{si } x>1\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x} & \text{si } 0<x<1\\ \frac{1}{x} & \text{si } x>1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f'(x)<0 \text{ si } 0<x<1\\ f'(x)>0 \text{ si } x>1\end{cases}$

La función decrece en el intervalo (0, 1) y crece en (1, +∞).

f) $f(x)=\ln(|x|+1)=\begin{cases}\ln(1-x) & \text{si } x<0\\ \ln(x+1) & \text{si } x\ge 0\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{1-x} & \text{si } x<0\\ \frac{1}{x+1} & \text{si } x>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f'(x)<0 \text{ si } (-\infty,0)\\ f'(x)>0 \text{ si } (0,+\infty)\end{cases}$

La función decrece en el intervalo (–∞, 0) y crece en el intervalo (0, +∞).

50. Determina los máximos y los mínimos de las siguientes funciones utilizando la segunda derivada.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2+9}{x}$

d) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+4}$

e) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

f) $f(x)=\dfrac{8x}{x^2+1}$

a) $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\rightarrow f'(x)=0$ cuando $x=0$ y $x=2$.

$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}\rightarrow\begin{cases}\text{En } x=0\rightarrow f''(0)=-2<0\\ \text{En } x=2\rightarrow f''(2)=2>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=0 \text{ máximo}\\ x=2 \text{ mínimo}\end{cases}$$

b) $f'(x)=\frac{x(4-x)}{(2-x)^2}\rightarrow f'(x)=0$ cuando $x=0$ y $x=4$.

$$f''(x)=\frac{8}{(2-x)^3}\rightarrow\begin{cases}\text{En } x=0\rightarrow f''(0)=1>0\\ \text{En } x=4\rightarrow f''(4)=-1<0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=0 \text{ mínimo}\\ x=2 \text{ máximo}\end{cases}$$

c) $f'(x)=\frac{(x+3)(x-3)}{x^2}\to f'(x)=0$ cuando $x=\pm3$.

$$f''(x)=\frac{18}{x^3}\to\begin{cases}\text{En } x=-3\to f''(-3)=-\frac{2}{3}<0\\ \text{En } x=3\to f''(3)=\frac{2}{3}>0\end{cases}\to\begin{cases}x=-3 \text{ máximo}\\ x=3 \text{ mínimo}\end{cases}$$

d) $f'(x)=\frac{x^2(x^2+12)}{(x^2+4)^2}\to f'(x)=0$ cuando $x=0$.

$$f''(x)=-\frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}\to \text{En } x=0\ f''(0)=0$$

No podemos concluir mediante este método si es un máximo o un mínimo.

e) $f'(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\to f'(x)=0$ cuando $x=0$ y $x=-2$.

$$f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}\to\begin{cases}\text{En } x=0\to f''(0)=2>0\\ \text{En } x=-2\to f''(-2)=-2<0\end{cases}\to\begin{cases}x=0 \text{ mínimo}\\ x=2 \text{ máximo}\end{cases}$$

f) $f'(x)=-\frac{8(x^2-1)}{(x^2+1)^2}\to f'(x)=0$ cuando $x=\pm1$.

$$f''(x)=\frac{16x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\to\begin{cases}\text{En } x=-1\to f''(-1)=4>0\\ \text{En } x=1\to f''(1)=-4<0\end{cases}\to\begin{cases}x=-1 \text{ mínimo}\\ x=1 \text{ máximo}\end{cases}$$

51. Encuentra los máximos y los mínimos de estas funciones utilizando la derivada segunda.

a) $f(x)=3x+2$

b) $f(x)=\frac{5-2x}{4}$

c) $f(x)=2x^3-6x$

d) $f(x)=2x^2-12x+5$

e) $f(x)=2x^4-4x^2$

f) $f(x)=x^4-2x^3$

a) $f'(x)=3>0\to f'(x)\neq0\ \forall x\in\mathbb{R}\to$ No existe máximo ni mínimo en esta función.

b) $f'(x)=-\frac{1}{2}<0\to f'(x)\neq0\ \forall x\in\mathbb{R}\to$ No existe máximo ni mínimo en esta función.

c) $f'(x)=6x^2-6=6(x^2-1)\to f'(x)=0$ cuando $x^2-1=0\to x=\pm1$

$$f''(x)=12x\to\begin{cases}f''(-1)=-12<0\\ f''(1)=12>0\end{cases}\to\begin{cases}x=-1 \text{ máximo}\\ x=1 \text{ mínimo}\end{cases}$$

d) $f'(x)=4x-12=4(x-3)\to f'(x)=0$ cuando $4(x-3)=0\to x=3$

$f''(x)=4\to f''(3)=4>0\to x=3$ mínimo

e) $f'(x)=8x^3-8x=8x(x^2-1)\to f'(x)=0$ cuando $8x(x^2-1)=0\to x=0$ y $x=\pm1$

$$f''(x)=8(3x^2-1)\to\begin{cases}f''(0)=-8<0\\ f''(-1)=16>0\\ f''(1)=16>0\end{cases}\to\begin{cases}x=0 \text{ máximo}\\ x=-1 \text{ mínimo}\\ x=1 \text{ mínimo}\end{cases}$$

f) $f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)\to f'(x)=0$ para $x=0$ y $x=\frac{3}{2}$.

$$f''(x)=12x(x-1)\to\begin{cases}f''(0)=0\\ f''\left(\frac{3}{2}\right)=9>0\end{cases}\to\begin{cases}x=0 \text{ no se puede decidir con este método.}\\ x=\frac{3}{2} \text{ mínimo}\end{cases}$$

52. Calcula, utilizando la derivada, la expresión algebraica de las coordenadas del vértice de una parábola genérica, del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Como el vértice es un máximo o un mínimo, tiene que cumplir la ecuación $f(x) = 0$. Además, y por tanto en el vértice, al igualar ambas ecuaciones, se obtiene:

$0 = 2ax + b \rightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$, y al sustituir, $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = c - \dfrac{b^2}{4a}$, con lo que ya se puede dar una expresión algebraica para el vértice de una parábola:

$\left(-\dfrac{b}{2a}, c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$ en función de los parámetros a, b y c.

53. Averigua los valores de a, b y c para que la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga su vértice en el punto $(-1, -8)$ y corte al eje Y en $(0, -5)$.

$\left(-\dfrac{b}{2a}, c - \dfrac{b^2}{4a}\right) = (-1, 8)$ y $-5 = a0^2 + b0 + c \rightarrow c = -5$, por lo que:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{b}{2a} &= -1 \\ -5 - \frac{b^2}{4a} &= -8 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} b &= 2a \\ -5 - \frac{b^2}{4a} &= -8 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} b &= 2a \\ \frac{(2a)^2}{4a} &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} b &= 2a \\ \frac{4a^2}{4a} &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} b &= 6 \\ a &= 3 \end{aligned}\right\}$$

54. Obtén el vértice de cada una de las siguientes parábolas teniendo en cuenta que en él la tangente a la curva es horizontal. Indica si se trata de un máximo o un mínimo.

a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

b) $f(x) = -2x^2 + 6x + 9$

c) $f(x) = x^2 + 2x - 5$

d) $f(x) = -x^2 + 4x$

e) $f(x) = 3x^2 + x + 9$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{2}$

Si la tangente a la curva es horizontal en el vértice, significa que la primera derivada (pendiente de la tangente en ese punto) es igual a cero.

a) $f'(x) = 0 \rightarrow 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

$f''(x) = 6 \rightarrow f''(1) = 6 > 0 \rightarrow x = 1$ mínimo

b) $f'(x) = 0 \rightarrow -4x + 6 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

$f''(x) = -4 \rightarrow f''\left(\dfrac{3}{2}\right) = -4 < 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$ máximo

c) $f'(x) = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

$f''(x) = 2 \rightarrow f''(-1) = 2 > 0 \rightarrow x = -1$ mínimo

d) $f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 4 = 0 \rightarrow x = 2$

$f''(x) = -2 \rightarrow f''(2) = -2 < 0 \rightarrow x = 2$ máximo

e) $f'(x) = 0 \rightarrow 6x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1}{6}$

$f''(x) = 6 \rightarrow f''\left(\dfrac{-1}{6}\right) = 6 > 0 \rightarrow x = \dfrac{-1}{6}$ mínimo

f) $f'(x) = 0 \rightarrow x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$

$f''(x) = 1 \rightarrow f''(-2) = 1 > 0 \rightarrow x = -2$ mínimo

55. **Halla los valores de *a* y *b* para que la función $f(x) = x^3 + ax + b$ tenga un mínimo en (1, 5).**

Al sustituir en la función, se tiene que $5 = 1^3 + a1 + b = 1 + a + b \rightarrow 4 = a + b$, y puesto que se tiene mínimo en (1, 5), se sigue que $f'(x) = 3x^2 + a \rightarrow f'(1) = 0 \rightarrow 0 = 3 + a \rightarrow a = -3$, y se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 4 \\ a &= -3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a = -3 \end{cases}$$

56. **Calcula el valor de *a*, *b* y *c* en la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + c$, sabiendo que su gráfica pasa por $(-1, 9)$ y en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = -2$ tiene tangente horizontal.**

Es imposible que en $x = 0$ la derivada de esa función tenga tangente horizontal, ya que $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$ y $f'(0) = 1$, con lo que se concluye que no existe una función con esas características.

57. **Determina los valores de *a*, *b* y *c* para que la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ pase por el punto (2, 6) y tenga un mínimo en (1, 2).**

Pasa por (2, 6) $\rightarrow 6 = a(2)^3 + b(2) + c \rightarrow 6 = 8a + 2b + c$

Pasa por (1, 2) $\rightarrow 2 = a(1)^3 + b(1) + c \rightarrow 2 = a + b + c$

Como además en (1, 2) tiene un mínimo, se obliga a que:

$f'(x) = 3ax^2 + b \rightarrow f'(1) = 3a + b = 0$

Con lo que se tienen tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} 8a + 2b + c &= 6 \\ a + b + c &= 2 \\ 3a + b &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 8a + 2b + c &= 6 \\ a + b + c &= 2 \\ b &= -3a \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 8a - 6a + c &= 6 \\ a - 3a + c &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 2a + c &= 6 \\ -2a + c &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 4 \\ c = 4 \end{cases}$$

Se comprueba que $x = 1$ es un mínimo, ya que $f''(x) = 6x \rightarrow f''(1) = 6 > 0$.

58. **Calcula *a*, *b* y *c* para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga dos puntos de corte con el eje de las *X* en $x = -4$ y $x = -3$, y dos puntos de tangente horizontal en $x = -4$ y $x = \dfrac{-10}{3}$. Indica si estos dos últimos puntos son máximos o mínimos.**

Como su gráfica pasa por (– 4, 0) y (– 3, 0), se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = a(-4)^3 + b(-4)^2 + c(-4) + d \rightarrow 0 = -64a + 16b - 4c + d \\ 0 = a(-3)^3 + b(-3)^2 + c(-3) + d \rightarrow 0 = -27a + 9b - 3c + d \end{cases}$$

Además, se sabe que su derivada se anula en los puntos $x = -4$ y $x = -\dfrac{10}{3}$, con lo que se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = 3a(-4)^2 + 2b(-4) + c \rightarrow 0 = 48a - 8b + c \\ 0 = 3a\left(-\dfrac{10}{3}\right)^2 + 2b\left(-\dfrac{10}{3}\right) + c \rightarrow 0 = 100a - 20b + 3c \end{cases}$$

Se obtienen cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas: $\begin{cases} -64a + 16b - 4c + d = 0 \\ -27a + 9b - 3c + d = 0 \\ 48a - 8b + c = 0 \\ 100a - 20b + 3c = 0 \end{cases}$

El sistema es compatible indeterminado, por tanto, no existe una única solución. Dejando *d* como variable libre:

$$c = \frac{5d}{6},\ b = \frac{11d}{48},\ a = \frac{d}{48}$$

59. Estudia el crecimiento, el decrecimiento y los máximos y los mínimos de esta función.

$$f(x) = \sqrt{2x^3 - \frac{13}{2}x^2 - 5x}$$

$$\text{Dom}\, f = \left\{x \in \mathbb{R} : 2x^3 - \frac{13}{2}x^2 - 5x > 0\right\} = \left[\frac{13-\sqrt{329}}{8}, 0\right] \cup \left[\frac{13+\sqrt{329}}{8}, +\infty\right)$$

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 13x - 5}{2\sqrt{x^3 - \frac{13}{2}x^2 - 5x}} \to f'(x) = 0 \text{ cuando } 6x^2 - 13x - 5 = 0 \to x = -\frac{1}{3} \text{ y } x = \frac{5}{2}.$$

De los dos posibles candidatos a punto crítico se descarta $x = \frac{5}{2}$ por no encontrarse en el dominio de la función.

Se calcula la segunda derivada para comprobar si $x = -\frac{1}{3}$ es un máximo o un mínimo:

$$f''(x) = \frac{12x^4 - 52x^3 - 60x^2 - 25}{\sqrt{2}(x(4x^2 - 13x - 10))^{3/2}} \to f''\left(-\frac{1}{3}\right) = -51\sqrt{\frac{3}{94}} < 0 \to x = -\frac{1}{3} \text{ máximo}$$

La función crece en el intervalo $\left(\frac{13-\sqrt{329}}{8}, -\frac{1}{3}\right)$, y decrece en el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

60. Calcula los valores de *a*, *b* y *c* para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenga un máximo en un punto donde corta al eje *X* y un mínimo en su punto de corte con el eje *Y*, y cumple que $a + b = -1$.

Los puntos de corte son el $(0, b)$ y el $(x_0, 0)$, donde x_0 será una raíz del polinomio $x^3 + ax^2 + b$.

En estos puntos, la derivada se anula; en el caso de $(0, b)$ es un mínimo, con lo que la segunda derivada en él es positiva; en el caso $(x_0, 0)$ es un máximo, con lo que la segunda derivada en él es negativa:

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 2ax \\ f''(x) = 6x + 2a \end{cases} \to \begin{cases} f'(0) = 3\cdot 0^2 + 2a\cdot 0 = 0 \\ f''(0) = 6\cdot 0 + 2a = 2a > 0 \\ f'(x_0) = 3x_0^2 + 2ax_0 = 0 \\ f''(x_0) = 6x_0 + 2a < 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -\frac{2}{3}a \end{cases}$$

Se rechaza $x_0 = 0$ porque, en ese caso, $f''(x_0) = 6x_0 + 2a = 2a < 0$, que sería contradictorio con $f''(0) = 2a > 0$.

Por tanto, $\left(-\frac{2a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{2a}{3}\right)^2 + b = 0 \to -8\frac{a^3}{27} + 12\frac{a^3}{27} + b = 0 \to \frac{4a^3}{27} + b = 0$.

Por último, como se cumple la ecuación $a + b = -1$, se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{4a^3}{27} + b = 0 \\ a + b = 1 \end{array}\right\} \to 4a^3 - 27a + 27 = 0 \to \begin{cases} a = -3 \text{ y } b = 4 \to \text{Se rechaza por ser } 2a > 0. \\ a = \frac{3}{2} \text{ y } b = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Con lo que la función buscada será:

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

61. Indica cuáles deben ser los valores de *a*, *b*, *c* y *d* para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cumpla lo siguiente.

- Tenga un máximo en el vértice de la parábola $g(x) = x^2 + 12x + 202$.
- Tenga un mínimo en el vértice de la parábola $h(x) = -2x^2 + 8x - 98$.

El máximo tendrá como coordenadas $x=-\frac{b}{2a}=-6$ y $g(-6)=238$ y el mínimo $x=-\frac{b}{2a}=2$ y $h(2)=-90$.

Por tanto:

$$\begin{cases} f'(x)=3ax^2+2bx+c \\ f''(x)=6ax+2b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(-6)=108a-12b+c=0 \\ f''(-6)=-36a+2b<0 \\ f'(2)=12a+4b+c=0 \\ f''(2)=12a+2b>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 108a-12b+c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases}$$

Por otro lado, también se tiene que: $\begin{cases} -216a+36b-6c+d=238 \\ 8a+4b+2c+d=-90 \end{cases}$

Por tanto, se tiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, y al resolverlo se obtienen los valores de los parámetros.

$$\left.\begin{array}{r} 108a-12b+c=0 \\ 12a+4b+c=0 \\ -216a+36b-6c+d=238 \\ 8a+4b+2c+d=-90 \end{array}\right\} \rightarrow a=\frac{41}{32}, b=\frac{123}{16}, c=-\frac{369}{8}, d=\frac{-155}{4}$$

Por tanto, la función buscada será: $f(x)=32x^3+\frac{123}{16}x^2-\frac{369}{8}x-\frac{155}{4}$

62. Determina los puntos de las gráficas de estas funciones cuya tangente es horizontal.

a) $f(x) = 3x^2 - 15x + 13$

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 8$

c) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 12$

d) $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$

e) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$

La tangente es horizontal si la pendiente es igual a cero.

a) $f'(x) = 6x - 15$

$6x - 15 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$

b) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

$6x^2 + 6x - 36 = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$

c) $f'(x) = 6x^2 + 6x + 6$

$6x^2 + 6x + 6 = 0 \rightarrow x^2 + x + 1 = 0$

La ecuación no tiene solución, por lo que no hay puntos que tengan tangente horizontal.

d) $f'(x) = \frac{(2x+2)(x+1)-(x^2+2x+2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$\frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x^2 + 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

e) $f'(x) = \frac{x-2-(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{-4}{(x-2)^2}$

$\frac{-4}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow -4 = 0$

La ecuación no tiene solución, y no hay puntos que tengan tangente horizontal.

63. ¿En qué puntos de las gráficas de estas funciones es horizontal la tangente? Decide si son máximos o mínimos.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{2 - x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 4}$

a) $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x-1) - (x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$\dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

$f''(2) = 2 > 0 \rightarrow$ En $x = 2$ tiene un mínimo.

$f''(0) = -2 < 0 \rightarrow$ En $x = 0$ tiene un máximo.

b) $f'(x) = \dfrac{2x(2-x) - x^2(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{4x - x^2}{(x-2)^2}$

$\dfrac{4x - x^2}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow 4x - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \end{cases}$

$f''(x) = \dfrac{8}{(2-x)^3}$

$f''(0) = 1 > 0 \rightarrow$ En $x = -1$ tiene un mínimo.

$f''(4) = -1 < 0 \rightarrow$ En $x = 1$ tiene un máximo.

c) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - (x^2 + 9)}{x^2} = \dfrac{x^2 - 9}{x^2}$

$\dfrac{x^2 - 9}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$

$f''(x) = \dfrac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 9) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{18}{x^3}$

$f''(-3) = -\dfrac{2}{3} < 0 \rightarrow$ En $x = -3$ tiene un máximo.

$f''(3) = \dfrac{2}{3} > 0 \rightarrow$ En $x = 3$ tiene un mínimo.

d) $f'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot (x^2 + 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \dfrac{x^4 + 12x^2}{(x^2 + 4)^2}$

$\dfrac{x^4 + 12x^2}{(x^2 + 4)^2} = 0 \rightarrow x^4 + 12x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) = \dfrac{(4x^3 + 24x)(x^2 + 4)^2 - (x^4 + 12x^2) \cdot 2(x^2 + 4) \cdot 2x}{(x^2 + 4)^4} = \dfrac{96x - 8x^3}{(x^2 + 4)^3}$

$f''(0) = 0 \rightarrow$ En $x = 0$ no tiene un máximo ni un mínimo.

64. Indica toda la información que sea posible sobre el punto $x = a$ de la función $f(x)$ en cada caso.

a) $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) \text{ es negativa} \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f(a) = 3 \\ f(x) \leq 3 \text{ siempre} \end{cases}$

d) $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f'(x) > 0 \text{ para } x < a \\ f'(x) < 0 \text{ para } x > a \end{cases}$

a) $x = a$ es un máximo.

b) $x = a$ es un punto crítico, pero no se sabe si es máximo o mínimo.

c) $x = a$ es un punto crítico y como $f(x) \leq 3$ siempre y $f(a) = 3$ es un máximo.

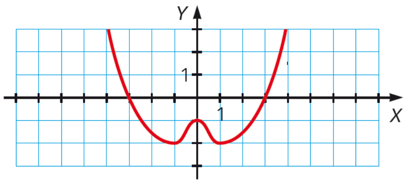
d) $x = a$ es un mínimo.

e) No se puede decidir si hay máximo o mínimo en $x = a$.

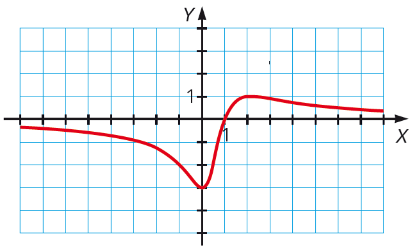
f) $x = a$ es un máximo, porque $f'(a) = 0$, crece en $x < a$ y decrece en $x > a$.

65. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos, así como sus valores, de las siguientes funciones.

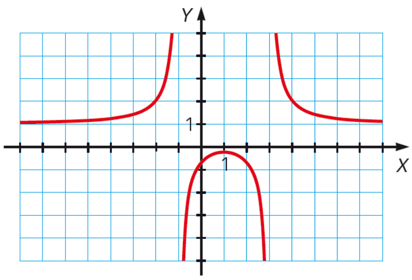
a)



b)



c)



a) Decrece en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y crece en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Tiene máximo en $x = 0$, cuyo valor es -1.

Tiene dos mínimos, en $x = -1$ y $x = 1$, ambos con valor -2.

b) Decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(0, 2)$.

Tiene un mínimo en $x = 0$, cuyo valor es -3, y un máximo en $x = 2$, cuyo valor es 1.

c) Crece en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$ y decrece en $(1, 3) \cup (3, +\infty)$.

Tiene un máximo en $x = 1$, cuyo valor es, aproximadamente, $-0{,}25$.

66. **Calcula los valores que se indican para la función $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$ y deduce toda la información que se pueda a partir de ellos.**

a) $f'(-1)$, $f'(-1{,}5)$, $f'(-0{,}5)$, $f(-1)$ b) $f'(0{,}5)$, $f(0{,}5)$, $f'(0{,}25)$, $f(1)$ c) $f(2)$, $f'(2)$, $f'(1{,}5)$, $f'(2{,}5)$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4$

a) $f'(-1) = -4 - 6 + 6 + 4 = 0$

$f'(-1{,}5) = -\frac{27}{2} - \frac{27}{2} + 9 + 4 = 13 - 27 = -14$

$f'(-0{,}5) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 3 + 4 = 7 - 2 = 5$

$f(-1) = 1 + 2 - 3 - 4 + 4 = 0$

La gráfica corta con el eje X en $x = -1$. Es un punto crítico, porque el valor de la derivada es 0.

A la izquierda la función decrece porque el valor de la derivada es negativo, y a la derecha crece porque es positivo.

Por tanto, (–1, 0) tiene un mínimo.

b) $f'(0{,}5) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 3 + 4 = 0$

$f(0{,}5) = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 2 + 4 = \frac{81}{16}$

$f'(0{,}25) = \frac{1}{16} - \frac{3}{8} - \frac{3}{2} + 4 = \frac{65}{16} - \frac{30}{16} = \frac{35}{16}$

$f(1) = 1 - 2 - 3 + 4 + 4 = 9 - 5 = 4$

Hay un punto crítico en $x = 0{,}5$ porque el valor de la derivada es 0. A la izquierda la función crece, porque el valor de la derivada es positivo, y a la derecha decrece, porque $\frac{81}{16} > 4$.

Por tanto, en $\left(0{,}5; \frac{81}{16}\right)$ tiene un mínimo.

c) $f(2) = 16 - 16 - 12 + 8 + 4 = 0$

$f'(2) = 32 - 24 - 12 + 4 = 0$

$f'(1{,}5) = \frac{27}{2} - \frac{27}{2} - 9 + 4 = -5$

$f'(2{,}5) = \frac{125}{2} - \frac{75}{2} - \frac{30}{2} + \frac{8}{2} = \frac{133 - 105}{2} = \frac{28}{2} = 14$

La gráfica corta con el eje X en $x = 2$. Es un punto crítico, porque el valor de la derivada es 0.

A la izquierda la función decrece, porque el valor de la derivada es negativo, y a la derecha crece, porque es positivo.

Por tanto, en (2, 0) tiene un mínimo.

67. Halla los máximos y los mínimos de estas funciones.

a) $f(x) = (x-1)^2 \cdot (x+3)^2$ b) $f(x) = (x-2)^2 \cdot (x-1)^2$ c) $f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1)^2$

a) $f'(x) = 4(x-1)(x+1)(x+3) \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 1,\ x = -1 \text{ y } x = -3$

$$f''(x) = 4(3x^2+6x-1) \rightarrow \begin{cases} f''(-1) = -16 < 0 \rightarrow x = -1 \text{ máximo} \\ f''(1) = 32 > 0 \rightarrow x = 1 \text{ mínimo} \\ f''(-3) = 32 > 0 \rightarrow x = -3 \text{ mínimo} \end{cases}$$

b) $f'(x) = 2(x-1)(x-2)(2x-3) \rightarrow f'(x) = 0 \leftrightarrow x = 1,\ x = 2 \text{ y } x = \frac{3}{2}$

$$f''(x) = 2(6x^2-18x+13) \rightarrow \begin{cases} f''(1) = 2 > 0 \rightarrow x = 1 \text{ mínimo} \\ f''\left(\frac{3}{2}\right) = -1 < 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ máximo} \\ f''(2) = 2 > 0 \rightarrow x = 2 \text{ mínimo} \end{cases}$$

c) $f'(x) = 2(x-1)(x+2)(2x+1) \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 1,\ x = -2 \text{ y } x = -\frac{1}{2}$

$$f''(x) = 6(2x^2+2x-1) \rightarrow \begin{cases} f''(-2) = 18 > 0 \rightarrow x = -2 \text{ mínimo} \\ f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -9 < 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ máximo} \\ f''(1) = 18 > 0 \rightarrow x = 1 \text{ mínimo} \end{cases}$$

68. Descompón el número 20 en dos sumandos tales que la suma de sus cuadrados sea mínima.

$$\begin{cases} 20 = x + y \\ x^2 + y^2 = f(x,y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 20 - x = y \\ x^2 + (20-x)^2 = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) = 2x^2 - 40x + 400 \\ f'(x) = 4x - 40 = 0 \rightarrow x = 10 \\ f''(x) = 4 > 0 \text{ siempre} \end{cases}$$

Como la segunda derivada es positiva siempre, se tiene que en $x = 10$ hay un mínimo.

$y = 20 - x \rightarrow y = 10 \rightarrow$ La descomposición pedida es $20 = 10 + 10$.

69. Encuentra el número positivo que hace mínima la suma de él mismo y el cuádruple de su inverso.

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + \frac{4}{x} = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \rightarrow x = 2 \\ f''(x) = \frac{8}{x^3} \rightarrow f''(2) = 1 > 0 \rightarrow \text{En } x = 2 \text{ hay un mínimo.} \end{cases}$$

Se descarta $x = -2$ porque el número buscado tiene que ser positivo.

70. De todos los triángulos rectángulos en los que los catetos suman 10, ¿cuál tiene mayor área?

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ \frac{xy}{2} = f(x,y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10 - x = y \\ \frac{x(10-x)}{2} = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \rightarrow 5 - x = 0 \rightarrow x = 5 \\ f''(x) = -1 < 0 \text{ siempre} \rightarrow \text{En } x = 5 \text{ hay un máximo.} \end{cases}$$

$y = 10 - x \rightarrow y = 5 \rightarrow$ El triángulo con mayor área es el que tiene por catetos $x = 5$ e $y = 5$.

71. **De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10, encuentra el de mayor área.**

$$\begin{cases} 10 = x^2 + y^2 \\ \dfrac{xy}{2} = f(x,y) \end{cases} \to \begin{cases} 10 - x^2 = y^2 \\ \dfrac{x(10-x^2)}{2} = f(x) \end{cases} \to \begin{cases} f'(x) = 0 \to 10 - 3x^2 = 0 \to x = \sqrt{\dfrac{10}{3}} \\ f''(x) = -6x \end{cases}$$

$f''\left(\sqrt{\dfrac{10}{3}}\right) = -6 \cdot \sqrt{\dfrac{10}{3}} < 0 \to x = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$ es un máximo.

$y^2 = 10 - x^2 \to y^2 = 10 - \dfrac{10}{3} = \dfrac{20}{3} \to y = \sqrt{\dfrac{20}{3}} \to$ El triángulo con mayor área tiene por catetos $x = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$ e $y = \sqrt{\dfrac{20}{3}}$.

72. **Al construir el marco de una valla publicitaria rectangular de 12 metros cuadrados, el metro lineal de tramo horizontal cuesta 1,50 €, mientras que el metro lineal de tramo vertical cuesta 2 €.**

a) Determina las dimensiones de la valla para que el coste sea mínimo.

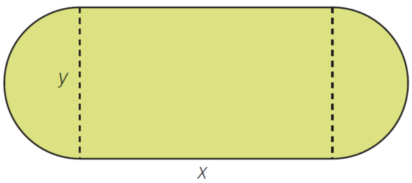
b) ¿Cuánto cuesta el marco?

a) $$\begin{cases} xy = 12 \\ \dfrac{3}{2}x + 2y = f(x,y) \end{cases} \to \begin{cases} y = \dfrac{12}{x} \\ \dfrac{3x}{2} + \dfrac{24}{x} = f(x) \end{cases} \to \begin{cases} f'(x) = \dfrac{3x^2 - 48}{2x^2} = 0 \to x = 4 \\ f''(x) = \dfrac{48}{x^3} \to f''(4) = \dfrac{48}{64} > 0 \end{cases}$$

En $x = 4$ hay un mínimo. $y = \dfrac{12}{x} \to y = 4 \to$ Las dimensiones de la valla son 4 m de largo y 3 m de ancho.

b) El coste del marco será $1{,}5 + 2 \cdot 3 = 12$ €.

73. **Se dispone de 200 m de tela metálica y se desea vallar un recinto formado por un rectángulo y dos semicírculos, como indica la figura.**



Determina las dimensiones de *x* e *y* para que el área encerrada sea máxima.

El perímetro del recinto viene dado por la fórmula $\pi y + 2x = 200$, y el área por $\dfrac{\pi y^2}{4} + xy$, que es lo que se quiere maximizar, por tanto:

$$\begin{cases} \pi y + 2x = 200 \\ \dfrac{\pi y^2}{4} + xy = f(x,y) \end{cases} \to \begin{cases} x = 100 - \dfrac{\pi y}{2} \\ \dfrac{\pi y^2}{4} + y\left(100 - \dfrac{\pi y}{2}\right) = f(y) \end{cases} \to \begin{cases} f'(y) = 100 - \dfrac{\pi y}{2} = 0 \to y = \dfrac{200}{\pi} \\ f''(y) = \dfrac{-\pi}{2} < 0 \text{ siempre} \end{cases} \to y = \dfrac{200}{\pi}, x = 0$$

74. **Una empresa decide lanzar una campaña de propaganda de uno de sus productos editando un texto que ocupa 18 cm² en hojas rectangulares impresas a una cara, con márgenes superior e inferior de 2 cm y laterales de 1 cm.**

Calcula las dimensiones de la hoja para que el consumo de papel sea mínimo.

$$\begin{cases} (x-2)(y-4) = 18 \\ xy = f(x,y) \end{cases} \to \begin{cases} y = \dfrac{10 + 4x}{x - 2} \\ x\left(\dfrac{10 + 4x}{x - 2}\right) = f(x) \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \to \frac{4\left(x^2-4x-5\right)}{(x-2)^2}=0 \to \begin{cases} x=-1 \to \text{Se descarta.} \\ x=5 \end{cases}$$

$$f''(x)=\frac{72}{(x-2)^3} \to f''(5)=\frac{8}{3}>0 \to x=5 \text{ es un mínimo.}$$

$y=\dfrac{10+4x}{x-2} \to y=10 \to$ Las dimensiones de la hoja son $x=5$, $y=10$.

75. Se desea encerrar la máxima área dentro de una valla rectangular de 500 m de perímetro.

a) ¿Cuáles son las longitudes de ese rectángulo?

b) ¿Cuáles serían las dimensiones del rectángulo si uno de sus lados limita con un río y no es preciso cerrarlo con la valla?

a) $\begin{cases} 2x+2y=500 \\ xy=f(x,y) \end{cases} \to \begin{cases} y=250-x \\ x(250-x)=f(x) \end{cases}$

$f'(x)=250-2x \to f'(x)=0 \to x=125$

$f''(x)=-2<0$ siempre $\to x=125$ es un máximo.

$y=250-x \to y=125 \to$ Las dimensiones del rectángulo 125×125 m, con lo que se obtiene un cuadrado.

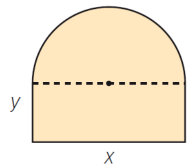
b) $\begin{cases} 2x+y=500 \\ xy=f(x,y) \end{cases} \to \begin{cases} y=500-2x \\ x(500-2x)=f(x) \end{cases}$

$f'(x)=500-4x \to f'(x)=0 \to x=125$

$f''(x)=-4<0$ siempre $\to x=125$ es máximo.

$y=250-2x \to y=250 \to$ Las dimensiones del rectángulo buscado son 125×250 m.

76. El perímetro de la figura es 5 m. Calcula las medidas *x* e *y* para que el área encerrada sea máxima.



El perímetro de la figura es $2y+\left(1+\frac{\pi}{2}\right)x=5$ y su área es $xy+\dfrac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}=xy+\dfrac{\pi x^2}{8}$. Por tanto, se tiene que resolver el siguiente problema de maximización:

$$\begin{cases} 2y+\left(1+\frac{\pi}{2}\right)x=5 \\ xy+\frac{\pi x^2}{8}=f(x,y) \end{cases} \to \begin{cases} y=\frac{5}{2}-\frac{x}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \\ f(x)=\frac{5x}{2}-\left(\frac{4+\pi}{8}\right)x^2 \end{cases}$$

$$f'(x)=\frac{5}{2}-2x\left(\frac{4+\pi}{8}\right)=0 \to x=\frac{10}{4+\pi}$$

$$f''(x)=-2\left(\frac{4+\pi}{8}\right)<0 \text{ siempre}$$

Por tanto, para $x=\dfrac{10}{4+\pi}$ e $y=\dfrac{5}{4+\pi}$ se tiene que el área es máxima.

77. Halla los puntos de la curva $y^2 = 2x$ cuya distancia al punto (6, 0) es mínima.

La distancia del punto (6, 0) a un punto arbitrario de la curva $(x, \pm\sqrt{2x})$ viene dado por la fórmula

$d = \sqrt{(x-6)^2 + (\pm\sqrt{2x})^2}$, donde d representa el módulo del vector que tiene por extremos ambos puntos.

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 36} \\ f'(x) = \dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+36}} \\ f''(x) = \dfrac{11}{\sqrt{(x^2-10x+36)^3}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+36}} = 0 \rightarrow x = 5 \\ f''(x) = \dfrac{11}{\sqrt{(x^2-10x+36)^3}} > 0 \text{ para } x = 5 \rightarrow x = 5 \text{ es un mínimo.} \end{cases}$$

Los puntos pedidos son los de coordenadas $x = 5, y = \pm\sqrt{10}$.

78. Encuentra, entre todas las rectas que pasan por el punto (2, 3), la que determina el triángulo de área mínima limitado por ella y la parte positiva de los ejes *X* e *Y*.

La recta, al pasar por el punto (2, 3) tendrá ecuación $y = mx + (3-2m)$, donde *m* es la pendiente. Eso quiere decir que el triángulo buscado tendrá catetos de distancia los cortes de la recta con los ejes.

Por otro lado, se quiere maximizar el área, que vendrá dada por la fórmula $\dfrac{xy}{2}$, así que se obtiene el siguiente problema de maximización:

$$\begin{cases} y = mx + (3-2m) \\ \dfrac{xy}{2} = f(x,y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2m-3}{m} \\ y = 3-2m \\ f(m) = \dfrac{-4m^2+12m-9}{2m} \end{cases}$$

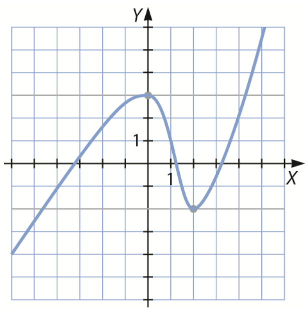
$$\begin{cases} f'(m) = \dfrac{-8m^2+18}{4m^2} \\ \dfrac{-8m^2+18}{4m^2} = 0 \rightarrow m = \pm\dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f''(m) = \dfrac{-4m^2+4m-9}{m^3} \\ f''\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0 \rightarrow m = \dfrac{3}{2} \text{ se descarta.} \\ f''\left(\dfrac{-3}{2}\right) > 0 \rightarrow m = \dfrac{-3}{2} \text{ proporciona un área mínima.} \end{cases}$$

Por lo que la recta buscada será $y = -\dfrac{3}{2}x + 6$.

79. Representa gráficamente una función que cumpla las siguientes condiciones.

- **Su dominio es $\mathbb{R}$ y no tiene asíntotas.**
- **Crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decrece en (0, 2).**
- **En los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 2$ la tangente a la curva es horizontal.**

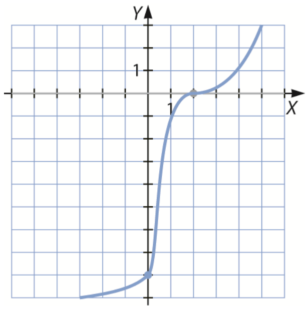
Respuesta abierta. Por ejemplo:



80. **Representa gráficamente una función que cumpla las siguientes características.**

- **Su dominio es $\mathbb{R}$.**
- **Siempre crece y no tiene asíntotas.**
- **Corta al eje Y en $(0, -8)$. Además, en el punto $(2, 0)$ tiene tangente horizontal y $f''(2) = 0$.**

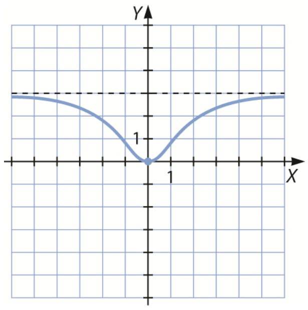
Respuesta abierta. Por ejemplo:



81. **Representa gráficamente una función que cumpla las siguientes características.**

- **Su dominio es $\mathbb{R}$.**
- **Tiene una asíntota horizontal en $y = 3$.**
- **Corta únicamente a los ejes en $(0, 0)$, punto en el que tiene un mínimo.**
- **Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.**

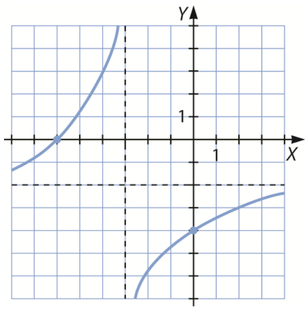
Respuesta abierta. Por ejemplo:



82. **Representa gráficamente una función que cumpla las siguientes características.**

- **Su dominio es $\mathbb{R} - \{-3\}$.**
- **Tiene dos asíntotas, una vertical en $x = -3$ y otra horizontal en $y = -1$.**
- **Siempre crece.**
- **Corta a los ejes en $(-6, 0)$ y $(0, -4)$.**

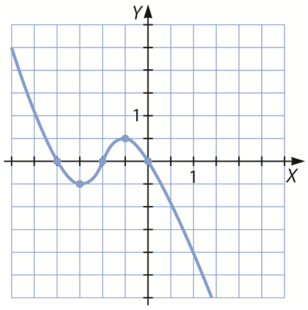
Respuesta abierta. Por ejemplo:



83. Representa gráficamente una función que cumpla las siguientes características.

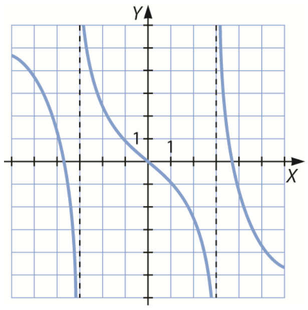
- **Su dominio es $\mathbb{R}$.**
- **Corta a los ejes en $(-1, 0)$, $(-2, 0)$ y $(0, 0)$.**
- **Crece en $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ y decrece en el resto.**
- **$\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es un máximo y $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ un mínimo.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



84. Representa una función con estas características.

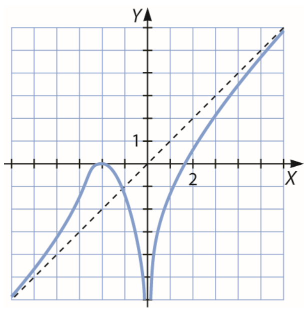
- **Su dominio es $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$.**
- **Tiene asíntotas verticales en $x = -3$ y $x = 3$.**
- **$f'(x) < 0$ en todo el dominio.**



85. Representa gráficamente una función que tenga las siguientes características.

- **Su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.**
- **Tiene una asíntota vertical en $x = 0$.**
- **Tiene una asíntota oblicua en $y = x$.**
- **$f'(x) > 0$ en los intervalos $(-\infty, -2)$ y en $(0, +\infty)$, $f'(x) < 0$ en el intervalo $(-2, 0)$ y $f'(-2) = 0$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



86. **Sea la función:**

$$f(x) = 4x^3 + 15x^2 - 18x + 10$$

a) Determina los máximos y mínimos de la función.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Haz un esbozo de la gráfica de la función.

a) $f'(x) = 12x^2 + 30x - 18$

$$12x^2 + 30x - 18 = 0 \rightarrow 2x^2 + 5x^2 - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -3 \end{cases}$$

$f''(x) = 24x + 30$

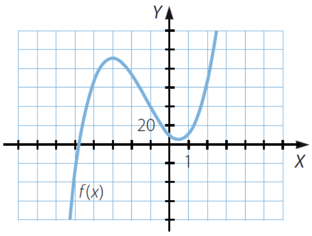
$f''\left(\dfrac{1}{2}\right) = 42 > 0 \rightarrow$ En $x = \dfrac{1}{2}$ tiene un mínimo.

$f''(-3) = -42 < 0 \rightarrow$ En $x = -3$ tiene un máximo.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

c)



87. **Dada la función $f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x + 29$, resuelve.**

a) Determina su dominio.

b) Halla sus asíntotas.

c) ¿Tiene puntos de corte con los ejes? ¿Cuáles son?

d) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e) Halla los máximos y mínimos.

f) Representa la función.

a) Dom $f = \mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

La función no tiene asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

La función no tiene asíntota oblicua.

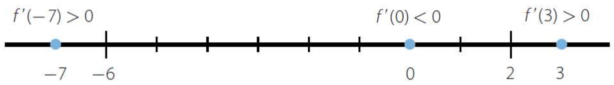
c) Si $x = 0 \rightarrow y = 29$

Si $y = 0 \rightarrow x^3 + 6x^2 - 36x + 29 = 0 \rightarrow (x-1)(x^2 + 7x - 29) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{165}}{2} \end{cases}$$

d) $f'(x) = 3x^2 + 12x - 36$

$3x^2 + 12x - 36 = 0 \rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \end{cases}$



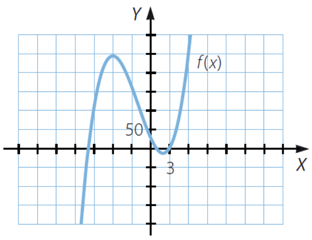
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$.

$f(x)$ es decreciente en $(-6, 2)$.

e) Mínimo: $(2, -11)$

Máximo: $(-6, 245)$

f)



88. **Representa gráficamente las siguientes funciones haciendo un estudio sobre su crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, y concavidad y convexidad.**

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - 1$

b) $f(x) = x^3 - x$

c) $f(x) = x^3 - x^2$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2$

e) $f(x) = x^3 - 3x^2$

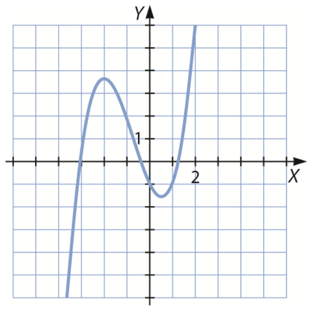
a) $f'(x) = 2x^2 + 3x - 2 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ y $x = -2$

$f(x)$ crece en $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

$f(x)$ tiene un mínimo en $x = \frac{1}{2}$ y un máximo en $x = -2$.

$f''(x) = 4x + 3 \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow x = -\frac{4}{3}$

$f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$ y cóncava en $\left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$.



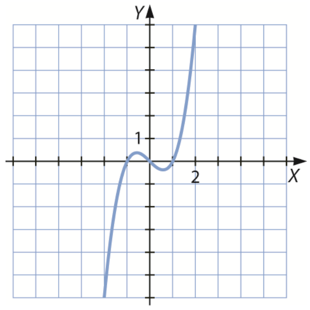
b) $f'(x) = 3x^2 - 1 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(x)$ crece en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

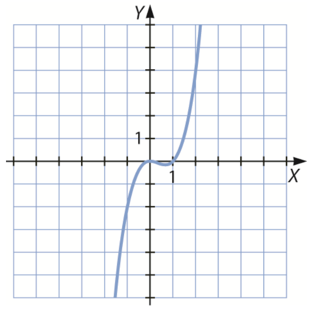
$f(x)$ tiene un mínimo en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y un máximo en $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$f''(x) = 6x \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow x = 0$

$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$.



c) $f'(x) = 3x^2 - 2x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$



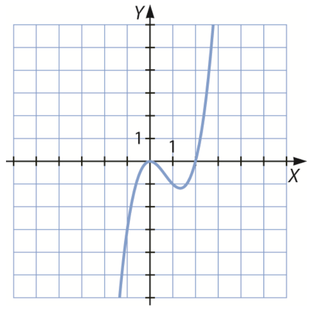
$f(x)$ crece en $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(0, \frac{2}{3}\right)$.

$f(x)$ tiene un mínimo en $x = \frac{2}{3}$ y un máximo en $x = 0$.

$f''(x) = 6x - 2 \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

$f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ y cóncava en $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

d) $f'(x) = 3x^2 - 4x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = \frac{4}{3}$



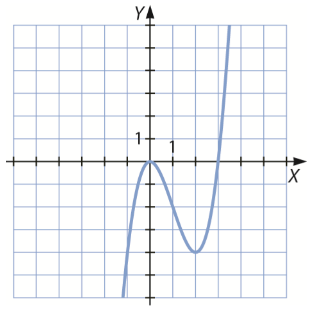
$f(x)$ crece en $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

$f(x)$ tiene un mínimo en $x = \frac{4}{3}$ y un máximo en $x = 0$.

$f''(x) = 6x - 4 \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}$

$f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ y cóncava en $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

e) $f'(x) = 3x^2 - 6x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = 2$



$f(x)$ crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(0, 2)$.

$f(x)$ tiene un mínimo en $x = 2$ y un máximo en $x = 0$.

$f''(x) = 6x - 6 \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow x = 1$.

$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 1)$ y cóncava en $(1, +\infty)$.

89. **Representa gráficamente las funciones haciendo un estudio sobre su crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, y concavidad y convexidad.**

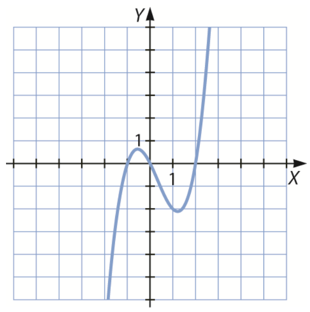
a) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

a) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 2 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$

$f(x)$ crece en $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)$.

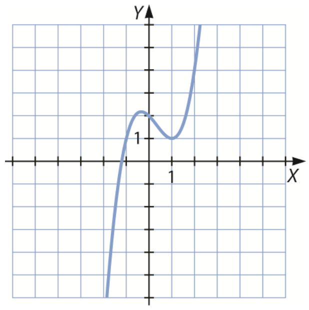


$f(x)$ tiene un mínimo en $x = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$ y un máximo en $x = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$.

$f''(x) = 6x - 2 \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

$f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ y cóncava en $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \to f'(x) = 0 \to x = -\frac{1}{3}$ y $x = 1$



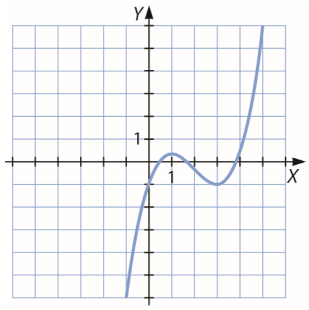
$f(x)$ crece en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$.

$f(x)$ tiene un mínimo en $x = 1$ y un máximo en $x = -\frac{1}{3}$.

$f''(x) = 6x - 2 \to f''(x) = 0 \to x = \frac{1}{3}$

$f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ y cóncava en $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

c) $f'(x) = x^2 - 4x + 3 \to f'(x) = 0 \to x = 1$ y $x = 3$



$f(x)$ crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$.

$f(x)$ tiene un mínimo en $x = 3$ y un máximo en $x = 1$.

$f''(x) = 2x - 4 \to f''(x) = 0 \to x = 2$.

$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 2)$ y cóncava en $(2, +\infty)$.

90. **Estudia y representa las funciones polinómicas.**

a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 10$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$

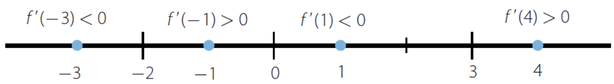
c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 48x^2 + 144x + 212$

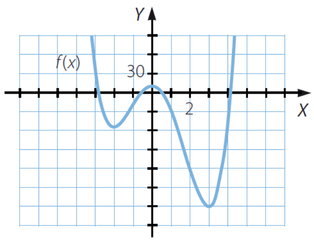
a) Dom $f = \mathbb{R}$

La función no tiene asíntotas.

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 72x$

$12x^3 - 12x^2 - 72x = 0 \to x(x^2 - x - 6) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$





$f(x)$ es creciente en $(-2, 0) \cup (3, +\infty)$ y es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (0, 3)$.

Mínimos: $(-2, -54)$ y $(3, -179)$

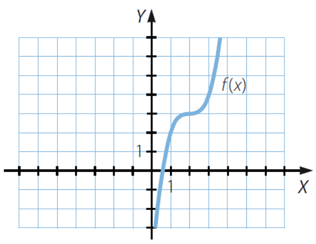
Máximo: $(0, 10)$

b) Dom $f = \mathbb{R}$

La función no tiene asíntotas.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$3x^2 - 12x + 12 = 0 \to x^2 - 4x + 4 = 0 \to (x - 2)^2 = 0 \to x = 2$



$f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$.

$f'(2) = 0 \to$ En $x = 2$ no tiene un máximo ni un mínimo.

$f''(x) = 6x - 12$.

$f''(x) > 0$ si $x > 2 \to f(x)$ es cóncava en $(2, +\infty)$.

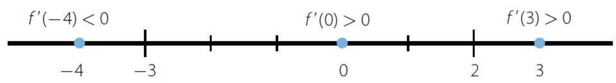
$f''(x) < 0$ si $x < 2 \to f(x)$ es convexa en $(-\infty, 2)$.

c) Dom $f = \mathbb{R}$

La función no tiene asíntotas.

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 96x + 144$

$12x^3 - 12x^2 - 96x + 144 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$



$f(x)$ es creciente en $(-3, 2) \cup (2, +\infty)$ y es decreciente en $(-\infty, -3)$.

Mínimo: $(-3, -301)$

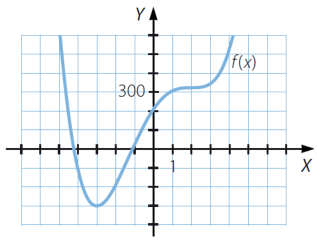
$f''(x) = 36x^2 - 24x - 96$

$36x^2 - 24x - 96 = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

$f''(x) > 0$ si $x > 2 \rightarrow f(x)$ es cóncava en $(2, +\infty)$.

$f''(x) < 0$ si $-\dfrac{4}{3} < x < 2 \rightarrow f(x)$ es convexa en $\left(-\dfrac{4}{3}, 2\right)$.

$f''(x) < 0$ si $x < -\dfrac{4}{3} \rightarrow f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, -\dfrac{4}{3}\right)$.



91. **Dada la función $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 4}$, resuelve.**

a) Determina su dominio.
b) Halla sus asíntotas.
c) Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Calcula los máximos y los mínimos.
e) Estudia la concavidad y la convexidad.
f) Representa la función.

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-4\}$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{3x - 2}{x + 4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -4^+} \dfrac{3x - 2}{x + 4} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = -4$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 2}{x + 4} = 3 \rightarrow y = 3$ es una asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

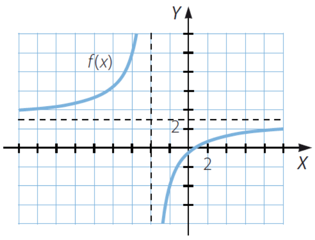
c) $f'(x) = \dfrac{3(x + 4) - (3x - 2)}{(x + 4)^2} = \dfrac{14}{(x + 4)^2}$

$f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$.

d) La función no tiene máximos ni mínimos.

e) $f''(x) = -\dfrac{14 \cdot 2(x + 4)}{(x + 4)^4} = -\dfrac{28}{(x + 4)^3} < 0 \rightarrow$ La función es siempre convexa.

f)



92. **Halla los máximos y los mínimos de la función.**

$$f(x) = \frac{x}{x-4}$$

Determina las ecuaciones de sus asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas. Haz también un esbozo de la gráfica de la función.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-4) - x}{(x-4)^2} = \frac{-4}{(x-4)^2}$$

No hay máximos ni mínimos, $f'(x) < 0 \rightarrow$ La función es decreciente.

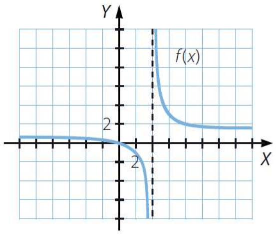
Dom $f = \mathbb{R} - \{4\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = 4 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$ es una asíntota horizontal.

Si $x = 1\,000 \rightarrow f(x) > 1$
Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1\,000 \rightarrow f(x) < 1$
Cuando x tiende a $-\infty$, la función está por debajo de la asíntota.

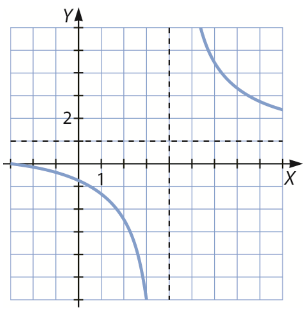


93. **Calcula las asíntotas de estas funciones y haz su representación gráfica.**

a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-4}$ b) $f(x) = \dfrac{6x}{x-4}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

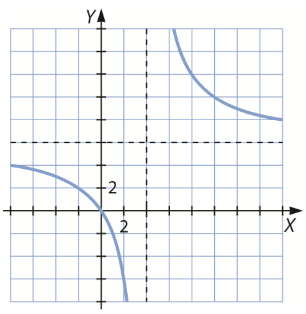
a) Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+3}{x-4} = 1 \rightarrow y = 1$

Asíntota vertical: $x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$



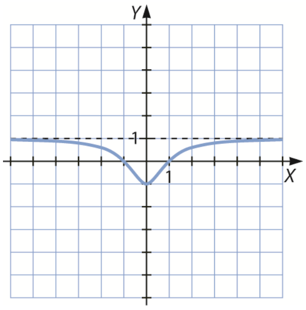
b) Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x}{x-4} = 6 \rightarrow y = 6$

Asíntota vertical: $x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$



c) Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 \to y = 1$

Asíntota vertical: $x^2 + 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \to$ No existe.



94. **Sea la función:**

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

a) Encuentra los máximos y los mínimos de la función.

b) Determina las ecuaciones de sus asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas.

c) Construye un esbozo de la gráfica de la función.

a) $f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$

$\frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2} = 0 \to 3x^2 - x^4 = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

$f''(x) = \frac{(6x - 4x^3)(1-x^2)^2 - (3x^2 - x^4) \cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{6x + 2x^3}{(1-x^2)^3}$

$f''\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0 \to$ En $x = -\sqrt{3}$ tiene un mínimo.

$f''(0) = 0 \to$ En $x = 0$ no tiene un máximo ni un mínimo.

$f''(\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0 \to$ En $x = \sqrt{3}$ tiene un máximo.

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \to x = -1$ es una asíntota vertical.

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \to x = 1$ es una asíntota vertical.

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \to$ No hay asíntota horizontal.

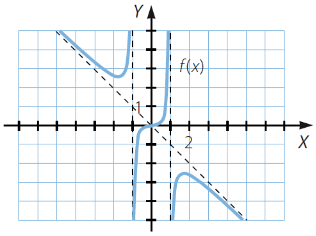
$$\left.\begin{array}{l} m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x - x^3} = -1 \\ n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + x - x^3}{1-x^2} = 0 \end{array}\right\}$$

Asíntota oblicua: $y = -x$

Si $x = 1\,000 \to f(x) - (-x) < 0 \to$ Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por debajo de la asíntota.

Si $x = -1\,000 \to f(x) - (-x) > 0 \to$ Cuando x tiende a $-\infty$, la función está por encima de la asíntota.

c)



95. **Estudia la posición de la gráfica de estas funciones respecto de sus asíntotas y haz su representación gráfica.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

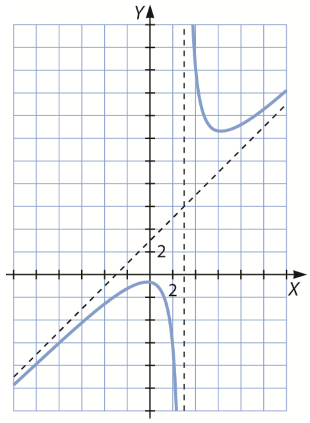
a) Tiene una asíntota vertical en $x = 3$ y no tiene asíntota horizontal.

Tiene una asíntota oblicua en $y = x + 3$.

En $x < 3$: $\dfrac{x^2+2}{x-3} < x+3 \rightarrow$ La gráfica está por debajo de la asíntota.

En $x > 3$: $\dfrac{x^2+2}{x-3} > x+3 \rightarrow$ La gráfica está por encima de la asíntota.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2+2}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2+2}{x-3} = +\infty \end{cases}$$



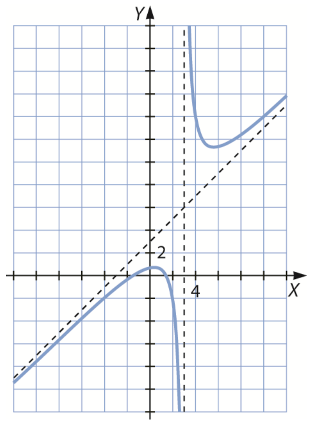
b) Tiene una asíntota vertical en $x = 3$ y no tiene asíntota horizontal.

Tiene una asíntota oblicua en $y = x + 3$.

En $x < 3$: $\dfrac{x^2-2}{x-3} < x+3 \rightarrow$ La gráfica está por debajo de la asíntota.

En $x > 3$: $\dfrac{x^2-2}{x-3} > x+3 \rightarrow$ La gráfica está por encima de la asíntota.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-2}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-2}{x-3} = +\infty \end{cases}$$

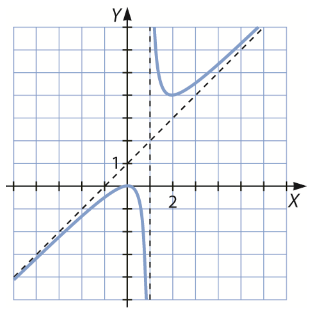


c) Tiene asíntota vertical en $x = 1$ y no tiene asíntota horizontal. Tiene asíntota oblicua en $y = x + 1$.

En $x < 1$: $\dfrac{x^2}{x-1} < x+1 \rightarrow$ La gráfica está por debajo de la asíntota.

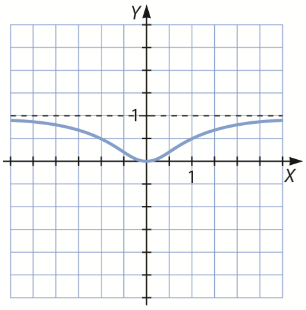
En $x > 1$: $\dfrac{x^2}{x-1} > x+1 \rightarrow$ La gráfica está por encima de la asíntota.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty \end{cases}$$



d) Tiene asíntota horizontal en $y = 1$ y no tiene asíntota vertical ni oblicua.

$\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \dfrac{x^2}{x^2+1} < 1 \rightarrow$ La gráfica está por debajo de la asíntota.



96. Estudia y representa estas funciones racionales.

a) $f(x) = \dfrac{5x+1}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-4}{x^2+x-6}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{5x+1}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{5x+1}{x-2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5x+1}{x-2} = 5 \rightarrow y = 5 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

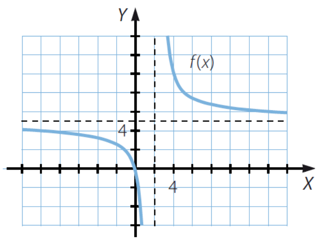
Punto de corte con el eje X: $\left(-\dfrac{1}{5}, 0\right)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{5(x-2)-(5x+1)}{(x-2)^2} = \frac{-11}{(x-2)^2}$$

$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} = +\infty \end{array}\right\} \to x = 3 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-2x+1}{x-3} = +\infty \to \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

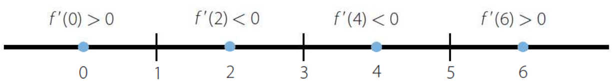
$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x} = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x-3} - x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+1}{x-3} = 1 \end{array}\right\} \to \text{Asíntota oblicua: } y = x+1$$

Punto de corte con el eje X: $(1, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\dfrac{1}{3}\right)$

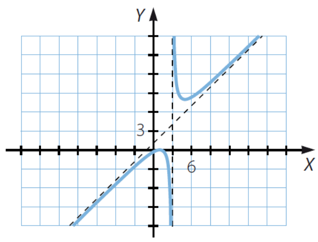
$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-3)-(x^2-2x+1)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \to \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ y es decreciente en $(1, 3) \cup (3, 5)$.

Máximo: $(1, 0)$ Mínimo: $(5, 8)$



c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2}{2-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2}{2-x} = -\infty \end{array}\right\} \to x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

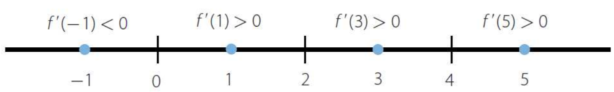
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2-x} = +\infty \to \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{2x-x^2} = -1 \\ n = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{2-x} + x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{2-x} = -2 \end{array}\right\} \to \text{Asíntota oblicua: } y = -x-2$$

Punto de corte con los ejes: $(0, 0)$

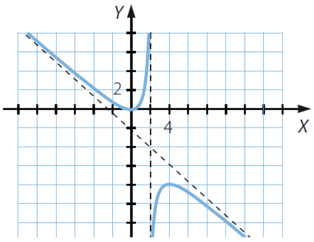
$$f'(x) = \frac{2x(2-x)+x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x-x^2}{(2-x)^2}$$

$$4x - x^2 = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y es creciente en $(0, 2) \cup (2, 4)$.

Máximo: $(4, -8)$ Mínimo: $(0, 0)$



d) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 6} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 6} = -\infty \end{array}\right\} \to x = -3 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 6} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 6} = +\infty \end{array}\right\} \to x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 2 - 4}{x^2 + x - 6} = 1 \to y = 1 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

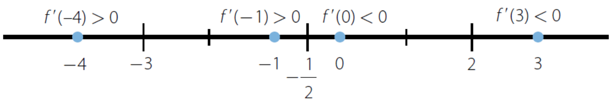
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Puntos de corte con el eje X: $(1, 0)$ y $(-2, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(-3, \dfrac{1}{2}\right)$

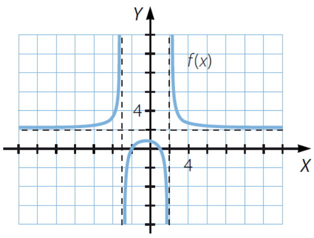
$$f'(x) = \frac{-16x - 8}{(x^2 + x - 6)^2}$$

$$-16x - 8 = 0 \to x = -\frac{1}{2}$$



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -3) \cup \left(-3, \dfrac{1}{2}\right)$ y es decreciente en $\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right) \cup (2, +\infty)$.

Máximo: $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{18}{25}\right)$



97. **Representa estas funciones racionales, analizando sus características.**

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x + 5}{x^2 - 3x - 4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 2}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + x - 6}$

f) $f(x) = \dfrac{x - 3}{(x + 1)(x - 1)}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4} = +\infty\end{array}\right\} \to x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4} = +\infty\end{array}\right\} \to x = 4 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 3x - 4} = 0 \to y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

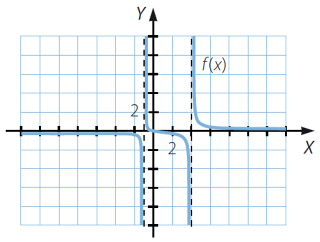
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con los ejes: (0, 0)

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x - 4 - x(2x - 3)}{(x^2 - 3x - 4)^2} = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 3x - 4)^2}$$

$f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} = +\infty\end{array}\right\} \to x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} = 1 \to y = 1 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con el eje Y: (3, 0)

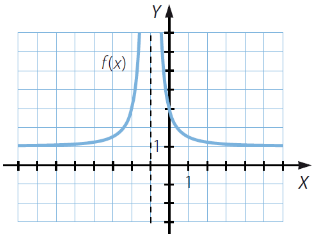
$$f'(x) = \frac{(2x + 2)(x^2 + 2x + 1) - (x^2 + 2x + 3)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{-4x - 4}{(x^2 + 2x + 1)^2}$$

$-4x - 4 = 0 \to x = -1 \notin$ Dom f

$f'(x) > 0$ si $x < -1 \rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$.

$f'(x) < 0$ si $x > -1 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-1, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x+5}{x^2-3x-4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x+5}{x^2-3x-4} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x+5}{x^2-3x-4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x+5}{x^2-3x-4} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = 4 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+5}{x^2-3x-4} = 0 \rightarrow y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

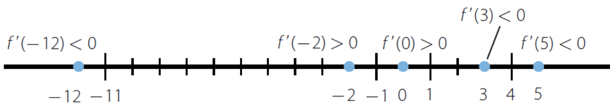
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con el eje X: $(-5, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\dfrac{5}{4}\right)$

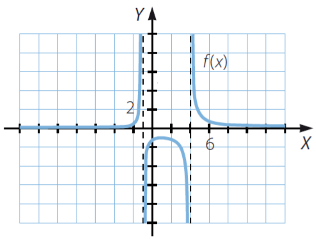
$$f'(x) = \frac{x^2-3x-4-(x+5)(2x-3)}{(x^2-3x-4)^2} = \frac{-x^2-10x+11}{(x^2-3x-4)^2}$$

$$\frac{-x^2-10x+11}{(x^2-3x-4)^2} = 0 \rightarrow -x^2-10x+11 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ x = 1 \end{cases}$$



$f(x)$ es creciente en $(-11, -1) \cup (-1, 1)$ y es decreciente en $(-\infty, -11) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$.

Mínimo: $\left(-11, -\dfrac{1}{25}\right)$ Máximo: $(1, -1)$



d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+4x+2}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+4x+2}{x^2} = +\infty\end{array}\right\} \to x = 0 \text{ es una asíntota vertical.}$$

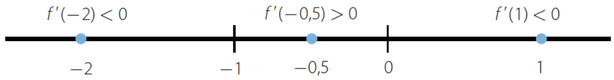
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+4x+2}{x^2} = 1 \to y = 1 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Puntos de corte con el eje X: $\left(-\sqrt{2}-2, 0\right)$ y $\left(\sqrt{2}-2, 0\right)$

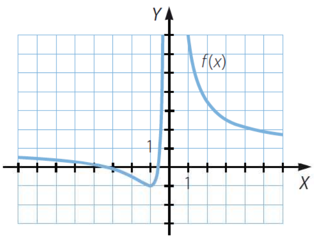
$$f'(x) = \frac{(2x+4)\cdot x^2 - (x^2+4x+2)\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-4x-4}{x^3}$$

$-4x - 4 = 0 \to x = -1$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ y es creciente en $(-1, 0)$.

Mínimo: $(-1, 1)$



e) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{2x}{x^2+x-6} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{2x}{x^2+x-6} = +\infty\end{array}\right\} \to x = -3 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x}{x^2+x-6} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x}{x^2+x-6} = +\infty\end{array}\right\} \to x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x^2+x-6} = 0 \to y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

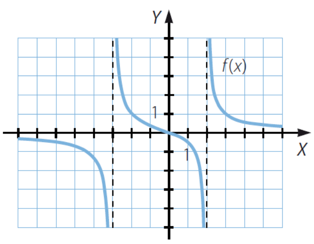
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con los ejes: $(0, 0)$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+x-6) - 2x(2x+1)}{(x^2+x-6)^2} = \frac{-2x^2-12}{(x^2+x-6)^2}$$

$f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



f) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)} = +\infty\end{array}\right\} \to x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)} = -\infty\end{array}\right\} \to x = 1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} = 0 \to y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

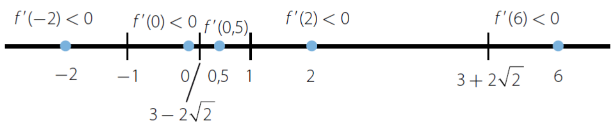
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con el eje X: (3, 0)

Punto de corte con el eje Y: (0, 3)

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - (x-3)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2+6x-1}{(x^2-1)^2}$$

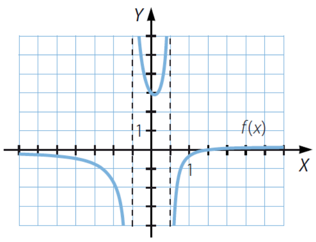
$$\frac{-x^2+6x-1}{(x^2-1)^2} = 0 \to -x^2+6x-1 = 0 \Rightarrow x = 3 \pm 2\sqrt{2}$$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup \left(-1, 3-2\sqrt{2}\right) \cup \left(3+2\sqrt{2}, +\infty\right)$

y es creciente en $\left(3-2\sqrt{2}, 1\right) \cup \left(1, 3+2\sqrt{2}\right)$.

Máximo: $\left(3+2\sqrt{2}, \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)$ Mínimo: $\left(3-2\sqrt{2}, \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)$



98. Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$

a) El dominio vendrá dado por todos los números que no anulen el denominador. Por tanto, $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

No tiene puntos de corte con el eje X, ya que $f(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Punto de corte con el eje Y:

$x = 0 \to f(0) = -1 \to$ El punto de corte es (0, −1).

No tiene asíntotas horizontales.

Tiene asíntotas verticales en $x = \pm 1$.

$$f'(x) = \frac{2x(x^4 - 2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\frac{2x(x^4 - 2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \text{ en } \left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 0) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \\ f'(x) < 0 \text{ en } \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup (0, 1) \cup \left(1, +\sqrt{3}\right) \end{cases}$$

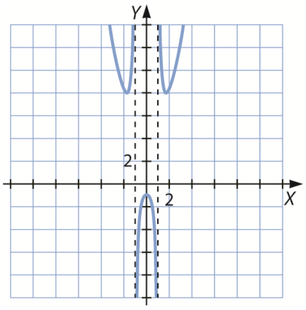
La función decrece en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup (0, 1) \cup \left(1, +\sqrt{3}\right)$ y crece en $\left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 0) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

Se calcula la segunda derivada $f''(x) = \dfrac{2(x^6 - 3x^4 + 15x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^3}$ y se evalúa en los puntos críticos:

$f''\left(-\sqrt{3}\right) = 12 > 0 \rightarrow x = -\sqrt{3}$ mínimo

$f''(0) = -6 \rightarrow x = 0$ máximo

$f''\left(\sqrt{3}\right) = 12 > 0 \rightarrow x = \sqrt{3}$ mínimo



b) El dominio vendrá dado por todos los números que no anulen el denominador. Por tanto, $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Punto de corte con el eje *X:*

$f(x) = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow$ El punto de corte es (2, 0).

Punto de corte con el eje *Y*:

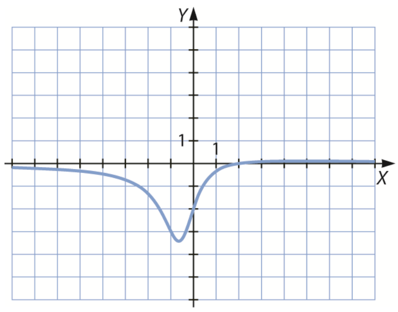
$x = 0 \rightarrow f(0) = -2 \rightarrow$ El punto de corte es (0, −2).

No tiene asíntotas verticales.

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$.

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4x + 3}{(x^2 + x + 1)^2} \rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 \text{ en } x \in \left(-\infty, 2 - \sqrt{7}\right) \cup \left(2 + \sqrt{7}, +\infty\right) \rightarrow f(x) \text{ crece.} \\ f'(x) > 0 \text{ en } x \in \left(2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7}\right) \rightarrow f(x) \text{ decrece.} \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^3 - 6x^2 + 9x - 1)}{(x^2 + x + 1)^3} \rightarrow \begin{cases} f''(2 - \sqrt{7}) > 0 \rightarrow x = 2 - \sqrt{7} \text{ es mínimo.} \\ f''(2 + \sqrt{7}) < 0 \rightarrow x = 2 + \sqrt{7} \text{ es máximo.} \end{cases}$$



c) El dominio, vendrá dado por todos los números que no anulen el denominador. Por tanto, $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Punto de corte con el eje *X*:

$f(x) = 0 \to x = 1 \to$ El punto de corte es (1, 0).

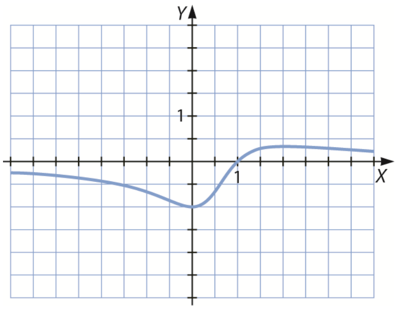
Punto de corte con el eje *Y*:

$x = 0 \to f(0) = -1 \to$ El punto de corte es (0, –1).

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$.

$$f'(x) = -\frac{x(x-2)}{(x^2 - x + 1)^2} \to \begin{cases} f'(x) < 0 \text{ en } x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \to f(x) \text{ crece.} \\ f'(x) > 0 \text{ en } x \in (0, 2) \to f(x) \text{ decrece.} \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^3 - 3x^2 + 1)}{(x^2 - x + 1)^3} \to \begin{cases} f''(0) = 2 > 0 \to x = 0 \text{ mínimo} \\ f''(2) = \dfrac{-2}{9} < 0 \to x = 2 \text{ máximo} \end{cases}$$



d) El dominio, dado por todos los números que no anulen el denominador. Por tanto, $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

No tiene puntos de corte con el eje *X*, ya que $f(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Punto de corte con el eje *Y*:

$x = 0 \to f(0) = 1 \to$ El punto de corte es (0, 1).

Tiene asíntota vertical en $x = -1$.

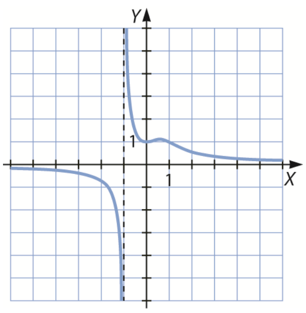
Tiene asíntota horizontal en $y = 0$.

$$f'(x) = -\frac{x(x^3 + 3x^2 - 2)}{(x^3 + 1)^2} \to \begin{cases} f'(x) < 0 \text{ en } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0{,}596; +\infty) \to f(x) \text{ crece} \\ f'(x) > 0 \text{ en } x \in (0; 0{,}596) \to f(x) \text{ decrece} \end{cases}$$

Puesto que $f'(x) = -\dfrac{x(x^3 + 3x - 2)}{(x^3 + 1)^2}$ se anula en $x = 0$ y en $x = 0{,}596$. Calculamos la segunda derivada:

$f''(x) = \dfrac{2(x^6 + 6x^4 - 7x^3 - 3x + 1)}{(x^2 + 1)^3}$, que si es evaluada en los puntos críticos, se obtiene:

$$\begin{cases} f''(0{,}596) = -1{,}650 < 0 \to x = 0{,}596 \text{ máximo} \\ f''(0) = 2 > 0 \to x = 0 \text{ mínimo} \end{cases}$$



99. Relaciona cada una de las siguientes características con la función que las posea.

- **Su máximo es (0, −1).**
- **Tiene dos asíntotas verticales.**
- **La tangente es horizontal para $x = 1$ y $x = -1$.**
- **Su máximo es (1, 4).**
- **Es creciente siempre.**

$f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x}{10}$ $\quad i(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 3}$

$g(x) = x^4 - 2x^2 - 1$ $\quad j(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2}$

$h(x) = -x^3 + 3x + 2$ $\quad k(x) = -x^2 - 2x - 1$

- Su máximo es (0, −1) y la tangente es horizontal para $x = 1$ y $x = -1$.

  Son características de $g(x) = x^4 - 2x^2 - 1$:

  $g'(x) = 4x^3 - 4x \rightarrow g'(x) = 0 \rightarrow x = \pm 1 \text{ y } x = 0$

  La derivada en los puntos $x = 1$ y $x = -1$ es 0, con lo que la tangente será horizontal en esos puntos.

  $g''(x) = 12x^2 - 4 \rightarrow g'(0) = -4 < 0 \rightarrow x = 0$ máximo $\qquad g(0) = -1 \rightarrow (0, -1)$ máximo

- Tiene dos asíntotas verticales.

  Es característica de $j(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2}$.

  Las asíntotas horizontales se tienen cuando el denominador se anula. En este caso en se tienen dos asíntotas: en $x = -2$ y en $x = 2$.

- Su máximo es (1, 4) y la tangente es horizontal para $x = 1$ y $x = -1$.

  Son características de $h(x) = -x^3 + 3x + 2$

  $$\begin{cases} h'(x) = -3x^2 + 3 \rightarrow h'(x) = 0 \rightarrow x = \pm 1 \\ h''(x) = -6 \rightarrow h''(1) = -6 < 0 \rightarrow x = 1 \text{ máximo} \\ h(1) = 4 \rightarrow (1, 4) \text{ máximo} \end{cases}$$

- Es creciente siempre.

  Es característica de $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x}{10}$.

  $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{10} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ siempre crece.

$i(x)$ y $k(x)$ no cumple ninguna de las características.

100. Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = 1 + e^{x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{2}$

c) $f(x) = 3 \cdot e^{1-x}$

d) $f(x) = \dfrac{3 - e^x}{2}$

a) El dominio de las funciones exponenciales coincide con el dominio de su exponente. Como su exponente es un polinomio, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

No tiene puntos de corte con el eje X.

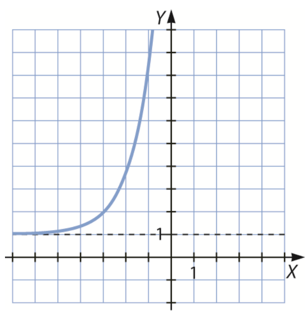
Punto de corte con el eje Y:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 1 + e^3 \rightarrow$ El punto de corte es $(0, 1 + e^3)$.

Tiene asíntota horizontal en $y = 1$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

No tiene asíntotas verticales.

$f(x) = 1 + e^{x+3} \rightarrow f'(x) = e^{x+3} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ es siempre creciente.



b) El dominio de las funciones exponenciales coincide con el dominio de su exponente. Como su exponente es un polinomio, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

No tiene puntos de corte con el eje *X*.

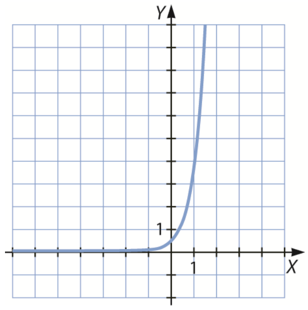
Punto de corte con el eje *Y*:

$x = 0 \to f(0) = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} \to$ El punto de corte es $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \to -\infty$.

No tiene asíntotas verticales.

$f(x) = \frac{e^{2x}}{2} \to f'(x) = e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \to$ $f(x)$ es siempre creciente.



c) El dominio de las funciones exponenciales coincide con el dominio de su exponente. Como su exponente es un polinomio, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

No tiene puntos de corte con el eje *X*.

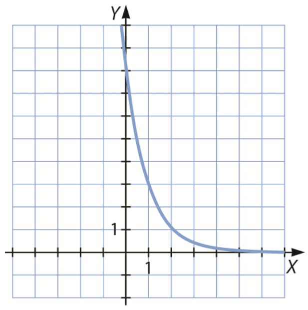
Punto de corte con el eje *Y*:

$x = 0 \to f(0) = 3e \to$ El punto de corte es $(0, 3e)$.

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \to +\infty$.

No tiene asíntotas verticales.

$f(x) = 3e^{1-x} \to f'(x) = -3e^{1-x} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \to$ $f(x)$ es siempre decreciente.



d) El dominio de las funciones exponenciales coincide con el dominio de su exponente. Como su exponente es un polinomio, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

Punto de corte con el eje *X*:

$0 = \frac{3 - e^x}{2} \to 3 = e^x \to x = \ln 3 \to$ El punto de corte es $(\ln 3, 0)$.

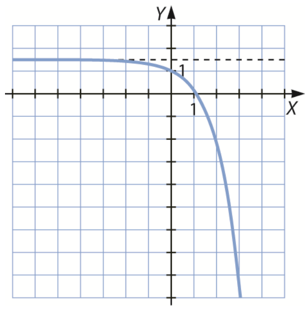
Punto de corte con el eje *Y*:

$x = 0 \to f(0) = \frac{3 - e^0}{2} = \frac{2}{2} = 1 \to$ El punto de corte es $(0, 1)$.

Tiene asíntota horizontal en $y = \frac{3}{2}$ cuando $x \to -\infty$.

No tiene asíntotas verticales.

$f(x) = \frac{3 - e^x}{2} \to f'(x) = \frac{-e^x}{2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \to$ $f(x)$ es siempre decreciente.



101. Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{2}{5} \cdot 2^{x+2}$

b) $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

c) $f(x) = 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}$

a) El dominio de las funciones exponenciales coincide con el dominio de su exponente. Como su exponente es un polinomio, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

No tiene puntos de corte con el eje *X*.

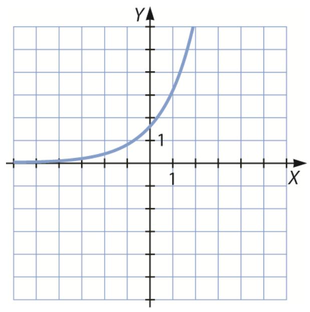
Punto de corte con el eje *Y*:

$x = 0 \to f(0) = \frac{2}{5} \cdot 2^2 = \frac{8}{5} \to$ El punto de corte es $\left(0, \frac{8}{5}\right)$.

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \to -\infty$.

No tiene asíntotas verticales.

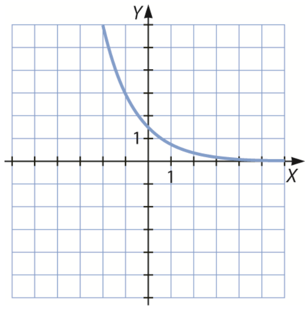
$f(x) = \frac{2}{5} 2^{x+2} \to f'(x) = \frac{2}{5} 2^{x+2} \ln 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \to$ $f(x)$ es siempre creciente y, como $f'(x)$ no se anula en ningún punto, no tiene máximos ni mínimos.



b) El dominio de las funciones exponenciales coincide con el dominio de su exponente. Como su exponente es un polinomio, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

No tiene puntos de corte con el eje *X*.

Punto de corte con el eje *Y*:



$x = 0 \to f(0) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{3}{2} \to$ El punto de corte es $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \longrightarrow +\infty$.

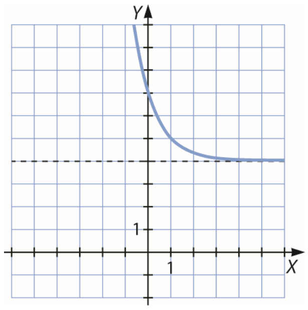
No tiene asíntotas verticales.

$f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \to f'(x) = -2^{-x-1}\ln 8 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \to$ $f(x)$ es siempre decreciente y, como $f'(x)$ no se anula en ningún punto, no tiene máximos ni mínimos.

c) El dominio de las funciones exponenciales coincide con el dominio de su exponente. Como su exponente es un polinomio, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

No tiene puntos de corte con el eje *X*.

Punto de corte con el eje *Y*:



$x = 0 \to f(0) = 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 7 \to$ El punto de corte es (0, 7).

Tiene asíntota horizontal en $y = 4$ cuando $x \longrightarrow +\infty$.

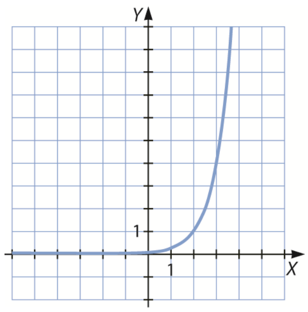
No tiene asíntotas verticales.

$f(x) = 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \to f'(x) = -3^{1-x}\ln 3 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \to$ $f(x)$ es siempre decreciente y, como $f'(x)$ no se anula en ningún punto, no tiene máximos ni mínimos.

d) El dominio de las funciones exponenciales coincide con el dominio de su exponente. Como su exponente es un polinomio, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

No tiene puntos de corte con el eje *X*.

Punto de corte con el eje *Y*:



$x = 0 \to f(0) = \frac{4^x}{16} = \frac{1}{16} \to$ El punto de corte es $\left(0, \frac{1}{16}\right)$.

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \longrightarrow -\infty$.

No tiene asíntotas verticales.

$f(x) = 4^{x-2} \to f'(x) = \frac{\ln 4}{16} 4^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \to$ $f(x)$ es siempre creciente y, como $f'(x)$ no se anula en ningún punto, no tiene máximos ni mínimos.

102. Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = \log_3 (2x)$

b) $f(x) = \log_2 (x + 1)$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

d) $f(x) = \log_5 (x - 1)$

e) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

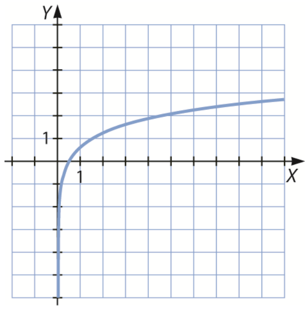
f) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$

a) La función logarítmica está definida cuando su argumento es mayor que 0.

$2x > 0 \rightarrow x > 0 \rightarrow \text{Dom}\, f = (0, +\infty)$

Puntos de corte con el eje X:

$0 = \log_3 2x \rightarrow 2x = 3^0 = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow$ El punto de corte es $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.



No tiene puntos de corte con el eje Y.

No tiene asíntotas horizontales.

Tiene asíntota vertical en $x = 0$.

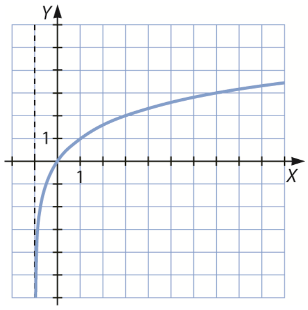
$f(x) = \log_3 2x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} > 0 \ \forall x > 0 \rightarrow$ $f(x)$ es siempre creciente.

b) La función logarítmica está definida cuando su argumento es mayor que 0.

$x + 1 > 0 \rightarrow x > -1 \rightarrow \text{Dom}\, f = (-1, +\infty)$

Puntos de corte con el eje X:

$0 = \log_2 (x + 1) \rightarrow x + 1 = 2^0 = 1 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ El punto de corte es (0, 0).



Punto de corte con el eje Y:

$x = 0 \rightarrow f(0) = \log_2 (0 + 1) = \log_2 1 = 0 \rightarrow$ El punto de corte es (0, 0).

No tiene asíntotas horizontales.

Tiene asíntota vertical en $x = -1$.

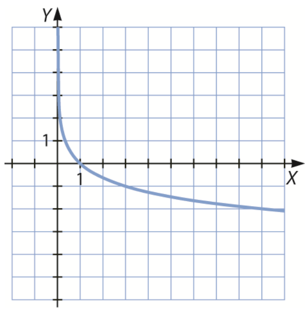
$f(x) = \log_2 (x + 1) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x + 1) \ln 2} > 0 \ \forall x > -1 \rightarrow$ $f(x)$ es siempre creciente.

c) La función logarítmica está definida cuando su argumento es mayor que 0.

$x > 0 \rightarrow \text{Dom}\, f = (0, +\infty)$

Puntos de corte con el eje X:

$0 = \log_{\frac{1}{3}} x \rightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow$ El punto de corte es (1, 0).



No tiene puntos de corte con el eje Y.

No tiene asíntotas horizontales.

Tiene asíntota vertical en $x = 0$.

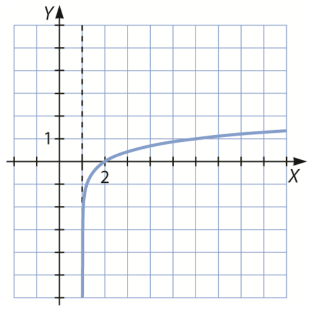
$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln\left(\frac{1}{3}\right)} < 0 \ \forall x > 0 \rightarrow$ $f(x)$ es siempre decreciente y, como $f'(x)$ no se anula en ningún punto, no tiene máximos ni mínimos.

d) La función logarítmica está definida cuando su argumento es mayor que 0.

$x-1>0 \rightarrow x>1 \rightarrow \text{Dom} f=(1,+\infty)$

Puntos de corte con el eje *X*:

$0=\log_5(x-1) \rightarrow x-1=5^0=1 \rightarrow x=2 \rightarrow$ El punto de corte es (2, 0).



No tiene puntos de corte con el eje *Y*.

No tiene asíntotas horizontales.

Tiene asíntota vertical en $x=1$.

$f(x)=\log_5 x \rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 5}>0 \ \ \forall x>0 \rightarrow$ *f*(*x*) es siempre creciente y, como

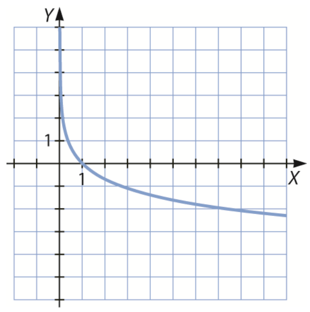
$f'(x)$ no se anula en ningún punto, no tiene máximos ni mínimos.

e) La función logarítmica está definida cuando su argumento es mayor que 0.

$\dfrac{1}{x}>0 \rightarrow x>0 \rightarrow \text{Dom} f=(0,+\infty)$

Puntos de corte con el eje *X*:

$0=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \rightarrow x=1 \rightarrow$ El punto de corte es (1, 0).



No tiene puntos de corte con el eje *Y*.

No tiene asíntotas horizontales.

Tiene asíntota vertical en $x=0$.

$f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x}<0 \ \ \forall x>0 \rightarrow$ *f*(*x*) es siempre decreciente y, como

$f'(x)$ no se anula en ningún punto, no tiene máximos ni mínimos.

f) La función logarítmica está definida cuando su argumento es mayor que 0.

$\dfrac{1}{x^2+1}>0 \ \forall x\in\mathbb{R} \rightarrow \text{Dom } f=\mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje *X*:

$0=\ln\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right) \rightarrow \dfrac{1}{x^2+1}=e^0=1 \rightarrow x=0 \rightarrow$ El punto de corte es (0, 0).

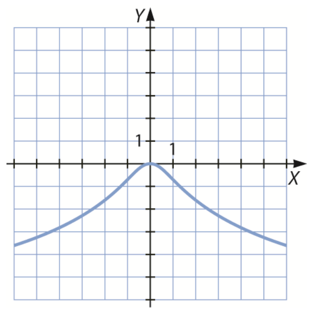
Puntos de corte con el eje *Y*:

$x=0 \rightarrow f(0)=\ln\left(\dfrac{1}{0^2+1}\right)=\ln 1=0 \rightarrow$ El punto de corte es (0, 0).

No tiene asíntotas horizontales.

No tiene asíntotas verticales.

$$f(x)=\ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \rightarrow \begin{cases} f'(x)=-\dfrac{2x}{x^2+1}>0 \text{ en } x\in(-\infty,0) \rightarrow f(x) \text{ es creciente.} \\ f'(x)=-\dfrac{2x}{x^2+1}<0 \text{ en } x\in(0,+\infty) \rightarrow f(x) \text{ es decreciente.} \end{cases}$$



Como en (0, 0) la función crece por la izquierda y decrece por la derecha, es un máximo.

Para $x\neq 0$, $f'(x)=-\dfrac{2x}{x^2+1}\neq 0 \rightarrow$ No existen más máximos o mínimos.

103. **Se ha estimado que el gasto de electricidad de una empresa, de 8 a 17 horas, sigue esta función**

$$E(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}36t^2 + 4{,}05t - 10$$

donde t pertenece al intervalo (8, 17).

a) ¿Cuál es el consumo eléctrico a las 10 horas? ¿Y a las 16 horas?

b) ¿En qué momento del día es máximo el consumo? ¿Y mínimo?

c) Determina las horas del día en las que el consumo se incrementa.

a) $E(10) = 4{,}5$

$E(16) = 3{,}6$

b) $E'(t) = 0{,}03t^2 - 0{,}72t + 4{,}05$

$0{,}03t^2 - 0{,}72t + 4{,}05 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = 15 \end{cases}$

$E''(t) = 0{,}06t - 0{,}72$

$E''(9) = -0{,}18 < 0 \rightarrow$ En $t = 9$ tiene un máximo.

$E''(15) = 0{,}18 > 0 \rightarrow$ En $t = 15$ tiene un mínimo.

Por tanto, el consumo es máximo a las 9 horas y es mínimo a las 15 horas.

c) Como $t = 9$ es un máximo, el consumo crece de las 8 horas a las 9 horas.

Del mismo modo, como $t = 15$ es un mínimo, el consumo crece de las 15 horas a las 17 horas.

104. **Los beneficios de dos empresas, A y B, vienen determinados por las funciones f_A y f_B, donde x se mide en años.**

$$f_A(x) = \frac{75x}{x^2 + 100} \qquad f_B(x) = \frac{100x + 4}{x^2 + 150}$$

Realiza el estudio de las cuestiones que se plantean a continuación.

a) ¿Durante cuánto tiempo obtienen ganancias?

b) ¿Cuáles son sus máximos beneficios y cuándo se producen?

c) ¿Cuál de las dos empieza antes a notar un descenso en los beneficios?

d) ¿En algún momento tienen pérdidas?

a) Se obtendrán ganancias siempre que los beneficios sean superiores a 0:

$$\frac{75x}{x^2+100} > 0 \ \ \forall x > 0 \qquad \frac{100x+4}{x^2+150} > 0 \ \ \forall x > 0$$

Es decir, siempre van a tener beneficios.

b) $f_A'(x) = -\dfrac{75(x^2-100)}{(x^2+100)^2} = 0 \rightarrow x = 10$ $\qquad f_B'(x) = \dfrac{-4(25x^2+2x-3750)}{(x^2+150)^2} = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{25}\left(1+\sqrt{93\,751}\right)$

Para comprobar si es máximo analizamos la segunda derivada.

$$f_A''(x) = \frac{150x(x^2-300)}{(x^2+100)^3} \rightarrow f_A''(10) = -\frac{3}{80} < 0$$

$$f_B''(x) = \frac{8(25x^3+3x^2-11250x-150)}{(x^2+150)^3} \rightarrow f_B''\left(\frac{1}{25}\left(2+\sqrt{93751}\right)\right) \approx -0{,}026 < 0$$

Como en ambas funciones el candidato tiene signo negativo en la segunda derivada, es un máximo.

Los máximos beneficios son:

$$f_A(10) = \frac{15}{4} \qquad f_B\left(\frac{1}{25}\left(2+\sqrt{93\,751}\right)\right) = \frac{1}{75}\left(1+\sqrt{93\,751}\right)$$

c) Dado que $\dfrac{15}{4} < \dfrac{1}{75}\left(1+\sqrt{93\,751}\right)$, la primera empieza a notar antes que la segunda el descenso de los beneficios.

d) En ningún momento tienen pérdidas ya que las funciones son mayores que 0 siempre.

105. **Un banco ofrece a sus clientes un plan en el que su capital se incrementaría según la función $f(x) = 0{,}0001x^4 - 0{,}04x^2$, donde x se mide en miles de euros. Realiza un estudio para determinar a partir de qué cantidad es rentable esta operación, si el banco les pone un límite de 50000 € de inversión.**

$$f(x) = \left(\frac{x}{10}\right)^4 - \frac{x^2}{25} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \text{ en } (0, 20) \\ f(x) > 0 \text{ en } (20, 50) \end{cases}$$

Se calcula la primera derivada, para ver en qué intervalos $f(x)$ crece y en cuáles decrece.

$$f'(x) = \frac{4x^3}{10^4} - \frac{2x}{25} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{200} = 14{,}14213 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} f'(x) < 0 \rightarrow 0 < x < 14{,}14213 \\ f'(x) > 0 \rightarrow 14{,}14213 < x < 50 \end{matrix}$$

$$f''(x) = \frac{12x^2}{10\,000} - \frac{2}{25} \rightarrow f''(14{,}14213) > 0 \rightarrow x = 14{,}14213 \text{ es mínimo}$$

A partir de 20 000 € es, rentable ya que la función es positiva y creciente.

106. **La temperatura, en grados centígrados, a lo largo de una fría noche de invierno en una localidad varió de acuerdo a la función $f(t) = \dfrac{t^2 - 5t - 6}{2}$, donde $t \in [0, 8]$ es el tiempo medido en horas.**

a) ¿Qué temperatura había a la una de la mañana? ¿Y a las cinco?
b) ¿A qué hora había 0 °C? ¿Y −3 °C?
c) ¿En qué intervalo de tiempo la temperatura descendía? ¿Y en cuál ascendía?
d) ¿En qué período de tiempo la temperatura fue negativa? ¿Y en cuál fue positiva?
e) ¿Cuál fue la temperatura máxima? ¿Y la mínima?
f) Realiza una gráfica que ilustre la variación de temperatura en esas ocho horas.

a) $f(1) = \dfrac{1 - 5 - 6}{2} = -\dfrac{10}{2} = -5\ °C$

$f(5) = \dfrac{25 - 25 - 6}{2} = -\dfrac{6}{2} = -3\ °C$

b) $0 = \dfrac{t^2 - 5t - 6}{2} \rightarrow t^2 - 5t - 6 = 0 \rightarrow t = 6$

$-3 = \dfrac{t^2 - 5t - 6}{2} \rightarrow t^2 - 5t - 6 = -6 \rightarrow t^2 - 5t = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 5 \end{cases}$

c) $f'(t) = \dfrac{2t - 5}{2} = 0 \rightarrow t = \dfrac{5}{2} = 2 \text{ h } 30 \text{ min}$

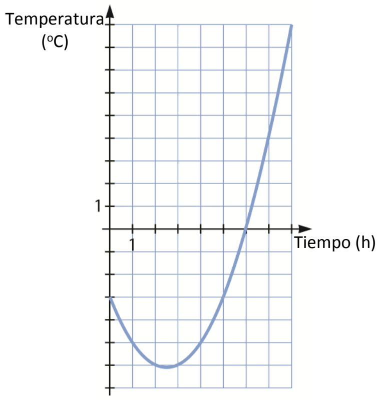
Asciende en $t \in \left(\dfrac{5}{2}, 8\right]$ y desciende en $t \in \left[0, \dfrac{5}{2}\right)$.

d) Como $f(t) = 0$ cuando $t = 6$, la temperatura es negativa en $t \in [0, 6)$ y positiva en $t \in (6, 8]$.

e) La temperatura máxima se alcanza en uno de los extremos, en $f(8) = 9$.

La temperatura mínima se alcanzará en $t = \dfrac{5}{2}$, y será $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{49}{8}\ °C$.

f)



107. Una empresa que sacó al mercado un nuevo dispositivo tecnológico, determinó que la cantidad de unidades vendidas en los primeros 60 días se ajustaba a la expresión $f(d) = 100 + 15d - \frac{d^2}{4}$, donde d es el tiempo medido en días. Calcula lo siguiente.

a) ¿En qué intervalo de tiempo las ventas aumentaron? ¿En cuál disminuyeron?
b) ¿Cuántos dispositivos vendió el primer día que salieron a la venta?
c) ¿Qué otro día vendió las mismas unidades que el primero?
d) ¿Qué día vendió más unidades? ¿Cuántas?
e) ¿Qué días se vendieron 300 unidades?

a) $f'(d) = 15 - \frac{d}{2} = 0 \rightarrow d = 30 \rightarrow \begin{cases} f'(d) > 0 \rightarrow d < 30 \\ f'(d) < 0 \rightarrow d > 30 \end{cases}$

El intervalo de ventas aumenta durante los primeros 30 días, y disminuye en los siguientes 30.

b) $f(1) = 100 + 15 - \frac{1}{4} = 115,25 \approx 116$ dispositivos vendidos el primer día.

c) $15d - \frac{d^2}{4} = 15,25 \rightarrow d = 1$ y $d = 59$ el primer y el quincuagésimo noveno día.

d) El día 30 es un candidato a máximo, porque la derivada se anula en ese punto.

$f''(d) = -\frac{1}{2} < 0 \rightarrow$ $d = 30$ es el día que más unidades se vendieron. En total fueron:

$f(30) = 100 + 450 - \frac{225}{4} = 493,75 \approx 494$ dispositivos.

e) $300 = 100 + 15d - \frac{d^2}{4} \rightarrow d = 20$ y $d = 40$.

108. **El número de visitantes que acuden a una exposición fotográfica durante las dos semanas de duración de la misma ha variado según la función**

$$N(t) = -t^3 + 24t^2 - 11t + 570 \quad \text{si } 1 \le t \le 14$$

donde *t* representa el día.

a) ¿Cuántos visitantes hubo el día de la inauguración?
b) ¿Y el día de la clausura?
c) ¿Qué día tuvo lugar la asistencia máxima de visitantes? ¿Y la asistencia mínima de visitantes?
d) ¿Cuáles fueron los valores máximo y mínimo del número de visitantes?

a) $N(1) = 582$ visitantes el día de la inauguración.

b) $N(14) = 2\,376$ visitantes el día de la clausura.

c) $N'(t) = -3t^2 + 48t - 11 > 0$ para $1 \le t \le 14$, por lo que su máximo y su mínimo se encontrarán en los extremos del intervalo.

El mínimo se tendrá en $N(1)$ y el máximo en $N(14)$.

d) De nuevo, los valores máximo y mínimo vendrán dados por $N(14)$ y $N(1)$.

109. **Los gastos de mantenimiento de la maquinaria de una determinada empresa en miles de euros, $G(x)$, vienen dados en función del tiempo, x, medido en meses, que dicha maquinaria lleva en funcionamiento. La expresión de $G(x)$ es:**

$$G(x) = \begin{cases} -\dfrac{2x}{15} + 3 & \text{si } 0 \le x \le 15 \\ \dfrac{6x - 60}{x + 15} & \text{si } x > 15 \end{cases}$$

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
b) ¿Qué sucede a medida que va transcurriendo el tiempo?
c) ¿Alcanza la función algún máximo o mínimo?
d) Realiza un estudio para determinar a partir de qué cantidad es rentable la inversión.

a) $G'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{15} & \text{si } 0 < x < 15 \\ \dfrac{150}{(x+15)^2} & \text{si } x > 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} G'(x) < 0 & \text{en } x \in (0, 15) \\ G'(x) > 0 & \text{en } x > 15 \end{cases}$

$G(x)$ decrece en los 15 primeros meses y crece a partir de ahí.

b) Empieza decreciendo el gasto durante los primeros 15 meses y a partir de ahí comienza a crecer.

c) Como la derivada no se anula, se alcanza un máximo en el extremo $x = 0$, porque es decreciente, y un mínimo en $x = 15$, porque decrece a la izquierda y crece a la derecha.

d) La inversión será rentable durante los 15 primeros meses, porque el gasto decrece, y siempre que el gasto sea menor que en el momento inicial, es decir, $G(x) = 3$. Esto ocurre cuando:

$$3 = \frac{6x - 60}{x + 15} \rightarrow 3x + 45 = 6x - 60 \rightarrow 3x = 105 \rightarrow x = 35$$

Por lo que se concluye que la inversión será rentable durante los primeros 35 meses, puesto que el gasto de mantenimiento no excede el inicial, como para necesitar comprar una maquinaria nueva.

110. **Determina cuál de las dos funciones crece más rápidamente en el punto $x = 1$ y encuentra la representación gráfica que mejor lo muestre.**

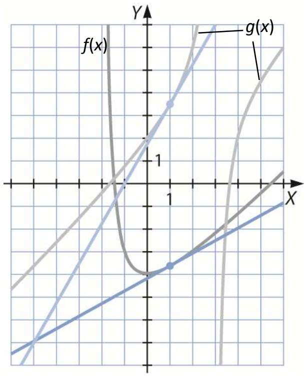
$$f(x) = x - 4 - \frac{2x}{x+2}$$

$$g(x) = x + 2 - \frac{x}{x-3}$$

$$\begin{cases} f(x) = x - 4 - \dfrac{2x}{x+2} \\ g(x) = x + 2 - \dfrac{x}{x-3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x+2)^2} \\ g'(x) = 1 + \dfrac{3}{(x-3)^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(1) = 1 - \dfrac{2}{(1+2)^2} = \dfrac{5}{9} \\ g'(1) = 1 + \dfrac{3}{(1-3)^2} = \dfrac{7}{4} \end{cases} \rightarrow f'(1) < g'(1)$$

Y como la derivada en ese punto representa la pendiente de la función en dicho punto, al ser mayor esa pendiente, se concluye que $g(x)$ crece más rápidamente en $x = 1$.

La mejor manera de mostrarlo gráficamente es dibujando las rectas tangentes de las dos funciones en $x = 1$.



111. **Un investigador está probando la acción de un medicamento sobre una bacteria. Ha comprobado que el número de bacterias, *N*, varía con el tiempo, *t*, una vez que se ha suministrado el medicamento, según la siguiente función.**

$$N(t) = 20\,t^3 - 510\,t^2 + 3600\,t + 2000$$

a) ¿Cuántas bacterias había en el momento de suministrar el medicamento? ¿Y al cabo de 10 horas?

b) En ese momento, ¿el número de bacterias está creciendo o disminuyendo?

c) ¿Cuál es el momento en que la acción del producto es máxima?

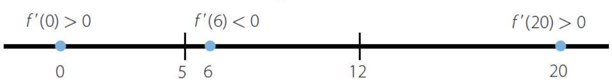
d) ¿En qué momento empieza a notarse el efecto del medicamento?

e) ¿Y en qué momento empieza a perder su efecto el medicamento?

a) Si $t = 0 \rightarrow N = 2\,000$ bacterias
Si $t = 10 \rightarrow N = 7\,000$ bacterias

b) $N' = 60t^2 - 1\,020t + 3\,600$

$$60t^2 - 1\,020t + 3\,600 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 12 \end{cases}$$



El número de bacterias crece hasta las 5 horas y vuelve a crecer a partir de las 12 horas. Este número decrece entre las 5 horas y las 12 horas.

c) El medicamento alcanza su máxima acción a las 12 horas.

d) El efecto del medicamento empieza a notarse a partir de las 5 horas.

e) El medicamento empieza a perder su efecto a partir de las 12 horas.

PARA PROFUNDIZAR

112. **Elige la respuesta adecuada.** (Concurso de Primavera)

El valor mínimo de $f(x) = (x - 5)^3 \cdot (x - 1)$ es:	-27	-8	$-\frac{75}{8}$	-3	0
Si m y n son enteros, con $1 \le m < n$, ¿cuántas soluciones positivas tiene la ecuación $x^n - x^m - 1 = 0$?	Ninguna	n	Una	$n - m$	Cualquier número de soluciones
De todos los cuadriláteros inscritos en una circunferencia que verifican que sus lados, de longitudes 6 y 8 cm, forman un ángulo recto, ¿cuál es, en cm², el área del que tiene área máxima?	48	48,5	49	50	52
¿Cuál es el valor mínimo que puede tomar $f(x) = \sqrt{8x - x^2} - \sqrt{14x - x^2 - 48}$?	$\sqrt{7} - 1$	3	$2\sqrt{3}$	4	$\sqrt{55} - \sqrt{5}$

□ $f'(x) = 2(x + 5)^2(1 + 2x)$ se anula en $x = -5$ y $x = \frac{-1}{2}$.

$f'(x) = 4(x - 2)(x - 5)^2 \rightarrow f'(x) = 0$ en $x = 2$ y $x = 5$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ toma su valor mínimo en un mínimo.}$$

$f'(x) = 4(x - 2)(x - 5)^2 \rightarrow f'(x) = 0$ en $x = 2$ y $x = 5$

Lo posibles mínimos están en $x = 2$ y $x = 5$. Calculamos el valor de la función en estos puntos, y el menor será el mínimo:

$f(2) = -27$, $f(5) = 0 \rightarrow$ Por tanto, el valor mínimo de $f(x)$ es -27.

□ Si se deriva $f(x) = x^n - x^m - 1$, se obtiene $f'(x) = nx^{n-1} - mx^{m-1}$. Igualamos la derivada a 0:

$x^{m-1}(nx^{n-m} - m) = 0$. Dicha ecuación se cumple cuando $x = 0$ y cuando $x^{n-m} = \frac{m}{n} \rightarrow x = \sqrt[n-m]{\frac{m}{n}}$.

$f'(x) < 0$ en $\left(0, \sqrt[n-m]{\frac{m}{n}}\right)$, es decir, es decreciente en ese intervalo y como $f(0) = -1$, en dicho intervalo no tiene solución la ecuación.

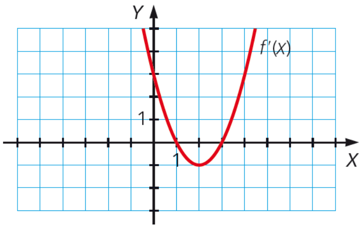
$f(x) = x^n - x^m - 1$ es continua y, como $f(2) > 0$ y $f\left(\sqrt[n-m]{\frac{m}{n}}\right) < 0$, por el teorema de Bolzano, la función tiene una solución en el intervalo $\left(\sqrt[n-m]{\frac{m}{n}}, 2\right)$ y, por ser $f'(x) > 0$ en $\left(\sqrt[n-m]{\frac{m}{n}}, \infty\right)$, es decir, es creciente en ese intervalo, por el teorema del valor medio, la solución es única.

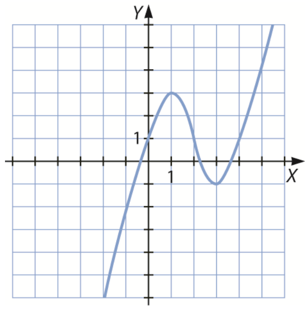
□ El cuadrilátero de mayor área es el formado por el triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 cm, cuya área es 24 cm². Y el triángulo de mayor área con base 10 cm es el isósceles de altura 5 cm. Por tanto, el cuadrilátero buscado tiene área 49 cm².

□ No es ninguna de las soluciones, porque en $x = 8$, $f(8) = 0$ y se anulan ambas raíces.

Se puede reescribir $f(x) = \sqrt{x(8 - x)} - \sqrt{(8 - x)(x - 6)}$, donde se ve bien cómo se factorizan los polinomios de dentro de las raíces, y para qué valores se anulan.

113. Si la gráfica de una función $f'(x)$ es la siguiente, representa de forma aproximada la función $f(x)$.

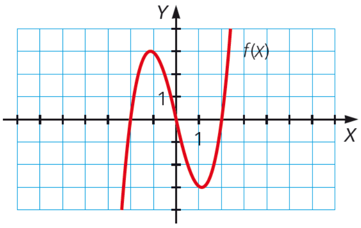


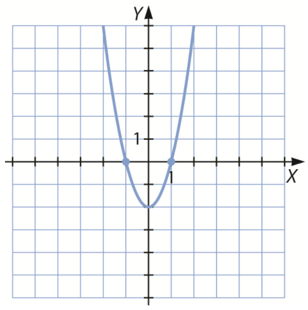


- $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$ y en $(3, +\infty)$, y es decreciente en $(1, 3)$, por lo que tiene un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 3$.
- $f(x)$ es convexa en $(-\infty, 2)$ y cóncava en $(2, +\infty)$, por lo que tiene un punto de inflexión en $x = 2$.
- $f(x)$ tiene una simetría impar respecto del punto $(2, f(2))$.

Una posible representación de $f(x)$ sería:

114. Dada la gráfica de la función $f(x)$, representa la función $f'(x)$ de forma aproximada.





- $f'(x)$ es positiva en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$, y negativa en $(-1, 1)$, por lo que se anular en $x = -1$ y en $x = 1$.
- $f'(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$, por lo que tiene un mínimo en $x = 0$.
- $f'(x)$ es par.

Una posible representación de $f'(x)$ sería:

115. Calcula la altura y el volumen del cilindro regular recto de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio 3 cm.

Aplicando el teorema de Pitágoras se calcula el radio de las bases, que coincide con la mitad de la altura del cilindro:

$$2x^2 = 3^2 \to x = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

El área de las bases viene dado por $A_B = \pi\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{9\pi}{2}$. Por tanto, el volumen será:

$$V = A_B H = \frac{9\pi}{2} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{27\pi\sqrt{2}}{2}\ \text{cm}^3$$

116. **Las pérdidas o ganancias de una empresa, expresadas en centenas de miles de euros, cuando han transcurrido t años, siguen la función $f(t) = \dfrac{2t-4}{t+2}$.**

a) Determina el año en que la empresa deja de tener pérdidas.
b) ¿Es decreciente la función que expresa la ganancia?
c) ¿Existe límite para las ganancias? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

$$\left.\begin{array}{l} f'(t) = \dfrac{8}{(t+2)^2} > 0 \rightarrow f(t) \text{ es creciente siempre} \\ f(0) = -2 \text{ y } f(t) = 0 \rightarrow t = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Entre } t = 0 \text{ y } t = 2\ f(t) < 0.$$

a) A partir de $t = 2$ la empresa deja de tener pérdidas.

b) La función es creciente siempre.

c) Sí, el límite coincide con la asíntota horizontal $y = 2$.

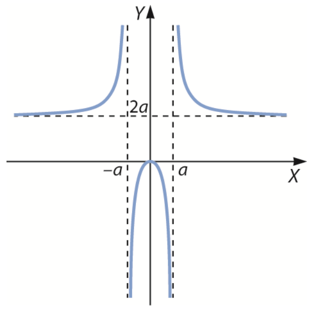
117. **Dibuja la gráfica de la función que aparece a continuación.**

$$f(x) = \frac{2ax^2}{x^2 - a^2} \text{ con } a \in (0, +\infty)$$

La función tiene dos asíntotas verticales, $x = -a$ y $x = a$.

$$\lim_{x\to -a^-} \left(\frac{2ax^2}{x^2-a^2}\right) = +\infty \qquad \lim_{x\to -a^+} \left(\frac{2ax^2}{x^2-a^2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} \left(\frac{2ax^2}{x^2-a^2}\right) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} \left(\frac{2ax^2}{x^2-a^2}\right) = +\infty$$



Además, tiene una asíntota horizontal, $y = 2a$. La gráfica está por encima de la asíntota horizontal:

$$f'(x) = \frac{-4a^3x}{x^2-a^2} \rightarrow f'(x) = 0 \text{ para } x = 0$$

Si $x < 0$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ crece. Si $x > 0$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decrece.

118. **Sea la función:**

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

Determina los valores de a, b y c para que la representación gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$ cumpla lo siguiente.

- **Tiene una inflexión.**
- **Su tangente es la recta $x - 4y + 1 = 0$.**

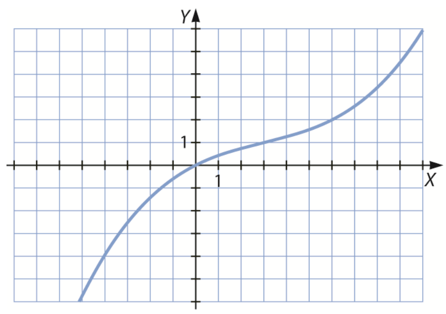
Cuando hayas encontrado los valores de a, b y c, dibuja la gráfica de la función resultante.

(Olimpiadas de Bachillerato. Fase Nacional)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \rightarrow f(3) = 1 \rightarrow 27a + 9b + 3c = 1 \\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow f'(3) = 1 \rightarrow 27a + 9b + c = \dfrac{1}{4} \\ f''(x) = 6ax + 2b \rightarrow f''(3) = 0 \rightarrow 18a + 2b \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{1}{108},\ b = -\frac{1}{12},\ c = \frac{1}{2}$$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{1}{108}x^3 - \dfrac{1}{12}x^2 + \dfrac{1}{2}x$.



119. Se sabe que la función real $f(t)$ es monótona creciente en el intervalo $-8 < t < 8$.
Se considera la función:

$$g(x) = f(2x - x^2)$$

¿En qué intervalo de valores de x se puede asegurar que $g(x)$ es monótona creciente?

(Olimpiadas de Bachillerato. Fase Nacional)

Para que $g(x)$ sea monótona creciente, $g'(x)$ debe ser mayor que 0. Calculamos la derivada de $g(x)$:

$g'(x) = f'(2x - x^2) \cdot (2 - 2x)$

$g'(x)$ es un producto de dos factores. Para que sea positiva, los dos factores deben tener el mismo signo:

$2 - 2x > 0$ para $x < 1$ $\qquad$ $2 - 2x < 0$ para $x > 1$

Sabemos que $f'(t) > 0$ para los $-8 < t < 8$. Por tanto:

$-8 < 2x - x^2 < 8 \rightarrow -2 < x < 4 \rightarrow$ Para $x \in (-2, 4)$ $f'(2x - x^2) > 0$.

Por tanto:

Para $x \in (-2, 1) \rightarrow \left.\begin{cases} f'(2x - x^2) > 0 \\ 2 - 2x > 0 \end{cases}\right\} \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ es monótona creciente.

Para $x \in (1, 4) \rightarrow \left.\begin{cases} f'(2x - x^2) > 0 \\ 2 - 2x < 0 \end{cases}\right\} \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ es monótona decreciente.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Explica con tus palabras el concepto de sobreaceleración o *jerk*.

Función que calcula la variación de la aceleración en un movimiento con respecto al tiempo.

2. Propón algunos ejemplos donde se vea el concepto de sobreaceleración.

Un acelerón grande para adelantar rápidamente; un frenazo ante el riesgo de colisión con el vehículo delantero.

3. Si la función $s(t)$ define la posición de un móvil en cada instante t, la velocidad se define como la derivada de la posición, $v(t) = s'(t)$, y la aceleración, $a(t)$, como la derivada de la velocidad $a(t) = v'(t)$.

¿Cuál es la expresión de la sobreaceleración a partir de la función posición $s(t)$?

$J(t) = s'''(t)$

4. Si la sobreaceleración es cero, ¿qué se puede decir de la aceleración? Valora todas las posibilidades que pueden existir.

$J(t) = 0 \rightarrow a'(t) = 0 \rightarrow a(t) =$ constante

5. La ecuación que determina la posición instantánea de un móvil es:

$s(t) = -3t^2 - 2t + 62$

a) Calcula la función velocidad $v(t)$.
b) Halla la aceleración instantánea $a(t)$.
c) ¿Cuál es la sobreaceleración que sufre el móvil?

a) $v(t) = s'(t) = -6t - 2$ $\qquad$ b) $a(t) = v'(t) = -6$ $\qquad$ c) $J(t) = 0$

Integrales

12

ACTIVIDADES

1. **Señala las funciones cuya función primitiva es $F(x) = \frac{3x^2}{10} + \frac{x}{3} + k$.**

a) $f_1(x) = \frac{3x}{5} + \frac{1}{6}$

b) $f_2(x) = \frac{3x}{5} + \frac{1}{3}$

c) $f_3(x) = \frac{3x + 5}{15}$

$$F'(x) = \frac{6x}{10} + \frac{1}{3} = \frac{3x}{5} + \frac{1}{3}$$

$F(x)$ es función primitiva de b).

2. **Escribe cuatro primitivas para la función $f(x) = x^2 - x + 2$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + k \quad \text{para } k = 1, 2, 3 \text{ y } 4$$

3. **La función $F(x) = k \cdot e^{3x} + n$ es una función primitiva de la función $f(x) = e^{3x}$. Halla los valores de las constantes k y n si $F(0) = 0$.**

$$F'(x) = 3ke^{3x} = e^{3x} \rightarrow k = \frac{1}{3} \qquad F(0) = \frac{1}{3}e^0 + n = 0 \rightarrow n = -\frac{1}{3}$$

4. **Considera estas derivadas.**

$$[x^2]' = 2x \rightarrow \int 2x\,dx = x^2 + k$$

$$[x^3]' = 3x^2 \rightarrow \int 3x^2\,dx = x^3 + k$$

Aplica las propiedades de la integral y calcula.

a) $\int x\,dx$

b) $\int x^2\,dx$

c) $\int 4x\,dx$

d) $\int (x + x^2)\,dx$

a) $\left[\frac{x^2}{2}\right]' = \frac{2x}{2} = x \rightarrow \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + k$

b) $\left[\frac{x^3}{3}\right]' = \frac{3x^2}{3} = x^2 \rightarrow \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + k$

c) $\int 4x\,dx = 4\int x\,dx = 4\frac{x^2}{2} + k = 2x^2 + k$

d) $\int (x + x^2)\,dx = \int x\,dx + \int x^2\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + k$

5. A partir de estas derivadas:

$$[\cos x]' = -\operatorname{sen} x \rightarrow \int(-\operatorname{sen} x)dx = \cos x + k$$

$$[\operatorname{sen} x]' = \cos x \rightarrow \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + k$$

Halla las siguientes integrales.

a) $\int \operatorname{sen} x\, dx$

b) $\int (3 \operatorname{sen} x + \cos x)dx$

a) $[-\cos x]' = \operatorname{sen} x \rightarrow \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + k$

b) $\int (3 \operatorname{sen} x + \cos x)\, dx = 3\int \operatorname{sen} x\, dx + \int \cos x\, dx = -3\cos x + \operatorname{sen} x + k$

6. Resuelve estas integrales.

a) $\int (x^2 + 3x - 7)dx$

b) $\int \frac{x-2}{2}dx$

c) $\int \left(\frac{x}{6} - \frac{5}{3}\right)dx$

d) $\int \left(\frac{8}{x} + \sqrt[4]{x}\right)dx$

a) $\int (x^2 + 3x - 7)\, dx = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 7x + k$

b) $\int \frac{x-2}{2}\, dx = \int \left(\frac{x}{2} - 1\right)dx = \frac{x^2}{4} - x + k$

c) $\int \left(\frac{x}{6} - \frac{5}{3}\right)dx = \frac{x^2}{12} - \frac{5}{3}x + k$

d) $\int \left(\frac{8}{x} + \sqrt[4]{x}\right)dx = 8\ln x + \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + k = 8\ln x + \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + k$

7. Resuelve estas integrales.

a) $\int 10x(x^2 - 4)^4\, dx$

b) $\int \frac{6x+3}{x^2+x-3}dx$

c) $\int \left(\frac{4x^2}{x^3+5}\right)dx$

d) $\int \frac{x(x^2+1)^3}{2}dx$

a) $\int 5 \cdot 2x\left(x^2 - 4\right)^4 dx = \left(x^2 - 4\right)^5 + k$

b) $\int \frac{3(2x+1)}{x^2+x-3}dx = 3\ln\left|x^2 + x - 3\right| + k$

c) $\int \frac{4x^2}{x^3+5}dx = \frac{4}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+5}\, dx = \frac{4}{3}\ln\left|x^3 + 5\right| + k$

d) $\frac{1}{2}\int \frac{2x\left(x^2+1\right)^3}{2}dx = \frac{1}{4}\frac{\left(x^2+1\right)^4}{4} + k = \frac{1}{16}\left(x^2+1\right)^4 + k$

8. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int 2^{\frac{x}{2}}\,dx$

b) $\int e^{x+1}\,dx$

c) $\int \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} dx$

d) $\int (e^{-2x} + e^{x-1})\,dx$

a) $\int 2^{\frac{x}{2}}\,dx = 2 \cdot \frac{2^{\frac{x}{2}}}{\ln 2} + k = \frac{2^{\frac{x}{2}+1}}{\ln 2} + k$

b) $\int e^{x+1}\,dx = e^{x+1} + k$

c) $\int \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}}{\ln \frac{5}{2}} + k$

d) $\int (e^{-2x} + e^{x-1})\,dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + e^{x-1} + k$

9. Halla estas integrales.

a) $\int 5^{x^2+1} \cdot 2x\,dx$

b) $\int 2e^{\frac{x}{2}+2}\,dx$

c) $\int \frac{3^{5x-1}}{2}\,dx$

d) $\int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx$

a) $\int 5^{x^2+1} \cdot 2x\,dx = \frac{5^{x^2+1}}{\ln 5} + k$

c) $\int \frac{3^{5x-1}}{2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3^{5x-1}}{\ln 3} + k = \frac{3^{5x-1}}{10 \ln 3} + k$

b) $\int 2e^{\frac{x}{2}+2}\,dx = 4e^{\frac{x}{2}+2} + k$

d) $\int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = \int x \cdot e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} + k$

10. Resuelve las siguientes integrales.

a) $\int sen(3x + 2)\,dx$

b) $\int 8\cos(4x - 3)\,dx$

c) $\int sen(-2x)\,dx$

d) $\int \cos(5 - 6x)\,dx$

a) $\frac{1}{3}\int 3\,sen(3x+2)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x+2) + k$

b) $2\int 4\cos(4x-3)\,dx = 2\,sen(4x-3) + k$

c) $-\frac{1}{2}\int -2\,sen(-2x)\,dx = \frac{1}{2}\cos(-2x) + k$

d) $-\frac{1}{6}\int -6\cos(5-6x)\,dx = -\frac{1}{6}\,sen(5-6x) + k$

11. Resuelve estas integrales.

a) $\int \frac{1}{\cos^2(x+3)}\,dx$

b) $\int \frac{2x}{\cos^2(4x^2)}\,dx$

c) $\int \frac{1 + tg^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\int [x^2 tg^2(x^3) + x^2]\,dx$

a) $\int \frac{1}{cos^2(x+3)}\,dx = tg(x+3)+k$

b) $\int \frac{2x}{cos^2(4x^2)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{8x}{cos^2(4x^2)}\,dx = \frac{1}{4}\,tg(4x^2)+k$

c) $\int \frac{\left[1+tg^2(\sqrt{x})\right]}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{1+tg^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\,tg(\sqrt{x})+k$

d) $\int \left[x^2\,tg^2(x^3)+x^2\right]dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\left[tg^2(x^3)+1\right]dx = \frac{1}{3}\,tg(x^3)+k$

12. **Resuelve las siguientes integrales.**

a) $\int \frac{1}{\sqrt{4-16x^2}}\,dx$

b) $\int \frac{-1}{\sqrt{5-25x^2}}\,dx$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^4}}\,dx$

d) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx$

a) $\int \frac{1}{\sqrt{4-16x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,dx = \frac{1}{4}\,arc\,sen\,2x+k$

b) $\int \frac{-1}{\sqrt{5-25x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{5}x\right)^2}}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{5}x\right)^2}}\,dx = \frac{1}{5}\,arc\,cos\left(\sqrt{5}x\right)+k$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^4}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{\sqrt{1-\left(2x^2\right)^2}}\,dx = \frac{1}{4}\,arc\,sen\left(2x^2\right)+k$

d) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx = arc\,sen(\ln x)+k$

13. **Resuelve estas integrales.**

a) $\int \frac{1}{3+9x^2}\,dx$

b) $\int \frac{4}{1+(6-x)^2}\,dx$

c) $\int \frac{x^2}{2+8x^6}\,dx$

d) $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

a) $\int \frac{1}{3+9x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+3x^2}\,dx = \frac{1}{3\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}x\right)^2}\,dx = \frac{1}{3\sqrt{3}}\,arc\,tg\left(\sqrt{3}x\right)+k$

b) $\int \frac{4}{1+(6-x)^2}\,dx = -4\int \frac{-1}{1+(6-x)^2}\,dx = -4\,arc\,tg(6-x)+k$

c) $\int \frac{x^2}{2+8x^6}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+\left(2x^3\right)^2}\,dx = \frac{1}{12}\int \frac{6x^2}{1+\left(2x^3\right)^2}\,dx = \frac{1}{12}\,arc\,tg\left(2x^3\right)+k$

d) $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{1+\left(x^2+2x+1\right)}\,dx = \int \frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx = arc\,tg(x+1)+k$

14. **Resuelve las siguientes integrales definidas.**

a) $\int_0^3 (x^3+4x^2-5)\,dx$

b) $\int_{-2}^1 \left(\frac{x}{3}+2\right)^2 dx$

a) $F(x)=\int (x^3+4x^2-5)dx=\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}-5x$

$F(3)-F(0)=\frac{165}{4}-0=\frac{165}{4}$

b) $F(x)=\int \left(\frac{x}{3}+2\right)^2 dx=\left(\frac{x}{3}+2\right)^3$

$F(1)-F(-2)=\left(\frac{7}{3}\right)^3-\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{279}{27}=\frac{31}{3}$

15. Resuelve las siguientes integrales.

a) $\int_1^4 \frac{3}{\sqrt{x}}dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (5\cos x - \operatorname{sen} x)dx$

a) $F(x)=\int \frac{3}{\sqrt{x}}dx=3\int x^{-\frac{1}{2}}dx=6\sqrt{x}$ $\quad F(4)-F(1)=12-6=6$

b) $F(x)=\int (5\cos x-\operatorname{sen} x)dx=5\int \cos x\,dx-\int \operatorname{sen} x\,dx=5\operatorname{sen} x+\cos x$ $\quad F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)=5-1=4$

16. Halla el área del triángulo limitado por los ejes *X* e *Y* y la recta de ecuación $f(x)=x-3$.

Corte con el eje *X*: (3, 0) Corte con el eje *Y*: (0, –3)

Es un triángulo que está por debajo del eje *X* de base 3 y altura 3.

$A_T=\frac{3\cdot 3}{2}=\frac{9}{2}$

Con la integral definida se obtiene el mismo valor, pero negativo, porque el área está bajo el eje *X*.

$$\int_0^3 (x-3)dx=\left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_0^3=\frac{9}{2}-9=-\frac{9}{2}$$

17. Halla el área del triángulo que tiene como vértices (2, 0), (4, 4) y (5, 0) utilizando integrales definidas.

El triángulo es de base 3 y altura 4.

$A_T=\frac{4\cdot 3}{2}=6$

Con la integral definida se obtiene el mismo valor. Para ello se divide el triángulo en dos triángulos rectángulos.

La recta que pasa por los puntos (2, 0) y (4, 4) tiene como ecuación $y=2x-4$.

$$\int_2^4 (2x-4)dx=\left[x^2-4x\right]_2^4=4$$

La recta que pasa por los puntos (4, 4) y (5, 0) tiene como ecuación $y=-4x+20$.

$$\int_4^5 (-4x+20)dx=\left[-2x^2+20x\right]_4^5=50-48=2$$

$A_T=4+2=6$

18. **Halla el área de la región limitada por la gráfica de la curva $f(x) = x^2 - 4$ y el eje X entre los puntos de corte con este eje.**

Cortes con el eje X: (2, 0) y (−2, 0)

$$F(x)=\int (x^2-4)dx=\frac{x^3}{3}-4x \qquad |F(2)-F(-2)|=\left|-\frac{16}{3}-\frac{16}{3}\right|=\frac{32}{3}$$

19. **Halla el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ y el eje X en el intervalo [3, 4].**

$$\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx=[\ln|x-2|]_3^4=\ln 2$$

20. **Determina el área comprendida entre las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x + 2$ en el intervalo $[-3, 4]$.**

$$f(x)=g(x) \to x^2-4=x+2 \to x^2-x-6=0 \to \begin{cases} x=-2 \\ x=3 \end{cases}$$

$$F(x)=\int (x^2-4-(x+2))\,dx=\int (x^2-x-6)\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x$$

$$\left|\int_{-3}^{-2}(x^2-x-6)\,dx\right|+\left|\int_{-2}^{3}(x^2-x-6)\,dx\right|+\left|\int_{3}^{4}(x^2-x-6)\,dx\right|=|F(-2)-F(-3)|+$$

$$+|F(3)-F(-2)|+|F(4)-F(3)|=\left|\frac{22}{3}-\frac{9}{2}\right|+\left|-\frac{27}{2}-\frac{22}{3}\right|+\left|-\frac{32}{3}+\frac{27}{2}\right|=\frac{53}{2}$$

21. **Halla el área comprendida entre las parábolas $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2$.**

$$f(x)=g(x) \to x^2=-x^2+2 \to x^2-1=0 \to x=\pm 1$$

$$F(x)=\int (x^2-(-x^2+2))\,dx=\int (2x^2-2)\,dx=\frac{2x^3}{3}-2x$$

$$\text{Área}=|F(1)-F(-1)|=\left|-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\right|=\frac{8}{3}$$

SABER HACER

22. **Confirma que $F(x) = \dfrac{3x^2}{8} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$ es una primitiva de $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x^2 - 4}{4x^2}$. De todas las primitivas de $f(x)$, encuentra la que vale 3 para $x = -2$.**

$$F'(x)=\frac{6x}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}=\frac{3x^3+2x^2-4}{4x^2}$$

$$F(-2)=\frac{3\cdot 4}{8}+\frac{-2}{2}+\frac{1}{-2}+k=3 \to k=3$$

23. **Halla estas integrales.**

a) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x^3\, dx$

b) $\displaystyle\int 2x^3 \operatorname{sen}(x^4-2)\,dx$

c) $\displaystyle\int 5x^2 e^{x^3+4}\, dx$

d) $\displaystyle\int x^2\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x^3}{2}\right)dx$

a) $\int x^2 sen\, x^3\, dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 sen\, x^3\, dx = -\frac{1}{3}\cos x^3 + k$

b) $\int 2x^3 sen(x^4-2)dx = \frac{1}{2}\int 4x^3 sen(x^4-2)dx = -\frac{1}{2}\cos(x^4-2)+k$

c) $\int 5x^2 e^{x^3+4}\, dx = \frac{5}{3}\int 3x^2 e^{x^3+4}\, dx = \frac{5}{3}e^{x^3+4} + k$

d) $\int x^2\left(1+tg^2\frac{x^3}{2}\right)dx = \frac{2}{3}\int \frac{3x^2}{2}\left[1+tg^2\left(\frac{x^3}{2}\right)\right]dx = \frac{2}{3}tg\left(\frac{x^3}{2}\right)+k$

24. **Calcula las integrales.**

a) $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$

b) $\int \frac{7\sqrt[3]{x}}{2}\, dx$

c) $\int \frac{8\sqrt[4]{x^3}}{5}\, dx$

d) $\int 4\sqrt[5]{x^3}\, dx$

a) $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+k = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}+k$

b) $\int \frac{7\sqrt[3]{x}}{2}\, dx = \frac{7}{2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+k = \frac{21}{8}\sqrt[3]{x^4}+k$

c) $\int \frac{8\sqrt[4]{x^3}}{5}\, dx = \frac{8}{5}\cdot\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}+k = \frac{32\sqrt[4]{x^7}}{35}+k$

d) $\int 4\sqrt[5]{x^3}\, dx = 4\cdot\frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1}+k = \frac{5\sqrt[5]{x^8}}{2}+k$

25. **Halla estas integrales.**

a) $\int \frac{4}{x^2}\, dx$

b) $\int \frac{-6}{x^3}\, dx$

c) $\int \frac{3}{5x^4}\, dx$

d) $\int \frac{8}{(2x)^4}\, dx$

a) $4\int x^{-2}\, dx = -4x^{-1}+k = -\frac{4}{x}+k$

b) $-6\int x^{-3}\, dx = 3x^{-2}+k = \frac{3}{x^2}+k$

c) $\frac{3}{5}\int x^{-4}\, dx = -\frac{1}{5}x^{-3}+k = -\frac{1}{5x^3}+k$

d) $\frac{1}{2}\int x^{-4}\, dx = -\frac{1}{6}x^{-3}+k = -\frac{1}{6x^3}+k$

26. **Calcula estas integrales.**

a) $\int \frac{2x^2+3x-2}{x}\, dx$

b) $\int \frac{x^2+6x-8}{x^2}\, dx$

a) $\int \frac{2x^2+3x-2}{x}\, dx = 2\int x\, dx + \int 3\, dx - 2\int \frac{1}{x}\, dx = x^2+3x-2\ln x+k$

b) $\int \frac{x^2+6x-8}{x^2}\, dx = \int 1 dx + 6\int \frac{1}{x}\, dx - 8\int \frac{1}{x^2}\, dx = x+6\ln x+\frac{8}{x}+k$

27. **Calcula las siguientes integrales.**

a) $\int \frac{4x-5}{x^2}\, dx$

b) $\int \frac{(x+1)^2}{2x}\, dx$

a) $\int \frac{4x-5}{x^2}\, dx = 4\int \frac{1}{x}\, dx - 5\int \frac{1}{x^2}\, dx = 4\ln x + \frac{5}{x}+k$

b) $\int \frac{(x+1)^2}{2x}\, dx = \int \frac{x^2+2x+1}{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int x\, dx + \int 1 dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{4}+x+\frac{1}{2}\ln x + k$

28. Calcula estas integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{4}{1+(2x-1)^2}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \int \frac{x^2}{1+\left(x^3\right)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1+\left(x^3\right)^2}\,dx = \frac{1}{3}\,arc\ tg\left(x^3\right)+k$

b) $\displaystyle\int \frac{4}{1+(2x-1)^2}\,dx = 2\int \frac{2}{1+(2x-1)^2}\,dx = 2\,arc\ tg(2x-1)+k$

29. Halla estas integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{8x}{\sqrt{1-4x^4}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{8x}{\sqrt{1-4x^4}}\,dx = 2\int \frac{4x}{\sqrt{1-\left(2x^2\right)^2}}\,dx = 2\,arc\ sen\left(2x^2\right)+k$

b) $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{-4}{\sqrt{1-(4x)^2}}\,dx = \frac{1}{4}\,arc\ cos(4x)+k$

30. Calcula estas integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+6x+10}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-8x+17}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2-x+2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{3}{4x^2-8x+7}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+6x+10}\,dx = 2\int \frac{1}{1+(x+3)^2}\,dx = 2\,arc\ tg(x+3)+k$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-8x+17}\,dx = 2\int \frac{1}{1+(x-4)^2}\,dx = 2\,arc\ tg(x-4)+k$

c) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2-x+2}\,dx = 3\int \frac{1}{\frac{7}{4}+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx = \frac{12}{7}\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{4}{7}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2}\,dx = \frac{12}{7}\sqrt{\frac{7}{4}}\int \frac{3\cdot\sqrt{\frac{4}{7}}}{1+\left(\sqrt{\frac{4}{7}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2}\,dx =$

$\displaystyle= \frac{6\sqrt{7}}{7}\,arc\ tg\left(\sqrt{\frac{4}{7}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+k$

d) $\displaystyle\int \frac{3}{4x^2-8x+7}\,dx = 3\int \frac{1}{3+(2x-2)^2}\,dx = \int \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-2)\right)^2}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-2)\right)^2}\,dx =$

$\displaystyle= \frac{\sqrt{3}}{2}\,arc\ tg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-2)\right)+k$

31. Halla estas integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+6x+8}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-8x+7}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+6x+8}\,dx = \int \frac{2}{(x+2)(x+4)}\,dx = \int\left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+4}\right)dx \rightarrow 2 = A(x+4)+B(x+2) \rightarrow A=1, B=-1$

$\displaystyle\int\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)dx = \ln|x+2|-\ln|x+4|+k$

b) $\int \frac{2}{x^2-8x+7}\,dx = \int \frac{2}{(x-7)(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x-7}+\frac{B}{x-1}\right)dx \rightarrow 2 = A(x-1)+B(x-7) \rightarrow A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}$

$$\int \frac{2}{x^2-8x+7}\,dx = \int \left(\frac{1}{3(x-7)}-\frac{1}{3(x-1)}\right)dx = \frac{1}{3}\ln|x-7| - \frac{1}{3}\ln|x-1| + k$$

32. Calcula estas integrales.

a) $\int \frac{x+3}{x^2+6x+10}\,dx$ b) $\int \frac{x-2}{x^2-8x+17}\,dx$

a) $\int \frac{x+3}{x^2+6x+10}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+6x+10| + k$

b) $\int \frac{x-2}{x^2-8x+17}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4-4+4}{x^2-8x+17}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-8}{x^2-8x+17}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2-8x+17}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-8x+17| + 2\,arc\,tg(x-4) + k$$

33. Halla estas integrales.

a) $\int \frac{2x+1}{x^2+6x+8}\,dx$ b) $\int \frac{2x-3}{x^2-8x+7}\,dx$

a) $\int \frac{2x+1}{x^2+6x+8}\,dx = \int \frac{2x+1+5-5}{x^2+6x+8}\,dx = \int \frac{2x+6}{x^2+6x+8}\,dx - \int \frac{5}{x^2+6x+8}\,dx =$

$$= \ln|x^2+6x+8| + \int \left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+4}\right)dx = \ln|x^2+6x+8| - \int \frac{5}{2(x+2)}\,dx + \int \frac{5}{2(x+4)}\,dx =$$

$$= \ln|x^2+6x+8| - \frac{5}{2}\ln|x+2| + \frac{5}{2}\ln|x+4| + k$$

b) $\int \frac{2x-3}{x^2-8x+7}\,dx = \int \frac{2x-3-5+5}{x^2-8x+7}\,dx = \int \frac{2x-8}{x^2-8x+7}\,dx + \int \frac{5}{x^2-8x+7}\,dx = \ln|x^2-8x+7| + \int \left(\frac{A}{x-7}+\frac{B}{x-1}\right)dx$

$$= \ln|x^2-8x+7| + \int \frac{5}{6(x-7)}\,dx - \int \frac{5}{6(x-1)}\,dx = \ln|x^2-8x+7| + \frac{5}{6}\ln|x-7| - \frac{5}{6}\ln|x-1| + k$$

34. Halla la expresión de una función polinómica de segundo grado que tiene (1, 0) y (3, 0) como puntos de corte con el eje *X*, y cuya área limitada por la curva y los dos ejes coordenados vale $\frac{4}{3}$.

$f(x) = ax^2+bx+c$ $f(1) = a+b+c = 0$ $f(3) = 9a+3b+c = 0$

$$\int_0^1 (ax^2+bx+c)\,dx = \left[a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$F(0) = 0$ $F(1) = \frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c$

$$F(1)-F(0) = \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c = \frac{4}{3}$$

Resolvemos el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \\ 2a+3b+6c=8 \end{array}\right\} a=1, b=-4, c=3$$

La función cuadrática buscada es $f(x) = x^2-4x+3$.

35. **Encuentra a, b y c en la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabiendo que su gráfica pasa por los puntos de coordenadas $(0, -1)$ y $(1, 2)$ y además $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{5}{6}$.**

$f(0) = c = -1 \qquad f(1) = a + b + c = 2 \to a + b = 3$

$$\int_{-1}^{0}(ax^2 + bx + c)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{-1}^{0} = \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c = \frac{5}{6}$$

Resolvemos el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 3 \\ c = -1 \\ \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c = \frac{5}{6} \end{array}\right\} \to a = 4, b = -1, c = -1$$

La función cuadrática es $f(x) = 4x^2 - x - 1$.

36. **Halla el área comprendida entre las funciones.**

$$f(x) = x^2 + 3x - 2 \qquad g(x) = -x^2 + x + 10$$

Los puntos de corte de las dos gráficas son:

$x^2 + 3x - 2 = -x^2 + x + 10 \to x_1 = 2,\ x_2 = -3$

$$\left|\int_{-3}^{2}(f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_{-3}^{2}(2x^2 + 2x - 12)dx\right| = \left|\left[\frac{2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 12x\right]_{-3}^{2}\right| = \left|\frac{16}{3} + 4 - 24 - (-18 + 9 + 36)\right| = \left|\frac{-125}{3}\right| = \frac{125}{3}$$

37. **¿Qué área encierran estas funciones?**

$$f(x) = x + 4 \qquad g(x) = -x + 2 \qquad h(x) = \frac{x}{2} + 2$$

El punto de corte de $f(x)$ y $g(x)$ es $(-1, 3)$. El punto de corte de $g(x)$ y $h(x)$ es $(0, 2)$.

El punto de corte de $f(x)$ y $h(x)$ es $(-4,0)$.

$$\left|\int_{-4}^{-1}(f(x) - h(x))dx\right| + \left|\int_{-1}^{0}(g(x) - h(x))dx\right| = \left|\int_{-4}^{1}\left(\frac{x}{2} + 2\right)dx\right| + \left|\int_{-1}^{0} -\frac{3x}{2}\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{4} + 2x\right]_{-4}^{-1}\right| + \left|\left[-\frac{3x^2}{4}\right]_{-1}^{0}\right| = 3$$

ACTIVIDADES FINALES

38. **Comprueba si las funciones $F(x)$ son primitivas de $f(x)$.**

a) $F(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 1 \qquad f(x) = 3x^2 - 12x + 2$

b) $F(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 9{,}5 \qquad f(x) = 6x - 12x^2 - \frac{3}{2}x^2$

c) $F(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} \qquad f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$

d) $F(x) = \operatorname{sen} x \cos x \qquad f(x) = 2\cos^2 x - 1$

e) $F(x) = \ln\frac{x^2}{x + 1} \qquad f(x) = \frac{x + 2}{x(x + 1)}$

a) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = 3x^2 - 12x + 2$

b) $F(x)$ no es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = 6x^2 - 2x - 3$

c) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = \dfrac{2x \cdot (x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$

d) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = \cos x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x\,(-\operatorname{sen} x) =$
$= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$

e) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{x^2}{x+1}} \cdot \dfrac{2x \cdot (x+1) - x^2}{(x+1)^2} =$
$= \dfrac{x^2 + 2x}{x^2(x+1)} = \dfrac{x+2}{x(x+1)}$

39. **Comprueba que $F(x) = 2x^2 - 3x + 2\sqrt{x}$ es una primitiva de la función $f(x) = 4x - 3 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.**
De todas las primitivas de esta función halla aquella que cumple que $F(1) = 5$.

F(x) es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = 4x - 3 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Las primitivas de $f(x)$ son de la forma: $F(x) = 2x^2 - 3x + 2\sqrt{x} + k$

$F(1) = 2 - 3 + 2 + k = 5 \to k = 4$

40. **La pendiente de la recta tangente a una curva en cualquiera de sus puntos es $6x$.**
Averigua la función de la que se trata, si se sabe que pasa por el origen de coordenadas.

$F(x) = \int 6x\,dx = 3x^2 + k$ $\quad\quad F(0) = k = 0$

41. **Calcula las siguientes integrales.**

a) $\int (6x^2 - 4x + 3)\,dx$

b) $\int (5x^2 + 3x - 2)\,dx$

c) $\int \left(\dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{3}{4}x^2 - 2x\right) dx$

d) $\int (0{,}3x^3 + 1{,}3x^2 - 0{,}2)\,dx$

e) $\int \left(-\dfrac{3}{7}x^5 + \dfrac{1}{5}x^3 - \dfrac{7}{4}x^2\right) dx$

a) $\int (6x^2 - 4x + 3)\,dx = 2x^3 - 2x^2 + 3x + k$

b) $\int (5x^2 + 3x - 2)\,dx = \dfrac{5x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - 2x + k$

c) $\int \left(\dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{3}{4}x^2 - 2x\right) dx = \dfrac{x^5}{15} - \dfrac{x^3}{4} - x^2 + k$

d) $\int (0{,}3x^3 + 1{,}3x^2 - 0{,}2)\,dx = \dfrac{3x^4}{40} + \dfrac{13x^3}{30} - \dfrac{x}{5} + k$

e) $\int \left(-\dfrac{3}{7}x^5 + \dfrac{1}{5}x^3 - \dfrac{7}{4}x^2\right) dx = -\dfrac{x^6}{14} + \dfrac{x^4}{20} - \dfrac{7x^3}{12} + k$

42. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \frac{1}{x}\,dx$

b) $\int \frac{3}{x^4}\,dx$

c) $\int \frac{-2}{5x^3}\,dx$

d) $\int \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$

e) $\int (3x^{-2} + 1)\,dx$

f) $\int \left(\frac{2}{3}x^{-3} + \frac{5}{x}\right) dx$

a) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + k$

b) $\int \frac{3}{x^4}\,dx = -\frac{1}{x^3} + k$

c) $\int \frac{-2}{5x^3}\,dx = \frac{1}{5x^2} + k$

d) $\int \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int \frac{3}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx = 3\ln x + \frac{1}{x} + k$

e) $\int (3x^{-2} + 1)\,dx = 3\int x^{-2}\,dx + \int 1\,dx = -\frac{3}{x} + x + k$

f) $\int \left(\frac{2}{3}x^{-3} + \frac{5}{x}\right) dx = \frac{2}{3}\int x^{-3}\,dx + 5\int \frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{3x^2} + 5\ln x + k$

43. Calcula estas integrales.

a) $\int \left(\frac{5}{4x^3} + \frac{4}{x^2} - x^3 + 2x - 1\right) dx$

b) $\int (-3x^5 + 3x^2 - 5x + 2x^{-1} - 6x^{-2} + 11)\,dx$

c) $\int \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{-12}{x} - x(x^2 - 7x - 5)\right) dx$

a) $\int \left(\frac{5}{4x^3} + \frac{4}{x^2} - x^3 + 2x - 1\right) dx = -\frac{5}{8x^2} - \frac{4}{x} - \frac{x^4}{4} + x^2 - x + k$

b) $\int (-3x^5 + 3x^2 - 5x + 2x^{-1} - 6x^{-2} + 11)\,dx = -\frac{x^6}{2} + x^3 - \frac{5x^2}{2} + 2\ln x + \frac{6}{x} + 11x + k$

c) $\int \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{-12}{x} - x\left(x^2 - 7x - 5\right)\right) dx = \int \left(\frac{-1}{x^2} - \frac{12}{x} - x^3 + 7x^2 + 5x\right) dx = \frac{1}{x} - 12\ln x - \frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + k$

44. Resuelve las siguientes integrales.

a) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right) dx$

b) $\int \left(2x - \frac{1}{x^5}\right) dx$

c) $\int \left(5 - \frac{7}{x^4} + 2x\right) dx$

d) $\int \left(\frac{x^3 + 2x}{5} + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right) dx$

e) $\int \left(3x - \frac{4}{3}x^{-1} + 5\right) dx$

f) $\int \left(\frac{3x^4}{5} + \frac{x - 1}{2} - \frac{3}{x^4}\right) dx$

a) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right) dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + k$

b) $\int \left(2x - \frac{1}{x^5}\right) dx = x^2 + \frac{1}{4x^4} + k$

c) $\int \left(5 - \frac{7}{x^4} + 2x\right) dx = 5x + \frac{7}{3x^3} + x^2 + k$

d) $\int \left(\frac{x^3 + 2x}{5} + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right) dx = \frac{x^4}{20} + \frac{x^2}{5} + 2\ln x - \frac{5}{x} + k$

e) $\int \left(3x - \frac{4}{3}x^{-1} + 5\right) dx = \frac{3x^2}{2} - \frac{4}{3}\ln x + 5x + k$

f) $\int \left(\frac{3x^4}{5} + \frac{x - 1}{2} - \frac{3}{x^4}\right) dx = \frac{3x^5}{25} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{x^3} + k$

45. Calcula estas integrales de funciones potenciales.

a) $\int (2x-1)^{-1}\,dx$

b) $\int \frac{4}{5x-7}\,dx$

c) $\int \left(\frac{x^2}{3}+1\right)^2 dx$

d) $\int (3x-2)\,dx$

e) $\int \frac{x}{2x^2-1}\,dx$

f) $\int \frac{4x^2}{x^3+1}\,dx$

a) $\int (2x-1)^{-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\ln|2x-1|+k$

b) $\int \frac{4}{5x-7}dx = \frac{4}{5}\int \frac{5}{5x-7}dx = \frac{4}{5}\ln|5x-7|+k$

c) $\int \left(\frac{x^2}{3}+1\right)^2 dx = \int \left(\frac{x^4}{9}+\frac{2x^2}{3}+1\right)dx = \frac{x^5}{45}+\frac{2x^3}{9}+x+k$

d) $\int (3x-2)dx = \frac{3x^2}{2}-2x+k$

e) $\int \frac{x}{2x^2-1}dx = \frac{1}{4}\ln|2x^2-1|+k$

f) $\int \frac{4x^2}{x^3+1}dx = \frac{4}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx = \frac{4}{3}\ln|x^3+1|+k$

46. Resuelve estas integrales.

a) $\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x-3}\,dx$

b) $\int 8x\sqrt[4]{(x^2-5)^3}\,dx$

c) $\int e^{3x}\sqrt[5]{e^{3x-2}+7}\,dx$

d) $\int e^{2x}\sqrt{e^{2x-6}-2}\,dx$

e) $\int \cos 2x\sqrt{\operatorname{sen} 2x+1}\,dx$

f) $\int (1+\operatorname{sen} x)\sqrt{\cos x - x}\,dx$

a) $\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x-3}\,dx = \frac{1}{2}\int 2(x+1)\sqrt[3]{x^2+2x-3}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^4}+k$

b) $\int 8x\sqrt[4]{(x^2-5)^3}\,dx = 4\int 2x\sqrt[4]{(x^2-5)^3}\,dx = \frac{16}{7}\sqrt[4]{(x^2-5)^7}+k$

c) $\int e^{3x}\sqrt[5]{e^{3x-2}+7}\,dx = \frac{e^2}{3}\int 3e^{3x-2}\sqrt[5]{e^{3x-2}+7}\,dx = \frac{5e^2\sqrt[5]{(e^{3x-2}+7)^6}}{18}+k$

d) $\int e^{2x}\sqrt{e^{2x-6}-2}\,dx = \frac{e^6}{2}\int 2e^{2x-6}\sqrt{e^{2x-6}-2}\,dx = \frac{1}{3}e^6\sqrt{(e^{2x-6}-2)^3}+k$

e) $\int \cos 2x\sqrt{\operatorname{sen} 2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\sqrt{\operatorname{sen} 2x+1}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(\operatorname{sen} 2x+1)^3}+k$

f) $\int (1+\operatorname{sen} x)\sqrt{\cos x - x}\,dx = -\int -(1+\operatorname{sen} x)\sqrt{\cos x - x}\,dx = -\frac{2}{3}\sqrt{(\cos x - x)^3}+k$

47. Resuelve estas integrales.

a) $\int e^{2x}dx$

b) $\int xe^{x^2}dx$

c) $\int e^{\frac{3x}{4}}dx$

d) $\int 5^{2x+1}dx$

e) $\int 2^{\frac{x+1}{2}}dx$

f) $\int 3xe^{x^2+1}dx$

a) $\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + k$

b) $\int x e^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + k$

c) $\int e^{\frac{3x}{4}} dx = \frac{4}{3}e^{\frac{3x}{4}} + k$

d) $\int 5^{2x+1}dx = \frac{1}{2\ln 5}5^{2x+1} + k$

e) $\int 2^{\frac{x+1}{2}} dx = \int 2^{\frac{x}{2}}\sqrt{2}\, dx = 2\sqrt{2}\int \frac{1}{2}2^{\frac{x}{2}} dx = \frac{2^{\frac{x+3}{2}}}{\ln 2} + k$

f) $\int 3xe^{x^2+1} dx = \frac{3}{2}\int 2xe^{x^2+1} dx = \frac{3}{2}e^{x^2+1} + k$

48. **Realiza las siguientes integrales de funciones trigonométricas.**

a) $\int -\cos(x-2)\, dx$

b) $\int 2x\, \text{sen}\, x^2\, dx$

c) $\int (1 + tg^2\, 2x)\, dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, \text{sen}\, \sqrt{x}\, dx$

e) $\int \cos^2 x\, \text{sen}\, x\, dx$

f) $\int \frac{1}{\cos^2 3x}\, dx$

a) $\int -\cos(x-2)dx = -\text{sen}(x-2) + k$

b) $\int 2x\, \text{sen}\, x^2\, dx = -\cos x^2 + k$

c) $\int (1+tg^2 2x)dx = \frac{1}{2} tg\, 2x + k$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, \text{sen}\, \sqrt{x}\, dx = -2\cos\sqrt{x} + k$

e) $\int \cos^2 x\, \text{sen}\, x\, dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + k$

f) $\int \frac{1}{\cos^2 3x} dx = \frac{1}{3} tg\, 3x + k$

49. **Calcula las siguientes integrales de funciones trigonométricas inversas.**

a) $\int \frac{x}{1+x^4}\, dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\, dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-5x^2}}\, dx$

d) $\int \frac{\cos x}{-1-\text{sen}^2 x}\, dx$

e) $\int \frac{1}{x + x\ln^2 x}\, dx$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}\, dx$

a) $\int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \text{arc tg}\, x^2 + k$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} dx = -\text{arc sen}(1-x) + k$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-5x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{arc sen}(\sqrt{5}x) + k$

d) $\int \frac{\cos x}{-1-\text{sen}^2 x} dx = -\text{arc tg}(\text{sen}\, x) + k$

e) $\int \frac{1}{x + x\ln^2 x} dx = \int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx = \text{arc tg} \ln x + k$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx = \int \frac{x}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}} dx = \frac{1}{2} \text{arc sen}\left(\frac{x^2}{2}\right) + k$

50. **Calcula estas integrales.**

a) $\int (\text{sen}\, x + 2\cos x)\, dx$

b) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

c) $\int \frac{-3}{x^2+1} dx$

d) $\int (2^x + e^x)\, dx$

e) $\int \frac{6}{\sqrt{x}}\, dx$

f) $\int -\frac{3}{\sqrt{1-3x}}\, dx$

a) $\int (sen\ x + 2\cos\ x)\,dx = -\cos\ x + 2\,sen\ x + k$

b) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 5\,arc\,sen\ x + k$

c) $\int \frac{-3}{x^2+1}\,dx = -3\,arc\,tg\ x + k$

d) $\int (2^x + e^x)\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + e^x + k$

e) $\int \frac{6}{\sqrt{x}}\,dx = 12\sqrt{x} + k$

f) $\int -\frac{3}{\sqrt{1-3x}}\,dx = 2\sqrt{1-3x} + k$

51. Resuelve las siguientes integrales.

a) $\int (4x^4 - 5x^2 + 6x - 4)\,dx$

b) $\int (2x - 2)\cos(-x^2 + 2x)\,dx$

c) $\int (sen\,x + 5\cos\ x - 1)\,dx$

d) $\int (\cos\,x\,sen^2\,x + \cos^2 x\,sen\,x)\,dx$

a) $\int (4x^4 - 5x^2 + 6x - 4)dx = \frac{4x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 3x^2 - 4x + k$

c) $\int (sen\,x + 5\cos\,x - 1)dx = -\cos\,x + 5\,sen\,x - x + k$

b) $\int (2x-2)\cos(-x^2+2x)\,dx = -sen(-x^2+2x) + k$

d) $\int (\cos\,x\,sen^2 x + \cos^2 x\,sen\,x)dx = \frac{sen^3 x}{3} - \frac{\cos^3 x}{3} + k$

52. Calcula las integrales que aparecen a continuación.

a) $\int \frac{-3}{1+x^2}\,dx$

b) $\int (4x+2)(x-1)\,dx$

c) $\int \frac{x+1}{3\sqrt{x+1}}\,dx$

d) $\int \frac{2e^x + e^{2x}}{e^x}\,dx$

e) $\int \frac{3x}{4+8x^2}\,dx$

f) $\int \frac{1}{4x^2 - 12x + 10}\,dx$

a) $\int \frac{-3}{1+x^2}\,dx = -3\,arc\,tg x + k$

b) $\int (4x+2)(x-1)dx = \frac{4x^3}{3} - x^2 - 2x + k$

c) $\int \frac{x+1}{3\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{1}{3}\int (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{9}\sqrt{(x+1)^3} + k$

d) $\int \frac{2e^x + e^{2x}}{e^x}\,dx = \int (2 + e^x)dx = 2x + e^x + k$

e) $\int \frac{3x}{4+8x^2}\,dx = \frac{3}{16}\int \frac{4x}{1+2x^2}\,dx = \frac{3}{16}\ln|1+2x^2| + k$

f) $\int \frac{1}{4x^2-12x+10}\,dx = \int \frac{1}{1+(2x-3)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,arc\,tg(2x-3) + k$

53. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \frac{-x}{x^2+3}\,dx$

b) $\int \frac{1}{(1+x^2)\,arc\,tg\ x}\,dx$

c) $\int \frac{1}{2x\sqrt{x}}\,dx$

d) $\int \frac{-\ln 3}{x\ln^2 x}\,dx$

e) $\int tg\ 3x\,dx$

f) $\int \frac{1-x}{1+(x-1)^2}\,dx$

g) $\int \frac{\cos\ x}{sen\ x}\,dx$

h) $\int \frac{tg\ x}{\cos\ x}\,dx$

a) $\int \frac{-x}{x^2+3}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left|x^2+3\right| + k$

b) $\int \frac{1}{(1+x^2)\,arc\ tg\ x}\,dx = \ln|arc\ tg\ x| + k$

c) $\int \frac{1}{2x\sqrt{x}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{x}} + k$

d) $\int \frac{-\ln 3}{x\ \ln^2 x}\,dx = \frac{\ln 3}{\ln x} + k$

e) $\int tg\ 3x\ dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3\ sen\ 3x}{cos\ 3x}\,dx = -\frac{1}{3}\ln|cos\ 3x| + k$

f) $\int \frac{1-x}{1+(x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left|(x-1)^2+1\right| + k$

g) $\int \frac{cos\ x}{sen\ x}\,dx = \ln|sen\ x| + k$

h) $\int \frac{sen\ x}{cos^2 x}\,dx = \frac{1}{cos\ x} + k$

54. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \frac{7e^x}{(e^x+4)^4}\,dx$

b) $\int \frac{sen\ x - cos\ x}{(cos\ x + sen\ x)^2}\,dx$

c) $\int \frac{sen\ x}{(cos\ x + 5)^3}\,dx$

d) $\int \frac{2\ cos\ x - x\ sen\ x}{(x\ cos\ x + sen\ x)^2}\,dx$

e) $\int \frac{sen\ x - cos\ x}{1 + 2\ sen\ x \cdot cos\ x}\,dx$

a) $\int \frac{7e^x}{(e^x+4)^4}\,dx = \frac{-7}{3(e^x+4)^3} + k$

b) $\int \frac{sen\ x - cos\ x}{(cos\ x + sen\ x)^2}\,dx = \frac{1}{cos\ x + sen\ x} + k$

c) $\int \frac{sen\ x}{(cos\ x + 5)^3}\,dx = \frac{1}{2(cos\ x + 5)^2} + k$

d) $\int \frac{2\ cos\ x - x\ sen\ x}{(x\ cos\ x + sen\ x)^2}\,dx = \frac{-1}{x\ cos\ x + sen\ x} + k$

e) $\int \frac{sen\ x - cos\ x}{1 + 2\ sen\ x \cdot cos\ x}\,dx = \int \frac{sen\ x - cos\ x}{sen^2 x + cos^2 x + 2\ sen\ x \cdot cos\ x}\,dx = \int \frac{sen\ x - cos\ x}{(sen\ x + cos\ x)^2}\,dx = \frac{1}{sen\ x + cos\ x} + k$

55. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \left(\frac{-4}{x^2} + \frac{12}{1+x^2}\right)dx$

b) $\int \left(\frac{3x\sqrt[3]{4x^2}}{7}\right)dx$

c) $\int \left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

d) $\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}\,dx$

a) $\int \left(\frac{-4}{x^2} + \frac{12}{1+x^2}\right)dx = \frac{4}{x} + 12\ arc\ tg\ x + k$

b) $\int \left(\frac{3x\sqrt[3]{4x^2}}{7}\right)dx = \frac{9\sqrt[3]{4}}{56}\sqrt[3]{x^8} + k$

c) $\int \left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + k$

d) $\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}\,dx = -\frac{1}{4(e^{2x}+1)^2} + k$

56. **¿Son ciertas las siguientes igualdades?**

a) $\int [f(x)\cdot g(x)]\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int g(x)\,dx\right)$

b) $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

Justifica las respuestas utilizando las funciones $f(x) = x + 1$ y $g(x) = 2x^3$.

a) $\int (f(x)\cdot g(x))dx = \int (2x^4+2x^3)dx = \frac{2x^5}{5}+\frac{x^4}{2}$

$\int f(x)dx = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2}+x$

$\int g(x)dx = \int 2x^3\,dx = \frac{x^4}{2}$

No es cierta la igualdad porque $\left(\int f(x)dx\right)\cdot\left(\int g(x)dx\right)$ es de grado seis y $\int (f(x)\cdot g(x))dx$ es de grado cinco.

b) $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int \frac{x+1}{2x^3}dx = -\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x^2}$

$\frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx} = \frac{\frac{x^2}{2}+x}{\frac{x^4}{2}} = \frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}$

No es cierta la igualdad.

57. **Calcula las integrales.**

a) $\int \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx$

b) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{6x-7}}\,dx$

c) $\int (x^2-\sqrt{x}+2)^2\,dx$

d) $\int \frac{9}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

a) $\int \frac{1}{\sqrt{x-3}}dx = \int (x-3)^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{x-3}+k$

b) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{6x-7}}dx = \frac{1}{3}\int 6(6x-7)^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{\sqrt[3]{(6x-7)^2}}{2}+k$

c) $\int (x^2-\sqrt{x}+2)^2dx = \int \left(x^4-2x^{\frac{5}{2}}+4x^2+x-4x^{\frac{1}{2}}+4\right)dx = \frac{x^5}{5}-\frac{4x^{\frac{7}{2}}}{7}+\frac{4x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{8x^{\frac{3}{2}}}{3}+4x+k$

d) $\int \frac{9}{\sqrt{2x+1}}dx = \frac{9}{2}\int 2(2x+1)^{-\frac{1}{2}}dx = 9\sqrt{2x+1}+k$

58. **Calcula las siguientes integrales definidas.**

a) $\int_{-2}^{1}(3x^4-2x+7)\,dx$

b) $\int_{-5}^{-1}(x^2-1)\,dx$

c) $\int_{0}^{3}(x^3-5x^2+x-1)\,dx$

d) $\int_{-3}^{0}(9x^3-x)\,dx$

e) $\int_{-3}^{3}(2x^4-x^2+5)\,dx$

f) $\int_{-5}^{-2}(4x^3-6x^2+1)\,dx$

a) $F(x)=\int(3x^4-2x+7)dx=\frac{3x^5}{5}-x^2+7x$

$F(1)-F(-2)=\left(\frac{3}{5}-1+7\right)-\left(-\frac{96}{5}-4-14\right)=\frac{219}{5}$

b) $F(x)=\int(x^2-1)\,dx=\frac{x^3}{3}-x$

$F(-1)-F(-5)=\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(-\frac{125}{3}+5\right)=\frac{112}{3}$

c) $F(x)=\int(x^3-5x^2+x-1)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x$

$F(3)-F(0)=\left(\frac{81}{4}-45+\frac{9}{2}-3\right)-0=-\frac{93}{4}$

d) $F(x)=\int(9x^3-x)dx=\frac{9x^4}{4}-\frac{x^2}{2}$

$F(0)-F(-3)=0-\left(\frac{729}{4}-\frac{9}{2}\right)=\frac{711}{4}$

e) $F(x)=\int(2x^4-x^2+5)dx=\frac{2x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+5x$

$F(3)-F(-3)=2\left(\frac{2\cdot3^5}{5}-3^2+5\cdot3\right)=\frac{1032}{5}$

f) $F(x)=\int(4x^3-6x^2+1)dx=x^4-2x^3+x$

$F(-2)-F(-5)=(16+16-2)-(625+250-5)=-840$

59. **Calcula estas integrales definidas.**

a) $\int_1^2\frac{1}{2x}dx$

b) $\int_0^2 xe^{x^2}dx$

c) $\int_{-\pi}^{\pi}sen\,x\,dx$

d) $\int_0^{\pi}1+tg^2\frac{x}{4}\,dx$

a) $\int_1^2\frac{1}{2x}dx=\left[\frac{1}{2}\ln x\right]_1^2=\frac{1}{2}\ln 2$

b) $\int_0^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^2=\frac{1}{2}(e^4-1)$

c) $\int_{-\pi}^{\pi}sen\,x\,dx=[-cos\,x]_{-\pi}^{\pi}=0$

d) $\int_0^{\pi}\left(1+tg^2\frac{x}{4}\right)dx=\left[4\,tg\left(\frac{x}{4}\right)\right]_0^{\pi}=4$

60. **Resuelve.**

a) $\int_2^5\frac{4}{x+2}dx$

b) $\int_{-5}^{-3}\frac{6}{x^2}dx$

c) $\int_2^4\left(x-\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x^2}\right)dx$

d) $\int_{-1}^{1}\frac{2}{1+x^2}dx$

e) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

f) $\int_{-1}^{3}\frac{8}{\sqrt{x+4}}dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos x-2\,sen\,x)\,dx$

h) $\int_1^2\frac{4}{x^5}dx$

a) $F(x)=\int\frac{4}{x+2}\,dx=4\ln|x+2|$

$$\int_2^5\frac{4}{x+2}\,dx=F(5)-F(2)=4\ln 7-4\ln 4=4\ln\frac{7}{4}$$

b) $F(x)=\int\frac{6}{x^2}\,dx=-\frac{6}{x}$

$$\int_{-5}^{-3}\frac{6}{x^2}\,dx=F(-3)-F(-5)=2-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}$$

c) $F(x) = \int \left(x - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x-1| - \frac{4}{x}$

$\int_2^4 \left(x - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2}\right) dx = F(4) - F(2) = 7 - \ln 3 - \ln 1 = 7 - \ln 3$

d) $F(x) = \int \frac{2}{1+x^2} dx = 2 \text{ arc tg } x$

$\int_{-1}^{1} \frac{2}{1+x^2} dx = F(1) - F(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

e) $F(x) = \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \text{ arc sen } x$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$

f) $F(x) = \int \frac{8}{\sqrt{x+4}} dx = 16\sqrt{x+4}$

$\int_{-1}^{3} \frac{8}{\sqrt{x+4}} dx = F(3) - F(-1) = 16\sqrt{7} - 16\sqrt{3}$

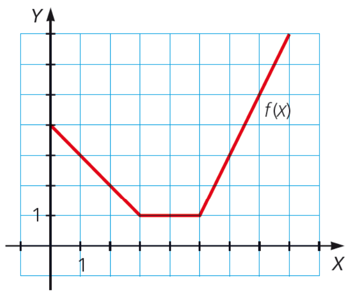
g) $F(x) = \int (3 \cos x - 2 \text{ sen } x)\, dx = -3 \text{ sen } x + 2 \cos x$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos x - 2 \text{ sen } x)\, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = -3 - 5 = -8$

h) $F(x) = \int \frac{4}{x^5} dx = -\frac{1}{x^4}$

$\int_1^2 \frac{4}{x^5} dx = F(2) - F(1) = -\frac{1}{16} + 1 = \frac{15}{16}$

61. **Completa en tu cuaderno la tabla con la función representada en el gráfico.**



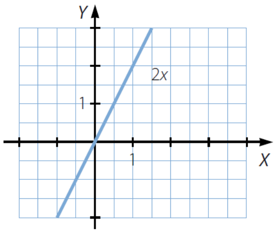
x	1	2	3	4	5
Área entre 0 y x					

x	1	2	3	4	5
Área entre 0 y x	$\frac{7}{2}$	6	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{19}{2}$

62. **Representa la función $f(x) = 2x$ y completa en tu cuaderno la tabla de su función integral.**

x	1	2	3	4	5
Área entre 0 y x					

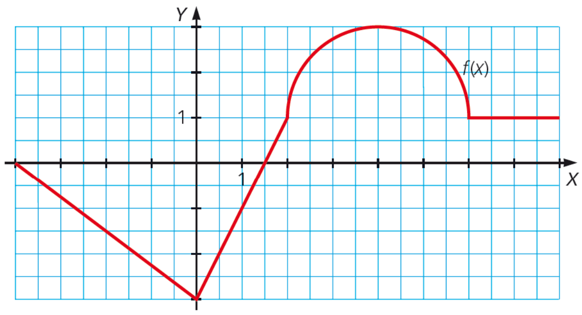
Halla la expresión analítica de dicha función.



x	1	2	3	4	5
Área entre 0 y x	1	4	9	16	25

La expresión analítica de la función es: $F(x) = x^2$

63. **Calcula cada una de las siguientes integrales a partir de la gráfica de $f(x)$.**



a) $\int_{-4}^{0} f(x)\,dx$ b) $\int_{4}^{7} f(x)\,dx$ c) $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$ d) $\int_{6}^{8} f(x)\,dx$

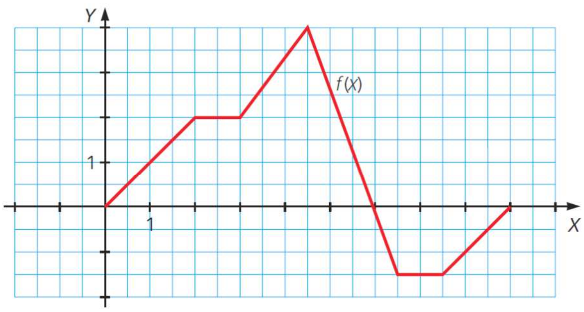
a) $\int_{-4}^{0} f(x)dx = -6$

c) $\int_{0}^{4} f(x)dx = -2{,}25 + 0{,}25 + \pi + 2 = \pi$

b) $\int_{4}^{7} f(x)dx = \pi + 3$

d) $\int_{6}^{9} f(x)dx = 3$

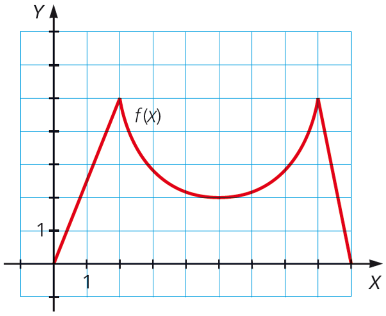
64. **Calcula cada una de las siguientes integrales a partir de la gráfica de $f(x)$.**



a) $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$ b) $\int_{2}^{3} f(x)\,dx$ c) $\int_{3}^{6} f(x)\,dx$ d) $\int_{6}^{9} f(x)\,dx$ e) ¿Cuál es el valor de $\int_{0}^{9} f(x)\,dx$?

a) $\int_{0}^{2} f(x)dx = 2$ b) $\int_{2}^{3} f(x)dx = 2$ c) $\int_{3}^{6} f(x)dx = 7{,}5$ d) $\int_{6}^{9} f(x)dx = -3$ e) $\int_{0}^{9} f(x)dx = 8{,}5$

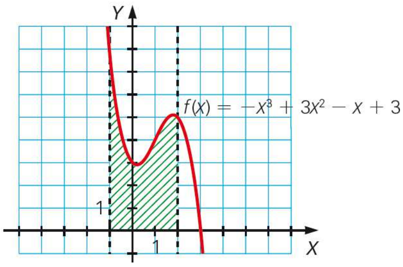
65. **Determina el área que queda situada bajo la función y sobre el eje *X* en los intervalos [0, 2], [2, 5], [2, 8], [8, 9], [0, 5] y [5, 9].**



$A([0, 2]) = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$ $\qquad A([2, 8]) = \frac{60 - 9\pi}{2}$ $\qquad A([0, 5]) = 5 + \frac{60 - 9\pi}{4} = \frac{80 - 9\pi}{4}$

$A([2, 5]) = \frac{60 - 9\pi}{4}$ $\qquad A([8, 9]) = \frac{1 \cdot 5}{2} = \frac{5}{2}$ $\qquad A([5, 9]) = \frac{60 - 9\pi}{4} + \frac{5}{2} = \frac{70 - 9\pi}{4}$

66. **Calcula el área sombreada.**



$$F(x) = \int (-x^3 + 3x^2 - x + 3)dx = -\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \quad \rightarrow \quad \left|\int_{-1}^{2} (-x^3 + 3x^2 - x + 3)dx\right| = |F(2) - F(-1)| = \frac{51}{4}$$

67. **Determina el área de la región comprendida entre la función, el eje *X* y las abscisas indicadas.**

a) $f(x) = 3x^2 - 2x$ $\qquad x = 2,\ x = 4$

b) $f(x) = x^3 - x^2 + 5x + 1$ $\qquad x = 1,\ x = 3$

c) $f(x) = 5^x$ $\qquad x = -1,\ x = 2$

d) $f(x) = \frac{4}{x^2}$ $\qquad x = 3,\ x = 8$

e) $f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad x = \pi,\ x = \frac{3\pi}{2}$

a) $F(x) = \int (3x^2 - 2x)dx = x^3 - x^2$ $\qquad A = |F(4) - F(2)| = |48 - 4| = 44$

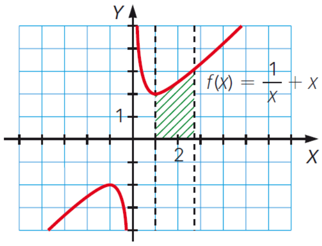
b) $F(x) = \int (x^3 - x^2 + 5x + 1)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + x$ $\qquad A = |F(3) - F(1)| = \left|\frac{147}{4} - \frac{41}{12}\right| = \frac{100}{3}$

c) $F(x) = \int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5}$ $\qquad A = |F(2) - F(-1)| = \left|\frac{25}{\ln 5} - \frac{1}{5\ln 5}\right| = \frac{124}{5\ln 5}$

d) $F(x) = \int \frac{4}{x^2}dx = -\frac{4}{x}$ $\qquad A = |F(8) - F(3)| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right| = \frac{5}{6}$

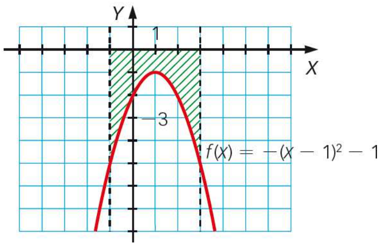
e) $F(x) = \int \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)dx = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad A = \left|F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F(\pi)\right| = |1 - 0| = 1$

68. **Calcula el área de la región comprendida entre la función $f(x) = \frac{1}{x} + x$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = e$.**



$$\left|\int_1^e \left(\frac{1}{x} + x\right) dx\right| = \left|\left[\ln x + \frac{x^2}{2}\right]_1^e\right| = \frac{1+e^2}{2}$$

69. **Calcula el área sombreada.**



$$\left|\int_{-1}^3 (-x^2 + 2x - 2) dx\right| = \left|\left[-\frac{x^3}{3} + x^2 - 2x\right]_{-1}^3\right| = \frac{28}{3}$$

70. **Calcula el área de la zona limitada por la función, el eje de abscisas y las rectas verticales que se indican. Ten en cuenta que las funciones pueden cortar al eje X.**

a) $f(x) = 3x^2 + 16x - 12$ $\quad x = -7, x = 0$

b) $f(x) = 2x^2 + 6x - 20$ $\quad x = -1, x = 5$

c) $f(x) = 2x^3 - 19x^2 + 49x - 20$ $\quad x = -1, x = 3$

d) $f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad x = 0, x = \pi$

e) $f(x) = 4^x - 4$ $\quad x = 0, x = 2$

a) $f(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 16x - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$

$$F(x) = \int (3x^2 + 16x - 12)\, dx = x^3 + 8x^2 - 12x$$

$$\left|\int_{-7}^{-6} (3x^2 + 16x - 12)\, dx\right| + \left|\int_{-6}^{0} (3x^2 + 16x - 12)\, dx\right| =$$

$$= |F(-6) - F(-7)| + |F(0) - F(-6)| = |144 - 133| + |0 - 144| = 155$$

b) $f(x) = 0 \rightarrow 2x^2 + 6x - 20 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 2 \end{cases}$

$$F(x) = \int (2x^2 + 6x - 20)\, dx = \frac{2x^3}{3} + 3x^2 - 20x$$

$$\int_{-1}^{2} (2x^2 + 6x - 20)\, dx + \int_{2}^{5} (2x^2 + 6x - 20)\, dx = |F(2) - F(-1)| + |F(5) - F(2)| = \left|-\frac{68}{3} - \frac{67}{3}\right| + \left|\frac{175}{3} + \frac{68}{3}\right| = 126$$

c) $f(x) = 0 \rightarrow 2x^3 - 19x^2 + 49x - 20 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 4 \\ x = 5 \end{cases}$

$$F(x) = \int (2x^3 - 19x^2 + 49x - 20)\, dx = \frac{x^4}{2} - \frac{19x^3}{3} + \frac{49x^2}{2} - 20x$$

$$\left|\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2x^3 - 19x^2 + 49x - 20)\, dx\right| + \left|\int_{\frac{1}{2}}^{3} (2x^3 - 19x^2 + 49x - 20)\, dx\right| =$$

$$= \left|F\left(\frac{1}{2}\right) - F(-1)\right| + \left|F(3) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|-\frac{445}{96} - \frac{154}{3}\right| + \left|30 + \frac{445}{96}\right| = \frac{4\,349}{48}$$

d) $f(x) = 0 \rightarrow sen\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$

$$F(x) = \int sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = -cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx\right| =$$

$$= \left|F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)\right| + \left|F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = |-1 - 0| + |0 + 1| = 2$$

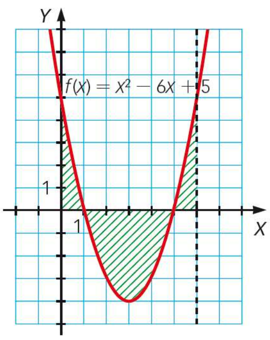
e) $f(x) = 0 \rightarrow 4^x - 4 = 0 \rightarrow x = 1$

$$F(x) = \int (4^x - 4)\, dx = \frac{4^x}{\ln 4} - 4x$$

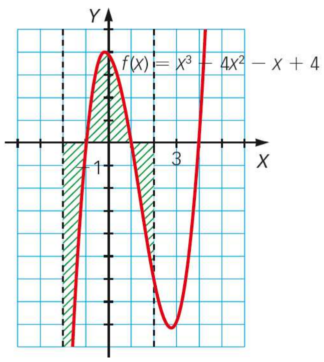
$$\left|\int_{0}^{1} (4^x - 4)\, dx\right| + \left|\int_{1}^{2} (4^x - 4)\, dx\right| = |F(1) - F(0)| + |F(2) - F(1)| = \left|\frac{4}{\ln 4} - 4 - \frac{1}{\ln 4}\right| + \left|\frac{16}{\ln 4} - 8 - \frac{4}{\ln 4} + 4\right| = 6{,}48$$

71. **Calcula el área de la región comprendida entre la función, el eje *X* y las rectas dibujadas en las siguientes gráficas.**

a)



b)



a) $\left|\int_0^1 (x^2 - 6x + 5)dx\right| + \left|\int_1^5 (x^2 - 6x + 5)dx\right| + \left|\int_5^6 (x^2 - 6x + 5)dx\right| =$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x\right]_1^5\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x\right]_5^6\right| = \left|\frac{7}{3}\right| + \left|-\frac{32}{3}\right| + \left|\frac{7}{3}\right| = \frac{46}{3}$$

b) $\left|\int_{-2}^{-1} (x^3 - 4x^2 - x + 4)dx\right| + \left|\int_{-1}^{1} (x^3 - 4x^2 - x + 4)dx\right| + \left|\int_{1}^{2} (x^3 - 4x^2 - x + 4)dx\right| =$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-2}^{-1}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{1}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_{1}^{2}\right| = \left|-\frac{91}{12}\right| + \left|\frac{64}{12}\right| + \left|-\frac{37}{12}\right| = 16$$

72. **Calcula el área de la región limitada por el eje X, las rectas verticales $x = -1$ y $x = 2$ y la gráfica de esta función.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\left|\int_{-1}^{0} x^2\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} \sqrt{x}\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_{0}^{2}\right| = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

73. **Calcula el área de la región limitada por el eje X y la gráfica de esta función.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x & \text{si } x < -1 \\ 2x - 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 3x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Cortes con el eje X: $x^2 + 5x = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = -5$ $\qquad 2x - 2 = 0 \to x = 1$ $\qquad -x^2 + 3x = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = 3$

$$\left|\int_{-5}^{-1}(x^2+5x)dx\right| + \left|\int_{-1}^{1}(2x-2)dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(2x-2)dx\right| + \left|\int_{2}^{3}(-x^2+3x)dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right]_{-5}^{-1}\right| + \left|\left[x^2 - 2x\right]_{-1}^{1}\right| + \left|\left[x^2 - 2x\right]_{1}^{2}\right| + \left|\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{2}^{3}\right| = \left|-\frac{56}{3}\right| + |-4| + 1 + \frac{7}{6} = \frac{149}{6}$$

74. **Sea la función** $g(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x - 3 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{6}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

Determina el área de la región limitada por esta curva, el eje X y estas rectas.

a) $x = -1,\ x = 0$ $\qquad$ b) $x = 3,\ x = 7$ $\qquad$ c) $x = -1,\ x = 4$

a) $f(x) = 0 \to 3x^2 + 6x - 3 = 0 \to x = -1 \pm \sqrt{2}$

$$F(x) = \int (3x^2 + 6x - 3)\,dx = x^3 + 3x^2 - 3x$$

$$\left|\int_{-1}^{0} (3x^2 + 6x - 3)\,dx\right| = |F(0) - F(-1)| = |0 - 5| = 5$$

b) $F(x) = \displaystyle\int \frac{6}{x}\,dx = 6\ln|x|$

$$\left|\int_{3}^{7} \frac{6}{x}\,dx\right| = |F(7) - F(3)| = |6\ln 7 - 6\ln 3| = 6\ln\frac{7}{3}$$

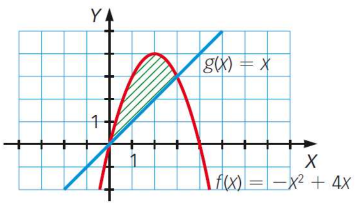
c) $$\left|\int_{-1}^{-1+\sqrt{2}} (3x^2 + 6x - 3)\,dx\right| + \left|\int_{-1+\sqrt{2}}^{1} (3x^2 + 6x - 3)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{4} \frac{6}{x}\,dx\right| =$$

$$= \left|F(-1+\sqrt{2}) - F(-1)\right| + \left|F(1) - F(-1+\sqrt{2})\right| + \left|F(4) - F(1)\right| =$$

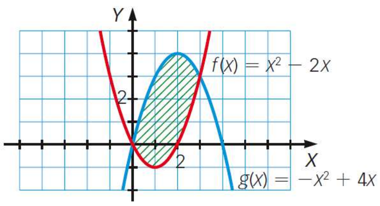
$$= \left|5 - 4\sqrt{2} - 5\right| + \left|1 - (5 - 4\sqrt{2})\right| + \left|6\ln 4 - 6\ln 1\right| = 8\sqrt{2} + 5 + 6\ln 4$$

75. **Calcula, en cada caso, el área comprendida entre las gráficas de las dos funciones.**

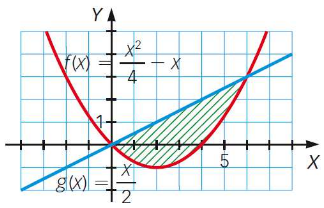
a)



b)



c)



a) Las gráficas se cortan en $x_1 = 0, x_2 = 3 \rightarrow \left|\int_0^3 (-x^2 + 4x - x)dx\right| = \left|\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3\right| = \frac{9}{2}$

b) Las gráficas se cortan en $x_1 = 0, x_2 = 3 \rightarrow \left|\int_0^3 (-x^2 + 4x - x^2 + 2x)dx\right| = \left|\left[-\frac{2x^3}{3} + 3x^2\right]_0^3\right| = 9$

c) Las gráficas se cortan en $x_1 = 0, x_2 = 6 \rightarrow \left|\int_0^6 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + x\right)dx\right| = \left[\frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{12}\right]_0^6 = 9$

76. Halla el área de la región comprendida entre las gráficas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x - 1$ $\quad g(x) = x^2 - 4$
b) $f(x) = 3$ $\quad g(x) = x^2$
c) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad g(x) = x^2$
d) $f(x) = x^2 + 6x$ $\quad g(x) = x^3$
e) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ $\quad g(x) = x^2 - 3x$

a) Las gráficas se cortan en $x_1 = -1, x_2 = 3$.

$$\left|\int_{-1}^3 (2x - 1 - x^2 + 4)dx\right| = \left|\left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^3\right| = \frac{32}{3}$$

b) Las gráficas se cortan en $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}$.

$$\left|\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3 - x^2)dx\right| = \left|\left[3x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\right| = 4\sqrt{3}$$

c) Las gráficas se cortan en $x_1 = 0, x_2 = 1$.

$$\left|\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx\right| = \left|\left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1\right| = \frac{1}{3}$$

d) Las gráficas se cortan en $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 3$.

$$\left|\int_{-2}^0 (x^3 - x^2 - 6x)dx\right| + \left|\int_0^3 (x^2 + 6x - x^3)dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2\right]_{-2}^0\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} + 3x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^3\right| = \frac{253}{12}$$

e) Las gráficas se cortan en $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 4$.

$$\left|\int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x - x^2 + 3x)dx\right| + \left|\int_3^4 (x^2 - 3x - x^3 + 6x^2 - 9x)dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 6x^2\right]_0^3\right| + \left|\left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - 6x^2\right]_3^4\right| = \frac{71}{6}$$

77. Halla el área de la región limitada por las funciones $f(x) = \frac{10}{x}$, $g(x) = \frac{3}{2}x + 2$ y $h(x) = 2$.

$$\left|\int_0^2 \left(\frac{3}{2}x + 2 - 2\right)dx\right| + \left|\int_2^5 \left(\frac{10}{x} - 2\right)dx\right| = \left|\left[\frac{3x^2}{4}\right]_0^2\right| + \left|\left[10\ln|x| - 2x\right]_2^5\right| = |3 - 0| + |10\ln 5 - 10 - (10\ln 2 - 4)| = 10\ln\frac{5}{2} - 3$$

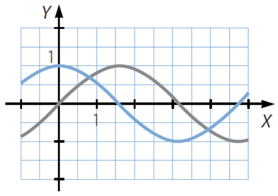
78. Calcula el área comprendida entre $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ y $g(x) = x$.

Las gráficas se cortan en $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$.

$$\left|\int_{-2}^0 \left(\frac{1}{4}x^3 - x\right)dx\right| + \left|\int_0^2 \left(x - \frac{1}{4}x^3\right)dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^0\right| + \left|\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}\right]_0^2\right| = 2$$

79. **Las funciones $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = cos\ x$ determinan regiones del plano que son la repetición de una figura. Determina el área de la figura base.**

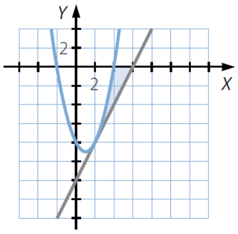
$$sen\ x = cos\ x \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$



$$F(x) = \int (sen\ x - cos\ x)\ dx = -cos\ x - sen\ x$$

$$\left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (sen\ x - cos\ x)\ dx \right| = \left| F\left(\frac{5\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = \left|\sqrt{2} + \sqrt{2}\right| = 2\sqrt{2}$$

80. **Dibuja la parábola $y = x^2 - 2x - 8$ y su recta tangente por el punto de abscisa 2. Halla el área de la región limitada por ambas y las abscisas 2 y 4.**



Como $y' = 2x - 2$, la recta tangente es:

$$y + 8 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 12$$

$$F(x) = \int (x^2 - 2x - 8 - (2x - 12))\ dx =$$

$$= \int (x^2 - 4x + 4)\ dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

$$\left| \int_2^4 (x^2 - 4x + 4)\ dx \right| = |F(4) - F(2)| = \left| \frac{16}{3} - \frac{8}{3} \right| = \frac{8}{3}$$

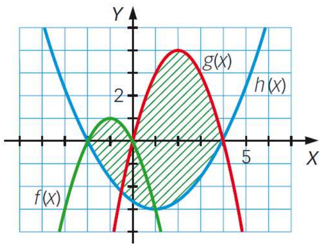
81. **Dadas las funciones $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = sen\ 2x$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, halla el área encerrada entre estas dos funciones en dicho intervalo.**

$$2\ sen\ x\ cos\ x - sen\ x = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{3}} (sen\ 2x - sen\ x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (sen\ x - sen\ 2x) dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{2} cos\ 2x + cos\ x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \right| + \left| \left[-cos\ x + \frac{1}{2} cos\ 2x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

82. **Halla el recinto máximo comprendido entre las siguientes tres funciones.**

$$f(x) = -x^2 - 2x \qquad g(x) = -x^2 + 4x \qquad h(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 2x - 8)$$



$f(x)$ y $g(x)$ cortan en $x = 0$.

$f(x)$ y $h(x)$ cortan en $x = -2$ y $x = 1$.

$g(x)$ y $h(x)$ cortan en $x = -\dfrac{1}{2}$ y en $x = 4$.

$$\left|\int_{-2}^{1}(f(x)-h(x))dx\right|+\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{4}(g(x)-h(x))dx\right|-\left(\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(g(x)-h(x))dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(f(x)-h(x))dx\right|\right)=$$

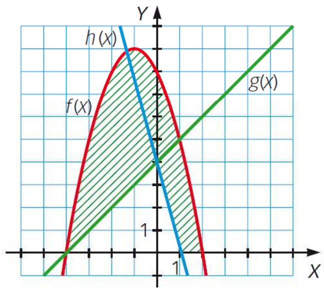
$$=\left|\int_{-2}^{1}\left(-\frac{4(x^2+x-2)}{3}\right)dx\right|+\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{4}\left(-\frac{2(2x^2-7x-4)}{3}\right)dx\right|-\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(-\frac{2(2x^2-7x-4)}{3}\right)dx\right|-\left|\int_{0}^{1}\left(-\frac{4(x^2+x-2)}{3}\right)dx\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{-4x^3-6x^2+24x}{9}\right]_{-2}^{1}\right|+\left|\left[\frac{-4x^3+21x^2+24x}{9}\right]_{-\frac{1}{2}}^{4}\right|-\left|\left[\frac{-4x^3+21x^2+24x}{9}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}\right|-\left|\left[\frac{-4x^3-6x^2+24x}{9}\right]_{0}^{1}\right|=$$

$$=6+\frac{81}{4}-\frac{25}{36}-\frac{14}{9}=24$$

83. **Calcula el área de la región indicada en el dibujo sabiendo que las funciones que aparecen son:**

$$f(x)=8-2x-x^2 \qquad g(x)=x+4 \qquad h(x)=4-4x$$



$$\left|\int_{-4}^{0}(f(x)-g(x))dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(f(x)-h(x))dx\right|+\left|\int_{1}^{2}f(x)dx\right|=$$

$$=\left|\int_{-4}^{0}(-x^2-3x+4)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(-x^2+2x+4)dx\right|+\left|\int_{1}^{2}(8-2x-x^2)dx\right|=$$

$$=\left|\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+4x\right]_{-4}^{0}\right|+\left|\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+4x\right]_{0}^{1}\right|+\left|\left[8x-x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2}\right|=\frac{56}{3}+\frac{14}{3}+\frac{8}{3}=26$$

84. **De una función $f(x)$ tenemos los siguientes datos:**

- $f(-1)=-19$
- $f'(2)=24$
- $f''(x)=18x-10$

Determina su expresión analítica.

$F'(x)=\int(18x-10)\,dx=9x^2-10x+k$

Si $f'(2)=24 \rightarrow 36-20+k=24 \rightarrow k=8$, y entonces: $f'(x)=9x^2-10x+8$

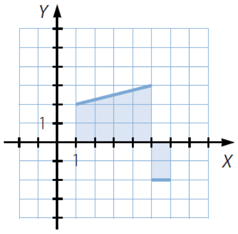
$F(x)=\int(9x^2-10x+8)\,dx=3x^3-5x^2+8x+k$

Si $f(-1)=-19 \rightarrow -3-5-8+k=-19 \rightarrow k=-3$

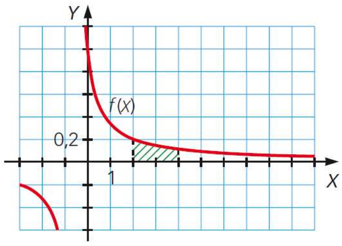
Por tanto, la función es: $f(x)=3x^3-5x^2+8x-3$

85. **¿Es posible encontrar una función tal que $\int_1^6 f(x)\,dx = 8$, pero que el área descrita por la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 6$ sea 12? En caso afirmativo, represéntala.**

Sí, es posible si la gráfica de la función está por encima y por debajo del eje X.
Respuesta abierta. Por ejemplo:



86. **La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$, cuando $x > 0$, es como sigue:**



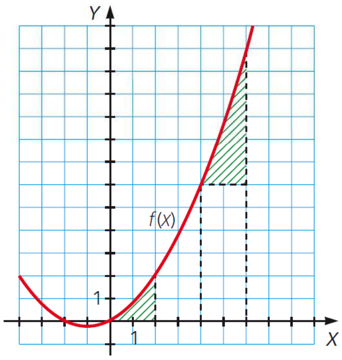
a) Halla una primitiva de la función $f(x)$.

b) Calcula el área de la región sombreada.

a) $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(2x+1)$

b) $\left|\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{2x+1}\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_2^4\right| = \frac{1}{2}(\ln 9 - \ln 5)$

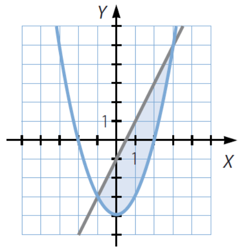
87. **Halla el área de las figuras sombreadas, si la gráfica corresponde a la función $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{4}$.**



El área de la figura de la izquierda es: $\left|\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4}(x^2+x)\,dx\right| = \frac{1}{4}\cdot\left|\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^2\right| = \left|\frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}+2\right)\right| = \frac{5}{6}$

El área de la figura de la derecha es: $\left|\displaystyle\int_4^6 \frac{1}{4}(x^2+x)\,dx\right| = \frac{1}{4}\cdot\left|\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_4^6\right| = \frac{1}{4}\left|(72+18)-\left(\frac{64}{3}+8\right)\right| = \frac{91}{6}$

88. **Representa gráficamente el recinto plano limitado por la parábola $y = x^2 - 4$ y la recta que pasa por los puntos $A(-1, -3)$ y $B(3, 5)$. Calcula su área.**



La ecuación de la recta es: $y = 2x - 1$

$$\int_{-1}^{3} (2x - 1 - (x^2 - 4))\, dx = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} =$$

$$= 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}$$

89. **Sea $f(x) = |x^2 - 3x + 4|$. Calcula el área encerrada entre la grafica de $f(x)$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 5$.**

Como $f(x) = |x^2 - 3x + 4| = x^2 - 3x + 4$, el área pedida es: $\left|\int_{-2}^{5} (x^2 - 3x + 4)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_{-2}^{5}\right| = \frac{245}{6}$

90. **Determina el área que encierra una parábola que pase por los puntos:**

$$(-2, 0) \qquad \left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right) \qquad (0, 6)$$

y la recta $y = x$ en el intervalo [1, 3].

La ecuación de la parábola es de la forma: $y = ax^2 + bx + c$

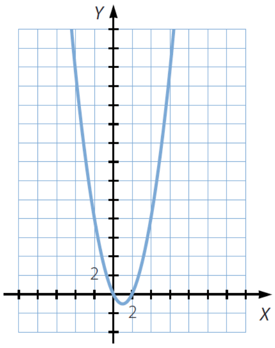
$$\left.\begin{array}{l} (-2, 0) \to 4a - 2b + c = 0 \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right) \to \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = \frac{25}{4} \\ (0, 6) \to c = 6 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2a - b = -3 \\ a + 2b = 1 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 1 \end{array}$$

Entonces, resulta que: $y = -x^2 + x + 6 \qquad -x^2 + x + 6 = x \to -x^2 + 6 = 0 \to x = \pm\sqrt{6}$

$$\int_{1}^{3} (-x^2 + x + 6 - x)\, dx = \int_{1}^{\sqrt{6}} (-x^2 + 6)\, dx + \int_{\sqrt{6}}^{3} (-x^2 + 6)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 6x\right]_{1}^{\sqrt{6}} + \left[-\frac{x^3}{3} + 6x\right]_{\sqrt{6}}^{3} = 4\sqrt{6} - \frac{17}{3} + 9 - 4\sqrt{6} = \frac{10}{3}$$

91. **El cálculo de una integral definida se relaciona con el área bajo una curva. Explica por qué se verifica entonces que:**

$$\int_{0}^{6} (x^2 - 2x)\, dx < \int_{2}^{6} (x^2 - 2x)\, dx$$



$$x^2 - 2x = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\int_{0}^{6} (x^2 - 2x)\, dx = \int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\, dx + \int_{2}^{6} (x^2 - 2x)\, dx$$

$$\int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\, dx < 0 \to \int_{0}^{6} (x^2 - 2x)\, dx < \int_{2}^{6} (x^2 - 2x)\, dx$$

92. **De la función $f(x) = x^2 + bx + c$ se sabe que determina un área de 36 unidades cuadradas con el eje X y las abscisas 0 y 3, y que corta al eje X, al menos, en el punto $(-3, 0)$. Halla su expresión algebraica.**

$$\int_0^3 (x^2 + bx + c)\,dx = 36 \rightarrow \left[\frac{x^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^3 = 36$$

$$\rightarrow 9 + \frac{9b}{2} + 3c = 36 \rightarrow 3b + 2c = 18$$

Si el punto $(-3, 0)$ pertenece a la gráfica de la función: $9 - 3b + c = 0 \rightarrow 3b - c = 9$, y se obtiene que: $c = 3 \rightarrow b = 4 \rightarrow f(x) = x^2 + 4x + 3$

93. **Se sabe que la función $f(x)$ tiene simetría par y que la función $g(x)$ tiene simetría impar. Además se sabe que:**

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 6 \qquad \int_0^2 g(x)\,dx = 4$$

Calcula cada una de las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{-2}^{2} (f(x) + g(x))\,dx$

b) $\frac{1}{4}\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx$

c) $\int_{-2}^{2} (f(x) + f(-x))\,dx$

d) $\int_{-2}^{0} \left(3g(x) - \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{5}\right)dx$

e) $\int_{-2}^{2} g(x)\,dx$

f) $\int_{-2}^{0} (f(x) - 2)\,dx$

g) $\int_{-2}^{0} g(x)\,dx$

h) $\int_{-1}^{1} (g(x) - g(-x))\,dx$

a) $\int_{-2}^{2}(f(x)+g(x))dx = \int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_{-2}^{2} g(x)dx = 6+0=6$

b) $\frac{1}{4}\int_0^2 (f(x)-g(x))dx = \frac{1}{4}\int_0^2 f(x)dx - \frac{1}{4}\int_0^2 g(x)dx = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$

c) $\int_{-2}^{2}(f(x)+f(-x))dx = 2\int_{-2}^{2} f(x)dx = 12$

d) $\int_{-2}^{0}\left(3g(x) - \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{5}\right)dx = 3\int_{-2}^{0} g(x)dx - \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{-2}^{0}\frac{1}{5}\,dx = -12 - \frac{3}{2} + \frac{2}{5} = -\frac{131}{10}$

e) $\int_{-2}^{2} g(x)dx = \int_{-2}^{0} g(x)dx + \int_0^2 g(x)dx = 0$

f) $\int_{-2}^{0}(f(x)-2)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx - \int_{-2}^{0} 2\,dx = 3-4=-1$

g) $\int_{-2}^{0} g(x)dx = -4$

h) f $\int_{-1}^{1}(g(x) - g(-x))dx = 0$

94. **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - x + 4 & \text{si } x \le 1 \\ ax + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

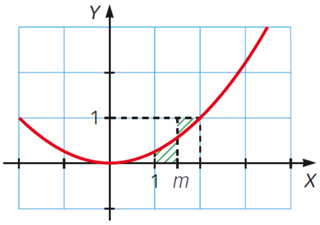
a) Calcula un valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Para el valor de a calculado, halla el área delimitada por $f(x)$ en el primer cuadrante.

a) $2ax^2 - x + 4 = ax + 2$ para $x = 1$ $\qquad 2a - 1 + 4 = a + 2 \rightarrow a = -1$

b) $\left|\int_0^1 (-2x^2 + x + 4)dx\right| + \left|\int_1^2 (-x+2)dx\right| = \left|\left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x\right]_0^1\right| + \left|\left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2\right| = \frac{23}{6} + \frac{1}{2} = \frac{13}{3}$

95. **En la figura aparece la gráfica de la parábola $y = \frac{x^2}{4}$.**



Halla el valor de m para que las áreas de las superficies rayadas sean iguales.

$$\int_1^m \frac{x^2}{4}dx = \int_m^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx \to \left[\frac{x^3}{12}\right]_1^m = \left[x-\frac{x^3}{12}\right]_m^2 \to m = \frac{11}{6}$$

96. **Sea $f(x) = x^2 + bx$, donde b es una constante.**

a) Encuentra el valor de b sabiendo que hay una primitiva $F(x)$ de $f(x)$ con $F(0) = 2$ y $F(3) = 20$. Encuentra también la expresión de $F(x)$.

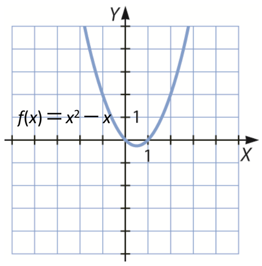
b) Dibuja la curva $f(x)$ cuando $b = -1$ y halla el área delimitada por dicha curva y el eje de abscisas entre los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 2$.

a) $F(x) = \int (x^2+bx)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+k$

$F(0) = k = 2$ $\qquad F(3) = 9+\frac{9b}{2}+2 = 20 \to b = 2$

$F(x) = \frac{x^3}{3}+x^2+2$

b) $-\int_0^1(x^2-x)dx+\int_1^2(x^2-x)dx = -\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{6}+\frac{5}{6} = 1$



97. **Determina los valores de los parámetros a, b y c para que la función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tenga un mínimo en el punto (3, 0) y el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje X sea $\frac{27}{4}$.**

Como $x = 3$ es un mínimo sobre el eje X, entonces esta raíz es doble.

$f(x) = ax(x-3)^2$ $\qquad f'(x) = 3ax^2+2bx+c$

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = 0 \to 27a+9b+3c = 0 \\ f'(3) = 0 \to 27a+6b+c = 0 \end{array}\right\} \to b = -6a,\ c = 9a$$

$$\int_0^3(ax^3-6ax^2+9ax)dx = \left[\frac{ax^4}{4}-\frac{6ax^3}{3}+\frac{9ax^2}{2}\right]_0^3 = \frac{81a}{4}-54a+\frac{81a}{2} = \frac{27}{4} \to a = 1$$

$a = 1, b = -6, c = 9$

98. **Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$. Calcula el área del recinto limitado por $f(x)$ y $g(x)$.**

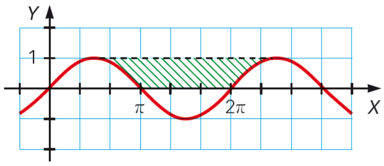
$g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $\qquad f(x) = g(x) \to x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$

$$\left|\int_{-1}^0(-x-x^2)dx\right|+\left|\int_0^1(x-x^2)dx\right| = \left|\left[-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0\right|+\left|\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1\right| = \frac{1}{3}$$

99. **Calcula el valor de $a > 0$ para que el área de la región acotada por las curvas $y = x^2$ e $y = ax$ sea igual a 4 unidades cuadradas.**

$$ax - x^2 = x(a - x) \qquad \int_0^a (ax - x^2)\,dx = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{6} = 4 \to a = \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$$

100. **La función cuya gráfica aparece en el dibujo es $f(x) = sen\ x$. Considera el recinto sombreado en la figura y realiza lo siguiente.**



a) Halla de forma aproximada su área y razona cuál puede ser su medida.
b) Calcula su valor mediante el cálculo integral.

a) El recinto sombreado corresponde aproximadamente a 4 rectángulos.

$$A = 4\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1\right) = \frac{4\pi}{3} \simeq 4{,}18$$

b) $sen\ x = 1 \to \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{5\pi}{2} \end{cases}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - sen\ x)\ dx + \int_{\pi}^{2\pi} 1\ dx + \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} (1 - sen\ x)\ dx = \left[x + cos\ x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[x\right]_{\pi}^{2\pi} + \left[x + cos\ x\right]_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} =$$

$$= \pi - 1 - \frac{\pi}{2} + 2\pi - \pi + \frac{5\pi}{2} - 2\pi - 1 = 2\pi - 2 \simeq 4{,}28$$

101. **Dada la integral $\int \frac{8x - 7}{x^2 - x - 2}\,dx$, encuentra los valores de A y B tales que:**

$$\frac{8x - 7}{x^2 - x - 2} = \frac{8x - 7}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1}$$

Opera en el último miembro e iguala los polinomios. Después, resuelve la integral.

$$\frac{8x - 7}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1} \to 8x - 7 = A(x + 1) + B(x - 2)$$

$$\to \left.\begin{array}{r} A + B = 8 \\ A - 2B = -7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 3 \\ B = 5 \end{array}$$

$$\int \frac{8x - 7}{(x - 2)(x + 1)}\,dx = \int \left(\frac{3}{x - 2} + \frac{5}{x + 1}\right) dx = 3\ln|x - 2| + 5\ln|x + 1| + k$$

102. **Al llover, una gota de agua cae desde una altura de 600 m. ¿Qué velocidad tendrá a los 3 segundos? Determina mediante integrales el espacio que habrá recorrido hasta ese momento.**

¿Cuánto tiempo tardará en llegar al suelo?

(La aceleración de la gravedad es 9,8 m/s²).

La velocidad viene dada por la fórmula: $v = 9{,}8t$
A los 3 segundos, la velocidad es: $v = 29{,}4$ m/s

$$e = \int_0^3 9{,}8t\ dt = \left[4{,}9t^2\right]_0^3 = 44{,}1\,\text{m} \qquad 4{,}9t^2 = 600 \to t^2 = 122{,}44 \to t = 11{,}06\ \text{s}$$

103. **En una pared de 6 m de altura se quiere pintar de blanco la figura que encierran estas funciones.**

$$f(x) = -x^2 + 3x + 4$$
$$g(x) = 2x^2 - 3x + 4$$

a) ¿Cuál es la superficie que hay que pintar de blanco?

b) Si la pared tiene 23 m de longitud y se quiere repetir esa figura dejando 5 m entre figura y figura, ¿cuánto costaría pintar las figuras, si cada metro cuadrado de pintura blanca cuesta 2 €?

a) $f(x) = g(x) \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))dx + \left|\int_1^2 (6 - f(x))dx\right| = \left|\int_0^1 (-3x^2 + 6x)dx\right| + \left|\int_1^2 (x^2 - 3x + 2)dx\right| =$$

$$= \left|\left[-x^3 + 3x^2\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^2\right| = \frac{11}{6}\text{ m}^2$$

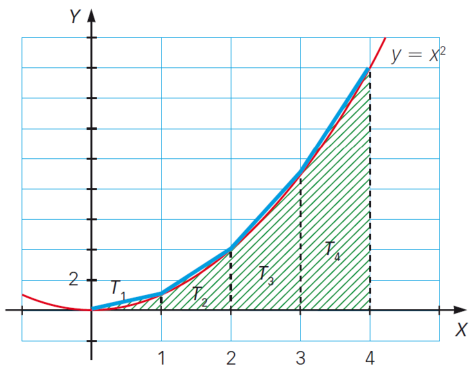
b) La superficie que se quiere pintar es $4 \cdot \frac{11}{6}\text{ m}^2 = \frac{22}{3}\text{ m}^2$. Costaría $2 \cdot \frac{22}{3}\text{ m}^2 = \frac{44}{3}$€.

104. **La variación instantánea de la cotización, su derivada, sigue durante una semana la función $f(x) = 0{,}02x^2 + 1$, donde x es el día de la semana (0 = lunes, 1 = martes…). Si el lunes cotiza a 5 €, halla la función de cotización.**

$$F(x) = \int (0{,}02x^2 + 1)\,dx = 0{,}02 \cdot \frac{x^3}{3} + x + k$$

Si $F(0) = 5 \rightarrow k = 5 \rightarrow F(x) = 0{,}02 \cdot \frac{x^3}{3} + x + 5$

105. **La siguiente función tiene por ecuación $y = x^2$. Podemos calcular el área que queda debajo de la curva, sobre el eje X y las abscisas 0 y 4, de forma aproximada utilizando el área de los trapecios que hemos dibujado.**



El área de esos trapecios es:

$$A_1 = \frac{1}{2} \qquad A_2 = \frac{5}{2} \qquad A_3 = \frac{13}{2} \qquad A_4 = \frac{25}{2}$$

$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 22$ unidades cuadradas

a) Realiza el cálculo por medio de integrales y comprueba que el error no es excesivo.

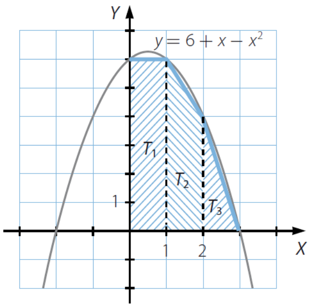
b) Calcula, mediante los dos procedimientos, el área de la región que la curva $y = 6 + x - x^2$ describe en el primer cuadrante.

a) $\int_0^4 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{64}{3} = 21{,}33$

b) $T_1 = 6 \qquad T_2 = 5 \qquad T_3 = 2$

$T_1 + T_2 + T_3 = 13$

$\int_0^3 (6 + x - x^2)\,dx = \left[6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} = 13{,}5$



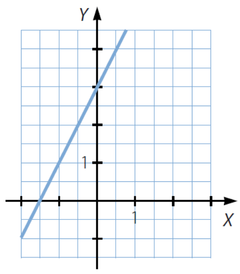
106. **Un móvil que parte con una velocidad inicial de 3 m/s se somete a una aceleración constante de 2 m/s. Eso significa que su velocidad viene expresada por la fórmula $v = 3 + 2t$, mientras que el espacio que recorre en función del tiempo es $e = 3t + t^2$.**

(Recuerda que, en un movimiento uniformemente acelerado, $v = v_0 + at$ y $e = v_0t + \frac{1}{2}at^2$).

Representa la función velocidad y calcula:

a) El área comprendida entre la gráfica, el eje de abscisas y las abscisas 0 y 2.
b) El espacio recorrido en los dos primeros segundos.
c) El área comprendida entre la función, el eje de abscisas y las abscisas 0 y 5.
d) El espacio recorrido en los cinco primeros segundos.
e) El área comprendida entre la función, el eje de abscisas y las abscisas 2 y 6.
f) El espacio recorrido entre el segundo 2 y el segundo 6.

a) $\int_0^2 (3 + 2t)\,dt = \left[3t + t^2\right]_0^2 = 10$



b) $e = 3 \cdot 2 + 2^2 = 10$ m

c) $\int_0^5 (3 + 2t)\,dt = \left[3t + t^2\right]_0^5 = 40$

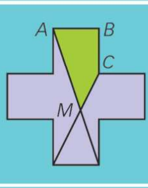
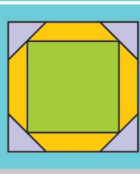
d) $e = 3 \cdot 5 + 5^2 = 40$ m

e) $\int_2^6 (3 + 2t)\,dt = \left[3t + t^2\right]_2^6 = |54 - 10| = 44$

f) $(3 \cdot 6 + 6^2) - (3 \cdot 2 + 2^2) = 54 - 10 = 44$ m

PARA PROFUNDIZAR

107. Elige la respuesta adecuada. (Concurso de primavera)

El área del recinto limitado por las gráficas $y = \|x - 1\|$ e $y = 2$ es:	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$
El área de la región encerrada por la curva formada por los puntos (x, y) tales que $\|x - 1\| + \|y - 1\| = 1$ es:	2	$\frac{5}{2}$	3	π	4
Los doce lados del polígono de la figura son de igual longitud, 4, y cualesquiera dos lados consecutivos se cortan en un ángulo recto. ¿Cuál es el área del cuadrilátero verde? 	$\frac{44}{3}$	16	$\frac{88}{5}$	20	$\frac{62}{3}$
En la figura podemos ver dos cuadrados y un octógono regular que están inscritos unos en otros. Si el área del cuadrado grande es de 48 cm², el área del pequeño, en cm², es: 	40	36	32	28	24

□ $y=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\geq 1\\ -x+1 & \text{si } x<1\end{cases}$

Las gráficas se cortan en $x_1=-1, x_2=3$:

$$\left|\int_{-1}^{1}(2-(-x+1))dx\right|+\left|\int_{1}^{3}(2-(x-1))dx\right|=\left|\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}\right|+\left|\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{3}\right|=4$$

□ La región es un cuadrado encerrado por las rectas $y = x + 1$, $y = -x + 3$, $y = x - 1$, $y = -x + 1$.

$$\left|\int_0^1(x+1-(-x+1))dx\right|+\left|\int_1^2(-x+3-(x-1))dx\right|=\left|\int_0^1 2x\,dx\right|+\left|\int_1^2(-2x+4)dx\right|=\left|\left[x^2\right]_0^1\right|+\left|\left[-x^2+4x\right]_1^2\right|=1+1=2$$

□ Elegimos un sistema de referencia de forma que $A(0, 12)$, $B(4, 12)$ y $C(4, 8)$.

Podemos escribir las dos rectas como $y = -3x + 12$, $y = 2x$, que se cortan en el punto $M\left(\frac{12}{5},\frac{24}{5}\right)$.

$$\left|\int_0^{\frac{12}{5}}12-(-3x+12)dx\right|+\left|\int_{\frac{12}{5}}^{4}(12-2x)dx\right|=\left|\left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{12}{5}}\right|+\left|\left[12x-x^2\right]_{\frac{12}{5}}^{4}\right|=\frac{88}{5}$$

□ En la figura podemos ver dos cuadrados y un octógono regular que están inscritos unos en otros. Si el área del cuadrado grande es de 48 cm², el área del pequeño, en cm², es:

El lado del cuadrado grande mide $\sqrt{48}$ cm.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x^2=h^2\\ h=\sqrt{48}-2x\end{array}\right\}\rightarrow x_1=2\sqrt{3}\left(2-\sqrt{2}\right),\ x_2=2\sqrt{3}\left(2+\sqrt{2}\right)$$

Descartamos la segunda solución por ser mayor que el lado del cuadrado.

El lado del cuadrado pequeño mide: $\sqrt{48}-2\sqrt{3}\left(2-\sqrt{2}\right)=2\sqrt{6}$

El área es: $\left(2\sqrt{6}\right)^2=24\text{ cm}^2$.

108. **Calcula la integral $\int sen^2\, x\, dx$.**

$$\int sen^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\, sen\, 2x + k$$

109. **Calcula.**

a) $\int sec\, x\, dx$ b) $\int cosec\, x\, dx$

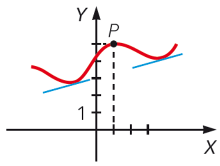
a) $$\int sec\, x\, dx = \int \frac{sec\, x\,(sec\, x + tg\, x)}{sec\, x + tg\, x}\, dx = \int \frac{sec^2\, x + sec\, x\, tg\, x}{sec\, x + tg\, x}\, dx =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{sen\, x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos x} + \frac{sen\, x}{\cos x}}\, dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \frac{sen\, x}{\cos x}\right| + k = \ln\left|sen\, x + tg\, x\right| + k$$

b) $$\int cosec\, x\, dx = \int \frac{1}{sen\, x}\, dx = \int \frac{1}{2\, sen\, \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}\, dx = 2\int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{sen\, \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}\, dx =$$

$$= 2\int \frac{sec^2\, \frac{x}{2}}{tg\, \frac{x}{2}}\, dx = 2\ln\left|tg\, \frac{x}{2}\right| + k$$

110. **Halla la función que pasa por el punto $P(1, 5)$ y tal que la pendiente de la recta tangente en cualquiera de sus puntos viene dada por la función $g(x) = 3x^2 + 5x - 2$.**



$$f'(x) = g(x) \rightarrow f(x) = \int (3x^2 + 5x - 2)\, dx = x^3 + \frac{5x^2}{2} - 2x + k$$

$$(1, 5) \rightarrow 1 + \frac{5}{2} - 2 + k = 5 \rightarrow k = \frac{7}{2} \rightarrow f(x) = x^3 + \frac{5x^2}{2} - 2x + \frac{7}{2}$$

111. **Halla la función $f(x)$ que cumple la ecuación $f'(x) + x^2 \cdot f(x) = 0$, sabiendo que $f(1) = e$. Representa gráficamente esta función y calcula la tangente en el punto de la curva de abscisa 1.**

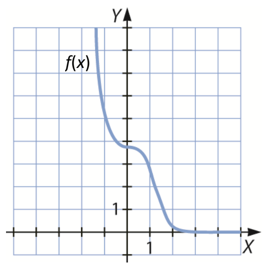
$$f'(x) + x^2 \cdot f(x) = 0 \rightarrow f'(x) = -x^2 f(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = -\int x^2\, dx \rightarrow \ln f(x) = -\frac{x^3}{3} + k \rightarrow f(x) = Ae^{-\frac{x^3}{3}}$$

$$f(1) = Ae^{-\frac{1}{3}} = e \rightarrow A = e^{\frac{4}{3}} \rightarrow f(x) = e^{\frac{4-x^3}{3}}$$

$$f'(x) = -x^2 e^{\frac{4-x^3}{3}} \rightarrow f'(1) = -e$$

La recta tangente es: $y - e = -e(x - 1)$



112. **Calcula $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$, con n un número natural no nulo, y:**

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } 0 \le x < \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{3}{n} & \text{si } \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$A_n = \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2x\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{3}{n}dx = \left[\frac{n^2x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{n}} + \left[\frac{3}{n}x\right]_{\frac{1}{n}}^1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{n} - \frac{3}{n^2}$$

113. **Halla la integral definida $\int_2^4 sen\,(x-3)^3\,dx$.**

(Olimpiadas Bachillerato. Fase Nacional)

Esta función tiene simetría impar centrada en el $x = 3$, entonces:

$$\int_2^4 sen(x-3)^3\,dx = 0$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **¿Qué es el trabajo en física?**

El trabajo efectuado por un agente que ejerce una fuerza constante para producir un movimiento es el producto de la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento por la magnitud del desplazamiento, es decir, $W = F \cdot d$.

2. **Escribe dos ejemplos en los que se realice un trabajo como magnitud física.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- Se arrastra por el suelo una silla una distancia de tres metros con una fuerza horizontal de cinco Newtons.
- Se recoge un libro del suelo, levantándolo un metro hasta la mesa, con una fuerza vertical de cuatro Newtons.

3. **Si la partícula se mueve a lo largo del eje X, ¿sería la fuerza la derivada del trabajo?**

Sí, ya que $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx \rightarrow dW = F$.

4. **La fuerza que es necesaria para mover una partícula desde su posición de equilibrio hasta el punto x es $F_x = kx$, donde k es una constante positiva.**

a) Halla, integrando, el trabajo realizado para mover la partícula hasta el punto $x = 1$ desde su posición de equilibrio.

b) ¿Y si llevamos la misma partícula hasta el punto $x = 2$?

c) ¿Cuál es la expresión del trabajo en función del punto, x, donde se mueve la partícula?

a) $W = \int_0^1 kx\,dx = \left[k\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = \dfrac{k}{2}$

b) $W = \int_0^2 kx\,dx = \left[k\dfrac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2k$

c) $W = \int_0^x kx\,dx = \left[k\dfrac{x^2}{2}\right]_0^x = \dfrac{kx^2}{2}$

Estadística unidimensional 13

ACTIVIDADES

1. **En una revista leemos que el pastor alemán tiene una alzada media de 55 cm. ¿Crees que han medido a todos los pastores alemanes del planeta? Explica cómo crees que han llegado a esta conclusión.**

   No se ha medido a todos los pastores alemanes.

   Para llegar a esa conclusión se ha realizado un estudio estadístico donde se habrá medido una muestra representativa de pastores alemanes.

2. **Analiza si tiene sentido elegir una muestra para realizar un estudio estadístico sobre la altura de un grupo de 10 alumnos.**

   No tiene sentido porque medir a 10 alumnos no resulta muy costoso.

3. **Indica el tipo de variable estadística que estamos estudiando en cada uno de los siguientes casos.**

   a) El número de libros que lee cada uno de los compañeros de tu clase.
   b) El color de la camiseta de los clubes deportivos de una ciudad.
   c) La distancia al trabajo de los vecinos de un edificio.

   a) Cuantitativa discreta.

   b) Cualitativa.

   c) Cuantitativa continua.

4. **En una clase con 30 alumnos se realiza una encuesta sobre el número de aplicaciones para el *smartphone* que han comprado en el último mes, y se han obtenido estas respuestas.**

   5 2 3 1 6   6 2 0 1 3   0 1 1 2 3
   2 0 1 1 3   3 2 1 3 1   5 2 1 4 3

   Organiza estos datos en una tabla de frecuencias.

Nº aplicaciones	f_i	h_i	F_i	H_i
6	2	0,067	2	0,067
5	2	0,067	4	0,134
4	1	0,033	5	0,167
3	7	0,233	12	0,4
2	6	0,2	18	0,6
1	9	0,3	27	0,9
0	3	0,1	30	1
Total	**30**	**1**		

5. **Completa la tabla de frecuencias de la estatura del grupo de personas que aparece a continuación.**

Estatura (cm)	[165, 175)	[175, 185)	[185, 195)
N.º de personas	40	85	25

¿Qué porcentaje de personas miden entre 165 y 175 cm?

Estatura	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[165, 175)	170	40	0,27	40	0,27
[175, 185)	180	85	0,57	125	0,83
[185, 195)	190	25	0,17	150	1
		$N = 150$	$\sum h_i = 1$		

El porcentaje de personas que miden entre 165 cm y 175 cm es del 27 %.

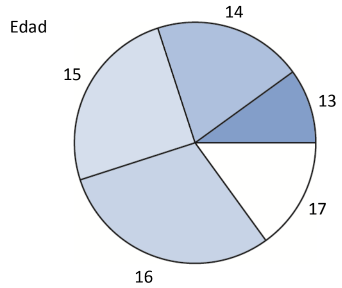
6. **En el polideportivo del barrio se ha formado un equipo juvenil de atletismo. Los miembros de este equipo tienen las siguientes edades.**

16 17 14 16 13 15 15 17 17 14
16 16 16 14 15 13 15 16 14 15

Representa estos datos en un gráfico que consideres apropiado utilizando sus frecuencias relativas.

Edad	f_i	h_i
13	2	0,1
14	4	0,2
15	5	0,25
16	6	0,3
17	3	0,15
Total	**20**	**1**

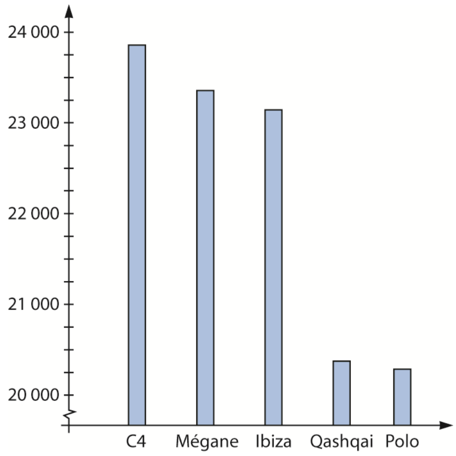
Como queremos utilizar las frecuencias relativas, dibujamos un diagrama de sectores.



7. **Sobre un total de 722 703 coches, los cinco modelos más vendidos en 2013 son los siguientes. Represéntalos como consideres más adecuado.**

Modelo	Unidades
Citroën C4	23837
Renault Mégane	23310
Seat Ibiza	23141
Nissan Qashqai	20372
Volkswagen Polo	20283

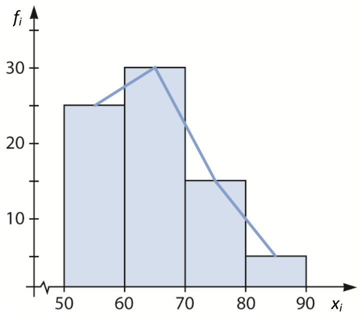
Representamos los datos en un diagrama de barras:



8. **Completa la tabla de frecuencias y dibuja el histograma y el polígono de frecuencias.**

Peso	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)
f_i	25	30	15	5

x_i	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	**Total**
f_i	25	30	15	5	**75**
h_i	0,333	0,4	0,2	0,067	**1**

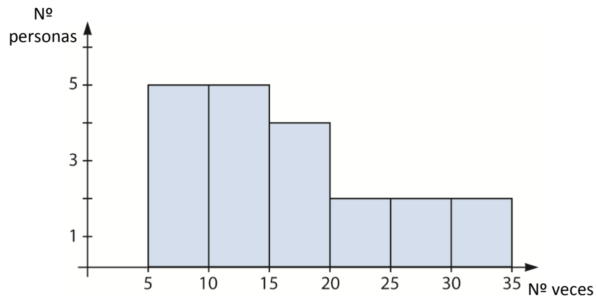


9. **El número de veces que asistieron al cine 20 personas fueron:**

12 15 33 8 19 7 16 11 6 21
24 25 14 9 31 26 15 9 10 11

Agrupa los datos en intervalos de amplitud 5 y dibuja un histograma.

Nº veces	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)	[30, 35)	**Total**
f_i	5	5	4	2	2	2	**20**
h_i	0,25	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1	**1**



10. **Una encuesta realizada a 10 pilotos, en la que se les pregunta sobre su número de vuelos semanales, muestra los siguientes datos.**

N.º de vuelos	0	1	2	3
N.º de pilotos	2	4	3	1

Calcula e interpreta las medidas de centralización.

- $Mo = 1 \rightarrow$ Lo más frecuente es que los pilotos vuelen una vez por semana.
- $Me = 1 \rightarrow$ El valor central es 1 vuelo, es decir, hay tantos pilotos que vuelan una o más veces, como que vuelan una o menos veces.
- $\overline{x} = \dfrac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{10} = 1{,}3$ vuelos de media realiza cada piloto a la semana.

11. **A partir de estos datos relativos al número de horas de estudio semanales de un grupo de 25 alumnos, construye la tabla de frecuencias sin agrupar los datos en intervalos y calcula las medidas de centralización.**

2 2 1 0 1 4 3 2 2 4 0 1 1 3 1
2 2 3 4 5 1 1 1 0 3 4 0 0 2 3

Interpreta los resultados obtenidos.

Horas de estudio	0	1	2	3	4	5	**Total**
f_i	5	8	7	5	4	1	**30**
F_i	5	13	20	25	29	30	
h_i	0,167	0,267	0,233	0,167	0,133	0,033	**1**

Calculamos las medidas de centralización:

- $Mo = 1$ hora $\longrightarrow$ Lo más frecuente es que los alumnos estudien una hora por semana.
- $Me = 2 \longrightarrow$ El valor central es 2 horas, es decir, hay tantos alumnos que estudian 2 o más horas, como que estudian 2 o menos horas.
- $\overline{x} = \dfrac{0 \cdot 5 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 1}{30} = 1{,}9\widehat{3}$ horas de media estudian los alumnos a la semana.

12. Obtén las medidas de centralización de estos datos.

Datos	[1, 3)	[3, 5)	[5, 7)	[7, 9)	[9, 11)
f_i	3	7	8	4	3

Las marcas de clase son, respectivamente, 2, 4, 6, 8 y 10. Así:

$Mo = 6$ $Me = 6$ $\overline{x} = \dfrac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + 8 \cdot 4 + 10 \cdot 3}{25} = 5{,}76$

13. Halla las medidas de centralización de estos datos.

Datos	[0, 4)	[4, 8)	[8, 12)	[12, 16)	[16, 20)
f_i	5	2	1	4	6

Las marcas de clase son, respectivamente, 2, 6, 10, 14 y 18. Así:

$Mo = 18$ $Me = 14$ $\overline{x} = \dfrac{2 \cdot 5 + 6 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 14 \cdot 4 + 18 \cdot 6}{18} = 10{,}\widehat{8}$

14. Calcula e interpreta los cuartiles de las siguientes notas en el examen de Matemáticas.

Notas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.º alumnos	3	6	9	8	11	13	15	11	9	5

Calculamos las frecuencias acumuladas:

$F_1 = 3$ $F_2 = 9$ $F_3 = 18$ $F_4 = 26$ $F_5 = 37$

$F_6 = 50$ $F_7 = 65$ $F_8 = 76$ $F_9 = 85$ $F_{10} = 90$

25 % de 90 = 90 · 0,25 = 22,5 50 % de 90 = 90 · 0,5 = 45 75 % de 90 = 90 · 0,75 = 67, 5

$Q_1 \longrightarrow$ De las frecuencias acumuladas, la primera que es mayor que 22,5 es F_4, por tanto, $Q_1 = 4$.

$Q_2 \longrightarrow$ De las frecuencias acumuladas, la primera que es mayor que 45 es F_6, por tanto, $Q_2 = Me = 6$.

$Q_3 \longrightarrow$ De las frecuencias acumuladas, la primera que es mayor que 67,5 es F_8, por tanto, $Q_1 = 8$.

15. Observa los pesos de bebés al nacer y halla los percentiles P_{27}, P_{50} y P_{90}.

Peso (kg)	[2, 2,5)	[2,5, 3)	[3, 3,5)	[3,5, 4)	[4, 4,5)
N.º bebés	3	6	9	8	11

Completamos la tabla con las frecuencias acumuladas:

Peso (kg)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)	[4; 4,5)	Total
x_i	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25	
f_i	3	6	9	8	11	**37**
F_i	3	9	18	26	37	

27% de 37 = 9,99 50% de 37 = 18,5 90% de 37 = 33,3

$P_{27} \longrightarrow$ De las frecuencias acumuladas, la primera que es mayor que 9,99 es F_3, por tanto, $P_{27} = 3{,}25$.

$P_{50} \longrightarrow$ De las frecuencias acumuladas, la primera que es mayor que 18,5 es F_4, por tanto, $P_{50} = 3{,}75$.

$P_{90} \longrightarrow$ De las frecuencias acumuladas, la primera que es mayor que 33,3 es F_5, por tanto, $P_{90} = 4{,}25$.

16. Calcula las medidas de dispersión de estos datos.

Datos (x_i)	1	2	3	4	5
Frec. (f_i)	1	5	7	2	1

El número total de datos es $N = 16$.

$$\overline{x} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 5 + 3\cdot 7 + 4\cdot 2 + 5\cdot 1}{16} = 2{,}8125$$

$Rango = 5 - 1 = 4$

$$DM = \frac{|1-2{,}8125|\cdot 1 + |2-2{,}8125|\cdot 5 + |3-2{,}8125|\cdot 7 + |4-2{,}8125|\cdot 2 + |5-2{,}8125|\cdot 1}{16} = 0{,}734375$$

$$\sigma^2 = \frac{1^2\cdot 1 + 2^2\cdot 5 + 3^2\cdot 7 + 4^2\cdot 2 + 5^2\cdot 1}{16} - 2{,}8125^2 = 0{,}9$$

$\sigma = 0{,}95$

$$CV = \frac{0{,}95}{2{,}8125} = 0{,}34$$

17. Calcula las medidas de dispersión de estos datos.

Datos (x_i)	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)
Frec. (f_i)	5	6	4	2

Las marcas de clase son:

$x_1 = 2{,}5$ $x_2 = 7{,}5$ $x_3 = 12{,}5$ $x_4 = 17{,}5$

El número total de datos es $N = 17$.

$$\overline{x} = \frac{2{,}5\cdot 5 + 7{,}5\cdot 6 + 12{,}5\cdot 4 + 17{,}5\cdot 2}{17} = 8{,}38$$

$Rango = 20 - 0 = 20$

$$DM = \frac{|2{,}5-3{,}38|\cdot 5 + |7{,}5-3{,}38|\cdot 6 + |12{,}5-3{,}38|\cdot 4 + |17{,}5-3{,}38|\cdot 2}{17} = 4{,}08$$

$$\sigma^2 = \frac{2{,}5^2\cdot 5 + 7{,}5^2\cdot 6 + 12{,}5^2\cdot 4 + 17{,}5^2\cdot 2}{17} - 8{,}38^2 = 24{,}22 \qquad \sigma = 4{,}92 \qquad CV = \frac{4{,}92}{8{,}38} = 0{,}59$$

18. **Tras realizar un estudio estadístico se obtienen los siguientes datos.**

1 9 8 1 2 9 7 5 10 1

Calcula las medidas de centralización y de dispersión de estos datos. ¿Qué conclusiones puedes extraer al comparar conjuntamente las medidas que has calculado?

Contruimos la tabla de frecuencias:

x_i	1	2	5	7	8	9	10	**Total**
f_i	3	1	1	1	1	2	1	**10**
F_i	3	4	5	6	7	9	10	

El número total de datos es $N = 10$.

$Mo = 1$ $Me = 5$ $\overline{x} = \dfrac{1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 5\cdot 1 + 7\cdot 1 + 8\cdot 1 + 10\cdot 2 + 10\cdot 1}{10} = 5,3$

$Rango = 10 - 1 = 9$

$$DM = \frac{|1-5,3|\cdot 3 + |2-5,3|\cdot 1 + |2-5,3|\cdot 1 + |2-5,3|\cdot 1 + |5-5,3|\cdot 1 + |7-5,3|\cdot 1 + |8-5,3|\cdot 1 + |9-5,3|\cdot 2 + |10-5,3|\cdot 1}{10} = 3,3$$

$\sigma^2 = \dfrac{1^2\cdot 3 + 2^2\cdot 1 + 5^2\cdot 1 + 7^2\cdot 1 + 8^2\cdot 1 + 9^2\cdot 2 + 10^2\cdot 1}{10} - 5,3^2 = 12,61$ $\sigma = 3,55$ $CV = \dfrac{3,55}{5,3} = 0,67$

El valor medio de los datos es 5,3 pero podemos deducir que, dado lo elevado de la desviación típica y del coeficiente de variación, los datos están muy dispersos con respecto a la media.

19. **La siguiente tabla muestra la antigüedad de los vehículos matriculados en un municipio.**

Antigüedad (años)	[0, 4)	[4, 8)	[8, 10)	[10, 12)
N.º de vehículos	346	521	382	151

Halla y analiza las medidas estadísticas.

Completamos la tabla de frecuencias:

Antigüedad (años)	[0, 4)	[4, 8)	[8, 10)	[10, 12)	**Total**
x_i	2	6	9	11	
f_i	346	521	382	151	**1 400**
F_i	346	867	1 249	1 400	

El número total de datos es $N = 1\,400$.

$Mo = 6$ $Me = 6$ $\overline{x} = \dfrac{2\cdot 346 + 6\cdot 521 + 9\cdot 382 + 11\cdot 151}{1\,400} = 6,367$

$Rango = 12 - 0 = 12$

$$DM = \frac{|2-6,367|\cdot 346 + |6-6,367|\cdot 521 + |9-6,367|\cdot 382 + |11-6,367|\cdot 151}{1\,400} = 2,43$$

$\sigma^2 = \dfrac{2^2\cdot 346 + 6^2\cdot 521 + 9^2\cdot 382 + 11^2\cdot 151}{1\,400} - 6,367^2 = 8,97$ $\sigma = 2,995$ $CV = \dfrac{2,995}{6,367} = 0,47$

La antigüedad media de los vehículos del municipio es 6,367 años, pero podemos deducir que, dado el elevado valor de la desviación típica y del coeficiente de variación, los datos están bastante dispersos con respecto a la media.

20. Estudia la dispersión de los datos.

Intervalos	[0, 5)	[5, 15)	[15, 35)	[35, 65)
Porcentaje	22	50	25	3

Los datos son frecuencias relativas dadas en porcentajes. Completamos la tabla de frecuencias:

Antigüedad (años)	[0, 5)	[5, 15)	[15, 35)	[35, 65)
x_i	2,5	10	25	50
h_i	0,22	0,5	0,25	0,03
%	22	50	25	3

Calculamos las medidas estadísticas:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot x_i = 2{,}5 \cdot 0{,}22 + 10 \cdot 0{,}5 + 25 \cdot 0{,}25 + 50 \cdot 0{,}03 = 13{,}3$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot h_i - \overline{x} = (2{,}5^2 \cdot 0{,}22 + 10^2 \cdot 0{,}5 + 25^2 \cdot 0{,}25 + 50^2 \cdot 0{,}03) - 13{,}3^2 = 105{,}735 \qquad \sigma = 10{,}28$$

$$CV = \frac{10{,}28}{13{,}3} = 0{,}77$$

Podemos deducir que los datos están muy dispersos con respecto a la media, que es 13,3.

21. Di en cuál de las muestras están los datos más concentrados y si existe algún dato atípico.

Muestra *A*: 8 6 9 6 2 3 6 7

Muestra *B*: 11 13 15 13 11 12 13 22

- Muestra *A*:

x_i	2	3	6	7	8	9	**Total**
f_i	1	1	3	1	1	1	**8**

$$\overline{x}_A = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 1}{8} = 5{,}875$$

$$\sigma^2_A = \frac{2^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 1 + 6^2 \cdot 3 + 7^2 \cdot 1 + 8^2 \cdot 1 + 9^2 \cdot 1}{8} - 5{,}875^2 = 4{,}86 \qquad \sigma_A = 2{,}2 \qquad CV_A = \frac{2{,}2}{5{,}875} = 0{,}38$$

Analizamos la existencia de datos atípicos. Los datos que no se encuentren en este intervalo podrían considerarse atípicos:

$\left(\overline{x}_A - 3\sigma_A, \overline{x}_A + 3\sigma_A\right) = (-0{,}725; 15{,}475) \rightarrow$ No hay datos atípicos.

- Muestra *B*:

x_i	11	12	13	15	22	**Total**
f_i	2	1	3	1	1	**8**

$$\overline{x}_B = \frac{11 \cdot 2 + 12 \cdot 1 + 13 \cdot 3 + 15 \cdot 1 + 22 \cdot 1}{8} = 13{,}75$$

$$\sigma^2_B = \frac{11^2 \cdot 2 + 12^2 \cdot 1 + 13^2 \cdot 3 + 15^2 \cdot 1 + 22^2 \cdot 1}{8} - 13{,}75^2 = 11{,}1875 \qquad \sigma_B = 3{,}345 \qquad CV_B = \frac{3{,}345}{13{,}75} = 0{,}24$$

Analizamos la existencia de datos atípicos. Los datos que no se encuentren en este intervalo podrían considerarse atípicos:

$(\overline{x}_B - 3\sigma_B, \overline{x}_B + 3\sigma_B) = (3{,}715; 23{,}785)$ → No hay datos atípicos.

Analizando las medidas estadísticas obtenidas, podemos concluir que los datos están más concentrados alrededor de la media en la muestra *B*.

SABER HACER

22. Organiza los datos en una tabla de frecuencias, agrupándolos en intervalos.

61 72 63 80 45 57 66 77 39 57 43 42 61 70 34
69 68 49 39 54 58 69 73 41 53 81 52 40 45 45

Calculamos el número de intervalos que utilizaremos:

$\sqrt{30} \approx 5{,}5 \rightarrow 6$ intervalos

Calculamos la amplitud de cada intervalo:

$\frac{Max - Min}{\sqrt{N}} = \frac{81-34}{\sqrt{30}} \approx 8{,}58$ → La amplitud de los intervalos será 9.

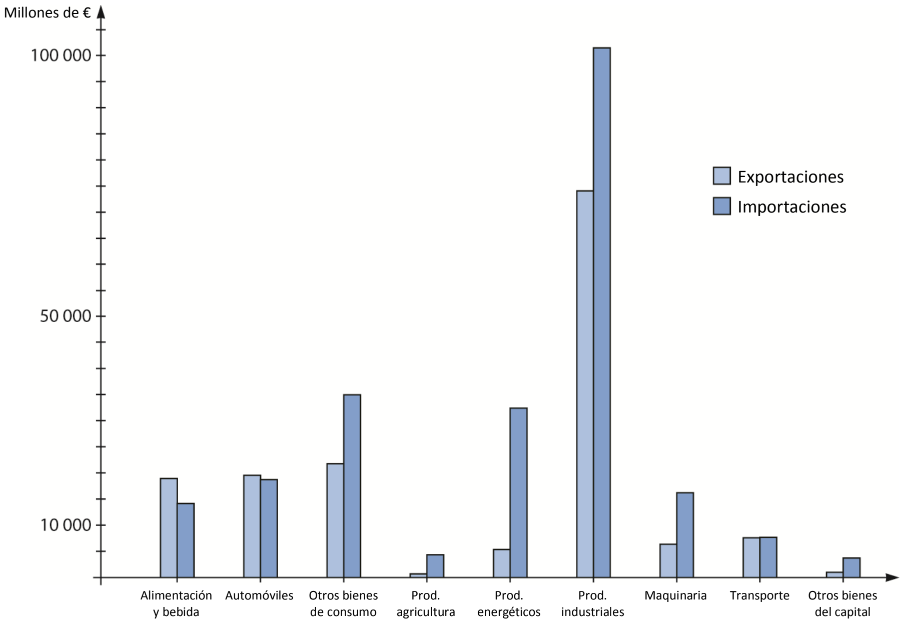
Contruimos la tabla de frecuencias:

Datos	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[34, 43)	38,5	6	6	0,2	0,2
[43, 52)	47,5	5	11	0,167	0,367
[52, 61)	56,5	6	17	0,2	0,567
[61, 70)	65,5	7	24	0,233	0,8
[70, 79)	74,5	4	28	0,133	0,933
[79, 88)	83,5	2	30	0,067	1
Total		**30**		**1**	

23. En un estudio sobre el comercio exterior, la tabla recoge los datos obtenidos, en millones de euros, en importaciones y exportaciones durante un año.

	Exportaciones	Importaciones
Alimentos y bebida	18 678	14 029,5
Automóviles	19 346,5	18 491,7
Otros bienes de consumo	21 571,6	34 466,3
Productos de agricultura	695,5	4 317,3
Productos energéticos	5 302	31 957,9
Productos industriales	73 109,8	100 808,1
Maquinaria	6 297,5	16 061,4
Transporte	7 540,3	7 568,3
Otros bienes de capital	1 017,9	3 671,2

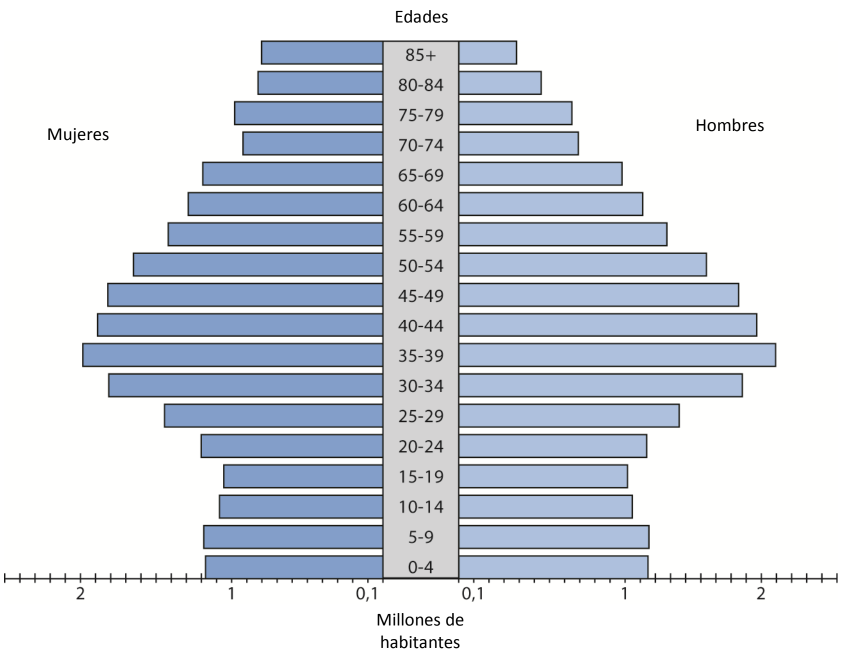
Construye un diagrama de barras adosadas e interprétalo.



Este diagrama contrasta las exportaciones e importaciones realizadas en un país en un año. Las importaciones tienen mucho más peso que las exportaciones, salvo en *Alimentación y bebidas,* donde destacan las exportaciones, y en *Automóviles* y *Transporte,* donde se encuentra parejo. El país posee un déficit comercial.

24. Dibuja y analiza la pirámide de población del año 2013.

Edad	Hombres	Mujeres
0-4	1250261	1172504
5-9	1256481	1184050
10-14	1146098	1080604
15-19	1114480	1051130
20-24	1241695	1201940
25-29	1456221	1443412
30-34	1873020	1811758
35-39	2093321	1983801
40-44	1968657	1886012
45-49	1849194	1818983
50-54	1636317	1648642
55-59	1375659	1419284
60-64	1215561	1286727
65-69	1078145	1190748
70-74	789593	924047
75-79	747102	979003
80-84	544043	825164
85 y más	381844	802321



- La esperanza de vida es bastante alta.
- Las mujeres tienen una esperanza de vida es mayor que la de los hombres.
- La mayor parte de la población está entre los 30 y los 54 años y la población menor de 20 años es escasa, lo que augura un envejecimiento de la población.

25. Estudia la simetría de estos datos.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i	1	1	1	2	3	5	9	10

Completamos la tabla con las frecuencias acumuladas:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	**Total**
f_i	1	1	1	2	3	5	9	10	**32**
F_i	1	2	3	5	8	13	22	32	

Calculamos los cuartiles:

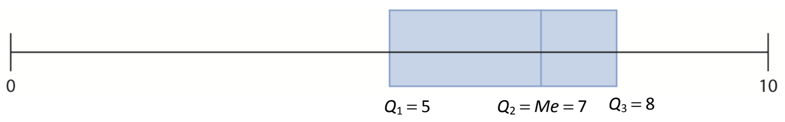
25 % de 32 = 8 50 % de 32 = 16 75 % de 32 = 24

$Q_1 \longrightarrow$ De las frecuencias acumuladas, la primera que es mayor que 8 es F_5, por tanto, $Q_1 = 5$.

$Q_2 \longrightarrow$ De las frecuencias acumuladas, la primera que es mayor que 16 es F_7, por tanto, $Q_2 = Me = 7$.

$Q_3 \longrightarrow$ De las frecuencias acumuladas, la primera que es mayor que 24 es F_8, por tanto, $Q_1 = 8$.

Dibujamos el diagrama de caja:



Los datos mayores que la mediana se agrupan en un intervalo de menor amplitud que los datos inferiores, por lo que los datos presentan una asimetría por la derecha.

26. Determina las medidas estadísticas, utilizando la calculadora, de la tabla que muestra el gasto en agua de los vecinos de un edificio.

N.º de vecinos	3	5	7	10	3	1
Gasto (€)	[20,25)	[25,30)	[30, 35)	[35, 40)	[40,45)	[45, 50)

Las marcas de clase de cada intervalo son:

$x_1 = 22,5$ $x_2 = 27,5$ $x_3 = 32,5$ $x_4 = 37,5$ $x_5 = 42,5$ $x_6 = 47,5$

$\overline{x} = 33,88$ $\sigma^2 = 39,477 \to \sigma = 6,283$ $CV = \dfrac{6,283}{33,88} = 0,185$

27. Las medidas estadísticas de las notas de una clase son $\overline{x} = 5,7$; $Me = 4$; $Mo = 4$; $\sigma = 1,70$. Interprétalas.

La nota media de la clase ha sido 5,7, aunque la mayoría ha obtenido un 4 y hay tanta gente que ha obtenido un 4 o más como un 4 o menos.

$CV = \dfrac{1,70}{5,7} = 0,30$ no es muy alto, lo que indica que las notas se han concentrado sobre el 5,7.

Las tres medidas centrales no están muy próximas, lo que podría significar que ha habido mayoría de suspensos.

28. **Los datos muestran las precipitaciones, en ℓ/m², en dos ciudades durante las últimas 6 semanas.**

Ciudad A	25	32	22	20	12	19
Ciudad B	2	5	100	0	0	30

¿A y B pertenecen a la misma zona climática? ¿Por qué?

Realizamos un estudio estadístico sobre cada una de las ciudades:

Ciudad A:

$\overline{X}_A = 21{,}667$ $\sigma_A = 6{,}07$ $CV_A = \dfrac{6{,}07}{21{,}667} = 0{,}28$

Ciudad B:

$\overline{X}_B = 22{,}833$ $\sigma_B = 36{,}057$ $CV_B = \dfrac{36{,}057}{22{,}833} = 1{,}58$

A pesar de que la media de precipitaciones es muy parecida en las dos ciudades, el coeficiente de variación es muchísimo menor en la ciudad A que en la B, lo que significa que las precipitaciones semanales están más cerca de la media o, lo que es lo mismo, son más regulares. Por esto podemos concluir que A y B no pertenecen a la misma zona climática.

29. **Completa la tabla y calcula las medidas estadísticas.**

Datos (x_i)	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10)
Frec. (f_i)	5	2	8	8	2

Datos	x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
[0, 2)	1	5	5	5	5
[2, 4)	3	2	7	6	18
[4, 6)	5	8	15	40	200
[6, 8)	7	8	23	56	392
[8, 10)	9	2	25	18	162
Total		**25**		**125**	**777**

$\overline{X} = 5$

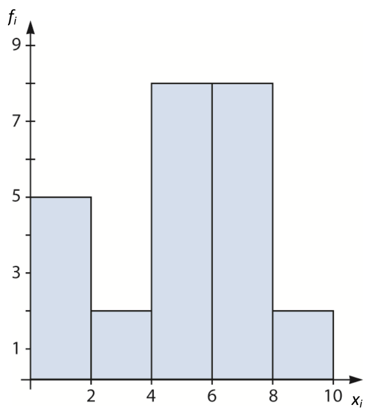
$\sigma^2 = 6{,}08$

$\sigma = 2{,}466$

$CV = \dfrac{2{,}466}{5} = 0{,}493$

30. **Realiza un histograma con estos datos.**

Datos (x_i)	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10)
Frec. (f_i)	5	2	8	8	2



ACTIVIDADES FINALES

31. Queremos hacer un estudio sobre práctica deportiva en los alumnos de la ESO de nuestro instituto preguntándoles cuántos días al mes realizan alguna actividad deportiva.

a) ¿Qué muestra elegirías para realizar el estudio?
b) ¿De qué tamaño es la muestra?
c) ¿Cuál es la población?

a) Se deberían escoger chicos y chicas de los cuatro cursos de la ESO.

b) Dependerá de la cantidad de alumnos del instituto.

c) Todos los alumnos de la ESO de ese instituto.

32. Indica el tipo de variable estadística que estamos estudiando y razona, en cada caso, qué sería más aconsejable: estudiar una muestra o la población.

a) El dinero gastado en una semana por tus amigos.
b) La talla de pantalón de todas las personas de tu ciudad.
c) El color de ojos de los miembros de tu familia.
d) La temperatura a las 12 de la mañana de hoy de todos los pueblos de tu provincia.
e) La estatura de todos los soldados del ejército.
f) El nivel de colesterol en sangre de todos los españoles.
g) La edad de todos los alumnos de un colegio.

a) Cuantitativa continua.	Estudiar la población.
b) Cuantitativa discreta.	Estudiar una muestra.
c) Cualitativa.	Estudiar la población.
d) Cuantitativa continua.	Estudiar una muestra.
e) Cuantitativa continua.	Estudiar una muestra.
f) Cuantitativa continua.	Estudiar una muestra.
g) Cuantitativa discreta.	Estudiar una muestra.

33. El entrenador de un club de fútbol ha anotado el número de tarjetas rojas que tuvieron a lo largo de la temporada todos los integrantes de la plantilla obteniendo estos datos.

0 2 4 1 5   0 0 2 1 1   3 4 1 1 0   1 2 0 1 2   4 0 1 2 2

a) Organiza los resultados en una tabla de frecuencias.
b) ¿Qué significado tiene en este caso la columna de las frecuencias acumuladas?

a)

Nº tarjetas rojas	f_i	F_i	h_i	H_i
0	6	6	0,24	0,24
1	8	14	0,32	0,56
2	6	20	0,24	0,8
3	1	21	0,04	0,84
4	3	24	0,12	0,96
5	1	25	0,04	1
Total	**25**		**1**	

b) El número de jugadores que tuvieron menos de *i* tarjetas.

34. **Se han perdido algunos datos de esta tabla con las provincias de nacimiento de un grupo de personas. ¿Podrías completarla?**

Provincia	f_i	h_i	Porcentaje
Albacete	**12**	**0,2**	20 %
Ciudad Real	**9**	0,15	**15 %**
Cuenca	21	**0,35**	**35 %**
Guadalajara	**6**	**0,1**	10 %
Toledo	**12**	0,2	**20 %**
Total	60	**1**	**100 %**

35. **Completa la tabla relativa a la marca de teléfono móvil de un grupo de alumnos.**

Marca	f_i	h_i	Porcentaje
Apple	**4**	**0,16**	16 %
Samsung	12	0,48	**48 %**
LG	3	**0,12**	**12 %**
Sony	**5**	**0,2**	20 %
Shen Wai	**1**	0,04	**4 %**
Total	**25**	**1**	**100 %**

36. **Determina la moda, la mediana y la media aritmética en las siguientes series de datos.**

a) 7, 9, 7, 9, 7, 9, 7, 9 b) 2, 4, 8, 4, 5, 5, 7 c) 12, 2, 6, 5, 9, 5, 3 d) 3, 5, 9, 5, 6, 6, 9, 5 e) 6, 6, 5, 5, 4, 8, 4, 2

a)

x_i	7	9	**Total**
f_i	4	4	**8**
F_i	4	8	

$Mo = \{7, 9\}$ $Me = 8$ $\overline{x} = 8$

b)

x_i	2	4	5	7	8	**Total**
f_i	1	2	2	1	1	**7**
F_i	1	3	5	6	7	

$Mo = \{4, 5\}$ $Me = 5$ $\overline{x} = 5$

c)

x_i	2	3	5	6	9	12	**Total**
f_i	1	1	2	1	1	1	**7**
F_i	1	2	4	5	6	7	

$Mo = 5$ $Me = 5$ $\overline{x} = 6$

d)

x_i	3	5	6	9	**Total**
f_i	1	3	2	2	**7**
F_i	1	4	6	8	

$Mo = 5$ $\quad Me = 5$ $\quad \overline{x} = 5{,}5$

e)

x_i	2	4	5	6	8	**Total**
f_i	1	2	2	2	1	**8**
F_i	1	3	5	7	8	

$Mo = \{4, 5, 6\}$ $\quad Me = 5$ $\quad \overline{x} = 5$

37. Para una muestra de 572 conductores de autobús se registra el número de accidentes en los que han estado implicados durante 4 años.

N.º de accidentes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N.º de conductores	121	156	130	60	57	23	12	9	3	1

a) Realiza una tabla de frecuencias.
b) Calcula las medidas de centralización.
c) Halla los valores de las medidas de dispersión.

a)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**Total**
f_i	121	156	130	60	57	23	12	9	3	1	**572**
F_i	121	277	407	467	524	547	559	568	571	572	
h_i	0,212	0,273	0,227	0,105	0,1	0,04	0,021	0,016	0,005	0,001	**1**
H_i	0,212	0,485	0,712	0,817	0,917	0,957	0,978	0,994	0,999	1	

b) $Mo = 1$ $\quad Me = 2$ $\quad \overline{x} = \frac{1107}{572} = 1{,}935$

c) $DM = \frac{760{,}164}{572} = 1{,}329$ $\quad \sigma^2 = \frac{3\,849}{572} - 1{,}935^2 = 2{,}984$ $\quad \sigma = 1{,}727$ $\quad CV = \frac{1{,}727}{1{,}935} = 0{,}89$

38. El número de hermanos, excluidos ellos, de un grupo de alumnos de 1.º de Bachillerato se han recogido en la tabla siguiente.

N.º de hermanos	0	1	2	3	4	5	6
f_i	7	12	6	3	1	0	1

Halla las medidas de centralización.

El número total de datos es $N = 30$.

$Mo = 1$ hermano $\quad Me = 1$ hermano $\quad \overline{x} = \frac{43}{30} = 1{,}4\widehat{3}$ hermanos

39. Añade un dato a este conjunto para que la media sea 6. ¿Varía la mediana?

3 3 3 4 4 4 5 5 5 6 6 6 7 7 7

La media de los datos actuales es $\overline{X} = \dfrac{3 \cdot (3+4+5+6+7)}{15} = 5$

$N = 16 \rightarrow 6 \cdot 16 = 96$ $\quad 96 - 3 \cdot (3+4+5+6+7) = 21 \longrightarrow$ El nuevo dato debería ser 21.

40. En una encuesta se preguntó por el número de televisores en funcionamiento que hay en los hogares. Las respuestas están recogidas en la tabla. Calcula las medidas de centralización: media, mediana y moda.

N.º de televisores	0	1	2	3
f_i	2	8	12	3

El número total de datos es $N = 25$.

$\overline{X} = \dfrac{41}{25} = 1,64$ televisores $\qquad$ $Me = 2$ televisores $\qquad$ $Mo = 2$ televisores

41. En la siguiente tabla aparece información sobre las edades de los socios infantiles y juveniles de un club de natación.

Edad (años)	[5,8)	[8,11)	[11,14)	[14,17)	[17,20)
f_i	36	23	30	27	24

a) Halla la media aritmética.
b) Calcula la mediana.
c) Obtén la moda.

Las marcas de clase de los intervalos son:

$x_1 = 6,5$ $\qquad x_2 = 9,5$ $\qquad x_3 = 12,5$ $\qquad x_4 = 15,5$ $\qquad x_5 = 18,5$

El número total de datos es $N = 140$.

a) $\overline{X} = \dfrac{1690}{140} = 12,071$ años $\qquad$ b) $Me = 12,5$ años $\qquad$ c) $Mo = 6,5$ años

42. Dados los siguientes datos encuentra la cantidad tal que sumada o restada a cada dato haga que la media sea 1.

x_i	1	2	3	4	5
f_i	2	1	3	2	2

Calculamos la media de los datos: $\overline{X} = \dfrac{31}{10} = 3,1$

La cantidad que hay que sumar a los datos para que la media sea 1 será: $1 - 3,1 = -2,1$.

Por tanto, hay que restarle 2,1 a todos los datos para que su media sea 1.

43. **En un gimnasio han ingresado este año 160 nuevos socios. Sus edades se distribuyen como podemos ver en la siguiente tabla.**

Determina los percentiles 30, 40, 60, 80 y 90.

Edad	18	19	20	21	22	23	24
f_i	22	36	40	24	16	12	10

Completamos la tabla con las frecuencias acumuladas:

Edad	18	19	20	21	22	23	24	Total
f_i	22	36	40	24	16	12	10	160
F_i	22	58	98	122	138	150	160	

30 % de 160 = 48 $\longrightarrow P_{30} = 19$

40 % de 160 = 64 $\longrightarrow P_{40} = 20$

60 % de 160 = 96 $\longrightarrow P_{60} = 20$

80 % de 160 = 128 $\longrightarrow P_{80} = 22$

90 % de 160 = 144 $\longrightarrow P_{90} = 23$

44. **El tutor de 1.º A ha hecho una relación de los alumnos del grupo reunidos por el número de suspensos que han tenido en la primera evaluación.**

N.º de suspensos	0	1	2	3	5	Total
f_i	12	9	6	4	1	32

Calcula.

a) La media aritmética.

b) La desviación media.

c) La varianza.

d) La desviación típica.

a) $\overline{x} = \dfrac{38}{32} = 1{,}1875$

b) $DM = \dfrac{31{,}875}{32} = 0{,}996$

c) $\sigma^2 = \dfrac{94}{32} - 1{,}1875^2 = 1{,}527$

d) $\sigma = 1{,}236$

45. **Las marcas, en centímetros, de los saltadores de altura de un equipo juvenil son las siguientes.**

192 178 186 202 199 181 188 185 179 194

Determina.

a) La media aritmética.

b) La desviación media.

c) La varianza.

d) La desviación típica.

a) $\overline{x} = \dfrac{1884}{10} = 188{,}4$

b) $DM = \dfrac{66{,}8}{10} = 6{,}68$

c) $\sigma^2 = \dfrac{355\,556}{10} - 188{,}4^2 = 61{,}04$

d) $\sigma = 7{,}8128$

46. **Un supermercado está haciendo un estudio de mercado para adecuar su oferta con los gustos de los clientes. Hoy ha controlado el número de artículos diferentes que llevaban en su carro los clientes cuando pasaban por la caja. Han resumido los datos de la forma siguiente.**

Artículos	Clientes
[0, 5)	28
[5, 10)	44
[10, 15)	30
[15, 20)	7
[20, 25)	3
[25, 30)	2

a) Halla el número medio de artículos diferentes que lleva cada carro que sale de las cajas del supermercado.
b) Calcula también sus medidas de dispersión.
c) Interpreta los resultados obtenidos.

Las marcas de clase son:

$x_1 = 2,5$ $x_2 = 7,5$ $x_3 = 12,5$ $x_4 = 17,5$ $x_5 = 22,5$ $x_6 = 27,5$

Y el número total de datos es: $N = 114$.

a) $\overline{x} = \frac{1020}{114} = 8,947$ artículos

b) $DM = \frac{488,421}{114} = 4,284$ $\sigma^2 = \frac{112\,512,5}{114} - 8,947^2 = 29,7$ $\sigma = 5,45$ $CV = \frac{5,45}{8,947} = 0,61$

c) Cada cliente lleva de media 8,947 artículos, casi 9. Pero el coeficiente de variación indica que los datos no están demasiado concentrados en la media.

47. **El seleccionador nacional de baloncesto femenino está valorando la inclusión en el equipo de una jugadora. Ha estudiado sus últimos diez partidos y ha apuntado el número de minutos jugados y los puntos anotados. Los puedes ver en la tabla.**

N.º de partidos	Minutos jugados	Puntos anotados
1	32	26
2	30	15
3	34	23
4	27	11
5	12	2
6	26	20
7	30	21
8	34	13
9	32	27
10	33	18

a) Calcula la media aritmética y la desviación típica de cada una de las variables estudiadas.
b) Determina el coeficiente de variación en ambas para estimar cuál de las dos variables es más dispersa.

a) La media y la desviación típica de los minutos jugados son:

$\overline{x}_M = \frac{290}{10} = 29$ $\sigma_M{}^2 = \frac{8\,798}{10} - 29^2 = 38{,}8 \rightarrow \sigma_M = 6{,}229$

La media y la desviación típica de los puntos anotados son:

$\overline{x}_P = \frac{176}{10} = 17{,}6$

$\sigma_P{}^2 = \frac{3\,618}{10} - 17{,}6^2 = 52{,}04 \rightarrow \sigma_P = 7{,}214$

b) El coeficiente de variación media de los minutos jugados es:

$CV_M = \frac{6{,}226}{29} = 0{,}215$.

El coeficiente de variación media de los puntos anotados es:

$CV_P = \frac{7{,}214}{17{,}6} = 0{,}41$.

$CV_P > CV_M \rightarrow$ Los puntos anotados son más dispersos que los minutos jugados.

48. Una empresa realiza un estudio sobre el salario anual de sus trabajadores, cuyos resultados se recogen en la siguiente tabla.

Salario (en miles de €)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)	[30, 35)	[35, 40)
N.º de trabajadores	21	32	85	90	25	5

a) Calcula las medidas de centralización.

b) Halla las medidas de dispersión.

Completamos la tabla de frecuencias:

Salario (miles de €)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)	[30, 35)	[35, 40)	Total
x_i	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	
f_i	21	32	85	90	25	5	**258**
F_i	21	53	138	228	253	258	

a) $Mo = 27{,}5$ $Me = 27{,}5$

$\overline{x} = \frac{6\,210}{258} = 24{,}07$

b) $DM = \frac{1173{,}256}{258} = 4{,}55$

$\sigma^2 = \frac{157\,612{,}5}{258} - 24{,}07^2 = 31{,}547$

$\sigma = 5{,}617$

$CV = \frac{5{,}617}{24{,}07} = 0{,}233$

49. **Analiza, utilizando las medidas de centralización y las de dispersión, los salarios mensuales de estas dos empresas.**

Empresa A	
Salarios	**N.º de empleados**
[600, 1000)	15
[1000, 1400)	20
[1400, 1800)	30
[1800, 2000)	20
[2000, 2400)	15

Empresa B	
Salarios	**N.º de empleados**
[600, 1000)	10
[1000, 1400)	30
[1400, 1800)	35
[1800, 2000)	24
[2000, 2400)	10

Las marcas de clase son, para los dos estudios, las siguientes:

$x_1 = 800$ $x_2 = 1\,200$ $x_3 = 1\,600$ $x_4 = 1\,900$ $x_5 = 2\,200$

- Empresa A:

  El número total de empleados es $N_A = 100$.

  Las medidas de centralización son:

  $Mo_A = 1\,600$ € $Me_A = 1\,600$ €

  $$\bar{x}_A = \frac{155\,000}{100} = 1550 \text{ €}$$

  Las medidas de dispersión son:

  $$DM_A = \frac{36\,500}{100} = 365$$

  $$\sigma_A^2 = \frac{260\,000\,000}{100} - 1550^2 = 197\,500 \qquad \sigma_A = 444{,}41$$

  $$CV_A = \frac{444{,}41}{1550} = 0{,}287$$

- Empresa B:

  El número total de empleados es $N_B = 109$.

  Las medidas de centralización son:

  $Mo_B = 1\,600$ € $Me_B = 1\,600$ €

  $$\bar{x}_B = \frac{167\,600}{109} = 1537{,}61 \text{ €}$$

  Las medidas de dispersión son:

  $$DM_B = \frac{35\,009{,}17}{109} = 321{,}185$$

  $$\sigma_B^2 = \frac{274\,240\,000}{109} - 1537{,}61^2 = 151\,704{,}402 \qquad \sigma_B = 389{,}45$$

  $$CV_B = \frac{389{,}45}{1537{,}61} = 0{,}253$$

50. **María trabaja como operadora telefónica en la empresa de telefonía, LEMON. Le han encargado que realice una encuesta a todos los clientes que atienda. Les hace solo tres preguntas:**

X) ¿Cuánto tiempo ha pasado desde que marcó nuestro número de atención al cliente y el momento en que hemos resuelto su problema?

Y) Valoración personal del servicio prestado. MB (muy bien), B (bien), R (regular), M (mal) y MM (muy mal).

Z) Número de años que lleva abonado a la empresa de telefonía LEMON.

La operadora ha resumido los datos de los 40 últimos encuestados en una tabla para pasarlos al departamento de marketing.

X	Y	Z
12	R	1
5	B	4
18	M	3
3	MB	3
2	MB	2
7	MM	1
6	M	3
11	B	4
2	MB	5
22	MM	6
4	B	1
7	B	4
9	R	2
10	R	3
18	R	3
5	B	3
12	MB	2
2	MB	4
7	MB	4
5	B	5

X	Y	Z
1	B	3
12	MB	3
6	MB	2
7	M	3
23	MM	4
15	MB	7
4	M	5
21	R	4
7	B	4
2	B	6
6	B	3
13	B	2
9	R	9
18	M	2
10	R	4
11	R	2
2	B	4
5	MB	6
13	B	7
4	B	5

a) Toma cada una de las variables y realiza un recuento (si son muchos valores diferentes, agrúpalos en clases).

b) Confecciona con cada una su tabla de frecuencias.

c) Realiza en cada caso el gráfico que te parezca adecuado.

d) Determina, si es posible, sus medidas de centralización.

e) Obtén, en cada una, los cuartiles inferior y superior.

f) Halla, si es posible, las medidas de dispersión de cada una de las tres series.

g) Decide entre la primera y la tercera variable cuál es más dispersa.

a) ▪ Variable X:

Agrupamos los datos en intervalos de clase. El número de intervalos será $\sqrt{40} = 6{,}3 \approx 7$, y su tamaño será $\frac{23-1}{\sqrt{40}} = 3{,}5 \approx 5$.

Minutos	[1, 6)	[6, 11)	[11, 16)	[16, 21)	[21, 26)	**Total**
x_i	3,5	8,5	13,5	18,5	23,5	
f_i	14	12	8	3	3	**40**

▪ Variable Y:

Valoración	MB	B	R	M	MM	**Total**
f_i	10	14	8	5	3	**40**

▪ Variable Z:

Años	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**Total**
f_i	3	7	10	10	4	3	2	0	1	**40**

b) ▪ Variable X:

Minutos	[1, 6)	[6, 11)	[11, 16)	[16, 21)	[21, 26)	**Total**
x_i	3,5	8,5	13,5	18,5	23,5	
f_i	14	12	8	3	3	**40**
F_i	14	26	34	37	40	
h_i	0,35	0,3	0,2	0,075	0,075	**1**
H_i	0,35	0,65	0,85	0,925	1	

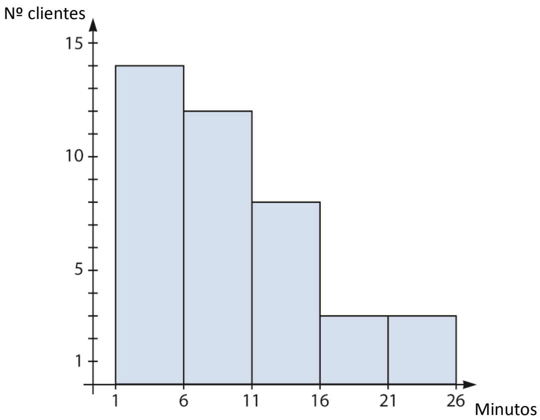
▪ Variable Y:

Valoración	MB	B	R	M	MM	**Total**
f_i	10	14	8	5	3	**40**
h_i	0,25	0,35	0,2	0,125	0,075	

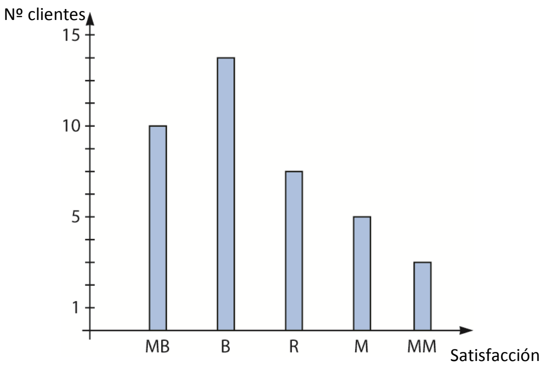
▪ Variable Z:

Años	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**Total**
f_i	3	7	10	10	4	3	2	0	1	**40**
F_i	3	10	20	30	34	37	39	39	40	
h_i	0,075	0,175	0,25	0,25	0,1	0,075	0,05	0	0,025	**1**
H_i	0,075	0,25	0,5	0,75	0,85	0,925	0,975	0,975	1	

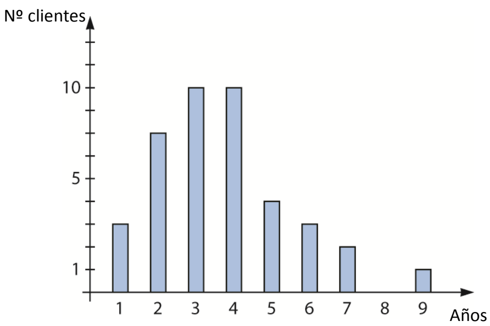
c) ▪ Variable X:



▪ Variable Y:



▪ Variable Z:



d) ▪ Variable X:

$Mo_X = 3{,}5$ minutos $\quad Me_X = 8{,}5$ minutos $\quad \overline{X}_X = \frac{385}{40} = 9{,}625$ minutos

▪ Variable Y:

Es una variable cualitativa, por lo que la única medida de centralización que podemos calcular es la moda:

$Mo_Y = B$

▪ Variable Z:

$Mo_Z = \{3, 4\}$ $\quad Me_Z = 3{,}5$ $\quad \overline{X}_Z = \frac{148}{40} = 3{,}7$

e) 25 % de 40 = 10 y 75 % de 40 = 30.

- Variable X:

$Q_{X1} = 3{,}5$ $\quad\quad$ $Q_{X3} = 13{,}5$

- Variable Y:

Es una variable cualitativa, por lo que no tiene sentido calcular los cuartiles.

- Variable Z:

$Q_{Z1} = 2{,}5$ $\quad\quad$ $Q_{Z3} = 4{,}5$

f) ▪ Variable X:

$$DM_X = \frac{198{,}5}{40} = 4{,}96 \qquad \sigma_X{}^2 = \frac{5\,180}{40} - 9{,}625^2 = 36{,}86 \qquad \sigma_X = 6{,}07 \qquad CV_X = \frac{6{,}07}{9{,}625} = 0{,}63$$

- Variable Y:

Es una variable cualitativa, por lo que no se pueden calcular las medidas de dispersión.

- Variable Z:

$$DM_Z = \frac{54}{40} = 1{,}35 \qquad \sigma_Z{}^2 = \frac{668}{40} - 3{,}7^2 = 3{,}01 \qquad \sigma_Z = 1{,}735 \qquad CV_Z = \frac{1{,}735}{3{,}7} = 0{,}469$$

g) $CV_X > CV_Z \longrightarrow$ La variable X es más dispersa que la Z.

51. El 15 % de los científicos de un centro de investigación habla solo en castellano. Un 48 % puede hablar en dos idiomas diferentes. Hay un 28 % que es capaz de comunicarse en tres lenguas distintas y el resto habla cuatro o más idiomas.

Realiza una tabla de frecuencias con estos datos. ¿Hay algún tipo de frecuencia que responda a la pregunta de cuántos científicos del centro hablan menos de tres lenguas? Razona tu respuesta.

Nº idiomas	1	2	3	4 o +	Total
%	15	48	28	9	**100**
h_i	0,15	0,48	0,28	0,09	**1**
H_i	0,15	0,63	0,91	1	

Sí, la frecuencia relativa acumulada $H_2 = 0{,}63 = 63\,\%$.

52. Calcula la media aritmética, la desviación típica y el coeficiente de variación de los datos de esta serie.

21 34 28 26 24 25 20 30

a) Escribe otra serie estadística cuya media sea doble de la anterior y que tenga menor coeficiente de variación.

b) Escribe otra serie diferente cuya media sea la mitad que la primera y que su coeficiente de variación sea mayor.

$$\overline{x} = \frac{208}{8} = 26 \qquad \sigma^2 = \frac{5\,558}{8} - 26^2 = 18{,}75 \rightarrow \sigma = 4{,}33 \qquad CV = \frac{4{,}33}{26} = 0{,}167$$

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

Si sumamos la media a todos los datos, la serie obtenida tendrá como media el doble de la inicial y su desviación típica no variará, por tanto, su coeficiente de variación disminuirá:

47 69 54 52 50 51 46 56

$$\overline{x} = \frac{416}{8} = 52 = 2 \cdot 26 \qquad \sigma^2 = \frac{21\,782}{8} - 56^2 = 18{,}75 \rightarrow \sigma = 4{,}33 \qquad CV = \frac{4{,}33}{52} = 0{,}083$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

La media tiene que ser $\frac{26}{2}=13$. De forma similar a lo realizado en el apartado anterior, si restamos 13 a todos los datos, la serie obtenida tendrá como media la mitad de la inicial y su desviación típica no variará, por lo que su coeficiente de variación aumentará:

8 21 15 13 11 12 7 17

$\overline{x}=\frac{104}{8}=13=\frac{26}{2}$ $\sigma^2=\frac{1502}{8}-13^2=18,75\rightarrow\sigma=4,33$ $CV=\frac{4,33}{13}=0,333$

53. El seleccionador nacional de baloncesto estudia con mucho cuidado las características de todos sus jugadores. En la tabla siguiente había reflejado el número de faltas personales cometidas por el jugador *X* en sus últimos 50 partidos.

Faltas personales	5	4	3	2	1	0	Total
Partidos	4	6		14		1	50

Como ves, se han perdido un par de datos. ¿Podrías recuperarlos sabiendo que el número medio de faltas personales del jugador *X* era de 2,62?

Sean x e y, respectivamente, el primer y el segundo dato desconocido.

Sabemos que la suma del total de partidos es 50, es decir:

$4+6+x+14+y+1=50\rightarrow x+y=25$

También sabemos que la media de faltas personales es 2,62, es decir:

$$\overline{x}=\frac{5\cdot4+4\cdot6+3\cdot x+2\cdot14+1\cdot y+0\cdot1}{50}=2,62\rightarrow 3x+y=59$$

Con las ecuaciones obtenidas planteamos un sistema de ecuaciones que resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r}x+y=25\\3x+y=59\end{array}\right\}\rightarrow x=17,\ y=8$$

El jugador cometió 3 faltas personales en 17 partidos y 1 falta en 1 partido.

54. Las notas obtenidas por Daniel en Matemáticas durante este trimestre son 4, 7, 9, 7 y 5.

a) Calcula la media aritmética, la moda y la mediana de esta serie.
b) Aún le falta realizar otro examen. ¿Qué nota debería obtener en él para que la nota media resultara ser 6,5?
c) ¿Qué condiciones tendría que cumplir esa nota que falta para que la nueva serie tuviera la misma mediana?
d) ¿Qué condiciones tendría que cumplir esa nota que falta para que la nueva serie tuviera la misma moda?

a) $\overline{x}=\frac{32}{5}=6,4$ $Mo=7$ $Me=7$

b) Sea x la nota que tendría que obtener. La nueva media sería:

$\overline{x}=\frac{32+x}{6}=6,5\rightarrow x=7$ es la nota que debería obtener Daniel en el próximo examen.

c) Ser mayor o igual que la mediana inicial.

d) Ser el valor de la moda o un valor distinto a las otras notas obtenidas.

55. **Un entrenador de atletismo ha formado dos grupos de corredores de 100 metros lisos, uno femenino y otro masculino. La media de las marcas del equipo masculino es de 12,42 segundos, con una desviación típica de 1,2 segundos. La media del equipo femenino es de 13,04 segundos, con una desviación típica de 1,05. Al club de atletismo se incorpora una pareja, él tiene una marca de 13,03 segundos y ella de 13,24 segundos. Si solo puede elegir uno de los atletas, ¿cuál de los dos tiene mejor marca en su categoría?**

Analizamos cómo de alejadas de las medias marcas están las marcas con respecto a la desviación típica:

El atleta: $\frac{|13{,}03-\overline{x}|}{\sigma}=\frac{|13{,}03-12{,}42|}{1{,}2}=0{,}51$ La atleta: $\frac{|13{,}24-\overline{x}|}{\sigma}=\frac{|13{,}24-13{,}04|}{1{,}05}=0{,}19$

El valor es menor en el caso de la chica, por lo que es, de los dos, quien mejor marca tiene en su categoría.

56. **Germán se está preparando para participar en su primera media maratón. Cada día sale a entrenar y anota la distancia recorrida. Hoy, que es viernes, acaba de terminar su entrenamiento y está pensando en lo que debería correr durante el fin de semana. Sus anotaciones han sido las que se muestran en la tabla.**

Día de la semana	L	M	X	J	V	S	D
Distancia	12	18	15	20	19		

a) ¿Cuáles son la media aritmética y la desviación típica de la serie semanal?

b) Añade dos posibles distancias que recorrer el sábado y el domingo de modo que se mantenga la misma media aritmética pero que disminuya su desviación típica.

c) ¿Qué dos distancias podría escribir en el sábado y el domingo de modo que, manteniéndose la media aritmética, aumentara su desviación típica?

d) ¿Sería posible añadir dos distancias en sábado y domingo y que aumente la media aritmética pero no la desviación típica?

e) ¿Podrías hacer lo mismo añadiendo otras dos y que disminuyera la media aritmética sin aumentar la desviación típica?

a) $\overline{x}=\frac{84}{5}=16{,}8$ km $\sigma^2=\frac{1454}{5}-16{,}8^2=8{,}56\rightarrow\sigma=2{,}926$ km

b) Para mantener la media, los nuevos datos, *x* e *y*, deben cumplir:

$$\overline{x}=\frac{84+x+y}{7}=16{,}8\rightarrow x+y=33{,}6\rightarrow y=33{,}6-x$$

Si queremos disminuir la desviación típica manteniendo la media, solo tenemos que tomar dos valores muy próximos a la media como, por ejemplo, la propia media:

$x=16{,}8$ km $\longrightarrow y=16{,}8$ km $\longrightarrow\ \sigma^2=\frac{2\,018{,}48}{7}-16{,}8^2=6{,}114\rightarrow\sigma=2{,}473$ km

c) Partiendo de la misma idea del apartado b), tomamos dos valores muy alejados de la media. Por ejemplo:

$x=1$ km $\longrightarrow y=32{,}6$ km $\longrightarrow\ \sigma^2=\frac{2\,517{,}76}{7}-16{,}8^2=77{,}44\rightarrow\sigma=8{,}8$ km

d) Sí, bastaría con añadir dos valores que estén por encima de la media y a una distancia menor que la desviación típica. Por ejemplo, 17 y 18:

$\overline{x}=\frac{119}{7}=17$ km $\sigma^2=\frac{2\,067}{7}-17^2=6{,}286\rightarrow\sigma=2{,}507$ km

e) Sí, bastaría con añadir dos valores que estén por debajo de la media y a una distancia menor que la desviación típica. Por ejemplo, 15 y 14:

$\overline{x}=\frac{113}{7}=16{,}14$ km $\sigma^2=\frac{1875}{7}-16{,}14^2=7{,}265\rightarrow\sigma=2{,}7$ km

57. **Un grupo de personas está participando en el ensayo clínico de un medicamento. Por ello se está vigilando su nivel de colesterol en sangre. Los resultados del último análisis han sido los que se recogen en la tabla.**

Nivel de colesterol	f_i
[160, 180)	6
[180, 200)	14
[200, 220)	32
[220, 240)	40
[240, 260)	28

a) Calcula la media aritmética y la desviación típica correspondiente a estos datos.

b) El equipo médico desea seleccionar un intervalo de niveles de colesterol que contenga a un 95% de las personas y esté centrado en la media, o sea, que sea del tipo $(\overline{x} - 2\sigma, \overline{x} + 2\sigma)$. ¿Cuáles serán los extremos de dicho intervalo?

a) Las marcas de clase son:

$x_1 = 170$ $x_2 = 190$ $x_3 = 210$ $x_4 = 230$ $x_5 = 250$

El número total de datos es $N = 120$.

$$\overline{x} = \frac{26\,600}{120} = 221,\widehat{6} \qquad \sigma^2 = \frac{5\,956\,000}{120} - 221,\widehat{6}^2 = 497,\widehat{2} \rightarrow \sigma = 22,3$$

b) El intervalo sería:

$(221,6667 - 2 \cdot 22,3;\ 221,6667 + 2 \cdot 22,3) = (177,0667;\ 266,2667)$

58. **Andrés, Beatriz, Carmen y Daniel son cuatro amigos jubilados. Los cuatro trabajaban juntos como estadísticos en el Instituto Nacional de Estadística. Les gusta juntarse y se divierten proponiendo problemas.**

–Como sabéis, curiosamente todos tenemos el mismo número de nietos. Hoy le he dado una propina a cada uno de los míos –comienza Daniel–. Como tienen edades muy distintas, le he dado una cantidad diferente a cada uno.

–Sin saber lo que les has dado, pero sabiendo que no eres muy generoso, yo daré cuatro euros más que tú a cada uno de mis nietos –dice Carmen.

–Pues yo a cada uno de mis nietos le voy a dar la cuarta parte de lo que les ha dado Daniel a los suyos, que yo sé que no es un tacaño –afirma Beatriz un poco picada con su amiga.

–Como yo también creo que Daniel es un poco roñoso, voy a darles cuatro veces más que él a cada uno de mis nietos –responde Andrés, que es el más chulo de todos.

–Está bien. Haremos cálculos y la estadística pondrá a cada uno en su lugar –afirma Daniel un poco mosqueado–. Me pregunto que si llamo «m» a la media de las propinas que yo he dado y «s» a la desviación típica, ¿cuáles serán las medias aritméticas y las desviaciones típicas de las cantidades que vais a dar cada uno de vosotros?

¿Puedes poner un poco de paz entre los amigos realizando tú los cálculos?

Pista. Pon una serie ejemplo para Daniel y realiza los cálculos. Luego construye las series de los demás y vuelve a efectuar los cálculos. Haz una hipótesis general y trata de encontrar una demostración para tu hipótesis.

La media, m, y la desviación típica, s, de las propinas de Daniel son:

$$m=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot x_i}{N} \qquad s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot x_i^2}{N}-m^2}$$

La media y la desviación típica de las propinas de Carmen serán:

$$\overline{x}_{\text{Carmen}}=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot(x_i+4)}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot x_i}{N}+\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot 4}{N}=m+4\cdot\frac{N}{N}=m+4$$

$$\sigma_{\text{Camen}}{}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot(x_i+4)^2}{N}-(m+4)^2=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot(x_i^2+4x_i+16)}{N}-(m+4)^2=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot(x_i^2+4x_i+16)}{N}-(m+4)^2=$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot x_i^2+\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot 8x_i+\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot 16}{N}-(m+4)^2=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot x_i^2}{N}+8m+16-(m^2+8m+16)=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot x_i^2}{N}-m^2=s^2$$

$$\sigma_{\text{Camen}}=s$$

La media y la desviación típica de las propinas de Beatriz serán:

$$\overline{x}_{\text{Beatriz}}=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot\left(\frac{x_i}{4}\right)}{N}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot x_i}{N}=\frac{m}{4}$$

$$\sigma_{\text{Beatriz}}{}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot\left(\frac{x_i}{4}\right)^2}{N}-\left(\frac{m}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot x_i^2}{N}-m^2\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot s^2=\left(\frac{s}{4}\right)^2\rightarrow\sigma_{\text{Beatriz}}=\frac{s}{4}$$

La media y la desviación típica de las propinas de Andrés se calculan de forma similar a las de Beatriz:

$$\overline{x}_{\text{Andrés}}=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot 4x_i}{N}=4m \qquad \sigma_{\text{Andrés}}{}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot 4x_i}{N}-4m^2=(4s)^2\rightarrow\sigma_{\text{Andrés}}=4s$$

59. El tutor de un curso está comparando las notas de dos alumnas, María y Esther. Míralas en la tabla siguiente:

Notas en Matemáticas						
María	3	8	9	3	8	8
Esther	5	7	8	6	7	6

Notas en Lengua Española						
María	4	6	6	5	4	5
Esther	7	8	9	7	9	8

a) Calcula las medias aritméticas y las desviaciones típicas de las dos materias para cada una de las chicas. Explica lo que sucede.

b) ¿Quién tiene las notas más dispersas? ¿Qué medida has calculado para respaldar tus afirmaciones?

a) ▪ María:

Matemáticas → $\overline{x}_{MMat}=6{,}5$ $\sigma_{MMat}=2{,}5$

Lengua → $\overline{x}_{MLen}=5$ $\sigma_{MLen}=0{,}82$

▪ Esther:

Matemáticas → $\overline{x}_{EMat}=6{,}8\widehat{3}$ $\sigma_{EMat}=1{,}07$

Lengua → $\overline{x}_{ELen}=8$ $\sigma_{ELen}=0{,}82$

b) Calculamos los coeficientes de variación para analizar la dispersión de las notas:

- María:

  Matemáticas ⟶ $CV_{MMat} = 0{,}38$ *Lengua* ⟶ $CV_{MLen} = 0{,}16$

- Esther:

  Matemáticas ⟶ $CV_{EMat} = 0{,}16$ *Lengua* ⟶ $CV_{ELen} = 0{,}1$

Los coeficientes de variación mayores son los de María, lo que indica que sus notas son más dispersas.

60. A los participantes en un curso de buceo se les ha medido el tiempo que resisten sin respirar. El resumen de los resultados se presenta en la tabla.

Tiempo (s)	N.º de buceadores
[40, 52)	10
[52, 56)	28
[56, 64)	25
[64, 76)	44
[76, 88)	11
[88, 100)	7

a) Completa la tabla de frecuencias añadiendo columnas para la frecuencia acumulada, la frecuencia relativa y el porcentaje.

b) Representa los datos empleando el gráfico estadístico que te parezca más adecuado a la naturaleza de los datos.

c) Halla las medias de centralización.

d) Determina también las medidas de dispersión de la serie.

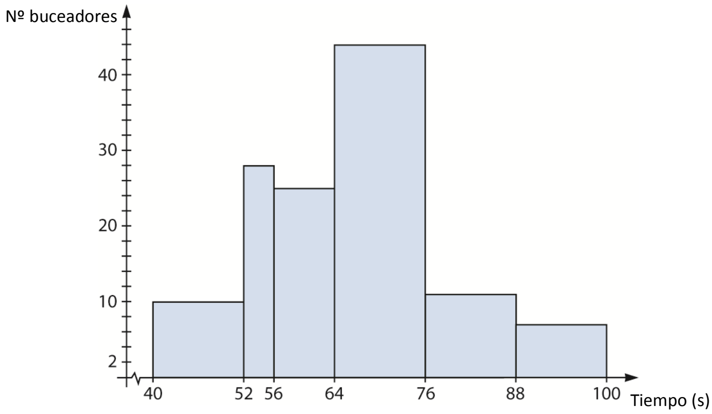
e) En la escuela de buceo afirman que el 80% de las personas aguantan más de un minuto sin respirar. En este grupo, ¿qué porcentaje cumple lo dicho?

f) También afirman que un 5% se mantienen durante más de un minuto y medio sin respirar. ¿Es eso cierto en este grupo?

a)

Tiempo (s)	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i	%
[40, 52)	46	10	10	0,08	0,08	8
[52, 56)	54	28	38	0,224	0,304	22,4
[56, 64)	60	25	63	0,2	0,504	20
[64, 76)	70	44	107	0,352	0,856	35,2
[76, 88)	82	11	118	0,088	0,944	8,8
[88, 100)	94	7	125	0,056	1	5,6
Total		**125**		**1**		**100**

b)



c) $Mo = 70$ $Me = 60$ $\overline{x} = \dfrac{8\,112}{125} = 64{,}896$

d) $DM = \dfrac{1232{,}896}{125} = 9{,}863$ $\sigma^2 = \dfrac{544\,224}{125} - 64{,}896^2 = 142{,}3^2$ $\sigma = 11{,}929$ $CV = \dfrac{11{,}929}{64{,}896} = 0{,}184$

e) Como mínimo, aguantan más de un minuto sin respirar $35{,}2 + 8{,}8 + 5{,}6 = 49{,}6\,\%$.

Podrían ser más, pero uno de los intervalos es [56, 64) y no podemos saber cuánta personas de este intervalo superaron el minuto.

f) Hay un 5,6 % de alumnos que aguantan 88 s; los datos no nos permiten ser más precisos.

61. A un laboratorio han llegado 24 botellas de agua, 12 botellas de 1 litro y 12 botellas de medio litro, para analizar su contenido en sales.

Se han obtenido los siguientes datos, expresados en mg.

- **Botellas de 1 litro:**

46	**25**	**27**	**30**	**48**	**40**
27	**44**	**37**	**62**	**56**	**29**

- **Botellas de medio litro:**

76	**75**	**49**	**59**	**33**	**52**
54	**45**	**66**	**69**	**34**	**53**

a) Clasifica la variable estadística de concentración de sales.

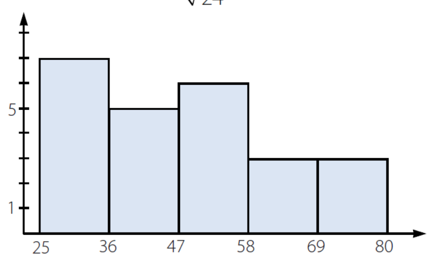
b) ¿Es conveniente tomar intervalos al realizar una tabla?

a) La variable es cuantitativa continua.

b) Se pueden agrupar los datos en intervalos para realizar la tabla y facilitar su estudio.

$\sqrt{24} = 4{,}9 \rightarrow 5$ intervalos $\dfrac{76 - 25}{\sqrt{24}} = 10{,}41$

Contenido (mg)	f_i
[25, 36)	7
[36, 47)	5
[47, 58)	6
[58, 69)	3
[69, 80)	3



PARA PROFUNDIZAR

62. Elige la respuesta adecuada. (Concurso de Primavera)

La media de las edades de todos los miembros de una familia compuesta por padre, madre y varios hijos es 20 años. Si el padre tiene 48 años y la media de las edades de la madre y de todos los hijos es 16, ¿cuántos hijos tienen?	2	3	4	5	6
La suma de 49 números enteros consecutivos es 7^5. ¿Cuál es su mediana?	7	7^2	7^3	7^4	7^5
En una prueba deportiva de mi instituto, estudiantes de 3.º ESO, 4.º ESO y 1.º Bachillerato han obtenido una puntuación media de 12, 15 y 10, respectivamente. Si participaron el doble de estudiantes de 3.º que de 4.º y el doble de 4.º que de 1.º Bachillerato, ¿cuál es la puntuación media de los participantes?	12	$\frac{37}{3}$	$\frac{88}{7}$	13	145
El peso medio de las patatas que había en una bolsa subió al doble cuando a las cuatro patatas se le añadió una patata inmensa. ¿Cuál es el cociente entre el peso de ese patatón y la suma de los pesos de las cuatro patatas que había?	$\frac{3}{2}$	6	$\frac{8}{3}$	2	1

- Lo primero que se piensa es que la suma de las edades de toda la familia es múltiplo de 20, debido a que su media es 20. Si a es el número de miembros de la familia podemos escribir:

  48 + edad madre + edad hijos = 20a

  Si no se suma la edad del padre, la suma de las edades de los demás se podrá escribir como:

  Edad madre + Edad hijos = 16(a − 1)

  Con lo que se tienen que cumplir ambas condiciones, esto es:

  $$20\cdot a = 16(a-1)+48 \rightarrow 4a = 32 \rightarrow a = 8$$

  Si en total son 8 miembros en la familia, tendrán 6 hijos.

- En una sucesión cualquiera de números enteros consecutivos e impar, la media coincidirá con la mediana, puesto que la mitad de los datos estarán en el punto medio. Por tanto:

  $$\overline{x} = \frac{7^5}{49} = \frac{7^5}{7^2} = 7^3$$

- Si llamamos x al número de alumnos de 1º de Bachillerato, tenemos:

  $2x \longrightarrow$ alumnos de 4º ESO $\qquad$ $4x \longrightarrow$ alumnos de 3º ESO

  La suma de las notas entre el número de alumnos será: $\frac{12(4x)+15(2x)+10x}{x+2x+4x} = \frac{88x}{7x} = \frac{88}{7}$.

  Con lo que la puntuación media de los participantes será $\frac{88}{7}$.

- Si llamamos x a la suma del peso de las cuatro patatas, el peso medio por patata será $\frac{x}{4}$. Cuando se añade el patatón, el peso medio pasa a ser $\frac{x}{2}$, con lo que si se renombra su peso como y, queda:

  $$\frac{x+y}{5} = \frac{x}{2} \rightarrow y = \frac{5}{2}x - x \rightarrow y = \frac{3}{2}x \rightarrow \frac{\frac{3}{2}x}{\frac{x}{4}} = \frac{12}{2} = 6$$

63. **Tenemos 120 datos que hemos clasificado en tres grupos y queremos representarlos mediante un diagrama de sectores. Analizando los distintos grupos hemos llegado a estas conclusiones.**

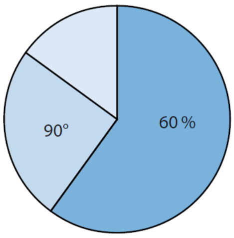
- **Sector 1: representa el primer conjunto de datos, y comprende el 60% del diagrama.**
- **Sector 2: compuesto por el segundo grupo de datos, está representado por un ángulo de 90°.**
- **Sector 3: representa el tercer grupo de datos.**

Construye el diagrama y calcula el número de datos que contiene cada sector.

Si el 60 % corresponde al primer conjunto de datos, como en total son 120 datos, en este grupo se encuentran: $0{,}6 \cdot 120 = 72$ datos.

Como el segundo sector es de 90° corresponde a una frecuencia relativa de 0,25; por tanto, en el segundo grupo hay: $0{,}25 \cdot 120 = 30$ datos.

Así, el tercer conjunto de datos está formado por: $120 - 72 - 30 = 18$ datos.



64. **Tenemos una variable estadística cuya media aritmética es *m* y su desviación típica es *d*. Investiga qué sucede con ambos parámetros si:**

a) Sumamos 4 a todos los números.
b) Restamos 4 a todos los números.
c) Multiplicamos por 4 todos los números.
d) Dividimos entre 4 todos los números.

(Pon una serie de ejemplos y realiza los cálculos. Haz una hipótesis general y trata de encontrar la demostración a tu hipótesis).

a) Si sumamos 4 a todos los valores, la media es $m + 4$ y la desviación típica es d.

Por ejemplo, se considera la serie: 5 6 8 9

$\overline{x} = \frac{28}{4} = 7$ $\sigma = \sqrt{\frac{206}{4} - 7^2} = \sqrt{2{,}5} = 1{,}58$

Al sumar 4 a todos los números: 9 10 12 13

$\overline{x} = \frac{44}{4} = 11$ $\sigma = \sqrt{\frac{494}{4} - 11^2} = \sqrt{2{,}5} = 1{,}58$

b) Si restamos 4 a todos los números, la media es $m - 4$ y la desviación típica es d.

Teniendo en cuenta la serie anterior, al restar 4 a todos los valores: 1 2 4 5

$\overline{x} = \frac{12}{4} = 3$ $\sigma = \sqrt{\frac{46}{4} - 3^2} = \sqrt{2{,}5} = 1{,}58$

c) Si multiplicamos por 4 todos los valores, la media es $4m$ y la desviación típica es $4d$.

La nueva serie es: 20 24 32 36

$\overline{x} = \frac{112}{4} = 28$ $\sigma = \sqrt{\frac{3\,296}{4} - 28^2} = \sqrt{40} = 6{,}32$

d) Si dividimos entre 4 todos los números, la media es $\frac{1}{4}m$ y la desviación típica es $\frac{1}{4}d$.

La nueva serie es: 1,25 1,5 2 2,25

$\overline{x} = \frac{7}{4} = 1{,}75$ $\sigma = \sqrt{\frac{12{,}875}{4} - 1{,}75^2} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}39$

65. **Se ha hecho un estudio del profesorado de Bachillerato a nivel nacional. Este estudio indica que entre los docentes menores de 40 años hay más mujeres que hombres; en concreto, están en la relación 11 a 10.**

Es decir, por cada 11 mujeres que ejercen la docencia en esta etapa educativa, hay 10 hombres que también desarrollan su función educadora en estos niveles.

Si la edad media de las profesoras es de 34 años y la de los profesores es de 32 años, ¿cuál es la media de edad de los docentes menores de 40 años en Bachillerato?

$$\overline{x} = \frac{34 \cdot 11n + 32 \cdot 10n}{11n + 10n} = \frac{694\,n}{21n} = 33{,}05 \text{ años}$$

66. **Las puntuaciones medias en un concurso de los chicos y las chicas por separado, y los chicos y chicas conjuntamente, de dos centros A y B, sobre una puntuación máxima de 150 puntos, son las que se indican en la siguiente tabla.**

	A	B	A y B
Chicos	71	81	79
Chicas	76	90	
Chicos y chicas	74	84	

¿Cuál fue la media de las chicas de los dos centros a la vez?

Si x es el número de chicos del centro A e y es el número de chicas:

$$\frac{71x + 76y}{x + y} = 74 \rightarrow 3x - 2y = 0$$

Análogamente, si m es el número de chicos del centro B y n el de chicas:

$$\frac{81m + 90\,n}{m + n} = 84 \rightarrow 3m - 6n = 0$$

Y como x es el número de chicos del centro A y m es el número de chicos del centro B:

$$\frac{71x + 81m}{x + m} = 79 \rightarrow 8x - 2m = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 0 \\ m - 2n = 0 \\ 4x - m = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{2}{3}y \rightarrow m = \frac{8}{3}y \rightarrow n = \frac{4}{3}y$$

Así, la media de las chicas de los dos centros es:

$$\frac{76y + 90 \cdot \frac{4}{3}y}{y + \frac{4}{3}y} = \frac{228y + 360y}{3y + 4y} = \frac{588y}{7y} = 84$$

67. **La media de un conjunto de 12 datos es 6, y la media de otro conjunto con 13 datos es 5,5. ¿Cuál sería la media si uniéramos todos los datos en un único conjunto de 25 datos?**

$$\overline{x} = \frac{6 \cdot 12 + 5{,}5 \cdot 13}{25} = 5{,}74$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **¿Cuál fue el principal objetivo de la encuesta?**

El principal objetivo de la encuesta es caracterizar las prácticas y los escenarios de consumo de bienes y servicios culturales de la población de un país.

2. **Describe la muestra que se tomó para el estudio.**

La muestra estaba formada por 8 275 personas mayores de 4 años tomadas en 2 415 hogares de 14 municipios del país.

3. **A la vista de los resultados, ¿crees que una empresa que decidiera vender libros debería tener una orientación hacia el público femenino?**

Sí, se puede deducir que las mujeres de la encuesta leen más libros que los hombres.

4. **Clasifica las variables estadísticas que aparecen en el texto.**

«Número de libros que leen al año la población del país.»

«Número de libros que leen al año las mujeres del país.»

«Número de libros que leen al año los hombres del país.»

5. **Elabora una tabla de frecuencias utilizando los datos que están representados en el diagrama que aparece en el texto.**

Nº libros	1	2-4	5-7	8-10	11 o +	**Total**
Hombres (%)	1,9	2,28	5,16	23,69	13,37	**46,4**
Mujeres (%)	2,5	2,86	5,97	24,87	17,40	**53,6**
Total (%)	4,40	5,14	11,13	48,56	30,77	**100**

6. **Halla las frecuencias para hombres solo y para mujeres solo.**

Nº libros	1	2-4	5-7	8-10	11 o +	**Total**
Hombres (%)	4,09	4,91	11,12	51,06	28,82	**100**

Nº libros	1	2-4	5-7	8-10	11 o +	**Total**
Mujeres (%)	4,66	5,34	11,14	46,4	32,46	**100**

7. **Determina la media de la cantidad de libros leídos por las personas encuestadas.**

Aunque sea una variable discreta, los datos están dados en intervalos, por lo que tenemos que calcular las marcas de clase:

$x_1 = 1$ $\quad x_2 = 3$ $\quad x_3 = 6$ $\quad x_4 = 9$ $\quad x_5 = 11$

En el último intervalo consideramos el valor menor, dado que es el único valor seguro:

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 4{,}4 + 3 \cdot 5{,}14 + 6 \cdot 11{,}13 + 9 \cdot 48{,}56 + 11 \cdot 30{,}77}{100} = 8{,}62 \text{ libros}$$

Estadística bidimensional

14

ACTIVIDADES

1. Considera estas variables bidimensionales, y escribe las variables unidimensionales correspondientes y tres pares de valores que las determinan.

a) Edad y sexo de los asistentes a un concierto.

b) Tamaño de un archivo informático y tiempo que se tarda en copiarlo.

c) Peso y talla de pies de los alumnos de una clase.

a) $X \longrightarrow$ Edad, en años, de los asistentes al concierto

$Y \longrightarrow$ Sexo de los asistentes

(20, mujer) (25, hombre) (28, mujer)

b) $X \longrightarrow$ Tamaño, en kb, del archivo informático

$Y \longrightarrow$ Tiempo, en s, que se tarda en copiarlo

(220, 35) (158, 24) (285, 42)

c) $X \longrightarrow$ Peso, en kilos, de los alumnos de una clase

$Y \longrightarrow$ Altura, en centímetros, de los alumnos de una clase

(61, 155) (76, 172) (56, 160)

2. En una clase con 27 alumnos se ha realizado un estudio sobre el número de horas diarias de estudio, *X*, y el número de suspensos, *Y*, obteniéndose estos resultados.

(2, 1) (0, 7) (1, 3) (3, 1) (3, 0) (1, 2) (1, 1) (2, 0)
(3, 0) (2, 7) (1, 0) (2, 1) (3, 1) (1, 4) (1, 2) (2, 1)
(2, 0) (3, 1) (2, 2) (1, 0) (1, 2) (2, 1) (0, 6) (2, 0)

Ordena estos datos en una tabla de doble entrada.

Y \ X	0	1	2	3	Total
0	0	2	3	2	7
1	0	1	4	3	8
2	0	3	1	0	4
3	0	1	0	0	1
4	0	1	0	0	1
5	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	1
7	1	0	1	0	2
Total	2	8	9	5	24

3. **Construye una tabla de doble entrada y sus tablas de frecuencias marginales de estos datos.**

(1, 2) (1, 3) (1, 1) (2, 2) (3, 1) (1, 1) (3, 3) (2, 1) (2, 1) (3, 2)

Y \ *X*	**1**	**2**	**3**	**Total**
1	2	1	1	4
2	1	2	1	4
3	1	0	1	2
Total	4	3	3	10

X	1	2	3	**Total**
f_i	4	3	3	10

Y	1	2	3	**Total**
f_i	4	4	2	10

4. **Con la tabla de doble entrada de la actividad anterior, realiza las siguientes tablas condicionadas.**

a) $Y/X = 1$ b) $X/Y = 3$

a)

$Y/X = 1$	1	2	3	**Total**
f_i	2	1	1	4

b)

$X/Y = 3$	1	2	3	**Total**
f_i	1	0	1	2

5. **Construye la tabla de doble entrada y sus tablas marginales para los siguientes datos, (*X*, *Y*).**

(16, 5) (17, 4) (18, 6) (16, 6) (14, 8)
(17, 3) (14, 5) (13, 4) (14, 8) (15, 8)

Representa el diagrama de dispersión de la variable estadística bidimensional anterior.

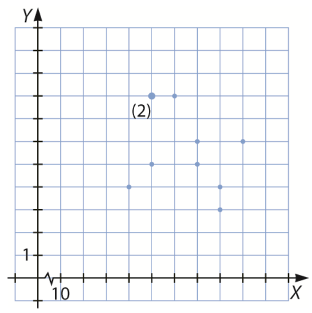
Y \ *X*	13	14	15	16	17	18	Total
3	0	0	0	0	1	0	1
4	1	0	0	0	1	0	2
5	0	1	0	1	0	0	2
6	0	0	0	1	0	1	2
8	0	2	1	0	0	0	3
Total	1	3	1	2	2	1	10

Tabla de frecuencias marginales de *X*

x_i	f_i
13	1
14	3
15	1
16	2
17	2
18	1
Total	10

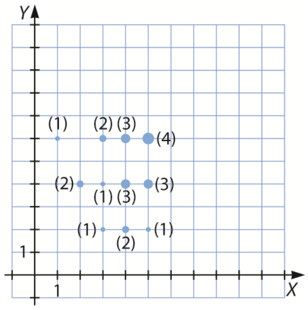
Tabla de frecuencias marginales de *Y*

y_i	f_i
3	1
4	2
5	2
6	2
8	3
Total	10



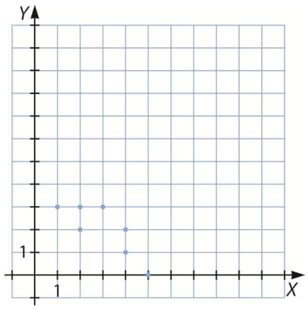
6. **Realiza un diagrama de dispersión teniendo en cuenta la frecuencia de cada pareja de datos.**

Y \ X	1	2	3	4	5
2	0	0	1	2	1
4	0	2	1	3	3
6	1	0	2	3	4



7. **Representa la nube de puntos y analiza la dependencia.**

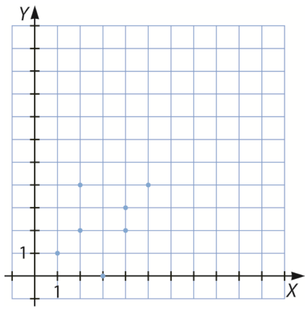
X	2	4	4	3	2	5	1
Y	2	2	1	3	3	0	3



La nube de puntos se aproxima poco a una recta y cuando la variable *X* crece, la variable *Y* decrece, por lo que existe una dependencia lineal débil y negativa entre ellas.

8. **Realiza la nube de puntos y analiza la dependencia.**

X	2	4	4	3	2	5	1
Y	4	2	3	0	2	4	1



La nube de puntos se aproxima poco a una recta y cuando la variable *X* crece, la variable *Y* crece, por lo que existe una dependencia lineal débil y positiva entre ellas.

9. **¿Tener mascota, *X*, influye para aprobar Matemáticas, *Y*?**

Y \ X	Sí	No
Aprobado	10	15
Suspenso	30	45

Completamos la tabla con los totales y analizamos si las filas y las columnas son proporcionales entre sí:

Y \ X	Sí	No	Total
Aprobado	10	15	25
Suspenso	30	45	75
Total	40	60	100

$\frac{10}{40}=\frac{15}{60}=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$ $\quad\frac{30}{40}=\frac{45}{60}=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$ $\quad\frac{10}{25}=\frac{30}{75}=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$ $\quad\frac{15}{25}=\frac{45}{75}=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$

Sí son proporcionales, luego tener mascota no influye en aprobar Matemáticas.

10. **Completa la siguiente tabla en tu cuaderno para que sean independientes.**

Y \ X	A	B	Total
C			175
D			325
Total	200	300	

El número total de datos es 500. La tabla es:

Y \ X	A	B	Total
C	x_{11}	x_{12}	175
D	x_{22}	x_{22}	325
Total	200	300	500

Las variables son independientes si las filas y las columnas son independientes entre sí, luego:

$$\frac{x_{11}}{200}=\frac{x_{12}}{300}=\frac{175}{500}\rightarrow\begin{cases}\frac{x_{11}}{200}=\frac{175}{500}\rightarrow x_{11}=\frac{175\cdot 200}{500}=70\\ \frac{x_{12}}{300}=\frac{175}{500}\rightarrow x_{12}=\frac{175\cdot 300}{500}=105\end{cases}\qquad \frac{x_{21}}{200}=\frac{x_{22}}{300}=\frac{325}{500}\rightarrow\begin{cases}\frac{x_{21}}{200}=\frac{325}{500}\rightarrow x_{21}=\frac{325\cdot 200}{500}=130\\ \frac{x_{22}}{300}=\frac{325}{500}\rightarrow x_{22}=\frac{325\cdot 300}{500}=195\end{cases}$$

Por tanto, la tabla quedaría así:

Y \ X	A	B	Total
C	70	105	175
D	130	195	325
Total	200	300	500

11. Determina la covarianza de esta variable.

X	8	10	11	9	13	12	9	14
Y	20	18	16	22	10	10	21	9

$$\sigma_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i}{N} - \overline{x} \cdot \overline{y} = \frac{1279}{8} - 169,31 = -9,44$$

12. Calcula la covarianza de esta variable.

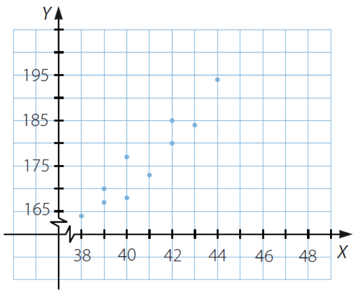
X	10	11	12	13	14	15	16
Y	20	25	32	30	33	34	34

$$\sigma_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i}{N} - \overline{x} \cdot \overline{y} = \frac{2\,765}{7} - 386,30 = 8,70$$

13. Representa el diagrama de dispersión y halla el coeficiente de correlación de esta variable.

X	39	43	40	40	42	41	42	38	39	44
Y	167	184	177	168	185	173	180	164	170	194

¿Qué relación puedes describir entre ellas?



$$\overline{x} = \frac{408}{10} = 40,8 \qquad \overline{y} = \frac{1\,762}{10} = 176,2$$

$$\sigma_X = \sqrt{3,36} = 1,83 \qquad \sigma_Y = \sqrt{81,96} = 9,05$$

$$\sigma_{XY} = \frac{72\,046}{10} - 40,8 \cdot 176,25 = 13,6$$

$$r_{XY} = \frac{13,6}{1,83 \cdot 9,05} = 0,82$$

Existe una dependencia lineal fuerte, porque los valores, aunque no se ajustan a una recta, se encuentran muy próximos; el coeficiente de correlación es $r_{XY} = 0,82$, que es cercano a 1, y además $r_{XY} > 0$ por lo que es positiva.

14. La tabla muestra la renta per cápita en miles de euros, *X*, y la esperanza de vida en años, *Y*, en 8 países.

X	12	40	34	6	30	42	2	15	9
Y	65	79	75	63	74	82	60	62	62

¿Qué relación puedes describir entre ellas?

$\overline{x} = 21,11 \qquad \overline{y} = 69,11$

$\sigma_X = 15,40 \qquad \sigma_Y = 8,37 \qquad \sigma_{XY} = 126,11$

$r_{XY} = 0,98$

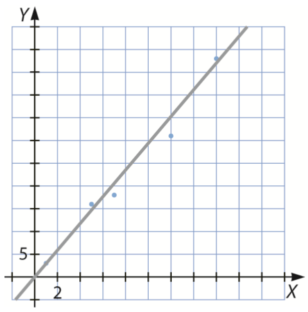
El coeficiente de correlación es $r_{XY} = 0,98$, que es muy cercano a 1 y determina una dependencia lineal fuerte, y además $r_{XY} > 0$, por lo que es positiva.

15. Halla la recta de regresión de *Y* sobre *X* y represéntala junto con el diagrama de dispersión de esta tabla.

X	1	5	7	10	12	16
Y	3	16	18	33	35	48

$\overline{x} = 8,5$ $\quad \overline{y} = 25,5$ $\quad \sigma_X^2 = 28,3$ $\quad \sigma_{XY} = 85,3$

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x - \overline{x}) \rightarrow y - 25,5 = \frac{85,3}{28,3}(x - 8,5) \rightarrow y = 3,01x - 0,12$$

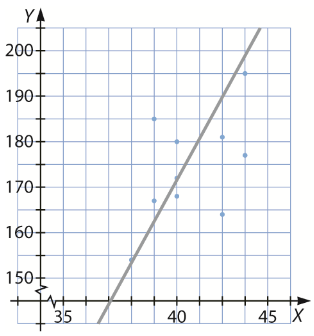


16. Representa el diagrama de dispersión y determina la recta de regresión de *Y* sobre *X* de esta tabla.

X	39	40	40	42	43	38	39	44	42	40
Y	167	168	180	164	177	154	185	195	183	172

$\overline{x} = 40,7$ $\quad \overline{y} = 174,5$ $\quad \sigma_X^2 = 3,79$ $\quad \sigma_{XY} = 0,59$

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x - \overline{x}) \rightarrow y - 174,5 = \frac{0,59}{3,79}(x - 40,7) \rightarrow y = 3,62x + 27,10$$



17. Determina las dos rectas de regresión e indica la relación que hay entre las siguientes variables.

a)

X	10	10	13	15	12
Y	6	5	2	3	5

b)

X	8	10	11	12	16	13	12	17	13	13
Y	15	10	15	10	20	15	10	25	10	15

a) $\overline{x} = \frac{60}{5} = 12$ $\overline{y} = \frac{21}{5} = 4,2$

$\sigma_X^2 = \frac{738}{5} - 12^2 = 3,6$ $\sigma_{XY} = \frac{241}{5} - 12 \cdot 4,2 = -2,2$

Recta de regresión de Y sobre X: $y - 4,2 = -\frac{2,2}{3,6}(x - 12) \rightarrow y = -0,61x + 11,52$

$\sigma_X^2 = \frac{99}{5} - 4,2^2 = 2,16$

Recta de regresión de X sobre Y: $x - 12 = -\frac{2,2}{2,16}(y - 4,2) \rightarrow x = -1,02y + 16,28$

$\sigma_X = \sqrt{3,6} = 1,89$ $\sigma_Y = \sqrt{2,16} = 1,47$

$r_{XY} = -\frac{2,2}{1,89 \cdot 1,47} = -0,79 \rightarrow$ La dependencia es débil y negativa.

b) $\overline{x} = \frac{125}{10} = 12,5$ $\overline{y} = \frac{145}{10} = 14,5$

$\sigma_X^2 = \frac{1\,625}{10} - 12,5^2 = 6,25$ $\sigma_{XY} = \frac{1\,890}{10} - 12,5 \cdot 14,5 = 7,75$

Recta de regresión de Y sobre X: $y - 14,5 = \frac{7,75}{6,25}(x - 12,5) \rightarrow y = 1,24x - 1$

$\sigma_X^2 = \frac{2\,325}{10} - 14,5^2 = 22,25$

Recta de regresión de X sobre Y: $x - 12,5 = \frac{7,75}{22,25}(y - 14,5) \rightarrow x = 0,35y + 7,43$

$\sigma_X = \sqrt{6,25} = 2,5$ $\sigma_Y = \sqrt{22,25} = 4,72$

$r_{XY} = \frac{7,75}{2,5 \cdot 4,72} = 0,66 \rightarrow$ La dependencia es débil y positiva.

18. La tabla siguiente muestra el tiempo empleado por 6 atletas en una carrera y las horas de entrenamiento que dedicaron en el último mes.

Tiempo	11,03	12,91	10,98	11,26	11,12	11,18
Horas de entrenamiento	175	35	201	150	190	100

Determina las dos rectas de regresión e indica la relación que hay entre las variables.

$\overline{x} = 40,7$ $\overline{y} = 174,5$ $\sigma_X^2 = 3,79$ $\sigma_{XY} = 0,59$

$$\begin{cases} y - \overline{y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x - \overline{x}) \rightarrow y - 141,83 = -\frac{40,77}{0,55}(x - 11,41) \rightarrow y = 991,42 - 74,44x \\ x - \overline{x} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}(y - \overline{y}) \rightarrow x - 11,41 = -\frac{40,77}{4\,030,17}(y - 141,83) \rightarrow x = 12,85 - 0,01y \end{cases}$$

Las variables son linealmente dependientes, con una dependencia débil y negativa.

19. En un estudio estadístico, el coeficiente de correlación entre dos variables X e Y es $-0,8$. Se sabe que $\overline{x} = 20$, $\sigma_X = 4$; $\overline{y} = 8$ y $\sigma_Y = 1$.

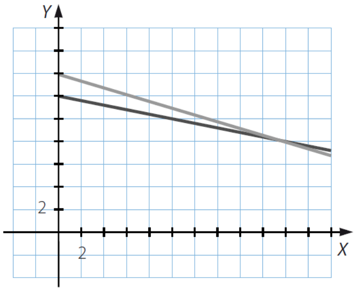
a) Determina las dos rectas de regresión, represéntalas y analiza la correlación que existe entre las variables.

b) Si $x = 30$, ¿cuál es la estimación de y?

a) $-0,8 = \frac{\sigma_{XY}}{4 \cdot 1} \to \sigma_{XY} = -3,2$

Recta de regresión de Y sobre X: $y - 8 = -\frac{3,2}{16}(x - 20) \to y = -0,2x + 12$

Recta de regresión de X sobre Y: $x - 20 = -\frac{3,2}{1}(y - 8) \to x = -3,2y + 45,6$



La dependencia es fuerte y negativa.

b) $y = -0,2 \cdot 30 + 12 = 6$

20. La tabla muestra el peso, X, y la altura, Y, de 10 personas. Estima el peso de otra persona que mide 1,90 m.

X	85	65	80	56	60	67	78	65	60	92
Y	1,80	1,61	1,71	1,57	1,65	1,73	1,79	1,67	1,59	1,83

$\overline{x} = 70,8$ $\quad \overline{y} = 1,70$ $\quad \sigma_Y^2 = 0,001$ $\quad \sigma_{XY} = 1,02$

$$x - \overline{x} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}(y - \overline{y}) \to x - 70,8 = -\frac{1,02}{0,001}(y - 1,70) \to x = 120y - 132,6$$

Para $y = 1,90$ m la estimación dada por la recta vendrá por:

$x = 120 \cdot 1,90 - 132,6 = 228 - 132,6 = 95,40$ kg

SABER HACER

21. Utiliza la calculadora para estudiar la correlación entre estas dos variables estadísticas.

X	2	3	5	7	1	4	2	8	10	1	9	8
Y	−2	0	−11	−16	1	−2	1	−16	−25	0	−21	−17

Establecemos el *Modo Regresión Lineal* en la calculadora.

Introducimos los datos y la calculadora halla la covarianza de las variables y sus desviaciones típicas marginales:

$\sigma_{XY} = -1,1\widehat{6}$ $\quad \sigma_X = 3,136$ $\quad \sigma_Y = 9,247$

Calculamos la correlación:

$$r_{XY} = \frac{-1,1\widehat{6}}{3,136 \cdot 9,247} = -0,04$$

22. **Una empresa quiere realizar un estudio estadístico sobre su gasto en publicidad (*X*, en miles de euros) y las ventas de productos que lanzan al mercado (*Y*, en miles de unidades).**

(20, 23)	(17, 20)	(11, 24)	(24, 4)	(23, 27)	(3, 21)	(15, 19)	(21, 1)	(19, 7)	(12, 12)
(19, 24)	(7, 7)	(21, 8)	(12, 19)	(11, 25)	(8, 13)	(17, 14)	(2, 21)	(9, 2)	(21, 11)
(3, 14)	(12, 18)	(21, 1)	(8, 12)	(12, 12)	(6, 29)	(12, 19)	(14, 21)	(3, 12)	(15, 15)

Agrupa el gasto en publicidad y las ventas de productos en intervalos con la misma amplitud 10.

Y \ X	[2, 11]	[12, 21]	[22, 31]	Total
[1, 10]	2	4	2	8
[11, 20]	4	10	0	14
[21, 30]	4	3	1	8
Total	10	17	3	30

23. **La tabla que aparece a continuación muestra un estudio estadístico en el que se analiza la relación entre las variables *X* e *Y*.**

Construye las tablas de frecuencias marginales de cada una de las variables.

Y \ *X*	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)
[0, 5)	0	1	0	0	3
[5, 10)	0	1	0	1	1
[10, 15)	2	2	2	1	1
[15, 20)	0	0	3	2	0
[20, 25)	2	0	2	2	1
[25, 30)	0	1	1	0	1
[30, 35)	1	3	0	1	1
[35, 40)	2	2	0	2	0

X	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	Total
f_i	7	10	8	9	8	42

Y	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)	[30, 35)	[35, 40)	Total
f_i	4	3	8	5	7	3	6	6	42

24. **Los resultados de un estudio sobre la relación de dos variables estadísticas *X* e *Y*, son los siguientes.**

Y \ *X*	[10, 12)	[12, 14)	[14, 16)	[16, 18)	[18, 20)
[0, 100)	12	3	5	11	7
[100, 200)	12	9	7	12	9
[200, 300)	15	1	12	5	6
[300, 400)	9	0	15	72	21

a) ¿Cuántos datos hay con *X* menor que 16?

b) ¿Cuántos valores de *Y* son menores que 100?

c) ¿Cuántos datos hay con *X* entre 12 y 18?

a) 104 b) 42 c) 152

25. **Un agricultor quiere relacionar la cantidad de agua (en m³) y la cosecha de trigo obtenida (en toneladas). Para ello ha anotado los datos de las últimas 5 cosechas.**

Determina la recta de regresión utilizando la calculadora.

Agua (m^3)	4	7	12	6	14
Toneladas de trigo	17,9	24,3	38,5	22,5	50,1

Se establece el *Modo Regresión Lineal* en la calculadora.

Se introducen los datos y la calculadora halla directamente la media y la desviación típica.

$\overline{x} = 8,6$ $\overline{y} = 30,66$ $\sigma_{XY} = -30,82$ $\sigma_X = 3,28$ $\sigma_Y = 9,66$

$$\left.\begin{array}{l} a = 3,11 \\ b = 3,88 \end{array}\right\} \rightarrow y = 3,11x + 3,88$$

26. **Estudia la correlación entre estas variables utilizando la calculadora.**

Determina la recta de regresión y razona si tiene sentido estimar el valor de *Y* si la variable *X* toma el valor 18.

X	14	16	17	14	15	12	13	13	14	16
Y	32	34	36	34	32	34	31	36	38	32

Se establece el *Modo Regresión Lineal* en la calculadora.

Se introducen los datos y la calculadora halla directamente la media y la desviación típica:

$\overline{x} = 14,4$ $\overline{y} = 33,9$

$\sigma_{XY} = 0,16$ $\sigma_X = 1,58$ $\sigma_Y = 2,23 \rightarrow r_{XY} = 0,04$

$$\left.\begin{array}{l} a = 0,06 \\ b = 33 \end{array}\right\} \rightarrow y = 0,06x + 33$$

No tiene mucho sentido estimar el valor de *Y* para cuando *X* toma el valor 18, debido a que la correlación es muy cercana a 0, por lo que casi no existe dependencia.

27. La recta de regresión que relaciona dos variables estadísticas es $y = 3,2x - 1,7$. Si se tiene que $\overline{y} = 2,34$, ¿cuál es el valor de $\overline{x}$?

$$y = 3,2x - 1,7 \rightarrow \overline{y} = 3,2\overline{x} - 1,7 \rightarrow \frac{\overline{x} + 1,7}{3,2} = \overline{x} \rightarrow \overline{x} = 1,26$$

28. La recta de regresión que relaciona dos variables es $y = 3,2x - 1,7$. Si se sabe que $\overline{x} = 2,87$, ¿se puede afirmar que cuanto mayor sea X mayor será Y ?

La recta de regresión indica en este caso que existe una dependencia lineal creciente, porque la pendiente de la recta de regresión es positiva.

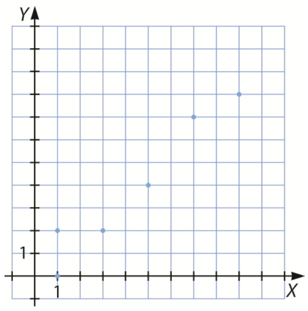
Se ve, por tanto, que si se eligen valores grandes para X, el valor para la Y también crecerá.

Por ejemplo:

$$\overline{y} = 3,2\overline{x} - 1,7 \rightarrow \overline{y} = 3,2 \cdot 2,87 - 1,7 = 7,48$$

29. Dibuja la nube de puntos y analiza la dependencia.

X	1	3	5	7	9
Y	2	2	4	7	8



La nube de puntos se aproxima bastante a una recta y cuando la variable X crece, la variable Y también crece, por lo que existe una dependencia lineal fuerte y positiva entre ellas.

30. Calcula la recta de regresión y el valor esperado para $x = 4$.

X	1	3	5	7	9
Y	2	2	4	7	8

Calculamos la recta de regresión de X sobre Y:

$$\overline{x} = \frac{25}{5} = 5 \qquad \overline{y} = \frac{23}{5} = 4,6 \qquad \sigma_X^2 = 8 \qquad \sigma_X = 2,83 \qquad \sigma_Y = 2,498 \qquad \sigma_{XY} = 6,8$$

$$r_{XY} = \frac{6,8}{2,83 \cdot 2,498} = 0,96$$

La ecuación de la recta de regresión sería:

$$y - 4,6 = \frac{6,8}{8}(x - 5) \rightarrow y = 0,85x + 0,35$$

Por tanto, el valor esperado para $x = 4$ sería:

$y = 0,85 \cdot 4 + 0,35 = 3,75$

Como r_{XY} está muy cerca de 1, la aproximación es bastante buena.

ACTIVIDADES FINALES

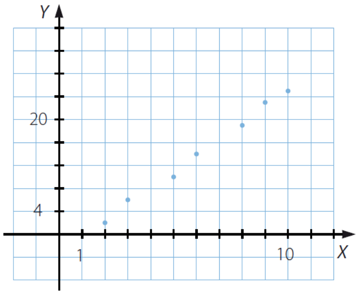
31. **Representa la nube de puntos asociada a estas variables bidimensionales y decide si hay dependencia entre las variables que las forman; si es así, indica de qué tipo es.**

a) (2, 2) (3, 6) (5, 10) (6, 14) (8, 19) (9, 23) (10, 25)

b) (5, 2) (6, 0) (8, −2) (10, −7) (11, −9) (13, −13) (15, −17)

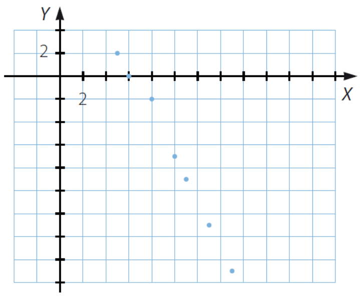
c) (120, 60) (122, 75) (126, 60) (128, 90) (130, 50) (132, 100) (136, 70)

a)



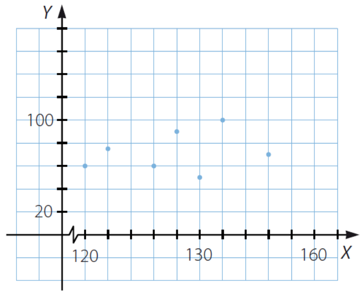
Depend. lineal positiva fuerte

b)



Depend. lineal negativa fuerte.

c)



Depend. lineal positiva débil.

32. **Representa la nube de puntos asociada a estas variables bidimensionales y decide si hay dependencia entre las variables que las forman.**

En caso afirmativo, califícala.

a)

A	6	8	9	11	13	15	16	18
B	8	13	13	16	21	26	28	33

b)

C	1	3	6	7	10	13	17	18
D	25	21	18	20	12	15	8	6

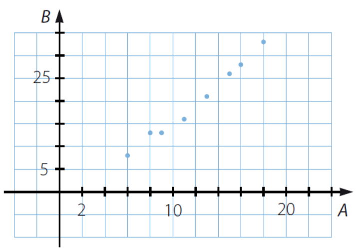
c)

E	110	112	115	116	118	120	121	124
F	40	45	35	40	60	70	45	33

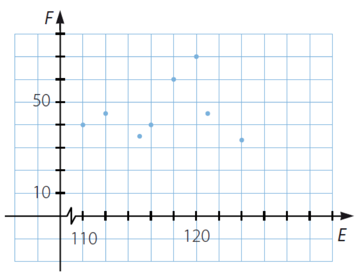
d)

G	26	24	23	22	18	15	14	12
H	8	12	14	7	10	11	9	13

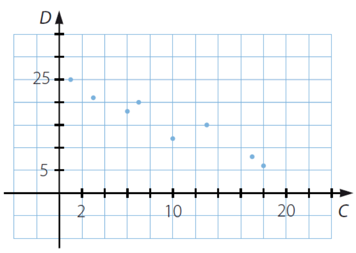
a) La dependencia es fuerte y positiva.



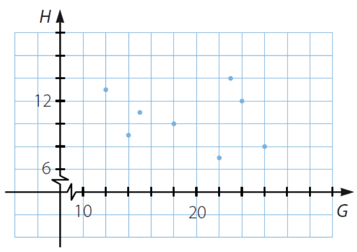
c) No se aprecia dependencia entre las variables *E* y *F*.



b) La dependencia es fuerte y negativa.



d) No se aprecia dependencia entre las variables *G* y *H*.



33. **Halla las frecuencias marginales asociadas a estas tablas de doble entrada y calcula las medidas estadísticas de cada variable por separado.**

a)

Y \ X	1	2	3	4
1	2	4	3	3
2	1	1	1	3
3	1	0	1	2
4	4	3	3	3

b)

Y \ X	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)
10	10	13	5	8
20	8	4	3	9
30	5	5	7	9
40	13	12	11	12
50	4	5	7	11
60	3	6	9	11

c)

Y \ X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
[0, 10)	1	5	6	4	8	5	2	1	3	4
[10, 20)	2	5	4	1	8	3	6	9	5	4
[20, 30)	0	2	1	5	4	7	8	3	2	1
[30, 40)	2	2	3	7	7	3	5	4	9	4

a)

X	1	2	3	4	**Total**
f_i	8	8	8	11	35

Y	1	2	3	4	**Total**
f_i	12	6	4	13	35

$\overline{x} = \frac{92}{35} = 2,629$ $\qquad$ $\overline{y} = \frac{88}{35} = 2,514$

b)

X	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	**Total**
x_i	1	3	5	7	
f_i	43	45	42	60	190

Y	10	20	30	40	50	60	**Total**
f_i	36	24	26	48	27	29	190

$\overline{x} = \frac{808}{190} = 4,253$ $\qquad$ $\overline{y} = \frac{6630}{190} = 34,895$

c)

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**Total**
f_i	5	14	14	17	27	18	21	17	19	13	165

Y	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	**Total**
y_i	5	15	25	35	
f_i	39	47	44	46	165

$\overline{x} = \frac{970}{165} = 5,8\widehat{78}$ $\overline{y} = \frac{3\,335}{165} = 20,2\widehat{12}$

34. **Las notas en Lengua e Inglés de los 30 alumnos de una clase en la última evaluación han sido las siguientes.**

Lengua: 3 7 8 7 5 2 5 9 5 4 3 5 3 6 3
8 5 7 7 6 2 4 9 4 9 7 6 7 1 7

Inglés: 2 6 10 6 4 2 5 9 5 5 2 4 1 5 1
10 4 7 8 4 2 5 9 5 9 8 5 7 0 7

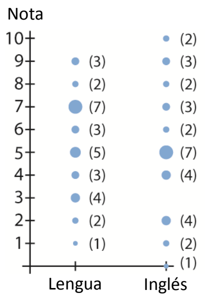
a) Construye la tabla de doble entrada con estos datos.

b) Realiza el diagrama de dispersión.

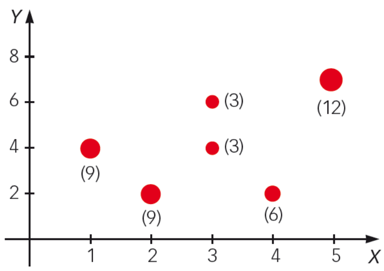
a)

Asignatura \ Notas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Lengua	0	1	2	4	3	5	3	7	2	3	0	30
Inglés	1	2	4	0	4	7	2	3	2	3	2	30
Total	1	3	6	4	7	12	5	10	4	6	2	60

b)

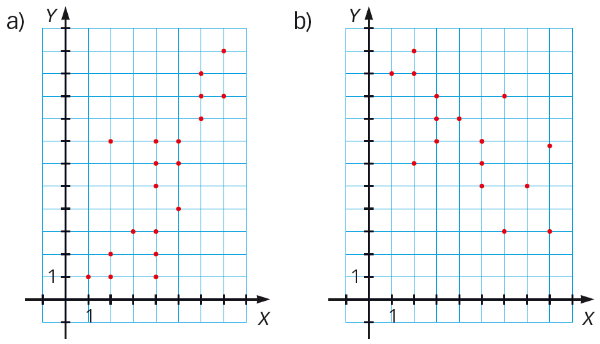


35. **Construye la tabla de doble entrada correspondiente a partir del diagrama de dispersión, teniendo en cuenta la frecuencia de los datos que figuran entre paréntesis.**



Y \ X	1	2	3	4	5	Total
2	0	9	0	6	0	15
4	9	0	3	0	0	12
6	0	0	3	0	0	3
7	0	0	0	0	12	12
Total	9	9	6	6	12	42

36. A partir de estos diagramas de dispersión, construye sus correspondientes tablas de doble entrada.



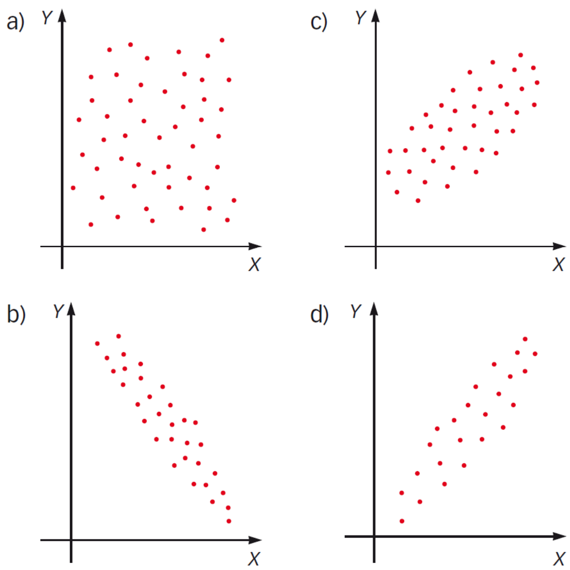
a)

Y \ X	1	2	3	4	5	6	7	Total
1	1	1	0	1	0	0	0	3
2	0	1	0	1	0	0	0	2
3	0	0	1	1	0	0	0	2
4	0	0	0	0	1	0	0	1
5	0	0	0	1	0	0	0	1
6	0	0	0	1	1	0	0	2
7	0	1	0	1	1	0	0	3
8	0	0	0	0	0	1	0	1
9	0	0	0	0	0	1	1	2
10	0	0	0	0	0	1	0	1
11	0	0	0	0	0	0	1	1
Total	1	3	1	6	3	3	2	19

b)

Y \ X	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
3	0	0	0	0	0	1	0	1	2
5	0	0	0	0	1	0	1	0	2
6	0	1	0	0	1	0	0	0	2
7	0	0	1	0	1	0	0	1	3
8	0	0	1	1	0	0	0	0	2
9	0	0	1	0	0	1	0	0	2
10	1	1	0	0	0	0	0	0	2
11	0	1	0	0	0	0	0	0	1
Total	1	3	3	1	3	2	1	2	16

37. A partir de los diagramas de dispersión, decide si hay o no dependencia lineal entre las variables y, en su caso, si es fuerte o débil, y si es positiva o negativa.



a) No hay dependencia lineal.

b) La dependencia lineal es débil y positiva.

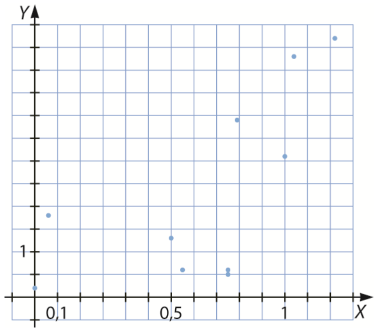
c) La dependencia lineal es débil y positiva.

d) La dependencia lineal es fuerte y positiva.

38. **Se quiere realizar un estudio para determinar la influencia de la velocidad del viento en la permanencia de una plaga en un tipo de planta. Para ello se registraron la velocidad en metros por segundo, *X*, y el tiempo en horas, *Y*. La tabla muestra los valores ordenados de forma ascendente respecto del valor de *X*.**

X	0,00	0,06	0,50	0,55	0,75	0,75	0,79	1,00	1,04	1,22
Y	0,2	1,8	1,3	0,6	0,5	0,6	3,9	3,3	5,3	5,7

Realiza el diagrama de dispersión, indica si hay dependencia entre las variables y, en caso afirmativo, señala de qué tipo es.



La nube de puntos se aproxima poco a una recta y cuando la variable *X* crece, la variable *Y* crece, por lo que existe una dependencia lineal débil y positiva entre ellas.

39. **La tabla muestra el número de cuadros que han pintado los alumnos de un taller sobre paisajes y bodegones.**

Bodegones \ Paisajes	4	5	6	7	8
4	2	1	0	0	0
5	4	4	3	0	1
6	2	5	4	2	0
8	0	0	3	2	1

a) Determina las tablas de frecuencias marginales de paisajes y bodegones.
b) Calcula las medias y las desviaciones típicas de cada una de las variables.
c) Realiza el diagrama de dispersión correspondiente a la variable bidimensional.
d) A partir de su diagrama de dispersión, indica si hay una dependencia entre las variables.

a) Tabla de frecuencias marginales de los paisajes

x_i	f_i
4	8
5	10
6	10
7	4
8	2
Total	34

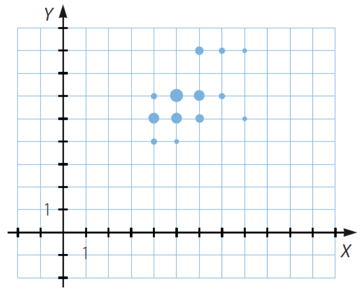
Tabla de frecuencias marginales de los bodegones

y_i	f_i
4	3
5	12
6	13
8	6
Total	34

b) $\overline{x} = 5{,}47$ $\quad \overline{y} = 5{,}82$

$\sigma_X = 1{,}15$ $\quad \sigma_Y = 1{,}19$

c)



d) Observando el diagrama de dispersión, podemos deducir que existe una dependencia lineal débil positiva entre las variables.

40. La siguiente tabla muestra los ingresos familiares mensuales de una familia en cientos de euros, *X*, y los metros cuadrados de la vivienda familiar, *Y*.

Y \ X	[0,5)	[5, 10)	[10,15)	[15,20)	[20,25)
[0, 50)	20	18	2	1	0
[50, 100)	25	40	30	2	1
[100, 200)	5	10	15	25	3
[200, 250)	0	5	15	20	8
[250, 300)	0	1	2	7	10

a) Indica las distribuciones marginales de las variables.
b) Halla las medias y las desviaciones típicas de cada una de las variables.
c) Realiza el diagrama de dispersión correspondiente a la variable bidimensional.
d) A partir de su diagrama de dispersión, indica si hay una dependencia entre las variables.

a)

X	[0, 50)	[50, 100)	[100, 200)	[200, 250)	[250, 300)	**Total**
f_i	41	98	58	48	20	265

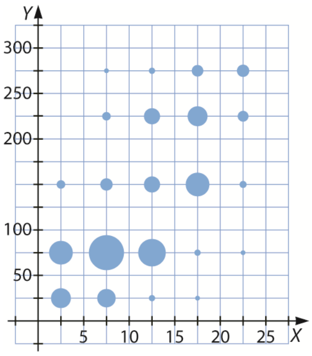
Y	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	**Total**
f_i	50	74	64	55	22	265

b) $\overline{x} = \frac{41 \cdot 25 + 98 \cdot 75 + 58 \cdot 150 + 48 \cdot 225 + 20 \cdot 275}{265} = \frac{33375}{265} = 125,94$

$$\overline{y} = \frac{50 \cdot 2,5 + 74 \cdot 7,5 + 64 \cdot 12,5 + 55 \cdot 17,5 + 22 \cdot 2,25}{265} = \frac{2937,5}{265} = 11,08$$

$$\sigma_X = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i \cdot x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{5\,819\,506}{265} - 125,94 = 21\,960,4 - 125,94 = 21\,834,46$$

$$\sigma_Y = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i \cdot y_i^2}{N} - \overline{y}^2 = \frac{42\,456,25}{265} - 11,08 = 160,21 - 11,08 = 149,13$$

c) 

d) La nube de puntos es dispersa y los puntos no están muy pegados entre sí. Existe una dependencia lineal débil y creciente.

41. Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación para las variables bidimensionales indicadas en estas tablas.

P	0	1	2	3	4	5	6	7
Q	20	18	17	15	12	10	7	4

R	90	80	70	60	50	40	30
S	−5	−7	−8	−11	−13	−16	−17

$\sigma_{PQ} = -7{,}22$ $r_{PQ} = -0{,}11$ $\sigma_{RS} = 84{,}29$ $r_{RS} = 0{,}99$

42. Halla la covarianza y el coeficiente de correlación correspondientes a estas variables estadísticas.

T	−12	−14	−15	−16	−18	−20	−22
U	8	5	3	12	20	10	6

V	2,4	2,8	3,2	3,6	4	4,4	4,8	5,2
W	100	150	220	270	340	400	460	520

$\sigma_{TU} = -3{,}69$ $r_{TU} = -0{,}22$ $\sigma_{VW} = 127{,}5$ $r_{VW} = 0{,}99$

43. Una compañía de seguros quiere relacionar el número de vehículos que circulan por una determinada autopista a más de 115 km/h, *X*, y el número de accidentes que ocurren en ella, *Y*. Durante una semana obtuvo los siguientes resultados.

N.º vehículos	150	180	100	80	200	170	400
N.º accidentes	5	7	2	1	9	6	15

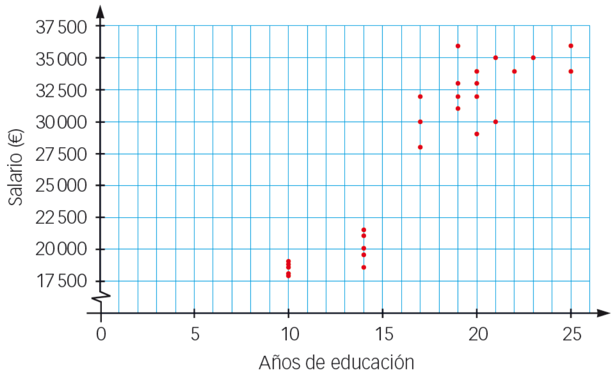
a) Halla las medias y desviaciones típicas de las variables número de vehículos y número de accidentes.
b) Calcula la covarianza de la variable bidimensional.
c) Halla el coeficiente de correlación e interpreta su valor.

a) $\begin{cases} \overline{x} = 182{,}85 \\ \sigma_X = 105 \end{cases}$ $\begin{cases} \overline{y} = 6{,}43 \\ \sigma_Y = 4{,}69 \end{cases}$

b) $\sigma_{XY} = 480{,}24$

c) $r_{XY} = 0{,}98$ es casi 1. Existe una dependencia lineal fuerte y, al ser mayor que 0, positiva.

44. **Se ha realizado una encuesta a 30 empleados de una empresa. Entre los datos recogidos consta el salario anual, en miles de euros, y los años de educación. Al realizar el diagrama de dispersión se obtiene la siguiente nube de puntos.**



Analiza, justificando la respuesta, cómo debe ser el signo de la covarianza y el del coeficiente de correlación.

Tanto la covarianza como el coeficiente de correlación tienen que ser positivos, porque la nube de puntos es creciente cuando crecen las variables.

45. **Se toman 6 muestras de suero y se anotan en una tabla el tiempo que llevaban preparadas y el número de bacterias encontradas en un mililitro.**

N.º de horas (X)	1	1	1	2	3	3
N.º de bacterias (Y)	10	21	23	35	54	60

a) Halla el valor de las medias y desviaciones típicas de las variables, el número de horas y el de bacterias.
b) Calcula la covarianza de la variable bidimensional.
c) Halla el coeficiente de correlación e interpreta su valor.

a) $\begin{cases} \overline{X} = 1{,}83 \\ \sigma_X = 0{,}83 \end{cases}$ $\begin{cases} \overline{y} = 33{,}83 \\ \sigma_Y = 19{,}71 \end{cases}$ b) $\sigma_{XY} = 18{,}77$ c) $r_{XY} = 0{,}97$

46. **En una clase se realiza una encuesta sobre la cantidad de trabajos hechos y el grado de satisfacción, de 1 a 5, con el profesor de la asignatura.**

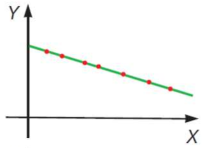
		Trabajos realizados					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**Total**
Satisfacción con el profesor	**1**	3	2	1	0	2	8
	2	5	4	1	2	2	14
	3	2	2	8	2	3	17
	4	1	3	4	6	1	15
	5	0	1	3	7	9	20
	Total	11	12	17	17	17	74

Analiza, justificando la respuesta, cómo debe ser el signo de la covarianza y el del coeficiente de correlación.

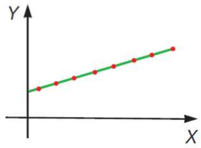
El signo de la covarianza debe ser positivo, y el coeficiente de correlación es positivo y cercano a 0, porque crece la variable "satisfacción" cuando crece el trabajo realizado, pero es cercano a 0 porque los datos están muy dispersos.

47. Relaciona cada diagrama de dispersión con el coeficiente de correlación.

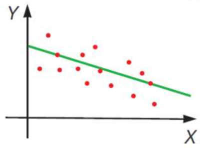
a) 0 b) 0, 3 c) -1 d) 1 e) 0 f) $-0,6$



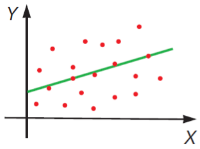
c) porque la pendiente es negativa y los puntos están sobre la recta de regresión.



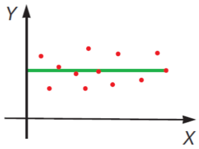
d) porque la pendiente es positiva y los puntos están sobre la recta de regresión.



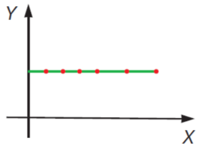
f) porque la pendiente es negativa y los puntos no están sobre la recta de regresión.



b) porque la pendiente es positiva y los puntos no están sobre la recta de regresión.



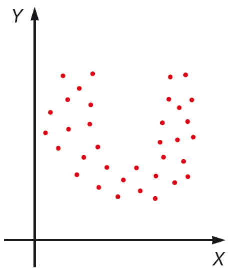
a) porque la pendiente es 0.



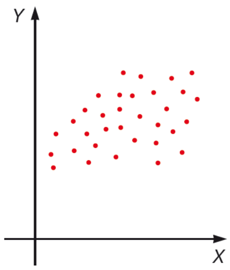
e) porque la pendiente es 0.

48. Traza a mano alzada, y sin realizar cálculos, la recta de regresión de las siguientes variables bidimensionales.

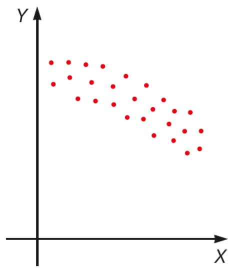
a)



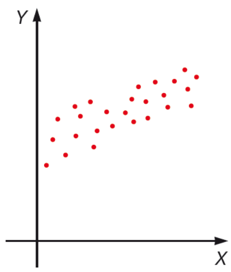
b)



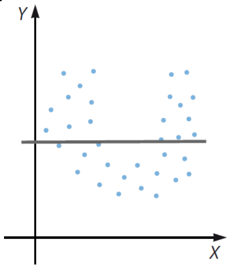
c)



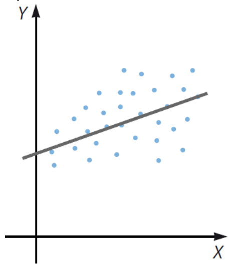
d)



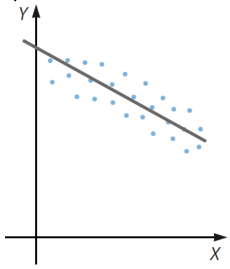
a)



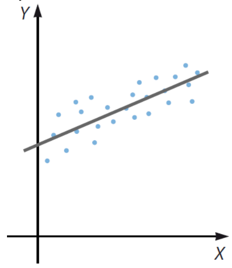
b)



c)



d)



49. Determina la recta de regresión de *Y* sobre *X* y la recta de regresión de *X* sobre *Y* correspondientes a estas tablas.

a)

X	0	3	5	6	7
Y	2	−7	−14	−16	−9

b)

X	7,5	8	9	10	10,5	12	13
Y	20	20,5	23	24	25	27	28

a) $\begin{cases} \overline{x} = 4{,}2 & \overline{y} = -3{,}2 \\ \sigma_X^2 = 7{,}7 & \sigma_Y^2 = 133{,}7 \end{cases} \rightarrow \sigma_{XY} = -10{,}7$

Recta de regresión de *Y* sobre *X*:

$y + 3{,}2 = -\dfrac{10{,}7}{7{,}7}(x - 4{,}2) \rightarrow y = -1{,}39x + 2{,}64$

Recta de regresión de *X* sobre *Y*:

$x - 4{,}2 = -\dfrac{10{,}7}{133{,}7}(y + 3{,}2) \rightarrow x = -0{,}08y + 3{,}94$

b) $\begin{cases} \overline{x} = 10 & \overline{y} = 23{,}93 \\ \sigma_X^2 = 4{,}08 & \sigma_Y^2 = 9{,}20 \end{cases} \rightarrow \sigma_{XY} = 6{,}08$

Recta de regresión de *Y* sobre *X*:

$y - 23{,}93 = \dfrac{6{,}08}{4{,}08}(x - 10) \rightarrow y = 1{,}49x + 9{,}03$

Recta de regresión de *X* sobre *Y*:

$x - 10 = \dfrac{6{,}08}{9{,}20}(y - 23{,}93) \rightarrow x = 0{,}66y - 5{,}82$

50. Encuentra cinco puntos de la recta $y = 4x + 6$.

a) Calcula el coeficiente de correlación correspondiente y explica el resultado.

b) Halla las dos rectas de regresión.

Respuesta abierta.

x	−2	−1	0	1	2
y	−2	2	6	10	14

a) $\overline{x} = 0$ $\quad \overline{y} = 6$ $\quad \sigma_X = \sqrt{2} = 1{,}41$ $\quad \sigma_Y = \sqrt{32} = 5{,}66$ $\quad \sigma_{XY} = 8$

$r_{XY} = 1 \rightarrow$ La dependencia es lineal.

b) Recta de regresión de *Y* sobre *X*:

$$y - 6 = \frac{8}{2}(x - 0) \rightarrow y = 4x + 6$$

Recta de regresión de *X* sobre *Y*:

$$x - 0 = \frac{8}{32}(y - 6) \rightarrow x = \frac{1}{4}y - \frac{3}{2}$$

51. Sabiendo que $\bar{x} = 3$, $\sigma_X^2 = 6$, $\sigma_Y^2 = 8$ y que la recta de regresión de *Y* sobre *X* es $y = 4 - 0{,}68x$, halla la recta de regresión de *X* sobre *Y*.

Para calcular la recta de regresión de *X* sobre *Y* se necesitan aún $\bar{y}$ y σ_{XY}, que se obtienen de la recta de regresión de *Y* sobre *X* y de los datos del enunciado.

$$-0{,}68 = \frac{\sigma_{XY}}{s_X^2} \rightarrow -0{,}68 = \frac{\sigma_{XY}}{6} \rightarrow \sigma_{XY} = 6\cdot(-0{,}68) = -4{,}08$$

$$-4 = \frac{\sigma_{XY}}{s_X^2}\bar{x} - \bar{y} \rightarrow \bar{y} = \frac{\sigma_{XY}}{s_X^2}\bar{x} + 4 = -0{,}68\cdot 3 + 4 = 1{,}96$$

La recta de regresión de *X* sobre *Y* es: $x - 3 = -\frac{4{,}08}{8}(y - 1{,}96) \rightarrow x = 4 - 0{,}51y$

52. Sabiendo que $\bar{x} = 3{,}2$; $\bar{y} = 1{,}2$ y la recta de regresión pasa por el punto (3,9; 3,8), halla la recta de regresión de *Y* sobre *X*.

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x - \bar{x}) \rightarrow y - 1{,}2 = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x - 3{,}2) \rightarrow y = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}x - (3{,}2)\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} + 1{,}2$$

Como pasa por el punto (3,9; 3,8), se sustituyen y se obtiene el valor de $\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}$:

$$3{,}8 = (3{,}9)\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} - (3{,}2)\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} + 1{,}2 \rightarrow 2{,}6 = (0{,}7)\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} \rightarrow \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} = 3{,}71$$

Con lo que la recta de regresión será: $y = 3{,}71x - 10{,}69$

53. Se está estudiando la relación entre el número de meses que una persona está apuntada a un centro deportivo y el nivel de satisfacción con las instalaciones del centro, medido de 0 a 10. Para ello se eligen 10 personas al azar y se anotan los siguientes resultados.

Meses	8	7	10	3	6	13	4	10	12	5
Satisfacción	6	6	8	4	5	8	3	8	9	4

a) Halla el valor del coeficiente de correlación.

b) Calcula la recta de regresión.

a) $\begin{cases} \sigma_{XY} = 6{,}69 \\ \sigma_X = 3{,}39 \\ \sigma_Y = 2{,}08 \end{cases} \rightarrow r_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{6{,}69}{3{,}39\cdot 2{,}08} = 0{,}95$

b) $\begin{cases} \bar{x} = 7{,}8 \\ \bar{y} = 6{,}1 \end{cases} \rightarrow y - \bar{y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x - \bar{x}) \rightarrow y = 0{,}58x + 1{,}57$

54. Una compañía discográfica ha recopilado información sobre 42 de sus grupos musicales, el número de conciertos y las ventas de discos, en miles, obteniendo la siguiente tabla.

N.º de discos \ Conciertos	[0, 15)	[15, 30)	[30, 45)	[45, 60)
[0,5)	1	3	2	1
[5,10)	2	1	4	1
[10, 15)	2	2	2	6
[15, 30)	1	2	5	7

Obtén la recta de regresión y explica si hay, o no, dependencia lineal.

$$\begin{cases} \overline{x} = 35,71 \\ \overline{y} = 13,45 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sigma_X^2 = 248,59 \\ \sigma_Y^2 = 56,24 \end{cases} \rightarrow \sigma_{XY} = -436,55$$

Por lo que la recta de regresión es: $y - 13,45 = -\frac{436,55}{248,59}(x - 35,71) \rightarrow y = 76,16 - 1,76x$

Hay dependencia lineal negativa, porque la pendiente es distinta de 0.

55. Una cofradía de pescadores registra la cantidad de sardinas que llegan al puerto, en kilogramos, y el precio de la subasta en la lonja, en euros por kilo, obteniendo los siguientes resultados.

X (kg)	1 000	1 200	1 250	1 500	1 400	1 350	1 550
Y (€/kg)	1,80	1,68	1,65	1,32	1,44	1,50	1,20

a) Halla el coeficiente de correlación lineal e interpreta su valor.
b) Escribe la ecuación de la recta de regresión.
c) Estima cuál sería el precio de las sardinas si un día se pescasen 1 300 kilogramos.

a) $r_{XY} = -0,98$

Existe dependencia lineal negativa, y es cercana a – 1 porque sus valores están muy cercanos a la recta de regresión.

b) La recta de regresión tiene por fórmula $y = 2,96 - 0,01x$.

c) La estimación se obtiene al calcular en la recta de regresión el valor de *y* cuando se introduce como valor de $x = 1\,300$: $y = 2,96 - 0,001 \cdot 1300 = 2,96 - 1,3 = 1,66$

56. Un equipo de baloncesto ha publicado la siguiente estadística.

- **N.º de jugadores: 10**
- **Estaturas: $\overline{x} = 1,96$ cm, $\sigma_x = 7,06$**
- **Pesos: $\overline{y} = 90,1$ kg, $\sigma_y = 6,92$**
- **Covarianza: $\sigma_{xy} = 36,7$**

a) Halla el coeficiente de correlación.
b) Calcula la recta de regresión de *Y* sobre *X*.
c) Si el equipo ficha un jugador que mide 205 cm, ¿cuál es el peso que cabría esperar de él? Justifica tu respuesta.

a) $r_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{36,7}{7,06 \cdot 6,92} = 0,75$

b) $y - 90,1 = \frac{36,7}{49,84}(x - 1,96) \rightarrow y = 0,73x + 88,66$

c) La estimación se obtiene al calcular en la recta de regresión el valor de *y* cuando se introduce como valor de $x = 2,05$: $y = 0,73 \cdot (2,05) + 88,66 = 90,15$

57. **María y Diego viven en la misma calle, pero en aceras opuestas. Los dos tienen un termómetro en su balcón y, como María cree que el suyo está estropeado, deciden tomar la temperatura exterior, en °C, durante una semana y a la misma hora del día.**

Han anotado los resultados en una tabla.

Diego	22	24	25	27	18	20	21
María	18	20	18	17	20	21	16

a) ¿Crees que las dos variables están relacionadas? ¿Y opinas que deberían estarlo?

b) Razona si con estos datos se puede obtener alguna conclusión sobre el termómetro de María.

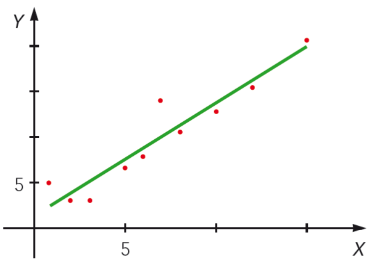
a) $\overline{x} = 22{,}43$ $\quad \overline{y} = 18{,}57$ $\quad \sigma_X = 2{,}86$ $\quad \sigma_Y = 1{,}69$ $\quad \sigma_{XY} = -2{,}097$

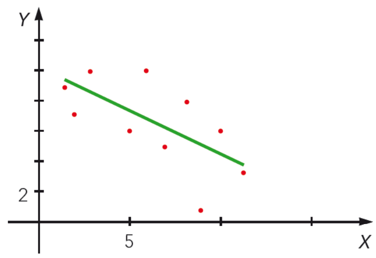
$r_{XY} = -0{,}43 \rightarrow$ La dependencia es débil y negativa.

Las dos variables están poco relacionadas, pues al estar los termómetros en lados opuestos de la acera reciben distinta exposición solar.

b) Como la dependencia es débil no se puede concluir nada sobre el termómetro de María.

58. **Tenemos dos variables bidimensionales representadas por estas nubes de puntos.**





a) Elige los coeficientes de correlación de ambas y razónalo.

$-0{,}92 \qquad 0{,}95 \qquad 0{,}6 \qquad -0{,}65$

b) ¿Cuáles son las ecuaciones de las dos rectas de regresión correspondientes? Justifica la respuesta.

$y = 3x + 0{,}2 \qquad y = -0{,}6x + 10$

$y = 1{,}3x + 0{,}9 \qquad y = -2x + 12{,}6$

a) El coeficiente de correlación de las variables representadas en el gráfico I es 0,95; porque la nube de puntos muestra una dependencia entre las variables fuerte y positiva. El coeficiente de correlación de las variables representadas en el gráfico II es $-0{,}65$; por ser la dependencia entre las variables débil y negativa.

b) La recta de regresión del gráfico I es $y = 1{,}3x + 0{,}9$; ya que la pendiente de la recta dibujada es un valor próximo a 1. La recta de regresión del gráfico II es $y = -0{,}6x + 10$, puesto que el valor de la ordenada de la recta representada es 10.

59. **Se tiene la siguiente variable bidimensional.**

X	3	5	8	9	10	12	15
Y	2	3	7	4	8	5	8

Investiga lo que sucede con la covarianza y el coeficiente de correlación en cada caso.

a) Sumamos 10 a todos los valores de la variable *X*.

b) Sumamos 10 a todos los valores de *X* y de *Y*.

c) Multiplicamos por 4 todos los valores de la variable *X*.

d) Multiplicamos por 4 todos los valores de *X* y de *Y*.

$\overline{x} = 8{,}86$ $\overline{y} = 5{,}29$ $\sigma_{XY} = 6{,}42$

$\sigma_X = \sqrt{14{,}07} = 3{,}75$ $\sigma_Y = \sqrt{5{,}02} = 2{,}24$ $r_{XY} = 0{,}76$

a)

X	13	15	18	19	20	22	25
Y	2	3	7	4	8	5	8

$\overline{x} = 8{,}86 + 10 = 18{,}86$ $\sigma_{XY} = 6{,}42$

$\sigma_X = 3{,}75$ $r_{XY} = 0{,}76$

b)

X	13	15	18	19	20	22	25
Y	12	13	17	14	18	15	18

$\overline{y} = 5{,}29 + 10 = 15{,}29$ $\sigma_{XY} = 6{,}42$

$\sigma_Y = 2{,}24$ $r_{XY} = 0{,}76$

c)

X	12	20	32	36	40	48	60
Y	2	3	7	4	8	5	8

$\overline{x} = 8{,}86 \cdot 4 = 35{,}44$ $\sigma_{XY} = 6{,}42 \cdot 4 = 25{,}68$

$\sigma_X = 3{,}75 \cdot 4 = 15$ $r_{XY} = 0{,}76$

d)

X	12	20	32	36	40	48	60
Y	8	12	28	16	32	20	32

$\overline{y} = 5{,}29 \cdot 4 = 21{,}16$ $\sigma_{XY} = 6{,}42 \cdot 16 = 102{,}72$

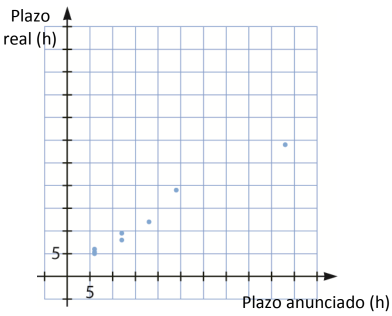
$\sigma_Y = 2{,}24 \cdot 4 = 8{,}96$ $r_{XY} = 0{,}76$

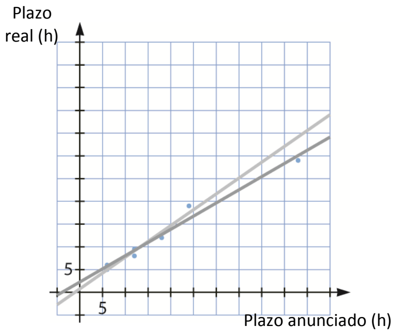
60. Una empresa de mensajería ha anotado el plazo de entrega, en horas, que anunciaba en sus envíos y el plazo real de entrega, también en horas, obteniendo la siguiente tabla.

Plazo anunciado	6	12	6	24	18	6	12	48
Plazo real	5	8	5,5	19	12	6	9,5	29

a) Representa los datos en una nube de puntos.
b) Dibuja aproximadamente la recta de regresión.
c) Calcula el coeficiente de correlación.
d) Halla la recta de regresión, dibújala y compárala con el valor obtenido en la aproximación.

a) y b)





c) $r_{XY} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = 0{,}99$

d) $\overline{x} = 16{,}5$ $\overline{y} = 11{,}75$ $\sigma_X{}^2 = 177{,}75$ $\sigma_{XY} = 102{,}75$

$$y - 11{,}75 = \frac{102{,}75}{177{,}75}(x - 16{,}5) \rightarrow y = 0{,}58x + 2{,}18$$

61. **Se desea estudiar la repercusión que tiene la lluvia en el número de visitas a un parque de atracciones. Para ello se observan, durante los últimos diez años, el número de días de lluvia durante la temporada en la que está abierto, *X*, y el número de visitas en la temporada, *Y*.**

X	9	13	15	16	19	20	21	22	23	18
Y	41	40	39	37	34	31	30	27	25	35

a) Calcula el coeficiente de correlación e interpreta el valor obtenido.

b) Halla la recta de regresión que explica el número de visitantes en función de los días de lluvia.

c) ¿Cuál es la previsión de visitas para el próximo año si hay una predicción de ser un año poco lluvioso con solo 12 días de lluvia en la temporada de apertura?

d) Determina la recta de regresión de *X* sobre *Y*.

e) Representa la nube de puntos y las dos rectas de regresión en los mismos ejes.

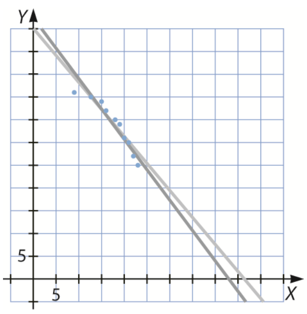
a) $r_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = -0{,}94$ $\rightarrow$ Hay una correlación lineal fuerte, y el signo negativo implica que cuando crece la variable *X*, la *Y* decrece.

b) $y - 33{,}9 = -\frac{22{,}82}{19{,}16}(x - 17{,}6) \rightarrow y = 54{,}87 - 1{,}19x$

c) Con solo doce días lluviosos la previsión vendrá dada por la fórmula $y = 54{,}87 - 1{,}19 \cdot 12 = 40{,}59$.

d) $x = 42{,}93 - 0{,}75y$

e)



62. **La siguiente tabla muestra los datos obtenidos al preguntar por los ingresos familiares mensuales, *X*, en euros, y por los metros cuadrados de sus viviendas, *Y*.**

X \ *Y*	[30, 50)	[50, 70)	[70, 90)	[90, 110)	[110, 130)
[0,500)	20	18	2	1	0
[500, 1 000)	25	40	30	2	1
[1 000, 1 500)	5	10	15	25	3
[1 500, 2 000)	0	5	15	20	8
[2 000, 2 500)	0	1	2	7	10

a) Calcula las distribuciones marginales.

b) Calcula la covarianza, el coeficiente de correlación y las dos rectas de regresión.

a)

X	[0, 500)	[500, 1 000)	[1 000, 1 500)	[1 500, 2 000)	[2 000, 2 500)	Total
Frecuencias	41	98	58	48	20	**265**
Dist. Marginal	0,15	0,37	0,22	0,18	0,08	**1**

Y	[30, 50)	[50, 70)	[70, 90)	[90, 110)	[110, 130)	Total
Frecuencias	50	74	64	55	22	**265**
Dist. Marginal	0,19	0,28	0,24	0,21	0,08	**1**

b) $\sigma_{XY} = 25\,000$ $\quad r_{XY} = 1$

Rectas de regresión: $\begin{cases} y = 30 + 0{,}04x \\ x = 25y - 750 \end{cases}$

63. **Una marca de bicicletas de competición ofrece la siguiente comparativa entre el precio y el peso de sus bicicletas.**

Peso (kg)	6,45	6,50	6,70	7,35	7,15	7,25
Precio (€)	6000	4700	4200	3300	2700	2600

Halla la covarianza y el coeficiente de correlación. ¿Cómo es la relación entre las dos variables?

$X \longrightarrow$ Peso en kilogramos de las bicicletas

$Y \longrightarrow$ Precio en euros de las bicicletas

$\sigma_{XY} = -470$ $\quad r_{XY} = -0{,}90$

Existe una relación de dependencia lineal fuerte y negativa entre las dos variables, porque cuando la variable *X* crece, la *Y* decrece.

64. **Las notas en idiomas, Francés e Inglés, de 10 estudiantes elegidos al azar de un centro escolar han sido las siguientes.**

Inglés	9	6	3	6	7	6	9	8	10	6
Francés	8	6	4	3	8	7	8	7	10	5

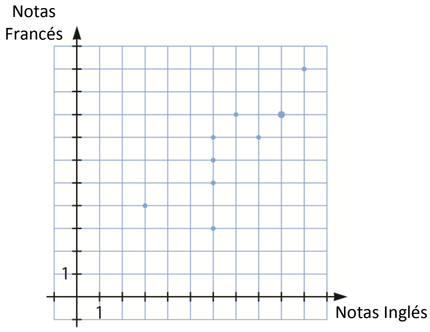
a) Representa la nube de puntos correspondiente a esta distribución. ¿Qué hipótesis se puede hacer a la vista de la representación?

b) Halla los parámetros de la recta de regresión *Y*/*X* y la de *X*/*Y* e interpreta los coeficientes calculados.

c) Representa las dos rectas de regresión junto con la nube de puntos.

d) Para un alumno que haya obtenido un 4 en Inglés, ¿qué nota se le pronostica en Francés?

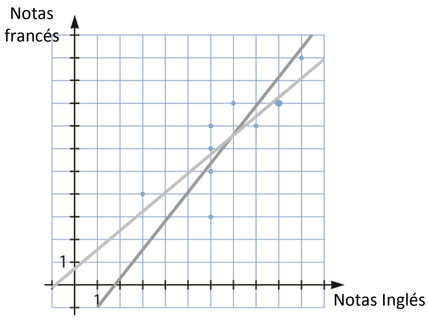
e) Para un alumno que ha tenido un 9 en Francés, ¿qué nota se le pronostica en Inglés?

a) 

Hipótesis: la nota en Inglés va a ser parecida a la de Francés.

b) Rectas de regresión: $\begin{cases} y = 0{,}71 + 0{,}84x \\ x = 0{,}79y + 1{,}77 \end{cases}$

Como las pendientes de las rectas son muy parecidas, ello implica que los datos están muy pegados a las rectas regresoras.

c) 

d) Si un alumno ha obtenido una 4 en Inglés, se espera que en Francés tenga un $y = 0{,}71 + 0{,}84 \cdot 4 = 4{,}07$.

e) Si un alumno ha obtenido una 9 en Francés, se espera que en Inglés tenga un $x = 0{,}79 \cdot 9 + 1{,}77 = 8{,}88$.

65. Un inversor bursátil quiere predecir la evolución que va a tener el Índice de la Bolsa de Madrid (IBEX).

Ha concluido que lo que sucede con el IBEX un día es lo que le ocurre a la cotización de la empresa AW&B el día anterior.

Investiga si esto es correcto, a partir de sus cotizaciones durante una semana y los valores alcanzados por el IBEX al día siguiente.

Día	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º
AW&B	21,8	23,4	19,6	19,4	18,4	19,9	19,2

Día	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º
IBEX	12 560	12 720	11 580	11 420	10 930	11 450	11 480

a) ¿Qué cotización tendrá AW&B el día anterior en que el IBEX alcance los 14 000 puntos?

b) Si un día AW&B tiene una cotización de 24 €, ¿qué valor podemos esperar que alcance el IBEX al día siguiente?

$\overline{x} = 20{,}24$ $\overline{y} = 11\,734{,}29$

$\sigma_X = \sqrt{2{,}77} = 1{,}66$ $\sigma_Y = \sqrt{366\,809{,}62} = 605{,}65$

$\sigma_{XY} = 977{,}26$

$r_{XY} = 0{,}97 \rightarrow$ La dependencia es fuerte y positiva.

a) Recta de regresión de X sobre Y:

$$x - 20{,}24 = \frac{977{,}26}{366\,809{,}62}(y - 11\,734{,}29) \rightarrow x = 0{,}0027y - 11{,}44$$

$y = 14\,000 \rightarrow x = 0{,}0027 \cdot 14\,000 - 11{,}44 = 26{,}36$

b) Recta de regresión de Y sobre X:

$$y - 11\,734{,}29 = \frac{977{,}26}{2{,}77}(x - 20{,}24) \rightarrow y = 352{,}8x - 4\,593{,}62$$

$x = 24 \rightarrow y = 352{,}8 \cdot 24 - 4\,593{,}62 = 3\,873{,}58$

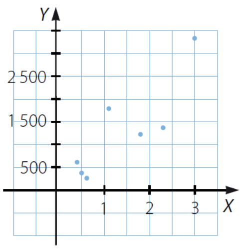
66. Se está estudiando imponer un impuesto a las empresas químicas que sea proporcional a sus emisiones de azufre a la atmósfera. Se ha experimentado con varios procedimientos para medir dichas emisiones, pero no se ha encontrado ninguno fiable. Finalmente, se ha decidido investigar algún método indirecto.

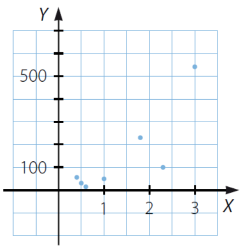
Se cree que la emisión de azufre puede estar relacionada con el consumo eléctrico, con el consumo de agua o con el volumen de las chimeneas de las fábricas. Para valorarlo se ha realizado un estudio en un medio controlado. Los resultados pueden verse en la tabla.

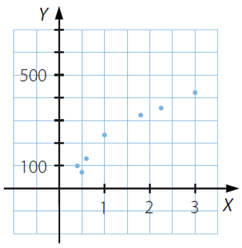
Cantidad de azufre (t)	2,3	1,8	1	0,4	0,6	3	0,5
Consumo eléctrico (kWh)	1400	1250	1850	600	300	3400	400
Consumo de agua (L)	100	230	45	50	10	540	22
Volumen de las chimeneas (m^3)	18	16	12	5	6	21	4

¿Cuál de las variables estadísticas se relaciona de forma más evidente con las emisiones de azufre? Justifícalo.

El volumen de las chimeneas es la variable que más se relaciona con la cantidad de emisiones de azufre.







67. **Se ha realizado un test de memoria, *X*, y otro test de atención, *Y*, a varios alumnos con estos resultados.**

Y \ X	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)
[0, 10)					
[10, 20)	Beatriz	Jesús	Marta		
[20, 30)		Daniel	María Esther	Miguel	
[30, 40)			Elena	Jacinto Carmen	Inés
[40, 50)				Diego	

a) Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación.

b) Determina las dos rectas de regresión.

c) Si es factible, estima qué puntuación obtendrá un alumno que ha sacado 33 en atención.

d) Si es factible, estima qué puntuación obtendrá un alumno que ha conseguido 27 en memoria.

x_i \ y_j	5	15	25	35	45	Total
5	0	0	0	0	0	0
15	1	1	1	0	0	3
25	0	1	2	1	0	4
35	0	0	1	1	1	3
45	0	0	0	1	0	1
Total	1	2	4	3	1	11

a) $\overline{x} = 25{,}91$ $\qquad \overline{y} = 26{,}82$ $\qquad \sigma_{XY} = 71{,}0038$

$\sigma_X = \sqrt{117{,}31} = 10{,}83$ $\qquad \sigma_Y = \sqrt{87{,}51} = 9{,}35$ $\qquad r_{XY} = 0{,}7$

b) Recta de regresión de *Y* sobre *X*:

$$y - 26{,}82 = \frac{71{,}0038}{117{,}31}(x - 25{,}91) \rightarrow y = 0{,}61x + 11{,}01$$

Recta de regresión de *X* sobre *Y*:

$$x - 25{,}91 = \frac{71{,}0038}{87{,}51}(y - 26{,}82) \rightarrow x = 0{,}81y + 4{,}19$$

c) $y = 33 \rightarrow x = 0{,}81 \cdot 33 + 4{,}19 = 30{,}92$

d) $x = 27 \rightarrow y = 0{,}61 \cdot 27 + 11{,}01 = 27{,}48$

68. **Para una distribución bidimensional conocemos los siguientes datos:**

$$r = 0{,}7 \qquad \sigma_x = 1{,}2 \qquad \overline{Y} = 4$$

Recta de regresión *X* sobre *Y*: $x = 0{,}44y + 0{,}6$

Calcula los siguientes valores.

a) La media de *X*.

b) La recta de regresión de *Y*/*X*.

c) La varianza de *X*.

d) La covarianza de *X* e *Y*.

a) $\overline{x} = 0{,}44\overline{y} + 0{,}6 = 0{,}44 \cdot 4 + 0{,}6 = 2{,}36$

b) De la recta de regresión obtenemos que $0{,}7 = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}$.

Por el coeficiente de correlación tenemos que $r_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = 0{,}44$.

Por lo que al hallar σ_Y se puede construir la recta de regresión:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = 0{,}44\\ 0{,}7 = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l}\sigma_{XY} = 0{,}44 \cdot \sigma_X\sigma_Y\\ \sigma_{XY} = 0{,}7 \cdot \sigma_Y^2\end{array}\right\} \to 0{,}44 \cdot \sigma_X\sigma_Y = 0{,}7 \cdot \sigma_Y^2 \to \sigma_Y = \frac{0{,}44 \cdot \sigma_X}{0{,}7} \to \sigma_Y = 0{,}75$$

Por tanto, la covarianza será $\sigma_{XY} = 0{,}25$ y la recta de regresión es $y = 0{,}17x + 3{,}59$.

c) La varianza de X es $\sigma_X^2 = 1{,}44$.

d) La covarianza de X e Y es $\sigma_{XY} = 0{,}25$.

69. Encuentra el coeficiente de correlación de la variable bidimensional cuyas rectas de regresión son:

Recta de Y sobre X: $2x - y - 1 = 0$

Recta de X sobre Y: $9x - 4y - 9 = 0$

a) Halla la media aritmética de cada una de las variables.

b) ¿Podrías calcular la desviación típica de Y sabiendo que la de la variable X es $\sqrt{2}$?

a) Las medias se calculan fácilmente al solucionar el sistema de ecuaciones del enunciado:

$$\left.\begin{array}{r}2\overline{x} - \overline{y} - 1 = 0\\ 9\overline{x} - 4\overline{y} - 9 = 0\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}8\overline{x} - 4\overline{y} - 4 = 0\\ 9\overline{x} - 4\overline{y} - 9 = 0\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}-\overline{x} + 5 = 0\\ \overline{y} = 2\overline{x} - 1\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l}\overline{x} = 5\\ \overline{y} = 9\end{array}\right.$$

b) De las dos rectas se obtiene:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} = 2\\ \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2} = \frac{4}{9}\end{array}\right\} \to \sqrt{\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}} = \sqrt{\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} \cdot \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = r_{XY}$$

Solucionando el sistema anterior, se obtiene la desviación típica de Y:

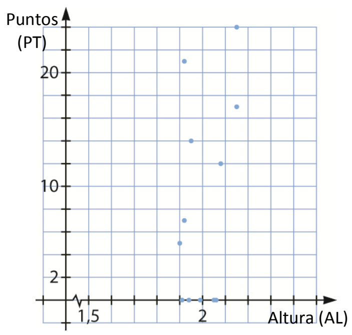
$$\left.\begin{array}{r}\frac{\sigma_{XY}}{4} = 2\\ \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2} = \frac{4}{9}\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l}\sigma_{XY} = 8\\ \frac{9}{4}\sigma_{XY} = \sigma_Y^2\end{array}\right\} \to \sigma_Y^2 = 36 \to \sigma_Y = 6$$

70. En las Olimpiadas de Londres 2012, España jugó la final en baloncesto. Las estadísticas de los jugadores de España fueron las siguientes.

Jugador	AL	MJ	AS	RB	PT
Rudy Fernández	1,95	36	0	5	14
Pau Gasol	2,15	33	3	8	24
Juan C. Navarro	1,92	33	1	2	21
Marc Gasol	2,15	18	1	1	17
José M. Calderón	1,91	16	0	0	0
Serge Ibaka	2,08	23	0	0	12
Sergio Llull	1,90	17	2	9	5
Sergio Rodríguez	1,91	14	3	0	7
Felipe Reyes	2,06	7	0	2	0
Víctor Sada	1,93	1	0	2	0
Fernando San Emeterio	1,99	1	0	0	0
Víctor Claver	2,05	1	0	0	0

a) Representa la nube de puntos de la variable puntos marcados (PT) frente a la altura de los jugadores (AL).
b) Calcula la recta de regresión de la variable altura de los jugadores (AL) frente a los puntos marcados (PT).
c) Es razonable pensar que la altura explica los puntos marcados. Justifica la respuesta.
d) Representa la nube de puntos de la variable puntos marcados (PT) frente a los minutos jugados (MJ).
e) Calcula la recta de regresión de la variable minutos jugados (MJ) frente a los puntos marcados (PT).
f) Es razonable pensar que el número de minutos explica los puntos marcados. Justifica la respuesta.

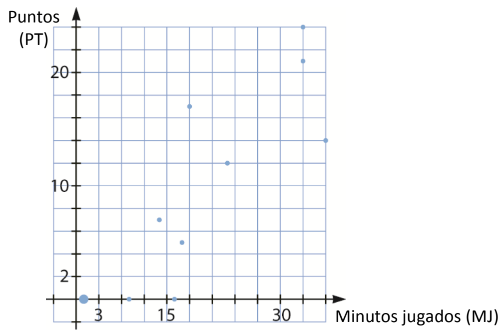
a)



b) La recta de regresión buscada será $y = 36{,}89x - 65{,}44$.

c) La recta de regresión da una aproximación lineal de los puntos y de un jugador de altura x en un partido. Tiene pendiente positiva, así que será creciente y da la idea de que a mayor altura, más puntos de meten.

d)



e) La recta de regresión buscada será $y = 0{,}61x - 1{,}81$.

f) La recta regresora devuelve una aproximación lineal de los puntos *y* de un jugador que juega *x* minutos en un partido. Es una recta con pendiente positiva, así que será siempre creciente y da la idea de que un jugador, cuanto más juegue, más puntos meterá para el equipo.

PARA PROFUNDIZAR

71. Elige la respuesta adecuada. (Concurso de Primavera)

En la primera fase de un concurso de matemáticas, la media de las puntuaciones fue de 76 sobre 100. La nota media de los estudiantes que se clasificaron para la segunda fase fue de 83 y la media de los que no se clasificaron fue de 55. ¿Qué porcentaje de los estudiantes se clasificó para la segunda fase?	44 %	66 %	68 %	72 %	75 %
En una ciudad, el cociente entre el número de mujeres y el de hombres es 11/10. Si la media de las edades de las mujeres es 34 años y la media de las edades de los hombres es 32 años, la media de las edades de toda la población, en años, es:	$\frac{329}{10}$	$\frac{692}{21}$	33	$\frac{694}{21}$	$\frac{331}{10}$
En un centro se hizo la misma prueba del Concurso de Primavera a un grupo de alumnos muy buenos de ESO y a todos los de Bachillerato. La media global fue de 84 puntos. Los de ESO, que eran solamente el 10%, obtuvieron todos la misma puntuación y la media de los de Bachillerato fue 83 puntos. ¿Cuál fue la puntuación de cada estudiante de ESO?	85	88	93	94	98

- Sean *C* y *D* el número total de estudiantes clasificados y desclasificados, respectivamente. Consideramos las siguientes definiciones:

  $$\overline{C} = \frac{\sum C_i}{C} = 83 \qquad \overline{D} = \frac{\sum D_i}{D} = 55$$

  Queremos calcular el porcentaje de clasificados, es decir, el coeficiente, *A*, por el que hay que multiplicar el número total de estudiantes para conseguir los que se han clasificado:

  $$C = A(C + D) \to C - AC = AD \to D = \frac{1-A}{A}C$$

  Sea $\overline{x}$ la media de las puntuaciones de todos los estudiantes. Entonces:

  $$\overline{x} = \frac{\sum C_i + \sum D_i}{C + D} = \frac{\sum C_i}{C+D} + \frac{\sum D_i}{C+D} = \frac{\sum C_i}{C + \frac{1-A}{A}C} + \frac{\sum D_i}{\frac{A}{1-A}D + D} = A \cdot \frac{\sum C_i}{C} + (1-A)\cdot\frac{\sum D_i}{D} = A\overline{C} + (1-A)\overline{D} \to$$

  $$76 = 83A + (1-A)55 \to 28A = 21 \to A = \frac{21}{28} = 0{,}75 = 75\%$$

- Sean *m* y *h* el número total de mujeres y hombres, respectivamente. Consideramos las siguientes definiciones:

  $$\overline{m} = \frac{\sum m_i}{m} = 34 \qquad \overline{h} = \frac{\sum h_i}{h} = 32$$

  Además tenemos que $\frac{11}{10} = \frac{m}{h}$.

  Sea $\overline{x}$ la media de edad de la población total. Entonces:

  $$\overline{x} = \frac{\sum m_i + \sum h_i}{m+h} = \frac{\sum m_i}{m+h} + \frac{\sum h_i}{m+h} = \frac{\sum m_i}{m + \frac{10}{11}m} + \frac{\sum h_i}{\frac{11}{10}h + h} = \frac{11 \cdot \sum m_i}{21m} + \frac{10 \cdot \sum h_i}{21h} = \frac{11}{21}\cdot\overline{m} + \frac{10}{21}\cdot\overline{h} =$$

  $$= \frac{11 \cdot 34 + 10 \cdot 32}{21} = \frac{694}{21}$$

□ Sean B y E el número de alumnos presentados al examen de Bachillerato y ESO, respectivamente, y P la puntuación que han conseguido todos los alumnos de la ESO. Consideramos las siguientes definiciones:

$$\overline{B} = \frac{\sum B_i}{B} = 83 \qquad \overline{E} = \frac{\sum E_i}{E} = \frac{E \cdot P}{E} = P$$

Además tenemos que 10% de $(B+E) = E \rightarrow \frac{10}{100} \cdot (B+E) = E \rightarrow B = 9E$.

$$\overline{X} = \frac{\sum B_i + \sum E_i}{B+E} = \frac{\sum B_i}{B+E} + \frac{\sum E_i}{B+E} = \frac{\sum B_i}{B + \frac{1}{9}B} + \frac{\sum E_i}{9E+E} = \frac{9 \cdot \sum B_i}{10B} + \frac{\sum h_i}{10E} = \frac{9 \cdot \overline{B} + \overline{E}}{10} \rightarrow$$

$\rightarrow 84 = \frac{9 \cdot 83 + P}{10} \rightarrow 84 \cdot 10 - 9 \cdot 83 = P \rightarrow P = 93$ es la puntuación de los alumnos de ESO.

72. Halla la relación existente entre el coeficiente de correlación lineal de una distribución bidimensional y las pendientes de sus rectas de regresión.

Las pendientes de las rectas de regresión son:

$$\begin{cases} m_X = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X{}^2} \rightarrow \sigma_X = \sqrt{\dfrac{\sigma_{XY}}{m_x}} \\ m_Y = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y{}^2} \rightarrow \sigma_Y = \sqrt{\dfrac{\sigma_{XY}}{m_Y}} \end{cases}$$

Entonces, resulta que: $r_{XY} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_{XY}}{m_X}} \cdot \sqrt{\dfrac{\sigma_{XY}}{m_Y}}} = m_X \cdot m_Y$

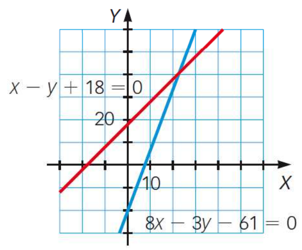
73. Discute si es posible que la recta de regresión de *X* sobre *Y* y la recta de regresión de *Y* sobre *X* sean paralelas. ¿Y perpendiculares?

No es posible que sean paralelas, ya que tienen siempre un punto común: $(\overline{x}, \overline{y})$

Son perpendiculares si la correlación es nula.

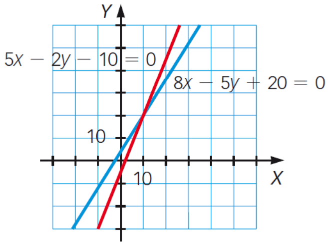
74. En dos estudios estadísticos realizados sobre los datos de una variable bidimensional, las rectas de regresión fueron las siguientes.

En el primer estudio, la recta de regresión de *Y* sobre *X* es: $8x - 3y - 61 = 0$ y la de *X* sobre *Y* es: $x - y + 18 = 0$.



Y en el otro estudio, las rectas de regresión son, respectivamente:

$$8x - 5y + 20 = 0 \qquad 5x - 2y - 10 = 0$$



Si conocemos $\overline{x} = 23$, $\overline{y} = 41$ y $r = 0{,}8$, comprueba cuál de los dos estudios es válido.

$$\left.\begin{array}{l} 8x - 3y - 61 = 0 \\ x - y + 18 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 23, y = 41 \qquad \left.\begin{array}{l} 8x - 5y + 20 = 0 \\ 5x - 2y - 10 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 10,\ y = 20$$

El primer estudio es el correcto, ya que las rectas se cortan en el punto $(\overline{x}, \overline{y})$.

75. **Sean dos variables estadísticas, *X* e *Y*. Sabemos que:**

- **La recta de regresión de *Y* sobre *X* pasa por los puntos (1, 3) y (2, 5).**
- **La recta de regresión de *X* sobre *Y* tiene pendiente 3 y su ordenada en el origen es 2.**
- **La varianza de *Y* es 3.**

Calcula las medidas estadísticas de cada una de las variables y el coeficiente de correlación.

La recta que pasa por los puntos (1, 3) y (2, 5) tiene como ecuación: $y = 2x + 1$

La ecuación de la otra recta es: $y = 3x + 2$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 1 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = -1,\ y = -1$$

Entonces, resulta que: $\begin{cases} \overline{x} = -1 \\ \overline{y} = -1 \end{cases}$

El coeficiente de correlación es igual a la raíz cuadrada del producto de la pendiente de la recta de regresión de *Y* sobre *X* por la inversa de la pendiente de la recta de regresión de *X* sobre *Y*:

$$r = \sqrt{m \cdot \frac{1}{m'}} = \sqrt{\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} \cdot \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Por tanto, tenemos que: $r = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{3}} = 0{,}8164$

El sistema de ecuaciones formado por las dos rectas de regresión es:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} = 2 \\ \dfrac{\sigma_Y^2}{\sigma_{XY}} = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} = 2 \cdot 3 \rightarrow \sigma_Y^2 = 6\sigma_X^2 \rightarrow \sigma_Y = \sqrt{6}\,\sigma_X$$

Como la varianza de *Y* es 3: $\sigma_X^2 = \dfrac{1}{2}$

76. Investiga sobre cómo varía el coeficiente de correlación entre dos variables estadísticas cuando multiplicamos los datos relativos a una de ellas por una cantidad constante, *k*.

¿Y si multiplicamos las dos por la misma constante?

¿Qué sucedería si multiplicamos cada variable por una constante distinta?

Al multiplicar los datos de una variable por una cantidad constante k, sus medidas estadísticas verifican que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot kx_i}{N} = \frac{k \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i}{N} = k \cdot \overline{x}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (kx_i - k\overline{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot k^2(x_i - \overline{x})^2}{N} = \frac{k^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{N} = k^2 \cdot \sigma_X^2$$

$$\sqrt{k^2 \cdot \sigma_X^2} = k \cdot \sigma_X$$

Entonces la covarianza entre las dos variables es:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot kx_i \cdot y_i}{N} - k\overline{x} \cdot \overline{y} = \frac{k \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i \cdot y_i}{N} - k\overline{x} \cdot \overline{y} = k\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i \cdot y_i}{N} - \overline{x} \cdot \overline{y}\right) = k \cdot \sigma_{XY}$$

Así, el coeficiente de correlación es:

$$\frac{k \cdot \sigma_{XY}}{k \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = r_{XY}$$

Si se multiplican los datos de las dos variables por la misma constante k, entonces el coeficiente de correlación es:

$$\frac{k^2 \cdot \sigma_{XY}}{k \cdot \sigma_X \cdot k \cdot \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = r_{XY}$$

Y si multiplicamos la segunda variable por un constante m:

$$\frac{k \cdot m \cdot \sigma_{XY}}{k \cdot \sigma_X \cdot m \cdot \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = r_{XY}$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Explica qué entiendes por estacionalidad.

La estacionalidad, en este caso, es la variación de los datos en función de la época del año, que se se repite cíclicamente año tras año.

2. ¿En cuál de los gráficos estadísticos que aparecen en el texto se ve la dependencia de dos variables? ¿Cómo se ve?

En el segundo gráfico. Mediante un diagrama de dispersión que relaciona la edad de los clientes y el gasto en euros que realizan.

3. ¿Qué tipo de gráficos estadísticos aparecen en el texto?

El primero y el tercero son polígonos de frecuencia y el segundo es un diagrama de dispersión.

4. Pon un ejemplo de estacionalidad.

Respuesta abierta. Por ejemplo, el caudal del río Duero a su paso por Zamora.

5. **Unos días al año, en marzo o en abril, la ocupación hotelera se dispara aunque no siempre es en los mismos días. Razona por qué crees que pasa esto.**

Porque en estos meses tienen lugar las vacaciones de Semana Santa, cuya fecha varía debido a que se celebra la semana anterior al primer domingo posterior a la primera luna llena tras el equinocio de marzo.

6. **Pon un ejemplo donde se dé un fenómeno de estacionalidad.**

Respuesta abierta. Por ejemplo, la migración de las cigüeñas.