Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

4 FUNCIONES I

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.8. (EA 1.8.1.) CE 1.10. (EA 1.10.1.) CE 1.13. (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.-EA 1.13.3.)

Página 115

Resuelve

Familias de funciones

Ya conoces muchas familias de funciones: sus nombres, cómo son sus expresiones analíticas y qué forma tienen sus gráficas.

Asocia cada nombre de familia con su representación gráfica y con su expresión analítica general.

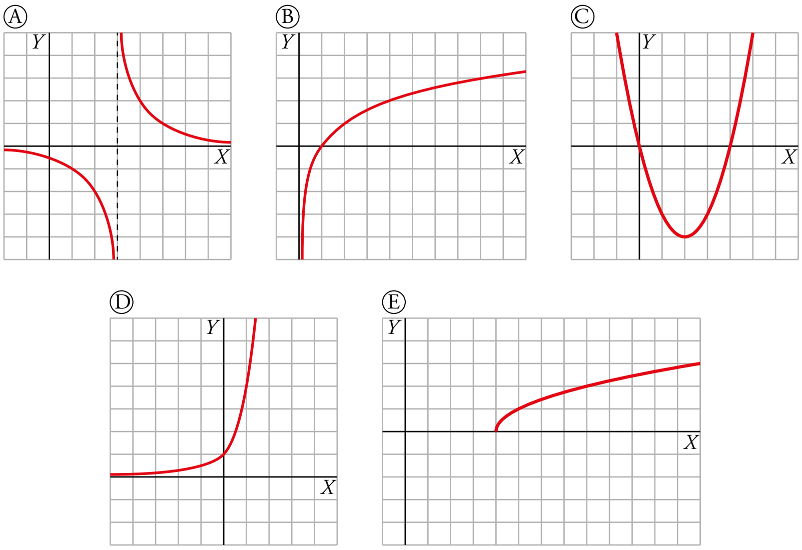
1. Cuadrática

2. Raíz

3. Proporcionalidad inversa

4. Exponencial

5. Logarítmica



I. $y = \sqrt{x-4}$ **II.** $y = 4^x$ **III.** $y = x^2 - 4x$ **IV.** $y = \log_2 x$ **V.** $y = \dfrac{2}{x-3}$

1 → C → III

2 → E → I

3 → A → V

4 → D → II

5 → B → IV

2 ▶ DOMINIO DE DEFINICIÓN

C.E.: CE 3.1. (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 119

Halla el dominio de definición de cada una de las siguientes funciones:

1 **a)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x - 3}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 1}$

a) Buscamos dónde se anula el denominador, ya que será donde no está definida la función:

$$x^2 - 4x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 2 \pm \sqrt{7} \rightarrow Dom = \mathbb{R} - \left\{x \mid x = 2+\sqrt{7}, x = 2-\sqrt{7}\right]$$

b) El denominador no se anula nunca para valores reales $\rightarrow Dom = \mathbb{R}$

2 **a)** $y = \sqrt{3x + 9}$ **b)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x - 9}}$

a) Debemos descartar los valores de x que hacen que la raíz sea negativa:

$3x + 9 \geq 0 \rightarrow x \geq -\dfrac{9}{3} = -3 \rightarrow Dom = [-3, +\infty)$

b) El denominador no puede ser cero:

$\sqrt{3x-9} = 0 \rightarrow 3x - 9 = 0 \rightarrow x = 3$

Y la raíz existe para números mayores o iguales a cero:

$3x - 9 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$

Por tanto: $Dom = (3, +\infty)$

3 **a)** $y = \sqrt{x^2 - 5x}$ **b)** $y = \dfrac{3x - 5}{\sqrt{x^2 - 5x}}$

a) El radicando no puede ser negativo.

$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 5$

$x^2 - 5x$ es menor o igual que 0 si x está comprendido entre 0 y 5.

Por tanto, $Dom = (-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$

b) La raíz del denominador debe ser positiva, descartamos el valor que la anula porque si no, tendríamos denominador cero:

$x^2 - 5x > 0 \rightarrow x(x-5) > 0 \rightarrow x$ y $(x-5)$ deben tener el mismo signo.

- Si $x < 0$ y $x - 5 < 0 \rightarrow x < 0$ y $x < 5 \rightarrow x < 0$
- Si $x > 0$ y $x - 5 > 0 \rightarrow x > 0$ y $x > 5 \rightarrow x > 5$

Por tanto: $Dom = (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$

4 **a)** $y = log\ (5x - 20)$ **b)** $y = ln\ (x^2 - 5x)$

a) La función logaritmo existe únicamente para valores positivos:

$5x - 20 > 0 \rightarrow x > 4 \rightarrow Dom = (4, +\infty)$

b) La función logaritmo existe únicamente para valores positivos:

$x^2 - 5x > 0 \rightarrow x(x-5) > 0 \rightarrow x$ y $(x-5)$ deben tener el mismo signo.

- Si $x < 0$ y $x - 5 < 0 \rightarrow x < 0$ y $x < 5 \rightarrow x < 0$
- Si $x > 0$ y $x - 5 > 0 \rightarrow x > 0$ y $x > 5 \rightarrow x > 5$

Por tanto: $Dom = (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$

5 **a)** $y = \dfrac{2x+1}{x^3 - 6x^2 + 8x}$ **b)** $y = \sqrt{x^3 - 6x^2}$

a) El denominador no puede ser cero:

$x^3 - 6x^2 + 8x = x(x^2 - 6x + 8) = x(x-2)(x-4)$

Por tanto: $Dom = \{x \mid x \neq 0,\ x \neq 2,\ x \neq 4\}$

b) La raíz existe si es de un número mayor o igual que cero:

$x^3 - 6x^2 = x^2(x-6) \geq 0$

- $x^2(x-6) > 0 \ \rightarrow\ x - 6 > 0 \ \rightarrow\ x > 6$
- $x^2(x-6) = 0 \ \rightarrow\ x = 0;\ x = 6$

Por tanto: $Dom = \{x \mid\ x = 0,\ x \geq 6\}$

6 **a)** $y = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{3x-1}{x-2}$ **b)** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\log x}$

a) Veamos dónde se anula uno de los dos denominadores:

$x + 1 = 0, x - 2 = 0 \ \rightarrow\ x = -1,\ x = 2 \ \rightarrow\ Dom = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

b) El logaritmo debe ser de un número mayor que cero, y eso ya nos asegura que existe la raíz del numerador $\rightarrow\ x > 0$

Además, el denominador no puede ser cero:

$\log x = 0 \ \rightarrow\ x = 1$

Por tanto: $Dom = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

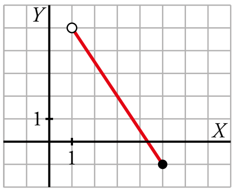
3 FUNCIONES LINEALES. INTERPOLACIÓN

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) CE 1.7. (EA 1.7.1.-EA 1.7.2.-EA 1.7.3.-EA 1.7.4.) CE 1.8. (EA 1.8.1.) CE 3.2. (EA 3.2.1.)

Página 121

1 **Representa la siguiente función:**

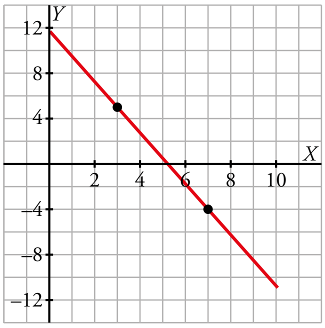
$$y = -2x + 7, \ x \in (1, 4]$$



2 **Una función lineal f cumple: $f(3) = 5$, $f(7) = -4$, $Dom\, f = [0, 10]$. ¿Cuál es su expresión analítica? Represéntala.**

$m = \dfrac{-4-5}{7-3} = -\dfrac{9}{4}$

$y = 5 - \dfrac{9}{4}(x-3) = -\dfrac{9}{4}x + \dfrac{47}{4}, \ x \in [0, 10]$



3 **En una universidad, en el año 2014 había 15 200 alumnos matriculados, y 18 000 en el 2019. Estima cuántos había:**

a) En el año 2015.

b) En el 2017.

c) En el 2012.

d) ¿Cuántos cabe esperar que haya en el 2022?

e) ¿Y en el 2052?

$$f(x) = \frac{18\,000 - 15\,200}{2\,019 - 2\,014}(x - 2\,014) + 15\,200 = 560(x - 2\,014) + 15\,200$$

a) $f(2\,015) = 15\,760$ alumnos

b) $f(2\,017) = 16\,880$ alumnos

c) $f(2\,012) = 14\,080$ alumnos

d) $f(2\,022) = 19\,680$ alumnos

e) $f(2\,052) = 36\,480$ alumnos, aunque la extrapolación es demasiado grande.

4 **El consumo de gasolina de cierto automóvil, por cada 100 km, depende de su velocidad. A 60 km/h consume 5,7 L y a 90 km/h consume 7,2 L.**

a) Estima su consumo si recorre 100 km a 70 km/h.

b) ¿Cuánto consumirá a 100 km/h?

c) ¿Y a 200 km/h?

a) $f(x) = \frac{7,2-5,7}{90-60}(x-60) + 5,7 = \frac{1,5}{30}(x-60) + 5,7$

$f(70) = 0,5 + 5,7 = 6,2$ L

b) $f(100) = 2 + 5,7 = 7,7$ L

c) $f(200) = 7 + 5,7 = 12,7$ L, aunque la extrapolación es demasiado grande.

4 ▶ FUNCIONES CUADRÁTICAS. INTERPOLACIÓN

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) **CE 1.2.** (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) **CE 1.7.** (EA 1.7.1.-EA 1.7.2.-EA 1.7.3.-EA 1.7.4.) **CE 1.8.** (EA 1.8.1.) **CE 3.2.** (EA 3.2.1.)

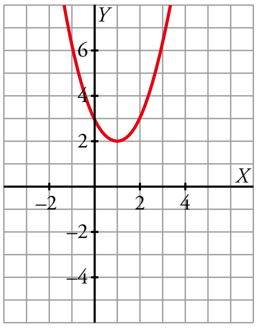
Página 122

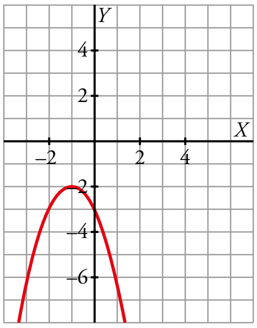
1 **Representa estas parábolas:**

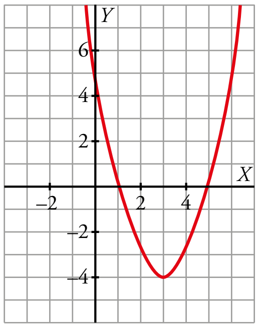
a) $y = x^2 - 2x + 3$ **b)** $y = -x^2 - 2x - 3$

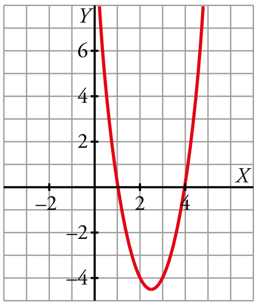
c) $y = x^2 - 6x + 5$ **d)** $y = 2x^2 - 10x + 8$

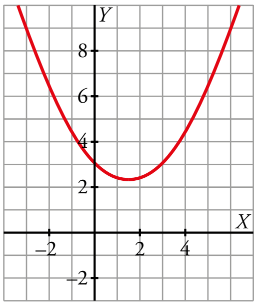
e) $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ **f)** $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$

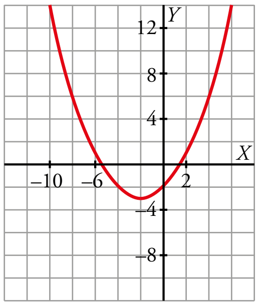
a)


b)


c)


d)


e)


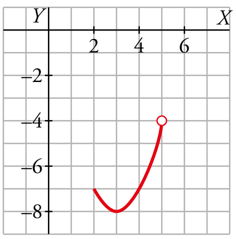
f)


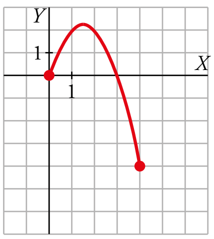
2 **Representa las funciones siguientes:**

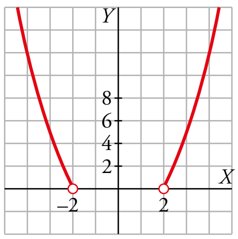
a) $y = x^2 - 6x + 1,\ \ x \in [2, 5)$

b) $y = -x^2 + 3x,\ \ x \in [0, 4]$

c) $y = x^2 - 4,\ \ x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

a)


b)


c)


Página 123

Hazlo tú

1 Halla la ecuación de la parábola que pasa por (0, 3), (2, –3) y (6, 9).

$y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} (0,3) \rightarrow 3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \rightarrow c = 3 \\ (2,-3) \rightarrow -3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 3 \rightarrow 4a + 2b = -6 \\ (6,9) \rightarrow 9 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + 3 \rightarrow 36a + 6b = 6 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones: $a = 1$, $b = -5$, $c = 3$

La parábola buscada es $y = x^2 - 5x + 3$.

2 Halla, por el método de Newton, la ecuación de la parábola que pasa por (0, 3), (2, –3) y (6, 9). Comprueba que es la misma que se obtiene en el *Hazlo tú* anterior.

$y = p + m(x - 0) + n(x - 0)(x - 2)$

$(0, 3) \rightarrow 3 = p + m \cdot (0 - 0) + n \cdot (0 - 0) \cdot (0 - 2) \rightarrow p = 3$

$(2, -3) \rightarrow -3 = 3 + m \cdot (2 - 0) + n \cdot (2 - 0) \cdot (2 - 2) \rightarrow 3 + 2m = -3 \rightarrow m = -3$

$(6, 9) \rightarrow 9 = 3 - 3 \cdot (6 - 0) + n \cdot (6 - 0) \cdot (6 - 2) \rightarrow 3 - 18 + 24n = 9 \rightarrow n = 1$

La parábola buscada es:

$$y = 3 - 3 \cdot (x - 0) + 1(x - 0)(x - 2) = 3 - 3x + x^2 - 2x = x^2 - 5x + 3$$

Piensa y practica

3 Halla la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (–1, 0), (2, 12) y (8, –72).

a) Usando su ecuación en forma general.

b) Por el método de Newton.

a) $y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} (-1,0) \rightarrow 0 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \rightarrow a - b + c = 0 \\ (2,12) \rightarrow 12 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \rightarrow 4a + 2b + c = 12 \\ (8,-72) \rightarrow -72 = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c \rightarrow 64a + 8b + c = -72 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema: $a = -2$, $b = 6$, $c = 8$

La parábola buscada es $y = -2x^2 + 6x + 8$.

b) $y = p + m(x + 1) + n(x + 1)(x - 2)$

$(-1, 0) \rightarrow 0 = p + m \cdot (-1 + 1) + n \cdot (-1 + 1) \cdot (-1 - 2) \rightarrow p = 0$

$(2, 12) \rightarrow 12 = m \cdot (2 + 1) + n \cdot (2 + 1) \cdot (2 - 2) \rightarrow 3m = 12 \rightarrow m = 4$

$(8, -72) \rightarrow -72 = 4 \cdot (8 + 1) + n \cdot (8 + 1) \cdot (8 - 2) \rightarrow 36 + 54n = -72 \rightarrow n = -2$

La parábola buscada es:

$y = 0 + 4(x + 1) + (-2)(x + 1)(x - 2) = 4x + 4 + (-2)(x^2 - x - 2) = 4x + 4 - 2x^2 + 2x + 4 = -2x^2 + 6x + 8$

4 **[La búsqueda de la ecuación por dos métodos y la posterior comparación de resultados requiere que el alumnado trabaje la asunción de riesgos (dimensión productiva de esta clave)].**

Halla los puntos de la parábola $y = x^2 + 6x + 5$ cuyas abscisas son 0, 3 y 5.

Obtén, por el método de Newton, la parábola que pasa por esos tres puntos y comprueba que es la misma.

Los puntos son (0, 5), (3, 32) y (5, 60).

$y = p + m(x - 0) + n(x - 0)(x - 3)$

$(0, 5) \rightarrow 5 = p + m \cdot (0 - 0) + n \cdot (0 - 0) \cdot (0 - 3) \rightarrow p = 5$

$(3, 32) \rightarrow 32 = 5 + m \cdot (3 - 0) + n \cdot (3 - 0) \cdot (3 - 3) \rightarrow 5 + 3m = 32 \rightarrow m = 9$

$(5, 60) \rightarrow 60 = 5 + 9 \cdot (5 - 0) + n \cdot (5 - 0) \cdot (5 - 3) \rightarrow 5 + 45 + 10n = 60 \rightarrow n = 1$

La parábola buscada es:

$y = 5 + 9(x - 0) + 1(x - 0)(x - 3) = 5 + 9x + x^2 - 3x = x^2 + 6x + 5$

Página 124

Hazlo tú

1 **El porcentaje de paro en España en algunos años fue:**

AÑO	1994	1997	2000
%	24,1	20,6	13,9

Estima el porcentaje de paro en 1998, 2001 y 2003 y compáralo con los valores reales:

AÑO	1998	2001	2003
%	18,6	10,63	11,37

Tomamos como año cero el año 1994. Hemos de obtener la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (0; 24,1), (3; 20,6) y (6; 13,9).

$y = P(x) = p + m(x - 0) + n(x - 0)(x - 3) \rightarrow y = P(x) = p + mx + nx(x - 3)$

$(0; 24{,}1) \rightarrow 24{,}1 = p + m \cdot 0 + n \cdot 0 \rightarrow p = 24{,}1$

$(3; 20{,}6) \rightarrow 20{,}6 = 24{,}1 + 3m + n \cdot 0 \rightarrow m = -\dfrac{3{,}5}{3} = -1{,}167$

$(6; 13{,}9) \rightarrow 13{,}9 = 24{,}1 - \dfrac{3{,}5}{3} \cdot 6 + n \cdot 6 \cdot 3 \rightarrow 18n = -3{,}2 \rightarrow n = -\dfrac{1{,}6}{9} = -0{,}178$

La parábola buscada es:

$P(x) = y = 24{,}1 - 1{,}167x - 0{,}178x(x - 3) \rightarrow y = -0{,}178x^2 - 0{,}633x + 24{,}1$

Obtenemos el valor de $P(x)$ en los puntos pedidos:

$1998 \rightarrow x = 4 \rightarrow P(4) = -0{,}178 \cdot 16 - 0{,}633 \cdot 4 + 24{,}1 = 18{,}72$ (está muy próximo al valor real, 18,6).

$2001 \rightarrow x = 7 \rightarrow P(7) = -0{,}178 \cdot 49 - 0{,}633 \cdot 7 + 24{,}1 = 10{,}947$ (está muy próximo al valor real, 10,63).

$2003 \rightarrow x = 9 \rightarrow P(9) = -0{,}178 \cdot 81 - 0{,}633 \cdot 9 + 24{,}1 = 3{,}985$ (muy alejado del valor real, 11,37).

Piensa y practica

5 ODS Meta 13.2. **[Tras el visionado del vídeo el docente puede proponer un debate sobre el futuro del ecologismo].**

Una asociación ecologista tenía 12 300 miembros en el año 2015, 14 100 miembros en 2017 y 15 600 en 2020. Estima cuántos tenía:

a) En el año 2016.

b) En 2018 y en 2012.

c) ¿Cuántos cabe esperar que tenga en 2022?

Interpreta cada resultado teniendo en cuenta si es interpolación o extrapolación y cómo de alejados están los datos del intervalo de datos reales.

Tomamos como año cero el año 2015. En consecuencia, hemos de obtener la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (0, 12 300), (2, 14 100), (5, 15 600). Lo haremos mediante el método de Newton:

$$P(x) = p + m(x-0) + n(x-0)(x-2)$$

Ahora, imponemos que pase por cada uno de los tres puntos dados:

Pasa por (0, 12 300) $\to$ $12\,300 = p + 0 + 0 \to p = 12\,300$

Pasa por (2, 14 100) $\to$ $14100 = p + 2m + 2 \cdot 0 \cdot n \to 14100 = 12\,300 + 2m \to m = 900$

Pasa por (5, 15 600) $\to$ $15600 = p + 5m + 5 \cdot 3 \cdot n \to 15600 = 12\,300 + 5 \cdot 900 + 15n \to 2 = -80$

Por tanto: $P(x) = 12\,300 + 900x - 80x(x-2)$

a) $2016 \to x = 1 \to P(1) = 13\,280$ interpolación parabólica dentro del intervalo inicial, por lo que la aproximación es buena.

b) $2018 \to x = 3 \to P(3) = 14\,760$ interpolación parabólica dentro del intervalo inicial, por lo que la aproximación es buena.

$2012 \to x = -3 \to P(-3) = 8\,400$ extrapolación parabólica fuera del intervalo inicial, por lo que la aproximación no es tan buena aunque está cerca del intervalo.

c) $2022 \to x = 7 \to P(7) = 15\,800$ extrapolación parabólica fuera del intervalo inicial, por lo que la aproximación no es tan buena, porque además está alejado del intervalo por lo que será peor aproximación que para el año 2012.

6 **El consumo de gasolina de cierto automóvil, por cada 100 km, depende de su velocidad. A 60 km/h consume 5,7 L; a 70 km/h, 6 L y a 90 km/h consume 7,2 L. Calcula cuánto gastará por cada 100 km recorridos yendo a:**

a) 80 km/h **b) 100 km/h** **c) 200 km/h**

Este enunciado es como el del ejercicio 4 del epígrafe anterior, pero enriquecido con un nuevo dato correspondiente al consumo a 70 km/h, con lo que ahora, con tres puntos, se puede efectuar una interpolación parabólica.

Tenemos estos tres puntos: (60; 5,7), (70; 6) y (90; 7,2).

$y = c + b(x-60) + a(x-60)(x-70)$

$x = 60 \to 5{,}7 = c \to c = 5{,}7$

$x = 70 \to 6 = c + b \cdot (70-60) \to b = 0{,}03$

$x = 90 \to 7{,}2 = c + b \cdot (90-60) + a \cdot (90-60)(90-70) \to a = 0{,}001$

$y = c + 0{,}03 \cdot (x-60) + 0{,}001 \cdot (x-60)(x-70)$

a) $y(80) = 6{,}5$

b) $y(100) = 8{,}1$

c) $y(200) = 28{,}1$

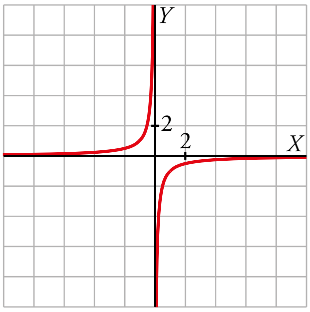
5 FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

C.E.: CE 1.13. (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.-EA 1.13.3.) **CE 3.1.** (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

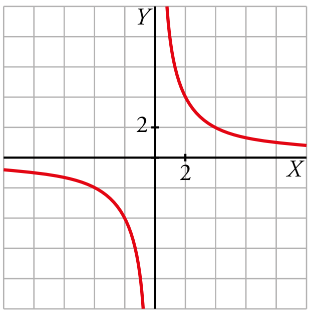
Página 125

1 **Representa:** **a)** $y = -\dfrac{1}{x}$ **b)** $y = \dfrac{8}{x}$ **c)** $y = -\dfrac{6}{x}$ **d)** $y = \dfrac{12}{x}$ **e)** $y = -\dfrac{16}{x}$

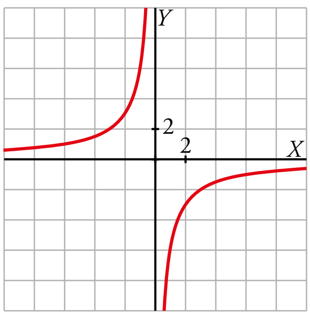
a)



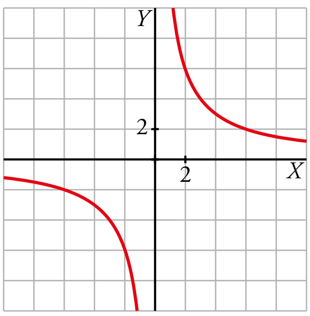
b)



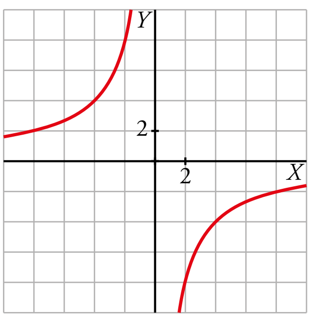
c)



d)



e)



6 FUNCIONES RAÍZ

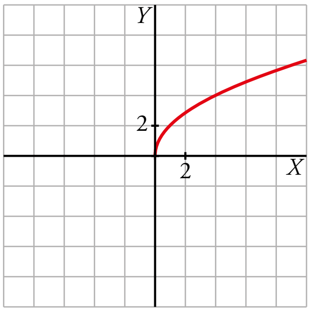
C.E.: CE 1.13. (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.-EA 1.13.3.) CE 3.1. (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 126

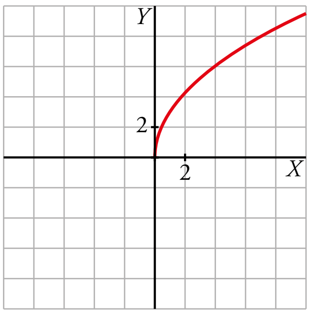
1 **Representa:**

a) $y = \sqrt{4x}$ **b)** $y = \sqrt{9x}$ **c)** $y = -\sqrt{9x}$ **d)** $y = \sqrt{-9x}$ **e)** $y = \sqrt[3]{-8x}$

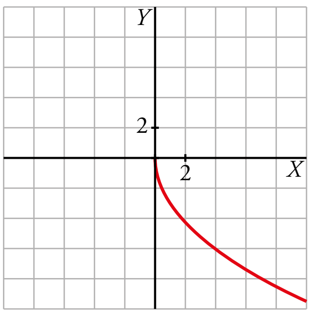
a)



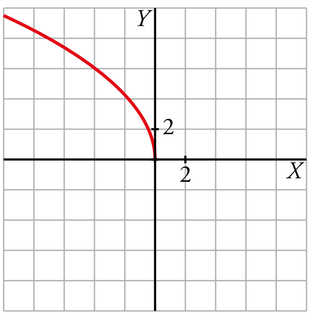
b)



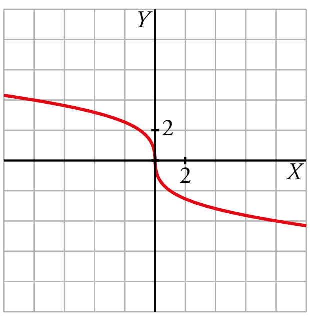
c)



d)

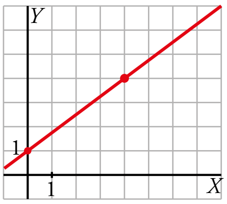


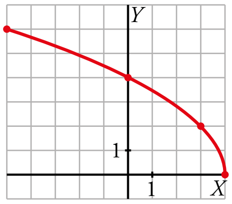
e)

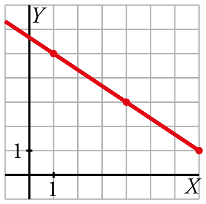


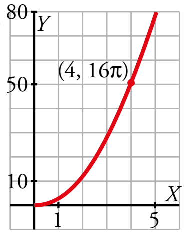
Página 127

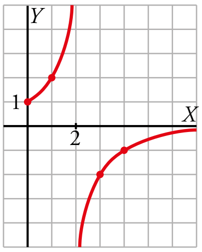
2 **Asocia a cada una de las siguientes gráficas una de las ecuaciones de abajo. Observa que hay más ecuaciones que gráficas.**

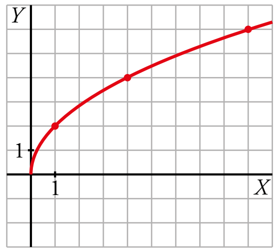
Ⓐ


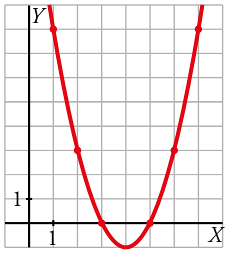
Ⓑ


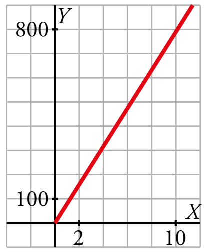
Ⓒ


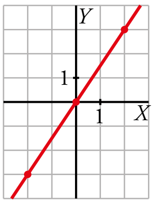
Ⓓ


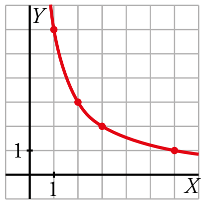
Ⓔ


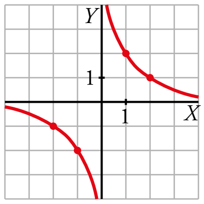
Ⓕ


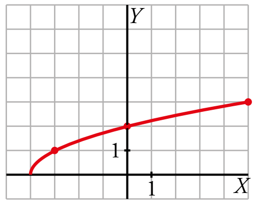
Ⓖ


Ⓗ


Ⓘ


Ⓙ


Ⓚ


Ⓛ


LINEALES	CUADRÁTICAS	PROPORCIONALIDAD INVERSA	RADICALES
L$_1$ $y = \frac{3}{2}x$	**C$_1$** $y = x^2 - 8x + 15$	**PI$_1$** $y = \frac{1}{x}$	**R$_1$** $y = \sqrt{2x+4}$
L$_2$ $y = -\frac{2}{3}(x-1) + 5$	**C$_2$** $y = (x+3)\,(x+5)$	**PI$_2$** $y = \frac{2}{2-x},\ x \ge 0$	**R$_2$** $y = \sqrt{x+4}$
L$_3$ $y = 25\pi x$	**C$_3$** $y = x^2,\ x > 0$	**PI$_3$** $y = \frac{2}{x}$	**R$_3$** $y = 2\sqrt{4-x}$
L$_4$ $y = \frac{3}{4}x + 1,\ x \ge 0$	**C$_4$** $y = \pi x^2,\ x > 0$	**PI$_4$** $y = \frac{6}{x},\ x > 0$	**R$_4$** $y = \sqrt{4x},\ x > 0$

A → L_4 B → R_3 C → L_2 D → C_4 E → PI_2 F → R_4

G → C_1 H → L_3 I → L_1 J → PI_4 K → PI_3 L → R_2

3 **Cada uno de los siguientes enunciados se corresponde con una gráfica de entre las del ejercicio anterior.**

Identifícala.

1. **Superficie, en centímetros cuadrados, de un círculo. Radio, en centímetros.**
2. **Aumento de una lupa. Distancia al objeto, en centímetros.**
3. **Periodo de un péndulo. Longitud, en metros.**
4. **Volumen de un cilindro, en centímetros cúbicos. El radio del círculo de su base mide 5 cm. Altura, en centímetros.**
5. **Longitud de un muelle, en decímetros. Mide 1 dm y se alarga 75 mm por cada kilo que se le cuelga.**
6. **Dimensiones (largo y ancho, en centímetros) de los rectángulos que tienen una superficie de 6 cm^2.**

1 → D 2 → E 3 → F 4 → H 5 → A 6 → J

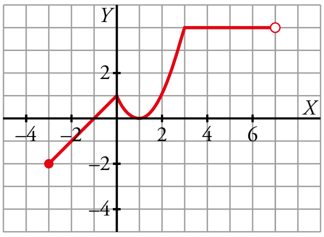
7 ▶ FUNCIONES DEFINIDAS «A TROZOS»

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) CE 1.10. (EA 1.10.1.) CE 3.1. (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 128

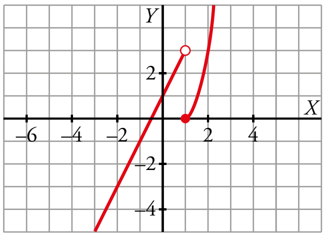
1 **Representa esta función:**

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\in[-3,0) \\ x^2-2x+1 & \text{si } x\in[0,3] \\ 4 & \text{si } x\in(3,7) \end{cases}$$

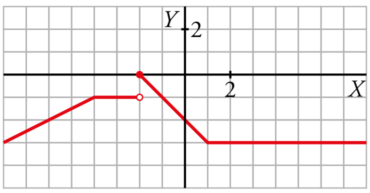


2 **Haz la representación gráfica de la siguiente función:**

$$g(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<1 \\ x^2-1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$



3 **Escribe la expresión analítica que corresponde a la siguiente gráfica:**



Primer tramo:

- Recta que pasa por los puntos $(-6, -2)$ y $(-4, -1)$.
- La pendiente es $\dfrac{-1-(-2)}{-4-(-6)}=\dfrac{1}{2}$ y la ecuación es $y-(-1)=\dfrac{1}{2}(x-(-4))$.

Segundo tramo:

- $y=-1$

Tercer tramo:

- Pertenece a una recta que pasa por $(0, -2)$ y $(1, -3)$.
- La pendiente es $\dfrac{-3-(-2)}{1-0}=-1$ y la ecuación es $y-(-2)=-x$.

Cuarto tramo: $y=-3$

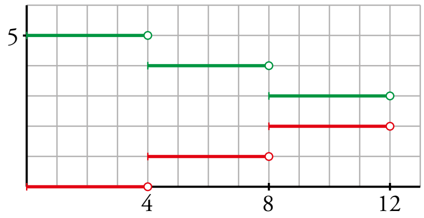
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1 & \text{si } x<-4 \\ -1 & \text{si } -4\leq x<-2 \\ -x-2 & \text{si } -2\leq x<1 \\ -3 & \text{si } 1\leq x \end{cases}$$

Página 129

4 **¿Verdadero o falso?**

a) La gráfica roja corresponde a la función $y = Ent\left(\frac{x}{4}\right)$.

b) La gráfica verde corresponde a la función $y = 5 + Ent\left(\frac{x}{4}\right)$.



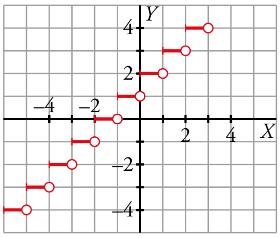
a) Verdadero.

b) Falso. La gráfica verde es $y = 5 - Ent\left(\frac{x}{4}\right)$

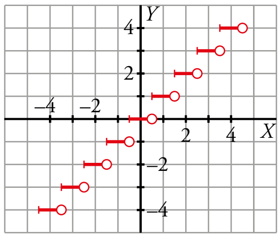
5 **Representa:**

a) $y = Ent(x) + 2$ **b)** $y = Ent(x + 0{,}5)$

a) $y = Ent\ (x) + 2$



b) $y = Ent\ (x + 0{,}5)$



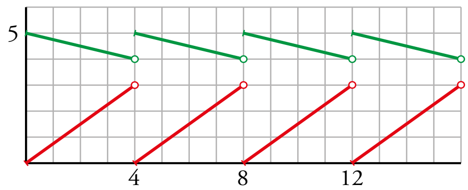
6 **[El docente puede pedir al alumnado que explique sus decisiones para que este trabaje la destreza expresión oral de esta clave].**

¿Verdadero o falso?

a) La gráfica roja corresponde a $y = 3Mant\left(\frac{x}{4}\right)$.

b) La gráfica roja corresponde a $y = 3Mant(4x)$.

c) La gráfica verde corresponde a $y = 5 - Mant\left(\frac{x}{4}\right)$.



a) Verdadero

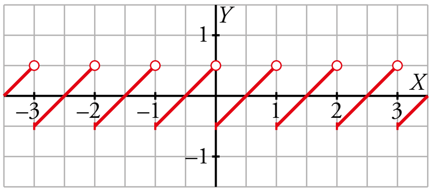
b) Falso

c) Verdadero

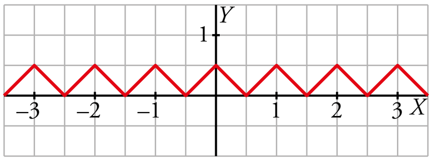
7 Representa:

a) $y = Mant(x) - 0{,}5$ **b)** $y = |Mant(x) - 0{,}5|$

a) $y = Mant\ (x) - 0{,}5$



b) $y = |Mant\ (x) - 0{,}5|$

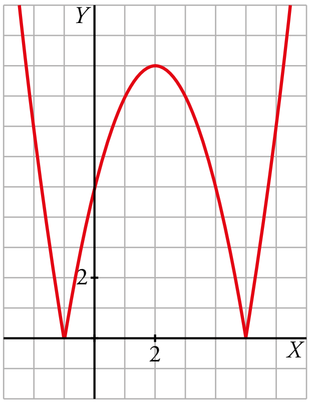


8 VALOR ABSOLUTO DE UNA FUNCIÓN

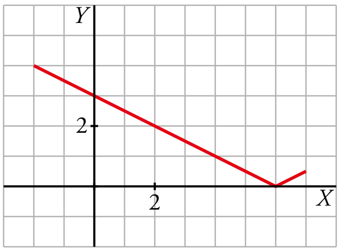
C.E.: CE 3.1. (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 130

1 **Representa:** $y = |-x^2 + 4x + 5|$



2 **Representa gráficamente:** $y = \left|\frac{x}{2} - 3\right|$



EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.)

Página 131

1. Dominio de definición

Hazlo tú

- **Halla el dominio de definición de la función:**

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$$

a) Buscamos los valores de x tales que $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$:

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{-2} = \dfrac{-5 \pm 1}{-2} \rightarrow x = 2, \; x = 3$

Estos dos puntos pertenecen al dominio, veamos qué pasa en los intervalos restantes:

$-x^2 + 5x - 6 \geq 0 \rightarrow -(x-2)(x-3) \geq 0 \rightarrow (x-2)(x-3) \leq 0$

- Si $x < 2 \rightarrow x - 2 < 0; \; x - 3 < 0 \rightarrow (x-2)\,(x-3) > 0$
- Si $2 < x < 3 \rightarrow x - 2 > 0; \; x - 3 < 0 \rightarrow (x-2)\,(x-3) < 0$
- Si $x < 3 \rightarrow x - 2 > 0; \; x - 3 > 3 \rightarrow (x-2)\,(x-3) > 0$

Por tanto:

$Dom\, f = [2, 3]$

2. Interpolación lineal

- **El porcentaje de personas que tenían acceso a Internet en España, era en 2018 el 86,1 % y en 2014 el 74,4 %. Estimar el porcentaje en 2016.**

Para escribir la recta que pasa por A y B buscamos su vector director, por ejemplo puede ser:

$\overrightarrow{BA} = (4; 11,7)$

Podemos escribir esta recta:

$\dfrac{x - 2018}{4} = \dfrac{y - 86,1}{11,7} \rightarrow y = \dfrac{11,7x - 23\,610,6 + 344,4}{4} \rightarrow y = 2,925x - 5\,816,55$

Así:

$f(x) = 2,925x - 5\,816,55$

Por tanto: $f(2016) = 80,25$

3. Función cuadrática

- **Representa la siguiente función:**

$$f(t) = -t^2 + 12t - 31, \; 4 \le t \le 7$$

La función $f(t)$ es una parábola con las ramas abiertas hacia abajo.

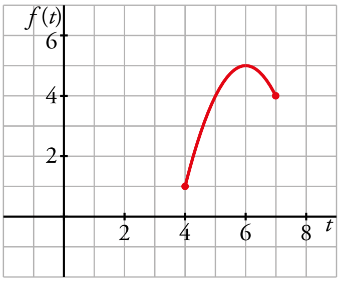
Calculamos las coordenadas del vértice:

$t = \dfrac{-12}{-2} = 6 \;\to\; f(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 - 31 = 5 \;\to\;$ El punto (6, 5) es el vértice de la parábola.

Hallamos los valores de la función en los extremos del intervalo dominio de definición:

$f(4) = -4^2 + 12 \cdot 4 - 31 = 1 \;\to\;$ Pasa por el punto (4, 1).

$f(7) = -7^2 + 12 \cdot 7 - 31 = 4 \;\to\;$ Pasa por el punto (7, 4).



Página 132

4. Ecuación y representación de una parábola

- **Escribe la ecuación de la parábola que tiene el vértice en (2, –4) y pasa por el punto (3, –3).**

Una parábola tiene por ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Tenemos que hallar a, b y c.

$$V(2, -4) \;\to\; 2 = -\frac{b}{2a} \;\to\; b = -4a \;\; (1)$$

$P(3, -3)$ pertenece a la parábola: $-3 = 9a + 3b + c$ (2)

$V(2, -4)$ pertenece a la parábola: $-4 = 4a + 2b + c$ (3)

Resolvemos el sistema compuesto por (1), (2), (3), sustituyendo (1) en (2) y (3):

$$\left.\begin{array}{l} -3 = 9a - 12a + c \\ -4 = 4a - 8a + c \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to\; -3 + 3a = c \\ \to\; -4 + 4a = c \end{array}$$

Por tanto:

$$-3 + 3a = -4 + 4a \;\to\; a = 1 \;\to\; b = -4 \;\to\; c = 0$$

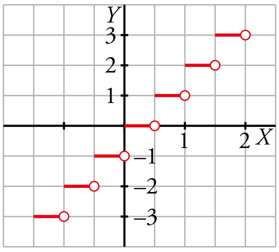
La parábola queda definida: $y = x^2 - 4x$

Página 133

6. Función «parte entera»

- **Representa $f(x) = Ent\,(2x)$.**

Esta gráfica es como la de la función parte entera, pero contraída a la mitad en el sentido del eje horizontal.



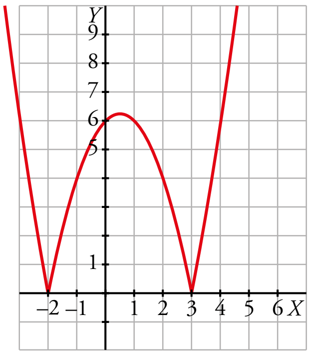
7. Valor absoluto de una función

- **Define por intervalos y representa:**

a) $f(x) = |x^2 - x - 6|$ **b)** $f(x) = x - |x|$ **c)** $f(x) = \left|\dfrac{1}{x}\right|$

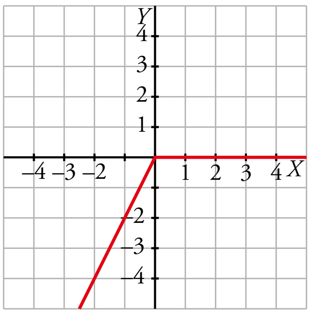
a) La parábola $y = x^2 - x - 6$ tiene su vértice en el punto (0,5; 6,25). Es negativa entre –2 y 3. Luego en ese intervalo su gráfica es $-f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si } x \le -2 \\ -x^2 + x + 6 & \text{si } -2 < x \le 3 \\ x^2 - x - 6 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$



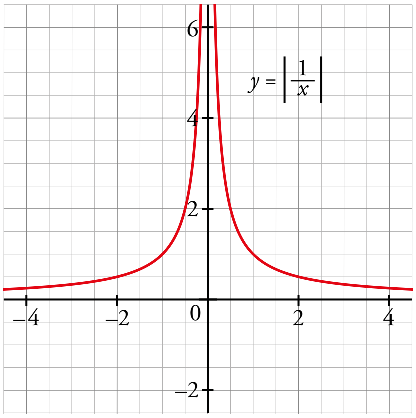
b) Por la definición de la función valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x - (-x) & \text{si } x < 0 \\ x - x & \text{si } 0 \le x \end{cases} = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$



c) Para que exista la función el denominador no se puede anular $\rightarrow$ $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 1.7. (EA 1.7.1.-EA 1.7.2.-EA 1.7.3.-EA 1.7.4.) **CE 3.1.** (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 134

1. Funciones lineales

- **Una empresa de alquiler de coches ofrece dos tarifas:**

A: 120 km → 80 €

350 km → 137,5 €

B: 150 km → 75 €

250 km → 125 €

Analizar cuál es más ventajosa según los kilómetros que vayamos a recorrer.

Buscamos definir una función $f(x)$ para el caso A que cumpla:

$f(120) = 80$

$f(350) = 137{,}5$

$$f(x) = \frac{137{,}5 - 80}{350 - 120}(x - 120) + 80 = \frac{1}{4}(x - 120) + 80 = \frac{1}{4}x + 50$$

Buscamos definir una función $g(x)$ para el caso B que cumpla:

$g(150) = 75$

$g(250) = 125$

$$g(x) = \frac{125 - 75}{250 - 150}(x - 150) + 75 = \frac{1}{2}(x - 150) + 75 = \frac{1}{2}x$$

Buscamos su punto de corte:

$$f(x) = g(x) \;\rightarrow\; \frac{1}{4}x + 50 = \frac{1}{2}x \;\rightarrow\; \frac{1}{4}x = 50 \;\rightarrow\; x = 200 \;\rightarrow\; P(200, 100)$$

La pendiente de la recta g es mayor que la de f, por tanto, para $x > 200$, la gráfica de f estará por debajo de la gráfica de g, por tanto, para más de 200 km será más barata la tarifa A.

En cambio, si $x < 200$ es la tarifa B la que nos resulta más barata.

Solamente en el caso de recorrer 200 km dará lo mismo qué tarifa elegir.

2. Una función cuadrática

- **Los costes de producción de un cierto producto (en euros) de una empresa, vienen dados por:**

$C = 40\,000 + 20q + q^2$

siendo q el número de unidades producidas. El precio de venta de cada unidad es de 520 euros.

a) Expresar en función de q el beneficio de la empresa y representarlo.

b) ¿Cuántas unidades hay que producir para que el beneficio sea máximo?

a) $B(q) = 520q - (40\,000 + 20q + q^2) = -q^2 + 500q - 40\,000$

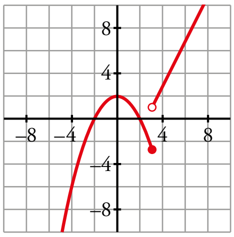
b) El beneficio es máximo en el vértice de la parábola anterior, ya que tiene las ramas hacia abajo.

La abscisa del vértice es $\frac{-500}{-2} = 250$ y el beneficio será:

$B(250) = -250^2 + 500 \cdot 250 - 40\,000 = 22\,500$ €

3. Expresión analítica de una función

- **Escribir la expresión analítica de esta función $f(x)$:**



Para hallar la fórmula de la parábola, la escribimos en la forma: $y = ax^2 + bx + c$

Sustituimos en ella tres de los puntos de su gráfica:

$(2, 0) \to 0 = 4a + 2b + c$ (1)

$(-2, 0) \to 0 = 4a - 2b + c$ (2)

$(0, 2) \to 2 = c$ (3)

Sumamos (1) y (2) y sustituimos el valor de c encontrado en (3):

$$8a + 4 = 0 \to a = -\frac{1}{2} \to b = 0 \to y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$$

Por otra parte, la recta es $y = 2x - 5$:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 2 & \text{si } x \le 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

4. Producción máxima

- **En un huerto hay 40 manzanos. Cada uno produce 600 manzanas. Por cada árbol adicional que se plante, la producción de cada árbol se reduce en 10 manzanas. ¿Cuántos árboles se deben plantar para obtener la producción más alta posible? ¿Cuál es dicha producción?**

Veamos la producción para 40 árboles.

Como cada uno produce 600 manzanas:

$40 \cdot 600 = 24\,000$ manzanas

Si añadimos 5 árboles, la producción de 45 árboles será:

$45\,(600 - 50) = 24\,750$ manzanas

Si añadimos x árboles, la producción de $40 + x$ árboles será:

$P(x) = (40 + x)\,(600 - 10x) = 24\,000 + 600x - 400x - 10x^2 \to P(x) = -10x^2 - 200x + 24\,000$

El coeficiente de x^2 es negativo, por tanto, el máximo se alcanza en el vértice de la parábola.

La coordenada de las abscisas del vértice viene dada por $-\frac{b}{2a}$ siendo la función $y = ax^2 + bx + c$.

En nuestro caso:

$$a = -10,\ b = -200 \to -\frac{b}{2a} = \frac{-200}{-20} = 10 \to P(10) = 25000 \to V(10\,, 25000)$$

Se deben plantar 10 árboles más para alcanzar la máxima producción y esta será de 25 000 manzanas.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 135

Para practicar

Dominio de definición

1 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \dfrac{2}{(x+5)^2}$

b) $y = \dfrac{3x+2}{x^3+x}$

c) $y = \dfrac{x}{x^2-x+2}$

d) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2}$

e) $y = \dfrac{1}{2}(x-2)^3 + x^2$

f) $y = x^2 - 4$

a) La función no está definida cuando $x = -5$. Su dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{-5\}$.

b) $x^3 + x = 0$, tiene como única solución $x = 0$. El dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$.

c) La función no está definida cuando $x^2 - x + 2 = 0$, que no tiene solución. Por tanto, el dominio es $Dom = \mathbb{R}$.

d) Las fracciones no se pueden evaluar ni en $x = 0$ ni en $x = -2$. El dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$.

e) Como en todas las funciones polinómicas, su dominio es todo $\mathbb{R}$

f) Como en todas las funciones polinómicas, su dominio es todo $\mathbb{R}$

2 Estudia el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \sqrt{2x+5}$

b) $y = \sqrt{7-x}$

c) $y = \sqrt{x^2+3x+4}$

d) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$

a) Para que esté definida debe ser $2x + 5 \geq 0$, cuya solución es $\left[-\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$. Su dominio es este intervalo, $Dom = \left[-\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

b) En este caso $x \leq 7$. El dominio de definición es $Dom = (-\infty, 7]$.

c) $x^2 + 3x + 4 \geq 0 \rightarrow Dom = \mathbb{R}$

d) Para que ambas raíces existan simultáneamente debe cumplirse a la vez que $x \geq 1$ y $x \geq 2$. El dominio es $Dom = [2, +\infty)$.

3 Di cuál es el dominio de definición de:

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$

b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

c) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9-x^2}}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$

a) El radicando no puede ser negativo ni tampoco 0 en este caso. Por tanto,

$4 - x > 0 \rightarrow Dom = (-\infty, 4)$.

b) Análogamente, $x^2 + 1 > 0 \rightarrow Dom = \mathbb{R}$ porque en el primer miembro sumamos al número 1 (que es positivo) una potencia par (que nunca es negativa).

c) $9 - x^2 > 0$ y resolvemos construyendo la tabla de los signos:

$9 - x^2 = 0 \rightarrow x = -3,\ x = 3$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
SIGNO DE $9 - x^2$	–	+	–

Por tanto, $Dom = (-3, 3)$.

d) Resolvemos $x^2 - 3x > 0$ mediante la tabla de los signos del polinomio.

$x^2 - 3x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 3$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
SIGNO DE $x^2 - 3x$	+	–	+

Por tanto, $Dom = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

4 **Determina el dominio de definición de estas funciones:**

a) $y = ln\,(x^2 - 4x)$ **b)** $y = ln\left(\sqrt{x - 2}\right)$

c) $y = \sqrt[3]{5 - x}$ **d)** $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{2x + 1}$

e) $y = ln\left(\dfrac{1}{x^2 + 3}\right)$ **f)** $y = \sqrt[3]{\dfrac{x + 1}{x - 4}}$

a) La función está definida si $x^2 - 4x > 0 \rightarrow x(x - 4) > 0$

- $x > 0,\ x - 4 > 0 \rightarrow x > 4$
- $x < 0,\ x - 4 < 0 \rightarrow x < 0$

Por tanto: $Dom = (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

b) La función está definida si:

- $x - 2 \ge 0 \rightarrow x \ge 2$ (para que esté definida la raíz).
- $\sqrt{x - 2} > 0 \rightarrow x \ne 2$

Por tanto: $Dom = (2, +\infty)$

c) La raíz cúbica está definida independientemente del signo del radicando. Como este es un polinomio de primer grado, también está siempre definido.

$Dom = \mathbb{R}$

d) $$\left.\begin{array}{l}\text{Para que exista la raíz: } 4 - x^2 \ge 0 \rightarrow x \in [-2, 2] \\ \text{Para que no se anule el denominador: } x \ne \dfrac{1}{2} \rightarrow Dom = \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)\end{array}\right\} \rightarrow Dom = \left[-2, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, 2\right]$$

e) La función está definida si:

- $x^2 + 3 \ne 0 \rightarrow x^2 \ne -3$

  Siempre cierto por lo que el denominador no se anula.

  Por tanto: $Dom = \mathbb{R}$

- $\dfrac{1}{x^2 + 3} > 0 \rightarrow x^2 + 3 > 0 \rightarrow x^2 > -3$ siempre cierto por lo que siempre existe el logaritmo.

  Por tanto: $Dom = \mathbb{R}$

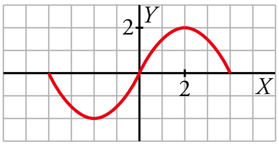
f) La raíz cúbica está definida independientemente del signo del radicando. La función está definida si no se anula el denominador del radicando:

$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$

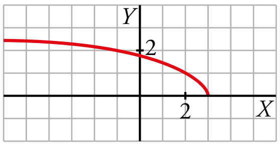
Por tanto: $Dom = \mathbb{R} - \{4\}$

5 **Observa las gráficas de estas funciones e indica cuál es su dominio de definición y su recorrido:**

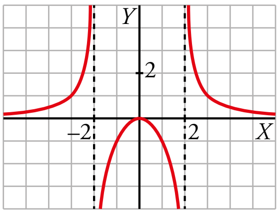
a)



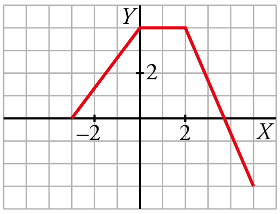
b)



c)



d)



a) Dominio: $[-4, 4]$ — Recorrido: $[-2, 2]$

b) Dominio: $(-\infty, 3]$ — Recorrido: $[0, +\infty)$

c) Dominio: $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ — Recorrido: $\mathbb{R}$

d) Dominio: $[-3, 5]$ — Recorrido: $[-3, 4]$

6 **La función $h(t) = 80 + 64t - 16t^2$ nos da la altura a la que está una pelota lanzada hacia arriba en el instante t, hasta que vuelve al suelo. ¿Cuál es su dominio de definición?**

Necesitamos calcular el tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo. Para ello es necesario resolver la ecuación:

$$80 + 64t - 16t^2 = 0, \text{ que tiene una solución posible, } t = 5.$$

Como el tiempo no puede ser negativo, el dominio es $Dom = [0, 5]$.

7 **[El análisis de este tipo de funciones es una oportunidad para trabajar la dimensión social (comunidad y bien común) de esta clave].**

La temperatura de un paciente, desde que comienza su enfermedad hasta que vuelve a tener 37 °C, ha evolucionado según la función $T = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 37$, siendo t el número de días transcurridos desde el inicio de la enfermedad. ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

Calculamos los días en los que tiene 37 °C.

$$-0{,}1t^2 + 1{,}2t + 37 = 37 \;\rightarrow\; t_1 = 0,\; t_2 = 12$$

Es decir, a los 12 días vuelve a tener 37 °C de temperatura. El dominio es el intervalo $[0, 12]$.

Como se trata de una función cuadrática con las ramas hacia abajo, el valor máximo lo alcanza en el vértice, cuya abscisa es $\dfrac{-1{,}2}{-0{,}2} = 6$.

La temperatura máxima es $-0{,}1 \cdot 6^2 + 1{,}2 \cdot 6 + 37 = 40{,}6$ °C.

En consecuencia, el recorrido es el intervalo $[37; 40{,}6]$.

Funciones lineales y cuadráticas. Interpolación

8 **Escribe las ecuaciones de las siguientes rectas y represéntalas gráficamente:**

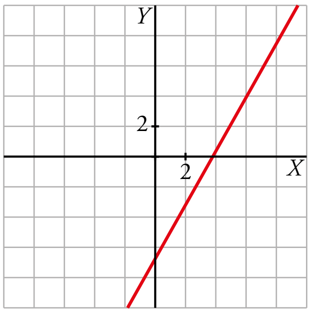
a) Pasa por $P(1, -5)$ y $Q(10, 11)$.

b) Pasa por $(-7, 2)$ y su pendiente es $-0{,}75$.

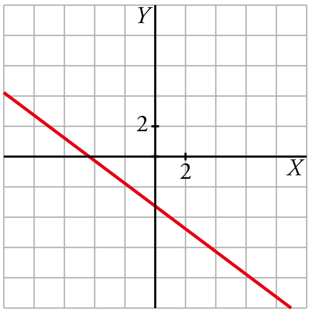
c) Corta a los ejes en $(3{,}5; 0)$ y $(0, -5)$.

d) Es paralela a la recta $3x - y + 1 = 0$ y pasa por el punto $(-2, -3)$.

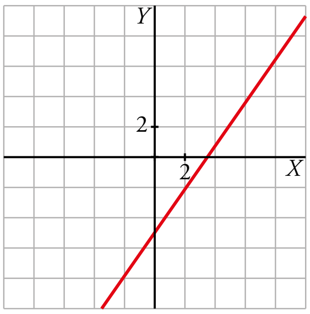
a) $m = \dfrac{11-(-5)}{10-1} = \dfrac{16}{9}$ $\qquad y = -5 + \dfrac{16}{9}(x-1) \ \rightarrow \ y = \dfrac{16x-61}{9}$



b) $y = 2 - 0{,}75[x - (-7)] \ \rightarrow \ y = -0{,}75x - 3{,}25$

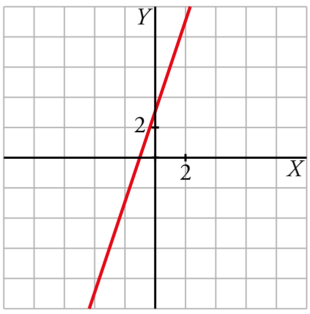


c) $m = \dfrac{-5-0}{0-3,5} = \dfrac{5}{3,5} = \dfrac{10}{7}$ $\qquad y = \dfrac{10}{7}x - 5$

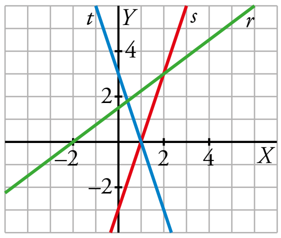


d) $3x - y + 1 = 0 \ \rightarrow \ y = 3x + 1$

La pendiente de la recta buscada es 3 para que sea paralela a la recta dada. Por tanto, la ecuación es $y = -3 + 3[x - (-2)] \ \rightarrow \ y = 3x + 3$.



9 **Calcula la pendiente de las rectas r, s y t y escribe su ecuación.**



- Recta r:

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{3}{4} \\ \text{Pasa por } (-2, 0) \end{array}\right\} \to \text{La ecuación de la recta es } y = \frac{3}{4}(x+2) \to y = \frac{3x+6}{4}.$$

- Recta s:

$$\left.\begin{array}{l} m = 3 \\ \text{Pasa por } (0, -3) \end{array}\right\} \to \text{La ecuación de la recta es } y = 3x - 3.$$

- Recta t:

$$\left.\begin{array}{l} m = -3 \\ \text{Pasa por } (0, 3) \end{array}\right\} \to \text{La ecuación de la recta es } y = -3x + 3.$$

10 **Calcula, mediante interpolación o extrapolación lineal, los valores de y que faltan en cada tabla:**

a)

x	**0,45**	**0,5**	**0,6**
y	**2**	**…**	**0,25**

b)

x	**47**	**112**	**120**
y	**18**	**37**	**…**

a) $y = 2 - 11,\widehat{6}(x - 0,45) \to y_0 = 2 - 11,\widehat{6}(0,5 - 0,45) = 1,42$

b) $y = 18 + 0,292(x - 47) \to y_0 = 18 + 0,292(120 - 47) = 39,32$

11 **La siguiente tabla muestra los ingresos, en millones de euros, de una fábrica de cemento según el número de toneladas vendidas:**

x (TONELADAS)	**1**	**3**	**5**
y (MILLONES DE EUROS)	**5,2**	**14,8**	**21,2**

Estima, mediante interpolación cuadrática, los ingresos obtenidos si se venden 2 t y 4 t.

Busquemos la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ que sabemos que pasa por los puntos (1; 5,2), (3; 14,8) y (5; 21,2).

Imponemos que pase por ellos para encontrar los valores de a, b y c, resolviendo un sistema de tres ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 5,2 = a + b + c \\ 14,8 = 9a + 3 + c \\ 21,2 = 25a + 5b + c \end{array}\right\}$$

A la tercera y segunda ecuación le restamos la primera:

$$9,6 = 8a + 2b \to b = \frac{9,6 - 8a}{2}$$
$$16 = 24a + 4b \to 4 = 6a + b \to b = 4 - 6a$$

Igualamos los dos valores de b:

$$\frac{9,6 - 8a}{2} = 4 - 6a \to a = -0,4 \to b = 6,4 \to c = -0,8$$

Por tanto, $f(x) = -0,4x^2 + 6,4x - 0,8$ es nuestra función de interpolación cuadrática.

Estimamos los valores pedidos, que como están dentro del intervalo (1,5), serán una buena aproximación:

$f(2) = 10,4$

$f(4) = 18,4$

Si venden 2 toneladas ingresarán 10,4 millones de euros y si venden 4 toneladas ingresarán 18,4 millones de euros.

12 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = x^2 + 2x + 1$

b) $y = \dfrac{x^2}{2} + 3x + 1$

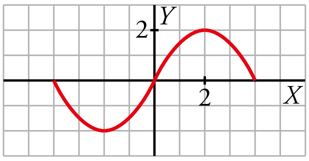
c) $y = -x^2 + 3x - 5$

d) $y = \dfrac{x^2}{3} + 3x + 6$

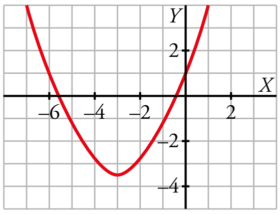
e) $y = -4x^2 + 1$

f) $y = -2x^2 - 3x + 0,5$

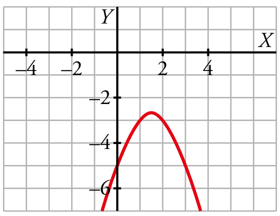
a)



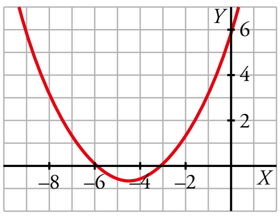
b)



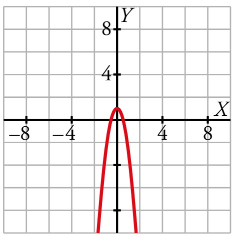
c)



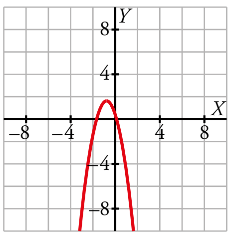
d)



e)



f)



13 **Halla la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (–2, –9), (2, –5) y (4, 0).**

Hazlo de dos formas distintas.

a) Utilizando la expresión $y = ax^2 + bx + c$.

b) Por el método de Newton.

a) $y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} (-2,-9) \rightarrow -9 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c \rightarrow 4a - 2b + c = -9 \\ (2,-5) \rightarrow -5 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c \rightarrow 4a + 2b + c = -5 \\ (4,0) \rightarrow 0 = a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c \rightarrow 16a + 4b + c = 0 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema: $a = \frac{1}{4}$, $b = 1$, $c = -8$

La parábola buscada es $y = \frac{x^2}{4} + x - 8$.

b) $y = p + m(x + 2) + n(x + 2)(x - 2)$

$(-2, -9) \rightarrow -9 = p + m \cdot (-2 + 2) + n \cdot (-2 + 2)(-2 - 2) \rightarrow p = -9$

$(2, -5) \rightarrow -5 = -9 + m \cdot (2 + 2) + n \cdot (2 + 2)(2 - 2) \rightarrow 4m = 4 \rightarrow m = 1$

$(4, 0) \rightarrow 0 = -9 + (4 + 2) + n \cdot (4 + 2)(4 - 2) \rightarrow 0 = -3 + 12n \rightarrow n = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

La parábola buscada es:

$$y = -9 + (x + 2) + \frac{1}{4}(x + 2)(x - 2) = -9 + x + 2 + \frac{1}{4}(x^2 - 4) = \frac{x^2}{4} + x - 8$$

14 **Halla, en cada caso, la ecuación de la parábola que pasa por los puntos dados.**

a) (1, –1), (3, 3), (5, –1) **b) (0, –4), (1, –6), (3, –4)**

Halla las ordenadas de los puntos de las parábolas anteriores con abscisa $x = 4$ y $x = -3$.

a) Usando la ecuación general: $y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} (1,-1) \rightarrow -1 = a + b + c \rightarrow a + b + c = -1 \\ (3,3) \rightarrow 3 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c \rightarrow 9a + 3b + c = 3 \\ (5,-1) \rightarrow -1 = a\cdot 5^2 + b\cdot 5 + c \rightarrow 25a + 5b + c = -1 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema: $a = -1$, $b = 6$, $c = -6$

La parábola buscada es $y = -x^2 + 6x - 6$.

Los puntos (4, 2) y (–3, –33) pertenecen a esta parábola.

b) Por el método de Newton: $y = p + m(x - 0) + n(x - 0)(x - 1) = p + mx + nx(x - 1)$

$(0, -4) \rightarrow -4 = p + m \cdot 0 + n \cdot 0(0 - 1) \rightarrow p = -4$

$(1, -6) \rightarrow -6 = -4 + m \cdot 1 + n \cdot 1(1 - 1) \rightarrow m = -2$

$(3, -4) \rightarrow -4 = -4 - 2 \cdot 3 + n \cdot 3(3 - 1) \rightarrow 6n = 6 \rightarrow n = 1$

La parábola buscada es:

$y = -4 - 2x + x(x - 1) = -4 - 2x + x^2 - x = x^2 - 3x - 4$

Los puntos (4, 0) y (–3, 14) pertenecen a esta parábola.

Página 136

Representación de funciones elementales

15 Saco de dudas. **[La búsqueda de la relación entre gráficas y expresiones analíticas puede servir para trabajar esta técnica].**

Asocia a cada gráfica su expresión analítica.

a) $y = -0{,}5x^2 + 3$

b) $y = \sqrt{x+2}$

c) $y = \dfrac{x^2}{3} - 1$

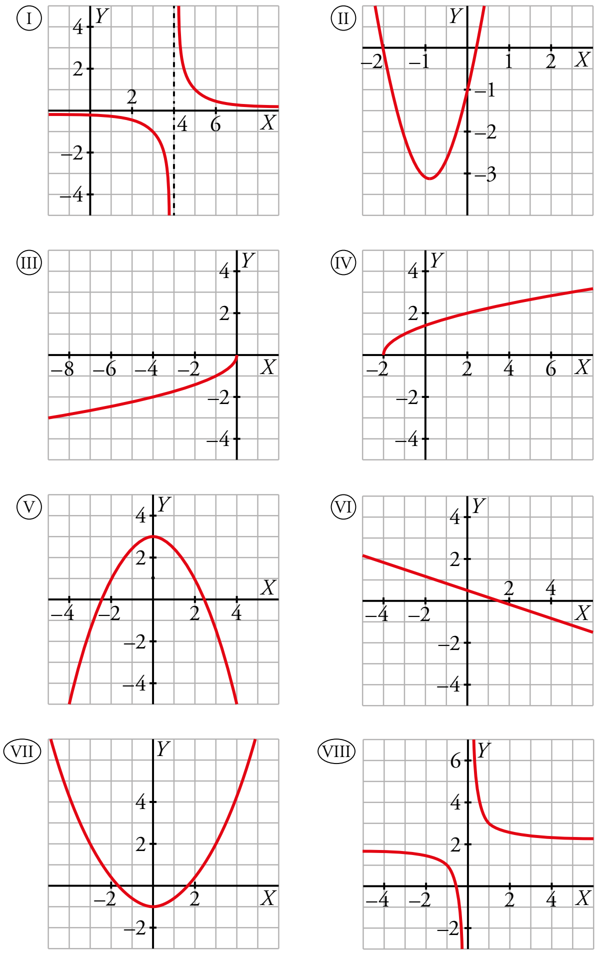
d) $y = \dfrac{1}{x-4}$

e) $y = 3x^2 + 5x - 1$

f) $y = \dfrac{1}{x} + 2$

g) $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3}$

h) $y = -\sqrt{-x}$



a) IV

b) VII

c) I

d) II

e) VIII

f) VI

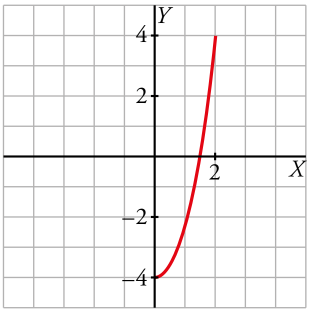
g) III

16 **Representa estas funciones en el intervalo indicado:**

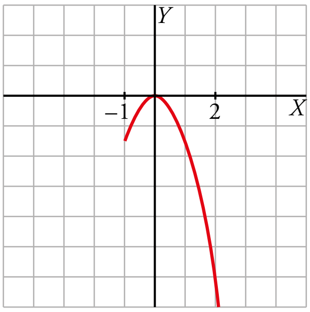
a) $y = 2x^2 - 4,\ [0, 2]$ **b)** $y = -\dfrac{3x^2}{2},\ x \geq -1$

c) $y = \dfrac{1}{x},\ x < 0$ **d)** $y = \dfrac{3x - 30}{5},\ [-5, 5]$

a) $y = 2x^2 - 4,\ [0, 2]$

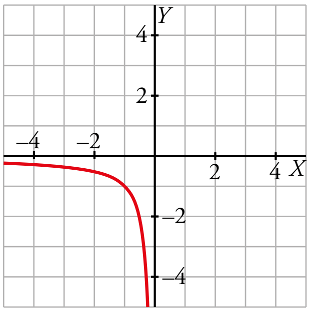


b) $y = -\dfrac{3x^2}{2},\ x \geq -1$



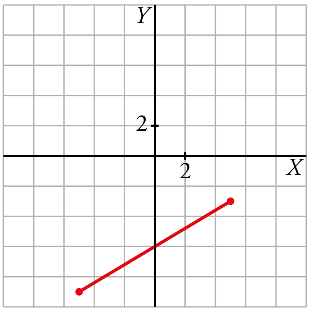
c) $y = \dfrac{1}{x},\ x < 0$

Se trata de una rama de la función de proporcionalidad inversa y su gráfica es:



d) $y = \dfrac{3x - 30}{5}$, $[-5, 5]$

Es un trozo de una función lineal.

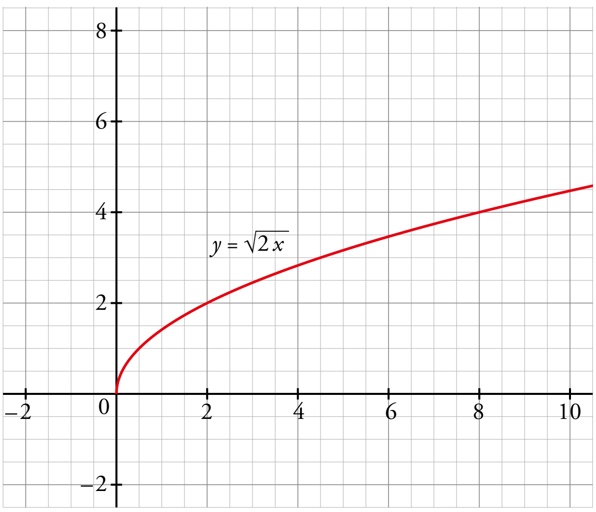


17 **Representa las siguientes funciones:**

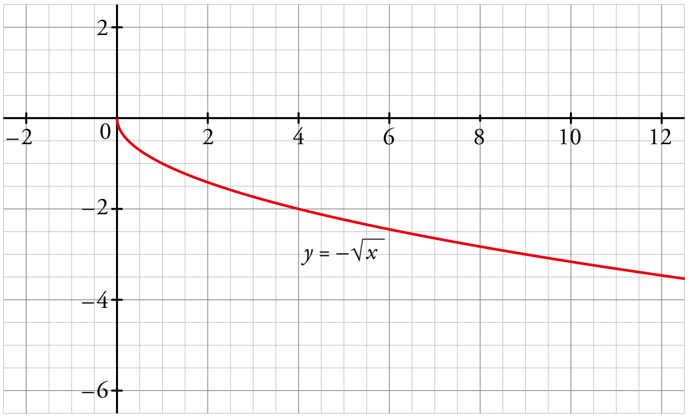
a) $y = \sqrt{2x}$ **b)** $y = -\sqrt{x}$ **c)** $y = 2\sqrt{x}$

d) $y = \sqrt{-x}$ **e)** $y = \dfrac{-1}{x}$ **f)** $y = \dfrac{2}{x}$

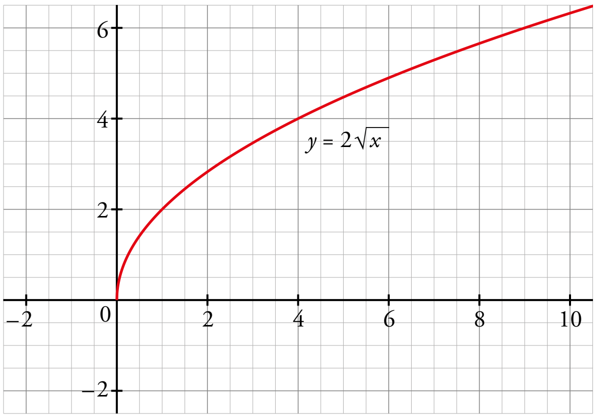
a) $y = \sqrt{2}$



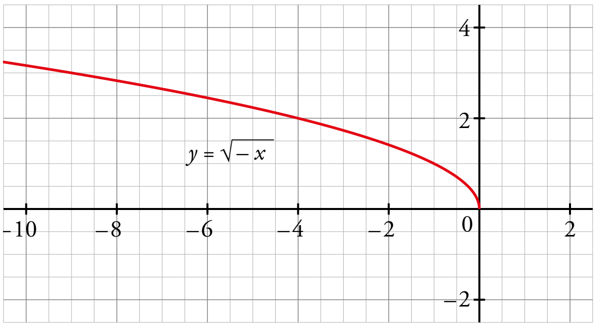
b) $y = -\sqrt{x}$



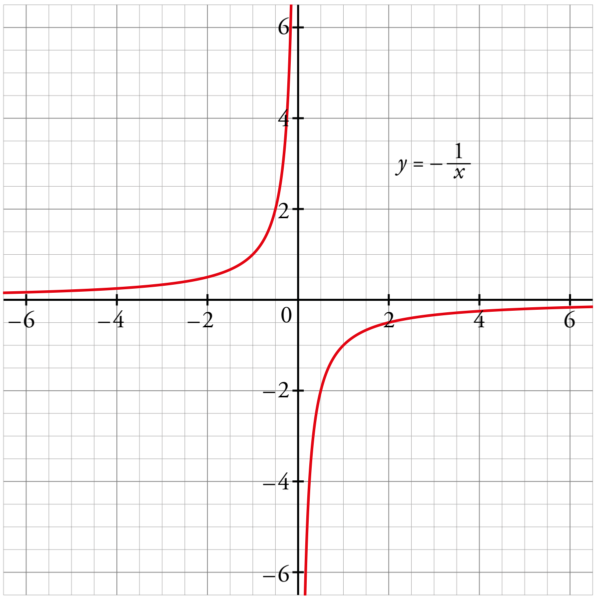
c) $y = 2\sqrt{x}$



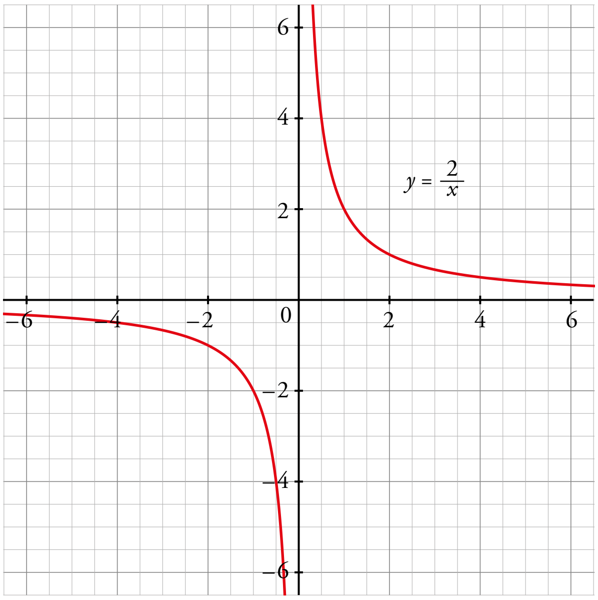
d) $y = \sqrt{-x}$



e) $y = -\dfrac{1}{x}$



f) $y = \dfrac{2}{x}$



18 **Halla el valor de k para que:**

a) La función $y = \frac{k}{x}$ pase por el punto (2, 1/4).

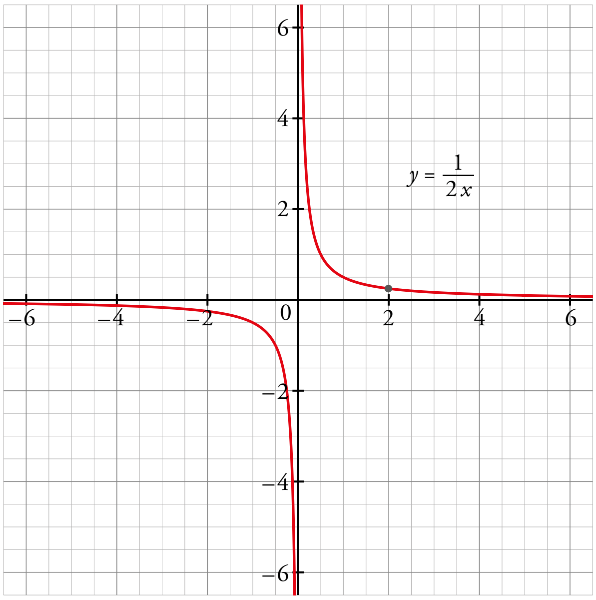
b) La función $y = \sqrt{kx}$ pase por el punto (2, 2).

c) Representa las funciones obtenidas.

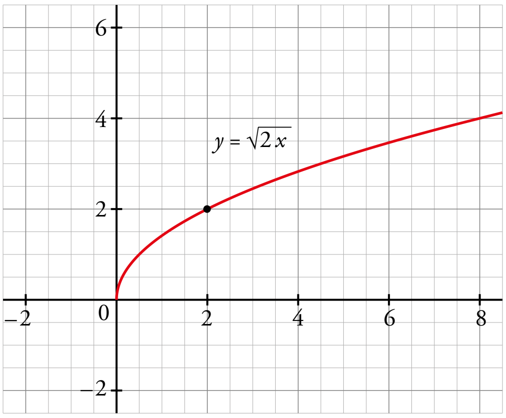
a) $\frac{1}{4} = \frac{k}{2} \rightarrow k = \frac{1}{2}$

b) $2 = \sqrt{2k} \rightarrow k = 2$

c) La función $y = \frac{1}{2x}$



La función $y = \sqrt{2x}$



Funciones definidas «a trozos»

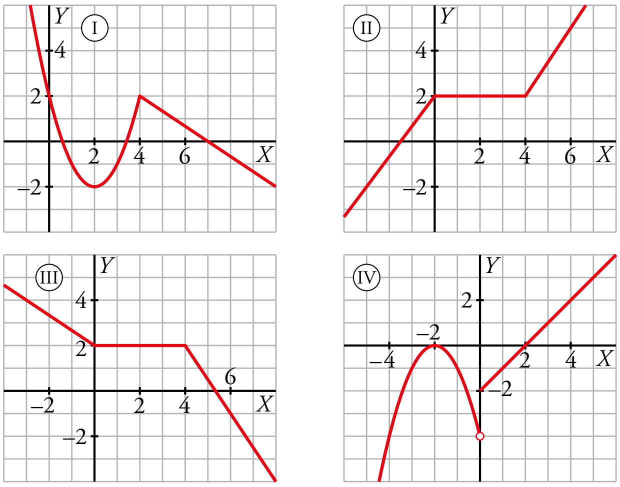
19 **Asocia a cada gráfica su expresión analítica.**

a) $y = \begin{cases} 2 - \dfrac{2x}{3} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 8 - \dfrac{3x}{2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -(x+2)^2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & \text{si } x < 4 \\ \dfrac{14 - 2x}{3} & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} 2 + \dfrac{4x}{3} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ \dfrac{3x}{2} - 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$



a) III b) IV c) I d) II

20 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

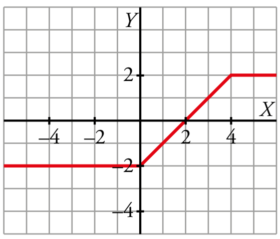
a) $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 \le x < 4 \\ 2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

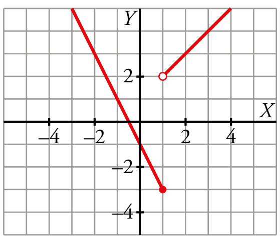
c) $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{2} + 2 & \text{si } x \le 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

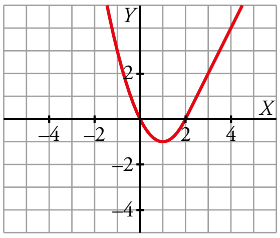
a)



b) Construimos una tabla de valores para cada recta y obtenemos la gráfica.



c) Hallamos el vértice de la parábola, $(1, -1)$, y los puntos de corte, $(0, 0)$ y $(2, 0)$ (primer trozo). Construimos una tabla de valores para el segundo trozo y obtenemos:



d) La función está formada por un trozo de parábola abierta hacia abajo y un trozo de recta.

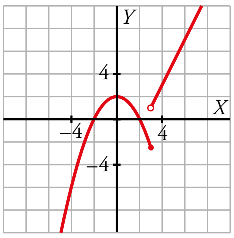
- 1.ª rama:

  Su vértice es el punto $(0, 2)$ y corta al eje horizontal en los puntos de abscisas $x = -2$, $x = 2$.

  Evaluamos en el punto de ruptura: $x = 3 \rightarrow y = \dfrac{-3^2}{2} + 2 = -\dfrac{5}{2}$

- 2.ª rama:

  Es un trozo de recta que podemos representar hallando dos puntos por los que pasa.



21 **Representa.**

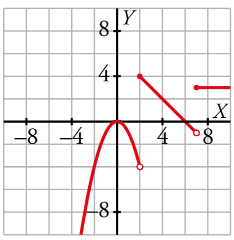
a) $y = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 2 \\ -x+6 & \text{si } 2 \le x < 7 \\ 3 & \text{si } x \ge 7 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x \le -1 \\ 2x^2-2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

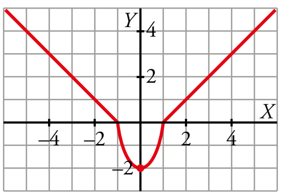
c) $y = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x \le 0 \\ -\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

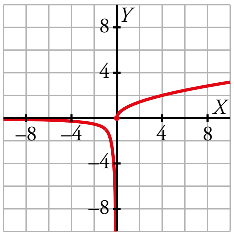
a)
- 1.ª rama: parábola abierta haca abajo, cuya gráfica es la reflejada de $y = x^2$ respecto del eje OX.
- 2.ª rama: trozo de recta que podemos representar hallando dos puntos por los que pasa.
- 3.ª rama: trozo de función constante.



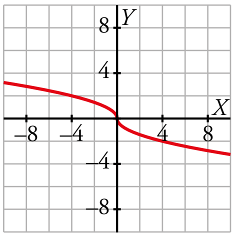
b)



c) Los dos trozos son partes de gráficas representadas en ejercicios anteriores.

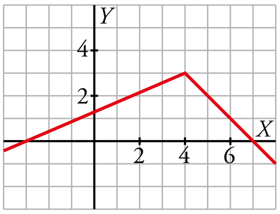


d) Son dos trozos de función raíz situados a ambos lados del origen de coordenadas.

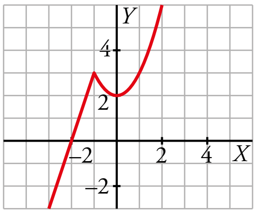


22 Obtén la expresión analítica de estas funciones:

a)



b)



* ***Ten en cuenta el ejercicio guiado 3.***

a) El primer trozo pertenece a una recta que pasa por los puntos (–3, 0) y (4, 3). Hallamos su ecuación:

$$m = \frac{3-0}{4-(-3)} = \frac{3}{7} \rightarrow y = \frac{3}{7}(x+3) = \frac{3x+9}{7}$$

El segundo trozo pertenece a una recta que pasa por los puntos (7, 0) y (4, 3). Hallamos su ecuación:

$$m = \frac{3-0}{4-7} = -1 \rightarrow y = -(x-7) = 7-x$$

Por tanto, la función es:

$$y = \begin{cases} \dfrac{3x+9}{7} & \text{si } x < 4 \\ 7-x & \text{si } 4 \le x \end{cases}$$

b) El primer trozo pertenece a una recta de pendiente 3 y que pasa por el punto (–2, 0). Su ecuación es $y = 3(x+2)$.

El segundo trozo forma parte de la parábola $y = x^2$ desplazada 2 unidades hacia arriba. Por tanto, la función es:

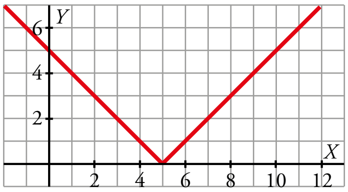
$$y = \begin{cases} 3x+6 & \text{si } x < -1 \\ x^2+2 & \text{si } -1 \le x \end{cases}$$

Página 137

Valor absoluto de una función

23 **Representa la función $y = |x - 5|$ y comprueba que su expresión analítica en intervalos es:**

$$y = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

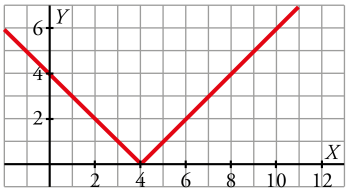


24 **Representa las siguientes funciones y defínelas como funciones «a trozos»:**

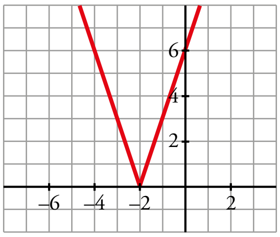
a) $y = |4 - x|$ **b)** $y = |3x + 6|$

c) $y = \left|\dfrac{x-3}{2}\right|$ **d)** $y = |-x - 1|$

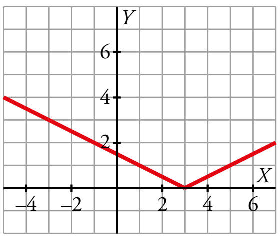
a) $y = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 4 \\ -4 + x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$



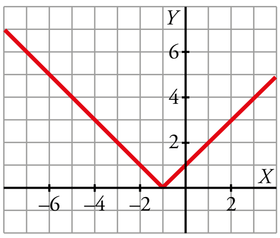
b) $y = \begin{cases} -3x - 6 & \text{si } x < -2 \\ 3x + 6 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$



c) $y = \begin{cases} -\dfrac{x-3}{2} & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{x-3}{2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$



d) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

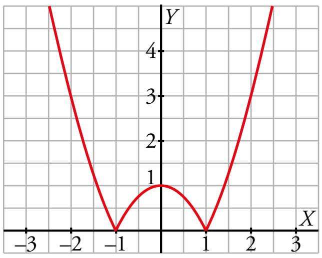


25 **Representa las siguientes funciones y defínelas por intervalos.**

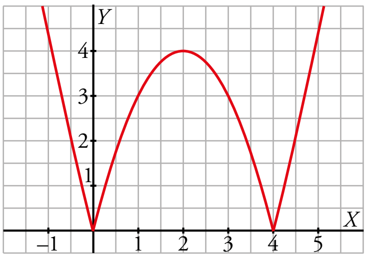
a) $y = |x^2 - 1|$ **b)** $y = |x^2 - 4x|$

c) $y = |x^2 + 2x - 3|$ **d)** $y = |x^2 - 2x + 1|$

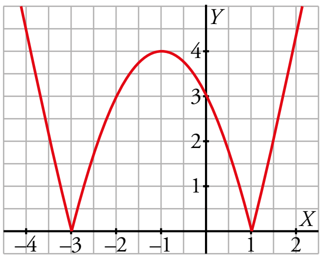
a)



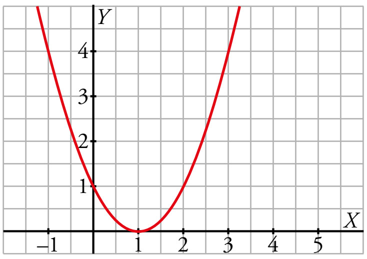
b)



c)



d)



26 **Define las siguientes funciones como funciones «a trozos» y represéntalas.**

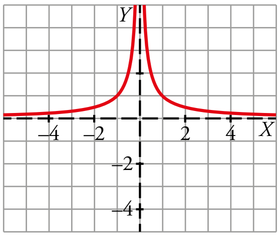
a) $y = \left|\dfrac{1}{x}\right|$ **b)** $y = 1 + |x|$

c) $y = \dfrac{|x|}{x}$ **d)** $y = 2|x| + x$

* ***Ten en cuenta el ejercicio resuelto 7.***

La función valor absoluto de $f(x)$ mantiene la parte positiva de la gráfica y convierte la parte negativa de $f(x)$ en $-f(x)$, es decir, en la simétrica de $f(x)$ respecto del eje horizontal.

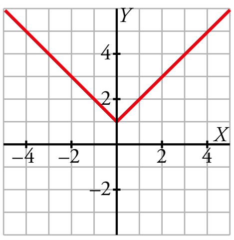
a)



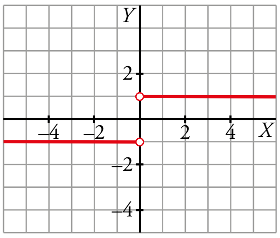
b) Escribimos la función a trozos:

$$y = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \le 0 \\ 1 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

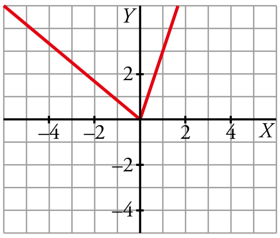
La gráfica de esta función es la de $y = |x|$ desplazada una unidad hacia arriba.



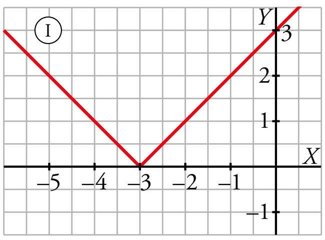
c) $y = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} -\dfrac{x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

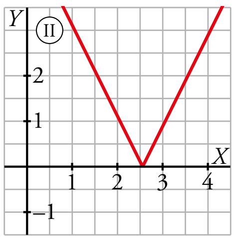


d) $y = 2|x| + x = \begin{cases} 2(-x) + x & \text{si } x < 0 \\ 2x + x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



27 **Escribe la expresión analítica de estas gráficas como funciones «a trozos» y como valor absoluto.**





a) Como función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{si } x \leq -3 \\ x + 3 & \text{si } x > -3 \end{cases}$$

Como valor absoluto: $f(x) = |\, x + 3\, |$

b) Como función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5 & \text{si } x \leq 2{,}5 \\ 2x - 5 & \text{si } x < 2{,}5 \end{cases}$$

Como valor absoluto: $f(x) = |\, 2x - 5\, |$

Para resolver

28 **El precio del billete de una línea de cercanías depende de los kilómetros recorridos. Por 57 km he pagado 2,85 euros, y por 168 km, 13,4 euros. Calcula el precio de un billete para una distancia de 100 km.**

$y = 2{,}85 + 0{,}095(x - 57)$

$y(100) = 6{,}94$ euros.

29 **Con unos gastos en publicidad de 3 000 €, las ventas obtenidas por una empresa han sido de 28 000 €; y con 5 000 € invertidos en publicidad, las ventas han ascendido a 39 000 €.**

a) Estima, mediante interpolación lineal, cuáles serían las ventas si se invirtieran 4 000 € en publicidad.

b) Si sabemos que con un gasto de 6 000 € se han obtenido unas ventas de 40 000 €, estima mediante interpolación parabólica las ventas que se obtendrían invirtiendo 4 000 € en publicidad. Utiliza el método de Newton.

a) Para mayor comodidad trabajaremos en miles de euros.

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3, 28) y (5, 39):

$$m = \frac{39-28}{5-3} = \frac{11}{2} \to y = 28 + \frac{11}{2}(x-3)$$

Evaluamos en $x = 4$ y obtenemos la estimación pedida:

$$x = 4 \to y = 28 + \frac{11}{2} = 33{,}5$$

Si se invirtieran 4 000 € en publicidad, se estimarían unas ventas de 33 500 €.

b) Buscamos una parábola que pase por los puntos (3, 28), (5, 39) y (6, 40).

Ecuación de la parábola: $y = p + m(x-3) + n(x-3)(x-5)$

Pasa por (3, 28) $\to$ $28 = p$

Pasa por (5, 39) $\to$ $39 = p + m(5-3)$ $\to$ $39 = p + 2m$

Pasa por (6, 40) $\to$ $40 = p + m(6-3) + n(6-3)(6-5)$ $\to$ $40 = p + 3m + 3n$

Obtenemos las soluciones: $p = 28,\ m = \frac{11}{2},\ n = -\frac{3}{2}$

Ecuación de la parábola: $y = 28 + \frac{11}{2}(x-3) - \frac{3}{2}(x-3)(x-5)$

$$y(4) = 28 + \frac{11}{2} - \frac{3}{2}(-1) = 28 + \frac{11}{2} + \frac{3}{2} = 35$$

Si se invirtieran 4 000 € en publicidad, se estimarían unas ventas de 35 000 €.

30 **Midiendo la temperatura a diferentes alturas, se ha observado que por cada 180 m de ascenso el termómetro baja 1 °C. Si en la base de una montaña de 800 m estamos a 10 °C, ¿cuál será la temperatura en la cima? Representa gráficamente la función *altura-temperatura* y busca su expresión analítica.**

Llamamos x a la altura respecto de la base de la montaña. La función que describe la temperatura en función de la altura es una función lineal que pasa por los puntos (0, 10) y (180, 9). Por tanto:

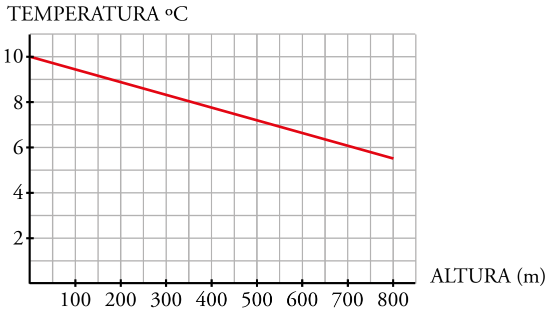
$$m = \frac{9-10}{180} = -\frac{1}{180} \to y = -\frac{1}{180}x + 10$$

Para obtener la altura en la cima evaluamos en 800.

$$x = 800 \to y = -\frac{1}{180} \cdot 800 + 10 = 5{,}56$$

La temperatura en la cima es de 5,56 ºC.

Representamos la función $y = -\frac{1}{180}x + 10$:

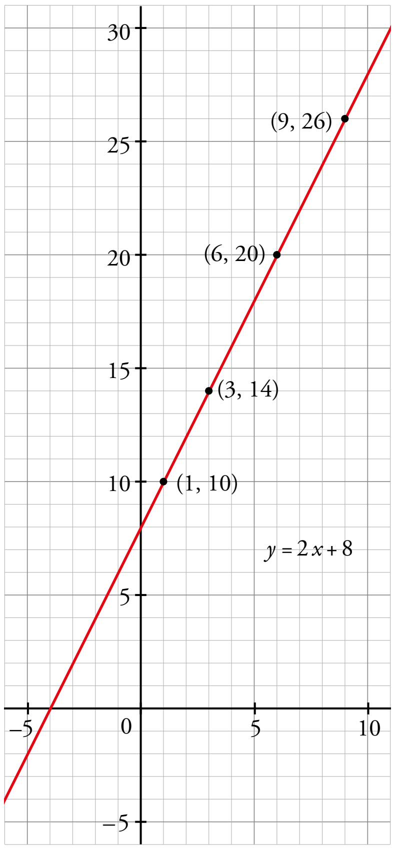


31 **Observamos en una farmacia una tabla con los pesos de los niños menores de 9 años, según su edad:**

x (AÑOS)	1	3	6	9
y (kg)	10	14	20	26

Representa estos datos y utiliza el modelo de interpolación que creas más adecuado para estimar el peso de un niño a los 5 años y a los 10 años.

Si representamos los puntos vemos que pasan por una recta:



Buscamos ahora la ecuación de la recta usando los puntos (1, 10) y (3, 14):

$$f(x) = \frac{14-10}{3-1}(x-1)+10 = 2x+8$$

Estimamos ahora los pesos para los niños de 5 y de 10 años:

$f(5) = 18$ kg

$f(10) = 28$ kg

32 **En la cocina de un restaurante, un equipo de 2 personas es capaz de preparar los pedidos para 30 comensales. Si el equipo es de 4 personas la capacidad se eleva hasta los 50 comensales. Y si el equipo llega a 8 personas, se estorbarían unos a otros y no habría fuegos para todos, por lo que la capacidad se mantendría en 50 comensales. Estima mediante interpolación parabólica cuántos comensales podría atender un equipo de 5 personas.**

Buscamos una parábola que pase por los puntos (2, 30), (4, 50) y (8, 50).

Ecuación de la parábola: $y = p + m(x-2) + n(x-2)(x-4)$

Pasa por (2, 30) $\rightarrow$ $30 = p$

Pasa por (4, 50) $\rightarrow$ $50 = p + m(4-2)$ $\rightarrow$ $50 = p + 2m$

Pasa por (8, 50) $\rightarrow$ $50 = p + m(8-2)(8-4)$ $\rightarrow$ $50 = p + 6m + 24n$

Obtenemos las soluciones: $p = 30$, $m = 10$, $n = -\frac{5}{3}$

Ecuación de la parábola: $y = 30 + 10(x-2) - \frac{5}{3}(x-2)(x-4)$

$y(5) = 30 + 30 - 5 = 55$

Cinco cocineros podrían atender a 55 comensales.

33 **Un opositor se enfrenta a un temario de 3 100 páginas. Sabe que si estudia 4 horas diarias es capaz de memorizar 4 páginas por día. Si dedica 8 horas, aprende 7 páginas; y si dedica 12 horas, consigue 9 páginas. Se plantea una jornada diaria de 10 horas y quiere saber el número de días que le va a suponer dar una primera vuelta al temario completo. Utiliza la interpolación parabólica para responderle.**

Buscamos una parábola que pase por los puntos (4, 4), (8, 7) y (12, 9).

Ecuación de la parábola: $y = p + m(x-4) + n(x-4)(x-8)$

Pasa por (4, 4) $\rightarrow$ $4 = p$

Pasa por (8, 7) $\rightarrow$ $7 = p + m(8-4)$ $\rightarrow$ $7 = p + 4m$

Pasa por (12, 9) $\rightarrow$ $9 = p + m(12-4) + n(12-4)(12-8)$ $\rightarrow$ $9 = p + 8m + 32n$

Obtenemos las soluciones: $p = 4$, $m = \frac{3}{4}$, $n = -\frac{1}{32}$

Ecuación de la parábola: $y = 4 + \frac{3}{4}(x-4) - \frac{1}{32}(x-4)(x-8)$

$y(10) = 4 + \frac{3}{4} \cdot 6 - \frac{1}{32} \cdot 12 = \frac{65}{8}$

$3\,100 : \frac{65}{8} = 381{,}54$

Para dar una vuelta a las 3 100 páginas, con jornadas de 10 horas, necesita, aproximadamente, 382 días.

34 **La dosis de un fármaco comienza con 10 mg y cada día debe aumentar 2 mg hasta llegar a 20 mg. Se debe seguir 15 días con esa cantidad y a partir de entonces ir disminuyendo 4 mg cada día.**

a) Representa la función que describe este enunciado y determina su expresión analítica.

b) Di cuál es su dominio y su recorrido.

a) En el 5.º día la dosis alcanza los 20 mg y este ya es el primero de los 15 días de tratamiento con la dosis máxima. Por tanto, el 19.º día es el último que toma 20 mg.

La expresión es $f(x) = \begin{cases} 10 + 2x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ 20 & \text{si } 5 < x \le 20 \\ 100 - 4x & \text{si } 20 < x \end{cases}$

b) El dominio es el intervalo [0, 25].

El recorrido es el intervalo [0, 20].

35 **El peso en miligramos de un embrión de una especie animal viene dado en la siguiente tabla:**

TIEMPO (DÍAS)	3	5	8
PESO (mg)	8	22	73

Halla, mediante interpolación cuadrática, el peso de un embrión de 6 días.

Para hallar la ecuación de la parábola la escribimos en la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Sustituimos en ella los tres puntos de la tabla de valores:

$8 = 9a + 3b + c \;\rightarrow\; c = 8 - 9a - 3b \;\; (1)$

$22 = 25a + 5b + c \;\rightarrow\; 22 = 25a + 5b + 8 - 9a - 3b = 16a + 2b + 8 \;\rightarrow\; 7 = 8a + b \;\; (2)$

$73 = 64a + 8b + c \;\rightarrow\; 73 = 64a + 8b + 8 - 9a - 3b = 55a + 5b + 8 \;\rightarrow\; 13 = 11a + b \;\; (3)$

Si restamos la ecuación (2) a la ecuación (3): $6 = 3a \;\rightarrow\; a = 2 \;\rightarrow\; b = -9$

Sustituyendo ahora los valores de a y de b en la ecuación (1):

$c = 8 - 9 \cdot 2 + 3 \cdot 9 = 17$

Por tanto: $f(x) = 2x^2 - 9x + 17$

A los seis días un embrión pesa aproximadamente $f(6) = 35$ mg.

36 **Las ganancias esperadas de una empresa en los próximos 10 años, en millones de euros, vienen dadas por la función $G(t) = -2t^2 + 20t + 5$; t, en años. Representa la función y determina cuándo serán máximas las ganancias.**

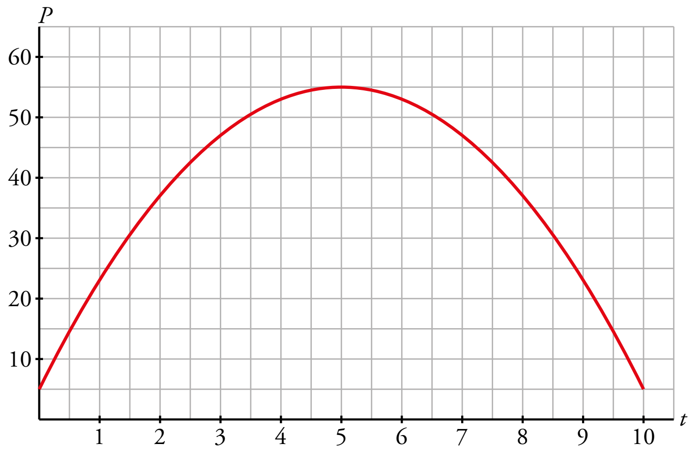
a) La función es una parábola con las ramas abiertas hacia abajo. Su vértice es:

$$t_0 = \frac{-20}{-4} = 5 \;\rightarrow\; G(5) = -2 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 + 5 = 55$$

Evaluamos en los extremos del intervalo de definición:

$G(0) = 5$

$G(10) = -2 \cdot 10^2 + 20 \cdot 10 + 5 = 5$



b) Las ganancias serán máximas dentro de 5 años y tendrán un valor de 55 millones de euros.

Página 138

37 En las funciones de oferta y demanda, se llama *cantidad de equilibrio* al número de unidades que hay que producir para que la oferta y la demanda se igualen, $o(x) = d(x)$. Se llama *precio de equilibrio* al precio con el cual se consigue esa igualdad.

a) Halla el precio y la cantidad de equilibrio de un producto cuyas funciones de oferta y demanda son $o(x) = 2{,}5x - 100$ y $d(x) = 300 - 1{,}5x$ (x en euros, d y o en miles de unidades del producto).

b) Si el precio del producto es de 80 €, ¿habrá escasez o exceso del mismo? ¿Y si el precio fuese de 120 €?

c) ¿Cuál sería el precio y la cantidad de equilibrio si las funciones de oferta y demanda fuesen $o(x) = 0{,}25x^2 - 100$ y $d(x) = 185 - 2x$?

a) $o(x) = d(x) \rightarrow 2{,}5x - 100 = 300 - 1{,}5x \rightarrow x = 100$ € es el precio de equilibrio.

La cantidad de equilibrio es $o(100) = d(100) = 300 - 1{,}5 \cdot 100 = 150$ miles de unidades.

b) Si $x = 80$, hay escasez, porque la demanda supera a la oferta. En efecto:

$o(80) = 2{,}5 \cdot 80 - 100 = 100$

$d(80) = 300 - 1{,}5 \cdot 80 = 180$

Si $x = 120$, hay exceso, porque la oferta supera a la demanda. En efecto:

$o(80) = 2{,}5 \cdot 120 - 100 = 200$

$d(80) = 300 - 1{,}5 \cdot 120 = 120$

c) $o(x) = d(x) \rightarrow 0{,}25x^2 - 100 = 185 - 2x$ da lugar a una única solución posible: $x = 30$ €.

La cantidad de equilibrio es $o(30) = d(30) = 125$ miles de unidades.

38 El coste de producción de x unidades de un producto es igual a $\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ euros y el precio de venta de una unidad es $50 - \frac{x}{4}$ euros.

a) Escribe la función que nos da el beneficio total si se venden las x unidades producidas, y represéntala.

b) Halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

a) $B(x) = 50x - \frac{x^2}{4} - \left(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right) = -\frac{x^2}{2} + 15x - 25$

b) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola: $x = \frac{-15}{-1} = 15$.

Deben venderse 15 unidades.

39 En una fábrica se venden mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y saben que por cada 10 euros de subida venderán 2 electrodomésticos menos.

a) ¿Cuáles serán los ingresos si suben los precios 50 euros?

b) Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.

c) ¿Cuál debe ser la subida para que los ingresos de la fábrica sean máximos?

a) En este caso vendería 90 electrodomésticos a 450 euros cada uno; luego los ingresos serían de $450 \cdot 90 = 40\,500$ euros.

b) $I(x) = (400 + 10x)(100 - 2x) = -20x^2 + 200x + 40\,000$

c) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola:

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{-40} = 5 \rightarrow 5$ euros

40 **Los beneficios mensuales de una fábrica de golosinas, en miles de euros, vienen dados por $f(x) = -0{,}1x^2 + 2{,}5x - 10$, cuando se venden x toneladas de producto.**

a) Representa la función.

b) Calcula la cantidad mínima que se ha de vender para no tener pérdidas.

c) ¿Cuántas toneladas se han de vender para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

a) La función es una parábola abierta hacia abajo.

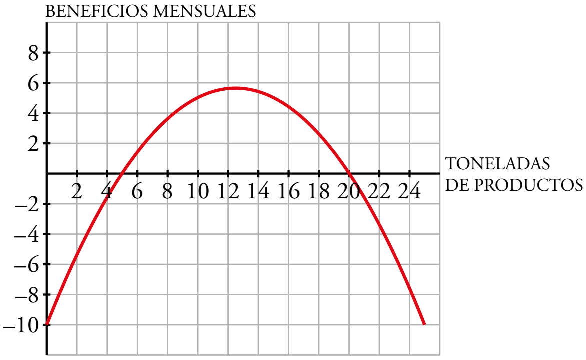
Su vértice es: $x_0 = \dfrac{-2{,}5}{-0{,}2} = 12{,}5 \rightarrow f(12{,}5) = -0{,}1 \cdot 12{,}5^2 + 2{,}5 \cdot 12{,}5 - 10 = 5{,}625$

Hallamos los puntos de corte con el eje OX para saber para qué valores no se obtienen beneficios.

$y = 0 \rightarrow -0{,}1 \cdot x^2 + 2{,}5x - 10 = 0 \rightarrow x = 5,\ x = 20$

Corta al eje vertical en el punto $x = 0 \rightarrow f(0) = -10$.

Su gráfica es:



b) Debe vender, como mínimo, 5 toneladas de producto para no tener pérdidas.

c) El beneficio máximo lo obtiene vendiendo 12,5 toneladas de producto y es de 5 625 €.

41 **Para enviar un paquete desde Adelaida a París, un servicio de correo cobra 50 € por paquetes que pesen hasta 2 kg y 10 € por cada kg o fracción adicional.**

a) Calcula lo que cuesta enviar un paquete de 5 kg.

b) Escribe la expresión analítica del precio de enviar un paquete de x kg para x menor o igual a 8.

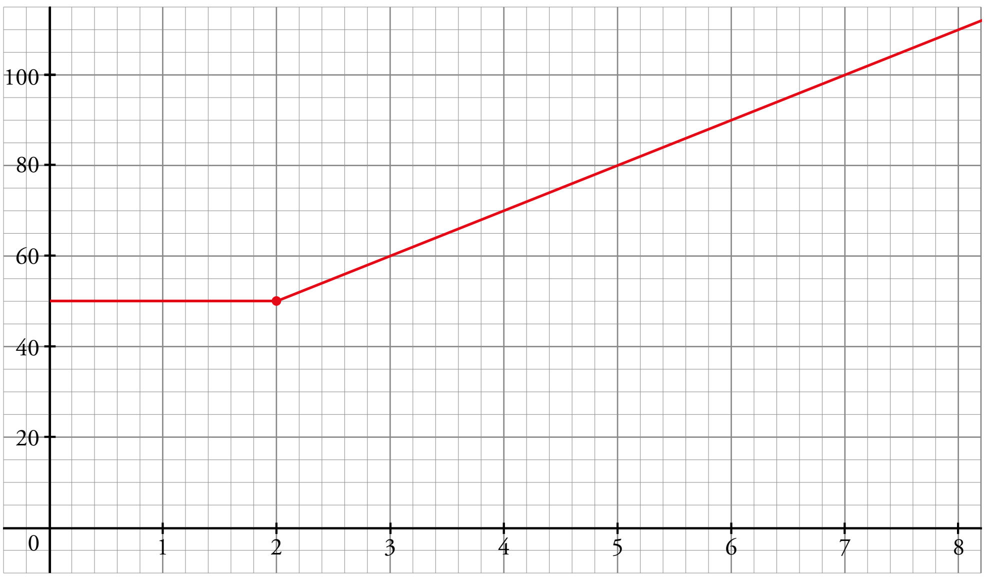
c) Represéntala gráficamente.

a) Si el paquete pesa 5 kg nos cobrarán: $50 + (5 - 2)\,10 = 80$ €

b) La definimos a trozos, usando la parte entera para incluir todos los casos:

$$E(x) = \begin{cases} 50 & \text{si } x \le 2 \\ 50 + 10\,(x - 2) & \text{si } 2 < x \le 8 \end{cases}$$

c)



42 **Tres operadores telefónicos ofrecen estas tarifas mensuales:**

	ABONO 2 h	COSTE A PARTIR DE 2 h
TARIFA A	**30 €**	**0,50 € por minuto**
TARIFA B	**20 €**	**0,75 € por minuto**
TARIFA C	**40 €**	**0,25 € por minuto**

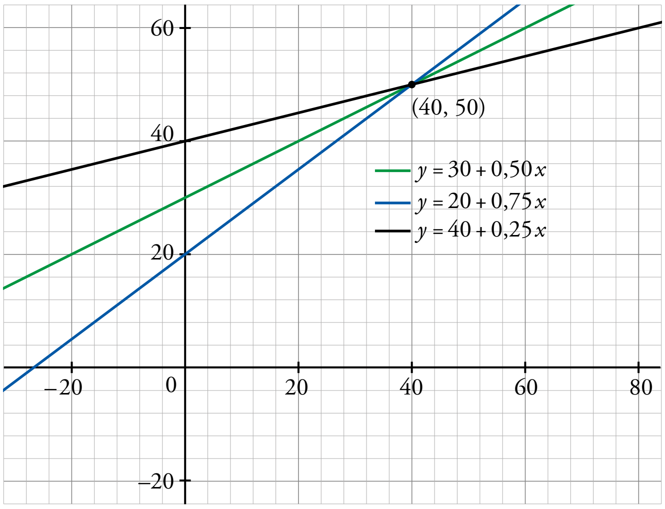
Analiza cuál es la tarifa más ventajosa según el tiempo que se sobrepasa las 2 h del abono.

En función de los minutos, podemos definir las 3 funciones:

Tarifa A: gráfica verde $f(x) = 30 + 0,50x$

Tarifa B: gráfica azul $g(x) = 20 + 0,75x$

Tarifa C: gráfica negra $h(x) = 40 + 0,25x$



Entre 0 y 40 minutos la mejor tarifa es la B y la peor, la tarifa C.

Cuando hablamos 40 minutos aparte de las dos primeras horas, pagamos 50 € con las 3 tarifas.

A partir de los 40 minutos la mejor tarifa pasa a ser la tarifa C, y la peor la tarifa B.

43 **Una discoteca abre a las 10 de la noche y cierra cuando se va toda la clientela. Representa la función que nos da el número de clientes, N, según el número de horas que lleva abierta, t, es $N(t) = 80t - 10t^2$.**

a) ¿A qué hora el número de clientes es máximo?

b) ¿A qué hora cerrará la discoteca?

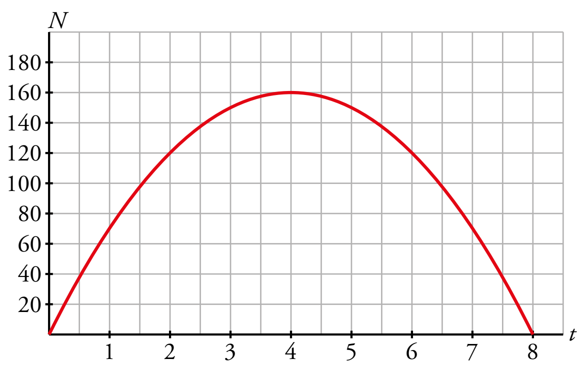
La función es una parábola abierta hacia abajo.

Su vértice es: $t_0 = \dfrac{-80}{-20} = 4 \to N(4) = 80 \cdot 4 - 10 \cdot 4^2 = 160$

Hallamos los puntos de corte con el eje OX para saber cuándo no hay clientes.

$N(t) = 0 \to 80t - 10t^2 = 0 \to t = 0,\ t = 8$

Su gráfica es:



a) El número de clientes es máximo, 160, cuando lleva 4 horas abierta, a las 2 de la mañana.

b) La discoteca cerrará 8 horas después de abrir, es decir, a las 6 de la mañana.

44 El porcentaje de estudiantes que asisten a un curso de inglés de 10 meses de duración viene dado por la función:

$$P(t) = \begin{cases} at^2 + bt + c & \text{si } 0 \le t \le 3 \\ 28 & \text{si } 3 < t \le 10 \end{cases} \quad t, \text{ en meses}$$

Sabemos que, inicialmente, el 100 % de los estudiantes asiste al curso; que transcurrido un mes, asiste el 60 % y que al cumplirse el tercer mes, la asistencia se reduce al 28 %. Calcula a, b, c y representa la función.

Los datos del problema reflejan que $P(0) = 100$, $P(1) = 60$ y $P(3) = 28$. Por tanto,

$$\left.\begin{aligned} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c &= 100 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c &= 60 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c &= 28 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} c &= 100 \\ a + b + c &= 60 \\ 9a + 3b + c &= 28 \end{aligned}\right\} \to a = 8, \ b = -48, \ c = 100$$

La función es:

$$P(t) = \begin{cases} 8t^2 - 48t + 100 & \text{si } 0 \le t \le 3 \\ 28 & \text{si } 3 < t \le 10 \end{cases}$$

El primer trozo es parte de una parábola cuyo vértice es:

$$t_0 = \frac{48}{16} = 3 \to P(3) = 28; \text{ es decir, el punto } (3, 28).$$

El segundo trozo es una función constante.

La gráfica es:

45 Las funciones $I(t) = -0,5t^2 + 17t$ y $C(t) = 0,5t^2 - t + 32$, $0 \le t \le 18$, representan, respectivamente, los ingresos y los costes de una empresa, en miles de euros, en función de los años transcurridos desde su comienzo y en los últimos 18 años.

a) ¿Para qué valor de t, se da la igualdad $C(t) = I(t)$?

b) Halla la función que expresa los beneficios (ingresos menos costes) en función de t y represéntala gráficamente.

c) ¿Cuántos años después del comienzo de su actividad la empresa alcanzó el beneficio máximo? Calcula su valor.

a) $I(t) = C(t)$

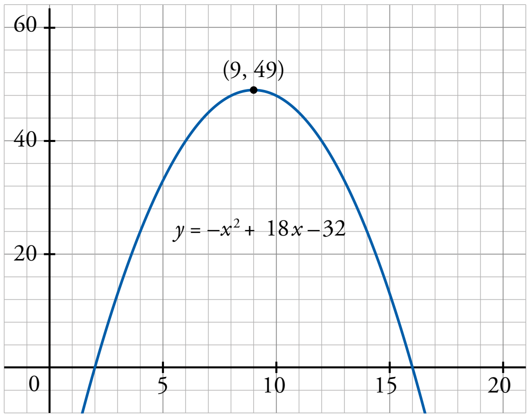
$$-0,5t^2 + 17t = 0,5t^2 - t + 32 \to t^2 - 18t - 32 = 0 \to t = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 128}}{2} = \frac{18 \pm 14}{2} \to t = 2, \ t = 16$$

b) $B(t) = I(t) - C(t) = -t^2 + 18t - 32$

Es una parábola, buscamos su vértice:

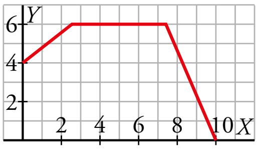
$$b = 18,\ a = -1 \ \rightarrow\ -\frac{b}{2a} = 9 \ \text{ es la abscisa de ese vértice.}$$

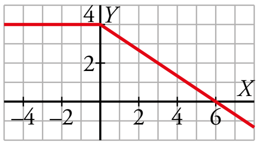
Sustituimos en la ecuación para obtener su ordenada: $B(9) = 49 \ \rightarrow\ V(9, 49)$

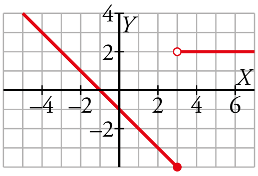


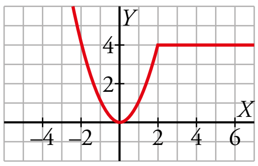
c) El máximo lo alcanza en su vértice al cabo de 9 años, consiguiendo 49 miles de €.

46 **Obtén la expresión analítica de las siguientes funciones:**

a) 

b) 

c) 

d) 

a) Primer trozo: $m = 0{,}8 \ \rightarrow\ y = 0{,}8x + 4$

Segundo trozo: $y = 6$

Tercer trozo: $m = -2{,}4 \ \rightarrow\ y = 0 - 0{,}24\,(x - 10) \ \rightarrow\ y = -2{,}4x + 24$

La función es: $f(x) = \begin{cases} 0{,}8x + 4 & \text{si } \ 0 \le x < 2{,}5 \\ 6 & \text{si } \ 2{,}5 \le x < 7{,}5 \\ -2{,}4x + 24 & \text{si } \ 7{,}5 \le x \le 10 \end{cases}$

b) Primer trozo: $y = 4$

Segundo trozo: $m = -\frac{2}{3} \ \rightarrow\ y = -\frac{2}{3}x + 4$

La función es: $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } \ x < 0 \\ -\frac{2x}{3} + 4 & \text{si } \ 0 \le x \end{cases}$

c) Primer trozo: $m = -1 \ \rightarrow\ y = -x - 1$

Segundo trozo: $y = 2$

La función es: $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } \ x \le 3 \\ 2 & \text{si } \ x > 3 \end{cases}$

d) Primer trozo: $y = x^2$

Segundo trozo: $y = 4$

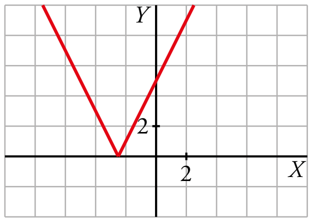
La función es: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } \ x < 2 \\ 4 & \text{si } \ 2 \le x \end{cases}$

47 Representa las siguientes funciones y defínelas como funciones «a trozos»:

a) $y = |2x + 5|$ **b)** $y = |4 - x^2|$ **c)** $y = \left|\dfrac{3x}{2} - 3\right|$ **d)** $y = |-x^2 + 2x + 3|$

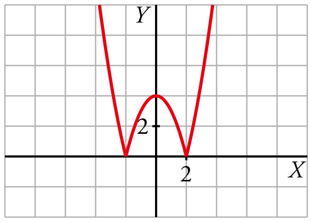
a) $2x + 5 = 0 \ \to\ x = -\dfrac{5}{2}$

$$y = |2x + 5| = \begin{cases} -(2x+5) & \text{si } x < -\dfrac{5}{2} \\ 2x+5 & \text{si } x \ge -\dfrac{5}{2} \end{cases} = \begin{cases} -2x-5 & \text{si } x < -\dfrac{5}{2} \\ 2x+5 & \text{si } x \ge -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$



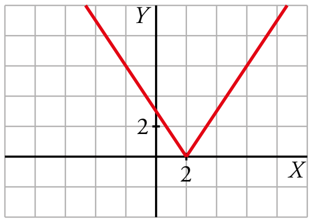
b) $4 - x^2 = 0 \ \to\ x = -2,\ x = 2$

$$y = |4 - x^2| = \begin{cases} -(4-x^2) & \text{si } x < -2 \\ 4-x^2 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ -(4-x^2) & \text{si } 2 \le x \end{cases} = \begin{cases} -4+x^2 & \text{si } x < -2 \\ 4-x^2 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ -4+x^2 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$



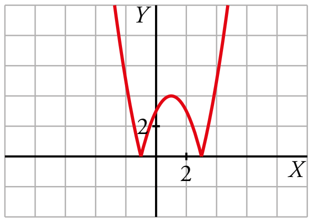
c) $\dfrac{3}{2}x - 3 = 0 \ \to\ x = 2$

$$y = \left|\frac{3}{2}x - 3\right| = \begin{cases} -\left(\dfrac{3}{2}x - 3\right) & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{3}{2}x - 3 & \text{si } 2 \le x \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x + 3 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{3}{2}x - 3 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$



d) $-x^2 + 2x + 3 = 0 \ \to\ x = -1,\ x = 3$

$$y = |-x^2 + 2x + 3| = \begin{cases} -(-x^2+2x+3) & \text{si } x < -1 \\ -x^2+2x+3 & \text{si } -1 \le x < 3 \\ -(-x^2+2x+3) & \text{si } 3 \le x \end{cases} = \begin{cases} x^2-2x-3 & \text{si } x < -1 \\ -x^2+2x+3 & \text{si } -1 \le x < 3 \\ x^2-2x-3 & \text{si } 3 \le x \end{cases}$$



Página 139

Cuestiones teóricas

48 ¿Verdadero o falso?

a) **La función** $y = \sqrt{a - x}$ **no existe si** $a < 0$**.**

b) **Una función no puede cortar al eje** Y **en dos puntos.**

c) **La gráfica de** $y = mx^2 + n$ **es una recta.**

d) **La parábola** $y = 3x^2$ **es más estrecha que** $y = x^2$**.**

e) **El dominio de definición de la función** $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ **es** $(-\infty, +\infty)$**.**

a) Falso. Para que esta función exista, su radicando debe ser mayor o igual que 0. Por tanto:

$a - x \ge 0 \ \to\ x \le a \ \to\ Dom = (-\infty, a]$

La función tiene este dominio de definición al margen del signo de a.

b) Verdadero. Una función toma un único valor de y para cada valor de x. Tomará un único valor cuando $x = 0$ y, por tanto, solo puede cortar en un punto al eje Y.

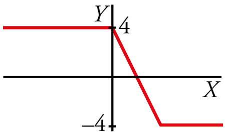
c) Falso. Si $m = 0$, la gráfica sí es una recta paralela al eje X; pero si es $m \ne 0$, su gráfica es una parábola por ser una función cuadrática.

d) Verdadero.

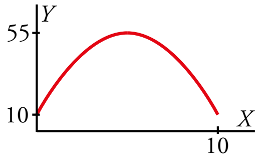
e) Verdadero ya que la raíz cúbica existe siempre, también para valores negativos.

49 ¿Cuál es el dominio de definición y el recorrido de las siguientes funciones?

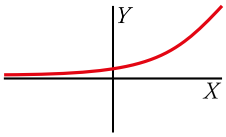
a)



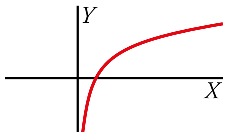
b)



c)



d)



a) $Dom = \mathbb{R}$

$Rec = [-4, 4]$

b) $Dom = [0, 10]$

$Rec = [10, 55]$

c) $Dom = \mathbb{R}$

$Rec = (0, +\infty)$

d) $Dom = (0, +\infty)$

$Rec = \mathbb{R}$

50 ¿Cuántas soluciones puede tener cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones? Justifícalo con ejemplos gráficos.

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax + b \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = ax + b \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ y = ax + b \end{cases}$

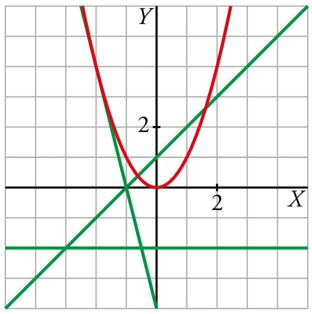
a) Puede tener como máximo dos soluciones, dependiendo de la posición relativa de la parábola y la recta. Es decir, el sistema puede tener 0, 1 o 2 soluciones.

Desde otro punto de vista, la ecuación $x^2 = ax + b$ puede tener 0, 1 o 2 soluciones.

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -2 \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -4x - 4 \end{array}\right\}$ Tiene una solución, $(-2, 4)$.

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x + 1 \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.



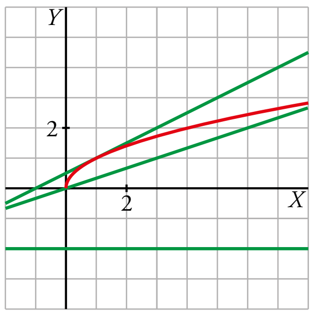
b) Este caso es análogo al anterior. En función de la posición relativa de la semiparábola y la recta, el sistema puede tener 0, 1 o 2 soluciones.

La ecuación $\sqrt{x} = ax + b$ puede tener, como máximo, dos soluciones.

$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = -2 \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = \dfrac{1}{2}(x + 1) \end{array}\right\}$ Tiene una solución, $(1, 1)$.

$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = \dfrac{1}{3}x \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, $(0, 0)$ y $(9, 3)$.



c) El sistema da lugar a una ecuación de segundo grado como podemos ver.

$$\frac{1}{x} = ax + b \rightarrow x(ax + b) = 1 \rightarrow ax^2 + bx - 1 = 0$$

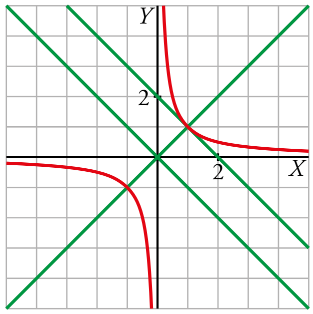
Por tanto, al igual que en los casos anteriores, puede tener, como máximo, dos soluciones.

También puede interpretarse desde el punto de vista de la posición relativa de una hipérbola y una recta.

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x} \\ y = -x \end{array}\right\} \text{No tiene solución.}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x} \\ y = -x + 2 \end{array}\right\} \text{Tiene una solución, } (1, 1).$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x} \\ y = x \end{array}\right\} \text{Tiene dos soluciones, } (1, 1) \text{ y } (-1, -1).$$



Para profundizar

51 **Define por intervalos y representa.**

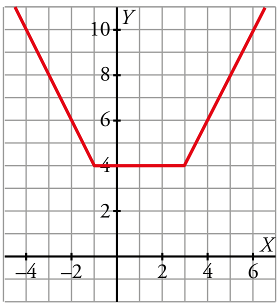
a) $y = |x + 1| + |x - 3|$ **b)** $y = |2x - 4| - |x - 1|$

a) Estudiamos la función en los intervalos cuyos extremos son los puntos donde se anula cada uno de los valores absolutos que se operan.

	$x \le -1$	$-1 \le x \le 3$	$3 \le x$
$\|x + 1\|$	$-x - 1$	$x + 1$	$x + 1$
$\|x - 3\|$	$-x + 3$	$-x + 3$	$x - 3$
$\|x + 1\| + \|x - 3\|$	$-2x + 2$	4	$2x - 2$

Por tanto:

$$y = |x + 1| + |x - 3| = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x \le -1 \\ 4 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ 2x - 2 & \text{si } 3 \le x \end{cases}$$

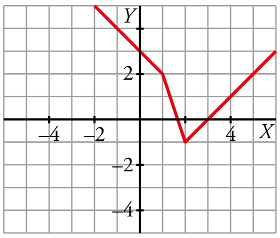


b) Estudiamos la función en los intervalos cuyos extremos son los puntos donde se anula cada uno de los valores absolutos que se operan.

	$x \le 1$	$1 \le x \le 2$	$2 \le x$
$\|2x - 4\|$	$-2x + 4$	$-2x + 4$	$2x - 4$
$\|x - 1\|$	$-x + 1$	$x - 1$	$x - 1$
$\|2x - 4\| - \|x - 1\|$	$-x + 3$	$-3x + 5$	$x - 3$

Por tanto:

$$y = |2x-4| - |x-1| = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x \le 1 \\ -3x+5 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ x-3 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$



52 **Halla el dominio de definición de estas funciones:**

a) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ **b)** $y = \sqrt{\dfrac{x-9}{x}}$

a) Tenemos que resolver la inecuación $\dfrac{x+3}{x-2} \ge 0$ teniendo en cuenta, además, que $x \ne 2$ para que no se produzca una división entre 0 al evaluar la función:

	$(-\infty, -3]$	$[-3, 2)$	$(2, +\infty)$
$x + 3$	–	+	+
$x - 2$	–	–	+
$\dfrac{x+3}{x-2}$	+	–	+

$\dfrac{x+3}{x-2} \ge 0 \rightarrow Dom = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$

b) Análogamente, tenemos que resolver la inecuación $\dfrac{x-9}{x} \ge 0$ tieniendo en cuenta, además, que $x \ne 0$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 9]$	$[9, +\infty)$
$x - 9$	–	–	+
x	–	+	+
$\dfrac{x-9}{x}$	+	–	+

$\dfrac{x-9}{x} \ge 0 \rightarrow Dom = (-\infty, 0) \cup [9, +\infty)$

53 **La evolución mensual del número de personas asociadas de un club, durante un año, viene dada por la función:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x + a & \text{si } 0 \le x \le 6 \\ 50 & \text{si } 6 < x \le 8 \\ x^2 - 20x + 146 & \text{si } 8 < x \le 12 \end{cases} \quad x, \text{ en meses}$$

a) Halla a sabiendo que se fundó con 50 personas asociadas.

b) Representa la función y di en qué mes el número de personas asociadas fue máximo y en qué mes fue mínimo.

c) Si para cubrir gastos el club necesita tener más de 47 personas asociadas, ¿en qué mes tuvo pérdidas?

a) Como el club se fundó con 50 socios, se tiene que $f(0) = 50$. Por tanto, $f(0) = a = 50$.

b) • El primer trozo es una parábola abierta hacia abajo cuyo vértice es:

$$x_0 = \frac{-6}{-2} = 3 \rightarrow f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 50 = 59 \rightarrow (3, 59)$$

Evaluamos en los extremos del intervalo de definición: $f(0) = 50$, $f(6) = 50$

• El segundo trozo es constante, $y = 50$.

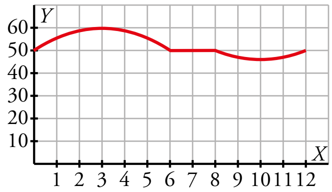
• El tercer trozo es una parábola abierta hacia arriba cuyo vértice es:

$$x_0 = \frac{20}{2} = 10 \rightarrow f(10) = 10^2 - 20 \cdot 10 + 146 = 46 \rightarrow (10, 46)$$

Evaluamos en los extremos del intervalo de definición:

$$f(8) = 8^2 - 20 \cdot 8 + 146 = 50, \ f(12) = 50$$

La gráfica es:



El número de socios fue máximo en el mes número 3, con 59 socios, y mínimo en el mes número 10, con 46 socios.

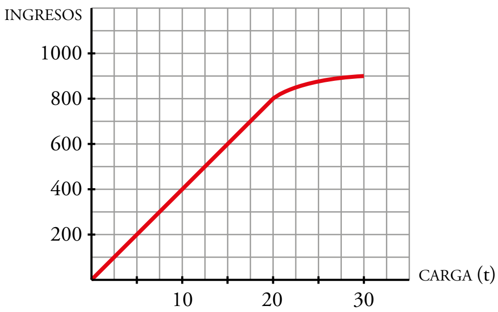
c) Obtuvo pérdidas en el mes número 10.

54 Las tarifas de una empresa de transportes son:

- **40 € por tonelada de carga si esta es menor o igual a 20 t.**
- **Si la carga es mayor que 20 t, se restará, de los 40 €, tantos euros como toneladas sobrepasen las 20.**

Dibuja la función *ingresos de la empresa según la carga que transporte* (carga máxima: 30 t) y obtén la expresión analítica.

a)



b) $f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ [40 - (x - 20)] & \text{si } 20 < x \le 30 \end{cases}$

Es decir:

$$f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ 60x - x^2 & \text{si } 20 < x \le 30 \end{cases}$$

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 3.1. (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 139

1 **Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - x^2$ **b)** $y = \dfrac{3x}{(2x-6)^2}$

c) $y = \sqrt{4-2x}$ **d)** $y = \sqrt{5x - x^2}$

a) Al ser una función polinómica, su dominio es todo $\mathbb{R}$.

b) Su dominio es todo $\mathbb{R}$, salvo los puntos que anulan el denominador.

$(2x-6)^2 = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$

Por tanto: $Dom\ y = \mathbb{R} - \{3\}$

c) Su dominio son los puntos que hacen que el radicando no sea negativo.

$4 - 2x \ge 0 \rightarrow 2x \le 4 \rightarrow x \le \dfrac{4}{2} = 2$

Por tanto: $Dom\ y = (-\infty, 2]$

d) Al igual que en el apartado anterior:

$5x - x^2 \ge 0 \rightarrow x(5-x) \ge 0$

Esto ocurre si:

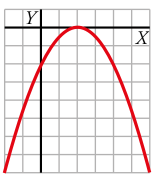
- $x \ge 0$ y $5 - x \ge 0 \rightarrow x \ge 0$ y $x \le 5 \rightarrow x \in [0, 5]$
- $x \ge 0$ y $5 - x \le 0 \rightarrow x \le 0$ y $x \ge 5 \rightarrow$ Esto no es posible.

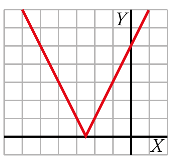
Por tanto: $Dom\ y = [0, 5]$

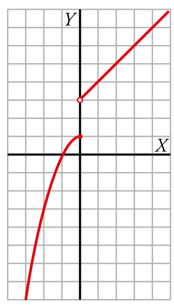
2 **Representa las siguientes funciones:**

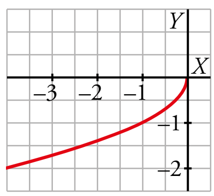
a) $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x - 2$ **b)** $f(x) = |5 + 2x|$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **d)** $f(x) = -\sqrt{-x}$

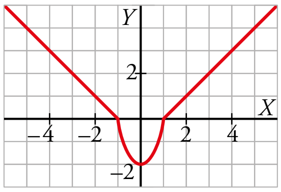
a)


b)


c)


d)


3 **Determina la expresión analítica de esta función definida en el intervalo [–6, 6]. ¿Cuál es su recorrido?**



Definimos la función a trozos:

- $x \in [-6, -1]$: debemos encontrar la recta que pasa por $P(-1, 0)$ y $Q(-2, 1)$, con vector $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1) \to y = -x - 1$.
- $x \in (-1, 1)$: partimos de la parábola $y - b = k(x - a)^2$ donde $(a, b) = (0, -2)$ es el vértice $\to$ $\to y + 2 = kx^2$

  Además, sabemos que pasa por el punto $P(1, 0)$: $2 = k \to y + 2 = 2x^2$
- $x \in [1, 6]$: debemos encontrar la recta que pasa por $P(1, 0)$ y $Q(2, 1)$, con vector $\overrightarrow{PQ} = (1, 1) \to y = x - 1$.

  Su recorrido son los valores que toma la ordenada:

  $Rec = [-2, 5]$

4 **Asistir a un gimnasio durante 6 meses nos cuesta 246 €. Si asistimos 15 meses, el precio es 570 €. ¿Cuánto tendremos que pagar si queremos ir durante un año?**

Vamos a hacer una interpolación lineal. Hallamos la recta que pasa por los puntos (6, 246) y (15, 570).

Su pendiente es $m = \dfrac{570 - 246}{15 - 6} = \dfrac{324}{9} = 36$

Por tanto, la ecuación de la recta es:

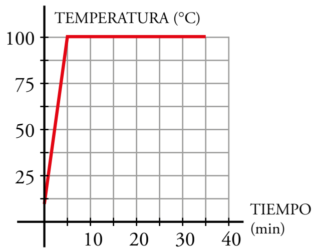
$$y = 36(x - 6) + 246 \to y = 36x + 30$$

De este modo, si queremos saber cuánto se debe pagar si vamos al gimnasio durante un año (12 meses), hacemos:

$$y(12) = 36 \cdot 12 + 30 = 462$$

Habrá que pagar 462 €.

5 **Ponemos al fuego un cazo con agua a 10 °C. En 5 minutos alcanza 100 °C y se mantiene así durante media hora, hasta que el agua se evapora totalmente. Representa la función que describe este fenómeno y halla su expresión analítica.**



- La gráfica pasa por los puntos (0, 10) y (5, 100).
- Hallamos la ecuación de esta recta:

  Pendiente: $\dfrac{100 - 10}{5 - 0} = 18 \to y = 18(x - 0) + 10$
- Para valores de x mayores que 5, la temperatura se mantiene constante $\to y = 100$

  Expresión analítica: $f(x) = \begin{cases} 18x + 10 & \text{si } 0 \le x < 5 \\ 100 & \text{si } 5 \le x \le 35 \end{cases}$

6 **El precio de venta de un artículo viene dado por la expresión $p = 12 - 0{,}01x$ (x = número de artículos fabricados; p = precio, en cientos de euros).**

a) Si se venden 500 artículos, ¿cuáles serán los ingresos?

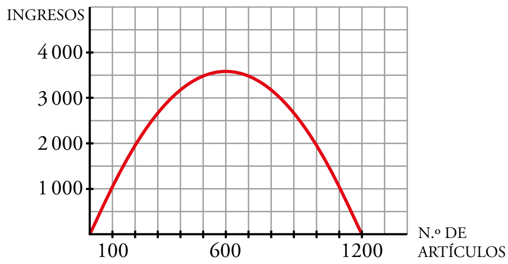
b) Representa la función *número de artículos-ingresos*.

c) ¿Cuántos artículos se deben fabricar para que los ingresos sean máximos?

a) Si se venden 500 artículos, su precio será:

$p(500) = 12 - 0{,}01 \cdot 500 = 7$ cientos de euros $\rightarrow$ Ingresos $= 500 \cdot 700 = 350\,000$ €

b) $I(x) = p \cdot x = 12x - 0{,}01x^2$



c) Hallamos el vértice de la parábola:

$$\begin{cases} x = \dfrac{12}{-0{,}02} = 600 \text{ artículos} \\ y = 12 \cdot 600 - 0{,}01 \cdot 600^2 = 3\,600 \text{ cientos de euros} \end{cases}$$

Deben fabricar 600 artículos para obtener unos ingresos máximos (360 000 euros).

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

5 FUNCIONES II

1 TRANSFORMACIONES ELEMENTALES DE FUNCIONES

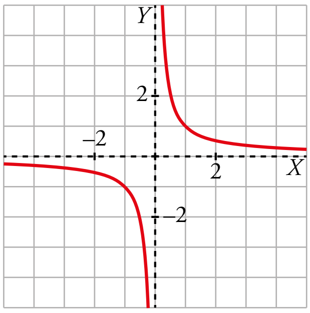
C.E.: CE 3.1. (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.)

Página 142

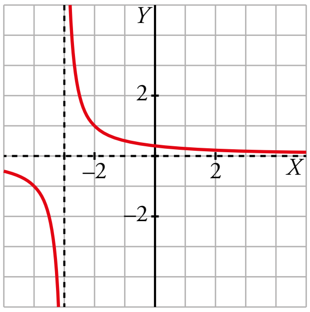
1 **Representa sucesivamente.**

a) $y = \dfrac{1}{x}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x+3}$ **c)** $y = -\dfrac{1}{x+3}$ **d)** $y = -\dfrac{1}{x+3} + 8$

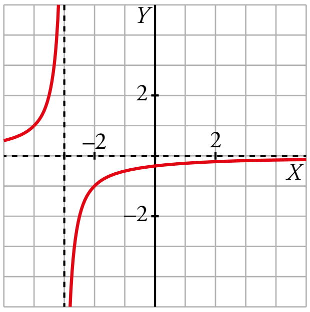
a)



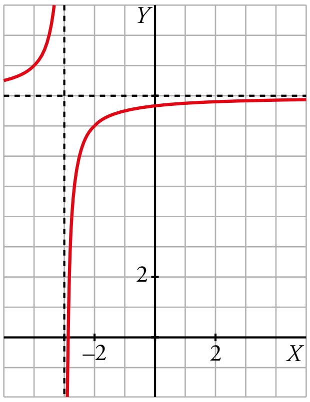
b) Se obtiene desplazando la gráfica anterior tres unidades a la izquierda.



c) Es la simétrica de la anterior respecto del eje X.



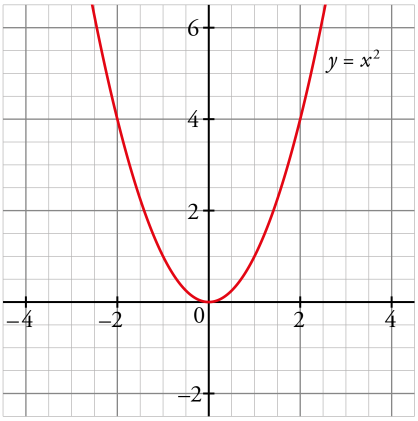
d) Es igual a la anterior trasladándola 8 unidades hacia arriba.



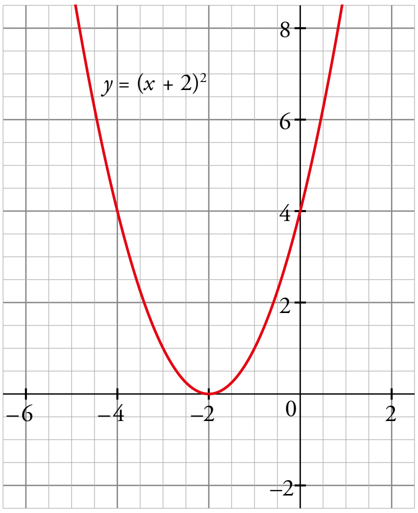
2 **Representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes funciones:**

a) $y = x^2$ **b)** $y = (x + 2)^2$ **c)** $y = (x - 3)^2 + 1$ **d)** $y = (x + 1)^2 - 3$

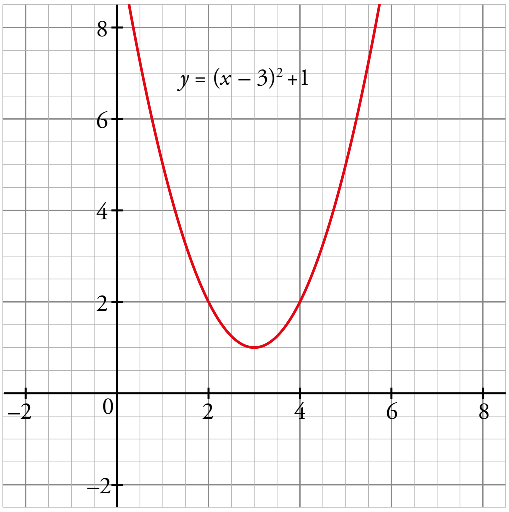
a)



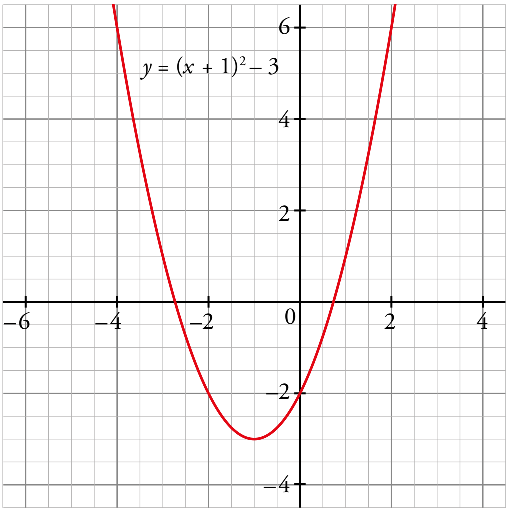
b) A partir de la gráfica de $y = x^2$ trasladamos 2 unidades a la izquierda.



c) A partir de la gráfica de $y = x^2$ trasladamos 3 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba.



d) A partir de la gráfica de $y = x^2$ trasladamos 1 unidad a la izquierda y 3 hacia abajo.



Página 143

3 Si $y = f(x)$ pasa por (3, 8), di un punto de:

$y = f(x) - 6$, $y = f(x + 4)$, $y = \frac{1}{2}f(x)$, $y = 2f(x)$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = -2f(-x) + 3$

$y = f(x) - 6 \rightarrow (3, 2)$ $\quad y = f(x + 4) \rightarrow (-1, 8)$ $\quad y = \frac{1}{2}f(x) \rightarrow (3, 4)$

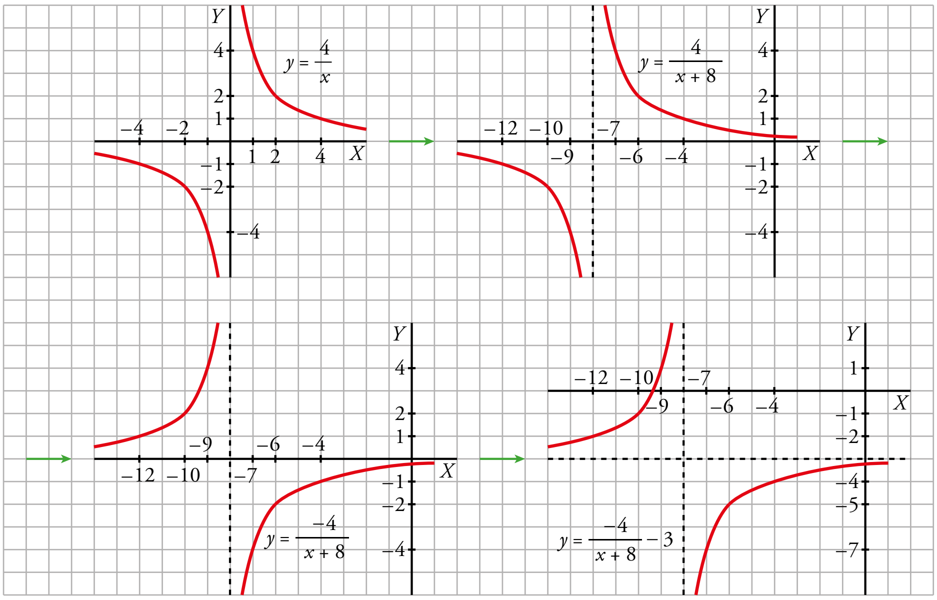
$y = 2f(x) \rightarrow (3, 16)$ $\quad y = -f(x) \rightarrow (3, -8)$ $\quad y = f(-x) \rightarrow (-3, 8)$

$y = -2f(-x) + 3 \rightarrow (-3, -13)$

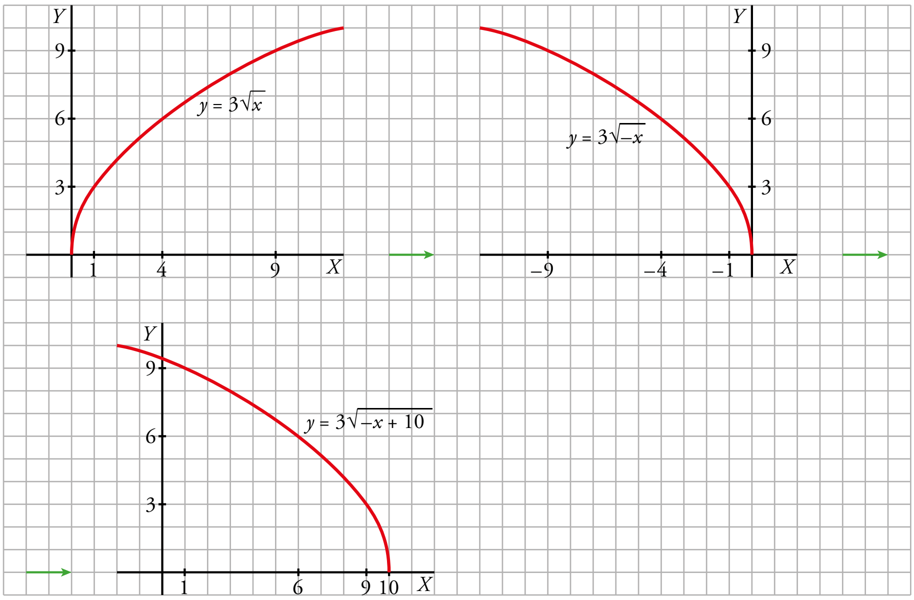
4 **Representa.**

a) $y = -\dfrac{4}{x+8} - 3$ **b)** $y = 3\sqrt{-x+10}$

a) Representamos $y = \dfrac{4}{x} \rightarrow y = \dfrac{4}{x+8} \rightarrow y = -\dfrac{4}{x+8} \rightarrow y = -\dfrac{4}{x+8} - 3$



b) Representamos $y = 3\sqrt{x} \rightarrow y = 3\sqrt{-x} \rightarrow y = 3\sqrt{-(x-10)}$



2 ▸ COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

C.E.: CE 3.1. (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.)

Página 145

1 **Si $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = x^2$, obtén las expresiones de $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$. Halla $f[g(4)]$ y $g[f(4)]$.**

$f[g(x)] = f[x^2] = x^4 - 5x^2 + 3$

$g[f(x)] = g[x^2 - 5x + 3] = (x^2 - 5x + 3)^2 = x^4 - 10x^3 + 31x^2 - 30x + 9$

$f[g(4)] = 179; \; g[f(4)] = 1$

2 **Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 4$, obtén las expresiones de $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$. Halla el valor de estas funciones en $x = 0$ y $x = 5$.**

$f \circ g(x) = f(x + 4) = \sqrt{x+4}$

$g \circ f(x) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{x} + 4$

$f \circ f(x) = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$

$g \circ g(x) = g(x + 4) = x + 4 + 4 = x + 8$

$f \circ g(0) = \sqrt{4} = 2$ $\quad$ $f \circ g(5) = \sqrt{5+4} = 3$

$g \circ f(0) = 4$ $\quad$ $g \circ f(5) = \sqrt{5} + 4$

$f \circ f(0) = 0$ $\quad$ $f \circ f(5) = \sqrt[4]{5}$

$g \circ g(0) = 8$ $\quad$ $g \circ g(5) = 13$

3 **Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^2 + 5$, halla $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$. Halla el valor de estas funciones en $x = 1$ y $x = 2$.**

$f[g(x)] = f(x^2 + 5) = \dfrac{1}{x^2+5}; \; f[g(1)] = \dfrac{1}{6}; \; f[g(2)] = \dfrac{1}{9}$

$g[f(x)] = g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + 5 = \dfrac{1}{x^2} + 5; \; g[f(1)] = 6; \; g[f(2)] = \dfrac{1}{4} + 5 = \dfrac{21}{4}$

$f[f(x)] = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{1/x} = x; \; f[f(1)] = 1; \; f[f(2)] = 2$

$g[g(x)] = g(x^2 + 5) = (x^2 + 5)^2 + 5 = x^4 + 10x^2 + 30; \; g[g(1)] = 41; \; g[g(2)] = 86$

4 **Dado $f(x) = x + 1$, obtén en cada caso la función $g(x)$ para que se cumpla:**

a) $g[f(x)] = x - 2$ $\quad$ **b) $f[g(x)] = x^2 + 3x - 2$**

c) $g \circ f(x) = x^2 + 2x$ $\quad$ **d) $f \circ g(x) = x$**

a) $g(x) = x - 3 \;\to\; g(f(x)) = g(x + 1) = x + 1 - 3 = x - 2$

b) $g(x) = x^2 + 3x - 3 \;\to\; f(g(x)) = f(x^2 + 3x - 3) = x^2 + 3x - 3 + 1 = x^2 + 3x - 2$

c) $g(x) = x^2 - 1 \;\to\; g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 - 1 = x^2 + 2x$

d) $g(x) = x - 1 \;\to\; f(g(x)) = f(x - 1) = x - 1 + 1 = x$

3 ▶ FUNCIÓN INVERSA O RECÍPROCA DE OTRA

C.E.: CE 1.4. (EA 1.4.1.-EA 1.4.2.) **CE1.6.** (EA 1.6.1-EA 1.6.2.-EA 1.6.3.-EA 1.6.4.-EA 1.6.5.-EA 1.6.6.) **CE 3.1.** (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.)

Página 146

1 **[Este ejercicio requiere la comprensión de las afirmaciones y trabajar la destreza comprensión escrita de esta clave].**

¿Verdadero o falso?

a) La función recíproca de $y = x$ es $y = \dfrac{1}{x}$.

b) Cada una de las funciones $y = x$, $y = \dfrac{1}{x}$ es recíproca de sí misma.

c) La inversa de $y = \dfrac{9}{x}$, $x \in [3, 9]$ es $y = \dfrac{9}{x}$, $x \in [1, 3]$.

d) Si una función es creciente, su recíproca es decreciente.

a) Falso. Las gráficas de esas funciones no son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante, puesto que una es recta y la otra es curva.

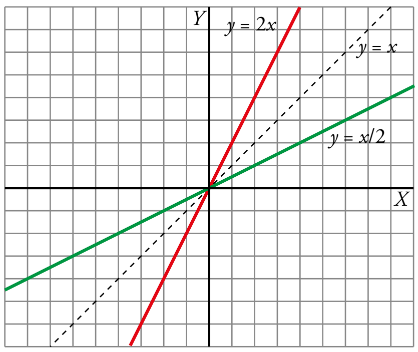
b) Verdadero. Si $f(x) = x$ y calculamos $f \circ f(x) = f[f(x)] = f(x) = x$, vemos que f es recíproca de sí misma.

Análogamente, si $g(x) = \dfrac{1}{x}$ y calculamos $g \circ g(x) = g[g(x)] = g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{1/x} = x$, vemos que g es recíproca de sí misma.

c) Verdadero. Podemos comprobarlo en el gráfico. La gráfica verde es simétrica, respecto de la bisectriz del primer cuadrante, de la gráfica roja.

d) Falso. Por ejemplo, la recíproca de la función $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, es la función $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, y ambas son crecientes.

2 **Representa $y = 2x$, $y = \dfrac{x}{2}$ y comprueba que son inversas.**



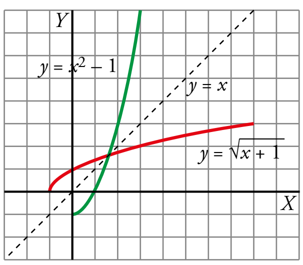
3 **[El análisis de las ramas en las que hay que descomponer la función requiere que el alumnado trabaje la innovación (dimensión productiva de esta clave)].**

Comprueba que hay que descomponer $y = x^2 - 1$ en dos ramas para hallar sus inversas.

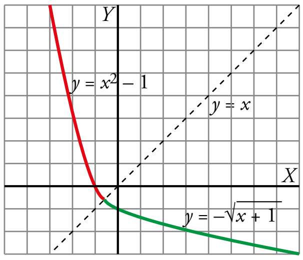
Averigua cuáles son.

- $y = x^2 - 1$ si $x \geq 0$

  $y^{-1} = \sqrt{x+1}$



- $y = x^2 - 1$ si $x < 0$
  $y^{-1} = -\sqrt{x+1}$



4 **Comprueba que la función recíproca de $y = 2x + 4$ es $y = \frac{1}{2}x - 2$.**

Llamemos $f(x) = 2x + 4$ y $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 2\left(\frac{1}{2}x - 2\right) + 4 = x$$

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2x + 4) = \frac{1}{2}(2x + 4) - 2 = x$$

Luego $g = f^{-1}$.

Página 147

5 **Halla la expresión analítica de la función inversa de:**

a) $f(x) = \frac{x-5}{2}$, $x \in [3, 13]$ **b)** $g(x) = \frac{2-x}{3}$, $x \in [-7, 14]$

a) $y = \frac{x-5}{2} \to x = \frac{y-5}{2} \to y = 2x + 5$

$f(3) = \frac{3-5}{2} = -1$; $f(13) = \frac{13-5}{2} = 4$

Por tanto, $f^{-1}(x) = 2x + 5$, $x \in [-1, 4]$

b) $y = \frac{2-x}{3} \to x = \frac{2-y}{3} \to y = 2 - 3x$

$g(-7) = \frac{2-(-7)}{3} = 3$; $g(14) = \frac{2-14}{3} = -4$

Por tanto, $g^{-1}(x) = 2 - 3x$, $x \in [-4, 3]$

6 **La función $y = x^2 - 2x$ tiene dos ramas: una decreciente para $x \le 1$, y otra creciente para $x \ge 1$. Exprésala como dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ y halla la función inversa de cada una de ellas.**

$$\left.\begin{array}{l} y = f_1(x) = x^2 - 2x,\ x \le 1 \\ y = f_2(x) = x^2 - 2x,\ x \ge 1 \end{array}\right\} f_1(1) = f_2(1) = -1$$

Ahora calculamos sus inversas:

$$y = x^2 - 2x \to x = y^2 - 2y \to y^2 - 2y - x = 0 \to y = \frac{2 \pm \sqrt{4+4x}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+x}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+x}$$

Por tanto:

- La inversa de $y = f_1(x) = x^2 - 2x$, $x \le 1$ es $y = 1 - \sqrt{1+x}$, $x \ge -1$
- La inversa de $y = f_2(x) = x^2 - 2x$, $x \ge 1$ es $y = 1 + \sqrt{1+x}$, $x \ge -1$

4 FUNCIONES EXPONENCIALES

C.E.: CE 1.4. (EA 1.4.1.-EA 1.4.2.) **CE 1.5.** (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.) **CE1.6.** (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.-EA 1.6.3.-EA 1.6.4.-EA 1.6.5.-EA 1.6.6.)
CE 3.1. (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.)

Página 149

1 **La masa de madera de un bosque aumenta en un 40 % cada 100 años. Si tomamos como unidad de masa vegetal (biomasa) la que había en el año 1800, que consideramos instante de partida, y como unidad de tiempo 100 años, la función $M = 1{,}4^t$ nos da la cantidad de masa vegetal, M, en un instante cualquiera, t, expresado en *siglos a partir de 1800* (razona por qué).**

a) Averigua cuándo habrá una masa de madera triple que en 1800 $(1{,}4^t = 3)$ y cuándo había la tercera parte. Observa que los dos periodos de tiempo son iguales.

b) Calcula la cantidad de madera que había en 1900, 1990, 2000, 1600 y 1550.

$M = 1{,}4^t$

a) • Buscamos el valor de t para el cual $1{,}4^t = 3$:

$$1{,}4^t = 3 \rightarrow ln\,(1{,}4)^t = ln\,(3) \rightarrow t\,ln\,(1{,}4) = ln\,(3) \rightarrow t = \frac{ln\,3}{ln\,1{,}4} \approx 3{,}27$$

Cuando pasen $3{,}27 \cdot 100 = 327$ años, se habrá triplicado la masa de madera. Esto es, en el año $1800 + 327 = 2127$.

• Buscamos el valor de t para el cual $1{,}4^t = \frac{1}{3} = 3^{-1}$:

$$1{,}4^t = 3^{-1} \rightarrow ln\,(1{,}4)^t = ln\,(3)^{-1} \rightarrow t\,ln\,(1{,}4) = -ln\,(3) \rightarrow t = -\frac{ln\,3}{ln\,1{,}4} \approx -3{,}27$$

Hace $3{,}27 \cdot 100 = 327$ años, había la tercera parte de masa de madera. Esto es, en el año $1800 - 327 = 1473$.

b) $1900 \rightarrow t = 1 \rightarrow M = 1{,}4^1 = 1{,}4$

$$1990 \rightarrow t = \frac{1990 - 1800}{100} = 1{,}9 \rightarrow M = 1{,}4^{1{,}9} \approx 1{,}90$$

$$2000 \rightarrow t = \frac{2000 - 1800}{100} = 2 \rightarrow M = 1{,}4^2 = 1{,}96$$

$$1600 \rightarrow t = \frac{1600 - 1800}{100} = -2 \rightarrow M = 1{,}4^{-2} \approx 0{,}51$$

$$1550 \rightarrow t = \frac{1550 - 1800}{100} = -2{,}5 \rightarrow M = 1{,}4^{-2{,}5} \approx 0{,}43$$

2 **Comprueba que, en el ejemplo anterior referente a la desintegración de una cierta sustancia radiactiva, $M = m \cdot 0{,}76^t$ (t expresado en miles de años), el *periodo de semidesintegración* (tiempo que tarda en reducirse a la mitad la sustancia radiactiva) es de, aproximadamente, 2 500 años.**

Para ello, comprueba que una cantidad inicial cualquier se reduce a la mitad al cabo de unos 2 500 años $(t = 2{,}5)$.

$M = m \cdot 0{,}76^t$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } t = 0 \rightarrow M = m \cdot 0{,}76^0 = m \\ \text{Si } t = 0{,}25 \rightarrow M = m \cdot 0{,}76^{2{,}5} \approx m \cdot 0{,}5 = \dfrac{m}{2} \end{array}\right\}$$

La cantidad inicial se ha reducido (aproximadamente) a la mitad en 2 500 años.

5 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

C.E.: CE 1.4. (EA 1.4.1.-EA 1.4.2.) CE 3.1. (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.)

Página 150

1 ¿Verdadero o falso?

La función recíproca de $y = 2^x$, $x > 0$ es $y = log_2 x$, $x > 1$.

Falso. La función recíproca de $y = 2^x$, $x > 0$ es $y = log_2 x$, $x > 0$.

2 Halla la función recíproca de:

$$y = log_2 x, \quad x \in [8, 32]$$

La función recíproca es $y = 2^x$, $x \in [3, 5]$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 155

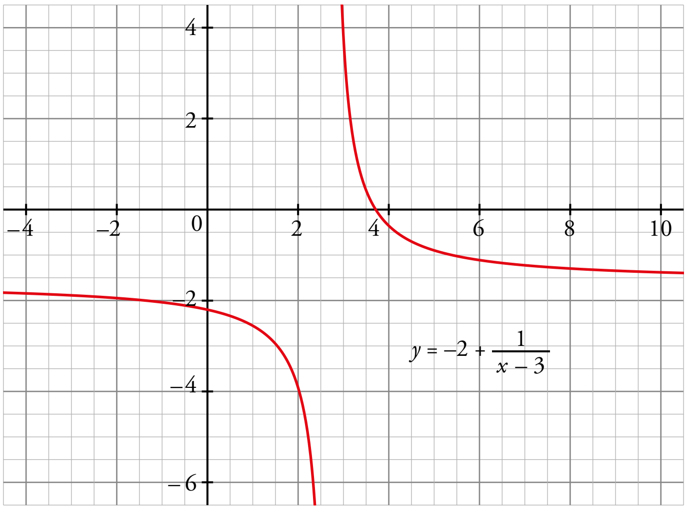
Hazlo tú

2. Representación de hipérbolas

- **Representa la función** $\boldsymbol{y = \dfrac{-2x+7}{x-3}}$**.**

$\dfrac{-2x+7}{x-3} = \dfrac{-2(x-3)+1}{x-3} = -2 + \dfrac{1}{x-3}$

Partiendo de la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ debemos trasladar 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo:



3. Transformar una función

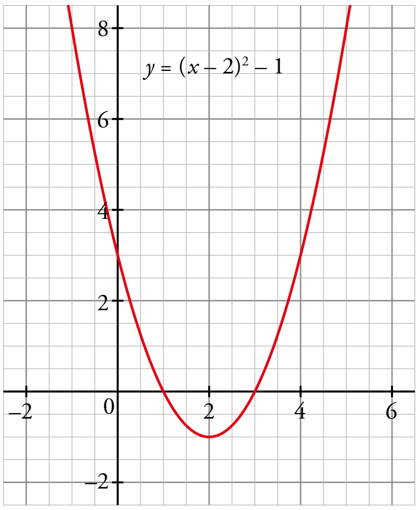
- **¿Qué transformaciones hemos de hacer en la gráfica de** $\boldsymbol{y = x^2}$ **para representar** $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x + 3}$**?**

Debemos escribir la función en la forma $f(x) = a(x - m)^2 + p$.

Para ello separamos los términos en x y completamos el cuadrado de una suma o diferencia:

$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 3 = (x - 2)^2 - 1$

Por lo tanto a partir de la gráfica de x^2 trasladamos 2 unidades a la derecha y una hacia abajo.



Página 156

Hazlo tú

4. Composición de funciones y función inversa

- **Halla $g \circ f$ y $f \circ g$, siendo:**

$$f(x) = 3x^2 - 5 \ \text{ y } \ g(x) = \sqrt{2^{x-1}}$$

$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(3x^2 - 5) = \sqrt{2^{3x^2-5-1}} = \sqrt{2^{3x^2-6}}$

$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{2^{x-1}}) = 3\sqrt{2^{x-1}}^2 - 5 = 3 \cdot 2^{x-1} - 5$

5. Reconocer funciones compuestas

- **A partir de las funciones f, g, h aquí definidas, obtén:**

a) $q(x) = \sqrt{(1+2^x)^2+1}$

b) $r(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

a) $q(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(1 + 2^x) = \sqrt{(1+2^x)^2+1}$

b) $r(x) = (h \circ g)(x) = h[g(x)] = h\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = \dfrac{1}{x^2+1}$

6. Función inversa de otra

- **Obtén la función inversa de:**

a) $p(x) = 3^{x-2}$

b) $q(x) = log_2 (x + 1)$

c) $r(x) = \dfrac{2}{x+4}$

a) $y = 3^{x-2} \to x = 3^{y-2} \to log_3 x = y - 2 \to y = 2 + log_3 x \to p^{-1}(x) = 2 + log_3 x$

b) $y = log_2 (x + 1) \to x = log_2 (y + 1) \to 2^x = y + 1 \to y = 2^x - 1 \to q^{-1}(x) = 2^x - 1$

c) $y = \dfrac{2}{x+4} \to x = \dfrac{2}{y+4} \to y + 4 = \dfrac{2}{x} \to y = \dfrac{2}{x} - 4 \to r^{-1}(x) = \dfrac{2-4x}{x}$

Página 157

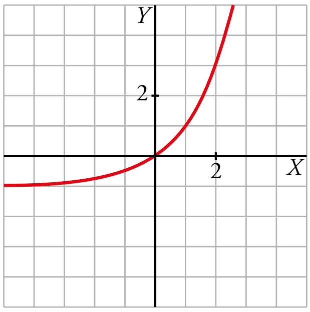
Hazlo tú

7. Gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas

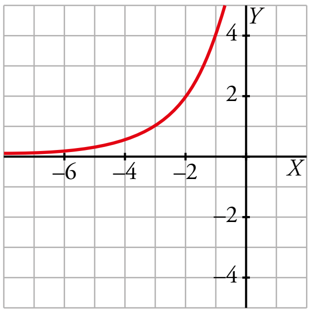
- **Representa:**

a) $y = 2^x - 1$ **b)** $y = 2^{x+3}$ **c)** $y = log_2\,(x - 2)$ **d)** $y = log_2\,(-x)$

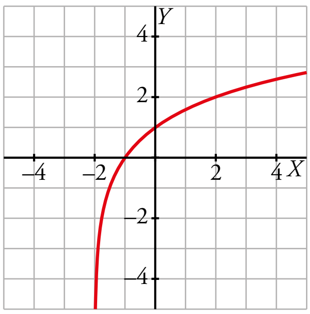
a) Se obtiene desplazando $y = 2^x$ una unidad hacia abajo.



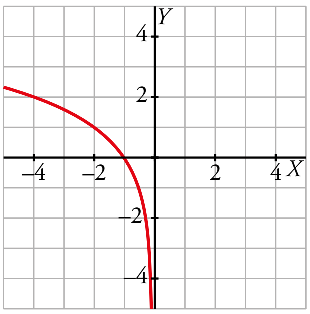
b) Se obtiene desplazando $y = 2^x$ tres unidades hacia la izquierda.



c) Se obtiene trasladando la función $y = log_2\, x$ dos unidades a la izquierda.



d) Es la simétrica de la función $y = log_2\, x$ respecto del eje Y.



9. Función logarítmica

- **Halla a y b para que la gráfica de la función $y = -2 + log_b\,(x + a)$ pase por (1, 0) y (–1, –1).**

  • Pasa por (1, 0) $\rightarrow$ $0 = -2 + log_b\,(1 + a)$ $\rightarrow$ $log_b\,(1 + a) = 2$ $\rightarrow$ $1 + a = b^2$

  • Pasa por (–1, –1) $\rightarrow$ $-1 = -2 + log_b\,(-1 + a)$ $\rightarrow$ $log_b\,(-1 + a) = 1$ $\rightarrow$ $-1 + a = b$

  Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a = b^2 - 1 \\ a = b + 1 \end{array}\right\} \rightarrow b^2 - 1 = b + 1 \rightarrow b^2 - b - 2 = 0 \rightarrow b = -1,\ b = 2$$

  El resultado $b = -1$ no tiene sentido porque la base de un logaritmo no puede ser negativa.

  Si $b = 2$ $\rightarrow$ $a = 3$ $\rightarrow$ La función es $y = -2 + log_2\,(x + 3)$.

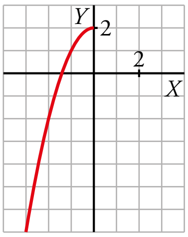
EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 1.12. (EA 1.12.1.-EA 1.12.2.)

Página 158

1. Función inversa

- **Esta es la gráfica de la función: $f(x) = 2 - x^2,\ x \le 0$**



a) Dar su dominio de definición y su recorrido.

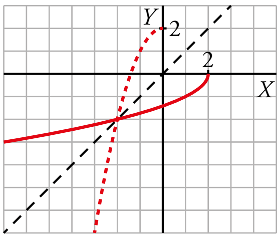
b) Representar su función inversa.

c) Hallar la expresión analítica de $f^{-1}(x)$.

a) Dominio de $f = (-\infty, 0]$

Recorrido de $f = (-\infty, 2]$

b)



c) $y = 2 - x^2 \rightarrow x = 2 - y^2 \rightarrow y^2 = 2 - x \rightarrow y = \pm\sqrt{2 - x}$

$f^{-1}(x) = -\sqrt{2 - x},\ x \le 2$

2. Interés compuesto

- **Depositamos en un banco 5 000 € al 4,8 % anual con pago trimestral de intereses.**

a) ¿Cuál será el capital acumulado al cabo de 3 años?

b) Escribir la función que nos dice en cuánto se transforma ese capital al cabo de t años.

a) $i = \dfrac{4,8}{100} \rightarrow i_t = \dfrac{4,8}{400} = 0{,}012 \rightarrow$ Índice de variación trimestral $= 1 + 0{,}012 = 1{,}012$

Como 3 años son 12 trimestres, $C_{final} = 5\,000 \cdot 1{,}012^{12} = 5\,769{,}50$ €

b) Como t años tienen $4t$ trimestres, la función que nos da el capital final es:

$f(t) = 1\,000 \cdot 1{,}012^{4t} = 1\,000 \cdot (1{,}012^4)^t = 1\,000 \cdot 1{,}049^t$

3. Depreciación

- **Una máquina que costó 20 000 € se deprecia a un ritmo del 10 % anual.**

  a) ¿Cuál será su valor dentro de 4 años?

  b) ¿Cuántos años tienen que pasar para que su valor sea de 12 000 €?

  c) Escribir la función que da el número de años que deben pasar para llegar a un valor *x*.

a) El índice de variación de una depreciación del 10 % es $1 - \frac{10}{100} = 0{,}9$.

Al cabo de 4 años el valor será $5\,000 \cdot 0{,}9^4 = 3\,280{,}50$ €.

b) La función que nos da el valor depreciado es $f(t) = 5\,000 \cdot 0{,}9^t$.

Ahora resolvemos la ecuación:

$12\,000 = 20\,000 \cdot 0{,}9^t \rightarrow \frac{12\,000}{20\,000} = 0{,}9^t \rightarrow 0{,}6 = 0{,}9^t \rightarrow \log 0{,}6 = t\log 0{,}9 \rightarrow t = \frac{\log 0{,}6}{\log 0{,}9} = 4{,}85$

Por tanto, tienen que pasar 5 años.

c) $x = 20\,000 \cdot 0{,}9^t \rightarrow \frac{x}{20\,000} = 0{,}9^t \rightarrow \log \frac{x}{20\,000} = t \log 0{,}9 \rightarrow t = \frac{\log \frac{x}{20\,000}}{\log 0{,}9} \rightarrow t = \frac{\log x - \log 20\,000}{\log 0{,}9}$

4. Función logística

- **La función**

$$f(x) = \frac{12\,000}{1 + 499\,(1{,}09^{-x})}$$

da las ventas totales de un videojuego *x* días después de su lanzamiento. ¿En qué día se llegó a 6 000 juegos vendidos?

Tenemos que hallar el valor de x tal que:

$\frac{12\,000}{1 + 499\,(1{,}09^{-x})} = 6\,000 \rightarrow \frac{12\,000}{6\,000} = 1 + 499(1{,}09^{-x}) \rightarrow 2 - 1 = 499(1{,}09^{-x}) \rightarrow \frac{1}{499} = 1{,}09^{-x}$

Tomando logaritmos y despejando:

$$\frac{\log 499}{\log 1{,}09} = x \rightarrow x = 72 \text{ días}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

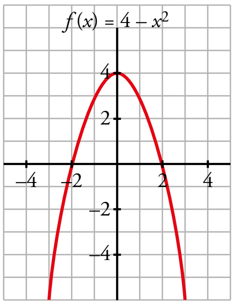
Página 159

Para practicar

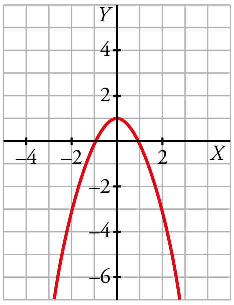
Transformaciones de una función

1 **Representa $f(x) = 4 - x^2$ y, a partir de ella, representa las siguientes funciones:**

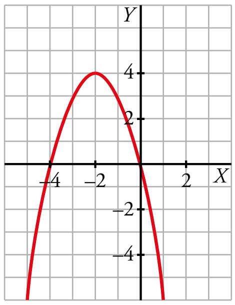
a) $y = f(x) - 3$ **b)** $y = f(x + 2)$ **c)** $y = |f(x)|$



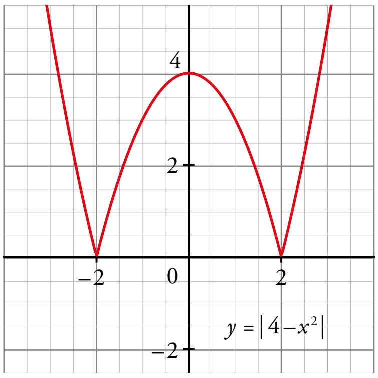
a)



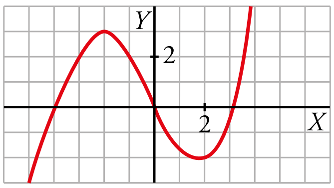
b)



c) La función no toma valores negativos:



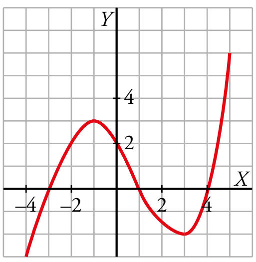
2 **Esta es la gráfica de la función $y = f(x)$:**



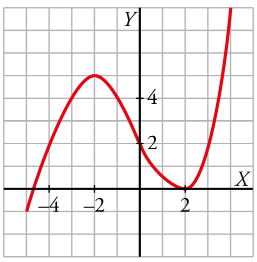
Representa, a partir de ella, las funciones:

a) $y = f(x - 1)$ **b)** $y = f(x) + 2$ **c)** $y = |f(x)|$

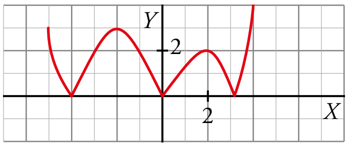
a)



b)



c) La función no toma valores negativos:



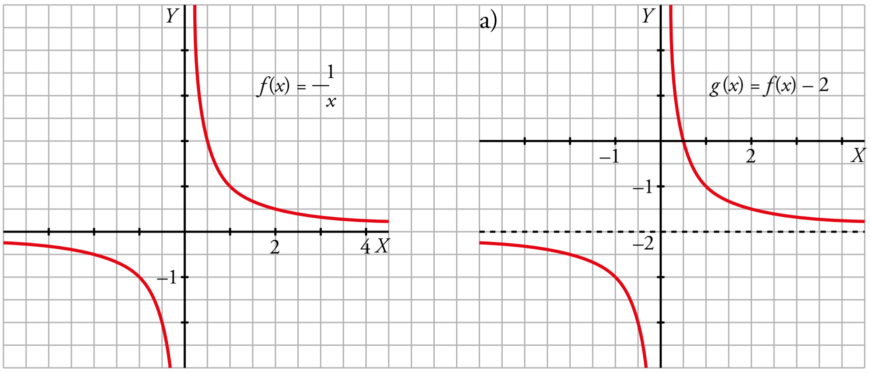
3 **A partir de la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, representa:**

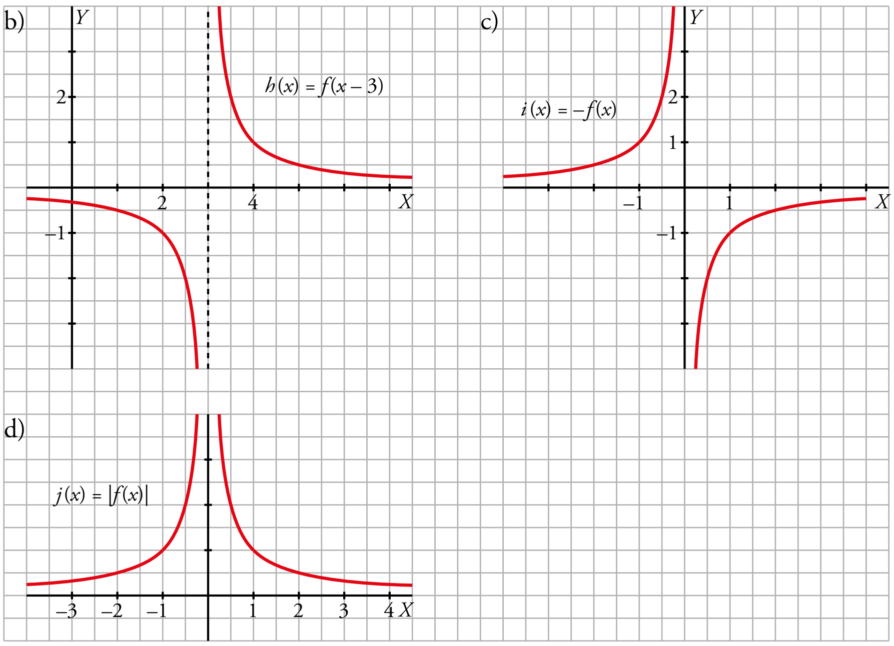
a) $g(x) = f(x) - 2$

b) $h(x) = f(x - 3)$

c) $i(x) = -f(x)$

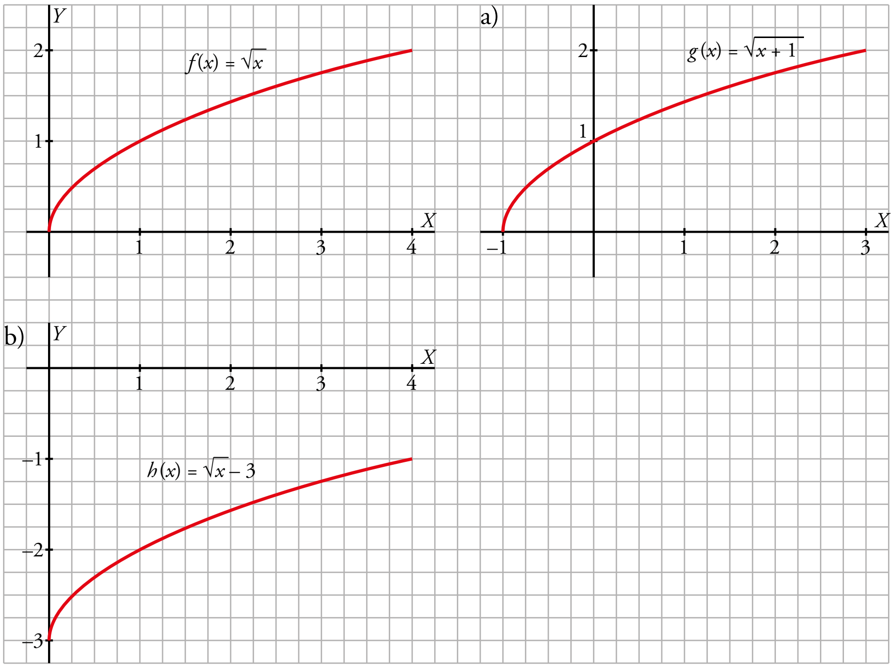
d) $j(x) = |f(x)|$





4 **Representa la función $\sqrt{x}$ y dibuja a partir de ella las siguientes funciones:**

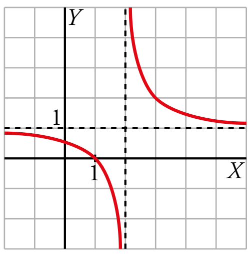
a) $g(x) = f(x + 1)$ **b)** $h(x) = f(x) - 3$ **c)** $j(x) = |f(x)|$



c) Es la misma gráfica que $f(x) = \sqrt{x}$ ya que $f(x)$ es siempre positiva.

5 **La expresión analítica de esta función es del tipo** $y = \dfrac{1}{x - a} + b$.

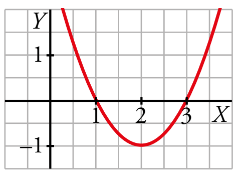
Observa la gráfica y di el valor de a **y** b.



Es la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ desplazada 2 unidades a la derecha y 1 hacia arriba por tanto: $a = 2$, $b = 1$

6 **La ecuación de esta gráfica es del tipo** $y = (x - m)^2 + p$.

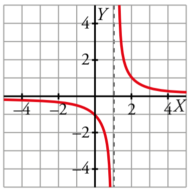
Obsérvala y di el valor de m **y** p.

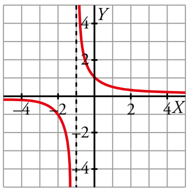


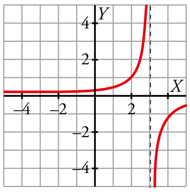
La gráfica $y = x^2$ está desplazada 2 unidades a la derecha y 1 hacia abajo por tanto: $m = 2$, $p = -1$

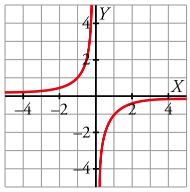
7 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{1}{x-1}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x+1}$ **c)** $y = \dfrac{-1}{x-3}$ **d)** $y = \dfrac{1}{x} + 2$

a) 

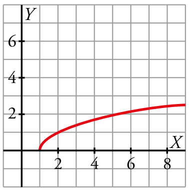
b) 

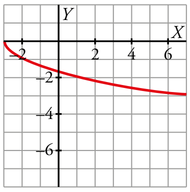
c) 

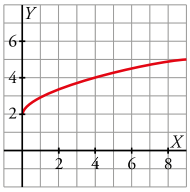
d) 

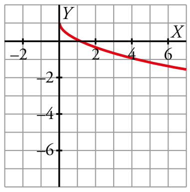
8 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{x-1}$ **b)** $y = -\sqrt{x+3}$ **c)** $y = 2 + \sqrt{x}$ **d)** $y = 1 - \sqrt{x}$

a) 

b) 

c) 

d) 

9 **Dibuja la gráfica de la función** $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

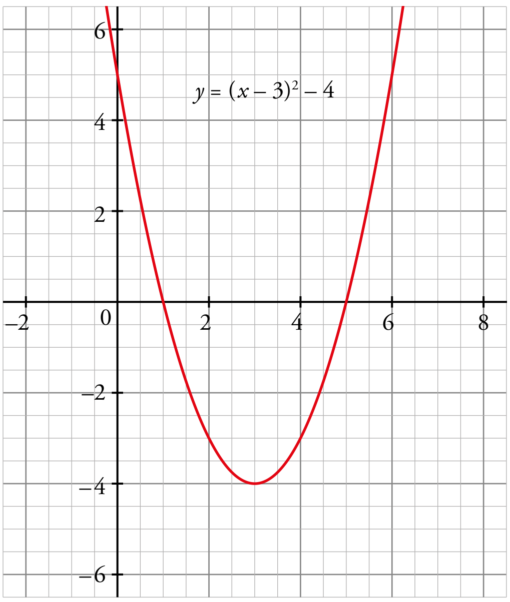
Representa, a partir de ella, las siguientes funciones y escribe sus ecuaciones.

a) $g(x) = f(x) + 2$ **b)** $h(x) = f(x-3)$ **c)** $i(x) = -f(x)$

Para dibujar $f(x)$ vamos a escribirla en la forma $f(x) = (x-m)^2 + p$.

$f(x) = x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4$

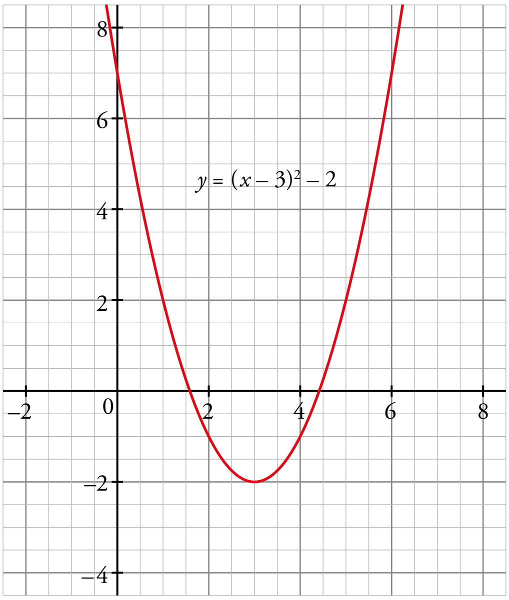
Por tanto, desplazamos la gráfica de $y = x^2$ tres unidades a la derecha y cuatro hacia abajo:



A partir de ella dibujaremos las gráficas de los apartados:

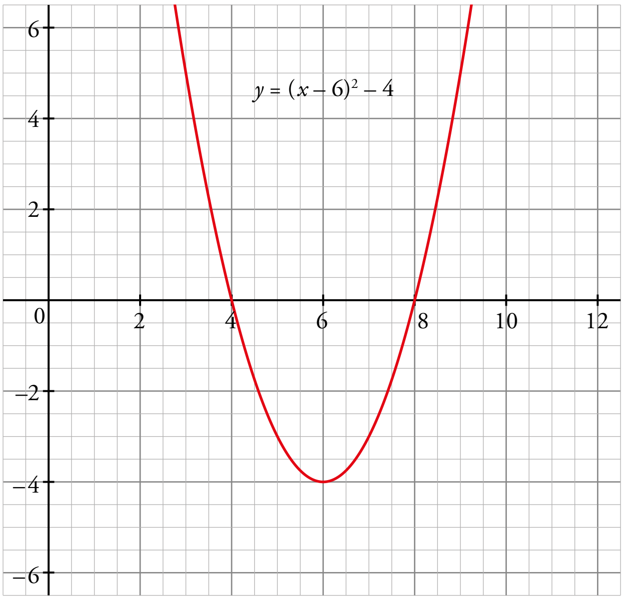
a) Debemos desplazarla 2 unidades hacia arriba:

$g(x) = f(x) + 2 = (x - 3)^2 - 2$



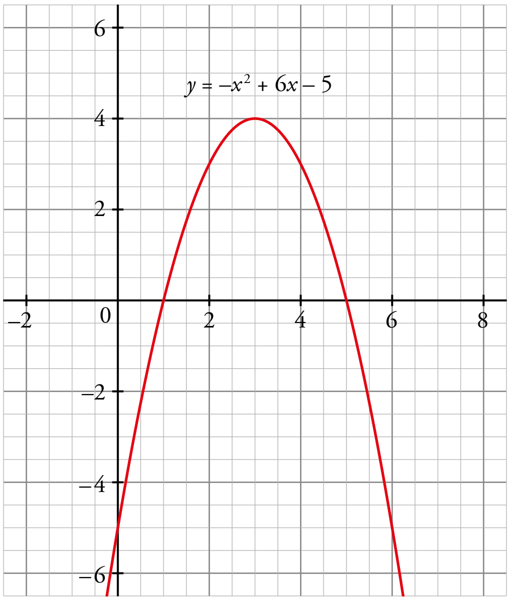
b) Debemos desplazarla 3 unidades hacia la derecha:

$h(x) = f(x - 3) = (x - 6)^2 - 4$



c) Es una simetría respecto al eje OX:

$i(x) = -f(x) = -x^2 + 6x - 5$



Composición de funciones

10 **Dadas las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = 2x^2$, halla:**

a) $f[g(2)]$ **b)** $g[f(-4)]$ **c)** $f[g(x)]$ **d)** $g[f(x)]$

a) $f[g(2)] = f(2 \cdot 2^2) = f(8) = 8 + 3 = 11$

b) $g[f(-4)] = g(-4 + 3) = g(-1) = 2 \cdot (-1)^2 = 2$

c) $f[g(x)] = f(2x^2) = 2x^2 + 3$

d) $g[f(x)] = g(x + 3) = 2(x + 3)^2 = 2x^2 + 12x + 18$

11 **Considera las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Calcula:**

a) $(f \circ g)(2)$ **b)** $(g \circ f)(-3)$ **c)** $(g \circ g)(x)$ **d)** $(f \circ g)(x)$

a) $(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1 = \dfrac{5}{4}$

b) $(g \circ f)(-3) = g[f(-3)] = g[(-3)^2 + 1] = g(10) = \dfrac{1}{10}$

c) $(g \circ g)(x) = g[g(x)] = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x$

d) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + 1 = \dfrac{1 + x^2}{x^2}$

12 **Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x$, obtén:**

a) $f \circ g$ **b)** $g \circ f$ **c)** $f \circ f$ **d)** $g \circ g$

a) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f(x^2 - 2x) = 2(x^2 - 2x) + 3 = 2x^2 - 4x + 3$

b) $g \circ f(x) = g[2x + 3] = (2x + 3)^2 - 2(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 3$

c) $f \circ f(x) = f(2x + 3) = 2(2x + 3) + 3 = 4x + 9$

d) $g \circ g(x) = g(x^2 - 2x) = (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x$

13 **Dadas las funciones $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, halla:**

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(g \circ f)(x)$ **c)** $(g \circ g)(x)$

a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\sqrt{x}\right) = 3\sqrt{x} + 2$

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(3x + 2) = \sqrt{3x + 2}$

c) $(g \circ g)(x) = g[g(x)] = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$

14 **Dadas las funciones**

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = \frac{3}{x - 2} \qquad h(x) = \sqrt{x - 3}$$

obtén las expresiones de:

a) $f \circ g$ **b)** $g \circ f$ **c)** $f \circ h$

d) $g \circ h$ **e)** $h \circ f$ **f)** $h \circ g$

Halla, si es posible, el valor de las funciones obtenidas en $x = 5$ y en $x = 0$.

a) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{3}{x-2}\right) = \left(\dfrac{3}{x-2}\right)^2 + 1 = \dfrac{9}{(x-2)^2} + 1 = \dfrac{x^2 - 4x + 13}{(x-2)^2}$

$f \circ g(5) = \dfrac{5^2 - 4 \cdot 5 + 13}{(5-2)^2} = 2$

$f \circ g(0) = \dfrac{0^2 - 4 \cdot 0 + 13}{(0-2)^2} = \dfrac{13}{4}$

b) $g \circ f(x) = g[f(x)] = g(x^2 + 1) = \dfrac{3}{x^2 + 1 - 2} = \dfrac{3}{x^2 - 1}$

$g \circ f(5) = \dfrac{3}{5^2 - 1} = \dfrac{1}{8}$

$g \circ f(0) = \dfrac{3}{0^2 - 1} = -3$

c) $f \circ h(x) = f[h(x)] = f\left(\sqrt{x-3}\right) = \left(\sqrt{x-3}\right)^2 + 1 = x - 2$

$f \circ h(5) = 5 - 2 = 3$

$f \circ h(0) = 0 - 2 = -2$

d) $g \circ h(x) = g[h(x)] = g\left(\sqrt{x-3}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{x-3} - 2}$

$g \circ h(5) = \dfrac{3}{\sqrt{5-3} - 2} = \dfrac{3}{\sqrt{2} - 2}$

$g \circ h(0)$ no existe.

e) $h \circ f(x) = h[f(x)] = h(x^2 + 1) = \sqrt{x^2+1-3} = \sqrt{x^2-2}$

$h \circ f(5) = \sqrt{5^2-2} = \sqrt{23}$

$h \circ f(0)$ no existe.

f) $h \circ g(x) = h[g(x)] = h\left(\dfrac{3}{x-2}\right) = \sqrt{\dfrac{3}{x-2}-3} = \sqrt{\dfrac{-3x+9}{x-2}}$

$h \circ g(5)$ no existe.

$h \circ g(0)$ no existe.

15 **Dadas las funciones $f(x) = sen\, x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$ halla la expresión analítica de:**

a) $g \circ f$ **b) $f \circ g$** **c) $f \circ g \circ h$** **d) $h \circ g \circ f$**

a) $g[f(x)] = g(sen\, x) = (sen\, x)^2 = sen^2\, x$

b) $f[g(x)] = f(x)^2 = sen\, x^2$

c) $f\{g[h(x)]\} = f\left[g\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] = f\left[\left(\dfrac{1}{x}\right)^2\right] = f\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = sen\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

d) $h\{g[f(x)]\} = h[g(sen\, x)] = h(sen^2\, x) = \dfrac{1}{sen^2\, x}$

16 **Con las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y $g(x) = x - 2$, hemos obtenido por composición las funciones $p(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ y $q(x) = \dfrac{1}{x^2} - 2$. Indica cuál de estas expresiones corresponde a $f \circ g$ y cuál a $g \circ f$.**

$(f \circ g)\,(x) = f[g(x)] = f(x-2) = \dfrac{1}{(x-2)^2} = p(x)$

$(g \circ f)\,(x) = g[f(x)] = g\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{x^2} - 2 = q(x)$

17 **Explica cómo a partir de las funciones**

$$f(x) = 2^{x-1} \qquad g(x) = \sqrt{x} + 2 \qquad h(x) = \frac{1}{x-3}$$

se pueden obtener estas otras:

a) $m(x) = 2^{\sqrt{x}+1}$ **b) $n(x) = \sqrt{2^{x-1}} + 2$** **c) $p(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3}} + 2$**

d) $q(x) = 2^{\frac{4-x}{x-3}}$ **e) $r(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$** **f) $s(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}}-1}$**

a) $m(x) = f \circ g(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{x}+2) = 2^{\sqrt{x}+2-1} = 2^{\sqrt{x}+1}$

b) $n(x) = g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2^{x-1}) = \sqrt{2^{x-1}} + 2$

c) $p(x) = g \circ h(x) = g[h(x)] = g\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3}} + 2$

d) $q(x) = f \circ h(x) = f[h(x)] = f\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = 2^{\frac{1}{x-3}-1} = 2^{\frac{4-x}{x-3}}$

e) $r(x) = h \circ g(x) = h[g(x)] = h(\sqrt{x}+2) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+2-3} = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

f) $s(x) = h \circ g \circ f(x) = h \circ g[f(x)] = h \circ g(2^{x-1}) = h(\sqrt{2^{x-1}}+2) = \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}}+2-3} = \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}}-1}$

18 **Considera estas funciones:**

$$f(x) = x - 5 \qquad g(x) = \sqrt{x} \qquad h(x) = \frac{1}{x+2}$$

Explica cómo, a partir de f, g y h, se pueden obtener, por composición, p, q y r:

$$p(x) = \sqrt{x-5};\ q(x) = \sqrt{x} - 5;\ r(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$(g \circ f)\ (x) = g[f(x)] = g(x-5) = \sqrt{x-5} = p(x)$

$(f \circ g)\ (x) = f[g(x)] = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{x} - 5 = q(x)$

$(h \circ g)\ (x) = h[g(x)] = h\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+2} = r(x)$

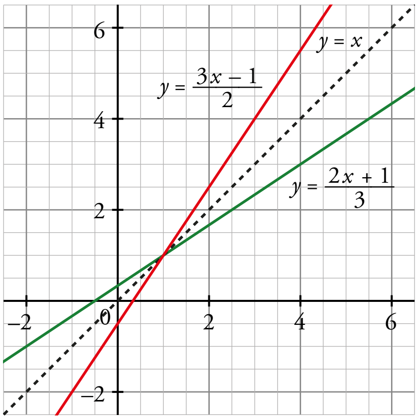
Página 160

Función inversa de otra

19 **Dada la función $f(x) = \dfrac{3x-1}{2}$ halla $f^{-1}(x)$. Representa f y f^{-1} y comprueba su simetría respecto de la recta $y = x$.**

$x = \dfrac{3y-1}{2} \to 2x - 3y + 1 = 0 \to y = \dfrac{2x+1}{3} \to f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{3}$

Veamos que las gráficas de f y de f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$:



20 **Halla la función inversa de las siguientes funciones:**

a) $y = 3x - 2$ **b)** $y = \dfrac{x+3}{2}$ **c)** $y = \sqrt{2x+1}$

d) $y = 1 + 2^x$ **e)** $y = 2 + \log_3 x$ **f)** $y = 4 - x^2,\ x \ge 0$

a) $y = 3x - 2 \to x = 3y - 2 \to y = \dfrac{x+2}{3}$

b) $y = \dfrac{x+3}{2} \to x = \dfrac{y+3}{2} \to y = 2x - 3$

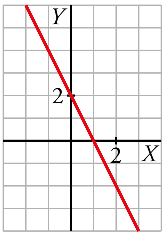
c) $y = \sqrt{2x+1} \to x = \sqrt{2y+1} \to y = \dfrac{x^2-1}{2}$

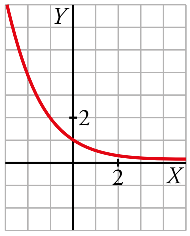
d) $y = 1 + 2^x \to x = 1 + 2^y \to y = \log_2(x-1)$

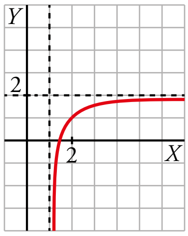
e) $y = 2 + \log_3 x \to x = 2 + \log_3 y \to y = 3^{x-2}$

f) $y = 4 - x^2,\ x > 0 \to x = 4 - y^2 \to y = \sqrt{4-x},\ x \le 4$

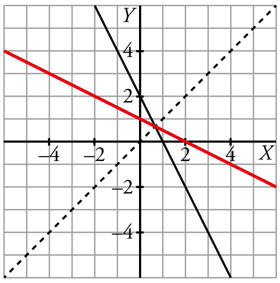
21 **Representa gráficamente la función inversa en cada caso:**

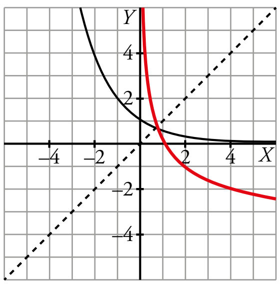
a) 

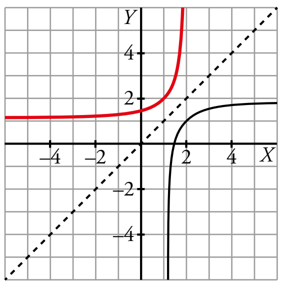
b) 

c) 

Hacemos una simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante para dibujar la función inversa.

a) 

b) 

c) 

22 **Comprueba si cada par de funciones son una inversa de la otra. Para ello calcula $f \circ f^{-1}$ o bien $f^{-1} \circ f$:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$; $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 2$

b) $f(x) = \sqrt{2x+3}$; $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+2}{3}$

c) $f(x) = 1 + log_2 \dfrac{x}{3}$; $f^{-1}(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$

a) $f \circ f^{-1}(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(\dfrac{1}{x} - 2\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x} - 2 + 2} = x$

b) $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}\,[f(x)] = f(\sqrt{2x+3}) = \dfrac{(\sqrt{2x+3})^2 + 2}{3} = \dfrac{2x+5}{3}$

En este caso no es verdad que las funciones sean recíprocas. f^{-1} es incorrecta.

c) $f \circ f^{-1}(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(1 + log_2 \dfrac{x}{3}\right) = 3 \cdot 2^{1 + log_2[(x/3) - 1]} = 3 \cdot 2^{log_2 (x/3)} = 3 \cdot \dfrac{x}{3} = x$

23 **Considera la función $y = \sqrt{x+2}$, $x \in [-2, 7]$.**

a) ¿Cuál es su recorrido?

b) Obtén su función inversa y determina el dominio de definición y el recorrido de esta.

a) Como la función es creciente, calculamos los valores en los extremos del intervalo.

$x = -2 \rightarrow y = \sqrt{-2+2} = 0$

$x = 7 \rightarrow y = \sqrt{7+2} = 3$

El recorrido es el intervalo [0, 3].

b) $y = \sqrt{x+2} \rightarrow x = \sqrt{y+2} \rightarrow y = x^2 - 2,\ x \in [0, 3]$ es la función inversa.

Su dominio es el intervalo [0, 3] y el recorrido es el intervalo [–2, 7].

24 Halla la función inversa de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{3x-1}{2}$ **b)** $y = \sqrt[3]{1-3x}$ **c)** $y = 1 + 2^{x-3}$

d) $y = 2 + log_3\,(x+1)$ **e)** $y = 1 + \dfrac{3}{x-1}$ **f)** $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$

a) Para encontrar la función inversa debemos intercambiar las variables x e y para luego aislar de nuevo la variable y:

$$x = \frac{3y-1}{2} \to f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3}$$

b) $x = \sqrt[3]{1-3y} \to x^3 = 1-3y \to y = \dfrac{1-x^3}{3} \to f^{-1}(x) = \dfrac{1-x^3}{3}$

c) $x = 1 + 2^{y-3} \to x-1 = 2^{y-3} \to log(x-1) = (y-3)\,log(2) \to log(x-1) + 3\,log(2) = y\,log(2) \to$

$$\to f^{-1}(x) = \frac{log(x-1) + 3\,log(2)}{log(2)} = \frac{log(x-1)}{log(2)} + 3$$

d) $x = 2 + log_3(y+1) \to 3^x = 3^{2+log_3(y+1)} = 9(y+1) \to f^{-1}(x) = \dfrac{3^x}{9} - 1$

e) $x = 1 + \dfrac{3}{y-1} \to x-1 = \dfrac{3}{y-1} \to y-1 = \dfrac{3}{x-1} \to y = 1 + \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{x-1+3}{x-1} = \dfrac{x+2}{x-1} \to f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$

f) $x = \dfrac{2y-3}{y+1} \to x-2 = \dfrac{-5}{y+1} \to y = \dfrac{-5}{x-2} - 1 \to f^{-1}(x) = \dfrac{-3-x}{x-2}$

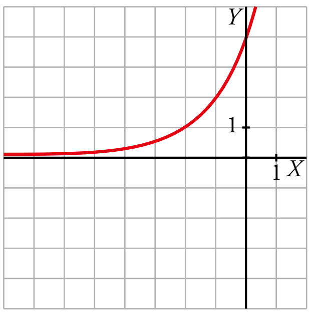
Funciones exponenciales y logarítmicas

25 Representa estas funciones a partir de la gráfica de $y = 2^x$:

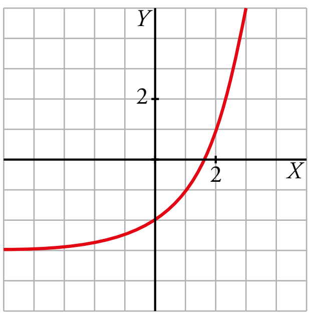
a) $y = 2^{x+2}$ **b)** $y = 2^x - 3$ **c)** $y = 2^{x/2}$

d) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3}$ **e)** $y = 1 - 2^x$ **f)** $y = 2^{2-x}$

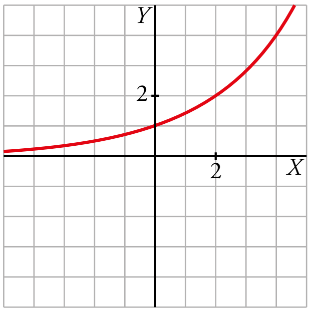
a) Es la gráfica de la función $y = 2^x$ desplazada dos unidades a la izquierda.



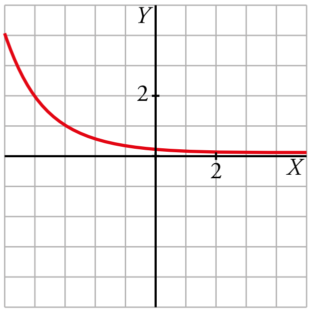
b) Es la gráfica de la función $y = 2^x$ desplazada tres unidades hacia abajo.



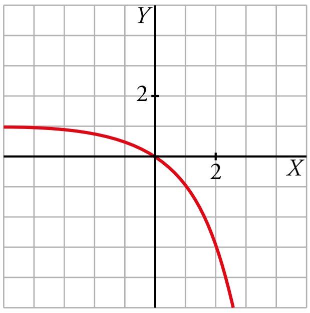
c) Es la gráfica de la función $y = 2^x$ estirada al doble en el sentido horizontal.



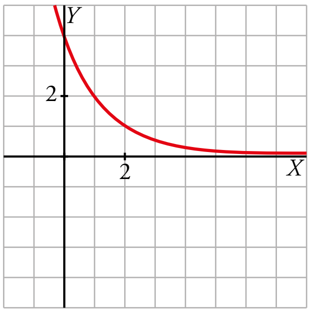
d) Es la simétrica respecto al eje Y de la gráfica de la función $y = 2^x$, y desplazada tres unidades a la izquierda.



e) Es la simétrica respecto al eje X de la gráfica de la función $y = 2^x$, y desplazada una unidad hacia arriba.



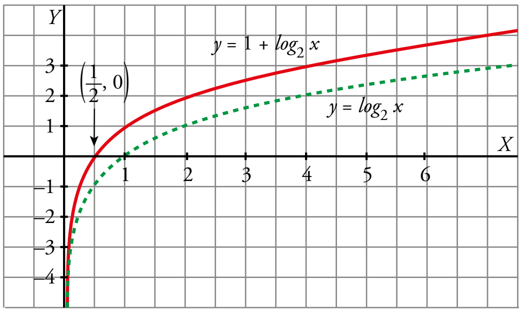
f) Es la simétrica respecto al eje Y de la gráfica de la función $y = 2^x$, y desplazada dos unidades hacia la derecha.



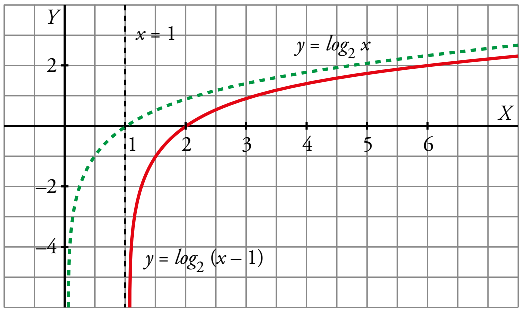
26 **Representa estas funciones a partir de la gráfica de $y = log_2\, x$:**

a) $y = 1 + log_2\, x$ **b)** $y = log_2\, (x - 1)$ **c)** $y = 2 - log_2\, x$ **d)** $y = log_2\, (-x)$

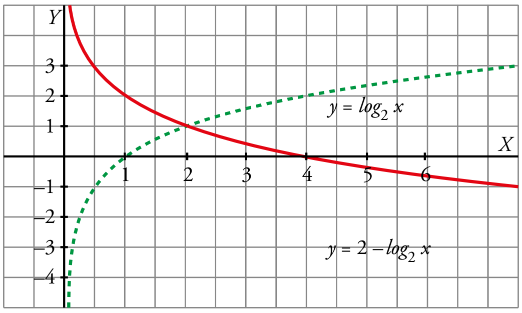
a)



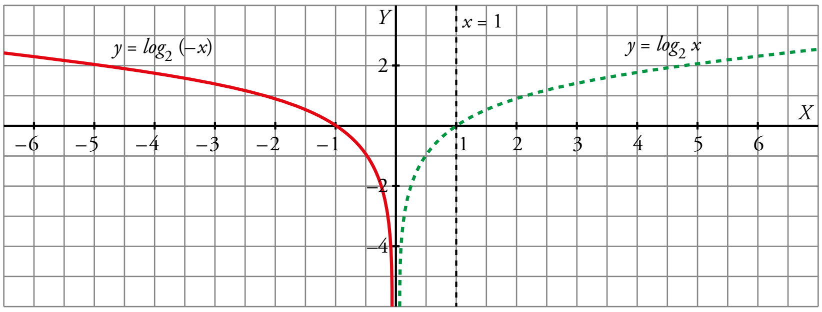
b)



c)



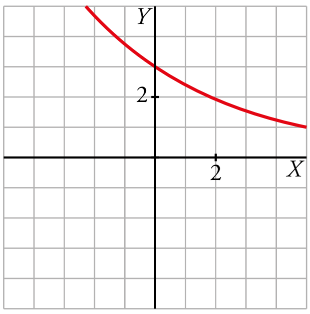
d)



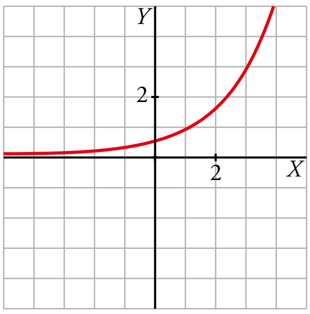
27 **Con ayuda de la calculadora, representa estas funciones:**

a) $y = 3 \cdot 0{,}8^x$ **b)** $y = (1/2) \cdot 1{,}8^x$ **c)** $y = ln\, (2x)$ **d)** $y = ln\, (x + 1)$

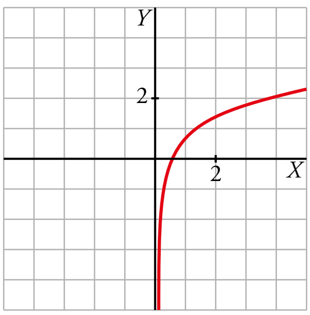
a)



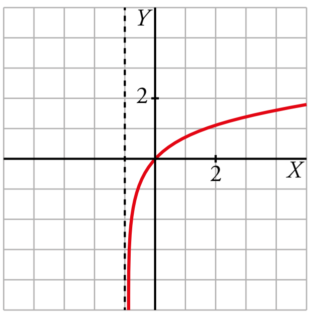
b)



c)



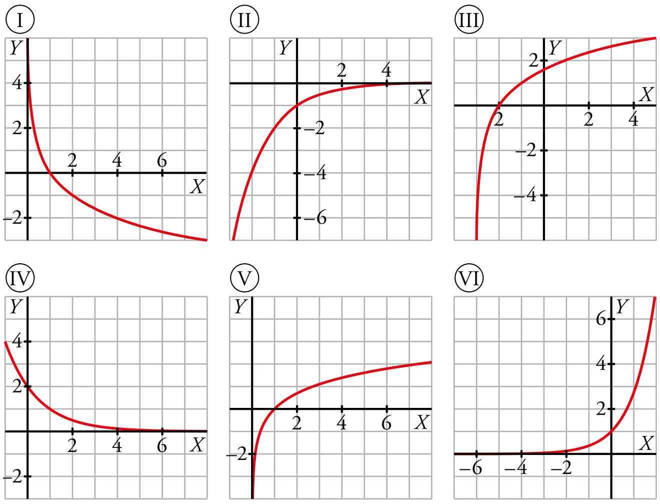
d)



28 **Asocia a cada una de las siguientes expresiones la gráfica que le corresponde:**

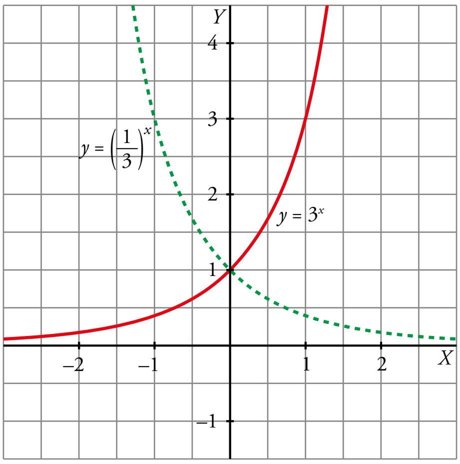
a) $y = ln\, x$ b) $y = 2^{1-x}$ c) $y = e^x$

d) $y = -log_2\, x$ e) $y = -(1/2)^x$ f) $y = log_2\,(x+3)$



a) → V b) → IV c) → VI d) → I e) → II f) → III

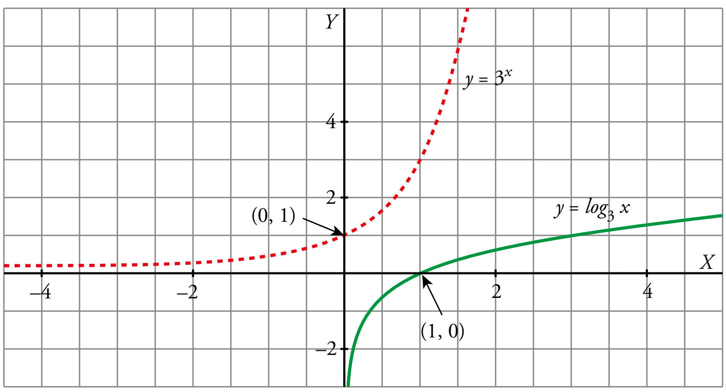
29 **Comprueba que las gráficas de** $y = 3^x$ **e** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **son simétricas respecto al eje** OY**.**



30 **Haz una tabla de valores de la función** $y = 3^x$**. A partir de ella, representa la función** $y = log_3\, x$**.**

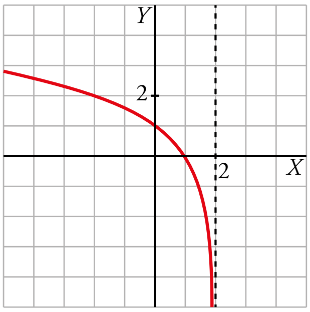
x	–2	–1	0	1	2
3^x	1/9	1/3	1	3	9

x	1/9	1/3	1	3	9
$log_3 x$	–2	–1	0	1	2



31 **¿Cuál es el dominio de $y = log_2 (2 - x)$? Represéntala.**

$2 - x > 0 \rightarrow Dom = (-\infty, 2)$



Funciones trigonométricas

32 **Si un punto P recorre una circunferencia completa de radio 1, el ángulo de giro es 360º que, medido por el arco, equivale a 2π radianes. Por tanto:**

$$360° = 2\pi\ rad \rightarrow 180° = \pi\ rad \rightarrow 90° = \frac{\pi}{2}\ rad$$

a) Expresa en radianes los siguientes ángulos 30°, 45°, 60°, 120°, 135°.

b) Expresa en grados los siguientes ángulos $5\pi/6$, $7\pi/4$, $4\pi/3$, $3\pi/2$, $7\pi/6$.

a) $30° = \frac{\pi}{6}\ rad$ $\qquad 45° = \frac{\pi}{4}\ rad$

$60° = \frac{\pi}{3}\ rad$ $\qquad 120° = \frac{2\pi}{3}\ rad$

$135° = \frac{3\pi}{4}\ rad$

b) $\frac{5\pi}{6}\ rad = 150°$ $\qquad \frac{7\pi}{4}\ rad = 315°$

$\frac{4\pi}{3}\ rad = 240°$ $\qquad \frac{3\pi}{2}\ rad = 270°$

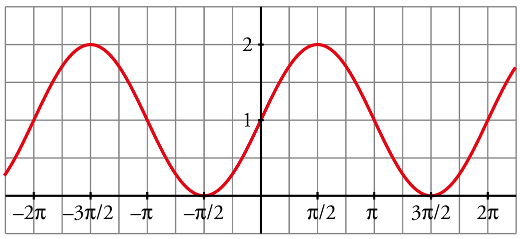
$\frac{7\pi}{6}\ rad = 210°$

33 **Representa estas funciones:**

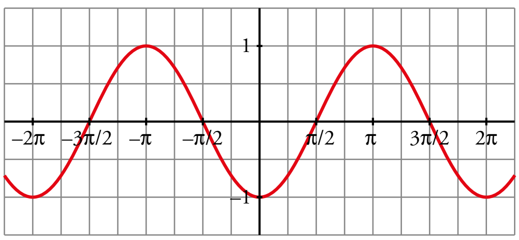
a) $y = 1 + sen\ x$

b) $y = -cos\ x$

a)



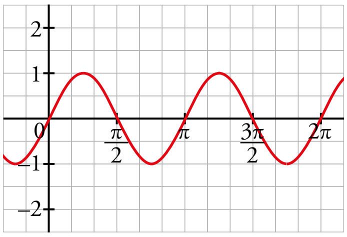
b)



34 **Representa $y = sen\ 2x$. Para ello utiliza la calculadora seleccionando el radián como unidad angular y completa la siguiente tabla de valores en tu cuaderno.**

x	**0**	**$\pi/4$**	**$\pi/2$**	**$3\pi/4$**	**π**	**$5\pi/4$**	**$3\pi/2$**	**$7\pi/4$**
y	**0**	**1**	**0**					

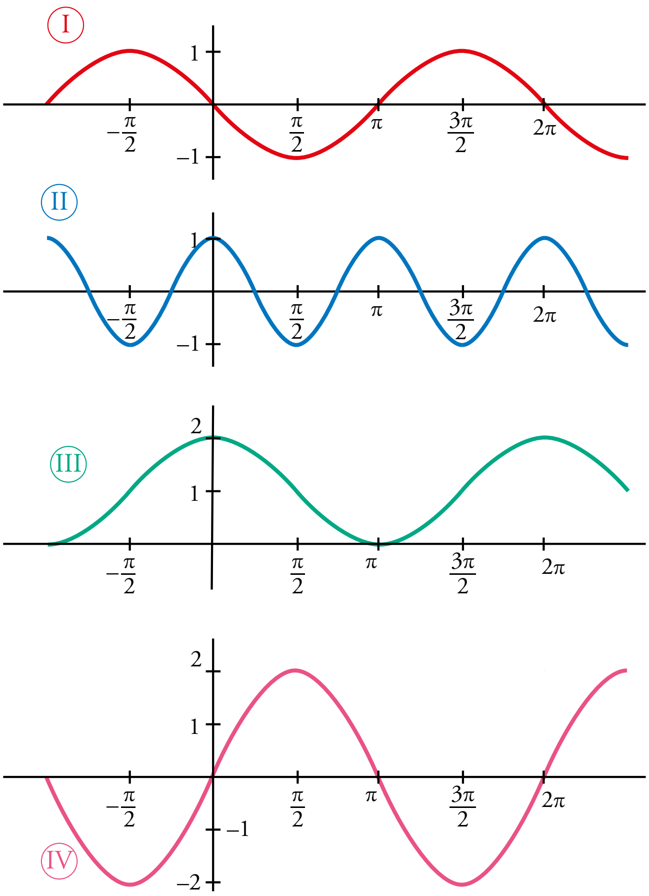
x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$
y	0	1	0	–1	0	1	0	–1



Página 161

35 **Asocia a cada una de las siguientes funciones, la gráfica que le corresponde:**

a) $y = cos\ 2x$ **b)** $y = -sen\ x$ **c)** $y = 2sen\ x$ **d)** $y = 1 + cos\ x$



a) → II b) → I c) → IV d) → III

Para resolver

36 **Expresa las siguientes funciones de la forma** $y = \dfrac{k}{k-a} + b$ **y describe las transformaciones que tenemos que hacer para representarla a partir de** $y = \dfrac{1}{x}$**.**

a) $y = \dfrac{3x}{x-1}$ **b)** $y = \dfrac{x-2}{x-4}$ **c)** $y = \dfrac{3x+2}{x+1}$ **d)** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

* ***Mira el ejercicio resuelto 2.***

a) $y = \dfrac{3x}{x-1} = \dfrac{3(x-1)+3}{x-1} = 3 + \dfrac{3}{x-1}$

Se estira la gráfica de $\dfrac{1}{x}$ (el factor 3 está multiplicando), se desplaza 3 unidades hacia arriba y 1 hacia la derecha.

b) $y = \dfrac{(x-2)}{x-4} = \dfrac{x-4+2}{x-4} = 1 + \dfrac{2}{x-4}$

Estiraremos la gráfica de $\dfrac{1}{x}$ (el factor 2 está multiplicando), y se traslada 1 unidad hacia arriba y 4 unidades a la derecha.

c) $y = \dfrac{3x+2}{x+1} = \dfrac{3(x+1)-1}{x+1} = 3 - \dfrac{1}{x+1}$

Es la simétrica de $\dfrac{1}{x}$ respecto del eje X, trasladada 1 unidad hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba.

d) $y = \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x-1+2}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$

Se estira la gráfica (el factor 2 está multiplicando), y se traslada 1 unidad hacia arriba y 1 unidad a la derecha.

37 **Expresa las siguientes funciones utilizando la expresión** $y = a(x-m)^2 + p$ **y describe las transformaciones que tenemos que hacer para representarlas a partir de** $y = x^2$**.**

a) $y = x^2 - 10x + 16$

b) $y = x^2 - x + 2$

* ***Mira el ejercicio resuelto 3.***

a) $y = x^2 - 10x + 16 \rightarrow y = x^2 - 10x + 25 - 25 + 16 \rightarrow y = (x-5)^2 - 9$

Trasladamos la gráfica 5 unidades a la derecha y 9 hacia abajo.

b) $y = x^2 - x + 2 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + 2 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4}$

Trasladamos la gráfica media unidad a la derecha y $\dfrac{7}{4}$ hacia arriba.

38 **Representa y halla la función inversa en cada caso.**

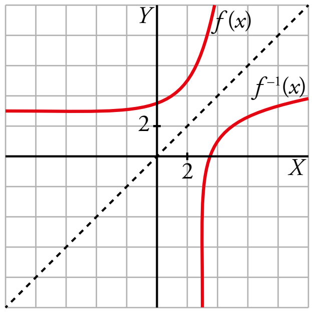
a) $y = 3 + 2^{x-1}$ **b)** $y = 0{,}2 \cdot 2^{3-x}$

c) $y = 1{,}8 \cdot 5^{0{,}2x}$ **d)** $y = 1 + log_2\,(x + 4)$

e) $y = ln\,(3x + 2)$ **f)** $y = 2{,}5 \cdot e^{-x/2}$

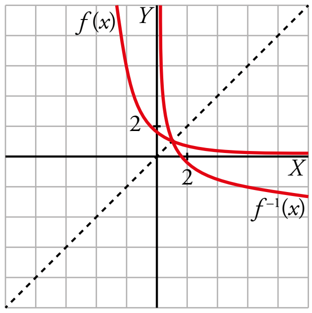
a) $y = 3 + 2^{x-1} \rightarrow x = 3 + 2^{y-1} \rightarrow x - 3 = 2^{y-1} \rightarrow y = log_2\,(x-3) + 1$

$f^{-1}(x) = log_2\,(x-3) + 1$



b) $y = 0{,}2 \cdot 2^{3-x} \rightarrow x = 0{,}2 \cdot 2^{3-y} \rightarrow \dfrac{x}{0{,}2} = 2^{3-y} \rightarrow y = 3 - log_2\,(5x)$

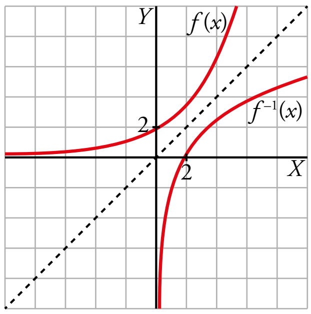
$f^{-1}(x) = 3 - log_2\,(5x) = 3 - log_2\,5 - log_2\,x$



c) $y = 1{,}8 \cdot 5^{0{,}2x} \rightarrow x = 1{,}8 \cdot 5^{0{,}2y} \rightarrow \dfrac{x}{1{,}8} = 5^{0{,}2y} \rightarrow$

$\rightarrow log_5\,\dfrac{x}{1{,}8} = 0{,}2y \rightarrow y = 5log_5\,\dfrac{x}{1{,}8}$

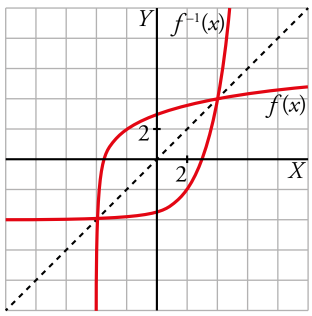
$f^{-1}(x) = 5log_5\,\dfrac{x}{1{,}8} = 5(log_5\,x - log_5\,1{,}8)$



d) $y = 1 + log_2\,(x+4) \rightarrow x = 1 + log_2\,(y+4) \rightarrow$

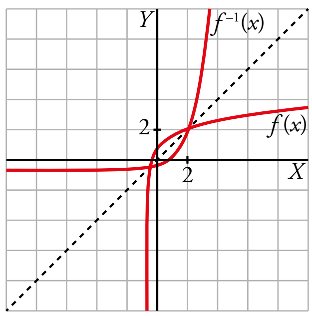
$\rightarrow x - 1 = log_2\,(y+4) \rightarrow y = 2^{x-1} - 4$

$f^{-1}(x) = 2^{x-1} - 4$



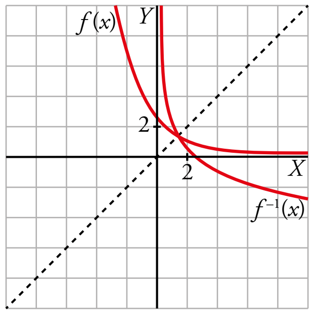
e) $y = ln\,(3x+2) \rightarrow x = ln\,(3y+2) \rightarrow e^x = 3y + 2 \rightarrow y = \dfrac{e^x - 2}{3}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{e^x - 2}{3}$



f) $y = 2{,}5 \cdot e^{-x/2} \;\to\; x = 2{,}5 \cdot e^{-y/2} \;\to\; \dfrac{x}{2{,}5} = e^{-y/2} \;\to\; y = -2ln\left(\dfrac{x}{2{,}5}\right)$

$f^{-1}(x) = -2ln\left(\dfrac{x}{2{,}5}\right) = -2(ln\,x - ln\,2{,}5)$

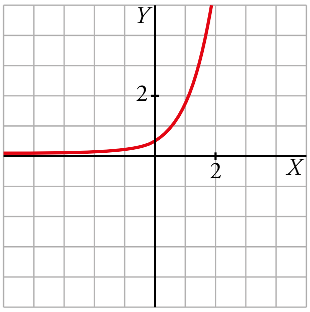


39 **La gráfica de una función exponencial $y = ka^x$ pasa por los puntos (0; 0,5) y (1; 1,7). Calcula k y a, y represéntala.**

Pasa por el punto (0; 0,5) $\to$ $0{,}5 = k \cdot a^0 \;\to\; k = 0{,}5$

Pasa por el punto (1; 1,7) $\to$ $1{,}7 = 0{,}5 \cdot a^1 \;\to\; a = \dfrac{1{,}7}{0{,}5} = 3{,}4$

La función es $y = 0{,}5 \cdot 3{,}4^x$.



40 **Los puntos (1; 1,2) y (2; 0,48) pertenecen a la gráfica de la función $y = k \cdot a^x$.**

a) Calcula k y a.

b) Halla el valor de x para el cual $y = 120$.

a) Pasa por el punto (1; 1,2) $\to$ $1{,}2 = k \cdot a$

Pasa por el punto (2; 0,48) $\to$ $0{,}48 = k \cdot a^2$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera obtenemos que $a = \dfrac{0{,}48}{1{,}2} = 0{,}4$ y $k = 3$.

La función es $y = 3 \cdot 0{,}4^x$.

b) $120 = 3 \cdot 0{,}4^x \;\to\; 40 = 0{,}4^x \;\to\; x = \dfrac{log\,40}{log\,0{,}4} = -4{,}026$

41 **La gráfica de la función logarítmica $y = -2 + log_b\,(x + a)$ corta a los ejes de coordenadas en los puntos (0, –2) y (8, 0).**

a) Calcula a y b.

b) ¿Para qué valor de x es $y = 3$?

a) Pasa por (0, –2) $\to$ $-2 = -2 + log_b\,a \;\to\; log_b\,a = 0 \;\to\; a = 1$

Pasa por (8, 0) $\to$ $0 = -2 + log_b\,9 \;\to\; log_b\,9 = 2 \;\to\; b = 3$

Luego $y = -2 + log_3\,(x + 1)$.

b) $3 = -2 + log_3\,(x + 1) \;\to\; 5 = log_3\,(x + 1) \;\to\; x = 242$

42 La función $y = a + b\ ln\ x$ pasa por $(e, 5)$ y $(1/e, -1)$.

a) Calcula a y b.

b) ¿Cuál es su función inversa?

a) Pasa por $(e, 5) \to 5 = a + bln\ e \to a + b = 5$

Pasa por $\left(\frac{1}{e}, -1\right) \to -1 = a + bln\left(\frac{1}{e}\right) \to a - b = -1$

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 5 \\ a - b = -1 \end{array}\right\} a = 2,\ b = 3 \to y = 2 + 3ln\ x$$

b) $y = 2 + 3ln\ x \to x = 2 + 3ln\ y \to \frac{x-2}{3} = ln\ y \to y = e^{(x-2)/3}$

43 La función $y = \frac{5}{9}(x - 32)$ convierte grados Fahrenheit en grados centígrados. Halla la función para convertir grados centígrados en grados Fahrenheit.

La función pedida es la función inversa de la dada.

$$y = \frac{5}{9}(x - 32) \to x = \frac{5}{9}(y - 32) \to \frac{9}{5}x = y - 32 \to y = \frac{9}{5}x + 32$$

La función que convierte grados centígrados en grados Fahrenheit es $y = \frac{9}{5}x + 32$.

44 Un cultivo de bacterias crece según la función $y = 1 + 2^{x/10}$ (y: miles de bacterias, x: horas). ¿Cuántas había en el momento inicial? ¿Y al cabo de 10 horas? ¿Cuánto tardarán en duplicarse?

En el momento inicial, $x = 0 \to y = 2$, había dos mil bacterias.

Al cabo de 10 horas, $x = 10 \to y = 1 + 2^{10/10} = 3$, había tres mil bacterias.

Para que se dupliquen las que había en el momento inicial debe ser $y = 4$:

$$4 = 1 + 2^{x/10} \to 2^{x/10} = 3 \to log_2 3 = \frac{x}{10} \to x = 10 \cdot log_2 3 = 15{,}85 \text{ horas}$$

45 La función $y = 80 \cdot 2^{-0,4t}$ nos da la cantidad (en gramos) de estroncio radiactivo en una muestra de agua en el instante t (en años).

a) ¿Qué cantidad habrá al cabo de 10 años?

b) ¿Cuándo la cantidad actual se habrá reducido al 50 %?

a) $f(10) = 80 \cdot 2^{-0,4 \cdot 10} = 80 \cdot 2^{-4} = \frac{80}{16} = 5$ g

b) La cantidad actual se da en $t = 0 \to f(0) = 80$

Queremos que la cantidad sea la mitad:

$$f(t) = 80 \cdot 2^{-0,4t} = \frac{80}{2} \to 2^{-0,4t} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \to -0{,}4t = -1 \to t = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$$

La cantidad actual se habrá reducido al 50 % al cabo de 2,5 años.

46 **La concentración de un fármaco en sangre viene dada por $y = 100 \cdot (0{,}94)^t$ (y en mg, t en h).**

a) Di cuál es la dosis inicial y la cantidad de ese fármaco que tiene el paciente al cabo de 3 horas.

b) Representa la función.

c) Si queremos que la concentración no baje de 60 mg, ¿al cabo de cuánto tiempo tendremos que inyectarle de nuevo?

a) Dosis inicial: $t = 0 \rightarrow y = 100$ mg

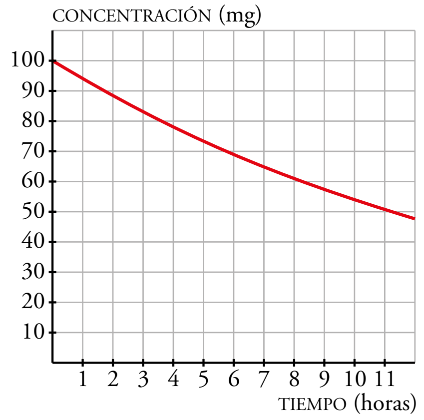
Al cabo de tres horas:

$t = 3 \rightarrow y = 100 \cdot 0{,}94^3 = 83{,}06$ mg

c) $60 = 100 \cdot 0{,}94^t \rightarrow t = \dfrac{\log 0{,}6}{\log 0{,}94} = 8{,}26$

Habrá que inyectarle al cabo de 8 h 15 min, aproximadamente.

b)



47 **La cantidad de material radiactivo que queda al cabo de t años en una muestra de 75 gramos, se puede calcular mediante la ecuación $C(t) = 75(0{,}62)^t$.**

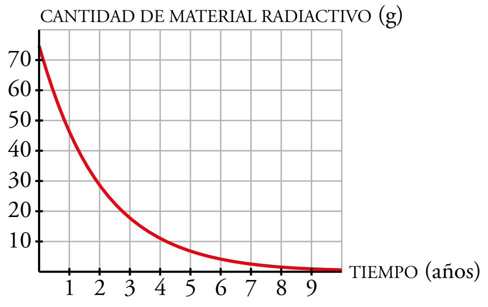
a) ¿Cuántos años tienen que transcurrir para que queden 10 gramos de material radiactivo?

b) Representa la función.

a) $10 = 75 \cdot 0{,}62^t \rightarrow t = \dfrac{\log \frac{10}{75}}{\log 0{,}62} = 4{,}2$

Deben pasar 4,2 años.

b) $y = 75 \cdot 0{,}62^x$



Página 162

48 **Un alumno de un curso de psicología sabe que el porcentaje de conocimientos que recordará t meses después de acabar el curso, se puede calcular mediante la función:**

$$R(t) = 94 - 46{,}8 \log (t - 1)$$

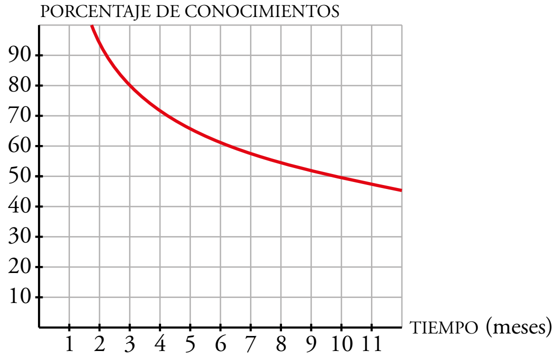
a) Calcula el porcentaje que recordará 6 meses después de terminar el curso.

b) Representa la función.

a) $R(6) = 94 - 46{,}8 \log 5 = 61{,}3$

Después de 6 meses recordará un 61,3 % de sus conocimientos.

b)



49 **Sabemos que la presión amosférica varía con la altura. La ecuación $h(x) = 41{,}97(0{,}996)^x$ nos da la altura de una montaña, en kilómetros, si conocemos la presión atmosférica, x, en milibares.**

a) Si en la cima del Everest la presión es de 389 milibares, ¿cuál es la altura del Everest?

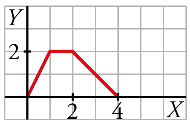
b) ¿Cuál será la presión en la cima de una montaña de 3 500 metros de altura?

a) $h(389) = 41{,}97 \cdot 0{,}996^{389} = 8{,}827$

El Everest tiene, aproximadamente, 8 827 m de altura.

b) $3{,}5 = 41{,}97 \cdot 0{,}996^x \rightarrow x = 620$ milibares

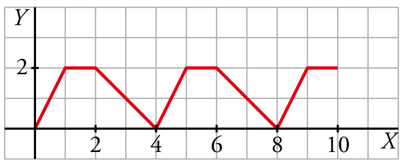
50 **Esta gráfica representa un movimiento que se repite periódicamente.**



a) Represéntala en el intervalo [0, 10].

b) Calcula $f(7)$, $f(10)$ y $f(20)$.

a)



b) $f(7) = 1$; $f(10) = 2$, $f(20) = 0$

51 **Un depósito de 10 L de agua se llena y vacía automáticamente cada 8 minutos. Cuando el depósito está vacío comienza el llenado, que tarda 2 minutos, permanece lleno 5 minutos y se vacía en 1 minuto. Este proceso se repite periódicamente.**

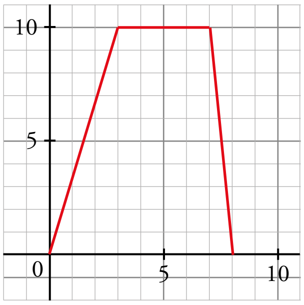
a) Representa la función que expresa la cantidad de agua que hay en el depósito durante media hora.

b) Calcula $f(12)$, $f(16)$ y $f(19)$ y comprueba que $f(x + 8k) = f(x)$, $k \in \mathbb{Z}$. ¿Cuál es su periodo?

a) Representamos la gráfica con el eje *OX* indicando los minutos transcurridos, y el eje *OY* representando los litros de llenado.

Sabemos que la función sube de 0 a 10 litros en 2 minutos, se mantiene en 10 litros hasta que pasan 5 minutos y vuelve a descender a 0 en un solo minuto.

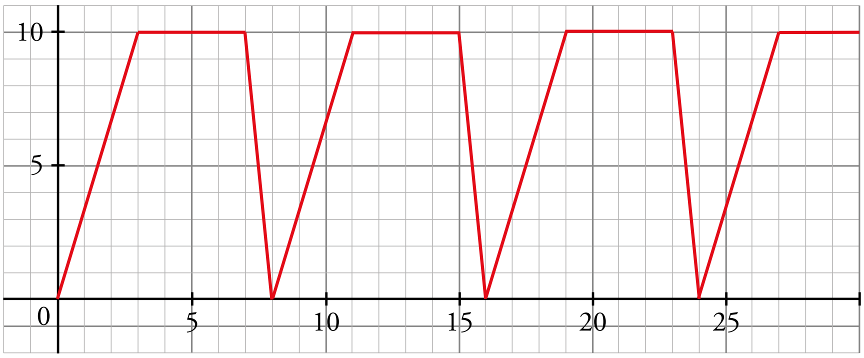
Representamos la función para $x \in [0, 8]$ e $y \in [0, 10]$.



La podemos escribir a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } x \in [0,2) \\ 10 & \text{si } x \in [2,7] \\ -10x + 80 & \text{si } x \in (7,8] \end{cases}$$

La función se repetirá cada 8 minutos, por lo tanto si queremos conocer la función que lo representa durante media hora repetimos la gráfica hasta $x = 30$ minutos:



b) En el minuto 12 la función será igual que en el minuto 4, ya que en el minuto 8 se vacía y vuelve a empezar:

$f(12) = f(4) = 10$

$f(16) = f(8) = 0$

$f(19) = f(11) = f(3) = 10$

Es decir, cada vez que pasan 8 minutos volvemos a empezar, ese será su periodo y por lo tanto $f(x + 8k) = f(x)$, $k \in \mathbb{N}$

- Si $x \in [0, 2)$:

  $f(x + 8k) = 5(x + 8k) = 5x + 40k = 5x = f(x)$

- Si $x \in [2, 7]$:

  $f(x + 8k) = 10 = f(x)$

- Si $x \in (7, 8]$:

  $f(x + 8k) = -10(x + k) + 80 = -10x - 80k + 80 = -10x + 80$

52 **El número de ejemplares que se venden de un libro depende del dinero que se dedica a su publicidad. La función que da esta relación es:**

$$y = 2 + 0{,}5\, ln\,(x + 1);\ x \text{ en miles de euros, } y \text{ en miles}$$

a) Calcula cuántos ejemplares se venden si se invierten 20 000 € en publicidad.

b) ¿Cuánto habrá que invertir para vender 5 000 libros?

a) $x = 20 \ \rightarrow\ y = 2 + 0{,}5\, ln\, 21 = 3{,}522$

Se venderán 3 522 libros.

b) $5 = 2 + 0{,}5\, ln\,(x + 1) \ \rightarrow\ 3 = 0{,}5\, ln\,(x + 1) \ \rightarrow\ 6 = ln\,(x + 1) \ \rightarrow\ x = e^6 - 1 = 402{,}42879$

Se deben invertir 402 429 €.

53 **Un capital de 10 000 € se deposita en un banco al 6 % de interés anual con pago mensual de intereses. Escribe la función que nos dice en cuánto se transforma ese capital en m meses. Calcula cuánto tarda en duplicarse el capital.**

$i = \dfrac{6}{100} \ \rightarrow\ i_m = \dfrac{6}{1200} = 0{,}005 \ \rightarrow$ Índice de variación mensual = 1,005

El capital final al cabo de m meses es $C(m) = 10\,000 \cdot 1{,}005^m$

$$20\,000 = 10\,000 \cdot 1{,}005^m \ \rightarrow\ 2 = 1{,}005^m \ \rightarrow\ m = \frac{log\, 2}{log\, 1{,}005} = 138{,}98$$

Por tanto, deben pasar 139 meses para que el capital inicial se duplique.

54 **La población mundial ha crecido de forma exponencial desde 1650. La función $P(t) = 0{,}5 \cdot e^{0{,}0072t}$, t en años, $P(t)$ en miles de millones, nos da una buena aproximación de la población mundial hasta 2015.**

a) ¿Cuál era la población mundial en 1920?

b) Estima la población mundial en 2020.

a) El año 1650 se corresponde con $t = 0 \ \rightarrow$ El año 1920 se corresponde con $t = 1920 - 1650 = 270$.

$P(270) = 0{,}5 \cdot e^{0{,}0072 \cdot 270} = 3{,}493$ miles de millones de personas

b) El año 2020 se corresponde con $t = 2020 - 1650 = 370$.

La población estimada es $P(370) = 0{,}5 \cdot e^{0{,}0072 \cdot 370} = 7{,}177$ miles de millones de habitantes.

55 **El carbono 14 sirve para calcular la edad de los fósiles y otros objetos. La fórmula que se utiliza es $C = C_0 \cdot e^{-t\, ln\, 2/5730}$, donde C_0 es la cantidad de carbono 14 que tenía el fósil cuando se formó y C la que tendrá dentro de t años.**

a) Si en un cierto fósil $C^0 = 500$ g, ¿cuántos gramos de carbono 14 tendrá dentro de 2 000 años?

b) Se llama periodo de semidesintegración al tiempo necesario para que la cantidad inicial se reduzca a la mitad. Calcula el periodo de semidesintegración del carbono 14.

a) Al cabo de 2 000 años, $C = 500 \cdot e^{-2000 \cdot ln\, 2/5730} = 392{,}6$ g de carbono 14.

b) $\dfrac{C_0}{2} = C_0 \cdot e^{-t \cdot ln\, 2/5730} \ \rightarrow\ e^{t \cdot ln\, 2/5730} = 2 \ \rightarrow\ \dfrac{t\, ln\, 2}{5730} = ln\, 2 \ \rightarrow\ t = 5730$ años

56 **El precio de un automóvil deportivo es de 24 000 €. Sabemos que se deprecia a un ritmo de un 12 % anual.**

a) ¿Qué función da el valor del coche al cabo de t años?

b) ¿Cuándo llegará a la mitad del valor inicial?

a) Una depreciación del 12 % anual se corresponde con un índice de variación $I = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$.

La función que da el valor del coche es $V(t) = 24\,000 \cdot 0{,}88^t$.

b) $12\,000 = 24\,000 \cdot 0{,}88^t \rightarrow 0{,}5 = 0{,}88^t \rightarrow t = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}88} = 5{,}42$

Deben pasar 5,42 años para que su valor se reduzca a la mitad.

57 **Invertimos 20 000 € al 4,8 % anual en una cuenta que se capitaliza semestralmente.**

a) Escribe la función que nos da el dinero que tendremos en la cuenta al cabo de t años.

b) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que el capital inicial aumente un 50 %?

a) $i = \dfrac{4{,}8}{100} \rightarrow i_s = \dfrac{4{,}8}{200} = 0{,}024 \rightarrow$ Índice de variación semestral = 1,024

Como un año tiene 2 semestres, la función es $C(t) = 20\,000 \cdot 1{,}024^{2t}$.

b) Si el capital inicial aumenta un 50 %, pasará de 20 000 a 30 000 €.

$30\,000 = 20\,000 \cdot 1{,}024^{2t} \rightarrow 1{,}5 = 1{,}024^{2t} \rightarrow t = \dfrac{\log 1{,}5}{2 \log 1{,}024} = 8{,}55$ años

Como la capitalización es semestral, deberán pasar 9 años.

58 **El número de recetas para medicamentos emitidas por los médicos del servicio de salud de una comunidad autónoma ha crecido exponencialmente desde 2005. La función es del tipo $f(t) = ke^{at}$. Calcula k y a sabiendo que en 2005 ($t = 0$) se emitieron 6,52 miles de recetas y en el 2008 fueron 9,84 miles. ¿En qué año se llegará a 50 miles?**

Pasa por (0; 6,52) $\rightarrow 6{,}52 = k$

Pasa por (3; 9,84) $\rightarrow 9{,}84 = 6{,}52 \cdot e^{3a} \rightarrow \dfrac{9{,}84}{6{,}52} = e^{3a} \rightarrow a = \dfrac{\ln \frac{9{,}84}{6{,}52}}{3} = 0{,}1372$

Por tanto, $f(t) = 6{,}52 \cdot e^{0{,}1372t}$

$$50 = 6{,}52 \cdot e^{0{,}1372t} \rightarrow \frac{50}{6{,}52} = e^{0{,}1372t} \rightarrow t = \frac{\ln \frac{50}{6{,}52}}{0{,}1372} = 14{,}85$$

Después de 15 años, es decir, en 2020 se superarán ligeramente las 50 000 recetas.

59 **Un estudio de la policía refleja que el número de robos en viviendas, por año, en una ciudad, decrece según una función del tipo $N(t) = A - B \cdot log\,(t + 2)$. Sabemos que en el año 2000, que es cuando se inició el estudio, el número de robos fue de 520 y en el año 2003 fueron 476.**

a) Determina A y B.

b) Calcula el número de robos que se esperan en 2020.

a) $N(0) = 520 \rightarrow 520 = A - B \cdot log\,2$

$N(3) = 476 \rightarrow 476 = A - B \cdot log\,5$

Restando las ecuaciones obtenemos:

$$44 = B(log\,5 - log\,2) \rightarrow B = \frac{44}{log\,5 - log\,2} = 110{,}6 \rightarrow A = 476 + \frac{44}{log\,5 - log\,2} \cdot log\,5 = 553{,}3$$

$N(t) = 553{,}3 - 110{,}6 \cdot log(t + 2)$

b) El año 2020 se corresponde con $t = 20$.

$N(20) = 553{,}3 - 110{,}6 \cdot log\,22 \approx 405$

En el año 2020 se esperan unos 405 robos.

60 **Un cultivo de bacterias comienza con 100 células. Media hora después hay 435. Si sigue un crecimiento exponencial del tipo $y = ke^{at}$ (t en minutos), calcula k y a y representa la función. ¿Cuánto tardará en llegar a 5 000 bacterias?**

$y = ka^t$

$t = 0,\ y = 100 \rightarrow 100 = k \cdot a^0 \rightarrow k = 100$

$t = 30,\ y = 435 \rightarrow 435 = 100 \cdot a^{30} \rightarrow a^{30} = 4{,}35 \rightarrow$

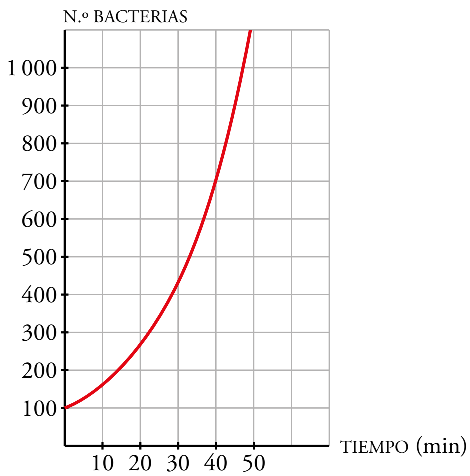
$\rightarrow a = 4{,}35^{1/30} \rightarrow a \approx 1{,}05$

La función es $y = 100 \cdot 1{,}05^x$.

Si $y = 5\,000 \rightarrow 5\,000 = 100 \cdot 1{,}05^x$

$$50 = 1{,}05^x \rightarrow x = \frac{log\,50}{log\,1{,}05} \approx 80 \text{ min}$$

Tardará 80 minutos, aproximadamente.



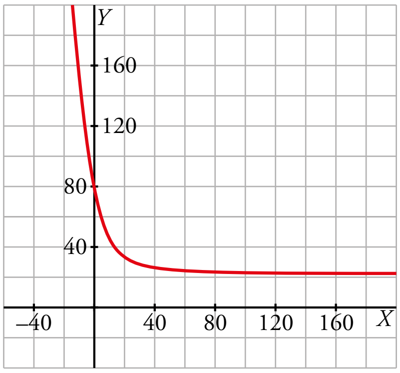
61 Una taza de café recién hecho está a 75 °C. Después de 3 minutos en una habitación a 21 °C, la temperatura del café ha descendido a 64 °C. Si la temperatura, T, del café en cada instante t viene dada por la expresión $T = Ae^{kt} + 21$, calcula A y k y representa la función. ¿Cuánto tendremos que esperar para que la temperatura del café sea de 45 °C?

Por los datos del problema, la función temperatura pasa por los puntos (0, 75) y (3, 64), luego:

$$75 = A \cdot e^{k \cdot 0} + 21 \ \to\ A = 54$$

$$64 = 54 \cdot e^{k \cdot 3} + 21 \ \to\ e^{3k} = \frac{43}{54} = 0{,}796 \ \to\ k = \frac{ln\, 0{,}796}{3} = -0{,}076$$

Por tanto, $T = 54 \cdot e^{-0{,}076t} + 21$



Si la temperatura del café es de 45°, entonces:

$$45 = 54 \cdot e^{-0{,}076t} + 21 \ \to\ e^{-0{,}076t} = \frac{24}{54} = 0{,}444 \ \to\ t = \frac{ln\, 0{,}444}{-0{,}076} = 10{,}7 \text{ minutos}$$

Debemos esperar 10 minutos 42 segundos para que alcance los 45°.

62 Un estudio estima que la población de un barrio va a crecer según la función $y = \dfrac{10\,000}{1 + ke^{-0{,}2t}}$ (t, años; y, habitantes).

a) El barrio tiene, actualmente, 1 250 habitantes. Halla k.

b) Calcula cuál será la población dentro de 10 años.

a) Pasa por el punto (0, 1 250) $\to$ $1\,250 = \dfrac{10\,000}{1 + k}$ $\to$ $k = \dfrac{10\,000}{1250} - 1 = 7$

b) $t = 10 \ \to\ y = \dfrac{10\,000}{1 + 7 \cdot e^{-0{,}2 \cdot 10}} \approx 5\,135$

Dentro de 10 años habrá unos 5 135 habitantes.

Página 163

63 **Un charco circular de agua se está evaporando al sol. Al cabo de t minutos su radio es $g(t) = \dfrac{15}{t+2}$ cm.**

a) Expresa el área del charco en función del tiempo.

b) ¿Cuál será el área del charco al cabo de 10 min?

c) ¿Qué relación tiene la función del apartado a) con las funciones $f(r) = \pi r^2$ y $g(t) = \dfrac{15}{t+2}$?

a) El área de un círculo es $A = \pi r^2$ por lo que podemos escribir:

$$A(t) = \pi g^2(t) = \frac{225\pi}{(t+2)^2}$$

b) $A(10) = \dfrac{225\pi}{(10+2)^2} = \dfrac{225\pi}{144} = 1{,}56\pi = 4{,}9 \text{ cm}$

c) $f(g(t)) = f\left(\dfrac{15}{t+2}\right) = \dfrac{225\pi}{(t+2)^2} = A(t)$

64 **La recta $y = 20x + 1$ corta a $y = a^x$ en $x = 0$ y $x = 4$.**

a) Calcula a.

b) Para ese valor de a, escribe la ecuación de la recta, s, que corta a $y = log_a x$ en $x = 1$ y $x = 81$.

c) ¿Qué relación hay entre las rectas r y s?

a) $\left.\begin{array}{l} y = 20x + 1 \\ y = a^x \end{array}\right\} \to 20x + 1 = a^x \to x = 0; x = 4$

Si $x = 0$: $1 = 1 \to$ El valor $x = 0$ no ofrece información relativa al valor de a.

Si $x = 4$: $81 = a^4 \to a = 3$

b) Si $x = 1$: $y = log_3 1 \to y = 0 \to P(1, 0) \in s$

Si $x = 81$: $y = log_3 81 \to y = 4 \to P(81, 4) \in s$

$\overrightarrow{PQ} = (80, 4)$ es vector director de s. Por tanto:

$s: \dfrac{x-1}{80} = \dfrac{y}{4} \to y = \dfrac{x-1}{20}$

c) Veamos que r y s son secantes:

$20x + 1 = \dfrac{x-1}{20} \to 400x - x = -1 - 20 \to x = -\dfrac{21}{399} = 0{,}05 \to y = 0{,}05$

Por otra parte, el vector director de r es $\vec{u}(1, 20)$ y el de s es $\vec{v}(20, 1)$ por lo que las rectas son secantes pero no son perpendiculares.

Cuestiones teóricas

65 **Dada la función $y = a^x$, contesta:**

a) ¿Puede ser negativa la y? ¿Y la x?

b) ¿Para qué valores de a es decreciente?

c) ¿Cuál es el punto por el que pasan todas las funciones del tipo $y = log_a x$?

d) ¿Para qué valores de x se verifica $0 < a^x < 1$ siendo $a > 1$? ¿Y si $0 < a < 1$?

a) La y no puede ser negativa por ser una potencia de base positiva.

La x sí puede ser negativa porque el dominio de la función es todo $\mathbb{R}$.

b) Si $0 < a < 1$, la función es decreciente.

c) Todas pasan por el punto (1, 0), ya que $x = 1 \rightarrow y = log_a 1 = 0$.

d) Para valores de x negativos se cumple que $0 < a^x < 1$ si $a > 1$.

Si $0 < a < 1$, se cumple que $0 < a^x < 1$, cuando $x > 0$.

66 **Si $f(x) = 2^x$ y $g(x) = log_2 x$, ¿cuál es la función $(g \circ f)(x)$? ¿Y $(f \circ g)(x)$?**

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2^x) = log_2 (2^x) = x$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(log_2 x) = 2^{log_2 x} = x$

67 **Representa las funciones $y = sen\, x$, $y = cos\, x$, $y = tg\, x$.**

a) ¿Cuál es su periodo?

b) Di cuál es el dominio de definición de cada una.

c) ¿Entre qué valores varían?

a) Las dos primeras funciones son periódicas de periodo 2π. La tercera es periódica de periodo π.

b) El dominio de las dos primeras es $\mathbb{R}$.

El dominio de la función tangente es $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

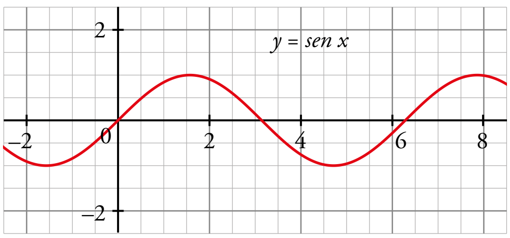
c) Las funciones *seno* y *coseno* toman valores comprendidos entre –1 y 1. El recorrido de la función tangente es $\mathbb{R}$.

68 **Representa las funciones:**

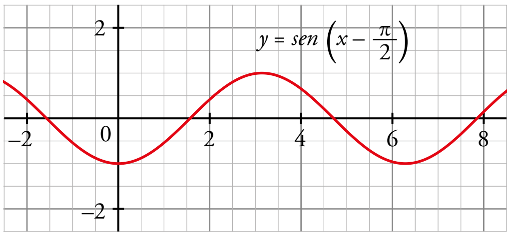
$$y = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad y = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad y = |sen\, x| \qquad y = |cos\, x|$$

a partir de las gráficas de $y = sen\, x$ e $y = cos\, x$.

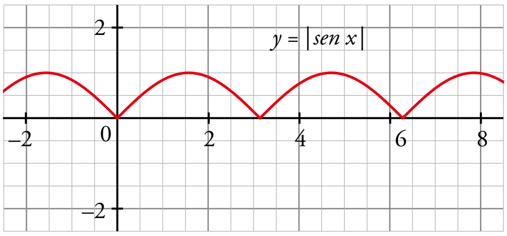
• *sen*(*x*)



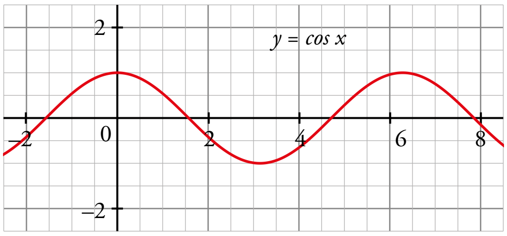
$sen\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$: desplazamos la gráfica $\frac{\pi}{2}$ a la derecha.



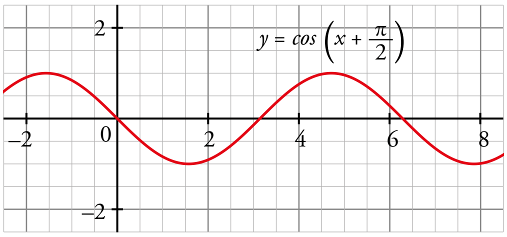
$|sen(x)|$: valor absoluto, tomamos solamente los valores como positivos en y.



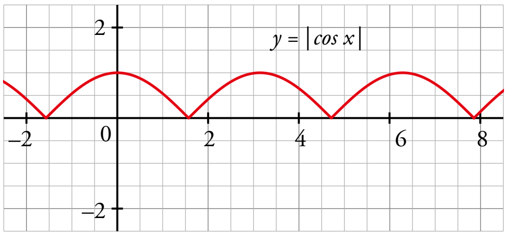
- $cos(x)$



$cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$: desplazamos la gráfica $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda.



$|cos(x)|$: tomamos solamente los valores como positivos en y.



69 Justifica cuál de estas funciones es la inversa de $y = 3^x - 2$.

a) $y = 2 + log_3 x$ **b)** $y = \sqrt[3]{x+2}$ **c)** $y = log_3 (x+2)$

La función del apartado c) es la función inversa de la dada.

Si llamamos $f(x) = 3^x - 2$ y $f^{-1}(x) = log_3 (x+2)$, entonces:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f[log_3 (x+2)] = 3^{log_3 (x+2)} - 2 = x + 2 - 2 = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(3^x - 2) = log_3 (3^x - 2 + 2) = log_3 (3^x) = x$$

70 ¿Verdadero o falso? Comprueba y justifica.

a) Las gráficas de $y = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ e $y = cos\ x$ son iguales.

b) En la función $y = a^x$ no podemos dar a x valores negativos cuando $0 < a < 1$.

c) Las funciones $y = log(x - a)$ e $y = ln(x - a)$ cortan al eje X en un mismo punto.

d) Las funciones $y = ln\ x$ e $y = \frac{1}{x}$ se cortan en un punto.

a) Verdadero.

b) Falso: por ejemplo $a = \frac{1}{2} \rightarrow y = 0,5^x$

Si $x = -1 \rightarrow y = 0,5^{-1} = 2$

c) Verdadero. Las dos gráficas cortarán al eje X cuando $x - a = 1$, es decir, cuando $x = a + 1$.

d) Verdadero.

$y = \frac{1}{x}$ tiende a 0 cuando x tiende a $+\infty$ y tiende a $+\infty$ cuando x tiende a 0.

$y = ln\ x$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$ y tiende a $-\infty$ cuando x tiende a 0.

Las dos funciones son continuas, así que se cortan en un punto con abscisa positiva.

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 3.1. (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.)

Página 163

1 Dadas $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$, halla:

a) $f[g(2)]$ b) $g[f(15)]$ c) $f \circ g$ d) $g^{-1}(x)$

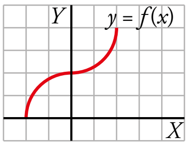
a) $f[g(2)] = f(-1) = 0$

b) $g[f(15)] = g(4) = 1$

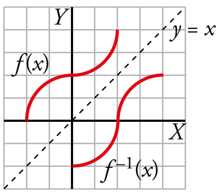
c) $(f \circ g)\ (x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3}+1} = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$

d) $y = \dfrac{1}{x-3} \to x = \dfrac{1}{y-3} \to y = 3 + \dfrac{1}{x}$

2 Representa la gráfica de la función inversa de $y = f(x)$.



La función $f^{-1}(x)$ es simétrica a $f(x)$ respecto a la recta $y = x$. Así:



3 La gráfica de una función $y = a + b\ log_2\ (x+2)$ pasa por los puntos (0, 1) y (2, 0). Halla a y b y justifica si se trata de una función creciente o decreciente.

Pasa por (0, 1) $\to$ $1 = a + b\ log_2\ 2 \to 1 = a + b$

Pasa por (2, 0) $\to$ $0 = a + b\ log_2\ 4 \to 0 = a + 2b$

$$\left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ a+2b=0 \end{array}\right\} \to a = 2,\ b = -1$$

$y = 2 - log_2\ (x+2)$

Se trata de una función decreciente porque su gráfica es el resultado de aplicar dos traslaciones a la función que se obtiene haciendo la simétrica de $y = log_2\ x$ respecto del eje X.

4 El precio de una furgoneta baja un 8 % cada año. Si costó 18 000 €, ¿cuánto tardará en reducirse a la mitad?

El índice de variación anual es $1 - 0{,}08 = 0{,}92$.

Si x son los años transcurridos, la función que describe el precio de la furgoneta es $y = 18\,000 \cdot 0{,}92^x$.

La mitad de su precio es 9 000 €. Por tanto:

$$9\,000 = 18\,000 \cdot 0{,}92^x \to 0{,}5 = 0{,}92^x \to x = \frac{log\ 0{,}5}{log\ 0{,}92} = 8{,}31$$

Tardará 8 años y casi 4 meses en reducirse el precio a la mitad.

5 **Un cultivo de bacterias comienza con 50 células. Dos horas después hay 162. Si ese cultivo crece de forma exponencial según una función $y = ke^{at}$ (t en horas) calcula k y a. ¿Cuánto tardará en llegar a 5 000 bacterias?**

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ y = 50 \end{array}\right\} \rightarrow 50 = k$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 2 \\ y = 162 \end{array}\right\} \rightarrow 162 = 50e^{2a} \rightarrow 3{,}24 = e^{2a} \rightarrow a = \frac{ln\,3{,}24}{2} = 0{,}588$$

La función es $y = 50e^{0{,}588t}$.

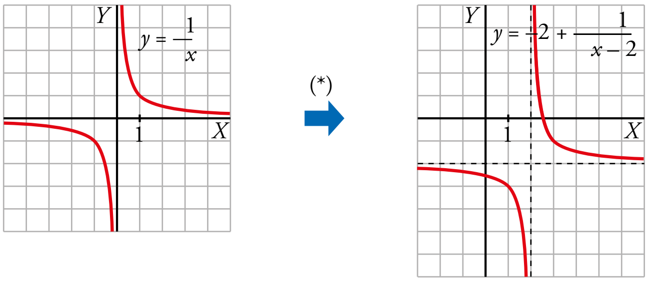
Llegará a 5 000 bacterias cuando:

$$5\,000 = 50e^{0{,}588t} \rightarrow 100 = e^{0{,}588t} \rightarrow t = \frac{ln\,100}{0{,}588} = 7{,}8$$

Al cabo de 7 horas y 48 minutos, desde el inicio del cultivo, llegará a las 5 000 bacterias.

6 **Representa $y = \frac{1}{x}$. A partir de ella, dibuja $y = \frac{-2x+5}{x-2}$.**

$$\begin{array}{r|l} -2x + 5 & x - 2 \\ \cline{2-2} 2x - 4 & -2 \\ 1 & \end{array} \rightarrow \frac{-2x+5}{x-2} = -2 + \frac{1}{x-2}$$

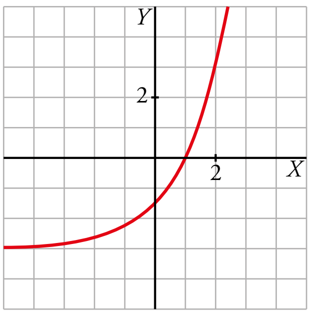


(*) La gráfica de $y = \frac{-2x+5}{x-2}$ es como la de $y = \frac{1}{x}$ trasladada 2 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo.

7 **Representa y halla la inversa en cada caso.**

a) $y = 1{,}5 \cdot 2^x - 3$ **b)** $y = 2 + ln\,(x + 1)$

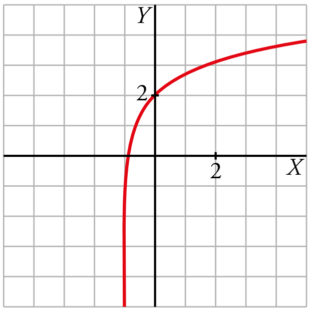
a)



$$y = 1{,}5 \cdot 2^x - 3 \rightarrow x = 1{,}5 \cdot 2^y - 3 \rightarrow y = log_2 \frac{x+3}{1{,}5}$$

La función inversa es $y = log_2 \frac{x+3}{1{,}5}$

b)

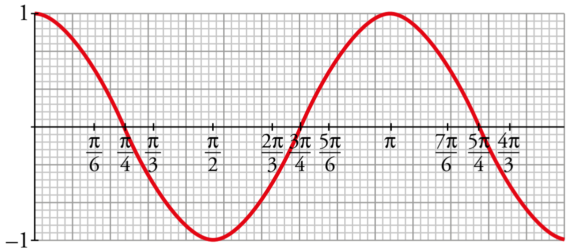


$y = 2 + ln\,(x + 1) \;\rightarrow\; x = 2 + ln\,(y + 1) \;\rightarrow\; y = e^{x-2} - 1$

La función inversa es $y = e^{x-2} - 1$.

8 **Asocia a esta gráfica una de las siguientes expresiones y di cuál es su periodo:**

a) $y = cos\,x$ **b)** $y = cos\,2x$ **c)** $y = 2cos\,x$



Completa estos puntos para que pertenezcan a la función $y = 2\,cos\,x$**:** $(5\pi/6, \ldots)$, $(4\pi/3, \ldots)$, $(-\pi/4, \ldots)$.

Represéntala en el intervalo $[0, 2\pi]$**.**

La gráfica corresponde a la función b), $y = cos\,2x$.

Su periodo es $\dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{4\pi}{4} = \pi$.

Los puntos buscados son $\left(\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{4\pi}{3}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$.

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

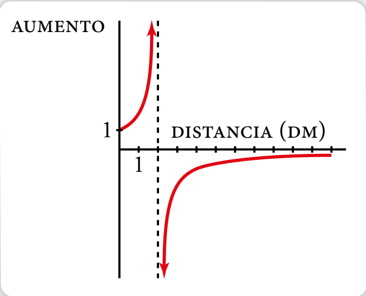
6 LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD Y RAMAS INFINITAS

C.E.: CE 1.5. (EA 1.5.2.) CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.-EA 1.6.3.-EA 1.6.5.) CE 1.8. (EA 1.8.1.) CE 1.10. (EA 1.10.1.)

Página 165

Resuelve

A través de una lupa



El *aumento* A producido por cierta lupa viene dado por la siguiente ecuación:

$$A = \frac{2}{2-d}$$

donde d es la *distancia* (en decímetros) entre el objeto que queremos observar y la lupa.

Si acercamos el objeto a la lupa hasta tocarla $(d = 0)$, su tamaño se mantiene igual. Esto, en términos de límites, se escribe así:

$$\lim_{d \to 0} A = 1$$

¿Cómo se escribiría lo siguiente en términos de límites?

a) Si acercamos el objeto a 2 dm, aproximadamente, se hace más y más grande. Además, el objeto se verá al derecho si $d < 2$, o invertido, si $d > 2$.

$\lim_{d \to 2^-} A = \ldots \qquad \lim_{d \to 2^+} A = \ldots$

b) Si alejamos la lupa del objeto, este se ve cada vez más pequeño.

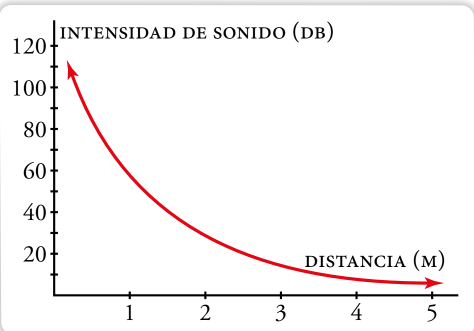
$\lim_{d \to +\infty} A = \ldots$

a) $\lim_{d \to 2^-} A = +\infty$

$\lim_{d \to 2^+} A = -\infty$

b) $\lim_{d \to +\infty} A = 0$

Ruido y silencio



Si acercamos la oreja a un foco de sonido, este se hace insoportable. Si la alejamos mucho, deja de oírse. Traduce estos hechos a límites, llamando I a la *intensidad del sonido* (en decibelios) y d a la *distancia* (en metros) a la que nos colocamos del foco emisor:

$\lim_{d \to 0} I = \ldots \qquad \lim_{d \to +\infty} I = \ldots$

$\lim_{d \to 0} I = +\infty \qquad \lim_{d \to +\infty} I = 0$

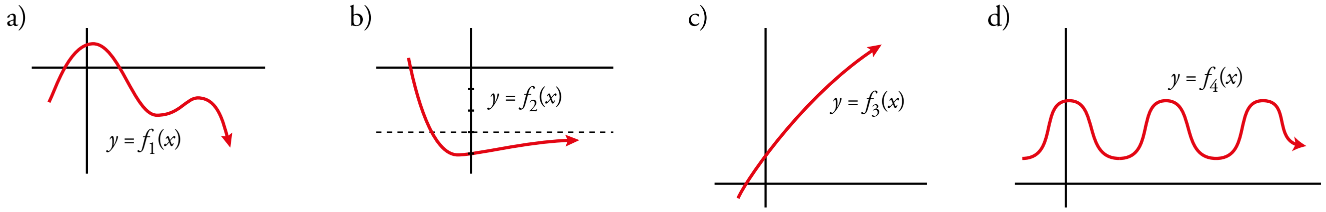
1 COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN EL INFINITO

C.E.: CE 3.3. (EA 3.3.1.-EA 3.3.2.)

Página 167

1 **Cabezas pensantes.** **[La búsqueda de los límites propuestos permite trabajar esta técnica].**

Di el límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones:



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = -\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = -3$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x)$ no existe.

2 ▸ CALCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES CUANDO $x \to +\infty$

C.E.: CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.-EA 1.6.3.) CE 1.12. (EA 1.12.1-EA 1.12.2.-EA 1.12.3.) CE 3.3. (EA 3.3.1.-EA 3.3.2.)

Página 168

1 Di el valor del límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$ **b)** $f(x) = 5x^3 + 7x$ **c)** $f(x) = x - 3x^4$

d) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ **e)** $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{-5}$

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$

d) 0 e) 0 f) $-\infty$

2 Como $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 200x^2) = +\infty$, halla un valor de x para el cual sea $x^3 - 200x^2 > 1\,000\,000$.

Por ejemplo, para $x = 1\,000$, $f(x) = 800\,000\,000$.

3 [La búsqueda del valor que pide el enunciado permite poner en práctica la asunción de riesgos de la dimensión productiva de esta clave].

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 - 10x} = 0$, halla un valor de x para el cual sea $\dfrac{1}{x^2 - 10x} < 0{,}0001$.

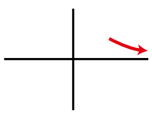
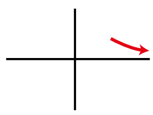
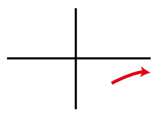
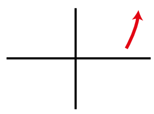
Por ejemplo, para $x = 1\,000$, $f(x) = 0{,}0000\overset{\frown}{01}$.

Página 169

4 Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:

a) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{3}{x}$ **c)** $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **d)** $f(x) = 3x - 5$

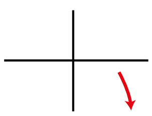
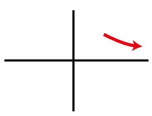
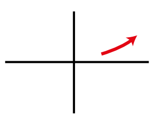
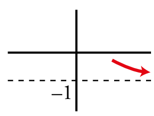
a) 0 b) 0 c) 0 d) $+\infty$

5 Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{-5}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}$

a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$ d) -1

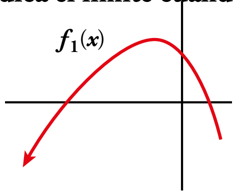
3 ▸ LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CUANDO $x \to -\infty$

C.E.: CE 3.3. (EA 3.3.1.-EA 3.3.2.)

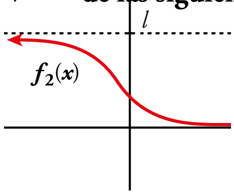
Página 170

1 **Indica el límite cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones:**

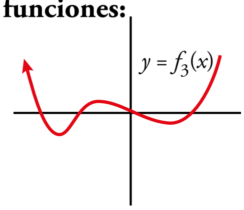
a)



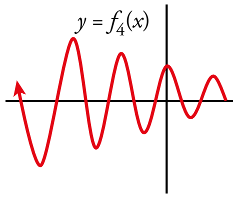
b)



c)



d)



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = l$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = +\infty$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_4(x) =$ no existe

4 ▶ CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES CUANDO $x \to -\infty$

C.E.: CE 3.3. (EA 3.3.1.-EA 3.3.2.)

Página 171

1 **Halla los límites cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$ de las funciones siguientes:**

a) $f(x) = -2x^3 + 7x^2$ **b)** $f(x) = 3x^4 - 7x$ **c)** $f(x) = 10^x$

d) $f(x) = \sqrt{5x-8}$ **e)** $f(x) = \sqrt{-2x^2+1}$ **f)** $f(x) = -5^x$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + 7x^2) = \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^3 + 7x^2) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^4 - 7x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^4 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^4 - 7x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^4 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 10^x = 0$

Ya que para $x = -10, 10^{-10} = \dfrac{1}{10^{10}} = 0{,}00000000001$ y análogamente ocurriría para valores negativos de x menores que -10.

De forma similar a la anterior, podemos comprobar que $\lim\limits_{x \to +\infty} 10^x = +\infty$.

d) El límite cuando x tiende a $-\infty$ no tiene sentido porque la función está definida para $x \ge \dfrac{8}{5}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{5x-8} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{5x} = +\infty$ porque el radicando tiende a $+\infty$.

e) No tiene sentido calcular ninguno de los dos límites porque el dominio de definición de la función es el intervalo $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} -5^x = 0$

Ya que para $x = -10$, $-5^{-10} = -\dfrac{1}{5^{10}} = -0{,}0000001024$ y análogamente ocurriría para valores negativos de x menores que -10.

De forma similar a la anterior, podemos comprobar que $\lim\limits_{x \to +\infty} -5^x = -\infty$.

2 Parada de 5 minutos. **[La reflexión por parejas que plantea esta técnica puede ser una buena forma de que el alumnado coopere para calcular los límites propuestos].**

Halla los límites cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$ de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \sqrt{3-x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2+3}{-x^3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{-x^3}{x^2+3}$ **d)** $f(x) = \dfrac{5x^3-10}{3x^3+10x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{3-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$ porque el radicando tiende a $+\infty$.

El límite cuando x tiende a $+\infty$ no tiene sentido porque la función está definida solo cuando $x \le 3$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+3}{-x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{-x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+3}{-x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{-x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{-x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3}{x^2+3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3}{x^2+3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3-10}{3x^3+10x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3}{3x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3-10}{3x^3+10x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3}{3x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3}$

5 COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. LÍMITES Y CONTINUIDAD

C.E.: CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.-EA 1.6.3.-EA 1.6.5.) CE 1.10. (EA 1.10.1.) CE 1.12. (EA 1.12.1.-EA 1.12.2.-EA 1.12.3.) CE 3.3. (EA 3.3.1.-EA 3.3.2.) CE 3.4. (EA 3.4.1.)

Página 172

1 **Comprueba que $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ dando a x valores menores que 1, cada vez más próximos a 1, como, por ejemplo, 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; …**

$x = 0{,}9 \to \dfrac{1}{(0{,}9-1)^2} = 100$

$x = 0{,}99 \to \dfrac{1}{(0{,}99-1)^2} = 10\,000$

$x = 0{,}999 \to \dfrac{1}{(0{,}999-1)^2} = 1\,000\,000$

$x = 0{,}9999 \to \dfrac{1}{(0{,}9999-1)^2} = 100\,000\,000$

$\vdots$

$x = \underbrace{0{,}99\ldots99}_{n\text{ - veces}} \to \dfrac{1}{(0{,}99\ldots9-1)^2} = \underbrace{100\ldots0}_{2n\text{ - veces}}$

Luego $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

2 **Comprueba, dando valores a la variable x, las siguientes igualdades:**

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2+5) = 6$

a) $x = 0{,}9 \to \dfrac{1}{0{,}9-1} = -10$

$x = 0{,}99 \to \dfrac{1}{0{,}99-1} = -100$

$x = 0{,}999 \to \dfrac{1}{0{,}999-1} = -1\,000$

$\vdots$

$x = \underbrace{0{,}9\ldots9}_{n\text{ - veces}} \to \dfrac{1}{\underbrace{0{,}9\ldots9}_{\text{n - veces}}-1} = \underbrace{-10\ldots0}_{n\text{ - veces}}$

Luego $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$

b) $x = 0{,}9 \to (0{,}9)^2 + 5 = 5{,}81$

$x = 0{,}99 \to (0{,}99)^2 + 5 = 5{,}9801$

$x = 0{,}999 \to (0{,}999)^2 + 5 = 5{,}998001$

$x = 0{,}9999 \to (0{,}9999)^2 + 5 = 5{,}99980001$

Luego $\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2+5) = 6$

Página 175

3 **Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y qué tipo de discontinuidad presenta:**

a) $y = \dfrac{x+2}{x-3}$ **b)** $y = \dfrac{x^2-3x}{x}$

c) $y = \dfrac{x^2-3}{x}$ **d)** $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

a) Rama infinita en $x = 3$ (asíntota vertical).

b) Discontinuidad evitable en $x = 0$ (le falta ese punto).

c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).

d) Salto en $x = 4$.

4 **[Las explicaciones que debe dar el alumnado permiten trabajar la destreza expresión oral de esta clave].**

Explica por qué son continuas las siguientes funciones y determina el intervalo en el que están definidas:

a) $y = x^2 - 5$ **b)** $y = \sqrt{5-x}$

c) $y = \begin{cases} 3x-4 & \text{si } x < 3 \\ x+2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ **d)** $y = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 5 \end{cases}$

a) Está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$, por ser una función polinómica.

b) Está definida y es continua en $(-\infty, 5]$.

Las funciones dadas mediante una expresión analítica sencilla (las que conocemos) son continuas donde están definidas.

c) Está definida en todo $\mathbb{R}$. Es continua, también, en todo $\mathbb{R}$. El único punto en que se duda es el 3: las dos ramas toman el mismo valor para $x = 3$.

$3 \cdot 3 - 4 = 9 - 4 = 5 \qquad 3 + 2 = 5$

Por tanto, las dos ramas empalman en el punto (3, 5). La función es también continua en $x = 3$.

d) También las dos ramas empalman en el punto (2, 2). Por tanto, la función es continua en el intervalo en el que está definida: [0, 5).

5 **Halla m para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$:**

$$y = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x < 3 \\ mx + 10 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

y es continua en $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ por serlo las funciones $f_1(x) = x^2 - 5$ y $f_2(x) = mx + 10$.

Hemos de procurar, pues, que también lo sea en el punto de empalme, $x = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} y = f_1(3) = (3)^2 - 5 = 4 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} y = f_2(3) = 3m + 10 \end{array}\right\} 4 = 3m + 10 \to 3m = 4 - 10 \to 3m = -6 \to m = \frac{-6}{3} \to m = -2.$$

Para que y sea continua en $x = 3$, ha de ser $m = -2$.

6 **Calcula m y n para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$:**

$$f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{si } x<0\\ x^2+mx+n & \text{si } 0\le x\le 6\\ 45-x^2 & \text{si } x>6\end{cases}$$

y es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, 6) \cup (6, +\infty)$ por serlo las funciones $f_1(x) = 2x + 3$, $f_2(x) = x^2 + mx + n$ y $f_3(x) = 45 - x^2$.

Hemos de procurar, pues, que también lo sea en los puntos de empalme.

- $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(0)=3 \\ f_2(0)=n \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} y=3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} y=n \end{array}\right\} 3 = n$$

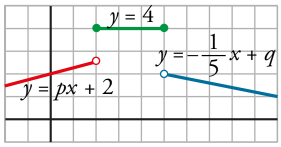
Para que y sea continua en $x = 0$ ha de ser $n = 3$.

- $x = 6$

$$\left.\begin{array}{l} f_2(6)=36+6m+3 \\ f_3(6)=45-36=9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 6^-} y=6m+39 \\ \lim\limits_{x\to 6^+} y=9 \end{array}\right\} 6m + 39 = 9 \to 6m = -30 \to m = -\frac{30}{6} \to m = -5.$$

Si $m = -5$ y $n = 3$, entonces $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

7 **Calcula p y q para que f sea continua en $\mathbb{R}$:**



$$f(x)=\begin{cases}px+2 & \text{si } x<2\\ 4 & \text{si } 2\le x\le 5\\ -\frac{1}{5}x+q & \text{si } x>5\end{cases}$$

$f(x)$ es continua en $(-\infty, 2) \cup (2, 5) \cup (5, +\infty)$ por serlo las funciones $f_1(x) = px + 2$, $f_2(x) = 4$ y $f_3(x) = -\frac{1}{5}x + q$.

Hemos de procurar, pues, que también lo sea en los puntos de empalme.

- $x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(2)=2p+2 \\ f_2(2)=4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2p+2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4 \end{array}\right\} 2p + 2 = 4 \to 2p = 20 \to p = 1.$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$ ha de ser $p = 1$.

- $x = 5$

$$\left.\begin{array}{l} f_2(5)=4 \\ f_3(5)=-1+q \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=4 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=-1+q \end{array}\right\} 4 = -1 + q \to q = 5.$$

Si $p = 1$ y $q = 5$, entonces $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

6 ▶ CÁLCULO DE LÍMITES EN UN PUNTO

C.E.: CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.-EA 1.6.3.) CE 1.12. (EA 1.12.1-EA 1.12.2.-EA 1.12.3.) CE 3.3. (EA 3.3.1.-EA 3.3.2.)

Página 176

1 **Calcula razonadamente el valor de los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{x-2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0,1} \log x$

a) $-\frac{3}{2}$ b) 0 c) $\sqrt{3}$ d) -1

Página 177

2 **Calcula n para para que exista el límite en $x = -1$.**

$$f(x) = \begin{cases} n - x^3 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 4 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ tenga límite en $x = -1$ ha de cumplirse $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} f_1(x) = f_1(-1) = n - (-1)^3$ pues $f_1(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto $\lim\limits_{x \to -1} f_1(x)$ coincide con $f_1(-1)$.

$f_1(-1) = n + 1$.

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f_2(x) = f_2(-1) = 2\ (-1) + 4 = 12$ pues $f_2(-1)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto $\lim\limits_{x \to -1} f_2(x)$ coincide con $f_2(-1)$.

Ha de cumplirse, pues, $n + 1 = 2 \ \to\ n = 1$.

Para $n = 1$, $f(x)$ tiene límite en -1 y vale 2:

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$.

3 **Calcula k para que esta función tenga límite en $x = 3$:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k & \text{si } x \leq 3 \\ 7 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Halla su límite en $x = 0$ y en $x = 11$.

Para que $f(x)$ tenga límite en $x = 3$ ha de cumplirse $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f_1(x) = f_1(3)\ 3^3 - 2 \cdot 3 + k = 27 - 6 + k = k + 21$ pues $f_1(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto $\lim\limits_{x \to 3} f_1(x)$ coincide con $f_1(3)$.

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f_2(x) = f_2(3) = 7$ pues $f_2(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto $\lim\limits_{x \to 3} f_2(x)$ coincide con $f_2(3)$.

Ha de cumplirse, pues, $k + 21 = 7 \ \to\ k = -14$.

Para $k = -14$, $f(x)$ tiene límite en 3 y vale 7.

Digamos, también, en consecuencia, para $k = -14$ $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = f_1(0) = 0^3 - 2 \cdot 0 - 14 = -14$

$\lim\limits_{x \to 11} f(x) = f(11) = f_2(11) = 7$

4 **Halla el límite de esta función en $x = 0$, $x = 3$ y $x = 4$:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 5x + 3 & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

• Límite en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^3 - 5x + 3) = 0^3 - 5 \cdot 0 + 3 = 3$$

• Límite en $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (x^3 - 5x + 3) = 3^3 - 5 \cdot 3 + 3 = 15$$

• Límite en $x = 4$:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} (x^3 - 5x + 3) = 4^3 - 5 \cdot 4 + 3 = 47$$

5 **Halla el límite de esta función en $x = 3$:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x < 3 \\ -x + 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Halla también su límite en $x = 1$ y en $x = 7$.

• $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} f_2(x) = f_2(3) = -3 + 2 = -1.$

• $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} f_1(x) = f_1(1) = 2 \cdot 1 + 5 = 7.$

• $\lim_{x \to 7} f(x) = \lim_{x \to 7} f_2(x) = f_2(7) = -7 + 2 = -5.$

Página 179

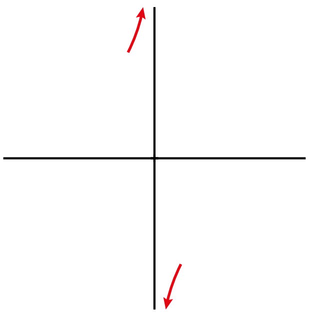
6 **Calcula cada uno de los siguientes límites y representa los resultados:**

a) $\lim_{x \to 0} \frac{x-3}{x}$ **b)** $\lim_{x \to 0} \frac{x-3}{x^2}$ **c)** $\lim_{x \to 1} \frac{x^3}{(x-1)^2}$

a) El denominador se anula en $x = 0$, pero no el numerador. Por tanto, el límite es infinito, con signo más o menos.

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \;\to\; \frac{-0{,}01 - 3}{-0{,}01} = 301 \;\to\; \lim_{x \to 0^-} \frac{x-3}{x} = +\infty$

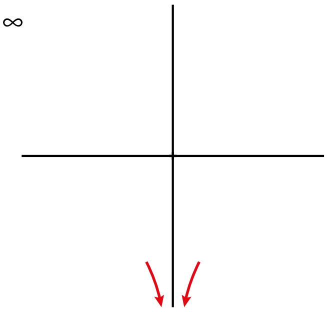
DERECHA: $x = 0{,}01 \;\to\; \frac{0{,}01 - 3}{0{,}01} = -299 \;\to\; \lim_{x \to 0^+} \frac{x-3}{x} = -\infty$



b) El denominador se anula en $x = 0$, pero no el numerador. Por tanto, el límite es infinito, con signo más o menos.

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \;\to\; \frac{-0{,}01 - 3}{(-0{,}01)^2} = -30\,100 \;\to\; \lim_{x \to 0^-} \frac{x-3}{x^2} = -\infty$

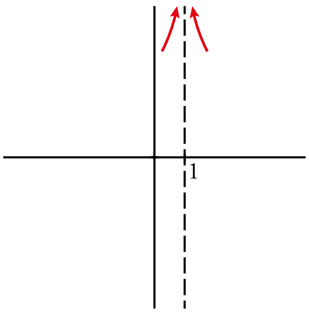
DERECHA: $x = 0{,}01 \;\to\; \frac{0{,}01 - 3}{0{,}01^2} = -29\,900 \;\to\; \lim_{x \to 0^+} \frac{x-3}{x^2} = -\infty$



c) El denominador se anula en $x = 1$, pero no el numerador. Por tanto, el límite es infinito, con signo más o menos.

IZQUIERDA: $x = 0{,}99 \rightarrow \dfrac{0{,}99^3}{(0{,}99-1)^2} = 9\,703 \rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$

DERECHA: $x = 1{,}01 \rightarrow \dfrac{1{,}01^3}{(1{,}01-1)^2} = 10\,303 \rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$



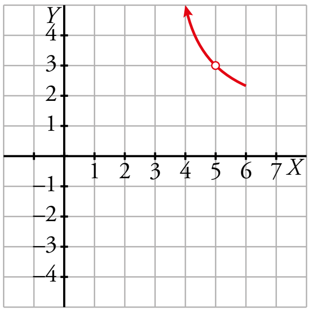
7 **a)** $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-4x-5}{x^2-8x+15}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3-5x^2}{x^2}$

a) Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 5$.

Simplificamos la fracción:

$$\frac{x^2-4x-5}{x^2-8x+15} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-3)(x-5)} = \frac{x+1}{x-3}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2-4x-5}{x^2-8x+15} = \lim_{x \to 5} \frac{x+1}{x-3} = 3$$



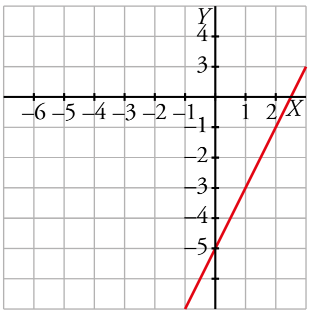
b) Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 0$.

Simplificamos la fracción:

$$\frac{2x^3-5x^2}{x^2} = \frac{x^2(2x-5)}{x^2} = 2x-5$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^3-5x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} (2x-5) = -5$$

$y = 2x - 5$



8 **a)** $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+x}$ **b)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x^3+3x^2}{x^4}$

a) Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 1$.

Simplificamos la fracción $\rightarrow \dfrac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+x} = \dfrac{(x+5)(x-1)}{x(x-1)^2} = \dfrac{x+5}{x(x-1)}$

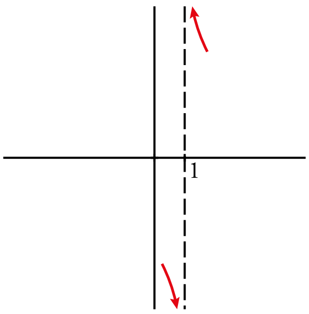
$\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+x} = \lim_{x \to 1} \frac{x+5}{x(x-1)}$ $\rightarrow$ Ahora se anula el denominador, pero no el numerador. Por tanto, los límites laterales son $\pm\infty$.

Estudiamos el signo de la función a uno y otro lado de 1.

IZQUIERDA: $x = 0{,}99 \rightarrow \dfrac{0{,}99^2+4\cdot 0{,}99-5}{0{,}99^3-2\cdot 0{,}99^2+0{,}99} = -605 \rightarrow \displaystyle \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+x} = -\infty$

DERECHA $x = 1{,}01 \rightarrow \dfrac{1{,}01^2+4\cdot 1{,}01-5}{1{,}01^3-2\cdot 1{,}01^2+1{,}01} = 595 \rightarrow \displaystyle \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+x} = +\infty$

Por tanto, el límite pedido no existe.



b) Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 0$.

Simplificamos la fracción $\rightarrow \dfrac{x^3+3x^2}{x^4} = \dfrac{x^2(x+3)}{x^4} = \dfrac{x+3}{x^2}$

$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x^3+3x^2}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{x+3}{x^2}$ $\rightarrow$ Ahora se anula el denominador, pero no el numerador. Por tanto, los límites laterales son $\pm\infty$.

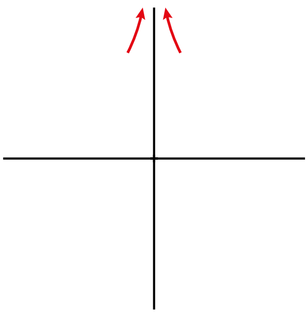
Estudiamos la función a uno y otro lado de 0.

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \rightarrow \dfrac{(-0{,}01)^3+3\cdot(-0{,}01)^2}{(-0{,}01)^4} = 29\,900 \rightarrow \displaystyle \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3+3x^2}{x^4} = +\infty$

DERECHA $x = 0{,}01 \rightarrow \dfrac{0{,}01^3+3\cdot 0{,}01^2}{0{,}01^4} = 30\,100 \rightarrow \displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3+3x^2}{x^4} = +\infty$

Por tanto, el límite de esta función cuando $x \rightarrow 0$ es $+\infty$.

$y = \dfrac{x+3}{x^2}$



7 ▶ RAMAS INFINITAS. ASÍNTOTAS

C.E.: CE 1.12. (EA 1.12.1-EA 1.12.2.-EA 1.12.3.) **CE 3.3.** (EA 3.3.1.-EA 3.3.2.)

Página 181

1 **Determina las asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas:**

a) $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$ **b)** $y = \dfrac{3x^2-7}{x-2}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x}$ **d)** $y = -\dfrac{1}{x^2}$ **e)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

a) Como el denominador se anula cuando $x = 2$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{x-2} = \frac{7}{0} = \pm\infty$$

IZQUIERDA: $x = 1{,}99 \to \dfrac{3 \cdot 1{,}99 + 1}{1{,}99 - 2} = -697 \to \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x+1}{x-2} = -\infty$

DERECHA: $x = 2{,}01 \to \dfrac{3 \cdot 2{,}01 + 1}{2{,}01 - 2} = 703 \to \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x+1}{x-2} = +\infty$

Por tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3 = 3$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3 = 3$$

Por tanto, la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal.

Para saber la posición de la curva respecto de la asíntota horizontal, debemos tener en cuenta que $y = \dfrac{3x+1}{x-2} = 3 + \dfrac{7}{x-2}$.

Cuando $x \to +\infty$ el cociente $\dfrac{7}{x-2}$ toma valores positivos y la función está por encima de la asíntota.

Cuando $x \to -\infty$, ocurre lo contrario y la función está por debajo de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

b) Como el denominador se anula cuando $x = 2$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2-7}{x-2} = \frac{5}{0} = \pm\infty$$

IZQUIERDA: $x = 1{,}99 \to \dfrac{3 \cdot 1{,}99^2 - 7}{1{,}99 - 2} = -488{,}03 \to \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x^2-7}{x-2} = -\infty$

DERECHA: $x = 2{,}01 \to \dfrac{3 \cdot 2{,}01^2 - 7}{2{,}01 - 2} = 512{,}03 \to \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x^2-7}{x-2} = +\infty$

Por tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2-7}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2-7}{x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3x = -\infty$$

Por tanto, no tiene asíntotas de este tipo.

Ahora estudiamos las asíntotas oblicuas:

$$y = \frac{3x^2-7}{x-2} = 3x + 6 + \frac{5}{x-2}$$

La recta $y = 3x + 6$ es una asíntota oblicua ya que $\dfrac{5}{x-2}$ tiende a 0 cuando $x \to \pm\infty$.

Cuando $x \to +\infty$ el cociente $\dfrac{5}{x-2}$ toma valores positivos y la función está por encima de la asíntota oblicua.

Cuando $x \to -\infty$, ocurre lo contrario y la función está por debajo de la asíntota.

c) Como el denominador se anula cuando $x = 0$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \to \dfrac{1}{-0{,}01} = -100 \to \displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

DERECHA: $x = 0{,}01 \to \dfrac{1}{0{,}01} = 100 \to \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Cuando $x \to +\infty$, la función es positiva y está por encima de la asíntota horizontal. Cuando $x \to -\infty$, la función es negativa y está por debajo de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

d) Como el denominador se anula cuando $x = 0$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{-x^2} = \frac{1}{0} = -\infty$ porque la función siempre toma valores negativos.

Por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-x^2} = 0$$

Por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Como la función siempre toma valores negativos, está por debajo de la asíntota horizontal.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

e) La función está definida cuando $x^2 - 9 > 0$, es decir, cuando $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. En los puntos -3 y 3 se producen divisiones entre 0. Vamos a estudiar en ellos la existencia de asíntotas, pero solo podremos calcular límites por uno de los lados en cada punto.

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Porque la función siempre es positiva. Luego las rectas $x = -3$ y $x = 3$ son asíntotas verticales.

La recta $y = 0$ es claramente una asíntota horizontal porque $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} = 0$.

Tanto si $x \to +\infty$ como si $x \to -\infty$, la función queda por encima de la asíntota horizontal por tomar valores positivos.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

8 RAMAS INFINITAS EN LAS FUNCIONES RACIONALES

C.E.: CE 1.12. (EA 1.12.1-EA 1.12.2.-EA 1.12.3.) CE 3.3. (EA 3.3.1.-EA 3.3.2.)

Página 183

1 **Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones y, a partir de ellas, perfila la forma de la curva:**

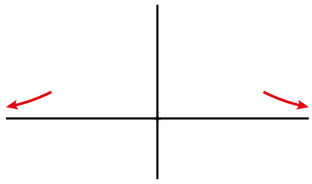
a) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ **b)** $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ **c)** $y = \dfrac{x^4}{x^2+1}$ **d)** $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$

e) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ **f)** $y = \dfrac{x^3}{1+x^2}$ **g)** $y = \dfrac{x^2+3x}{x+1}$ **h)** $y = \dfrac{2x^3-3x^2}{x-1}$

a) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$. Asíntota: $y = 0$

Como la función siempre es positiva, queda por encima de la asíntota.

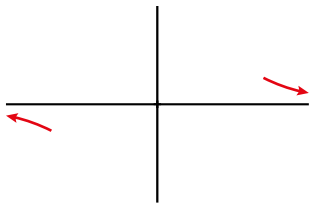


b) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$. Asíntota: $y = 0$

Estudiamos el signo de su diferencia con la asíntota:

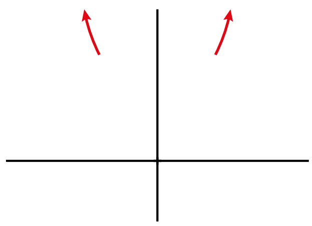
$$f(x) - 0 = \frac{x}{1+x^2} \begin{cases} + \text{ si } x \to +\infty \\ - \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$



c) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito: como *grado de* $P(x)$ – *grado de* $Q(x) = 2$, tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$ y otra cuando $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^4}{x^2+1} = +\infty \to$ Las ramas parabólicas son hacia arriba.



d) Asíntotas verticales. Obtenemos las raíces del denominador:

$x^2 - 2x = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = 2$ son asíntotas porque el numerador no se anula en estos valores.

Estudiamos la posición de la curva respecto a ellas:

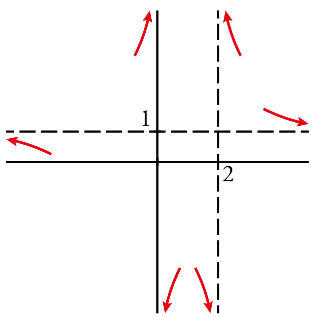
	PRÓXIM. $x = 0$		PRÓXIM. $x = 2$	
x	–0,01	0,01	1,99	2,01
$\dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$	+	–	–	+

Ramas en el infinito:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = 1$. Asíntota: $y = 1$.

Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota:

$$f(x) - 1 = \frac{x^2+2}{x^2-2x} - 1 = \frac{2+2x}{x^2-2x} \begin{cases} + \text{ si } x \to +\infty \\ - \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$

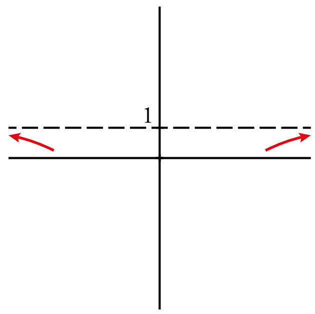


e) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$. Asíntota: $y = 1$

Estudiamos el signo de su diferencia con la asíntota:

$$f(x) - 1 = \frac{-1}{1+x^2} \begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \\ - \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$



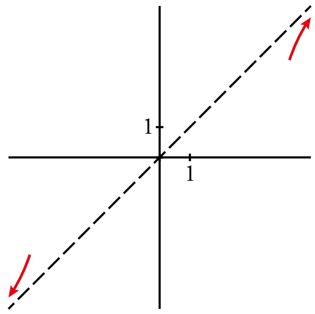
f) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula nunca.

Ramas en el infinito: como *grado de* $P(x)$ – *grado de* $Q(x) = 1$, tiene una asíntota oblicua.

$$y = \frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{x^2-1} \to \text{ La recta } y = x \text{ es la asíntota.}$$

Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota:

$$f(x) - x = \frac{-x}{x^2+1} \begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \\ + \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$



g) Asíntota vertical: $x = -1$ porque se anula el denominador y no el numerador.

Estudiamos su posición:

IZQUIERDA: $f(-1{,}01) = \dfrac{(-1{,}01)^2 + 3 \cdot (-1{,}01)}{-1{,}01+1} = 200{,}99$ (positivo)

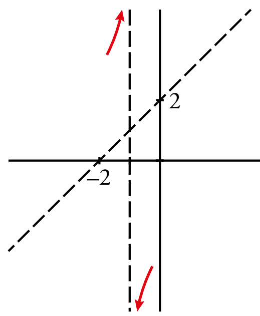
DERECHA: $f(-0{,}99) = \dfrac{(-0{,}99)^2 + 3 \cdot (-0{,}99)}{-0{,}99+1} = -198{,}99$ (negativo)

Ramas en el infinito: como *grado de* $P(x)$ – *grado de* $Q(x) = 1$, tiene una asíntota oblicua.

$$y = \frac{x^2+3x}{x+1} = x + 2 - \frac{2}{x+1} \to \text{ La recta } y = x + 2 \text{ es la asíntota.}$$

Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota:

$$f(x) - (x+2) = \frac{-2}{x+1} \begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \\ + \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$



h) Asíntota vertical: $x = 1$ porque se anula el denominador y no el numerador.

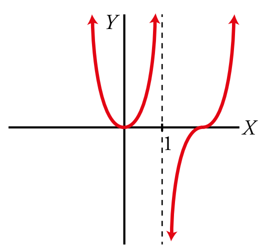
Estudiamos su posición:

IZQUIERDA: $f(0{,}99) = \dfrac{2 \cdot (0{,}99)^3 - 3 \cdot (0{,}99)^2}{0{,}99-1} = 99{,}97$ (positivo)

DERECHA: $f(1{,}01) = \dfrac{2 \cdot (1{,}01)^3 - 3 \cdot (1{,}01)^2}{1{,}01-1} = -99{,}97$ (negativo)

Ramas en el infinito: como *grado de* $P(x)$ – *grado de* $Q(x) = 2$, tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$ y otra cuando $x \to +\infty$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2}{x-1} +\infty \to \text{Rama parabólica hacia arriba} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2}{x-1} +\infty \to \text{Rama parabólica hacia arriba} \end{cases}$$



9 RAMAS INFINITAS EN LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

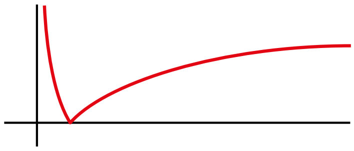
C.E.: CE 3.3. (EA 3.3.1.-EA 3.3.2.)

Página 184

1 ¿Qué te hace decir eso? **[La decisión sobre las afirmaciones puede completarse a través de las tres fases que propone esta estrategia].**

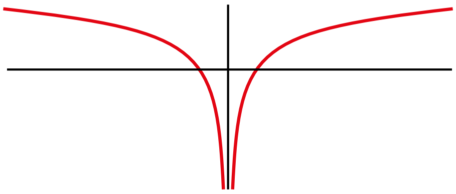
¿Verdadero o falso?

a) La función $y = |log_2 x|$ se representa así:



Tiene dos ramas infinitas: una asíntota vertical en $y = 0$ y una rama parabólica cuando $x \to +\infty$.

b) La función $y = log_2 |x|$ se representa así:



Tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y sendas ramas parabólicas en $-\infty$ y en $+\infty$.

a) Falso. Tiene una asíntota vertical en $x = 0$ no en $y = 0$.

b) Verdadero.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 1.12. (EA 1.12.1.-EA 1.12.2.-EA 1.12.3.)

Página 185

1. Cálculo de límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$

Hazlo tú

- **Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ en los siguientes casos:**

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 5}$ **d)** $f(x) = \dfrac{5x + 3}{x^2 - 2}$

Interpreta gráficamente los resultados.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 - 1} = +\infty$ porque el radicando es tan grande como queramos dando a x valores muy grandes.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2 - 1} = +\infty$ por una razón análoga a la anterior.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2}{-2x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{-2} = -2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2}{-2x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{-2} = -2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x - 5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x - 5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x + 3}{x^2 - 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x + 3}{x^2 - 2} = 0$ porque el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

2. Cálculo de límites de una función en un punto

Hazlo tú

- **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 2x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{(x + 2)^2}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 2x} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminación. Tenemos que simplificar la fracción.

$\dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 2x} = \dfrac{(x - 1)^2}{2x(x - 1)} = \dfrac{x - 1}{2x}$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{2x} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{(x + 2)^2} = \dfrac{-2}{0} = -\infty$ porque el denominador siempre es positivo y el numerador siempre es negativo en las proximidades del punto $x = -2$. (En este caso no son necesarios los límites laterales).

Página 186

4. Límites y continuidad de una función definida «a trozos»

Hazlo tú

- **Halla el límite de la función** $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{si } x<3 \\ x-2, & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ **en $x = 0$ y en $x = 3$. Estudia su continuidad.**

En $x = 0$, como $0 < 3$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (2x-3) = -3$

$x = 3$ es un «punto de ruptura». Por ello, calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x-3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x-2) = 1 \end{cases} \to \text{No coinciden; por tanto, no existe el límite.}$$

Esta función es discontinua en $x = 3$, porque el límite en ese punto no existe. Tiene un salto finito en él. Para los demás valores de x, la función es continua porque está formada por trozos de rectas.

5. Función continua en un punto

Hazlo tú

- **Halla el valor de k para que la función** $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{si } x \le 1 \\ x+k & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **sea continua en todo $\mathbb{R}$.**

La función es continua si $x \ne 1$ porque está formada por dos trozos de rectas.

Estudiamos la continuidad en el «punto de ruptura» $x = 1$:

$f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (2x-5) = -3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x+k) = 1+k \end{cases}$$

Para que exista el límite debe ser $-3 = 1 + k \to k = -4$

Si $k = -4$ se cumplen todas las condiciones para que sea continua en $x = 1$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

Página 187

6. Ramas infinitas y asíntotas

Hazlo tú

- **Estudia las asíntotas de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

a) • Asíntotas verticales:

$x - 2 = 0 \to x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x-1}{x-2} = \dfrac{5}{0} = \pm\infty \to x = 2$ es una asíntota vertical.

Si $x \to 2^-$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$

- Asíntotas horizontales:

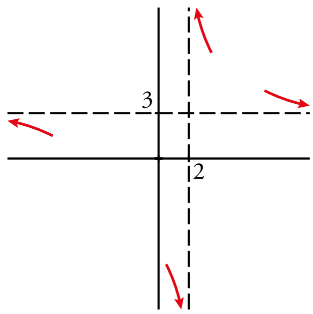
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x-1}{x-2} = 3$; $y = 3$ es una asíntota horizontal.

Estudiamos la posición de la curva.

$f(x) - 3 = \dfrac{3x-1}{x-2} - 3 = \dfrac{5}{x-2}$

Si $x \to +\infty$, $f(x) - 3 > 0$. La curva está sobre la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x) - 3 < 0$. La curva está bajo de la asíntota.



b) • Asíntotas verticales. No tiene porque su denominador nunca se anula.

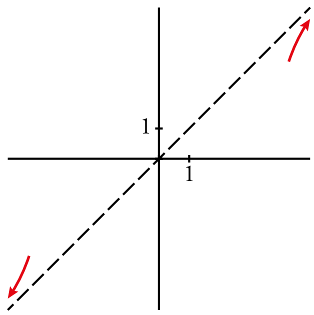
- Asíntotas horizontal u oblicua.

Como el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador, hay asíntota oblicua. Dividiendo obtenemos:

$\dfrac{x^3}{x^2+2} = x - \dfrac{2x}{x^2+2} \;\to\; y = x$ es asíntota oblicua.

Estudiamos la posición:

$d = f(x) - y = -\dfrac{2x}{x^2+2} \begin{cases} \text{Si } x \to +\infty \ (d<0) \ f(x) < y \\ \text{Si } x \to -\infty \ (d>0) \ f(x) > y \end{cases}$



c) • Asíntotas verticales:

$x^2 - 4 = 0 \;\to\; x = \pm 2$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{x^2-4} = \dfrac{4}{0} = \pm\infty \;\to\; x = 2$ es una asíntota vertical.

Si $x \to 2^-$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right) \to f(x) \to -\infty$.

Si $x \to 2^+$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right) \to f(x) \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2}{x^2-4} = \dfrac{4}{0} = \pm\infty \;\to\; x = -2$ es una asíntota vertical.

Si $x \to -2^-$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right) \to f(x) \to +\infty$.

Si $x \to -2^+$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right) \to f(x) \to -\infty$.

- Asíntotas horizontales:

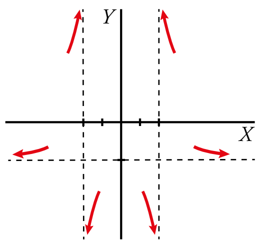
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2-4} = 1 \;\to\; y = 1$ es una asíntota horizontal.

Estudiamos la posición de la curva:

$f(x) - 1 = \dfrac{x^2}{x^2-4} - 1 = \dfrac{x^2 - x^2 + 4}{x^2-4} = \dfrac{4}{x^2-4}$

Si $x \to +\infty$, $f(x) - 1 > 0 \to$ La curva está sobre la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x) - 1 > 0 \to$ La curva está sobre la asíntota.



EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 3.3. (EA 3.3.1.-EA 3.3.2.)

Página 188

1. Límites en el infinito

- **Calcular los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x}{\sqrt{4x^2+1}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x}}{x+1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+3}{x-2}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x}{\sqrt{4x^2+1}} = \dfrac{5}{\sqrt{4}} = \dfrac{5}{2}$ porque el numerador tiene grado 1 y el denominador también, ya que $\sqrt{x^2} = x$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x}}{x+1} = 0$ porque el grado del numerador sería $\dfrac{1}{2}$ y es menor que el grado del denominador, que es 1.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+3}{x-2}} = +\infty$ porque el radicando tiende a $+\infty$ al ser un cociente de polinomios en el que el grado del numerador es mayor que el del denominador.

2. Límites de una función definida «a trozos»

- **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 3x-5 & \text{si } 0 \le x < 4 \\ 9x - x^2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$ **hallar** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ **y** $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (9x - x^2) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} (9x - x^2) = 20$

  $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} (3x-5) = 7 \to$ No existe el límite en $x = 4$.

3. Asíntotas

- **Determinar** a **y** b **para que las rectas** $x = 2$ **e** $y = 4$ **sean asíntotas de la función** $f(x) = \dfrac{ax-5}{3x+b}$.

Para que la recta $x = 2$ sea una asíntota de $f(x)$, el denominador se debe anular en la abscisa dada. Por tanto:

$3 \cdot 2 + b = 0 \to b = -6$

Para que la recta $y = 4$ sea una asíntota horizontal, debe ser $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 4$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{ax-5}{3x+b} = \dfrac{a}{3}$ por ser un cociente de polinomios del mismo grado.

$\dfrac{a}{3} = 4 \to a = 12 \to$ La función es $f(x) = \dfrac{12x-5}{3x-6}$.

4. Ramas infinitas en funciones exponenciales y logarítmicas

- **Estudiar y representar las ramas infinitas de las funciones siguientes:**

a) $f(x) = 1{,}5^x$ **b)** $f(x) = 0{,}4^x - 2$ **c)** $f(x) = \ln(2x - 4)$

a) • Asíntotas verticales. No tiene por ser continua.

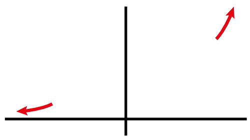
• Asíntotas horizontales.

$\lim_{x \to +\infty} 1{,}5^x = +\infty$ por ser una función exponencial con base mayor que 1.

$\lim_{x \to -\infty} 1{,}5^x = 0$ por el mismo motivo.

Luego $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

Tiene una rama parabólica cuando $x \to +\infty$.



b) • Asíntotas verticales. No tiene por ser continua.

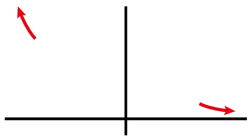
• Asíntotas horizontales.

$\lim_{x \to +\infty} 0{,}4^x - 2 = -2$, ya que $0{,}4^x \to 0$ cuando $x \to +\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} 0{,}4^x - 2 = +\infty$, ya que $0{,}4^x \to \infty$ cuando $x \to -\infty$.

Luego $y = -2$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

Tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$.



c) El dominio de definición de la función es el intervalo $(2, +\infty)$ ya que se debe cumplir que $2x - 4 > 0$. En el dominio es una función continua y no tiene asíntotas verticales.

Estudiamos el comportamiento cerca del punto $x = 2$ por la derecha. Podemos verlo evaluando algunos puntos.

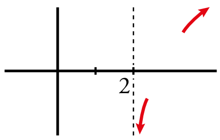
$x = 2{,}001 \rightarrow \ln(2 \cdot 2{,}001 - 4) = -6{,}2$

$x = 2{,}0001 \rightarrow \ln(2 \cdot 2{,}0001 - 4) = -8{,}5$

$\lim_{x \to 2^+} \ln(2x - 4) = -\infty$

Luego $x = 2$ es una asíntota vertical cuando $x \to 2^+$.

Tiene una rama parabólica en el infinito de crecimiento cada vez más lento hacia arriba por ser una función logarítmica y $\lim_{x \to +\infty} \ln(2x - 4) = +\infty$.



5. Existencia de asíntotas

- **¿Tiene alguna asíntota la siguiente función?:**

  $$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3}$$

  ¿Qué relación hay entre su gráfica y la de $g(x) = x^2 - 4$?

  - Asíntotas verticales:

    Estudiamos el comportamiento de la función en $x = 3$, punto que anula el denominador.

    $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = \frac{0}{0}$. Indeterminación. Tenemos que simplificar la fracción:

    $$\frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x^2 - 4)}{x - 3} = x^2 - 4$$

    Luego $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 4) = 5$

    Por tanto, en el punto $x = 3$ no tiene asíntota vertical. En ese punto hay una discontinuidad del tipo III.

  - Ramas en el infinito:

    Si $x \neq 2$ 8 $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = x^2 - 4 = g(x)$

    Luego la función es una parábola salvo en el punto $x = 2$, donde no está definida.

    Tiene dos ramas parabólicas hacia arriba cuando x 8 $-\infty$ y x 8 $+\infty$ ya que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

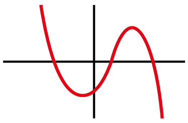
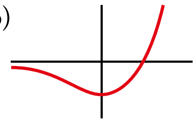
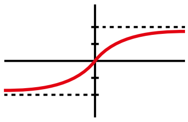
C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 189

Para practicar

Límite cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$

1 **Determina cuál es el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ en las siguientes gráficas:**

a)  b)  c) 

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

2 **Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de cada una de las siguientes funciones. Representa los resultados que obtengas.**

a) $f(x) = x^3 - 10x$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

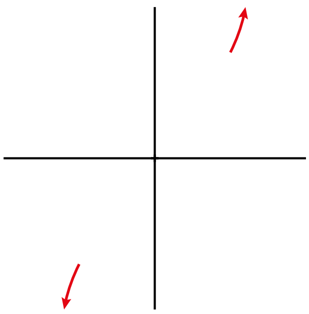
c) $f(x) = 7 - 3x$ **d)** $f(x) = -x^2 + 8x + 9$

e) $f(x) = 1 - (x - 2)^2$ **f)** $f(x) = 7x^2 - x^3$

g) $f(x) = (5 - x)^2$ **h)** $f(x) = (x + 1)^3 - 2x^2$

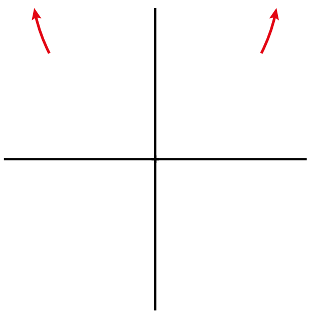
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 10x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 10x) = -\infty$



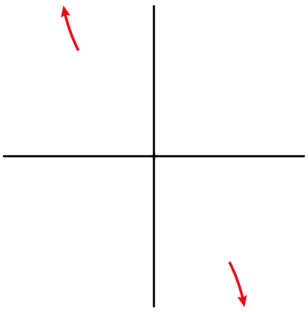
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$



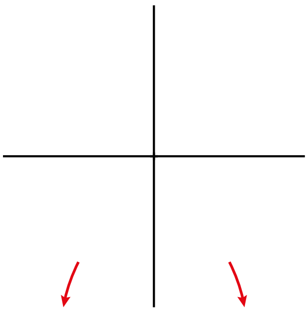
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 - 3x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (7 - 3x) = +\infty$



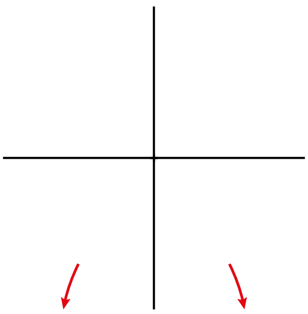
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + 8x + 9) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 + 8x + 9) = -\infty$



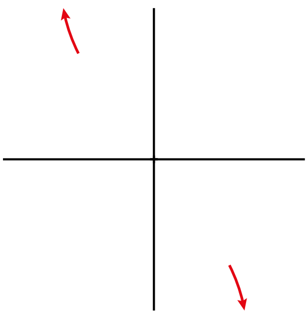
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [1 - (x - 2)^2] = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [1 - (x - 2)^2] = -\infty$



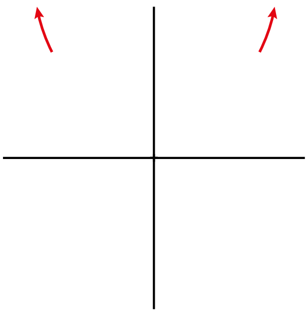
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7x^2 - x^3) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (7x^2 - x^3) = +\infty$



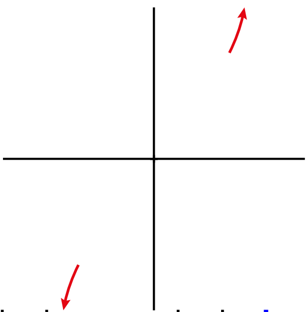
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5 - x)^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (5 - x)^2 = +\infty$



h) $\lim\limits_{x \to +\infty} [(x + 1)^3 - 2x^2] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [(x + 1)^3 - 2x^2] = -\infty$

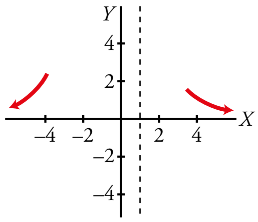


3 **Calcula los límites de estas funciones cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ y representa en cada caso las ramas que obtengas:**

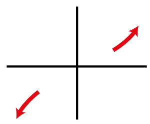
a) $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{-2x^2}{3-x}$ **c)** $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+5}{1-x}$ **e)** $f(x) = \dfrac{2-3x}{x+3}$ **f)** $f(x) = \dfrac{3-2x}{5-2x}$

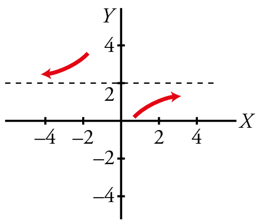
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0$



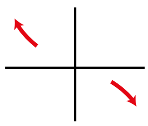
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x} = -\infty$



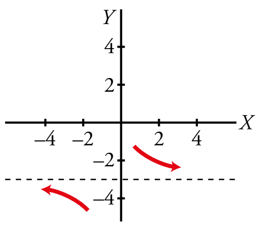
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2$



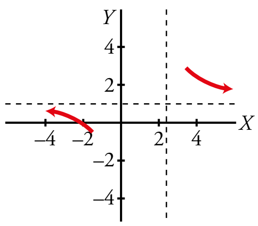
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x} = +\infty$



e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+3} = -3$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2-3x}{x+3} = -3$



f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x} = 1$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x} = 1$



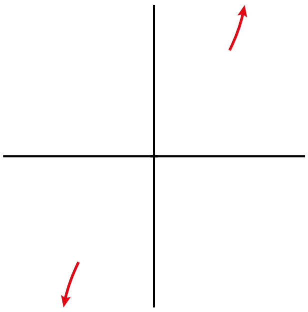
4 **Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ y representa los resultados.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{3x^2}{(x-1)^2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{1-12x^2}{3x^2}$

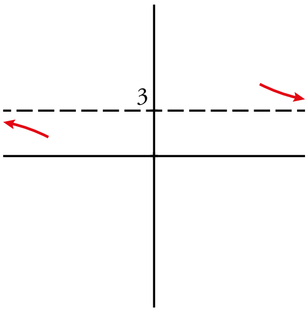
d) $f(x) = \dfrac{1-x}{(2x+1)^2}$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^3-x^2}{7-x^2}$ **f)** $f(x) = \dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9}$

Para calcular estos límites debemos tener en cuenta la regla de los grados del numerador y del denominador.

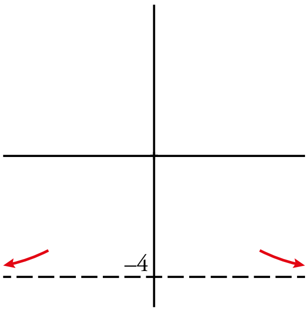
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty$



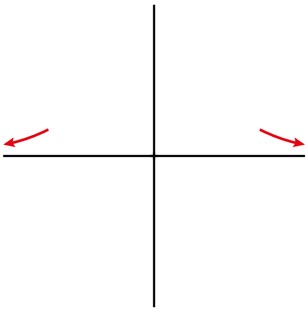
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{(x-1)^2} = 3$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2}{(x-1)^2} = 3$



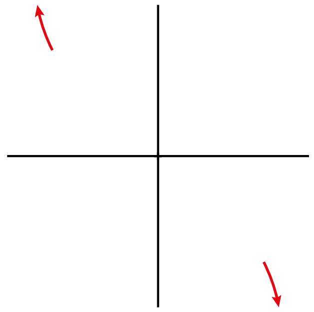
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-12x^2}{3x^2} = -4$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-12x^2}{3x^2} = -4$



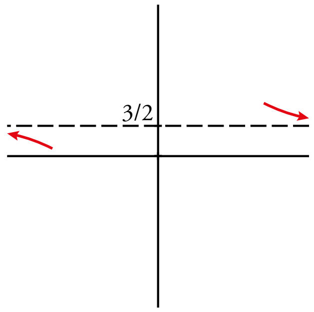
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x}{(2x+1)^2} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-x}{(2x+1)^2} = 0$



e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - x^2}{7 - x^2} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - x^2}{7 - x^2} = +\infty$



f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{2x^2 + 4x - 9} = 3/2 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{2x^2 + 4x - 9} = 3/2$



5 **Halla el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de cada una de estas funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 7}{4x^2 + 3}$

c) $f(x) = \dfrac{5^{-x}}{2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{2^x}{3^{-x}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x-3} = 2 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x-3} = 2$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 7}{4x^2 + 3} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 7}{4x^2 + 3} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5^{-x}}{2} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5^{-x}}{2} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{3^{-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} (2^x \cdot 3^x) = +\infty$

6 **Halla el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le 4 \\ \log_2 x & \text{si } x > 4 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \begin{cases} -3x & \text{si } x < 2 \\ 1 + 2^{-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (5 - x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2 = 2$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3 - x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x = \log_2 \infty = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2 = 2$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + 2^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{2^x} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -3x = +\infty$

Límite en un punto

7 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \log_2 \left(\dfrac{3x-5}{4-x}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to 1/2} e^{\frac{2x-1}{x+2}}$ d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x-2}$

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}$ está definida y es continua en $x = 1$.

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} = \sqrt[3]{1 - 2 + 1} = 0$.

b) $f(x) = \log_2 \left(\dfrac{3x-5}{4-x}\right)$ está definida y es continua en $x = 2$.

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 2} \log_2 \left(\dfrac{3x-5}{4-x}\right) = \log_2 \left(\dfrac{6-5}{4-2}\right) = \log_2 \left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$.

c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} e^{\frac{2x-1}{x+2}} = e^{\frac{0}{5/2}} = e^0 = 1$

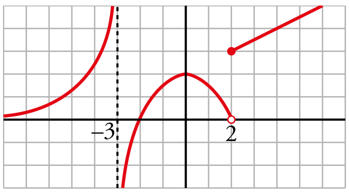
d) Debemos estudiar el límite por la derecha y por la izquierda:

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x}{x-2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x}{x-2} = -\infty$

Como los límites laterales son distintos podemos decir que no existe el límite en $x = 2$.

8 **Sobre la gráfica de f, halla los límites cuando x tiende a:**



a) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

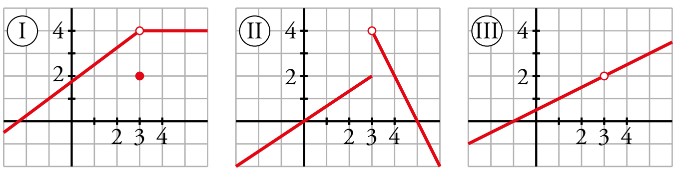
d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 2

d) 0 e) 3 f) 0

9 **Relaciona cada una de estas expresiones con su gráfica:**

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$ b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$ c) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **no existe**



¿Alguna de ellas es continua en $x = 3$?

a) III b) I c) II

10 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<0 \\ x+1 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$**, halla:**

a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

a) 5

b) 4

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

11 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x\le 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} & \text{si } x>3 \end{cases}$ **calcula:**

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

a) Como 0 < 3, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$.

b) $x = 3$ es el punto de ruptura. Usaremos límites laterales.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} 2x = 6 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} = \dfrac{0}{0} \to \text{Indeterminación.} \end{cases}$$

Para calcular el límite por la derecha necesitamos simplificar la fracción:

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x}$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x+3}{x} = 2$$

Luego los límites laterales son distintos y $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no existe.

c) Como 5 > 3, $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} = \dfrac{8}{5}$.

12 **En la función:** $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si } x<-1 \\ 3x-1 & \text{si } -1\le x<4 \\ 4\sqrt{x}+3 & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$**, halla:**

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

a) $x = -1$ es un punto de ruptura. Usaremos límites larerales para calcular el límite.

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} (x^2-2) = -1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} (3x-1) = -4 \end{cases} \text{ Por tanto, no existe el límite.}$$

b) $x = 4$ es un punto de ruptura. Usaremos límites laterales para calcular el límite.

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} (3x-1) = 11 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} (4\sqrt{x}+3) = 11 \end{cases} \text{ Por tanto, } \lim_{x\to 4} f(x) = 11$$

c) Como 9 > 4, $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = \lim\limits_{x\to 9} (4\sqrt{x}+3) = 15$

13 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 3x}{x}$ **b)** $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$ **c)** $\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ **e)** $\lim_{x \to -3} \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$ **f)** $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

a) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(2x + 3)}{x} = 3$

b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x} = \lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x} = \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x(x + 1)} = \frac{3}{-1} = -3$

c) $\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} = -\frac{1}{4}$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 2)} = 3$

e) $\lim_{x \to -3} \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x + 3)}{(x + 3)(x + 1)} = -\frac{1}{2}$

f) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = 2$

Página 190

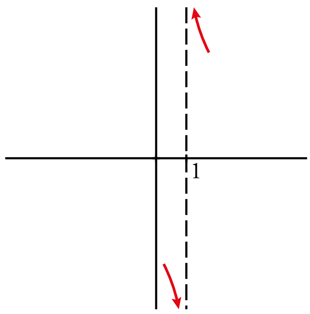
14 **Resuelve los siguientes límites y representa los resultados:**

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x - 1}$ **b)** $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x^2}$

c) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2}{x^2 + 2x}$ **d)** $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^4 - 10x^2}$

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x - 1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$

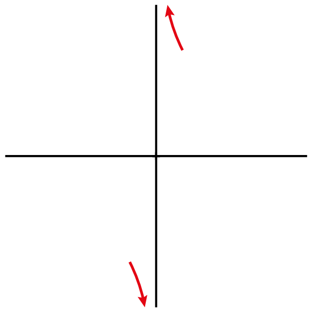
- Si $x \to 1^- \to \left(f(x) = \frac{+}{-} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 1^+ \to \left(f(x) = \frac{+}{+} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$



b) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x^2} = \frac{0}{0} \to$ Indeterminación.

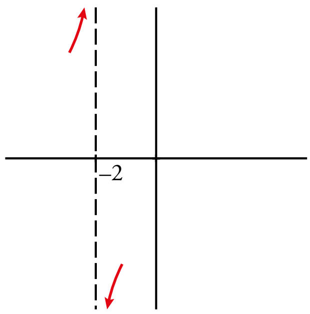
$\frac{x^2 + x}{x^2} = \frac{x(x + 1)}{x^2} = \frac{x + 1}{x}$; $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x + 1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$

- Si $x \to 0^- \to \left(f(x) = \frac{+}{-} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 0^+ \to \left(f(x) = \frac{+}{+} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$



c) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2}{x^2 + 2x} = \frac{4}{0} = \pm\infty$

- Si $x \to -2^- \to \left(f(x) = \frac{+}{+} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$
- Si $x \to -2^+ \to \left(f(x) = \frac{+}{-} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$



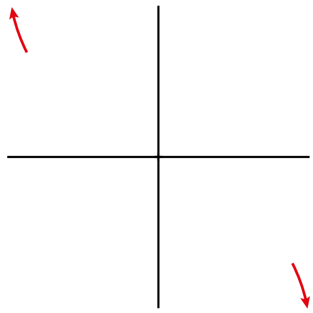
d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^4 - 10x^2} = \dfrac{0}{0} \;\to$ Indeterminación.

$$\frac{x^3}{x^4 - 10x^2} = \frac{x^3}{x^2(x^2 - 10)} = \frac{x}{x^2 - 10}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^4 - 10x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2 - 10} = 0$$

$f(0)$ no está definido.

Si $x < 0$, $f(x) > 0$ y si $x > 0$, $f(x) < 0$



15 **Calcula los siguientes límites y representa los resultados:**

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2}$ **d)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1}$

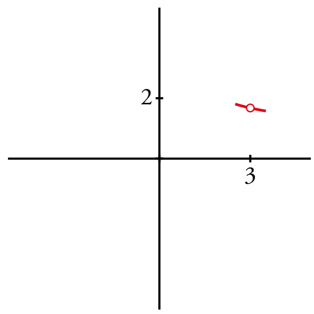
e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \dfrac{0}{0} \;\to$ Indeterminación.

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \frac{(x + 2)(x - 3)}{x(x - 3)} = \frac{x + 2}{x}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to 3} \frac{x + 2}{x} = \frac{5}{3}$$

Dando a x valores próximos a 3 podemos averiguar cómo se acerca por ambos lados.



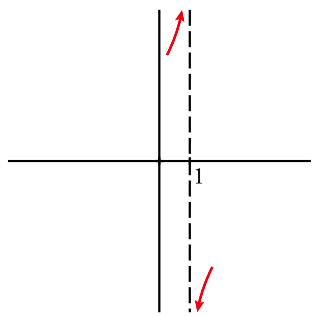
b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{0}{0} \;\to$ Indeterminación.

Simplificamos: $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 1)^2} = \dfrac{x - 2}{x - 1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 2}{x - 1} = \infty$$

• Si $x \to 1^- \;\to\; \left(f(x) = \dfrac{-}{-} = +\right)\; f(x) \to +\infty$

• Si $x \to 1^+ \;\to\; \left(f(x) = \dfrac{-}{+} = -\right)\; f(x) \to -\infty$



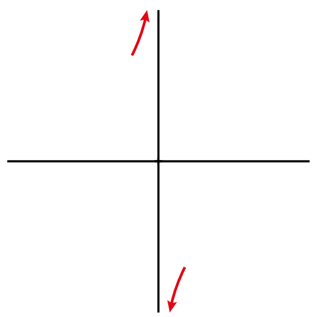
c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \dfrac{0}{0} \;\to$ Indeterminación.

$$\frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \frac{x(x - 2)}{x^2(x + 1)} = \frac{x - 2}{x(x + 1)}$$

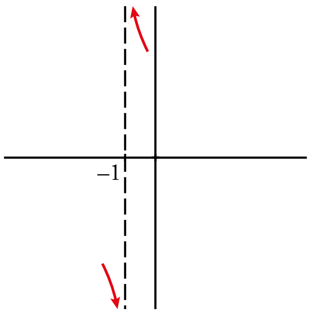
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 2}{x(x + 1)} = \frac{-2}{0} = \pm\infty$$

• Si $x \to 0^- \;\to\; \left(f(x) = \dfrac{-}{-} = +\right)\; f(x) \to +\infty$

• Si $x \to 0^+ \;\to\; \left(f(x) = \dfrac{-}{+} = -\right)\; f(x) \to -\infty$



d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

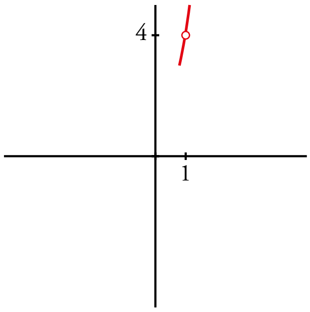


$$\frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x^2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

- Si $x \to -1^- \to \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)\ f(x) \to -\infty$
- Si $x \to -1^+ \to \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)\ f(x) \to +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

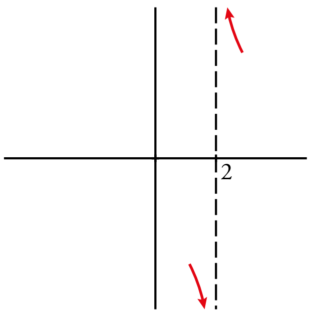


$$\frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x-1)} = \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1} = (x^2 + 1)(x + 1)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} [(x^2 + 1)(x + 1)] = 4$$

Dando a x valores próximos a 1 podemos averiguar cómo se acerca por ambos lados.

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.



$$\frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{2(x+2)}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x+2)}{x-2} = \frac{8}{0} = \pm\infty$$

- Si $x \to 2^- \to \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)\ f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 2^+ \to \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)\ f(x) \to +\infty$

16 Calcula.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{7 - 5x}{x^2 + 1}\right)^{2 - 5x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \log_2 \left(\dfrac{3x + 4}{x^2 + 1}\right)^5$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + e^x}{\ln(x + e)}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 10} \log(2\sqrt{3x - 5})^3$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{7 - 5x}{x^2 + 1}\right)^{2 - 5x} = \left(\dfrac{7 - 5}{1 + 1}\right)^{2 - 5} = \left(\dfrac{2}{2}\right)^{-3} = 1$

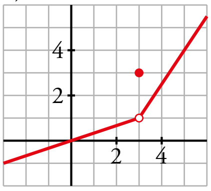
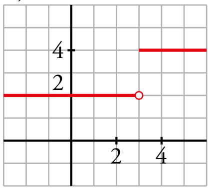
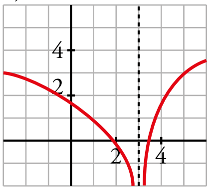
b) $\lim\limits_{x \to 2} \log_2 \left(\dfrac{3x + 4}{x^2 + 1}\right)^5 = \log_2 \left(\dfrac{6 + 4}{4 + 1}\right)^5 = \log_2 (2)^5 = 5 \log_2 2 = 5$

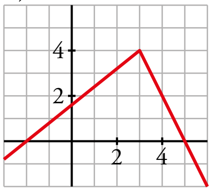
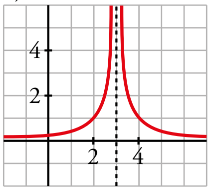
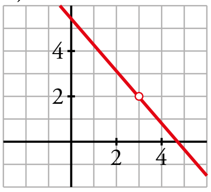
c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + e^x}{\ln(x + e)} = \dfrac{1 + e^0}{\ln(0 + e)} = 2$ por estar definida y ser continua en $x = 0$.

d) $\lim\limits_{x \to 10} \log(2\sqrt{3x - 5})^3 = 3 \log(2\sqrt{3 \cdot 10 - 5}) = 3 \log 10 = 3$

Continuidad de una función

17 **¿Cuál de estas funciones es continua en $x = 3$? Señala, en cada una de las otras, la razón de su discontinuidad:**

a) 
b) 
c) 

d) 
e) 
f) 

a) Discontinuidad de tipo IV en $x = 3$, porque el valor de la función no coincide con el límite en el punto.

b) Discontinuidad de salto finito (tipo II). La función existe en $x = 3$, pero los límites laterales, aunque existen, son distintos.

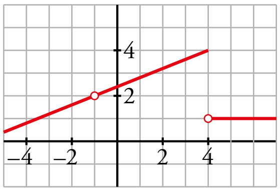
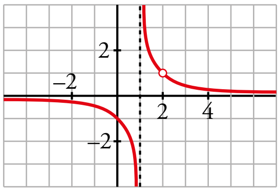
c) Discontinuidad de salto infinito (tipo I). Tiene un asíntota vertical por la izquierda en $x = 3$.

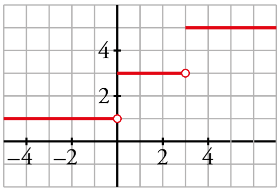
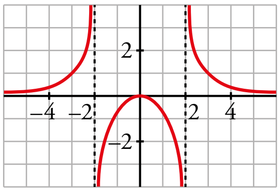
d) Continua.

e) Discontinuidad de salto infinito (tipo I). Tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

f) Discontinuidad de tipo III. La función no está definida en $x = 3$, pero existe el límite en dicho punto.

18 **Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y el tipo de discontinuidad:**

a) 
b) 

c) 
d) 

a) Discontinuidad de tipo III en $x = -1$.

Discontinuidad de salto finito en $x = 4$ (tipo II).

b) Discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ (tipo I).

Discontinuidad de tipo III en $x = 2$.

c) Discontinuidades de salto finito en $x = 0$ y $x = 3$ (tipo II).

d) Discontinuidades de salto infinito en $x = -2$ y $x = 2$ (tipo I).

19 **Piensa y comparte en pareja.** **[El alumnado podrá compartir sus decisiones sobre la continuidad de las funciones para trabajar esta estrategia].**

Comprueba que solo una de estas funciones es continua en $x = 1$. Explica la razón de la discontinuidad en las demás:

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x<1 \\ 3 & \text{si } x>1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x\neq 1 \\ -1 & \text{si } x=1 \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x<1 \\ x-3 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

a) La función no está definida en $x = 1$. Por otro lado:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} (x+2) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 3 = 3 \end{cases} \quad \text{Luego existe } \lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

Por tanto, tiene una discontinuidad de tipo III en $x = 1$.

b) $f(1) = -1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x = 2$$

En este caso, tiene una discontinuidad de tipo IV.

c) $f(1) = 1 - 3 = -2$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} -2 = -2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} (x-3) = -2 \end{cases}$$

Esta función es continua en $x = 1$.

d) La función no está definida en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

- Si $x \to 1^-$ $\left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 1^+$ $\left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I) en $x = 1$.

20 **Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos de ruptura:**

a) $f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x<-1 \\ x^2+3 & \text{si } x\geq -1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x<1 \\ 2^{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{si } x<0 \\ x-2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x<2 \\ 2x-6 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 5-x & \text{si } x<3 \\ \dfrac{2}{x-2} & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$ **f)** $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & \text{si } x\leq 1 \\ \log_2(x+1) & \text{si } x>1 \end{cases}$

a) $f(-1) = (-1)^2 + 3 = 4$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} (3-x) = 4 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2+3) = 4 \end{cases} \quad \text{La función es continua en } x = -1.$$

b) $f(1)$ no está definido.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 2^{x-1} = 1 \end{cases} \quad \text{La función tiene una discontinuidad del tipo III en } x = 1.$$

c) $f(0) = 0 - 2 = -2$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{4-x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (x-2) = -2 \end{cases} \quad \text{La función tiene una discontinuidad de salto finito (tipo II) en } x = 0.$$

d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2 - x^2) = -2$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x - 6) = -2$

$\lim\limits_{x \to 2} f(2) = -2 \;\to\;$ La función es continua.

e) $f(3) = \dfrac{2}{3-2} = 2$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} (5 - x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2}{x-2} = 2 \end{cases}$ La función es continua en $x = 3$.

f) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt[3]{x-1} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \log_2 (x+1) = \log_2 2 = 1$

No coinciden los límites laterales y por tanto no es continua.

21 Indica para qué reales son continuas estas funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 + 2}$

b) $y = \dfrac{2}{x^4 + 3x^3}$

c) $y = \sqrt{5 - 2x}$

d) $y = \ln (x + 4)$

e) $y = 2^{3-x}$

f) $y = |x - 5|$

a) Continua en $\mathbb{R}$.

Su dominio de definición es $\mathbb{R}$ y su expresión analítica es elemental.

b) Veamos si se anula el denominador de la fracción:

$x^4 + 3x^3 = 0 \;\to\; x^3(x + 3) = 0 \;\to\; x_1 = 0,\; x_2 = -3$

La función es continua en su dominio de definición, es decir, en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$.

c) Para calcular su dominio resolvemos $5 - 2x \ge 0$. El intervalo solución $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$ es el conjunto de valores donde la función es continua.

d) La expresión analítica de esta función es elemental, luego es continua en su dominio, es decir, en $(-4, +\infty)$.

e) Análogamente al caso anterior, es continua en $\mathbb{R}$ porque siempre está definida.

f) Es continua en $\mathbb{R}$ porque siempre está definida y su expresión analítica es elemental.

22 Saco de dudas. **[La búsqueda de puntos de discontinuidad puede servir para trabajar esta técnica].**

Estas funciones, ¿son discontinuas en algún punto?

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \ne -1 \\ -1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x} & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2^{x-3} & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) La función está formada por un trozo de parábola y otro de recta, luego el único punto posible de discontinuidad sería el punto de ruptura. Estudiamos la continuidad en él.

$f(1) = 1 - 1 = 0$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} (1 - x^2) = 0 \\ \lim_{x \to 1^+} (x - 1) = 0 \end{cases}$$

La función también es continua en $x = 1$, por tanto, no es discontinua en ningún punto.

b) Esta función coincide con la parábola $y = x^2$ salvo en el punto $x = -1$. Luego tiene una discontinuidad de tipo IV en dicho punto.

c) La función está formada por un trozo de hipérbola, la cual no está definida en $x = 0$ $\left(f(0) = \frac{4}{0} = \infty\right)$, y otro de recta, luego el único punto posible de discontinuidad sería el punto de ruptura. Estudiamos la continuidad en él.

$f(2) = 2$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 2^-} \frac{4}{x} = 2 \\ \lim_{x \to 2^+} x = 2 \end{cases}$$

La función también es continua en $x = 2$, por tanto, solo tiene discontinuidad de tipo III en $x = 0$.

d) La función está formada por dos trozos de funciones cuyas expresiones analíticas son elementales (correctamente definidas), luego el único punto posible de discontinuidad sería el punto de ruptura. Estudiamos la continuidad en él.

$f(3)$ no está definido.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 3^-} 2^{x-3} = 1 \\ \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x - 3} = 0 \end{cases}$$ En el punto $x = 3$ hay una discontinuidad de salto finito (tipo II).

23 **¿Para qué números reales son continuas estas funciones?**

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ **b)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 4}$ **d)** $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

a) $f(x)$ por un lado es un cociente, luego los posibles puntos de discontinuidad son aquellos que anulan el denominador,

$$\sqrt{x-1} = 0 \to x - 1 = 0 \to x = 1 \to \text{Punto de discontinuidad}$$

Por otro lado hay que calcular los puntos para los que la raíz no existe, que son aquellos que hacen negativo el radicando,

$$x - 1 < 0 \to x < 1$$

Conclusión: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ menos en el intervalo $(-\infty, 1]$, luego su dominio es $(1, +\infty)$.

b) Por un lado se trata de un cociente, luego los puntos donde no es continua son aquellos que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \to x^2 = 1 \to x = \pm\sqrt{1} \to x = \pm 1 \to \text{Puntos de discontinuidad}$$

Por otro lado hay que ver los puntos para los que la raíz no existe, que son aquellos que hacen negativo al radicando

$$x + 2 < 0 \to x < -2$$

Conclusión: $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ menos en el intervalo $(-\infty,-2]$ y en los puntos 1 y –1. Luego el dominio es $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

c) Se trata de una raíz, luego hay que ver en qué puntos no existe la raíz, que son aquellos que hacen negativo el radicando.

$$x^2+5x+4<0$$

$$x^2+5x+4<0 \rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{-5\pm 3}{2}=\begin{cases}-1\\-4\end{cases}$$

Para $x=-1$ y $x=-4$ se anula la ecuación

+		–		+	
	–4		–1		0

$x^2+5x+4<0$ si $x\in(-4,-1)$

Conclusión: $f(x)=\sqrt{x^2+5x+4}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ menos en el intervao $(-4,-1)$.

Luego el dominio es $(-\infty,-4]\cup[-1,+\infty)$

d) $f(x)$ es un logaritmo neperiano, luego hay que ver en qué puntos se cumple $x^2(x-2)\le 0$.

$$x^2-2x\le 0 \rightarrow x(x-2)\le 0$$

$$x=0$$

$$x-2=0\rightarrow x=2$$

–		+		+	→ x
	0		2		

–		–		+	→ $(x-2)$
	0		2		

+		–		+	→ $x(x-2)$
	0		2		

Luego en $x\in[0,2]$ $f_1(x)=x^2-2x$ es negativa o cero.

Conclusión: $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ menos en el intervalo $[0, 2]$. Luego el dominio es $(-\infty,0)\cup-(2,+\infty)$

24 Estudia la continuidad de esta función en $x = 1$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{si } x<1\\ 4x-1 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

Veamos que la función es continua en sus dos trozos:

- Si $x<1$, podemos simplificar ya que la función existe siempre para $x\ne 1$:

  $x^2+x-2=(x+2)(x-1) \rightarrow f(x)=x+2$ es una recta, por lo tanto, continua.

- Si $x\ge 1$, la función es una recta y por lo tanto también es continua.

Nos queda estudiar qué pasa en el punto de ruptura.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x+2)=3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(4x-1)=3$$

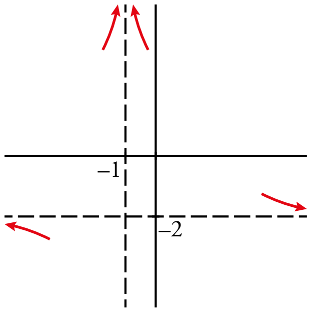
$f(x)$ es continua.

Asíntotas

25 **De una función $f(x)$ conocemos sus asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas. Representa la información.**

$$x = -1 \begin{cases} \text{si } x \to -1^-, & f(x) \to +\infty \\ \text{si } x \to -1^+, & f(x) \to +\infty \end{cases} \qquad y = -2 \begin{cases} \text{si } x \to +\infty, & f(x) > -2 \\ \text{si } x \to -\infty, & f(x) < -2 \end{cases}$$

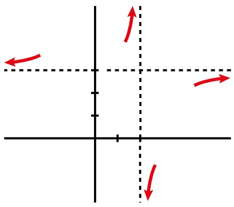
Representa esta información.



Página 191

26 **[El ejercicio puede plantear dudas a los compañeros y compañeras, de forma que, al ayudarse mutuamente, el alumnado pueda trabajar la comunicación (dimensión social)].**

Esta gráfica muestra la posición de la curva $y = f(x)$ respecto a sus asíntotas. Di cuáles son estas y describe su posición.



- Asíntota vertical: $x = 2$

  Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$

- Asíntota horizontal: $y = 3$

  Si $x \to -\infty$, $f(x) - 3 > 0$

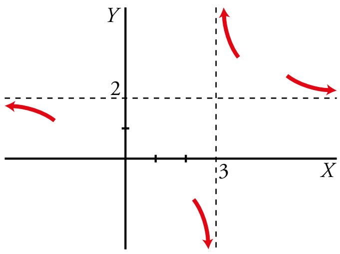
  Si $x \to +\infty$, $f(x) - 3 < 0$

27 **Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:**

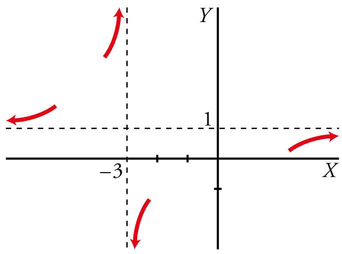
a) $y = \dfrac{2x}{x-3}$ **b)** $y = \dfrac{x-1}{x+3}$ **c)** $y = \dfrac{2x+3}{4-x}$

d) $y = \dfrac{2}{1-x}$ **e)** $y = \dfrac{1}{2-x}$ **f)** $y = \dfrac{4x+1}{2x-3}$

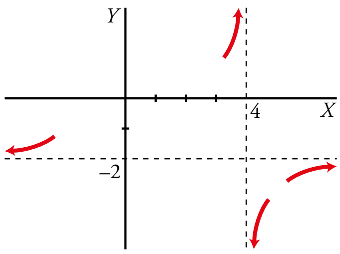
a) Asíntotas: $x = 3$; $y = 2$



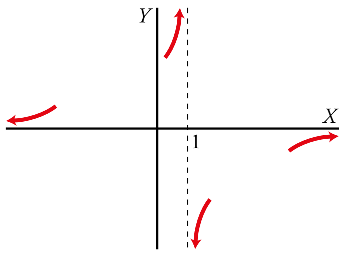
b) Asíntotas: $x = -3$; $y = 1$



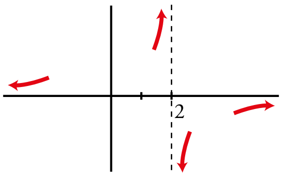
c) Asíntotas: $x = 4$; $y = -2$



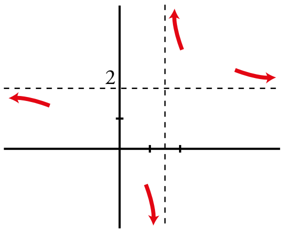
d) Asíntotas: $x = 1$; $y = 0$



e) Asíntotas: $x = 2$; $y = 0$



f) Asíntotas: $x = \dfrac{3}{2}$; $y = 2$



28 **Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:**

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2+4}$

b) $y = \dfrac{3}{x^2+1}$

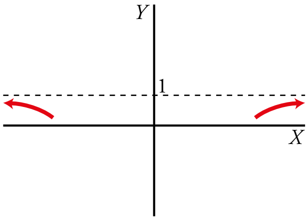
c) $y = \dfrac{2x^2-1}{x^2}$

d) $y = \dfrac{x^4}{x-1}$

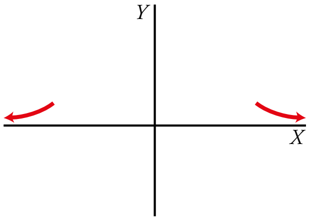
e) $y = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$

f) $y = \dfrac{3x}{x^2-1}$

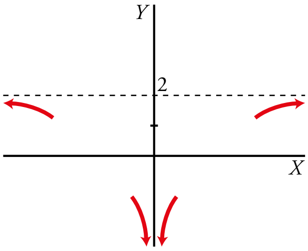
a) Asíntota: $y = 1$



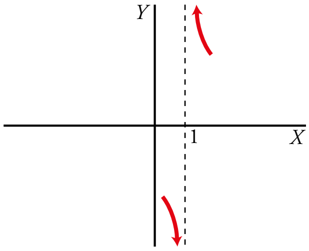
b) Asíntota: $y = 0$



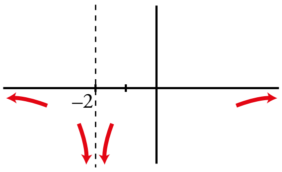
c) Asíntotas: $x = 0$; $y = 2$



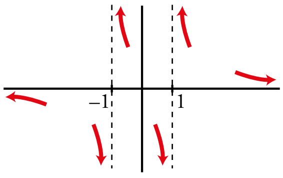
d) Asíntota: $x = 1$



e) Asíntotas: $x = -2$; $y = 0$



f) Asíntotas: $x = 1$, $x = -1$; $y = 0$



29 **Cada una de las siguientes funciones tiene una asíntota oblicua. Hállala y estudia la posición de la curva respecto a ella:**

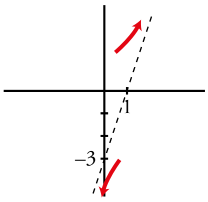
a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{3+x-x^2}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{4x^2-3}{2x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-3}$

e) $f(x) = \dfrac{2x^3-3}{x^2-2}$ **f)** $f(x) = \dfrac{-2x^2+3}{2x-2}$

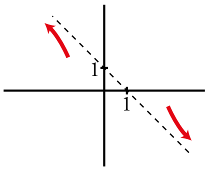
a) $\dfrac{3x^2}{x+1} = 3x - 3 + \dfrac{3}{x+1}$

Asíntota oblicua: $y = 3x - 3$



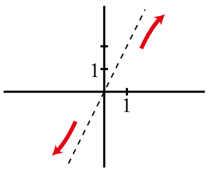
b) $\dfrac{3+x-x^2}{x} = -x + 1 + \dfrac{3}{x}$

Asíntota oblicua: $y = -x + 1$



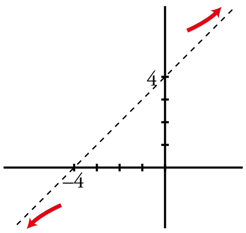
c) $\dfrac{4x^2-3}{2x} = 2x - \dfrac{3}{2x}$

Asíntota oblicua: $y = 2x$



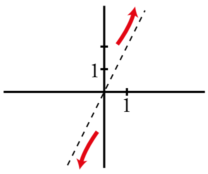
d) $\dfrac{x^2+x-2}{x-3} = x + 4 + \dfrac{10}{x-3}$

Asíntota oblicua: $y = x + 4$



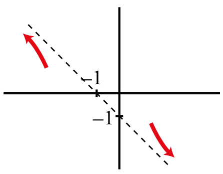
e) $\dfrac{2x^3-3}{x^2-2} = 2x + \dfrac{4x-3}{x^2-2}$

Asíntota oblicua: $y = 2x$



f) $\dfrac{-2x^2+3}{2x-2} = -x - 1 + \dfrac{1}{2x-2}$

Asíntota oblicua: $y = -x - 1$

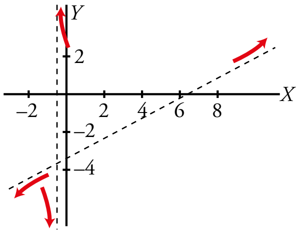


30 **Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:**

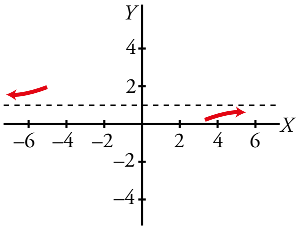
a) $y = \dfrac{(3-x)^2}{2x+2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{x^2+x+1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ **d)** $y = \dfrac{3x^2}{x+2}$

a) $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{13}{4} + \dfrac{49/4}{2x+1}$

Asíntotas: $x = -\dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{13}{4}$

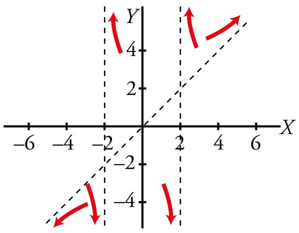


b) Asíntotas: $y = 1$

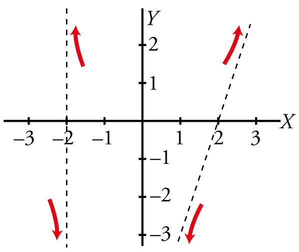


c) $y = x + \dfrac{4x}{(x+2)(x-2)}$

Asíntotas: $y = x$; $x = -2$, $x = 2$



d) Asíntotas: $x = -2$; $y = 3x - 6$



31 **¿Cuáles son las asíntotas de estas funciones?**

a) $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-2}$ **b)** $f(x) = 2x - \dfrac{3}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3 \;\to$ Existe una asíntota horizontal en $y = 3$.

Si hay asíntota vertical, existirá donde se anula el denominador, es decir en $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

Hay una asíntota vertical en $x = 2$.

No existen asíntotas oblicuas porque el grado del denominador de la fracción es mayor que el del numerador.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

No existe una asíntota horizontal.

Si hay asíntota vertical existirá donde se anula el denominador, es decir, en $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 + \infty = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 - \infty = -\infty$

Hay una asíntota vertical en $x = 0$.

Hay asíntotas oblicuas si el grado del numerador es mayor que el del denominador, en nuestro caso es así:

$f(x) = 2x - \frac{3}{x} = \frac{2x^2 - 3}{x} \rightarrow$ Existe asintota oblicua y es $y = 2x$.

Para resolver

32 El tipo de interés anual que ofrece una financiera depende del tiempo que el cliente esté dispuesto a mantener la inversión, y viene dado por la función $I(t) = \frac{6t}{t+1}$, $t > 0$, (t en años).

a) Representa la función para un periodo de 10 años.

b) ¿A qué valor tiende el interés si la inversión se mantiene a muy largo plazo?

a) $I(t) = \frac{6t}{t+1} = 6 + \frac{-6}{t+1}$ tiene una gráfica similar a la de la función $y = \frac{-1}{x}$ desplazada en ambos ejes y estirada en el sentido del eje vertical.

Evaluamos en los extremos del intervalo de definición:

$I(0) = 0$, $I(10) = \frac{60}{11} \approx 5{,}5$

b) Si la inversión se mantiene a muy largo plazo, el tipo de interés tiende a:

$$\lim_{t \to +\infty} I(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{6t}{t+1} = 6$$

33 ODS Meta 14.4. [Tras el visionado del vídeo el docente puede plantear un análisis de las consecuencias que pueden tener las malas prácticas pesqueras].

El número de peces de una determinada piscifactoría evoluciona según la función $f(t) = 50 + \frac{100t^2}{t^2+1}$ (t en días).

a) Prueba que la población de peces aumenta durante la primera semana.

b) ¿El crecimiento será indefinido o se estabilizará?

a) Calculamos una tabla con los valores de la primera semana.

t	0	1	2	3	4	5	6
f(t)	50	100	130	140	144	146	147

Podemos comprobar que el número crece pero de una forma cada vez más lenta.

b) Para estudiar el comportamiento de la función a largo plazo podemos calcular $\lim_{x \to +\infty} \left(50 + \frac{100t^2}{t^2+1}\right) = 150$.

Este resultado indica claramente que el crecimiento tiende a estabilizarse.

34 **La siguiente función:**

$$p(t) = \begin{cases} 2+t^2 & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{8t^2-t-1}{2t^2} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

muestra cómo varía la profundidad de la capa de arena de una playa desde la construcción de un dique (p en metros, t en años). Si la profundidad llega a superar los 4 m, se tendrá que elevar el paseo marítimo.

a) Estudia si la profundidad es una función continua del tiempo.

b) A largo plazo, ¿será necesario elevar la altura del paseo marítimo?

a) La función está formada por dos trozos.

La función del primero es continua por ser parte de una parábola.

La del segundo también lo es porque es parte de una función elemental bien definida para $t > 1$.

Estudiamos la continuidad en el punto de ruptura $t = 1$.

Comprobamos si $\lim\limits_{t \to 1} p(t) = p(1)$:

$p(1) = 3$

$$\lim_{t \to 1} p(t) = \begin{cases} \lim\limits_{t \to 1^-} p(t) = \lim\limits_{t \to 1^-} (2+t^2) = 3 \\ \lim\limits_{t \to 1^+} p(t) = \lim\limits_{t \to 1^+} \dfrac{8t^2-t-1}{2t^2} = 3 \end{cases}$$

La función también es continua en $t = 1$.

b) Podemos estudiar el comportamiento de la función a largo plazo con el límite.

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{8t^2-t-1}{2t^2} = 4.$$

La profundidad no llega a alcanzar los 4 m porque, si bien tiende a 4, los valores que toma son inferiores a 4, ya que $p(t) = \dfrac{8t^2-t-1}{2t^2} = 4 - \dfrac{t+1}{2t^2}$.

Por tanto, no será necesario elevar la altura del paseo.

35 **La siguiente función representa la valoración de una empresa, en millones de euros, en función del tiempo, t, en los últimos 13 años.**

$$f(t) = \begin{cases} 5-0,1t & \text{si } 0 \le t < 5 \\ a+0,05(t-5) & \text{si } 5 \le t < 10 \\ 4,75+0,3(t-b) & \text{si } 10 \le t \le 13 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de a y de b para que la valoración de la empresa sea una función continua del tiempo.

b) ¿Cuál era el valor inicial de la empresa? ¿Y su valor a los 13 años?

a) La función está formada por tres segmentos, luego su continuidad en función del tiempo depende de lo que ocurra en los puntos de ruptura.

- Continuidad en $x = 5 \to \lim\limits_{t \to 5} f(t) = f(5)$

  $f(5) = a$

  $$\lim_{t \to 5} f(t) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{t \to 5^-} f(t) = \lim\limits_{t \to 5^-} (5-0,1t) = 4,5 \\ \lim\limits_{t \to 5^+} f(t) = \lim\limits_{t \to 5^+} [a+0,05(t-5)] = a \end{array} \right\} \to a = 4,5$$

- Continuidad en $x = 10 \to \lim\limits_{t \to 10} f(t) = f(10)$

  $f(10) = 4,75 + 0,3(10 - b) = 7,75 - 0,3b$

  $$\lim_{t \to 10} f(t) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{t \to 10^-} f(t) = \lim\limits_{t \to 10^-} [4,5+0,05(t-5)] = 4,75 \\ \lim\limits_{t \to 10^+} f(t) = \lim\limits_{t \to 10^+} [4,75+0,3(t-b)] = 7,75-0,3b \end{array} \right\} \to 4,75 = 7,75-0,3b \to b = 10$$

Si $a = 4,5$ y $b = 10$, la función siempre es continua.

b) El valor inicial es $f(0) = 5$ millones de euros.

El valor a los 13 años es $f(13) = 4{,}75 + 0{,}3(13 - 10) = 5{,}65$ millones de euros.

36 **En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función $M(t) = \dfrac{30t}{t+4}$ (t en días).**

a) ¿Cuántos montajes realizará al terminar el periodo de entrenamiento que dura 20 días?

b) Halla la asíntota horizontal de la función $M(t)$ y explica su significado.

a) Hará $M(20) = 25$ montajes.

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{30t}{t+4} = 30 \to y = 30$ es la asíntota horizontal.

Significa que el número de montajes tiende a estabilizarse en 30.

37 **El coste de la producción de x unidades de un artículo viene dado por la función $C(x) = 0{,}5x + 1\,000$. El coste de una unidad depende del número de unidades producidas.**

a) ¿Cuál es la función, $U(x)$, que da el coste de una unidad si se producen x unidades?

b) Calcula la asíntota horizontal de la función $U(x)$ y explica su significado.

a) El coste por unidad se obtiene dividiendo el coste de la producción entre el número de unidades producidas:

$U(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{0{,}5x + 1000}{x} = 0{,}5 + \dfrac{1000}{x}$ es el coste por unidad.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} U(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(0{,}5 + \dfrac{1000}{x}\right) = 0{,}5 \to y = 0{,}5$ es la asíntota horizontal.

Cuando el número de unidades producidas aumenta indefinidamente, el coste por unidad se estabiliza en 0,5, siendo siempre superior a esta cantidad.

Página 192

38 **Determina, en cada caso, cuál debe ser el valor de a para que se verifiquen las siguientes igualdades:**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{ax+3}{3x-1} = -1$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ax^2 - 2x + 7}{1 - 3x^2} = -2$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{ax+3}{3x-1} = \dfrac{2a+3}{5} \to \dfrac{2a+3}{5} = -1 \;8\; a = -4$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ax^2 - 2x + 7}{1 - 3x^2} = -\dfrac{a}{3} \to -\dfrac{a}{3} = -2 \;8\; a = 6$

39 **Calcula, en cada caso, el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \ne 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \begin{cases} kx - 2 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x+3} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3 + k \end{array}\right\} \; 5 = 3 + k \to k = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{array}\right\} \; 5 = 4 + 2k \to k = 1/2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x+1)}{x} = 1 \ \to \ k = 1$

d) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = k - 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \sqrt{1+3} = 2 \end{array}\right\} k - 2 = 2 \ \to \ k = 4 \ \to \ f(x) = 2$

40 **Calcula k para que las siguientes funciones sean continuas en el punto donde cambia su definición:**

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + kx & \text{si } x < 2 \\ k - 5x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} & \text{si } x \ne 5 \\ k & \text{si } x = 5 \end{cases}$

a) Para que sea continua en $x = 2$ debe ser $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

$f(2) = k - 10$

Como $x = 2$ es un punto de ruptura, calculamos los límites laterales (que deben ser iguales):

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-x^2 + kx) = -4 + 2k \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (k - 5x) = k - 10 \end{array}\right\} \to -4 + 2k = k - 10 \ \to \ k = -6$$

Con el valor $k = -6$ se cumplen todas las condiciones para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$.

b) Comenzamos estudiando la función en el punto de abscisa $x = 5$.

$f(5) = k$

$\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5} = \dfrac{0}{0} \ \to$ Indeterminación.

$\dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \dfrac{(x+5)(x-5)}{x(x-5)} = \dfrac{x+5}{x}$

$\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x+5}{x} = 2$

Si $k = 2$, la función es continua en $x = 5$.

Observamos que el denominador también se anula en $x = 0$, luego $f(0)$ no existe. Además:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \dfrac{-25}{0} = \pm\infty$

Por tanto, en $x = 0$ tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I). En el resto de los puntos es continua.

41 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2 - x} & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{3-x} & \text{si } x \le 3 \\ \log_2 (x - 2) & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) Las funciones de cada trozo son continuas porque son funciones elementales, bien definidas en sus respectivos intervalos de definición. Estudiamos la continuidad en el «punto de ruptura», en $x = 2$.

$f(2) = \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{2 - x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \to$$ El límite no existe porque los límites laterales son diferentes.

En el punto de abscisa $x = 2$ la función tiene una discontinuidad de salto finito (tipo II).

b) La función está formada por dos trozos de funciones continuas porque sus expresiones son elementales y están bien definidas en sus respectivos intervalos de definición. Estudiamos la continuidad en el punto de ruptura, en $x = 3$.

$f(3) = e^0 = 1$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} e^{3-x} = e^0 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \log_2 (x-2) = \log_2 1 = 0 \end{array} \right\} \to$$ El límite no existe porque los límites laterales son diferentes.

En el punto de abscisa $x = 3$ la función tiene una discontinuidad de salto finito (tipo II).

42 Determina a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + b & \text{si } x < -2 \\ 4 & \text{si } -2 \le x \le 3 \\ ax - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en los puntos de ruptura.

- $x = -2$

  $f(-2) = 4$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} 3x + b = -6 + b \\ \lim\limits_{x \to -2^+} 4 = 4 \end{cases}$$

Por tanto, $-6 + b = 4 \to b = 10$ para que exista el límite y la función sea continua en $x = -2$.

- $x = 3$

  $f(3) = 4$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} ax - 2 = 3a - 2 \end{cases}$$

Por tanto $3a - 2 = 4 \to a = 2$ para que exista el límite y la función sea continua en $x = 3$.

Si $a = 2$ y $b = 10$ la función es continua en los puntos de ruptura. En los demás puntos también es continua por estar formada por trozos de rectas.

43 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x \le 2 \\ 4x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$, calcula los valores de a y de b para que f sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

Para que su gráfica pase por el origen de coordenadas, $f(0) = 0$.

Por tanto, $2 \cdot 0^2 + a \cdot 0 + b = 0$, de donde vemos que $b = 0$.

Exigimos la continuidad en el punto de ruptura:

$f(2) = 2 \cdot 2^2 + a \cdot 2 = 2a + 8$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (2x^2 + ax) = 2a + 8 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \ln(x-1) = 0 \end{cases}$$ Luego $2a + 8 = 0 \to a = -4$

La función es continua en el resto de $\mathbb{R}$ porque está formada por dos trozos: uno de parábola y otro de función logarítmica bien definido.

44 Estudia el tipo de discontinuidad que presenta la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9}$ en $x = 3$ y en $x = -3$.

La función $f(x)$ en los puntos $x = 3$ y $x = -3$ no está definida.

- $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9}$

  Si $3^3 + m \cdot 3^2 + 9 = 0$, es decir, si $m = -4$, tendríamos una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$.

  Por tanto, si $m = -4$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x^2 - x - 3)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 3}{x + 3} = \dfrac{1}{2}$

  La discontinuidad en $x = 3$ es evitable del tipo III.

  Para $m = -4$, en $x = -3$ tenemos una discontinuidad de salto infinito (tipo I) porque:

  $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 9} = \dfrac{-54}{0} = \pm\infty$

- $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9}$

  Si $(-3)^3 + m \cdot (-3)^2 + 9 = 0$, es decir, si $m = 2$, tendríamos una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$.

  Por tanto, si $m = 2$, $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+3)(x^2 - x + 3)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - x + 3}{x - 3} = \dfrac{-5}{2}$

  y tenemos una discontinuidad evitable de tipo III en $x = -3$.

  Para $m = 2$, en $x = 3$ hay una discontinuidad de salto infinito (tipo I) porque:

  $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \dfrac{54}{0} = \pm\infty$

Si $m \neq -4$ y $m \neq 2$, las discontinuidades en $x = 3$ y $x = -3$ son de salto infinito (tipo I) porque el numerador de la función no se anula.

45 Calcula los siguientes límites. Para ello, ten en cuenta que, como en el caso de cociente de polinomios, al calcular límites en el infinito, solo importa el término de mayor grado del numerador y del denominador, y sus coeficientes.

Recuerda también que $\sqrt[n]{x^p} = x^{p/n} \to$ *grado* $= p/n$.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+3}}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **c)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{100x}{\sqrt[3]{x^2}}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{4 - x^3}}$ **e)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^6 - 7x}}{4x - 2}$ **f)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x - 2}$

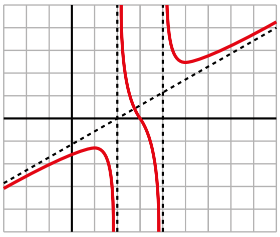
Calcularemos estos límites usando el criterio de los grados del numerador y del denominador.

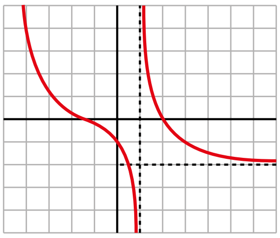
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+3}}{x} = 0$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 5}{\sqrt{x^2 + 1}} = 3$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{100x}{\sqrt[3]{x^2}} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{4 - x^3}} = 0$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^6 - 7x}}{4x - 2} = +\infty$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x - 2} = \sqrt{2}$

46 **[El análisis de la información gráfica proporcionada por el enunciado permite trabajar la iniciativa (dimensión productiva)].**

Observa la gráfica de las siguientes funciones y describe sus ramas infinitas, sus asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas:

a) 

b) 

a) Asíntotas verticales: rectas $x = 2$ y $x = 4$.

Posición:

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 4^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 4^+$, $f(x) \to +\infty$

Asíntota oblicua: recta $y = \frac{x}{2} - 1$

Posición:

Si $x \to +\infty$, $f(x) > \frac{x}{2} - 1$

Si $x \to -\infty$, $f(x) < \frac{x}{2} - 1$

b) Asíntotas verticales: recta $x = 1$

Si $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$

Asíntota horizontal: recta $x = -2$ en $+\infty$

Si $x \to +\infty$, $f(x) > 2$

Rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido en $-\infty$.

47 **Representa, en cada caso, una función que cumpla las condiciones dadas.**

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$, $f(x) < 3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Asíntota vertical: $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

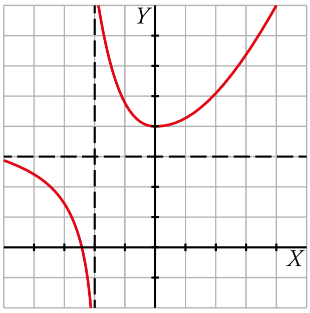
Asíntota oblicua: $y = x + 2$

diferencia $[f(x) - y] < 0$ **si** $x \to \pm\infty$

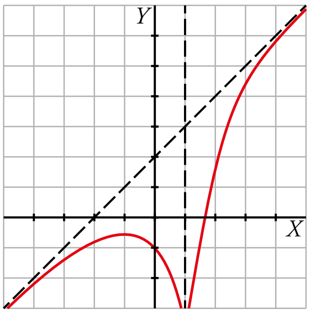
c) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, $f(x) > 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $f(x) < 2$

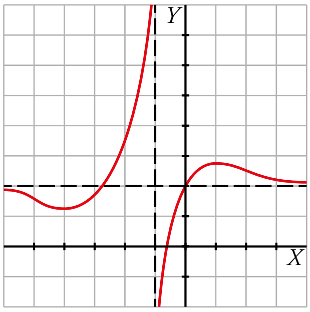
a)



b)



c)



48 **Determina el valor de a y de b de modo que las rectas $x = -1$ e $y = \frac{3}{2}$ sean asíntotas de la función $f(x) = \frac{ax+3}{bx-4}$.**

Después, representa la posición de la curva respecto a ellas.

- Para que la recta $x = -1$ sea una asíntota de $f(x)$, el denominador se debe anular en la abscisa dada. Por tanto:

  $b \cdot (-1) - 4 = 0 \rightarrow b = -4$

- Para que la recta $y = \frac{3}{2}$ sea una asíntota horizontal, debe ser $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{3}{2}$.

  $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax+3}{-4x-4} = -\frac{a}{4}$ por ser un cociente de polinomios del mismo grado.

  $-\frac{a}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow a = -6 \rightarrow$ La función es $f(x) = \frac{-6x+3}{-4x-4}$.

Posición

- Respecto de la asíntota $x = -1$:

  IZQUIERDA: $x = -1{,}01 \rightarrow f(-1{,}01) = \frac{-6(-1{,}01)+3}{-4(-1{,}01)-4} = 226{,}5 \rightarrow \lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

  DERECHA: $x = -0{,}99 \rightarrow f(-0{,}99) = \frac{-6(-0{,}99)+3}{-4(-0{,}99)-4} = -223{,}5 \rightarrow \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

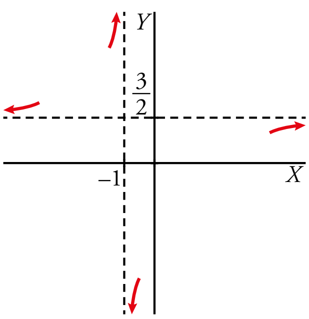
- Respecto de la asíntota $y = \frac{3}{2}$:

  Calculamos $f(x) - \frac{3}{2} = \frac{-6x+3}{-4x-4} - \frac{3}{2} = \frac{-9}{4(x+1)}$

  $(x \rightarrow +\infty) \rightarrow f(x) - \frac{3}{2} < 0 \rightarrow f(x)$ está debajo de la asíntota.

  $(x \rightarrow -\infty) \rightarrow f(x) - \frac{3}{2} > 0 \rightarrow f(x)$ está encima de la asíntota.

  $y = \frac{-6x+3}{-4x-4}$



49 **Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas:**

a) $y = 2^{x+3}$ **b)** $y = 1{,}5^x - 1$

c) $y = 2 + e^x$ **d)** $y = e^{-x} + 1$

e) $y = log\,(x - 3)$ **f)** $y = 1 - ln\,x$

g) $y = ln\,(2x + 4)$ **h)** $y = ln\,(x^2 + 1)$

* ***Consulta las sugerencias del ejercicio guiado 4 de la página 188.***

a) Es una función exponencial y por tanto continua para todo $\mathbb{R}$. Buscamos si tiene asíntotas calculando su límite en $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0 \ \rightarrow \ \text{Hay una asíntota horizontal en } y = 0.$$

b) Es una función exponencial y por tanto continua para todo $\mathbb{R}$. Buscamos si tiene asíntotas calculando su límite en $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 - 1 = -1 \ \rightarrow \ \text{Hay una asíntota horizontal en } y = -1.$$

c) Es una función exponencial y por tanto continua para todo $\mathbb{R}$. Buscamos si tiene asíntotas calculando su límite en $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 + 0 = 2 \ \rightarrow \ \text{Hay una asíntota horizontal en } y = 2.$$

d) Es una función exponencial y por tanto continua para todo $\mathbb{R}$. Buscamos si tiene asíntotas calculando su límite en $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} + 1 = 0 + 1 = 1 \ \rightarrow \ \text{Hay una asíntota horizontal en } y = 1.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

e) Es un logaritmo, por lo que debemos mirar dónde está definido.

$$x - 3 > 0 \ \rightarrow \ x > 3 \ \rightarrow \ Dom = \{x \mid x > 3\}$$

Estudiemos los límites en $x = 3$ y $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \ \rightarrow \ \text{Hay una asíntota vertical en } x = 3.$$

f) Es un logaritmo, por lo que debemos mirar dónde está definido.

$$Dom = \{x \mid x > 0\}$$

Estudiemos los límites en $x = 0$ y $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \ \rightarrow \ \text{Hay una asíntota vertical en } x = 0.$$

g) Es un logaritmo, por lo que debemos mirar dónde está definido.

$$2x + 4 > 0 \ \rightarrow \ x > -2 \ \rightarrow \ Dom = \{x \mid x > -2\}$$

Estudiemos los límites en $x = -2$ y $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \ \rightarrow \ \text{Hay una asíntota vertical en } x = -2.$$

h) Es un logaritmo, por lo que debemos mirar dónde está definido.

$x^2 + 1 > 0 \to Dom = \mathbb{R}$

Estudiemos los límites en $\pm\infty$:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Por tanto, no existe asíntota horizontal.

Página 193

Cuestiones teóricas

50 **[La justificación de las afirmaciones es una oportunidad para trabajar la destreza expresión oral de esta clave].**

¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta y pon ejemplos.

a) Si no existe $f(2)$, no se puede calcular $\lim_{x \to 2} f(x)$.

b) Si no existe $f(1)$, $f(x)$ no puede ser continua en $x = 1$.

c) Una función no puede tener dos asíntotas horizontales.

d) Una función puede tener tres asíntotas verticales.

e) Si $g(a) = 0$, $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tiene asíntota vertical.

f) La función $y = 2^{-x}$ no tiene asíntotas.

a) Falso. En una discontinuidad evitable de tipo III no existe la función en un punto pero sí existe el límite.

b) Verdadero, ya que no se cumple una de las condiciones de la continuidad.

c) Falso. Puede tener cero, una o dos asíntotas horizontales. Tendrá dos y serán $y = a$ e $y = b$ cuando, por ejemplo, cumpla:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

d) Verdadero. Incluso puede tener infinitas asíntotas verticales, como ocurre con la función $y = tg\, x$.

e) Falso. Si $f(a) = 0$, puede ocurrir que la función tenga una discontinuidad evitable en $x = a$.

f) Falso. Porque $\lim_{x \to +\infty} 2^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2^x} = 0$ y la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

51 **Explica, en cada caso, cómo debe ser el numerador de la fracción $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{-----}{2x^2 - 5x + 3}$ para que el resultado sea:**

a) $+\infty$ **b) $-\infty$** **c) 0** **d) 3**

a) Debe ser un polinomio de grados 3 o superior en el que el coeficiente del término de mayor grado sea positivo.

b) Debe ser un polinomio de grado 3 o superior de forma que el coeficiente del término de mayor grado sea negativo.

c) Debe ser un polinomio de grado 1 o inferior.

d) Debe ser un polinomio de grado 2 en el que el término en x^2 sea $6x^2$.

52 **Dada la función $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + b$, justifica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:**

a) Si $a > 0$ y n es par, entonces $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b) Si $a > 0$ y n es impar, entonces $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

c) Si $a < 0$ y n es par, entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

d) Si $a < 0$ y n es impar, entonces $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

a) Falso.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ax^n = +\infty$ porque $ax^n > 0$ al ser n par y $a > 0$.

b) Falso.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ax^n = -\infty$ porque $ax^n < 0$ al ser n impar y $a > 0$.

c) Verdadero.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ax^n = -\infty$ porque $ax^n < 0$ al ser n par y $a < 0$.

d) Verdadero.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ax^n = +\infty$ porque $ax^n > 0$ al ser n impar y $a < 0$.

Para profundizar

53 **Calcula $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 5x}{x - 1} - ax$ cuando $a > 3$ y $0 < a < 3$. ¿Para qué valor de a es el límite un número real? ¿Cuál es ese límite?**

$$\frac{3x^2 - 5x}{x - 1} - ax = \frac{3x^2 - 5x - ax^2 + ax}{x - 1} = \frac{(3 - a)x^2 + (a - 5)x}{x - 1}$$

- $a > 3$

  $\lim_{x \to +\infty} \frac{(3 - a)x^2 + (a - 5)x}{x - 1} = -\infty$, ya que el coeficiente de x^2 sería negativo.

- $0 < a < 3$

  $\lim_{x \to +\infty} \frac{(3 - a)x^2 + (a - 5)x}{x - 1} = +\infty$, ya que el coeficiente de x^2 sería positivo.

- Para que el límite sea un número real, el resultado de la operación $\frac{3x^2 - 5x}{x - 1} - ax$ debe ser un cociente de polinomios del mismo grado, es decir, el grado del numerador debe ser 1.

  $\frac{(3 - a)x^2 + (a - 5)x}{x - 1} \to 3 - a = 0 \to a = 3$

  $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 - 5x}{x - 1} - 3x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{x - 1} = -2$

54 **Halla los siguientes límites (utiliza la calculadora).**

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x}$

c) $\lim_{x \to +\infty} (2^x - x^4)$

d) $\lim_{x \to -\infty} (0{,}75^x - x^2)$

a) $x = 50 \to \frac{50^3}{e^{50}} = 2{,}41 \cdot 10^{-17} \to \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$

b) $x = 1\,000 \to \frac{1000}{\ln 1000} = 144{,}76 \to \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

e) $x = 50 \to 2^{50} - 50^4 = 1{,}13 \cdot 10^{15} \to \lim_{x \to +\infty} (2^x - x^4) = +\infty$

f) $x = -50 \to 0{,}75^{-50} - (-50)^2 = 1{,}76 \cdot 10^6 \to \lim_{x \to -\infty} (0{,}75^x - x^2) = +\infty$

55 a) Halla $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$. Para ello, multiplica numerador y denominador por el binomio conjugado $(\sqrt{x}+1)$.

b) Con el mismo procedimiento, calcula $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) \to$ Indeterminación.

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \sqrt{x}+1 \to \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \sqrt{x}+1 = 2$$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \left(\frac{0}{0}\right) \to$ Indeterminación.

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

56 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |x-2|$

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x|x|$

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{|x|}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{|x-2|}{2x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} |x-2| = \lim\limits_{x \to +\infty} (x-2) = +\infty \quad \lim\limits_{x \to -\infty} |x-2| = \lim\limits_{x \to -\infty} [-(x-2)] = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x+2) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x|x| = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \quad \lim\limits_{x \to -\infty} x|x| = \lim\limits_{x \to -\infty} [x(-x)] = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{|x|}{x-2} = \lim\limits_{x \to \pm+\infty} \frac{x}{x-2} = 1 \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{|x|}{x-2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x}{x-2} = -1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{|x-2|}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-2}{2x} = \frac{1}{2} \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{|x-2|}{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-(x-2)}{2x} = \lim\limits_{x \to \pm-\infty} \frac{-x+2}{2x} = -\frac{1}{2}$

57 Halla las asíntotas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \frac{|2x|}{x-2}$

b) $f(x) = \frac{|x-2|}{x}$

a) • Asíntota vertical $x = 2$.

Posición $\begin{cases} \text{Si } x \to 2^-, \ f(x) \to -\infty \\ \text{Si } x \to 2^+, \ f(x) \to +\infty \end{cases}$

• Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|2x|}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x-2} = 2$$

La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{|2x|}{x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{x-2} = -2$$

La recta $y = -2$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

b) • Asíntota vertical $x = 0$.

Posición: $\begin{cases} \text{Si } x \to 0^-, \ f(x) \to -\infty \\ \text{Si } x \to 0^+, \ f(x) \to +\infty \end{cases}$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|x-2|}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x} = 1$$

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{|x-2|}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x+2}{x} = -1$$

La recta $y = -1$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 3.3. (EA 3.3.1.-EA 3.3.2.) **CE 3.4.** (EA 3.4.1.)

Página 193

1 **Calcula el límite de $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{si } x \le 3 \\ x^2-x-7 & \text{si } x>3 \end{cases}$ en los puntos de abscisas 0, 3 y 5. Di si f es continua en esos puntos.**

$$f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \le 3 \\ x^2-x-7, & x>3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 3^-} f(x) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = 3^2 - 3 - 7 = -1 \end{cases} \text{No tiene límite en } x = 3.$$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 5^2 - 5 - 7 = 13$$

Es continua en $x = 0$ y en $x = 5$. No es continua en $x = 3$, porque no tiene límite en ese punto.

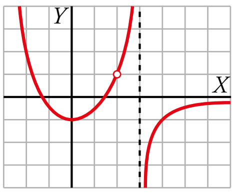
2 **Halla los siguientes límites:**

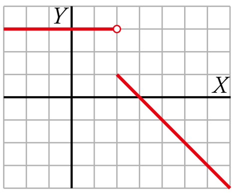
a) $\lim_{x \to 0} 2^{x-1}$ **b)** $\lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}}$ **c)** $\lim_{x \to 4} \frac{x}{(x-4)^2}$

a) $\lim_{x \to 0} 2^{x-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{3}$

c) $\lim_{x \to 4} \frac{x}{(x-4)^2} = +\infty$ (Si $x \to 4^+$ o si $x \to 4^-$, los valores de la función son positivos).

3 a) 

b) 

Sobre la gráfica de estas dos funciones, halla, en cada caso, los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 3} f(x); \quad \lim_{x \to 2} f(x); \quad \lim_{x \to +\infty} f(x); \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

a) $\lim_{x \to 3} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{cases}$ No tiene límite en $x = 3$.

$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 2} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 2^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{cases}$ No tiene límite en $x = 2$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

4 **Halla las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{4-x}$ y estudia la posición de la curva respecto a ellas.**

El dominio de definición de $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{4\}$.

- Estudiamos lo que ocurre en $x = 4$:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{2x+1}{4-x} = \frac{9}{0} = \pm\infty \;\to\; \text{La recta } x = 4 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Posición:

IZQUIERDA: $x = 3{,}99 \;\to\; \dfrac{2 \cdot 3{,}99 + 1}{4 - 3{,}99} = 898 \;\to\; \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{2x+1}{4-x} = +\infty$

DERECHA: $x = 4{,}01 \;\to\; \dfrac{2 \cdot 4{,}01 + 1}{4 - 4{,}01} = -902 \;\to\; \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{2x+1}{4-x} = -\infty$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x+1}{4-x} = -2 \;\to\; \text{La recta } y = -2 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Posición:

Calculamos $f(x) - (-2) = \dfrac{2x+1}{4-x} + 2 = \dfrac{9}{4-x}$

Si $x \to +\infty$, $f(x) - (-2) < 0 \;\to\;$ La función está por debajo de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x) - (-2) > 0 \;\to\;$ La función está por encima de la asíntota.

5 **Justifica qué valor debe tomar a para que la función $f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$.**

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función es continua para valores de x menores que 1 y mayores que 1, porque ambos tramos son rectas.

Para que sea continua en $x = 1$, debe cumplirse: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$f(1) = a - 2$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \;\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a - 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - 2a \end{cases}$$

Para que exista el límite, debe ser: $a - 2 = 4 - 2a \;\to\; 3a = 6 \;\to\; a = 2$

6 **Halla el límite de $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6}$ cuando $x \to 3$; $x \to 2$; $x \to +\infty$; $x \to -\infty$ y representa la información que obtengas.**

- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{0}{0}$

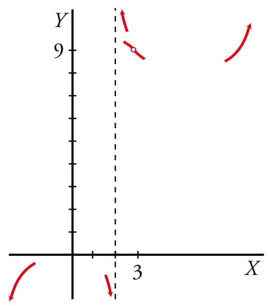
Simplificamos: $\dfrac{x^2(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{x^2}{x-2}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2}{x-2} = 9$$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{x-2} \;\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-2} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-2} = -\infty$



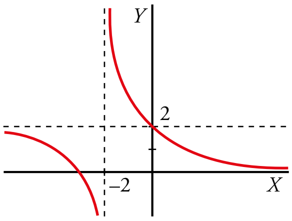
7 **Representa una función que cumpla las siguientes condiciones:**

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$



8 **Estudia las ramas infinitas de $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ y sitúa la curva respecto a su asíntota.**

Como el dominio de f es $\mathbb{R} - \{2\}$, estudiamos la existencia de asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{x-2} = \left(\dfrac{4}{0}\right) = \pm\infty \rightarrow$ La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Posición:

- IZQUIERDA: $x = 1{,}99 \rightarrow \dfrac{1{,}99^2}{1{,}99-2} = -396{,}01 \rightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{x-2} = -\infty$
- DERECHA: $x = 2{,}01 \rightarrow \dfrac{2{,}01^2}{2{,}01-2} = 404{,}01 \rightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2}{x-2} = +\infty$

Por otra parte, $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2} = x + 2 + \dfrac{4}{x-2} \rightarrow$ La recta $y = x + 2$ es una asíntota oblicua de la función.

Posición:

Calculamos $f(x) - (x+2) = \dfrac{4}{x-2}$:

- Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) - (x+2) > 0 \rightarrow$ La función está por encima de la asíntota oblicua.
- Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) - (x+2) < 0 \rightarrow$ La función está por debajo de la asíntota oblicua.

Para consultar los **criterios de evaluación** y los **estándares de aprendizaje evaluables**, véase la Programación.

7 DERIVADAS

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) **CE 1.2.** (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) **CE 1.9.** (EA 1.9.1.-EA 1.9.2.-EA 1.9.3.) **CE 1.10.** (EA 1.10.1.) **CE 1.11.1.** (EA 1.11.1.)

Página 195

Resuelve

Movimiento de una partícula

Una investigadora, para estudiar el movimiento de una partícula, la ha iluminado con destellos de *flash* cada décima de segundo (0,1 s) durante cuatro segundos. Esta es la fotografía a tamaño real:

1. **Aproxima la velocidad de la partícula en el instante $t = 2$ s hallando su velocidad media en los intervalos [2; 2,5] y [2; 2,1]. Para ello, toma medidas sobre la fotografía. Observa que P_2; $P_{2,1}$ y $P_{2,5}$ son las posiciones de la partícula en los instantes 2 s; 2,1 s y 2,5 s, respectivamente.**
2. **Calcula las velocidades medias anteriores tomando valores sobre la ecuación del movimiento de dicha partícula: $s = \frac{1}{2}(t^4 - 8t^3 + 18t^2)$**
3. **Halla ahora las velocidades medias en los intervalos [2; 2,001] y [2; 2,000001] tomando de nuevo valores sobre la ecuación del movimiento de la partícula. ¿Podemos considerar que esta última velocidad media es muy parecida a la velocidad instantánea en $t = 2$ s?**

1. La distancia que separa los puntos en los instantes $t = 2$ y $t = 2,5$ es de 12,5 mm, luego la velocidad es:

$$\frac{12,5}{0,5} = 25 \text{ mm/s} = 2,5 \text{ cm/s}$$

La distancia que separa los puntos en los instantes $t = 2$ y $t = 2,1$ es de 3,5 mm, luego la velocidad es:

$$\frac{3,5}{0,1} = 35 \text{ mm/s} = 3,5 \text{ cm/s}$$

2. $$\left.\begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{2}(2^4 - 8 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2) = 12 \text{ cm} \\ s_2 = \frac{1}{2}(2,5^4 - 8 \cdot 2,5^3 + 18 \cdot 2,5^2) = 13,28 \text{ cm} \end{array}\right\} \to v_1 = \frac{13,28 - 12}{0,5} = 2,56 \text{ cm/s}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \text{ cm} \\ s_3 = \frac{1}{2}(2,1^4 - 8 \cdot 2,1^3 + 18 \cdot 2,1^2) = 12,37 \text{ cm} \end{array}\right\} \to v_2 = \frac{12,37 - 12}{0,1} = 3,77 \text{ cm/s}$$

3. $$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \text{ cm} \\ s_4 = \frac{1}{2}(2,001^4 - 8 \cdot 2,001^3 + 18 \cdot 2,001^2) = 12,003997 \text{ cm} \end{array}\right\} \to v = \frac{12,003997 - 12}{0,001} = 3,997 \text{ cm/s}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \text{ cm} \\ s_5 = \frac{1}{2}(2,000001^4 - 8 \cdot 2,000001^3 + 18 \cdot 2,000001^2) = 12,000004 \text{ cm} \end{array}\right\} \to v = \frac{12,000004 - 12}{0,000001} = 4 \text{ cm/s}$$

Sí podemos considerar que esta última velocidad es muy parecida a la velocidad instantánea en $t = 2$ s porque el intervalo de tiempo transcurrido es tan solo una millonésima de segundo.

1 ▶ MEDIDA DEL CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) **CE 3.5.** (EA 3.5.1.-EA 3.5.2.)

Página 196

1 Piensa y comparte en pareja. **[La decisión sobre la veracidad de las afirmaciones se puede aprovechar para trabajar esta estrategia].**

¿Verdadero o falso?

a) La T.V.M. mide el crecimiento medio de una función en un intervalo.

b) Si f es creciente en $[a, b]$, su T.V.M. en ese intervalo es positiva, y si es decreciente, su T.V.M. es negativa.

c) Si la T.V.M. de f en $[a, b]$ es 0, significa que f es constante en $[a, b]$.

a) Verdadero.

b) Verdadero. El signo de la T.V.M. depende solo del signo del numerador. Si f es creciente $f(b) > f(a)$, luego el numerador es positivo. Si f es decreciente, $f(b) < f(a)$, luego el numerador es negativo.

c) Falso. Solo podemos afirmar que $f(a) = f(b)$. Esto no quiere decir que sea constante.

2 **Halla la T.V.M. de la función $y = x^2 - 8x + 12$ en los siguientes intervalos:**

$[1, 2]$, $[1, 3]$, $[1, 4]$, $[1, 5]$, $[1, 6]$, $[1, 7]$, $[1, 8]$

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{0-5}{1} = -5$$

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{-3-5}{2} = -4$$

$$\text{T.V.M. } [1, 4] = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{-4-5}{3} = -3$$

$$\text{T.V.M. } [1, 5] = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{-3-5}{4} = -2$$

$$\text{T.V.M. } [1, 6] = \frac{f(6)-f(1)}{6-1} = \frac{0-5}{5} = -1$$

$$\text{T.V.M. } [1, 7] = \frac{f(7)-f(1)}{7-1} = \frac{5-5}{6} = 0$$

$$\text{T.V.M. } [1, 8] = \frac{f(8)-f(1)}{8-1} = \frac{12-5}{7} = 1$$

3 **Halla la T.V.M. de $y = x^2 - 8x + 12$ en el intervalo variable $[1, 1 + \mathrm{h}]$.**

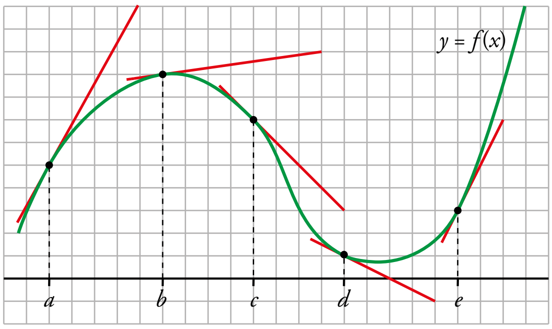
Comprueba que, dando a h los valores adecuados, se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

$$\text{T.V.M. } [1, 1+\mathrm{h}] = \frac{f(1+\mathrm{h})-f(1)}{\mathrm{h}} = \frac{(1+\mathrm{h})^2-8(1+\mathrm{h})+12-5}{\mathrm{h}} = \frac{\mathrm{h}^2-6\mathrm{h}}{\mathrm{h}} = \frac{\mathrm{h}(\mathrm{h}-6)}{\mathrm{h}} = \mathrm{h}-6$$

Dando a h los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

Página 197

4 **Calcula $f'(a)$, $f'(b)$, $f'(c)$, $f'(d)$ y $f'(e)$.**



PUNTO	PENDIENTE
A	$f'(-8) = \frac{9}{5}$
B	$f'(-3) = \frac{1}{7}$
C	$f'(1) = -1$
D	$f'(5) = -\frac{1}{2}$
E	$f'(10) = 2$

5 **Comprobamos.** **[El trabajo con la pendiente de la gráfica que propone el ejercicio puede servir para trabajar esta técnica].**

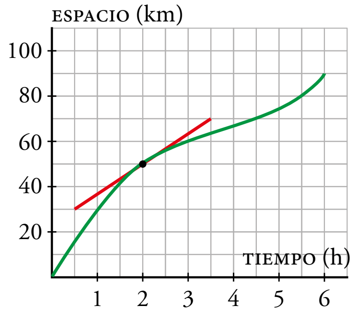
La siguiente gráfica muestra el espacio recorrido por un ciclista a lo largo de una carrera.

a) Calcula su velocidad media entre estas horas:

[1, 2], [1, 3], [1; 4,5], [1; 5,5] y [1, 6]

b) Halla la velocidad que llevaba a las 2 h.

c) Estima su velocidad a las 5 h 30 min.



Vemos los valores que toma la función en cada punto:

$f(1) = 30$ km

$f(2) = 50$ km

$f(3) = 60$ km

$f(4,5) = 70$ km

$f(5,5) = 80$ km

a) $\text{T.V.M.}[1,2] = \dfrac{f(2) - f(1)}{2-1} = 20$ km/h

$\text{T.V.M.}[1,3] = \dfrac{f(3) - f(1)}{3-1} = 15$ km/h

$\text{T.V.M.}[1;4,5] = \dfrac{f(4,5) - f(1)}{4,5-1} = \dfrac{40}{3,5} = 11,43$ km/h

$\text{T.V.M.}[1;5,5] = \dfrac{f(5,5) - f(1)}{5,5-1} = \dfrac{50}{4,5} = 11,1$ km/h

b) Aproximamos la velocidad en t = 2:

$$\frac{f(2,5)-f(2)}{0,5}=\frac{58-50}{0,5}=16 \text{ km/h}$$

$$\frac{f(2,25)-f(2)}{0,25}=\frac{54-50}{0,25}=16 \text{ km/h}$$

$$\frac{f(2)-f(1,5)}{0,5}=\frac{50-42}{0,5}=16 \text{ km/h}$$

$$\frac{f(2)-f(1,75)}{0,25}=\frac{50-46}{0,25}=16 \text{ km/h}$$

Podemos decir entonces que su velocidad a las dos horas es de 16 km/h.

c) Aproximamos la velocidad en t = 5,5 (es decir, a las 5 h 30 min):

$$\frac{f(6)-f(5,5)}{0,5}=\frac{90-80}{0,5}=20 \text{ km/h}$$

$$\frac{f(5,5)-f(5)}{0,5}=\frac{80-75}{0,5}=10 \text{ km/h}$$

Haciendo un promedio, podemos decir entonces que su velocidad a las 5 h 30 min es de unos 15 km/h.

2 ▶ OBTENCIÓN DE LA DERIVADA A PARTIR DE LA EXPRESIÓN ANALÍTICA

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) **CE 3.5.** (EA 3.5.1.-EA 3.5.2.)

Página 199

Hazlo tú

1 **Halla la derivada de la función** $y = \dfrac{3}{x-2}$ **en los puntos de abscisas 1, –1 y 5.**

- $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

  $f(1+h) = \dfrac{3}{1+h-2} = \dfrac{3}{h-1}$

  $f(1) = \dfrac{3}{1-2} = -2$

  $f(1+h) - f(1) = \dfrac{3}{h-1} - (-3) = \dfrac{3h}{h-1}$

  $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{\frac{3h}{h-1}}{h} = \dfrac{3}{h-1}$

  $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3}{h-1} = -3$

- $f'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

  $f(-1+h) = \dfrac{3}{-1+h-2} = \dfrac{3}{h-3}$

  $f(-1) = \dfrac{3}{-1-2} = -1$

  $f(-1+h) - f(-1) = \dfrac{3}{h-3} - (-1) = \dfrac{h}{h-3}$

  $\dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \dfrac{\frac{h}{h-3}}{h} = \dfrac{1}{h-3}$

  $f'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h-3} = -\dfrac{1}{3}$

- $f'(5) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h}$

  $f(5+h) = \dfrac{3}{5+h-2} = \dfrac{3}{h+3}$

  $f(5) = \dfrac{3}{5-2} = 1$

  $f(5+h) - f(5) = \dfrac{3}{h+3} - 1 = \dfrac{-h}{h+3}$

  $\dfrac{f(5+h) - f(5)}{h} = \dfrac{\frac{-h}{h+3}}{h} = -\dfrac{1}{h+3}$

  $f'(5) = \lim\limits_{h \to 0} \left(-\dfrac{1}{h+3}\right) = -\dfrac{1}{3}$

2 **Halla la derivada de $y = \dfrac{x^2}{2} + 7x$ en los puntos de abscisas 0, 1, 2, 3, 4 y 5.**

$$f(x+h) = \frac{(x+h)^2}{2} + 7(x+h) = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} + 7x + 7h$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} + 7x + 7h - \left(\frac{x^2}{2} + 7x\right) = xh + \frac{h^2}{2} + 7h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{xh + \frac{h^2}{2} + 7h}{h} = x + \frac{h}{2} + 7$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(x + \frac{h}{2} + 7\right) = x + 7$$

$f'(0) = 0 + 7 = 7$ $\quad f'(1) = 1 + 7 = 8$ $\quad f'(2) = 9$ $\quad f'(3) = 10$ $\quad f'(4) = 11$ $\quad f'(5) = 12$

Piensa y practica

1 **¿Verdadero o falso?**

a) La derivada de una función, $y = f(x)$, en $x = a$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

b) $f'(3) = 0$ significa que la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $x = 3$ es paralela al eje X.

c) Si $f'(2) > 0$, entonces f es creciente en el punto de abscisa 2.

a) Verdadero.

b) Verdadero. La pendiente de la recta tangente en $x = 3$ es cero, luego la recta es horizontal.

c) Verdadero, debido a la inclinación de la recta tangente a f en ese punto.

2 **Halla la derivada de $y = \dfrac{1}{x}$ en el punto de abscisa –2.**

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$f(-2+h) - f(-2) = \frac{1}{-2+h} + \frac{1}{2} = \frac{-2+h+2}{2(-2+h)} = \frac{h}{2h-4}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{2h-4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h-4} = -\frac{1}{4}$$

3 **Halla la derivada de $y = -2x + 4$ en los puntos de abscisas –3, 0, 4 y 7. Explica por qué obtienes en todos los casos el mismo resultado.**

- $f'(-3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$

  $f(-3+h) - f(-3) = -2(-3+h) + 4 - 10 = 6 - 2h - 6 = -2h$

  $f'(-3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

- $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$

  $f(h) - f(0) = -2h + 4 - 4 = -2h$

  $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

- $f'(4) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h}$

$f(4 + h) - f(4) = -2(4 + h) + 4 - (-4) = -8 - 2h + 8 = -2h$

$f'(4) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

- $f'(7) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(7+h) - f(7)}{h}$

$f(7 + h) - f(7) = -2(7 + h) + 4 - (-10) = -14 - 2h + 14 = -2h$

$f'(7) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

Como la función es una línea recta, crece o decrece siempre de la misma forma y al ser la derivada una forma de medir el crecimiento de una función, esta debe valer lo mismo en todos los puntos.

4 **Halla la derivada de $y = 3x^2 - 5x + 1$ en los puntos de abscisas –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.**

Calculamos la derivada de forma general y la evaluamos en cada uno de los puntos pedidos.

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f(x + h) - f(x) = 3(x + h)^2 - 5(x + h) + 1 - (3x^2 - 5x + 1) =$

$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 1 - 3x^2 + 5x - 1 = 3h^2 + 6hx - 5h$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h^2 + 6hx - 5h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (3h + 6x - 5) = 6x - 5$

$f'(-2) = -17$

$f'(-1) = -11$

$f'(0) = -5$

$f'(1) = 1$

$f'(2) = 7$

$f'(3) = 13$

$f'(4) = 19$

$f'(5) = 25$

$f'(6) = 31$

3 FUNCIÓN DERIVADA DE OTRA

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) **CE 1.9.** (EA 1.9.1.-EA 1.9.2.-EA 1.9.3.) **CE 3.5.** (EA 3.5.1.-EA 3.5.2.)

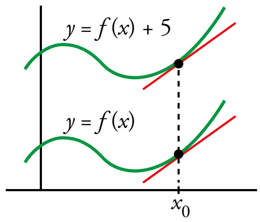
Página 200

1 **[La comprensión del enunciado propuesto sirve para trabajar la destreza comprensión escrita de esta clave].**

¿Verdadero o falso?

Las rectas tangentes en un punto cualquiera, x_0, a las gráficas de $y = f(x)$ e $y = f(x) + 5$ son paralelas.

Eso significa que las dos funciones tienen la misma función derivada.



Verdadero, porque al ser paralelas las rectas tangentes en cualquier punto, deben tener la misma pendiente en todos los puntos.

2 **Halla la función derivada de $f(x) = x^2 + 5$ y $g(x) = x^3 + 2x$.**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2+5-x^2-5}{h} = \frac{x^2+h^2+2xh-x^2}{h} = h+2x$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x \to f'(x) = 2x$$

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{(x+h)^3+2(x+h)-x^3-2x}{h} = \frac{(x^2+h^2+2xh)(x+h)+2x+2h-x^3-2x}{h} =$$

$$= \frac{x^3+xh^2+2x^2h+x^2h+h^3+2xh^2+2h-x^3}{h} = \frac{3xh^2+3x^2h+h^3+2h}{h} =$$

$$= 3xh+3x^2+h^2+2$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = 3x^2+2 \to g'(x) = 3x^2+2$$

3 **Halla la derivada de $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ y, a partir de ella, calcula $f'(4)$, $f'(-1)$, $f'(1)$ y $f'(5)$.**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{3}{x+h-2}-\dfrac{3}{x-2}}{h} = 3\cdot\frac{\dfrac{x-2-x-h+2}{(x+h-2)(x-2)}}{h} = \frac{-3}{(x+h-2)(x-2)}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-3}{(x+h-2)(x-2)} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$f'(4) = \frac{-3}{4}$$

$$f'(-1) = \frac{-1}{3}$$

$$f'(1) = -3$$

$$f'(5) = \frac{-1}{3}$$

4 **Halla la función derivada de $f(x) = \sqrt{x-3}$ y calcula las pendientes de las rectas tangentes a la curva en los puntos de abscisas $x = 4$ y $x = 7$.**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h-3}-\sqrt{x-3}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h-3}-\sqrt{x-3})(\sqrt{x+h-3}+\sqrt{x-3})}{h(\sqrt{x+h-3}+\sqrt{x-3})} =$$

$$= \frac{x+h-3-(x-3)}{h(\sqrt{x+h-3}+\sqrt{x-3})} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{h+x-3}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{h+x-3}} = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

$$f'(4) = \frac{1}{2}$$

$$f'(7) = \frac{1}{4}$$

4 ▶ REGLAS PARA OBTENER LAS DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES

C.E.: CE 3.5. (EA 3.5.1.-EA 3.5.2.)

Página 201

1 Halla las funciones derivadas de estas funciones:

a) $f(x) = x^5$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **c)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **d)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ **e)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{x^2}$

a) $f'(x^5) = 5x^4$

b) $f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = f'(x^{-2}) = -2x^{-3} = \dfrac{-2}{x^3}$

c) $f'\left(\sqrt[3]{x}\right) = f'(x^{1/3}) = \dfrac{1}{3}x^{(1/3)-1} = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $f'\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = f'(x^{2/3}) = \dfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \dfrac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

e) $f'\left(\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{x^2}\right) = f'\left(\dfrac{x^{3/2}\cdot x^{4/3}}{x^2}\right) = f'\left(x^{5/6}\right) = \dfrac{5}{6}x^{(5/6)-1} = \dfrac{5}{6\sqrt[6]{x}}$

Página 203

Hazlo tú

1 Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5x^4 - 2x^2 + 3x - 7$ **b)** $g(x) = \sqrt{5x} - \sqrt[3]{3x^4}$ **c)** $h(x) = \dfrac{3x}{x^2\sqrt[3]{x}}$

a) $f'(x) = 5\cdot 4x^3 - 2\cdot 2x + 3 = 20x^3 - 4x + 3$

b) $g(x) = \sqrt{5}\,\sqrt{x} - \sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{x^4} = \sqrt{5}\,x^{1/2} - \sqrt[3]{3}\,x^{4/3}$

$g'(x) = \sqrt{5}\cdot\dfrac{1}{2}x^{-1/2} - \sqrt[3]{3}\cdot\dfrac{4}{3}x^{1/3} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{4\sqrt[3]{3}}{3}\sqrt[3]{x}$

c) $h(x) = \dfrac{3x}{x^2\,x^{1/3}} = 3x^{-4/3}$

$h'(x) = 3\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)x^{-7/3} = -\dfrac{4}{x^{7/3}} = -\dfrac{4}{x^2\sqrt[3]{x}}$

2 Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{5^{4x}}{125}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 3}$ **c)** $h(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x}$

a) $f(x) = \dfrac{1}{125}(5^4)^x = \dfrac{1}{125}625^x$

$f'(x) = \dfrac{1}{125}625^x\,ln\,625 = \dfrac{ln\,625}{125}625^x$

b) $g'(x) = \dfrac{(2x-3)\cdot(x^2+x-3) - (x^2-3x+1)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-3)^2} = \dfrac{2x^3 - x^2 - 9x + 9 - (2x^3 - 5x^2 - x + 1)}{(x^2+x-3)^2} = \dfrac{4x^2 - 8x + 8}{(x^2+x-3)^2}$

c) $h(x) = x^2 - 5x + 2 - \dfrac{1}{x}$

$h'(x) = 2x - 5 + \dfrac{1}{x^2}$

Piensa y practica

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

2 $f(x) = 5x^2 + 7x - 2\sqrt{x}$

$$f'(x) = 5 \cdot 2x + 7 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 10x + 7 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3 $f(x) = \sqrt{3x^3} \cdot e^x$

$$f(x) = \sqrt{3}\,\sqrt{x^3}\,e^x = \sqrt{3}\,x^{3/2}\,e^x$$

$$f'(x) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\,e^x + x^{3/2}\,e^x\right) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\,e^x + x\sqrt{x}\,e^x\right) = \sqrt{3x}\,e^x\left(\frac{3}{2} + x\right)$$

4 $f(x) = \dfrac{e^x \cdot \cos x}{2^{x+4}}$

$$f(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x \cos x}{2^x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{(e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x)\, 2^x - e^x \cos x\, 2^x \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x \ln 2}{2^x} =$$

$$= \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x (\cos x - \operatorname{sen} x - \ln 2 \cos x)}{2^x}$$

5 $f(x) = x \cdot 3^x \cdot tg\, x$

$$f'(x) = 3^x \cdot tg\, x + x \cdot 3^x \ln 3 \cdot tg\, x + \frac{x \cdot 3^x}{\cos^2 x}$$

6 $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot x - lon_2\, x \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{1}{\ln 2} - \log_2 x}{x^2} = \frac{1 - \ln 2 \log_2 x}{x^2 \ln 2}$$

7 $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x + 3}{x^2}$

$$f(x) = 2x - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2x - 5 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x^{-2}$$

$$f'(x) = 2 + \frac{5}{x^2} + 3 \cdot (-2)\, x^{-3} = 2 + \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3}$$

8 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)\, 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

9 $f(x) = (\operatorname{sen} x)\left(x^2 + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = (\cos x)\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right) + (\operatorname{sen} x)\,(2x)$$

10 $f(x) = \dfrac{2^x}{cos\ x}$

$$f'(x) = \frac{2^x \cdot ln\,2 \cdot cos\ x - 2^x(-sen\ x)}{cos^2\ x} = \frac{2^x(ln\,2 \cdot cos\ x + sen\ x)}{cos^2\ x}$$

11 $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot 5^x}{x^3}$

$$f(x) = \frac{1}{x}5^x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}5^x + \frac{1}{x}5^x\,ln\,5 = 5^x\,\frac{x\,ln\,5 - 1}{x^2}$$

Página 204

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

12 $f(x) = sen\ (x^2 - 5x + 7)$

$$f'(x) = (2x - 5)\ cos\ (x^2 - 5x + 7)$$

13 $f(x) = \sqrt[3]{(5x+3)^2} = (5x+3)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(5x+3)^{-1/3} \cdot 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x+3}}$$

14 $f(x) = sen^2\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$D\left(sen^2\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \begin{cases} (\square^2)' = 2\square \\ (sen\,\square)' = cos\,\square \\ \left(3x + \frac{\pi}{2}\right)' = 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2sen\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 3 = 6sen\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$$

También, usando la fórmula del seno del ángulo doble, podríamos dar el resultado de esta otra manera:

$$f'(x) = 2sen\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 3 = 3sen\,(6x + \pi) = -3\ sen\ 6x$$

15 $f(x) = \dfrac{log\ x^2}{x}$

$$f(x) = \frac{2\ log\ x}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{2(1 - ln\,10\ log\ x)}{x^2\ ln\,10}$$

16 $f(x) = cos\ (3x - \pi)$

$$f'(x) = -3\ sen\ (3x - \pi)$$

17 $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$$

18 $f(x) = x\ e^{2x+1}$

$$f'(x) = e^{2x+1} + x\ e^{2x+1} \cdot 2 = e^{2x+1}(1 + 2x)$$

19 $f(x) = \dfrac{sen\,(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}\,cos\,(x^2+1) + [x\,sen\,(x^2+1)]/\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \frac{2x\,(1-x^2)\,cos\,(x^2+1) + x\,sen\,(x^2+1)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

6 ▶ UTILIDADES DE LA FUNCIÓN DERIVADA

C.E.: CE 3.5. (EA 3.5.1.-EA 3.5.2.)

Página 206

Hazlo tú

1 Escribe las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva de la función $f(x) = \dfrac{2x+4}{x+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Para escribir la ecuación de una recta, debemos conocer un punto y su pendiente.

Hallamos la ordenada en $x = 1 \ \to \ f(1) = \dfrac{2+4}{1+1} = \dfrac{6}{2} = 3$

El punto de tangencia es (1, 3).

Hallamos la pendiente de la recta tangente: $m = f'(1)$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x+4)}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x-4}{(x+1)^2} = -\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$m = f'(1) = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

Recta tangente: $y = -\dfrac{1}{2}(x-1)+3$

Recta normal: $y = 2(x-1)+3$

Página 207

Hazlo tú

1 Halla los puntos singulares de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$ y determina los intervalos donde crece o decrece.

Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f'(x) = 0 \ \to \ 6x^2 - 6x - 12 = 0 \ \to \ x^2 - x - 2 = 0 \ \to \ x_1 = -1, \ x_2 = 2$

$f(1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 3 = 10 \ \to \ (-1, 10)$ es un punto singular.

$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 3 = -17 \ \to \ (2, -17)$ es otro punto singular.

Teniendo en cuenta las ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = -\infty$$

Tenemos que los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$ son intervalos de crecimiento. En el intervalo $(-1, 2)$ la función decrece.

7 OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) **CE 1.2.** (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) **CE 1.10.** (EA 1.10.1.) **CE 1.11.** (EA 1.11.1.) **CE 3.5.** (EA 3.5.1- EA 3.5.2.)

Página 209

1 **[El análisis de la función propuesta permite al alumnado trabajar la iniciativa de la dimensión productiva de esta clave].**

Dada la función $y = x^3 - 15x^2 + 63x$, halla:

Su máximo en:

a) [2, 8] **b) [2, 9]** **c) [2, 10]**

Su mínimo en:

d) [2, 8] **e) [1, 8]** **f) [0, 8]**

Llamaremos:

$f(x) = x^3 - 15x^2 + 63x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 30x + 63 = x^2 - 10x + 21$

Veamos dónde se anula la derivada:

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100-84}}{2} \rightarrow x = 7,\ x = 3$$

a) En [2,8] tenemos dos puntos singulares en $x = 3$ y $x = 7$. Tenemos que ver qué valores toma la función en dichos puntos, además de en los extremos:

$f(2) = 74$

$f(3) = 81$

$f(7) = 49$

$f(8) = 56 \rightarrow$ Tiene un máximo en $x = 3$.

b) En [2,9] solamente nos falta estudiar la función en $x = 9$:

$f(9) = 81 \rightarrow$ Tiene un máximo en $x = 3$ y $x = 9$.

c) En [2,10] nos falta estudiar la función en $x = 10$:

$f(10) = 130 \rightarrow$ Tiene un máximo en $x = 10$.

d) El mínimo está en $x = 7$.

e) Nos falta estudiar la función en $x = 1$:

$f(1) = 49 \rightarrow$ Tiene dos mínimos en $x = 7$ y $x = 1$.

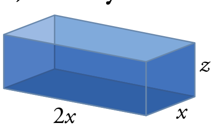
f) Nos falta estudiar la función en $x = 0$:

$f(0) = 0 \rightarrow$ El mínimo está en $x = 0$.

2 **Se quiere construir una pecera de metacrilato ortoédrica abierta por arriba, cuya base es un rectángulo el doble de largo que de ancho y con capacidad de 36 dm³. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para minimizar el gasto de material?**

Si el lado menor de la base está comprendido entre:

a) 1 dm y 2 dm **b) 4 dm y 6 dm** **c) Sin restricciones**



$V = 36 = 2xxz = 2x^2 z \rightarrow z = \dfrac{18}{x^2}$

$S(x) = 2xz + 4xz + 2x^2 = 6xz + 2x^2$

Sustituimos z en $S(x) = \dfrac{108}{x} + 2x^2$, donde $x > 0$.

a) $x \in [1, 2]$

Veamos los puntos singulares de la función, si pertenecen al intervalo, y qué ocurre en sus extremos:

$S'(x) = -\frac{108}{x^2} + 4x = 0 \rightarrow x = 3$ está fuera de nuestro intervalo.

$S(1) = 110$

$S(2) = 62 \rightarrow$ Tiene un mínimo en $x = 2$.

Las dimensiones serán 2 dm × 4 dm × 4,5 dm.

b) $x \in [4, 6]$

Veamos qué ocurre en los extremos:

$S(4) = 59$

$S(6) = 90 \rightarrow$ Tiene un mínimo en $x = 4$.

Las dimensiones serán 4 dm × 8 dm × 1,125 dm.

c) En este caso solamente sabemos que $x > 0$, y que en $x = 3$ hay un punto singular. Veamos si es mínimo viendo cómo se comporta la función en los extremos:

$\lim\limits_{x \to 0} S(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} S(x) = +\infty \rightarrow x = 3$ es un mínimo

Las dimensiones serán 3 dm × 6 dm × 1 dm.

8 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

C.E.: CE 3.5. (EA 3.5.1- EA 3.5.2.)

Página 211

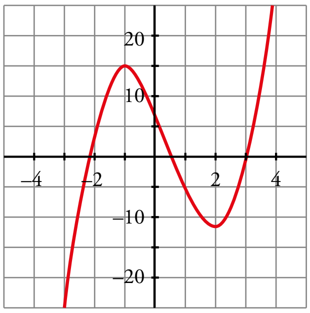
1 Representa estas funciones:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ **b)** $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$ **c)** $y = x^4 + 4x^3$

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$

Máximo en (–1, 15).

Mínimo en (2, –12).



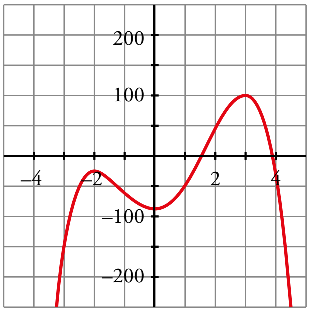
b) $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 72x = -12x(x^2 - x - 6) = 0$

$x = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$ $\begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$

Máximo en (–2, –26) y en (3, 99).

Mínimo en (0, –90).



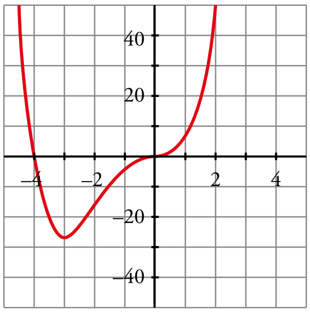
c) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x+3) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

Mínimo en (–3, –27).

Punto de inflexión en (0, 0).

$f(x) = 0 \rightarrow x^3(x+4) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$

Puntos de corte con los ejes: (0, 0) y (–4, 0).



Página 213

2 Saco de dudas. **[Las dudas que surjan al tratar de representar las funciones pueden ser tratadas según esta técnica].**

Representa las siguientes funciones racionales, siguiendo los pasos de la página anterior:

a) $y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ **b)** $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$ **c)** $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

d) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ **e)** $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ **f)** $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

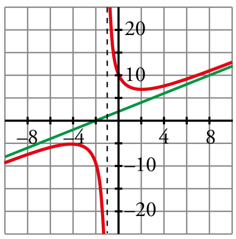
a) $f'(x) = \frac{(2x+3)(x+1) - (x^2 + 3x + 11)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 3x + 3 + 3 - x^2 - 3x - 11}{(x+1)^2} =$

$= \frac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -4$

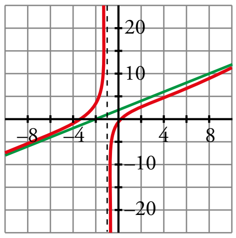
Máximo en (–4, –5). Mínimo en (2, 7).

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$



b) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+3x+3-x^2-3x}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} \neq 0$

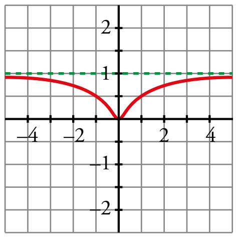


Puntos de corte con los ejes: (0, 0) y (–3, 0)

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$

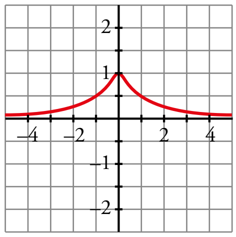
c) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \to x = 0$



Mínimo en (0, 0).

Asíntota horizontal: $y = 1$

d) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \to x = 0$

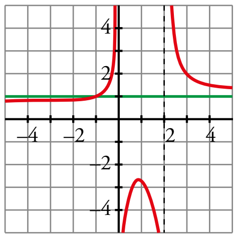


Máximo en (0, 1).

Asíntota horizontal: $y = 0$

e) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-2x)-(x^2+2)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{2x^3-4x^2-2x^3+2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} =$

$= \dfrac{-2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} = 0 \to x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 0{,}73 \\ x_2 = -2{,}73 \end{cases}$



Máximo en (0,73; –2,73).

Mínimo en (–2,73; 0,73).

Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 1$

f) • Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asíntota vertical:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \end{array}\right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

• Asíntota horizontal:

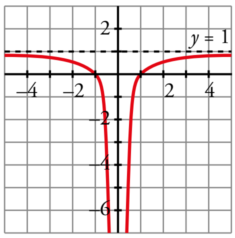
$y = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $y = 1$ es asíntota horizontal

Cuando $x \to -\infty$, $y < 1$; y cuando $x \to +\infty$, $y < 1$.

Por tanto, la curva está por debajo de la asíntota.

• Puntos singulares:

$f'(x) = \dfrac{2x \cdot x^2 - (x^2-1)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{2x^3-2x^3+2x}{x^4} = \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3}$



$f'(x) \neq 0 \to f(x)$ no tiene puntos singulares

Observamos que $f'(x) < 0$ si $x < 0$; y que $f'(x) > 0$ si $x > 0$.

Luego la función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y es creciente en $(0, +\infty)$.

• Corta al eje X en (–1, 0) y (1, 0).

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 3.5. (EA 3.5.1- EA 3.5.2.)

Página 214

1. Función derivada a partir de la definición

Hazlo tú

- **Dada $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, halla $f'(x)$ aplicando la definición.**

$$f(x+\text{h}) - f(x) = \frac{x+\text{h}}{x+\text{h}+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{(x+\text{h})(x+1) - x(x+\text{h}+1)}{(x+\text{h}+1)(x+1)} = \frac{x^2+x+\text{h}x+\text{h}-x^2-x\text{h}-x}{(x+\text{h}+1)(x+1)} =$$

$$= \frac{\text{h}}{(x+\text{h}+1)(x+1)}$$

$$f'(x) = \lim_{\text{h}\to 0} \frac{f(x+\text{h}) - f(x)}{\text{h}} = \lim_{\text{h}\to 0} \frac{\dfrac{\text{h}}{(x+\text{h}+1)(x+1)}}{\text{h}} = \lim_{\text{h}\to 0} \frac{1}{(x+\text{h}+1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

2. Reglas de derivación

Hazlo tú

- **Halla $f'(x)$ siendo: $f(x) = ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$**

$$f(x) = 2\,ln\,\frac{x+1}{x} = 2\,[ln\,(x+1) - ln\,x]$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{x+1}\cdot 1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{x(x+1)}$$

3. Recta tangente paralela a una recta

Hazlo tú

- **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3x^2 - 4x$ que sea paralela a la recta $2x - y + 5 = 0$.**

Despejando y en la ecuación de la recta dada, podemos obtener su pendiente.

$y = 2x + 5 \;\to\;$ La pendiente de la recta es 2.

Las abscisas de los puntos en los que la recta tangente es paralela a la recta anterior son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 2$.

$f'(x) = 6x - 4 \;\to\; 6x - 4 = 2 \;\to\; x = 1$ es el punto en el que la tangente y la recta dada son paralelas.

Finalmente, como $f(1) = -1$, la recta buscada es $y = 2(x-1) - 1$, es decir, $y = 2x - 3$.

Página 215

4. Puntos singulares. Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Hazlo tú

- **Calcula los puntos singulares y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{x^2}{2-x}$$

Veamos dónde está definida la función, eliminando los puntos donde se anula el denominador:

$Dom = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Por tanto, tendrá asíntota vertical en $x = 2$. Veamos cómo se comporta la función en $x = 2$:

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

Hallamos las abscisas de los puntos singulares resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$. Con ayuda de las ramas infinitas podemos saber si son máximos o mínimos.

$$f'(x) = \frac{2x(2-x)-(-1)(x^2)}{(2-x)^2} = \frac{4x-2x^2+x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x-x^2}{(2-x)^2} = \frac{x(4-x)}{(2-x)^2}$$

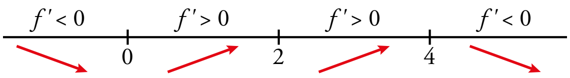
$f'(x) = 0 \ \to \ x = 0, x = 4$

$f(0) = 0, f(4) = -8 \ \to$ Los puntos singulares son $(0, 0)$ y $(4, -8)$.

Como el denominador de la derivada es siempre positivo en el dominio de la función, su signo dependerá del numerador:

$f'(x) > 0 \ \to \ (4-x) > 0 \ \to \ x > 0$ y $x < 4$ o bien $x < 0$ y $x > 4$ (sabiendo que $x = 2$ no pertenece al domino de $f(x)$).

Por tanto, f crece en $(0, 2) \cup (2, 4)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.



Por tanto, tiene un mínimo en $(0, 0)$ y un máximo en $(4, -8)$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

5. Cálculo de los coeficientes de una función a partir de sus puntos singulares

Hazlo tú

- **Halla b y c de modo que $f(x) = x^3 + bx^2 + c$ pase por $(1, 0)$ y $f'(1) = 5$.**

Pasa por $(0, 5) \ \to \ f(0) = c = 5$

Pasa también por su punto singular $(2, -3) \ \to \ f(2) = 8a + 2b + 5 = -3$ (1)

Además si es punto singular, en $x = 2$ se anula la derivada de f:

$f'(x) = 3ax^2 + b \ \to \ f'(2) = 12a + b = 0 \ \to \ b = -12a$

Sustituimos en (1): $-16a = -8 \ \to \ a = \frac{1}{2} \ \to \ b = -6$

La solución buscada es $y = \frac{1}{2}x^3 - 6x + 5$

Página 216

6. Problema de optimización

Hazlo tú

- **Halla dos números positivos cuya suma sea 34 y tales que su producto sea máximo.**

Buscamos dos números x, y que cumplan: $x + y = 34 \ \to \ y = 34 - x$

Para que su producto sea máximo definiremos la función de su producto, usando la anterior igualdad: $x \cdot y = x(34 - x) = 34x - x^2 \ \to \ f(x) = 34x - x^2$

Su gráfica es una parábola, y como el término de x^2 tiene signo negativo su vértice será su máximo. Busquemos este punto:

$f'(x) = 34 - 2x = 0 \ \to \ x = 17 \ \to \ f(17) = 289$

Comprobamos que es máximo:

$f'(x) = 34 - 2x < 0$ si $x > 17 \rightarrow f(x)$ decrece cuando $x > 17$

$ff'(x) = 34 - 2x > 0$ si $x < 17 \rightarrow f(x)$ crece cuando $x < 17$

Por tanto, los números buscados son: $x = 17$, $y = 17$

7. Gráfica de una función racional continua

Hazlo tú

- **Estudia y representa la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$.**

Su dominio de definición es $\mathbb{R}$ porque la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal: $y = 2$ porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2$

Posición: Calculamos $f(x) - 2 = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - 2 = \dfrac{-2}{x^2+1}$

- Si $x \rightarrow +\infty$, entonces $f(x) - 2 < 0$.
- Si $x \rightarrow -\infty$, entonces $f(x) - 2 < 0$.

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x(x^2+1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

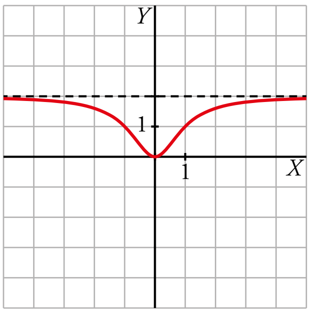
$f'(x) = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ El punto (0, 0) es un punto singular.

Estudiamos el signo de $f'(x)$:

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
SIGNO DE $f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

El punto (0, 0) es un mínimo.

Gráfica:



Página 217

8. Estudio y representación de una función polinómica

Hazlo tú

- **Estudia y representa esta función: $f(x) = 1 + (x - 3)^3$**

• Por ser una función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.

• Ramas infinitas:

$\lim_{x \to +\infty} [1 + (x - 3)^3] = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} [1 + (x - 3)^3] = -\infty$

• Puntos singulares:

$f'(x) = 3(x - 3)^2$

$f'(x) = 0 \to 3(x - 3)^2 = 0 \to x = 3$

Como $f(3) = 1$, el punto $(3, 1)$ es el único punto singular.

• Crecimiento y decrecimiento:

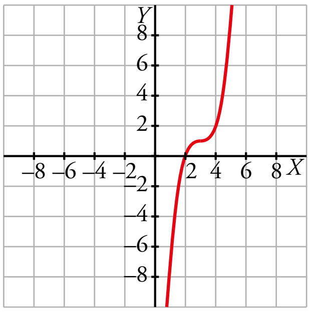
Como $f'(x) = 3(x - 3)^2 > 0$ para todo $x \neq 3$, la función crece a ambos lados de $x = 3$ y no es ni máximo ni mínimo.

• Cortes con los ejes:

$x = 0 \to y = -26$

$y = 0 \to 1 + (x - 3)^3 = 0 \to (x - 3)^3 = -1 \to x = 2$

• Gráfica:



9. Estudio y representación de una función racional

Hazlo tú

- **Estudia y representa esta función: $f(x) = \dfrac{2x^2 + 8}{x}$**

• La función no está definida en $x = 0 \to Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

• Asíntota vertical: $x = 0$

Posición:

Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

• Asíntotas horizontales y oblicuas:

Como el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, tiene una asíntota oblicua. Dividimos:

$f(x) = 2x + \dfrac{8}{x} \to$ La asíntota es $y = 2x$

Posición:

Si $x \to -\infty$, $f(x) - y = \dfrac{8}{x} < 0$. Curva bajo la asíntota.

Si $x \to +\infty$, $f(x) - y = \dfrac{8}{x} > 0$. Curva sobre la asíntota.

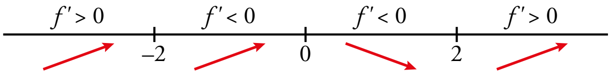
- Puntos singulares:

$f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$

$f'(x) = 0 \to \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \to 2x^2 - 8 = 0 \to x = -2,\ x = 2$

$f(-2) = -8$, $f(2) = 8$. Por tanto, $(-2, -8)$ y $(2, 8)$ son los puntos singulares.

- Crecimiento y decrecimiento:



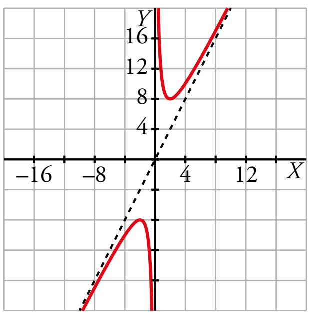
- Cortes con los ejes:

No corta al eje OY.

$y = 0 \to \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \to 2x^2 + 8 = 0$ No tiene solución (no corta al eje OX).

- Gráfica:

$y = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$



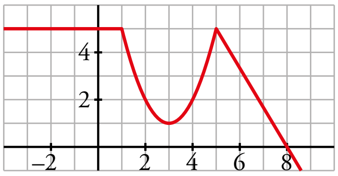
EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 1.9. (EA 1.9.1- EA 1.9.2.-EA 1.9.3.)

Página 218

1. Derivadas sobre la gráfica

- **Observando la gráfica de esta función $y = f(x)$:**



a) Hallar el valor de $f'(-2)$, $f'(3)$, $f'(6)$.

a) $f'(-2) = 0$ porque es constante en las proximidades de $x = -2$.

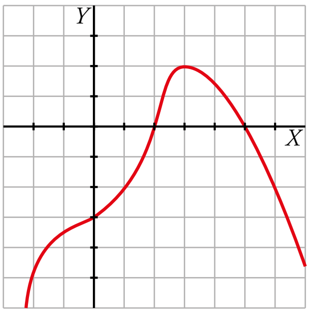
$f'(3) = 0$ porque en $x = 3$ hay un mínimo.

$f'(6) = -\frac{5}{3}$ porque la gráfica es la recta $y = \frac{-5x + 40}{3}$ con pendiente $-\frac{5}{3}$.

b) $f'(x) < 0$ en $(1, 3) \cup (5, +\infty)$ porque la función es decreciente en estos intervalos.

2. Función polinómica

- **Representar una función polinómica sabiendo que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$, que sus puntos de tangente horizontal son (0, –3) y (3, 2), y que corta al eje X solo en $x = 2$ y en $x = 5$.**



3. Función cuadrática

- **Hallar la función de segundo grado, $y = ax^2 + bx + c$, que pase por (0, 2) y tal que la pendiente de la recta tangente en el punto (1, –3) valga –1.**

La ecuación de una función cuadrática es de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Pasa por (0, 2) $\rightarrow$ $2 = c$

Pasa por (1, –3) $\rightarrow$ $-3 = a + b + 2$ $\rightarrow$ $a + b = -5$

Como la pendiente de la tangente en (1, –3) es –1, debe ocurrir que $f'(1) = -1$:

$f'(x) = 2ax + b$

$f'(1) = -1 \rightarrow 2a + b = -1$

Resolvemos este sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = -5 \\ 2a + b = -1 \end{array}\right\} \rightarrow a = 4,\ b = -9$$

La función cuadrática buscada es $y = 4x^2 - 9x + 2$.

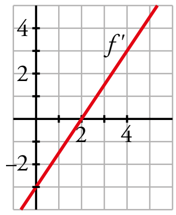
4. Gráfica de la función derivada

- **Esta es la gráfica de f', función derivada de f.**

  a) Obtener $f'(0)$, $f'(2)$ y $f'(4)$.

  b) ¿Tiene f algún punto singular?

  c) Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de f.



a) $f'(0) = -3$ $\quad f'(2) = 0$ $\quad f'(4) = 3$

b) En $x = 2$ se anula la derivada primera. Además, esta es negativa a la izquierda de 2 y positiva a la derecha. Por tanto, la función pasa de decreciente a creciente en $x = 2$ y este punto es un mínimo.

c) La función decrece en $(-\infty, 2)$ y crece en $(2, +\infty)$.

5. Máximo y mínimo en un intervalo

- **Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en el intervalo $[0, 3]$.**

Los valores máximo y mínimo de una función en un intervalo de este tipo pueden darse en los extremos del intervalo o en los puntos singulares.

Calculamos los puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \ \rightarrow \ 3x^2 - 3 = 0 \ \rightarrow \ x = -1, \ x = 1$$

El primer punto singular no lo consideramos porque queda fuera del intervalo $[0, 3]$ en el que se estudia la función. Evaluamos:

$$f(0) = 1 \qquad f(1) = -1 \qquad f(3) = 19$$

Por tanto, el máximo se da en $x = 3$ y vale 19. El mínimo se da en $x = 1$ y vale -1.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 219

Para practicar

Tasa de variación media. Definición de derivada

1 **Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo [1, 3] e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:**

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ **b)** $f(x) = (2-x)^3$

c) $f(x) = x^2 - x + 1$ **d)** $f(x) = 2^x$

T.V.M. $[1, 3] = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{f(3)-f(1)}{2}$

a) T.V.M. $[1, 3] = \frac{1/3-1}{2} = -\frac{1}{3} \rightarrow$ Decrece

b) T.V.M. $[1, 3] = \frac{-1-1}{2} = -1 \rightarrow$ Decrece

c) T.V.M. $[1, 3] = \frac{7-1}{2} = 3 \rightarrow$ Crece

d) T.V.M. $[1, 3] = \frac{8-2}{2} = 3 \rightarrow$ Crece

2 **a) Halla la T.V.M. de las funciones $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ y $g(x) = \frac{1}{x+1}$ en el intervalo [1, 1 + h].**

b) Calcula la T.V.M. de esas funciones en el intervalo [1; 1,5] utilizando las expresiones obtenidas en el apartado anterior.

a) Para la función $f(x)$:

T.V.M. $[1, 1+\text{h}] = \frac{f(1+\text{h})-f(1)}{\text{h}} = \frac{-(1+\text{h})^2+5(1+\text{h})-3-1}{\text{h}} = \frac{-1-2\text{h}-\text{h}^2+5+5\text{h}-4}{\text{h}} = 3-\text{h}$

Para la función $g(x)$:

T.V.M. $[1, 1+\text{h}] = \frac{g(1+\text{h})-g(1)}{\text{h}} = \frac{\frac{1}{1+\text{h}+1}-\frac{1}{2}}{\text{h}} = \frac{\frac{2-\text{h}-2}{2(2+\text{h})}}{\text{h}} = \frac{-1}{2\text{h}+4}$

b) Para la función $f(x)$:

T.V.M. [1; 1,5] = 3 – 0,5 = 2,5

Para la función $g(x)$:

T.V.M. $[1; 1{,}5] = \frac{-1}{2\cdot 0{,}5+4} = \frac{-1}{5}$

3 **a) Compara la T.V.M. de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ en los intervalos [2, 3] y [3, 4], y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.**

b) Calcula el crecimiento en el punto $x = -1$ de f y de g.

a) Para $f(x)$: T.V.M. [2, 3] = 19

T.V.M. [3, 4] = 37

Para $g(x)$: T.V.M. [2, 3] = 18

T.V.M. [3, 4] = 54

b) En [2, 3] crece más $f(x)$.

En [3, 4] crece más $g(x)$.

4 **Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$, utilizando la definición de derivada:**

a) $f(x) = 3x^2 - 1$ **b)** $f(x) = (2x + 1)^2$

c) $f(x) = 3/x$ **d)** $f(x) = 1/(x + 2)^2$

a) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(1+h)^2 - 1 - 2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(1+h^2+2h) - 3}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3 + 3h^2 + 6h - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(3h+6)}{h} = 6$

b) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2(1+h)+1)^2 - 9}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2h+3)^2 - 9}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4h^2 + 9 + 12h - 9}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(4h+12)}{h} = 12$

c) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3/(1+h) - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3 - 3 - 3h}{h(1+h)} = -3$

d) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(1+h+2)^2} - \dfrac{1}{9}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{9 - h^2 - 6h - 9}{9(h+3)^2}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h^2 - 6h}{9h(h+3)^2} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h-6}{9(h+3)^2} = \dfrac{-2}{27}$

5 **Aplica la definición de derivada para hallar la pendiente de las rectas tangentes a las curvas $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{3x - 7}$ en $x = 2$.**

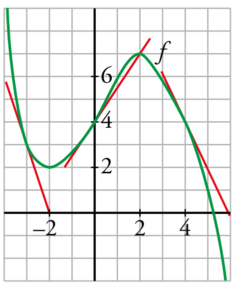
- $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{4(2+h) - (2+h)^2 - 4}{h} = \dfrac{8 + 4h - 4 - 4h - h^2 - 4}{h} = -h$

  $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (-h) = 0$

- $\dfrac{g(2+h) - g(2)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{3(2+h) - 7} - (-1)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{3h-1} + 1}{h} = \dfrac{3}{3h-1}$

  $g'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3}{3h-1} = -3$

6 **Observa la gráfica de f en la que se han trazado las tangentes en $x = -3$, $x = 0$ y $x = 4$ y responde.**



a) **¿Cuál es el valor de $f'(-3)$, $f'(0)$ y $f'(4)$?**

b) **¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?**

c) **En $x = 1$, ¿la derivada es positiva o negativa? ¿Y en $x = 3$?**

a) $f'(-3) = -3$ $\quad f'(0) = \dfrac{3}{2}$ $\quad f'(4) = -2$

b) En $x = -2$ y $x = 2$.

c) En $x = 1$ la derivada es positiva porque la pendiente de la tangente lo es. Análogamente, la derivada en $x = 3$ es negativa.

7 **Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba y su posición viene dada por la función $s(t) = 30t - 5t^2$, donde $s(t)$ es la distancia al suelo en metros y t el tiempo en segundos. Calcula.**

a) La velocidad media entre $t = 0$ y $t = 3$.

b) La velocidad instantánea en $t = 2$ y en $t = 3$.

a) $\dfrac{s(3)-s(0)}{3-0} = \dfrac{45}{3} = 15$ m/s

b) $s'(x) = 30 - 10t$

$s'(2) = 10$ m/s es la velocidad instantánea en $t = 2$

$s'(3) = 0$ m/s es la velocidad instantánea en $t = 3$

8 **Halla la función derivada de las siguientes funciones, aplicando la definición:**

a) $f(x) = \dfrac{(5x-3)}{2}$

b) $f(x) = x^2 + 7x - 1$

c) $f(x) = x^3 - 5x$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

a) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{\dfrac{5(x+h)-3}{2} - \dfrac{5x-3}{2}}{h} = \dfrac{5x+5h-3-5x+3}{2h} = \dfrac{5}{2}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{2}$

b) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2+7(x+h)-1-(x^2+7x-1)}{h} = \dfrac{x^2+2hx+h^2+7x+7h-1-x^2-7x+1}{h} =$

$= 2x + h + 7$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h + 7) = 2x + 7$

c) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^3-5(x+h)-(x^3-5x)}{h} = \dfrac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3-5x-5h-x^3+5x}{h} =$

$= 3x^2 + 3hx + h^2 - 5$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2 - 5) = 3x^2 - 5$

d) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{\dfrac{x+h-1}{x+h} - \dfrac{x-1}{x}}{h} = \dfrac{x(x+h-1)-(x+h)(x-1)}{hx(x+h)} = \dfrac{x^2+hx-x-(x^2-x+hx-h)}{hx(x+h)} =$

$= \dfrac{1}{x(h+x)}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{x(h+x)} = \dfrac{1}{x^2}$

Reglas de derivación

9 Halla la derivada de cada una de estas funciones:

a) $f(x) = x^4 - 7x^2 + 9$

b) $f(x) = (x^2 + 1)\, e^x$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = x^2\, ln\, x$

e) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2 + 2x + 3}$

g) $f(x) = x\, sen\, x$

h) $f(x) = 3\, cos\, x + 2tg\, x$

i) $f(x) = 3e^x + 5$

j) $f(x) = 2^x + log_2\, x$

a) $f'(x) = 4x^3 - 14x^2$

b) $f'(x) = 2xe^x + (x^2+1)\, e^x = e^x(x^2 + 2x + 1) = e^x\,(x+1)^2$

c) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4 - (x+1)\,(2x)}{(x^2-4)^2} = \dfrac{x^2 - 4 - 2x^2 - 2x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-(x^2+2x+4)}{(x^2-4)^2}$

d) $f'(x) = 2x\, ln\, x + \dfrac{x^2}{x} = 2x\, ln\, x + x$

e) $f'(x) = \dfrac{2\,(x+1) - 2\,x}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

f) $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2+2x+3) - (x^3+1)\,(2x+2)}{(x^2-2x+3)^2} = \dfrac{x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 2x - 2}{(x^2-2x+3)^2}$

g) $f'(x) = sen\, x + x\, cos\, x$

h) $f'(x) = -3\, sen\, x + \dfrac{2}{cos^2\, x}$

i) $f'(x) = 3e^x$

j) $f'(x) = 2^x\, ln\, 2 + \dfrac{1}{x\, ln\, 2}$

10 Aplica las reglas de derivación y simplifica si es posible.

a) $f(x) = (5x-2)^3$

b) $f(x) = 3\, cos\,(x + \pi)$

c) $f(x) = sen\, \dfrac{x}{2}$

d) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+7}{x}}$

f) $f(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{2x+1}$

g) $f(x) = tg\,(3x)$

h) $f(x) = x \cdot sen\, x^2$

i) $f(x) = \sqrt{7 \cdot ln\, x}$

j) $f(x) = (x + ln\, x)^2$

a) $f'(x) = 3(5x-2)^2 \cdot 5 = 15(5x-2)^2$

b) $f'(x) = -3sen\,(x + \pi)$

c) $f'(x) = cos\, \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\, cos\, \dfrac{x}{2}$

d) $f(x) = \dfrac{e^x\,(1 + e^{-2x})}{e^x} = 1 + e^{-2x}$

$f'(x) = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+7}{x}}} \cdot \dfrac{x - (x+7)}{x^2} = \dfrac{-7}{2x^2}\sqrt{\dfrac{x}{x+7}}$

f) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{8}\, e^{2x+1} + \dfrac{x^3}{8}\, e^{2x+1} \cdot 2 = \dfrac{e^{2x+1}}{8}\,(2x^3 + 3x^2)$

g) $f'(x) = \dfrac{1}{cos^2(3x)} \cdot 3 = \dfrac{3}{cos^2(3x)}$

h) $f'(x) = sen\, x^2 + x\, cos\, x^2 \cdot 2x = sen\, x^2 + 2x^2\, cos\, x^2$

i) $f'(x) = \sqrt{7} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{ln\, x}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{7}}{2x\sqrt{ln\, x}}$

j) $f'(x) = 2(x + ln\, x)\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 2\left(x + 1 + ln\, x + \dfrac{ln\, x}{x}\right)$

11 **Deriva las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \sqrt[3]{e^x + 1}$

b) $f(x) = \left(\dfrac{ln\, x}{x}\right)^2$

c) $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{1 - x^2}}$

d) $f(x) = \left(\dfrac{3x}{1 - x^2}\right)^2$

e) $f(x) = \dfrac{x}{3}\, log_2(1 - x^2)$

f) $f(x) = e^{-x}\, ln\, \dfrac{1}{x}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{(5x + 2)^2}$

h) $f(x) = ln\left(\dfrac{1}{4x} - \dfrac{x}{2}\right)$

a) $f(x) = (e^x + 1)^{1/3}$

$f'(x) = \dfrac{1}{3}(e^x + 1)^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(e^x + 1)^2}}$

b) $f'(x) = 2\,\dfrac{ln\, x}{x} \cdot \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot x - ln\, x}{x^2} = \dfrac{2\, ln\, x\,(1 - ln\, x)}{x^3}$

c) $f(x) = -3(1 - x^2)^{-1/2}$

$f'(x) = -3\left(-\dfrac{1}{2}\right)(1 - x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = \dfrac{-3x}{(1 - x^2)^{3/2}} = \dfrac{-3x}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$

d) $f'(x) = 2 \cdot \dfrac{3x}{1 - x^2} \cdot \dfrac{3(1 - x^2) - 3x \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^2} = \dfrac{6x(3x^2 + 3)}{(1 - x^2)^3} = \dfrac{18x(x^2 + 1)}{(1 - x^2)^3}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{3}\, log_2(1 - x^2) + \dfrac{x}{3} \cdot \dfrac{1}{1 - x^2} \cdot \dfrac{1}{ln\, 2} \cdot (-2x) = \dfrac{log_2(1 - x^2)}{3} - \dfrac{2x^2}{3(1 - x^2)\, ln\, 2}$

f) $f(x) = e^{-x}(-ln\, x) = -e^{-x}\, ln\, x$

$f'(x) = -\left(-e^{-x}\, ln\, x + e^{-x} \cdot \dfrac{1}{x}\right) = e^{-x}\left(ln\, x - \dfrac{1}{x}\right)$

g) $f(x) = (5x + 2)^{2/3}$

$f'(x) = \dfrac{2}{3}(5x + 2)^{-1/3} \cdot 5 = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{5x + 2}}$

h) $f(x) = ln\left(\dfrac{1 - 2x^2}{4x}\right)$

$f'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1 - 2x^2}{4x}} \cdot \dfrac{-4x \cdot 4x - (1 - 2x^2) \cdot 4}{(4x)^2} = \dfrac{4x}{1 - 2x^2} \cdot \dfrac{-8x^2 - 4}{(4x)^2} = \dfrac{-4(2x^2 + 1)}{4x(1 - 2x^2)} = \dfrac{2x^2 + 1}{x(2x^2 - 1)}$

12 **Deriva las siguientes funciones:**

a) $f(t) = \sqrt{t}\cdot\left(\frac{3t+5}{32}\right)$ **b)** $f(t) = \frac{3t^2+2t}{1-t}$

c) $f(t) = \frac{t}{ln\,t} + (ln\,t)^2$ **d)** $f(t) = \sqrt{e^{3t-2}}$

e) $f(t) = e^{\sqrt{2t}}$ **f)** $f(t) = cos\left(\frac{3t+\pi}{2}\right) + tg^2\,t$

a) $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(\frac{3t+5}{32}\right) + \sqrt{t}\left(\frac{3}{32}\right) = \frac{3t+5}{64\sqrt{t}} + \frac{3\sqrt{t}}{32} = \frac{9t+5}{64\sqrt{t}}$

b) $f'(t) = \frac{(6t+2)(1-t)-(3t^2+2t)(-1)}{(1-t)^2} = \frac{-3t^2+6t+2}{(1-t)^2}$

c) $f'(t) = \frac{ln\,t - t/t}{(ln\,t)^2} + 2\,ln\,t\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{ln\,t} - \frac{1}{(ln\,t)^2} + \frac{2\,ln\,t}{t}$

d) $f'(t) = \frac{3}{2}e^{3t-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^{3t-2}}} = \frac{3\sqrt{e^{3t-2}}}{2}$

d) $\frac{e^{\sqrt{2t}}}{\sqrt{2t}}$

f) $-\frac{3}{2}sen\left(\frac{3t+\pi}{2}\right) + 2tg\,t\,\frac{1}{cos^2\,t}$

13 **Aplica las propiedades de los logaritmos antes de aplicar las reglas de derivación, para obtener la derivada de estas funciones:**

a) $f(x) = ln\,\frac{x^2+1}{x^2-1}$ **b)** $f(x) = ln\,(x\cdot e^{-x})$

c) $f(x) = ln\,(1-3x^2)^4$ **d)** $f(x) = log_2\,\sqrt[3]{5x-x^2}$

e) $f(x) = ln\,\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$ **f)** $f(x) = log\,\frac{(3x-5)^3}{x}$

g) $f(x) = log_2\,\sqrt{\frac{x-1}{x^3}}$ **h)** $f(x) = log\,\frac{1}{\sqrt{e^x}}$

a) $f(x) = ln\,(x^2+1) - ln\,(x^2-1)$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{x^4-1} = \frac{-4x}{x^4-1}$

b) $f(x) = ln\,x + ln\,e^{-x} = ln\,x - x$

$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

c) $f(x) = 4ln\,(1-3x^2)$

$f'(x) = 4\cdot\frac{1}{1-3x^2}\cdot(-6x) = \frac{24x}{3x^2-1}$

d) $f(x) = log_2\,(5x-x^2)^{1/3} = \frac{1}{3}log_2\,(5x-x^2)$

$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5x-x^2}\cdot\frac{1}{ln\,2}\cdot(5-2x) = \frac{5-2x}{3(5x-x^2)\,ln\,2}$

e) $f(x) = \frac{1}{2}[\ln x - \ln(x^2+1)]$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2+1-2x^2}{x^3+x}\right] = \frac{1-x^2}{2x^3+2x}$

f) $f(x) = 3\log(3x-5) - \log x$

$f'(x) = 3 \cdot \frac{3}{3x-5} \cdot \frac{1}{\ln 10} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10}\left[\frac{9}{3x-5} - \frac{1}{x}\right] = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{9x-3x+5}{(3x^2-5x)} = \frac{6x+5}{\ln 10\,(3x^2-5x)}$

g) $f(x) = \log_2\left(\frac{x-1}{x^3}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{x-1}{x^3}\right) = \frac{1}{2}[\log_2(x-1) - 3\log_2 x]$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{\ln 2} - \frac{3}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-1)\ln 2} - \frac{3}{x}\right)$

h) $f(x) = -\frac{x}{2}\log(e)$

$f'(x) = -\frac{\log(e)}{2}$

Página 220

Recta tangente y recta normal

14 **Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa indicado en cada caso.**

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ **en** $x = 2$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ **en** $x = 3$

c) $f(x) = \frac{2-x}{x^3}$ **en** $x = -1$

d) $f(x) = \ln x$ **en** $x = e^2$

e) $f(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **en** $x = \frac{\pi}{2}$

a) $f'(x) = 2x - 5$

$f(2) = 0$

$f'(2) = -1$

La recta tangente es $y = -1(x-2) + 0$, es decir, $y = -x + 2$

La recta normal es $y = \frac{-1}{-1}(x-2) + 0$, es decir, $y = x - 2$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$f(3) = 2$

$f'(3) = \frac{1}{4}$

La recta tangente es $y = \frac{1}{4}(x-3) + 2$, es decir, $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

La recta normal es $y = \frac{-1}{1/4}(x-3) + 2$, es decir, $y = -4x + 14$

c) $f'(x) = \frac{-1 \cdot x^3 - (2-x) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{2x-6}{x^4}$

$f(-1) = -3$

$f'(-1) = -8$

La recta tangente es $y = -8(x+1) - 3$, es decir, $y = -8x - 11$

La recta normal es $y = \frac{-1}{-8}(x+1) - 3$, es decir, $y = \frac{1}{8}x - \frac{23}{8}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(e^2) = 2$

$f'(e^2) = \dfrac{1}{e^2}$

La recta tangente es $y = \dfrac{1}{e^2}(x - e^2) + 2$, es decir, $y = \dfrac{1}{e^2}x + 1$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{1/e^2}(x - e^2) + 2$, es decir, $y = -e^2x + e^4 - 2$

e) $f'(x) = cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

La recta tangente es $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{-\sqrt{3}/2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$, es decir, $y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$

15 Cabezas pensantes. **[Antes de buscar los puntos, el alumnado podrá compartir en pequeños grupos el método que hay que seguir para encontrarlos].**

Halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente a cada una de las siguientes funciones es igual a 2:

a) $y = x^2 - 2x$ **b)** $y = 4\sqrt{x+3}$ **c)** $y = ln\,(4x - 1)$

a) $f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 2 \rightarrow 2x - 2 = 2 \rightarrow x = 2$

b) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+3}}$

$f'(x) = 2 \rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x+3}} = 2 \rightarrow \sqrt{x+3} = 1 \rightarrow x = -2$

d) $f'(x) = \dfrac{4}{4x-1}$

$f'(x) = 2 \rightarrow \dfrac{4}{4x-1} = 2 \rightarrow 4x - 1 = 2 \rightarrow x = \dfrac{3}{4}$

16 **Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta tangente a f, que sea paralela a la recta dada.**

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ **paralela a** $2x + y + 1 = 0$

b) $f(x) = x^3 - 3x$ **paralela a** $y = 6x + 10$

c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ **paralela a** $5x - y = 0$

a) $2x + y + 1 = 0 \rightarrow y = -2x - 1$

Por tanto, la recta tangente debe tener pendiente –2 para que sea paralela.

$f'(x) = 2x + 4$

$f'(x) = -2 \rightarrow 2x + 4 = -2 \rightarrow x = -3$

$f(-3) = -2$ y la recta tangente es $y = -2(x + 3) - 2$.

b) La recta tangente debe tener pendiente 6 para que sea paralela.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 6 \rightarrow 3x^2 - 3 = 6 \rightarrow x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3}$

Si $x = -\sqrt{3} \rightarrow f(-\sqrt{3}) = 0$

La recta tangente en $x = -\sqrt{3}$ es $y = 6(x + \sqrt{3})$

Si $x = \sqrt{3} \rightarrow f(\sqrt{3}) = 0$

La recta tangente en $x = \sqrt{3}$ es $y = 6(x - \sqrt{3})$

c) $5x - y = 0 \rightarrow y = 5x$

Por tanto, la recta tangente debe tener pendiente 5 para que sea paralela.

$$f'(x) = \frac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 5 \rightarrow \frac{5}{(x+2)^2} = 5 \rightarrow (x+2)^2 = 1 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3$$

Si $x = -1 \rightarrow f(-1) = -4$

La recta tangente en $x = -1$ es $y = 5(x + 1) - 4$

Si $x = -3 \rightarrow f(-3) = 6$

La recta tangente en $x = -3$ es $y = 5(x + 3) + 6$

17 Obtén los puntos donde la recta tangente es horizontal y escribe su ecuación.

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$ **b)** $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $y = x^4 - 4x^3$ **d)** $y = x^3 - 12x$

Los puntos donde la recta tangente es horizontal son aquellos en los que $f'(x) = 0$.

a) $f'(x) = 6x - 2$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{3} + 5 = \frac{14}{3}$$

La ecuación de la recta tangente es $y = \dfrac{14}{3}$

b) $f'(x) = 6x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 6x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 1$

$f(0) = 0 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

$f(1) = 0 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = 0$.

c) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 3$

$f(0) = 0 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

$f(3) = -27 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 3$ es $y = -27$.

d) $f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 2$

$f(-2) = 16 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = -2$ es $y = 16$.

$f(2) = -16 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y = -16$.

18 **Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje X.**

Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen haciendo $y = 0$.

$y = 0 \;\rightarrow\; 4 - x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = -2,\; x = 2$

$f'(x) = -2x$

Si $x = -2 \;\rightarrow\; f'(-2) = 4$. La recta tangente en $x = -2$ es $y = 4(x + 2)$

Si $x = 2 \;\rightarrow\; f'(2) = -4$. La recta tangente en $x = 2$ es $y = -4(x - 2)$

Las rectas normales son: en $x = -2$, $y = -\dfrac{1}{4}(x + 2)$ y en $x = 2$, $y = \dfrac{1}{4}(x - 2)$.

Puntos singulares: crecimiento y decrecimiento

19 **Halla, en cada caso, los puntos singulares de la función y determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**

a) $f(x) = x^2 - 8x + 3$

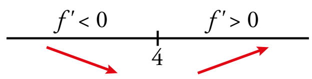
b) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 2}$

a) $f'(x) = 2x - 8$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x - 8 = 0 \;\rightarrow\; x = 4$

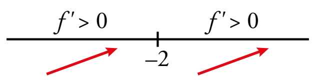


Como $f(4) = -5$, el punto $(4, -5)$ es un punto singular.

Intervalo de crecimiento, $(4, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento, $(-\infty, 4)$.

b) $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 + 12x + 12 = 0 \;\rightarrow\; x = -2$



Como $f(-2) = -8$, el punto $(-2, -8)$ es un punto singular.

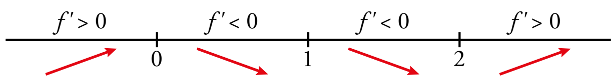
Intervalo de crecimiento, $\mathbb{R}$.

c) $Dom = \mathbb{R} - \{1\}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$ son puntos singulares.



Intervalos de crecimiento, $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Intervalos de decrecimiento, $(0, 1) \cup (1, 2)$.

d) $Dom = \mathbb{R} - \{-2\}$

$f'(x) = \dfrac{3}{(x + 2)^2}$

No tiene puntos singulares. Como $f'(x) > 0$ siempre que $x \neq -2$ y la función no está definida en $x = -2$, los intervalos de crecimiento son $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

20 Comprueba que las siguientes funciones no tienen puntos singulares y determina los intervalos donde crecen o decrecen:

a) $y = x^3 + 3x$ **b)** $y = 1/x$ **c)** $y = \sqrt{x}$ **d)** $y = \ln x$

a) $f'(x) = 3x^2 + 3$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 3 = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$, la función es creciente en todo $\mathbb{R}$.

b) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow -\dfrac{1}{x^2} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) < 0$ siempre que $x \neq 0$ y no está definida en $x = 0$, los intervalos de decrecimiento son $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

c) $Dom = [0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$ siempre que $x \neq 0$, el intervalo de crecimiento es $[0, +\infty)$.

d) $Dom = (0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{1}{x} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$ en su dominio de definición, el intervalo de crecimiento es $(0, +\infty)$.

21 Halla los puntos singulares de estas funciones y, con ayuda de las ramas infinitas, determina si son máximos o mínimos:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x + 2$ **b)** $y = 3x^2 - x^3$ **c)** $y = x^4 - 8x^2 + 10$

d) $y = -3x^4 - 12x$ **e)** $y = \dfrac{3}{x^2+1}$ **f)** $y = \dfrac{x^3+4}{x}$

a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{3},\ x = 1$

Como $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{58}{27}$ y $f(1) = 2$, los puntos $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{58}{27}\right)$ y $(1, 2)$ son puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$$ Por tanto $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{58}{27}\right)$ es un máximo y $(1, 2)$ es un mínimo.

b) $f'(x) = 6x - 3x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 6x - 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$ son puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$$ Por tanto, $(0, 0)$ es un mínimo y $(2, 4)$ es un máximo.

c) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x^3 - 16x = 0 \;\rightarrow\; x = -2,\; x = 0,\; x = 2$

Como $f(-2) = -6$, $f(0) = 10$ y $f(2) = -6$, los puntos $(-2, -6)$, $(0, 10)$ y $(2, -6)$ son puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \text{ Por tanto, } (-2, -6) \text{ y } (2, -6) \text{ son mínimos.}$$

El punto $(0, 10)$ debe ser un máximo porque está entre dos mínimos.

d) $f'(x) = -12x^3 - 12$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -12x^3 - 12 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$

Como $f(-1) = 9$ el punto $(-1, 9)$ es un punto singular.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \text{ Por tanto, } (-1, 9) \text{ es un máximo.}$$

e) $f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Como $f(0) = 3$, el punto $(0, 3)$ es un punto singular.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0\end{array}\right\} \text{ Por tanto, } (0, 3) \text{ es un máximo.}$$

f) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = 2x - \dfrac{4}{x^2}$

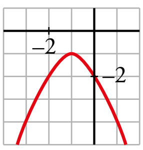
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x - \dfrac{4}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; x = \sqrt[3]{2}$

Como $f\left(\sqrt[3]{2}\right) = 3\sqrt[3]{4}$, el punto $\left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right)$ es un punto singular.

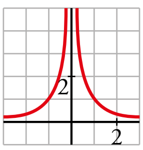
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \text{ Por tanto, } \left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right) \text{ es un mínimo.}$$

22 Indica en cada una de estas funciones los valores de x en los que f' es positiva y en los que f' es negativa:

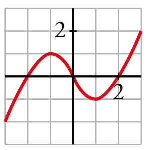
a)



b)



c)



a) $f' > 0$ si $x < -1$

$f' < 0$ si $x > -1$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

$f' < 0$ si $x > 0$

c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f' < 0$ si $x \in (-1, 1)$

Gráficas de funciones polinómicas y racionales

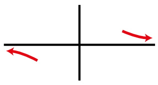
23 **De una función polinómica sabemos que:**

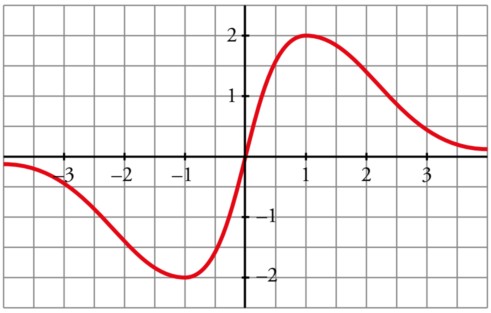
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- **Su derivada es igual a 0 solo en (–2, 2) y en (2, –1).**
- **Corta a los ejes solo en (0, 0) y en (4, 0).**

Represéntala gráficamente.

24 **Representa una función continua f de la que sabemos que:**

- **Sus puntos de tangente horizontal son (–1, –2) y (1, 2).**
- **Sus ramas infinitas son así:**

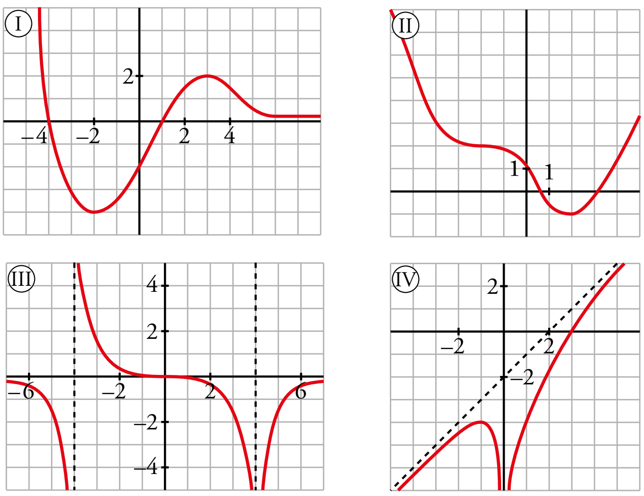




25 **En las siguientes gráficas describe:**

a) Dominio de definición, ramas infinitas, asíntotas y posición de la curva repecto a ellas.

b) Puntos de tangente horizontal, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.



a) • Función I:

$Dom = (-\infty, +\infty)$

Tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y la función queda por encima de la asíntota $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

• Función II:

$Dom = (-\infty, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

No tiene asíntotas.

• Función III:

$Dom = (-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ y la función queda por debajo de la asíntota.

La recta $x = -4$ es una asíntota vertical y la función tiende a $-\infty$ cuando se acerca a la asíntota por la izquierda, y a $+\infty$ cuando se acerca por la derecha.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal también cuando $x \to +\infty$ y la función queda por debajo de la asíntota.

• Función IV:

$Dom = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

La recta $y = x - 2$ es una asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$. En ambos casos la función queda por debajo de la asíntota.

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical y la función tiende a $-\infty$ por los dos lados.

b) • Función I:

Los puntos de pendiente horizontal son $(-2, -4)$ y $(3, 2)$.

El punto $(-2, -4)$ es un mínimo. El punto $(3, 2)$ es un máximo.

La función crece en $(-2, 3)$ y decrece en $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

• Función II:

Tiene un punto de pendiente horizontal en $(-1, 2)$ y otro en $(-2, 2)$.

El punto $(-1, 2)$ es un mínimo. El punto $(-2, 2)$ es un punto singular pero no es ni máximo ni mínimo.

La función crece en $(2, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, 2)$.

• Función III:

Tiene un punto de pendiente horizontal en $(0, 0)$.

No tiene ni máximos ni mínimos.

La función crece en $(4, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, -4) \cup (4, 4)$.

• Función IV:

Tiene un punto de pendiente horizontal en $(-1, -4)$.

Solo tiene un punto singular, el máximo $(-1, -4)$.

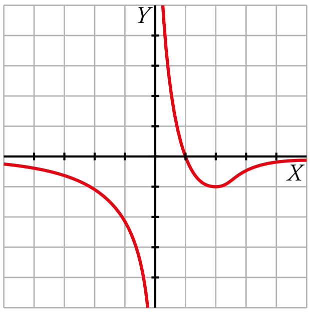
La función crece en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ y decrece en $(-1, 0)$.

26 **Representa una función $y = f(x)$ de la que conocemos:**

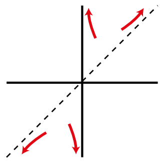
- **Dominio de definición:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Corta al eje X en $x = 1$.**
- **Asíntota horizontal: $y = 0$**

  Si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$; Si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$
- **Asíntota vertical: $x = 0$**

  Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$; Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$
- **Mínimo en $(2, -1)$.**



27 **Comprueba que la función $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ tiene dos puntos de tangente horizontal, $(-1, -2)$ y $(1, 2)$; sus asíntotas son $x = 0$ e $y = x$ y la posición de la curva respecto de las asíntotas es la que se indica en la ilustración. Represéntala.**



$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

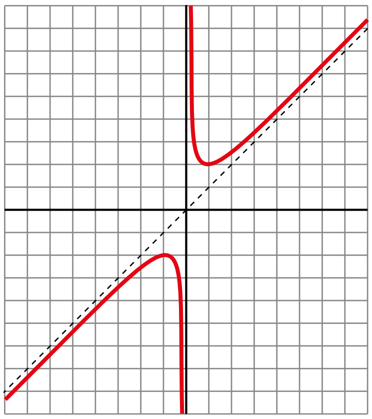
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \to x = -1,\ x = 1$

Puntos $(-1, -2)$ y $(1, 2)$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Asíntota vertical en $x = 0$.

Asíntota oblicua en $y = x$.



Página 221

28 **Representa $y = f(x)$ de la que conocemos:**

- **Asíntota vertical: $x = 2$**

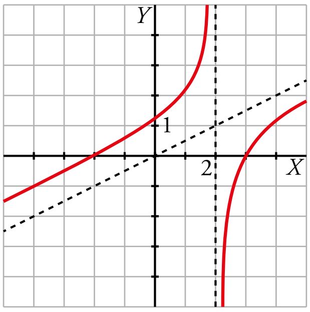
  Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$; Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$

- **Asíntota oblicua: $y = x/2$**

  Si $x \to +\infty$, $f(x) < x/2$; Si $x \to -\infty$, $f(x) > x/2$

- **Cortes con los ejes: (0, 1), (–2, 0), (3, 0)**

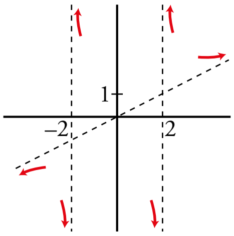
¿Tiene máximo o mínimo la función que has representado?

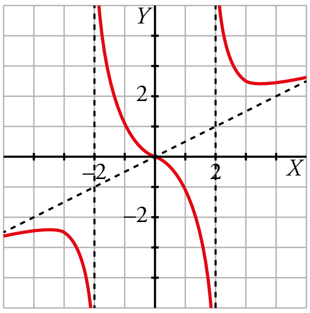


29 **Completa la gráfica de una función de la que sabemos que tiene tres puntos singulares:**

$$\left(-3, \frac{-5}{2}\right),\ (0, 0),\ \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

y que sus ramas infinitas son las representadas a la derecha.





30 **Dada la función $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ comprueba que:**

- **Tiene derivada nula en (0, 0).**
- **La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.**

Estudia la posición de la curva con respecto a la asíntota y represéntala.

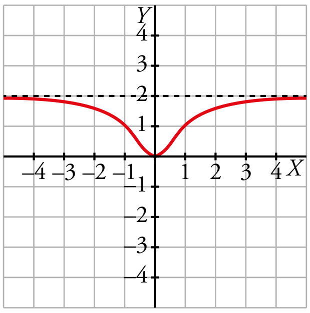
- $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

  $\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{array}\right\} \to$ La derivada en (0, 0) es nula.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = 2 \to$ La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.

• $f(x) - 2 = \dfrac{2x^2}{1+x^2} - 2 = -\dfrac{2}{x^2+1}$

Como la diferencia siempre es negativa, la función queda por debajo de la asíntota $y = 2$.



Para resolver

31 **a) Halla el vértice de la parábola $y = x^2 + 6x + 11$ teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal.**

b) Halla la abscisa del vértice de una parábola cualquiera $y = ax^2 + bx + c$.

a) $f'(x) = 2x + 6 = 0 \to x = -3$

Punto $(-3, 2)$.

b) $f'(x) = 2ax + b$

$f'(x) = 0 \to 2ax + b = 0 \to x = \dfrac{-b}{2a}$ es la abscisa del vértice.

$f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\dfrac{-b}{2a}\right) + c = \dfrac{-b^2+4ac}{4a}$ es la ordenada de vértice.

32 **Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en $A(2, 1)$ y que pasa por $B(5, -2)$.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 1 \to 4a + 2b + c = 1 \\ f'(2) = 2 \to 4a + b = 2 \\ f(5) = -2 \to 25a + 5b + c = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -7 \end{array}$$

La función es $f(x) = -x^2 + 6x - 7$.

33 **Halla el valor de x para el que las tangentes a las curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$ e $y = x^2 + 6x$ sean paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.**

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \to f'(x) = 6x - 2 \\ g(x) = x^2 + 6x \to g'(x) = 2x + 6 \end{array}\right\} 6x - 2 = 2x + 6 \to x = 2$$

Para $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ la tangente en $x = 2$ es:

$y = 10(x - 2) + 13 \to y = 10x - 7$

Para $g(x) = x^2 + 6x$ la tangente en $x = 2$ es:

$y = 10(x - 2) + 16 \to y = 10x - 4$

34 **Halla a, b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que f tenga tangente horizontal en $x = -4$ y en $x = 0$ y que pase por (1, 1).**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4) = 0 \;\to\; 48 - 8a + b = 0 \\ f'(0) = 2 \;\to\; b = \;\; 0 \\ f(1) = 1 \;\to\; 1 + a + b + c = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 6 \\ c = -6 \end{array}$$

La función es $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$.

35 **Halla una función de segundo grado sabiendo que pasa por (0, 1) y que la pendiente de la tangente en (2, –1) vale 0.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \;\to\; 1 = c \\ f(2) = -1 \;\to\; -1 = 4a + 2b + c \\ f'(2) = 0 \;\to\; 0 = 4a + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array}$$

La función es $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

36 **Representa las siguientes funciones hallando los puntos singulares y las ramas infinitas:**

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ **b)** $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

c) $f(x) = 12x - x^3$ **d)** $f(x) = -x^4 + 4x^2$

a) Buscamos sus puntos singulares:

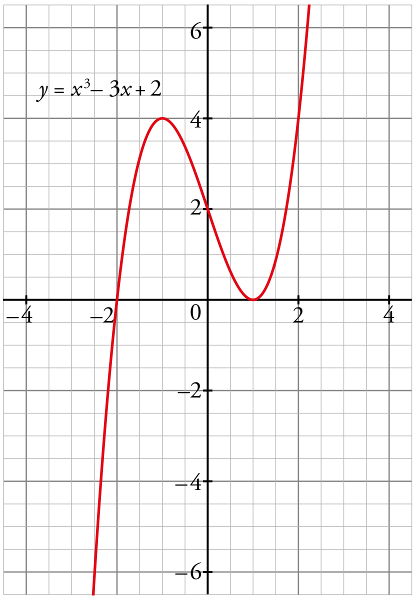
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \;\to\; x = 1; x = -1 \;\to$ Puntos singulares $A(1, 0)$ y $B(-1, 4)$.

Estudiamos sus ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Por tanto, $A(1, 0)$ tiene que ser un mínimo y $B(-1, 4)$ un máximo:



b) Buscamos sus puntos singulares:

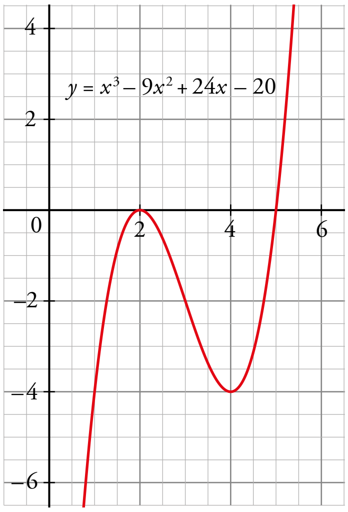
$f'(x) = 12 - 3x^2 \rightarrow x = 4, x = -2 \rightarrow A(4, -4)$ y $B(-2, 0)$ son puntos singulares.

Estudiamos sus ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Vemos que $A(4, -4)$ tiene que ser un mínimo y $B(2, 0)$ un máximo:



c) Buscamos sus puntos singulares:

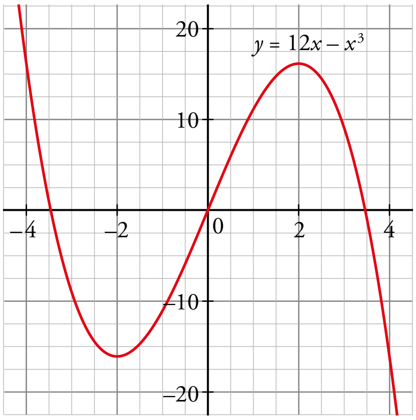
$f'(x) = 12 - 3x^2 = 0 \rightarrow x = -2, x = 2 \rightarrow A(-2, -16)$ y $B(2, 16)$ son puntos singulares.

Estudiamos sus ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Vemos que $A(-2, -16)$ tiene que ser un mínimo y $B(2, 16)$ un máximo:



d) Buscamos sus puntos singulares:

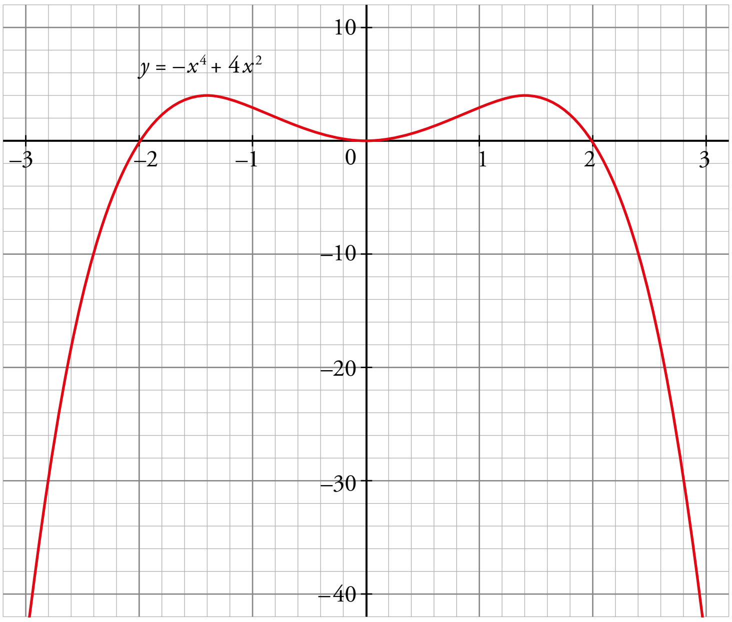
$f'(x) = -4x^3 + 8x = 0 \;\to\; x = 0, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2} \;\to\; A(0,0),\; B\left(\sqrt{2}, 4\right),\; C\left(-\sqrt{2}, 4\right)$ son puntos singulares.

Estudiamos sus ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Y entonces $A(0, 0)$ tiene que ser un mínimo, y $B\left(\sqrt{2}, 4\right)$ y $C\left(-\sqrt{2}, 4\right)$ son máximos:



37 **Estudia y representa.**

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

b) $f(x) = x^4 + 4x^3$

c) $f(x) = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$

d) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$

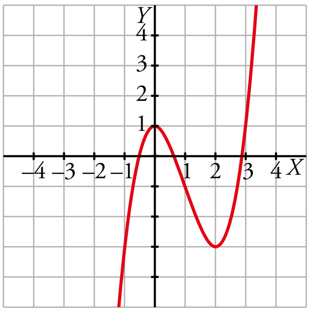
a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \;\to\; 3x^2 - 6x = 0 \;\to\; x = 0,\; x = 2$

$f(0) = 2,\;\; f(2) = -3 \;\to\;$ Los puntos singulares son (0, 1) y (2, –3).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = -\infty$



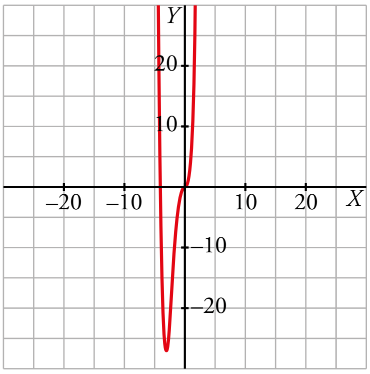
b) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

$f'(x) = 0 \;\to\; 4x^3 + 12x^2 = 0 \;\to\; x = -3,\;\; x = 0$

$f(-3) = -27,\;\; f(0) = 0 \;\to\;$ Los puntos singulares son (–3, –27) y (0, 0).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$

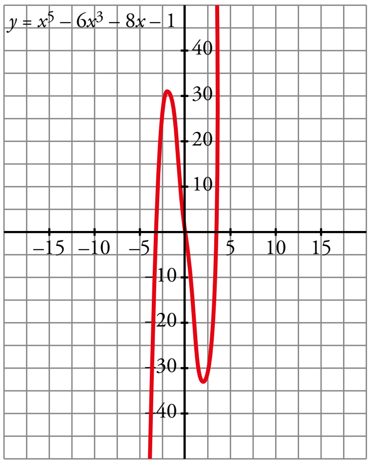


c) $f'(x) = 5x^4 - 18x^2 - 8$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 2 \;\rightarrow\; f(2) = -33 \;\rightarrow\; (2, -33) \\ x = -2 \;\rightarrow\; f(-2) = 31 \;\rightarrow\; (-2, 31) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = +\infty$$

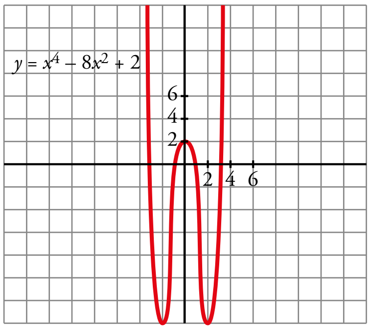


d) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = 2 \;\rightarrow\; (0, 2) \\ x = 2 \;\rightarrow\; f(2) = -14 \;\rightarrow\; (2, -14) \\ x = -2 \;\rightarrow\; f(-2) = -14 \;\rightarrow\; (-2, -14) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = -\infty$$

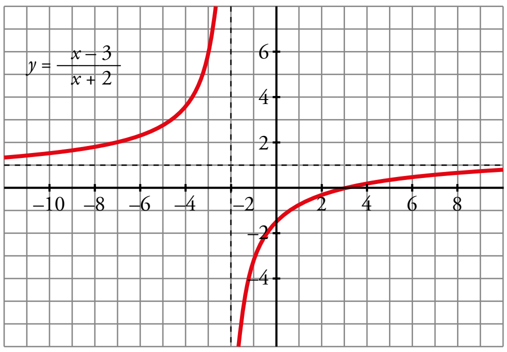


38 **Comprueba que estas funciones no tienen puntos de tangente horizontal. Represéntalas estudiando sus ramas infinitas y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{3} + 4x$ **d)** $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

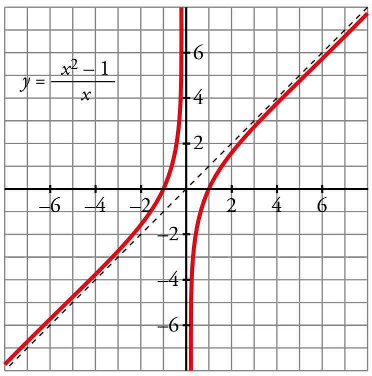
a) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$, $(3, 0)$.



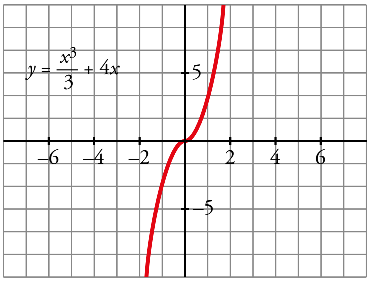
b) $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: $(1, 0)$, $(-1, 0)$



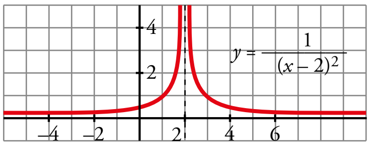
c) $f'(x) = x^2 + 4 \neq 0$

El punto de corte es (0, 0).



d) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$

El punto de corte es $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$.



39 **Estudia y representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 16}$

b) $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$

c) $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 6x + 5}$

d) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x + 2}$

e) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$

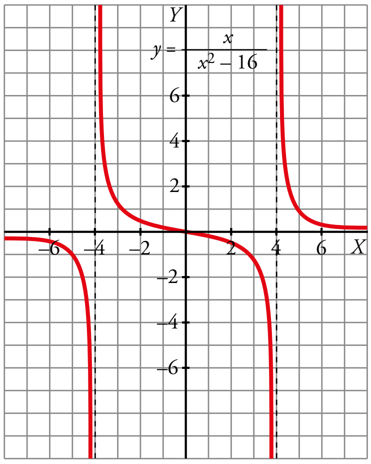
f) $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$

Asíntotas verticales: $x = -4,\ x = 4$

Asíntota horizontal: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.

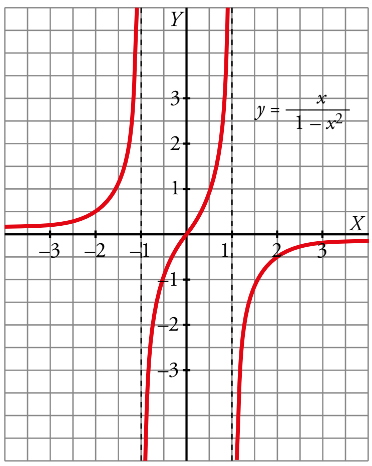


b) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 1,\ x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.



c) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 4x + 17}{(x^2 - 6x + 5)^2}$

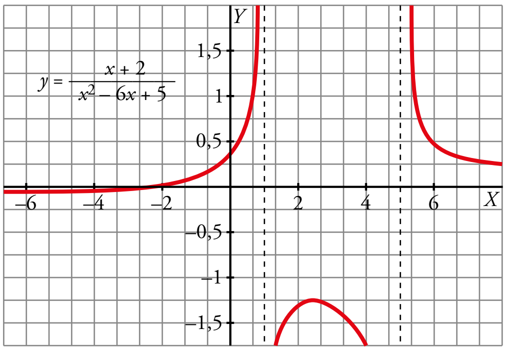
Asíntotas verticales: $x = 5$, $x = 1$

Asíntota horizontal: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

(–6,58; –0,052), (2,58; –1,197)



d) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}$

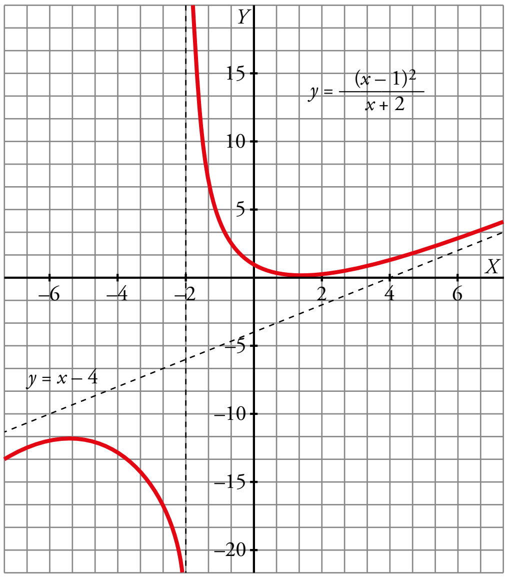
Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota oblicua: $y = x - 4$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son:

(1, 0), (–5, 12)



e) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}$

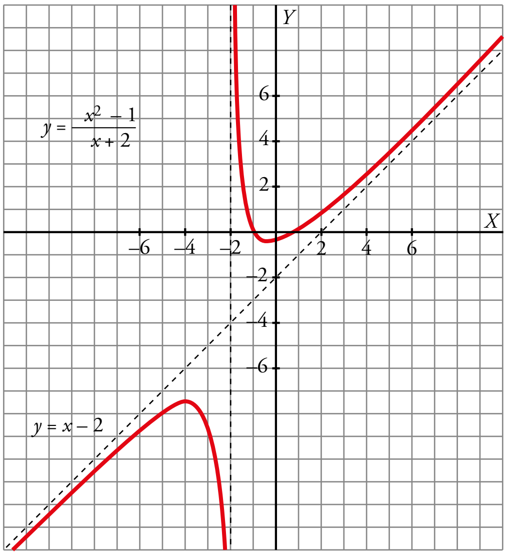
Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota oblicua: $y = x - 2$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

(–0,26; –0,54), (–3,73; –7,46)



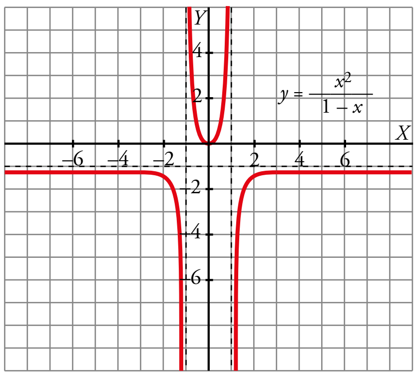
f) $f'(x) = \dfrac{2x}{(1 - x^2)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = -1$

No hay asínto tas oblicuas.

Punto de tangente horizontal: (0, 0)



40 **Dada la parábola $y = 5 + 6x - 3x^2$, se traza la cuerda que une los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 3$. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a esa cuerda.**

$f(0) = 5$ y $f(3) = -4$. Por tanto, la pendiente de la cuerda que pasa por estos puntos es $\frac{-4-5}{3-0} = -3$.

Tratamos de encontrar el punto que cumple la igualdad $f'(x) = -3$:

$f'(x) = 6 - 6x$

$f'(x) = -3 \rightarrow 6 - 6x = -3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

Como $f\left(\frac{3}{2}\right) = 5 + 6 \cdot \frac{3}{2} - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$, la recta tangente es $y = -3\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{29}{4}$

41 **Dada la función $f(x) = ax^3 + bx$, halla a y b para que f pase por el punto (1, 3) y en ese punto la tangente sea paralela a la recta $y = 4x + 1$.**

Pasa por (1, 3) $\rightarrow f(1) = 3 \rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = 3 \rightarrow a + b = 3$

Para que la recta tangente sea paralela a la recta dada, $f'(1) = 4$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$f'(1) = 4 \rightarrow 3a \cdot 1^2 + b = 4 \rightarrow 3a + b = 4$

Ahora, resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{matrix} a + b = 3 \\ 3a + b = 4 \end{matrix}\right\} \rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = \frac{5}{2}$$

42 **Determina, en cada caso, los valores máximo y mínimo de la función en el intervalo que se indica.**

a) $y = x^2 - 6x - 4,\ x \in [0, 5]$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5,\ x \in [-1, 4]$

c) $y = x^3 - 3x^2,\ x \in [-2, 4]$

d) $y = \frac{x}{x^2 + 1},\ x \in [0, 2]$

Hallamos los puntos singulares que quedan dentro de los diferentes intervalos, evaluamos en ellos y en los extremos de los intervalos.

a) $f'(x) = 2x - 6$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$

$f(0) = -4 \quad f(3) = -13 \quad f(5) = -9$

El máximo se encuentra en $x = 0$ y vale -4.

El mínimo se encuentra en $x = 3$ y vale -13.

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \rightarrow x = 2$

$f(-1) = -24 \quad f(2) = 3 \quad f(4) = 83$

El máximo se encuentra en $x = 4$ y vale 83.

El mínimo se encuentra en $x = -1$ y vale -24.

c) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2$

$f(-2) = -20 \quad f(0) = 0 \quad f(2) = -4 \quad f(4) = 16$

El máximo se encuentra en $x = 4$ y vale 16.

El mínimo se encuentra en $x = -2$ y vale -20.

d) $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = -1,\; x = 1$

$f(0) = 0 \quad f(-1) = f(1) = \dfrac{1}{2} \quad f(2) = \dfrac{2}{5}$

El máximo se encuentra en $x = 1$ y vale $\dfrac{1}{2}$.

El mínimo se encuentra en $x = 0$ y vale 0.

43 **El área de un rectángulo, en función de su base x, viene dada por la expresión $S(x) = 20x - x^2$, $x \in [8, 18]$. Halla el área máxima y el área mínima en ese intervalo.**

Los valores máximo y mínimo de una función en un intervalo de este tipo pueden darse en los extremos del intervalo o en los puntos singulares.

$S'(x) = 20 - 2x$

$S'(x) = 0 \;\rightarrow\; 20 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 10$

Evaluamos:

$S(8) = 20 \cdot 8 - 8^2 = 96 \qquad S(10) = 20 \cdot 10 - 10^2 = 100 \qquad S(18) = 20 \cdot 18 - 18^2 = 36$

El área máxima es 100 y se alcanza en $x = 10$.

El área mínima es 36 y se alcanza en $x = 18$.

44 **El coste total (en dólares) de fabricación de q unidades de cierto artículo es: $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$.**

El coste medio por unidad es: $M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$

a) ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el coste medio por unidad sea mínimo?

b) Calcula $C(q)$ y $M(q)$ para el valor de q que has hallado en el apartado a).

a) $M(q) = \dfrac{3q^2 + 5q + 75}{q}$

$M'(q) = \dfrac{(6q+5)\,q - (3q^2+5q+75)}{q^2} = \dfrac{6q^2+5q-3q^2-5q-75}{q^2} = \dfrac{3q^2-75}{q^2} = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; q^2 = 25 \;\rightarrow\; q = 5$ unidades

Se deben fabricar 5 unidades.

b) $C(5) = 175;\; M(5) = 35$

45 **El coste de producción, en una empresa de electrodomésticos, de x unidades fabricadas, viene dado por la función $C(x) = x^2 + 80x + 10\,000$, $C(x)$ en euros. El precio de venta de una unidad es 880 €.**

a) Escribe la función que nos da el beneficio de la empresa si se venden todas las unidades fabricadas.

b) ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál será ese beneficio?

a) El beneficio es igual a los ingresos por ventas menos los costes de producción.

$B(x) = 880x - (x^2 + 80x + 10\,000) = -x^2 + 800x - 10\,000$

b) La gráfica de la función anterior es una parábola abierta hacia abajo. Por tanto, el máximo se alcanza en su vértice.

$x_0 = \dfrac{-800}{-2} = 400 \;\rightarrow\; B(400) = -400^2 + 800 \cdot 400 - 10\,000 = 150\,000$ €

El beneficio máximo es de 150 000 € y se obtiene fabricando 400 unidades.

Página 222

46 **[El análisis de la función propuesta por el enunciado permite al alumnado trabajar la iniciativa (dimensión personal)].**

La función $f(x) = \dfrac{60x}{x^2+9}$ indica los beneficios obtenidos por una empresa desde que comenzó a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en años).

a) Represéntala gráficamente.

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

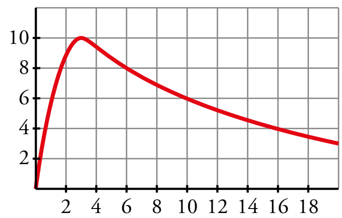
c) ¿Perderá dinero la empresa en algún momento?

a) $f'(x) = \dfrac{60(x^2+9)-60x\cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \dfrac{60x^2+540-120x^2}{(x^2+9)^2} = \dfrac{-60x^2+540}{(x^2+9)^2} = 0 \to x = 3$ ($x = -3$ no está en el dominio).

Máximo en (3, 10).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \to$ asíntota horizontal: $y = 0$

La gráfica sería:



b) Beneficio máximo en $x = 3 \to$ A los 3 años.

El beneficio sería $f(3) = 10$ miles de euros.

c) No perderá dinero ni llegará un momento en que no obtenga beneficios ni pérdidas, pues $f(x) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x > 0$.

47 ODS Meta 6.4. **[Tras el visionado del vídeo el docente puede plantear un debate sobre las medidas más efectivas para racionalizar el consumo de agua].**

El consumo de agua de una empresa en m³ durante el primer semestre varía según la función $C(t) = 8t^3 - 84t^2 + 240t$, $1 \le t \le 6$.

¿En qué meses de este primer semestre se producen los consumos máximo y mínimo? ¿Cuáles fueron esos consumos?

La función es un polinomio de tercer grado, por lo que no tiene asíntotas.

Veamos dónde se anula su derivada, dentro del intervalo de definición de la función, [1,6]:

$C'(t) = 24t^2 - 168t + 240 = 0 \to t^2 - 7t + 10 = 0 \to t = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2} \to x = 2, x = 5$

Veamos el valor que toma la función para estos valores de t:

$C(2) = 208 \qquad C(5) = 100$

Como la función es continua en todo $\mathbb{R}$, sabemos que tendrá un mínimo en $t = 5$ y un máximo en $t = 2$. Por tanto, en el segundo mes tendrá un consumo máximo de 208 m³ y en el quinto mes un consumo mínimo de 100 m³.

48 **Halla dos números positivos cuya suma sea 12 y que el producto del cuadrado del mayor por el menor sea máximo.**

Buscamos dos números x e y que cumplen:

$x = 2a$, $y = 2t$

donde $t > a > 0$; $a, t \in \mathbb{N}$

Además: $x + y = 12 \to 2a + 2t = 12 \to x = 6 - t$

Definimos la función: $f(t) = (2t)^2\ 2(6 - t) = 48t^2 - 8t^3$

Buscamos sus puntos singulares:

$f'(t) = -24t^2 + 96t = 0 \;\rightarrow\; t = 0;\; t = \dfrac{96}{24} = 4$

Descartamos la primera solución ya que por el enunciado sabemos que ninguno de los dos números puede ser 0, por lo que tenemos el punto singular (4, 256) de $f(t)$.

Si $t \in (0, 4) \;\rightarrow\; f' > 0 \;\rightarrow\; f$ creciente

Si $t > 4 \;\rightarrow\; f' < 0 \;\rightarrow\; f$ decreciente

Por lo que hemos encontrado un máximo. Por tanto, los números son:

$$x = 2a = 4 \qquad\qquad y = 2t = 8$$

49 **Con una barra de hierro de 10 m queremos construir una portería. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que el área de la misma sea máxima?**

Llamamos x a la medida de los postes y z a la del larguero.

Sabemos que $10 = 2x + z \;\rightarrow\; z = 10 - 2x$

Su área será: $A = z \cdot x = (10 - 2x)x = 10x - 2x^2$

Para que sea máxima: $A'(x) = 10 - 4x = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{10}{4} = 2,5 \;\rightarrow\; z = \dfrac{20}{4} = 5$

50 **Encuentra dos números positivos cuyo producto sea 100 y su suma sea mínima.**

Sean x, y los números positivos.

$xy = 100 \;\rightarrow\; y = \dfrac{100}{x}$

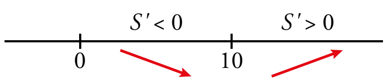
La suma es $S = x + y = x + \dfrac{100}{x}$

Queremos encontrar la suma mínima:

$S' = 1 - \dfrac{100}{x^2}$

$S' = 0 \;\rightarrow\; 1 - \dfrac{100}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; x = \pm 10 \;\rightarrow\; x = 10$ (solo es válido el resultado positivo)

Veamos si es un mínimo:



Por tanto, cuando $x = 10$, $y = \dfrac{100}{10} = 10$, se obtiene la suma mínima, que es $S = 20$.

51 **El área de un rectángulo es 180 cm^2. ¿Qué dimensiones debe tener para que su perímetro sea mínimo?**

Llamamos z a su base y x a su altura.

Área $= zx = 180 \;\rightarrow\; z = \dfrac{180}{x}$

Perímetro $= 2x + 2z = 2x + 2\left(\dfrac{180}{x}\right)$

$P(x) = 2x + \dfrac{360}{x} \;\rightarrow\; P'(x) = 2 - \dfrac{360}{x^2} = 0$ para que sea mínimo $\rightarrow\; x = \pm 6\sqrt{5}$

Descartamos la solución negativa ya que x es la medida de uno de los lados.

$x = 6\sqrt{5} \;\rightarrow\; z = \dfrac{180}{6\sqrt{5}} = \dfrac{30}{\sqrt{5}} = \dfrac{30\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5}$

Por tanto, se trata de un cuadrado.

Sabemos que $x = 6\sqrt{5}$ es mínimo ya que:

$P'(x) < 0$ si $0 < x < 6\sqrt{5} \rightarrow P$ decrece

$P'(x) > 0$ si $x > 6\sqrt{5} \rightarrow P$ crece

52 a) Calcula el valor que debe tener k para que la función $f(x) = x - \dfrac{k}{x}$ tenga un máximo en $x = 1$.

b) Después de hallar k, estudia y representa la función obtenida.

a) Si $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$, entonces $f'(1) = 0$.

$$f'(x) = 1 + \frac{k}{x^2}$$

$$f'(1) = 0 \to 1 + \frac{k}{1} = 0 \to k = -1$$

Por tanto, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ y $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

b) • Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \pm\infty \to \text{La recta } x = 0 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Posición:

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \to f(-0{,}01) = -0{,}01 + \dfrac{1}{-0{,}01} = -100{,}01 \to \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

DERECHA: $x = 0{,}01 \to f(0{,}01) = 0{,}01 + \dfrac{1}{0{,}01} = 100{,}01 \to \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

• Por la expresión de $f(x)$, la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

Calculamos $f(x) - x = \dfrac{1}{x}$ para estudiar su posición:

— Si $x \to +\infty$, $f(x) - x > 0 \to f(x)$ está encima de la asíntota.

— Si $x \to -\infty$, $f(x) - x < 0 \to f(x)$ está debajo de la asíntota.

• Puntos singulares:

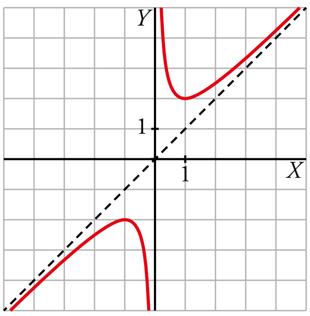
$$f'(x) = 0 \to 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \to x = -1, \ x = 1$$

$$f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

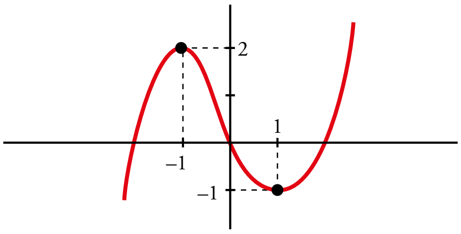
Los puntos (1, 2) y (–1, –2) son puntos singulares.

• Gráfica:



Cuestiones teóricas

53 **Dibuja una función que tenga derivada nula en $x = 1$ y en $x = -1$, derivada negativa en el intervalo $[-1, 1]$ y positiva para cualquier otro valor de x.**

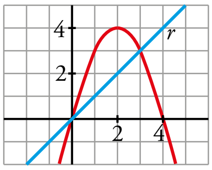


54 **Pon ejemplos de funciones f cuya derivada sea $f'(x) = 2x$. ¿Cuántas existen?**

Existen infinitas.

$f(x) = x^2 + k$, donde x es cualquier número.

55 **¿Existe algún punto de la función $y = 4x - x^2$ en el que la tangente sea paralela a la recta r? En caso afirmativo, hállalo.**



$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 4 - 2x \\ \text{Pendiente de la recta} = 1 \end{array}\right\} \; 4 - 2x = 1 \;\rightarrow\; x = \frac{3}{2}$$

Punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$

56 **Si $f'(2) = 0$, ¿cuál de estas afirmaciones es correcta?**

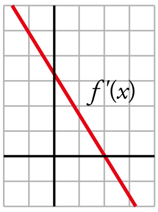
a) La función f tiene máximo o mínimo en $x = 2$.

b) La recta tangente en $x = 2$ es horizontal.

c) La función pasa por el punto $(2, 0)$.

La correcta es la b).

57 **Esta es la gráfica de f', la función derivada de f.**



a) ¿Tiene f algún punto de tangente horizontal?

b) ¿Es f creciente o decreciente?

a) Sí, en $x = 2$, puesto que $f'(2) = 0$.

b) Si $x < 2$, es creciente, pues $f' > 0$; y si $x > 2$, es decreciente, pues $f' > 0$.

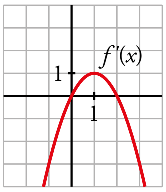
58 **La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $4x - 3y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?**

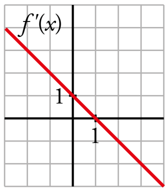
Despejamos y de la ecuación de la recta tangente: $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

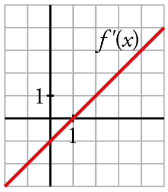
$f'(2)$ es la pendiente de la recta tangente en $x = 2$, es decir, $f'(2) = \frac{4}{3}$.

Como la recta tangente y la curva pasan por el punto de tangencia, $f(2) = \frac{4}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} = 3$.

59 **¿Cuál de estas gráficas corresponde a la función derivada de una curva que tiene un máximo en el punto de abscisa $x = 1$? ¿Por qué?**

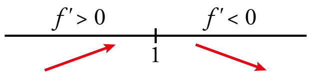
a)


b)


c)


La gráfica del apartado b), porque $f'(1) = 0$.

Además,



En consecuencia, $x = 1$ es un máximo.

60 **¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.**

a) Si $f'(a) > 0$, entonces f es creciente en $x = a$.

b) Si $f'(a) = 0$, entonces f no crece ni decrece en $x = a$.

c) Si f es decreciente en $x = a$, entonces $f'(a) < 0$.

d) Si $f'(5) = 0$ y f es creciente para cualquier otro valor de x, entonces f no tiene tangente horizontal en $x = 5$.

e) Si la derivada de una función cuadrática es $y = 4x - 6$ la abscisa del vértice de esa parábola es $x = \frac{3}{2}$.

a) Verdadero.

b) Falso. Hay funciones con puntos singulares donde la función es creciente. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es creciente en el punto singular (0, 0).

c) Falso. La función $f(x) = -x^3$ siempre es decreciente y $f'(0) = 0$.

d) Falso. Tiene un punto de inflexión, es decir, de tangente horizontal.

e) Verdadero. El vértice se encuentra donde se anula la derivada, ya que es allí donde la función pasa de crecer a decrecer.

$$f'(x) = 4x - 6 = 0 \rightarrow 4x = 6 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Para profundizar

61 **Dada la función $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$, halla el valor de a y b para que la recta tangente a f en $x = -2$ sea $y = 2x - 3$.**

La recta tangente y la función coinciden en el punto de tangencia cuyas coordenadas son:

$x = -2 \rightarrow y = 2(-2) - 3 = -7$

Por tanto, la función pasa por el punto (–2, –7), es decir, $f(-2) = -7$.

Por otra parte, $f'(-2) = 2$, ya que la pendiente de la recta tangente es 2.

$f'(x) = 6x^2 + 24x + a$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = -7 \\ f'(-2) = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2 \cdot (-2)^3 + 12 \cdot (-2)^2 + a \cdot (-2) + b = -7 \\ 6 \cdot (-2)^2 + 24 \cdot (-2) + a = 2 \end{array}\right\} \rightarrow a = 26, \; b = 13$$

62 **[La comprensión del enunciado requiere por parte del alumnado trabajar la destreza comprensión escrita de esta clave].**

Halla el valor de k para que la tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 5x + k$ en $x = 1$ pase por el origen de coordenadas.

- Pendiente de la recta tangente:

  $f'(x) = 2x - 5 \rightarrow f'(1) = -3$

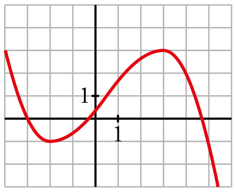
- Punto de tangencia: $x = 1$; $y = 1 - 5 + k \rightarrow (1, -4 + k)$
- Ecuación de la recta tangente:

  $y = -4 + k - 3(x - 1)$

- Para que pase por (0, 0), debe verificarse:

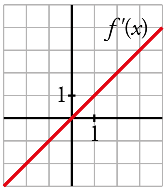
  $0 = -4 + k + 3 \rightarrow k = 1$

63 **Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$.**

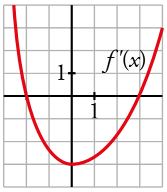


¿Cuál de las siguientes gráficas puede ser la de $f'(x)$? Justifícalo:

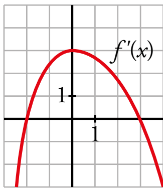
a)



b)



c)

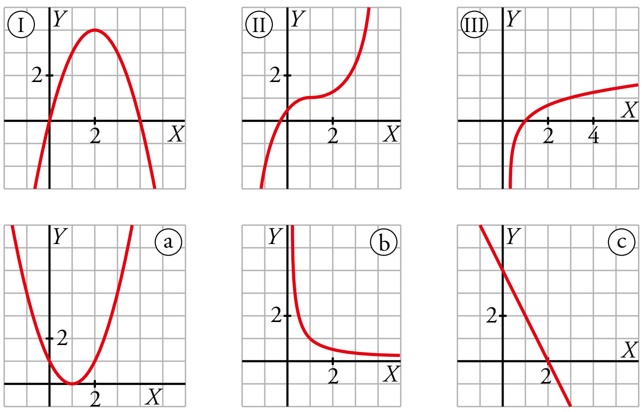


La gráfica del apartado c), porque $f'(-2) = f'(3) = 0$ al ser $x = -2$ y $x = 3$ puntos singulares de $f(x)$.

Como $f(x)$ crece en el intervalo $(-2, 3)$, $f'(x) > 0$ y esto solo ocurre en el apartado c). El resto de la gráfica de c) es coherente con la de $f(x)$.

Página 223

64 **Asocia a cada una de las gráficas I, II, III la gráfica de su función derivada.**



I → c II → a III → b

65 **De todos los conos cuya generatriz mide 10 m, halla la altura y el radio del que tiene el volumen máximo.**

Llamamos b y h a la base y a la altura del rectángulo, respectivamente.

Como el perímetro es 36, se tiene que $2b + 2\text{h} = 36 \rightarrow \text{h} = 18 - b$

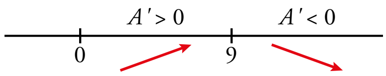
Buscamos el rectángulo de área máxima:

$A = b\text{h} = b(18 - b)$

Hallamos los puntos singulares:

$A' = 0 \to A' = 18 - 2b = 0 \to b = 9$

Estudiamos si el valor obtenido es un máximo:



Por tanto, para $b = 9$ el área es máxima.

Calculamos h: $h = 18 - 9 = 9$ y obtenemos el área máxima $A = 81 \text{ m}^2$.

66 Halla la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 30 cm cuya área sea la mayor posible.

** Llama x a la mitad de la base.*

Si llamamos x a la mitad de la base y h a la altura del triángulo, el lado desigual mide $2x$ y cada uno de los lados iguales mide $\dfrac{30 - 2x}{2} = 15 - x$.

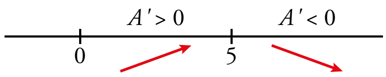
Por el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{(15 - x)^2 - x^2} = \sqrt{225 - 30x}$

El área del triángulo es $A = \dfrac{2x\sqrt{225 - 30x}}{2} = x\sqrt{225 - 30x}$

$$A' = \sqrt{225 - 30x} + \frac{x(-30)}{2\sqrt{225 - 30x}} = \frac{225 - 30x - 15x}{\sqrt{225 - 30x}} = \frac{225 - 45x}{\sqrt{225 - 30x}}$$

$$A' = 0 \to \frac{225 - 45x}{\sqrt{225 - 30x}} = 0 \to 225 - 45x = 0 \to x = 5 \text{ cm}$$

Comprobamos si hemos obtenido un máximo.



En efecto, $x = 5$ cm es un máximo. La base mide 10 cm, la altura mide $h = \sqrt{225 - 150} = 5\sqrt{3}$ cm y el área máxima es $A = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

67 De todos los ortoedros de base cuadrada y área total igual a 20 cm^2 halla las dimensiones del que tiene el mayor volumen.

Supongamos que x es el lado de la base cuadrada y que y es la altura del ortoedro.

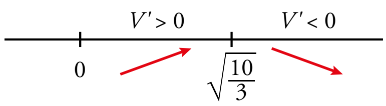
El área total es igual a 20 cm^2 $\to 2x^2 + 4xy = 20 \to y = \dfrac{10 - x^2}{2x}$

El volumen del ortoedro es $V = x^2 y = x^2 \dfrac{10 - x^2}{2x} = \dfrac{10x - x^3}{2}$.

Hallamos el valor de x que da el volumen máximo.

$$V' = \frac{10 - 3x^2}{2}$$

$V' = 0 \to \dfrac{10 - 3x^2}{2} = 0 \to x = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$ (el resultado negativo no tiene sentido).



La altura es $y = \dfrac{10 - \sqrt{10/3}^2}{2\sqrt{10/3}} = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$ y el volumen máximo, $V = \dfrac{10}{3}\sqrt{\dfrac{10}{3}} \text{ cm}^3$.

68 **Estudia el crecimiento de las siguientes funciones y di cuáles son sus máximos y sus mínimos:**

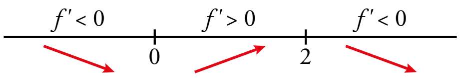
a) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$ **b)** $y = ln\,(x^2 + 1)$

a) Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{2x - x^2}{e^x} = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\;\; x = 2$$

Crecimiento y decrecimiento:



$f(0) = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$ es un mínimo.

$f(2) = \dfrac{4}{e^2} \;\rightarrow\; \left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$ es un máximo.

Intervalos de crecimiento: $(0, 2)$.

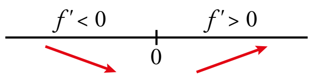
Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

Crecimiento y decrecimiento:



$f(0) = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento: $(0, +\infty)$.

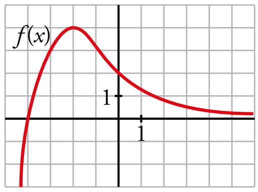
Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0)$.

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 1.9. (EA 1.9.1.-EA 1.9.2.-EA 1.9.3.) **CE 3.5.** (EA 3.5.1.-EA 3.5.2.)

Página 223

1 **Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y responde las preguntas.**



a) ¿Cuál es la T.V.M. en los intervalos [0, 3] y [–4, –2]?

b) ¿Tiene algún punto de tangente horizontal?

c) ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?

d) Sabemos que la tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. ¿Cuánto vale $f'(0)$?

a) T.V.M. $[0, 3] = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{1/2 - 2}{3} = -\dfrac{1}{2}$

T.V.M. $[-4, -2] = \dfrac{f(-2) - f(-4)}{-2 - (-4)} = \dfrac{4 - 0}{-2 + 4} = 2$

b) Sí, $P(-2, 4)$.

c) Si $x < -2$, $f'(x) > 0$.

d) La recta $y = -x$ (bisectriz del 2.º cuadrante) tiene pendiente igual a –1. Por tanto, $f'(0) = -1$

2 **Dada $f(x) = x^2 - 3x$, prueba que $f'(-2) = -7$ aplicando la definición de derivada.**

$f'(-2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$

$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) = 4 + 6 = 10$

$f(-2 + h) = (-2 + h)^2 - 3(-2 + h) = 4 - 4h + h^2 + 6 - 3h = h^2 - 7h + 10$

$f(-2 + h) - f(-2) = h^2 - 7h$

$\dfrac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \dfrac{h^2 - 7h}{h} = h - 7$

$\lim\limits_{h \to 0} h - 7 = -7$

Por tanto, $f'(-2) = -7$.

3 **Halla la derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x^2}$

b) $f(x) = ln\left(\dfrac{x}{3} \cdot e^{-x}\right)$

c) $f(x) = cos\left(\dfrac{3x}{2}\right)$

d) $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right)^3$

a) $f(x) = x^{1/3} + 2x^{-2}$

$f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} - 4x^{-3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{4}{x^3}$

b) $f(x) = ln\left(\dfrac{x}{3}\right) + ln\, e^{-x} = ln\, x - ln\, 3 - x$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1 - x}{x}$

c) $f'(x) = -\dfrac{3}{2}\, sen\left(\dfrac{3x}{2}\right)$

d) $f'(x) = 3\left(\dfrac{x^2}{x-2}\right)^2 D\left(\dfrac{x^2}{x-2}\right) = 3\dfrac{x^4}{(x-2)^2} \cdot \dfrac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \dfrac{3x^4(x^2-4x)}{(x-2)^4}$

4 **Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = ln\, x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$.**

Punto de tangencia: $x = 1$, $y = ln\, 1^2 = 0 \rightarrow P(1, 0)$

Pendiente de la recta tangente: $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x} \rightarrow f'(1) = 2$

Ecuación: $y = 0 + 2(x-1) \rightarrow y = 2x - 2$

5 **Halla los puntos singulares de la función $y = 2 + (1-x)^3$. ¿Tiene máximo o mínimo relativo esa función?**

$f(x) = 2 + (1-x)^3 \rightarrow f'(x) = 3(1-x)^2(-1) = -3(1-x)^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow -3(1-x)^2 = 0 \rightarrow 1 - x = 0 \rightarrow x = 1$

$f(1) = 2 + (1-1)^3 = 2$

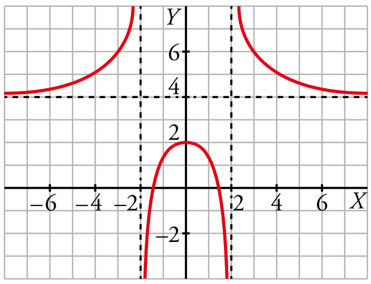
Punto singular: (1, 2).

Como $f'(x) = -3(1-x)^2$ es menor que 0 para cualquier valor de $x \neq 1$, f es decreciente en todo su dominio y, por tanto, el punto singular no es máximo ni mínimo.

6 **Observa la gráfica y describe:**

a) Sus asíntotas y la posición de la curva con respecto a ellas.

b) Sus puntos singulares y sus intervalos de crecimiento.



a) • Asíntotas verticales: rectas $x = -2$ y $x = 2$

Posición:

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

• Asíntota horizontal: recta $y = 4$

Posición:

Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 4$

Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 4$

b) El punto (0, 2) es un máximo de la función.

Los intervalos de crecimiento son $(-\infty, 2) \cup (-2, 0)$.

Los intervalos de decrecimiento son $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

7 **Representa la función $y = f(x)$ de la que conocemos:**

- **Dominio de definición: $\mathbb{R}$**
- **Mínimo: (0, 0)**
- **Asíntota horizontal: $y = 2$**
- **Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 2$**
- **Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2$**

¿A cuál de estas funciones corresponde esa gráfica?

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

La función del apartado b) no puede ser porque tiene asíntotas verticales y no se afirma nada sobre esto en el enunciado.

La función del apartado a) no puede ser porque es negativa a la izquierda de 0, y, por tanto, el punto (0, 0) no sería un mínimo de la función.

La gráfica se corresponde con la función del apartado c).

8 **a) Estudia las ramas infinitas y los puntos singulares de la función $f(x) = x^3 - 12x + 6$. ¿Tiene máximo o mínimo?**

b) Represéntala gráficamente.

a) Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 12x + 6) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 - 12x + 6) = -\infty$$

Puntos singulares:

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 12 = 0 \to x = -2,\ x = 2$

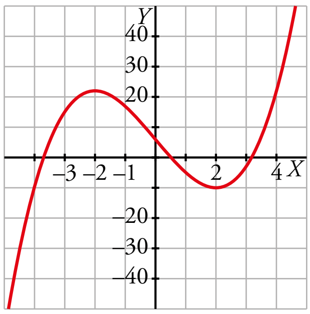
$x = -2 \to f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 6 = 22$

$x = 2 \to f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 6 = -10$

Los puntos (–2, 22) y (2, –10) son puntos singulares.

El punto (–2, 22) es un máximo y el (2, –10) es un mínimo por la posición de las ramas infinitas.

b) Gráfica:



9 **En la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 9}$, estudia las asíntotas, su posición con respecto a la curva, los puntos singulares y represéntala.**

La función está definida para todo valor que no anule el denominador:

$Dom = \mathbb{R} - \{x = 3,\ x = -3\}$

Veamos dónde se anula su derivada:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 9) - (x^2 - 1)\,2x}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-16x}{(x^2 - 9)^2} = 0 \to x = 0$$

Estudiamos el signo de la derivada para saber el crecimiento y decrecimiento de la función. Como el denominador es siempre positivo:

$f'(x) > 0 \to x < 0$ la función crece

$f'(x) < 0 \to x > 0$ la función decrece

Por tanto, $x = 0$ es un máximo y $f(0) = \dfrac{1}{9} \to$ Máximo en $\left(0; \dfrac{1}{9}\right)$

Tendrá asíntotas verticales donde se anula el denominador:

$x^2 - 9 = 0 \to x = 3, x = -3$

Veamos cómo se acerca la función a dichas asíntotas:

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$

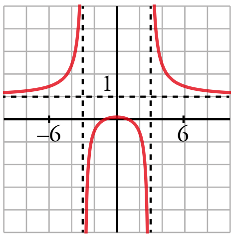
$\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$

Sabemos que tendrá asíntotas horizontales porque el grado del denominador y numerador es el mismo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1} = 1 \;\rightarrow\; \text{Asíntota horizontal en } y = 1$$



8 DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

C.E.: CE 1.8. (EA 1.8.1.) CE 4.2. (EA 4.2.2.-EA 4.2.3.-EA 4.2.4.) CE 4.5. (EA 4.5.1.-EA 4.5.2.)

Página 229

Resuelve

Relación funcional y relación estadística

En cada uno de estos casos debes decir si, entre las dos variables que se citan, hay relación funcional o estadística (correlación) y, en este último caso, indicar si es positiva o negativa:

a) En un conjunto de familias:

Estatura media de los padres-Estatura media de los hijos

b) Entre los países del mundo respecto a España:

Volumen de exportación-Volumen de importación

c) En los países del mundo:

Tasa de mortalidad infantil-Médicos por cada 1 000 habitantes

d) En las viviendas de una ciudad:

KWh consumidos durante enero-Coste del recibo de la luz

Número de personas en cada casa-Coste del recibo de la luz

e) En los equipos de fútbol:

Posición al finalizar la liga-Número de partidos perdidos

Posición al finalizar la liga-Número de partidos ganados

a) Estadística, porque la estatura media de los padres no nos permite saber exactamente la estatura media de los hijos. Hay correlación positiva. Normalmente, los hijos de padres altos son altos.

b) Estadística, porque el volumen de exportación no nos permite saber exactamente el volumen de importación. Hay correlación negativa. Normalmente, los países que exportan mucho, importan poco.

c) Estadística, porque la tasa de mortalidad infantil no nos permite saber exactamente el número de médicos por cada 1 000 habitantes. Hay correlación negativa. Normalmente, los países que tienen una tasa de mortalidad infantil grande, tienen pocos médicos por cada 1 000 habitantes.

d) *kWh consumidos durante enero - Coste del recibo de la luz* → Funcional; si conocemos los kWh consumidos durante enero, podemos calcular el coste del recibo de la luz.

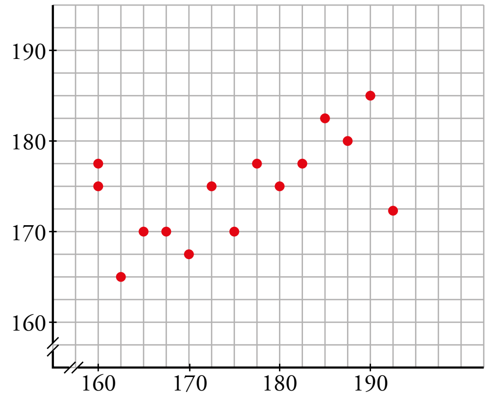
Número de personas en cada casa - Coste del recibo de la luz → Estadística, porque el número de personas en cada casa no nos permite saber exactamente el coste del recibo de la luz. Hay correlación positiva. Normalmente, cuantas más personas hay en una casa, más luz se consume.

e) *Posición al finalizar la liga - Número de partidos perdidos* → Estadística, porque la posición al finalizar la liga no nos permite saber exactamente el número de partidos perdidos. Hay correlación negativa. Normalmente, cuanto más alta es la posición en la liga, menos partidos se han perdido.

Posición al finalizar la liga - Número de partidos ganados → Estadística, porque la posición al finalizar la liga no nos permite saber exactamente el número de partidos ganados. Hay correlación positiva. Normalmente, cuanto más alta es la posición en la liga, más partidos se han ganado.

Ejemplo de relación estadística

En la siguiente gráfica, cada punto representado corresponde a un chico. La abscisa es la estatura de su padre, y la ordenada, su propia altura:



a) Identifica a Guillermo y Gabriel, hermanos de buena estatura, cuyo padre es bajito.

b) Identifica a Sergio, de estatura normalita, cuyo padre es muy alto.

c) ¿Podemos decir que hay una cierta relación entre las estaturas de estos 15 chicos y las de sus padres?

a) Guillermo y Gabriel están representados mediante los puntos (160, 175) y (160; 177,5).

b) Sergio está representado con el punto (192,5; 172,5).

c) Sí; en general, cuanto más alto sea el padre, más altos son los hijos.

1 DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES. NUBES DE PUNTOS

C.E.: CE 4.1. (EA 4.1.1.-EA 4.1.2.-EA 4.1.3.-EA 4.1.4-EA 4.1.5.)

Página 231

1 **[La lectura de los enunciados permite trabajar la destreza expresión escrita de esta clave].**

¿Verdadero o falso?

a) En una distribución bidimensional, para cada valor de x solo puede haber un valor de y.

b) Cuantos más puntos tenga una distribución bidimensional, más fuerte es su correlación.

c) Las series temporales son distribuciones estadísticas en las que una de las variables es el tiempo. Aunque no sean distribuciones bidimensionales propiamente dichas, pueden tratarse del mismo modo que estas.

a) Falso, se pueden mirar las nubes de puntos de esta misma página.

b) Falso, la correlación depende de la relación entre las características que se estudian en una población, no del número de elementos de la población.

c) Verdadero.

2 ▶ CORRELACIÓN LINEAL

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 233

1 ¿Verdadero o falso?

a) Cuanto más próximos estén a una recta los puntos de una distribución bidimensional, más fuerte es su correlación lineal.

b) Si la recta de regresión tiene pendiente negativa, la correlación lineal es negativa.

c) Si los puntos de la nube no se aproximan a ninguna recta, entonces las variables están incorreladas.

a) Verdadero. Porque la correlación estudia las distancias de los puntos a la recta de regresión. Cuanto más pequeña es la distancia a la recta, mayor es la correlación.

b) Verdadero. Una recta de pendiente negativa indica, como el signo del coeficiente de correlación, que al aumentar una variable, la otra disminuye.

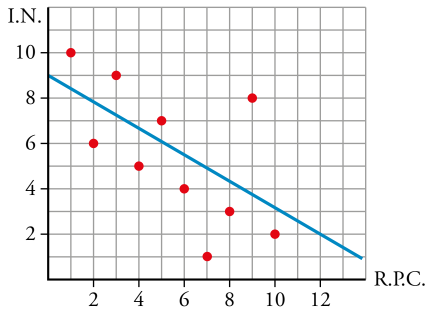
c) Verdadero.

2 [La interpretación de los datos de la tabla requiere poner en práctica la iniciativa (dimensión productiva de esta clave)].

La siguiente tabla muestra cómo se ordenan entre sí diez países, A, B, C…, según dos variables, R.P.C. (*renta per cápita*) e I.N. (*índice de natalidad*). Representa los resultados en una nube de puntos, traza la recta de regresión y di cómo te parece la correlación.

PAÍSES	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
R.P.C.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I.N.	10	6	9	5	7	4	1	3	8	2

La correlación es negativa y moderadamente alta (–0,62).



3 ▶ PARÁMETROS ASOCIADOS A UNA DISTRIBUCIÓN BIDIMENSIONAL

C.E.: CE 4.1. (EA 4.1.1.-EA 4.1.2.-EA 4.1.3.-EA 4.1.4.-EA 4.1.5.) CE 4.2. (EA 4.2.1.-EA 4.2.2.-EA 4.2.3.- EA 4.2.4.)

Página 235

1 **¿Verdadero o falso?**

a) El signo de la correlación (r) coincide con el de la covarianza (σ_{xy}).

b) Si cambiamos las unidades en que se expresa la variable x, entonces se modifican los valores de $\bar{x}$, σ_x y σ_{xy}.

c) Aunque cambiemos las unidades en que se da la variable x (o y, o ambas) el valor de la correlación, r, no cambia.

a) Verdadero, $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$; como σ_x y σ_y son positivas, el signo de r es el de σ_{xy}.

b) Falso. Varían todos los parámetros menos r, porque r es el único que no tiene dimensiones.

c) Verdadero.

2 **Obtén mediante cálculos manuales los coeficientes de correlación de las distribuciones del epígrafe anterior:**

Salto de altura-Salto con pértiga

Salto de altura-1 500 m lisos

Salto de altura-Lanzamiento de peso

Comprueba tus resultados con la calculadora.

x: salto de altura

y: salto con pértiga

Elaboramos la tabla como en el ejercicio resuelto:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	1	1	1	1
2	4	4	16	8
3	2	9	4	6
4	3	16	9	12
5	5	25	25	25
6	7	36	49	42
7	6	49	36	42
8	8	64	64	64
36	36	204	204	200

$\bar{x} = \dfrac{36}{8} = 4,5 \qquad \bar{y} = \dfrac{36}{8} = 4,5$

$\sigma_x = \sqrt{\dfrac{200}{8} - 4,5^2} = 2,2913$

$\sigma_y = \sqrt{\dfrac{200}{8} - 4,5^2} = 2,2913$

$\sigma_{xy} = \dfrac{200}{8} - 4,5 \cdot 4,5 = 4,75$

$r = \dfrac{4,75}{2,2913 \cdot 2,2913} = 0,90475$

x: salto de altura

y: 1 500 m lisos

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	3	1	9	3
2	2	4	4	4
3	5	9	25	15
4	1	16	1	4
5	7	25	49	35
6	6	36	36	36
7	4	49	16	28
8	8	64	64	64
36	36	204	204	189

$$\bar{x} = \frac{36}{8} = 4{,}5 \qquad \bar{y} = \frac{36}{8} = 4{,}5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{204}{8} - 4,5^2} = 2{,}2913$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{204}{8} - 4,5^2} = 2{,}2913$$

$$\sigma_{xy} = \frac{189}{8} - 4{,}5 \cdot 4{,}5 = 3{,}375$$

$$r = \frac{3,375}{2,2913 \cdot 2,2913} = 0{,}64285$$

x: salto de altura

y: lanzamiento de peso

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	7	1	49	7
2	5	4	25	10
3	8	9	64	24
4	6	16	36	24
5	4	25	16	20
6	1	36	1	6
7	3	49	9	21
8	2	64	4	16
36	36	204	204	128

$$\bar{x} = \frac{36}{8} = 4{,}5 \qquad \bar{y} = \frac{36}{8} = 4{,}5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{204}{8} - 4,5^2} = 2{,}2913$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{204}{8} - 4,5^2} = 2{,}2913$$

$$\sigma_{xy} = \frac{128}{8} - 4{,}5 \cdot 4{,}5 = -4{,}25$$

$$r = \frac{-4,25}{2,2913 \cdot 2,2913} = -0{,}80952$$

4 RECTA DE REGRESIÓN

C.E.: CE 1.12. (EA 1.12.1.) CE 4.2. (EA 4.2.1.-EA 4.2.2.-EA 4.2.3.-EA 4.2.4.)

Página 237

1 ¿Verdadero o falso?

a) Cuanto más fuerte sea la correlación, más puntos habrá de la nube que se encuentren exactamente sobre la recta de regresión.

b) Cuanto más fuerte sea la correlación, más cerca de la recta de regresión estarán los puntos de la nube.

c) Cuanto más fuerte sea la correlación, más fiables serán las estimaciones hechas a partir de la recta de regresión.

a) Falso. Aunque la correlación sea muy grande, es posible que ningún punto de la nube de puntos esté sobre la recta.

b) Falso. Habrá muchos puntos cerca de la recta, pero puede haber puntos aislados lejos de la recta.

c) Verdadero. Los valores de una de las variables son más predecibles, puesto que están muy próximos a la recta de regresión.

5 ▶ HAY DOS RECTAS DE REGRESIÓN

C.E.: CE 4.2. (EA 4.2.1.-EA 4.2.2.-EA 4.2.3.-EA 4.2.4.)

Página 238

1 **¿Verdadero o falso?**

a) En una distribución bidimensional en la que se estudien conjuntamente las estaturas (x) y los pesos (y) de un grupo de jóvenes en la cual $\bar{x} = 170$ cm e $\bar{y} = 65$ kg, es imposible que las rectas de regresión sean $y = 0{,}8x - 67$ e $y = 1{,}1x - 121$.

b) Si en una distribución bidimensional es $\bar{x} = 3$ e $\bar{y} = 5$, entonces es posible que las rectas de regresión sean $y = 2x - 1$ e $y = -x + 8$, pues ambas se cortan en (3, 5).

c) Si las rectas de regresión son $y = \frac{1}{5}x + 10$ e $y = 11x - 2$, entonces la correlación es débil porque las rectas forman un ángulo próximo a 90°.

a) $\left.\begin{cases} y = 0,8x - 67 \\ y = 1,1x - 121 \end{cases}\right\}$ $x = 180{,}0$; $y = 77{,}0 \rightarrow$ Se cortan en (180, 77).

El punto de corte de las rectas de regresión debe ser $(\bar{x}, \bar{y}) = (170, 65)$, luego es verdadera la afirmación.

b) Falso. El signo de la pendiente de las dos rectas de regresión debe ser igual.

c) Verdadero. Se puede observar en las gráficas de esta página.

6 TABLAS DE CONTINGENCIA

C.E.: CE 1.12. (EA 1.12.1.) CE 4.1. (EA 4.1.1.-EA 4.1.2.-EA 4.1.3.-EA 4.1.4.-EA 4.1.5.) CE 4.2. (EA 4.2.1.-EA 4.2.2.-EA 4.2.3.-EA 4.2.4.)

Página 239

1 **Calcula la media y la desviación típica de la distribución marginal de la *x*. Para ello, asigna a cada intervalo de edades su marca de clase (punto medio) y al último intervalo asígnale el valor 75.**

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
21,5	50	1 075	462,25	23 112,5
30,5	85	2 592,5	930,25	79 071,25
43	140	6 020	1 849	258 860
58	100	5 800	3 364	336 400
75	125	9 375	5 625	703 125
	500	24 862,5		1 400 568,75

$$\bar{x} = \frac{24\,862,5}{500} = 49,725$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1\,400\,568,75}{500} - 49,725^2} = 18,126$$

2 ¿Qué te hace decir eso? **[Esta estrategia de pensamiento se puede trabajar en esta actividad].**

La distribución marginal de la *y* corresponde a una variable cualitativa. Por tanto, no tiene media ni desviación típica. El único parámetro que podemos asignarle es la moda. ¿Cuál es?

Moda = Deportes.

Página 240

3 **Comprueba que la siguiente tabla corresponde a la distribución de *x* condicionada a *y* € {INF., DOC.}.**

x	18-25	26-35	36-50	51-65	más de 65
f	9	21	36	26	46

Halla su media y su desviación típica.

x_i	21,5	30,5	43	58	75	
INF	4	6	15	11	25	61
DOC	5	15	21	15	21	77
INF-DOC	9	21	36	26	46	138

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
21,5	9	193,5	462,25	4 160,25
30,5	21	640,5	930,25	19 535,25
43	36	1 548	1 849	66 564
58	26	1 508	3 364	87 464
75	46	3 450	5 625	258 750
	138	7 340		436 473,5

$$\bar{x} = \frac{7\,340}{138} = 53,188$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{436\,473,5}{138} - 53,188^2} = 18,273$$

4 **Haz la distribución de *y* condicionada a $x < 36$.**

y_i	f_i
INF	10
DOC	20
ENT	20
DEP	54
PEL	26
OTR	5

5 **Comprueba, calculando las frecuencias relativas, que el suceso PEL. no es independiente de la edad.**

x_i	21,5	30,5	43	58	75	
PEL	11	15	20	16	11	73
	0,15068493	0,20547945	0,2739726	0,21917808	0,15068493	

Se observa que las frecuencias relativas varían según la edad.

6 **Haz la distribución de *x* condicionada a NO DEPORTE y compara sus frecuencias relativas con las de la distribución marginal de la *x*.**

x_i	21,5	30,5	43	58	75	
NO DEP	61	105	166	119	138	589

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
21,5	61	1 311,5	462,25	28 197,25
30,5	105	3 202,5	930,25	97 676,25
43	166	7 138	1 849	306 934
58	119	6 902	3 364	400 316
75	138	10 350	5 625	776 250
	589	28 904		1 609 373,5

$$\bar{x} = \frac{28\,904}{589} = 49,073$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1\,609\,373,5}{589} - 40,073^2} = 33,56$$

La media es similar; sin embargo, la desviación típica es mayor si consideramos los datos de las personas que no ven deportes.

Página 242

7 **Otro grupo de 154 personas han realizado los mismos test, con los resultados que se dan en la tabla de la derecha. Halla el coeficiente de correlación.**

y_i \ x_i	0	1	2	3	4
0	17	22	6	4	1
1	15	14	8	2	0
2	13	6	10	5	1
3	5	4	2	6	2
4	3	1	0	3	4

De los datos obtenemos las siguientes tablas:

y_i \ x_i	0	1	2	3	4	
0	17	22	6	4	1	50
1	15	14	8	2	0	39
2	13	6	10	5	1	35
3	5	4	2	6	2	19
4	3	1	0	3	4	11
	53	47	26	20	8	154

Distribución marginal de la x:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
0	53	0	0	0
1	47	47	1	47
2	26	52	4	104
3	20	60	9	180
4	8	32	16	128
	154	191		459

$$\bar{x} = \frac{191}{154} = 1{,}24$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{459}{154} - 1{,}24^2} = 1{,}20$$

Distribución marginal de la y:

y_i	f_i	$y_i \cdot f_i$	y_i^2	$y_i^2 \cdot f_i$
0	50	0	0	0
1	39	39	1	39
2	35	70	4	140
3	19	57	9	171
4	11	44	16	176
	154	210		526

$$\bar{y} = \frac{210}{154} = \frac{15}{11} = 1{,}36$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{526}{154} - 136^2} = 1{,}25$$

$$\sigma_{xy} = \frac{332}{154} - 1{,}36 \cdot 1{,}20 = 0{,}52$$

$$r = \frac{0{,}52}{1{,}25 \cdot 1{,}20} = 0{,}35$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 244

3. Obtención de la correlación a partir de las dos rectas de regresión

Hazlo tú

- **Calcula las medias de las distribuciones y el coeficiente de correlación a partir de estas dos rectas de regresión:**

  $\boldsymbol{y = 0{,}77x + 4{,}64}$

  $\boldsymbol{x = 1{,}2y - 4{,}73}$

  a) $(\bar{x},\ \bar{y})$ son las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas de regresión.

$$\begin{cases} y = 0{,}77x + 4{,}64 \\ x = 1{,}2y - 4{,}73 \end{cases}$$

$\to\ y = 0{,}77(1{,}2y - 4{,}73) + 4{,}64\ \to\ y = \dfrac{9979}{760} = 13{,}13\ \to\ x = 11{,}02$

Por tanto, $(\bar{x},\ \bar{y}) = (11{,}02;\ 13{,}13)$.

b) Calculamos el coeficiente de correlación a partir de las pendientes de las rectas de regresión:

$$m_{yx} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}} = 0{,}77$$

$$m_{yx} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}} = 1{,}2$$

$$r = \sqrt{m_{yx} \cdot m_{xy}} = \sqrt{0{,}77 \cdot 1{,}2} = 0{,}96$$

La correlacion es positiva y fuerte.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 1.8. (EA 1.8.1.)

Página 245

1. Dos rectas de regresión. Estimaciones

- **La siguiente tabla relaciona las variables**

x: gastos en publicidad (miles de euros)

y: ventas (miles de euros)

durante los 6 primeros meses de promoción de un cierto producto:

x	1	2	3	4	5	6
y	10	17	30	28	39	47

a) Hallar las dos rectas de regresión.

b) Efectuar la estimación $\hat{y}(5,5)$ y explicar su significado.

c) Para obtener unas ventas de 20 000 €, ¿cuántos miles de euros se estima que hay que gastar en publicidad?

¿Serán fiables estas estimaciones?

a)

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	10	1	100	10
2	17	4	289	34
3	30	9	900	90
4	28	16	784	112
5	39	25	1 521	195
6	47	36	2 209	282
21	171	91	5 803	723

$$\bar{x} = \frac{21}{6} = 3,5$$

$$\bar{y} = \frac{171}{6} = 28,5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{91}{6} - 3,5^2} = 1,71$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{5\,803}{6} - 28,5^2} = 12,45$$

$$\sigma_{xy} = \frac{723}{6} - 3,5 \cdot 28,5 = 20,75$$

Pendiente de la recta de regresión de Y sobre X:

$$m_{yx} = \frac{20,75}{1,71^2} = 7,1$$

$$y - 28,5 = 7,1(x - 3,5)$$

Pendiente de la recta de regresión de X sobre Y:

$$m_{xy} = \frac{12,45^2}{20,75} = 7,47$$

$$y - 28,5 = 7,47(x - 3,5)$$

b) $\hat{y}(5,5) = 7,1(5,5 - 3,5) + 28,5 = 42,7$

c) $\hat{x}(20) \;\to\; 20 - 28,5 = 7,47(x - 3,5) \;\to\; y = 2,36$

$$r = \frac{20,75}{1,71 \cdot 12,45} = 0,97$$

2. Tabla de doble entrada

- **Una compañía discográfica ha recopilado en la tabla de la derecha la siguiente información sobre el número de conciertos dados por 15 grupos musicales durante un verano, y las ventas de discos de estos grupos (en miles).**

DISCOS (x) \ CONC. (y)	10-30	30-40	40-80
1-5	3	0	0
5-10	1	4	1
10-20	0	1	5

a) Calcular el número medio de discos vendidos.

b) ¿Cuál es el coeficiente de correlación?

c) Obtener la recta de regresión de Y sobre X.

d) Si un grupo musical vende 18 000 discos, ¿qué número de conciertos se prevé para él?

a)

DISCOS (x_i) \ CONC. (y_i)	20	35	60	
3	3	0	0	3
7,5	1	4	1	6
15	0	1	5	6
	4	5	6	

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 3 + 7,5 \cdot 6 + 15 \cdot 6}{15} = 9,6$$

b)

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
3	3	9	9	27
7,5	6	45	56,25	337,5
15	6	90	225	1 350
	15	144		1 714,5

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1714,5}{15} - 9,6^2} = 4,71$$

y_i	f_i	$y_i \cdot f_i$	y_i^2	$y_i^2 \cdot f_i$
20	4	80	400	1 600
35	5	175	1 225	6 125
60	6	360	3 600	21 600
	15	615		29 325

$$\bar{y} = \frac{20 \cdot 4 + 35 \cdot 5 + 60 \cdot 6}{15} = 41$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{29\,325}{15} - 41^2} = 16,55$$

$$\Sigma x \cdot y \cdot f = 6\,855$$

$$\sigma_{xy} = \frac{6\,855}{15} - 9,6 \cdot 41 = 63,4$$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{63,4}{4,71 \cdot 16,55} = 0,81$$

c) $m_{yx} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}} = \dfrac{63,4}{4,71^2} = 2,86$

$y - 41 = 2,86(x - 9,6) \rightarrow y = 2,86x + 13,51$

d) La previsión de conciertos será:

$\hat{y}(18) = 2,86 \cdot 18 + 13,51 = 65$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 246

Para practicar

Sin fórmulas

1 **[Las dudas que surjan sobre las relaciones entre las variables planteadas pueden ser tratadas según esta técnica].**

Para cada uno de los siguientes casos, indica:

- **Cuáles son las variables que se relacionan.**
- **Si se trata de una relación funcional o de una relación estadística y, en este último caso, determina el signo de la correlación.**

a) ***Renta mensual de una familia-Gasto mensual en electricidad***

b) ***Radio de una esfera-Volumen de esta***

c) ***Litros de lluvia recogidos en una ciudad***

Tiempo dedicado a ver la televisión por sus habitantes

d) ***Longitud del trayecto recorrido en una línea de cercanías***

Precio del billete

e) ***Peso de los alumnos de 1.º de Bachillerato***

Número de calzado que usan

f) ***Toneladas de tomate recogidas en una cosecha***

Precio del kilo de tomate en el mercado

g) ***Superficie de una vivienda-Valor de la misma***

Indica en cada caso cómo crees que será la correlación: fuerte, intermedia o débil.

a) Renta (€), gasto (€).

Correlación positiva.

b) Relación funcional.

c) Relación estadística. Seguramente muy débil. Positiva (¿cabe pensar que cuanto más llueva más tiempo pasarán en casa y, por tanto, más verán la televisión?).

d) Aunque lo parezca *a priori*, seguramente la relación no es funcional. Es una correlación positiva fuerte.

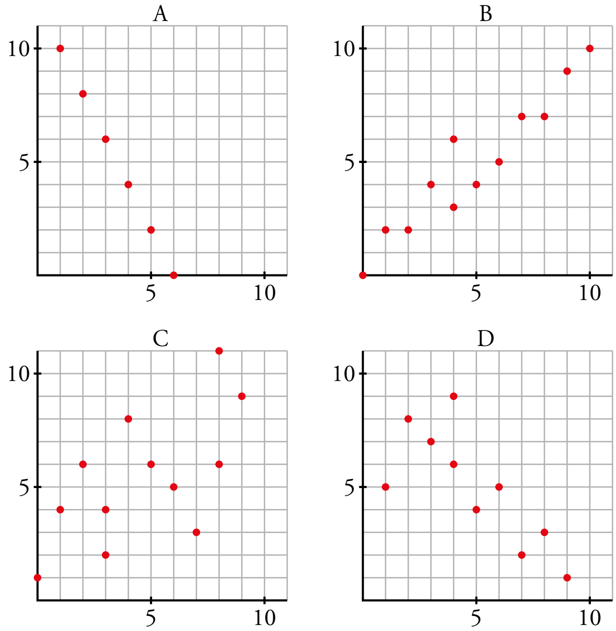
e) Correlación positiva.

f) Correlación negativa (cuanto mayor sea la cosecha, más baratos estarán los tomates).

g) Correlación positiva.

2 **[Las diferencias entre las gráficas que dibujarán los alumnos pueden ser analizadas según esta técnica].**

a) Copia en tu cuaderno y traza a ojo una recta de regresión para cada una de estas distribuciones bidimensionales:



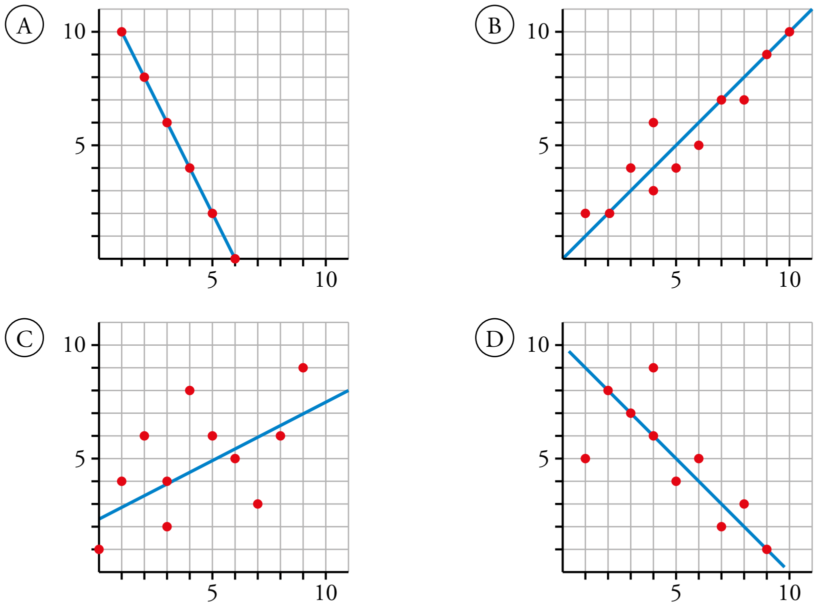
b) ¿Cuáles de ellas tienen correlación positiva y cuáles tienen correlación negativa?

c) Sin hacer cálculos, elige, de entre los siguientes valores, la correlación de cada una de las distribuciones:

0 0,64 1 –0,98 0,95 –1 –0,76

d) Una de ellas presenta relación funcional; ¿cuál? Da la expresión analítica de la función que relaciona las dos variables.

a)

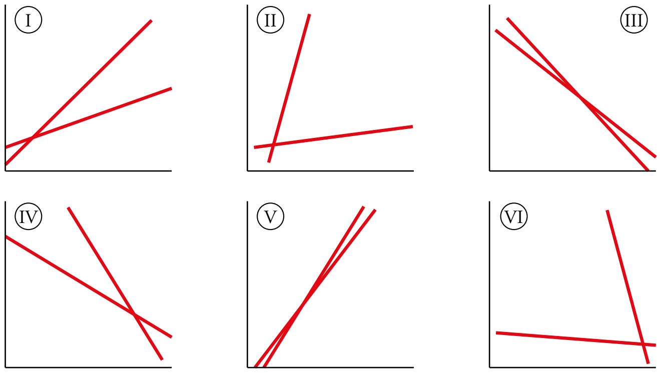


b) B y C tienen correlación positiva; A y D, negativa.

c) A → –1; B → 0,95; C → 0,64; D → –0,76

d) La A es relación funcional: $y = 12 - 2x$.

3 **Cada una de estas seis distribuciones bidimensionales está representada por sus dos rectas de regresión:**



Sus coeficientes de correlación son, no respectivamente:

–0,9 0,99 0,6 –0,2 –0,5 0,1

Asigna, razonadamente, a cada una su valor.

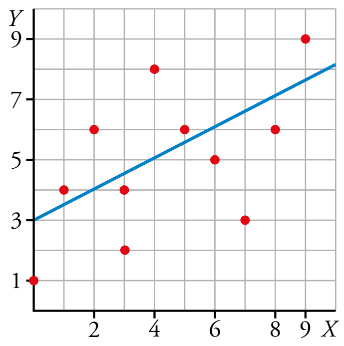
I → 0,6 II → 0,1 III → –0,9

IV → –0,5 V → 0,99 VI → –0,2

4 **Representa la nube de puntos de esta distribución y estima cuál de estos tres puede ser el coeficiente de correlación:**

a) $r = 0,98$ **b)** $r = -0,87$ **c)** $r = 0,58$

x	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9
y	1	4	6	2	4	8	6	5	3	6	9

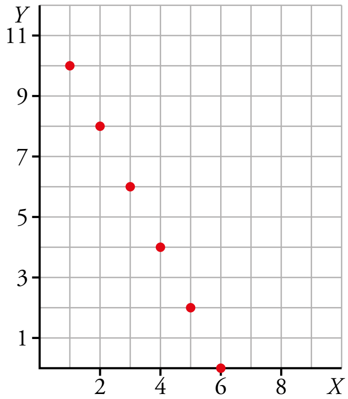


El coeficiente de correlación es $r = 0,58$.

5 **Representa sobre papel cuadriculado la nube de puntos correspondiente a esta distribución:**

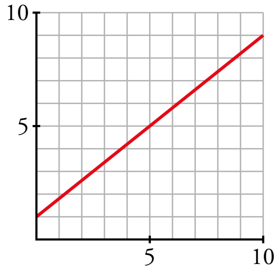
x	1	2	3	4	5	6
y	10	8	6	4	2	0

¿Cuál crees que es el coeficiente de correlación?



$r = -1$ porque están alineados.

6 Sumamos. **[La creación de un conjunto de puntos que cumpla las condiciones indicadas permite trabajar la innovación (dimensión productiva)].**



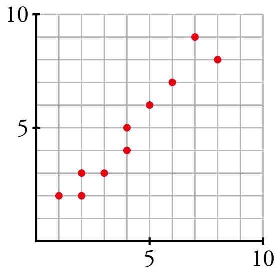
a) En tu cuaderno, en una cuadrícula como esta, sitúa diez puntos de modo que estimes que su correlación sea 0,9 y una de sus rectas de regresión sea la que ves.

b) Repite la experiencia para conseguir un coeficiente de correlación de 0,6.

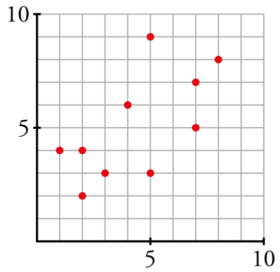
c) Haz lo mismo para un coeficiente de 0,3.

∗ ***Atención: se pide estimar, pero no calcular.***

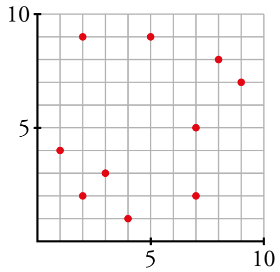
a) $r = 0,9$



b) $r = 0,6$



c) $r = 0,3$

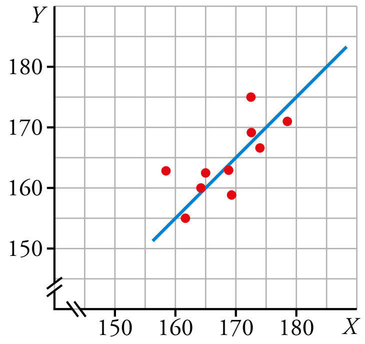


7 **Las estaturas de 10 chicas, x, y las de sus madres, y, son:**

x_i	158	162	164	165	168	169	172	172	174	178
y_i	163	155	160	161	164	158	175	169	166	172

a) Representa estos valores mediante una nube de puntos.

b) Traza a ojo una recta de regresión y di si la correlación es positiva o negativa y más o menos fuerte de lo que esperabas.



La correlación es positiva y fuerte.

Página 247

Con fórmulas

8 **Esta es la distribución bidimensional dada por la nube de puntos B del ejercicio 2:**

x	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10
y	0	2	2	4	3	6	4	5	7	7	9	10

Halla mediante cálculos manuales:

a) $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x, σ_y, σ_{xy}.

b) El coeficiente de correlación, r. Interprétalo.

c) Las ecuaciones de las dos rectas de regresión.

d) Comprueba los resultados con la calculadora.

$n = 12$, $\Sigma x = 59$, $\Sigma y = 59$

$\Sigma x^2 = 401$ $\Sigma y^2 = 389$ $\Sigma xy = 390$

a) $\bar{x} = 4{,}92$ $\bar{y} = 4{,}92$

$\sigma_x = 3{,}04$ $\sigma_y = 2{,}87$ $\sigma_{xy} = 8{,}33$

b) $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 0{,}95$. Se trata de una correlación fuerte y positiva.

c) Recta de regresión de Y sobre X:

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = 0{,}90 \to y = 4{,}92 + 0{,}9(x - 4{,}92)$$

Recta de regresión de X sobre Y:

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = 1{,}01 \to y = 4{,}92 + \frac{1}{1{,}01}(x - 4{,}92) \to y = 4{,}92 + 0{,}99(x - 4{,}92)$$

9 **a) Representa la nube de puntos correspondiente a la siguiente distribución bidimensional:**

x	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9
y	1	4	6	2	4	8	6	5	3	6	9

b) Comprueba con la calculadora que sus parámetros son:

$\bar{x} = 4{,}4$ $\quad\bar{y} = 4{,}9$ $\quad\sigma_{xy} = 3{,}67$

$\sigma_x = 2{,}77$ $\quad\sigma_y = 2{,}31$ $\quad r = 0{,}57$

c) Halla las ecuaciones de las dos rectas de regresión, X sobre Y e Y sobre X, y represéntalas junto con la nube de puntos.

a) Representada en el ejercicio 4.

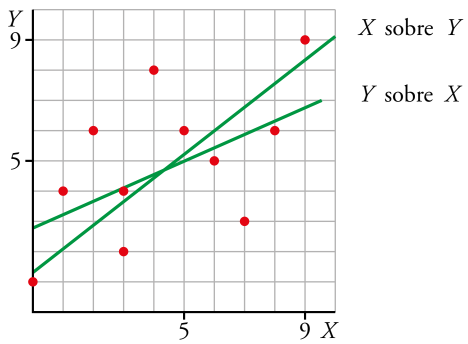
b) Se comprueba.

c) • Recta de regresión de Y sobre X:

$$m_{yx} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{3{,}67}{2{,}77^2} = 0{,}48 \;\rightarrow\; y = 4{,}9 + 0{,}48(x - 4{,}4) \;\rightarrow\; y = 0{,}48x + 2{,}79$$

• Recta de regresión de X sobre Y:

$$m_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{3{,}67}{2{,}31^2} = 0{,}69 \;\rightarrow\; \frac{1}{m_{xy}} = 1{,}45 \;\rightarrow\; y = 4{,}9 + 1{,}45(x - 4{,}4) \;\rightarrow\; y = 1{,}45x - 1{,}48$$



10 **Una distribución bidimensional en la que los valores de x son 12, 15, 17, 21, 22 y 25, tiene una correlación $r = 0{,}99$ y su recta de regresión es $y = 10{,}5 + 3{,}2x$.**

a) Calcula $\hat{y}(13)$, $\hat{y}(20)$, $\hat{y}(30)$, $\hat{y}(100)$.

b) ¿Cuáles de las estimaciones anteriores son fiables, cuál poco fiable y cuál no se debe hacer?

c) Expresa los resultados en términos adecuados.

Por ejemplo:

$\hat{y}(13) = 52{,}1$. «Para $x = 13$ es muy probable que el valor correspondiente de y sea próximo a 52».

a) $\hat{y}(13) = 52{,}1$; $\hat{y}(20) = 74{,}5$; $\hat{y}(30) = 106{,}5$; $\hat{y}(100) = 330{,}5$

b) $\hat{y}(13)$ e $\hat{y}(20)$ son estimaciones fiables, $\hat{y}(30)$ es poco fiable e $\hat{y}(100)$ es una estimación nada fiable.

c) Son fiables $\hat{y}(13)$ e $\hat{y}(20)$, porque 13 y 20 están en el intervalo de valores utilizados para obtener la recta de regresión.

$\hat{y}(30)$ es menos fiable, pues 30 está fuera del intervalo, aunque cerca de él.

$\hat{y}(100)$ es una estimación nada fiable, pues 100 está muy lejos del intervalo [12, 25].

11 **Observa la distribución D del ejercicio 2.**

a) Descríbela mediante una tabla de valores.

b) Realiza los cálculos para obtener su coeficiente de correlación.

c) Represento los puntos en tu cuaderno.

Halla la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X y represéntala.

d) Calcula $\hat{y}(4{,}5)$, $\hat{y}(11)$, $\hat{y}(20)$ dilucidando cuánto de fiables son dichas estimaciones.

a)

x	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9
y	5	8	7	6	9	4	5	2	3	1

b) $n = 10$ $\quad \Sigma x = 49 \quad \bar{x} = \dfrac{49}{10} = 4{,}9$

$\Sigma y = 50 \quad \bar{y} = \dfrac{50}{10} = 5$

$\Sigma x^2 = 301 \quad \sigma_x = \sqrt{\dfrac{301}{10} - 4{,}9^2} = 2{,}47$

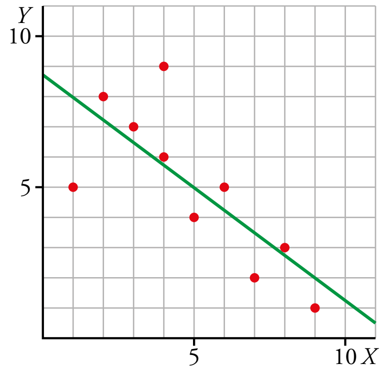
$\Sigma y^2 = 310 \quad \sigma_y = \sqrt{\dfrac{301}{10} - 5^2} = 2{,}45$

$\Sigma xy = 199 \quad \sigma_{xy} = \dfrac{199}{10} - 4{,}9 \cdot 5 = -4{,}6$

$$r = \frac{4{,}6}{2{,}47 \cdot 2{,}45} = -0{,}76$$

c) Recta de regresión de Y sobre X:

$$y = 5 - \frac{4{,}6}{6{,}1}(x - 4{,}9) \rightarrow y = 8{,}675 - 0{,}75x$$



d) $\hat{y}(4{,}5) = 5{,}56$

$\hat{y}(11) = -3{,}04$

$\hat{y}(20) = -14{,}95$

Como $r = 0{,}76$, la estimación para 4,5 la podemos considerar fiable, pero las de 11 y 20, que no están en el intervalo de datos, no se pueden considerar muy fiables.

12 **Piensa y comparte en pareja. [Compartir con el compañero o compañera la toma de decisiones que se deben tomar en este tipo de cálculos permite trabajar esta estrategia].**

Calcula las correlaciones correspondientes a las nubes de puntos que inventaste en el ejercicio 6. Comprueba si las correlaciones obtenidas se parecen a las que pretendías alcanzar.

a) $r = 0{,}97$ b) $r = 0{,}64$ c) $r = 0{,}25$

Para resolver

13 **La siguiente tabla recoge los datos económicos de algunas de las películas más rentables de un año (las cantidades están dadas en millones de euros):**

x: GASTOS	18	15	20	11	10	6	6	14	16	12
y: RECAUDACIÓN	93	83	80	47	46	44	36	34	33	26

a) Calcula el coeficiente de correlación.

b) Halla la recta de regresión de Y sobre X y estima qué recaudación cabe esperar si se invierten 30 millones de euros.

a) $r = 0{,}6$

b) $y = 3{,}05x + 13{,}05$

$\hat{y}(30) = 104{,}55$

Cabe esperar que se recauden 104,55 millones de euros.

14 **Un excursionista, en diez marchas distintas, toma las siguientes medidas:**

x: altura de lugar (en m)

y: presión atmosférica (en mm Hg)

z: número de pulsaciones en reposo

x	0	184	231	481	730	911	1 343	1 550	1 820	2 184
y	760	745	740	720	700	685	650	630	610	580
z	73	78	75	78	83	80	89	80	85	92

Halla el coeficiente de correlación y la recta de regresión para la distribución x-y y para x-z y analiza los resultados.

- x: altura del lugar (en m)

  y: presión atmosférica (en mm Hg)

  $r = -0{,}99$

  Recta de regresión: $y = -0{,}08x + 759$

  Hay casi una relación funcional entre la altura de un lugar y su presión atmosférica. Además, cuando aumenta la altura, disminuye la presión.

- x: altura del lugar (en m)

  z: número de pulsaciones en reposo

  $r = 0{,}85$

  Recta de regresión: $y = 6{,}87x + 74{,}8$

  Hay una correlación fuerte entre la altura de un lugar y el número de pulsaciones, en reposo, de una persona. Además, cuando aumenta la altura, aumentan las pulsaciones en reposo.

15 ODS **Meta 11.7. [Tras el visionado del vídeo el docente puede plantear un debate sobre cuáles son las mejores alternativas de movilidad a los vehículos contaminantes].**

El equipo de gobierno de una gran ciudad ha introducido una tasa para disminuir el tráfico en el centro. La tasa, x, se fijó en 4 €/día el primer año y ha subido 2 €/día cada año. La siguiente tabla muestra la media diaria de vehículos, y, en millones, que entran cada día a la ciudad, durante los ocho primeros años.

x: TASA	4	6	8	10	12	14	16	18
y: N.° DE VEHÍCULOS	2,4	2,5	2,2	2,3	2,0	1,8	1,7	1,5

a) Calcula el coeficiente de correlación y la recta de regresión de Y sobre X.

b) Si el gobierno quiere llegar a reducir el número medio de vehículos diarios a 1 millón, ¿qué tasa se estima que debe imponer? ¿Es fiable esta estimación?

a) $\bar{x} = 11$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1136}{8} - 11^2} = 4,58$$

$\bar{y} = 2,05$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{34,52}{8} - 2,05^2} = 0,335$$

$$\sigma_{xy} = \frac{168,6}{8} - 11 \cdot 2,05 = -1,475$$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-1,475}{4,58 \cdot 0,335} = -0,96$$

Busquemos la recta de regresión de Y sobre X:

$$y = 2,05 + \frac{-1,475}{4,58^2}(x - 11) = 2,05 - 0,07(x - 11)$$

b) Buscamos la recta de regresión de X sobre Y:

$$x = \bar{x} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \bar{y}) = 11 - \frac{1,475}{0,335^2}(y - 2,05) = 11 - 13,14(y - 2,05)$$

$$\hat{x}(1) = 11 - 13,14(1 - 2,05) = 24,8$$

La tasa debe ser de 24,8 euros diarios.

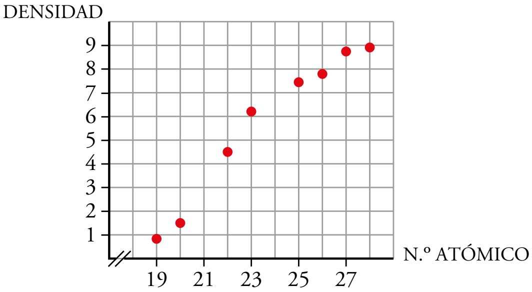
Aunque $|r| = 0,96$ es muy próximo a 1, el valor estudiado no está en el intervalo observado, así que la estimación hay que tomarla con reservas.

16 **La siguiente tabla relaciona el número atómico de varios metales, x, con su densidad, y, en g/cm³:**

ELEMENTO	K	Ca	Ti	V	Mn	Fe	Co	Ni
N.° ATÓMICO	19	20	22	23	25	26	27	28
DENSIDAD	0,86	1,54	4,50	6,11	7,44	7,88	8,86	8,91

a) Representa los puntos, halla el coeficiente de correlación y calcula la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X.

b) Estima la densidad del cromo sabiendo que su número atómico es 24 → Cr (24).

a)


$r = 0{,}98$

$y = -16{,}69 + 0{,}95x$

b) $\hat{y}(24) = 4{,}9$

La densidad del cromo se estima en, aproximadamente, 6,11. Su valor real es 7,1.

Página 248

17 **Esta tabla recoge tres variables sociométricas de doce países:**

a) Halla manualmente el coeficiente de correlación entre las variables x-y y entre las variables x-z.

b) ¿Qué conclusiones sacas de los resultados obtenidos?

c) Comprueba los resultados con la calculadora.

PAÍS	x: RENTA PER CÁPITA ($)	y: ÍNDICE DE NATALIDAD (‰)	z: EXPECTATIVA DE VIDA AL NACER (AÑOS)
A	873	50	49
B	402	48	50
C	536	47	54
D	869	44	57
E	1 171	41	61
F	636	36	64
G	1 417	35	59
H	2 214	31	63
I	1 334	28	63
J	769	26	61
K	1 720	25	64
L	2 560	24	70

a) x: renta per cápita ($).

y: índice de natalidad (‰).

$r = -0{,}68$

La correlación es negativa; es decir, si aumenta la renta per cápita, disminuye el índice de natalidad.

x: renta per cápita ($).

z: expectativa de vida al nacer (años).

$r = 0{,}82$

La correlación es positiva; es decir, si aumenta la renta per cápita, aumenta la expectativa de vida al nacer.

b) La correlación es mayor en valor absoluto en el segundo caso, luego la renta per cápita es más determinante de la expectativa de vida al nacer que del índice de natalidad.

18 **La siguiente tabla muestra el tiempo, x, diario de estudio de matemáticas y la nota, y, en el último examen correspondiente a 8 estudiantes (100 es la nota máxima).**

x	1,5	0,5	2,5	3	0,5	2	5	6,5
y	36	27	40	49	60	40	66	78

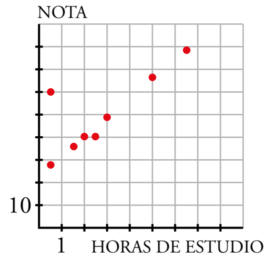
a) Dibuja la correspondiente nube de puntos y calcula el coeficiente de correlación.

b) Identifica en la nube un punto que se sale de la tendencia de los demás en el contexto del problema y no lo tengas en cuenta para calcular el coeficiente de correlación y la recta de regresión de Y sobre X.

c) Si Ana estudió unas 8 horas, ¿qué nota estimas que le corresponderá? Ten en cuenta la recta de regresión que hallaste en el apartado b).

d) Estudia la fiabilidad del resultado del apartado c).

a)



$\bar{x} = 2,69$

$\sigma_x = \sqrt{11,16 - 2,69^2} = 1,98$

$\bar{y} = 49,5$

$\sigma_y = \sqrt{2\,708,25 - 49,5^2} = 16,06$

$\sigma_{xy} = 157,69 - 2,69 \cdot 49,5 = 24,53$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{24,53}{1,98 \cdot 16,06} = 0,77$$

b) Repetimos los cálculos sin tener en cuenta el punto (0,5; 60):

$\bar{x} = 3$

$\sigma_x = 1,93$

$\bar{y} = 48$

$\sigma_y = 16,64$

$\sigma_{xy} = 31,93$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{31,93}{1,93 \cdot 16,64} = 0,994$$

El coeficiente de correlación se acerca mucho a 1 por lo que la correlación una vez eliminado el punto más alejado ha pasado a ser fuerte. Se puede decir que tenemos casi una relación funcional.

La recta de regresión será:

$$y = 48 + \frac{31,93}{1,93^2}(x - 3) \to y = 48 + 8,57\,(x - 3)$$

$$\hat{y}(8) = 48 + 8,57\,(8 - 3) = 90,85$$

Le corresponderán 90,85 puntos.

c) Aunque r es muy cercano a 1, el resultado no se puede considerar muy preciso porque el valor buscado no se encuentra dentro del rango donde teníamos datos.

19 **Elegimos seis automóviles al azar. Su antigüedad, en años, y el número de kilómetros que han rodado, en miles de kilómetros, están relacionados por la siguiente tabla:**

ANTIGÜEDAD	1	2	4	4	5	6	7
KILÓMETROS RECORRIDOS	15	45	32	61	60	132	93

a) Calcula la media y la desviación típica.

b) Calcula el coeficiente de correlación e interprétalo.

c) Si un automóvil tiene tres años, ¿cuántos kilómetros estimas que ha rodado?

d) ¿Y si tiene cinco años? ¿Y diez? Justifica tus respuestas.

x: antigüedad

y: kilómetros recorridos

a) $\bar{x} = 4{,}14$

$\sigma_x = 1{,}96$

$\bar{y} = 62{,}57$

$\sigma_y = 36{,}37$

b) $r = 0{,}81$

Es positiva; es decir, si aumenta la antigüedad, aumentan los kilómetros recorridos. La correlación es fuerte porque r está próximo a 1.

c) Recta de regresión de Y sobre X:

$y = 15{,}1x$

$\hat{y}(3) = 15{,}1 \cdot 3 = 45{,}3 \rightarrow$ Se estima que recorre 45 300 km en 3 años.

$\hat{y}(5) = 15{,}1 \cdot 5 = 75{,}5 \rightarrow$ Se estima que recorre 75 500 km en 5 años.

$\hat{y}(10) = 15{,}1 \cdot 10 = 151 \rightarrow$ Se estima que recorre 151 000 km en 10 años.

Esta última estimación es menos precisa que las anteriores, pues 10 no está en el intervalo [0, 7] del que se tienen los datos.

Cuestiones teóricas

20 Piensa y comparte en pareja. **[El alumnado puede plantear las razones por las que ha llegado a una determinada conclusión tal y como se explica en esta estrategia].**

El coeficiente de correlación de una distribución bidimensional es 0,87. Si los valores de las variables se multiplican por 10, ¿cuál será el coeficiente de correlación de la nueva distribución?

El mismo, puesto que r no depende de las unidades; es adimensional.

21 **[La justificación de la respuesta permite trabajar al alumnado la destreza expresión oral].**

Hemos calculado la covarianza de una cierta distribución y ha resultado negativa. Justifica por qué podemos afrmar que tanto el coeficiente de correlación como las pendientes de las dos rectas de regresión son números negativos.

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Como σ_x y σ_y son positivas, el signo de r es el mismo que el de σ_{xy}, luego si la covarianza es negativa, r también lo es.

$m_{yx} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$, cuyo signo es el mismo que el signo de σ_{xy}.

$m_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$ cuyo signo es el mismo que el signo de σ_{xy}.

Luego si la covarianza es negativa, m_{yx} y m_{xy} son negativas.

22 **¿Qué punto tienen en común las dos rectas de regresión?**

El centro de gravedad de la distribución, $(\bar{x}, \bar{y})$.

23 **¿Qué condición debe cumplir r para que las estimaciones hechas con la regresión sean fiables?**

$|r|$ debe estar próximo a 1.

24 **Prueba que el producto de m_{yx} y $\dfrac{1}{m_{xy}}$ es igual al coeficiente de determinación, r^2.**

Sabemos que $m_{yx} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^{\,2}}$ y $m_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^{\,2}}$:

$$m_{yx} \cdot m_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^{\,2}} \cdot \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^{\,2}} = \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \right)^2 = r^2$$

25 **Sabiendo que m_1 y m_2 son las pendientes de las dos rectas de regresión, expresa en función de ellas el coeficiente de correlación lineal.**

$r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

$m_{yx} \cdot \dfrac{1}{m_{xy}} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \dfrac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = r^2$

Luego $r = \sqrt{m_{yx} \cdot \dfrac{1}{m_{xy}}}$

26 **La estatura media de 100 escolares es de 155 cm con una desviación típica de 15,5 cm.**

La recta de regresión de la estatura respecto al peso es $y = 80 + 1{,}5x$ (x: en kg; y: estatura en cm).

a) ¿Cuál es el peso medio de esos escolares?

b) ¿Cuál es el signo del coeficiente de correlación entre peso y estatura?

a) La recta de regresión pasa por $(\bar{x}, \bar{y})$, luego el peso medio será la solución de la ecuación:

$\bar{y} = 80 + 1{,}5\bar{x} \;\to\; 155 = 80 + 1{,}5\bar{x} \;\to\; \bar{x} = 50$ kg

b) El signo del coeficiente de correlación entre peso y estatura es el mismo que el de la pendiente de la recta de regresión, luego es positivo.

27 **¿Verdadero o falso?**

a) Si la pendiente de la recta de regresión de Y sobre X es 1, la correlación entre las dos variables es muy fuerte.

b) Si la pendiente de la recta de regresión de Y sobre X es negativa, la pendiente de la recta de regresión de X sobre Y también es negativa.

c) En una relación funcional lineal las dos rectas de regresión coinciden.

d) Cuanto más fuerte sea la correlación entre dos variables, mayor es su coeficiente de determinación.

e) En una distribución bidimensional de dos puntos distintos el coeficiente de correlación es 1.

f) Imagina dos nubes de puntos, A y B, con el mismo coeficiente de correlación, 0,98. La distribución A tiene 8 puntos y la B, 100. Si añadimos en cada una un nuevo punto que se separa «mucho» de la recta de regresión, el coeficiente de correlación de A disminuirá mucho más que el de B.

a) Falso. Si la pendiente de la recta de regresión de Y sobre X es 1, sabemos que la covarianza es igual a la varianza de x, pero no que r esté próximo a 1.

b) Verdadero, porque $m_{yx} \cdot \dfrac{1}{m_{xy}} = r^2 > 0$

El producto es un número positivo, luego las dos pendientes tienen que tener el mismo signo.

c) Verdadero. En una relación funcional, $r = 1$.

$r = \sqrt{m_{yx} \cdot \dfrac{1}{m_{xy}}} \;\to\; 1 = m_{yx} \cdot \dfrac{1}{m_{xy}} \;\to\; m_{xy} = m_{yx}$

Como las dos rectas pasan por $(\bar{x}, \bar{y})$ y tienen la misma pendiente, coinciden.

d) Verdadero, porque $0 \le r^2 \le 1$.

Si la correlación es muy fuerte, $|r|$ está próximo a 1, luego r^2 se aproxima a 1.

e) Verdadero, porque la recta pasará por los dos puntos que tenemos. Por dos puntos pasa una única recta, y r será exactamente 1. Se dice que la correlación es perfecta.

f) Verdadero. Añadiendo un punto a una nube de 100 puntos la importancia de este punto queda más disimulada que entre 8 puntos. Cuantos menos puntos tiene una nube, más notoriedad tiene cada punto en ella.

Página 249

Para profundizar

28 **En una autoescuela, cada alumno realiza un total de 80 tests repartidos en 4 tandas de 20. La siguiente tabla relaciona las variables número de la tanda (x) y número de fallos (y):**

Por ejemplo: En la tercera tanda, en 12 de los tests se encontraron de 0 a 3 fallos; en 7, de 4 a 7 fallos…

x \ y	0-3	4-7	8-11	1-15
1	0	4	11	5
2	1	10	7	2
3	12	7	1	0
4	16	4	0	0

a) Calcula manualmente el coeficiente de correlación y halla la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X.

b) ¿Cuántos fallos se estima que tendrá un alumno en la primera tanda? ¿Y en la segunda? ¿Y en la última?

c) Comprueba los resultados con la calculadora.

a)

TANDA = x_i \ FALLOS = y_i	1,5	5,5	9,5	13,5	
1	0	4	11	5	20
2	1	10	7	2	20
3	12	7	1	0	20
4	16	4	0	0	20
	29	25	19	7	80

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
1	20	20	1	20
2	20	40	4	80
3	20	60	9	180
4	20	80	16	320
	80	200		600

$$\bar{x} = \frac{200}{80} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{600}{80} - 2,5^2} = 1,12$$

y_i	f_i	$y_i \cdot f_i$	y_i^2	$y_i^2 \cdot f_i$
1,5	29	43,5	2,25	65,25
5,5	25	137,5	30,25	756,25
9,5	19	180,5	90,25	1 714,75
13,5	7	94,5	182,25	1 275,75
	80	456		3 812

$\bar{y} = \frac{456}{80} = \frac{57}{10} = 5{,}7$

$\sigma_y = \sqrt{\frac{3\,812}{80} - 5{,}7^2} = 3{,}89$

$\Sigma x \cdot y \cdot f = 876$

$\sigma_{xy} = \frac{876}{80} - 2{,}5 \cdot 5{,}7 = -3{,}3$

$r = \frac{-3{,}3}{1{,}12 \cdot 3{,}89} = -0{,}76$

$m_{yx} = \frac{-3{,}3}{1{,}12^2} = -2{,}63$

Recta de regresión de Y sobre X: $y - 5{,}7 = -2{,}63(x - 2{,}5)$

b) $\hat{y}(1) = -2{,}63(1 - 2{,}5) + 5{,}7 = 9{,}645$

Se estima que tendrá entre 9 y 10 fallos en la primera tanda.

$\hat{y}(2) = -2{,}63(2 - 2{,}5) + 5{,}7 = 7{,}015$

Se estima que tendrá 7 fallos en la segunda tanda.

$\hat{y}(4) = -2{,}63(4 - 2{,}5) + 5{,}7 = 1{,}755$

Se estima que tendrá entre 1 y 2 fallos en la cuarta tanda, más veces 2 fallos que 1.

29 En un estudio realizado a los trabajadores de una cadena de fabricación de piezas de coches sobre su productividad quincenal, se relacionan las horas trabajadas (x) con las unidades producidas (y).

Sabemos que:

- **La recta de regresión de Y sobre X es:**

  $y = 3{,}47x + 32{,}01$

- **La recta de regresión de X sobre Y es:**

  $y = 3{,}81x + 5{,}36$

- **El intervalo de horas empleadas por los trabajadores es [60, 85].**

a) Halla $\bar{x}$, $\bar{y}$ y el coeficiente de correlación.

b) Si un operario trabaja 70 horas en una quincena, ¿cuántas unidades se estima que produzca? ¿Cómo de fiable es esta estimación? ¿Y si trabaja en total 40 horas? ¿Y si fueran 120 horas?

c) Si un empleado esta quincena ha llegado a producir 300 piezas, ¿cuántas horas se estima que ha trabajado?

a) $(\bar{x}, \bar{y})$ es el punto de corte de las dos rectas de regresión:

$$\left.\begin{cases} y = 3{,}47x + 32{,}01 \\ y = 3{,}81x + 5{,}36 \end{cases}\right\} \rightarrow \bar{x} = 78{,}38; \ \bar{y} = 304$$

$r^2 = \frac{m_{yx}}{m_{xy}} = \frac{3{,}47}{3{,}81} = 0{,}91 \rightarrow r = \sqrt{0{,}91} = 0{,}95394$

b) $\hat{y}(70) = 3,47 \cdot 70 + 32,01 = 274,91$

Se estima que el operario produzca unas 275 unidades trabajando 70 horas.

Como r es muy próximo a 1 y, además, 70 está en el intervalo de horas empleadas, la estimación es muy fiable.

$\hat{y}(40) = 3,47 \cdot 40 + 32,01 = 170,81$

Se estima que el operario produzca casi 171 unidades trabajando 40 horas. Esta estimación no es tan fiable como la anterior porque $40 \notin [60, 85]$.

$\hat{y}(120) = 3,47 \cdot 120 + 32,01 = 448,41$

Se estima que el operario produzca alrededor de 448 unidades trabajando 120 horas. Esta estimación no es muy fiable porque $120 \notin [60, 85]$.

c) $300 = 3,81x + 5,36 \rightarrow x = 77,33$

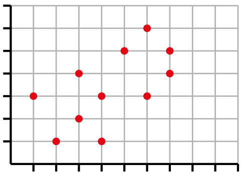
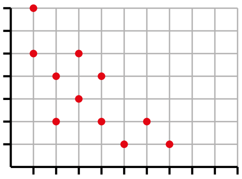
Se estima que ha trabajado entre 77 y 78 horas.

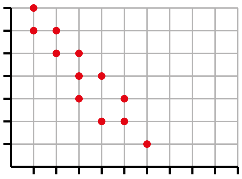
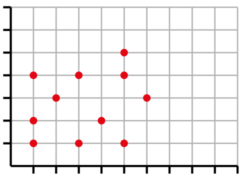
AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 4.2. (EA 4.1.1.-EA 4.1.2.-EA 4.1.3.-EA 4.1.4.)

Página 249

1 Observa estas distribuciones bidimensionales:

a)  b) 

c)  d) 

Asigna razonadamente uno de los siguientes coeficientes de correlación a cada gráfica:

0,2 –0,9 –0,7 0,6

La correlación de a) es positiva, y las de b) y c), negativas. En d) no se aprecia correlación. La correlación de c) es más fuerte que la de b). Por tanto:

a) $\to$ 0,6 b) $\to$ –0,7 c) $\to$ –0,9 d) $\to$ 0,2

2 Representa esta distribución bidimensional:

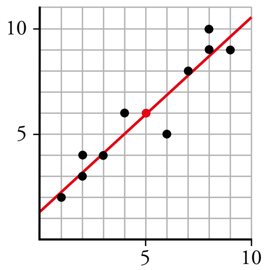
x	1	2	2	3	4	6	7	8	8	9
y	2	4	3	4	6	5	8	9	10	9

a) Calcula los parámetros $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x, σ_y y σ_{xy}.

b) Halla el coeficiente de correlación.

c) Halla la recta de regresión de Y sobre X.

d) Estima el valor de y para $x = 5$ y para $x = 10$. ¿Son «buenas» estas estimaciones?



a) $\bar{x} = 5$, $\bar{y} = 6$

$\sigma_x = 2{,}8$; $\sigma_y = 2{,}7$; $\sigma_{xy} = 7{,}1$

b) $r = 0{,}95$

c) $y = 0{,}91x + 1{,}45$

d) $\hat{y}(5) = 6$; $\hat{y}(10) = 10{,}55$

Las estimaciones son muy fiables porque $r = 0{,}95$ es un valor muy alto. Si se tratase de «notas» (de 0 a 10), la segunda estimación habría que «hacerla real» y darle el valor 10.

3 **La recta de regresión de Y sobre X de una distribución bidimensional es $y = 1{,}6x - 3$. Sabemos que $\bar{x} = 10$ y $r = 0{,}8$.**

a) Calcula $\bar{y}$.

b) Estima el valor de y para $x = 12$ y para $x = 50$. ¿Qué estimación te parece más fiable?

c) Halla la recta de regresión de X sobre Y.

a) Puesto que la recta pasa por $(\bar{x}, \bar{y})$:

$\bar{y} = 1{,}6\bar{x} - 3 = 1{,}6 \cdot 10 - 3 = 13$

b) $\hat{y}(12) = 1{,}6 \cdot 12 - 3 = 16{,}2$

$\hat{y}(50) = 1{,}6 \cdot 50 - 3 = 77$

La primera estimación es aceptable por ser 12 próximo a $\bar{x} = 10$ (carecemos de información sobre los valores que toma x). La segunda estimación es muy poco significativa, pues 50 se separa demasiado de $\bar{x}$.

c) Conociendo $r = 0{,}8$ y el coeficiente de regresión de Y sobre X (pendiente de la recta), 1,6:

(Coef. Y sobre X) · (Coef. X sobre Y) = r^2

Coef. X sobre $Y = \dfrac{0{,}8^2}{1{,}6} = 0{,}4$

Por tanto, la pendiente de la recta de regresión de X sobre Y es $m_{xy} = \dfrac{1}{0{,}4} = 2{,}5$.

Ecuación de la recta de regresión de X sobre Y: $y = 6 + 2{,}5(x - 5)$

4 **El *consumo mensual de energía per cápita*, y, en miles de kWh, y la *renta per cápita*, x, en miles de euros, de seis países son:**

	A	B	C	D	E	F
x	11,1	8,5	11,3	4,5	9,9	6,5
y	5,7	5,0	5,1	2,7	4,6	3,1

a) Calcula la recta de regresión de Y sobre X.

b) Halla el coeficiente de correlación entre el consumo y la renta.

c) ¿Qué predicción podemos hacer sobre el consumo de energía per cápita de un país cuya renta per cápita es de 4 400 €? (Recuerda que en la tabla se da la renta en miles de euros.)

d) Estima la *renta per cápita* que tendrá un país en el cual el *consumo de energía per cápita* ha sido de 9 000 kWh.

e) ¿Cómo de fiables son estas estimaciones?

$\bar{x} = 8{,}63$; $\bar{y} = 4{,}37$

$\sigma_x = 2{,}46$, $\sigma_y = 1{,}09$, $\sigma_{xy} = 2{,}51$

a) Recta de regresión de Y sobre X: $y = 4{,}37 + \dfrac{2{,}51}{2{,}46^2}(x - 8{,}63) \rightarrow y = 0{,}80 + 0{,}41x$

b) Coeficiente de correlación: $r = \dfrac{2{,}51}{1{,}09 \cdot 2{,}46} = 0{,}93$

c) Para $x = 4{,}4$ estimamos el valor de y: $\hat{y}(4{,}4) = 0{,}79 + 0{,}41 \cdot 4{,}4 = 2{,}59$

Se le estima un consumo de energía de 2,59 miles de kWh por habitante.

d) $9 = 0{,}80 + 0{,}41\hat{x}(9) \rightarrow \hat{x}(9) = 20 \rightarrow$ Se estima una renta per cápita de 20 000 €.

e) En la primera estimación (apartado c), el valor $x = 4{,}4$ es próximo a los valores de la tabla. Como el coeficiente de correlación es alto (0,93), la estimación es razonablemente fiable. En la segunda estimación (apartado d), el valor $y = 9$ es lejano a los de la tabla. Por tanto, la estimación es poco fiable.

9 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE DISCRETA

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.-EA 1.3.3.) CE 1.4. (EA 1.4.1.-EA 1.4.2.) CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.) CE 1.8.1. (EA 1.8.1.) CE 1.13. (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.)

Página 251

Resuelve

[El estudio del aparato de Galton requiere que el alumnado trabaje la iniciativa (dimensión productiva de esta clave)].

¿Por qué las casillas centrales del aparato de Galton están más llenas que las extremas?

Para explicarlo, sigamos el camino recorrido por un perdigón: en su trayectoria encuentra 7 bifurcaciones y, en cada una de ellas, tiene la misma probabilidad $\left(\frac{1}{2}\right)$ de ir hacia la izquierda o hacia la derecha.

- **Imita el recorrido de un perdigón lanzando una moneda 7 veces y haciendo la asignación CARA → derecha, CRUZ → izquierda.**

  Por ejemplo, si obtienes:

  C C C + C + C

  ¿cuál sería el itinerario correspondiente? Repite la experiencia y obtén otros recorridos distintos.

- **Intenta encontrar una ley que asocie el número de caras de la serie, cualquiera que sea el orden en que salen al lanzar la moneda, con el casillero en el que cae el perdigón.**

- **¿Se podría repetir la experiencia tirando 7 monedas simultáneamente y anotando solo el número de caras?**

  Intenta ahora explicar la razón por la que hay más perdigones en las casillas centrales que en las extremas.

- Derecha, derecha, derecha, izquierda, derecha, izquierda, derecha.

- Si numeramos las casillas de la última fila del 1 al 8, contando de izquierda a derecha, tendríamos:

N.° DE CARAS	0	1	2	3	4	5	6	7
CASILLA	1	2	3	4	5	6	7	8

- Sí se podría, porque el lugar en el que cae el perdigón depende solo del número de caras y no del orden en el que aparecen las caras o las cruces, en el caso de que se lanzara una única moneda.

  En las casillas centrales hay más perdigones porque existen muchas más posibilidades de caer en ellas que en las de los extremos. Por ejemplo:

  Solo la secuencia + + + + + + + llevaría el perdigón a la primera casilla o solo la secuencia C C C C C C C lo llevaría a la octava casilla.

  Para ir a la segunda hay 7 posibilidades: C + + + + + + y las restantes seis en las que cambiamos de posición la cara dentro de la secuencia. El número de posibilidades es $\binom{7}{1} = 7$.

  Para caer en la cuarta, de los 7 lanzamientos, 3 serían cara. Luego el número de posibilidades es $\binom{7}{3} = 35$.

  Usando los números combinatorios se pueden estudiar los casos restantes de una manera análoga.

1 CÁLCULO DE PROBABILIDADES

C.E.: CE 4.3. (EA 4.3.1.-EA 4.3.2.)

Página 254

1 Lanzamos dos monedas. Calcula:

a) P**[dos C]** **b)** P**[dos +]** **c)** P**[una C y una +]**

Experimento compuesto independiente.

a) $P[\text{Cara y Cara}] = P[\text{Cara}] \cdot P[\text{Cara}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) $P[\text{Cruz y Cruz}] = P[\text{Cruz}] \cdot P[\text{Cruz}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

c) $P[\text{Cara y Cruz}] = P[1.^{\text{a}} \text{ Cara}] \cdot P[2.^{\text{a}} \text{ Cruz}] + P[1.^{\text{a}} \text{ Cruz}] \cdot P[2.^{\text{a}} \text{ Cara}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

2 Lanzamos tres monedas. Calcula:

a) P**[C en 1.ª, + en 2.ª y C en 3.ª]** **b)** P**[dos C]**

Experimento compuesto independiente.

a) $P[1.^{\text{a}} \text{ C}, 2.^{\text{a}} +, 3.^{\text{a}} \text{ C}] = P[1.^{\text{a}} \text{ C}] \cdot P[2.^{\text{a}} +] \cdot P[3.^{\text{a}} \text{ C}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) Hay $\binom{3}{2} = 3$ formas de obtener dos caras y una cruz.

$P[\text{dos C}] = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

3 Lanzamos cuatro monedas. Calcula:

a) P**[tres C y una +]** **b)** P**[dos C y dos +]**

Experimento compuesto independiente.

a) Hay $\binom{4}{3} = 4$ formas de obtener tres caras y una cruz.

$P[\text{tres C y una +}] = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) Hay $\binom{4}{2} = 6$ formas de obtener dos caras y dos cruces.

$P[\text{dos C y dos +}] = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

4 Lanzamos cuatro dados. Calcula:

a) P**[tres PAR y un 5]** **b)** P**[un 1, un 3, un 5 y un PAR]**

Experimento compuesto independiente.

a) Hay $\binom{4}{3}$ formas de obtener tres pares y un 5: $\binom{4}{3} = 4$

$P[\text{tres PAR y un 5}] = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

b) Hay 4! formas de obtener un 1, un 3, un 5 y un PAR: 4! = 24

$P[\text{un 1, un 3, un 5 y un PAR}] = 24 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$

Página 255

5 Extraemos tres naipes de una baraja de 40. Calcula:

a) $\boldsymbol{P}$**[tres ASES]** **b)** $\boldsymbol{P}$**[un AS, un CABALLO y un REY]**

Experimento compuesto dependiente.

a) $P[3 \text{ ASES}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2470}$

b) Hay 3! formas de obtener un AS, un CABALLO y un REY: $3! = 6$

$P[\text{un AS, un CABALLO y un REY}] = 6 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} = \frac{8}{1235}$

6 Extraemos tres bolas de la urna descrita arriba. Calcula:

a) $\boldsymbol{P}$**[alguna de ellas sea la negra]** **b)** $\boldsymbol{P}$**[la negra y alguna roja]**

Experimento compuesto dependiente.

a) $P[\text{alguna de ellas sea la negra}] = 1 - P[\text{ninguna negra}] = 1 - \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$

b) Hay 9 formas de conseguir la negra y alguna roja:

	Probabilidad
NRR	$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{20}$
NRV	$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{20}$
NVR	$\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{20}$
RNR	$\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{20}$
RNV	$\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{20}$
RRN	$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$
RVN	$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$
VNR	$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{20}$
VRN	$\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

$P[\text{la negra y alguna roja}] = 9 \cdot \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$

3 ▶ DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE DISCRETA

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.-EA 1.3.3.) CE 4.3. (EA 4.3.1.-EA 4.3.2.)

Página 258

1 **[La justificación de la decisión sobre la veracidad de las afirmaciones permite trabajar la destreza expresión oral de esta clave].**

¿Verdadero o falso? Ninguna de las siguientes distribuciones de probabilidad está definida correctamente:

a)

x_i	a	b	c
p_i	0,3	0,4	0,2

Porque $\sum p_i \neq 1$.

b)

x_i	a	b	c	d
p_i	0,3	0,4	0,5	–0,2

Porque una de las probabilidades es negativa.

a) Verdadero. Las probabilidades en una distribución de probabilidad tienen que sumar 1.

b) Verdadero. Una probabilidad nunca puede ser negativa.

Página 259

2 **Halla la media y la desviación típica de la distribución correspondiente a la puntuación obtenida al lanzar un dado.**

$$\mu = \frac{7}{2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = 1{,}71$$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
1	1/6	1/6	1/6
2	1/6	1/3	2/3
3	1/6	1/2	3/2
4	1/6	2/3	8/3
5	1/6	5/6	25/6
6	1/6	1	6
TOTAL	1	7/2	91/6

3 **[El cálculo de los parámetros requiere que el alumnado trabaje la iniciativa (dimensión productiva de esta clave)].**

Si se tiran dos monedas, podemos obtener 0, 1 o 2 caras. Calcula la media y la desviación típica de la distribución de probabilidad correspondiente.

$$\mu = 1$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{2} - 1^2} = 0{,}71$$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	1/4	0	0
1	1/2	1/2	1/2
2	1/4	1/2	1
TOTAL	1	1	3/2

4 En una bolsa tenemos bolas numeradas:

9 bolas con un *uno*, 5 con un *dos* y 6 con un *tres*

Sacamos una bola al azar y vemos qué número tiene.

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad?

b) Calcula la media y la desviación típica.

a)

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
1	9/20	9/20	9/20
2	5/20	10/20	20/20
3	6/20	18/20	54/20
TOTAL	1	37/20	83/20

b) $\mu = \dfrac{37}{20} = 1{,}85$

$$\sigma = \sqrt{\frac{83}{20} - \left(\frac{37}{20}\right)^2} = 0{,}85$$

4 LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.-EA 1.3.3.) CE 1.4. (EA 1.4.1.-EA 1.4.2.) CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.)

Página 261

1 ¿Qué valores puede tomar la variable x en cada distribución de los ejemplos 1, 2, 3, 5 y 7 anteriores?

1. x_i = n.º de caras.

   $x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

2. x_i = n.º de cincos.

   $x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

3. x_i = n.º de chinchetas con la punta hacia arriba.

   $x_i = 0, 1, 2, \ldots, 100$

5. x_i = n.º de figuras.

   $x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

7. x_i = n.º de tornillos defectuosos.

   $x_i = 0, 1, 2, \ldots, 100$

2 Inventa experiencias parecidas a las de los ejemplos 4 y 6, pero que sí sean binomiales.

4. Extraemos una carta de una baraja, observamos si es o no un AS y la devolvemos al mazo. Barajamos y extraemos otra carta. Repetimos la experiencia cinco veces.

   $n = 5;\ p = 0{,}01 \ \to\ B(5; 0{,}01)$

6. Nos preguntamos en cuántos partidos elegirá campo el Betis al principio del partido en sus próximos diez encuentros.

   $n = 10;\ p = 0{,}5 \ \to\ B(10; 0{,}5)$

5 CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

C.E.: CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.) CE 1.7. (EA 1.7.1.-EA 1.7.2.-EA 1.7.3.-EA 1.7.4.-EA 1.7.5.) CE 1.8. (EA 1.8.1.) CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.)

Página 263

Hazlo tú

1 **En una binomial $B(12; 0{,}25)$, calcula $P[x = 0]$, $P[x \neq 0]$, $P[x = 3]$, así como los parámetros μ y σ.**

$P[x = 0] = 0{,}75^{12} = 0{,}032$

$P[x \neq 0] = 1 - P[x = 0] = 0{,}968$

$P[x = 3] = \binom{12}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^9 = 220 \cdot 0{,}016 \cdot 0{,}075 = 0{,}264$

$\mu = 12 \cdot 0{,}25 = 3$

$\sigma = \sqrt{12 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = 1{,}5$

2 **Resolver el mismo problema suponiendo que solo el 2 % de las bombillas son defectuosas.**

$n = 100 \quad p = 0{,}002 \quad q = 0{,}998$

a) P [ninguna defectuosa] $= P[x = 0] = \binom{100}{0} \cdot 0{,}002^0 \cdot 0{,}998^{100} = 0{,}819$

b) P [alguna defectuosa] $= 1 - P[x = 0] = 0{,}181$

c) P [dos defectuosas] $= \binom{100}{2} \cdot 0{,}002^2 \cdot 0{,}998^{98} = 0{,}016$

Piensa y practica

1 **En una distribución binomial $B(10; 0{,}4)$, halla $P[x = 0]$, $P[x = 3]$, $P[x = 5]$, $P[x = 10]$.**

Calcula el valor de cada uno de los parámetros μ y σ.

$P[x = 0] = 0{,}6^{10} = 0{,}006047$

$P[x = 3] = \binom{10}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 = 120 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 = 0{,}215$

$P[x = 5] = \binom{10}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^5 = 252 \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}201$

$P[x = 10] = 0{,}4^{10} = 0{,}000105$

$\mu = 10 \cdot 0{,}4 = 4$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{2{,}4} = 1{,}55$

2 **Lanzamos 7 monedas. Calcula las probabilidades de 3 caras, 5 caras y 6 caras.**

Halla los valores de μ y σ.

Se trata de una distribución binomial con $n = 7$ y $p = 0,5 \rightarrow B(7; 0,5)$

$P[x = 3] = \binom{7}{3} \cdot (0,5)^3 \cdot (0,5)^4 = 35 \cdot 0,125 \cdot 0,0625 \approx 0,273$

$P[x = 5] = \binom{7}{5} \cdot (0,5)^5 \cdot (0,5)^2 = 21 \cdot 0,03125 \cdot 0,25 \approx 0,164$

$P[x = 6] = \binom{7}{6} \cdot (0,5)^6 \cdot (0,5) = 7 \cdot 0,015625 \cdot 0,5 \approx 0,0547$

$\mu = n \cdot p = 7 \cdot 0,5 = 3,5$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{7 \cdot 0,5 \cdot 0,5} \approx 1,323$

6 AJUSTE DE UN CONJUNTO DE DATOS A UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) CE 1.3. (EA 1.3.3.) CE 1.4. (EA 1.4.1.-EA 1.4.2.) CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.) CE 1.7. (EA 1.7.1.-EA 1.7.2.-EA 1.7.3.-EA 1.7.4.-EA 1.7.5.) CE 1.8. (EA 1.8.1.) CE 1.13. (EA 1.13.1-EA 1.13.2.) CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.)

Página 265

1 Cabezas pensantes. **[Antes de decidir sobre el ajuste de los datos, el alumnado podrá compartir en pequeños grupos las cuestiones a tomar en cuenta para tomar la decisión].**

Un profesor de idiomas tiene una clase con cuatro alumnos adultos. De los 100 días de clase, asisten 4, 3, 2, 1 o ninguno de ellos, según la tabla adjunta. Ajusta los datos a una distribución binomial y di si te parece que el ajuste es bueno o no.

x_i	4	3	2	1	0
f_i	23	48	17	9	3

La media es $\bar{x} = 2{,}79$.

Como $n = 4$, $\bar{x} = np \to 2{,}79 = 4p \to p = 0{,}6975$

Si fuera una binomial, $p = 0{,}6975$ sería la probabilidad de que uno cualquiera de los alumnos asistiera un día a clase. $q = 0{,}3025$.

Con este valor de p se obtiene la siguiente tabla:

x_i	$p_i = P[x = x_i]$	$100 \cdot p_i$	VALORES ESPERADOS	VALORES OBSERVADOS	|DIFERENCIAS|
0	$q^4 = 0{,}008$	0,8	1	3	2
1	$4\,p\,q^3 = 0{,}077$	7,7	8	9	1
2	$6\,p^2\,q^2 = 0{,}267$	26,7	27	17	10
3	$4\,p^3\,q = 0{,}411$	41,1	41	48	7
4	$p^4 = 0{,}237$	23,7	24	23	1

La mayor de las diferencias es 10. Es demasiado grande en comparación con el total, 100. Hemos de rechazar la hipótesis de que se trata de una binomial.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

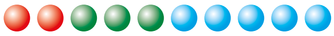
C.E.: CE 1.7. (EA 1.7.1.-EA 1.7.2.-EA 1.7.3.-EA 1.7.4.-EA 1.7.5.) **CE 1.8.** (EA 1.8.1.) **CE 4.4.** (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.)

Página 266

1. Cálculo de probabilidades compuestas

Hazlo tú

- **Realiza la misma actividad suponiendo que en la urna hay estas bolas:**



a) $P[1\text{R y } 2\text{V}] = \frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{20}$

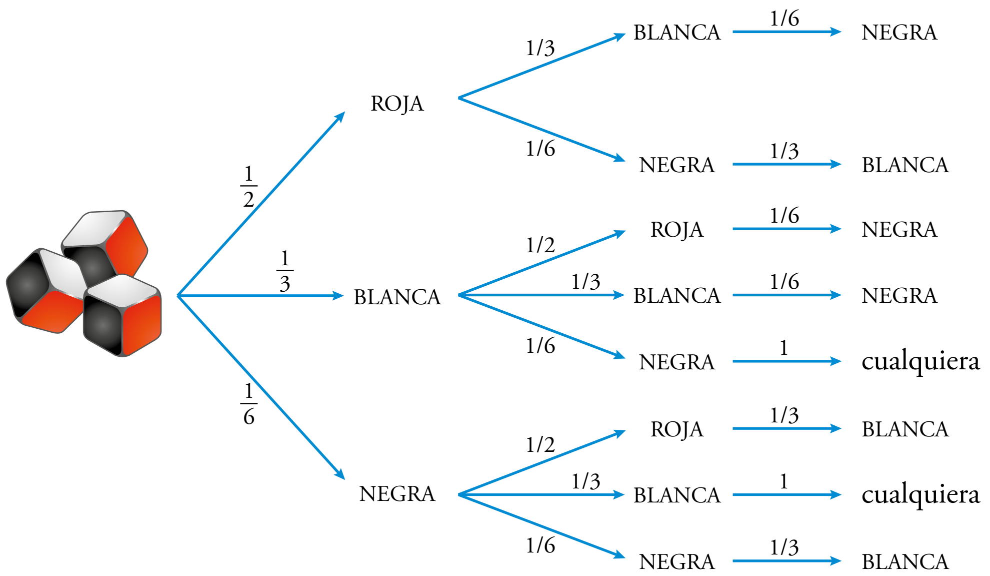
b) $P[\text{R, A, V}] = 6\cdot P[1.^{\text{a}}\text{ R}, 2.^{\text{a}}\text{ A}, 3.^{\text{a}}\text{ V}] = 6\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$

2. Cálculo de probabilidades. Diagrama en árbol

Hazlo tú

- **Un dado tiene 3 caras rojas, 2 blancas y 1 negra. Lanzamos tres dados con esas características. ¿Qué probabilidad hay de obtener alguna cara blanca y alguna negra?**

Construimos un diagrama en *árbol:*



$$P[\text{alguna blanca y alguna negra}] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+$$
$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

3. Distribución de probabilidad de variable discreta

Hazlo tú

- **En un dado irregular,**

$$P[1] = P[2] = P[3] = 0{,}1 \quad \text{y} \quad P[4] = P[5] = 0{,}2$$

Averigua $P[6]$ y el valor de μ y σ.

$P[6] = 1 - P[1] - P[2] - P[3] - P[4] - P[5] = 1 - 3 \cdot 0{,}1 - 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}3$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
1	0,1	0,1	0,1
2	0,1	0,2	0,4
3	0,1	0,3	0,9
4	0,2	0,8	3,2
5	0,2	1	5
6	0,3	1,8	10,8
TOTAL	1	4,2	20,4

$\mu = 4{,}2$

$\sigma = \sqrt{20{,}4 - 4{,}2^2} = 1{,}66$

Página 267

4. Distribución binomial

Hazlo tú

- **Si Alberto tuviera una probabilidad de 0,93 de encestar un triple, ¿qué probabilidad tendría de ganar a Raquel?**

Se trata de una binomial $B(15; 0{,}93)$.

$P[x > 13] = P[x = 14] + P[x = 15]$

$P[x = 14] = \binom{15}{14} \cdot 0{,}93^{14} \cdot 0{,}07 = 0{,}0253$

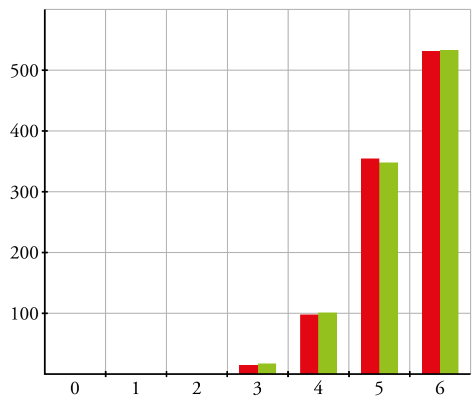
$P[x = 15] = 0{,}93^{15} = 0{,}3367$

$P[x > 13] = P[x = 14] + P[x = 15] = 0{,}0253 + 0{,}3367 = 0{,}36$

5. Ajuste a la binomial

Hazlo tú

- **Dibuja en rojo el diagrama de barras con los valores empíricos (observados) y en verde, sobre el anterior, el diagrama de barras con los valores teóricos.**



EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.) **CE 1.7.** (EA 1.7.1.-EA 1.7.2.-EA 1.7.3.-EA 1.7.4.-EA 1.7.5.) **CE 1.8.** (EA 1.8.1.)

Página 268

1. Cálculo de probabilidades y distribución de probabilidad

En una urna hay 12 bolas blancas, 8 rojas, 3 verdes y 1 amarilla. Se toman tres bolas al azar y se anota el número de ellas que son blancas.

a) Hacer una tabla con la distribución de probabilidad.

b) ¿La distribución de probabilidad anterior nos permite calcular la probabilidad de que las tres bolas extraídas sean verdes? ¿Por qué?

c) Calcular la probabilidad de que al menos dos bolas sean blancas.

a) $P[0 \text{ BLANCAS}] = \dfrac{12}{24} \cdot \dfrac{11}{23} \cdot \dfrac{10}{22} = \dfrac{5}{46}$

$P[1 \text{ BLANCA}] = \dfrac{12}{24} \cdot \dfrac{12}{23} \cdot \dfrac{11}{22} + \dfrac{12}{24} \cdot \dfrac{12}{23} \cdot \dfrac{11}{22} + \dfrac{12}{24} \cdot \dfrac{11}{23} \cdot \dfrac{12}{22} = \dfrac{9}{23}$

$P[2 \text{ BLANCAS}] = 3 \cdot \dfrac{12}{24} \cdot \dfrac{12}{23} \cdot \dfrac{11}{22} = \dfrac{9}{23}$

$P[3 \text{ BLANCAS}] = \dfrac{12}{24} \cdot \dfrac{11}{23} \cdot \dfrac{10}{22} = \dfrac{5}{46}$

b) No, porque solo tenemos conocimiento de si la bola es blanca o no.

c) $P[\text{al menos dos sean BLANCAS}] = P[2 \text{ BLANCAS}] + P[3 \text{ BLANCAS}] = \dfrac{9}{23} + \dfrac{5}{46} = \dfrac{1}{2}$

2. Binomial

Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con cuatro respuestas, de las cuales solo una es correcta. Si un alumno contesta al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente 4 preguntas?

b) ¿Y la de que conteste bien más de 2 preguntas?

c) Calcular la probabilidad de que conteste mal alguna pregunta.

Es binomial: Se repite 10 veces la misma experiencia, que es contestar una pregunta. Es independiente porque todas las preguntas tienen el mismo número de respuestas posibles y se responden al azar.

$x \to$ número de respuestas acertadas.

Es una binomial $n = 10,\ p = \dfrac{1}{4} \to B(10, 1/4)$

a) $P[x = 4] = \binom{10}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^4\left(\dfrac{3}{4}\right)^6 = 0{,}146$

b) $P[x > 2] = 1 - P[x \le 2] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2])$

$P[x = 0] = \binom{10}{0}\left(\dfrac{1}{4}\right)^0\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10} = 0{,}0563$

$P[x = 1] = \binom{10}{1}\left(\dfrac{1}{4}\right)^1\left(\dfrac{3}{4}\right)^9 = 0{,}18771$

$P[x = 2] = \binom{10}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^8 = 0{,}28157$

$P[x > 2] = 1 - (0{,}0563 + 0{,}18771 + 0{,}28157) = 0{,}47$

c) $P[x \le 9] = 1 - P[x = 10]$

$$P[x = 10] = \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{0} = 0{,}000000953$$

$P[x \le 9] = 1 - 0{,}000000953 = 0{,}999999046$

3. Binomial

En una familia con 6 hijos e hijas, ¿cuál de estas dos opciones es más probable?

- **Que haya tantas chicas como chicos.**
- **Que haya más chicas que chicos.**

$x \to$ número de chicas

- Tantas chicas como chicos $\to$ $P[x = 3] = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{5}{16}$
- Más chicas que chicos $\to$ $P[x > 3] = P[x = 4] + P[x = 5] + P[x = 6]$

$$P[x = 4] = \binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{15}{64}$$

$$P[x = 5] = \binom{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{32}$$

$$P[x = 6] = \binom{6}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \frac{1}{64}$$

$$P[x > 3] = \frac{15}{64} + \frac{3}{32} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32}$$

Por tanto, es más probable que haya más chicas que chicos.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 269

Para practicar

Cálculo de probabilidades

1 **Lanzamos tres monedas. Calcula la probabilidad de que:**

a) Las tres sean cara.

b) Se obtengan dos caras y una cruz.

c) Haya al menos una cara.

a) $P[3 \text{ caras}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) $P[2 \text{ caras y } 1 \text{ cruz}] = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

c) $P[\text{al menos } 1 \text{ cara}] = 1 - P[3 \text{ cruces}] = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$

2 **a) En un juego de dominó, tenemos sobre la mesa la ficha 3-5. ¿Qué probabilidad hay de que otra extraída al azar engrane con ella?**

b) ¿Y si tuviésemos la 5-5?

a) Sin contar la que está sobre la mesa, hay 6 fichas más con un 3 y 6 fichas más con un 5 y quedan 27 fichas.

$P[\text{salga } 3 \text{ o } 5] = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$

b) $P[\text{salga } 5] = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$

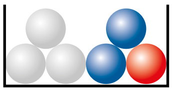
3 Comprobamos. **[Antes de corregir el ejercicio en clase, el alumnado puede compartir sus conclusiones y aportar las estrategias que ha seguido para su resolución].**

Extraemos tres bolas con reemplazamiento de esta urna. Calcula la probabilidad de que:

a) Cada una sea de un color.

b) No haya ninguna blanca.

c) Se obtengan dos azules.



Repite la actividad si la extracción fuera sin reemplazamiento.

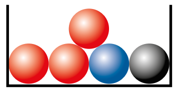
Con reemplazamiento:

a) $P[\text{R, B, A}] = 3! \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

b) $P[\text{ninguna BLANCA}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

c) $P[2\text{A}] = P[\text{R, 2A}] + P[\text{B, 2A}] = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{9}$

Sin reemplazamiento:



a) $P[\text{R, B, A}] = 3! \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

b) $P[\text{R, 2A}] = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

c) $P[\text{2A}] = P[\text{R, 2A}] + P[\text{B, 2A}] = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$

4 Parada de 5 minutos. **[La reflexión por parejas que plantea esta técnica puede ser una buena forma de que el alumnado coopere para calcular las probabilidades].**

Extraemos dos bolas de la siguiente urna:

a) ¿Qué es más probable, sacar dos bolas rojas con o sin reemplazamiento?

b) ¿Qué es más probable, sacar una bola roja y otra azul con o sin reemplazamiento?

a) Con reemplazamiento: $P[\text{2R}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = 0{,}36$

Sin reemplazamiento: $P[\text{2R}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

Es más probable con reemplazamiento.

b) Con reemplazamiento: $P[\text{R, A}] = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{25} = 0{,}24$

Sin reemplazamiento: $P[\text{R, A}] = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

Es más probable sin reemplazamiento.

Distribuciones de probabilidad

5 **Completa la siguiente tabla de probabilidades y calcula sus parámetros μ y σ:**

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3	…	0,1

$0{,}1 + 0{,}3 + P[2] + 0{,}1 = 1 \;\rightarrow\; P[2] = 0{,}5$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	0,1	0	0
1	0,3	0,3	0,3
2	0,5	1	2
3	0,1	0,3	0,9
		$\sum x_i p_i = 1{,}6$	$\sum p_i x_i^2 = 3{,}2$

$\mu = \sum x_i p_i = 1{,}6$

$\sigma = \sqrt{3{,}2 - 1{,}6^2} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$

6 **En una urna hay diez bolas con los números 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 6. Sacamos una bola y anotamos el resultado. Elabora la distribución de probabilidad y calcula μ y σ.**

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
1	0,20	0,20	0,20
2	0,10	0,20	0,40
3	0,30	0,90	2,70
4	0,10	0,40	1,60
5	0,20	1,00	5,00
6	0,10	0,60	3,60
TOTAL	1	3,3	13,50

$\mu = 3,3$

$\sigma = \sqrt{13,5 - 3,3^2} = 1,6$

7 **Tenemos dos monedas, una correcta y otra defectuosa en la que la probabilidad de obtener cruz es 0,2. Las lanzamos y anotamos el número de cruces.**

Haz una tabla con la distribución de probabilidad y halla la probabilidad de obtener al menos una cruz.

$x \to$ número de cruces

$P[x = 0] = 0,5 \cdot 0,8 = 0,4$

$P[x = 1] = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,2 = 0,5$

$P[x = 2] = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$

$P[x \geq 1] = P[x = 1] + P[x = 2] = 0,5 + 0,1 = 0,6$

x_i	p_i
0	0,4
1	0,5
2	0,1

8 **Extraemos con reemplazamiento dos cartas de una baraja y anotamos el número de ases.**

a) ¿Cuáles son los posibles resultados?

b) ¿Cuál es la distribución de probabilidad?

c) Calcula la media y la desviación típica.

a) $x \to$ número de ases

$x = 0, 1, 2$

b) $P[x = 0] = \frac{36}{40} \cdot \frac{36}{40} = \frac{81}{100} = 0,81$

$P[x = 1] = 2 \cdot \left(\frac{4}{40} \cdot \frac{36}{40}\right) = \frac{9}{50} = 0,18$

$P[x = 2] = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = 0,01$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	0,81	0,00	0,00
1	0,18	0,18	0,18
2	0,01	0,02	0,04
TOTAL	1	0,20	0,22

c) $\mu = 0,2$

$\sigma = \sqrt{0,22 - 0,2^2} = 0,42$

Distribución binomial

9 **Reconoce en cada uno de los siguientes casos una distribución binomial y di los valores de n, p, q, μ y σ.**

a) Un examen tipo test consta de 50 preguntas, cada una con tres respuestas, de las que solo una es correcta. Se responde al azar. ¿Cuál es el número de preguntas acertadas?

b) En el examen descrito en el apartado anterior, un alumno o alumna conoce las respuestas de 20 preguntas y responde las restantes al azar. ¿Cuál es el número de preguntas acertadas?

c) Una moneda se lanza 400 veces. Número de caras.

d) El 11 % de los billetes de lotería reciben algún tipo de premio, aunque sea el reintegro. En una familia juegan a 46 números. ¿En cuántos se obtendrá premio?

e) El 1 % de ciertas soldaduras son defectuosas y revisamos mil de ellas. Número de soldaduras defectuosas que hay.

a) $B\left(50; \frac{1}{3}\right)$; $n = 50$; $p = \frac{1}{3}$; $q = \frac{2}{3}$; $\mu = \frac{50}{3} = 16{,}67$; $\sigma = 3{,}33$

b) $B\left(30; \frac{1}{3}\right)$; $n = 30$; $p = \frac{1}{3}$; $q = \frac{2}{3}$; $\mu = 10$; $\sigma = 2{,}58$ relativo a las que contesta al azar.

c) $B\left(400; \frac{1}{2}\right)$; $n = 400$; $p = \frac{1}{2}$; $q = \frac{1}{2}$; $\mu = 200$; $\sigma = 10$

d) $B(46; 0{,}11)$; $n = 46$; $p = 0{,}11$; $q = 0{,}89$; $\mu = 5{,}06$; $\sigma = 2{,}12$

e) $B(1\,000; 0{,}01)$; $n = 1\,000$; $p = 0{,}01$; $q = 0{,}99$; $\mu = 10$; $\sigma = 3{,}15$

10 **En una distribución binomial $B(7; 0{,}4)$, determina:**

a) $P[x = 2]$ **b)** $P[x = 5]$ **c)** $P[x = 0]$

d) $P[x > 0]$ **e)** $P[x > 3]$ **f)** $P[x < 5]$

a) $\binom{7}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}261$

b) $\binom{7}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}077$

c) $0{,}6^7 = 0{,}028$

d) $1 - P[x = 0] = 0{,}972$

e) 0,290

f) 0,904

11 **En una distribución binomial $B(9; 0{,}2)$, calcula:**

a) $P[x < 3]$ **b)** $P[x \geq 7]$ **c)** $P[x = 0]$

d) $P[x \neq 0]$ **e)** $P[x \leq 9]$ **f)** $P[x \geq 9]$

a) $P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2] = 0{,}738$

b) $P[x = 7] + P[x = 8] + P[x = 9] = 0{,}000314$

c) $P[x = 0] = 0{,}134$

d) $1 - P[x = 0] = 1 - 0{,}134 = 0{,}866$

e) 1

f) $P[x \geq 9] = P[x = 9] + P[x > 9] = 0 + 0{,}0000005 = 0{,}0000005$

12 **Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con 4 respuestas de las cuales solo una es correcta. Si se contesta al azar:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de no contestar ninguna bien?

b) ¿Cuál es la probabilidad de contestar una sola pregunta bien?

c) ¿Cuál es la probabilidad de acertar al menos dos?

Es binomial. Se repite 10 veces la misma experiencia, que es contestar una pregunta. Es independiente porque todas las preguntas tienen el mismo número de respuestas posibles y se responden al azar.

$x \to$ número de respuestas acertadas.

Es una binomial $n = 10, p = \frac{1}{4} \to B\left(10, \frac{1}{4}\right)$

a) $P[x = 0] = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 0{,}0563$

b) $P[x = 1] = \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = 10 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^9 = 0{,}18771$

c) $P[x \ge 2] = 1 - P[x < 2] = 1 - P[x = 0] - P[x = 1] = 1 - 0{,}0563 - 0{,}18771 = 0{,}75599$

13 **En un almacén hay 5 aparatos de televisión antiguos. Sabemos que la probabilidad de que cualquiera de ellos tenga una deficiencia es 0,2. Calcula estas probabilidades:**

a) *P*[NINGUNO DEFECTUOSO]

b) *P*[AL MENOS DOS DEFECTUOSOS]

c) *P*[ALGUNO DEFECTUOSO]

$x \to$ número de aparatos defectuosos; x sigue una $B(5; 0{,}2)$.

a) $P[\text{ninguno defectuoso}] = P[x = 0] = \binom{5}{0} 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}33$

b) $P[\text{al menos dos defectuosos}] = P[x \ge 2] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1]) =$

$$= 1 - \left(\binom{5}{0} 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 + \binom{5}{1} 0{,}2 \cdot 0{,}8^4\right) = 0{,}26$$

c) $P[\text{alguno defectuoso}] = P[x > 0] = 1 - (P[x = 0]) = 1 - \binom{5}{0} 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}67$

14 **En un proceso de fabricación de tornillos se sabe que el 2 % son defectuosos. Los empaquetamos en cajas de 50 tornillos. Halla la probabilidad de que en una caja haya este número de tornillos defectuosos:**

a) Ninguno **b) Uno** **c) Más de dos**

¿Cuántos tornillos defectuosos habrá por término medio?

x es $B(50; 0{,}02)$

a) $P[x = 0] = 0{,}98^{50} = 0{,}364$

b) $P[x = 1] = 50 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98^{49} = 0{,}372$

c) $P[x > 2] = 1 - P[x \le 2] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2]) =$

$$= 1 - (0{,}364 + 0{,}372 + 0{,}186) = 1 - 0{,}922 = 0{,}078$$

Por término medio en cada caja habrá 1 tornillo defectuoso.

Para resolver

15 **Antonio y María tienen dos barajas de cartas. Cada uno extrae una carta de su baraja al azar.**

a) ¿Qué probabilidad hay de que sea la misma carta?

b) ¿Qué probabilidad hay de que sea el mismo número aunque tenga distinto palo?

c) ¿Qué probabilidad hay de que obtengan el mismo palo?

a) Se trata de un experimento compuesto en el que hay 40 × 40 = 1 600 casos posibles, y en 40 de ellos coinciden las dos cartas.

$$P[\text{misma carta}] = \frac{40}{1600} = \frac{1}{40}.$$

b) Con el mismo razonamiento del apartado a), ahora hay 160 casos favorables.

$$P[\text{tengan el mismo número}] = \frac{160}{1600} = \frac{1}{10}$$

c) Con el mismo razonamiento del apartado a), ahora hay 400 casos favorables.

$$P[\text{mismo palo}] = \frac{400}{1600} = \frac{1}{4}$$

16 **Se extrae un naipe de una baraja y luego se tira un dado. Si sale el 5 o el 6, se devuelve la carta al mazo; si no, esta se retira. Se baraja y se vuelve a extraer una carta. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos ases?**

$$P[2 \text{ ASES}] = P[\text{AS}] \cdot P[5, 6 \text{ y AS}] + P[\text{AS}] \cdot P[1, \ldots, 4 \text{ y AS}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{40} + \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{39} = \frac{11}{1300} = 0{,}0085$$

17 **La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta viene dada por esta tabla:**

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1	a	b	c	0,2

Sabemos que $P[x \le 2] = 0{,}7$ y que $P[x \ge 2] = 0{,}75$. Halla los valores de a, b y c y calcula μ y σ.

$P[x \le 2] = 0{,}7 = 0{,}1 + a + b$

$P[x \ge 2] = 0{,}75 = b + c + 0{,}2$

$0{,}1 + a + b + c + 0{,}2 = 1$

Obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 0{,}6 \\ b + c = 0{,}55 \\ a + b + c = 0{,}7 \end{array}\right\} \quad a = 0{,}15;\ b = 0{,}45;\ c = 0{,}1$$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	0,10	0,00	0,00
1	0,15	0,15	0,15
2	0,45	0,90	1,80
3	0,10	0,30	0,90
4	0,20	0,80	3,20
TOTAL	1,00	2,15	6,05

$\mu = 2{,}15$

$\sigma = \sqrt{6{,}05 - 2{,}15^2} = 1{,}19$

18 **Una caja contiene cinco bolas con un 2, tres con un 1 y dos con un 0. Se sacan dos bolas y se suman sus números.**

a) Construye la tabla de la distribución de probabilidad y calcula μ y σ.

b) Haz otra tabla suponiendo que se saca una bola al azar, se mira el número, se vuelve a meter en la caja, se repite la operación y se suman los dos números extraídos.

a) $x \to$ suma de los números

$$P[x = 0] = P[0 \text{ y } 0] = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45} = 0{,}02$$

$$P[x = 1] = P[0 \text{ y } 1] + P[1 \text{ y } 0] = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{15} = 0{,}13$$

$$P[x = 2] = P[0 \text{ y } 2] + P[2 \text{ y } 0] + P[1 \text{ y } 1] = \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{13}{45} = 0{,}29$$

$$P[x = 3] = P[2 \text{ y } 1] + P[1 \text{ y } 2] = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

$$P[x = 3] = P[2 \text{ y } 2] = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9} = 0{,}22$$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i {x_i}^2$
0	0,02	0,00	0,00
1	0,13	0,13	0,13
2	0,29	0,58	1,16
3	0,33	1,00	3,00
4	0,22	0,89	3,56
TOTAL	1,00	2,60	7,84

$\mu = 2{,}6$

$\sigma = \sqrt{7{,}84 - 2{,}6^2} = 1{,}04$

b) $x \to$ suma de los números

$$P[x = 0] = P[0 \text{ y } 0] = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{25} = 0{,}04$$

$$P[x = 1] = P[0 \text{ y } 1] + P[1 \text{ y } 0] = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{3}{25} = 0{,}12$$

$$P[x = 2] = P[0 \text{ y } 2] + P[2 \text{ y } 0] + P[1 \text{ y } 1] = \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{29}{100} = 0{,}29$$

$$P[x = 3] = P[2 \text{ y } 1] + P[1 \text{ y } 2] = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$P[x = 3] = P[2 \text{ y } 2] = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i {x_i}^2$
0	0,04	0,00	0,00
1	0,12	0,12	0,12
2	0,29	0,58	1,16
3	0,30	0,90	2,70
4	0,25	1,00	4,00
TOTAL	1,00	2,60	7,98

$\mu = 2{,}6$

$\sigma = \sqrt{7{,}98 - 2{,}6^2} = 1{,}10$

19 **Recuerda cuáles son las puntuaciones de las 28 fichas de un dominó. Si en cada una de ellas sumamos los puntos de sus dos mitades, obtenemos las posibles sumas 0, 1, 2, …, 10, 11 y 12 con probabilidades distintas. Haz la tabla con la distribución de probabilidades y calcula μ y σ.**

$x \rightarrow$ suma de los puntos de la ficha

Se puede conseguir:

0 puntos solo con una ficha $\rightarrow P[0] = \frac{1}{28} = 0{,}04$

1 punto con una ficha $\rightarrow P[1] = 0{,}04$

2 puntos con dos fichas distintas 2:0 y 1:1 $\rightarrow P[2] = \frac{2}{28} = 0{,}07$

Obtenemos así la siguiente tabla:

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	0,04	0,00	0,00
1	0,04	0,04	0,04
2	0,07	0,14	0,29
3	0,07	0,21	0,64
4	0,11	0,43	1,71
5	0,11	0,54	2,68
6	0,14	0,86	5,14
7	0,11	0,75	5,25
8	0,11	0,86	6,86
9	0,07	0,64	5,79
10	0,07	0,71	7,14
11	0,04	0,39	4,32
12	0,04	0,43	5,14
TOTAL	1,00	6,00	45,00

$\mu = 6$

$\sigma = \sqrt{45 - 6^2} = 3$

20 **Una alumna ha estudiado 12 temas de los 30 que entran en un examen. Se eligen 2 temas al azar. La alumna puede haber estudiado los dos, uno o ninguno.**

a) Haz la tabla con la distribución de probabilidad y represéntala gráficamente.

b) Halla μ y σ.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos le toque un tema de los que ha estudiado?

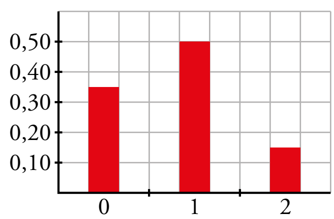
a) $x \rightarrow$ número de temas que se sabe de los dos que se han elegido.

$$P[x = 0] = \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{51}{145} = 0{,}35$$

$$P[x = 1] = 2 \cdot \frac{18}{30} \cdot \frac{12}{29} = \frac{72}{145} = 0{,}5$$

$$P[x = 2] = \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} = \frac{22}{145} = 0{,}15$$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	0,35	0,00	0,00
1	0,50	0,50	0,50
2	0,15	0,30	0,60
TOTAL	1,00	0,80	1,10



b) $\mu = 0{,}8$

$\sigma = \sqrt{1{,}1 - 0{,}8^2} = 0{,}68$

c) $P[x = 1] + P[x = 2] = 0{,}35 + 0{,}5 = 0{,}85$

21 **En las familias con 4 hijos e hijas, contamos el número de niñas.**

a) Determina la distribución de probabilidad, suponiendo que la probabilidad de que nazca un niño o una niña es la misma.

b) Represéntala gráficamente.

a) $x \rightarrow$ número de hijas

x sigue una distribución binomial $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$.

$P[x = 0] = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

$P[x = 1] = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} = 0{,}25$

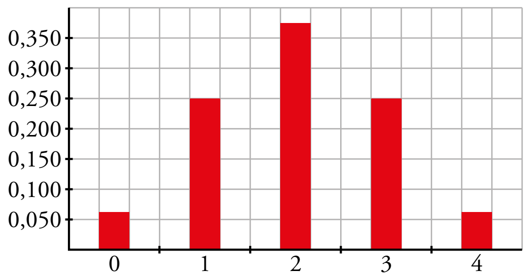
$P[x = 2] = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8} = 0{,}375$

$P[x = 3] = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$P[x = 4] = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

x_i	p_i
0	0,0625
1	0,250
2	0,375
3	0,250
4	0,0625
TOTAL	1,000

b)



22 **En una caja A hay cinco fichas numeradas del 1 al 5 y en otra caja B hay cuatro fichas numeradas del 6 al 9. Se lanza una moneda: si sale cara, se saca una ficha de A, y si sale cruz, se saca de B. Se anota el número obtenido.**

a) Haz la tabla de distribución de probabilidad, represéntala y calcula μ y σ.

b) ¿Qué probabilidad hay de sacar un número mayor que 6?

a) $x \rightarrow$ número obtenido

$P[x = 1] = P[\text{C y } 1] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

$P[x = 2] = P[\text{C y } 2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

$P[x = 3] = P[\text{C y } 3] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

$P[x = 4] = P[\text{C y } 4] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

$P[x = 5] = P[\text{C y } 5] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

$P[x = 6] = P[+ \text{ y } 6] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

$P[x = 7] = P[+ \text{ y } 7] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$P[x = 8] = P[+ \text{ y } 8] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
1	0,100	0,10	0,10
2	0,100	0,20	0,40
3	0,100	0,30	0,90
4	0,100	0,40	1,60
5	0,100	0,50	2,50
6	0,125	0,75	4,50
7	0,125	0,88	6,13
8	0,125	1,00	8,00
9	0,125	1,13	10,13
TOTAL	1,00	5,25	34,25

$P[x = 9] = P[+ \text{ y } 9] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$\mu = 5{,}25$

$\sigma = \sqrt{34{,}25 - 5{,}25^2} = 2{,}586$

b) $P[x > 6] = P[x = 7] + P[x = 8] + P[x = 9] = 0{,}125 \cdot 3 = 0{,}375$

23 La probabilidad de que una flecha lanzada por un arquero dé en la diana es 0,6. Si lanza 6 flechas, halla la probabilidad de que:

a) Solo una dé en la diana.

b) Al menos una dé en la diana.

c) Más de la mitad alcancen la diana.

$x \to$ número de dianas.

x sigue una distribución binomial $B(6; 0{,}6)$.

a) $P[x = 1] = \binom{6}{1} 0{,}6 \cdot 0{,}4^5 = 0{,}368$

b) $P[x \geq 1] = 1 - P[x = 0] = 1 - \binom{6}{0} 0{,}4^6 = 0{,}9959$

c) $P[x > 3] = P[x = 4] + P[x = 5] + P[x = 6] = \binom{6}{4} 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^2 + \binom{6}{5} 0{,}6^5 \cdot 0{,}4 + \binom{6}{6} 0{,}6^6 = 0{,}54$

24 Se sabe que el 30 % de todos los fallos en tuberías de plantas químicas son ocasionados por errores del operador.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 fallos en una planta química, exactamente 5 se deban a errores del operador?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más fallos de 20 encontrados en una planta química se deban al operador?

Es binomial.

$x \to$ número de fallos del operador

Es una binomial $n = 20$, $p = 0{,}3 \to B(20; 0{,}3)$

a) $P[x = 5] = \binom{20}{5} \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^{15} = 0{,}17886$

b) $P[x \geq 2] = 1 - P[x = 0] - P[x = 1]$

$P[x = 0] = \binom{20}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{20} = 0{,}000798$

$P[x = 1] = \binom{20}{1} \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^{19} = 0{,}00684 \to P[x \geq 2] = 1 - 0{,}000798 - 0{,}00684 = 0{,}99236$

25 En un bombo de lotería tenemos 10 bolas numeradas del 0 al 9. Cada vez que se extrae una, se devuelve al bombo. Si sacamos 5 bolas, calcula la probabilidad de que:

a) El 0 salga una sola vez.

b) Se hayan obtenido más de dos unos.

c) No se obtengan números mayores que 7.

a) $x \to$ número de ceros.

x sigue una distribución binomial $B(5; 0{,}1)$.

$P[x = 1] = \binom{10}{1} 0{,}1 \cdot 0{,}9^9 = 0{,}39$

b) $x \rightarrow$ número de unos.

x sigue una distribución binomial $B(5; 0{,}1)$.

$P[x > 2] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2]) =$

$$= 1 - \left(\binom{10}{0} 0{,}9^{10} + \binom{10}{1} 0{,}1 \cdot 0{,}9^{9} + \binom{10}{2} 0{,}1^{2} \cdot 0{,}9^{8}\right) = 0{,}0702$$

c) $P[\text{las cinco bolas sean} \le 7] = \left(\dfrac{8}{10}\right)^5 = 0{,}33$

26 **Un tipo de piezas requiere de 4 soldaduras. Se hace un control de calidad a mil de ellas y se obtienen estos resultados:**

SOLDADURAS DEFECTUOSAS	0	1	2	3	4
N.° DE PIEZAS	603	212	105	52	28

¿Se ajustan estos datos a una binomial?

x_i	NÚMEROS OBSERVADOS	$f_i x_i$	p_i	$100 \cdot p_i$	NÚMEROS TEÓRICOS	DIFERENCIAS
0	603	0	0,46889	468,89	469	–134
1	212	212	0,39098	390,98	391	179
2	105	210	0,12226	122,26	122	17
3	52	156	0,01699	16,99	17	–35
4	28	112	0,00885	8,89	9	–19
TOTAL	1 000	690	1,008	1 000,8	1 008	

La media de soldaduras defectuosas es:

$$\bar{x} = \frac{690}{1000} = 0{,}69$$

$\bar{x} = 4p$ 8 $p = 0{,}1725$ 8 $q = 1 - p = 0{,}8275$

Si siguiera una distribución binomial sería $B(4; 0{,}1725)$.

$x \rightarrow$ soldaduras defectuosas $\rightarrow p_i = P[x = x_i]$

$$P[x = 0] = \binom{4}{0} \cdot 0{,}1725^0 \cdot 0{,}8275^4 = 0{,}46889$$

$$P[x = 1] = \binom{4}{1} \cdot (0{,}1725)^1 \cdot (0{,}8275)^3 = 0{,}39098$$

$$P[x = 2] = \binom{4}{2} \cdot (0{,}1725)^2 \cdot (0{,}8275)^2 = 0{,}12226$$

$$P[x = 3] = \binom{4}{3} \cdot (0{,}1725)^3 \cdot (0{,}8275)^1 = 0{,}01699$$

$$P[x = 4] = \binom{4}{4} \cdot 0{,}1725^4 \cdot 0{,}8275^0 = 0{,}00885$$

No sigue una distribución binomial porque la diferencia entre los valores observados y los teóricos es muy grande.

27 ODS Meta 3.4. **[Tras visualizar el vídeo, el docente puede plantear un debate sobre los problemas que puede plantear la distribución y fabricación de vacunas].**

Para probar la eficacia de una vacuna, se administró una dosis a 100 grupos de 4 hermanos y hermanas con riesgo de contagio, y los resultados observados fueron los de la tabla.

N.° DE CONTAGIADOS	N.° DE GRUPOS
0	36
1	14
2	8
3	16
4	26
TOTAL	100

a) ¿Podemos suponer que sigue una distribución binomial? Compruébalo.

b) Dibuja en rojo el diagrama de barras con los valores empíricos (observados) y en verde, sobre el anterior, el diagrama de barras con los valores teóricos.

x_i	NÚMEROS OBSERVADOS	$f_i x_i$	p_i	$100 \cdot p_i$	NÚMEROS TEÓRICOS	DIFERENCIAS
0	36	0	0,09	8,80	9	–27
1	14	14	0,29	29,00	29	15
2	8	16	0,37	37,00	37	29
3	16	48	0,21	21,00	21	5
4	26	104	0,04	4,30	4	–22
TOTAL	100	182	1,00	100,10	100	

$\overline{x} = 1{,}82$

$4p = 1{,}82 \to p = \dfrac{1{,}82}{4} = 0{,}455, \quad q = 1 - 0{,}455 = 0{,}545$

Si x sigue una distribución binomial, sería $B(4;\, 0{,}455)$.

$P[x = 0] = \binom{4}{0}(0{,}545)^4 = 0{,}09$

$P[x = 1] = \binom{4}{1} 0{,}455 \cdot 0{,}545^3 = 0{,}29$

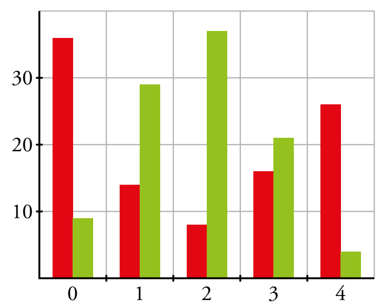
$P[x = 2] = \binom{4}{2} 0{,}455^2 \cdot 0{,}545^2 = 0{,}37$

$P[x = 3] = \binom{4}{3} 0{,}455^3 \cdot 0{,}545 = 0{,}21$

$P[x = 4] = \binom{4}{4} 0{,}455^4 = 0{,}04$

a) No sigue una distribución binomial porque las diferencias entre los valores observados y los teóricos son muy grandes.

b)



Página 271

Cuestiones teóricas

28 a) En una distribución $B(4; 0{,}5)$ comprueba esta igualdad: $P[x = 1] = P[x = 3]$

b) En una distribución $B(n, p)$ se cumple lo siguiente: $P[x = k] = P[x = n - k]$. ¿Cuánto vale p?

a) $P[x = 1] = \binom{4}{1} 0{,}5^3 \cdot 0{,}5$

$P[x = 3] = \binom{4}{3} 0{,}5 \cdot 0{,}5^3$

Como $\binom{4}{1} = \binom{4}{3}$, las dos expresiones son iguales.

b) $P[x = k] = P[x = n - k]$

$\binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} = \binom{n}{n-k} p^{n-k} \cdot q^k$

Como $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \rightarrow p^k \cdot q^{n-k} = p^{n-k} \cdot q^k$

Significa que $p = q$, puesto que intercambian los exponentes y el resultado es el mismo.

Por tanto, $p = 1 - p \rightarrow p = \frac{1}{2}$

29 Una ajedrecista se enfrenta a otro de igual maestría. ¿Qué es más probable, que gane dos partidas de cuatro o que gane tres de seis partidas? (Las tablas no se consideran).

La probabilidad de que el ajedrecista gane a su contrincante es de $\frac{1}{2}$.

- Si juegan 4 partidas:

  Es una binomial $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$. Así:

  $P[x = 2] = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{3}{8}$

- Si juegan 6 partidas:

  Es una binomial $B\left(6, \frac{1}{2}\right)$. Así:

  $P[x = 3] = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{5}{16}$

Como $\frac{3}{8} > \frac{5}{16}$, tenemos que es más fácil ganar 2 de 4 partidas que 3 de 6.

30 **En una mano de póquer se dan 5 cartas a cada jugador. Nos preguntamos por la probabilidad de que un jugador tenga k figuras (k = 0, 1, 2, 3, 4 o 5). ¿Por qué no es una distribución binomial? (En el póquer, cada palo tiene tres figuras: J, Q, K).**

Si en lugar de extraer 5 cartas se lanzaran 5 dados de póquer, ¿sería una distribución binomial? Explica por qué.

$$P[1 \text{ FIGURA}] = 5 \cdot \frac{12}{40} \cdot \frac{28}{39} \cdot \frac{27}{38} \cdot \frac{26}{37} \cdot \frac{25}{36} = 0{,}373$$

$$P[2 \text{ FIGURAS}] = \binom{5}{2} \cdot \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} \cdot \frac{28}{38} \cdot \frac{27}{37} \cdot \frac{26}{36} = 0{,}329$$

$$P[3 \text{ FIGURAS}] = \binom{5}{3} \cdot \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} \cdot \frac{10}{38} \cdot \frac{28}{37} \cdot \frac{27}{36} = 0{,}126$$

$$P[4 \text{ FIGURAS}] = \binom{5}{4} \cdot \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} \cdot \frac{10}{38} \cdot \frac{9}{37} \cdot \frac{28}{36} = 0{,}021$$

$$P[5 \text{ FIGURAS}] = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} \cdot \frac{10}{38} \cdot \frac{9}{37} \cdot \frac{8}{36} = 0{,}012$$

No es una distribución binomial porque cada extracción influye en las siguientes por no haber reemplazamiento. Por tanto, las sucesivas extracciones no son independientes.

31 **¿Verdadero o falso?**

a) La distribución $B(7; 0{,}2)$ es una distribución cuya variable solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

b) Sabemos que el 20 % de los jóvenes utiliza una cierta red social. En un aula hay 30 jóvenes. La probabilidad de que el 10 % de ellos utilice esa red es $\binom{30}{10} \cdot 0{,}2^{10} \cdot 0{,}8^{20}$.

a) Verdadero, el número de éxitos está entre 0 y 7 veces que se repite la experiencia.

b) Falso, el 10 % de 30 es 3, luego la probabilidad pedida es:

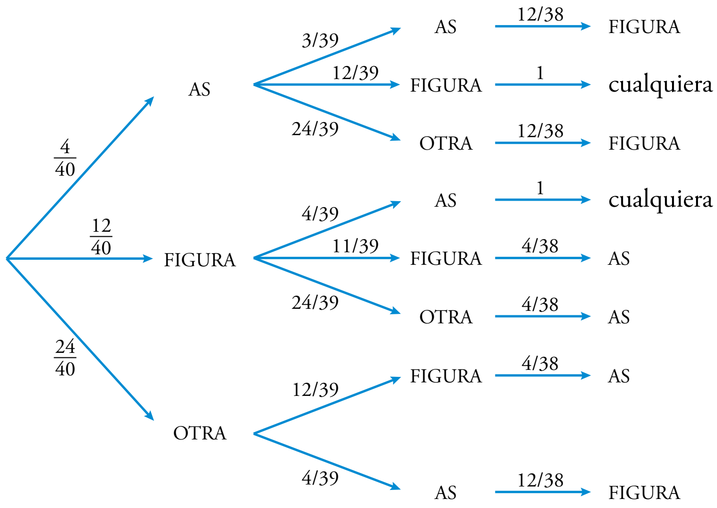
$$P[x = 3] = \binom{30}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^{27}$$

Para profundizar

32 a) **Extraemos tres cartas de una baraja de 40 cartas. ¿Qué probabilidad hay de obtener algún AS y alguna FIGURAS? (FIGURAS: SOTA, CABALLO y REY)**

b) **Extraemos dos cartas de una baraja de 40 cartas. ¿Qué probabilidad hay de obtener alguna FIGURA y algún OROS? (*figura de oros vale como figura y como oros*).**

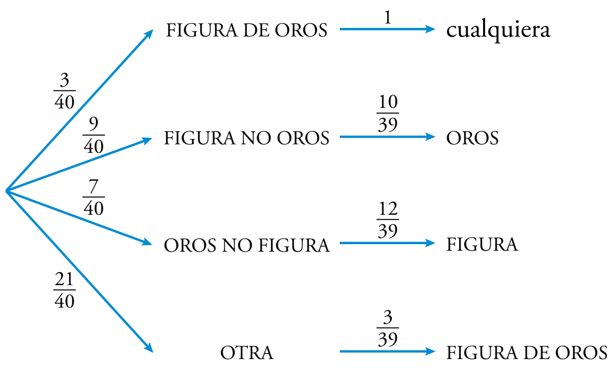
a) Utilizando el siguiente diagrama,



obtenemos la probabilidad pedida:

$$\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}\cdot\frac{12}{38}+\frac{4}{40}\cdot\frac{12}{39}\cdot 1+\frac{4}{40}\cdot\frac{24}{39}\cdot\frac{12}{38}+\frac{12}{40}\cdot\frac{4}{39}\cdot 1+\frac{12}{40}\cdot\frac{11}{39}\cdot\frac{4}{38}+\frac{12}{40}\cdot\frac{24}{39}\cdot\frac{4}{38}+\frac{24}{40}\ \ldots = 0{,}15$$

b) Utilizando el siguiente diagrama.



obtenemos la probabilidad pedida:

$$\frac{3}{40}+\frac{9}{40}\cdot\frac{10}{39}+\frac{7}{40}\cdot\frac{12}{39}+\frac{21}{40}\cdot\frac{3}{39} = 0{,}23$$

33 **Extraemos una bola de la primera urna y la introducimos en la segunda. Luego sacamos una bola de la segunda urna.**

1.ª A A A B C   2.ª A A A B

a) ¿Qué probabilidad hay de obtener C en la segunda extracción?

b) Calcula: *P*[1.ª B y 2.ª B]; *P*[1.ª C y 2.ª B]

c) Calcula: *P*[1.ª A y 2.ª A]; *P*[1.ª B y 2.ª A]; *P*[1.ª C y 2.ª A] y, en consecuencia, *P*[2.ª A].

a) La única forma de sacar C en la segunda extracción es: sacar C en la primera extracción y sacar C en la segunda extracción. Si hemos sacado C en la primera extracción, la composición de la urna B es 3A, 1B, 1C.

P[C en la 2.ª extracción] =

$= P[\text{C en la 1.ª extracción}] \cdot P[\text{C en la 2.ª extracción/ C en la 1.ª extracción}] = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}04$

b) $P[\text{1.ª B y 2.ª B}] = P[\text{B en la 1.ª extracción}] \cdot P[\text{B en la 2.ª extracción/ B en la 1.ª extracción}] =$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = 0{,}08$

$P[\text{1.ª C y 2.ª B}] = P[\text{C en la 1.ª extracción}] \cdot P[\text{B en la 2.ª extracción/ C en la 1.ª extracción}] =$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}04$

c) $P[\text{1.ª A y 2.ª A}] =$

$= P[\text{A en la 1.ª extracción}] \cdot P[\text{A en la 2.ª extracción/ A en la 1.ª extracción}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = 0{,}48$

$P[\text{1.ª B y 2.ª A}] = P[\text{B en la 1.ª extracción}] \cdot P[\text{A en la 2.ª extracción/ B en la 1.ª extracción}] =$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = 0{,}12$

$P[\text{1.ª C y 2.ª A}] = P[\text{C en la 1.ª extracción}] \cdot P[\text{A en la 2.ª extracción/ C en la 1.ª extracción}] =$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = 0{,}12$

$P[\text{2.ª A}] = P[\text{1.ª A y 2.ª A}] + P[\text{1.ª B y 2.ª A}] + P[\text{1.ª C y 2.ª A}] = 0{,}48 + 0{,}12 + 0{,}12 = 0{,}72$

34 **Extraemos una bola de la primera urna y la introducimos en la segunda urna. Luego sacamos una bola de la segunda.**

1.ª A A A B B C   2.ª A A B B B C

¿Cuál es la probabilidad de obtener A de la segunda urna?

Seguimos el mismo razonamiento que en el apartado c) anterior.

$P[\text{2.ª A}] = P[\text{1.ª A y 2.ª A}] + P[\text{1.ª B y 2.ª A}] + P[\text{1.ª C y 2.ª A}] = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{7} = 0{,}36$

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 4.3. (EA 4.3.1.-EA 4.3.2.) CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.)

Página 271

1 **Tiramos un dado. Si sale 5 o 6, extraemos una bola de la urna A y si no, de la B. Calcula las probabilidades indicadas.**

a) La probabilidad de obtener un 5 o un 6 y sacar bola roja.

b) La probabilidad de obtener 4 y bola verde.

a) Si sale 5 o 6 extraemos la bola de la urna A, luego la probabilidad de extraer bola roja en ambos casos es $\frac{3}{6}$.

$$P[5 \text{ y ROJA}] + P[6 \text{ y ROJA}] = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = 0{,}17$$

b) Si sale 4 extraemos la bola de la urna B, luego la probabilidad de extraer bola verde en este caso es $\frac{3}{8}$.

$$P[4 \text{ y VERDE}] = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} = 0{,}0625$$

2 **Completa esta tabla de distribución de probabilidad:**

x_i	5	6	7	8	9	10
p_i	0,1	0,3	0,2	0,1	0,1	…

Halla μ y σ.

$P[10] = 1 - (0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
5	0,1	0,5	2,5
6	0,3	1,8	10,8
7	0,2	1,4	9,8
8	0,1	0,8	6,4
9	0,1	0,9	8,1
10	0,2	2	20
	1,00	7,4	57,6

$\mu = 7{,}4$

$\sigma = \sqrt{57{,}6 - 7{,}4^2} = 1{,}69$

3 **Tenemos dos fichas: A, con un 1 en una cara y un 2 en la otra; y B, con un 2 en una cara y un 3 en la otra.**

a) Lanzamos las dos fichas y sumamos sus valores. Los posibles resultados son 3, 4 y 5. Elabora la distribución de probabilidad y calcula μ y σ.

b) Lanzamos seis veces las dos fichas. ¿Qué probabilidad hay de obtener 5 en tres ocasiones? ¿Y en más de tres?

a) $P[3] = P[1\text{A y }2\text{B}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}25$

$P[4] = P[1\text{A y }3\text{B}] + P[2\text{A y }2\text{B}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5$

$P[5] = P[2\text{A y }3\text{B}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}25$

La tabla de la distribución es:

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
3	0,25	0,75	2,25
4	0,50	2,00	8,00
5	0,25	1,25	6,25
TOTAL	1,00	4,00	16,50

$\mu = 4$

$\sigma = \sqrt{16{,}5 - 4^2} = 0{,}70711$

b) $x \rightarrow$ número de cincos en 6 lanzamientos.

x sigue una binomial $B(6; 0{,}25)$.

La probabilidad de obtener 5 en tres ocasiones es:

$P[x = 3] = \binom{6}{3} 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^3 = 0{,}132$

La probabilidad de obtener 5 en más de tres ocasiones es:

$P[x > 3] = P[x = 4] + P[x = 5] + P[x = 6] = \binom{6}{4} 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^2 + \binom{6}{5} 0{,}25^5 \cdot 0{,}75 + \binom{6}{6} 0{,}25^6 = 0{,}0376$

4 **En una binomial $B(5, 1)$, calcula estas probabilidades:**

a) $P[x = 5]$ **b) $P[x < 5]$** **c) $P[x > 3]$**

a) $P[x = 5] = \binom{5}{5} 1^5 = 1$

b) $P[x < 5] = 1 - P[x = 5] = 1 - 1 = 0$

c) $P[x > 3] = P[x = 4] + P[x = 5] = 1$

5 **Zoe es saltadora de longitud, y en el 80 % de sus saltos consigue superar los 6 m. Sabiendo que en una competición tiene que saltar cuatro veces, halla la probabilidad de que:**

a) En todas supere los 6 m.

b) No los supere en ninguna.

c) Al menos lo haga en dos ocasiones.

d) Si su primer salto fue nulo, supere los 6 m en, al menos, una ocasión.

$x \to$ número de veces que supera los 6 m.

x sigue una binomial $B(4; 0{,}8)$.

a) $P[x = 4] = \binom{4}{4} 0{,}8^4 = 0{,}41$

b) $P[x = 0] = \binom{4}{0} 0{,}2^4 = 0{,}0016$

c) $P[x \geq 2] = P[x = 2] + P[x = 3] + P[x = 4] = \binom{4}{2} 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 + \binom{4}{3} 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 + \binom{4}{4} 0{,}8^4 = 0{,}97$

d) $x \to$ número de veces que supera los 6 m en los 3 saltos restantes.

x sigue una binomial $B(3; 0{,}8)$.

$P[x \geq 1] = 1 - P[x = 0] = 1 - \binom{3}{0} 0{,}2^3 = 0{,}99$

6 **En una feria, por un tique te dejan tirar 6 veces a una canasta. Si cuelas al menos dos tiros, te llevas premio. Se supone que cada persona tiene una probabilidad de 0,15 de acertar en cada tiro.**

a) ¿Qué probabilidad hay de que una persona gane un premio con un tique?

b) Si juegan 1 000 personas a lo largo de la semana, ¿cuántos, aproximadamente, se llevarán el premio?

$x \to$ número de veces que encestas.

x sigue una binomial $B(6; 0{,}15)$.

a) $P[x \geq 2] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1]) = 1 - \left(\binom{6}{0} 0{,}85^6 + \binom{6}{1} 0{,}15 \cdot 0{,}85^5\right) = 1 - 0{,}77648 = 0{,}224$

b) Si hay 1 000 personas, aproximadamente $1\,000 \cdot 0{,}224 = 224$ personas se llevarán el premio.

10 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE CONTINUA

Para consultar los **criterios deevaluación** y los **estándares de aprendizaje evaluables**, véase la Programación.

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) **CE 1.4.** (EA 1.4.1.-EA 1.4.2.) **CE 1.5.** (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.) **CE 1.8.** (EA 1.8.1.) **CE 1.10.** (EA 1.10.1.) **CE 4.5.** (EA 4.5.1.-EA 4.5.2.)

Página 273

Resuelve

Distribución de edades

[La interpretación de las probabilidades permite trabajar la iniciativa (dimensión productiva de esta clave)].

Halla las siguientes probabilidades e interpreta lo que significan:

a) $P[x \le 15]$ **b)** $P[45 \le x \le 65]$ **c)** $P[x \le 80]$ **d)** $P[25 \le x \le 70]$

Contamos los cuadraditos que hay en el intervalo y dividimos por el número total de cuadraditos (que es 100). Así:

a) $P[x \le 15] = \dfrac{26}{100} = 0{,}26$

La probabilidad de que un habitante, elegido al azar en esa población, tenga menos de 15 años es del 26 %.

b) $P[45 \le x \le 65] = \dfrac{18}{100} = 0{,}18$

La probabilidad de que tenga entre 45 y 65 años es del 18 %.

c) $P[x \le 80] = \dfrac{96}{100} = 0{,}96$

La probabilidad de que tenga menos de 80 años es del 96 %.

d) $P[25 \le x \le 70] = \dfrac{47}{100} = 0{,}47$

La probabilidad de que tenga entre 25 y 70 años es del 47 %.

Tiempos de espera

Halla e interpreta estas probabilidades:

a) $P[x \le 2]$ **b)** $P[5 \le x \le 10]$ **c)** $P[x \le 10]$ **d)** $P[5 \le x \le 6]$

a) Tenemos que contar el número de cuadraditos que hay entre las verticales que corresponden a 0 y a 2 y dividirlo entre 100.

$P[x \le 2] = 0{,}19$

El 19 % de las veces tenemos que esperar menos de 2 minutos.

b) $P[5 \le x \le 10] = 0{,}3125$

El 31,25 % de las veces tenemos que esperar entre 5 y 10 minutos.

c) $P[x \le 10] = 0{,}75$

El 75 % de las veces tenemos que esperar menos de 10 minutos.

d) $P[5 \le x \le 6] = 0{,}0725$

El 7,25 % de las veces tenemos que esperar entre 5 y 6 minutos.

1 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE CONTINUA

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.) CE 1.12. (EA 1.12.1.) CE 4.3. (EA 4.3.3.)

Página 275

Hazlo tú

1 **Calcula: a)** $P[2 \le x \le 5]$ **b)** $P[2 \le x \le 2{,}5]$

a) $P[2 \le x \le 5] = (5-2) \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

b) $P[2 \le x \le 2{,}5] = \frac{0{,}5}{4} = 0{,}125$

2 **Calcula: a)** $P[0 \le x \le 2]$ **b)** $P[3 \le x \le 4]$

a) $P[0 \le x \le 2] = \frac{2 \cdot (2/8)}{2} = \frac{2}{8} = 0{,}25$

b) $P[3 \le x \le 4] = \frac{(3/8)+(4/8)}{2} \cdot 1 = \frac{7}{16} = 0{,}4375$

Piensa y practica

1 Parada de 5 minutos. **[La reflexión por parejas que plantea esta técnica puede ser una buena forma de que el alumnado coopere para calcular las probabilidades].**

Calcula k **para que** $f(x) = \begin{cases} k, & x \in [3, 8] \\ 0, & x \notin [3, 8] \end{cases}$ **sea una función de densidad. Halla las probabilidades:**

a) $P[4 < x < 6]$ **b)** $P[2 < x \le 5]$

c) $P[x = 6]$ **d)** $P[5 < x \le 10]$

Como el área bajo la curva ha de ser igual a 1, tenemos que:

$P[-\infty < x < +\infty] = P[3 \le x \le 8] = 5k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{5}$

a) $P[4 < x < 6] = (6-4) \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

b) $P[2 < x \le 5] = P[3 \le x \le 5] = (5-3) \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

c) $P[x = 6] = 0$

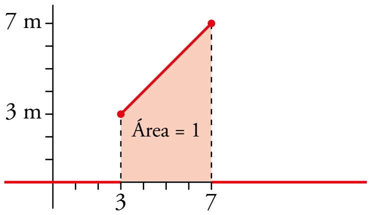
d) $P[5 < x \le 10] = P[5 \le x \le 8] = (8-5) \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

2 **Calcula m para que $f(x) = \begin{cases} mx, & x \in [3, 7] \\ 0, & x \notin [3, 7] \end{cases}$ sea una función de densidad. Halla las probabilidades:**

a) $P[3 < x < 5]$ **b)** $P[5 \le x < 7]$

c) $P[4 \le x \le 6]$ **d)** $P[6 \le x < 11]$

El área bajo la curva (área del trapecio señalado) ha de ser igual a 1:



$$P[-\infty < x < +\infty] = P[3 \le x \le 7] = \frac{(7m + 3m) \cdot 4}{5} =$$

$$= 20m = 1 \;\rightarrow\; m = \frac{1}{20}$$

a) $P[3 < x < 5] = \dfrac{(5/20 + 3/20) \cdot 2}{2} = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$

b) $P[5 \le x < 7] = \dfrac{(7/20 + 5/20) \cdot 2}{2} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$

c) $P[4 \le x \le 6] = \dfrac{(6/20 + 4/20) \cdot 2}{2} = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$

d) $P[6 \le x < 11] = P[6 \le x \le 7] = \dfrac{(7/20 + 6/20) \cdot 1}{2} = \dfrac{13}{40}$

2 LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

C.E.: CE 4.4. (EA 4.4.3.-EA 4.4.4.-EA 4.4.5.)

Página 277

1 **En una distribución $N(110, 10)$, calcula:**

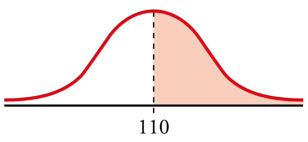
a) $P[x > 110]$ b) $P[110 < x < 120]$

c) $P[110 < x < 130]$ d) $P[120 < x < 130]$

e) $P[90 < x < 100]$ f) $P[90 < x < 120]$

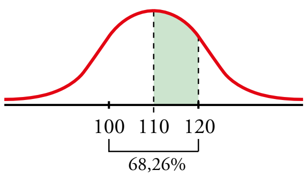
g) $P[x < 100]$

a)



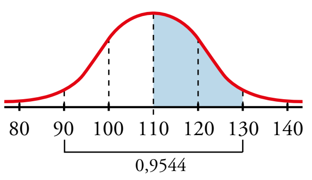
$P[x > 110] = 0,5$

b)



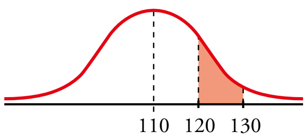
$$P[110 < x < 120] = \frac{0,6826}{2} = 0,3413$$

c)



$$P[110 < x < 130] = \frac{0,9544}{2} = 0,4772$$

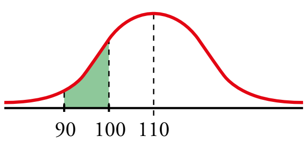
d)



$0,9544 - 0,6826 = 0,2718$

$$P[120 < x < 130] = \frac{0,2718}{2} = 0,1359$$

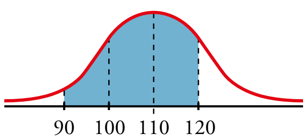
e)



Por simetría, igual que el anterior:

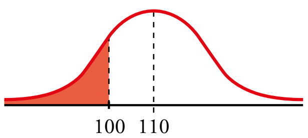
$P[90 < x < 100] = 0,1359$

f)



$P[90 < x < 120] = 0,6826 + 0,1359 = 0,8185$

g)



$$P[x < 100] = \frac{1 - 0,6826}{2} = 0,1587$$

3 ▶ CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN DISTRIBUCIONES NORMALES

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) **CE 1.5.** (EA 1.5.1-EA 1.5.2.) **CE 1.8.** (EA 1.8.1.) **CE 1.10.** (EA 1.10.1.) **CE 1.12.** (EA 1.12.1.)
CE 4.4. (EA 4.4.3.-EA 4.4.4.-EA 4.4.5.)

Página 278

Hazlo tú. Haz lo mismo que en el ejercicio resuelto para estos casos:

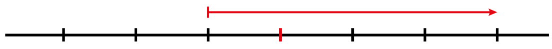
a) Más de 58

b) Menos de 80

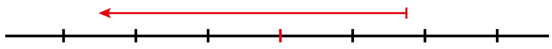
c) Entre 60 y 70

¿Cuál se puede resolver con los datos que tenemos? Hazlo.

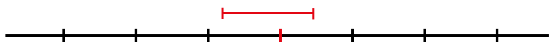
a) Más de 58 kg $\rightarrow$ $x > \mu - \sigma$ $\rightarrow$ $1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$ $\rightarrow$ 84,13%



b) Menos de 80 kg $\rightarrow$ $x < \mu + 1{,}75\sigma$



c) Entre 60 kg y 70 kg $\rightarrow$ $\mu - 0{,}75\sigma < x < \mu + 0{,}5\sigma$



1 **[El cálculo de las probabilidades que pide el enunciado permite poner en práctica la asunción de riesgos de la dimensión productiva de esta clave].**

Calcula las probabilidades de los apartados a), b) y c) del ejercicio resuelto anterior.

Estima el valor aproximado de las probabilidades d), e) y f) del mismo ejercicio.

a) $P[x > \mu] = 0{,}5$

b) $P[\mu < x < \mu + 2\sigma] = 0{,}4772$

c) $P[x < \mu - \sigma] = 0{,}1587$

d) $P[x < \mu + 0{,}5\sigma] = 0{,}6915$

e) $P[x > \mu + 1{,}75\sigma] = 0{,}0401$

f) $P[x + 0{,}5\sigma < x < \mu + 1{,}75\sigma] = 0{,}2684$

Página 279

2 **Halla las siguientes probabilidades:**

a) $P[z \le 0{,}84]$	**b)** $P[z < 1{,}5]$
c) $P[z < 2]$	**d)** $P[z < 1{,}87]$
e) $P[z < 2{,}35]$	**f)** $P[z \le 0]$
g) $P[z < 4]$	**h)** $P[z = 1]$

Mirando directamente la tabla, obtenemos:

a) 0,7996	b) 0,9332
c) 0,9772	d) 0,9693
e) 0,9906	f) 0,5000
g) 1	h) 0

3 Comprobamos. **[Antes de corregir el ejercicio en clase, el alumnado puede compartir sus conclusiones y aportar las estrategias que ha seguido para su resolución].**

Di el valor de k en cada caso:

a) $P[z \le k] = 0{,}7019$ **b)** $P[z < k] = 0{,}8997$

c) $P[z \le k] = 0{,}5040$ **d)** $P[z < k] = 0{,}7054$

a) $k = 0{,}53$ b) $k = 1{,}28$

c) $k = 0{,}01$ d) $k = 0{,}54$

4 Di el valor aproximado de k en cada caso:

a) $P[z < k] = 0{,}9533$ **b)** $P[z \le k] = 0{,}62$

a) $k \approx 1{,}68$ b) $k \approx 0{,}305$

Página 280

5 Halla:

a) $P[z > 1{,}3]$

b) $P[z < -1{,}3]$

c) $P[z > -1{,}3]$

d) $P[1{,}3 < z < 1{,}96]$

e) $P[-1{,}96 < z < -1{,}3]$

f) $P[-1{,}3 < z < 1{,}96]$

g) $P[-1{,}96 < z < 1{,}96]$

a) $P[z > 1{,}3] = 1 - P[z < 1{,}3] = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968$

b) $P[z < -1{,}3] = 1 - P[z < 1{,}3] = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968$

c) $P[z > -1{,}3] = P[z < 1{,}3] = 0{,}9032$

d) $P[1{,}3 < z < 1{,}96] = P[z < 1{,}96] - P[z < 1{,}3] = 0{,}9750 - 0{,}9032 = 0{,}0718$

e) $P[-1{,}96 < z < -1{,}3] = P[z < -1{,}3] - P[z < -1{,}96] = (1 - 0{,}9032) - (1 - 0{,}9750) = 0{,}0718$

f) $P[-1{,}3 < z < 1{,}96] = P[z < 1{,}96] - P[z < -1{,}3] = 0{,}9750 - (1 - 0{,}9032) = 0{,}8782$

g) $P[-1{,}96 < z < 1{,}96] = P[z < 1{,}96] - P[z < -1{,}96] = (0{,}9750) - (1 - 0{,}9750) = 0{,}95$

6 Halla, a partir de la tabla, las siguientes probabilidades:

a) $P[-1 \le z \le 1]$ **b)** $P[-2 \le z \le 2]$

c) $P[-3 \le z \le 3]$ **d)** $P[-4 \le z \le 4]$

e) $P[0 \le z \le 1]$ **f)** $P[0 \le z \le 4]$

a) $P[-1 \le z \le 1] = P[z < 1] - P[z < -1] = 0{,}8413 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}6826$

b) $P[-2 \le z \le 2] = P[z < 2] - P[z < -2] = 0{,}9772 - (1 - 0{,}9772) = 0{,}9544$

c) $P[-3 \le z \le 3] = P[z < 3] - P[z < -3] = 0{,}9987 - (1 - 0{,}9987) = 0{,}9974$

d) $P[-4 \le z \le 4] = P[z < 4] - P[z < -4] = 1 - (1 - 1) = 1$

e) $P[0 \le z \le 1] = P[z < 1] - P[z < 0] = 0{,}8413 - 0{,}5 = 0{,}3413$

f) $P[0 \le z \le 4] = P[z < 4] - P[z < 0] = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

Página 281

7 **En una distribución** $N(173, 6)$, **halla las siguientes probabilidades:**

a) $P[x \le 173]$ **b)** $P[x \ge 180{,}5]$

c) $P[174 \le x \le 180{,}5]$ **d)** $P[161 \le x \le 180{,}5]$

e) $P[161 \le x \le 170]$ **f)** $P[x = 174]$

g) $P[x > 191]$ **h)** $P[x < 155]$

a) $P[x \le 173] = P\left[z < \dfrac{173-173}{6}\right] = P[z < 0] = 0{,}5$

b) $P[x \ge 180{,}5] = 1 - P[x < 180{,}5] = 1 - P\left[z < \dfrac{180{,}5-173}{6}\right] = 1 - P[z < 1{,}25] =$

$= 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$

c) $P[174 \le x \le 180{,}5] = P[x < 180{,}5] - P[x \le 174] = P\left[z < \dfrac{180{,}5-173}{6}\right] - P\left[z < \dfrac{174-173}{6}\right] =$

$= P[z < 1{,}25] - P[z < 0{,}166] = 0{,}8944 - 0{,}5675 = 0{,}3269$

d) $P[161 \le x \le 180{,}5] = P[x < 180{,}5] - P[x \le 161] = P\left[z < \dfrac{180{,}5-173}{6}\right] - P\left[z < \dfrac{161-173}{6}\right] =$

$= P[z < 1{,}25] - P[z < -2] = P[z < 1{,}25] - (1 - P[z < 2]) =$

$= 0{,}8944 - (1 - 0{,}9772) = 0{,}8716$

e) $P[161 \le x \le 170] = P[x < 170] - P[x \le 161] = P\left[z < \dfrac{170-173}{6}\right] - P\left[z < \dfrac{161-173}{6}\right] =$

$= P[z < -0{,}5] - P[z < -2] = (1 - P[z < 0{,}5]) - (1 - P[z < 2]) =$

$= (1 - 0{,}6915) - (1 - 0{,}9772) = 0{,}2857$

f) $P[x = 174] = 0$

g) $P[x > 191] = 1 - P\left[z < \dfrac{191-173}{6}\right] = 1 - P[z < 3] = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$

h) $P[x < 155] = P\left[z < \dfrac{155-173}{6}\right] = P[z < -3] = 1 - P[z < 3] = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$

4 LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL SE APROXIMA A LA NORMAL

C.E.: CE 4.4. (EA 4.4.3.-EA 4.4.4.-EA 4.4.5.)

Página 283

1 **Calcula las probabilidades de las siguientes distribuciones binomiales mediante su correspondiente aproximación a la normal. En todas ellas, ten en cuenta el ajuste de media unidad que hay que hacer al pasar de una variable discreta a una continua.**

a) x **es** $B(100; 0{,}1)$. **Calcula** $P[x = 10]$, $P[x < 2]$ **y** $P[5 < x < 15]$.

b) x **es** $B(1\,000; 0{,}02)$. **Calcula** $P[x > 30]$ **y** $P[x < 80]$.

c) x **es** $B(50; 0{,}9)$. **Calcula** $P[x > 45]$ **y** $P[x \le 30]$.

a) x es $B(100; 0{,}1) \approx x'$ es $N(10; 3)$

$P[x = 10] = P[9{,}5 < x' < 10{,}5] = P[-0{,}17 < z < 0{,}17] = 0{,}135$

$P[x < 2] = P[x' \le 1{,}5] = P[z \le -2{,}83] = 0{,}0023$

$P[5 < x < 15] = P[5{,}5 \le x' \le 14{,}5] = P[-1{,}5 \le z \le 1{,}5] = 0{,}8664$

b) x es $B(1\,000; 0{,}02) \approx x'$ es $N(20; 4{,}427)$

$P[x > 30] = P[x' \ge 30{,}5] = P[z \ge 2{,}37] = 0{,}0089$

$P[x < 80] = P[x' \le 79{,}5] = P[z \le 13{,}44] = 1$

c) x es $B(50; 0{,}9) = x'$ es $N(45; 2{,}12)$

$P[x > 45] = P[x' \ge 45{,}5] = P[z \ge 0{,}24] = 0{,}4052$

$P[x \le 30] = P[x' \le 30{,}5] = P[z \le -6{,}83] = 0$

5 AJUSTE DE UN CONJUNTO DE DATOS A UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) CE 1.4. (EA 1.4.1.-EA 1.4.2.) CE 1.5. (EA 1.5.1-EA 1.5.2.) CE 1.8. (EA 1.8.1.) CE 1.10. (EA 1.10.1.) CE 4.4. (EA 4.4.3.-EA 4.4.4.-EA 4.4.5.) CE 4.5. (EA 4.5.1.-EA 4.5.2.)

Página 285

1 **La tabla adjunta corresponde a las estaturas de 1400 chicas. Estudia si es aceptable considerar que provienen de una distribución normal.**

EXTREMOS DE INTERVALOS	138,5 - 143,5 - 148,5 - 153,5 - 158,5 - 163,5 - 168,5 - 173,5 - 178,5 - 183,5
FRECUENCIAS	2 25 146 327 428 314 124 29 5

Calculamos los parámetros de la distribución:

EXTREMO INF.	EXTREMO SUP.	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
138,5	143,5	141	2	282	39 762
143,5	148,5	146	25	3 650	532 900
148,5	153,5	151	146	22 046	3 328 946
153,5	158,5	156	327	51 012	7 957 872
158,5	163,5	161	428	68 908	11 094 188
163,5	168,5	166	314	52 124	8 652 584
168,5	173,5	171	124	21 204	3 625 884
173,5	178,5	176	29	5 104	898 304
178,5	183,5	181	5	905	163 805
		TOTAL	1 400	225 235	36 294 245

$$\bar{x} = \frac{225\,235}{1\,400} = 160{,}88$$

$$s = \sqrt{\frac{36\,294\,245}{1\,400} - 160{,}88^2} = 6{,}49$$

Consideramos la distribución $N(160{,}88;\ 6{,}49)$.

EXTREMOS DE LOS INTERVALOS x_k	EXTREMOS TIPIFICADOS z_k	$P[z \le z_k]$	$p_k = P[z_k \le z \le z_{k+1}]$	$1\,400 \cdot p_k$	NÚMEROS TEÓRICOS	NÚMEROS OBTENIDOS	|DIFERENCIAS|
138,5	–3,48	0,0003					
143,5	–2,70	0,0035	0,0032	4,48	4	2	2
148,5	–1,92	0,0274	0,0239	33,46	33	25	8
153,5	–1,15	0,1251	0,0977	136,78	137	146	9
158,5	–0,37	0,3557	0,2306	322,84	323	327	4
163,5	0,41	0,6541	0,2984	417,76	418	428	10
168,5	1,18	0,8810	0,2269	317,66	318	314	4
173,5	1,96	0,9750	0,094	131,60	132	124	8
178,5	2,74	0,9969	0,0219	30,66	31	29	2
183,5	3,52	0,9998	0,0029	4,06	4	5	1

Las diferencias son muy pequeñas; podemos admitir la hipótesis de normalidad. Las estaturas de las chicas siguen una distribución normal.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 4.3. (EA 4.3.3.)

Página 286

1. Función de densidad

Hazlo tú

- **Halla el valor de k para que $f(x) = 0,4 + kx$, si $x \in [0, 4]$ y 0 en el resto, sea función de densidad. Calcula:**

$P[x \geq 3]$ $P[x \leq 1]$ $P[1 \leq x \leq 3]$

$y = 0,4 + k \cdot x$

Para que sea función de densidad, el área del trapecio que forma la recta, el eje OY y la recta $x = 4$ tiene que ser 1.

$$A_{trapecio} = \frac{0,4 + (0,4 + k \cdot 4)}{2} \cdot 4 = 1 \rightarrow k = -0,075$$

La función de densidad es: $y = 0,4 - 0,075 \cdot x$

Para cada una de las probabilidades que nos piden hallamos el área del correspondiente trapecio:

$$P[x \geq 3] = \frac{(0,4 - 0,075 \cdot 3) + (0,4 - 0,075 \cdot 4)}{2} \cdot (4 - 3) = 0,1375$$

$$P[x \leq 1] = \frac{(0,4 - 0,075 \cdot 0) + (0,4 - 0,075 \cdot 1)}{2} \cdot (1 - 0) = 0,3625$$

$$P[1 \leq x \leq 3] = \frac{(0,4 - 0,075 \cdot 1) + (0,4 - 0,075 \cdot 3)}{2} \cdot (3 - 1) = 0,5$$

2. Manejo de la tabla de la $N(0, 1)$

Hazlo tú

- **Calcula $P[-0,83 < z < 0,83]$.**

$P[-0,83 < z < 0,83] = P[z < 0,83] - P[z < -0,83] = 0,7967 - (1 - 0,7967) = 0,5934$

4. Aproximación de la binomial a la normal

Hazlo tú

- **a) En el primer apartado hemos tomado diciembre como 1/12 del año. Halla la misma probabilidad tomando diciembre como 31 días de los 365 días del año.**

  b) ¿Qué probabilidad hay de que al menos 5 alumnos hayan nacido un domingo?

a) Se trata de una distribución binomial $B\left(30, \frac{31}{365}\right) = B(30;\ 0{,}85)$.

$np = 30 \cdot 0{,}085 = 2{,}55 < 3$

$1 - 0{,}085 = 0{,}915$

$P[x \geq 1] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0{,}915^{30} = 0{,}93040$

b) Se trata de una distribución binomial $B\left(30, \frac{1}{7}\right) = B(30;\ 0{,}143)$

$np = 30 \cdot 0{,}143 = 4{,}29 > 3 \ \rightarrow$ Podemos aproximar la distribución binomial por una normal.

$\mu = 4{,}29$

$\sigma = \sqrt{4{,}29 \cdot 0{,}143 \cdot (1 - 0{,}143)} = 0{,}73$

x es $B(30;\ 0{,}143) \ \rightarrow \ x'$ es $N(4{,}29;\ 0{,}73)$

La probabilidad que nos piden es:

$$P[x \geq 5] = P[x' > 4{,}5] = P\left[z > \frac{4{,}5 - 4{,}29}{0{,}73}\right] = P[z > 0{,}29] = 1 - P[z < 0{,}29] = 1 - 0{,}6141 = 0{,}3859$$

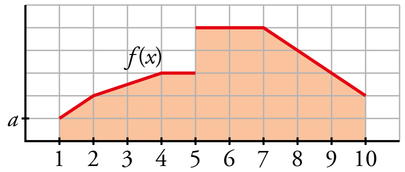
EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 1.5. (EA 1.5.1-EA 1.5.2.) CE 1.8. (EA 1.8.1.)

Página 288

1. Funciones de densidad

- **a) Calcular el valor de *a* para que *f*(*x*) sea función de densidad.**



b) Hallar las siguientes probabilidades:

$P[x < 4]$	$P[4 < x < 9]$
$P[1 < x < 10]$	$P[x = 6]$
$P[0 < x < 2]$	$P[7 < x < 15]$

a) Calculamos las cinco áreas por separado (son trapecios o rectángulos). Las llamamos, de izquierda a derecha, A, B, C, D y E.

Área de la región A = $\dfrac{a+2a}{2} \cdot 1 = \dfrac{3}{2}a$

Área de la región B = $\dfrac{2a+3a}{2} \cdot 2 = 5a$

Área de la región C = $3a \cdot 1 = 3a$

Área de la región D = $5a \cdot 2 = 10a$

Área de la región E = $\dfrac{5a+2a}{2} \cdot 3 = \dfrac{21}{2}a$

La suma de las cinco áreas tiene que valer 1:

$$\frac{3}{2}a + 5a + 3a + 10a + \frac{21}{2}a = 1 \;\rightarrow\; a = \frac{1}{30}$$

b) $P[x < 4] = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{30} + 5 \cdot \dfrac{1}{30} = \dfrac{13}{60} = 0,22$

$P[4 < x < 9] = 3 \cdot \dfrac{1}{30} + 10 \cdot \dfrac{1}{30} + \dfrac{21}{2} \cdot \dfrac{1}{30} = \dfrac{47}{60} = 0,78$

$P[1 < x < 10] = 1$

$P[x = 6] = 0$

$P[0 < x < 2] = P[1 < x < 2] = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{30} = \dfrac{1}{20} = 0,05$

$P[7 < x < 15] = P[7 < x < 10] = \dfrac{21}{2} \cdot \dfrac{1}{30} = \dfrac{7}{20} = 0,35$

2. Tipificación

- **En una cierta prueba, las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0,8 y –0,4 y sus notas reales fueron 88 y 64 puntos, respectivamente. ¿Cuál es la media y cuál la desviación típica de las puntuaciones del examen?**

$$\begin{cases} \dfrac{88-\mu}{\sigma} = 0,8 \\[2mm] \dfrac{64-\mu}{\sigma} = -0,4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 88-\mu = 0,8\sigma \\ 64-\mu = -0,4\sigma \end{cases} \rightarrow \sigma = 20,\ \mu = 72$$

3. Ajuste de una distribución empírica a una normal

- **Un científico ha tomado medidas de la longitud de 1 000 ranas de una determinada especie. Los resultados están en la siguiente tabla:**

LONGITUD (EN cm)	N.° DE RANAS
(10, 12]	25
(12, 14]	228
(14, 16]	475
(16, 18]	240
(18, 20]	32
TOTAL	1 000

Comprobar si los resultados se ajustan a una distribución normal.

MARCA DE CLASE	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
11	25	275	3 025
13	228	2 964	38 532
15	475	7 125	106 875
17	240	4 080	69 360
19	32	608	11 552
TOTAL	1 000	15 052	229 344

$$\bar{x} = \frac{15{,}052}{1000} \approx 15{,}1$$

$$s = \sqrt{\frac{229\,344}{1000} - 15{,}1^2} \approx 1{,}67$$

Consideramos la distribución $N(15{,}1;\ 1{,}67)$

EXTREMOS DE LOS INTERVALOS x_k	EXTREMOS TIPIFICADOS z_k	$P[z \le z_k]$	$p_k = P[z_k \le z \le z_{k+1}]$	$1\,000 \cdot p_k$	NÚMEROS TEÓRICOS	NÚMEROS OBTENIDOS	|DIFERENCIAS|
10	–3,05	0,0011					
12	–1,86	0,0314	0,0303	30,3	30	25	5
14	–0,66	0,2546	0,2232	223,2	223	228	5
16	0,54	0,7054	0,4508	450,8	451	475	24
18	1,74	0,9591	0,2537	253,7	254	240	14
20	2,93	0,9985	0,0394	39,4	39	32	7

Las diferencias son muy pequeñas; podemos admitir la hipótesis de normalidad. Las longitudes de las ranas estudiadas siguen una distribución normal.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 289

Para practicar

Función de densidad

1 **Justifica si pueden ser funciones de densidad las siguientes:**

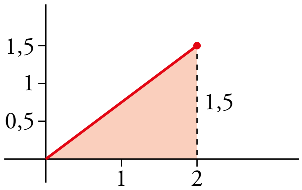
a) $f(x) = 0{,}5 + 0{,}5x$ **con** $x \in [0, 2]$

b) $f(x) = 0{,}5 - x$ **con** $x \in [0, 2]$

c) $f(x) = 1 - 0{,}5x$ **con** $x \in [0, 2]$

Veamos, en cada caso, si el área encerrada bajo la curva es 1:

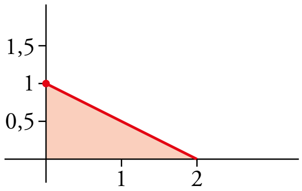
a)



$\text{Área} = \dfrac{1{,}5 \cdot 2}{2} = 1{,}5 \rightarrow$ No puede ser función de densidad.

b) $f(2) = -1{,}5 < 0 \rightarrow$ No puede ser función de densidad, pues tendría que ser $f(x) \geq 0$.

c)



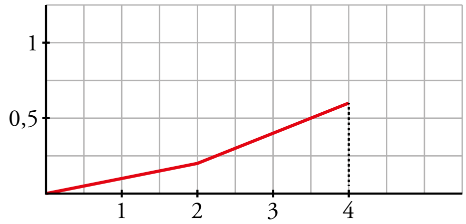
$\left.\begin{array}{l}\text{Área} = \dfrac{1 \cdot 2}{2} = 1 \\ f(x) \geq 0\end{array}\right\} \rightarrow$ Sí puede ser función de densidad.

2 **Halla el valor de k para que esta función sea de densidad:**

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 2k(x-1) & \text{si } 2 < x \le 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Halla estas probabilidades:

$$P[1 \le x \le 3],\ P[x \le 3],\ P[0 \le x \le 7]$$



Calculamos las dos áreas por separado (son triángulos o trapecios):

Área de la región hasta $x = 2 \to \frac{2k}{2} \cdot 2 = 2k$

Área de la región desde $x = 2$ hasta $x = 4 \to \frac{2k \cdot 1 + 2k \cdot 3}{2} \cdot 2 = 8k$

La suma de las áreas tiene que valer 1 $\to 2k + 8k = 1 \to k = \frac{1}{10}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{5}(x-1) & \text{si } 2 < x \le 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$P[1 \le x \le 3] = P[1 \le x \le 2] + P[2 < x \le 3] = \frac{\frac{1}{10} + \frac{2}{10}}{2} \cdot 1 + \frac{\frac{2}{10} \cdot 1 + \frac{2}{10} \cdot 2}{2} \cdot 1 = \frac{9}{20} = 0{,}45$$

$$P[x \le 3] = P[0 \le x \le 2] + P[2 < x \le 3] = \frac{\frac{2}{10}}{2} \cdot 2 + \frac{\frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 2}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

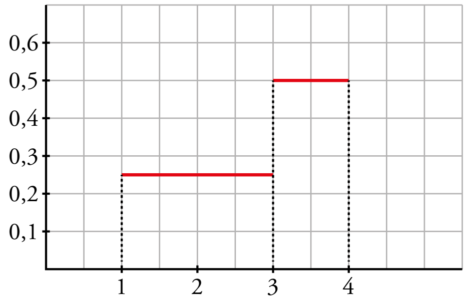
$$P[0 \le x \le 7] = P[0 \le x \le 4] = 1$$

3 **Calcula el valor de a para que esta función sea de densidad:**

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } 1 \le x \le a \\ 1/2 & \text{si } a < x \le 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcula, además, las siguientes probabilidades:

$$P[1 \le x \le 2],\ P[x \le 3],\ P[x > 2]$$



Calculamos las dos áreas por separado (son rectángulos):

Área de la región hasta $x = 3 \to \frac{1}{4} \cdot (a - 1)$

Área de la región desde $x = 3$ hasta $x = 4 \to \frac{1}{2} \cdot (4 - a)$

La suma de las áreas tiene que valer 1 $\to \frac{1}{4} \cdot (a - 1) + \frac{1}{2} \cdot (4 - a) = 1 \to a = 3$

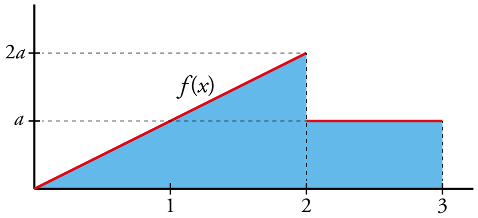
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } 1 \le x \le 3 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 3 < x \le 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$P[1 \le x \le 2] = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$

$P[x \le 3] = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$

$P[x > 2] = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4}$

4 **Calcula a para que esta gráfica sea una representación de una función de densidad. Escribe su expresión analítica:**



Calculamos las dos áreas por separado (son triángulos o rectángulos):

Área de la región hasta $x = 2 \to \frac{2a}{4} \cdot 2 = a$

Área de la región desde $x = 2$ hasta $x = 3 \to a$

La suma de las áreas tiene que valer 1 $\to 2a = 1 \to a = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } \ 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \ 2 < x \le 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Manejo de la tabla $N(0, 1)$

5 **En una distribución $N(0, 1)$, calcula estas probabilidades:**

a) $P[z = 2]$ **b)** $P[z \le 2]$

c) $P[z \ge 2]$ **d)** $P[z \le -2]$

e) $P[z \ge -2]$ **f)** $P[-2 \le z \le 2]$

a) $P[z = 2] = 0$ b) $P[z \le 2] = 0{,}9772$

c) $P[z \ge 2] = 1 - 0{,}9792 = 0{,}0228$ d) $P[z \le -2] = 0{,}0228$

e) $P[z \ge -2] = 1 - 0{,}0228 = 0{,}9772$ f) $P[-2 \le z \le 2] = 2(P[z \le 2] - 0{,}5) = 0{,}9544$

6 **En una distribución $N(0, 1)$, calcula:**

a) $P[z \le 1{,}83]$ **b)** $P[z \ge 0{,}27]$

c) $P[z \le -0{,}87]$ **d)** $P[z \ge 2{,}5]$

a) $P[z \le 1{,}83] = 0{,}9664$ b) $P[z \ge 0{,}27] = 0{,}3935$

c) $P[z \le -0{,}87] = 0{,}1922$ d) $P[z \ge 2{,}5] = 0{,}0062$

7 **En una distribución $N(0, 1)$, calcula estas probabilidades:**

a) $P[z = 1{,}6]$ **b)** $P[-2{,}71 \le z \le -1{,}83]$

c) $P[1{,}5 \le z \le 2{,}5]$ **d)** $P[-1{,}87 \le z \le 1{,}25]$

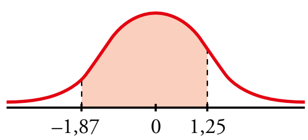
a) $P[z = 1{,}6] = 0$

b) $P[-2{,}71 \le z \le -1{,}83] = P[1{,}83 \le z \le 2{,}71] = P[z \le 2{,}71] - P[z \le 1{,}83] = 0{,}0302$

c) $P[1{,}5 \le z \le 2{,}5] = P[z \le 2{,}5] - P[z \le 1{,}5] = 0{,}0606$

d) $P[-1{,}87 \le z \le 1{,}25] = P[z \le 1{,}25] - P[z \le -1{,}87] = P[z \le 1{,}25] - P[z \ge 1{,}87] =$

$= P[z \le 1{,}25] - (1 - P[z < 1{,}87]) = 0{,}8637$



8 **Calcula k en cada uno de los siguientes casos:**

a) $P[z < k] = 0,8365$ **b)** $P[z > k] = 0,8365$

c) $P[z < k] = 0,1894$ **d)** $P[-k < z < k] = 0,95$

a) $k = 0,98$ b) $k = -0,98$

c) $k = -0,88$ d) $k = 1,96$

Tipificación

9 **En un examen tipo test, la media fue 28 puntos y la desviación típica, 10 puntos. Calcula la puntuación tipificada en los alumnos que obtuvieron:**

a) 38 puntos **b) 14 puntos**

c) 45 puntos **d) 10 puntos**

$\mu = 28;\ \sigma = 10$

a) $\frac{38-28}{10} = 1$ b) $\frac{14-28}{10} = -1,4$

c) $\frac{45-28}{10} = 1,7$ d) $\frac{10-28}{10} = -1,8$

10 **Si en el examen del problema anterior la puntuación tipificada de un alumno fue 0,8, ¿cuántos puntos obtuvo? ¿Cuántos puntos corresponden al valor tipificado de –0,2?**

$0,8 \to 0,8 \cdot 10 + 28 = 36$

$-0,2 \to -0,2 \cdot 10 + 28 = 26$

11 **Los pesos de un grupo de elefantes adultos tienen una media de 6 toneladas. Si el peso tipificado de un ejemplar de 7 000 kg es 0,625, ¿cuál es la desviación típica de la población? ¿Qué tipificación corresponde a un peso de 5 200 kg?**

$\frac{7\,000-6\,000}{\sigma} = 0,625 \to \sigma = 1\,600$

Para un peso de 5 200 kg $\to \frac{5\,200-6\,000}{1600} = -\frac{1}{2} = -0,5$

Cálculo de probabilidades en $N(\mu, \sigma)$

12 **En una distribución $N(43, 10)$, calcula cada una de estas probabilidades:**

a) $P[x \ge 43]$ **b)** $P[x \le 30]$

c) $P[40 \le x \le 55]$ **d)** $P[30 \le x \le 40]$

a) $P[x \ge 43] = 0,5$

b) $P[x \le 30] = P\left[z \le \frac{30-43}{10}\right] = P[z \le -1,3] = 1 - 0,9032 = 0,0968$

c) $P[40 \le x \le 55] = P\left[\frac{40-43}{10} \le z \le \frac{55-43}{10}\right] = P[-0,3 \le z \le 1,2] = 0,5028$

d) $P[30 \le x \le 40] = P[-1,3 \le z \le -0,3] = P[0,3 \le z \le 1,3] = P[z \le 1,3] - P[z \le 0,3] =$
$= 0,9032 - 0,6179 = 0,2853$

13 **En una distribución $N(151, 15)$, calcula:**

a) $P[x \le 136]$ **b)** $P[120 \le x \le 155]$

c) $P[x \ge 185]$ **d)** $P[140 \le x \le 160]$

a) $P[x \le 136] = P\left[z \le \frac{136-151}{15}\right] = P[z \le -1] = P[z \le 1] = 1 - P[z < 1] = 0{,}1587$

b) $P[120 \le x \le 155] = P[2{,}07 \le z \le 0{,}27] = 0{,}5873$

c) $P[x \ge 185] = P[z \ge 2{,}27] = 0{,}0116$

d) $P[140 \le x \le 160] = P[-0{,}73 \le z \le 0{,}6] = 0{,}5149$

14 **En una distribución $N(22, 5)$, calcula:**

a) $P[x \le 27]$ **b)** $P[x \ge 27]$

c) $P[x \ge 12{,}5]$ **d)** $P[15 \le x \le 20]$

e) $P[15 \le x \le 27]$ **f)** $P[12{,}5 \le x \le 15]$

a) $P[x \le 27] = P[z \le 1] = 0{,}8413$

b) $P[x \ge 27] = 0{,}1587$

c) $P[x \ge 12{,}5] = P[z \le 1{,}9] = 0{,}9713$

d) $P[15 \le x \le 20] = P[-1{,}4 \le z \le -0{,}4] = 0{,}2638$

e) $P[15 \le x \le 27] = P[-1{,}4 \le z \le 1] = 0{,}7605$

f) $P[12{,}5 \le x \le 15] = P[-1{,}9 \le z < -1{,}4] = 0{,}0521$

Binomial → Normal

15 **Si lanzamos un dado mil veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de cincos obtenidos sea menor que 100?**

x es $B(1\,000; 0{,}1667) \rightarrow x'$ es $N(166{,}67; 11{,}79)$

$P[x < 100] = P[x' \le 99{,}5] = P[z \le -5{,}70] = 0$

16 **Una moneda se lanza 400 veces. Calcula la probabilidad de que el número de caras:**

a) **sea mayor que 200.**

b) **esté entre 180 y 220.**

$np = nq = 400 \cdot 0{,}5 = 200 > 5$

Se aproxima de forma casi perfecta por una normal.

$\mu = 200, \ \sigma = \sqrt{400 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 10 \rightarrow N(200, 10)$

a) $P[x > 200] = P[x' \ge 200{,}5] = P\left[z \ge \frac{200{,}5-200}{10}\right] = P[z \ge 0{,}05] = 1 - 0{,}5199 = 0{,}4801$

b) $P[180 \le x \le 220] = P[179{,}5 \le x' \le 220{,}5] =$

$$= P[179{,}5 \le x' \le 220{,}5] + P\left[\frac{179{,}5-200}{10} \le x' \le \frac{220{,}5-200}{10}\right] =$$

$$= P[-2{,}05 \le x' \le 2{,}05] = 0{,}9798 - (1 - 0{,}9798) = 0{,}9596$$

17 **Se lanza 2 000 veces un dado de 12 caras. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos 180 unos?**

$x \to$ número de unos. x sigue una distribución $B\left(2\,000, \dfrac{1}{12}\right) = B(2\,000;\ 0{,}083)$

$np = 2\,000 \cdot 0{,}083 = 166 > 5$

$nq = 2\,000 \cdot (1 - 0{,}083) = 1\,834 > 5$

$\sqrt{npq} = \sqrt{2\,000 \cdot 0{,}083 \cdot (1 - 0{,}083)} = 12{,}34$

Se aproxima de forma casi perfecta por una normal.

$\mu = 166,\ \sigma = 12{,}34 \to N(166;\ 12{,}34)$

$P[x \ge 180] = P[x' \ge 179{,}5] = P\left[z \ge \dfrac{179{,}5 - 180}{12{,}34}\right] = P[z \ge -0{,}04] = 0{,}5060$

Para resolver

18 **El tiempo necesario para que una ambulancia llegue a un centro deportivo se distribuye según una variable normal de media 17 minutos y desviación típica 3 minutos.**

Calcula la probabilidad de que el tiempo de llegada esté comprendido entre 13 minutos y 21 minutos.

x es $N(17, 3)$

$P[13 < x < 21] = P[-1{,}33 < z < 1{,}33] = 0{,}8164$

Página 290

19 **La talla media de las 200 alumnas de un centro escolar es de 165 cm, y la desviación típica, de 10 cm.**

Si las tallas se distribuyen normalmente, calcula la probabilidad de que una alumna elegida al azar mida más de 180 cm.

¿Cuántas alumnas puede esperarse que midan más de 180 cm?

$x \to$ Talla. Sigue una normal $N(165, 10)$.

$P[x > 180] = P\left[z \ge \dfrac{180 - 165}{10}\right] = P[z \ge 1{,}5] = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$

$0{,}0668 \cdot 200 = 13{,}36$

Se espera que haya 13 alumnas que midan más de 180 cm.

20 ODS Meta 3.4. **[Tras la visualización del vídeo, se puede plantear un debate sobre qué hábitos conviene seguir para prevenir las enfermedades no transmisibles].**

La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal) de las personas adultas de un determinado país, sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica 6. Si tener un IMC superior a 35 significa ser obeso, encuentra la proporción de personas adultas obesas.

$x \to$ masa corporal sigue una normal $N(26, 6)$.

$P[x > 35] = P\left[z > \dfrac{35 - 26}{6}\right] = P[z > 1{,}5] = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$

La proporción será del 6,68 %.

21 **Para aprobar un examen de ingreso en una escuela, se necesita obtener 50 puntos o más. Por experiencia de años anteriores, sabemos que la distribución de puntos obtenidos por los alumnos es normal, con media 55 puntos y desviación típica 10.**

a) ¿Qué probabilidad hay de que un alumno elegido al azar apruebe?

b) Si se presentan al examen 400 estudiantes, ¿cuántos cabe esperar que ingresen?

$x \rightarrow$ Puntos. Sigue una normal $N(55, 10)$.

a) $P[x > 50] = P\left[z \geq \frac{50-55}{10}\right] = P[z \geq -0{,}5] = 0{,}6915$

b) $0{,}6915 \cdot 400 = 276{,}6$

Se espera que ingresarán 277 alumnos.

22 Rastreador de problemas. **[La resolución del problema se puede aprovechar para trabajar esta estrategia de pensamiento].**

Para iluminar el recinto de un estadio deportivo se quieren instalar focos. El suministrador asegura que el tiempo de vida de los focos es una variable normal con media de 1 500 h y desviación típica de 200 h.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un foco elegido al azar luzca por lo menos 1 000 horas?

b) Si se compran 2 000 focos, ¿cuántos puede esperarse que luzcan al menos 1 000 horas?

$x \rightarrow$ Tiempo de vida. Sigue una normal $N(1\,500, 200)$.

a) $P[x \geq 1\,000] = P\left[z \geq \frac{1000-1500}{200}\right] = P[z \geq -2{,}5] = 0{,}9938$

b) $0{,}9938 \cdot 1\,000 = 993{,}8$

Se espera que 994 focos duren, al menos, 1 000 horas.

23 **Los pesos de 2 000 soldados presentan una distribución normal de media 75 kg y desviación típica 8 kg. Halla la probabilidad de que un soldado elegido al azar pese:**

a) más de 71 kg. **b) entre 73 y 79 kg.**

c) menos de 80 kg. **d) más de 85 kg.**

$x \rightarrow$ Peso. Sigue una normal $N(75, 8)$.

a) $P[x \geq 71] = P\left[z \geq \frac{71-75}{8}\right] = P[z \geq -0{,}5] = 0{,}6915$

b) $P[73 \leq x \leq 79] = P\left[\frac{73-75}{8} \leq z \leq \frac{79-75}{8}\right] = P[-0{,}25 \leq z \leq 0{,}5] = 0{,}6915 - (1 - 0{,}5987) = 0{,}2902$

c) $P[x \leq 80] = P\left[z \leq \frac{80-75}{8}\right] = P[z \leq 0{,}625] = 0{,}7324$

d) $P[x \geq 85] = P\left[z \geq \frac{85-75}{8}\right] = P[z \geq 1{,}25] = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$

24 **La duración de un cierto tipo de pilas eléctricas es una variable que sigue una distribución normal de media 50 h y desviación típica 5 h. Calcula la probabilidad de que una de estas pilas, elegida al azar:**

a) dure menos de 42 h. **b) dure entre 42 h y 57 h.**

$x \rightarrow$ duración de la pila sigue una normal $N(50, 5)$.

a) $P\left[x<42\right]=P\left[z<\frac{42-50}{5}\right]=P\left[z<-1,6\right]=P\left[z>1,6\right]=1-P\left[z<1,6\right]=1-0,9452=0,0548$

b) $P\left[42<x<57\right]=P\left[x<57\right]-P\left[x<42\right]=P\left[z<\frac{57-50}{5}\right]-0,0548 \rightarrow P\left[z<1,4\right]-0,0548=$

$=0,9192-0,0548=0,8644$

25 **A una prueba de oposición se han presentado 2 500 personas para 300 plazas. Las calificaciones que han obtenido los aspirantes tienen una distribución normal de media 6,5 y desviación típica 2. Calcula:**

a) La nota de corte para los admitidos.

b) La probabilidad de que un estudiante elegido al azar tenga una nota mayor que 9.

$x \rightarrow$ calificación de los aspirantes sigue una normal $N(6,5;\ 2)$.

a) Hay disponibles 300 plazas para 2 500 aspirantes.

La probabilidad de tener plaza será $\frac{300}{2500}=0,12$.

$P\left[x>k\right]=P\left[z>\frac{k-6,5}{2}\right]=1-P\left[z<\frac{k-6,5}{2}\right]=0,12 \rightarrow P\left[z<\frac{k-6,5}{2}\right]=1-0,12=0,88$

Mirando la tabla:

$P\left[z<1,18\right]=0,8810 \rightarrow \frac{k-6,5}{2}=1,18 \rightarrow k=2,36+6,5=8,86$

La nota de corte será 8,86.

b) $P\left[x>9\right]=P\left[z>\frac{9-6,5}{2}\right]=1-P\left[z<1,25\right]=1-0,8944=0,1056$

26 **Preparar la tarea. [El alumnado, por grupos, puede analizar los pasos a realizar para resolver el problema correctamente].**

Un test de sensibilidad musical da resultados que se distribuyen según una $N(65, 18)$.

Se quiere hacer un baremo por el cual, a cada persona, junto con la puntuación obtenida, se le asigne uno de los siguientes comentarios: duro de oído, poco sensible a la música, normal, sensible a la música, extraordinariamente dotado para la música.

Se pretende que haya en cada uno de los grupos, respectivamente, un 10 %, un 35 %, un 30 %, un 20 % y un 5 % del total de individuos observados.

a) ¿En qué puntuaciones pondrías los límites entre los distintos grupos?

b) ¿Qué comentario se le haría a una persona que obtuviera una puntuación de 80? ¿Y a otra que obtuviera una puntuación de 40?

a) x sigue una normal $N(65, 18)$.

- Duro de oído

$$P[x \le k] = P\left[z \le \frac{k-65}{18}\right] = 0{,}1 = 1 - 0{,}9$$

$$\frac{k-65}{18} = -1{,}285 \;\rightarrow\; k = 41{,}87$$

- Poco sensible a la música

$$P[x \le k] = P\left[z \le \frac{k-65}{18}\right] = 0{,}35 + 0{,}1 = 0{,}45 = 1 - 0{,}55$$

$$\frac{k-65}{18} = -0{,}125 \;\rightarrow\; k = 62{,}75$$

- Normal

$$P[x \le k] = P\left[z \le \frac{k-65}{18}\right] = 0{,}45 + 0{,}3 = 0{,}75$$

$$\frac{k-65}{18} = 0{,}675 \;\rightarrow\; k = 77{,}15$$

- Sensible a la música

$$P[x \le k] = P\left[z \le \frac{k-65}{18}\right] = 0{,}75 + 0{,}2 = 0{,}95$$

$$\frac{k-65}{18} = 1{,}645 \;\rightarrow\; k = 94{,}61$$

Puntuación menor que 41,87 $\rightarrow$ Duro de oído.

Entre 41,87 y 62,75 $\rightarrow$ Poco sensible a la música.

Entre 62,75 y 77,15 $\rightarrow$ Normal.

Entre 77,15 y 94,61 $\rightarrow$ Sensible a la música.

Más de 94,61 $\rightarrow$ Extraordinariamente dotado para la música.

b) 80 $\rightarrow$ Sensible a la música.

40 $\rightarrow$ Duro de oído.

27 **En un centro de idiomas se siguen dos métodos de inglés. Se ha comprobado que la calificación obtenida por los estudiantes sigue una distribución normal de media 5, si se ha seguido el método A, y una normal de media 6, si se ha seguido el método B.**

Se sabe que el 4 % de los estudiantes que han seguido el método A obtienen una calificación inferior a 3,5 y que el 2 % de los que han seguido el método B superan el 8.

a) ¿Qué porcentaje de estudiantes que siguen el método A no superan la calificación de 6,5?

b) ¿Qué porcentaje de estudiantes del método B obtienen una calificación comprendida entre 4 y 6?

a) $x \to$ calificación en A.

La distribución normal es simétrica respecto de su media.

Como $\mu = 5 \to P[x \le 3{,}5] = P[x \ge 6{,}5] = 0{,}04$

Por tanto, el porcentaje de estudiantes que siguen el método A y no superan la calificación de 6,5 es del 4 %.

b) $x \to$ calificación en B.

La distribución normal es simétrica respecto de su media.

Como $\mu = 6 \to P[4 \le x \le 6] = P[6 \le x \le 8] = P[x \le 8] - P[x \le 6] = (1 - 0{,}02) - 0{,}5 = 0{,}48$

Por tanto, el porcentaje de estudiantes del método B que obtienen una calificación comprendida entre 4 y 6 es del 48 %.

28 **En un examen psicotécnico, las notas de Brianda y Christian fueron, respectivamente, 84 y 78. Sabemos que esas puntuaciones tipificadas son 1,75 y 1 respectivamente. Calcula la media y la desviación típica de la distribución.**

* ***Observa el ejercicio guiado 2.***

$x \to$ calificación. Sigue una normal $N(\mu, \sigma)$.

μ, σ son la solución del siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{84-\mu}{\sigma} = 1{,}75 \\ \dfrac{78-\mu}{\sigma} = 1 \end{array}\right\} \to \mu = 70, \ \sigma = 8$$

29 **Las alturas de los alumnos de una clase siguen una $N(\mu, \sigma)$. Sonia, con 172 cm, y Begoña, con 167 cm, tienen unas alturas tipificadas de 1,4 y 0,4, respectivamente.**

a) ¿Cuál es altura de Ana si su altura tipificada es de –1?

b) ¿Cuál es la tipificación de la altura de Azucena si mide 165 cm?

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{172-\mu}{\sigma} = 1{,}4 \\ \dfrac{167-\mu}{\sigma} = 0{,}4 \end{array}\right\} \to \mu = 165, \ \sigma = 5$$

a) $\dfrac{x-165}{5} = -1 \to x = 160$

Estefanía mide 160 cm.

b) Es la media, luego su tipificación es 0.

30 El diámetro de las piezas producidas en una fábrica sigue una normal cuya media es de 45 mm.

a) Determina su desviación típica sabiendo que la probabilidad de que una pieza tenga un diámetro mayor que 50 mm es igual a 0,0062.

b) Si se analizan 820 piezas, ¿cuántas se estima que tendrán un diámetro comprendido entre 39,7 y 43,5 mm?

* ***Observa el ejercicio resuelto 3.***

a) $P[x \geq 50] = 0{,}0062$

$$P[x \geq 50] = P\left[z \geq \frac{50-45}{\sigma}\right] = P\left[z \geq \frac{5}{\sigma}\right] = 0{,}0062$$

$$P\left[z \leq \frac{5}{\sigma}\right] = 1 - 0{,}0062 = 0{,}9938 \rightarrow \frac{5}{\sigma} = 2{,}5 \rightarrow \sigma = 2$$

b) $P[39{,}7 \leq x \leq 43{,}5] = P\left[\frac{39{,}7-45}{2} \leq z \leq \frac{43{,}5-45}{2}\right] = P[-2{,}65 \leq z \leq -0{,}75] =$

$$= P[z \leq -0{,}75] - P[z \leq -2{,}65] = (1 - 0{,}7734) - (1 - 0{,}9960) = 0{,}2226$$

Como hay 820 piezas, $820 \cdot 0{,}2226 = 182{,}53$

Se estima que 183 piezas tendrán un diámetro comprendido entre 39,7 mm y 43,5 mm.

Página 291

31 Una compañía de autobuses sabe que el retraso en la llegada sigue una distribución normal de media 5 min, y que el 68,26 % de los autobuses llega con un retraso de entre 2 y 8 minutos.

a) ¿Cuál es la desviación típica?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un autobús llegue puntual o antes de la hora?

a) $P[2 \leq x \leq 8] = P\left[\frac{2-5}{\sigma} \leq z \leq \frac{8-5}{\sigma}\right] = P\left[-\frac{3}{\sigma} \leq z \leq \frac{3}{\sigma}\right] = P\left[z \leq \frac{3}{\sigma}\right] - P\left[z \leq -\frac{3}{\sigma}\right] =$

$$= P\left[z \leq \frac{3}{\sigma}\right] - \left(1 - P\left[z \leq \frac{3}{\sigma}\right]\right) = 2P\left[z \leq \frac{3}{\sigma}\right] - 1 = 0{,}6826$$

$$P\left[z \leq \frac{3}{\sigma}\right] = \frac{1+0{,}6826}{2} = 0{,}8413 \rightarrow \frac{3}{\sigma} = 1 \rightarrow \sigma = 3$$

b) $P[x \leq 0] = P\left[z \leq \frac{-5}{3}\right] = P[z \leq -1{,}6667] = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$

32 En un bombo de lotería tenemos 10 bolas numeradas del 0 al 9. Cada vez que se extrae una, se devuelve al bombo. Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que el 0 salga más de 12 veces.

$x \rightarrow$ número de ceros. Sigue una binomial $B(100;\ 0{,}1)$.

$np = 10 > 5$

$nq = 90 > 5$

Se puede aproximar por una normal.

$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 3$

x' sigue una normal $N(10, 3)$.

$$P[x \geq 12] = P[x' \geq 11{,}5] = P\left[z \geq \frac{11{,}5-10}{3}\right] = P[z \geq 0{,}5] = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$$

33 **En un hospital, el 54 % de los nacimientos son niñas. Halla la probabilidad de que de 2 500 nacimientos, el número de niños esté entre 1 200 y 1 400, ambos inclusive.**

$x \rightarrow$ número de niños. Sigue una binomial $B(2\,500;\ 0{,}46)$.

$np = 2\,500 \cdot 0{,}46 = 1\,150 > 5$

$nq = 2\,500 \cdot 0{,}54 = 1\,350 > 5$

$\sqrt{npq} = \sqrt{2\,500 \cdot 0{,}46 \cdot 0{,}54} = 24{,}92$

x se puede aproximar por una normal $N(1\,150;\ 24{,}92)$.

$$P[1\,200 \le x \le 1\,400] = P[1\,199{,}5 \le x' \le 1\,400{,}5] = P\left[\frac{1199{,}5 - 1150}{24{,}92} \le z \le \frac{1\,400{,}5 - 1150}{24{,}92}\right] =$$

$$= P[1{,}9864 \le z \le 10{,}052] = 1 - 0{,}9761 = 0{,}0239$$

34 **El 2,5 % de las lentes que salen de una fábrica son defectuosas.**

Sabiendo que se fabricaron 6 000 lentes, calcula la probabilidad de que:

a) Haya más de 160 defectuosas.

b) Salgan al menos 5 865 lentes sin defectos.

c) Haya 150 lentes defectuosas.

$x \rightarrow$ lentes defectuosas

x sigue una binomial $B(6000;\ 0{,}025)$.

$n = 6000;\ \ p = 0{,}025;\ \ q = 1 - p = 0{,}975 \ \rightarrow\ np = 150;\ \ \sqrt{npq} = 12{,}093$

$B(6000; 0{,}025) \ \rightarrow\ N(np, \sqrt{npq}) = N(150; 12{,}093)$

a) $P[x > 160] = P\left[z > \dfrac{160 - 150}{12{,}093}\right] = 1 - P[z < 0{,}826] = 1 - 0{,}7936 = 0{,}2061$

b) 5 865 o más lentes son sin defectos $\rightarrow$ menos de 135 son defectuosas.

$$P[x < 135] = P\left[z < \frac{135 - 150}{12{,}093}\right] = P[z < -1{,}24] = 1 - P[z < 1{,}24] = 1 - 0{,}8925 = 0{,}1075$$

c) $P[x = 150] = P[149{,}5 < x < 150{,}5] = P\left[\dfrac{149{,}5 - 150}{2} < z < \dfrac{150{,}5 - 150}{2}\right] = P[-0{,}25 < z < 0{,}25] =$

$$= P[z < 0{,}25] - P[z < -0{,}25] = 2P[z < 0{,}25] - 1 = 0{,}1974$$

Cuestiones teóricas

35 **¿Qué relación guardan dos curvas de la distribución normal con la misma media y diferente desviación típica?**

¿Y si tienen la misma desviación típica y diferente media?

Si tienen la misma media, están centradas en la misma vertical. Cuanto mayor es la desviación típica, menor altura tiene la curva en la vertical de la media.

Si tienen la misma desviación típica, son igual de altas, tienen la misma forma, pero una está desplazada a la izquierda de la otra.

Para profundizar

36 Las notas de un examen siguen una normal. El 15,87 % tiene una nota superior a 7, y el 15,87 %, una nota inferior a 5.

a) ¿Cuál es la media del examen?

b) ¿Qué porcentaje de alumnos tiene una nota entre 6 y 7?

$x \rightarrow$ nota. Sigue una normal $N(\mu, \sigma)$.

a) Por la simetría de la distribución normal, de los datos se deduce que $\mu = 6$.

b) Calculamos $P[x \le 7]$:

$P[x \ge 7] = 0{,}1587 \rightarrow P[x \le 7] = 1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$

Por tanto:

$P[6 \le x \le 7] = P[x \le 7] - P[x \le 6] = 0{,}8413 - 0{,}5 = 0{,}3413$

Un 34,13 % de los alumnos tiene entre 6 y 7.

37 Un juego consiste en lanzar tres dados. Ganas si obtienes tres resultados distintos y la suma de los dos menores es igual al mayor. ¿Qué probabilidad hay de ganar al menos 100 veces de 600 partidas?

Los casos favorables son: (1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 5), (1, 5, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 6) y cada uno de estos casos se puede conseguir de 3! = 6 formas distintas.

Por tanto:

$$P[\text{ganar}] = \frac{36}{6^3} = \frac{1}{6}$$

$x \rightarrow$ número de partidas ganadas. Sigue una binomial $B\left(600, \frac{1}{6}\right)$.

$$np = 600 \cdot \frac{1}{6} = 100 > 5$$

$$nq = 600 \cdot \frac{5}{6} = 500 > 5$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 9{,}13$$

x se puede aproximar por una normal $N(100; 9{,}13)$.

$$P[x \ge 100] = P[x' \ge 99{,}5] = P\left[z \ge \frac{99{,}5 - 100}{9{,}13}\right] = P[z \ge -0{,}0548] = P[z \le 0{,}0548] = 0{,}5199$$

38 **En la fabricación de una pieza intervienen dos máquinas. A: produce un taladro cilíndrico cuyo diámetro, en milímetros, es $N(23; 0{,}5)$. B: secciona las piezas con un grosor que es, en centímetros, $N(11{,}5; 0{,}4)$. Ambos procesos son independientes.**

a) Calcula qué porcentaje de piezas tiene un taladro comprendido entre 20,5 y 24 mm.

b) Encuentra el porcentaje de piezas que tienen un grosor comprendido entre 10,5 y 12,7 cm.

c) Suponiendo que solo son válidas las piezas cuyas medidas son las dadas en a) y en b), calcula qué porcentaje de piezas aceptables se consigue.

a) $x \rightarrow$ diámetro. Sigue una normal $N(23; 0{,}5)$.

$$P[20{,}5 \le x \le 24] = P\left[\frac{20{,}5-23}{0{,}5} \le z \le \frac{24-23}{0{,}5}\right] = P\left[z \le \frac{24-23}{0{,}5}\right] - P\left[z \le \frac{20{,}5-23}{0{,}5}\right] =$$

$$= P[z \le 2] - P[z \le -5] = 0{,}9772 - (1-1) = 0{,}9772$$

Un 97,72 % de piezas tiene un taladro comprendido entre 20,5 mm y 24 mm.

b) $x \rightarrow$ grosor. Sigue una normal $N(11{,}5; 0{,}4)$.

$$P[10{,}5 \le x \le 12{,}7] = P\left[\frac{10{,}5-11{,}5}{0{,}4} \le z \le \frac{12{,}7-11{,}5}{0{,}4}\right] =$$

$$= P\left[z \le \frac{12{,}7-11{,}5}{0{,}4}\right] - P\left[z \le \frac{10{,}5-11{,}5}{0{,}4}\right] =$$

$$= P[z \le 3] - P[z \le -2{,}5] = 0{,}9987 - (1-0{,}9798) = 0{,}9785$$

Un 97,85 % de piezas tiene un grosor comprendido entre 10,5 cm y 12,7 cm.

c) Como los procesos son independientes:

$P[\text{diámetro válido y grosor válido}] = 0{,}9772 \cdot 0{,}9785 = 0{,}95619$

Hay un 95,62 % de piezas válidas.

39 Se lanzan dos dados 120 veces y se suman los puntos:

SUMA	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
VECES	3	8	9	11	20	19	16	13	11	6	4

¿Se puede aceptar que estos datos siguen una normal?

Calculamos los parámetros de la distribución:

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
2	3	6	12
3	8	24	72
4	9	36	144
5	11	55	275
6	20	120	720
7	19	133	931
8	16	128	1 024
9	13	117	1 053
10	11	110	1 100
11	6	66	726
12	4	48	576
TOTAL	120	843	6 633

$\overline{x} = \frac{843}{120} = 7,025$ $\qquad s = \sqrt{\frac{6\,633}{120} - 7,025^2} = 2,434$

Consideramos la distribución $N(7,025; 2,434)$.

EXTREMOS DE LOS INTERVALOS x_k	EXTREMOS TIPIFICADOS z_k	$P[z \le z_k]$	$p_k = P[z_k \le z \le z_{k+1}]$	$120 \cdot p_k$	NÚMEROS TEÓRICOS	NÚMEROS OBTENIDOS	|DIFERENCIAS|
1,5	–2,27	0,0116					
2,5	–1,86	0,0314	0,0198	2,376	3	3	0
3,5	–1,45	0,0735	0,0421	5,052	5	8	3
4,5	–1,04	0,1492	0,0757	9,084	9	9	0
5,5	–0,63	0,2643	0,1151	13,812	14	11	3
6,5	–0,22	0,4129	0,1486	17,832	18	20	2
7,5	0,20	0,5793	0,1664	19,968	20	19	1
8,5	0,61	0,7291	0,1498	17,976	18	16	2
9,5	1,02	0,8461	0,117	14,04	14	13	1
10,5	1,43	0,9236	0,0775	9,3	10	11	1
11,5	1,84	0,9671	0,0435	5,22	6	6	0
12,5	2,25	0,9878	0,0207	2,484	3	4	1

Las diferencias son muy pequeñas; podemos admitir la hipótesis de normalidad. Las sumas de los puntos siguen una distribución normal.

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 1.12. (EA 1.12.1.) CE 4.3. (EA 4.3.3.) CE 4.4. (EA 4.4.5.)

Página 291

1 **Comprueba que $y = \frac{x}{2} - 1$, $2 \le x \le 4$ es una función de densidad. Represéntala y calcula:**

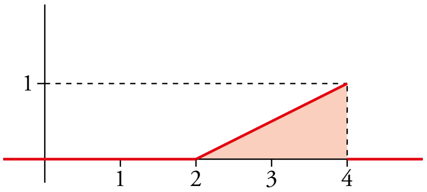
a) $P[x = 3]$ **b)** $P[x < 3]$ **c)** $P[x > 3{,}5]$ **d)** $P[3 \le x < 3{,}5]$

$f(x) = \frac{x}{2} - 1$, $2 \le x \le 4$, es una función de densidad (de una distribución estadística de variable continua) porque:

– Es no negativa (es decir, $\frac{x}{2} - 1 \ge 0$ en el intervalo [2, 4]), pues para $x = 2$, $f(2) = \frac{2}{2} \cdot 1 = 0$. Y como es creciente $\left(\text{se trata de una recta de pendiente } \frac{1}{2}\right)$, $f(x) > 0$ para $2 < x \le 4$.

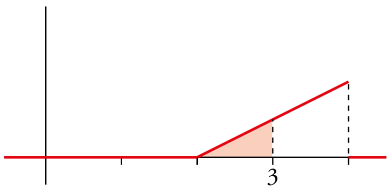
Suponemos que $f(x) = 0$ fuera del intervalo [2, 4].

– El área bajo la curva es la de un triángulo de base 2 y altura 1. Por tanto, área = 1.



a) $P[x = 3] = 0$, pues en las distribuciones de variable continua las probabilidades puntuales son 0.

b) $P[x < 3] = \frac{1}{4}$, pues es el área de un triángulo de base 1 y altura $\frac{1}{2}$.

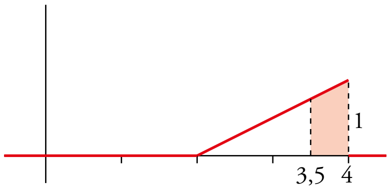


c) $P[x > 3{,}5]$

$f(3{,}5) = \frac{3{,}5}{2} - 1 = 0{,}75$

$f(4) = 1$

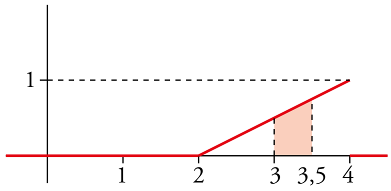
Área del trapecio $= \frac{1 + 0{,}75}{2} \cdot (4 - 3{,}5) = 0{,}4375$



$P[x > 3{,}5] = 0{,}4375$

d) $f(3) = 0{,}5$; $f(3{,}5) = 0{,}75$

$P[3 \le x \le 3{,}5] = \frac{(0{,}5 + 0{,}75) \cdot 0{,}75}{2} = 0{,}46875$



2 **Sabemos que una variable z es $N(0, 1)$.**

a) Calcula las siguientes probabilidades:

$P[1{,}53 < z < 2{,}1]$ $\quad\quad$ $P[-1{,}53 < z < 2{,}1]$

b) Halla b y k para que se cumpla lo siguiente:

$P[z < b] = 0{,}4$ $\quad\quad$ $P[-k < z < k] = 0{,}9$

a) $P[1{,}53 < x < 2{,}1] = P[z < 2{,}1] - P[z < 1{,}53] = \phi(2{,}1) - \phi(1{,}53) = 0{,}9821 - 0{,}9370 = 0{,}0451$

$P[-1{,}53 < z < 2{,}1] = P[z < 2{,}1] - P[z < -1{,}53] = \phi(2{,}1) - [1 - \phi(1{,}53)] =$

$= \phi(2{,}1) + \phi(1{,}53) - 1 = 0{,}9191$

b) $P[z < b] = 0{,}4 = 1 - 0{,}6 = 1 - P[z \le 0{,}26] = P[z \le -0{,}26] \rightarrow b = -0{,}26$

$P[-k < z < k] = P[z < k] - P[z < -k] = P[z < k] - (1 - P[z < k]) =$

$= 2P[z < k] - 1 = 0{,}9 \rightarrow P[z < k] = 0{,}95 \rightarrow k = 1{,}65$

3 **En un distribución normal de media 15, el dato 17 se tipifica como 1. Halla la desviación típica de la distribución.**

$\frac{17-15}{\sigma} = 1 \rightarrow 2 = \sigma$

La desviación típica es 2.

4 **El cociente intelectual (C.I.) de un colectivo de bomberos se distribuye normal, de media 108 y desviación típica 3,5. Llamamos x al C.I. de uno de ellos tomado al azar. Calcula:**

a) $P[x < 100]$ $\quad$ **b) $P[x > 115]$** $\quad$ **c) $P[100 < x < 115]$**

x es $N(108; 3{,}5) \rightarrow z = \frac{x-108}{3{,}5}$ es $N(0, 1)$

a) $P[x < 100] = P\left[z < \frac{100-108}{3{,}5}\right] = P[z < -2{,}29] = 1 - \phi(2{,}29) = 1 - 0{,}9890 = 0{,}011$

b) $P[x > 115] = P\left[z > \frac{115-108}{3{,}5}\right] = P[z > 2] = 1 - \phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

c) $P[100 < x < 115] = P[-2{,}29 < z < 2] = \phi(2) - [1 - \phi(2{,}29)] = \phi(2) + \phi(2{,}29) - 1 = 0{,}9662$

5 **El tiempo que tardo en llegar a clase sigue una normal de media 20 minutos. He comprobado que el 94,5% de los días tardo menos de 28 minutos. Si en todo el año voy 177 días a clase, ¿cuántos días puedo estimar que tardaré menos de un cuarto de hora en llegar?**

$x \rightarrow$ tiempo que tardo. Sigue una normal $N(20, \sigma)$.

$P[x \le 28] = P\left[z \le \frac{28-20}{\sigma}\right] = 0{,}945 \rightarrow \frac{8}{\sigma} = 1{,}6 \rightarrow \sigma = 5$

$x \rightarrow$ tiempo que tardo. Sigue una normal $N(20, 5)$.

$P[x \le 15] = P\left[z \le \frac{15-20}{5}\right] = P[z \le -1] = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

Como voy 177 días, $177 \cdot 0{,}1587 = 28{,}090$.

Estimo que 28 días de los 177 tardaré menos de 15 minutos.

6 El 7 % de las personas padecen un pequeño defecto anatómico. En una empresa trabajan 80 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de 10 con ese defecto?

x es $B(80; 0{,}07) \rightarrow \mu = 80 \cdot 0{,}07 = 5{,}6;\ \sigma = \sqrt{80 \cdot 0{,}07 \cdot 0{,}93} = \sqrt{5{,}208} = 2{,}28$

x' es $N(5{,}6; 2{,}28);\ P[x > 10] = P[x \geq 11] = P[x' \geq 10{,}5] = P\left[z \geq \dfrac{10{,}5 - 5{,}6}{2{,}28}\right] =$

$= P[z \geq 2{,}15] = 1 - \phi(2{,}15) = 1 - 0{,}9842 = 0{,}0158$

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

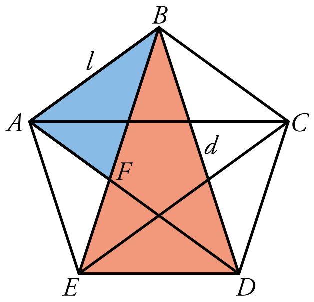
1 LOS NÚMEROS REALES

C.E.: CE 1.4. (EA 1.4.1.-EA 1.4.2.) CE 1.5. (EA 1.5.1-EA 1.5.2.) CE 1.13 (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.)

Página 33

Resuelve

El pentágono estrellado



Observa el pentágono estrellado que se muestra a continuación:

1 **Demuestra que los triángulos *ABF* y *EBD* son semejantes (es decir, demuestra que sus ángulos son respectivamente iguales).**

2 **Si llamamos *l* al lado del pentágono y *d* a su diagonal, basándote en la semejanza de los triángulos que acabas de demostrar, halla la relación *d/l* y comprueba que es el número áureo:**

$$\frac{d}{l} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$$

El ángulo $\hat{B} = 36°$ en el triángulo ABF, y $\hat{B} = 36°$ en el triángulo EBD. Por otra parte los triángulos DAB y EBD son iguales, luego el ángulo $\hat{A}$ en el triángulo ABF, y $\hat{D}$ en el triángulo EBD son iguales. Por tanto los triángulos son semejantes.

El lado $AF = d - l$.

Por la semejanza de los triángulos ABF y EBD; $\frac{BD}{BF} = \frac{ED}{AF}$; es decir, $\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$

Operando, $d(d-l) = l^2$, por tanto $d^2 - dl - l^2 = 0$.

Las soluciones posibles para d son $d = \frac{l \pm \sqrt{l^2+4l^2}}{2} = l\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

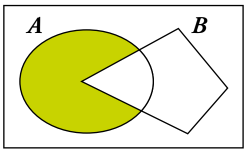
Como d no puede ser negativa, $d = l\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y $\frac{d}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

1 ▶ LENGUAJE MATEMÁTICO. CONJUNTOS Y SÍMBOLOS

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.)

Página 35

1 **[La justificación de las afirmaciones requiere que el alumnado trabaje la expresión oral]. ¿Verdadero o falso?**

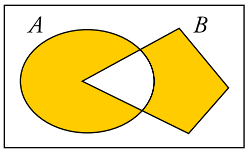


a) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A - B$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B.

b) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A \cap B'$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B, ya que B' es el complementario de B.



c) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$(A - B) \cup (B - A)$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, o está en A y no está en B, o está en B y no está en A.

d) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$(A \cup B) - (A \cap B)$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, tiene que estar en A o en B, pero no puede estar en los dos a la vez $(A \cap B)$.

e) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto, o está en A y no está en B, o está en B y no está en A.

f) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

Verdadero, porque todos los números enteros son racionales.

g) $[x \in (\dot{3})$ **y** $x \in (\dot{2})] \Leftrightarrow x \in (\dot{6})$

$(\dot{n})$ es el conjunto de los múltiplos de n.

Verdadero, porque si un número es a la vez múltiplo de 2 y de 3, entonces es múltiplo de $2 \cdot 3 = 6$.

h) $(\dot{3}) \cap (\dot{2}) = (\dot{6})$

Es la misma afirmación anterior.

i) $x \in A - B \;\Rightarrow\; x \in A \cap B'$

Verdadero, porque los elementos de $A - B$ están en A y no están en B, luego están en A y en B'.

j) $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ **es lo mismo que decir** $A \subset B$.

Verdadero, porque la implicación indica que todo elemento de A es un elemento de B.

k) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$

Tenemos que comprobar que las dos siguientes afirmaciones son ciertas:

$(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subset B$ que es la afirmación del apartado j)

$A \in B \Rightarrow x \in \mathrm{A} \Rightarrow x \in B$, pero si B contiene a A, es porque todos los elementos de A están en B, luego son equivalentes y es verdadera la afirmación.

l) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow B \subset A$

Falso, porque puede existir algún elemento de B que no esté en A.

m) $x \in (0, 1) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ **y** $0 < x < 1$

Verdadero, porque los intervalos representan conjuntos de números reales y el intervalo (0, 1) está formado por los números comprendidos entre 0 y 1 que son mayores que 0 y menores que 1, luego son afirmaciones equivalentes.

n) $\sqrt{2} \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **pero**

$\sqrt{2}/2 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Verdadero, porque $\sqrt{2}$ es un número real que no es racional y es mayor que 1, sin embargo $\sqrt{2}/2$ también es irracional, pero está entre 0 y 1.

ñ) $0{,}5 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Falso, porque 0,5 es racional.

o) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **es el conjunto de los números irracionales positivos menores que 1.**

Verdadero, porque son los números reales que no son racionales, es decir, irracionales, y además tienen que ser mayores que cero, por tanto positivos, y menores que 1.

p) $\{x \in \mathbb{Z} \,/\, -2 < x \le 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Verdadero, porque los únicos números enteros mayores que –2 y menores o iguales que 5 son los del conjunto indicado.

q) **El conjunto de los números enteros mayores que –5 y menores que 7 es** $\mathbb{Z} \cap (-5, 7)$**.**

Verdadero, porque, de los números enteros mayores que –5 y menores que 7, están en el intervalo (–5, 7) y además son enteros.

r) **(**x **es un número real pero no es racional)** $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Verdadero, porque $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es el conjunto de todos los números reales menos los racionales, que es equivalente a decir los números reales que no son racionales.

2 ▸ NÚMEROS REALES. LA RECTA REAL

C.E.: CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.-EA 2.1.4.)

Página 37

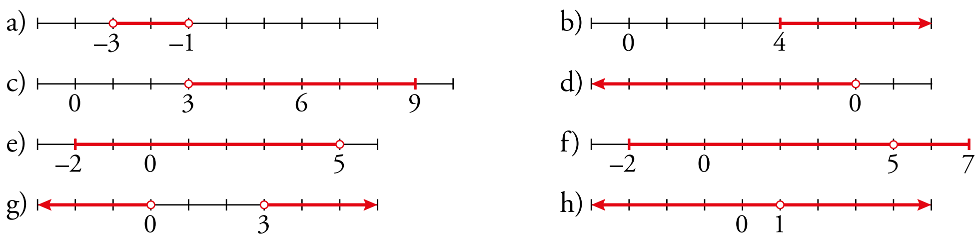
1 **Representa sobre la recta real estos conjuntos:**

a) $(-3, -1)$ **b)** $[4, +\infty)$

c) $(3, 9]$ **d)** $(-\infty, 0)$

e) $\{x / -2 \le x < 5\}$ **f)** $[-2, 5) \cup (5, 7]$

g) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ **h)** $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



2 **Averigua para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones y representa cada conjunto.**

a) $|x| = 5$ **b)** $|x - 4| \le 2$ **c)** $|x| \le 5$

d) $|x - 4| > 2$ **e)** $|x - 4| = 2$ **f)** $|x + 4| > 5$

a) 5 y –5

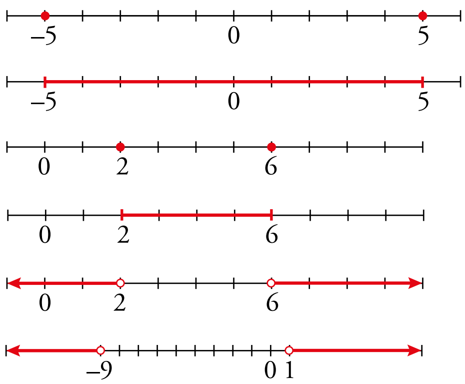
b) $2 \le x \le 6$; $[2, 6]$

c) $-5 \le x \le 5$; $[-5, 5]$

d) $x < 2$ o $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

e) 6 y 2

f) $x < -9$ o $x > 1$; $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$



3 RAÍCES Y RADICALES

C.E.: CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.-EA 2.1.4.)

Página 38

1 Simplifica.

a) $\sqrt[9]{x^{12}}$ **b)** $\sqrt[12]{x^8}$ **c)** $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ **e)** $\sqrt[9]{64}$ **f)** $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[9]{x^{12}} = \sqrt[3]{x^4}$ Se dividen índice y exponente entre 3.

b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2 Simplifica y expresa el resultado en forma de raíz.

a) $\sqrt[9]{512x^3}$ **b)** $\sqrt[4]{121x^{10}}$

c) $\sqrt[8]{\dfrac{225}{x^4}}$ **d)** $\sqrt[6]{125x^3}$

a) $\sqrt[9]{512x^3} = \sqrt[9]{2^9 \cdot x^3} = \sqrt[9]{2^9} \cdot \sqrt[9]{x^3} = 2\sqrt[3]{x}$

b) $\sqrt[4]{121x^{10}} = \sqrt{11 \cdot x^5} = x^2\sqrt{11 \cdot x}$

c) $\sqrt[8]{\dfrac{225}{x^4}} = \sqrt[8]{\dfrac{5^2 \cdot 3^2}{x^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{5 \cdot 3}}{\sqrt[2]{x}} = \dfrac{\sqrt[4]{15}}{\sqrt[2]{x}}$

d) $\sqrt[6]{125x^3} = \sqrt[6]{5^3 \cdot x^3} = \sqrt{5x}$

Página 39

3 Compara reduciendo a índice común en cada caso.

a) $\sqrt[12]{2^5}$ **y** $\sqrt[18]{2^7}$ **b)** $\sqrt[3]{51}$ **y** $\sqrt[9]{132\,650}$

c) $\sqrt[4]{31}$ **y** $\sqrt[3]{13}$ **d)** $\sqrt[5]{245}$ **y** $\sqrt[7]{2\,185}$

a) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[12]{2^5} = \sqrt[36]{2^{15}} \\ \sqrt[18]{2^7} = \sqrt[36]{2^{14}}\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[12]{2^5} > \sqrt[18]{2^7}$

b) $\sqrt[3]{51} = \sqrt[9]{132\,651} \Rightarrow \sqrt[3]{51} > \sqrt[9]{132\,650}$

c) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{29\,791} \\ \sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{28\,561}\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[4]{31} > \sqrt[3]{13}$

d) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[5]{245} = \sqrt[35]{52\,986\,177\,566\,328\,125} \\ \sqrt[7]{2\,185} = \sqrt[35]{49\,803\,195\,206\,115\,625}\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[5]{245} > \sqrt[7]{2\,185}$

4 Extrae fuera del radical cuando sea posible.

a) $\sqrt[12]{32}$ **b)** $\sqrt{27}$ **c)** $\sqrt{20}$ **d)** $\sqrt[3]{54}$

e) $\sqrt[4]{a^7}$ **f)** $\sqrt{x^5}$ **g)** $\sqrt{a \cdot b^2 \cdot c^3}$ **h)** $\sqrt[3]{x^4 \cdot x^2}$

a) $\sqrt[12]{32} = \sqrt[12]{2^5}$. No se puede extraer.

b) $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$

c) $\sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 2^2} = 2\sqrt{5}$

d) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$

e) $\sqrt[4]{a^7} = a\sqrt[4]{a^3}$

f) $\sqrt{x^5} = x^2\sqrt{x}$

g) $\sqrt{a \cdot b^2 \cdot c^3} = b \cdot c\sqrt{a \cdot c}$

h) $\sqrt[3]{x^4 \cdot x^2} = \sqrt[3]{x^6} = x^2$

5 **Expresa bajo un único radical en cada caso.**

a) $2\sqrt{3}$ **b)** $3\sqrt{2}$ **c)** $2\sqrt[3]{5}$ **d)** $3^2 \cdot \sqrt[5]{2}$

e) $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt{3}$ **f)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$ **g)** $10\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5}$ **h)** $3\sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{4}$

a) $2\sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 2^2} = \sqrt{12}$

b) $3\sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{18}$

c) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{40}$

d) $32\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2 \cdot 2^{25}} = \sqrt[5]{2^{26}} = \sqrt[5]{67\,108\,864}$

e) $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 2^3} = \sqrt{24}$

f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{200}$

g) $10\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt{3 \cdot 10^2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 100^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{675\,000\,000}$

h) $3\sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[10]{3^5 \cdot 2^5 \cdot 4^2} = \sqrt[10]{124\,416}$

6 **Reduce.**

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$ **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{4}$ **e)** $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5}$ **f)** $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3}$

a) $\sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

d) $\sqrt[12]{8^3} \cdot \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{(2^3)^3 \cdot (2^2)^4} = \sqrt[12]{2^{17}} = 2\sqrt[12]{2^5}$

e) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{5^5} = 5\sqrt[4]{5}$

f) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{(3^4)^2}\,\sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{3^{11}} = 3\sqrt[6]{3^5}$

Página 40

7 **Simplifica.**

a) $\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt[3]{a \cdot b}}$

c) $\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}}$

a) $\sqrt[15]{\dfrac{x^3}{x^5}} = \sqrt[15]{\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt[15]{x^{-2}}$

b) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3\,b^3}{a^2\,b^2}} = \sqrt[6]{a\,b}$

c) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{a^4}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{a}} = \sqrt[6]{a^{-1}}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{a^3\,b^5\,c}{a^2\,b^6\,c^6}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{bc^5}} = \dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{a}{bc}}$

8 **Simplifica.**

a) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}\right)^8$ **b)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ **c)** $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$

a) $\left(\sqrt[8]{k}\right)^8 = k$ b) $\sqrt[15]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt[6]{x^6} = x$

9 **Suma y simplifica.**

a) $5\sqrt{x}+3\sqrt{x}+2\sqrt{x}$ **b)** $\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$ **d)** $\sqrt{27}-\sqrt{50}+\sqrt{12}+\sqrt{8}$

e) $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}$ **f)** $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}$

a) $10\sqrt{x}$

b) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2\cdot 5^2}-\sqrt{2}-\sqrt{2^3}=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3^3}-\sqrt{2\cdot 5^2}+\sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{2^3}=3\sqrt{3}-5\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}=5\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2\cdot 5^2\cdot a}-\sqrt{2\cdot 3^2\cdot a}=5\sqrt{2a}-3\sqrt{2a}=2\sqrt{2a}$

f) Se factorizan los radicandos y se sacan factores de la raíz:

$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{2^4}+\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2}=0$

Página 41

10 **Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.**

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$

c) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}}$ **f)** $\dfrac{4}{\sqrt{18}}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}}$ **h)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}}$ **j)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}}$

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}=\dfrac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}=\dfrac{1}{a\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a^2}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}}=\dfrac{3}{\sqrt{2\cdot 5^2}}=\dfrac{3}{5\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$

f) $\dfrac{4}{\sqrt{18}}=\dfrac{4}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\dfrac{4}{3\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{6}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{5^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{5}}{5}$

h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^3\cdot 5}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{5}}=\dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{10}=\dfrac{\sqrt[3]{25}}{10}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2\cdot 3^2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{2\cdot 3}}{2\cdot 3}=\dfrac{3\sqrt[3]{6}}{6}=\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}$

j) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2^2\cdot 5^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{2\cdot 5}}{2\cdot 5}=\dfrac{2\sqrt[3]{10}}{10}=\dfrac{\sqrt[3]{10}}{5}$

11 **Racionaliza denominadores y simplifica estas expresiones cuanto puedas.**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **b)** $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

c) $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

e) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ **f)** $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **h)** $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$

b) $\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} = \dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$

c) $\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(a-1)} = \sqrt{a}+1$

d) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

e) $\dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12-5} = \dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}$

f) $\dfrac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{18-12} = \dfrac{18+12+12\sqrt{6}}{6} = \dfrac{30+12\sqrt{6}}{6} = 5+2\sqrt{6}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{(2-1)+2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2-1)} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}$

4 LOGARITMOS

C.E.: CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.-EA 2.1.4.)

Página 42

1 Halla.

a) $\log_2 16$
b) $\log_2 0{,}25$
c) $\log_9 1$
d) $\log_{10} 0{,}1$
e) $\log_4 64$
f) $\log_7 49$
g) $\log_7 7$
h) $\log_\pi \left(\frac{1}{\pi}\right)$
i) $\log_5 0{,}04$
j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right)$

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$
b) $\log_2 0{,}25 = \log_2 2^{-2} = -2$
c) $\log_9 1 = 0$
d) $\log_{10} 0{,}1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$
e) $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$
f) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$
g) $\log_7 7 = 1$
h) $\log_\pi \frac{1}{\pi} = \log_\pi \pi^{-1} = -1$
i) $\log_5 0{,}04 = \log_5 5^{-2} = -2$
j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right) = \log_6 6^{-3} = -3$

2 Halla la parte entera de…

a) $\log_2 60$
b) $\log_5 700$
c) $\log_{10} 43\,000$
d) $\log_{10} 0{,}084$
e) $\log_9 60$
f) $\log_7 14$
g) $\log_{20} 450\,000$
h) $\log_{5,4} 900$
i) $\log_2 3$
j) $\log_5 0{,}1$

a) $2^5 = 32 \ ; \ 2^6 = 64 \ ; \ 32 < 60 < 64$
$5 < \log_2 60 < 6 \Rightarrow \log_2 60 = 5,\ldots$

b) $5^4 = 625 \ ; \ 5^5 = 3\,125 \ ; \ 625 < 700 < 3\,125$
$4 < \log_5 700 < 5 \Rightarrow \log_5 700 = 4,\ldots$

c) $10^4 = 10\,000 \ ; \ 10^5 = 100\,000 \ ; \ 10\,000 < 43\,000 < 100\,000$
$4 < \log_{10} 43\,000 < 5 \Rightarrow \log_{10} 43\,000 = 4,\ldots$

d) $10^{-2} = 0{,}01 \ ; \ 10^{-1} = 0{,}1 \ ; \ 0{,}01 < 0{,}084 < 0{,}1$
$-2 < \log_{10} 0{,}084 < -1 \Rightarrow \log_{10} 0{,}084 = -1,\ldots$

e) $9^1 = 9 \ ; \ 9^2 = 81 \ ; \ 9 < 60 < 81$
$1 < \log_9 60 < 2 \Rightarrow \log_9 60 = 1,\ldots$

f) $\log_7 14$ es un número decimal entre 1 y 2 ya que $7^1 = 7$ y $7^2 = 49$.
Con la calculadora: $\log_7 14 = 1{,}3562$

g) $\log_{20} 450\,000$; $20^4 = 160\,000$; $20^5 = 3\,200\,000$
Como $20^4 = 160\,000 < 450\,000 < 3\,200\,000 = 20^5 \Rightarrow 4 < \log_{20} 450\,000 < 5$.
La parte entera de $\log_{20} 450\,000$ es 4.

h) $\log_{5,4} 900 = 4{,}0337$
$5{,}4^4 = 850{,}31$; $5{,}4^5 = 4\,591{,}7$
Como $5{,}4^4 = 850{,}31 < 900 < 4\,591{,}7 = 5{,}4^5 \Rightarrow 4 < \log_{5,4} 900 < 5$.
La parte entera de $\log_{5,4} 900$ es 4.

i) $log_2\ 3$ es un número decimal entre 1 y 2 ya que $2^1 = 2$ y $2^2 = 4$.

Con la calculadora: $log_2\ 3 = 1{,}58496$

j) $log_5\ 0{,}1$ es un número decimal entre –1 y –2 ya que $5^{-1} = 0{,}2$ y $5^{-2} = 0{,}04$.

Con la calculadora: $log_5\ 0{,}1 = -1{,}4307$

Página 43

3 **Si $log_5 A = 1{,}8$ y $log_5 B = 2{,}4$, calcula.**

a) $log_5\ 125AB^2$ **b)** $log_5 \dfrac{A}{25}$ **c)** $log_5 \dfrac{25A}{B}$

d) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}}$ **e)** $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$ **f)** $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{A^4}}{(5B)^2}}$

a) $log_5\ 125AB^2 = log_5\ 125 + log_5 A + log_5 B^2 = 3 + 1{,}8 + 2 \cdot 2{,}4 = 9{,}6$

b) $log_5 \dfrac{A}{25} = log_5 A - log_5 25 = 1{,}8 - 2 = -0{,}2$

c) $log_5 \dfrac{25A}{B} = log_5 25A - log_5 B = log_5 25 + log_5 A - 2{,}4 = 2 + 1{,}8 - 2{,}4 = -0{,}2$

d) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}} = \dfrac{1}{3}\ [2\ log_5 A - log_5 25 - log_5 B] = \dfrac{1}{3}\ [2 \cdot 1{,}8 - 2 - 2{,}4] = \dfrac{-0{,}8}{3} \approx -0{,}27$

e) $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = log_5 5 + \dfrac{3}{2}\ log_5 A - 2\ log_5 B = 1 + \dfrac{3}{2} \cdot 1{,}8 - 2 \cdot 2{,}4 = 1 + 2{,}7 - 4{,}8 = -1{,}1$

f) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{A^4}}{(5B)^2}} = \dfrac{1}{3}\ log_5 \dfrac{\sqrt[3]{A^4}}{(5B)^2} = \dfrac{1}{3}\left(log_5 \sqrt[3]{A^4} - log_5 (5B)^2\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{3} log_5 A - 2\,log_5 5B\right) =$

$= \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{4}{3} \cdot 1{,}8 - 2\,(log_5 5 + log_5 B)\right] = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{7{,}2}{3} - 2\,(1 + 2{,}4)\right] = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{7{,}2 - 3 \cdot 6{,}8}{3}\right) = \dfrac{-13{,}2}{9}$

Página 44

4 **¿Qué te hace decir eso? [La presentación de las evidencias para justificar la respuesta permite trabajar esta estrategia].**

Averigua la relación que hay entre x e y, sabiendo que se verifica:

$ln\ y = 2x - ln\ 5$

$ln\ y = 2x - ln\ 5 \rightarrow ln\ y = ln\ e^{2x} - ln\ 5$

$ln\ y = ln \dfrac{e^{2x}}{5} \rightarrow y = \dfrac{e^{2x}}{5}$

5 **Determina si es cierta la siguiente igualdad e indica qué propiedad o propiedades has utilizado:**

$log\ e \cdot ln\ 10 = 1$

Como $ln\ 10 = log_e 10$ y usando un cambio de base tenemos que:

$log_e 10 = \dfrac{log\,10}{log\,e} = \dfrac{1}{log\,e}$

Así: $log\ e \cdot ln\ 10 = log\,e \cdot \dfrac{1}{log\,e} = \dfrac{log\,e}{log\,e} = 1$

Página 45

1 Aplica la propiedad ⑧ para obtener los siguientes logaritmos con ayuda de la tecla ln de la calculadora:

a) $\boldsymbol{log_2\ 1\,500}$ **b)** $\boldsymbol{log_5\ 200}$

c) $\boldsymbol{log_{100}\ 200}$ **d)** $\boldsymbol{log_{100}\ 40}$

Para los ejercicios con calculadora, las explicaciones del libro han tomado como referencia el modelo fx-991spx II Iberia de Casio.

a) $\dfrac{log\ 1500}{log\ 2} = 10{,}55;\ \ 2^{10{,}55} \approx 1\,500$ b) $\dfrac{log\ 200}{log\ 5} = 3{,}29;\ \ 5^{3{,}29} \approx 200$

c) $\dfrac{log\ 200}{log\ 100} = 1{,}15;\ \ 100^{1{,}15} \approx 200$ d) $\dfrac{log\ 40}{log\ 100} = 0{,}80;\ \ 100^{0{,}80} \approx 40$

2 ¿Verdadero o falso? Utiliza tu calculadora.

a) $\boldsymbol{log_2 2 = log_2 (2 \cdot 1) = log_2 2 \cdot log_2 1 = 1 \cdot 0 = 0}$

b) $\boldsymbol{\frac{1}{2} log\ 5 = log\ 25}$

c) La parte entera de $\boldsymbol{log\ 500}$ **es 2.**

d) La parte entera de $\boldsymbol{log\ 0{,}05}$ **es –1.**

e) $\boldsymbol{log_2 (log\ 10\,000) = 2}$

f) $\boldsymbol{log\ 3 = \dfrac{1}{log_3 10}}$

g) $\boldsymbol{ln\ 0{,}25 = -2\ ln\ 2}$

h) Si $\boldsymbol{log_2 A^2 + log_2 A^3 + log_2 A^4 = 36}$**, entonces** $\boldsymbol{A = 4}$**.**

i) Si $\boldsymbol{log_A 3 + log_A 27 + log_A 9 = 12}$**, entonces** $\boldsymbol{A = \sqrt{3}}$**.**

a) No es cierto ya que $log_2 (2 \cdot 1) = log_2 2 + log_2 1$ y con la calculadora $log_2 2 = 1$.

b) $\frac{1}{2} log\ 5 = 0{,}3494 \neq 1{,}3979 = log\ 25$

No es cierto. Además, usando las propiedades de los logaritmos sabemos que:

$\frac{1}{2} log\ 5 = log\ 5^{\frac{1}{2}} = log\ \sqrt{5}$

$log\ 25 = log\ 5^2$ y vemos también que no son iguales.

c) Cierto ya que $10^2 = 100$ y $10^3 = 1\,000$. Con calculadora, $log\ 500 = 2{,}6989$.

d) Cierto ya que:

$log\ 0{,}05 = log\ (5 \cdot 10^{-2}) = log\ 5 + log\ 10^{-2} = log\ 5 - 2$

Además $log\ 5$ está entre 0 y 1 ya que $10^0 = 1$ y $10^1 = 10$. Y con calculadora: $log\ 0{,}05 = -1{,}3010$.

e) Cierto ya que $log_2 (log\ 10\,000) = log_2 4 = 2$.

f) Con calculadora; 0,4771 = 0,4771. Vemos que es cierto. Además haciendo un cambio de base vemos que $log_3 10 = \dfrac{log\ 10}{log\ 3} = \dfrac{1}{log\ 3}$.

g) Con la calculadora: –1,3863 = –1,3863

h) Falso. Usando las propiedades de los logaritmos sabemos que:

$log_2 A^2 + log_2 A^3 + log_2 A^4 = log_2 (A^2 \cdot A^3 \cdot A^4) = log_2 A^9 = 36$ por lo que $2^{36} = (2^4)^9 \neq 4^9$.

i) Falso. Usando las propiedades de los logaritmos sabemos que

$log_A 3 + log_A 27 + log_A 9 = log_A (3 \cdot 27 \cdot 9) = log_A 3^6 = 12$ por lo que $A^{12} = (A^2)^6 = 3^6$ si $A = 3$.

3 **Si $log\,A = 1{,}45$; $log\,B = 2{,}3$ y $log\,C = 0{,}52$; calcula cada una de las siguientes expresiones:**

a) $log\,\dfrac{AB^2}{\sqrt[3]{C}}$

b) $log\,\dfrac{100A}{B^2\sqrt[3]{10C^4}}$

c) $log\left(\dfrac{A}{10}\sqrt[5]{\dfrac{B^2}{0{,}001C}}\right)$

d) $log\,\dfrac{A\cdot\sqrt[3]{0{,}1C^4}}{(1\,000B)^2}$

e) $log\left(10\cdot\sqrt[3]{\dfrac{0{,}1A^2}{10B}}\right)$

f) $\dfrac{1}{2}log\left(\dfrac{\sqrt[3]{C^4}}{(100A)^2}\right)^2$

a) $log\dfrac{AB^2}{\sqrt[3]{C}} = log\,AB^2 - log\sqrt[3]{C} = log\,A + log\,B^2 - \dfrac{1}{3}log\,C = 1{,}45 + 2\cdot 2{,}3 + \dfrac{1}{3}\cdot 0{,}52 = 5{,}87\widehat{6}$

b) $log\dfrac{100A}{B^2\sqrt[3]{10C^4}}\,log\,100A - \left(log\,B^2 + \dfrac{1}{3}log\,10C^4\right) = log\,100 + log\,A - 2\,log\,B - \dfrac{1}{3}(log\,10 + log\,C^4) =$

$= 2 + 1{,}45 - 2\cdot 2{,}3 - \dfrac{1}{3}(1 + 4\cdot log\,C) = -1{,}15 - \dfrac{1}{3}(1 + 2{,}8) = -2{,}41\widehat{6}$

c) $log\left(\dfrac{A}{10}\sqrt[5]{\dfrac{B^2}{0{,}001C}}\right) = log\dfrac{A}{10} + log\left(\sqrt[5]{\dfrac{B^2}{0{,}001C}}\right) = log\,A - log\,10 + \dfrac{1}{5}(2\,log\,B - log\;0{,}001C) =$

$= 1{,}45 - 1 + \dfrac{1}{5}\left[2\cdot 2{,}3 - (log\,0{,}001 + log\,C)\right] = 0{,}45 + \dfrac{1}{5}\left[4{,}6 - (log\,10^{-3} + 0{,}52)\right] =$

$= 0{,}45 + \dfrac{1}{5}(4{,}6 + 3 - 0{,}52) = 1{,}866$

d) $log\dfrac{A\sqrt[3]{0{,}1C^4}}{(1\,000B)^2} = log\,A + log\sqrt[3]{0{,}1C^4} - log\left[(1\,000B)^2\right] = 1{,}45 + \dfrac{1}{3}log\,0{,}1C^4 - 2\left(log\,1\,000 + log\,B\right) =$

$= 1{,}45 + \dfrac{1}{3}(log\,0{,}1 + 4\,log\,C) - 2\,(3 + 2{,}3) = 1{,}45 + \dfrac{1}{3}(-1 + 4\cdot 0{,}52) - 2\,(3 + 2{,}3) = -9{,}39$

e) $log\,10\sqrt[3]{\dfrac{0{,}1A^2}{10B}} = log\,10 + \dfrac{1}{3}(log\,0{,}1A^2 - log\,10B) = 1 + \dfrac{1}{3}(log\,0{,}1 + 2\,log\,A - log\,10 - log\,B) =$

$= 1 + \dfrac{1}{3}(-1 + 2\cdot 1{,}45 - 1 - 2{,}3) = 0{,}5\widehat{3}$

f) $\dfrac{1}{2}log\left(\dfrac{\sqrt[3]{C^4}}{100A^2}\right)^2 = log\sqrt[3]{C^4} - log[(100A)^2] = \dfrac{4}{3}log\,C - 2\left(log\,100 + log\,A\right) = \dfrac{4}{3}\cdot 0{,}52 - 2\,(2 + 1{,}45) =$

$= -6{,}20\widehat{6}$

4 **Halla en cada caso el valor de A:**

a) $ln\,A + ln\,A^2 + ln\,A^3 = 6$

b) $log\,A^2 + log\,A^3 + log\,A^7 = 6$

c) $ln\,A^7 + ln\,A^9 + ln\,A^{14} = 330$

d) $log_A 27^3 + log_A 27^2 + log_A 27^4 + log_A 27^7 = 48$

e) $log_A 6^2 + log_A 6^3 + log_A 6^5 = 30$

f) $log_A 2^2 + log_A 0{,}5^3 + log_A 4^4 + log_A 0{,}25 = 10$

a) $ln\,A + ln\,A^2 + ln\,A^3 = 6 \to ln\,A^6 = 6 \to e^6 = A^6 \to e = A$

b) $log\,A^2 + log\,A^3 + log\,A^7 = 6 \to log\,A^{12} = 6 \to 10^6 = A^{12} \to A = \sqrt{10}$

c) $ln\,A^7 + ln\,A^9 + ln\,A^{14} = 330 \to ln\,A^{30} = 330 \to e^{330} = A^{30} \to e^{33} = A^3 \to\ e^{11^3} = A^3 \to A = e^{11}$

d) $log_A 27^3 + log_A 27^2 + log_A 27^4 + log_A 27^7 = 48 \to log_A 27^{16} = 48 \to A^{48} = 27^{16} \to A^{3^{16}} = 27^{16} \to A = \sqrt[3]{27}$

e) $log_A 6^2 + log_A 6^3 + log_A 6^5 = 30 \to log_A 6^{10} = 30 \to A^{30} = 6^{10} \to A^3 = 6 \to A = \sqrt[3]{6}$

f) $log_A 2^2 + log_A 0{,}5^3 + log_A 4^4 + log_A 0{,}25 = 10 \to log_A 4 + 3\,log_A 0{,}5 + 4\,log_A 4 + 2\,log_A 0{,}5 = 10 \to$

$\to 5\,log_A 4 + 5\,log_A\,0{,}5 = 10 \to 5\,log_A(4\cdot 0{,}5) = 10 \to log_A 2 = 2 \to A = \sqrt{2}$

5 ▶ EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS REALES. NÚMEROS APROXIMADOS

C.E.: CE 1.4. (EA 1.4.1.-EA 1.4.2.) CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.) CE 1.9. (EA 1.9.1.-EA 1.9.2.-EA 1.9.3.) CE 1.13. (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.)
CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.-EA 2.1.4.)

Página 47

1 **[El enunciado requiere un análisis que permite que el alumnado trabaje la expresión escrita].**

¿Verdadero o falso?

I. El precio de esta vivienda es, aproximadamente, de 390 000 €, con un error menor que 10 000 €.

II. El precio del menú del día es, aproximadamente, de 12 €, con un error menor que 1 €.

En I el error absoluto es mucho mayor que en II, pero el error relativo es menor.

I. E.R. $< \frac{10000}{390000} = 2{,}5641 \cdot 10^{-2} = 0{,}025641 \to$ E.R. $< 2{,}6\,\%$

II. E.R. $< \frac{1}{12} = 8{,}3333 \cdot 10^{-2} = 0{,}08333 \to$ E.R. $< 8{,}3\,\%$

El error absoluto nos lo dicen y es mayor en I que en II. Hemos calculado el error relativo en cada caso y vemos que es verdadera la afirmación.

2 **Di una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes mediciones:**

a) Daniel le dice a su hermana María que la superficie de su casa es de 96,4 m^2.

b) Por la gripe se han perdido 37 millones de horas de trabajo.

c) Juana gana unos 25 000 € al año.

a) E.A. $< 0{,}05$ m^2; E.R. $< \frac{0{,}05}{96{,}4} = 5{,}1867 \cdot 10^{-4} = 0{,}00051867 \to$ E.R. $< 0{,}05\,\%$

b) E.A. < 0,5 millones de horas = 500 000 horas

E.R. $< \frac{0{,}5}{37} < 0{,}014 \to 1{,}4\,\%$

c) Si suponemos que los tres ceros finales se han utilizado para poder expresar la cantidad (es decir, que se trata de 25 000, redondeando a los «miles de euros»), entonces:

E.A. < 0,5 miles de € = 500 €; E.R. $< \frac{0{,}5}{25} < 0{,}02 \to 2\,\%$

Si suponemos que es 25 000 € exactamente:

E.A. < 0,5 €; E.R. $< \frac{0{,}5}{25\,000} < 0{,}00002 \to 0{,}002\,\%$

Página 48

3 **Calcula en notación científica sin usar la calculadora.**

a) $(800\,000 : 0{,}0002) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{12}$

b) $0{,}486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7}$

a) $(800\,000 : 0{,}0002) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{12} = \left((8 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^{-4})\right) \cdot 5 \cdot 10^{11} =$

$= (4 \cdot 10^9) \cdot 5 \cdot 10^{11} = 20 \cdot 10^{20} = 2 \cdot 10^{21}$

b) $0{,}486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-}9 - 6 \cdot 10^{-7} = 48{,}6 \cdot 10^{-7} + 0{,}93 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-7} =$

$= 43{,}53 \cdot 10^{-7} = 4{,}353 \cdot 10^{-6}$

4 **Opera con la calculadora:**

a) $(3{,}87 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{-9}) : (3{,}941 \cdot 10^{-6})$

b) $8{,}93 \cdot 10^{-10} + 7{,}64 \cdot 10^{-10} - 1{,}42 \cdot 10^{-9}$

a) $(3{,}87 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{-9}) : (3{,}941 \cdot 10^{-6}) \approx 5{,}85 \cdot 10^{12}$

b) $8{,}93 \cdot 10^{-10} + 7{,}64 \cdot 10^{-10} - 1{,}42 \cdot 10^{-9} = 2{,}37 \cdot 10^{-10}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.-EA 2.1.4.)

Página 49

1. Intervalos y valor absoluto

Hazlo tú

- **Indica, en cada caso, qué números cumplen estas condiciones:**

a) $|x+2| \geq 5$　　**b)** $|4-x| < 3$

a) $|x+2| \geq 5 \rightarrow \begin{cases} x+2 \geq 5 \\ x+2 \leq -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -7 \end{cases} \rightarrow x \in (-\infty, -7] \cup [3, +\infty)$

b) $|4-x| < 3 \rightarrow -3 < 4-x < 3 \rightarrow -7 < -x < -1$

Cambiamos de signo:

$1 < x < 7 \rightarrow x \in (1, 7)$

2. Operaciones con intervalos

Hazlo tú

- **Expresa como un único intervalo:**

a) $(-5, 4) \cup [0, 6]$　　**b)** $(-5, 4) \cap [0, 6]$

a) $(-5, 4) \cup [0, 6] = (-5, 6]$　　b) $(-5, 4) \cap [0, 6] = [0, 4)$

Página 50

4. Forma exponencial de los radicales

Hazlo tú

- **Expresa como potencia:**

a) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$　　**b)** $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{81}$

a) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{2-\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$

b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{81} = 9^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} \cdot (3^4)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}} = 3^2$

5. Simplificación de radicales

Hazlo tú

- **Simplifica.**

a) $\sqrt[7]{x^{21}}$　　**b)** $\sqrt[3]{27} : \sqrt[6]{81}$　　**c)** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}}$

a) $\sqrt[7]{x^{21}} = \sqrt[7]{x^{7\cdot 3}} = x^3$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[6]{81}} = \dfrac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[6]{3^4}} = \dfrac{\sqrt[6]{3^{3\cdot 2}}}{\sqrt[6]{3^4}} = \dfrac{\sqrt[6]{3^6}}{\sqrt[6]{3^4}} = \sqrt[6]{3^{6-4}} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[12]{x^2} = \sqrt[6]{x}$

6. Racionalización de denominadores

Hazlo tú

- **Racionaliza:**

a) $\dfrac{\mathbf{2}}{\sqrt[4]{\mathbf{5^3}}}$ **b)** $\dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{2\sqrt{5}+3}}$

a) Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[4]{5}$:

$$\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5}}=\frac{2\sqrt[4]{5}}{5}$$

b) Multiplicamos numerador y denominador por $2\sqrt{5}-3$:

$$\frac{11}{2\sqrt{5}+3}=\frac{11\,(2\sqrt{5}-3)}{(2\sqrt{5}+3)\,(2\sqrt{5}-3)}=\frac{11\,(2\sqrt{5}-3)}{4\cdot 5-9}=2\sqrt{5}-3$$

Página 51

7. Operaciones con radicales

Hazlo tú

- **Opera y simplifica:**

$\boldsymbol{\sqrt{32}+\dfrac{1}{2}\sqrt{50}-\dfrac{5}{6}\sqrt{2}}$

Factorizamos y sacamos factores de las raíces:

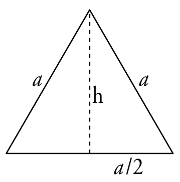
$$\sqrt{32}+\frac{1}{2}\sqrt{50}-\frac{5}{6}\sqrt{2}=\sqrt{2^5}+\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 5^2}-\frac{5}{6}\sqrt{2}=2^2\sqrt{2}+\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{5}{6}\sqrt{2}=\frac{17}{3}\sqrt{2}$$

8. Problemas con radicales

Hazlo tú

- **El volumen de un tetraedro regular es $\mathbf{18\sqrt{2}}$ cm³. Halla la longitud de su arista.**

  - Área de la base: la expresamos en función de la arista.

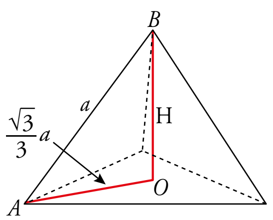


Hallamos la altura del triángulo equilátero:

$$h^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2 \;\rightarrow\; h=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$A_{\text{BASE}}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

  - Altura del tetraedro, H:



El triángulo AOB es rectángulo. El cateto AO mide $\frac{2}{3}$ de la altura de una cara.

$$\overline{AO}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$H^2=a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 \;\rightarrow\; H=\sqrt{\frac{2a^2}{3}}=a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

  - Volumen del tetraedro: $V_{\text{TETRAEDRO}}=\dfrac{1}{3}A_{\text{BASE}}\cdot H=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot a\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

  Por tanto: $\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3=18\sqrt{2} \;\rightarrow\; a^3=216 \;\rightarrow\; a=\sqrt[3]{216}=6$

9. Definición de logaritmo

Hazlo tú

- **Calcula x:**

a) $\boldsymbol{log_x 5 = 1/2}$ **b)** $\boldsymbol{log\, x^2 = -4}$

a) $log_x 5 = \frac{1}{2} \to x^{1/2} = 5 \to x = 5^2 \to x = 25$

b) $log\, x^2 = -4 \to 10^{-4} = x^2 \to \frac{1}{10^4} = x^2 \to x = \sqrt{\frac{1}{10^4}} \to x = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$

Página 52

10. Logaritmos sin calculadora

Hazlo tú

- **Halla el valor de $\boldsymbol{log_3 0,\widehat{3}}$ y de $\boldsymbol{log_2 \sqrt{\frac{1}{8}}}$ sin utilizar la calculadora.**

$0,\widehat{3} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \to log_3 3^{-1} = -1$

$log_2 \sqrt{\frac{1}{8}} = log_2 \sqrt{\frac{1}{2^3}} = log_2 2^{-3/2} = -\frac{3}{2}$

11. Propiedades de los logaritmos

Hazlo tú

- **Calcula x en estos casos:**

a) $\boldsymbol{ln\, 3^{x-1} = 5}$ **b)** $\boldsymbol{2\, log\, x - log\, 4 = 2\, log\, 3}$

a) $ln\, 3^{x-1} = 5$

Aplicamos la propiedad de los logaritmos: $log_a m^n = n log_a m$.

$(x-1)\, ln\, 3 = 5 \to x - 1 = \frac{5}{ln\, 3} \to x = \frac{5}{ln\, 3} + 1 \to x = 5,5512$

b) $2log\, x - log\, 4 = 2log\, 3$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$log\, x^2 - log\, 4 = log\, 3^2$

$log \frac{x^2}{4} = log\, 9;\ \frac{x^2}{4} = 9$

Soluciones: $x = -6,\ x = 6$

Pero como no se pueden tomar logaritmos de números negativos, la única solución válida es $x = 6$.

12. Errores y notación científica

Hazlo tú

- **Expresa el resultado de estas operaciones en notación científica y acota el error absoluto y el error relativo cometidos:**

a) $\mathbf{(15\,000\,000 : 0{,}0003)^2 \cdot (0{,}008)^3}$

b) $\mathbf{1{,}5 \cdot 10^{-8} + 2{,}4 \cdot 10^{-7} - (1{,}2 \cdot 10^{-4})^2}$

a) $(15\,000\,000 : 0{,}0003)^2 \cdot (0{,}008)^3 = \left(\dfrac{15 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{-4}}\right)^2 \cdot (8 \cdot 10^{-3})^3 =$

$= \dfrac{(15)^2 \cdot 10^{12}}{9 \cdot 10^{-8}} \cdot 8^3 \cdot 10^{-9} = \dfrac{(15)^2 \cdot 8^3}{9} 10^{12+8-9} = 12\,800 \cdot 10^{11} = 1{,}28 \cdot 10^{15}$

E.A. $< 0{,}005 \cdot 10^{15} = 5 \cdot 10^{12}$

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^{12}}{1{,}28 \cdot 10^{15}} = 0{,}0039 = 0{,}39\ \%$

b) $1{,}5 \cdot 10^{-8} + 2{,}4 \cdot 10^{-7} - (1{,}2 \cdot 10^{-4})^2 = 1{,}5 \cdot 10^{-8} + 2{,}4 \cdot 10^{-7} - 1{,}44 \cdot 10^{-8} =$

$= 1{,}5 \cdot 10^{-8} + 24 \cdot 10^{-8} - 1{,}44 \cdot 10^{-8} = (1{,}5 + 24 - 1{,}44) \cdot 10^{-8} = 24{,}06 \cdot 10^{-8} = 2{,}406 \cdot 10^{-7}$

E.A. $< 0{,}0005 \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{-11}$

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^{-11}}{2{,}406 \cdot 10^{-7}} = 2{,}078 \cdot 10^{-4} = 0{,}0002078 = 0{,}02\ \%$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 1.9. (EA 1.9.1.-EA 1.9.2.-EA 1.9.3.) CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.-EA 2.1.4.)

Página 53

1. Simplificación de radicales

- **Simplificar las siguientes expresiones:**

a) $\sqrt{3\sqrt{\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{3}}{\sqrt{108}}}}$ **b)** $\sqrt{4a^2cd+8abcd+4b^2cd}$

a) $\sqrt{3\sqrt{\dfrac{\sqrt{2^2 3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 3^3}}}}=\sqrt{3\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}}=\sqrt{3\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}}=\sqrt{3\sqrt{\dfrac{1}{6}}}=\sqrt{\sqrt{\dfrac{3^2}{6}}}=\sqrt[4]{\dfrac{3^2}{6}}=\sqrt[4]{\dfrac{3^2}{3\cdot 2}}=\sqrt[4]{\dfrac{3}{2}}$

b) $\sqrt{4a^2cd+8abcd+4b^2cd}=\sqrt{4cd(a^2+2ab+b^2)}=2(a+b)\sqrt{cd}$

2. Aplicaciones de los logaritmos

- **Calcular, en cada caso, el valor de x para que se cumplan las siguientes igualdades:**

a) $3x^{-1}=173$ **b)** $3-ln\dfrac{1}{x}=5$

c) $ln\,x=\dfrac{1}{4}(2\,ln\,5-3\,ln\,10+5\,ln\,2)$ **d)** $log\,5^x=12$

a) $log(3^{x-1})=log(173) \to (x-1)log(3)=log(173) \to x-1=\dfrac{log(173)}{log(3)} \to x=1+\dfrac{log(173)}{log(3)}=5{,}69$

b) $3-5=ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \to -2=ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \to \dfrac{1}{x}=e^{-2} \to x=e^2$

c) Aplicamos primero la propiedad: $m\,ln\,A=ln\,A^m$

$ln\,x=\dfrac{1}{4}(ln\,5^2-ln\,10^3+ln\,2^5)=\dfrac{1}{4}(ln\,25-ln\,1\,000+ln\,32)$ (*)

Aplicamos ahora la propiedad: $ln\,A-ln\,B=ln\left(\dfrac{A}{B}\right)$

(*) $=\dfrac{1}{4}\left(ln\dfrac{25}{1\,000}+ln\,32\right)=\dfrac{1}{4}\left(ln\left(\dfrac{1}{40}\right)+ln\,32\right)$ (**)

Y aplicamos ahora la propiedad: $ln\,A+ln\,B=ln(A\cdot B)$

(**) $=\dfrac{1}{4}ln\left(\dfrac{32}{40}\right)=\dfrac{1}{4}ln\left(\dfrac{4}{5}\right)$ (***)

Y volvemos a aplicar la primera propiedad:

(***) $=ln\left(\dfrac{4}{5}\right)^{1/4} \to ln\,x=ln\left(\dfrac{4}{5}\right)^{1/4} \to x=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{1/4}=\sqrt[4]{\dfrac{4}{5}}$

d) $x\,log\,5=12 \to x=\dfrac{12}{log\,5}=17{,}17$

3. Repartos proporcionales

- **En una carrera de montaña hay que repartir 2 000 € entre los tres ganadores, de forma inversamente proporcional a los tiempos empleados que son 40, 50 y 60 minutos.**

El corredor que empleó menos tiempo es el que debe tener un premio mayor. Por ello tenemos que repartir los 2 000 € en partes inversamente proporcionales a 40, 50 y 60. Esto equivale a repartir de forma directamente proporcional a $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{50}$ y $\frac{1}{60}$.

Calculamos lo que corresponde a cada uno utilizando la proporcionalidad.

Sumamos $\frac{1}{40}+\frac{1}{50}+\frac{1}{60}=\frac{37}{600}$

Primer premio: $\frac{x}{2\,000}=\frac{1/40}{37/600} \rightarrow x=\frac{2\,000\cdot 1/40}{37/600}=810{,}81$ €

Segundo premio: $y=\frac{2\,000\cdot 1/50}{37/600}=648{,}65$ €

Tercer premio: $z=\frac{2\,000\cdot 1/60}{37/600}=540{,}54$ €

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 54

Para practicar

Números racionales e irracionales

1 **Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, pertenecen:**

$$\mathbf{5;\ -7;\ \frac{5}{4};\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ 4,\widehat{7};\ \frac{\pi}{2}}$$

$5, \sqrt{\frac{18}{2}} \in \mathbb{N}$ $\quad 5, \sqrt{\frac{18}{2}}, -7 \in \mathbb{Z}$ $\quad 5;\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -7;\ \frac{5}{4};\ 4,\widehat{7} \in \mathbb{Q}$ $\quad 5;\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -7;\ \frac{5}{4};\ 4,\widehat{7};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$

2 **¿Cuáles de estos números son irracionales? Expresa como fracción los que sea posible:**

a) $\mathbf{3,181818...}$ **b)** $\mathbf{\sqrt{1,\widehat{7}}}$ **c)** $\mathbf{\sqrt{8}}$ **d)** $\mathbf{1,020020002...}$

e) $\mathbf{-4,0333...}$ **f)** $\mathbf{\sqrt[3]{81}}$ **g)** $\mathbf{1,3999...}$ **h)** $\mathbf{2\pi}$

a) $3,181818... = \frac{318-3}{99} = \frac{315}{99} = \frac{35}{11}$

b) $\sqrt{1,\widehat{7}} = \sqrt{\frac{17-1}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

c) $\sqrt{8}$ Irracional.

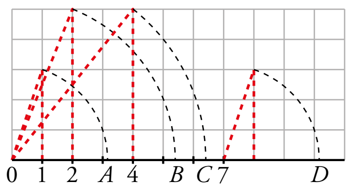
d) $1,020020002...$ Irracional.

e) $-4,0333... = -\frac{403-40}{90} = -\frac{121}{30}$

f) $\sqrt[3]{81}$ Irracional.

g) $1,3999... = \frac{139-13}{90} = \frac{7}{5}$

h) 2π Irracional.

3 

¿Qué números irracionales representan los puntos A, B, C y D? Justifica la respuesta.

$A = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ $\quad B = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$ $\quad C = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$ $\quad D = 7 + \sqrt{1^2+3^2} = 7+\sqrt{10}$

4 **Indica cuál, de cada par de números, es mayor:**

a) $\dfrac{140}{99}$ **y** $\sqrt{2}$ **b)** $0{,}52\widehat{6}$ **y** $0{,}\widehat{526}$

c) $4{,}\widehat{89}$ **y** $2\sqrt{6}$ **d)** $-2{,}098$ **y** $-2{,}1$

Escribe, en cada caso, un número comprendido entre los dos dados.

a) $\sqrt{2} = 1{,}4142$

$\dfrac{140}{99} = 1{,}4141$

Un número comprendido entre los dos anteriores es 1,41415.

b) $0{,}52\widehat{6}$

Un número comprendido entre los dos anteriores es 0,5266.

c) $4{,}\widehat{89}$

$2\sqrt{6} = 4{,}898979$

Un número comprendido entre los dos anteriores es 4,89898.

d) 2,098

Un número comprendido entre los dos anteriores es –2,099.

Intervalos, semirrectas y valor absoluto

5 **Representa y expresa como intervalo o como semirrecta los números que cumplen la condición dada en cada caso.**

a) x **es menor que –5.**

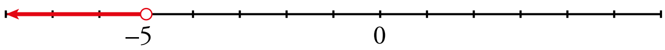
b) 3 es menor o igual que x**.**

c) x **está comprendido entre –5 y 1.**

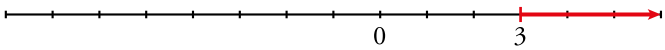
d) x **está entre –2 y 0, ambos incluidos.**

e) x **es mayor o igual que –3 y menor que 2.**

a) $x < -5$; $(-\infty, -5)$



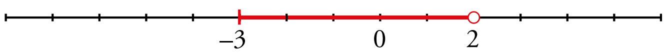
b) $3 \le x$; $[3, +\infty)$



c) $-5 < x < 1$; $(-5, 1)$

d) $-2 \le x \le 0$; $[-2, 0]$

e) $[-3, 2)$; $-3 \le x < 2$



6 **Escribe la desigualdad que verifica todo número** x **que pertenece a estos intervalos o semirrectas:**

a) $[-2, 7]$ **b)** $[13, +\infty)$ **c)** $(-\infty, 0)$

d) $(-3, 0]$ **e)** $[3/2, 6)$ **f)** $(0, +\infty)$

a) $-2 \le x \le 7$ b) $x \ge 13$ c) $x < 0$

d) $-3 < x \le 0$ e) $\dfrac{3}{2} \le x < 6$ f) $0 < x < +\infty$

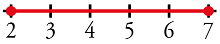
7 **Escribe y representa el tramo de recta que corresponde a cada desigualdad.**

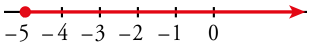
a) $2 \le x \le 7$

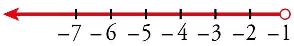
b) $-5 \le x$

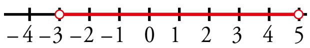
c) $x < -1$

d) $5 > x > -3$

a) 

b) 

c) 

d) 

8 **Expresa como un único intervalo.**

a) $(1, 6] \cup [2, 5)$

b) $[-1, 3) \cup (0, 3]$

c) $(1, 6] \cap [2, 7)$

d) $[-1, 3) \cap (0, 4)$

e) $[-3, 2] \cap [0, 5]$

f) $[2, +\infty) \cap (0, 10)$

a) $(1, 6] \cup [2, 5) = (1, 6]$

b) $[-1, 3) \cup (0, 3] = [-1, 3]$

c) $(1, 6] \cap [2, 7) = [2, 6]$

d) $[-1, 3) \cap (0, 4) = (0, 3)$

e) $[-3, 2] \cap [0, 5] = [0, 2]$

f) $[2, +\infty) \cap (0, 10) = [2, 10)$

9 **Expresa en forma de intervalo los números que cumplen cada una de estas expresiones:**

a) $|x| < 7$

b) $|x| \ge 5$

c) $|2x| < 8$

d) $|x - 1| \le 6$

e) $|x + 2| > 9$

f) $|x - 5| \ge 1$

a) $(-7, 7)$

b) $[-\infty, -5] \cup [5, +\infty]$

c) $(-4, 4)$

d) $[-5, 7]$

e) $(-11, 7)$

f) $(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$

10 **Escribe mediante intervalos los posibles valores de x para que se pueda calcular la raíz en cada caso.**

a) $\sqrt{x-4}$

b) $\sqrt{2x+1}$

c) $\sqrt{-x}$

d) $\sqrt{3-2x}$

e) $\sqrt{-x-1}$

f) $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$

a) $x - 4 \ge 0 \;\Rightarrow\; x \ge 4;\;\; [4, +\infty)$

b) $2x + 1 \ge 0 \;\Rightarrow\; 2x \ge -1 \;\Rightarrow\; x \ge -\frac{1}{2};\;\; \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$

c) $-x \ge 0 \;\Rightarrow\; x \le 0;\;\; (-\infty, 0]$

d) $3 - 2x \ge 0 \;\Rightarrow\; 3 \ge 2x \;\Rightarrow\; x \le ;\;\; \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

e) $-x - 1 \ge 0 \;\Rightarrow\; -1 \ge x;\;\; (-\infty, -1]$

f) $1 + \frac{x}{2} \ge 0 \;\Rightarrow\; 2 + x \ge 0 \;\Rightarrow\; x \ge -2;\;\; [-2, +\infty)$

11 **Se denomina entorno de centro a y radio r al intervalo abierto $(a - r, a + r)$.**

a) **Describe como entorno el intervalo $I = (-3, 5)$. Ten en cuenta que el centro es el punto medio entre –3 y 5 y el radio la distancia del centro a uno de sus extremos.**

b) **Expresa como intervalo el entorno de centro –5,2 y radio 0,8.**

a) Es el entorno de centro $a = 1$ y radio $r = 4$.

b) $I = (-6; 4,4)$

Radicales y potencias

12 **Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario y simplifica:**

a) $\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt{a}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

a) $a^{2/5}\cdot a^{1/2}=a^{9/10}=\sqrt[10]{a^9}$

b) $\dfrac{x^{2/3}}{x^{1/2}}=x^{1/6}=\sqrt[6]{x}$

c) $a^{-3/4}=\sqrt[4]{a^{-3}}$

13 **Resuelve, sin utilizar calculadora:**

a) $\sqrt[5]{32}$ **b)** $\sqrt[3]{343}$ **c)** $\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt{0,25}$ **e)** $\sqrt[3]{8^4}$ **f)** $\sqrt[3]{0,001}$

a) $\sqrt[5]{2^5}=2$ b) $\sqrt[3]{7^3}=7$ c) $\sqrt[4]{5^4}=5$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}=0,5$ e) $\sqrt[3]{2^{12}}=2^4=16$ f) $\sqrt[3]{0,1^3}=0,1$

14 **Expresa como una potencia de base 2:**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **b)** $(-32)^{1/5}$ **c)** $(\sqrt[8]{2})^4$

a) $2^{-1/2}$ b) $(-2^5)^{1/5}=-2$ c) $2^{4/8}=2^{1/2}$

15 **Calcula utilizando potencias de base 2, 3 y 5:**

a) $4\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3$ **b)** $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\dfrac{2}{9}\right)^{-1}\cdot\dfrac{1}{8}$

c) $\dfrac{(-5)^3\cdot(-8)^3\cdot(-9)^2}{15^2\cdot 20^4}$ **d)** $\dfrac{(-30)^{-1}\cdot 15^2}{10^3}$

a) $2^2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(-3)^3}{2^3}=\dfrac{-3^2}{2}=\dfrac{-9}{2}$

b) $\dfrac{1}{2^4}\cdot\dfrac{3^2}{2}\cdot\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{3^2}{2^8}=\dfrac{9}{256}$

c) $\dfrac{(-5)^3\cdot(-2^3)^3\cdot(-3^2)^2}{3^2\cdot 5^2\cdot(2^2\cdot 5)^4}=\dfrac{5^3\cdot 2^9\cdot 3^4}{3^2\cdot 5^2\cdot 2^8\cdot 5^4}=\dfrac{2\cdot 3^2}{5^3}=\dfrac{18}{125}$

d) $\dfrac{3^2\cdot 5^2}{-2\cdot 3\cdot 5\cdot 2^3\cdot 5^3}=-\dfrac{3}{5^2\cdot 2^4}=\dfrac{-3}{400}$

16 **Expresa en forma de potencia, efectúa las operaciones y simplifica:**

a) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}\cdot a^{-1}}{a\sqrt{a}}$ **b)** $16^{1/4}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[6]{4}}$

a) $\dfrac{a^{3/4}\cdot a^{-1}}{a\cdot a^{1/2}}=a^{-7/4}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^7}}$

b) $(2^4)^{1/4}\cdot(2^2)^{-1/3}\cdot(2^2)^{-1/6}=2\cdot 2^{-2/3}\cdot 2^{-1/3}=2^0=1$

17 **Simplifica, utilizando las propiedades de las potencias:**

a) $\dfrac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{9^3 \cdot 4^3 \cdot 5}$ **b)** $\dfrac{3^4 \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{5^{-1} \cdot 3^5}$

c) $\dfrac{15^2 \cdot 8^{-1}}{6^3 \cdot 10^2}$ **d)** $\dfrac{a^{-3} \cdot b^{-4} \cdot c^7}{a^{-5} \cdot b^2 \cdot c^{-1}}$

a) $\dfrac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{3^6 \cdot 2^6 \cdot 5} = \dfrac{5}{2}$ b) $\dfrac{3^4 \cdot 2^4 \cdot 3^{-2}}{5^{-1} \cdot 3^5} = \dfrac{2^4 \cdot 5}{3^3} = \dfrac{80}{27}$

c) $\dfrac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{-3}}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = \dfrac{1}{2^8 \cdot 3} = \dfrac{1}{768}$ d) $\dfrac{c^7\, a^5\, c}{a^3\, b^4\, b^2} = \dfrac{a^2\, c^8}{b^6}$

Página 55

18 **Reduce a índice común y ordena de menor a mayor.**

a) $\sqrt[4]{5},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{6},\ \sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{6},\ \sqrt[5]{10}$ **d)** $\sqrt[4]{20},\ \sqrt[3]{9},\ \sqrt[6]{100}$

a) $\sqrt[12]{5^3},\ \sqrt[12]{3^4},\ \sqrt[12]{2^6};\ \sqrt[12]{125},\ \sqrt[12]{81},\ \sqrt[12]{64} \ \rightarrow\ \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$

b) $\sqrt[6]{216},\ \sqrt[6]{16} \ \rightarrow\ \sqrt[3]{4} < \sqrt{6}$

c) $\sqrt[20]{7776},\ \sqrt[20]{10\,000} \ \rightarrow\ \sqrt[4]{6} < \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[12]{20^3},\ \sqrt[12]{9^4},\ \sqrt[12]{100^2}$; tenemos $\sqrt[12]{10\,000};\ \sqrt[12]{6561};\ \sqrt[12]{8000} \ \rightarrow\ \sqrt[3]{9} < \sqrt[4]{20} < \sqrt[6]{100}$

19 **Introduce los factores dentro de cada raíz.**

a) $2\sqrt[3]{3}$ **b)** $4\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ **c)** $\dfrac{2}{x}\sqrt{\dfrac{3x}{8}}$

d) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{25}{9}}$ **e)** $2\sqrt[4]{4}$ **f)** $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

a) $\sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{4^3}{4}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{\dfrac{2^2 \cdot 3x}{x^2 \cdot 2^3}} = \sqrt{\dfrac{3}{2x}}$ d) $\sqrt[3]{\dfrac{3^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 3^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}$

e) $\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$ f) $\sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 5}{5^3}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{25}}$

20 **Saca de la raíz el factor que puedas.**

a) $\sqrt[3]{16}$ **b)** $4\sqrt{8}$ **c)** $\sqrt{1000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$ **e)** $\sqrt{\dfrac{125a^2}{16b}}$ **f)** $\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}}$

g) $\sqrt{\dfrac{16}{a^3}}$ **h)** $\sqrt{4a^2+4}$ **i)** $\sqrt{\dfrac{a}{9}+\dfrac{a}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$ b) $4\sqrt{2^3} = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2^3 \cdot 5^3} = 10\sqrt{10}$

d) $\sqrt[3]{2^3 \cdot a^5} = 2a\sqrt[3]{a^2}$ e) $\sqrt{\dfrac{5^3 \cdot a^2}{2^4 \cdot b}} = \dfrac{5a}{4}\sqrt{\dfrac{5}{b}}$ f) $\sqrt{\dfrac{13}{36}} = \dfrac{1}{6}\sqrt{13}$

g) $\dfrac{4}{a}\sqrt{\dfrac{1}{a}}$ h) $\sqrt{4(a^2+1)} = 2\sqrt{a^2+1}$ i) $\sqrt{\dfrac{25a}{16 \cdot 9}} = \dfrac{5\sqrt{a}}{12}$

21 **Simplifica los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[6]{49}$ **b)** $\sqrt[15]{a^{12}}$ **c)** $\sqrt[6]{25}$

d) $\sqrt[4]{48}$ **e)** $\sqrt[7]{a^{10}}$ **f)** $\sqrt[4]{128}$

a) $\sqrt[6]{49} = 7^{2/6} = 7^{1/3} = \sqrt[3]{7}$

b) $\sqrt[15]{a^{12}} = a^{12/15} = a^{4/5} = \sqrt[5]{a^4}$

c) $\sqrt[6]{25} = 5^{2/6} = 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$

d) $\sqrt[4]{48} = (3 \cdot 2^4)^{1/4} = 2\sqrt[4]{3}$

e) $\sqrt[7]{a^{10}} = \sqrt[7]{a^{7+3}} = \sqrt[7]{a^7 a^3} = a\sqrt[7]{a^3}$

f) $\sqrt[4]{128} = \sqrt[4]{2^7} = 2\sqrt[4]{2^3}$

22 **Simplifica los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[3]{24}$ **b)** $\sqrt[6]{27}$ **c)** $\sqrt[3]{-108}$

d) $\sqrt[12]{64y^3}$ **e)** $\sqrt[4]{\dfrac{81}{64}}$ **f)** $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$

g) $\sqrt[6]{0,027}$ **h)** $\sqrt[8]{0,0016}$ **i)** $\sqrt[4]{1 + \dfrac{9}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{3^3} = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

c) $-\sqrt[3]{3^3 \cdot 2^2} = -3\sqrt[3]{2^2}$

d) $\sqrt[12]{2^6 \cdot y^3} = \sqrt[4]{2^2 \cdot y} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{y}$

e) $\sqrt[4]{\dfrac{3^4}{2^6}} = \dfrac{3}{\sqrt{2^3}} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

f) $\sqrt[8]{5^4} : \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} : \sqrt{5} = 1$

g) $\sqrt[6]{0,027} = \sqrt[6]{10^{-3} 3^3} = \sqrt[6]{\dfrac{3^3}{10^3}} = \sqrt{\dfrac{3}{10}}$

h) $\sqrt[8]{0,0016} = \sqrt[8]{10^{-4} 2^4} = \sqrt[8]{\dfrac{2^4}{10^4}} = \sqrt{\dfrac{2}{10}}$

i) $\sqrt[4]{1 + \dfrac{9}{16}} = \sqrt[4]{\dfrac{25}{16}} = \sqrt[4]{\dfrac{5^2}{2^4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

23 **Reduce a índice común y simplifica.**

a) $\dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[3]{4}}$ **b)** $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{8}$ **c)** $\sqrt[7]{81} \cdot \sqrt{3}$

a) $\dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[6]{4^2}} = \dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[6]{16}} = 1$

b) $\sqrt[3]{4}\sqrt[5]{8} = \sqrt[15]{4^5}\sqrt[15]{8^3} = \sqrt[15]{2^{10} \cdot 2^9} = \sqrt[15]{2^{19}} = 2\sqrt[15]{2^4} = 2\sqrt[15]{2^4} = 2\sqrt[15]{16}$

c) $\sqrt[7]{81}\sqrt[2]{3} = \sqrt[14]{3^8 \cdot 3^7} = \sqrt[14]{3^{15}} = 3\sqrt[14]{3}$

24 **Realiza la operación y simplifica, si es posible.**

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$ **b)** $2\sqrt{\dfrac{4}{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{27}{8}}$ **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{8}}$

d) $(\sqrt[3]{12})^2$ **e)** $(\sqrt[6]{32})^2$ **f)** $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

a) $20\sqrt{27 \cdot 6} = 20\sqrt{3^3 \cdot 2 \cdot 3} = 20\sqrt{2 \cdot 3^4} = 180\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{\dfrac{4 \cdot 27}{3 \cdot 8}} = 2\sqrt{\dfrac{9}{2}} = 6\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

c) $\sqrt{\dfrac{2}{8}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

d) $\left(\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}\right)^2 = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{18}$

e) $\left(\sqrt[6]{2^5}\right)^3 = \sqrt[6]{2^{15}} = \sqrt{2^5} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

f) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} : \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{3} = 2$

25 **Efectúa y simplifica, si es posible.**

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}} \cdot \sqrt{a}$

c) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$

d) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} : \sqrt{\sqrt[3]{4}}$

a) $\sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{108}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \cdot \sqrt{a} = \sqrt[6]{a}$

c) $\left(\sqrt[6]{\dfrac{2^5}{2^9}}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{\dfrac{1}{2^4}}\right)^3 = \sqrt[6]{\dfrac{1}{2^{12}}} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 3}} : \sqrt{\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3} : \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3}$

26 **Expresa con una única raíz.**

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$

b) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$

c) $\left(\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^4}\right) : \sqrt{a}$

a) $\sqrt[12]{4} = \sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[12]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128}$

c) $\sqrt[20]{\dfrac{a^{15} \cdot a^{16}}{a^{10}}} = \sqrt[20]{a^{21}} = a\sqrt[20]{a}$

27 **Racionaliza los denominadores y simplifica.**

a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{3}{3+\sqrt{3}}$

e) $\dfrac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$

f) $\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3 \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\dfrac{2\sqrt[3]{2^2}}{2} = \sqrt[3]{4}$

c) $\dfrac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$

d) $\dfrac{3(3-\sqrt{3})}{9-3} = \dfrac{9-3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{3(3-\sqrt{3})}{2 \cdot 3} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$ Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{6}$

$$\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{72}-\sqrt{8})\sqrt{6}}{6} = \frac{(\sqrt{2^3 3^2}-\sqrt{2^3})\sqrt{6}}{6} = \frac{4\sqrt{12}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

f) $\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ Multiplicamos numerador y denominador por $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 5\sqrt{3}+5\sqrt{2}$$

28 **Calcula y simplifica.**

a) $5\sqrt{125} + 6\sqrt{45} - 7\sqrt{20} + \dfrac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16} + 7\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54} - \dfrac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $-\sqrt{54} + 3\sqrt{24} - \sqrt{150} + \sqrt{294}$

a) $25\sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 14\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 35\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{2^4} + 7\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - \dfrac{21}{5}\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 2\sqrt[3]{2} + 7\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - \dfrac{21}{5} \cdot 5\sqrt[3]{2} = -15\sqrt[3]{2}$

c) $-\sqrt{2 \cdot 3^3} + 3\sqrt{2^3 \cdot 3} - \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5^2} + \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7^2} = -3\sqrt{2 \cdot 3} + 2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 3} - 5\sqrt{2 \cdot 3} + 7\sqrt{2 \cdot 3} = 5\sqrt{6}$

29 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{72}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}}-4\sqrt{\frac{18}{125}}+\frac{7}{2}\sqrt{\frac{8}{45}}$

c) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{81a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{3^3}+\sqrt{2^3\cdot 3^2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+6\sqrt{2}=9\sqrt{2}-\sqrt{3}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}}-4\sqrt{\frac{2\cdot 3^2}{5^3}}+\frac{7}{2}\sqrt{\frac{2^3}{3^2\cdot 5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}-4\frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{7}{2}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}=$

$$=\sqrt{\frac{2}{5}}-\frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}=\left(1-\frac{12}{5}+\frac{7}{3}\right)\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{14}{15}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

c) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{3^4a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\frac{7}{5}3\sqrt[3]{3a}-2a\sqrt[3]{3a}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\left(\frac{21}{5}-2a-\frac{1}{5}\right)\sqrt[3]{3a}=(4-2a)\sqrt[3]{3a}$

30 Efectúa y simplifica.

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-1)$

b) $(\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{5}+\sqrt{6})$

c) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2$

d) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\sqrt{3}$

a) $\sqrt{12}-\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}-\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{3}=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

b) $5-6=-1$

c) $20+18-12\sqrt{10}=38-12\sqrt{10}$

d) $(2-1)\sqrt{3}=\sqrt{3}$

31 Racionaliza y simplifica.

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

c) $\frac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$

e) $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

f) $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}-2}{3\cdot 2}=\frac{2(\sqrt{6}-1)}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{6}-1}{3}$

b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2^2\cdot 3}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{6+\sqrt{6}}{6}=1+\frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2(3-5)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-4}=-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$

d) $\frac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\frac{3(\sqrt{5}+2)}{5-4}=3(\sqrt{5}+2)=3\sqrt{5}+6$

e) $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}\cdot\frac{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}=\frac{13\sqrt{10}(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{5-9\cdot 2}=\frac{65\sqrt{2}+78\sqrt{5}}{-13}=-5\sqrt{2}-6\sqrt{5}$

f) $\frac{(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2)}{(3\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}-2)}=\frac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{27-4}=\frac{9\sqrt{2\cdot 3^2}-4\sqrt{2}}{23}=\frac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23}=\frac{23\sqrt{2}}{23}=\sqrt{2}$

32 **Efectúa y simplifica.**

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

a) $\dfrac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

b) $\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5}=\dfrac{2\sqrt{7}(-2\sqrt{5})}{2}=-2\sqrt{35}$

Logaritmos

33 **Expresa como potencia de la base y calcula aplicando la definición de logaritmo.**

a) $log_2 1\,024$ **b)** $log\ 0{,}001$ **c)** $log_2 \dfrac{1}{64}$

d) $log_{\sqrt{3}} 3$ **e)** $log_3 \sqrt{3}$ **f)** $log_2 \sqrt{8}$

g) $log_4 2$ **h)** $log_\pi 1$ **i)** $ln \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$

a) $log_2 2^{10}=10$ b) $log\ 10^{-3}=-3$ c) $log_2 2^{-6}=-6$

d) $log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^2=2$ e) $log_3 3^{1/2}=\dfrac{1}{2}$ f) $log_2 2^{3/2}=\dfrac{3}{2}$

g) $log_4 2=log_4 2^{2/2}=log_4 (2^2)^{1/2}=log_4 4^{1/2}=\dfrac{1}{2}$

h) 0 i) $ln\ e^{-1/3}=-\dfrac{1}{3}$

34 **Calcula la base de estos logaritmos:**

a) $log_x 125=3$ **b)** $log_x \dfrac{1}{9}=-2$ **c)** $log_x \dfrac{1}{4}=2$

d) $log_x 2=1/2$ **e)** $log_x 0{,}04=-2$ **f)** $log_x 4=-1/2$

a) $x^3=125 \rightarrow x=5$ b) $x^{-2}=\dfrac{1}{9} \rightarrow x=3$ c) $x^2=\dfrac{1}{4} \rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

d) $x^{1/2}=2 \rightarrow x=4$ e) $x^{-2}=0{,}04 \rightarrow x=5$ f) $x^{-1/2}=4 \rightarrow x=\dfrac{1}{16}$

35 **Calcula el valor de x en estas igualdades:**

a) $log\ 3^x=2$ **b)** $log\ x^2=-2$ **c)** $7^x=115$

d) $5^{-x}=3$ **e)** $log_7 3x=0{,}5$ **f)** $3^{2+x}=172$

a) $x=\dfrac{2}{log\ 3}=4,19$ b) $2log\ x=-2 \rightarrow x=\dfrac{1}{10}$ c) $x=\dfrac{log\ 115}{log\ 7}=2,438$

d) $x=-\dfrac{log\ 3}{log\ 5}=-0,683$ e) $7^{0,5}=3x \rightarrow x=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ f) $2+x=log_3 172 \rightarrow x=log_3 172-2$

Página 56

36 **Halla con la calculadora y comprueba el resultado mediante potenciación.**

a) $log \sqrt{148}$ b) $ln\ (2{,}3 \cdot 10^{11})$ c) $ln\ (7{,}2 \cdot 10^{-5})$

d) $log_3\ 42{,}9$ e) $log_5\ 1{,}95$ f) $log_2\ 0{,}034$

a) 1,085 b) $ln\ (2{,}3 \cdot 10^{11}) \approx 26{,}16 \rightarrow e^{26{,}161} \approx 2{,}3 \cdot 10^{11}$

c) $ln\ (7{,}2 \cdot 10^{-5}) \approx -9{,}54 \rightarrow e^{-9{,}54} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-5}$ d) $3{,}42 \rightarrow 3^{3{,}42} \approx 42{,}9$

e) $0{,}41 \rightarrow 5^{0{,}41} \approx 1{,}95$ f) $-4{,}88 \rightarrow 2^{-4{,}88} \approx 0{,}034$

37 **Desarrolla las siguientes expresiones:**

a) $log \dfrac{a^2 \sqrt[5]{b^3}}{100c^4}$ b) $ln \dfrac{\sqrt[4]{x^3} \cdot e^5}{\sqrt{y}}$

a) $log\ a^2 \sqrt[5]{b^3} - log\ 100c^4 = log\ a^2 + log \sqrt[5]{b^3} - log\ 10^2 - log\ c^4 = 2log\ a + \dfrac{3}{5} log\ b - 2 - 4log\ c$

b) $ln \dfrac{\sqrt[4]{x^3}\, e^5}{\sqrt{y}} = ln \sqrt[4]{x^3}\, e^5 - ln \sqrt{y} = ln \sqrt[4]{x^3} + ln\ e^5 - ln \sqrt{y} = \dfrac{3}{4} ln\ x + 5 - \dfrac{1}{2} ln\ y$

38 **Sabiendo que** $log\ x = 0{,}28$ **calcula el valor de:**

a) $log \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{100}$ b) $log\ 1\,000x^3$

c) $log \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ d) $log\ 10x + log \dfrac{1}{x^2}$

a) $log \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{100} = log \dfrac{x^{2/3}}{100} = log\ x^{2/3} - log\ 100 = \dfrac{2}{3} log\ x - 2 = \dfrac{2}{3} \cdot 0{,}28 - 2 = -1{,}8133$

b) $log\ 1\,000x^3 = log\ 1\,000 + log\ x^3 = log\ 1\,000 + 3\ log\ x = 3 + 3 \cdot 0{,}28 = 3{,}84$

c) $log \dfrac{1}{\sqrt{x}} = log\ 1 - log\ x^{1/2} = 0 - \dfrac{1}{2} log\ x = -\dfrac{1}{2} \cdot 0{,}28 = -0{,}14$

d) $log\ 10x + log \dfrac{1}{x^2} = log\ 10 + log\ x + log\ 1 - 2\ log\ x = 1 + 0{,}28 + 0 - 2 \cdot 0{,}28 = 0{,}72$

39 **Calcula** x **utilizando los logaritmos y sus propiedades.**

a) $35 = 21 \cdot 1{,}04x$ b) $1{,}5 \cdot 10^{12} = 2^{-10}x$

c) $log_x\ 0{,}3 = 2 - log_x\ 2$ d) $ln\ 5x + ln \dfrac{x}{2} = 1$

a) Dividimos ambos miembros de la ecuación entre 21 y simplificamos:

$$\frac{35}{21} = 1{,}04^x \rightarrow \frac{5}{3} = 1{,}04^x$$

Aplicamos logaritmo a cada miembro de la ecuación para poder despejar la x, y luego sus propiedades:

$$log \frac{5}{3} = log(1{,}04^x) = x\ log\ 1{,}04 \rightarrow \frac{log \frac{5}{3}}{log\ 1{,}04} = x$$

Con la calculadora aproximamos x con 4 cifras significativas $x = 13{,}02$.

b) $log\ 1{,}5 + log\ 10^{12} = -10x\ log\ 2 \rightarrow x = \dfrac{log\ 1{,}5 + log\ 10^{12}}{-10\ log\ 2}$

c) $log_x 0{,}3 + log_x 2 = 2 \rightarrow log_x (0{,}3 \cdot 2) = 2 \rightarrow log_x 0{,}6 = 2 \rightarrow x^2 = 0{,}6 \rightarrow x = \sqrt{0{,}6}$

d) $ln \dfrac{5x^2}{2} = 1 \rightarrow e^1 = \dfrac{5x^2}{2} \rightarrow x = \sqrt{(2e)/5}$

40 **Halla el valor de x en estas expresiones:**

a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13$ **b)** $\log x = \log 36 - \log 9$

c) $\ln x = 3 \ln 5 - 2 \ln 10$ **d)** $\log x = 3 \log 2 - \frac{1}{2} \log 25$

a) $\ln x = \ln (17 \cdot 13) \Rightarrow x = 17 \cdot 13 = 221$

b) $\log x = \log \frac{36}{9} \Rightarrow x = \frac{36}{9} = 4$

c) $\ln x = \ln 5^3 - \ln 10^2;\ \ln x = \ln \frac{5^3}{10^2};\ x = \frac{5^3}{5^2 \cdot 2^2};\ x = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}$

d) $\log x = \log 2^3 - \log 25^{1/2};\ \log x = \log 2^3 - \log 5;\ \log x = \log \frac{8}{5};\ x = \frac{8}{5}$

41 **Si $\log k = x$, escribe en función de x.**

a) $\log 100k$ **b)** $\log \frac{k}{1000}$ **c)** $\log k^3$

d) $\log \sqrt[3]{10k}$ **e)** $\log \frac{1}{k}$ **f)** $(\log k)^{1/2}$

a) $\log 100 + \log k = 2 + x$

b) $\log k - \log 1\,000 = x - 3$

c) $3\log k = 3x$

d) $\frac{1}{3}(\log 10 + \log k) = \frac{1}{3}(1 + x)$

e) $\log 1 - \log k = 0 - x = -x$

f) $\sqrt{x}$

42 **¿Cuál es la relación, sin logaritmos, que hay entre x, y, z?**

a) $\log z = 2 \log x - \log y$

b) $\log z = 2 - \log x - \frac{1}{2} \log y$

c) $\log z = 1 - \frac{1}{2} (\log x - \log y)$

d) $\ln z = 1 - 2 \ln x + 2 \ln y$

a) $\log z = \log x^2 - \log y;\ \log z = \log \frac{x^2}{y};\ z = \frac{x^2}{y}$

b) $\log z = \log 10^2 - \log x - \log \sqrt{y};\ \log z = \log \frac{100}{x\sqrt{y}};\ z = \frac{100}{x\sqrt{y}}$

c) $\log z = \log 10 - \frac{1}{2} \log \frac{x}{y};\ \log z = \log 10 - \log \sqrt{\frac{x}{y}};\ \log z = \log \frac{10}{\sqrt{\frac{x}{y}}};\ z = \frac{10\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

d) $\ln z = \ln e - \ln x^2 + \ln y^2;\ \ln z = \ln \frac{e \cdot y^2}{x^2};\ z = \frac{e \cdot y^2}{x^2}$

Errores y notación científica

43 **Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.**

a) $\dfrac{(3,12 \cdot 10^{-5} + 7,03 \cdot 10^{-4})\, 8,3 \cdot 10^8}{4,32 \cdot 10^3}$

b) $\dfrac{(12,5 \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^9)\,(3,5 \cdot 10^{-5} + 185)}{9,2 \cdot 10^6}$

c) $\dfrac{5,431 \cdot 10^3 - 6,51 \cdot 10^4 + 385 \cdot 10^2}{8,2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}$

a) $1,41 \cdot 10^2$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^2 = 0,5$

E.R. $< \frac{0,5}{141} < 0,00355$

b) $-1,58 \cdot 10^5$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^2$

E.R. $< \frac{5 \cdot 10^2}{1,58 \cdot 10^5} < 3,16 \cdot 10^{-3}$

c) $-2,65 \cdot 10^6$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^3$

E.R. $< \frac{5 \cdot 10^3}{2,65 \cdot 10^6} < 1,89 \cdot 10^{-3}$

44 Ordena de mayor a menor los números de cada apartado. Para ello, pasa a notación científica los que no lo estén.

a) $3,27 \cdot 10^{13}$; $85,7 \cdot 10^{12}$; $453 \cdot 10^{11}$

b) $1,19 \cdot 10^{-9}$; $0,05 \cdot 10^{-7}$; $2\,000 \cdot 10^{-12}$

a) $8,57 \cdot 10^{13} > 4,53 \cdot 10^{13} > 3,27 \cdot 10^{13}$

b) $5 \cdot 10^{-9} > 2 \cdot 10^{-9} > 1,19 \cdot 10^{-9}$

Para resolver

45 El precio de una caja de 40 pastillas para lavavajillas es 4,75 €. Para aumentar las ventas, el fabricante se plantea hacer tres tipos de oferta:

a) La caja con 50 pastillas al mismo precio 4,75 €.

b) Lleve 3 cajas de 40 pastillas y solo pague 2.

c) La segunda unidad al 50 %.

Compara estas ofertas. ¿Qué porcentaje de descuento nos hacen en cada caso?

Para comparar los precios veremos cuánto cuesta cada pastilla en cada caso:

El precio inicial de cada pastilla es:

$\frac{4,75}{40} = 0,1188$ €

a) Oferta de 50 pastillas por 4,75 €. El precio de cada pastilla es: $\frac{4,75}{50} = 0,095$ €

Por lo tanto, por cada pastilla el descuento será:

$0,1188 - 0,095 = 0,0238$ €

El porcentaje de descuento será: $\frac{0,1188 - 0,095}{0,1188} \cdot 100 = 20\,\%$

b) Oferta de 3 cajas pagando solamente 2. El precio de cada pastilla es:

$\frac{4,75 \cdot 2}{120} = 0,0792$ €

Por lo tanto, por cada pastilla el descuento será:

$0,1188 - 0,0792 = 0,0396$ €

El porcentaje de descuento será: $\frac{0,1188 - 0,0792}{0,1188} \cdot 100 = 33,4\,\%$

c) Segunda unidad al 50 %. El precio de cada pastilla es:

$\frac{4,75 + \frac{4,75}{2}}{80} = 0,089$ €

Por lo tanto, por cada pastilla el descuento será:

0,1188 – 0,089 = 0,0298 €

El porcentaje de descuento será: $\frac{0,1188-0,0298}{0,1188}\cdot 100 = 25,1\,\%$

La mejor oferta es la del apartado b).

46 **Varios amigos se reúnen en un bar, toman 15 refrescos y pagan 18,75 € en total. Uno de ellos tomó solo un refresco, otro tomó dos y el resto tomaron 3 refrescos cada uno. ¿Cuántos amigos fueron y cuánto tuvo que pagar cada uno?**

18,75 : 15 = 1,25 € por refresco.

1,25 paga el primero; 2,5 paga el segundo $\rightarrow$ 3,75 € entre los dos.

Los restantes toman 15 – 3 = 12 refrescos.

12 : 3 = 4 amigos, y cada uno paga 3,75 €.

Son 6 en total. Pagan 1,25 €, 2,5 € y los otros cuatro, 3,75 € cada uno.

47 ¿Qué te hace decir eso? **[El alumnado podría compartir con sus compañeros el proceso que ha seguido para solucionar el problema y trabajar, de estar forma esta estrategia].**

En una granja hay 75 gallinas que consumen 450 kg de maíz en 30 días. Para aumentar la producción de huevos, se aumenta el número de gallinas a 200 y se compran 800 kg de maíz. ¿Cuántos días se podrá dar de comer a las gallinas?

450 : 30 = 15; 15 : 75 = 0,2 kg de maíz es lo que come una gallina en un día.

200 · 0,2 = 40 kg por día para alimentar 200 gallinas.

800 : 40 = 20 días podrán comer las gallinas.

48 **La construcción de un centro hospitalario tuvo un sobrecoste del 35 % con respecto al presupuesto inicial y su coste final fue 918 millones de €. La diferencia entre ambos precios deben pagarla tres municipios A, B y C, de forma inversamente proporcional a su distancia al hospital que son 40 km, 50 km y 60 km. Calcula lo que debe pagar cada uno.**

Si llamamos x al pago inicial previsto, podemos decir que el pago final fue:

$$918 = \frac{135x}{100} \rightarrow x = \frac{91\,800}{135} = 680$$

El pago inicial era de 680 millones de euros, por lo que deben pagar una diferencia de:

918 – 680 = 238 millones de euros

Esta cantidad la pagan de forma inversamente proporcional a su distancia al hospital. Para ello buscamos un valor y al que aplicarle la proporcionalidad inversa:

$$\frac{y}{40}+\frac{y}{50}+\frac{y}{60}=238$$

Buscamos su denominador común y operamos:

$$\frac{15y+12y+10y}{600}=\frac{37y}{600}=238 \rightarrow y=3\,859,5$$

El pueblo A pagará $\frac{3\,859,5}{40}$ = 96,49 millones de euros.

El pueblo B pagará $\frac{3\,859,5}{50}$ = 77,19 millones de euros.

El pueblo C pagará $\frac{3\,859,5}{60}$ = 64,32 millones de euros.

49 Un depósito de agua tiene dos grifos. Si los abrimos a la vez, el depósito se llena en dos horas. Si abrimos solo el primero, se llena en seis horas. ¿Cuánto tardará en llenarse el depósito si abrimos solamente el segundo grifo?

Llamamos x = n.º de horas que tarda en llenar el depósito el segundo grifo.

El primer grifo llena $\frac{1}{6}$ del depósito en una hora.

El segundo grifo llena $\frac{1}{x}$ del depósito en una hora.

Los dos juntos llenan $\frac{1}{2}$ del depósito en una hora.

Por otra parte, los dos juntos, en una hora, llenan $\frac{1}{6}+\frac{1}{x}$. Por tanto:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{x} \rightarrow \frac{3x}{6x}=\frac{x}{6x}+\frac{6}{6x} \rightarrow 3x=x+6 \rightarrow x=3$$

El segundo grifo tarda 3 horas en llenar el depósito.

50 Pienso, me interesa, investigo… **[Esta estrategia facilita al alumnado reconocer los conocimientos necesarios para resolver el problema].**

Dos poblaciones A y B distan 350 km. A la misma hora sale un autobús de A hacia B a una velocidad de 80 km/h y un turismo de B hacia A a 120 km/h. ¿Cuándo se cruzarán?

Si se aproximan a 80 + 120 = 200 km/h, en recorrer 350 km tardarán:

$t=\frac{350}{200}=1,75$ horas = 1 hora y 45 minutos.

51 Un automóvil tarda 3 horas en ir de A a B y otro tarda 5 horas en ir de B a A. Calcula el tiempo que tardarán en encontrarse si salen simultáneamente cada uno de su ciudad.

El primero recorre 1/3 del camino en 1 hora.

El segundo recorre 1/5 del camino en 1 hora.

Entre los dos recorren: $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$ del camino en 1 hora.

Tardarán $\frac{15}{8}$ h = 1 h 52' 30'' en encontrarse.

52 La estrella R136a1, descubierta recientemente, está a 165 000 años-luz y tiene una masa actual equivalente a 265 veces la masa del Sol. Expresa la distancia en kilómetros y la masa en kilogramos. Da, en cada caso, cotas del error absoluto y del error relativo.

Un año luz es aproximadamente $9,46 \cdot 10^{12}$ km.

La distancia de la estrella R136a1 a la Tierra es: $d = 165\,000 \cdot 9,46 \cdot 10^{12} = 1,5\,609 \cdot 10^{18}$ km

E.A. < $5 \cdot 10^{13}$ km

E.R. < $\frac{5\cdot 10^{13}}{1,5609\cdot 10^{18}} = 3,2033 \cdot 10^{-5} = 0,000032$, que equivale al 0,0032 %.

La masa del Sol es, aproximadamente, $1,9891 \cdot 10^{30}$ kg.

La masa de la estrella R136a1 es: $m = 265 \cdot 1,9891 \cdot 10^{30} = 5,2711 \cdot 10^{32}$ kg

E.A. < $5 \cdot 10^{27}$ kg

E.R. < $\frac{5\cdot 10^{27}}{5,2711\cdot 10^{32}} = 9,4857 \cdot 10^{-6} = 0,0000094857$, que equivale al 0,00095 %.

Página 57

53 ODS Meta 3.8. **[Tras visionar el vídeo correspondiente a esta meta, el docente puede proponer un debate sobre las causas que provocan las dificultades que tienen muchas personas para acceder a servicios de salud].**

La cantidad de un fármaco que hay en la sangre de un paciente en mg/L al cabo de t horas, después de haberle inyectado puede estimarse mediante la función $f(t) = 5e^{-t/10}$. ¿Cuántas horas tardará en reducirse a la mitad?

Cuando le inyectan el fármaco, $t = 0$, por lo que la cantidad que tiene en sangre es $f(0) = 5e^0 = 5$.

Queremos saber cuánto tiempo tiene que pasar para que el resultado sea $\frac{5}{2}$:

$$f(t) = 5e^{\frac{-t}{10}} = \frac{5}{2} \rightarrow e^{\frac{-t}{10}} = \frac{1}{2}$$

Aplicando el logaritmo neperiano a ambos miembros de la desigualdad:

$$\frac{-t}{10} = ln\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow t = -10\, ln\left(\frac{1}{2}\right) = 6{,}93$$

54 **El volumen de un cubo es $6\sqrt{6}$ cm³. Halla:**

a) Su arista.

b) La diagonal de una cara.

c) La diagonal de un cubo.

Da, en cada caso, el valor exacto con radicales.

a) $V_{\text{CUBO}} = a^3 = 6\sqrt{6} = \sqrt{6^3} \rightarrow a = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt{6}$

b) Diagonal de una cara $\rightarrow \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{6+6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

c) Diagonal del cubo $\rightarrow \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{6+6+6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

55 **Halla el área y el volumen de un tetraedro regular cuya arista mide $\sqrt{6}$ cm. Expresa el resultado con radicales.**

Un tetraedro tiene cuatro caras iguales y cada cara es un triángulo equilátero del que conocemos que su lado mide $\sqrt{6}$ cm, ya que es su arista a. Calculemos el área de uno de estos triángulos:

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

La base la conocemos, a, buscaremos la altura mediante el teorema de Pitágoras aplicado a medio triángulo, que será rectángulo:

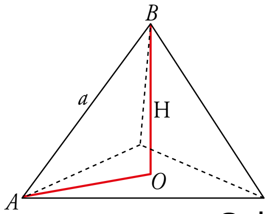
$$a^2 = \text{h}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow \sqrt{6}^2 = \text{h}^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \rightarrow 6 = \text{h}^2 + \frac{6}{4} \rightarrow \text{h} = \sqrt{6 - \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}\sqrt{6}}{4} = \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Y ya podemos calcular el área del tetraedro ya que sus 4 caras son iguales:

$$A = 4A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Para encontrar el volumen del tetraedro: $V = \frac{1}{3}$ Área de la base · altura $= \frac{1}{3}\ A_{\text{TRIÁNGULO}} \cdot H$



En este caso, para encontrar la altura del tetraedro H usaremos el triángulo AOB para volver a aplicar el teorema de Pitágoras, del que conocemos:

- $\overline{AB} = \sqrt{6}$
- $\overline{AO} = \frac{2}{3}\text{h} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$$a^2 = H^2 + \overline{AO}^2 \to 6 = H^2 + 2 \to H^2 = 4 \to H = 2 \to V = \frac{1}{3} A_T \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3} \text{ cm}^3$$

56 **El área total de una pirámide cuadrangular regular es $25\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm^2. Calcula su arista.**

Una pirámide cuadrangular regular tiene base cuadrada. Sus caras laterales son triángulos equiláteros, necesitamos hallar la altura del triángulo para encontrar su área. Lo haremos aplicando el teorema de Pitágoras a una de sus mitades, y llamando a a la arista que queremos encontrar:

$$a^2 = \text{h}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \to \text{h} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{a \cdot \text{h}}{2} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Área de la base} = a^2$$

$$\text{Área total} = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2(1+\sqrt{3}) = 25(1+\sqrt{3}) \to 25 = a^2 \to a = 5 \text{ cm}$$

57 **En un trapecio rectángulo, la base menor mide $4-\sqrt{5}$ cm, la base mayor, $7+2\sqrt{5}$ cm y la altura $4\left(1+\sqrt{5}\right)$ cm. Halla el perímetro del trapecio, utilizando radicales.**

Calculamos primero x:

$$7+2\sqrt{5}-(4-\sqrt{5}) = x \to x = 3\left(1+\sqrt{5}\right)$$

Calculamos ahora l usando el teorema de Pitágoras:

$$l^2 = x^2 + \text{h}^2 = \left[3\left(1+\sqrt{5}\right)\right]^2 + \left[4\left(1+\sqrt{5}\right)\right]^2 = 9\left(1+\sqrt{5}\right)^2 + 16\left(1+\sqrt{5}\right)^2 = 25\left(1+\sqrt{5}\right)^2$$

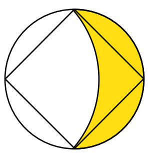
Por lo tanto, $l = 5(1+\sqrt{5})$.

Solamente nos queda calcular el perímetro sumando los lados del trapecio:

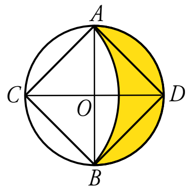
$$P = 7+2\sqrt{5}+(4-\sqrt{5})+4(1+\sqrt{5})+5(1+\sqrt{5}) = 10(2+\sqrt{5}) \text{ cm}$$

58 **[El uso de los datos que proporciona el enunciado permite que el alumnado trabaje la creación y creatividad (dimensión personal)].**

Si el lado del cuadrado inscrito en la circunferencia mide 1 m, ¿cuál es el área de la parte coloreada?



Llamaremos r al radio de la circunferencia dibujada, D a su diámetro, O al centro de la circunferencia.



- Calculemos el diámetro, D, y el radio, r.

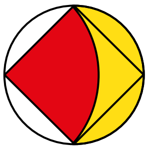
  Como el área del cuadrado $ABCD$ es 1 ya que su lado mide 1, podemos deducir que el área del triángulo ABC es la mitad del área del cuadrado $ABCD$. Así $A_1 = \frac{1}{2}$ y aplicamos la fórmula de su área, sabiendo que el radio es la mitad del diámetro:

  $$A_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OC}}{2} = \frac{D \cdot r}{2} = \frac{D \cdot \left(\frac{D}{2}\right)}{2} = \frac{D^2}{4}$$

  Entonces $\frac{D^2}{2} = 1$ y de aquí deducimos que $D = \sqrt{2}$ y $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Busquemos el área de la circunferencia del dibujo, cuyo radio es r: $A_2 = \pi r^2 = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$.

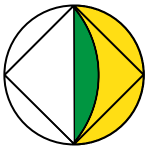
- Busquemos el área de la circunferencia cuyo radio es el lado del cuadrado. Así podremos saber el área roja del dibujo.



  $A_3 = \pi r^2 = \pi$ (área de la circunferencia completa)

  $A_4 = \frac{\pi}{4}$

- Busquemos ahora el área verde: $A_5 = A_4 - A_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$



- Ya solamente nos queda restar para encontrar el área amarilla:

  $$A_6 = \frac{A_2}{2} - A_5 = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Cuestiones teóricas

59 Explica si estas frases son verdaderas o falsas:

a) Hay números irracionales que son enteros.

b) Todo número irracional es real.

c) Todos los números decimales son racionales.

d) Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.

a) Falso. Los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas.

b) Verdadero.

c) Falso. El número π es decimal pero no es racional, puesto que no puede expresarse como cociente de dos números enteros.

d) Verdadero.

60 Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga a $\pi/2$.

Aproximamos su valor: $\frac{\pi}{2} = 1,5708 \rightarrow \frac{\pi}{2} \in (1, 2)$

61 **Si $x \neq 0$, explica si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:**

a) x^{-2} **es negativo si lo es** x**.**

b) $\sqrt[3]{x}$ **tiene el mismo signo que** x**.**

c) Si $x > 0$ **entonces** $\sqrt{x} < x$**.**

a) Falsa, $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ siempre es positivo por ser el exponente par, independientemente del signo de x.

b) Verdadera, porque el índice de la raíz es impar.

c) Falsa, $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

62 **¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Explica por qué:**

a) $log\, m + log\, n = log\,(m + n)$ **b)** $log\, m - log\, n = \frac{log\, m}{log\, n}$

c) $log\, m - log\, n = log\, \frac{m}{n}$ **d)** $log\, x^2 = log\, x + log\, x$

e) $log\,(a^2 - b^2) = log\,(a + b) + log\,(a - b)$

a) Falso. $log\, m + log\, n = log\,(m \cdot n) \neq log\,(m + n)$

b) Falso. $log\, m - log\, n = log\left(\frac{m}{n}\right) \neq \frac{log\, m}{log\, n}$

c) Verdadero. Por una propiedad de los logaritmos.

d) Verdadero. $log\, x^2 = log\,(x \cdot x) = log\, x + log\, x$

e) Verdadero. $log\,(a^2 - b^2) = log\,[(a + b) \cdot (a - b)] = log\,(a + b) + log\,(a - b)$

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 1.9. (EA 1.9.1.-EA 1.9.2.-EA 1.9.3.) CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.-EA 2.1.4.)

Página 57

1 **Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ pertenecen:**

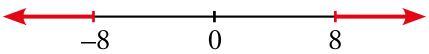
$$-\frac{58}{45};\ \frac{51}{17};\ \frac{\pi}{3};\ \sqrt[4]{-3};\ \sqrt[3]{-8};\ \sqrt[5]{2^3};\ 1,0\widehat{7}$$

$\mathbb{N}$: $\frac{51}{17}$ $\mathbb{Z}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$ $\mathbb{Q}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$; $-\frac{58}{45}$; $1,0\widehat{7}$ $\mathbb{R}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$; $-\frac{58}{45}$; $1,0\widehat{7}$; $\frac{\pi}{3}$; $\sqrt[5]{2^3}$

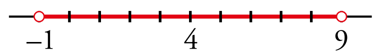
2 **Expresa en forma de intervalo y haz la representación**

a) $|x| \geq 8$ **b)** $|x-4| < 5$

a) $(-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$



b) $(-1, 9)$



3 **Escribe como potencia y simplifica.**

$$(\sqrt[4]{a^3}\cdot a^{-1}):(a\sqrt{a})$$

$$(\sqrt[4]{a^3}\cdot a^{-1}):(a\sqrt{a}) = (a^{3/4}\cdot a^{-1}):(a\cdot a^{1/2}) = (a^{3/4-1}):(a^{1+1/2}) = (a^{-1/4}):(a^{3/2}) = a^{-1/4-3/2} = a^{-7/4}$$

4 **Calcula y simplifica:** $\sqrt{\frac{125}{27}} - \sqrt{\frac{3}{5}}$

$$\sqrt{\frac{125}{27}} - \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{5^3}{3^3}} - \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} - 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sqrt{5}} = \frac{25-9}{3\sqrt{15}} = \frac{16}{3\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{45}$$

5 **Racionaliza.**

a) $\frac{4+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{2}{3-\sqrt{3}}$

a) $\frac{4+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{(4+\sqrt{6})(\sqrt{3})}{(2\sqrt{3})(\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{18}}{2\cdot 3} = \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6} = \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b) $\frac{2}{3-\sqrt{3}} = \frac{2(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{6+2\sqrt{3}}{9-3} = \frac{6+2\sqrt{3}}{6} = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$

6 **Simplifica:** $\sqrt{63} - 2\sqrt{28} + \sqrt{175}$

$$\sqrt{63} - 2\sqrt{28} + \sqrt{175} = \sqrt{3^2\cdot 7} - 2\sqrt{2^2\cdot 7} + \sqrt{5^2\cdot 7} = 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 5\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$

7 **Sabiendo que $A = 3{,}24\cdot 10^6$; $B = 5{,}1\cdot 10^{-5}$; $C = 3{,}8\cdot 10^{11}$ y $D = 6{,}2\cdot 10^{-6}$, calcula $\left(\frac{A}{B}+C\right)\cdot D$. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.**

$$\left(\frac{A}{B}+C\right)\cdot D = \left(\frac{3,24\cdot 10^6}{5,1\cdot 10^{-5}} + 3,8\cdot 10^{11}\right)\cdot 6,2\cdot 10^{-6} = \left(\frac{3,24}{5,1}10^{11} + 3,8\cdot 10^{11}\right)\cdot 6,2\cdot 10^{-6} =$$

$$= (0,63529 + 3,8)\cdot 10^{11}\cdot 6,2\cdot 10^{-6} = 4,4353\cdot 6,2\cdot 10^5 = 27,499\cdot 10^5 =$$

$$= 2,7499\cdot 10^6 = 2,75\cdot 10^6$$

E.A. $< 0,5\cdot 10^4$

E.R. $< \frac{0,5\cdot 10^4}{2,75\cdot 10^6} = 1,8182\cdot 10^{-3} = 0,00182 = 0,18\ \%$

8 **Aplica la definición de logaritmo y obtén *x*.**

a) $\log_3 x = -1$ **b)** $\log x = 2,5$ **c)** $\ln x = 2$

a) $\log_3 x = -1 \to x = 3^{-1} \to x = \frac{1}{3}$

b) $\log x = 2,5 \to x = 10^{2,5} \to x = 10^{5/2} = \sqrt{10^5} = 10^2\sqrt{10}$

c) $\ln x = 2 \to x = e^2$

9 **Calcula *x* en cada caso.**

a) $2,5^x = 0,0087$ **b)** $1,005^{3x} = 143$

a) $x \log 2,5 = \log 0,0087 \to x = \dfrac{\log 0,0087}{\log 2,5} = -5,18$

b) $1,005^{3x} = 143$

Tomamos logaritmos:

$\log 1,005^{3x} = \log 143 \to 3x \log 1,005 = \log 143 \to x = \dfrac{\log 143}{3\log 1,005} \approx 331,68$

10 **Expresa como un solo logaritmo y di el valor de *A*:**

$\log 5 + 2\log 3 - \log 4 = \log A$

$\log 5 + 2\log 3 - \log 4 = \log 5 + \log 3^2 - \log 4 = \log\left(\dfrac{5\cdot 9}{4}\right) \to A = \dfrac{45}{4}$

11 **Si** $\log k = 0,8$, **¿cuál es el valor de** $\log 10k^3 + \log\dfrac{\sqrt{k}}{100}$**?**

$\log 10k^3 + \log\dfrac{\sqrt{k}}{100} = \log 10 + \log k^3 + \log\sqrt{k} - \log 100 = 1 + 3\log k + \dfrac{1}{2}\log k - 2 = 1 + 3\cdot 0,8 + \dfrac{1}{2}0,8 - 2 = 1,8$

12 **El área total de un cubo es 12 cm². ¿Cuál es el área total del cilindro inscrito en el cubo? Da el valor exacto.**

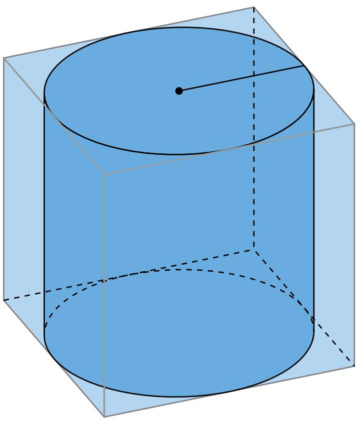
El área total del cubo es $6a^2 = 12 \to a = \sqrt{2}$.

El radio del cilindro inscrito es $r = \dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

El área de una base del cilindro es $\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$.

El área lateral del cilindro es $2\pi\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\pi$.

El área total del cilindro es $2\cdot\dfrac{\pi}{4} + \sqrt{2}\pi = \left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{2}\right)\pi$ cm².



Para consultar los **criterios de evaluación** y los **estándares de aprendizaje evaluables**, véase la Programación.

2 ARITMÉTICA MERCANTIL

C.E.: CE 2.2. (EA 2.2.1.)

Página 59

Resuelve

1 **I. Una cantidad C aumenta un 10 % y, después, disminuye un 5 %.**

II. Una cantidad C disminuye un 5 % y, después, aumenta un 10 %.

El resultado final de I, ¿es mayor, igual o menor que el de II?

Ambos resultados son iguales porque la cantidad final podemos calcularla, usando los índices de variación, de la siguiente forma:

I. $C \cdot \left(1+\dfrac{10}{100}\right)\cdot\left(1-\dfrac{5}{100}\right) = 1{,}045C$

II. $C \cdot \left(1-\dfrac{5}{100}\right)\cdot\left(1+\dfrac{10}{100}\right) = 1{,}045C$

2 **Si una cantidad C aumenta un 10 % y, después, el resultado disminuye un 10 %, lo que resulta es… ¿mayor, igual o menor que C?**

Usando los índices de variación, obtenemos:

$$C \cdot \left(1+\frac{10}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{10}{100}\right) = 0{,}99C$$

Como el coeficiente de C es un número menor que 1, la cantidad final es menor que C. Concretamente es el 99 % de C.

3 **En una reunión hay 30 personas, de las cuales el 30 % lleva gafas. Solo el 20 % de las mujeres llevan gafas, pero el 35 % de los hombres las usan. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay?**

Llamamos x al número de mujeres e y al número de hombres que hay en la reunión. Como el 30 % del total usan gafas, 30 % · 30 = 9 personas las llevan. Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=30\\ \frac{20}{100}x+\frac{35}{100}y&=9\end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=30\\ 20x+35y&=900\end{aligned}\right\} \rightarrow x=10,\ y=20$$

A la reunión asisten 10 mujeres y 20 hombres.

4 **Nos han concedido un préstamo de 20 000 € por el que hemos de pagar un 8 % anual. Un año después devolvemos 10 000 €. Al finalizar el segundo año deseamos saldar la deuda. ¿Cuánto habremos de pagar?**

Los intereses de 20 000 € durante 1 año son $\dfrac{20\,000 \cdot 8}{100} = 1\,600$ €.

De los 10 000 € devueltos, 1 600 € son para pagar los intereses del primer año y el resto, es decir, 10 000 – 1 600 = 8 400 €, se descuentan del dinero que nos han prestado.

Por tanto, todavía quedan por devolver 20 000 – 8 400 = 11 600 € más los intereses que generan en un año.

Esos intereses son $\dfrac{11\,600 \cdot 8}{100} = 928$ €.

La cantidad final que debemos pagar, después de devolver los 10 000 € es:

11 600 + 926 = 12 526 €

1 ▶ AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.3) **CE 2.2.** (EA 2.2.1.)

Página 60

1 **Una raqueta de tenis valía, al comienzo de temporada, 40 euros. A lo largo del año sufrió las siguientes variaciones: subió un 20 %, bajó un 25 %, subió un 5 % y, finalmente, bajó un 12 %.**

a) ¿Cuál ha sido su índice de variación global?

b) ¿Cuánto vale al final de temporada?

c) ¿Qué porcentaje ha de subir para volver a costar 40 €?

a) Índice de variación = 1,2 · 0,75 · 1,05 · 0,88 = 0,8316 (baja el precio un 16,84 %)

b) Precio final = 40 · 1,2 · 0,75 · 1,05 · 0,88 = 33,26 €

c) Como el precio final es de 33,26 €, hasta llegar a los 40 € debe subir:

$$40 - 33{,}26 = 6{,}74 \text{ €} \ \rightarrow \ \frac{6{,}74}{33{,}26} \cdot 100 = 20{,}26\,\%$$

Página 61

Hazlo tú

1 **Averigua en cuánto se queda un artículo de 100 € cuyo valor se aumenta un r % y, a continuación, se rebaja un r %, para $r = 10$, $r = 20$, $r = 50$ y $r = 80$.**

¿Cuál es la pérdida en cada caso?

- $r = 10 \ \rightarrow \ 100 \cdot \left(1+\frac{10}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{10}{100}\right) = 100 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}9 = 99$ € → La pérdida de valor es de 1 €.
- $r = 20 \ \rightarrow \ 100 \cdot \left(1+\frac{20}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{20}{100}\right) = 100 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8 = 96$ € → La pérdida es de 4 €.
- $r = 50 \ \rightarrow \ 100 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 75$ € → La pérdida de valor es de 25 €.
- $r = 80 \ \rightarrow \ 100 \cdot 1{,}8 \cdot 0{,}2 = 36$ € → La pérdida de valor es de 64 €.

2 **Calcula cuál será el precio inicial en cada caso:**

a) Después de aumentar un 21 %, un artículo cuesta 332,75 €.

b) Después de rebajar un 16 %, un artículo cuesta 18,48 €.

¿Qué porcentaje de aumento o de rebaja hay que hacer para dejar los artículos con el precio inicial?

a) $\frac{332{,}75}{1{,}21} = 275$ € es el precio inicial.

Para dejar el artículo con su precio inicial, hay que aplicar la siguiente rebaja:

$$332{,}75 \cdot \left(1-\frac{r}{100}\right) = 275 \ \rightarrow \ 57{,}75 = 3{,}3275 \cdot r \ \rightarrow \ r = 17{,}36\,\%$$

b) $\frac{18{,}48}{0{,}84} = 22$ € es el precio inicial.

Para dejar el artículo con su precio inicial, hay que aplicar el siguiente aumento:

$$18{,}48 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right) = 22 \ \rightarrow \ 0{,}1848 \cdot r = 3{,}52 \ \rightarrow \ r = 19{,}05\,\%$$

2 **Después de subir un 20 %, un artículo vale 45,60 euros. ¿Cuánto valía antes de la subida?**

$1,2x = 45,60 \rightarrow x = 38$ €

3 **Después de rebajarse en un 35 %, un artículo vale 81,90 euros. ¿Cuánto valía antes de la rebaja?**

$0,65x = 81,90 \rightarrow x = 126$ €

3 ▶ INTERESES BANCARIOS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.3.) CE 2.2. (EA 2.2.1.)

Página 63

Hazlo tú. ¿En cuánto se transforma un capital de 50 000 €, colocado al 12 % anual, en 1, 2, 3, 4 y 5 años?

En 1 año se transforma en $50\,000 \cdot 1{,}12 = 56\,000$ €.

En 2 años se transforma en $50\,000 \cdot 1{,}12^2 = 62\,720$ €.

En 3 años se transforma en $50\,000 \cdot 1{,}12^3 = 70\,246{,}40$ €.

En 4 años se transforma en $50\,000 \cdot 1{,}12^4 = 78\,675{,}97$ €.

En 5 años se transforma en $50\,000 \cdot 1{,}12^5 = 88\,117{,}08$ €.

Hazlo tú. ¿Cuántos años se necesitan para que 50 000 € colocados al 8 % anual se conviertan en 125 000 €?

$$50\,000 \cdot 1{,}08^n = 125\,000 \ \rightarrow\ 1{,}08^n = \frac{125\,000}{50\,000} \ \rightarrow\ 1{,}08^n = 2{,}5 \ \rightarrow\ n = \frac{\log 2{,}5}{\log 1{,}08} = 11{,}91$$

Se necesitan 12 años y se obtendrá una cantidad ligeramente superior a 125 000 €.

Página 64

1 **Averigua en cuánto se transforma un capital de 100 000 € al 6 % anual en 4 años si los periodos de capitalización son:**

a) años

b) meses

c) días

d) trimestres

a) $100\,000 \cdot 1{,}06^4 = 126\,247{,}70$ €

b) $100\,000 \cdot 1{,}005^{48} = 127\,048{,}92$ €

c) $100\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{36\,500}\right)^{1\,460} = 127\,122{,}41$ €

d) $100\,000 \cdot 1{,}015^{16} = 126\,898{,}55$ €

4 ¿QUÉ ES LA «TASA ANUAL EQUIVALENTE» (T.A.E.)?

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA1.2.3.) **CE 2.2.** (EA 2.2.1.)

Página 65

1 **Halla la T.A.E. correspondiente a un rédito anual del 8 % con pago mensual de intereses.**

El rédito anual es del 8 %.

$$\left(1+\frac{8}{1200}\right)^{12} = 1{,}083 \rightarrow \text{T.A.E.} = 8{,}3\,\%.$$

2 **Un banco nos concede un préstamo de 10 000 € al 10 % anual. En el momento de la formalización nos cobra unos gastos de 500 €.**

a) Si hacemos un solo pago al cabo de 1 año, ¿cuál es la T.A.E.?

b) ¿Y si tuviéramos que devolver el préstamo íntegro al cabo de dos años?

(Ten en cuenta que aunque los pagos los hacemos sobre 10 000 €, lo que realmente recibimos fueron 9 500 €).

a) Nos dieron 9 500 € y hemos de devolver $10\,000 \cdot 1{,}12 = 11\,200$ €.

$\dfrac{11200}{9500} = 1{,}1789\ldots$ Por tanto, la T.A.E. será del 17,89 %.

b) Como nos dan 9 500 € y tenemos que devolver $10\,000 \cdot (1{,}12)^2 = 12\,544$ el aumento en dos años es:

$$\frac{12544}{9500} = 1{,}320421$$

Llamando x a la T.A.E.: $\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^2 = 1{,}320421 \rightarrow 1 + \dfrac{x}{100} = 1{,}1491$

En este caso, la T.A.E. es del 14,91 %.

5 ▶ AMORTIZACIÓN DE PRÉSTAMOS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA1.2.3.) CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.-EA 1.3.3.) CE 2.2. (EA 2.2.1.)

Página 67

Hazlo tú. **Recibimos un préstamo de 20 000 € al 6 % anual que hemos de amortizar en 6 pagos anuales de 4 067,25 €. Comprueba que la anualidad es la correcta.**

AÑOS	DEUDA ANTES DEL PAGO	INTERESES PENDIENTES	PAGO	CANTIDAD AMORTIZADA	DEUDA PENDIENTE
1	20 000	1 200	4 067,25	2 867,25	17 132,75
2	17 132,75	1 027,97	4 067,25	3 039,29	14 093,47
3	14 093,47	845,61	4 067,25	3 221,64	10 871,82
4	10 871,82	652,31	4 067,25	3 414,94	7 456,88
5	7 456,88	447,41	4 067,25	3 619,84	3 837,05
6	3 837,05	230,22	4 067,25	3 837,03	0,02

Hazlo tú. **Recibimos un préstamo de 120 000 € al 7,5 % anual. Hemos pagado 25 000 € al final de cada uno de los cuatro primeros años. Si queremos saldar la deuda al final del 5.º año, ¿cuánto hay que pagar?**

AÑOS	DEUDA ANTES DEL PAGO	INTERESES PENDIENTES	PAGO	CANTIDAD AMORTIZADA	DEUDA PENDIENTE
1	120 000	9 000	25 000	16 000	104 000
2	104 000	7 800	25 000	17 200	86 800
3	86 800	6 510	25 000	18 490	68 310
4	68 310	5 123,25	25 000	19 876,75	48 433,25
5	48 433,25	3 632,49	x	48 433,25	0,00

El último pago es la suma de la deuda más los intereses pendientes:

$x = 48\,433,25 + 3\,632,49 = 52\,065,74$ €

1 **Comprueba que podemos amortizar 10 000 € al 10 % anual mediante cuatro pagos trimestrales de 2 658,18 € cada uno.**

10 % anual = 2,5 % trimestral

PAGO TRIMESTRAL	DEUDA ANTES DEL PAGO	INTERESES PENDIENTES	PAGO	CANTIDAD AMORTIZADA	DEUDA PENDIENTE
1	10 000	250	2 658,18	2 408,18	7 591,82
2	7 591,82	189,80	2 658,18	2 468,38	5 123,44
3	5 123,44	128,09	2 658,18	2 530,09	2 593,35
4	2 593,35	64,83	2 658,18	2 593,35	0,00

2 **Vamos a amortizar un préstamo de 500 000 € al 6 % anual en 8 meses. Los siete primeros pagos son de 60 000 €. ¿A cuánto asciende el último pago?**

Como los pagos son mensuales, debemos tener en cuenta el interés mensual que corresponde al 6 % anual, es deicr, el 0,5 % mensual.

MESES	DEUDA ANTES DEL PAGO	INTERESES PENDIENTES	PAGO	CANTIDAD AMORTIZADA	DEUDA PENDIENTE
1	500 000	2 500,00	60 000	57 500	442 500
2	442 500	2 212,50	60 000	57 787,50	384 712,50
3	384 712,50	1 923,56	60 000	58 076,44	326 636,06
4	326 636,06	1 633,18	60 000	58 366,82	268 269,24
5	268 269,24	1 341,35	60 000	58 658,65	209610,59
6	209610,59	1 048,05	60 000	58 951,95	150 658,64
7	150 658,64	753,29	60 000	59 246,71	91 411,94
8	91 411,94	457,06	x	91 411,94	0,00

El último pago será:

x = 91 411,94 + 457,06 = 91 869 €

6 PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

C.E.: CE 2.2. (EA 2.2.1.)

Página 68

Hazlo tú. El 1 de enero depositamos 20 000 € al 6 % anual con pago mensual de intereses. ¿Cuál será el valor de nuestro dinero el día 1 de cada mes de ese año si los intereses se van acumulando al capital?

Cada mes el dinero se multiplica por $1 + \frac{6}{1200} = 1{,}005$.

El 1 de febrero valdrá $20\,000 \cdot 1{,}005 = 20\,100$.

El 1 de marzo, $20\,000 \cdot 1{,}005^2 = 20\,200{,}5$.

El 1 de abril, $20\,000 \cdot 1{,}005^3 = 20\,301{,}5$.

El 1 de mayo, $20\,000 \cdot 1{,}005^4 = 20\,403{,}01$.

Y así sucesivamente.

Hazlo tú. Durante 6 años, cada año depositamos 3 000 € al 3 % anual con pago anual de intereses. ¿En cuánto se convierte cada depósito al final del 6.º año?

El primer depósito estará 6 años al 3 % anual y se transforma en:

$$a_1 = 3\,000 \cdot 1{,}03^6 = 3\,582{,}16$$

Los siguientes:

$$a_2 = 3\,000 \cdot 1{,}03^5 = 3\,477{,}82$$

$$a_3 = 3\,000 \cdot 1{,}03^4 = 3\,376{,}53$$

$$a_4 = 3\,000 \cdot 1{,}03^3 = 3\,278{,}18$$

$$a_5 = 3\,000 \cdot 1{,}03^2 = 3\,182{,}7$$

$$a_6 = 3\,000 \cdot 1{,}03 = 3\,090$$

1 **[La lectura del enunciado del problema permite trabajar la destreza comprensión escrita de esta clave].**

Depositamos 100 000 euros el día 1 de enero en un banco al 8 % anual. ¿Qué valor tienen al final de cada trimestre del año? Estas cantidades están en progresión geométrica. ¿Cuál es la razón?

8 % anual = 2 % trimestral

Al final del primer trimestre valen $100\,000 \cdot 1{,}02 = 102\,000$ €.

Al final del segundo trimestre valen $100\,000 \cdot 1{,}02^2 = 104\,040$ €.

Al final del tercer trimestre valen $100\,000 \cdot 1{,}02^3 = 106\,120{,}80$ €.

Al final del cuarto trimestre valen $100\,000 \cdot 1{,}02^4 = 108\,243{,}22$ €.

La razón es $r = 1{,}02$.

2 **[Este tipo de problemas pueden requerir que el alumnado necesite alguna aclaración de sus compañeros, trabajando de esta forma la compresión oral de esta clave].**

Depositamos una cierta cantidad de dinero al comienzo de un año, en un banco, al 6 % anual. Cada mes esa cantidad aumenta en progresión geométrica. ¿Cuál es la razón de esa progresión?

6 % anual = 0,5 % mensual

La razón es $r = 1{,}005$.

Página 69

3 **Al comienzo de cada año depositamos 6 000 euros en un banco al 7 % anual.**

¿Cuánto dinero recogeremos al finalizar el 10.º año?

Por el primer ingreso acumulamos $6\,000 \cdot 1{,}07^{10}$.

Por el segundo ingreso acumulamos $6\,000 \cdot 1{,}07^{9}$.

…

Por el décimo ingreso acumulamos $6\,000 \cdot 1{,}07$.

En total, tendremos $S_{10} = \dfrac{6\,000 \cdot 1{,}07^{11} - 6\,000 \cdot 1{,}07}{1{,}07 - 1} = 88\,701{,}60$ €.

4 **Al comienzo de cada mes depositamos 100 € en un banco al 6 % anual.**

¿Cuánto recogeremos al final del 2.º año?

Por el primer ingreso acumulamos $100 \cdot 1{,}005^{24}$.

Por el segundo ingreso acumulamos $100 \cdot 1{,}005^{23}$.

…

Por el vigesimocuarto ingreso acumulamos $100 \cdot 1{,}005$.

En total, tendremos $S_{24} = \dfrac{100 \cdot 1{,}005^{25} - 100 \cdot 1{,}005}{1{,}005 - 1} = 2\,555{,}91$ €.

7 ▶ CÁLCULO DE ANUALIDADES O MENSUALIDADES PARA AMORTIZAR DEUDAS

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA1.2.3.) CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.-EA 1.3.3.) CE 2.2. (EA 2.2.1.)

Página 720

Hazlo tú. Si el interés fuera del 8 % y hubiera que pagarlo en 11 anualidades, ¿cuánto sería la cuantía de cada anualidad?

Aplicamos la fórmula para $i = 0{,}08$ y $n = 11$:

$$a = 500\,000 \cdot \frac{1{,}08^{11} \cdot 0{,}08}{1{,}08^{11} - 1} = 70\,038{,}17 \text{ €}$$

Hazlo tú. El banco nos concede un préstamo de 25 000 € al 6 % anual que hay que amortizar en un año en 12 pagos mensuales. ¿Qué mensualidad hay que pagar?

Tomamos $i = \frac{6}{1200} = 0{,}005$ y $n = 12$ meses:

$$m = 25\,000 \cdot \frac{1{,}005^{12} \cdot 0{,}005}{1{,}005^{12} - 1} = 2\,151{,}66 \text{ €}$$

Hazlo tú. Queremos amortizar una deuda de 120 000 €, en 5 años, al 9 % anual, mediante pagos cuatrimestrales. ¿Cuánto debemos pagar cada cuatrimestre?

El interés trimestral es $\frac{9\,\%}{3} = 3\,\%$. Por tanto, $i = \frac{3}{100} = 0{,}03$. En este caso $n = 5 \cdot 3 = 15$:

$$p = 120\,000 \cdot \frac{1{,}03^{15} \cdot 0{,}03}{1{,}03^{15} - 1} = 10\,051{,}99 \text{ €}$$

1 **Averigua la mensualidad que hay que pagar para amortizar en 3 años (36 pagos) una deuda de 24 000 euros al 9 % anual.**

$$i = \frac{9}{1200} = 0{,}0075$$

$$m = 24\,000 \cdot \frac{1{,}0075^{36} \cdot 0{,}0075}{1{,}0075^{36} - 1} = 763{,}19 \text{ €}$$

2 **¿Cuánto hay que pagar cada trimestre para amortizar en 3 años (12 pagos) una deuda de 24 000 euros al 9 % anual?**

$$i = \frac{9}{400} = 0{,}0225$$

Así, cada trimestre tendremos que pagar: $24\,000 \cdot \frac{1{,}0225^{12} \cdot 0{,}0225}{1{,}0225^{12} - 1} = 2\,304{,}42$ €

3 **Si compro a plazos una bicicleta de 3 000 € para pagar en 12 meses al 15 % anual, ¿cuánto tendré que pagar al mes?**

Hacemos $i = \frac{15}{1200} = 0{,}0125$ y $n = 12$:

$$m = 3\,000 \cdot \frac{1{,}0125^{12} \cdot 0{,}0125}{1{,}0125^{12} - 1} = 270{,}77 \text{ €}$$

4 **Si tengo que pagar 4 092,23 € al año durante los tres siguientes años a un préstamo que me concedió el banco al 11 % de interés anual, ¿qué cantidad me prestó?**

En este caso conocemos la anualidad y debemos calcular el capital. Por tanto:

$$4\,092{,}23 = C \cdot \frac{1{,}11^3 \cdot 0{,}11}{1{,}11^3 - 1} \rightarrow C = 4\,092{,}23 \cdot \frac{1{,}11^3 - 1}{1{,}11^3 \cdot 0{,}11} = 10\,000\ €$$

5 **Un banco me ha prestado 15 000 € para devolverlos en 2 años. Calcula cuánto habré pagado si devuelvo el préstamo:**

a) Al final de los 2 años.

b) En 2 anualidades.

c) En 8 trimestres.

d) En 24 mensualidades.

Explica por qué pago cantidades diferentes.

Si el banco cobra un $r\%$ de interés anual y tomamos $i = \frac{r}{100}$:

a) Al final de los dos años, en un único pago de $15\,000 \cdot (1 + i)^2$.

b) En 2 anualidades, cada una con un valor de:

$$a = 15\,000 \cdot \frac{(1+i)^2 \cdot i}{(1+i)^2 - 1}$$

c) En 8 trimestres, cada pago sería:

$$p = 15\,000 \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{4}\right)^8 \cdot \frac{i}{4}}{\left(1+\frac{i}{4}\right)^8 - 1}$$

porque el interés anual se tendría que repartir en 4 trimestres al año.

d) En 24 mensualidades, cada una con un valor de:

$$m = 15\,000 \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{24} \cdot \frac{i}{12}}{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{24} - 1}$$

Se pagan cantidades diferentes porque con cada pago se amortiza una cantidad de capital. Así, el capital y los intereses pendientes van variando de distinta manera en cada caso.

6 **[La resolución de este tipo de problemas requiere que el alumnado ponga en práctica la iniciativa (dimensión productiva de esta clave)].**

La mensualidad que tengo que pagar por la compra de una máquina para mi empresa es de 1 521,22 €. Si la financiera me cobra el 12 % anual durante tres años, ¿cuánto costaba la máquina?

Los datos son $m = 1\,521{,}22$ €, $i = \frac{12}{1200} = 0{,}01$ y $n = 36$ meses (3 años). Por tanto:

$$1\,521{,}22 = C \cdot \frac{1{,}01^{36} \cdot 0{,}01}{1{,}01^{36} - 1} \rightarrow C = 1\,521{,}22 \cdot \frac{1{,}01^{36} - 1}{1{,}01^{36} \cdot 0{,}01} \approx 45\,800\ €$$

8 PRODUCTOS FINANCIEROS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA1.2.3.) CE 2.2. (EA 2.2.1.)

Página 73

1 **[La decisión sobre la certeza de las afirmaciones requiere poner en práctica la compresión escrita de esta clave].**

¿Verdadero o falso?

a) Si recibimos 120 000 € para adquirir un piso, hemos realizado un fondo de inversión.

b) Un crédito hipotecario va asociado a una propiedad.

c) La diferencia entre bonos y obligaciones solo depende de que la deuda sea a largo o a corto plazo.

d) Los sistemas de ahorro para la jubilación son derechos de propiedad de una empresa denominados acciones.

a) Falso. Lo que hemos hecho es contratar un crédito hipotecario.

b) Verdadero. Es una cantidad que se recibe para la adquisición de un bien inmueble.

c) Verdadero. Ambos son instrumentos de crédito legal que solo se diferencian en el plazo de emisión de deuda.

d) Falso. Estos sistemas son planes de pensiones.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 2.2. (EA 2.2.1.)

Página 74

1. Variación del poder adquisitivo de un trabajador

Hazlo tú

- **Con estos mismos datos, calcula la variación del poder adquisitivo de un trabajador o una trabajadora que cobre el SMI entre los años 2015 y 2018.**

Determinamos la subida acumulada del IPC entre comienzos de 2015 y final de 2017:

$$1{,}00 \cdot 1{,}016 \cdot 1{,}011 = 1{,}027176$$

Lo que significa una subida del 2,72 % en esos 3 años.

Si la subida del SMI hubiese sido proporcional a la del IPC, el SMI en 2018 debería ser: 648 · 1,0272 = 665,626 en lugar de 736 €.

Luego, la variación del poder adquisitivo ha sido:

$$\frac{736}{665{,}56} = 1{,}1058$$

Es decir, el poder adquisitivo de un trabajador o trabajadora que cobrara el SMI ha subido un 10,58 % en estos 3 años.

2. Intereses y amortizaciones

Hazlo tú

- **Resuelve este mismo ejercicio si los ingresos fueran de 500 € mensuales durante los 10 años.**

a) Expresamos el valor de cada uno de los ingresos al final de 2020 y sumamos los resultados:

$$500 \cdot 1{,}03^{10} + 500 \cdot 1{,}03^{9} + \ldots + 500 \cdot 1{,}03^{2} + 500 \cdot 1{,}03 =$$

$$= 500 \cdot \frac{1{,}03^{10} \cdot 1{,}03 - 1{,}03}{1{,}03 - 1} = 5\,903{,}898 \text{ €}$$

b) Se trata de una anualidad de amortización de un capital C, desconocido mediante 10 anualidades de 500 €:

$$500 = C \cdot \frac{1{,}03^{10} \cdot 0{,}03}{1{,}03^{10} - 1} \rightarrow C = 500 \cdot \frac{1{,}03^{10} - 1}{1{,}03^{10} \cdot 0{,}03} = 4\,265{,}10 \text{ €}$$

Observa que el valor de esta cantidad 11 años después debe coincidir con el resultado del apartado a).

$$4\,265{,}1 \cdot 1{,}03^{11} = 5\,903{,}89$$

3. Tabla de amortización de un préstamo

Hazlo tú

- **Nos conceden un préstamo de 50 000 €, al 5 %, que hemos de devolver en 5 años, pagando cada año una quinta parte del capital pendiente más los intereses de la cantidad adeudada.**

  Calcula los pagos anuales.

	CAPITAL PENDIENTE	PAGO DE INTERESES	+	PAGO DE CAPITAL	=	PAGO ANUAL	DEUDA PENDIENTE
1.^er^ AÑO	50 000	2 500	+	10 000	=	12 500	40 000
2.° AÑO	40 000	2 000	+	10 000	=	12 000	30 000
3.^er^ AÑO	30 000	1 500	+	10 000	=	11 500	20 000
4.° AÑO	20 000	1 0005	+	10 000	=	11 000	10 000
5.° AÑO	10 000	500	+	10 000	=	10 500	0

Los pagos anuales para amortizar el préstamo serán: 12 500 €, 12 000 €, 11 500 €, 11 000 € y 10 500 €.

4. Comisión de cancelación de un préstamo

Hazlo tú

- **Pedimos un préstamo de 100 000 €, al 5 % anual, que tenemos que devolver en 10 años en cuotas anuales. Además, nos imponen una comisión de cancelación anticipada del 2 %.**

  ¿Cuál sería esta comisión si quisiéramos cancelarlo transcurridos 2 años?

  Primero calculamos el valor de cada anualidad:

$$a = 100\,000 \cdot \frac{1,05^{10} \cdot 0,05}{1,05^{10} - 1} = 12\,950,46 \text{ €}$$

Ahora elaboramos la tabla de amortización del préstamo para los primeros 2 años.

	CAPITAL PENDIENTE	CUOTA ANUAL	–	PAGO DE INTERESES	=	PAGO CAPITAL	DEUDA PENDIENTE
1.^er^ AÑO	100 000	12 950,46	–	5 000	=	7 950,46	92 049,54
2.° AÑO	92 049,54	12 950,46	–	4 602,48	=	8 347,98	83 701,56

El valor de la comisión de cancelación es el 2 % de la deuda pendiente, es decir:

$83\,701,56 \cdot 0,02 = 1\,674,03$ €

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA1.2.3.) CE 2.2. (EA 2.2.1.)

Página 76

1. Aumentos acumulados

- **En el contrato de trabajo de una administrativa se fija una subida anual del 3 %. Si empieza ganando 1 000 € mensuales, ¿cuántos años han de pasar para que su sueldo sea de 1 200 €?**

El sueldo del trabajador después de n años es de $1\,000 \cdot 1{,}03^n$ € al mes. Para que el sueldo sea de 1 200 €:

$$1\,200 = 1\,000 \cdot 1{,}03^n \rightarrow \frac{1200}{1000} = 1{,}03^n \rightarrow 1{,}2 = 1{,}03^n \rightarrow n = \frac{\log 1{,}2}{\log 1{,}03} = 6{,}17$$

Deben pasar más de 6 años, es decir, 7 años.

2. Cálculo de la T.A.E.

- **Colocamos en un depósito bancario a 2 años un capital inicial de 10 000 € al 3 % anual. Halla la T.A.E. asociada y úsala para obtener el capital final si:**

a) los periodos de capitalización son mensuales;

b) los periodos de capitalización son cuatrimestrales.

a) El interés mensual es $i_m = \dfrac{3}{1200} = 0{,}0025$.

El índice de variación mensual es $I_{vm} = 1 + 0{,}0025 = 1{,}0025$.

Como esta subida se produce todos los meses, el índice de variación anual es:

$I_v = 1{,}0025^{12} = 1{,}0304156 \rightarrow$ T.A.E. = 3,0416 %

El capital después de 2 años es $C_{final} = 10\,000 \cdot 1{,}030416^2 = 10\,617{,}57$ €.

b) El interés cuatrimestral es $i_c = \dfrac{3}{300} = 0{,}01$.

El índice de variación cuatrimestral es $I_{vc} = 1 + 0{,}01 = 1{,}01$.

Como esta subida se produce todos los cuatrimestres, el índice de variación anual es:

$I_v = 1{,}01^3 = 1{,}030301 \rightarrow$ T.A.E. = 3,0301 %

El capital después de dos años es $C_{final} = 10\,000 \cdot 1{,}030301^2 = 10\,615{,}20$ €.

3. Planes de pensiones

- **Un trabajador contrata un plan de pensiones 35 años antes de su jubilación, con aportaciones anuales de 2 400 € al 4 %.**

  ¿De qué cantidad de dinero dispondrá en el momento de su jubilación?

  La primera anualidad se convertirá en $a_1 = 2\,400 \cdot 1{,}04^{35}$.

  La segunda, en $a_2 = 2\,400 \cdot 1{,}04^{34}$ al quedar depositada un año menos.

  La tercera, en $a_3 = 2\,400 \cdot 1{,}04^{33}$.

  …

  La última (35.ª), como estará depositada solo un año, se convertirá en $a_{35} = 2\,400 \cdot 1{,}04$.

  Se trata de sumar 35 términos de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{1{,}04}$.

$$S_{35} = \frac{\frac{1}{1{,}04} \cdot 2\,400 \cdot 1{,}04 - 2\,400 \cdot 1{,}04^{35}}{\frac{1}{1{,}04} - 1} = 183\,835{,}95 \text{ €} \quad \text{(dinero del que dispondrá al jubilarse)}$$

4. Interés variable

- **Una hipoteca está contratada con un interés anual variable de Euribor + 0,65. En el contrato se establece una cláusula suelo que impide que este interés baje del 2,9 %. En el momento en que quedan 239 mensualidades por pagar y un capital pendiente de 169 349,20 €, el Euribor tiene un valor de 0,528.**

  Calcula la cuota actual de la hipoteca y cuál sería si se eliminase la cláusula suelo. (En la actualidad no están permitidas las cláusulas suelo).

  Como Euribor + 0,65 = 0,528 + 0,65 = 1,178 no llega a 2,9 al aplicar la cláusula suelo, calculamos la mensualidad de esta forma:

$$\left.\begin{aligned} i &= \frac{2{,}9}{1200} \\ n &= 239 \\ C &= 169\,349{,}20 \end{aligned}\right\} \to m = 169\,349{,}20 \cdot \frac{\left(1+\frac{2{,}9}{1200}\right)^{239} \cdot \frac{2{,}9}{1200}}{\left(1+\frac{2{,}9}{1200}\right)^{239} - 1} = 933{,}63 \text{ €}$$

  Si se eliminase la cláusula suelo, la mensualidad sería:

$$m = 169\,349{,}20 \cdot \frac{\left(1+\frac{1{,}178}{1200}\right)^{239} \cdot \frac{1{,}178}{1200}}{\left(1+\frac{1{,}178}{1200}\right)^{239} - 1} = 795{,}29 \text{ €}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad excepto 1.7. (EA todos los tratados en la unidad excepto 1.7.1. a 1.7.5.)

Página 77

Practica

Porcentajes

1 **Si el precio de un artículo ha pasado de 35 € a 100 € en unos años, ¿cuál es el índice de variación? ¿Cuál ha sido el aumento expresado en porcentajes?**

Índice de variación $= \dfrac{100}{35} = 2{,}8571$. Ha aumentado un 185,71 %.

2 **El número total de hipotecas contratadas en España en 2014 fue de 315 535. En 2018 hubo 477 485 hipotecas. Calcula el índice de variación y el porcentaje de subida del número de hipotecas en esos cuatro años.**

El índice de variación es $I_v = \dfrac{477\,485}{315\,535} = 1{,}5132$

Para hallar el porcentaje de subida, calculamos:

$1{,}5132 - 1 = 0{,}5132 \rightarrow$ 51,32 % de subida

3 **En 2015 había 12 338 filiales de empresas extranjeras en España. En 2017 el número ascendió a 12 953. ¿Cuál es el índice de variación? ¿Qué porcentaje supuso la subida en esos dos años?**

El índice de variación es $I_v = \dfrac{12\,953}{12\,338} = 1{,}0498$

Para hallar el porcentaje de subida, calculamos:

$1{,}0498 - 1 = 0{,}0498 \rightarrow$ 4,98 % de subida

4 **Un televisor, que en noviembre costaba 450 €, en diciembre aumentó su precio un 15 %. Con las rebajas de enero ha bajado un 25 %.**

a) Averigua el índice de variación total del precio en esos dos meses.

b) ¿Cuál es el precio actual?

a) Índice de variación $= 1{,}15 \cdot 0{,}75 = 0{,}8625$

b) Precio actual $= 450 \cdot 0{,}8625 = 388{,}13$ €

5 **La cantidad de agua de un embalse ha disminuido en un 35 % respecto a lo que había el mes pasado. Ahora contiene 74,25 millones de litros. ¿Cuántos litros tenía el mes pasado?**

$0{,}65x = 74{,}25 \rightarrow x = 114{,}23$ millones de litros

6 **En la tabla siguiente se muestra, en millones de euros, la recaudación en España de la AEAT (Agencia Tributaria) en tres años distintos:**

	2011	2015	2018
IRPF	69 803	72 346	82 859
IVA	49 302	60 305	70 177
RESTO	42 655	49 358	55 649
TOTAL	161 760	182 009	208 685

a) Calcula el porcentaje de recaudación total que supone la procedente del IRPF en cada año.

b) Averigua el índice de variación de la recaudación total entre los años 2011 y 2015, 2015 y 2018 y entre 2011 y 2018. Exprésalo también usando porcentajes.

a) Año 2011 → $\frac{69\,803}{161\,760} \approx 0{,}4315 \rightarrow$ 43,15 % de la recaudación total

Año 2015 → $\frac{72\,346}{182\,009} \approx 0{,}3975 \rightarrow$ 39,75 % de la recaudación total

Año 2018 → $\frac{82\,859}{208\,685} \approx 0{,}3971 \rightarrow$ 39,71 % de la recaudación total

b) Entre los años 2011 y 2015:

$I_v = \frac{182\,009}{161\,760} \approx 1{,}125 \rightarrow 1{,}125 - 1 = 0{,}125 \rightarrow$ subida del 12,5 %

Entre los años 2015 y 2018:

$I_v = \frac{208\,685}{182\,009} \approx 1{,}147 \rightarrow 1{,}147 - 1 = 0{,}147 \rightarrow$ subida del 14,7 %

Entre los años 2015 y 2018:

$I_v = \frac{208\,685}{161\,760} \approx 1{,}290 \rightarrow 1{,}290 - 1 = 0{,}290 \rightarrow$ subida del 29,0 %

7 **Entre los años 2008 y 2013 el número de matrimonios en España disminuyó un 20,67 %.**

a) Si en 2013 hubo 156 446 matrimonios, ¿cuántos hubo en 2008?

b) Si en 2018 hubo 163 430 matrimonios, ¿en qué porcentaje ha aumentaron desde 2013?

c) ¿Cuál fue el porcentaje de disminución entre 2008 y 2018?

a) Veamos cuál es el índice de variación que corresponde a la bajada: $I_v = 1 - 0{,}2067 = 0{,}7933$

El número de matrimonios que hubo en 2008 fue:

$$\frac{156\,446}{0{,}7933} \approx 197\,209 \text{ matrimonios en 2008}$$

b) 2018 → 163 430 matrimonios:

Calculamos el índice de variación entre los años 2013 y 2018:

$$I_v = \frac{163\,430}{156\,446} = 1{,}0446 \rightarrow 1{,}0446 - 1 = 0{,}0446 \rightarrow \text{ subida del } 4{,}46\,\%$$

c) Calculamos el índice de variación entre los años 2008 y 2018:

$$\frac{163\,430}{197\,209} = 0{,}8287 \rightarrow 1 - 0{,}8287 = 0{,}1713 \rightarrow \text{ bajada del } 17{,}13\,\%$$

8 **En un centro escolar, por cada 5 estudiantes que aprueban todas las asignaturas, hay 4 que suspenden alguna. ¿Qué fracción y qué porcentaje del total supone cada uno de los dos tipos?**

Los alumnos que aprueban todas las asignaturas son los $\frac{5}{9}$ del total, que se corresponde con el 55,56 %.

Los alumnos que suspenden alguna asignatura son los $\frac{4}{9}$ del total, que se corresponde con el 44,44 %.

Intereses bancarios. T.A.E.

9 **Un banco paga el 6,5 % anual del dinero que se deposita en él. ¿Cuánto te darán al cabo de un año si depositas 18 500 €? ¿Y si lo dejas durante 5 años sin sacar nada?**

Si $r = 6{,}5$ y $c = 18\,500 \rightarrow 18\,500 \cdot \left(1 + \frac{6{,}5}{100}\right) = 19\,702{,}5$ €

$\downarrow$

Pasado un año

Si lo dejas 5 años: $18\,500 \rightarrow 18\,500 \cdot \left(1 + \frac{6{,}5}{100}\right)^5 = 25\,346{,}6$ €

10 **Se pide un préstamo de 4 000 € a un usurero que cobra un 6,5% de interés semestral con el compromiso de devolverlo en un solo pago, al cabo de dos años. ¿A cuánto ascenderá ese pago?**

$2 \cdot 6{,}5 = 13\,\%$ anual $\rightarrow$ Calculamos el 13 % de 4 000 €

Los intereses generados en un año son $\rightarrow$ 520 €

Luego al cabo de 2 años el pago asciende a:

$$4\,000 \cdot \left(1 + \frac{13}{100}\right)^2 = 4\,000 \cdot (1{,}13)^2 = 5\,107{,}6 \text{ €}$$

11 **En 2014 un banco ofrecía a sus clientes un depósito a un año a un interés anual del 6% con pago mensual de intereses. En 2019, se ofreció el mismo depósito a un interés del 2 % anual. Si el producto se hubiese contratado con 50 000 €, ¿cuáles habrían sido los beneficios en cada uno de los dos años?**

- Año 2014

  Un interés del 6 % anual se corresponde con un $\frac{6\,\%}{12}$ de interés mensual. Como los pagos de intereses son mensuales, el capital final es:

  $$C_{\text{final}} = 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{12} = 53\,083{,}89 \text{ €}$$

  Los beneficios son:

  $53\,083{,}89 - 50\,000 = 3\,083{,}89$ €

- Año 2019

  $C_{\text{final}} = 50\,000 \cdot 1{,}02 = 51\,000$ €

  Los beneficios son:

  $51\,000 - 50\,000 = 1\,000$ €

12 **¿En cuánto se transforma un capital de 3 500 € depositados durante tres meses al 8 % anual? ¿Y si se mantiene 5 años con periodos de capitalización trimestrales?**

En tres meses:

$$8\,\%\text{ anual} \to \frac{8}{4} = 2\text{ trimestral}$$

$$3\,500 \cdot 1{,}02693 = 3\,594{,}255\text{ €}$$

En cinco años (20 trimestres):

$$3\,500 \cdot 1{,}02693^{20} = 5955{,}04\text{ €}$$

13 **Un capital colocado al 2,5 % anual durante cuatro años se ha convertido en 11 038,13 €. ¿A cuánto ascendía ese capital inicial?**

Si C representa el capital inicial, entonces:

$$11\,038{,}13 = C \cdot \left(1 + \frac{2{,}5}{100}\right)^4 \to 11\,038{,}13 = C \cdot 1{,}025^4 \to C = \frac{11038{,}13}{1{,}025^4} = 10\,000\text{ €}$$

14 **¿Cuántos años tiene que estar depositado un capital de 15 000 €, al 4,7 % anual, para convertirse en 18 000 €?**

$$18\,000 = 15\,000 \cdot \left(1 + \frac{4{,}7}{100}\right)^n \to n \approx 4$$

Debe permanecer 4 años.

15 **Calcula el tanto por ciento anual al que se han de colocar 600 € para que en dos años se conviertan en 699,84 €.**

$$600 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 = 699{,}84 \to r = 8\,\%$$

16 **Depositamos 32 500 € en un banco durante un año y medio y se convierten en 32 720 €. ¿Qué tanto por ciento mensual nos da el banco?**

$$32\,720 = 32\,500 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{18} \to r = 0{,}037\,\%\text{ mensual}$$

17 **Calcula la T.A.E. para un rédito anual del 10 % con pagos mensuales de intereses.**

$$10\,\%\text{ anual} = \frac{10}{12}\,\%\text{ mensual}$$

Un capital C se transforma en un año en $C \cdot \left(1 + \frac{10}{1200}\right)^{12}$.

Es decir, $C \cdot 1{,}1047$.

Por tanto, la T.A.E. será del 10,47 %.

18 **Colocamos en un depósito a 3 años 10 000 € al 4,5 % anual, siendo los periodos de capitalización mensuales. Calcula la T.A.E. asociada. ¿En cuánto se transforma el capital inicial?**

$$i = \frac{4{,}5}{100} \to i_m = \frac{4{,}5}{1200} = 0{,}00375 \to I_{vm} = 1{,}00375$$

$$\text{T.A.E.} = 1{,}00375^{12} - 1 = 0{,}04594 \to 4{,}594\,\%$$

El capital inicial se transforma en 3 años (36 meses) en:

$$C_{\text{final}} = 10\,000 \cdot 1{,}00375^{36} = 11\,442{,}48\text{ €}$$

19 **Calcula en cuánto se transforman 5 000 euros en un año al 10 % si los periodos de capitalización son: a) semestres; b) trimestres; c) meses. Di, en cada caso, cuál es la T.A.E. correspondiente.**

* ***a) 10% anual → 5 % durante 2 semestres → T.A.E.: (1 + 5/100)^2 → 10,25 %.***

a) 10 % anual = 5 % semestral

$5\,000 \cdot 1{,}05^2 = 5\,000 \cdot 1{,}1025 = 5\,512{,}50$ € → T.A.E. del 10,25 %

b) 10 % anual = 2,5 % trimestral

$5\,000 \cdot 1{,}025^4 = 5\,000 \cdot 1{,}1038 = 5\,519{,}06$ € → T.A.E. del 10,38 %

c) 10 % anual = $\frac{10}{12}$ % mensual = $\frac{5}{6}$ % mensual

$$5\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{600}\right)^{12} = 5\,000 \cdot (1{,}008\widehat{3})^{12} = 5\,000 \cdot 1{,}1047 = 5\,523{,}57 \text{ €} \rightarrow \text{T.A.E. del } 10{,}47\,\%$$

20 **¿Qué te hace decir eso? [La resolución del problema permite trabajar esta estrategia].**

Un banco nos ofrece dos tipos de depósitos a 10 años. El depósito A, con un rédito del 3 % y pago mensual de intereses, y el depósito B, cuyo rédito es del 3,5 % y tiene pago anual de intereses. ¿Qué opción es más ventajosa? ¿Qué beneficio obtendremos en cada depósito si colocamos 15 000 euros?

- Para elegir la opción más ventajosa podemos calcular la T.A.E. del depósito A y compararla con la del B (cuyo valor es 3,5 % al ser el pago de intereses anual).

  $i = \frac{3}{100} \rightarrow i_m = \frac{3}{1200} = 0{,}0025 \rightarrow I_{vm} = 1{,}0025$

  T.A.E. = $1{,}0025^{12} - 1 = 0{,}030416 \rightarrow 3{,}0416\,\%$

  Por tanto, el depósito B es más ventajoso que el depósito A.

- Calculamos los beneficios:

  Depósito A

  El capital al cabo de 10 años (120 meses) es:

  $C_{\text{final}} = 15\,000 \cdot 1{,}0025^{120} = 20\,240{,}30 \rightarrow$ Beneficio = 20 240,30 – 15 000 = 5 240,30 €

  Depósito B

  El capital al cabo de 10 años es:

  $C_{\text{final}} = 15\,000 \cdot 1{,}035^{10} = 21\,158{,}98 \rightarrow$ Beneficio = 21 158,98 – 15 000 = 6 158,98 €

Página 78

Amortización de préstamos

21 **Una comerciante pide un préstamo de 5 000 euros para devolver en un solo pago a los tres meses. ¿A cuánto debe ascender ese pago si el precio del dinero está al 12 % anual?**

12 % anual es un 3 % trimestral. El pago será de:

$5\,000 \cdot 1{,}03 = 5\,150$ €

22 **Recibimos un préstamo de 8 500 € al 15 % anual. ¿Cuántos años han transcurrido si al liquidarlo pagamos 14 866,55 €?**

$8\,500 \cdot (1{,}15)^t = 14\,866{,}55 \rightarrow t = 4$ años

23 **Calcula la cuota mensual de un préstamo de 6 000 € con un rédito del 8 % que hemos de devolver en 1 año. Si el tiempo para la devolución fuese de 2 años, ¿cuál sería la nueva cuota?**

Como devolvemos el préstamo en un año, tenemos que pagar 12 mensualidades. Por tanto:

$$m = 6\,000 \cdot \frac{\left(1+\frac{8}{1200}\right)^{12} \cdot \frac{8}{1200}}{\left(1+\frac{8}{1200}\right)^{12} - 1} = 521{,}93\ €$$

Si lo devolviéramos en 2 años, pagaríamos 24 mensualidades, luego:

$$m = 6\,000 \cdot \frac{\left(1+\frac{8}{1200}\right)^{24} \cdot \frac{8}{1200}}{\left(1+\frac{8}{1200}\right)^{24} - 1} = 271{,}36\ €$$

24 **Hemos de amortizar 50 000 € en 5 años, con un interés del 15 %, de modo que cada año se paguen los intereses del capital pendiente más la quinta parte del capital total. Calcula lo que hay que pagar cada uno de los años.**

* ***Consulta la resolución del ejercicio resuelto 3.***

	CAPITAL PENDIENTE	PAGO DE INTERESES	+	PAGO DE CAPITAL	=	PAGO ANUAL	DEUDA PENDIENTE
1.er AÑO	50 000	50 000 · 0,15	+	10 000	=	17 500	40 000
2.º AÑO	40 000	40 000 · 0,15	+	10 000	=	16 000	30 000
3.er AÑO	30 000	30 000 · 0,15	+	10 000	=	14 500	20 000
4.º AÑO	20 000	20 000 · 0,15	+	10 000	=	13 000	10 000
5.º AÑO	10 000	10 000 · 0,15	+	10 000	=	11 500	0

25 **Hemos de amortizar 4 500 € al 12 % anual en 6 plazos mensuales. En cada uno de los plazos pagaremos la sexta parte del capital prestado más los intereses mensuales del capital pendiente de pago. Calcula el importe de cada pago.**

MENSUALIDAD	DEUDA ANTES DEL PAGO	INTERESES PENDIENTES	DEUDA PENDIENTE
1	4 500	45	3 750
2	3 750	37,5	3 000
3	3 000	30	2 250
4	2 250	22,5	1 500
5	1 500	15	750
6	750	7,5	0

12 % anual → 1 % mensual

- **Primera mensualidad:**

  1 % de 4 500 = 45 € → Intereses pendientes

  Pagamos $\frac{1}{6}$ de 4 500 = 750 € + 45 € = 795 €

  Deuda pendiente → 4 500 – 750 = 3 750 €

- **Segunda mensualidad:**

  1 % de 3 750 = 37,5 € → Intereses pendientes

  Pagamos 750 + 37,5 = 787,5 €

  Deuda pendiente → 3 750 – 750 = 3 000 €

- **Tercera mensualidad:**

  1 % de 3 000 = 30 € → Intereses pendientes

  Pagamos 750 + 30 = 780 €

  Deuda pendiente → 3 000 – 750 = 2 250 €

- **Cuarta mensualidad:**

  1 % de 2 250 = 22,50 € → Intereses pendientes

  Pagamos 750 + 22,50 = 772,5 €

  Deuda pendiente → 2 250 – 750 = 1 500 €

- **Quinta mensualidad:**

  1 % de 1 500 € = 15 € → Intereses pendientes

  Pagamos 750 + 15 = 765 €

  Deuda pendiente → 1 500 – 750 = 750 €

- **Sexta mensualidad:**

  1 % de 750 € = 7,5 € → Intereses pendientes

  Pagamos 750 + 7,5 = 757,5 €

  Deuda pendiente → 750 – 750 = 0 €

Hemos pagado en total: $795 + 787{,}5 + 780 + 772{,}5 + 765 + 757{,}5 = 4\,657{,}5$ € $\rightarrow 4\,500 + \underbrace{157{,}5}_{\text{Intereses}}$ €

26 **Una entidad bancaria nos concede un préstamo de 20 000 € que amortizaremos en 5 años con un interés anual del 9 %. Calcula las cuotas del préstamo si los pagos son:**

a) anuales

b) trimestrales

c) mensuales

a) $a = 20\,000 \cdot \dfrac{1{,}09^5 \cdot 0{,}09}{1{,}09^5 - 1} = 5\,141{,}85$ €

b) $i = 9\,\%$ anual $\rightarrow i_t = \dfrac{9}{400} = 0{,}0225 \rightarrow I_{vt} = 1{,}0225$

5 años → 20 trimestres

$p = 20\,000 \cdot \dfrac{1{,}0225^{20} \cdot 0{,}0225}{1{,}0225^{20} - 1} = 1\,252{,}84$ €

c) $i = 9\,\%$ anual $\rightarrow i_m = \dfrac{9}{1200} = 0{,}0075 \rightarrow I_{vm} = 1{,}0075$

5 años → 60 meses

$m = 20\,000 \cdot \dfrac{1{,}0075^{60} \cdot 0{,}0075}{1{,}0075^{60} - 1} = 415{,}17$ €

27 **Una empresaria solicita un crédito de 2 millones de euros al 15 % anual. Ha de devolverlo en 10 años. Calcula:**

a) La anualidad que tiene que pagar al final de cada año.

b) La mensualidad que tendría que pagar si tuviera que hacerlo mensualmente.

2 000 000 € al 15% anual, a devolver en 10 años.

a) $a = C \cdot \dfrac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = 2\,000\,000 \cdot \dfrac{\left(1+\dfrac{15}{100}\right)^{10} \cdot \dfrac{15}{100}}{\left(1+\dfrac{15}{100}\right)^{10} - 1} = 398\,504{,}125$ € anuales

b) $m = C \cdot \dfrac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = 2\,000\,000 \cdot \dfrac{\left(1+\dfrac{15}{1\,200}\right)^{120} \cdot \dfrac{15}{1\,200}}{\left(1+\dfrac{15}{1\,200}\right)^{120} - 1} = 32\,266{,}991$ € mensuales

28 **Una persona paga un coche en 60 mensualidades de 333,67 €. Si el precio del dinero está al 12 % anual, ¿cuál sería el precio del coche si lo pagara al contado?**

$C = \dfrac{1{,}01^{60} - 1}{1{,}01^{60} \cdot 0{,}01} \cdot 333{,}67 \approx 15\,000$ €

29 **Compramos unos electrodomésticos por 3 000 € y los pagamos en 24 plazos mensuales con un interés del 13 %. ¿Cuál será la cuota mensual?**

$m = 3\,000 \cdot \dfrac{\left(1+\dfrac{13}{1200}\right)^{24} \cdot \dfrac{13}{1200}}{\left(1+\dfrac{13}{1200}\right)^{24} - 1} = 142{,}625$ €

30 **Un banco nos concede un préstamo al 6 %, que hemos de amortizar en 7 anualidades de 14 330,80 € cada una. ¿Cuánto dinero nos prestó?**

$a = C \cdot \dfrac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \rightarrow C = a \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$

$C = 14\,330{,}80 \cdot \dfrac{1{,}06^7 - 1}{1{,}06^7 \cdot 0{,}06} = 80\,000$ €

Para resolver

31 **[El tratamiento de un tema del entorno cotidiano permite trabajar la responsabilidad (dimensión social de esta clave)].**

Tras bajar el IVA cultural del 21 % al 10 % el precio de las entradas en dos cines ha pasado del 9 € a 8,50 € y de 10 € a 9 €. ¿Cuál ha sido el porcentaje de bajada del precio de las entradas en cada uno? ¿Se corresponde con la bajada de IVA?

IVA ha bajado del 21 % al 10 %

Cine A ha bajado de 9 € a 8,50 €

Cine B ha bajado de 10 € a 9 €

Calculamos el índice de variación: $I_v = \dfrac{C_{\text{final}}}{C_{\text{inicial}}}$

En el cine A $\to$ $I_v = \dfrac{8,50}{9} = 0,9444 \to 1 - 0,9444 = 0,05556 \to$ 5,556 % de bajada, luego no se corresponde con la bajada del IVA.

En el cine B $\to$ $I_v = \dfrac{9}{10} = 0,9 \to 1 - 0,9 = 0,1 \to$ 10 % de bajada, luego si se corresponde con la bajada del IVA.

32 **En un examen de francés han aprobado el 60 % de los estudiantes. En la recuperación de los suspendidos, aprueban el 30 %, con lo que el total de aprobados hacen 18. ¿Cuál es el porcentaje total de aprobados? ¿Cuántos estudiantes cursan francés?**

* ***Ten en cuenta que solo el 40 % se presenta a la recuperación.***

Como suspende el 40 % de los estudiantes, recuperan el $\dfrac{30}{100} \cdot \dfrac{40}{100} = \dfrac{12}{100}$ = 12 % del total.

El porcentaje final de aprobados es 60 % + 12 % = 72 % del total.

Estudian francés $\dfrac{18}{0,12}$ = 150 estudiantes.

33 ODS Meta 11.1 **[Tras visionar el vídeo, el alumnado puede analizar las dificultades que tienen muchas personas para acceder a una vivienda].**

Si el precio del alquiler de un apartamento sube un 10 % cada año, ¿cuántos años tardaría en duplicarse?

El índice de variación anual es $1 + \dfrac{10}{100} = 1,1$. Si llamamos n al número de años que tarda en duplicarse, se tiene que:

$$2 = 1,1^n \to \log 2 = n \log 1,1 \to n = \frac{\log 2}{\log 1,1} = 7,27$$

Por tanto, tienen que pasar 8 años para que se duplique.

34 **En el contrato de trabajo de una empleada se fija una subida anual del 6,5 % hasta alcanzar un sueldo de 1 986 € mensuales. Si comienza con un sueldo de 1 200 €/mes, ¿cuántos años deben transcurrir para que deje de aplicarse dicha subida?**

Subida anual de 6,5 %

Sueldo máximo 1 986 €/mes

Sueldo inicial 1 200 €/mes

El sueldo de la trabajadora es de 1 986 después de n años:

$$1\,200 \cdot \left(1 + \frac{6,5}{100}\right)^n = 1\,986 \to 1\,200 \cdot (1,065)^n = 1\,986 \to$$

$$\to (1,065)^n = \frac{1986}{1\,200} \to (1,065)^n = 1,655 \to n = \frac{\log 1,655}{\log 1,065} \to n = 8,00004$$

A los 9 años ha llegado al tope de su sueldo así que ya no se aplica más la subida.

35 La siguiente tabla recoge la evolución del salario mensual de una trabajadora desde 2015 a 5018.

	VARIACIÓN DEL IPC (%)	SUELDO MENSUAL (€)
2015	0,00	1 200
2016	1,60	1 230
2017	1,10	1 240
2018	1,20	1 260

a) Calcula el porcentaje de subida del salario de cada año al siguiente y el acumulado en este periodo de tiempo.

b) Calcula el porcentaje de subida acumulado del IPC en este periodo.

c) Según esta tabla, ¿la trabajadora ha perdido o ha ganado poder adquisitivo en este periodo?

* ***Consulta la resolución del ejercicio resuelto 1.***

a) Para calcular el porcentaje de subida, por ejemplo, entre el año 2015 y el 2016, procedemos así:

$$I_v = \frac{1\,230}{1\,200} = 1{,}025 \ \rightarrow \ \text{subida } 2{,}5\,\%$$

Entre el año 2016 y el 2017:

$$I_v = \frac{1\,240}{1\,230} = 1{,}0081 \ \rightarrow \ \text{subida } 0{,}81\,\%$$

Entre el año 2017 y el 2018:

$$I_v = \frac{1\,260}{1\,240} = 1{,}0161 \ \rightarrow \ \text{subida } 1{,}61\,\%$$

$1{,}025 \cdot 1{,}0081 \cdot 1{,}0161 = 1{,}0499 \ \rightarrow \ 4{,}99\,\%$ acumulado entre 2015 e inicio de 2018.

b) $1{,}00 \cdot 1{,}016 \cdot 1{,}011 \cdot 1{,}012 = 1{,}0395 \ \rightarrow \ 3{,}95\,\%$ acumulado entre 2015 e inicio de 2018.

c) Ha ganado poder adquisitivo a la vista de los porcentajes anteriores. Si la subida hubiese sido proporcional al IPC en ese periodo, el sueldo mensual sería $1\,200 \cdot 1{,}0395 = 1\,247{,}4$ € que es una cantidad inferior al sueldo mensual del año 2018.

36 Calcula la T.A.E. asociada a un rédito anual del 6 % con periodos de capitalización mensuales. ¿Cuál sería la T.A.E. si el pago de intereses fuese trimestral?

Si los periodos de capitalización son mensuales:

$$i = 6\,\% \text{ anual} \ \rightarrow \ i_m = \frac{6}{1200} = 0{,}005 \ \rightarrow \ I_{vm} = 1{,}005$$

$$\text{T.A.E.} = 1{,}005^{12} - 1 = 0{,}06168 \ \rightarrow \ 6{,}168\,\%$$

Si son trimestrales:

$$i = 6\,\% \text{ anual} \ \rightarrow \ i_t = \frac{6}{400} = 0{,}015 \ \rightarrow \ I_{vt} = 1{,}015$$

$$\text{T.A.E.} = 1{,}015^{4} - 1 = 0{,}06136 \ \rightarrow \ 6{,}136\,\%$$

37 Un depósito nos ofrece un 5 % T.A.E. Si los periodos de capitalización son mensuales, ¿cuál es el rédito asociado?

** Si r es el rédito,* $\left(1+\frac{r}{1\,200}\right)^{12}=1{,}05$.

Supongamos que el rédito es del r % y los periodos de capitalización son mensuales.

$i = r$ % anual $\rightarrow I_m = \frac{r}{1200}$

5 % T.A.E. $\rightarrow I_v = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$

Por tanto:

$1{,}05 = \left(1+\frac{r}{1200}\right)^{12} \rightarrow \sqrt[12]{1{,}05} = 1 + \frac{r}{1200} \rightarrow r = \left(\sqrt[12]{1{,}05}-1\right)\cdot 1200 = 4{,}89$ es el rédito asociado.

38 Un banco paga el 2 % trimestral. ¿Cuántos años tienen que estar depositados 2 000 euros para convertirse en 2 536,48 €?

Llamamos n al número de años que tienen que estar depositados. Entonces, el número de trimestres es $4n$. Por tanto:

$$2\,536{,}48 = 2000\cdot\left(1+\frac{2}{100}\right)^{4n} \rightarrow \frac{2536{,}48}{2000} = 1{,}02^{4n} \rightarrow 1{,}26824 = 1{,}02^{4n} \rightarrow$$

$$\rightarrow \log 1{,}26824 = 4n\log 1{,}02 \rightarrow$$

$$\rightarrow n = \frac{\log 1{,}26824}{4\log 1{,}02} = 3 \text{ años}$$

39 Una familia paga una cuota mensual de 644,30 € por la hipoteca de su vivienda. Si el préstamo fue a 25 años con un rédito del 6 %, ¿cuál fue el capital inicial solicitado?

Los datos del problema son:

$m = 644{,}30$; $n = 25\cdot 12 = 300$ mensualidades; $I = \frac{6}{100} \rightarrow I_m = \frac{6}{1200} = 0{,}005 \rightarrow I_{vm} = 1{,}005$

Sustituyendo en la fórmula de las anualidades de amortización, obtenemos:

$$644{,}30 = C\cdot\frac{1{,}005^{300}\cdot 0{,}005}{1{,}005^{300}-1} \rightarrow C = 644{,}30\cdot\frac{1{,}005^{300}-1}{1{,}005^{300}\cdot 0{,}005} = 100\,000\text{ €}$$

Página 79

40 Quiero pedir una hipoteca para comprar una vivienda. Mi nómina es de 1 500 € y mi entidad bancaria no quiere que mi nivel de endeudamiento sea superior a un tercio de la misma. Si me conceden una hipoteca a 30 años con un rédito del 4,5 %, ¿cuál es la cantidad máxima que puedo pedir al banco?

Debemos calcular la cantidad teniendo en cuenta que el banco nos permite una mensualidad máxima de $\frac{1500}{3} = 500$ €.

$I = \frac{4{,}5}{100} \rightarrow I_m = \frac{4{,}5}{1200} = 0{,}00375 \rightarrow I_{vm} = 1{,}00375$

30 años $\rightarrow$ 30 · 12 = 360 mensualidades

La relación entre la mensualidad y el capital es:

$$500 = C\cdot\frac{1{,}00375^{360}\cdot 0{,}00375}{1{,}00375^{360}-1} \rightarrow C = 500\cdot\frac{1{,}00375^{360}-1}{1{,}00375^{360}\cdot 0{,}00375} = 98\,680{,}58\text{ €}$$

Por tanto, el banco nos permitiría pedir un máximo de 98 680,58 €.

41 Cabezas pensantes. **[Antes de completar la tabla de amortizaciones, el alumnado podrá compartir en pequeños grupos el método que hay que seguir para calcular los valores correctos].**

El banco nos concede un préstamo personal de 15 000 € al 12 % anual para devolver en 24 mensualidades. Si nos fija una comisión de cancelación anticipada del 1 %, ¿a cuánto ascendería esta comisión si queremos cancelar el préstamo al cabo de 6 meses?

Para resolver el problema construimos la tabla de amortizaciones del préstamo. Así podremos saber cuál es el capital pendiente sobre el que se aplica la comisión del 1 %.

Primero calculamos la mensualidad:

$$i = \frac{12}{100} \to i_m = \frac{12}{1200} = 0{,}01 \to I_{vm} = 1{,}01$$

$$m = 15\,000 \cdot \frac{1{,}01^{24} \cdot 0{,}01}{1{,}01^{24} - 1} = 706{,}10 \text{ €}$$

Ahora calculamos la tabla de amortizaciones:

MESES	DEUDA ANTES DEL PAGO	INTERESES PENDIENTES	PAGO	CANTIDAD AMORTIZADA	DEUDA PENDIENTE
1	15 000,00	150,00	706,10	556,10	14 443,90
2	14 443,90	144,44	706,10	561,70	13 882,24
3	13 882,24	138,82	706,10	567,28	13 314,96
4	13 314,96	133,15	706,10	572,95	12 742,01
5	12 742,01	127,42	706,10	578,68	12 163,33
6	12 163,33	121,63	706,10	584,47	11 578,86

La comisión de cancelación será: $\frac{1}{100} \cdot 11\,578{,}86 = 115{,}79$ €.

42 **Ingreso en un banco 3 500 € al principio de cada año al 8 % durante 5 años. ¿Cuánto dinero tendré al final del quinto año?**

El primer año el dinero se convertirá en $a_1 = 3\,500 \cdot 1{,}08^5$ €.

El segundo año, en $a_2 = 3\,500 \cdot 1{,}08^4$ € ya que el dinero estará un año menos en el banco.

…

El quinto, en $a_5 = 3\,500 \cdot 1{,}08$ € al estar solo un año en el banco.

Se trata de calcular la suma de los elementos de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{1{,}08}$. Por tanto:

$$S_5 = \frac{r \cdot a_5 - a_1}{r - 1} = \frac{\frac{1}{1{,}08} \cdot 3500 \cdot 1{,}08 - 3500 \cdot 1{,}08^5}{\frac{1}{1{,}08} - 1} = 22\,175{,}75 \text{ €}$$ tendremos al final del 5.º año.

43 **Una ahorradora mete todos los años en la misma fecha 1 500 € en una cuenta que le produce el 6 % anual. ¿Qué cantidad habrá acumulado al cabo de 3 años?**

Al final acumulará el dinero invertido más los intereses que genera. En este caso:

– El primer año el dinero se convertirá en $a_1 = 3\,500 \cdot 1{,}06^3 = 4\,168{,}56$ €.

– El segundo, en $a_2 = 3\,500 \cdot 1{,}06^2 = 3\,932{,}60$ €, ya que el dinero estará un año menos en el banco.

– El tercero, en $a_3 = 3\,500 \cdot 1{,}06 = 3\,710$ €.

Al finalizar el tercer año habrá acumulado 4 168,56 + 3 932,60 + 3 710 = 11 811,16 €.

44 **He recibido un préstamo de una financiera por el que tengo que pagar 10 anualidades de 1 413,19 €. ¿Cuál es la cantidad prestada si el rédito es el 10,5 %?**

$$C = 1\,413{,}19 \cdot \frac{1{,}105^{10} - 1}{1{,}105^{10} \cdot 0{,}105} = 8\,500 \text{ €}$$

45 **Comprueba que si ingresamos al final de cada año una anualidad de 2 500 € durante 8 años, al 5 %, acumularemos en total 23 872,77 €.**

1.ª anualidad: 2 500 en 7 años $\rightarrow$ $2\,500 \cdot 1{,}05^7$

2.ª anualidad: 2 500 en 6 años $\rightarrow$ $2\,500 \cdot 1{,}05^6$

…

7.ª anualidad: 2 500 en 1 año $\rightarrow$ $2\,500 \cdot 1{,}05$

8.ª anualidad: 2 500 $\rightarrow$ 2 500

En total:

$$S = 2\,500\,[1 + 1{,}05 + \ldots + 1{,}05^6 + 1{,}05^7] = 2\,500 \cdot \frac{1{,}05^8 - 1}{1{,}05 - 1} = 23\,872{,}77 \text{ €}$$

46 **Un trabajador ahorra 5 000 € anuales que ingresa en el banco al principio de cada año. Si el banco le da un 9,5 % de interés, ¿qué cantidad tendrá al cabo de 10 años?**

$$5\,000 \cdot 1{,}095 \cdot \frac{1{,}095^{10} - 1}{0{,}095} = 85\,192{,}59 \text{ €}$$

47 **Una persona inicia un plan de pensiones a los 45 años, con cuotas mensuales de 200 € al 9 % anual, con periodos de capitalización mensuales. ¿De qué capital dispondrá a los 65 años?**

9 % anual = 0,75 % mensual

20 años = 240 mensualidades

$$C = 200 \cdot 1{,}0075 \cdot \frac{1{,}0075^{240} - 1}{0{,}0075} = 134\,579{,}20 \text{ €}$$

48 **Recibimos un préstamo de 10 000 € al 12 % anual que hemos de pagar en un año con plazos mensuales. El banco nos cobra 350 € por la gestión del préstamo en el momento de su concesión. Comprueba que la T.A.E. correspondiente a ese préstamo es de un 16,77 %.**

12 % anual = 1 % mensual

En realidad, recibimos 9 650 €.

Devolvemos $10\,000 \cdot 1{,}01^{12} = 11\,268{,}25$ €.

$\dfrac{11\,268{,}25}{9\,650} = 1{,}1677$ $\rightarrow$ La T.A.E. será del 16,77 %.

49 **Un librero compró dos manuscritos antiguos por 2 250 € y después los vendió obteniendo un beneficio del 40 %. El primer manuscrito le dejó un beneficio del 25 % y el segundo, un beneficio del 50 %. ¿Cuánto pagó por cada uno?**

$x \rightarrow$ precio del primer manuscrito.

$y \rightarrow$ precio del segundo manuscrito.

$x + 0{,}25x \rightarrow$ precio de venta del primer manuscrito.

$y + 0{,}5y \rightarrow$ precio de venta del segundo manuscrito.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2\,250 \\ 1{,}25x+1{,}5y=2\,250+0{,}40-2\,250 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=2\,250 \\ 1{,}25x+1{,}5y=3150 \end{array}\right\}$$

$y = 2\,250 - x \rightarrow 1{,}25x + 1{,}5 \cdot (2\,250 - x) = 3\,150 \rightarrow$

$\rightarrow 1{,}25x + 3\,375 - 1{,}5x = 3\,150 \rightarrow 0{,}25x = 225 \rightarrow x = \dfrac{225}{0{,}25} = 900$

$y = 2\,250 - 900 = 1\,350$

Solución: pagó 900 € por uno de los libros y 1 350 € por el otro.

50 **Una pareja pide un préstamo hipotecario en una entidad financiera para pagar el 80 % del precio de una vivienda, ya que tienen ahorrado el otro 20 %. El banco se lo ha concedido a un interés del 2,09 % anual con lo que tienen que pagar 561,70 € al mes durante 20 años para devolverlo. Además, los padres les han dejado el 10 % del precio de la vivienda para impuestos, notaría y otros gastos. ¿Por cuánto han comprado dicha vivienda? ¿Cuánto dinero hay que gastarse para adquirirla?**

1.º Cálculo del 80% (que les presta el banco):

Fórmula (pago en meses) de la mensualidad:

$$M = C \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

$$561{,}70 = C \cdot \frac{\left(1+\frac{2{,}09}{1\,200}\right)^{240} \cdot \frac{2{,}09}{1\,200}}{\left(1+\frac{2{,}09}{1\,200}\right)^{n} - 1} \rightarrow C = 561{,}70 \cdot \frac{\left(1+\frac{2{,}09}{1\,200}\right)^{240} - 1}{\left(1+\frac{2{,}09}{1\,200}\right)^{240} \cdot \frac{2{,}09}{1\,200}} = 110\,103{,}4204 \text{ €}$$

cantidad que les presta el banco.

2.º Cálculo del 100 % (precio sin gastos):

110 103,4204 € es el 80 % $\rightarrow x = \dfrac{110\,103{,}4204}{0{,}80} \rightarrow x = 137\,629{,}2755$ € cuesta la vivienda.

3.º Cálculo de los gastos de impuestos, notaria, … $\rightarrow$ 10 % del precio:

$137\,629{,}2755 \cdot 0{,}1 = 13\,762{,}92755$ € son los gastos de tramitación.

4º Cálculo del total de los gastos:

$137\,629{,}2755 + 13\,762{,}92755 = 151\,392{,}2031$ €

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA1.2.3.) CE 1.8. (EA 1.8.1.)

Página 79

1 **El sueldo de una trabajadora aumentó, a principios de año, de 1 450 € a 1 508 €. ¿Cuál fue el índice de variación? ¿Y el porcentaje de subida?**

El índice de variación es: $I_v = \frac{1508}{1450} = 1{,}04$

El porcentaje de subida es: $1{,}04 - 1 = 0{,}04 = 4\,\%$

2 **Unos pantalones que cuestan 50 € sufren un descuento de 10 € en las rebajas de unos grandes almacenes. Posteriormente, vuelven a ser rebajados un 40 %. Calcula su precio final y su índice de variación.**

Índice de variación de la primera rebaja: $I_1 = \frac{40}{50} = 0{,}80$

Índice de variación de la segunda rebaja: $I_2 = 1 - 0{,}40 = 0{,}60$

Índice de variación total: $I = I_1 \cdot I_2 = 0{,}80 \cdot 0{,}60 = 0{,}48$

Precio final: $50 \cdot 0{,}48 = 24$ €

3 **En un control de calidad realizado en una fábrica de bombillas LED, el 5 % no superó las 12 000 horas de vida útil. De las restantes, un 2 % no pasó de las 15 000 horas. Si 13 965 bombillas pasaron el control, ¿qué porcentaje no superó la prueba? ¿Cuántas fueron testadas?**

El porcentaje de bombillas que no superó las 15 000 h de vida es el $\frac{2}{10} \cdot \frac{95}{100} = \frac{19}{1000} = 1{,}9\,\%$ del total.

Por tanto, el porcentaje de bombillas que no superó la prueba es el 5 % + 1,9 % = 6,9 % del total.

El porcentaje de bombillas que pasó la prueba es el 100 % – 6,9 % = 93,1 % del total, que representa a las 13 965 bombillas que sí superaron la prueba.

Luego el número de bombillas testadas es: $\frac{13965}{0{,}931} = 15\,000$ bombillas.

4 **Ponemos 60 000 € en un banco al 3 % anual. ¿Cuántos años debemos dejar ese dinero en el banco para obtener 33 478,04 € de beneficio?**

Cuando pasen n años, hemos de tener 60 000 + 33 478,04 = 93 478,04 €.

$$60\,000 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n = 93\,478{,}04 \to 60\,000 \cdot (1{,}03)^n = 93\,478{,}04 \to$$

$$\to 1{,}03^n = \frac{93\,478{,}04}{60\,000} \to n = \frac{\log 1{,}56}{\log 1{,}03} \to n = 15 \text{ años}$$

5 **En un banco que ofrece un interés del 7 % anual ingresamos 12 000 € y los mantenemos 2 años. Calcula el dinero que tendremos tras los 2 años si los periodos de capitalización son mensuales. ¿Y si son semestrales? Calcula la T.A.E. en ambos casos.**

- Periodos de capitalización mensuales.
  - — Cálculo de la T.A.E.:

    Al 7 % anual le corresponde un $\frac{7}{12} = 0{,}58333$ % mensual.

    En un año, el capital se multiplicará por:

    $1{,}0058333^{12} = 1{,}07229\ldots \approx 1{,}0723 = 1 + \frac{7{,}23}{100}$

    La T.A.E. es del 7,23 %.
  - — Cálculo del capital final tras 2 años:

    $12\,000 \cdot (1{,}0723)^2 = 13\,797{,}93$ €
- Periodos de capitalización semestrales:
  - — Cálculo de la T.A.E.:

    Al 7 % anual le corresponde un $\frac{7}{2} = 3{,}5$ % semestral.

    En un año, el capital se multiplica por $1{,}035^2 = 1{,}071225 \approx 1 + \frac{7{,}12}{100}$

    La T.A.E. es del 7,12 %.
  - — Cálculo del capital final tras 2 años:

    $12\,000 \cdot (1{,}0712)^2 = 13\,769{,}63$ €.

6 **Pedimos un préstamo de 5 000 € al 5 % de interés semestral, que ha de ser devuelto al cabo de 3 años en un solo pago. ¿Cuál será el importe de dicho pago?**

Como 3 años son 6 semestres, el pago ascenderá a:

$$5\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^6 = 5\,000 \cdot (1{,}05)^6 = 6\,700{,}48 \text{ €}$$

7 **Hemos de amortizar 15 000 € en 3 años, a un interés anual del 10 %, de forma que cada año se paguen los intereses del capital pendiente más la tercera parte del capital total. Calcula el importe que hay que pagar cada año.**

	CAPITAL PENDIENTE	INTERESES	A PAGAR
1.er AÑO	15 000 €	15 000 · 0,1 = 1 500 €	5 000 + 1 500 = 6 500 €
2.° AÑO	10 000 €	10 000 · 0,1 = 1 000 €	5 000 + 1 000 = 6 000 €
3.er AÑO	5 000 €	5 000 · 0,1 = 500 €	5 000 + 500 = 5 500 €

El primer año pagaremos 6 500 €; el segundo año, 6 000 €, y el tercero, 5 500 €.

8 **Para la compra de un coche de 19 000 €, pedimos un préstamo al 7 % de interés anual que pagaremos en cuotas mensuales durante 6 años. ¿Cuál será dicha cuota?**

Aplicaremos la siguiente fórmula para calcular la mensualidad, m:

$$m = C \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}, \text{ donde } C = 19\,000,\ i = \frac{7}{1200} \text{ y } n = 6 \cdot 12 = 72$$

$$m = 19\,000 \cdot \frac{(1{,}00583)^{72} \cdot 0{,}00583}{(1{,}00583)^{72} - 1} = 323{,}89 \text{ €}$$

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

3 ÁLGEBRA

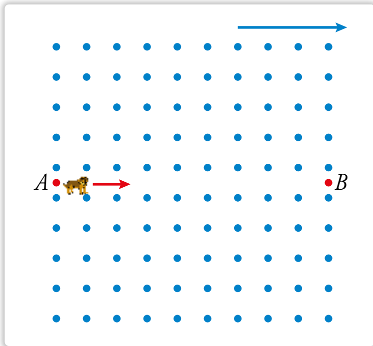
C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.) CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.-EA 1.6.3.-EA 1.6.5.)

Página 81

Resuelve

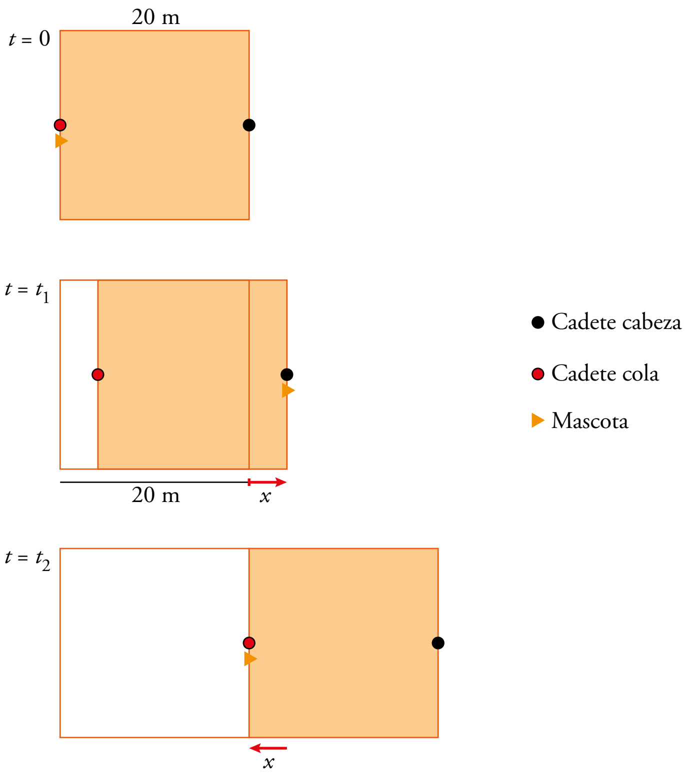
Los cadetes que desfilan con su mascota

Una compañía de cadetes, formada en cuadro de 20 metros de lado, avanza con paso regular. La mascota de la compañía, un pequeño perro, parte del centro de la última fila, punto *A*, camina en línea recta hasta el centro de la fila de cabeza, punto *B*, y regresa del mismo modo hasta el centro de la última fila. En el momento de volver a alcanzar *A*, los cadetes han recorrido exactamente 20 metros.



Suponiendo que el perro camina con velocidad constante y que no pierde tiempo en los giros, ¿cuántos metros ha recorrido?

Representamos esquemáticamente el movimiento de la mascota y de los cadetes:



Llamamos x al espacio que recorre el soldado de cabeza hasta que la mascota lo alcanza, y usaremos la fórmula $tiempo = \dfrac{espacio}{velocidad}$.

El tiempo que tarda la mascota en llegar hasta el soldado de cabeza, t_1, es el mismo que el que tarda el soldado de cabeza en recorrer los x metros.

Llamamos $v_{mascota}$ a la velocidad de la mascota y v_{cadete} a la velocidad de los cadetes.

La ventaja del cadete de cabeza es de 20 m.

t_1 = tiempo que tarda la mascota en llegar hasta el cadete de cabeza

$$t_1 = \frac{20}{v_{mascota} - v_{cadete}}$$

t_1 = tiempo que tarda el cadete de cabeza en recorrer los x metros

$$t_1 = \frac{x}{v_{cadete}}$$

Luego tenemos la igualdad:

$$I: \frac{20}{v_{mascota} - v_{cadete}} = \frac{x}{v_{cadete}}$$

El espacio recorrido por la mascota cuando avanza con los cadetes es $20 + x$. El espacio recorrido por la mascota al volver es x, puesto que al final se queda a 20 m del principio. Luego el espacio total recorrido por la mascota es $e = 20 + 2x$.

El tiempo total durante el cual avanza la compañía, t_2, es el mismo que el tiempo que está la mascota corriendo.

t_2 = tiempo total durante el cual avanza la compañía

$$t_2 = \frac{20}{v_{cadete}}$$

t_2 = tiempo total durante el cual corre la mascota

$$t_2 = \frac{20 + 2x}{v_{mascota}}$$

Luego tenemos la igualdad:

$$II: \frac{20 + 2x}{v_{mascota}} = \frac{20}{v_{cadete}} \to \frac{v_{mascota}}{v_{cadete}} = \frac{20 + 2x}{20}$$

Operamos en la igualdad I:

$$x(v_{mascota} - v_{cadete}) = 20 \cdot v_{cadete} \to x \cdot v_{mascota} = 20 \cdot v_{cadete} + xv_{cadete} \to$$

$$\to x \cdot v_{mascota} = v_{cadete}(20 + x) \to$$

$$\to v_{mascota} = v_{cadete}\frac{(20 + x)}{x} \to \frac{v_{mascota}}{v_{cadete}} = \frac{20}{x} + 1$$

Hemos obtenido la razón entre las dos velocidades. Usamos esta relación en la igualdad II y obtenemos:

$$\frac{20 + 2x}{20} = \frac{20}{x} + 1 \to 1 + \frac{2x}{20} = \frac{20}{x} + 1 \to \frac{2x}{20} = \frac{20}{x}$$

Operamos y obtenemos:

$$2x^2 = 400 \to x^2 = 200 \to x = 10\sqrt{2} \text{ m}$$

El espacio recorrido por la mascota es $e = 20 + 2x = 20 + 10\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 20\sqrt{2} + 20$ m.

1 ▶ LAS IGUALDADES EN ÁLGEBRA

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.) CE 2.3. (EA 2.3.1.-EA 2.3.2.-EA 2.3.3.)

Página 82

1 **¿Verdadero o falso?**

a) La igualdad $x = 3$ es una ecuación porque solo se cumple para $x = 3$.

b) La igualdad $x^2 + 4 = 0$ no es ni ecuación ni identidad, ya que no se cumple para ningún valor de x.

a) Verdadero, pues no es cierta la igualdad para todos los números reales.

b) Falso. Es una ecuación sin soluciones.

2 ▶ POLINOMIOS. FACTORIZACIÓN

C.E.: CE1.2. (EA 1.1.1.) CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.) CE 2.3. (EA 2.3.1.-EA 2.3.2.-EA 2.3.3.)

Página 84

1 Comprobamos. **[La descomposición factorial propuesta por el enunciado es una buena ocasión para que el alumnado trabaje esta técnica].**

Descompón factorialmente estos polinomios:

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3\,(x^3 - 9x^2 + 24x - 20)$

	1	–9	24	–20
2		2	–14	20
	1	–7	10	0
2		2	–10	
	1	–5	0	

$x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3(x-2)^2\,(x-5)$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$

	1	–3	–3	–5	2	8
1		1	–2	–5	–10	–8
	1	–2	–5	–10	–8	0
–1		–1	3	3	8	
	1	–3	–2	–8	0	
4		4	4	8		
	1	1	2	0		

$x^2 + x + 2 = 0 \ \to \ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$ (no tiene solución)

$x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x-1)\,(x+1)\,(x-4)\,(x^2 + x + 2)$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

	1	6	9	0	–1	–6	–9
–1		–1	–5	–4	4	–3	9
	1	5	4	–4	3	–9	0
–3		–3	–6	6	–6	9	
	1	2	–2	2	–3	0	
–3		–3	3	–3	3		
	1	–1	1	–1	0		
1		1	0	1			
	1	0	1	0			

$x^2 + 1 = 0 \ \to \ x^2 = -1$ (no tiene solución)

Así, $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9 = (x+3)^2\,(x+1)\,(x-1)\,(x^2+1)$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

	4	0	–15	–5	6
2		8	16	2	–6
	4	8	1	–3	0
–1		–4	–4	3	
	4	4	–3	0	

$$4x^2 + 4x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} \;\rightarrow\; x = \frac{1}{2},\; x = -\frac{3}{2}$$

$$4x^4 - 15x^2 - 5x + 6 = 4(x-2)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

2 **a) Intenta factorizar $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$.**

b) Hazlo ahora sabiendo que es divisible por $x^2 + x + 1$.

a) El polinomio dado no tiene raíces enteras (de hecho, no tiene raíces reales).

b) Hacemos la división:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 & x^2 + x + 1 \\ \cline{3-3}
 & -x^4 - x^3 - x^2 & x^2 + 3x + 4 \\ \hline
 & 3x^3 + 7x^2 + 7x + 4 & \\
 & -3x^3 - 3x^2 - 3x & \\ \hline
 & 4x^2 + 4x + 4 & \\
 & -4x^2 - 4x - 4 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Los polinomios $x^2 + x + 1$ y $x^2 + 3x + 4$ son irreducibles (las ecuaciones $x^2 + x + 1 = 0$ y $x^2 + 3x + 4 = 0$ no tienen solución).

Por tanto:

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 4)$$

3 **Intenta factorizar $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$. Vuelve a intentarlo sabiendo que –1/2 y 1/3 son raíces suyas y comprueba tus resultados con la calculadora.**

El polinomio dado no tiene raíces enteras.

Teniendo en cuenta el dato adicional (que $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ son raíces), procedemos así:

	6	7	6	0	–1
–1/2		–3	–2	–2	1
	6	4	4	–2	0
1/3		2	2	2	
	6	6	6	0	

$6x^2 + 6x + 6 = 0$

$6(x^2 + x + 1) = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ (no tiene solución)

Por tanto:

$$6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)6(x^2 + x + 1) = (2x+1)(3x-1)(x^2 + x + 1)$$

3 ▶ FRACCIONES ALGEBRAICAS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.) CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.-EA 1.3.3.)

Página 86

1 **¿Verdadero o falso?**

a) $\dfrac{x+1}{x^2+1} = \dfrac{1}{x+1}$ b) $\dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{1}{x+1}$

c) $\dfrac{3x-3}{x^2-1} = \dfrac{3}{x+1}$ d) $\dfrac{x+1}{x} - 1 = \dfrac{1}{x}$

a) Para comprobar si son equivalentes, multiplicamos en cruz: $(x+1)(x+1) \neq x^2+1$, luego es falso.

b) Para comprobar si son equivalentes, multiplicamos en cruz: $(x-1)(x+1) = x^2-1$, luego es verdadero.

c) La primera fracción es el triple de $\dfrac{x-1}{x^2-1}$, y la segunda es el triple de $\dfrac{1}{x+1}$ que son las fracciones del apartado anterior, luego es verdadero.

d) Operamos en el miembro de la izquierda:

$$\frac{x+1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

Obtenemos el miembro de la derecha, luego es verdadero.

2 **Reduce previamente a común denominador las fracciones algebraicas siguientes, y súmalas:**

$$\frac{x+7}{x} \qquad \frac{x-2}{x^2+x} \qquad -\frac{2x+1}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ x^2+x = x(x+1) \\ x+1 = x+1 \end{array}\right\} \text{mín.c.m.} = x(x+1)$$

Reducimos a común denominador:

$$\frac{x+7}{x} = \frac{(x+7)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x^2+8x+7}{x(x+1)}$$

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{x-2}{x(x+1)}$$

$$-\frac{2x+1}{x+1} = -\frac{(2x+1)x}{x(x+1)} = -\frac{2x^2+x}{x(x+1)} = -\frac{2x^2-x}{x(x+1)}$$

Las sumamos:

$$\frac{x+7}{x} + \frac{x-2}{x^2+x} - \frac{2x+1}{x+1} = \frac{x^2+8x+7}{x(x+1)} + \frac{x-2}{x(x+1)} + \frac{-2x^2-x}{x(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2+8x+7+x-2-2x^2-x}{x^2+x} = \frac{-x^2+8x+5}{x^2+x}$$

3 **Efectúa.**

a) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}$ b) $\dfrac{x}{x+1}+5x$

a) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1} =$

$= \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{2x(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} =$

$= \dfrac{1+2x(x-1)-x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1+2x^2-2x-x^2-x}{x^2-1} = \dfrac{x^2-3x+1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x}{x+1}+5x = \dfrac{x+5x(x+1)}{x+1} = \dfrac{x(5x+6)}{x+1} = \dfrac{5x^2+6x}{x+1}$

4 **Efectúa estas operaciones:**

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}$ b) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}$

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5} = \dfrac{(x^2-2x+3)(2x+3)}{(x-2)(x+5)} = \dfrac{2x^3-x^2+9}{x^2+3x-10}$

b) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5} = \dfrac{(x^2-2x+3)(x+5)}{(2x+3)(x-2)} = \dfrac{x^3+3x^2-7x+15}{2x^2-x-6}$

5 **Calcula.**

a) $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)$ b) $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4}$

a) $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right) = \dfrac{x+2}{x}:\dfrac{x(x-1)}{3(2x+1)} = \dfrac{3(2x+1)(x+2)}{x^2(x-1)}$

b) $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4} = \dfrac{(x^4-x^2)(x^4+x^2)}{(x^2+1)\,x^4} = \dfrac{x^2(x^2-1)\cdot x^2(x^2+1)}{(x^2+1)\,x^4} = \dfrac{x^4(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2+1)\,x^4} = x^2-1$

4 ▶ RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

C.E.: CE 1.12. (EA 1.12.4) CE 2.3. (EA 2.3.1.-EA 2.3.2.-EA 2.3.3.)

Página 87

Hazlo tú

1 **Resuelve esta ecuación:**

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \xrightarrow{x^2 = y} y^2 - 2y + 1 = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1}$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

Piensa y practica

1 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $x^4 - x^2 - 12 = 0$ **b)** $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

a) $x^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2}$ $\begin{cases} 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ -3 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

b) $x^2 = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \dfrac{8 \pm 10}{2}$ $\begin{cases} 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ -1 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

2 **Resuelve:**

a) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ **b)** $x^4 - x^2 - 2 = 0$

a) $x^2 = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \dfrac{-10 \pm 8}{2}$ $\begin{cases} -1 \rightarrow \text{(no vale)} \\ -9 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases}$

No tiene solución.

b) $x^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$ $\begin{cases} x^2 = -1 \rightarrow \text{(no vale)} \\ x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Hay dos soluciones: $x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2}$

Página 88

Hazlo tú

1 **Resuelve:**

a) $\sqrt{19-6x} - 2 = x$ **b)** $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} = 5$

a) $\sqrt{19-6x} - 2 = x \rightarrow \sqrt{19-6x} = x + 2$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$19 - 6x = x^2 + 4x + 4 \rightarrow x^2 + 10x - 15 = 0 \rightarrow x_1 = -5 + 2\sqrt{10},\ x_2 = -5 - 2\sqrt{10}$ (no vale)

Solución: $x = -5 + 2\sqrt{10}$

b) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} = 5 \rightarrow \sqrt{x-2} = 5 - \sqrt{x-3}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x - 2 = x - 10\sqrt{x-3} + 22 \rightarrow 10\sqrt{x-3} = 24 \rightarrow x - 3 = \left(\dfrac{24}{10}\right)^2 \rightarrow x = \left(\dfrac{24}{10}\right)^2 + 3 = \dfrac{219}{25}$, que es válida.

Solución: $x = \dfrac{219}{25}$

Piensa y practica

3 Resuelve:

a) $-\sqrt{2x-3}+1=x$ **b)** $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+7}=4$

c) $2+\sqrt{x}=x$ **d)** $2-\sqrt{x}=x$

e) $\sqrt{3x+3}-1=\sqrt{8-2x}$ **f)** $\sqrt{2x+1}+1=\sqrt{3x}$

a) $1-x=\sqrt{2x-3}$

$1+x^2-2x=2x-3$

$x^2-4x+4=0;\ \ x=2$ (no vale)

No tiene solución.

b) $2x-3=16+x+7+8\sqrt{x+7}$

$x-26=8\sqrt{x+7}$

$x^2+676-52x=64(x+7)$

$x^2+676-52x=64x+448$

$x^2-116x+228=0$

$x=\dfrac{116\pm 12}{2}=\begin{cases}114\\ 2 \to \text{(no vale)}\end{cases}$

$x=114$

c) $\sqrt{x}=x-2;\ \ x=x^2+4-4x;\ \ 0=x^2-5x+4$

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}4\\ 1 \to \text{(no vale)}\end{cases}$

$x=4$

d) $2-x=\sqrt{x};\ \ 4+x^2-4x=x;\ \ x^2-5x+4=0$

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}4 \to \text{(no vale)}\\ 1\end{cases}$

$x=1$

e) $\sqrt{3x+3}-1=\sqrt{8-2x}$

$3x+3=1+8-2x+2\sqrt{8-2x}$

$5x-6=2\sqrt{8-2x}$

$25x^2+36-60x=4(8-2x)$

$25x^2-52x+4=0$

$x=\dfrac{52\pm 48}{50}=\begin{cases}2\\ 0{,}08 \to \text{(no vale)}\end{cases}$

Así, $x=2$.

f) $\sqrt{5x+1}+2=\sqrt{27+3x}$

$\sqrt{5x+1}=\sqrt{27+3x}-2$

$5x+1=3x-4\sqrt{3x+27}+31$

$4\sqrt{3x+27}=-(5x+1)+3x+31$

$16(3x+27)=4x^2-120x+900$

$16(3x+27)-4x^2+120x-900=0 \to x=39,\ x=3$

Comprobación:

$x=39 \to \sqrt{5\cdot 39+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 39} \to 14+2\neq 12 \to$ (no vale)

$x=3 \to \sqrt{5\cdot 3+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 3} \to 4+2=6$

4 Resuelve:

a) $\sqrt{4x+9} - \sqrt{2x+1} = 2$

b) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{1-x} = 1$

c) $\sqrt{x+3} + 3 = x$

d) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

e) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

f) $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

a) $\sqrt{4x+9} - \sqrt{2x+1} = 2$

$\sqrt{4x+9} = 2 + \sqrt{2x+1}$

$4x+9 = 4 + 2x + 1 + 4\sqrt{2x+1}$

$x + 2 = 2\sqrt{2x+1}$

$x^2 + 4 + 4x = 4(2x+1)$

$x^2 - 4x = 0; \ x(x-4) = 0$

$x_1 = 0, \ x_2 = 4$

b) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{1-x} = 1$

$\sqrt{3x+4} = \sqrt{1-x} + 1$

$3x + 4 = 1 - x + 1 + 2\sqrt{1-x}$

$2\sqrt{1-x} = 4x + 2$

$4(1-x) = 16x^2 + 16x + 4$

$4x^2 + 5x = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 0, \ x_2 = \frac{-5}{4}$ (no vale)

$x = 0$

c) $\sqrt{x+3} + 3 = x$

$\sqrt{x+3} = x - 3$

$x + 3 = x^2 - 6x + 9$

$x^2 - 7x + 6 = 0$

$x = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 6 \\ x = 1 \ \rightarrow \ \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 6$

d) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

$\sqrt{x-2} = -\sqrt{x+1} + 3$

$x - 2 = (x+1) + 9 - 6\sqrt{x+1}$

$6\sqrt{x+1} = 12$

$36(x+1) = 144$

$x = 3$

e) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

$\sqrt{3x} = \sqrt{x} + \sqrt{2}$

$3x = x + 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{x}$

$x - 1 = \sqrt{2}\sqrt{x}$

$x^2 - 4x + 1 = 0$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \ \rightarrow \ \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 2 + \sqrt{3}$

f) $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

$-5-7x+4+x+2\sqrt{-5-7x}\ \sqrt{4+x} = 7-6x$

$\sqrt{(-5-7x)(4+x)} = 4$

$7x^2 + 33x + 36 = 0$

$x = \dfrac{-33 \pm 9}{14} = \begin{cases} x = -\dfrac{12}{7} \\ x = -3 \end{cases}$

$x_1 = \dfrac{-12}{7},\ x_2 = -3$

Página 89

Hazlo tú

1 Resuelve esta ecuación:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{4}{3}$$

$3(x-2) + 3x = 4x(x-2)$

$2x^2 - 7x + 3 = 0;\ x = \dfrac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} x = 3 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$x_1 = 3,\ x_2 = \dfrac{1}{2}$

Las dos soluciones son válidas.

Piensa y practica

5 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{3}{10}$ **b)** $\dfrac{4}{x} + \dfrac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4$ **c)** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{4}$

a) $10(x+3) + 10x = 3x(x+3)$

$10x + 30 + 10x = 3x^2 + 9x$

$0 = 3x^2 - 11x - 30;\ x = \dfrac{11 \pm 21{,}93}{6} = \begin{cases} 5{,}489 \\ -1{,}822 \end{cases}$

$x_1 = 5{,}489;\ x_2 = -1{,}822$

b) $12(x-2) + 2x(x+1) = 12x(x-2)$

$12x - 24 + 2x^2 + 2x = 12x^2 - 24x$

$0 = 10x^2 - 38x + 24$

$0 = 5x^2 - 19x + 12;\ x = \dfrac{19 \pm 11}{10} = \begin{cases} 3 \\ 4/5 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ x_2 = \dfrac{4}{5}$

c) $4x + 4 = 3x^2;\ 0 = 3x^2 - 4x - 4$

$x = \dfrac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ x_2 = \dfrac{-2}{3}$

6 **Resuelve:**

a) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2x}{x+1}=3$ **b)** $\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{3}{2}$ **c)** $\dfrac{x+3}{x-1}-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{26}{35}$

a) $x(x+1)+2x(x-1)=3(x^2-1)$

$x^2+x+2x^2-2x=3x^2-3$

$x=3$

b) $10(x+3)+2x(x+2)=3(x^2+5x+6)$

$10x+30+2x^2+4x=3x^2+15x+18$

$0=x^2+x-12$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\dfrac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases}3\\-4\end{cases}$

$x_1=3;\ x_2=-4$

c) $35(x+3)\,(x+1)-35(x^2+1)=26\,(x^2-1)$

$35(x^2+4x+3)-35(x^2+1)=26(x^2-1)$

$35x^2+140x+105-35x^2-35=26x^2-26$

$26x^2-140x-96=0$

$x=\dfrac{70\pm\sqrt{70^2-4\cdot 13\cdot(-48)}}{26}=\dfrac{70\pm 86}{26}=\begin{cases}6\\-8/13\end{cases}$

$x_1=6;\ x_2=\dfrac{-8}{13}$

Página 90

Hazlo tú

1 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $5^{6-x^2}=\dfrac{1}{125}$ **b)** $7^{x^2+2x-15}=1$ **c)** $3^x+3^{x-1}=36$

a) $5^{6-x^2}=\dfrac{1}{125}\ \to\ 5^{6-x^2}=5^{-3}\ \to\ 6-x^2=-3\ \to\ x^2=9\ \to\ x_1=3,\ x_2=-3$

b) $7^{x^2+2x-15}=1\ \to\ 7^{x^2+2x-15}=7^0\ \to\ x^2+2x-15=0\ \to\ x_1=3,\ x_2=-5$

c) $3^x+3^{x-1}=36$

Hacemos el cambio de variable $3^x=y$. Nos queda:

$y+\dfrac{y}{3}=36\ \to\ y=27\ \to\ 3^x=27\ \to\ x=3$

Piensa y practica

7 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $2^{3x}=0{,}5^{3x+2}$ **b)** $3^{4-x^2}=\dfrac{1}{9}$ **c)** $\dfrac{4^{x-1}}{2^{x+2}}=186$ **d)** $7^{x+2}=5\,764\,801$

a) $2^{3x}=2^{-3x-2}\ \to\ 3x=-3x-2\ \to\ 6x=-2\ \to\ x=\dfrac{-1}{3}$

b) $3^{4-x^2}=3^{-2}\ \to\ 4-x^2=-2\ \to\ x^2=6\ \to\ x=\pm\sqrt{6}$

c) $\dfrac{2^{2x-2}}{2^{x+2}}=186\ \to\ 2^{2x-2-x-2}=186\ \to\ 2^{x-4}=186\ \to$

$\to\ \log 2^{x-4}=\log 186\ \to\ (x-4)\log 2=\log 186\ \to\ x=4+\dfrac{\log 186}{\log 2}=11{,}54$

d) $7^{x+2}=7^8\ \to\ x=6$

8 **Resuelve:**

a) $3^x + 3^{x+2} = 30$

b) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \dfrac{31}{5}$

c) $\dfrac{5^{x^2+1}}{25^{x+2}} = 3125$

d) $5^{2x} = 0{,}2^{4x-6}$

a) $3^x + 3^x \cdot 9 = 30 \;\rightarrow\; 3^x(10) = 30 \;\rightarrow\; 3^x = 3 \;\rightarrow\; x = 1$

b) $5 \cdot 5^x + 5^x + \dfrac{5^x}{5} = \dfrac{31}{5} \;\rightarrow\; 5^x \cdot \dfrac{31}{5} = \dfrac{31}{5} \;\rightarrow\; x = 0$

c) $\dfrac{5^{x^2+1}}{25^{x+2}} = 3125 \;\rightarrow\; \dfrac{5^{x^2+1}}{5^{2(x+2)}} = 5^5 \;\rightarrow\; 5^{x^2+1-2(x+2)} = 5^5 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 + 1 - 2(x-2) = 5 \;\rightarrow\; x^2 - 2x - 8 = 0 \;\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

d) $5^{2x} = 0{,}2^{4x-6} \;\rightarrow\; 5^{2x} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{4x-6} \;\rightarrow\; 5^{2x} = 5^{-(4x-6)} \;\rightarrow\; 2x = -(4x-6) \;\rightarrow\; 6x = 6 \;\rightarrow\; x = 1$

Página 91

Hazlo tú

1 **Resuelve:**

a) $\log x - \log 4 = 2$

b) $3 \log_5 (x-1) = \log_5 125$

c) $2 \ln x = \ln (2x+3)$

Recuerda: ***ln*** **es logaritmo neperiano o logaritmo en base** ***e*** **y** ***log*** **es logaritmo decimal o logaritmo en base 10.**

a) $\log x - \log 4 = 2 \;\rightarrow\; \log\left(\dfrac{x}{4}\right) = \log 10^2 \;\rightarrow\; \dfrac{x}{4} = 100 \;\rightarrow\; x = 400$

b) $3\log_5 (x-1) = \log_5 125 \;\rightarrow\; 3\log_5 (x-1) = 3\log_5 5 \;\rightarrow\; x - 1 = 5 \;\rightarrow\; x = 6$

c) $2\ln x = \ln(2x+3) \;\rightarrow\; \ln x^2 = \ln(2x+3) \;\rightarrow\; x^2 = 2x + 3 \;\rightarrow\; x_1 = 3,\; x_2 = -1$ (no válida)

Solución: $x = 3$

Piensa y practica

9 **¿Verdadero o falso?**

a) Al resolver una ecuación con algún radical cuadrático siempre aparece alguna raíz falsa.

b) 4 y –4 son soluciones de la ecuación $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = 4$**.**

c) 4 y –4 son soluciones de la ecuación $\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x} = 2$**.**

a) Falso, hemos resuelto ecuaciones de este tipo en las que todas las soluciones eran válidas.

Ejemplo: $\sqrt{4x+9} - \sqrt{2x+1} = 2$ en la página 89.

b) Verdadero, si sustituimos x por 4 o por -4 obtenemos una igualdad.

c) Falso, solo es solución $x = 4$. Al sustituir x por -4 no sale una igualdad.

10 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$

c) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ **d)** $x^4 - 18x^2 = 0$

a) Hacemos $x^2 = y \to y^2 - y - 12 = 0 \to y = 4,\ y = -3$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

b) Hacemos $x^2 = y \to y^2 - 8y - 9 = 0 \to y = 9,\ y = -1$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

c) Hacemos $x^2 = y \to y^2 + 10y + 9 = 0 \to y = -1,\ y = -9$

Soluciones: No hay.

d) Hacemos $x^2 = y \to y^2 - y - 2 = 0 \to y = 2,\ y = -1$

Soluciones: $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = -\sqrt{2}$

11 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{3x-2}{x} - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{2x-5}{x}$ **b)** $\dfrac{3+x}{x-1} + \dfrac{5}{x+1} = \dfrac{x-2}{x^2-1}$

c) $\dfrac{-x}{x+1} + \dfrac{2x+1}{2x} + \dfrac{1}{x^2-1} = 0$ **d)** $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{3x+2}{x+1}$

a) $x(3x-2) - 4 = x(2x-5) \to 3x^2 - 2x - 4 = 2x^2 - 5x \to x^2 + 3x - 4 = 0 \to x_1 = 1, x_2 = -4$

b) $(3+x)(x+1) + 5(x-1) = x-2 \to 3x + 3 + x^2 + x + 5x - 5 = x - 2 \to x^2 + 8x = 0 \to x_1 = 0, x_2 = -8$

c) $2x(-x)(x-1) + (2x+1)(x^2-1) + 2x = 0 \to 3x^2 - 1 = 0 \to x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

d) $x^2 - (x+1) = x(3x+2) \to x^2 - x - 1 = 3x^2 + 2x \to 2x^2 + 3x + 1 = 0 \to x_1 = -\dfrac{1}{2}, x_2 = -1$ (no válida)

12 Resuelve.

a) $\sqrt{3x-2} + x = 2$ **b)** $\sqrt{7+x} - \sqrt{19+x} = -2$

c) $6 - \sqrt{x} = x$ **d)** $\sqrt{x+3} - 7 = \sqrt{3x-2}$

e) $\sqrt{3x} - \sqrt{x-2} = \sqrt{x+1}$ **f)** $\sqrt{5x+1} + 2 = \sqrt{27+3x}$

a) $\sqrt{3x-2} = 2 - x$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$3x - 2 = 4 + x^2 - 4x \to x^2 - 7x + 6 = 0 \to x_1 = 1,\ x_2 = 6$$

Comprobamos y vemos que solamente existe una solución ya que $x_2 = 6$ no cumple la ecuación inicial.

Solución: $x = 1$

b) $\sqrt{7+x} - \sqrt{19+x} = -2$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$7 + x + 19 + x - 2\sqrt{7+x}\sqrt{19+x} = 4 \to x + 11 = \sqrt{7+x}\sqrt{19+x}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros otra vez:

$$x^2 + 121 + 22x = (7+x)(19+x) = 1333 + 26x + x^2 \to -4x = 12 \to x = -3$$

Si comprobamos la solución, observamos que es válida.

Solución: $x = -3$

c) $6 - x = \sqrt{x} \rightarrow 36 + x^2 - 12x = x \rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \rightarrow x_1 = 9,\ x_2 = 4$

Comprobamos y vemos que solamente existe una solución ya que $x_1 = 9$ no cumple la ecuación inicial.

Solución: $x = 4$

d) Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$x + 3 + 49 - 14\sqrt{x+3} = 3x - 2 \rightarrow -2x + 54 = 14\sqrt{x+3}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros otra vez:

$$4x^2 + 2916 - 216 = 196\,(x + 3)\,4x^2 - 196x + 2\,658 = 0 \rightarrow 2x^2 - 98 + 1\,329 = 0$$

Vemos que no tiene solución ya que nos queda un número negativo dentro de la raíz:

$$x = \frac{98 \pm \sqrt{-1\,028}}{4}$$

e) Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$3x + x - 2 - 2\sqrt{3x}\sqrt{x-2} = x + 1 \rightarrow 3x - 3 = 2\sqrt{3x}\sqrt{x-2}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros otra vez:

$$9x^2 - 9 = 4 \cdot 3x \cdot (x - 2) \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -1$$

Comprobamos y vemos que solamente existe una solución ya que $x_2 = -1$ no cumple la ecuación inicial.

Solución: $x = 3$

f) $\sqrt{5x+1} + 2 = \sqrt{27 + 3x}$

$\sqrt{5x+1} = \sqrt{27 + 3x} - 2$

$5x + 1 = 3x - 4\sqrt{3x + 27} + 31$

$4\sqrt{3x+27} = -(5x + 1) + 3x + 31$

$16\,(3x + 27) = 4x^2 - 120\,x + 900$

$16\,(3x + 27) - 4x^2 + 120x - 900 = 0 \rightarrow x = 39,\ x = 3$

Comprobación:

$x = 39 \rightarrow \sqrt{5 \cdot 39 + 1} + 2 = \sqrt{27 + 3 \cdot 39} \rightarrow 14 + 2 \neq 12 \rightarrow$ (no vale)

$x = 3 \rightarrow \sqrt{5 \cdot 3 + 1} + 2 = \sqrt{27 + 3 \cdot 3} \rightarrow 4 + 2 = 6$

13 Resuelve.

a) $\mathbf{2^{x^2-4x} = \frac{1}{16}}$ **b)** $\mathbf{5^{x^2-1} = 7}$

c) $\mathbf{3^{x+2} - 3^x = 72}$ **d)** $\mathbf{7^{x^2-x-2} = 1}$

a) $2^{x^2-4x} = 2^{-4} \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = 2$

b) Aplicamos logaritmos a ambos lados de la igualdad y operamos:

$$(x^2 - 1)\,log\,5 = log\,7 \rightarrow x^2 = \frac{log\,7}{log\,5} + 1 \rightarrow x = \pm 1{,}4863$$

c) Sacamos factor común: $3^x(3^2 - 1) = 72 \rightarrow 3^x = \frac{72}{8} = 9 = 3^2 \rightarrow x = 2$

d) Sabemos que $1 = 7^0$

Por tanto:

$7^{x^2-x-2} = 7^0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$

14 Comprobamos. **[La resolución de las ecuaciones propuestas es una buena ocasión para trabajar esta técnica].**

Resuelve las ecuaciones siguientes.

a) $\boldsymbol{log\,(x+4) + log\,(x+1) = 1}$ **b)** $\boldsymbol{log_3 x + log_3 (x-2) = 3\, log_3 (x-2)}$

c) $\boldsymbol{2\, log\, x - log\,(x+6) = 3\, log\, 2}$ **d)** $\boldsymbol{4\, log_2 (x^2+1) = log_2 625}$

a) Aplicamos la propiedad de la suma de logaritmos:

$log[(x+4)(x+1)] = 1 \to (x+4)(x+1) = 10^1 \to x^2+5x+4-10=0 \to x^2+5x-6=0 \to$

$$\to x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} \to x_1 = 1,\ x_2 = -6$$

b) $log_3 x + log_3 (x-2) = 3\, log_3 (x-2) \to log_3 x = 2\, log_3 (x-2) \to log_3 x = log_3 (x-2)^2 \to$

$\to x = (x-2)^2 \to x = x^2 - 4x + 4 \to x^2 - 5x + 4 = 0 \to x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \to$

$\to x_1 = 4,\ x_2 = 1$ donde descartamos la solución $x = 1$ ya que no existe el logaritmo de un número negativo $(log(x-2) = log(-1))$.

Solución: $x = 4$

c) $log \dfrac{x^2}{x+6} = log\, 8$

$x^2 = 8x + 48;\ x^2 - 8x - 48 = 0;\ x = \dfrac{8 \pm 16}{2} = \begin{cases} 12 \\ -4 \to \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 12$

d) $log_2 (x^2+1)^4 = log_2 5^4;\ x^2+1 = 5;\ x^2 = 4;\ x = \pm 2$

$x_1 = 2;\ x_2 = -2$

5 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 2.3. (EA 2.3.1.-EA 2.3.2.-EA 2.3.3.)

Página 93

1 **[La justificación de si las afirmaciones son verdaderas o falsas permite trabajar la destreza expresion oral de esta clave].**

¿Verdadero o falso?

a) El sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$ **tiene dos soluciones:** $x = 4,\ y = 1$

b) El sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$ **tiene solo dos soluciones:**

$[x_1 = 2,\ y_1 = 1]$ **y** $[x_2 = -2,\ y_2 = -1]$

c) El sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$ **tiene cuatro soluciones:**

$[x_1 = 2,\ y_1 = 1];\ [x_2 = 2,\ y_2 = -1]$

$[x_3 = -2,\ y_3 = 1];\ [x_4 = -2,\ y_4 = -1]$

a) Falso, $x = 4$ e $y = 1$ no son dos soluciones, sino una solución para cada incógnita, luego son una solución del sistema.

b) Falso, como las dos incógnitas están al cuadrado, también son soluciones $x_3 = -2,\ y_3 = 1$ y $x_4 = 2,\ y_4 = -1$.

c) Verdadero, por el razonamiento del apartado anterior.

2 **Resuelve estos sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 - \dfrac{1}{xy} \\ xy = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} y^2 - x^2 = 16 \\ \sqrt{5 - 4y} - x = -(x + y) \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 9 \end{array}\right\}$

$x^2 - 9 = 2x - 1;\ x^2 - 2x - 8 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{array}{l} 4 \\ -2 \end{array}$$

$x_1 = 4;\ y_1 = 7$

$x_2 = -2;\ y_2 = -5$

b) $\left.\begin{array}{l} y + x = xy - 1 \\ xy = 6 \end{array}\right\}$

$y = 5 - x$

$x(5 - x) = 6;\ 5x - x^2 = 6;\ x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}$

$x_1 = 2;\ y_1 = 3$

$x_2 = 3;\ y_2 = 2$

c) $x = 2y + 1$

$\sqrt{3y+1} - \sqrt{y-1} = 2;\ \sqrt{3y+1} = 2 + \sqrt{y+1}$

$3y + 1 = 4 + y + 1 + 4\sqrt{y+1};\ 2y - 4 = 4\sqrt{y+1};\ y - 2 = 2\sqrt{y+1}$

$y^2 + 4 - 4y = 4y + 4;\ y^2 - 8y = 0$

$y = 8 \ \rightarrow\ x = 17$

$y = 0$ (no vale)

$x = 17;\ y = 8$

d) $\sqrt{5-4y} - x = -(x + y);\ \sqrt{5-4y} = -y$

$(\sqrt{5-4y})^2 = y^2;\ 5 - 4y = y^2 \begin{cases} y = 1 \ \rightarrow\ \text{(no vale)} \\ y = -5 \end{cases}$

$25 - x^2 = 16 \ \rightarrow\ x = -3,\ x = 3$

$x_1 = 3;\ y_1 = -5$

$x_2 = -3;\ y_2 = -5$

3 Resuelve:

a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} log\,(x^2 + y) - log\,(x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 27 \\ log\,x - 1 = log\,y \end{cases}$

d) $\begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,(2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases}$

a) $y = 1 - x;\ x^2 + x(1 - x) + (1 - x)^2 = 21$

$x^2 + x - x^2 + 1 + x^2 - 2x = 21;\ x^2 - x - 20 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \dfrac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \ \rightarrow\ y = -4 \\ -4 \ \rightarrow\ y = 5 \end{cases}$

$x_1 = -4;\ y_1 = 5$

$x_2 = 5;\ y_2 = -4$

b) $\left.\begin{aligned} log\,\frac{x^2+y}{x-2y} &= 1 \\ 5^{x+1} &= 5^{2y+2} \end{aligned}\right\}$

$\left.\begin{aligned} x^2 + y &= 10x - 20y \\ x + 1 &= 2y + 2 \end{aligned}\right\}$

$x = 2y + 1$

$4y^2 + 1 + 4y + y = 20y + 10 - 20y$

$4y^2 + 5y - 9 = 0$

$y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{8} = \dfrac{-5 \pm 13}{8} = \begin{cases} -9/4 \ \rightarrow\ x = -7/2 \\ 1 \ \rightarrow\ x = 3 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ y_1 = 1$

$x_2 = \dfrac{-7}{2};\ y_2 = \dfrac{-9}{4}$

c) $\left.\begin{array}{l} x = 27 + y \\ \log \dfrac{x}{y} = 1 \end{array}\right\}$

$10y = 27 + y;\ \ 9y = 27;\ \ y = 3$

$\dfrac{x}{y} = 10;\ \ x = 10y;\ \ x = 30$

$x = 30;\ \ y = 3$

d) $\begin{cases} \log(2x - y^2) = \log(2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases} \to \begin{cases} \log(2x - y^2) = \log(2 - y) + \log 10 \\ 3^{x-1} = (3^3)^{y+3} \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} \log(2x - y^2) = \log 10(2 - y) \\ 3^{x-1} = 3^{3y+9} \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} 2x - y^2 = 10(2 - y) \\ x - 1 = 3y + 9 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} 2x - y^2 + 10y = 20 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$

$x = 10 - 3y$

$2(10 - 3y) - y^2 + 10y - 20 = 0;\ \ y(y - 4) = 0;\ \ y = 4,\ \ y = 0$

$y = 4$ no es válida porque aparecería $\log(-2)$ en la primera ecuación.

$x = 10;\ \ y = 0$

6 ▸ MÉTODO DE GAUSS PARA SISTEMAS LINEALES

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.) **CE 1.12.** (EA 1.12.4.) **CE 2.3.** (EA 2.3.1.-EA 2.3.2.-EA 2.3.3.)

Página 94

1 Reconoce como escalonados y resuelve.

a) $\begin{cases} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 7 \\ y = \dfrac{2x - 8}{3} = 2 \\ z = 3x + y - 12 = 21 + 2 - 12 = 11 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}}\right\} \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 2 \\ z = 11 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-6}{2} = -3 \\ x = \dfrac{-4y}{3} = 4 \\ z = 5x + y - 17 = 20 - 3 - 17 = 0 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}}\right\} \begin{array}{l} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{l} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 2x + y + 2 = -2 + 4 + 2 = 4 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}}\right\} \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{l} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 4 \\ z = y - 7 = 4 - 7 = -3 \\ x = 11 + z = 11 - 3 = 8 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}}\right\} \begin{array}{l} x = 8 \\ y = 4 \\ z = -3 \end{array}$

2 **Resuelve los siguientes sistemas escalonados:**

a) $\begin{cases} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y = -5 \\ 5y = -10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = -3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = -5 \\ z = 4 \\ x = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -5 \\ z = 4 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y - z = -3 \\ 3x + \quad = -5 \\ 5y = -10 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-10}{5} = -2 \\ x = \dfrac{-5-y}{3} = -1 \\ z = x + 2y + 3 = -2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{l} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} z = 1 \\ y = \dfrac{5+z}{3} = 2 \\ x = 8 + 5y - 3z = 0 + 10 - 3 = 15 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 15 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{l} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{3} = 3 \\ y = \dfrac{8}{2} = 4 \\ z = 4x + y - 7 = 9 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 9 \end{array}$

Página 95

3 **Resuelve por el método de Gauss.**

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases}$

Comprueba los resultados con la calculadora.

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array}} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 2z = 8 \\ 2x = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + z = 4 \\ x = 1 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ z = 4 - x = 3 \\ y = 2 - x - z = 2 - 1 - 3 = -2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array}} \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 3x - 3y = 6 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array}} \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 5x = 20 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{20}{5} = 4 \\ y = \dfrac{14 - 2x}{3} = 2 \\ z = -3 - x + 2y = -3 - 4 + 4 = -3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{array}$

4 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases}$

Comprueba los resultados con la calculadora.

a) $\left.\begin{array}{l} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) + 4 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a)\end{array}} \left.\begin{array}{l} 13x - 5z = 13 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -2x + 10z = -2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}2 \cdot (1.^a) + (3.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) : 2\end{array}}$

$\left.\begin{array}{l} 24x = 24 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -x + 5z = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = \dfrac{-1 + x}{5} = 0 \\ y = 1 - 2x + 2z = -1 \end{array}\Bigg\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a)\end{array}} \left.\begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 2x = 4 \\ 5x - 3z = 13 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ z = \dfrac{5x - 13}{3} = -1 \\ y = \dfrac{2x + 4z + 1}{5} = \dfrac{1}{5} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{5} \\ z = -1 \end{array}$

Página 96

5 **Intenta resolver por el método de Gauss.**

a) $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

Comprueba los resultados con la calculadora.

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a)\end{array}} \left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\}$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª dicen cosas contradictorias (si $2x - y$ es igual a 1, no puede ser igual a 2). Por tanto, el sistema es incompatible.

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a)\end{array}} \left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a)\end{array}} \left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 0 = 0 \end{array}\right\}$

Solo quedan dos ecuaciones. Resolvemos el sistema obteniendo y, z en función de x:

(2.ª) $\rightarrow$ $y = 2x - 1$

(1.ª) $\rightarrow$ $z = -2 - y - x = -2 - (2x - 1) - x = -2 - 2x + 1 - x = -3x - 1$

Soluciones: $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = -3x - 1 \end{cases}$

Para cada valor de x, se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

Para $x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$ Para $x = -2 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \\ z = 5 \end{cases}$

6 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

Comprueba los resultados con la calculadora.

a) $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) + (3.^a) \\ (3.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 3x + 3z = 10 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 0x + 0z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\}$

La segunda ecuación es absurda. No puede ser 0 = 1. Por tanto, el sistema no tiene solución.

b) $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) + (3.^a) \\ (3.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 3x + 3z = 9 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 0x + 0z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$

La segunda ecuación no dice nada. No es una ecuación. Por tanto, solo quedan dos ecuaciones, la 1.ª y la 3.ª.

Resolvemos el sistema resultante dando los valores de x e y en función de z:

$$\begin{cases} x + z = 3 \;\rightarrow\; x = 3 - z \\ x + y - z = 1 \;\rightarrow\; y = 1 - x + z = 1(3 - z) + z = -2 + 2z \end{cases}$$

Soluciones: $\begin{cases} x = 3 - z \\ y = -2 + 2z \end{cases}$

Para cada valor que le demos a z, se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

Para $z = 0 \rightarrow x = 3,\; y = -2$.

Para $z = 4 \rightarrow x = -1,\; y = 6$.

7 INECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.) **CE 2.3.** (EA 2.3.1.-EA 2.3.2.-EA 2.3.3.)

Página 97

1 **Resuelve estas inecuaciones:**

a) $3x - 2 \le 10$

b) $x - 2 > 1$

c) $2x + 5 \ge 6$

d) $3x + 1 \le 15$

a) $3x - 2 \le 10 \rightarrow 3x \le 12 \rightarrow x \le 4$

Soluciones: $\{x \mid x \le 4\} = (-\infty, 4]$

b) $x - 2 > 1 \rightarrow x > 3$

Soluciones: $\{x \mid x > 3\} = (3, +\infty)$

c) $2x + 5 \ge 6 \rightarrow 2x \ge 1 \rightarrow x \ge \frac{1}{2}$

Soluciones: $\left\{x \mid x \ge \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

d) $3x + 1 \le 15 \rightarrow 3x \le 14 \rightarrow x \le \frac{14}{3}$

Soluciones: $\left\{x \mid x \le \frac{14}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{14}{3}\right]$

2 **Resuelve estos sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} 3x - 2 \le 10 \\ x - 2 > 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 5 \ge 6 \\ 3x + 1 \le 15 \end{cases}$

Observamos que las inecuaciones que forman ambos sistemas se han resuelto en el ejercicio anterior.

a) $\begin{cases} x \le 4 \\ x > 3 \end{cases}$ *Soluciones:* $\{x \mid 3 < x \le 4\} = (3, 4]$

b) $\begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ x \le \frac{14}{3} \end{cases}$ *Soluciones:* $\left\{x \mid \frac{1}{2} \le x \le \frac{14}{3}\right\} = \left[\frac{1}{2}, \frac{14}{3}\right]$

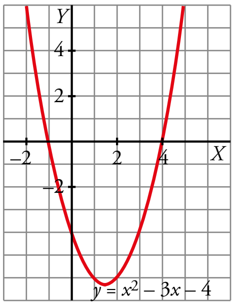
Página 98

3 **Resuelve y comprueba el resultado con la calculadora.**

a) $x^2 - 3x - 4 < 0$ **b)** $x^2 - 3x - 4 \geq 0$

c) $x^2 + 7 < 0$ **d)** $x^2 - 4 \leq 0$

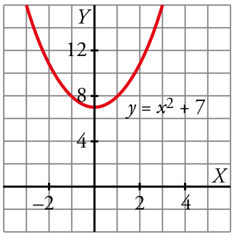
a)



$x^2 - 3x - 4 < 0 \rightarrow$ intervalo $(-1, 4)$

b) $x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$

c)



$x^2 + 7 < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

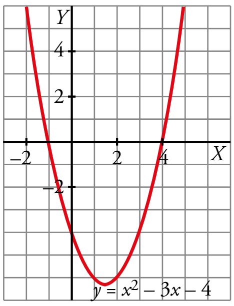
d) $x^2 - 4 \leq 0$

La parábola $y = x^2 - 4$ queda por debajo del eje X en el intervalo $(-2, 2)$; y corta al eje X en $x = -2$ y en $x = 2$. Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$.

4 **Resuelve y comprueba el resultado con la calculadora.**

a) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$

a)



$2x - 7 > 5 \rightarrow 2x > 12 \rightarrow x > 6 \rightarrow (6, +\infty)$

$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

Solución: $(6, +\infty)$

b) $\left.\begin{matrix} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{matrix}\right\}$

- Las soluciones de la primera inecuación son lon puntos del intervalo $[-2, 2]$. (Ver apartado d) del ejercicio anterior).
- Las soluciones de la segunda inecuación son:

$$x - 4 > 1 \rightarrow x > 5 \rightarrow (5, +\infty)$$

- Las soluciones del sistema serán los puntos en común de los dos intervalos. Por tanto, el sistema no tiene solución.

8 ▶ INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.) **CE 2.3.** (EA 2.3.1.-EA 2.3.2.-EA 2.3.3.)

Página 99

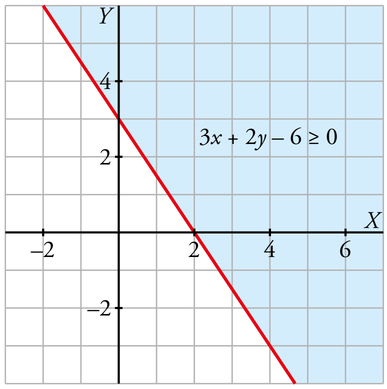
1 Resuelve.

a) $3x + 2y \geq 6$ **b)** $x - y + 1 \geq 0$

a) Dibujamos la recta $r: 3x + 2y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 + 0 - 6 \geq 0$.

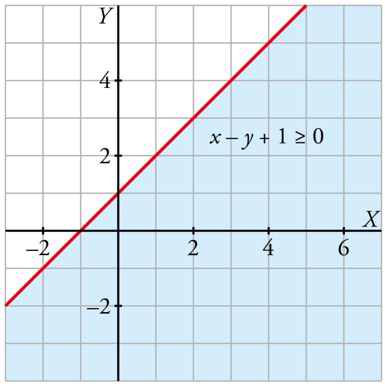
La solución es el semiplano que no contiene a O.



b) Dibujamos la recta $r: x - y + 1 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad: $0 + 0 + 1 \geq 0$.

La solución es el semiplano que contiene a O.



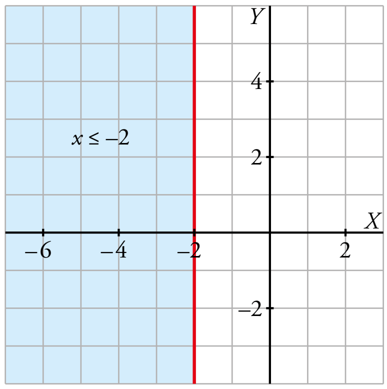
2 Resuelve.

a) $x \leq -2$ **b)** $y > 1$

a) Dibujamos la recta $r: x = -2$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 + 2 \leq 0$.

La solución es el semiplano que no contiene a O.

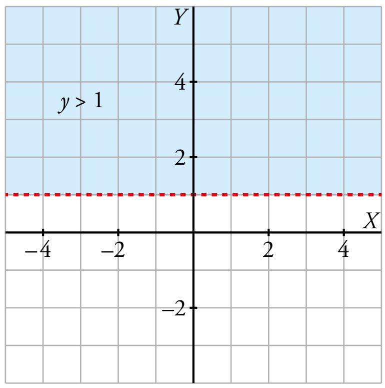


b) Dibujamos la recta $r: y = 1$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 \geq 1$.

La solución es el semiplano que no contiene a O.

La recta $y = 1$ no pertenece al conjunto de soluciones.



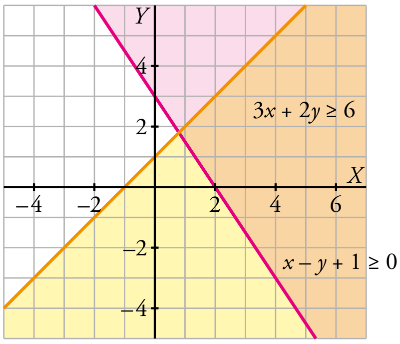
Página 100

3 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

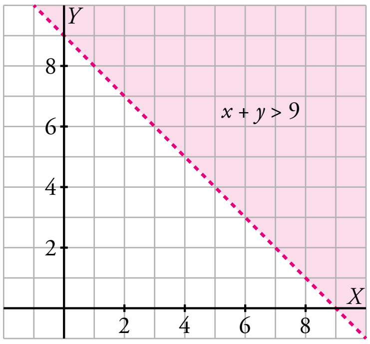
a) $\begin{cases} 3x+2y\ge 6 \\ x-y+1\ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y>9 \\ -2x+3y\ge 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x\ge 3 \\ y\le 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y\ge 11 \\ -x+2y\ge 10 \\ y\le 9 \end{cases}$

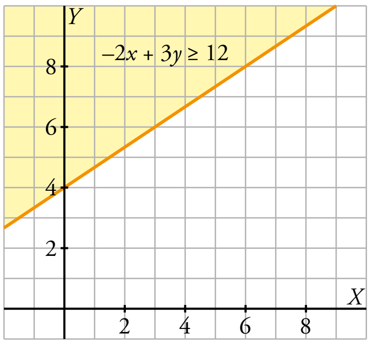
e) $\begin{cases} x+y\le 11 \\ -x+2y\ge 10 \\ y<9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y<11 \\ -x+2y\le 10 \\ y\ge 9 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x-3y\le -3 \\ x+y\le 11 \\ x\ge 2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x-3y>-3 \\ x+y>11 \\ x\le 2 \end{cases}$

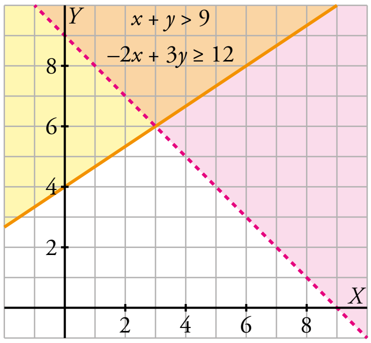
a) Ambas inecuaciones han sido resueltas en el ejercicio 1 anterior. El recinto solución del sistema es la intersección de los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones. Es decir, es el recinto de color marrón.



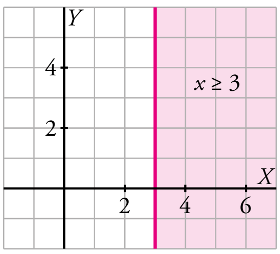
b) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La solución es el recinto marrón.

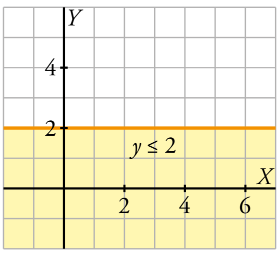


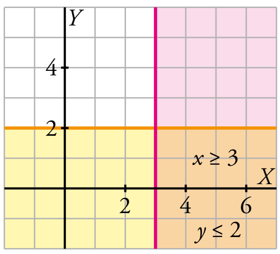




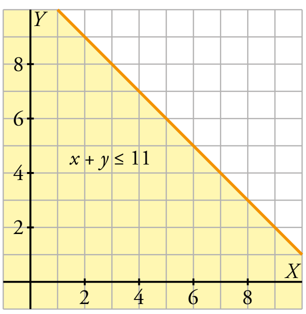
c) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La solución es el recinto marrón.

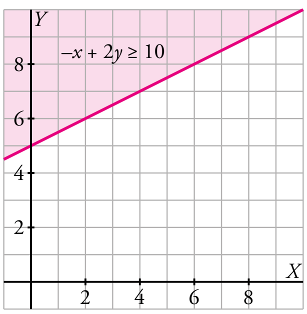


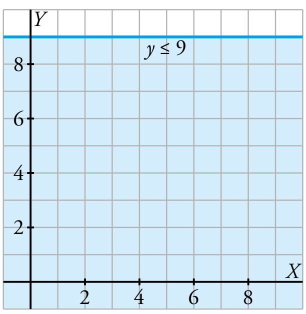


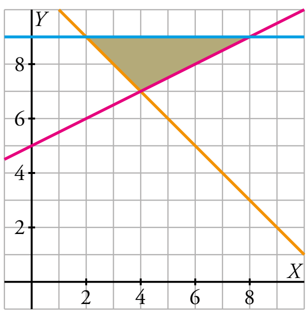


d) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los semiplanos. La solución es el triángulo de intersección.

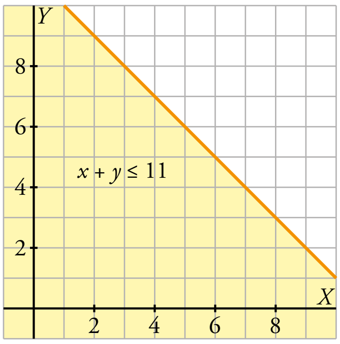


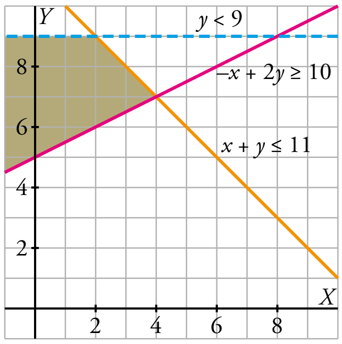




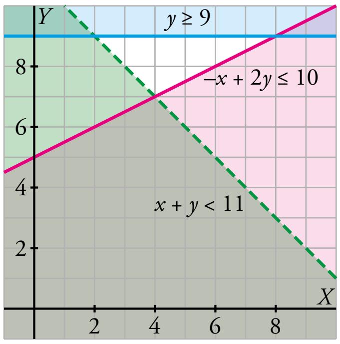


e) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos. Los semiplanos de la segunda y tercera inecuaciones coinciden con los del apartado d). Representamos el semiplano de la primera inecuación. La solución es la región común a los recintos.

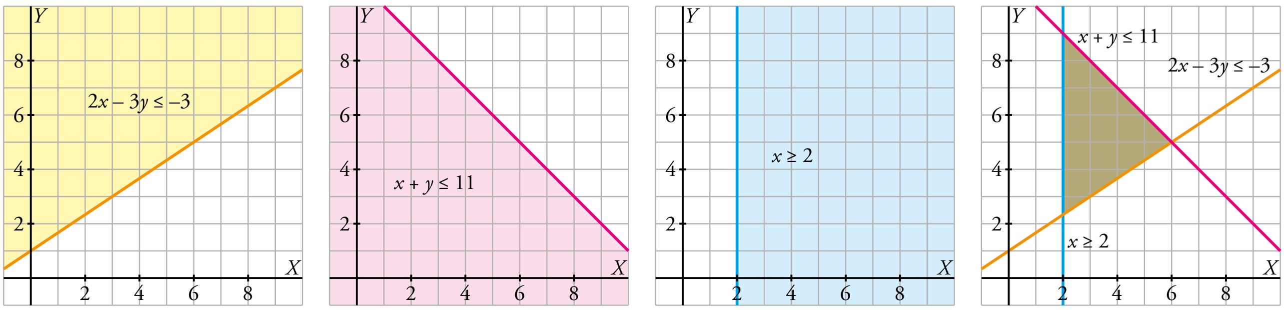




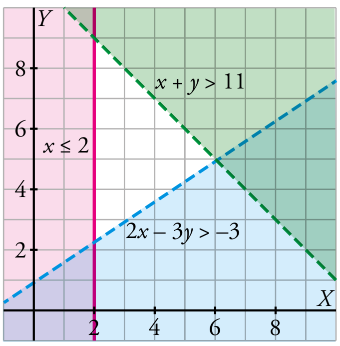
f) Resolvemos cada una de las inecuaciones. No hay ningún punto que esté en la intersección de los tres semiplanos. Luego no hay solución.



g) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos. La solución es el triángulo común a los semiplanos.



h) Resolvemos cada una de las inecuaciones. No hay ningún punto que esté en la intersección de los tres semiplanos. Luego no hay solución.



EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.)

Página 101

1. Ecuaciones polinómicas de grado tres o superior

Hazlo tú

- **Resuelve esta ecuación:**

$$\mathbf{12x^4 + 14x^3 - 2x = 0}$$

Como no tiene término independiente, sacamos factor común $2x$:

$$2x(6x^3 + 7x^2 - 1) = 0$$

Buscamos ahora las raíces enteras del nuevo polinomio entre los divisores del término independiente y factorizamos.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 6 & 7 & 0 & -1 \\ -1 & & -6 & -1 & 1 \\ \hline & 6 & 1 & -1 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

$$6x^3 + 7x^2 - 1 = (x + 1)(6x^2 + x - 1)$$

Como no hay más raíces enteras, para descomponer el polinomio de segundo grado resolvemos la ecuación asociada y como el coeficiente principal es 6, nos queda:

$$12x^4 + 14x^3 - 2x = 6 \cdot 2x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) = 0$$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = \frac{1}{3}$

2. Ecuaciones con valores absolutos

Hazlo tú

- **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $|x^2 - 2| = 2$

b) $|3x + 1| = |2x + 4|$

a) Seguimos las indicaciones del ejercicio resuelto 2, apartado a).

$x^2 - 2 = 2 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$

$x^2 - 2 = -2 \rightarrow x_3 = 0$

b) Seguimos las indicaciones del ejercicio resuelto 2, apartado b).

$3x + 1 = 2x + 4 \rightarrow x_1 = 3$

$3x + 1 = -(2x + 4) \rightarrow x_2 = -1$

3. Inecuaciones con fracciones algebraicas con una incógnita

Hazlo tú

- **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $\frac{x-1}{x} \le 0$ **b)** $\frac{x-1}{x} \le x$

a) Para que la fracción sea negativa, el numerador y el denominador deben tener distinto signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

$x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$x-1$	–	–	+
x	–	+	+
$\frac{x-1}{x}$	+	–	+

La solución es el intervalo (0, 1]. Añadimos $x = 1$ porque anula la fracción.

b) No podemos multiplicar por x porque no sabemos si cambiaría el signo de la desigualdad, por lo que agrupamos todos los términos a un lado de la desigualdad:

$$\frac{x-1}{x} - x \le 0 \rightarrow \frac{x-1-x^2}{x} \le 0 \rightarrow \frac{x^2-x+1}{x} \ge 0$$

Para que se cumpla la desigualdad, el signo del numerador y del denominador debe ser el mismo, y, además, $x \ne 0$.

Como $x^2 - x + 1$ es siempre positivo, su denominador deberá ser positivo, por lo tanto, debe ser $x > 0$.

Solución: $(0, +\infty)$

4. Ecuaciones del tipo $ax^{2n} + bx^n + c = 0$

Hazlo tú

- **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$

b) $x^{10} + 31x^5 - 32 = 0$

a) Realizamos el cambio de variable $y = x^3$:

$$y^2 - 26y - 27 = 0 \rightarrow y = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 + 4 \cdot 27}}{2}$$

$$y = \frac{26 \pm \sqrt{784}}{2} = \frac{26 \pm 28}{2} \rightarrow y_1 = 27;\ y_2 = -1$$

Si $y = 1 \rightarrow x^3 = -1 \rightarrow x_1 = -1$

Si $y = 27 \rightarrow x^3 = 27 \rightarrow x_2 = 3$

b) Realizamos el cambio de variable $y = x^5$:

$$y^2 + 31y - 32 = 0 \rightarrow y = \frac{31 \pm \sqrt{31^2 + 4 \cdot 32}}{2}$$

$$y = \frac{-31 \pm 33}{2} \rightarrow y_1 = -32;\ y_2 = 1$$

Si $y = 1 \rightarrow x^5 = 1 \rightarrow x_1 = 1$

Si $y = -32 \rightarrow x^5 = -32 \rightarrow x_2 = -2$

Página 103

5. Ecuaciones exponenciales

Hazlo tú

- **Resuelve las ecuaciones:**

a) $3^{x^2+1} = 9^x$

b) $2^{x+1} = 5$

c) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2^x + 2 = 0$

a) $3^{x^2+1} = 9^x \rightarrow 3^{x^2+1} = 3^{2x} \rightarrow x^2 + 1 = 2x \rightarrow x = 1$

b) $2^{x+1} = 5 \rightarrow x + 1 = log_2 5 \rightarrow x = log_2 5 - 1 = 1{,}3219$

c) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2^x + 2 = 0$

Hacemos el cambio de variable $2^x = y$.

$y^2 - 3y + y + 2 = 0 \rightarrow y^2 - 2y + 2 = 0$, que no tiene solución.

6. Ecuaciones logarítmicas

Hazlo tú

- **Resuelve las ecuaciones:**

a) $ln\ (2x) = 1$

b) $log_x 16 = 2$

c) $log\, 3 + log\, x = log\, 15 - log\, 5$

a) $ln\ (2x) = 1 \rightarrow ln\ (2x) = ln\ e \rightarrow 2x = e \rightarrow x = \frac{e}{2}$

b) $log_x 16 = 2 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$

Como la base de un logaritmo no puede ser negativa, la solución es $x = 4$.

c) $log\, 3 + log\, x = log\, 15 - log\, 5 \rightarrow log\, 3x = log\, 75 \rightarrow 3x = 75 \rightarrow x = 25$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 104

1. Resolución de un problema mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

- **Un peregrino que recorre el Camino de Santiago avanza a una velocidad de 3,5 km/h. Se da cuenta de que, a ese paso, llegará 1 hora más tarde de lo previsto al albergue.**

  Entonces, acelera el paso y recorre el resto del camino a 5 km/h, llegando media hora antes del tiempo fijado.

  ¿Qué distancia le faltaba por recorrer ese día hasta el albergue?

  $x \to$ distancia que falta por recorrer

  $t \to$ tiempo que tardaría si va a 3,5 km/h

  $$\left.\begin{array}{l} x = 3,5t \\ x = 5(t - 1,5) \end{array}\right\} \to t = 5, \ x = 17,5$$

  Le faltan 17,5 km por recorrer.

2. Resolución de un problema mediante un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

- **Un corredor sube las cuestas a 8 km/h, las baja a 16 km/h y marcha en llano a 11,5 km/h.**

  En su última maratón tardó 3 horas y media, y si el recorrido hubiese sido en sentido inverso, su tiempo habría sido de 4 horas y cuarto. Sabiendo que una maratón tiene un recorrido de 42 km, ¿cuál fue la longitud del recorrido llano en esta maratón?

  $x \to$ tramos de subida en la maratón original

  $y \to$ parte llana en la maratón original

  $z \to$ tramos de bajada en la maratón original

  $$\begin{cases} x + y + z = 42 \\ \dfrac{x}{8} + \dfrac{y}{11,5} + \dfrac{z}{16} = 3,5 \\ \dfrac{x}{16} + \dfrac{y}{11,5} + \dfrac{z}{8} = 4,25 \end{cases} \qquad \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 42 \\ 23x + 16y + 11,5z = 644 \\ 11,5x + 16y + 23z = 782 \end{array}\right. \begin{array}{l} (1.^{a}) \\ (2.^{a}) \\ (3.^{a}) - (2.^{a}) \end{array} \to$$

  $$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 42 \\ 23x + 16y + 11,5z = 644 \\ -11,5x + 11,5z = 138 \end{array}\right. \begin{array}{l} (1.^{a}) \\ (2.^{a}) \\ (3.^{a}) / 11,5 \end{array} \to \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 42 \\ 23x + 16y + 11,5z = 644 \\ -x + z = 12 \end{array}\right. \begin{array}{l} (1.^{a}) \\ (2.^{a}) - 16 \cdot (1.^{a}) \\ (3.^{a}) \end{array} \to$$

  $$\begin{cases} x + y + z = 42 \\ 7x - 4,5z = -28 \\ -x + z = 12 \end{cases} \qquad \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 42 \\ 2,5z = 56 \\ -x + z = 12 \end{array}\right. \begin{array}{l} (2.^{a}) \\ (3.^{a}) \\ (1.^{a}) \end{array} \to \begin{cases} z = 22,4 \\ x = 10,4 \\ y = 9,2 \end{cases}$$

  Hay 9,2 km de recorrido llano.

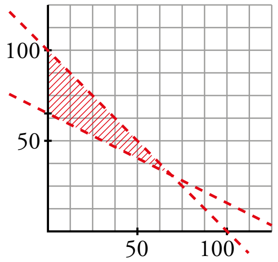
3. Resolución de un problema mediante un sistema de inecuaciones

- **A una exposición asisten menos de 100 personas y se recaudan más de 260 € con entradas de 2 € y de 4 €. ¿Cuántas entradas de cada tipo han podido ser vendidas?**

$x \rightarrow$ número de entradas vendidas de 2 €

$y \rightarrow$ número de entradas vendidas de 4 €

$$\begin{cases} x + y < 100 \\ 2x + 4y > 260 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Cualquier punto de coordenadas enteras del recinto intersección es una solución. Los puntos de las rectas $x + y = 100$ y $2x + 4y = 260$ no forman parte de la solución.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (E.A. todos los tratados en la unidad)

Página 105

Para practicar

Factorización

1 **[Este tipo de trabajo con parámetros requiere que el alumnado trabaje la iniciativa (dimensión productiva de esta clave)].**

Averigua el valor del parámetro m para que el polinomio $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2x + m$ tenga como factor $x - 4$.

Buscamos las raíces enteras del polinomio, de manera que sea factor, o lo que es lo mismo, que 4 sea solución del polinomio:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -9 & 2 & m \\ 4 & & 8 & -4 & -8 \\ \hline & 2 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

Para que 4 sea solución se tendrá que cumplir que $m - 8 = 0 \ \to \ m = 8$

2 **Factoriza cada polinomio y señala sus raíces.**

a) $2x^2 - 8x - 10$

b) $4x^2 - 9$

c) $x^3 + x^2 - 5x - 5$

d) $x^4 + x^2 - 20$

e) $2x^6 - 14x^4 + 12x^3$

f) $6x^3 + 7x^2 - x - 2$

g) $x^5 - 16x$

h) $2x^4 - 2x^3 - 18x^2 + 18x$

a) $2x^2 - 8x - 10 = 2(x^2 - 4x - 5) = 2(x - 5)(x + 1)$

$x^2 - 4x - 5 = 0 \ \to \ x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 5}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$ Raíces: $x_1 = 5,\ x_2 = -1$

b) $4x^2 - 9 = 4 \cdot \left(x - \dfrac{3}{2}\right)\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$

$4x^2 - 9 = 0 \ \to \ 4x^2 = 9 \ \to \ x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \pm\dfrac{3}{2}$ Raíces: $x_1 = \dfrac{3}{2},\ x_2 = -\dfrac{3}{2}$

c) $x^3 + x^2 - 5x - 5 = (x + 1)(x^2 - 5) = (x + 1)\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right)$ Raíces: $x_1 = -1,\ x_2 = \sqrt{5},\ x_3 = -\sqrt{5}$

d) $x^4 + x^2 - 20 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 5)$ Raíces: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

e) $2x^6 - 14x^4 + 12x^3 = 2x^3(x + 3)(x - 1)(x - 2)$ Raíces: $x_1 = 0,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$

f) $6x^3 + 7x^2 - x - 2 = (3x + 2)(2x - 1)(x + 1)$ Raíces: $x_1 = -\dfrac{2}{3};\ x_2 = \dfrac{1}{2};\ x_3 = -1$

g) $x^5 - 16x = x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$ Raíces: $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$

h) $2x^4 - 2x^3 - 18x^2 + 18x = 2x(x - 1)(x + 3)(x - 3)$ Raíces: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3,\ x_4 = 3$

3 Factoriza estos polinomios y encuentra sus raíces:

a) $9x^4 - x^2$

b) $4x^2 - 28x + 49$

c) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

d) $2x^3 - x^2 - x$

e) $x^4 - 13x^2 + 36$

f) $x^4 + 2x^2 + 1$

a) $9x^4 - x^2 = x^2(9x^2 - 1) = x^2(3x - 1)(3x + 1)$

Raíces: $x = 0,\ x = \frac{1}{3},\ x = -\frac{1}{3}$

b) $4x^2 - 28x + 49 = (2x - 7)^2$

Raíz: $x = \frac{7}{2}$

c)
$$\begin{array}{r|l} x^3 + 9x^2 + 27x + 27 & x + 3 \\ x^2 + 6x + 9 & x + 3 \\ x + 3 & x + 3 \\ 1 & \end{array}$$

$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x + 3)^3$

Raíz: $x = -3$

d)
$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - x & x \\ 2x^2 - x - 1 & x - 1 \\ 2x + 1 & 2x + 1 \\ 1 & \end{array}$$

$2x^3 - x^2 - x = x(x - 1)(2x + 1)$

Raíces: $x = 0,\ x = 1,\ x = -\frac{1}{2}$

e)
$$\begin{array}{r|l} x^4 - 13x^2 + 36 & x - 2 \\ x^3 + 2x^2 - 9x - 18 & x + 2 \\ x^2 - 9 & x - 3 \\ x + 3 & x + 3 \\ 1 & \end{array}$$

$x^4 - 13x^2 + 36 = (x - 2)(x - 3)(x + 3)(x + 2)$

Raíces: $x = 2,\ x = -2,\ x = 3,\ x = -3$

f) $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$

Es un producto notable. No tiene raíces porque $x^2 + 1$ no se puede descomponer.

4 **Saca factor común y usa las identidades notables para factorizar.**

a) $x^7 - 4x^5$ **b)** $9x^4 - 6x^3 + x^2$

c) $2x^3 - 18x$ **d)** $12x^3 + 36x^2 + 27x$

e) $98x^3 - 56x^4 + 8x^5$ **f)** $6x^9 - 54x$

g) $25x^{15} - 15x^8 + \frac{1}{4}x$ **h)** $\frac{x^6}{4} - x^4 + x^2$

a) $x^7 - 4x^5 = x^5(x-2)(x+2)$

b) $9x^4 - 6x^3 + x^2 = x^2(3x-1)^2$

c) $2x^3 - 18x = 2x(x-3)(x+3)$

d) $12x^3 + 36x^2 + 27x = 3x(2x+3)^2$

e) $98x^3 - 56x^4 + 8x^5 = 2x^3(2x-7)^2$

f) $6x^9 - 54x = 6x(x^4-3)(x^4+3)$

g) $25x^{15} - 15x^8 + \frac{1}{4}x = \frac{1}{4}x(100x^{14} - 60x^7 + 1)$

h) $\frac{x^6}{4} - x^4 + x^2 = \frac{1}{4}x^2(x^2-2)^2$

5 **Descompón los siguientes polinomios:**

a) $x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 11x + 30$

b) $3x^4 - 15x^3 + 24x^2 - 12x$

a)

	1	–4	–10	26	11	30
2		2	–4	–28	–4	–30
	1	–2	–14	–2	–15	0
–3		–3	15	–3	15	
	1	–5	1	–5	0	
5		5	0	5		
	1	0	1	0		

La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución, por tanto:

$x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 11x + 30 = (x-2)(x+3)(x-5)(x^2+1)$

b) $3x^4 - 15x^3 + 24x^2 - 12x = 3x(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$

	1	–5	8	–4
1		1	–4	4
	1	–4	4	0

Nos queda por factorizar: $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$:

$3x^4 - 15x^3 + 24x^2 - 12x = 3x(x-1)(x-2)^2$

6 **Halla, en cada uno de estos casos, el máx.c.d. [$A(x)$, $B(x)$] y el mín.c.m. [$A(x)$, $B(x)$]:**

a) $A(x) = x^2 + x - 12$; $B(x) = x^3 - 9x$

b) $A(x) = x^3 + x^2 - x - 1$; $B(x) = x^3 - x$

c) $A(x) = x^6 - x^2$; $B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

a) $B(x) = x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x-3)(x+3)$

$A(x) = (x-3)(x+4)$

máx. c. d. $[A(x), B(x)] = x - 3$

mín. c. m. $[A(x), B(x)] = x(x-3)(x+3)(x+4)$

b) $B(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$

$A(x)=(x-1)(x+1)^2$

máx. c. d. $[A(x), B(x)] = (x-1)(x+1)$

mín. c. m. $[A(x), B(x)] = x(x-1)(x+1)^2$

c) $A(x) = x^6 - x^2 = x^2(x^4 - 1) = x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^2(x-1)(x+1)(x^2+1)$

$B(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$

máx. c. d. $[A(x), B(x)] = (x-1)(x^2+1)$

mín. c. m. $[A(x), B(x)] = x^2(x-1)(x+1)(x^2+1)$

7 **[A partir de las soluciones, el alumnado debe encontrar el polinomio, trabajando así la innovación (dimensión productiva de esta clave)].**

Escribe un polinomio que tenga como raíces...:

a) **1, 2, –3, –2**

b) **0, –4, –1 (doble)**

a) $P(x) = (x-1)(x-2)(x+2)(x+3) = (x-1)(x+3)(x^2-4) = = (x^2+2x-3)(x^2-4) =$

$= x^4 - 4x^2 + 2x^3 - 8x - 3x^2 + 12 = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

b) $Q(x) = x(x+1)^2(x+4) = (x^2+2x+1)(x^2+4x) = x^4 + 4x^3 + 2x^3 + 8x^2 + x^2 + 4x =$

$= x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 4x$

Fracciones algebraicas

8 **Descompón en factores y simplifica las siguientes fracciones:**

a) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

a) $\dfrac{x+1}{x^2-1} = \dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{x-1}$

b) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2} = \dfrac{x-2}{x+2}$

9 **Simplifica las siguientes fracciones:**

a) $\dfrac{x^4-x^2}{x^5+3x^4+2x^3}$ **b)** $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}$

c) $\dfrac{-x^3-4x^2+11x+30}{x^2+2x-15}$ **d)** $\dfrac{x^4-4x^2}{x^3+4x^2+4x}$

a) $\dfrac{x^4-x^2}{x^5+3x^4+2x^3}=\dfrac{x^2(x-1)(x+1)}{x^3(x+2)(x+1)}=\dfrac{1}{x}\,\dfrac{x-1}{x+2}$

b) $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}=\dfrac{(x+2)^3}{(x+2)^2}=x+2$

c) $\dfrac{-x^3-4x^2+11x+30}{x+2x-15}=\dfrac{-(x+5)(x-3)(x+2)}{(x+5)(x-3)}=-x-2$

d) $\dfrac{x^4-4x^2}{x^3+4x^2+4x}=\dfrac{x^2(x-2)(x+2)}{x(x+2)^2}=x\dfrac{x-2}{x+2}$

10 **Reduce al mínimo común denominador y realiza las siguientes operaciones:**

a) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{x-2}{x^2-1}$

b) $\dfrac{1-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-2}-\dfrac{x^2+5x-10}{x^2+x-6}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}-\dfrac{2x-3}{x-1}+3$

a) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{x-2}{x^2-1}=\dfrac{(x+1)^2-3(x-1)+(x-2)}{x^2-1}=\dfrac{x^2+2x+1-3x+3+x-2}{x^2-1}=\dfrac{x^2+2}{x^2-1}$

b) $\dfrac{1-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-2}-\dfrac{x^2+5x-10}{x^2+x-6}=\dfrac{(1-x)(x-2)+2x(x+3)-(x^2+5x-10)}{(x+3)(x-2)}=$

$=\dfrac{-x^2+3x-2+2x^2+6x-x^2-5x+10}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{4x+8}{x^2+x-6}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}-\dfrac{2x-3}{x-1}+3=\dfrac{x^2(x-1)-(2x-3)(x+1)^2+3(x+1)^2(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}=$

$=\dfrac{x^3-x^2-(2x-3)(x^2+2x+1)+3(x^2+2x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}=$

$=\dfrac{x^3-x^2-2x^3-4x^2-2x+3x^2+6x+3+3x^3-3x^2+6x^2-6x+3x-3}{(x+1)^2(x-1)}=\dfrac{2x^3+x^2+x}{(x+1)^2(x-1)}$

11 **Opera y simplifica.**

a) $\dfrac{3}{x}:\dfrac{x-3}{x}$ **b)** $\dfrac{x+1}{3}\cdot\dfrac{15}{x^2-1}$ **c)** $\left(\dfrac{x^3}{6}\right)^2\cdot\left(\dfrac{3}{x}\right)^2$ **d)** $\dfrac{x-2}{x}:\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2$

a) $\dfrac{3}{x}:\dfrac{x-3}{x}=\dfrac{3x}{x(x-3)}=\dfrac{3}{x-3}$

b) $\dfrac{x+1}{3}\cdot\dfrac{15}{x^2-1}=\dfrac{15(x+1)}{3(x-1)(x+1)}=\dfrac{5}{x-1}$

c) $\left(\dfrac{x^3}{6}\right)^2\cdot\left(\dfrac{3}{x}\right)^3=\dfrac{x^6}{36}\cdot\dfrac{27}{x^3}=\dfrac{27x^6}{36x^3}=\dfrac{3x^3}{4}$

d) $\dfrac{x-2}{x}:\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2=\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{-1}=\dfrac{x}{x-2}$

12 **Opera y simplifica.**

a) $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}\right):\frac{x}{x+1}$

b) $\left[\left(1-\frac{1}{x}\right):\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]:(x^2-1)$

c) $\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right):\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$

d) $\left[\left(x+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)$

e) $\left(\frac{x-2}{x-3}-\frac{x-3}{x-2}\right):\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}\right)$

a) $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}\right):\frac{x}{x+1}=\frac{x+1-2x}{x^2-1}:\frac{x}{x+1}=\frac{-x+1}{x^2-1}:\frac{x}{x+1}=$

$=\frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}:\frac{x}{x+1}=\frac{-1}{x+1}:\frac{x}{x+1}=\frac{-(x+1)}{x(x+1)}=\frac{-1}{x}$

b) $\left[\left(1-\frac{1}{x}\right):\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]:(x^2-1)=\left[\frac{x-1}{x}:\frac{x+1}{x}\right]:(x^2-1)=\frac{x(x-1)}{x(x+1)}:(x^2-1)=$

$=\frac{x-1}{x+1}:(x^2-1)=\frac{x-1}{(x+1)(x^2-1)}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)(x+1)}=\frac{1}{(x+1)^2}$

c) $\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right):\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)=\frac{x-1-x-1}{x^2-1}:\frac{x+1+x-1}{x^2-1}=\frac{-2}{x^2-1}:\frac{2x}{x^2-1}=\frac{-2(x^2-1)}{2x(x^2-1)}=\frac{-1}{x}$

d) $\left[\left(x+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)\right](x-1)=\left[\frac{x^2+1}{x}:\frac{x^2-1}{x}\right](x-1)=\frac{x(x^2+1)}{x(x^2-1)}\cdot(x-1)=\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}\cdot(x-1)=\frac{x^2+1}{x+1}$

e) $\left(\frac{x-2}{x-3}-\frac{x-3}{x-2}\right):\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}\right)=\frac{x^2-4x+4-(x^2-6x+9)}{(x-3)(x-2)}:\frac{x-2+x+3}{(x-3)(x-2)}=\frac{2x-5}{(x-3)(x-2)}:\frac{2x-5}{(x-3)(x-2)}=1$

Ecuaciones polinómicas

13 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(3x+1)(2x-3)-(x-3)(6x+4)=9x$

b) $\frac{x^2-1}{4}-\frac{2}{3}(x+1)=\frac{(2x-3)^2-(13x-5)}{16}$

c) $\frac{1}{6}[(13-2x)-2(x-3)^2]=-\frac{1}{3}(x+1)^2$

d) $\frac{x^2-1}{3}+(x-2)^2=\frac{x^2+2}{2}$

e) $0{,}5(x-1)^2-0{,}25(x+1)^2=4-x$

f) $(0{,}5x-1)(0{,}5x+1)=(x+1)^2-9$

a) $6x^2-9x+2x-3-6x^2-4x+18x+12=9x$

$2x=9$

$x=\frac{9}{2}$

b) $\frac{x^2-1}{4}-\frac{(2x+2)}{3}=\frac{4x^2+9-12x-13x+5}{16}$

$12x^2-12-32x-32=12x^2+27-36x-39x+15$

$-44-32x=42-75x$

$43x=86$

$x=2$

c) $\frac{1}{6}(13-2x-2x^2-18+12x)=-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}$

$\frac{1}{6}(-2x^2+10x-5)=-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}$

$-\frac{2x^2}{6}+\frac{10x}{6}-\frac{5}{6}=-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}$

$-2x^2+10x-5=-2x^2-2-4x$

$14x=3$

$x=\frac{3}{14}$

d) $2x^2-2+6x^2+24-24x=3x^2+6$

$5x^2-24x+16=0$

$x=\frac{24\pm\sqrt{576-320}}{10}$

$x=\frac{24\pm 16}{10} \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=4/5 \end{cases}$

e) $\frac{1}{2}(x^2+1-2x)-\frac{1}{4}(x^2+1+2x)=4-x$

$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}-x-\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}-\frac{x}{2}=4-x$

$2x^2+2-4x-x^2-1-2x=16-4x$

$x^2-2x-15=0$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2} \begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-3 \end{cases}$

f) $\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{2}+1\right)=x^2+1+2x-9$

$\frac{x^2}{4}-1=x^2+1+2x-9$

$x^2-4=4x^2+4+8x-36$

$0=3x^2+8x-28$

$x=\frac{-8\pm\sqrt{64+336}}{6} \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-14/3 \end{cases}$

14 **Resuelve estas ecuaciones incompletas de segundo grado sin aplicar la fórmula general:**

a) $(x+1)^2-(x-2)^2=(x+3)^2+x^2-20$

b) $\frac{x^2-2x+5}{2}-\frac{x^2+3x}{4}=\frac{x^2-4x+15}{6}$

c) $\frac{3x+1}{3}-\frac{5x^2+3}{2}=\frac{x^2-1}{2}-\frac{x+2}{3}$

d) $\frac{3x^2-1}{4}+\frac{1}{2}\left[x^2-2-\frac{1}{2}x\right]=\frac{x^2-5}{4}$

a) $x^2+1+2x-x^2-4+4x=x^2+9+6x+x^2-20$

$6x-3=2x^2+6x-11$

$8=2x^2 \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{cases}$

b) $6x^2 - 12x + 30 - 3x^2 - 9x = 2x^2 - 8x + 30$

$x^2 - 13x = 0$

$x(x - 13) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 13 \end{cases}$

c) $6x + 2 - 15x^2 - 9 = 3x^2 - 3 - 2x - 4$

$0 = 18x^2 - 8x$

$2x(9x - 4) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4/9 \end{cases}$

d) $\dfrac{3x^2 - 1}{4} + \dfrac{x^2}{2} - 1 - \dfrac{x}{4} = \dfrac{x^2 - 5}{4}$

$3x^2 - 1 + 2x^2 - 4 - x = x^2 - 5$

$4x^2 - x = 0$

$x(4x - 1) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ 4x - 1 = 0 \to x_2 = 1/4 \end{cases}$

Página 106

15 **Resuelve estas ecuaciones (una de ellas no tiene solución y otra tiene infinitas):**

a) $\dfrac{(x+1)^2}{16} - \dfrac{1+x}{2} = \dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{2+x}{4}$

b) $0{,}2x + 0{,}6 - 0{,}25(x - 1)^2 = 1{,}25x - (0{,}5x + 2)^2$

c) $(5x - 3)^2 - 5x(4x - 5) = 5x(x - 1)$

d) $\dfrac{2x+1}{7} - \dfrac{(x+1)(x-2)}{2} = \dfrac{x-2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{2}$

a) $x^2 + 1 + 2x - 8 - 8x = x^2 + 1 - 2x - 8 - 4x$

$0 = 0$

Tiene infinitas soluciones.

b) $\dfrac{x}{5} + \dfrac{3}{5} - \dfrac{(x^2 + 1 - 2x)}{4} = \dfrac{5x}{4} - \dfrac{x^2}{4} - 4 - 2x$

$4x + 12 - 5x^2 - 5 + 10x = 25x - 5x^2 - 80 - 40x$

$29x = -87$

$x = -\dfrac{87}{29}$

$x = -3$

c) $25x^2 + 9 - 30x - 20x^2 + 25x = 5x^2 - 5x$

$9 = 0$

No tiene solución.

d) $4x + 2 - 7x^2 + 14x - 7x + 14 = 7x - 14 - 7x^2 - 28 + 28x$

$-7x^2 + 11x + 16 = -7x^2 + 35x - 42$

$x = \dfrac{58}{24} = \dfrac{29}{12}$

16 **Resuelve las siguientes ecuaciones expresando previamente los decimales en forma de fracción:**

a) $\mathbf{0,\widehat{3}x^2 - x - 1,\widehat{3} = 0}$ **b)** $\mathbf{0,\widehat{1}x^2 - 1 = 0}$

c) $\mathbf{0,\widehat{1}x^2 - 0,\widehat{5}x = 0}$ **d)** $\mathbf{0,\widehat{1}x^2 - 1,\widehat{7} = x - 4}$

a) $\frac{1}{3}x^2 - x - \frac{4}{3} = 0 \;<\; \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{array}$

b) $\frac{1}{9}x^2 - 1 = 0 \;<\; \begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{array}$

c) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{9}x = 0 \;<\; \begin{array}{l} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{array}$

d) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{16}{9} = x - 4 \;<\; \begin{array}{l} x_1 = 5 \\ x_2 = 4 \end{array}$

17 **Resuelve y comprueba las soluciones.**

a) $\mathbf{x^4 - 5x^2 + 4 = 0}$ **b)** $\mathbf{x^4 + 3x^2 - 4 = 0}$

c) $\mathbf{x^4 + 3x^2 + 2 = 0}$ **d)** $\mathbf{x^4 - 5x^2 + 36 = 0}$

e) $\mathbf{9x^4 - 46x^2 + 5 = 0}$ **f)** $\mathbf{x^4 - 4x^2 = 0}$

g) $\mathbf{4x^4 - 17x^2 + 4 = 0}$ **h)** $\mathbf{9x^4 - x^2 = 0}$

a) $x^2 = z$

$z^2 - 5z + 4 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \;<\; \begin{array}{l} z = 4 \;<\; \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{array} \\ z = 1 \;<\; \begin{array}{l} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{array} \end{array}$$

b) $x^2 = z$

$z^2 + 3z - 4 = 0$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \;<\; \begin{array}{l} z = -4 \text{ (no vale)} \\ z = 1 \;<\; \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array} \end{array}$$

c) $x^2 = z$

$z^2 + 3z + 2 = 0$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \;<\; \begin{array}{l} z = -2 \text{ (no vale)} \\ z = -1 \text{ (no vale)} \end{array} \quad \text{(no tiene solución)}$$

d) $x^2 = z$

$z^2 - 5z + 36 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 144}}{2} \quad \text{(no tiene solución)}$$

e) $x^2 = z$

$9z^2 - 46z + 5 = 0$

$$z = \frac{46 \pm \sqrt{2\,116 - 180}}{18} \;<\; \begin{array}{l} z = \frac{90}{18} = 5 \;<\; \begin{array}{l} x_1 = \sqrt{5} \\ x_2 = -\sqrt{5} \end{array} \\ z = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \;<\; \begin{array}{l} x_3 = 1/3 \\ x_4 = -1/3 \end{array} \end{array}$$

f) $x^2(x^2-4)=0 \to x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=-2$

g) $4x^4-17x^2+4=0$

$z=x^2$

$4z^2-17z+4=0$

$$z=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{8} \begin{cases} z=4 \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{cases} \\ z=\dfrac{1}{4} \begin{cases} x_3=1/2 \\ x_4=-1/2 \end{cases} \end{cases}$$

h) $9x^4-x^2=0$

$x^2(9x^2-1)=0 \to x_1=0,\ x_2=\frac{1}{3},\ x_3=-\frac{1}{3}$

18 **Resuelve estas ecuaciones del tipo $ax^{2n}+bx^n+c=0$ haciendo el cambio de variable $y=x^n$:**

a) $x^6+16x^3+64=0$ **b) $8x^6-7x^3-1=0$**

c) $x^8-82x^4+81=0$ **d) $x^8+x^4-2=0$**

* ***Mira el ejercicio resuelto 4 de la página 102.***

a) $x^6+16x^3+64=0$

Hacemos el cambio $x^3=y$.

$y^2+16y+64=0 \to y=-8$

$x=\sqrt[3]{-8}=-2$

Solución: $x=-2$

b) $8x^6-7x^3-1=0$

Hacemos el cambio $x^3=y$.

$8y^2-7y-1=0 \to y_1=1,\ y_2=-\frac{1}{8}$

Soluciones: $x_1=\sqrt[3]{1}=1,\ x_2=\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$

c) $x^8-82x^4+81=0$

Hacemos el cambio $x^4=y$.

$y^2-82y+81=0 \to y_1=81,\ y_2=1$

$x=\pm\sqrt[4]{81},\ x=\pm\sqrt[4]{1}$

Soluciones: $x_1=3,\ x_2=-3,\ x_3=1,\ x_4=-1$

d) $x^8+x^4-2=0$

Hacemos el cambio $x^4=y$.

$y^2+y-2=0 \to y_1=1,\ y_2=-2$

$x=\pm\sqrt[4]{1}$

Soluciones: $x_1=1,\ x_2=-1$

19 Resuelve estas ecuaciones:

a) $6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$ **b)** $16x^5 - 8x^3 + x = 0$

c) $x^3 + 6x^2 - 7x - 60 = 0$ **d)** $x^3 - 49x = 0$

e) $x^3 + 9x^2 + 15x - 25 = 0$ **f)** $x^6 + 3x^2 = 0$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & 0 & -1 \\ -1 & & -6 & -1 & 1 \\ \hline & 6 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Por tanto, $x_1 = -1$.

Queda por resolver $6x^2 + x - 1 = 0$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} \to x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = \frac{1}{3}$$

Las soluciones son $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{3}$.

b) $16x^5 - 8x^3 + x = 0 \to x(16x^4 - 8x^2 + 1) = 0$

Por tanto, $x = 0$ es solución de la ecuación. Resolvemos ahora la ecuación bicuadrada, $16x^4 - 8x^2 + 1 = 0$.

Hacemos el cambio $y = x^2$:

$$16y^2 - 8y + 1 = 0 \to y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 16}}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \text{ (es solución doble)}$$

$$\to x = \pm\frac{1}{2},\ x = \pm -\frac{1}{2} \text{ (ambas son soluciones dobles)}$$

Las soluciones de la ecuación son, por tanto $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $x_5 = -\frac{1}{2}$.

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & -7 & -60 \\ 3 & & 3 & 27 & 60 \\ \hline & 1 & 9 & 20 & \boxed{0} \end{array}$$

Por tanto, $x_1 = 3$.

$$x^2 + 9x + 20 = 0 \to x = \frac{-9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \frac{-9 \pm 1}{2} \to x_2 = -5;\ x_3 = -4$$

Las soluciones son $x_1 = 3$, $x_2 = -5$, $x_3 = -4$.

d) $x^3 - 49x = x(x^2 - 49) = x(x-7)(x+7) = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = 7$, $x_3 = -7$

e)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 9 & 15 & -25 \\ 1 & & 1 & 10 & 25 \\ \hline & 1 & 10 & 25 & \boxed{0} \end{array}$$

Por tanto, $x_1 = 1$.

$$x^2 + 10x + 25 = 0 \to x = \frac{-10 \pm \sqrt{100-100}}{2} = \frac{-10}{2} \to x = -5 \text{ (raíz doble)}$$

Las soluciones son $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, $x_3 = -5$.

f) $x^6 - 3x^2 = 0 = x^2(x^4 - 3) \to x_1 = 0$

$x^4 - 3 = 0 \to x = \pm\sqrt[4]{3}$

$x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[4]{3}$, $x_3 = -\sqrt[4]{3}$ (soluciones dobles)

20 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(3x-6)^5=0$

b) $4x^2(x+1)^2(x-2)=0$

c) $(x+2)(x^2+1)(x^2+5)=0$

a) $(3x-6)^5=0 \rightarrow 3x-6=0 \rightarrow x=2$

b) $4x^2(x+1)^2(x-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=2$

c) $(x+2)(x^2+1)(x^2+5)=0 \rightarrow \begin{cases} x+2=0 \rightarrow x=-2 \\ x^2+1=0 \rightarrow \text{No tiene solución} \\ x^2+5=0 \rightarrow \text{No tiene solución} \end{cases}$

Solución: $x=-2$

21 **Resuelve las siguientes ecuaciones, teniendo en cuenta que todas sus soluciones son enteras:**

a) $x^3+6x^2+11x+6=0$

b) $x^3-5x^2-2x+24=0$

c) $x^4-x^3-7x^2+13x-6=0$

d) $x^4-3x^3-2x^2+12x-8=0$

a) $x^3+6x^2+11x+6=0 \rightarrow (x+3)(x+2)(x+1)=0$

Soluciones: $x_1=-3,\ x_2=-2,\ x_3=-1$

b) $x^3-5x^2-2x+24=0 \rightarrow (x-3)(x-4)(x+2)=0$

Soluciones: $x_1=3,\ x_2=4,\ x_3=-2$

c) $x^4-x^3-7x^2+13x-6=0 \rightarrow (x+3)(x-2)(x-1)^2=0$

Soluciones: $x_1=-3,\ x_2=2,\ x_3=1$

d) $x^4-3x^3-2x^2+12x-8=0 \rightarrow (x+2)(x-1)(x-2)^2=0$

Soluciones: $x_1=-2,\ x_2=1,\ x_3=2$

22 **Descompón en factores y resuelve:**

a) $x^3+x^2-6x=0$

b) $x^4-2x^3+x^2=0$

c) $x^3-9x=0$

d) $x^3+4x^2+x-6=0$

e) $2x^3-5x^2+4x=1$

f) $-x^3+13x=12$

g) $x^3-5x^2+7x=3$

h) $x^3+2x^2-4x=8$

a) $x(x-2)(x+3)=0$

$x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=-3$

b) $x^2(x-1)^2=0$

$x_1=0,\ x_2=1$

c) $x(x-3)(x+3)=0$

$x_1=0,\ x_2=3,\ x_3=-3$

d) $(x-1)(x+2)(x+3)=0$

$x_1=1,\ x_2=-2,\ x_3=-3$

e) $2(x-1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$

$x_1=1,\ x_2=1/2$

f) $-(x+4)(x-1)(x-3)=0$

$x_1=-4,\ x_2=1,\ x_3=3$

g) $(x-1)^2(x-3)=0$

$x_1=1,\ x_2=3$

h) $(x-2)(x+2)^2=0$

$x_1=2,\ x_2=-2$

Ecuaciones con radicales

23 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\sqrt{5x+6} = 3 + 2x$ **b)** $x + \sqrt{7-3x} = 1$

c) $\sqrt{2-5x} + x\sqrt{3} = 0$ **d)** $\sqrt{2x} + \sqrt{5x-6} = 4$

e) $\sqrt{3x+4} + 2x - 4 = 0$ **f)** $x - \sqrt{7-3x} = 1$

g) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+1} = 0$ **h)** $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3-x} = 0$

a) $5x + 6 = 9 + 4x^2 + 12x$

$4x^2 + 7x + 3 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{8} \quad \begin{cases} x = -3/4 \\ x = -1 \end{cases}$$

b) $7 - 3x = 1 + x^2 - 2x$

$x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \quad \begin{cases} x = 2 \ \text{(no vale)} \\ x = -3 \end{cases}$$

c) $2 - 5x = \left(-x\sqrt{3}\right)^2$

$2 - 5x = x^2 \cdot 3$

$3x^2 + 5x - 2 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = 1/3 \ \text{(no vale)} \end{cases}$$

d) $\left(\sqrt{5x-6}\right)^2 = \left(4 - \sqrt{2x}\right)^2$

$5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x}$

$\left(8\sqrt{2x}\right)^2 = (-3x + 22)^2$

$64 \cdot 2x = 9x^2 + 484 - 132x$

$128x = 9x^2 + 484 - 132x$

$0 = 9x^2 - 260x + 484$

$$x = \frac{260 \pm \sqrt{67\,600 - 17\,424}}{18} \quad \begin{cases} x = 484/18 = 242/9 \ \text{(no vale)} \\ x = 2 \end{cases}$$

e) $\left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = (4 - 2x)^2$

$3x + 4 = 16 + 4x^2 - 16x$

$4x^2 - 19x + 12 = 0$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{361-192}}{8} \quad \begin{cases} x = 4 \ \text{(no vale)} \\ x = 6/8 = 3/4 \end{cases}$$

f) $(x - 1)^2 = \left(\sqrt{7-3x}\right)^2$

$x^2 + 1 - 2x = 7 - 3x$

$x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \quad \begin{cases} x = -3 \ \text{(no vale)} \\ x = 2 \end{cases}$$

g) $\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2$

$x^2 = 1$

$x_1 = 1, \ x_2 = -1$

h) $\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2 = \left(\sqrt{3-x}\right)^2$

$x^2 + x = 0$

$x(x + 1) = 0$

$x_1 = 0, \ x_2 = -1$

24 **Resuelve.**

a) $\dfrac{\sqrt{10+x}}{3} - \dfrac{\sqrt{1-3x}}{2} = 0$ **b)** $\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{6} + \dfrac{x}{4} = x - 1$

a) $2\sqrt{10+x} = 3\sqrt{1-3x}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$4(10 + x) = 9(1 - 3x) \ \to \ x = -1$, solución válida.

b) $\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{6} - \dfrac{x}{4} = x - 1 \ \to \ 2\sqrt{x^2+5} = 3x + 12(x-1) \ \to \ 2\sqrt{x^2+5} = 15x - 12$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$4(x^2 + 5) = (15x - 12)^2 \ \to \ 4x^2 + 20 = 225x^2 - 360x + 144 \ \to \ 221x^2 - 360x + 124 = 0 \ \to$

$\to \ x_1 = \dfrac{180 + 2\sqrt{1\,249}}{221}$ (válida), $x_2 = \dfrac{180 - 2\sqrt{1\,249}}{221}$ (no válida)

Solución: $x = \dfrac{180 + 2\sqrt{1\,249}}{221}$

25 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$ **b)** $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

a) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

$\sqrt{3x} = \sqrt{x} + \sqrt{2}$

$(\sqrt{3x})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{2})^2$

$3x = x + 2\sqrt{2}\sqrt{x} + 2$

$2\sqrt{2}\sqrt{x} = 2x - 2$

$(2\sqrt{2}\sqrt{x})^2 = (2x-2)^2$

$8x = 4x^2 - 8x + 4 \ \to \ x = \sqrt{3} + 2, \ x = 2 - \sqrt{3}$ no es válida.

Solución: $x = \sqrt{3} + 2$

b) $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

$(\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x})^2 = (\sqrt{7-6x})^2 \ \to \ 2\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4} - 6x - 1 = 7 - 6x$

$2\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4} = 8 \ \to \ (\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4})^2 = 4^2 \ \to \ -7x^2 - 33x - 20 = 16$

Soluciones: $x_1 = -\dfrac{12}{7}$, $x_2 = -3$. Las dos son válidas.

26 **Resuelve aislando el radical y elevando al cubo.**

a) $\sqrt[3]{x^2-28}+3=0$ **b)** $\sqrt[3]{x+1}-2=0$

a) $\sqrt[3]{x^2-28}=-3 \;\rightarrow\; x^2-28=-27 \;\rightarrow\; x^2=1 \;\rightarrow\; x_1=1,\; x_2=-1$

b) $\sqrt[3]{x+1}-2=0 \;\rightarrow\; \sqrt[3]{x+1}=2 \;\rightarrow\; x+1=8 \;\rightarrow\; x=7$

Ecuaciones racionales

27 **Resuelve.**

a) $\dfrac{x+2}{x}+3x=\dfrac{5x+6}{2}$ **b)** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{x}{3}-1$

c) $\dfrac{600}{x}+80=\dfrac{600}{x-2}$ **d)** $\dfrac{8}{x+6}+\dfrac{12-x}{x-6}=1$

a) $2x+4+6x^2=5x^2+6x$

$x^2-4x+4=0$

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}$

$x=2$

b) $3+6+9=x^2-3x$

$x^2-3x-18=0$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+72}}{2}$ $\begin{cases} x_1=6 \\ x_2=-3 \end{cases}$

c) $600x-1\,200+80x^2-160x=600x$

$80x^2-160x-1\,200=0$

$x^2-2x-15=0$

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\dfrac{2\pm 8}{2}$ $\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-3 \end{cases}$

d) $8x-48+12x-x^2+72-6x=x^2-36$

$2x^2-14x-60=0$

$x=\dfrac{14\pm\sqrt{196+480}}{4}$ $\begin{cases} x_1=(14+26)/4=10 \\ x_2=(14-26)/4=-3 \end{cases}$

28 **Resuelve sin olvidar comprobar las soluciones:**

a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x-1}{x^2}=0$ **b)** $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2x}{2-x}=-x$

c) $\dfrac{3x-7}{x}=\dfrac{8x}{x+1}-5$ **d)** $\dfrac{x-3}{x^2-9}+\dfrac{x+1}{x+3}=x+2$

e) $\dfrac{x+7}{x+1}-\dfrac{7x+1}{x^2+2x+1}=x-4$ **f)** $\dfrac{30}{x^2+5x+6}-\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{2x+1}{x+3}$

a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x-1}{x^2}=0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por x^2.

$\dfrac{2x-1}{x^2}=0 \;\rightarrow\; 2x-1=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{1}{2}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=0$

$x = \dfrac{1}{2}$ es válida.

b) $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{2x}{2-x} = -x$

$\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{2x}{2-x} + x = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $(x-2)$.

$\dfrac{x(x-3)}{x-2} = 0 \rightarrow x(x-3) = 0$

Soluciones: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$. Son válidas.

c) $\dfrac{3x-7}{x} = \dfrac{8x}{x+1} - 5$

$\dfrac{3x-7}{x} - \dfrac{8x}{x+1} + 5 = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $x(x+1)$.

$\dfrac{(x-7)}{x(x+1)} = 0 \rightarrow x - 7 = 0 \rightarrow x = 7$ es válida.

d) $\dfrac{x-3}{x^2-9} + \dfrac{x+1}{x+3} = x + 2$

$\dfrac{x-3}{x^2-9} + \dfrac{x+1}{x+3} - x - 2 = 0$

Reducimos a común denominador, simplificamos y multiplicamos por $(x+3)$.

$\dfrac{x-3}{x^2-9} + \dfrac{x+1}{x+3} - x - 2 = -\dfrac{(x+2)^2}{x+3} = 0 \rightarrow x + 2 = 0$

Solución: $x = -2$, es válida.

e) $\dfrac{x+7}{x+1} - \dfrac{7x+1}{x^2+2x+1} = x - 4$

$\dfrac{x+7}{x+1} - \dfrac{7x+1}{x^2+2x+1} - x + 4 = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $(x+1)^2$.

$\dfrac{-x^3+3x^2+8x+10}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow -x^3 + 3x^2 + 8x + 10 = 0$

Factorizamos: $-x^3 + 3x^2 + 8x + 10 = -(x-5)(2x + x^2 + 2)$

La solución es $x = 5$, que es válida.

f) $\dfrac{30}{x^2+5x+6} - \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{2x+1}{x+3}$

$\dfrac{30}{x^2+5x+6} - \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{2x+1}{x+3} = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $x^2 + 5x + 6$.

$-\dfrac{3x^2+8x-28}{x^2+5x+6} = 0 \rightarrow 3x^2 + 8x - 28 = 0$

Soluciones: $x_1 = 2$, $x_2 = -\dfrac{14}{3}$. Son válidas.

29 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $\dfrac{10}{3}+\dfrac{5-x}{x+5}=\dfrac{x+5}{x-5}$ **b)** $\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{2x}{x+3}=\dfrac{6}{x^2-9}$

a) $10x^2-250+15x-3x^2-75+15x=3x^2+15x+15x+75$

$4x^2=400$

$x^2=100 \;\Big\langle\; \begin{array}{l} x_1=10 \\ x_2=-10 \end{array}$

b) $x(x+3)+2x(x-3)=6$

$x^2+3x+2x^2-6x=6$

$3x^2-3x-6=0$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+72}}{6} \;\Big\langle\; \begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{array}$

30 **Resuelve.**

a) $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{4}{x+4}$ **b)** $\dfrac{3}{x+3}=\dfrac{x+2}{2-x}$

c) $\dfrac{2x}{x+2}=\dfrac{3x+2}{2x}$ **d)** $\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{x}{x^2+1}$

a) $x^2+4x=4x+4 \;\rightarrow\; x^2=4 \;\Big\langle\; \begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{array}$

b) $6-3x=x^2+3x+2x+6 \;\rightarrow\; x^2+8x=0 \;\rightarrow\; x(x+8)=0 \;\Big\langle\; \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=-8 \end{array}$

c) $4x^2=3x^2+2x+6x+4 \;\rightarrow\; x^2-8x-4=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{8\pm\sqrt{64+16}}{2} \;\Big\langle\; \begin{array}{l} x_1=4+2\sqrt{5} \\ x_2=4-2\sqrt{5} \end{array}$

d) $x^2(x^2+1)=x(x+1) \;\rightarrow\; x^4+x^2-x^2-x=0 \;\rightarrow\; x^4-x=0 \;\rightarrow\; x(x^3-1)=0 \;\Big\langle\; \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=1 \end{array}$

Página 107

Ecuaciones exponenciales

31 **Resuelve expresando ambos miembros de la ecuación como potencias de la misma base:**

a) $3^{x^2+1}=\dfrac{1}{9}$ **b)** $\dfrac{9^{2x}}{3^x}=27$

c) $5\cdot 2^{x+3}=\dfrac{5}{4}$ **d)** $5^{x^2+3x}=0{,}04$

e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\dfrac{8}{27}$ **f)** $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x=81$

g) $(0{,}01)^x=100$ **h)** $3^{x+1}\cdot 2^{x+1}=36$

i) $3\cdot 9^x\cdot 27^x=1$ **j)** $5^{x-5}\cdot 125^{2x}=25$

a) $3^{x^2+1}=\dfrac{1}{9} \;\rightarrow\; 3^{x^2+1}=3^{-2} \;\rightarrow\; x^2+1=-2 \;\rightarrow\; x^2=-3 \;\rightarrow$ No tiene solución.

b) $\dfrac{9^{2x}}{3^x}=27 \;\rightarrow\; \dfrac{3^{4x}}{3^x}=3^3 \;\rightarrow\; 3^{4x-x}=3^3 \;\rightarrow\; 3x=3 \;\rightarrow$ *Solución:* $x=1$

c) $5\cdot 2^{x+3}=\dfrac{5}{4} \;\rightarrow\; 5\cdot 2^{x+3}=5\cdot 2^{-2} \;\rightarrow\; x+3=-2 \;\rightarrow$ *Solución:* $x=-5$

d) $5^{x^2+3x}=0{,}04 \;\rightarrow\; 5^{x^2+3x}=\dfrac{4}{100}=\dfrac{1}{25} \;\rightarrow\; 5^{x^2+3x}=\dfrac{1}{25} \;\rightarrow\; 5^{x^2+3x}=5^{-2} \;\rightarrow\; x^2+3x=-2$

Soluciones: $x_1=-1$, $x_2=-2$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{27} \to \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \to$ *Solución:* $x = 3$

f) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81 \to \left(\frac{1}{9}\right)^x = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} \to$ *Solución:* $x = -2$

g) $(0{,}01)^x = 100 \to (0{,}01)^x = 0{,}01^{-2} \to$ *Solución:* $x = -2$

h) $3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 36 \to 3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 6^2 \to 6^{x+1} = 6^2 \to x + 1 = 2 \to$ *Solución:* $x = 1$

i) $\sqrt{2^{3x-1}} = 0{,}125 \to \sqrt{2^{3x-1}} = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} \to$

$\to \sqrt{2^{3x-1}} = \frac{1}{8} \to 2^{\frac{3x-1}{2}} = 2^{-3} \to \frac{3x-1}{2} = -3 \to$ *Solución:* $x = -\frac{5}{3}$

j) $3\sqrt[3]{27^{x-1}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+5} \to 3\sqrt[3]{3^{3(x-1)}} = \left(\frac{1}{3^2}\right)^{2x+5} \to 3^{1+\frac{3(x-1)}{3}} = 3^{-2(2x+5)} \to$

$\to 1 + \frac{3(x-1)}{3} = -2(2x+5) \to x = -2(2x+5) \to$ *Solución:* $x = -2$

k) $3 \cdot 9^x \cdot 27^x = 1 \to 3 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{3x} = 3^0 \to 3^{1+2x+3x} = 3^0 \to 1 + 5x = 0 \to$ *Solución:* $x = -\frac{1}{5}$

l) $5^{x-5} \cdot 125^{2x} = 25 \to 5^{x-5} \cdot 5^{3 \cdot 2x} = 5^2 \to 5^{x-5+6x} = 5^2 \to 7x - 5 = 2 \to$ *Solución:* $x = 1$

32 Resuelve estas ecuaciones mediante un cambio de variable:

a) $\mathbf{3^{2+x} - 3^x = 72}$

b) $\mathbf{3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 21}$

c) $\mathbf{3^x - 3^{-x} = \frac{728}{27}}$

d) $\mathbf{2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0}$

a) Hacemos el siguiente cambio de variable: $3^x = y$

$3^2y - y = 72 \to y = 9 = 3^2$

$3^x = 3^2 \to x = 2$

b) $3^x = z$; $z - \frac{z}{3} + \frac{z}{9} = 21 \to z = 27 \to x = 3$

c) $3^x = z$; $z - \frac{1}{z} = \frac{728}{27} \to z^2 - 1 = \frac{728}{27}z \to 27z^2 - 728z - 27 = 0 \to$

$\to z_1 = 27,\ z_2 = -\frac{2}{54}$ (no vale) $\to x = 3$

d) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \to (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Hacemos el cambio $y = 2^x$, con lo que obtenemos:

$$y^2 - 6x + 8 = 0 \to y = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$y = 4 \to 2^x = 4 \to 2^x = 2^2 \to x = 2$

$y = 2 \to 2^x = 2 \to 2^x = 2^1 \to x = 1$

Soluciones: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

33 **Resuelve estas ecuaciones mediante un cambio de variable:**

a) $2^x + 2^{1-x} = 3$

b) $2^{x+1} + 2^{x-1} = \frac{5}{2}$

c) $8^{1+x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$

d) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

e) $9^x - 3^x - 6 = 0$

f) $7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$

g) $2^{x/2} + 2^x = 6$

h) $\sqrt{3^{2x} + 7} = 3^x + 1$

a) $2^x + \frac{2}{2^x} = 3$

$z = 2^x \to x + \frac{2}{z} = 3;\ z^2 + 2 = 3z$

$z^2 - 3z + 2 = 0;\ z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \to 2^x = 2 \to x_1 = 1 \\ 1 \to 2^x = 1 \to x_2 = 0 \end{cases}$

b) $2 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2} = \frac{5}{2};\ 4 \cdot 2^x + 2^x = 5;\ 2^x = 1$

$x = 0$

c) $2^{3+3x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$

$8 \cdot (2^x)^3 + \frac{(2^x)^3}{2} = \frac{17}{16} \to 2^x = z \to 128z^3 + 8z^3 = 17$

$(128 + 8)(z)^3 = 17;\ (z)^3 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8} \to z = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \to 2^x = \frac{1}{2}$

$x = -1$

d) $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$2^x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 0;\ x_2 = 2$

e) $(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0;\ 3^x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \text{ (no vale)} \end{cases}$

$x = 1$

f) $7 \cdot (7^x)^2 - 50 \cdot 7^x + 7 = 0;\ 7^x = \frac{50 \pm 48}{14} = \begin{cases} 7 \\ 1/7 \end{cases}$

$x_1 = -1;\ x_2 = 1$

g) $2^{x/2} - 3 \cdot 2^x = 6 \to \sqrt{2^x} - 3 \cdot 2^x = 6$

Hacemos el cambio de variable $2^x = y$:

$\sqrt{y} - 3 \cdot y = 6 \to \sqrt{y} = 3 \cdot y + 6 \to (\sqrt{y})^2 = (3y + 6)^2 \to y = 9y^2 + 36y + 36 \to$

$\to 9y^2 + 35y + 36 = 0 \to y = \frac{-35 \pm \sqrt{-71}}{18}$

No tiene solución.

h) $\sqrt{3^{2x} + 7} = 3^x + 1$

Hacemos el cambio de variable $3^x = y$:

$\sqrt{y^2 + 7} = y + 1 \to (\sqrt{y^2 + 7})^2 = (y + 1)^2 \to y^2 + 7 = y^2 + 2y + 1 \to 7 = 2y + 1 \to y = 3$

Solución: $x = 1$

34 Halla la solución de las siguientes ecuaciones tomando logaritmos en cada miembro:

a) $7^x = 20$ **b)** $1{,}2^x = 10$

a) $7^x = 20 \to x = log_7 20$ b) $1{,}2^x = 10 \to x = log_{1,2} 10$

35 Resuelve, tomando logaritmos, estas ecuaciones:

a) $\dfrac{1}{e^x} = 27$ **b)** $e^{x-9} = \sqrt{73}$

c) $2^x \cdot 3^x = 81$ **d)** $\dfrac{2^x}{3^{x+1}} = 1$

e) $2^{x+1} \cdot 16^{2x+1} = 3$ **f)** $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x \cdot 125^{x+1} = 4$

a) $\dfrac{1}{e^x} = 27 \to \dfrac{1}{27} = e^x \to ln\,\dfrac{1}{27} = ln\, e^x \to x = ln\,\dfrac{1}{27} = ln\,1 - ln\,27 = 0 - ln\,27 \to x \approx -3{,}296$

b) $e^{x-9} = \sqrt{73} \to ln\, e^{x-9} = ln\sqrt{73} \to x - 9 = \dfrac{1}{2} ln\,73 \to x = 9 + \dfrac{ln\,73}{2} \to x \approx 11{,}145$

c) $6^x = 81 \to x\, log\, 6 = log\, 81 \to x = \dfrac{log\, 81}{log\, 6} \approx 2{,}453$

d) $\dfrac{2^x}{3^x \cdot 3} = 1 \to \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 3 \to x\, log\, \dfrac{2}{3} = log\, 3 \to x = \dfrac{log\, 3}{log\, 2 - log\, 3} \approx -2{,}710$

e) $2^{x+1} \cdot 16^{2x+1} = 3 \to 2^{x+1} \cdot 2^{4(2x+1)} = 3 \to 2^{9x+5} = 3 \to log\, 2^{9x+5} = log\, 3 \to$

$\to (9x+5)\, log\, 2 = log\, 3 \to (9x+5) = \dfrac{log\, 3}{log\, 2} = 1{,}5850$

Solución: $x = \dfrac{1{,}5850 - 5}{9} = -0{,}3794$

f) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x \cdot 125^{x+1} = 4 \to 5^{-x} \cdot 5^{3x+3} = 4 \to 5^{2x+3} = 4 \to log\, 5^{2x+3} = log\, 4 \to$

$\to (2x+3)\, log\, 5 = log\, 4 \to (2x+3) = \dfrac{log\, 4}{log\, 5} = 0{,}8613$

Solución: $x = \dfrac{0{,}8613 - 3}{2} = -1{,}0693$

Ecuaciones logarítmicas

36 Resuelve aplicando la definición de logaritmo.

a) $lox_x\, 25 = 2$ **b)** $log\, x = -1$

c) $lox_x\, 27 = 3$ **d)** $lox_2\, x = 3$

a) Como la base tiene que ser positiva, $x = 5$.

b) $log\, x = -1 \to 10^{-1} = x \to x = \dfrac{1}{10}$

c) $log_x\, 27 = 3 \to x^3 = 27 \to x = 3$

d) $log_2\, x = -3 \to 2^{-3} = x \to x = \dfrac{1}{8}$

37 **Halla la solución de las siguientes ecuaciones:**

a) $\boldsymbol{log\, x = log\, 9 + log\, 2}$ **b)** $\boldsymbol{ln\, x = 2\, ln\, 10}$

c) $\boldsymbol{\frac{1}{2} log\, (x + 1) = log\, 3}$ **d)** $\boldsymbol{\frac{1}{3} log_2\, x = -3}$

a) $log\, x = log\, 9 + log\, 2 \;\rightarrow\; log\, x = log\, (9 \cdot 2) \;\rightarrow\; x = 18$

b) $ln\, x = 2ln\, 10 \;\rightarrow\; ln\, x = ln\, 10^2 \;\rightarrow\; x = 100$

c) $\frac{1}{2} log\, (x+1) = log\, 3 \;\rightarrow\; log\, \sqrt{(x+1)} = log\, 3 \;\rightarrow\; \sqrt{(x+1)} = 3 \;\rightarrow\; x+1 = 9 \;\rightarrow\; x = 8$

d) $\frac{1}{3} log_2\, x = -3 \;\rightarrow\; log_2 \sqrt[3]{x} = log_2\, 2^{-3} \;\rightarrow\; \sqrt[3]{x} = 2^{-3} \;\rightarrow\; x = 2^{-9} \;\rightarrow\; x = \frac{1}{512}$

38 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\boldsymbol{log\, (x^2 + 1) - log\, (x^2 - 1) = log\, \frac{13}{12}}$

b) $\boldsymbol{ln\, (x - 3) + ln\, (x + 1) = ln\, 3 + ln\, (x - 1)}$

a) $log\, \frac{x^2+1}{x^2-1} = log\, \frac{13}{12}$

$12x^2 + 12 = 13x^2 - 13;\; 25 = x^2$

$x_1 = -5;\; x_2 = 5$

b) $ln\, (x^2 - 2x - 3) = ln\, (3x - 3)$

$x^2 - 2x - 3 = 3x - 3;\; x^2 - 5x = 0$

$x = 5 \;\; (x = 0$ no vale)

Sistemas de ecuaciones

39 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{2x - 11y = -11} \\ \boldsymbol{23x + y = 1} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \boldsymbol{3x + 5 = 2y + 1} \\ \boldsymbol{x - 9 = 1 - 5y} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \boldsymbol{\frac{x+1}{3} + y = 1} \\ \boldsymbol{\frac{x-3}{4} + 2y = 1} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \boldsymbol{\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 4} \\ \boldsymbol{\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2} \end{cases}$

a) $y = 1 - 23x$

$2x - 11 + 253x = -11$

$0 = 255x$

$x = 0,\;\; y = 1$

b) $x = 10 - 5y$

$30 - 15y + 5 = 2y + 1$

$34 = 17y \;\rightarrow\; y = 2$

$x = 0,\;\; y = 2$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 1 + 3y = 3 \\ x - 3 + 8y = 4 \end{array}\right\} \;\; \left.\begin{array}{r} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{array}\right\}$

$x = 2 - 3y$

$2 - 3y + 8y = 7 \;\rightarrow\; 5y = 5 \;\rightarrow\; y = 1$

$x = -1,\;\; y = 1$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 24 \\ 2x - \ \ y = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{r} -2x + 3y = -24 \\ 2x - \ \ y = 8 \\ \hline 2y = -16 \end{array} \to y = -8$

$x = 0, \ y = -8$

40 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} x \cdot y = 15 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

a) $x = \dfrac{5y}{3}$

$\dfrac{5y^2}{2} = 15 \to y^2 = 9 \begin{cases} y = 3 \to x = 5 \\ y = -3 \to x = -5 \end{cases}$

$x_1 = 5, \ y_1 = 3; \ x_2 = -5, \ y_2 = -3$

b) $\left.\begin{array}{l} 6y + 6x = 5xy \\ y = \dfrac{2 - 2x}{3} \end{array}\right\}$

$4 - 4x + 6x = \dfrac{5x(2 - 2x)}{3}$

$6x + 12 = 10x - 10x^2$

$10x^2 - 4x + 12 = 0 \to 5x^2 - 2x + 6 = 0 \to$ No tiene solución.

41 **Resuelve por sustitución los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} x - y = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x^2 + 1)\,y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 6 + y \\ (6 + y)^2 + y^2 = 20 \to 2y^2 + 12y + 36 = 20 \to y_1 = -2, \ y_2 = -4 \end{array}$

$\begin{cases} y_1 = -2 \to x_1 = 4 \\ y_2 = -4 \to x_2 = 2 \end{cases}$

$x_1 = 4, \ y_1 = -2; \ x_2 = 2, \ y_2 = -4$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 - y \\ (2 - y)\,y = 1 \to 2y - y^2 - 1 = 0 \to y = 1 \to x = 1 \end{array}$

$x = 1, \ y = 1$

c) $\left.\begin{array}{l} (x^2 + 1)\,y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 4x \\ (x^2 + 1)\,(4x)^2 = 5 \to 16x^4 + 16x^2 - 5 = 0 \to x_1 = \dfrac{1}{2}, \ x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{array}$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \to y_1 = 2 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \to y_2 = -2 \end{cases}$

$x_1 = \dfrac{1}{2}, \ y_1 = 2; \ x_2 = -\dfrac{1}{2}, \ y_2 = -2$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \;\rightarrow\; \left(\dfrac{6}{y}\right)^2 - y^2 = 5 \;\rightarrow\; -\dfrac{y^4 - 36}{y^2} - 5 = 0 \;\rightarrow\; -\dfrac{(y^4 + 5y^2 - 36)}{y^2} = 0 \;\rightarrow \\ xy = 6 \;\rightarrow\; x = \dfrac{6}{y} \end{cases}$

$\rightarrow\; y^4 + 5y^2 - 36 = 0 \;\rightarrow\; y_1 = 2,\; y_2 = -2$

$y_1 = 2,\; x_1 = 3;\; y_2 = -2,\; x_2 = -3$

42 Resuelve por reducción:

a) $\begin{cases} \mathbf{3x^2 - 5y^2 = 30} \\ \mathbf{x^2 - 2y^2 = 7} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{x^2 + y^2 + xy = \dfrac{3}{4}} \\ \mathbf{x^2 - y^2 - xy = -\dfrac{1}{4}} \end{cases}$

a) $3x^2 - 5y^2 = 30$

$-3x^2 + 6y^2 = -21$

$y^2 = 9 \;\rightarrow\; y = \pm 3$

$x^2 = 25 \;\rightarrow\; x = \pm 5$

$x_1 = 5,\; y_1 = 3;\; x_2 = -5,\; y_2 = 3;\; x_3 = 5,\; y_3 = -3;\; x_4 = -5,\; y_4 = -3$

b) $x^2 + y^2 + xy = \dfrac{3}{4}$

$x^2 - y^2 - xy = -\dfrac{1}{4}$

$2x^2 = \dfrac{2}{4} \;\rightarrow\; x = \pm\dfrac{1}{2}$

- Si $x = \dfrac{1}{2}$:

$\dfrac{1}{4} + y^2 + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{3}{4}$

$1 + 4y^2 + 2y = 3$

$4y^2 + 2y - 2 = 0$

$2y^2 + y - 1 = 0$

$y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$

- Si $x = -\dfrac{1}{2}$:

$\dfrac{1}{4} + y^2 - \dfrac{1}{2}y = \dfrac{3}{4}$

$1 + 4y^2 - 2y = 3$

$4y^2 - 2y - 2 = 0$

$2y^2 - y - 1 = 0$

$y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$

$x_1 = \dfrac{1}{2},\; y_1 = -1;\; x_2 = \dfrac{1}{2},\; y_2 = \dfrac{1}{2};\; x_3 = -\dfrac{1}{2},\; y_3 = 1;\; x_4 = -\dfrac{1}{2},\; y_4 = -\dfrac{1}{2}$

43 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+1} + \dfrac{y+3}{y+1} = 3 \\ x(x-2) = y(1-y) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ xy = 28 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x+y)(x-y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2xy + 2x - y - 1 + xy + 3x + y + 3 = 3(xy + x + y + 1) \\ x^2 - 2x = y - y^2 \end{array}\right\}$

$3xy + 5x + 2 = 3xy + 3x + 3y + 3 \;\to\; 2x - 3y = 1 \;\to\; x = \dfrac{1+3y}{2}$

$\dfrac{1 + 9y^2 + 6y}{4} - 1 - 3y = y - y^2 \;\to\; 1 + 9y^2 + 6y - 4 - 12y = 4y - 4y^2 \;\to$

$\to\; 13y^2 - 10y - 3 = 0 \;\to\; y = \dfrac{10 \pm \sqrt{100+156}}{26} = \dfrac{10 \pm 16}{26} = \begin{cases} 1 \\ -3/13 \end{cases}$

$x_1 = 2,\; y_1 = 1;\; x_2 = \dfrac{2}{13},\; y_2 = -\dfrac{3}{13}$

b) $x = \dfrac{28}{y}$

$\left(\dfrac{28}{y}\right)^2 + y^2 = 65 \;\to\; 784 + y^4 = 65y^2 \;\to\; y^4 - 65y^2 + 784 = 0$

$y^2 = z \;\to\; z = \dfrac{65 \pm 33}{2} = \begin{cases} 49 \;\to\; y = \pm 7 \\ 16 \;\to\; y = \pm 4 \end{cases}$

$x_1 = 7,\; y_1 = 4;\; x_2 = -7,\; y_2 = -4;\; x_3 = 4,\; y_3 = 7;\; x_4 = -4,\; y_4 = -7$

c) $2x^2 - 10x + 12 = 0 \;\to\; x^2 - 5x + 6 = 0 \;\to\; x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$$\begin{array}{rrrrrl} x^2 + & y^2 - & 5x - & 5y + & 10 & = 0 \\ -x^2 + & y^2 + & 5x - & 5y - & 2 & = 0 \\ \hline & 2y^2 - & & 10y + & 8 & = 0 \end{array}$$

$y^2 - 5y + 4 = 0 \;\to\; y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 3,\; y_1 = 4;\; x_2 = 3,\; y_2 = 1;\; x_3 = 2,\; y_3 = 4;\; x_4 = 2,\; y_4 = 1$

d) $\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 7 \\ x = \dfrac{4y}{3} \end{array}\right\}$

$\dfrac{16y^2}{9} - y^2 = 7 \;\to\; 16y^2 - 9y^2 = 63 \;\to\; y^2 = 9$

$x_1 = 4,\; y_1 = 3;\; x_2 = -4,\; y_2 = -3$

44 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{3(x+y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

a) $x = (5 - y)^2$

$y^2 - 2y + 1 = 25 + y^2 - 10y \to 8y = 24 \to y = 3$

$x = 4,\ y = 3$

b) $y = 2x - 6$

$\sqrt{3(3x-6)} = 12 - x$

$9x - 18 = 144 + x^2 - 24x$

$0 = x^2 - 33x + 162$

$x = \dfrac{33 \pm 21}{2} = \begin{cases} 27 \to y = 48 \text{ (no vale)} \\ 6 \to y = 6 \end{cases}$

$x = 6,\ y = 6$

45 **Resuelve por sustitución.**

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ \log x + \log y = \log 6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} x - y = 1 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{matrix}\right\}$ $x = 1 + y$
$2^{1+y} + 2^y = 6 \to 2 \cdot 2^y + 2^y = 6 \to 2^y \cdot 3 = 6 \to 2^y = 2 \to y = 1 \to x = 2$

$x = 2,\ y = 1$

b) $\left.\begin{matrix} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{matrix}\right\}$ $x = 5 - y$
$(5-y)y = 6 \to 5y - y^2 = 6 \to y^2 - 5y + 6 = 0$

$y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$x_1 = 2,\ y_1 = 3;\ x_2 = 3,\ y_2 = 2$

46 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_2 x + 3\log_2 y = 5 \\ \log_2 \dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$

a) $2\log x = 2$

$x = 10;\ y = 100$

b) $\log_2 x + 3\log_2 y = 5$

$2\log_2 x - \log_2 y = 3$

$$\begin{array}{r} \log_2 x + 3\log_2 y = 5 \\ 6\log_2 x - 3\log_2 y = 9 \\ \hline 7\log_2 x \qquad = 14 \end{array}$$

$x = 4,\ y = 2$

Página 108

Método de Gauss

47 Resuelve.

a) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x-y=2 \\ x=1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 2x-y=-1 \\ y+z=1 \\ 4x-z=7 \end{array}\right.$

a) Como ya sabemos que $x = 1$ sustituimos en la segunda ecuación y tenemos que $y = -1$. Ya podemos sustituir en la primera ecuación x e y para encontrar que $z = 3$.

b) $$\left\{\begin{array}{l} 2x-y=-1 \\ 3y+z=1 \\ 4x-z=7 \end{array}\right. \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(1.^a) \end{array} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-y=-1 \\ 3y+z=1 \\ 2y-z=9 \end{array}\right. \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+(2.^a) \end{array} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-y=-1 \\ 3y+z=1 \\ 5y=10 \end{array}\right.$$

Por tanto: $y = 2$, $z = -5$, $x = \dfrac{1}{2}$

48 Resuelve por el método de Gauss.

a) $\left\{\begin{array}{l} x-y-z=-10 \\ x+2y+z=11 \\ 2x-y+z=8 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 2x-3y+z=0 \\ 3x+6y-2z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x-y-z=1 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ x-z=6 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{l} x-y-z=-10 \\ x+2y+z=11 \\ 2x-y+z=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)+(1.^a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y-z=-10 \\ 2x+y=1 \\ 3x-2y=-2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+2\cdot(2.^a) \end{array} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x-y-z=-10 \\ 2x+y=1 \\ 7x=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \\ z=-1+10=9 \end{array}\Bigg\} \begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \\ z=9 \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 2x-3y+z=0 \\ 3x+6y-2z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)+2\cdot(1.^a) \\ (3.^a)+(1.^a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-3y+z=0 \\ 7x=0 \\ 6x-2y=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x-y+z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)+(1.^a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ 3x+2z=5 \\ 2x+2z=4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(2.^a) \end{array} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ 3x+2z=5 \\ -x=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=1 \\ z=\dfrac{5-3x}{2}=1 \\ y=3-x-z=1 \end{array}\Bigg\} \begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{array}$$

d) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ x-z=6 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+2\cdot(1.^a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ x-z=6 \\ 3x+3z=36 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a):3 \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ x-z=6 \\ x+z=12 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+(2.^a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ x-z=6 \\ 2x=18 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=9 \\ z=x-6=3 \\ y=18-x-z=6 \end{array}\Bigg\} \begin{array}{l} x=9 \\ y=6 \\ z=3 \end{array}$$

49 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} 3x+2y+z-3=0 \\ x+y=z-5 \\ x=z-2y-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x-3y+z=-11 \\ x-y+1=z \\ 2x+2y=8+z \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y-2z=9 \\ 2x-y+4z=4 \\ 2x-y+6z=-1 \end{cases}$

a)
$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y+z-3=0 \\ x+y=z-5 \\ x=z-2y-3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=3 \\ x+y-z=-5 \\ x+2y-z=-3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{(2.ª)} \\ \text{(1.ª)} \\ \text{(3.ª)} \end{array} \to$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=-5 \\ 3x+2y+z=3 \\ x+2y-z=-3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} - 3 \cdot \text{(1.ª)} \\ \text{(3.ª)} - \text{(1.ª)} \end{array} \to \left.\begin{array}{r} x+y-z=-5 \\ -y+4z=18 \\ y=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=-2 \\ y=2 \\ z=5 \end{array}$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} 7x-3y+z=-11 \\ x-y+1=z \\ 2x+2y=8+z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 7x-3y+z=-11 \\ x-y-z=-1 \\ 2x+2y-z=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{(2.ª)} \\ \text{(1.ª)} \\ \text{(3.ª)} \end{array} \to$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=-1 \\ 7x-3y+z=-11 \\ 2x+2y-z=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} - 7 \cdot \text{(1.ª)} \\ \text{(3.ª)} - 2 \cdot \text{(1.ª)} \end{array} \to \left.\begin{array}{r} x-y-z=-1 \\ 4y+8z=-4 \\ 4y+z=10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} \\ \text{(3.ª)} - \text{(2.ª)} \end{array} \to$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=-1 \\ 4y+8z=4 \\ -7z=14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0 \\ y=3 \\ z=-2 \end{array}$$

c)
$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} - 2 \cdot \text{(1.ª)} \\ \text{(3.ª)} - \text{(1.ª)} \end{array} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ y+3z=7 \\ -6y+5z=27 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} \\ \text{(3.ª)} + 6 \cdot \text{(2.ª)} \end{array} \to$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ y+3z=7 \\ 23z=69 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z=\dfrac{69}{23}=3 \\ y=7-3z=7-9=-2 \\ x=2-y-z=2+2-3=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=1 \\ y=-2 \\ z=3 \end{array}$$

d)
$$\left.\begin{array}{r} x+y-2z=9 \\ 2x-y+4z=4 \\ 2x-y+6z=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} + \text{(1.ª)} \\ \text{(3.ª)} + \text{(1.ª)} \end{array} \to \left.\begin{array}{r} x+y-2z=9 \\ 3x+2z=13 \\ 3x+4z=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} \\ \text{(3.ª)} - \text{(2.ª)} \end{array} \to$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y-2z=9 \\ 3x+2z=13 \\ 2z=-5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z=\dfrac{-5}{2} \\ x=\dfrac{13-2z}{3}=6 \\ y=9-x+2z=9-6-5=-2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=6 \\ y=-2 \\ z=\dfrac{-5}{2} \end{array}$$

50 **Resuelve aplicando el método de Gauss.**

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{matrix}\right\}$ (1.ª) (2.ª) – 5 · (3.ª) (3.ª) $\to$ $\left.\begin{matrix} x - y = 1 \\ -3x + y = -4 \\ x + y - z = 0 \end{matrix}\right\}$ (1.ª) (2.ª) + 3 · (1.ª) (3.ª) $\to$

$\left.\begin{matrix} x - y = 1 \\ -2y = -1 \\ x + y - z = 0 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} y = \dfrac{1}{2} \\ x = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \\ z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = 2 \end{matrix}\right\}$ $x = \dfrac{3}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}$, $z = 2$

b) $\left.\begin{matrix} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{matrix}\right\}$ (1.ª) (2.ª) + (1.ª) (3.ª) + (1.ª) $\to$ $\left.\begin{matrix} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 6z = 8 \\ 6x + 18z = 4 \end{matrix}\right\}$ (1.ª) (2.ª) : 2 (3.ª) : 6 $\to$

$\left.\begin{matrix} x + 2y + z = 3 \\ x + 3z = 4 \\ x + 3z = 4/6 \end{matrix}\right\}$ Las ecuaciones 2.ª y 3.ª dicen cosas contradictorias.

El sistema es incompatible, no tiene solución.

c) $\left.\begin{matrix} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{matrix}\right\}$ (1.ª) (2.ª) – 3 · (1.ª) (3.ª) + (1.ª) $\to$ $\left.\begin{matrix} x + y + 3z = 2 \\ -x - 5z = -5 \\ -x - 5z = -5 \end{matrix}\right\}$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en función de z:

$\left.\begin{matrix} x + y = 2 - 3z \\ -x = -5 + 5z \end{matrix}\right\}$ $\to (5 - 5z) + y = 2 - 3z \to y = 2z - 3$; $\to x = 5 - 5z$

$x = 5 - 5z,\ y = 2z - 3,\ z = z$

d) $\left.\begin{matrix} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{matrix}\right\}$ (1.ª) (2.ª) – 2 · (1.ª) (3.ª) + 5 (1.ª) $\to$ $\left.\begin{matrix} 2x - y - z = 2 \\ -x = -2 \\ 5x - 2y = 9 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x = 2 \\ y = \dfrac{5x - 9}{2} = \dfrac{1}{2} \\ z = 2x - y - 2 = \dfrac{3}{2} \end{matrix}\right\}$

$x = 2,\ y = \dfrac{1}{2},\ z = \dfrac{3}{2}$

e) $\left.\begin{matrix} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{matrix}\right\}$ (1.ª) (2.ª) + (1.ª) (3.ª) – (1.ª) $\to$ $\left.\begin{matrix} x + y + z = 3 \\ 3y + 2z = 8 \\ 3y + 2z = -2 \end{matrix}\right\}$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª obtenidas dicen cosas contradictorias. Por tanto, el sistema es incompatible.

f) $\left.\begin{array}{r}-2x + \ \ y + z = 1\\ 3x + 2y - z = 0\\ -x + 4y + z = 2\end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\end{array}} \left.\begin{array}{r}-2x + \ \ y + z = 1\\ x + 3y \quad\ \ = 1\\ x + 3y \quad\ \ = 1\end{array}\right\}$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en función del parámetro y:

$\left.\begin{array}{l}-2x + z = 1 - y\\ x = 1 - 3y\end{array}\right\} \to -2(1-3y) + z = 1 - y \to z = 3 - 7y$

$x = 1 - 3y, \ \ z = 3 - 7y$

Inecuaciones. Sistemas de inecuaciones

51 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $2x - 3 < x - 1$ **b)** $\dfrac{3x-2}{2} \le \dfrac{2x+7}{3}$

c) $-3x - 2 < 5 - \dfrac{x}{2}$ **d)** $\dfrac{3x}{5} - x > -2$

a) $x < 2$; $(-\infty, 2)$

b) $9x - 6 \le 4x + 14 \to 5x \le 20 \to x \le 4$; $(-\infty, 4]$

c) $-6x - 4 < 10 - x \to -14 < 5x \to x > -\dfrac{14}{5}$; $\left(-\dfrac{14}{5}, +\infty\right)$

d) $3x - 5x > -10 \to -2x > -10 \to 2x < 10 \to x < 5$; $(-\infty, 5)$

52 **Resuelve estas inecuaciones:**

a) $5(2 + x) > -5x$ **b)** $\dfrac{x-1}{2} > x - 1$

a) $10 + 5x > -5x$; $10x > -10$; $x > -1$

$(-1, +\infty)$

b) $x - 1 > 2x - 2$; $1 > x$

$(-\infty, 1)$

53 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases}4x - 3 < 1\\ x + 6 > 2\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}3x - 2 > -7\\ 5 - x < 1\end{cases}$

c) $\begin{cases}5 - x < -12\\ 16 - 2x < 3x - 3\end{cases}$ **d)** $\begin{cases}2x - 3 > 0\\ 5x + 1 < 0\end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l}x < 1\\ x > -4\end{array}\right\} (-4, 1)$

b) $\left.\begin{array}{l}x > -\dfrac{5}{3}\\ x > 4\end{array}\right\} (4, +\infty)$

c) $\left.\begin{array}{l}x > 17\\ x > \dfrac{19}{5}\end{array}\right\} (17, +\infty)$

d) $\left.\begin{array}{l}x > \dfrac{3}{2}\\ x < -\dfrac{1}{5}\end{array}\right\}$ No tiene solución.

54 Resuelve.

a) $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$ **b)** $5 - x^2 < 0$

c) $x^2 + 3x > 0$ **d)** $-x^2 + 6x - 5 \leq 0$

e) $x^2 - 7x + 6 \leq 0$ **f)** $x^2 - 7x + 6 > 0$

a) $-(x + 3)(x + 1) \geq 0 \rightarrow [-3, 1]$

b) $\left(\sqrt{5} - x\right)\left(\sqrt{5} + x\right) < 0 \rightarrow \left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$

c) $x(x + 3) > 0 \rightarrow (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

d) $-(x - 1)(x - 5) \leq 0 \rightarrow (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$

e) $x^2 - 7x + 6 \leq 0 \rightarrow [1, 6]$

f) $x^2 - 7x + 6 > 0 \rightarrow (-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$

55 Resuelve.

a) $(x + 1)x^2(x - 3) > 0$ **b)** $x(x^2 + 3) < 0$

a) $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x+1>0 \\ x-3>0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x>-1 \\ x>3 \end{array}\right\} (3, +\infty) \\ \left.\begin{array}{l} x+1<0 \\ x-3<0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x<-1 \\ x<3 \end{array}\right\} (-\infty, -1) \end{array}\right\} (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$

b) $(-\infty, 0)$

56 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2 + 2x > 15 \\ 3 - 2x < 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - x^2 \geq 4 \\ 5x - 1 < 4x + 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 + 2x > 15 \rightarrow \textit{Soluciones: } (-\infty, -5) \cup (3, \infty) \\ 3 - 2x < 7 \rightarrow \textit{Soluciones: } (-2, \infty) \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $((-\infty, -5) \cup (3, \infty)) \cap (-2, \infty) = (3, \infty)$

b) $\begin{cases} 5x - x^2 \geq 4 \rightarrow \textit{Soluciones: } [1, 4] \\ 5x - 1 < 4x + 2 \rightarrow \textit{Soluciones: } (-\infty, 3) \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $[1, 4] \cap (-\infty, 3) = [1, 3)$

57 Resuelve.

$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \geq 0 \\ -x^2 + 11x - 24 \leq 0 \end{cases}$

* ***La solución son las soluciones comunes de las dos inecuaciones.***

$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \geq 0 \rightarrow \textit{Soluciones: } (-\infty, -1] \cup [6, \infty) \\ -x^2 + 11x - 24 \geq 0 \rightarrow \textit{Soluciones: } [3, 8] \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $((-\infty, -1] \cup [6, \infty)) \cap [3, 8] = [6, 8]$

58 Resuelve gráficamente.

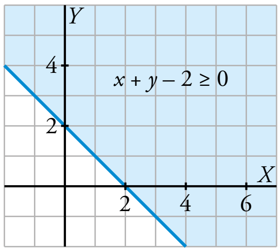
a) $x + y - 2 \geq 0$ **b)** $2x - 3y \leq 6$

c) $\dfrac{x - 3y}{2} \leq 3$ **d)** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} \geq -1$

a) Dibujamos la recta $r: x + y - 2 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad $0 + 0 - 2 \geq 0$.

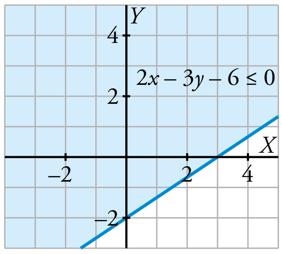
La solución es el semiplano que no contiene a O.



b) Dibujamos la recta $r: 2x - 3y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 - 6 \leq 0$.

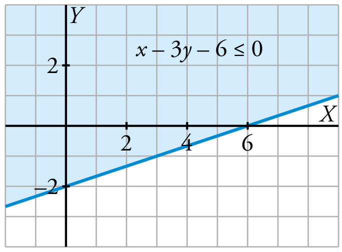
La solución es el semiplano que contiene a O.



c) $\dfrac{x - 3y}{2} \leq 3 \to x - 3y - 6 \leq 0$. Dibujamos la recta $r: x - 3y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 - 6 \leq 0$.

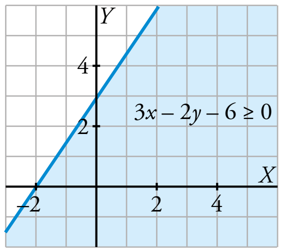
La solución es el semiplano que contiene a O.



d) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} \geq -1 \to 3x - 2y + 6 \geq 0$. Dibujamos la recta $r: 3x - 2y + 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 + 6 \geq 0$.

La solución es el semiplano que contiene a O.

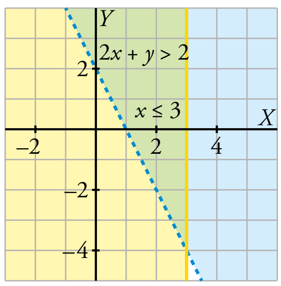


59 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas:

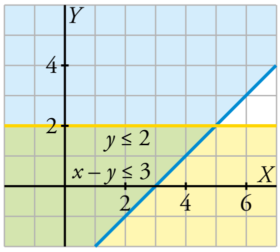
a) $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y \leq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - 2y \leq 5 \\ x + y \geq 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} y \geq 1 \\ x \leq 3 \\ -x + y \leq 1 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} x \leq 5 \\ y \geq 0 \\ y \leq x + 1 \\ 2x + y \geq 3 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x \geq 2 \\ 3x + y \geq 7 \\ 2x - y \geq -7 \end{cases}$

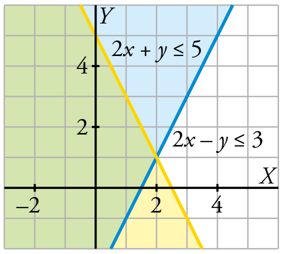
a) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La recta $2x + y = 2$ no pertenece al recinto solución.



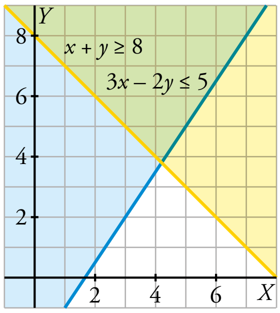
b) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



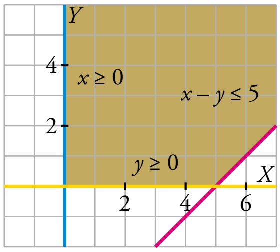
c) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



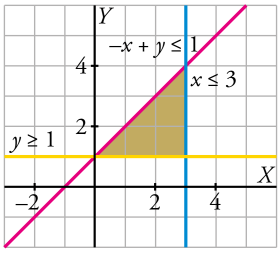
d) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



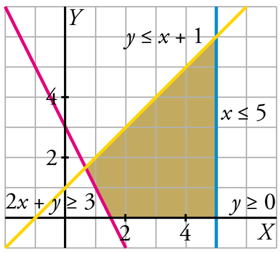
e) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos.



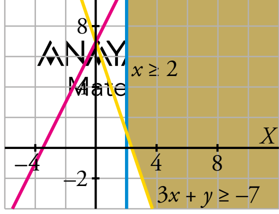
f) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es el triángulo intersección de los tres semiplanos.



g) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los cuatro semiplanos.



h) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos.



Para resolver

60 **Resuelve estas ecuaciones con valor absoluto.**

a) $|x + 1| = 3$ **b)** $|x^2 - 3| = 1$ **c)** $\left|\dfrac{x+1}{2}\right| = 2$ **d)** $|x + 2| = |3x - 2|$

* ***Fíjate en el ejercicio resuelto 2 de la página 101.***

a) $|x + 1| = 3 \rightarrow \begin{cases} x+1=3 \rightarrow x=2 \\ x+1=-3 \rightarrow x=-4 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -4$

b) $|x^2 - 3| = 1 \rightarrow \begin{cases} x^2-3=1 \rightarrow x_1=2,\ x_2=-2 \\ x^2-3=-1 \rightarrow x_3=\sqrt{2},\ x_4=-\sqrt{2} \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = \sqrt{2},\ x_4 = -\sqrt{2}$

c) $\left|\dfrac{x+1}{2}\right| = 2 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{2}=2 \rightarrow x=3 \\ \dfrac{x+1}{2}=-2 \rightarrow x=-5 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -5$

d) $|x + 2| = |3x - 2| \rightarrow \begin{cases} x+2=3x-2 \rightarrow x=2 \\ x+2=-(3x-2) \rightarrow x=0 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = 0$

61 **Escribe un polinomio de grado 4 que solo tenga por raíces 0 y 1.**

Por ejemplo: $P(x) = x^3(x-1);\ Q(x) = x^2(x-1)$

62 **Inventa ecuaciones que tengan por soluciones estos valores:**

a) $3,\ -3,\ \sqrt{7}$ **y** $-\sqrt{7}$ **b)** $5;\ 0{,}3$ **y** -2

c) $0,\ \dfrac{1}{2}$ **y** $0{,}7$ **d)** $0,\ 1,\ -1$ **y** $\dfrac{1}{3}$

a) $(x-3)(x+3)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) = (x^2-9)(x^2-7) = x^4 - 16x^2 + 63$

b) $(x-5)(x-0{,}3)(x+2) = x^3 - 3{,}3x^2 - 9{,}1x + 3$

c) $x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x-0{,}7) = x(x-0{,}5)(x-0{,}7) = x^3 - 1{,}2x^2 + 0{,}35x$

d) $x(x-1)(x+1)\left(x-\dfrac{1}{3}\right) = x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + \dfrac{1}{3}x$

Página 109

63 **[Escuchando los argumentos de sus compañeros y compañeras el alumnado puede trabajar la comprensión oral].**

¿Verdadero o falso?

a) **Un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas puede ser compatible indeterminado.**

b) **Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas puede ser compatible determinado.**

c) **Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas puede ser incompatible.**

a) Cierto, ya que la soluciones dependerán de una tercera incógnita y según valga esta tercera tendremos los valores de las dos primeras. Es decir puede tener solución aunque no podamos precisarla.

b) Falso, puede ser compatible pero no podremos determinarlo.

c) Cierto, es posible que no tenga una solución común.

64 Comprueba que una de estas inecuaciones tiene por solución al conjunto $\mathbb{R}$ y la otra es incompatible:

a) $5(x-2)-4(2x+1)<-3x+1$ **b)** $3(x-2)+7<x+2(x-5)$

a) $5(x-2)-4(2x+1)<-3x+1 \rightarrow -3x-14<-3x+1 \rightarrow -14<1$ que es cierto para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$.

b) $3(x-2)+7<x+2(x-5) \rightarrow 3x+1<3x-10 \rightarrow 1<-10$ que es falso, luego no se verifica nunca la desigualdad.

65 Resuelve.

a) $\frac{1}{x+3}<0$ **b)** $\frac{x^2+1}{x+5}>0$ **c)** $\frac{x+3}{x-3}\le 0$ **d)** $\frac{x^2-4}{x}\ge 0$

a) Para que la fracción sea negativa, el numerador y el denominador deben tener distinto signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, +\infty)$
1	+	+
$x+3$	–	+
$\frac{1}{x+3}$	–	+

Solución: $(-\infty, -3)$

b) Para que la fracción sea positiva, el numerador y el denominador deben tener el mismo signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

$x^2+1=0$ no tiene solución.

Solución: $(-5, +\infty)$

	$(-\infty, -5)$	$(-5, +\infty)$
x^2+1	+	+
$x+5$	–	+
$\frac{x^2+1}{x+5}$	–	+

c) Para que la fracción sea negativa, el numerador y el denominador deben tener distinto signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

	$(-\infty, -3]$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
$x+3$	–	+	+
$x-3$	–	–	+
$\frac{x+3}{x-3}$	+	–	+

Solución: $[-3, 3)$; $x=3$ no es solución porque hace cero el denominador.

d) Para que la fracción sea positiva, el numerador y el denominador deben tener el mismo signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

	$(-\infty, -2]$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$[2, +\infty)$
$x^2 - 4$	+	–	–	+
x	–	–	+	+
$\frac{x^2-4}{x}$	–	+	–	+

Solución: $[-2, 0) \cup [2, +\infty)$; $x = 0$ no es solución porque hace cero del denominador.

66 **Una tienda ha vendido 60 ordenadores, cuyo precio original era de 1 200 €, con un descuento del 20 % a unos y un 25 % a otros. Si se han recaudado 56 400 €, calcula a cuántos ordenadores se rebajó el 25 %.**

x = n.º de ordenadores vendidos con un 20 % de descuento

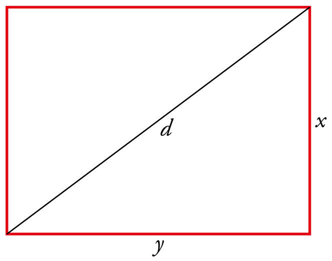
y = n.º de ordenadores vendidos con un 25 % de descuento

Expresamos las condiciones mediante un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 0,8 \cdot 1\,200x + 0,75 \cdot 1\,200y = 56\,400 \end{cases} \to \begin{cases} x + y = 60 \\ 960x + 900y = 56\,400 \end{cases} \to x = 40,\ y = 20$$

Se han vendido 20 ordenadores con un 25 % de descuento.

67 **Calcula las dimensiones que debe tener una finca rectangular sabiendo que su perímetro mide 140 m y que su diagonal mide 50 m.**



$$\begin{cases} P = 2x + 2y \\ d = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \to \begin{cases} 140 = 2x + 2y \\ 50 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \to \begin{cases} 70 = x + y \\ 2\,500 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 30,\ y_1 = 40;\ x_2 = 40,\ y_2 = 30$

Un lado mide 30 m, y el otro, 40 m.

68 **En una caja registradora encontramos billetes de 50 €, 100 € y 200 €, siendo el número total de billetes igual a 21, y la cantidad total de dinero de 1 800 €. Sabiendo que el número de billetes de 50 € es el quíntuple de los de 200 €, calcula el número de billetes de cada clase.**

x = n.º de billetes de 50 €

y = n.º de billetes de 100 €

z = n.º de billetes de 200 €

Expresamos las condiciones en función de las incógnitas y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 21 \\ 50\,x + 100y + 200\,z &= 1\,800 \\ x &= 5z \end{aligned}\right\} \quad \textit{Solución:}\ x = 10,\ y = 9,\ z = 2$$

Hay 10 billetes de 50 €, 9 billetes de 100 € y 2 billetes de 200 €.

69 **En una función de teatro se recaudan 5 200 €, vendiéndose 200 entradas de tres precios distintos: 30 €, 25 € y 10 €. Sabiendo que el número de localidades más económicas suponen un 25 % del número de localidades de 25 €, calcula el número de localidades de cada tipo.**

x = n.º de localidades a 10 €

y = n.º de localidades a 25 €

z = n.º de localidades a 30 €

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=200 \\ 10x+25y+30z=5\,200 \\ 4x=y \end{array}\right\} \ \textit{Solución}: \ x=20, \ y=80, \ z=100$$

Se han vendido 20 localidades de 10 €, 80 de 25 € y 100 de 30 €.

70 **Preparamos un surtido con dos tipos de bombones de 10 €/kg y 15 €/kg. Nuestro presupuesto es de 600 € y queremos preparar, al menos, 40 kg. ¿Qué restricciones tiene la composición del surtido?**

x = kilos de bombones de 10 €/kg

y = kilos de bombones de 15 €/kg

Restricciones:

$$\begin{cases} x+y\ge 40 \\ 10x+15y\le 600 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

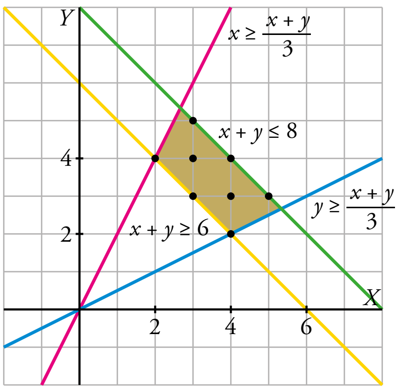
71 ODS Meta. 5.5. **[Tras el visionado del vídeo el docente puede plantear un debate sobre las medidas necesarias para incrementar la presencia de las mujeres en puestos de responsabilidad política, dirección de empresas…].**

Un comité de una comunidad de vecinos, debe estar formado entre 6 y 8 personas, no pudiendo ser el número de hombres ni el de mujeres inferior a un tercio del grupo. ¿Cuántas combinaciones posibles hay?

Llamamos x al n.º de mujeres e y al n.º de hombres. Las condiciones son:

$$\begin{cases} 6\le x+y\le 8 \\ x\ge \dfrac{x+y}{3} \\ y\ge \dfrac{x+y}{3} \end{cases}$$

Representamos el recinto solución:



Las diferentes posibilidades son: $(x=4, \ y=2)$, $(x=3, \ y=3)$, $(x=2, \ y=4)$, $(x=4, \ y=3)$, $(x=3, \ y=4)$, $(x=5, \ y=3)$, $(x=4, \ y=4)$, $(x=3, \ y=5)$, que corresponden a los puntos del recinto común cuyas coordenadas son enteras.

72 **[La resolución del problema requiere que el alumnado trabaje la iniciativa (dimensión productiva de esta clave)].**

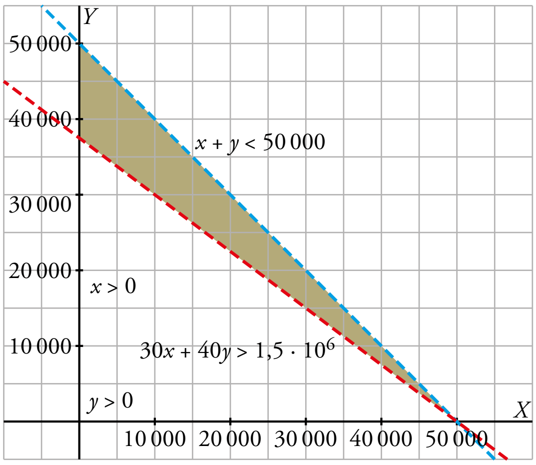
La recaudación de un partido de fútbol en el que se vendieron menos de 50 000 entradas superó los 1,5 millones de euros. Si se vendieron entradas de 30 € y de 40 €, ¿cuántas localidades de cada tipo pudieron ser vendidas?

x = n.º de entradas de 30 €

y = n.º de entradas de 40 €

Restricciones:

$$\begin{cases} x + y < 50\,000 \\ 30x + 40y > 1,5 \cdot 10^6 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$



Las posibles soluciones son los puntos de coordenadas enteras que están en el recinto intersección de los cuatro semiplanos.

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 2.3. (EA 2.3.1.-EA 2.3.2.-EA 2.3.3.)

Página 109

1 Factoriza los siguientes polinomios señalando sus raíces:

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ **b)** $Q(x) = 2x^3 - x^2 - x$

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

Aplicamos Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -4 & -4 \\
-1 & & -1 & 0 & 4 \\
\hline
 & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & 4 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & \\
-2 & & -2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$

Las raíces de $P(x)$ son -2, -1 y 2.

b) $Q(x) = 2x^3 - x^2 - x$

Sacando factor común: $Q(x) = x(2x^2 - x - 1)$

Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de 2.º grado a $2x^2 - x - 1$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} x_1 = -1/2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \qquad Q(x) = 2x(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Las raíces de $Q(x)$ son $-\frac{1}{2}$, 0 y 1.

2 Opera y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{(x+5)^2 - 2x(x+5)}{(x+5)^4}$

b) $\left(\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \dfrac{x}{x+2}\right)$

a) $$\frac{(x+5)^2 - 2x(x+5)}{(x+5)^4} = \frac{(x+5) - 2x}{(x+5)^3} = \frac{5-x}{(x+5)^3}$$

b) $$\left(\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \frac{x}{x+2}\right) = \left(\frac{(x+1)(x+2) - x^2}{x(x+2)}\right) : \left(\frac{x+2+x}{x+2}\right) =$$

$$= \left(\frac{x^2 + 3x + 2 - x^2}{x(x+2)}\right) : \left(\frac{2x+2}{x+2}\right) =$$

$$= \left(\frac{3x+2}{x(x+2)}\right) \cdot \left(\frac{x+2}{2x+2}\right) = \frac{3x+2}{x(2x+2)} = \frac{3x+2}{2x^2+2x}$$

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{3x+1}{3}-\dfrac{5x^2+3}{2}=\dfrac{x^2-1}{2}-\dfrac{x+2}{3}$

b) $x^4-8x^2-9=0$

c) $x-\sqrt{2x-1}=1-x$

d) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x^2-3}{(x+1)(x-3)}$

a) $\dfrac{3x+1}{3}-\dfrac{5x^2+3}{2}=\dfrac{x^2-1}{2}-\dfrac{x+2}{3}$

Multiplicando por mín.c.m.(2, 3) = 6 $\to$

$\to 2(3x+1)-3(5x^2+3)=3(x^2-1)-2(x+2) \to$

$\to 6x+2-15x^2-9=3x^2-3-2x-4 \to -15x^2+6x-7=3x^2-2x-7 \to$

$\to 18x^2-8x=0 \to 2x(9x-4)=0 \begin{cases} 2x=0 \to x_1=0 \\ 9x-4=0 \to x_2=4/9 \end{cases}$

b) $x^4-8x^2-9=0 \xrightarrow{x^2=y} y^2-8y-9=0$

$y=\dfrac{8\pm\sqrt{64-4\cdot(-9)\cdot(1)}}{2}=\dfrac{8\pm10}{2} \begin{cases} y=9 \to x^2=9 \to x=\pm 3 \\ y=-1 \text{ (no vale)} \end{cases}$

c) $x-\sqrt{2x-1}=1-x \to (2x-1)^2=\left(\sqrt{2x-1}\right)^2 \to 4x^2-4x+1=2x-1 \to 4x^2-6x+2=0 \to 2x^2-3x+1=0$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4\cdot(2)\cdot(1)}}{4}=\dfrac{3\pm1}{4} \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1/2 \end{cases}$ (Son válidas ambas soluciones.)

d) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x^2-3}{(x+1)(x-3)} \to (x+1)\cdot x-(x-3)(x+3)=x^2-3 \to x^2+x-(x^2-9)=x^2-3 \to$

$\to x^2+x-x^2+9=x^2-3 \to x+9=x^2-3 \to x^2-x-12=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(1)\cdot(-12)}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{49}}{2}=\dfrac{1\pm7}{2} \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=-3 \end{cases}$

4 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $3^{x^2}\cdot 3^{-2}=9$ **b)** $5^{x^2}\cdot 25^{x-1}=5^{3x}$

c) $\log x+\log 2=1$ **d)** $\log_x 49=2$

a) $3^{x^2}\cdot 3^{-2}=9 \to 3^{x^2-2}=3^2 \to x^2-2=2 \to x^2=4 \to x=\pm2$

b) $5^{x^2}\cdot 25^{x-1}=5^{3x} \to 5^{x^2}\cdot(5^2)^{x-1}=5^{3x} \to 5^{x^2}\cdot 5^{2x-2}=5^{3x} \to 5^{x^2+2x-2}=5^{3x} \to$

$\to x^2+2x-2=3x \to x^2-x-2=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(1)\cdot(-2)}}{2}=\dfrac{1\pm3}{2} \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{cases}$

c) $\log x+\log 2=1 \to \log 2x=\log 10 \to 2x=10 \to x=5$

d) $\log_x 49=2 \to x^2=49 \to x=7,\ x=-7$

Como la base no puede ser negativa, $x=7$.

5 **Resuelve estos sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{xy = -2} \\ \boldsymbol{3x + 2y = -1} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \boldsymbol{\sqrt{-2x} + y = -1} \\ \boldsymbol{x - 2y = 4} \end{cases}$

a) $\begin{cases} xy = -2 \ \rightarrow \ x = -\dfrac{2}{y} \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

$$3\left(-\frac{2}{y}\right) + 2y = -1 \ \rightarrow \ -\frac{6}{y} + 2y = -1 \ \rightarrow \ -6 + 2y^2 = -y \ \rightarrow \ 2y^2 + y - 6 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (2) \cdot (-6)}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} \quad \begin{cases} y_1 = \dfrac{3}{2} \ \rightarrow \ x_1 = -\dfrac{4}{3} \\ y_2 = -2 \ \rightarrow \ x_2 = 1 \end{cases}$$

Hay dos pares de *soluciones*:

$$x_1 = -\frac{4}{3}, \ y_1 = \frac{3}{2}; \ x_2 = 1, \ y_2 = -2$$

b) $\begin{cases} \sqrt{-2x} + y = -1 \\ x - 2y = 4 \ \rightarrow \ x = 4 + 2y \end{cases}$

$$\sqrt{-2(4 + 2y)} + y = 1 \ \rightarrow \ \left(\sqrt{-8 - 4y}\right)^2 = (-1 - y)^2 \ \rightarrow \ -8 - 4y = 1 + 2y + y^2 \ \rightarrow \ y^2 + 6y + 9 = 0$$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (1) \cdot (9)}}{2} = \frac{-6}{2} \ \rightarrow \ y = -3$$

$$x = 4 + 2(-3) \ \rightarrow \ x = -2$$

Solución: $x = -2, \ y = -3$

6 **Resuelve por el método de Gauss.**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{3x - 5y + z = 11} \\ \boldsymbol{x + 2y - 3z = -10} \\ \boldsymbol{x + y - 2z = -6} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \boldsymbol{x - 5y + 9z = 4} \\ \boldsymbol{2x + y - 3z = 2} \\ \boldsymbol{x + 17y - 33z = 0} \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} 3x - 5y + z &= 11 \\ x + 2y - 3z &= -10 \\ x + y - 2z &= -6 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (1.^a) - 3 \cdot (3.^a) \\ (2.^a) - (3.^a) \\ (3.^a) \end{smallmatrix}} \left.\begin{aligned} -8y + 7z &= 29 \\ y - z &= -4 \\ x + y - 2z &= -6 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (1.^a) + 8 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{smallmatrix}} \left.\begin{aligned} -z &= -3 \\ y - z &= -4 \\ x + y - 2z &= -6 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} z &= 3 \\ y &= -1 \\ x &= 1 \end{aligned}$

Solución: $x = 1, \ y = -1, \ z = 3$

b) $\left.\begin{aligned} x - 5y + 9z &= 4 \\ 2x + y - 3z &= 2 \\ x + 17y - 33z &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) \cdot (1.^a) \end{smallmatrix}} \left.\begin{aligned} x - 5y + 9z &= 4 \\ 11y - 21z &= -6 \\ 22y - 42z &= -4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{smallmatrix}} \left.\begin{aligned} x - 5y + 9z &= 4 \\ 11y - 21z &= -6 \\ 0 &= 8 \end{aligned}\right\}$

El sistema no tiene solución.

7 Resuelve.

a) $x^2 + 5x \geq 0$

b) $x^2 - 25 < 0$

c) $\begin{cases} 2x + 1 \geq 7 \\ x + 1 \leq 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 3 \end{cases}$

a) $x^2 + 5x \geq 0 \rightarrow x(x + 5) \geq 0$

Las raíces de $x(x + 5) = 0$ son 0 y 5:

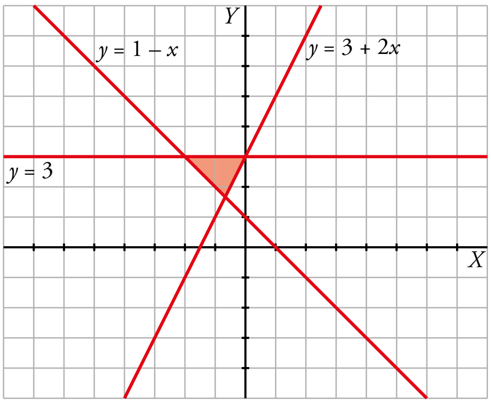
$-\infty \quad -5 \quad 0 \quad +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = -6 \rightarrow -6(-6+5) > 0 \\ \text{Si } x = -1 \rightarrow -1(-1+5) < 0 \\ \text{Si } x = 1 \rightarrow 1(1+5) > 0 \end{array}\right\} \textit{Solución}: (-\infty, -5] \cup [0, +\infty)$$

b) $x^2 - 25 < 0 \rightarrow x^2 < 25 \rightarrow -5 < x < 5 \rightarrow$ *Solución*: $(-5, 5)$

c) $\left.\begin{cases} 2x + 1 \geq 7 \rightarrow 2x \geq 6 \rightarrow x \geq 3 \\ x + 1 \leq 8 \rightarrow x \leq 7 \end{cases}\right\}$ *Solución*: $[3, 7]$

d) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 3 \end{cases}$ La solución es el recinto sombreado:



8 Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 kilos por defectuosas y vende el resto, aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra, por 147 €. ¿Cuántos kilos compró?

Llamamos x al número de kilos que compró el tendero.

Llamamos y al precio al que compra cada kilo de manzanas.

$$\begin{cases} x \cdot y = 125 \\ (x - 20)(y + 0,4) = 147 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema (nos quedamos solo con la solución positiva):

$$x = 125, \ y = 1$$

Por tanto, el tendero compró 125 kg.