Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

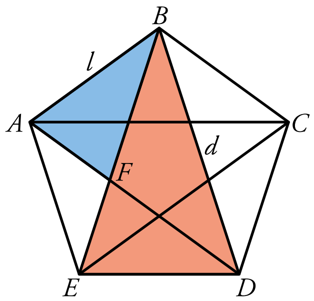
1 LOS NÚMEROS REALES

C.E.: CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.-EA 1.5.3.) CE 1.7. (EA 1.7.1-EA 1.7.2.-EA 1.7.3.-EA 1.7.4.-EA 1.7.5.) CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.)

Página 33

Resuelve

El pentágono estrellado



Observa el pentágono estrellado que se muestra a continuación:

1 **Demuestra que los triángulos *ABF* y *EBD* son semejantes (es decir, demuestra que sus ángulos son respectivamente iguales).**

2 **Si llamamos *l* al lado del pentágono y *d* a su diagonal, basándote en la semejanza de los triángulos que acabas de demostrar, halla la relación *d/l* y comprueba que es el número áureo:**

$$\frac{d}{l} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$$

El ángulo $\hat{B} = 36°$ en el triángulo ABF, y $\hat{B} = 36°$ en el triángulo EBD. Por otra parte los triángulos DAB y EBD son iguales, luego el ángulo $\hat{A}$ en el triángulo ABF, y $\hat{D}$ en el triángulo EBD son iguales. Por tanto los triángulos son semejantes.

El lado $AF = d - l$.

Por la semejanza de los triángulos ABF y EBD; $\frac{BD}{BF} = \frac{ED}{AF}$; es decir, $\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$

Operando, $d(d-l) = l^2$, por tanto $d^2 - dl - l^2 = 0$.

Las soluciones posibles para d son $d = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} = l\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

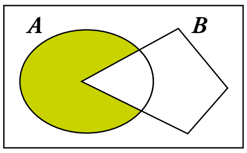
Como d no puede ser negativa, $d = l\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y $\frac{d}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

1 ▶ LENGUAJE MATEMÁTICO. CONJUNTOS Y SÍMBOLOS

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) CE 2.1. (EA 2.1.1-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.)

Página 35

1 **[La justificación de las afirmaciones requiere que el alumnado trabaje la expresión oral]. ¿Verdadero o falso?**

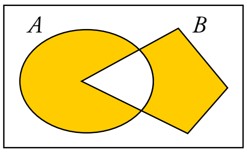


a) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A - B$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B.

b) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A \cap B'$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B, ya que B' es el complementario de B.



c) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$(A - B) \cup (B - A)$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, o está en A y no está en B, o está en B y no está en A.

d) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$(A \cup B) - (A \cap B)$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, tiene que estar en A o en B, pero no puede estar en los dos a la vez $(A \cap B)$.

e) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto, o está en A y no está en B, o está en B y no está en A.

f) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

Verdadero, porque todos los números enteros son racionales.

g) $[x \in (\dot{3})$ **y** $x \in (\dot{2})] \Leftrightarrow x \in (\dot{6})$

$(\dot{n})$ es el conjunto de los múltiplos de n.

Verdadero, porque si un número es a la vez múltiplo de 2 y de 3, entonces es múltiplo de $2 \cdot 3 = 6$.

h) $(\dot{3}) \cap (\dot{2}) = (\dot{6})$

Es la misma afirmación anterior.

i) $x \in A - B \Rightarrow x \in A \cap B'$

Verdadero, porque los elementos de $A - B$ están en A y no están en B, luego están en A y en B'.

j) $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ **es lo mismo que decir $A \subset B$.**

Verdadero, porque la implicación indica que todo elemento de A es un elemento de B.

k) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$

Tenemos que comprobar que las dos siguientes afirmaciones son ciertas:

$(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subset B$ que es la afirmación del apartado j)

$A \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$, pero si B contiene a A, es porque todos los elementos de A están en B, luego son equivalentes y es verdadera la afirmación.

l) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow B \subset A$

Falso, porque puede existir algún elemento de B que no esté en A.

m) $x \in (0, 1) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ **y** $0 < x < 1$

Verdadero, porque los intervalos representan conjuntos de números reales y el intervalo (0, 1) está formado por los números comprendidos entre 0 y 1 que son mayores que 0 y menores que 1, luego son afirmaciones equivalentes.

n) $\sqrt{2} \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **pero**

$\sqrt{2}/2 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Verdadero, porque $\sqrt{2}$ es un número real que no es racional y es mayor que 1, sin embargo $\sqrt{2}/2$ también es irracional, pero está entre 0 y 1.

ñ) $0{,}5 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Falso, porque 0,5 es racional.

o) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **es el conjunto de los números irracionales positivos menores que 1.**

Verdadero, porque son los números reales que no son racionales, es decir, irracionales, y además tienen que ser mayores que cero, por tanto positivos, y menores que 1.

p) $\{x \in \mathbb{Z} \ / -2 < x \le 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Verdadero, porque los únicos números enteros mayores que –2 y menores o iguales que 5 son los del conjunto indicado.

q) **El conjunto de los números enteros mayores que –5 y menores que 7 es** $\mathbb{Z} \cap (-5, 7)$**.**

Verdadero, porque, de los números enteros mayores que –5 y menores que 7, están en el intervalo (–5, 7) y además son enteros.

r) **(*x* es un número real pero no es racional)** $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Verdadero, porque $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es el conjunto de todos los números reales menos los racionales, que es equivalente a decir los números reales que no son racionales.

2 ▶ NÚMEROS REALES. LA RECTA REAL

C.E.: CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.-EA 2.1.5.-EA 2.1.6.)

Página 37

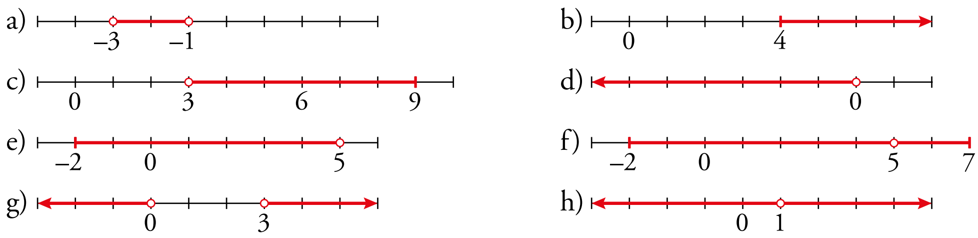
1 **Representa sobre la recta real estos conjuntos:**

a) $(-3, -1)$ **b)** $[4, +\infty)$

c) $(3, 9]$ **d)** $(-\infty, 0)$

e) $\{x / -2 \le x < 5\}$ **f)** $[-2, 5) \cup (5, 7]$

g) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ **h)** $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



2 **Averigua para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones y representa cada conjunto.**

a) $|x| = 5$ **b)** $|x - 4| \le 2$ **c)** $|x| \le 5$

d) $|x - 4| > 2$ **e)** $|x - 4| = 2$ **f)** $|x + 4| > 5$

a) 5 y –5

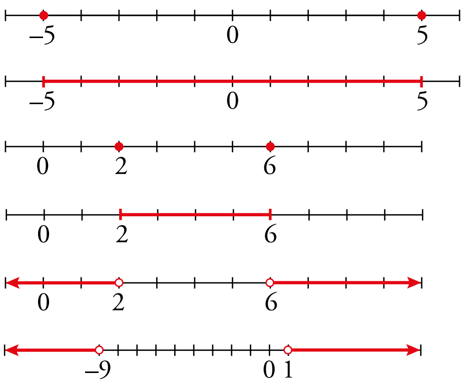
b) $2 \le x \le 6$; $[2, 6]$

c) $-5 \le x \le 5$; $[-5, 5]$

d) $x < 2$ o $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

e) 6 y 2

f) $x < -9$ o $x > 1$; $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$



3 RAÍCES Y RADICALES

C.E.: CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.) C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.)

Página 38

1 Simplifica.

a) $\sqrt[9]{x^{12}}$ **b)** $\sqrt[12]{x^8}$ **c)** $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ **e)** $\sqrt[9]{64}$ **f)** $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[9]{x^{12}} = \sqrt[3]{x^4}$ Se dividen índice y exponente entre 3.

b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2 Simplifica y expresa el resultado en forma de raíz.

a) $\sqrt[9]{512x^3}$ **b)** $\sqrt[4]{121x^{10}}$

c) $\sqrt[8]{\dfrac{225}{x^4}}$ **d)** $\sqrt[6]{125x^3}$

a) $\sqrt[9]{512x^3} = \sqrt[9]{2^9 \cdot x^3} = \sqrt[9]{2^9} \cdot \sqrt[9]{x^3} = 2\sqrt[3]{x}$

b) $\sqrt[4]{121x^{10}} = \sqrt{11 \cdot x^5} = x^2\sqrt{11 \cdot x}$

c) $\sqrt[8]{\dfrac{225}{x^4}} = \sqrt[8]{\dfrac{5^2 \cdot 3^2}{x^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{5 \cdot 3}}{\sqrt[2]{x}} = \dfrac{\sqrt[4]{15}}{\sqrt[2]{x}}$

d) $\sqrt[6]{125x^3} = \sqrt[6]{5^3 \cdot x^3} = \sqrt{5x}$

Página 39

3 Compara reduciendo a índice común en cada caso.

a) $\sqrt[12]{2^5}$ **y** $\sqrt[18]{2^7}$ **b)** $\sqrt[3]{51}$ **y** $\sqrt[9]{132\,650}$

c) $\sqrt[4]{31}$ **y** $\sqrt[3]{13}$ **d)** $\sqrt[5]{245}$ **y** $\sqrt[7]{2\,185}$

a) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[12]{2^5} = \sqrt[36]{2^{15}} \\ \sqrt[18]{2^7} = \sqrt[36]{2^{14}}\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[12]{2^5} > \sqrt[18]{2^7}$

b) $\sqrt[3]{51} = \sqrt[9]{132\,651} \Rightarrow \sqrt[3]{51} > \sqrt[9]{132\,650}$

c) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{29\,791} \\ \sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{28\,561}\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[4]{31} > \sqrt[3]{13}$

d) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[5]{245} = \sqrt[35]{52\,986\,177\,566\,328\,125} \\ \sqrt[7]{2\,185} = \sqrt[35]{49\,803\,195\,206\,115\,625}\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[5]{245} > \sqrt[7]{2\,185}$

4 Extrae fuera del radical cuando sea posible.

a) $\sqrt[12]{32}$ **b)** $\sqrt{27}$ **c)** $\sqrt{20}$ **d)** $\sqrt[3]{54}$

e) $\sqrt[4]{a^7}$ **f)** $\sqrt{x^5}$ **g)** $\sqrt{a \cdot b^2 \cdot c^3}$ **h)** $\sqrt[3]{x^4 \cdot x^2}$

a) $\sqrt[12]{32} = \sqrt[12]{2^5}$. No se puede extraer.

b) $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$

c) $\sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 2^2} = 2\sqrt{5}$

d) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$

e) $\sqrt[4]{a^7} = a\sqrt[4]{a^3}$

f) $\sqrt{x^5} = x^2\sqrt{x}$

g) $\sqrt{a \cdot b^2 \cdot c^3} = b \cdot c\sqrt{a \cdot c}$

h) $\sqrt[3]{x^4 \cdot x^2} = \sqrt[3]{x^6} = x^2$

5 **Expresa bajo un único radical en cada caso.**

a) $2\sqrt{3}$ **b)** $3\sqrt{2}$ **c)** $2\sqrt[3]{5}$ **d)** $3^2\cdot\sqrt[5]{2}$

e) $\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{3}$ **f)** $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}$ **g)** $10\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{5}$ **h)** $3\sqrt{2}\cdot\sqrt[5]{4}$

a) $2\sqrt{3}=\sqrt{3\cdot 2^2}=\sqrt{12}$

b) $3\sqrt{2}=\sqrt{2\cdot 3^2}=\sqrt{18}$

c) $2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{5\cdot 2^3}=\sqrt[3]{40}$

d) $32\sqrt[5]{2}=\sqrt[5]{2\cdot 2^{25}}=\sqrt[5]{2^{26}}=\sqrt[5]{67\,108\,864}$

e) $\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3\cdot 2^3}=\sqrt{24}$

f) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{2^3\cdot 5^2}=\sqrt[6]{200}$

g) $10\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt{3\cdot 10^2}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{3^3\cdot 100^3\cdot 5^2}=\sqrt[6]{675\,000\,000}$

h) $3\sqrt{2}\cdot\sqrt[5]{4}=\sqrt[10]{3^5\cdot 2^5\cdot 4^2}=\sqrt[10]{124\,416}$

6 **Reduce.**

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{3}$ **c)** $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[3]{4}$ **e)** $\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt{5}$ **f)** $\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt{3}$

a) $\sqrt[15]{2^5}\cdot\sqrt[15]{2^3}=\sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4}\cdot\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4}\cdot\sqrt[8]{2^2}\cdot\sqrt[8]{2}=\sqrt[8]{2^7}$

d) $\sqrt[12]{8^3}\cdot\sqrt[12]{4^4}=\sqrt[12]{(2^3)^3\cdot(2^2)^4}=\sqrt[12]{2^{17}}=2\sqrt[12]{2^5}$

e) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt{5}=\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt[4]{5^2}=\sqrt[4]{5^5}=5\sqrt[4]{5}$

f) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt{3}=\sqrt[6]{(3^4)^2}\,\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{3^{11}}=3\sqrt[6]{3^5}$

Página 40

7 **Simplifica.**

a) $\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{a\cdot b}}{\sqrt[3]{a\cdot b}}$

c) $\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3\cdot b^5\cdot c}}{\sqrt{a\cdot b^3\cdot c^3}}$

a) $\sqrt[15]{\dfrac{x^3}{x^5}}=\sqrt[15]{\dfrac{1}{x^2}}=\sqrt[15]{x^{-2}}$ b) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3\,b^3}{a^2\,b^2}}=\sqrt[6]{a\,b}$

c) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{a^4}}=\sqrt[6]{\dfrac{1}{a}}=\sqrt[6]{a^{-1}}$ d) $\sqrt[4]{\dfrac{a^3\,b^5\,c}{a^2\,b^6\,c^6}}=\sqrt[4]{\dfrac{a}{bc^5}}=\dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{a}{bc}}$

8 **Simplifica.**

a) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}\right)^8$ **b)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ **c)** $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$

a) $\left(\sqrt[8]{k}\right)^8=k$ b) $\sqrt[15]{x^{10}}=\sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt[6]{x^6}=x$

9 **Suma y simplifica.**

a) $5\sqrt{x}+3\sqrt{x}+2\sqrt{x}$ **b)** $\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$ **d)** $\sqrt{27}-\sqrt{50}+\sqrt{12}+\sqrt{8}$

e) $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}$ **f)** $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}$

a) $10\sqrt{x}$

b) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2\cdot 5^2}-\sqrt{2}-\sqrt{2^3}=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3^3}-\sqrt{2\cdot 5^2}+\sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{2^3}=3\sqrt{3}-5\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}=5\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2\cdot 5^2\cdot a}-\sqrt{2\cdot 3^2\cdot a}=5\sqrt{2a}-3\sqrt{2a}=2\sqrt{2a}$

f) Se factorizan los radicandos y se sacan factores de la raíz:

$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{2^4}+\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2}=0$

Página 41

10 **Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.**

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$

c) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}}$ **f)** $\dfrac{4}{\sqrt{18}}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}}$ **h)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}}$ **j)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}}$

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}=\dfrac{5\sqrt{7}}{7}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}=\dfrac{1}{a\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a^2}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}}=\dfrac{3}{\sqrt{2\cdot 5^2}}=\dfrac{3}{5\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$ f) $\dfrac{4}{\sqrt{18}}=\dfrac{4}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\dfrac{4}{3\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{6}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{5^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{5}}{5}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^3\cdot 5}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{5}}=\dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{10}=\dfrac{\sqrt[3]{25}}{10}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2\cdot 3^2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{2\cdot 3}}{2\cdot 3}=\dfrac{3\sqrt[3]{6}}{6}=\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}$ j) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2^2\cdot 5^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{2\cdot 5}}{2\cdot 5}=\dfrac{2\sqrt[3]{10}}{10}=\dfrac{\sqrt[3]{10}}{5}$

11 **Racionaliza denominadores y simplifica estas expresiones cuanto puedas.**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **b)** $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

c) $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

e) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ **f)** $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **h)** $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$

b) $\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=\dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$

c) $\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}=\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(a-1)}=\sqrt{a}+1$

d) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

e) $\dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12-5}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}$

f) $\dfrac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{18-12}=\dfrac{18+12+12\sqrt{6}}{6}=\dfrac{30+12\sqrt{6}}{6}=5+2\sqrt{6}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{(2-1)+2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2-1)}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}$

4 ▶ LOGARITMOS

C.E.: CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.) C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.)

Página 42

1 Halla.

a) $\log_2 16$ **b)** $\log_2 0{,}25$

c) $\log_9 1$ **d)** $\log_{10} 0{,}1$

e) $\log_4 64$ **f)** $\log_7 49$

g) $\log_7 7$ **h)** $\log_\pi \left(\frac{1}{\pi}\right)$

i) $\log_5 0{,}04$ **j)** $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right)$

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ b) $\log_2 0{,}25 = \log_2 2^{-2} = -2$

c) $\log_9 1 = 0$ d) $\log_{10} 0{,}1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$

e) $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$ f) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$

g) $\log_7 7 = 1$ h) $\log_\pi \frac{1}{\pi} = \log_\pi \pi^{-1} = -1$

i) $\log_5 0{,}04 = \log_5 5^{-2} = -2$ j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right) = \log_6 6^{-3} = -3$

2 Halla la parte entera de…

a) $\log_2 60$ **b)** $\log_5 700$

c) $\log_{10} 43\,000$ **d)** $\log_{10} 0{,}084$

e) $\log_9 60$ **f)** $\log_7 14$

g) $\log_{20} 450\,000$ **h)** $\log_{5,4} 900$

i) $\log_2 3$ **j)** $\log_5 0{,}1$

a) $2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $32 < 60 < 64$

$5 < \log_2 60 < 6 \Rightarrow \log_2 60 = 5,\dots$

b) $5^4 = 625$; $5^5 = 3\,125$; $625 < 700 < 3\,125$

$4 < \log_5 700 < 5 \Rightarrow \log_5 700 = 4,\dots$

c) $10^4 = 10\,000$; $10^5 = 100\,000$; $10\,000 < 43\,000 < 100\,000$

$4 < \log_{10} 43\,000 < 5 \Rightarrow \log_{10} 43\,000 = 4,\dots$

d) $10^{-2} = 0{,}01$; $10^{-1} = 0{,}1$; $0{,}01 < 0{,}084 < 0{,}1$

$-2 < \log_{10} 0{,}084 < -1 \Rightarrow \log_{10} 0{,}084 = -1,\dots$

e) $9^1 = 9$; $9^2 = 81$; $9 < 60 < 81$

$1 < \log_9 60 < 2 \Rightarrow \log_9 60 = 1,\dots$

f) $\log_7 14$ es un número decimal entre 1 y 2 ya que $7^1 = 7$ y $7^2 = 49$.

Con la calculadora: $\log_7 14 = 1{,}3562$)

g) $\log_{20} 450\,000$; $20^4 = 160\,000$; $20^5 = 3\,200\,000$

Como $20^4 = 160\,000 < 450\,000 < 3\,200\,000 = 20^5 \Rightarrow 4 < \log_{20} 450\,000 < 5$.

La parte entera de $\log_{20} 450\,000$ es 4.

h) $\log_{5,4} 900 = 4{,}0337$

$5{,}4^4 = 850{,}31$; $5{,}4^5 = 4\,591{,}7$

Como $5{,}4^4 = 850{,}31 < 900 < 4\,591{,}7 = 5{,}4^5 \Rightarrow 4 < \log_{5,4} 900 < 5$.

La parte entera de $\log_{5,4} 900$ es 4.

i) $log_2\ 3$ es un número decimal entre 1 y 2 ya que $2^1 = 2$ y $2^2 = 4$.

Con la calculadora: $log_2\ 3 = 1{,}58496$

j) $log_5\ 0{,}1$ es un número decimal entre –1 y –2 ya que $5^{-1} = 0{,}2$ y $5^{-2} = 0{,}04$.

Con la calculadora: $log_5\ 0{,}1 = -1{,}4307$

Página 43

3 **Si $log_5 A = 1{,}8$ y $log_5 B = 2{,}4$, calcula.**

a) $log_5\ 125AB^2$ **b)** $log_5 \dfrac{A}{25}$ **c)** $log_5 \dfrac{25A}{B}$

d) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}}$ **e)** $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$ **f)** $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{A^4}}{(5B)^2}}$

a) $log_5\ 125AB^2 = log_5\ 125 + log_5\ A + log_5\ B^2 = 3 + 1{,}8 + 2 \cdot 2{,}4 = 9{,}6$

b) $log_5 \dfrac{A}{25} = log_5\ A - log_5\ 25 = 1{,}8 - 2 = -0{,}2$

c) $log_5 \dfrac{25A}{B} = log_5\ 25A - log_5\ B = log_5\ 25 + log_5\ A - 2{,}4 = 2 + 1{,}8 - 2{,}4 = -0{,}2$

d) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}} = \dfrac{1}{3}\ [2\ log_5\ A - log_5\ 25 - log_5\ B] = \dfrac{1}{3}\ [2 \cdot 1{,}8 - 2 - 2{,}4] = \dfrac{-0{,}8}{3} \approx -0{,}27$

e) $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = log_5\ 5 + \dfrac{3}{2}\ log_5\ A - 2\ log_5\ B = 1 + \dfrac{3}{2} \cdot 1{,}8 - 2 \cdot 2{,}4 = 1 + 2{,}7 - 4{,}8 = -1{,}1$

f) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{A^4}}{(5B)^2}} = \dfrac{1}{3}\ log_5 \dfrac{\sqrt[3]{A^4}}{(5B)^2} = \dfrac{1}{3}\left(log_5 \sqrt[3]{A^4} - log_5 (5B)^2\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{3} log_5\ A - 2\ log_5\ 5B\right) =$

$= \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{4}{3} \cdot 1{,}8 - 2\,(log_5 5 + log_5 B)\right] = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{7{,}2}{3} - 2\,(1 + 2{,}4)\right] = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{7{,}2 - 3 \cdot 6{,}8}{3}\right) = \dfrac{-13{,}2}{9}$

Página 44

4 **¿Qué te hace decir eso? [La presentación de las evidencias para justificar la respuesta permite trabajar esta estrategia].**

Averigua la relación que hay entre x e y, sabiendo que se verifica:

$\boldsymbol{ln\ y = 2x - ln\ 5}$

$ln\ y = 2x - ln\ 5 \ \rightarrow\ ln\ y = ln\ e^{2x} - ln\ 5$

$ln\ y = ln \dfrac{e^{2x}}{5} \ \rightarrow\ y = \dfrac{e^{2x}}{5}$

5 **Determina si es cierta la siguiente igualdad e indica qué propiedad o propiedades has utilizado:**

$\boldsymbol{log\ e \cdot ln\ 10 = 1}$

Como $ln\ 10 = log_e\ 10$ y usando un cambio de base tenemos que:

$log_e\ 10 = \dfrac{log\,10}{log\,e} = \dfrac{1}{log\,e}$

Así: $log\ e \cdot ln\ 10 = log\,e \cdot \dfrac{1}{log\,e} = \dfrac{log\,e}{log\,e} = 1$

Página 45

1 **Aplica la propiedad ⑧ para obtener los siguientes logaritmos con ayuda de la tecla ln de la calculadora:**

a) $\boldsymbol{log_2 1\,500}$ **b)** $\boldsymbol{log_5 200}$

c) $\boldsymbol{log_{100} 200}$ **d)** $\boldsymbol{log_{100} 40}$

Para los ejercicios con calculadora, las explicaciones del libro han tomado como referencia el modelo fx-991spx II Iberia de Casio.

a) $\dfrac{log\,1500}{log\,2} = 10{,}55;\ \ 2^{10{,}55} \approx 1\,500$ b) $\dfrac{log\,200}{log\,5} = 3{,}29;\ \ 5^{3{,}29} \approx 200$

c) $\dfrac{log\,200}{log\,100} = 1{,}15;\ \ 100^{1{,}15} \approx 200$ d) $\dfrac{log\,40}{log\,100} = 0{,}80;\ \ 100^{0{,}80} \approx 40$

2 **¿Verdadero o falso? Utiliza tu calculadora.**

a) $\boldsymbol{log_2 2 = log_2 (2 \cdot 1) = log_2 2 \cdot log_2 1 = 1 \cdot 0 = 0}$

b) $\boldsymbol{\frac{1}{2} log\,5 = log\,25}$

c) La parte entera de $\boldsymbol{log\,500}$ **es 2.**

d) La parte entera de $\boldsymbol{log\,0{,}05}$ **es –1.**

e) $\boldsymbol{log_2 (log\,10\,000) = 2}$

f) $\boldsymbol{log\ 3 = \dfrac{1}{log_3 10}}$

g) $\boldsymbol{ln\,0{,}25 = -2\,ln\,2}$

h) Si $\boldsymbol{log_2 A^2 + log_2 A^3 + log_2 A^4 = 36}$**, entonces** $\boldsymbol{A = 4}$**.**

i) Si $\boldsymbol{log_A 3 + log_A 27 + log_A 9 = 12}$**, entonces** $\boldsymbol{A = \sqrt{3}}$**.**

a) No es cierto ya que $log_2 (2 \cdot 1) = log_2 2 + log_2 1$ y con la calculadora $log_2 2 = 1$.

b) $\frac{1}{2} log\,5 = 0{,}3494 \ne 1{,}3979 = log\,25$

No es cierto. Además, usando las propiedades de los logaritmos sabemos que:

$\frac{1}{2} log\,5 = log\,5^{\frac{1}{2}} = log\,\sqrt{5}$

$log\,25 = log\,5^2$ y vemos también que no son iguales.

c) Cierto ya que $10^2 = 100$ y $10^3 = 1\,000$. Con calculadora, $log\,500 = 2{,}6989$.

d) Cierto ya que:

$log\,0{,}05 = log\,(5 \cdot 10^{-2}) = log\,5 + log\,10^{-2} = log\,5 - 2$

Además $log\,5$ está entre 0 y 1 ya que $10^0 = 1$ y $10^1 = 10$. Y con calculadora: $log\,0{,}05 = -1{,}3010$.

e) Cierto ya que $log_2 (log\,10\,000) = log_2 4 = 2$.

f) Con calculadora; 0,4771 = 0,4771. Vemos que es cierto. Además haciendo un cambio de base vemos que $log_3 10 = \dfrac{log\,10}{log\,3} = \dfrac{1}{log\,3}$.

g) Con la calculadora: –1,3863 = –1,3863

h) Falso. Usando las propiedades de los logaritmos sabemos que:

$log_2 A^2 + log_2 A^3 + log_2 A^4 = log_2 (A^2 \cdot A^3 \cdot A^4) = log_2 A^9 = 36$ por lo que $2^{36} = (2^4)^9 \ne 4^9$.

i) Falso. Usando las propiedades de los logaritmos sabemos que

$log_A 3 + log_A 27 + log_A 9 = log_A (3 \cdot 27 \cdot 9) = log_A 3^6 = 12$ por lo que $A^{12} = (A^2)^6 = 3^6$ si $A = 3$.

3 **Si $log\,A = 1{,}45$; $log\,B = 2{,}3$ y $log\,C = 0{,}52$; calcula cada una de las siguientes expresiones:**

a) $log\,\dfrac{AB^2}{\sqrt[3]{C}}$

b) $log\,\dfrac{100A}{B^2\sqrt[3]{10C^4}}$

c) $log\left(\dfrac{A}{10}\sqrt[5]{\dfrac{B^2}{0{,}001C}}\right)$

d) $log\,\dfrac{A\cdot\sqrt[3]{0{,}1C^4}}{(1\,000B)^2}$

e) $log\left(10\cdot\sqrt[3]{\dfrac{0{,}1A^2}{10B}}\right)$

f) $\dfrac{1}{2}log\left(\dfrac{\sqrt[3]{C^4}}{(100A)^2}\right)^2$

a) $log\dfrac{AB^2}{\sqrt[3]{C}} = log\,AB^2 - log\sqrt[3]{C} = log\,A + log\,B^2 - \dfrac{1}{3}log\,C = 1{,}45 + 2\cdot 2{,}3 + \dfrac{1}{3}\cdot 0{,}52 = 5{,}87\widehat{6}$

b) $log\dfrac{100A}{B^2\sqrt[3]{10C^4}}\,log\,100A - \left(log\,B^2 + \dfrac{1}{3}log\,10C^4\right) = log\,100 + log\,A - 2\,log\,B - \dfrac{1}{3}(log\,10 + log\,C^4) =$

$= 2 + 1{,}45 - 2\cdot 2{,}3 - \dfrac{1}{3}(1 + 4\cdot log\,C) = -1{,}15 - \dfrac{1}{3}(1 + 2{,}8) = -2{,}41\widehat{6}$

c) $log\left(\dfrac{A}{10}\sqrt[5]{\dfrac{B^2}{0{,}001C}}\right) = log\dfrac{A}{10} + log\left(\sqrt[5]{\dfrac{B^2}{0{,}001C}}\right) = log\,A - log\,10 + \dfrac{1}{5}(2\,log\,B - log\;0{,}001C) =$

$= 1{,}45 - 1 + \dfrac{1}{5}\left[2\cdot 2{,}3 - (log\,0{,}001 + log\,C)\right] = 0{,}45 + \dfrac{1}{5}\left[4{,}6 - (log\,10^{-3} + 0{,}52)\right] =$

$= 0{,}45 + \dfrac{1}{5}(4{,}6 + 3 - 0{,}52) = 1{,}866$

d) $log\dfrac{A\sqrt[3]{0{,}1C^4}}{(1\,000B)^2} = log\,A + log\sqrt[3]{0{,}1C^4} - log\left[(1\,000B)^2\right] = 1{,}45 + \dfrac{1}{3}log\,0{,}1C^4 - 2\left(log\,1\,000 + log\,B\right) =$

$= 1{,}45 + \dfrac{1}{3}(log\,0{,}1 + 4\,log\,C) - 2\,(3 + 2{,}3) = 1{,}45 + \dfrac{1}{3}(-1 + 4\cdot 0{,}52) - 2\,(3 + 2{,}3) = -9{,}39$

e) $log\,10\sqrt[3]{\dfrac{0{,}1A^2}{10B}} = log\,10 + \dfrac{1}{3}(log\,0{,}1A^2 - log\,10B) = 1 + \dfrac{1}{3}(log\,0{,}1 + 2\,log\,A - log\,10 - log\,B) =$

$= 1 + \dfrac{1}{3}(-1 + 2\cdot 1{,}45 - 1 - 2{,}3) = 0{,}5\widehat{3}$

f) $\dfrac{1}{2}log\left(\dfrac{\sqrt[3]{C^4}}{100A^2}\right)^2 = log\sqrt[3]{C^4} - log[(100A)^2] = \dfrac{4}{3}log\,C - 2\left(log\,100 + log\,A\right) = \dfrac{4}{3}\cdot 0{,}52 - 2\,(2 + 1{,}45) =$

$= -6{,}20\widehat{6}$

4 **Halla en cada caso el valor de A:**

a) $ln\,A + ln\,A^2 + ln\,A^3 = 6$

b) $log\,A^2 + log\,A^3 + log\,A^7 = 6$

c) $ln\,A^7 + ln\,A^9 + ln\,A^{14} = 330$

d) $log_A 27^3 + log_A 27^2 + log_A 27^4 + log_A 27^7 = 48$

e) $log_A 6^2 + log_A 6^3 + log_A 6^5 = 30$

f) $log_A 2^2 + log_A 0{,}5^3 + log_A 4^4 + log_A 0{,}25 = 10$

a) $ln\,A + ln\,A^2 + ln\,A^3 = 6 \rightarrow ln\,A^6 = 6 \rightarrow e^6 = A^6 \rightarrow e = A$

b) $log\,A^2 + log\,A^3 + log\,A^7 = 6 \rightarrow log\,A^{12} = 6 \rightarrow 10^6 = A^{12} \rightarrow A = \sqrt{10}$

c) $ln\,A^7 + ln\,A^9 + ln\,A^{14} = 330 \rightarrow ln\,A^{30} = 330 \rightarrow e^{330} = A^{30} \rightarrow e^{33} = A^3 \rightarrow\; e^{11^3} = A^3 \rightarrow A = e^{11}$

d) $log_A 27^3 + log_A 27^2 + log_A 27^4 + log_A 27^7 = 48 \rightarrow log_A 27^{16} = 48 \rightarrow A^{48} = 27^{16} \rightarrow A^{3^{16}} = 27^{16} \rightarrow A = \sqrt[3]{27}$

e) $log_A 6^2 + log_A 6^3 + log_A 6^5 = 30 \rightarrow log_A 6^{10} = 30 \rightarrow A^{30} = 6^{10} \rightarrow A^3 = 6 \rightarrow A = \sqrt[3]{6}$

f) $log_A 2^2 + log_A 0{,}5^3 + log_A 4^4 + log_A 0{,}25 = 10 \rightarrow log_A 4 + 3\,log_A 0{,}5 + 4\,log_A 4 + 2\,log_A 0{,}5 = 10 \rightarrow$

$\rightarrow 5\,log_A 4 + 5\,log_A 0{,}5 = 10 \rightarrow 5\,log_A(4\cdot 0{,}5) = 10 \rightarrow log_A 2 = 2 \rightarrow A = \sqrt{2}$

5 ▶ EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS REALES. NÚMEROS APROXIMADOS

C.E.: CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.-EA 1.5.3.) CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.) CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.) CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3-EA 2.1.4.)

Página 47

1 **[El enunciado requiere un análisis que permite que el alumnado trabaje la expresión escrita].**

¿Verdadero o falso?

I. El precio de esta vivienda es, aproximadamente, de 390 000 €, con un error menor que 10 000 €.

II. El precio del menú del día es, aproximadamente, de 12 €, con un error menor que 1 €.

En I el error absoluto es mucho mayor que en II, pero el error relativo es menor.

I. E.R. $< \dfrac{10000}{390000} = 2,5641 \cdot 10^{-2} = 0,025641 \to$ E.R. $< 2,6\,\%$

II. E.R. $< \dfrac{1}{12} = 8,3333 \cdot 10^{-2} = 0,08333 \to$ E.R. $< 8,3\,\%$

El error absoluto nos lo dicen y es mayor en I que en II. Hemos calculado el error relativo en cada caso y vemos que es verdadera la afirmación.

2 **Di una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes mediciones:**

a) Daniel le dice a su hermana María que la superficie de su casa es de 96,4 m².

b) Por la gripe se han perdido 37 millones de horas de trabajo.

c) Juana gana unos 25 000 € al año.

a) E.A. $< 0,05$ m^2; E.R. $< \dfrac{0,05}{96,4} = 5,1867 \cdot 10^{-4} = 0,00051867 \to$ E.R. $< 0,05\,\%$

b) E.A. $< 0,5$ millones de horas $= 500\,000$ horas

E.R. $< \dfrac{0,5}{37} < 0,014 \to 1,4\,\%$

c) Si suponemos que los tres ceros finales se han utilizado para poder expresar la cantidad (es decir, que se trata de 25 000, redondeando a los «miles de euros»), entonces:

E.A. $< 0,5$ miles de € $= 500$ €; E.R. $< \dfrac{0,5}{25} < 0,02 \to 2\,\%$

Si suponemos que es 25 000 € exactamente:

E.A. $< 0,5$ €; E.R. $< \dfrac{0,5}{25\,000} < 0,00002 \to 0,002\,\%$

Página 48

3 **Calcula en notación científica sin usar la calculadora.**

a) $(800\,000 : 0,0002) \cdot 0,5 \cdot 10^{12}$

b) $0,486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7}$

a) $(800\,000 : 0,0002) \cdot 0,5 \cdot 10^{12} = \left((8 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^{-4})\right) \cdot 5 \cdot 10^{11} =$

$= (4 \cdot 10^9) \cdot 5 \cdot 10^{11} = 20 \cdot 10^{20} = 2 \cdot 10^{21}$

b) $0,486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-}9 - 6 \cdot 10^{-7} = 48,6 \cdot 10^{-7} + 0,93 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-7} =$

$= 43,53 \cdot 10^{-7} = 4,353 \cdot 10^{-6}$

4 **Opera con la calculadora:**

a) $(3,87 \cdot 10^{15} \cdot 5,96 \cdot 10^{-9}) : (3,941 \cdot 10^{-6})$

b) $8,93 \cdot 10^{-10} + 7,64 \cdot 10^{-10} - 1,42 \cdot 10^{-9}$

a) $(3,87 \cdot 10^{15} \cdot 5,96 \cdot 10^{-9}) : (3,941 \cdot 10^{-6}) \approx 5,85 \cdot 10^{12}$

b) $8,93 \cdot 10^{-10} + 7,64 \cdot 10^{-10} - 1,42 \cdot 10^{-9} = 2,37 \cdot 10^{-10}$

7 FÓRMULA DEL BINOMIO DE NEWTON

C.E.: CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.)

Página 51

1 Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(x+3)^5$ **b)** $(2x-x^2)^4$ **c)** $\left(3x^2+\dfrac{x}{3}\right)^6$

d) $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}\right)^6$ **e)** $\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2x}\right)^4$ **f)** $\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x^2}\right)^5$

a) $(x+3)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 \cdot 3 + \binom{5}{2}x^3\,3^2 + \binom{5}{3}x^2\,3^3 + \binom{5}{4}x \cdot 3^4 + \binom{5}{5}3^5 =$

$= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$

b) $(2x-x^2)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 - \binom{4}{1}(2x)^3 \cdot x^2 + \binom{4}{2}(2x)^2 \cdot (x^2)^2 - \binom{4}{3}2x \cdot (x^2)^3 + \binom{4}{4}(x^2)^4 =$

$= x^8 - 8x^7 + 24x^6 - 32x^5 + 16x^4$

c) $\left(3x^2+\dfrac{x}{3}\right)^6 = 729x^{12} + 486x^{11} + 135x^{10} + 20x^9 + \dfrac{5}{3}x^8 + \dfrac{2}{27}x^7 + \dfrac{1}{729}x^6$

d) $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}\right)^6 = \binom{6}{0}\left(\dfrac{x}{2}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^5\left(\dfrac{1}{x}\right) + \binom{6}{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^4\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + \binom{6}{3}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^3 +$

$+ \binom{6}{0}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{x}\right)^4 + \binom{6}{5}\left(\dfrac{x}{2}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right)^5 + \binom{6}{6}\left(\dfrac{1}{x}\right)^6 =$

$= \dfrac{15}{4x^2} + \dfrac{15}{16}x^2 + \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{3}{16}x^4 + \dfrac{1}{x^6} + \dfrac{1}{64}x^6 + \dfrac{5}{2}$

e) $\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2x}\right)^4 = \dfrac{1}{16}x^8 + \dfrac{1}{4}x^5 + \dfrac{3}{8}x^2 + \dfrac{1}{4}x^{-1} + \dfrac{1}{16}x^{-4}$

f) $\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x^2}\right)^5 = \dfrac{1}{243}x^5 + \dfrac{5}{27}x^2 + \dfrac{10}{3}x^{-1} + 30x^{-4} + 135x^{-7} + 243x^{-10}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 52

1. Intervalos y valor absoluto

Hazlo tú

- **¿Para qué valores de x se verifica $|3x - 7| < 5$?**

  Seguimos el razonamiento del apartado a) del ejercicio 1 de esta página:

  $3x - 7 < 5 \rightarrow x < 4$

  $3x - 7 > -5;\ 3x > -2 \rightarrow x > \dfrac{2}{3}$

  Los valores que verifican la expresión son los del intervalo $\left(\dfrac{2}{3}, 4\right)$.

2. Propiedades del número áureo

Hazlo tú

- **Prueba que $\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$.**

  $1 + \dfrac{1}{\phi} = \dfrac{\phi + 1}{\phi}$

  Aplicando lo demostrado en 2a), que indica que $\phi^2 = 1 + \phi$:

  $\dfrac{\phi + 1}{\phi} = \dfrac{\phi^2}{\phi} = \phi$

3. Demostraciones con radicales

Hazlo tú

- **Prueba: $\left(\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\right) = 2$**

  Aplicando lo demostrado en 3a) y 3b):

  $\left(\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\right) = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3}\ \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3}$

  Por lo tanto la raíz cúbica se compensa con el cubo:

  $(2 + \sqrt{2})\,(2 - \sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2 = 2$

Página 53

4. Racionalización de denominadores

Hazlo tú

- **Racionaliza:** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,(2\sqrt{3}+3)}$

Multiplicamos por $\sqrt{2}$ numerador y denominador:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}+3\right)} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}+3\right)} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2\left(2\sqrt{3}+3\right)}$$

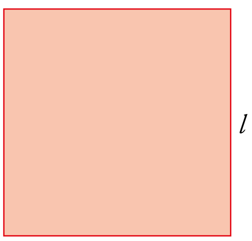
Ahora multiplicamos por el binomio conjugado del denominador:

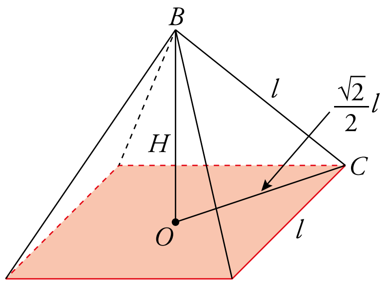
$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2\left(2\sqrt{3}+3\right)} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}-3\right)}{2\left(2\sqrt{3}+3\right)\left(2\sqrt{3}-3\right)} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{3}-3\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\left(4\cdot 3-9\right)} = \frac{6\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{6} = \sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{6}$$

5. Problemas con radicales

Hazlo tú

- **El volumen de una pirámide cuadrangular regular cuyas caras laterales son triángulos equiláteros es $\dfrac{256}{3}\sqrt{2}$ cm³. Halla la longitud de su arista.**





La arista de la cara triangular es igual a la arista de la base.

$V_{Pirámide} = \frac{1}{3}A_{base}\cdot H = \frac{1}{3}l^2\cdot H = \frac{256}{3}\sqrt{2}$

La distancia $\overline{OC}$ es la mitad de la diagonal del cuadrado $\overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}l$.

La arista es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura H y el lado $\overline{OC}$.

Por ser la arista igual al lado de la base, $H^2 = l^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}l\right)^2 = \frac{1}{2}l^2$

$V_{Pirámide} = \frac{1}{3}l^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}l = \frac{1}{6}\sqrt{2}\,l^3$

Por tanto, $\frac{1}{6}\sqrt{2}\,l^3 = \frac{256}{3}\sqrt{2} \Rightarrow l^3 = 256\cdot 2 = 512 \Rightarrow l = \sqrt[3]{512} = 8$

6. Logaritmos. Propiedades

Hazlo tú

- **Calcula x en estos casos:**

a) $\log_7 x = -2$

b) $\ln 3^{x-1} = 5$

c) $2 \log x - \log 4 = 2 \log 3$

a) $\log_7 x = -2$

Usamos la definición de logaritmo: 2 es el exponente que tiene que tener la base 7, para que nos dé x:

$x = 7^{-2}$; $x = \dfrac{1}{49}$

b) $\ln 3^{x-1} = 5$

Aplicamos la propiedad de los logaritmos: $\log_a m^n = n\log_a m$.

$(x-1)\ln 3 = 5 \rightarrow x - 1 = \dfrac{5}{\ln 3} \rightarrow x = \dfrac{5}{\ln 3} + 1 \rightarrow x = 5{,}5512$

c) $2\log x - \log 4 = 2\log 3$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$\log x^2 - \log 4 = \log 3^2$

$\log \dfrac{x^2}{4} = \log 9$; $\dfrac{x^2}{4} = 9$

Soluciones: $x = -6$, $x = 6$

Pero como no se pueden tomar logaritmos de números negativos, la única solución válida es $x = 6$.

Página 54

7. Logaritmos. Demostración de propiedades

Hazlo tú

- **Demuestra:** $\log_a \dfrac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q$

$\log_a \dfrac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q$

Llamamos $\log_a P = x$; $\log_a Q = y$

Expresamos P y Q como potencias usando la definición de logaritmo:

$P = a^x$; $Q = a^y$

Demostración:

$$\log_a \frac{P}{Q} = \log_a \frac{a^x}{a^y} = \log_a a^{x-y} = x - y = \log_a P - \log_a Q$$

9. Factoriales y números combinatorios

Hazlo tú

- **Calcula m sabiendo que $\binom{m}{2} = 3!$.**

$\binom{m}{2} = 3!$

$\dfrac{m(m-1)}{2 \cdot 1} = 3 \cdot 2 \cdot 15$; $m^2 - m - 12 = 0$; $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2}$ $\begin{cases} m = 4 \\ m = -3 \end{cases}$

Como m tiene que ser positivo, $m = 4$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.)

Página 55

1. Simplificación de radicales

- **Simplificar las siguientes expresiones:**

a) $\sqrt{3\sqrt{\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{3}}{\sqrt{108}}}}$ **b)** $\sqrt{4a^2cd+8abcd+4b^2cd}$

a) $\sqrt{3\sqrt{\dfrac{\sqrt{2^2 3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 3^3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\dfrac{1}{6}}} = \sqrt{\sqrt{\dfrac{3^2}{6}}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^2}{6}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^2}{3\cdot 2}} = \sqrt[4]{\dfrac{3}{2}}$

b) $\sqrt{4a^2cd+8abcd+4b^2cd} = \sqrt{4cd(a^2+2ab+b^2)} = 2(a+b)\sqrt{cd}$

2. Notación científica

- **Calcular en notación científica sin usar la calculadora y expresar el resultado con tres cifras significativas.**

$$\mathbf{\frac{13{,}3\cdot 10^3-0{,}072\cdot 10^5}{0{,}85\cdot 10^{-3}-3{,}2\cdot 10^{-4}-4{,}5\cdot 10^{-5}}}$$

$$\frac{13{,}3\cdot 10^3-0{,}072\cdot 10^5}{0{,}85\cdot 10^{-3}-3{,}2\cdot 10^{-4}-4{,}5\cdot 10^{-5}} = \frac{10^3}{10^{-4}}\left(\frac{13{,}3-7{,}2}{8{,}5-3{,}2-0{,}45}\right) = 10^7\,\frac{6{,}1}{4{,}85} = 1{,}26\cdot 10^7$$

3. Cálculo del perímetro con radicales

- **En un trapecio rectángulo, la base menor mide $4-\sqrt{5}$ cm, la base mayor, $7+2\sqrt{5}$ cm y la altura, $4(1+\sqrt{5})$ cm. Hallar el perímetro del trapecio, utilizando radicales.**

Calculamos primero x:

$7+2\sqrt{5}-(4-\sqrt{5}) = x \to x = 3(1+\sqrt{5})$

Calculamos ahora l usando el teorema de Pitágoras:

$l^2 = x^2+h^2 = \left[3(1+\sqrt{5})\right]^2+[4(1+\sqrt{5})]^2 = 9(1+\sqrt{5})^2+16(1+\sqrt{5})^2 = 25(1+\sqrt{5})^2$

Por lo tanto, $l = 5(1+\sqrt{5})$.

Solamente nos queda calcular el perímetro sumando los lados del trapecio:

$P = 7+2\sqrt{5}+(4-\sqrt{5})+4(1+\sqrt{5})+5(1+\sqrt{5}) = 10(2+\sqrt{5})$ cm

4. Propiedades de los logaritmos

- **Simplificar esta expresión y hallar su parte entera:** $\mathbf{\dfrac{1}{\log_{1/3}\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{\log_{1/5}\frac{1}{2}}}$

Usando la propiedad indicada transformamos las fracciones, y luego aplicamos la propiedad 4:

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}}+\frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5} = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{15}$$

Como $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8} = 3$ y $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16} = 4$, la parte entera que buscamos es 3.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 56

Para practicar

Números racionales e irracionales

1 **Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, pertenecen:**

$$5;\ -7;\ \frac{5}{4};\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ 4,\widehat{7};\ \frac{\pi}{2}$$

$5, \sqrt{\frac{18}{2}} \in \mathbb{N}$ $\quad 5, \sqrt{\frac{18}{2}}, -7 \in \mathbb{Z}$ $\quad 5;\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -7;\ \frac{5}{4};\ 4,\widehat{7} \in \mathbb{Q}$ $\quad 5;$

$\sqrt{\frac{18}{2}};\ -7;\ \frac{5}{4};\ 4,\widehat{7};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$

2 **¿Cuáles de estos números son irracionales? Expresa como fracción los que sea posible:**

a) $3,181818...$ **b)** $\sqrt{1,\widehat{7}}$ **c)** $\sqrt{8}$ **d)** $1,020020002...$

e) $-4,0333...$ **f)** $\sqrt[3]{81}$ **g)** $1,3999...$ **h)** 2π

a) $3,181818... = \frac{318-3}{99} = \frac{315}{99} = \frac{35}{11}$

b) $\sqrt{1,\widehat{7}} = \sqrt{\frac{17-1}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

c) $\sqrt{8}$ Irracional.

d) $1,020020002...$ Irracional.

e) $-4,0333... = -\frac{403-40}{90} = -\frac{121}{30}$

f) $\sqrt[3]{81}$ Irracional.

g) $1,3999... = \frac{139-13}{90} = \frac{7}{5}$

h) 2π Irracional.

3 **Indica el conjunto mínimo ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$) al que pertenece cada uno de los siguientes números:**

$$\sqrt{3};\ -\sqrt{121};\ 3,\widehat{17};\ \sqrt{0,81};\ 0,1234...;\ \sqrt[3]{125}$$

$\sqrt{3} \in \mathbb{I}$

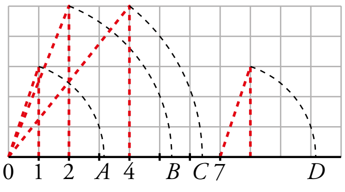
$-\sqrt{121} = -\sqrt{11^2} = -11 \in \mathbb{Z}$

$3,1\widehat{7} \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{0,81} = \sqrt{0,9^2} = 0,9 \in \mathbb{Q}$

$0,1234\ ... \in \mathbb{I}$

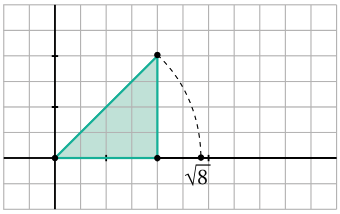
$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5 \in \mathbb{N}$

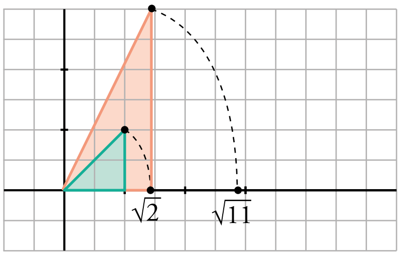
4 

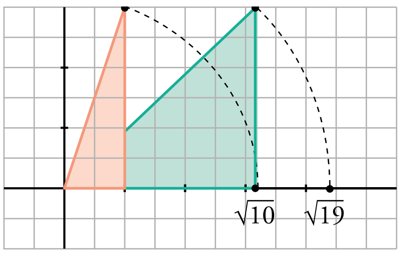
¿Qué números irracionales representan los puntos A, B, C y D? Justifica la respuesta.

$A = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ $\quad B = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$ $\quad C = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$ $\quad D = 7 + \sqrt{1^2+3^2} = 7+\sqrt{10}$

5 **Representa los siguientes números sobre la recta real: $\sqrt{8}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt{19}$**







Intervalos, semirrectas y valor absoluto

6 **Representa gráficamente y expresa como intervalo o como semirrecta los números que cumplen la condición dada en cada caso.**

a) x **es menor que –5.**

b) 3 es menor o igual que x**.**

c) x **está comprendido entre –5 y 1.**

d) x **está entre –2 y 0, ambos incluidos.**

e) x **es mayor o igual que –3 y menor que 2.**

a) $x < -5$; $(-\infty, -5)$ b) $3 \le x$; $[3, +\infty)$ c) $-5 < x < 1$; $(-5, 1)$

d) $-2 \le x \le 0$; $[-2, 0]$ e) $[-3, 2)$; $-3 \le x < 2$

7 **Escribe la desigualdad que verifica todo número** x **que pertenece a estos intervalos o semirrectas:**

a) $[-2, 7]$ **b)** $[13, +\infty)$ **c)** $(-\infty, 0)$

d) $(-3, 0]$ **e)** $[3/2, 6)$ **f)** $(0, +\infty)$

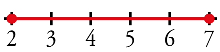
a) $-2 \le x \le 7$ b) $x \ge 13$ c) $x < 0$

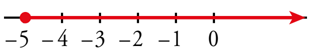
d) $-3 < x \le 0$ e) $\dfrac{3}{2} \le x < 6$ f) $0 < x < +\infty$

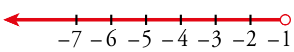
8 **Escribe y representa el tramo de recta que corresponde a cada desigualdad.**

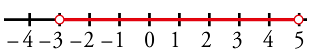
a) $2 \le x \le 7$ **b)** $-5 \le x$

c) $x < -1$ **d)** $5 > x > -3$

a) 

b) 

c) 

d) 

9 **Expresa como un único intervalo.**

a) $[-3, 2] \cap [0, 5]$ **b)** $[2, +\infty) \cap (0, 10)$

c) $(1, 6] \cap [2, 7)$ **d)** $[-1, 3) \cap (0, 4)$

a) $[0, 2]$ b) $[2, 10)$

c) $[2, 6]$ d) $(0, 3)$

10 **Expresa en cada caso $A \cap B$ y $A \cup B$.**

a) $A = [-3, 6]$ $\quad B = (2, +\infty)$

b) $A = [0; 2{,}5)$ $\quad B = (-\infty, 4)$

c) $A = (-\infty, -2)$ $\quad B = (-2, +\infty)$

a) $A \cap B = (2, 6]$ $\quad A \cup B = (-3, +\infty)$

b) $A \cap B = [0; 2{,}5)$ $\quad A \cup B = (-\infty; 2{,}5)$

c) $A \cap B = \varnothing$ $\quad A \cup B = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

11 **Expresa estos conjuntos en forma de intervalo:**

a) $|x| < 7$ $\quad$ **b)** $|x| \ge 5$ $\quad$ **c)** $|2x| < 8$

d) $|x - 1| \le 6$ $\quad$ **e)** $|x + 2| > 9$ $\quad$ **f)** $|x - 5| \ge 1$

a) $(-7, 7)$ $\quad$ b) $[-\infty, -5] \cup [5, +\infty]$ $\quad$ c) $(-4, 4)$

d) $[-5, 7]$ $\quad$ e) $(-11, 7)$ $\quad$ f) $(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$

12 **Escribe mediante intervalos los posibles valores de x para que se pueda calcular la raíz en cada caso.**

a) $\sqrt{x-4}$ $\quad$ **b)** $\sqrt{2x+1}$ $\quad$ **c)** $\sqrt{-x}$

d) $\sqrt{3-2x}$ $\quad$ **e)** $\sqrt{-x-1}$ $\quad$ **f)** $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$

a) $x - 4 \ge 0 \Rightarrow x \ge 4$; $[4, +\infty)$

b) $2x + 1 \ge 0 \Rightarrow 2x \ge -1 \Rightarrow x \ge -\frac{1}{2}$; $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$

c) $-x \ge 0 \Rightarrow x \le 0$; $(-\infty, 0]$

d) $3 - 2x \ge 0 \Rightarrow 3 \ge 2x \Rightarrow x \le$; $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

e) $-x - 1 \ge 0 \Rightarrow -1 \ge x$; $(-\infty, -1]$

f) $1 + \frac{x}{2} \ge 0 \Rightarrow 2 + x \ge 0 \Rightarrow x \ge -2$; $[-2, +\infty)$

13 **Se denomina entorno de centro a y radio r al intervalo abierto $(a - r, a + r)$.**

a) **Describe como entorno el intervalo $I = (-3, 5)$. Ten en cuenta que el centro es el punto medio entre –3 y 5 y el radio la distancia del centro a uno de sus extremos.**

b) **Expresa como intervalo el entorno de centro –5,2 y radio 0,8**

a) Es el entorno de centro $a = 1$ y radio $r = 4$.

b) $I = (-6; 4{,}4)$

14 **Escribe en forma de intervalo los siguientes entornos:**

a) **Centro –1 y radio 2**

b) **Centro 2 y radio 1/3**

a) $(-1 - 2, -1 + 2) = (-3, 1)$

b) $\left(2 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

15 **Describe como entornos los siguientes intervalos:**

a) **(–1, 2)** **b)** **(1,3; 2,9)** **c)** **(–2,2; 0,2)** **d)** **(–4; –2,8)**

a) $C = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$; $R = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\rightarrow$ Entorno de centro $\frac{1}{2}$ y radio $\frac{3}{2}$.

b) $C = \frac{1,3+2,9}{2} = 2,1$; $R = 2,9 - 2,1 = 0,8$ $\rightarrow$ Entorno de centro 2,1 y radio 0,8.

c) $C = \frac{-2,2+0,2}{2} = -1$; $R = 0,2 - (-1) = 1,2$ $\rightarrow$ Entorno de centro –1 y radio 1,2.

d) $C = \frac{-4+(-2,8)}{2} = -3,4$; r = –2,8 – (–3,4) = 0,6 $\rightarrow$ Entorno de centro –3,4 y radio 0,6.

Radicales y potencias

16 **Reduce a índice común y ordena de menor a mayor.**

a) $\sqrt[4]{5},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{6},\ \sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{6},\ \sqrt[5]{10}$ **d)** $\sqrt[4]{20},\ \sqrt[3]{9},\ \sqrt[6]{100}$

a) $\sqrt[12]{5^3},\ \sqrt[12]{3^4},\ \sqrt[12]{2^6};\ \sqrt[12]{125};\ \sqrt[12]{81};\ \sqrt[12]{64} \rightarrow \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$

b) $\sqrt[6]{216},\ \sqrt[6]{16} \rightarrow \sqrt[3]{4} < \sqrt{6}$

c) $\sqrt[20]{7\,776},\ \sqrt[20]{10\,000} \rightarrow \sqrt[4]{6} < \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[12]{20^3},\ \sqrt[12]{9^4},\ \sqrt[12]{100^2}$; tenemos $\sqrt[12]{10\,000};\ \sqrt[12]{6\,561};\ \sqrt[12]{8\,000} \rightarrow \sqrt[3]{9} < \sqrt[6]{100} < \sqrt[4]{20}$

17 **Saca del radical los factores que puedas.**

a) $\sqrt[3]{8a^5}$ **b)** $\sqrt{\frac{125a^2}{16b}}$ **c)** $\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}$

d) $\sqrt{\frac{16}{a^3}}$ **e)** $\sqrt{4a^2+4}$ **f)** $\sqrt{\frac{a}{9}+\frac{a}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot a^5} = 2a\sqrt[3]{a^2}$

b) $\sqrt{\frac{5^3 \cdot a^2}{2^4 \cdot b}} = \frac{5a}{4}\sqrt{\frac{5}{b}}$

c) $\sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{13}$

d) $\frac{4}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}$

e) $\sqrt{4(a^2+1)} = 2\sqrt{a^2+1}$

f) $\sqrt{\frac{25a}{16 \cdot 9}} = \frac{5\sqrt{a}}{12}$

18 **Simplifica los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[12]{64y^3}$ **b)** $\sqrt[4]{\frac{81}{64}}$ **c)** $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$

d) $\sqrt[6]{0,027}$ **e)** $\sqrt[8]{0,0016}$ **f)** $\sqrt[4]{1+\frac{9}{16}}$

a) $\sqrt[12]{2^6 \cdot y^3} = \sqrt[4]{2^2 \cdot y} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{y}$

b) $\sqrt[4]{\frac{3^4}{2^6}} = \frac{3}{\sqrt{2^3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

c) $\sqrt[8]{5^4} : \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} : \sqrt{5} = 1$

d) $\sqrt[6]{0,027} = \sqrt[6]{10^{-3}3^3} = \sqrt[6]{\frac{3^3}{10^3}} = \sqrt{\frac{3}{10}}$

e) $\sqrt[8]{0,0016} = \sqrt[8]{10^{-4}2^4} = \sqrt[8]{\frac{2^4}{10^4}} = \sqrt{\frac{2}{10}}$

f) $\sqrt[4]{1+\frac{9}{16}} = \sqrt[4]{\frac{25}{16}} = \sqrt[4]{\frac{5^2}{2^4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

19 **Reduce a índice común y simplifica.**

a) $\dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[3]{4}}$ **b)** $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[5]{8}$ **c)** $\sqrt[7]{81}\cdot\sqrt{3}$

a) $\dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[6]{4^2}}=\dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[6]{16}}=1$

b) $\sqrt[3]{4}\sqrt[5]{8}=\sqrt[15]{4^5}\sqrt[15]{8^3}=\sqrt[15]{2^{10}\cdot 2^9}=\sqrt[15]{2^{19}}=2\sqrt[15]{2^4}=2\sqrt[15]{2^4}=2\sqrt[15]{16}$

c) $\sqrt[7]{81}\sqrt[2]{3}=\sqrt[14]{3^8\cdot 3^7}=\sqrt[14]{3^{15}}=3\sqrt[14]{3}$

20 **Expresa con una única raíz.**

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$ **b)** $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$ **c)** $\left(\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}\right):\sqrt{a}$

a) $\sqrt[12]{4}=\sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[12]{2^4\cdot 2^3}=\sqrt[12]{2^7}=\sqrt[12]{128}$

c) $\sqrt[20]{\dfrac{a^{15}\cdot a^{16}}{a^{10}}}=\sqrt[20]{a^{21}}=a\sqrt[20]{a}$

Página 57

21 **Efectúa y simplifica, si es posible.**

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}\cdot\sqrt{a}$

c) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$

d) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}:\sqrt{\sqrt[3]{4}}$

a) $\sqrt[6]{2^2\cdot 3^3}=\sqrt[6]{108}$

b) $\sqrt[3]{a}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\cdot\sqrt{a}=\sqrt[6]{a}$

c) $\left(\sqrt[6]{\dfrac{2^5}{2^9}}\right)^3=\left(\sqrt[6]{\dfrac{1}{2^4}}\right)^3=\sqrt[6]{\dfrac{1}{2^{12}}}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 3}}:\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}=\sqrt[6]{2^2\cdot 3}:\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{3}$

22 **Completa en tu cuaderno los exponentes que faltan:**

$$\frac{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{a^{\square}\cdot a}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{\square}\cdot a^2}}}=\frac{a^{\square/\square}}{a^{\square/\square}}=a^{\square/\square}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{a^4\cdot a}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3\cdot a^2}}}=\frac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{5}{12}}}=a^{\frac{5}{12}}$$

23 **Expresa en forma de potencia de exponente fraccionario.**

a) $\left(4\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\right):(2\sqrt[4]{4})$

b) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}\cdot\sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{3}\right)^2}$

c) $\sqrt[4]{4^{-1}}\cdot\sqrt[6]{18}\cdot\sqrt[8]{12}$

d) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

a) $\left(4\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\right):\left(2\sqrt[4]{4}\right)=2\cdot\dfrac{4^{\frac{-1}{3}}}{4^{\frac{1}{4}}}=2\cdot 4^{\frac{-7}{12}}=2^{\frac{-1}{6}}$

b) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}\cdot\sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{3}\right)^2}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=3^{\frac{-1}{6}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$

c) $\sqrt[4]{4^{-1}}\cdot\sqrt[6]{18}\cdot\sqrt[8]{12}=2^{\frac{-2}{4}}\cdot(2\cdot 3^2)^{\frac{1}{6}}\cdot(2^2\cdot 3)^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{-1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{2}{8}}\cdot 3^{\frac{2}{6}+\frac{1}{8}}=2^{\frac{-1}{12}}\cdot 3^{\frac{11}{24}}=\left(\dfrac{3^{\frac{11}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{12}}$

d) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=\sqrt{2\sqrt{2\cdot 2^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt{2\cdot 2^{\frac{3}{4}}}=2^{\frac{7}{8}}$

24 **Calcula y simplifica.**

a) $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\frac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16}+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}-\frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $-\sqrt{54}+3\sqrt{24}-\sqrt{150}+\sqrt{294}$

a) $25\sqrt{5}+18\sqrt{5}-14\sqrt{5}+6\sqrt{5}=35\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{2^4}+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-\frac{21}{5}\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=2\sqrt[3]{2}+7\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-\frac{21}{5}\cdot 5\sqrt[3]{2}=-15\sqrt[3]{2}$

c) $-\sqrt{2\cdot 3^3}+3\sqrt{2^3\cdot 3}-\sqrt{2\cdot 3\cdot 5^2}+\sqrt{2\cdot 3\cdot 7^2}=-3\sqrt{2\cdot 3}+2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3}-5\sqrt{2\cdot 3}+7\sqrt{2\cdot 3}=5\sqrt{6}$

25 **Simplifica las siguientes expresiones:**

a) $\sqrt{18}+\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{72}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}}-4\sqrt{\frac{18}{125}}+\frac{7}{2}\sqrt{\frac{8}{45}}$

c) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{81a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{3^3}+\sqrt{2^3\cdot 3^2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+6\sqrt{2}=9\sqrt{2}-\sqrt{3}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}}-4\sqrt{\frac{2\cdot 3^2}{5^3}}+\frac{7}{2}\sqrt{\frac{2^3}{3^2\cdot 5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}-4\frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{7}{2}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}-\frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}=$

$=\left(1-\frac{12}{5}+\frac{7}{3}\right)\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{14}{15}\sqrt{\frac{2}{5}}$

c) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{3^4a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\frac{7}{5}3\sqrt[3]{3a}-2a\sqrt[3]{3a}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\left(\frac{21}{5}-2a-\frac{1}{5}\right)\sqrt[3]{3a}=(4-2a)\sqrt[3]{3a}$

26 **Racionaliza y simplifica.**

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

c) $\frac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$

e) $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

f) $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}-2}{3\cdot 2}=\frac{2(\sqrt{6}-1)}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{6}-1}{3}$

b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2^2\cdot 3}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{6+\sqrt{6}}{6}=1+\frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2(3-5)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-4}=-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$

d) $\frac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\frac{3(\sqrt{5}+2)}{5-4}=3(\sqrt{5}+2)=3\sqrt{5}+6$

e) $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}\cdot\frac{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}=\frac{13\sqrt{10}(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{5-9\cdot 2}=\frac{65\sqrt{2}+78\sqrt{5}}{-13}=-5\sqrt{2}-6\sqrt{5}$

f) $\frac{(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2)}{(3\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}-2)}=\frac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{27-4}=\frac{9\sqrt{2\cdot 3^2}-4\sqrt{2}}{23}=\frac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23}=\frac{23\sqrt{2}}{23}=\sqrt{2}$

27 **Racionaliza y simplifica.**

a) $\dfrac{2\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{50}}{-2\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}\,(3-\sqrt{2})}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt[3]{3}}$

e) $\dfrac{5\sqrt{8}-\sqrt{18}}{\sqrt{2}\,(\sqrt{8}-2)}$ f) $\dfrac{3}{7-\sqrt{5}}-\dfrac{10}{\sqrt{5}}$

a) $\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}\sqrt{6}-4\sqrt{18}}{36-12}=\dfrac{12-12\sqrt{2}}{24}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{50}}{-2\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{-2\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{-2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{-2\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{-10\sqrt{10}+10}{18}=10\cdot\dfrac{\left(1-\sqrt{10}\right)}{18}=\dfrac{5\left(1-\sqrt{10}\right)}{9}$

c) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}\cdot(-3\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{-3\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{-3}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{2}\sqrt[3]{3^2}}=\dfrac{\sqrt{2}\sqrt[3]{3^2}}{2\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{2}\sqrt[3]{3^2}}{6}$

e) $\dfrac{5\sqrt{8}-\sqrt{18}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{8}-2\right)}=\dfrac{10\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}-2\right)}=\dfrac{7\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{4+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\dfrac{28\sqrt{2}+28}{16-8}=\dfrac{7\sqrt{2}+7}{2}$

f) $\dfrac{3}{7-\sqrt{5}}-\dfrac{10}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}-70+10\sqrt{5}}{\sqrt{5}\left(7-\sqrt{5}\right)}=\dfrac{13\sqrt{5}-70}{7\sqrt{5}-5}\cdot\dfrac{7\sqrt{5}+5}{7\sqrt{5}+5}=\dfrac{455+65\sqrt{5}-490\sqrt{5}-350}{49\cdot 5-25}=$

$=\dfrac{105-425\sqrt{5}}{220}=\dfrac{21-85\sqrt{5}}{44}$

28 **Compara los números dados utilizando sus cuadrados:**

a) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ y $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ b) $\sqrt{5}-1$ y $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

a) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2=3+2\sqrt{3}\sqrt{5}+5=8+2\sqrt{15}\ \to\ \sqrt{3}+\sqrt{5}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

b) $\left(\sqrt{5}-1\right)^2=5-2\sqrt{5}+1=6-2\sqrt{5}\ \to\ \sqrt{5}-1=\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

29 **Simplifica** $\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}$.

* ***Eleva al cuadrado.***

Veamos que $\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}=\sqrt{2}$.

$\left(\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}\right)^2=7+\sqrt{13}-2\sqrt{7+\sqrt{13}}\sqrt{7-\sqrt{13}}+7-\sqrt{13}=14-2\sqrt{49-13}=14-12=2\ \to$

$\to\ \sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}=\sqrt{2}$

Logaritmos

30 **Expresa como potencia de la base y calcula aplicando la definición de logaritmo.**

a) $log_2\,1\,024$ b) $log\,0{,}001$ c) $log_2\,\dfrac{1}{64}$

d) $log_{\sqrt{3}}\,3$ e) $log_3\,\sqrt{3}$ f) $log_2\,\sqrt{8}$

g) $log_{1/2}\,\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ h) $log_\pi\,1$ i) $ln\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$

a) $log_2\,2^{10}=10$ b) $log\,10^{-3}=-3$ c) $log_2\,2^{-6}=-6$

d) $log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^2=2$ e) $log_3\,3^{1/2}=\dfrac{1}{2}$ f) $log_2\,2^{3/2}=\dfrac{3}{2}$

g) $log_{1/2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1/2}=-\dfrac{1}{2}$ h) 0 i) $ln\,e^{-1/3}=-\dfrac{1}{3}$

31 **Calcula la base de estos logaritmos:**

a) $\log_x 125 = 3$ **b)** $\log_x \frac{1}{9} = -2$ **c)** $\log_x \frac{1}{4} = 2$

d) $\log_x 2 = \frac{1}{2}$ **e)** $\log_x 0{,}04 = -2$ **f)** $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$

a) $x^3 = 125 \rightarrow x = 5$ b) $x^{-2} = \frac{1}{9} \rightarrow x = 3$ c) $x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

d) $x^{1/2} = 2 \rightarrow x = 4$ e) $x^{-2} = 0{,}04 \rightarrow x = 5$ f) $x^{-1/2} = 4 \rightarrow x = \frac{1}{16}$

32 **Calcula el valor de x en estas igualdades:**

a) $\log 3^x = 2$ **b)** $\log x^2 = -2$ **c)** $7^x = 115$

d) $5^{-x} = 3$ **e)** $\log_7 3x = 0{,}5$ **f)** $3^{2+x} = 172$

a) $x = \frac{2}{\log 3} = 4,19$ b) $2\log x = -2 \rightarrow x = \frac{1}{10}$ c) $x = \frac{\log 115}{\log 7} = 2,438$

d) $x = -\frac{\log 3}{\log 5} = -0,683$ e) $7^{0,5} = 3x \rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$ f) $2 + x = \log_3 172 \rightarrow x = \log_3 172 - 2$

33 **Si $\log k = x$, escribe en función de x.**

a) $\log 100k$ **b)** $\log \frac{k}{1\,000}$

c) $\log k^3$ **d)** $\log \sqrt[3]{10k}$

e) $\log \frac{1}{k}$ **f)** $(\log k)^{1/2}$

a) $\log 100 + \log k = 2 + x$ b) $\log k - \log 1\,000 = x - 3$

c) $3\log k = 3x$ d) $\frac{1}{3}(\log 10 + \log k) = \frac{1}{3}(1 + x)$

e) $\log 1 - \log k = 0 - x = -x$ f) $\sqrt{x}$

34 **Averigua, en cada caso, la relación entre x, y, z.**

a) $\log z = 2 - \log x - \frac{1}{2} \log y$

b) $\log z = 1 - \frac{1}{2} (\log x - \log y)$

c) $\ln z = 1 - 2 \ln x + 2 \ln y$

a) $\log z = \log 10^2 - \log x - \log \sqrt{y}$; $\log z = \log \frac{100}{x\sqrt{y}}$; $z = \frac{100}{x\sqrt{y}}$

b) $\log z = \log 10 - \frac{1}{2}\log \frac{x}{y}$; $\log z = \log 10 - \log\sqrt{\frac{x}{y}}$; $\log z = \log \frac{10}{\sqrt{\frac{x}{y}}}$; $z = \frac{10\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

c) $\ln z = \ln e - \ln x^2 + \ln y^2$; $\ln z = \ln \frac{e \cdot y^2}{x^2}$; $z = \frac{e \cdot y^2}{x^2}$

35 **Calcula x en cada caso.**

a) $35 = 21 \cdot 1{,}04^x$ **b)** $1{,}5 \cdot 10^{12} = 2^{-10x}$

c) $\log_x 0{,}3 = 2 - \log_x 2$ **d)** $\ln 5x + \ln \frac{x}{2} = 1$

a) Dividimos ambos miembros de la ecuación entre 21 y simplificamos:

$\frac{35}{21} = 1{,}04^x \rightarrow \frac{5}{3} = 1{,}04^x$

Aplicamos logaritmo a cada miembro de la ecuación para poder despejar la x, y luego sus propiedades:

$\log \frac{5}{3} = \log(1{,}04^x) = x \log 1{,}04 \rightarrow \frac{\log \frac{5}{3}}{\log 1{,}04} = x$

Con la calculadora aproximamos x con 4 cifras significativas $x = 13{,}02$.

b) $log\,1{,}5 + log\,10^{12} = -10x\,log\,2 \;\rightarrow\; x = \dfrac{log\,1{,}5 + log\,10^{12}}{-10\,log\,2}$

c) $log_x 0{,}3 + log_x 2 = 2 \;\rightarrow\; log_x (0{,}3 \cdot 2) = 2 \;\rightarrow\; log_x 0{,}6 = 2 \;\rightarrow\; x^2 = 0{,}6 \;\rightarrow\; x = \sqrt{0{,}6}$

d) $ln\dfrac{5x^2}{2} = 1 \;\rightarrow\; e^1 = \dfrac{5x^2}{2} \;\rightarrow\; x = \sqrt{(2e)/5}$

36 Calcula la parte entera de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{1}{log_{18} 20} + \dfrac{1}{log_{25} 20}$ **b)** $\dfrac{1}{log_{1/2}\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{log_{1/5}\frac{1}{3}}$

* ***Fíjate en el ejercicio guiado 4.***

a) $\dfrac{1}{log_{18}20} + \dfrac{1}{log_{25}20} = log_{20}18 + log_{20}25 = log_{20}450$

Dado que $20^2 = 400$, la parte entera es 2.

b) $\dfrac{1}{log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}} = log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{10}$

Dado que $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$, la parte entera es 2

37 Halla con la calculadora y comprueba el resultado mediante potenciación.

a) $log\sqrt{148}$ **b)** $ln\,(2{,}3 \cdot 10^{11})$ **c)** $ln\,(7{,}2 \cdot 10^{-5})$

d) $log_3 42{,}9$ **e)** $log_5 1{,}95$ **f)** $log_2 0{,}034$

a) 1,085

b) $ln\,(2{,}3 \cdot 10^{11}) \approx 26{,}16 \;\rightarrow\; e^{26{,}161} \approx 2{,}3 \cdot 10^{11}$

c) $ln\,(7{,}2 \cdot 10^{-5}) \approx -9{,}54 \;\rightarrow\; e^{-9{,}54} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-5}$

d) $3{,}42 \;\rightarrow\; 3^{3{,}42} \approx 42{,}9$

e) $0{,}41 \;\rightarrow\; 5^{0{,}41} \approx 1{,}95$

f) $-4{,}88 \;\rightarrow\; 2^{-4{,}88} \approx 0{,}034$

38 Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $log\dfrac{a^2\sqrt[5]{b^3}}{100c^4}$ **b)** $ln\dfrac{\sqrt[4]{x^3}\cdot e^5}{\sqrt{y}}$

a) $log\,a^2\sqrt[5]{b^3} - log\,100c^4 = log\,a^2 + log\sqrt[5]{b^3} - log\,10^2 - log\,c^4 = 2log\,a + \dfrac{3}{5}log\,b - 2 - 4log\,c$

b) $ln\dfrac{\sqrt[4]{x^3}e^5}{\sqrt{y}} = ln\sqrt[4]{x^3}e^5 - ln\sqrt{y} = ln\sqrt[4]{x^3} + ln\,e^5 - ln\sqrt{y} = \dfrac{3}{4}ln\,x + 5 - \dfrac{1}{2}ln\,y$

Página 58

Errores y notación científica

39 Acota el error que se comete al tomar 1,62 como aproximación del número de oro ϕ.

E.A. = $|1{,}618033\ldots - 1{,}62| < 0{,}003$

E.R. < $0{,}003/1{,}62 = 0{,}0019$

40 Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

a) $\dfrac{(3{,}12 \cdot 10^{-5} + 7{,}03 \cdot 10^{-4})\,8{,}3 \cdot 10^8}{4{,}32 \cdot 10^3}$

b) $\dfrac{(12{,}5\cdot 10^7 - 8\cdot 10^9)(3{,}5\cdot 10^{-5} + 185)}{9{,}2\cdot 10^6}$

c) $\dfrac{5{,}431\cdot 10^3 - 6{,}51\cdot 10^4 + 385\cdot 10^2}{8{,}2\cdot 10^{-3} - 2\cdot 10^{-4}}$

a) $1{,}41 \cdot 10^2$; E.A. $< 0{,}005 \cdot 10^2 = 0{,}5$

E.R. $< \dfrac{0{,}5}{141} < 0{,}00355$

b) $-1{,}58 \cdot 10^5$; E.A. $< 0{,}005 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^2$

E.R. $< \dfrac{5\cdot 10^2}{1{,}58\cdot 10^5} < 3{,}16 \cdot 10^{-3}$

c) $-2{,}65 \cdot 10^6$; E.A. $< 0{,}005 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^3$

E.R. $< \dfrac{5\cdot 10^3}{2{,}65\cdot 10^6} < 1{,}89 \cdot 10^{-3}$

41 **Escribe el radicando en notación científica, calcula y expresa el resultado aproximando a las milésimas.**

$$\sqrt{\frac{60\,000^3\cdot 0{,}00002^4}{100^2\cdot 72\,000\,000\cdot 0{,}0002^5}}$$

$$\sqrt{\frac{60\,000^3\cdot 0{,}00002^4}{100^2\cdot 72\,000\,000\cdot 0{,}0002^5}} = \sqrt{\frac{(6\cdot 10)^4\cdot(2\cdot 10^{-5})^4}{10^4\cdot 72\cdot 10^7\cdot(2\cdot 10^{-4})^5}} = \sqrt{150} = 12{,}247$$

Números combinatorios. Binomio de Newton

42 **Calcula.**

a) $\dfrac{8!}{5!}$ **b)** $\dfrac{10!}{9!}$ **c)** $\dfrac{5!+4!}{12}$

a) $\dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 8\cdot 7\cdot 6 = 336$ b) 10

c) $\dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{12} = \dfrac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\,(5+1)}{12} = 12$

43 **Calcula.**

a) $\dbinom{8}{4}$ **b)** $\dbinom{12}{7}$ **c)** $\dbinom{37}{35}$ **d)** $\dbinom{84}{1}$

a) $\dfrac{8!}{4!4!} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 70$ b) $\dfrac{12!}{7!5!} = \dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 792$

c) $\dfrac{37!}{35!2!} = \dfrac{37\cdot 36}{2} = 666$ d) $\dfrac{84!}{83!1!} = \dfrac{84\cdot 83!}{83!1!} = 84$

44 **Aplica las propiedades de los números combinatorios para obtener** n.

a) $\dbinom{6}{n+2} = 1$ **b)** $\dbinom{8}{n-3} = 8$ **c)** $\dbinom{9}{2} = \dbinom{9}{n}$

d) $\dbinom{13}{n-1} = \dbinom{13}{n+2}$ **e)** $\dbinom{10}{n} + \dbinom{10}{n+1} = \dbinom{11}{7}$ **f)** $\dbinom{n}{7} = \dbinom{n}{9}$

a) $n + 2 = 6 \to n = 4$; $n + 2 = 0 \to n = -2$ b) $n - 3 = 1 \to n = 4$; $n - 3 = 7 \to n = 10$

c) $n = 2$ o $n = 9 - 2 = 7$ d) $n - 1 + n + 2 = 13$; $2n + 1 = 13 \to n = 6$

e) $n = 6$ f) $n = 7 + 9 = 16$

45 Calcula m en cada caso.

a) $\binom{m-1}{2}=15$ **b)** $\binom{m}{1}+\binom{m}{2}=21$

a) $\binom{m-1}{2}=15 \rightarrow (m-1)\cdot(m-2)=15 \rightarrow \dfrac{m^2-3m+2}{2}=15 \rightarrow m^2-3m-28=0 \rightarrow$

$\rightarrow m=\dfrac{3\pm\sqrt{9+4\cdot 28}}{2}=\dfrac{3\pm 11}{2} \rightarrow m=7, m=-4$

Descartando la solución negativa nos queda que $m = 7$.

b) $\binom{m}{1}+\binom{m}{2}=21 \rightarrow m+\dfrac{m(m-1)}{2}=21 \rightarrow 2m+m^2-m=42 \rightarrow m^2+m-42=0 \rightarrow$

$\rightarrow m=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 42}}{2}=\dfrac{-1\pm 13}{2} \rightarrow m=6, m=-7$

Descartando la solución negativa nos queda que $m = 6$.

46 Simplifica y calcula el valor de n:

a) $3\binom{n+2}{3}=5\binom{n+1}{2}$ **b)** $\dfrac{2n!}{(n+1)!}=\dfrac{(n-4)!}{(n-3)!}$

a) $3\binom{n+2}{3}=5\binom{n+1}{2} \rightarrow 3\left(\dfrac{(n+2)(n+1)n}{32}\right)=5\left(\dfrac{(n+1)n}{2}\right)$

Simplificando:

$(n+2)(n+1)n = 5\cdot(n+1)n$

Eliminamos los términos que son iguales a cada lado de la igualdad y obtenemos:

$n+2=5 \rightarrow n=3$

b) $\dfrac{2n!}{(n+1)!}=\dfrac{(n-4)!}{(n-3)!} \rightarrow \dfrac{2n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)!}=\dfrac{(n-4)!}{(n-3)!}$

Simplificando a ambos lados:

$\dfrac{2(n-3)}{(n+1)}=1 \rightarrow 2n-6=n+1 \rightarrow n=7$

47 Desarrolla.

a) $(a^2-3b)^7$ **b)** $\left(\dfrac{a}{3}+2b\right)^5$

a) $\binom{7}{0}(a^2)^7+\binom{7}{1}(a^2)^6(-3b)+\binom{7}{2}(a^2)^5(-3b)^2+\binom{7}{3}(a^2)^4(-3b)^3+$

$+\binom{7}{4}(a^2)^3(-3b)^4+\binom{7}{5}(a^2)^2(-3b)^5+\binom{7}{6}(a^2)(-3b)^6+\binom{7}{7}(-3b)^7=$

$=a^{14}-21a^{12}b+189a^{10}b^2-945a^8b^3+2\,835a^6b^4-5\,103a^4b^5+5\,103a^2b^6-2\,187b^7$

b) $\binom{5}{0}\left(\dfrac{a}{3}\right)^5+\binom{5}{1}\left(\dfrac{a}{3}\right)^4 2b+\binom{5}{2}\left(\dfrac{a}{3}\right)^3(2b)^2+\binom{5}{3}\left(\dfrac{a}{3}\right)^2(2b)^3+\binom{5}{4}\left(\dfrac{a}{3}\right)(2b)^4+\binom{5}{5}(2b)^5=$

$=\dfrac{1}{243}a^5+\dfrac{10}{81}a^4b+\dfrac{40}{27}a^3b^2+\dfrac{80}{9}a^2b^3+\dfrac{80}{3}ab^4+32b^5$

48 Halla el noveno término del desarrollo de $(x^2-y^2)^{12}$.

Término noveno: $\binom{12}{8}(x^2)^4(-y^2)^8 = 495x^8y^{16}$

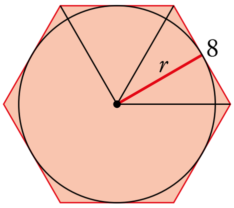
49 **Calcula el quinto término del desarrollo de** $\left(\frac{1}{x^2} - 2x\right)^8$**.**

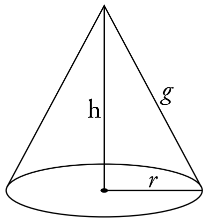
Término quinto: $\binom{8}{4}\left(\frac{1}{x^2}\right)^4(-2x)^4 = \frac{1120}{x^4}$

Para resolver

50 **En un prisma hexagonal de lado 8 dm, y altura 12 dm, se inscribe un cono. Calcula su área lateral con una cifra decimal y da una cota del error absoluto y una cota del error relativo cometidos.**

Vamos a calcular el radio de la base del cono inscrito en el hexágono regular.





$r = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ dm

La altura del cono coincide con la del prisma hexagonal, $h = 12$ dm

La generatriz del cono es $g = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 12^2} = 8\sqrt{3}$ dm

La superficie lateral del cono es:

$A_{Lateral} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 96\pi = 301{,}59$ dm^2

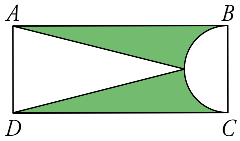
$A_{Lateral} = 301{,}6$ dm^2

E.A. $< 0{,}05$ dm^2

E.R. $< \frac{0{,}05}{301{,}59} = 1{,}6579 \cdot 10^{-4} = 0{,}00016579$, que equivale a un 0,02 %.

51 **En el rectángulo** ***ABCD,*** $\overline{AB} = 6\sqrt{12}$ **y** $\overline{AD} = 2\sqrt{18}$ **(en cm).**

Calcula el área de la parte coloreada.



- Los lados del rectángulo son *AB* y *AD* cuyas medidas ya tenemos, así que aplicamos la fórmula, aunque antes simplificamos las medidas de los lados:

  $\overline{AB} = 6\sqrt{12} = 12\sqrt{3}$

  $\overline{AD} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}$

  Directamente: $A_1 = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 12\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{2} = 72\sqrt{6}$ cm^2

- Sea h la altura del triángulo y *r* el radio de la semicircunferencia. Vamos a calcularlos.

  Sabemos que $r = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AD}}{2} = 3\sqrt{2}$.

  Vemos también que $\mathrm{h} = \overline{AB} - r = 12\sqrt{3} - 3\sqrt{2} = 3\left(4\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$.

  Y ya podemos calcular el área del triángulo:

  $$A_2 = \frac{\overline{AD} \cdot \mathrm{h}}{2} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \left(4\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}{2} = \frac{18\sqrt{2} \cdot \left(4\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}{2} = 9\sqrt{2} \cdot \left(4\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = 36\sqrt{6} - 18 =$$

  $$= 18\left(2\sqrt{6} - 1\right) \text{ cm}^2$$

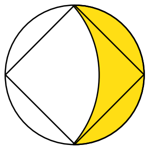
- El área del semicírculo es:

$$A_3 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2}{2} = 9\pi \text{ cm}^2$$

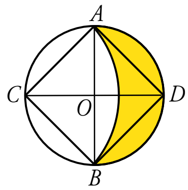
- $A = A_1 - A_2 - A_3 = 72\sqrt{6} - 18\left(2\sqrt{6} - 1\right) - 9\pi = 36\sqrt{6} + 18 - 9\pi = 9\left(4\sqrt{6} + 2 - \pi\right) \text{ cm}^2$

52 **[El uso de los datos que proporciona el enunciado permite que el alumnado trabaje la creación y creatividad (dimensión personal)].**

Si el lado del cuadrado inscrito en la circunferencia mide 1 m, ¿cuál es el área de la parte coloreada?



Llamaremos *r* al radio de la circunferencia dibujada, *D* a su diámetro, *O* al centro de la circunferencia.



- Calculemos el diámetro, *D*, y el radio, *r*.

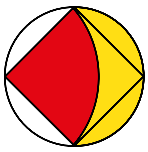
  Como el área del cuadrado *ABCD* es 1 ya que su lado mide 1, podemos deducir que el área del triángulo *ABC* es la mitad del área del cuadrado *ABCD*. Así $A_1 = \frac{1}{2}$ y aplicamos la fórmula de su área, sabiendo que el radio es la mitad del diámetro:

$$A_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OC}}{2} = \frac{D \cdot r}{2} = \frac{D \cdot \left(\frac{D}{2}\right)}{2} = \frac{D^2}{4}$$

  Entonces $\frac{D^2}{2} = 1$ y de aquí deducimos que $D = \sqrt{2}$ y $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Busquemos el área de la circunferencia del dibujo, cuyo radio es r: $A_2 = \pi r^2 = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$.

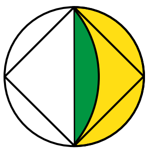
- Busquemos el área de la circunferencia cuyo radio es el lado del cuadrado. Así podremos saber el área roja del dibujo.



$A_3 = \pi r^2 = \pi$ (área de la circunferencia completa)

$A_4 = \frac{\pi}{4}$

- Busquemos ahora el área verde: $A_5 = A_4 - A_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$



- Ya solamente nos queda restar para encontrar el área amarilla:

$$A_6 = \frac{A_2}{2} - A_5 = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

53 **La longitud de una barra metálica después de calentarla es $l = l_0(1 + kt)$ donde l_0 es la longitud a 0 °C, t la temperatura final y k el coeficiente de dilatación lineal. Si una barra de plomo mide 1 m a 800 °C, ¿cuál es su longitud a 200 °C? (En el plomo, $k = 3 \cdot 10^{-5}$).**

Calculamos l_0 a partir de la longitud de la barra a 800 °C:

$l = l_0(1 + kt) = l_0(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 800) = l_0\left(\frac{128}{125}\right)$, luego $l_0 = \frac{125}{128}$

Calculamos ahora la longitud de la barra a 200 °C:

$l = l_0(1 + kt) = \frac{125}{128}(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 200) = \frac{125}{128} \cdot \frac{503}{500} = \frac{503}{512} = 0{,}98242$ m

54 **La estrella R136a1, descubierta recientemente, está a 165 000 años-luz y tiene una masa actual equivalente a 265 veces la masa del Sol. Expresa la distancia en kilómetros y la masa en kilogramos. Da, en cada caso, cotas del error absoluto y del error relativo.**

Un año luz es aproximadamente $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km.

La distancia de la estrella R136a1 a la Tierra es: $d = 165\,000 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} = 1{,}5609 \cdot 10^{18}$ km

E.A. $< 5 \cdot 10^{13}$ km

E.R. $< \frac{5 \cdot 10^{13}}{1{,}5609 \cdot 10^{18}} = 3{,}2033 \cdot 10^{-5} = 0{,}000032$, que equivale al 0,0032 %.

La masa del Sol es, aproximadamente, $1{,}9891 \cdot 10^{30}$ kg.

La masa de la estrella R136a1 es: $m = 265 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30} = 5{,}2711 \cdot 10^{32}$ kg

E.A. $< 5 \cdot 10^{27}$ kg

E.R. $< \frac{5 \cdot 10^{27}}{5{,}2711 \cdot 10^{32}} = 9{,}4857 \cdot 10^{-6} = 0{,}0000094857$, que equivale al 0,00095 %.

55 **Colocamos en un banco 75 000 € al 4,2 % anual con pago mensual de intereses.**

a) ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 4 años?

b) ¿Cuánto tiempo tardaremos en tener 100 000 €?

a) $75\,000 + 75\,000 \cdot 0{,}042 \cdot 4 = 87\,600$ €

b) $100\,000 € = 75\,000 € + 75\,000 \cdot 0{,}042 \cdot x \rightarrow \frac{25\,000}{75\,000 \cdot 0{,}042} = x \rightarrow x = \frac{1}{3 \cdot 0{,}042} = 7{,}936$ años

56 ODS Meta 3.8. **[Tras visionar el vídeo correspondiente a esta meta, el docente puede proponer un debate sobre las causas que provocan las dificultades que tienen muchas personas para acceder a servicios de salud].**

La cantidad de un fármaco que hay en la sangre de un paciente en mg/L al cabo de t horas, después de haberle inyectado puede estimarse mediante la función $f(t) = 5e^{-t/10}$.

¿Cuántas horas tardará en reducirse a la mitad?

Cuando le inyectan el fármaco, $t = 0$, por lo que la cantidad que tiene en sangre es $f(0) = 5e^0 = 5$.

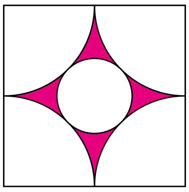
Queremos saber cuánto tiempo tiene que pasar para que el resultado sea $\frac{5}{2}$:

$$f(t) = 5e^{\frac{-t}{10}} = \frac{5}{2} \rightarrow e^{\frac{-t}{10}} = \frac{1}{2}$$

Aplicando el logaritmo neperiano a ambos miembros de la desigualdad:

$$\frac{-t}{10} = ln\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow t = -10\, ln\left(\frac{1}{2}\right) = 6{,}93$$

57 **Halla el área de la parte coloreada de esta figura en el que el lado del cuadrado mide 1 m. Expresa el resultado con números irracionales.**

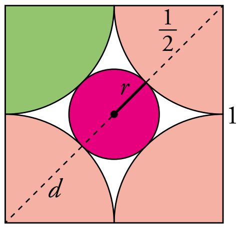


El área pedida es el área del cuadrado, menos cuatro veces el área verde y menos el área roja.

Cuatro veces el área verde es el área de un círculo de radio $\frac{1}{2}$, es decir, $4A_{Verde} = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi$

Llamamos d a la diagonal del cuadrado: $d = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Calculamos el radio: $r = \frac{d}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$



El área roja es el área del círculo de radio $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$.

$A_{Roja} = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi$

$\text{Área pedida} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \pi + 1.$

58 **Una escala habitualmente utilizada en la medición de la intensidad de los terremotos es la escala Richter. Los grados de intensidad se calculan mediante la expresión $R = log\ (A/p)$ donde A es la amplitud medida en micrómetros (1 µm = 10^{-4} cm) y p es el periodo medido en segundos.**

¿Cuál es la magnitud de un terremoto en la escala Richter si la amplitud es 10^{-1} cm y su periodo es de 2 segundos?

$A = 10^{-1}\ \text{cm} = 10^3\ \mu\text{m}$

$P = 2$ y, por tanto, $R = log\left(\frac{10^3}{2}\right) = 2{,}699\ldots$

Página 59

Cuestiones teóricas

59 **Explica si estas frases son verdaderas o falsas:**

a) Hay números irracionales que son enteros.

b) Todo número irracional es real.

c) Todos los números decimales son racionales.

d) Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.

a) F b) V c) F d) V

60 **¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.**

a) $\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{3}$ **b)** $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$

a) Falso.

Multiplicamos a ambos miembros por $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{6} + 2\sqrt{5} = \sqrt{6} + 6$$

Por tanto, si fuera cierto debería cumplirse que $2\sqrt{5} = 6$.

b) Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}-2\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)=4 \rightarrow 8-2(16-12)=4 \rightarrow 0=4$

Llegamos a una contradicción y deducimos que la igualdad es falsa.

61 **¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Explica por qué:**

a) $\boldsymbol{log\ m + log\ n = log\ (m+n)}$

b) $\boldsymbol{log\ m - log\ n = \dfrac{log\ m}{log\ n}}$

c) $\boldsymbol{log\ m - log\ n = log\ \dfrac{m}{n}}$

d) $\boldsymbol{log\ x^2 = log\ x + log\ x}$

e) $\boldsymbol{log\ (a^2-b^2) = log\ (a+b) + log\ (a-b)}$

a) Falso. $log\ m + log\ n = log\ (m \cdot n) \neq log\ (m+n)$

b) Falso. $log\ m - log\ n = log\left(\dfrac{m}{n}\right) \neq \dfrac{log\ m}{log\ n}$

c) Verdadero. Por una propiedad de los logaritmos.

d) Verdadero. $log\ x^2 = log\ (x \cdot x) = log\ x + log\ x$

e) Verdadero. $log\ (a^2-b^2) = log\ [(a+b)\cdot(a-b)] = log\ (a+b) + log\ (a-b)$

62 **Razona cuál es la parte entera de los siguientes logaritmos, sin utilizar la calculadora:**

a) $\boldsymbol{log\, 74}$ **b)** $\boldsymbol{log\, 2\,345}$ **c)** $\boldsymbol{log\, 567}$ **d)** $\boldsymbol{log\, 0{,}037}$

e) $\boldsymbol{log\, 0{,}02}$ **f)** $\boldsymbol{log_{\frac{1}{2}}\, 28}$ **g)** $\boldsymbol{log_{\frac{1}{4}}\, 0{,}3}$ **h)** $\boldsymbol{ln\, 5}$

a) Parte entera = 1 ya que $10^1=10$ y $10^2=100$.

b) Parte entera = 3 ya que $10^3=1\,000$.

c) Parte entera = 2 ya que $10^3=1\,000$.

d) Parte entera = –2 ya que $10^{-1}=0{,}1$ y $10^{-2}=0{,}01$.

e) Parte entera = –2 ya que $10^{-1}=0{,}1$ y $10^{-2}=0{,}01$.

f) Parte entera = –5 ya que $2^4=16$ y $2^5=32$. (Hay que ener en cuenta que $\dfrac{1}{2}=2^{-1}$).

g) Parte entera = 2 ya que $4^{-2}=\dfrac{1}{16}=0{,}06$ y $4^{-1}=0{,}25$.

h) Parte entera = 1 ya que $e^1=2{,}72$ y $e^2=7{,}39$.

63 **El logaritmo en base $\boldsymbol{a}$ de 100 excede en 2 unidades al logaritmo en base $\boldsymbol{a}$ de 25. Calcula $\boldsymbol{a}$.**

$log_a 100 = log_a 25 + 2 \rightarrow log_a(25 \cdot 4) = log_a 25 + 2 \rightarrow log_a 25 + log_a 4 = log_a 25 + 2$

Por lo tanto: $log_a 4 = 2$ y $a=2$

Para profundizar

64 **Halla el valor de esta expresión:**

$$\boldsymbol{(8^{n+1}+8^n)^2 : (4^n-4^{n-1})^3}$$

$$\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3}=\frac{(8^n(8+1))^2}{(4^{n-1}(4-1))^3}=\frac{8^{2n}\cdot 9^2}{4^{3n-3}\cdot 3^3}=\frac{2^{3\cdot 2n}\cdot 3^4}{2^{2(3n-3)}\cdot 3^3}=2^{6n-6n+6}\cdot 3=2^6\cdot 3=192$$

65 **Averigua el valor de $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{m}$, y $\boldsymbol{p}$ para que se cumpla la siguiente igualdad: $\boldsymbol{\sqrt[n]{2^m 3^p}=\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[4]{24}}$**

$$\sqrt[n]{2^m 3^p}=\sqrt[3]{36}\sqrt[4]{24} \rightarrow \sqrt[3]{36}\sqrt[4]{24}=\sqrt[3]{2^2\cdot 3^2}\sqrt[4]{3\cdot 2^3}=\sqrt[12]{2^8 3^8 2^9 3^3}=\sqrt[12]{2^{17}3^{11}} \rightarrow n=12, m=17, p=11$$

66 ¿Cuál es el número de cifras de $4^{16} \cdot 5^{25}$?

$4^{16} \cdot 5^{25} = 2^{32} \cdot 5^{25} = 2^{32-25} \cdot 10^{25} = 2^7 \cdot 10^{25}$

$2^7 = 128$, luego tiene $3 + 25 = 28$ cifras.

67 Demuestra que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Desarrollamos $(1+1)^n$ por el binomio de Newton:

$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$

Por otra parte, $(1+1)^n = 2^n$, luego $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

68 Expresa mediante intervalos o semirrectas los valores de x que cumplen las siguientes desigualdades:

a) $x + |x - 5| > 11$ **b) $|x| - |x + 7| < 0$**

a) $(8, +\infty)$

b) Es cierta siempre y por lo tanto $(-\infty, +\infty)$ porque:

$|x| - |x + 7| < |x| - |x| - |7| = -|7| < 0$

69 a) Expresa $10^{136,24}$ en notación científica.

b) Utiliza los logaritmos para expresar 3^{400} en notación científica.

a) $10^{136,24} = 10^{13\,624 \cdot 10^{-2}} = 10^{13\,624 \cdot 10^{-2}}$

b) Buscamos un número x tal que $3^{400} = 10^x$. Aplicando logaritmos:

$log(3^{400}) = log(10^x) \to 400\, log 3 = x\, log 10 \to 400 \cdot 0,477 = x$

Por tanto, podemos expresar: $x = 1,908 \cdot 10^2$

70 Determina la parte entera de las siguientes sumas de logaritmos:

a) $log_{\frac{1}{3}} 5 + log_{\frac{1}{8}} 5$ **b) $log_7 \frac{1}{5} + log_{19} \frac{1}{5}$**

a) $log_{\frac{1}{3}} 5 + log_{\frac{1}{3}} 5 = \dfrac{1}{log_5 \frac{1}{3}} + \dfrac{1}{log_5 \frac{1}{8}} = -log_5 \frac{1}{3} - log_5 \frac{1}{8} = -\left(log_5 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}\right)\right) = -log_5 \frac{1}{24} = log_5 24$

Su parte entera es –2.

b) $log_7 \frac{1}{5} + log_{19} \frac{1}{5} = -log_{\frac{1}{5}} 7 - log_{\frac{1}{5}} 19 = -(log_{\frac{1}{5}} 133)$

Su parte entera es –1.

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.-EA 2.1.4.-EA 2.1.5.-EA 2.1.6.)

Página 59

1 **Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ pertenecen:**

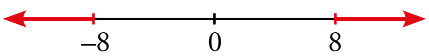
$$-\frac{58}{45};\ \frac{51}{17};\ \frac{\pi}{3};\ \sqrt[4]{-3};\ \sqrt[3]{-8};\ \sqrt[5]{2^3};\ 1,0\widehat{7}$$

$\mathbb{N}$: $\frac{51}{17}$ $\mathbb{Z}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$ $\mathbb{Q}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$; $-\frac{58}{45}$; $1,0\widehat{7}$ $\mathbb{R}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$; $-\frac{58}{45}$; $1,0\widehat{7}$; $\frac{\pi}{3}$; $\sqrt[5]{2^3}$

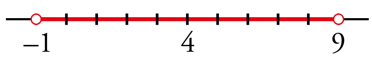
2 **Expresa en forma de intervalo y haz la representación en cada caso.**

a) $|x| \geq 8$ **b)** $|x-4| < 5$

a) $(-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$



b) $(-1, 9)$



3 **Simplifica.**

a) $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2}$

b) $a\sqrt{a^{-1}} : \sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}$

c) $\sqrt{60} \cdot \sqrt[4]{32} : \sqrt[8]{4^5 \cdot 5^4}$

d) $\dfrac{17-9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5} - \dfrac{9}{\sqrt{3}}$

a) $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = 5\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $a \cdot a^{-1/2} : a^{-2/3} = a^{1/2 + 2/3} = a^{7/6}$

c) $\sqrt{60} \cdot \sqrt[4]{32} : \sqrt[8]{4^5 \cdot 5^4} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \sqrt[4]{2^5} : \sqrt[8]{4^5 \cdot 5^4} = \sqrt[8]{2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 2^{10}} : \sqrt[8]{4^5 \cdot 5^4} =$

$= \sqrt[8]{4^9 \cdot 3^4 \cdot 5^4} : \sqrt[8]{4^5 \cdot 5^4} = \sqrt[8]{4^4 \cdot 3^4} = \sqrt{12}$

d) $$\frac{17-9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5} - \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{\left(17-9\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3} - 9\left(3\sqrt{3}-5\right)}{\left(3\sqrt{3}-5\right)\cdot\sqrt{3}} = \frac{17\sqrt{3} - 27 - 27\sqrt{3} + 45}{\sqrt{3}\cdot\left(3\sqrt{3}-5\right)} = \frac{-10\sqrt{3}+18}{9-5\sqrt{3}}$$

Para seguir calculando, multiplicamos por el conjugado del denominador:

$$\frac{-10\sqrt{3}+18}{9-5\sqrt{3}} \cdot \frac{9+5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}} = \frac{-90\sqrt{3}+162-150+90\sqrt{3}}{81-75} = \frac{12}{6} = 2$$

4 **Efectúa y simplifica.**

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$$

Reducimos las fracciones a común denominador para calcular y simplificar luego:

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right) - \left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)} = \frac{7-2\sqrt{5}\sqrt{7}+5-\left(7+2\sqrt{5}\sqrt{7}+5\right)}{7-5} =$$

$$= \frac{-4\sqrt{35}}{2} = -2\sqrt{35}$$

5 **Dos esferas metálicas de 1 000 kg cada una se atraen con una fuerza de $8{,}35 \cdot 10^{-9}$ N. ¿A qué distancia se encuentran sus centros? Aplica la Ley de Gravitación Universal:**

$F = G\dfrac{M\,m}{r^2}$ **donde** $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}$

Acota el error cometido.

Sustituimos en la fórmula: $8{,}35 \cdot 10^{-9} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\dfrac{1000 \cdot 1000}{r^2}$;

$8{,}35 \cdot 10^{-9} = \dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1000 \cdot 1000}{r^2}$;

$8{,}35 \cdot 10^{-9} r^2 = 6{,}67 \cdot 10^{-5}$; $r^2 = \dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-5}}{8{,}35 \cdot 10^{-9}} = 7\,988$;

$r = \sqrt{7\,988} = 89{,}376$ m

Sus centros se encuentran aproximadamente a 89,376 m.

La cota del error absoluto es E.A. < 0,0005 m

E.R. $< \dfrac{0{,}0005}{89{,}376} = 5{,}5943 \cdot 10^{-6} = 0{,}0000055943$, que corresponde al 0,00056 %.

6 **Aplica la definición de logaritmo y obtén x.**

a) $\log_3 x = -\dfrac{1}{4}$ **b)** $\ln \dfrac{x}{3} = -1$ **c)** $\log_x 512 = 3$

a) $x = 3^{-(1/4)} \rightarrow x = 0{,}76$

b) $\dfrac{x}{3} = e^{-1} \rightarrow x = 3 \cdot e^{-1} = 1{,}10$

c) $x^3 = 512 \rightarrow x = 8$

7 **Aplica las propiedades de los logaritmos y halla A.**

$\log A = 2 \log 3 + 0{,}5 \log 4 - 3 \log 2$

$\log A = \log \dfrac{3^2 \cdot 4^{0,5}}{2^3} \rightarrow A = \dfrac{9 \cdot 2}{8} = \dfrac{9}{4}$

8 **Calcula x en cada caso.**

a) $2{,}5^x = 0{,}0087$ **b)** $e^{-x} = 425$

a) $x \log 2{,}5 = \log 0{,}0087 \rightarrow x = \dfrac{\log 0{,}0087}{\log 2{,}5} = -5{,}18$

b) $-x \ln e = \ln 425 \rightarrow x = -\ln 425 = -6{,}05$

9 **El volumen de un cubo es $6\sqrt{6}$ cm³. Halla la diagonal de una cara y la diagonal del cubo.**

D = diagonal del cuadrado

d = diagonal del cubo

a = lado del cubo

$V = a^3 = 6\sqrt{6} \rightarrow a = \sqrt[3]{6\sqrt{6}} = \sqrt[3]{\sqrt{6^3}} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt{6}$ cm

Encontramos D aplicando el teorema de Pitágoras al cuadrado, ya que su diagonal es la hipotenusa:

$D^2 = a^2 + a^2 = 12 \rightarrow D = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm

Solamente nos falta encontrar d, y para ello usaremos el triángulo rectángulo formado por D, d y a donde d es la hipotenusa y volveremos a aplicar el teorema de Pitágoras:

$d^2 = D^2 + a^2 = 12 + 6 = 18 \rightarrow d = 9$ cm

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

2 SUCESIONES

C.E.: CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.-EA 1.5.3.) CE 1.6. (EA 1.6.1-EA 1.6.2.) C.E. 1.7. (EA 1.7.1.-EA 1.7.2.-EA 1.7.3.-EA 1.7.4 - EA 1.7.5.)

Página 61

Resuelve

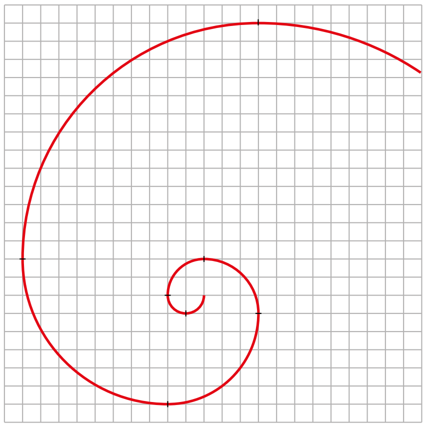
Una hermosa curva

La curva de la derecha está construida con ocho arcos de circunferencia. Los siete primeros son de un cuarto de circunferencia. El octavo, es solo un trocito.

a) Lozaliza los centros y averigua los radios de los ocho arcos dibujados. ¿Ves la relación de los radios con la sucesión de Fibonacci?

b) Reproduce la curva en tu cuaderno completando el octavo tramo y añadiendo el noveno. ¿Qué radio tiene este último?

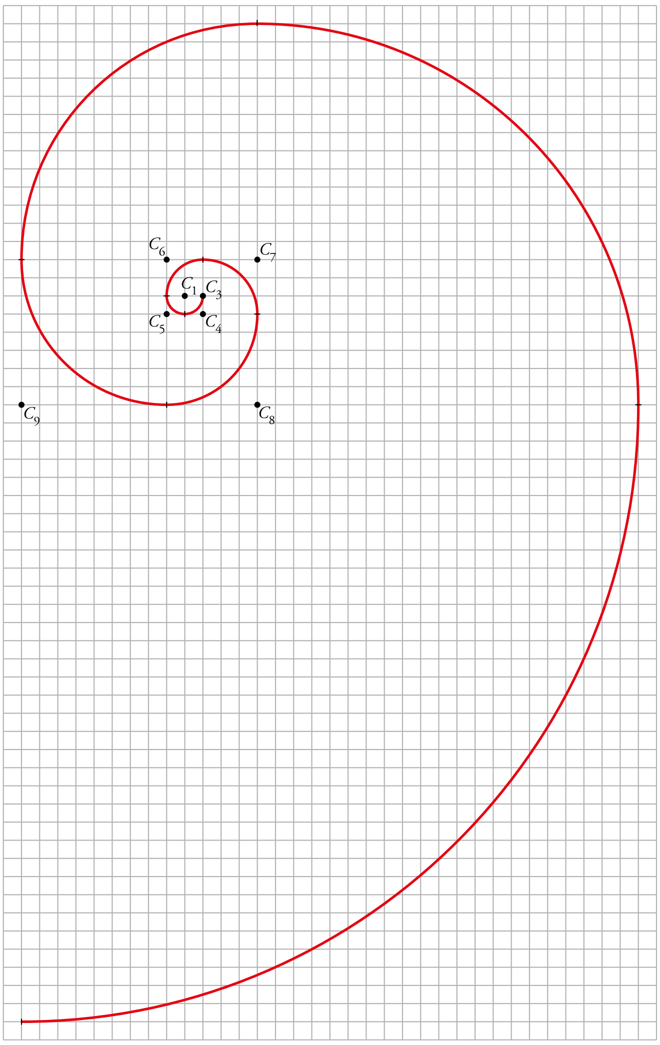
c) Como ves, esta curva se podría ir ampliando indefinidamente. Di cuáles serían los radios de los siguientes cinco tramos (10.º, 11.º, …).



a) Los dos primeros centros de arcos de circunferencia coinciden $C_1 = C_2$ y están representados como un único centro. El centro del tercer arco es C_3 y así sucesivamente.

Los radios de los arcos de circunferencias coinciden con los términos de la sucesión de Fibonacci. Es decir, si llamamos r_i al radio de centro C_i, $r_1 = r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 3$, $r_5 = 5$, $r_6 = 8$, $r_7 = 13$, $r_8 = 21$.

b)



El último radio es $r_9 = 34$.

c) $r_{10} = 55$, $r_{11} = 89$, $r_{12} = 144$, $r_{13} = 233$, $r_{14} = 377$

1 CONCEPTO DE SUCESIÓN

C.E.: CE 2.5. (EA 2.5.1.)

Página 63

1 **Obtén los seis primeros términos de cada una de las siguientes sucesiones:**

$a_n = n^2 + 2n$ $\quad$ $b_n = (-1)^{n+1} n^2$

$c_n = (-1)^n (2n + 1)$ $\quad$ $d_n = (-2)^n$

$e_1 = 3,\ e_2 = -1,$ $\quad$ $e_n = e_{n-2} + 2e_{n-1}$

$f_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}$ $\quad$ $g_n = \dfrac{n^2+1}{n^2+2n}$

$h_n = n! - (n-1)!$ $\quad$ $i_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

$a_n = n^2 + 2n \to a_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3,\ a_2 = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8,\ a_3 = 3^2 + 2 \cdot 3 = 15,$
$a_4 = 4^2 + 2 \cdot 4 = 24,\ a_5 = 5^2 + 2 \cdot 5 = 35,\ a_6 = 6^2 + 2 \cdot 6 = 48$

$b_n = (-1)^{n+1}n^2 \to b_1 = (-1)^{1+1} \cdot 1^2 = 1,\ b_2 = (-1)^{1+2} \cdot 2^2 = -4,\ b_3 = (-1)^{1+3} \cdot 3^2 = 9,$
$b_4 = (-1)^{1+4} \cdot 4^2 = -16,\ b_5 = (-1)^{1+5} \cdot 5^2 = 25,\ b_6 = (-1)^{1+6} \cdot 6^2 = -36$

$c_n = (-1)^n(2n+1) \to c_1 = (-1)^1(2 \cdot 1 + 1) = -3,\ c_2 = (-1)^2(2 \cdot 2 + 1) = 5,\ c_3 = (-1)^3(2 \cdot 3 + 1) = -7,$
$c_4 = (-1)^4(2 \cdot 4 + 1) = 9,\ c_5 = (-1)^5(2 \cdot 5 + 1) = -11,\ c_6 = (-1)^6(2 \cdot 6 + 1) = 13$

$d_n = (-2)^n \to d_1 = (-2)^1 = -2,\ d_2 = (-2)^2 = 4,\ d_3 = (-2)^3 = -8,$
$d_4 = (-2)^4 = 16,\ d_5 = (-2)^5 = -32,\ d_6 = (-2)^6 = 64$

$e_1 = 3,\ e_2 = -1,\ e_3 = 3 + 2 \cdot (-1) = 1,\ e_4 = -1 + 2 \cdot 1 = 1,\ e_5 = 1 + 2 \cdot 1 = 3,\ e_6 = 1 + 2 \cdot 3 = 7$

$$f_n = \frac{(-1)^n}{2n-1} \to f_1 = \frac{(-1)^1}{2 \cdot 1 - 1} = -1,\ f_2 = \frac{(-1)^2}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{1}{3},\ f_3 = \frac{(-1)^3}{2 \cdot 3 - 1} = -\frac{1}{5},$$
$$f_4 = \frac{(-1)^4}{2 \cdot 4 - 1} = \frac{1}{7},\ f_5 = \frac{(-1)^5}{2 \cdot 5 - 1} = -\frac{1}{9},\ f_6 = \frac{(-1)^6}{2 \cdot 6 - 1} = \frac{1}{11}$$

$$g_n = \frac{n^2+1}{n^2+2n} \to g_1 = \frac{1^2+1}{1^2+2 \cdot 1} = \frac{2}{3},\ g_2 = \frac{2^2+1}{2^2+2 \cdot 2} = \frac{5}{8},\ g_3 = \frac{3^2+1}{3^2+2 \cdot 3} = \frac{2}{3},$$
$$g_4 = \frac{4^2+1}{4^2+2 \cdot 4} = \frac{17}{24},\ g_5 = \frac{5^2+1}{5^2+2 \cdot 5} = \frac{26}{35},\ g_6 = \frac{6^2+1}{6^2+2 \cdot 6} = \frac{37}{48}$$

$h_n = n! - (n-1)! \to h_1 = 1! - (1-1)! = 0,\ h_2 = 2! - (2-1)! = 1,\ h_3 = 3! - (3-1)! = 4,$
$h_4 = 4! - (4-1)! = 18,\ h_5 = 5! - (5-1)! = 96,\ h_6 = 6! - (6-1)! = 600$

$$i_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to i_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2,\ i_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},\ i_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27},$$
$$i_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256},\ i_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{7776}{3125},\ i_6 = \left(1+\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{117649}{46656}$$

2 **Da el término general o el criterio de recurrencia (o ambas cosas) de las siguientes sucesiones:**

a) **3, 8, 13, 18, 23, …** $\quad$ **b)** **1, 8, 27, 64, 125, …**

c) **0, 3, 8, 15, 24, …** $\quad$ **d)** **1, –3, 5, –7, 9, …**

e) **1, –2, 6, –24, 120, …** $\quad$ **f)** **1, 4, 8, 11, 22, 25, …**

g) $\dfrac{2}{4}, \dfrac{5}{9}, \dfrac{8}{16}, \dfrac{11}{25}, \dfrac{14}{36}, \dots$ $\quad$ **h)** $0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dots$

i) **1, 3, 4, 7, 11, 18, …** $\quad$ **j)** $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, -\dfrac{1}{6}, \dots$

a) Cada término es 5 unidades mayor que el término anterior de la sucesión. $a_n = 5n - 2$

Por recurrencia: $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 5$.

b) Cada término es el cubo del lugar que ocupa en la sucesión. $b_n = n^3$

c) Cada término es una unidad menor que el cuadrado del lugar que ocupa. $c_n = n^2 - 1$

d) Son los números impares con los signos + y – alternativamente. $d_n = (-1)^{n+1}(2n-1)$

e) Son los números factoriales con los signos + y – alternativamente. $e_n = (-1)^{n+1}n!$

Por recurrencia: $e_1 = 1$, $e_n = e_{n-1} \cdot (-n)$.

f) El primer término impar es 1 y los demás términos impares se obtienen sumando a este un múltiplo de 7.

El primer término par es 4 y los demás términos pares se obtienen sumando a este un múltiplo de 7.

$f_1 = 1$, $f_2 = 4$. Para n impar, $f_n = f_1 + 7(n-2)$. Para n par, $f_n = f_1 + 7(n-3)$.

g) Cada numerador es 3 unidades mayor que el numerador anterior. Cada denominador es el cuadrado del número natural siguiente al lugar que ocupa. $g_n = \frac{3n-1}{(n+1)^2}$

h) Los denominadores son los números naturales. Cada numerador es una unidad inferior a su denominador. $h_n = \frac{n-1}{n}$

i) Por recurrencia: $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $i_n = i_{n-1} + i_{n-2}$.

j) Son los inversos de los números naturales con los signos + y – alternativamente. $j_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

2 ALGUNAS SUCESIONES ESPECIALMENTE INTERESANTES

C.E.: todos los tratados en la unidad excepto el 1.9. (EA todos los tratados en la unidad excepto el 1.9.1.)

Página 65

1 **En las siguientes sucesiones identifica las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas. Añade dos términos y escribe su término general:**

a) 3, 7, 11, 15, 19, …

b) 3, 4, 6, 9, 13, 18, …

c) 3, 6, 12, 24, 48, …

d) 1, 3, 9, 27, 81, …

e) 5, –5, 5, –5, 5, …

f) 10, 7, 4, 1, –2, …

g) 100; 50; 25; 12,5; …

h) 12, 12, 12, 12, …

i) 3, –5, 7, –9, 11, …

j) 2 840; 284; 28,4; …

k) 90, –30, 10, –10/3, 10/9, …

l) 17,4; 15,8; 14,2; 12,6; …

a) Progresión aritmética en la que $a_1 = 3$ y $d = 4$.

$a_6 = 23$, $a_7 = 27$. Término general: $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$

b) No es una progresión.

$b_7 = 24$, $b_8 = 31$. Término general: $b_n = 3 + \dfrac{n(n-1)}{2}$

c) Progresión geométrica en la que $c_1 = 3$ y $r = 2$.

$c_6 = 96$, $c_7 = 192$. Término general: $c_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

d) Progresión geométrica en la que $d_1 = 1$ y $r = 3$.

$d_6 = 243$, $d_7 = 729$. Término general: $d_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$

e) Progresión geométrica en la que $e_1 = 5$ y $r = -1$.

$e_6 = -5$, $e_7 = 5$. Término general: $e_n = 5 \cdot (-1)^{n-1}$

f) Progresión aritmética en la que $f_1 = 10$ y $d = -3$.

$f_6 = -5$, $f_7 = -8$. Término general: $f_n = 10 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 13$

g) Progresión geométrica en la que $g_1 = 100$ y $r = \dfrac{1}{2}$.

$g_5 = 6{,}25$, $g_6 = 3{,}125$. Término general: $g_n = 100 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

h) Es a la vez una progresión aritmética de diferencia $d = 0$ y una progresión geométrica de razón $r = 1$.

$h_5 = 12$, $h_6 = 12$. Término general: $h_n = 12$

i) No es una progresión.

$i_6 = -13$, $i_7 = 15$. Término general: $i_n = (-1)^{n+1}(2n + 1)$

j) Progresión geométrica en la que $j_1 = 2\,840$ y $r = \dfrac{1}{10}$.

$j_4 = 2{,}84$, $j_5 = 0{,}284$. Término general: $j_n = 2\,840 \cdot \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$

k) Progresión geométrica en la que $k_1 = 90$ y $r = -\dfrac{1}{3}$.

$k_6 = \dfrac{-10}{27}$, $k_7 = \dfrac{10}{81}$. Término general: $k_n = 90 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

l) Progresión aritmética en la que $l_1 = 17{,}4$ y $d = -1{,}6$.

$l_5 = 11$, $l_6 = 10{,}4$. Término general: $l_n = 17{,}4 + (n - 1) \cdot (-1{,}6) = -1{,}6n + 19$

2 **En 1a) halla S_{20}.**

$a_{20} = 4 \cdot 20 - 1 = 79$; $S_{20} = \dfrac{(3+79) \cdot 20}{2} = 820$

3 **En 1f) halla S_{15}.**

$f_{15} = -3 \cdot 15 + 13 = -32$; $S_{15} = \dfrac{(10 + (-32)) \cdot 15}{2} = -165$

4 **En 1d) halla S_{10}.**

$d_{10} = 3^9 = 19\,683$; $S_{10} = \dfrac{19\,683 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = 29\,524$

5 **En 1k) halla S_{10}.**

$$k_{10} = 90 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^9 = -\frac{10}{2187};\ S_{10} = \frac{-\dfrac{10}{2187} \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) - 90}{-\dfrac{1}{3} - 1} = \frac{147\,620}{2187}$$

6 **¿En cuáles de las sucesiones del ejercicio 1 puedes hallar la suma de los infinitos términos? Hazlo.**

En las de los apartados g), j) y k) porque las razones son, en valor absoluto, menores que 1.

En el caso del apartado g), $S_\infty = \dfrac{100}{1 - \dfrac{1}{2}} = 200$.

En el caso del apartado j), $S_\infty = \dfrac{2\,840}{1 - \dfrac{1}{10}} = \dfrac{28\,400}{9}$.

En el caso del apartado k), $S_\infty = \dfrac{90}{1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)} = \dfrac{135}{2}$.

7 **Calcula.**

a) $\mathbf{1^2 + 2^2 + \ldots + 30^2}$

b) $\mathbf{1^3 + 2^3 + \ldots + 15^3}$

c) $\mathbf{20^2 + 21^2 + \ldots + 30^2}$

d) $\mathbf{16^3 + 17^3 + \ldots + 30^3}$

a) $\dfrac{30 \cdot (30 + 1) \cdot (60 + 1)}{6} = \dfrac{30 \cdot 31 \cdot 61}{6} = 9\,455$

b) $\dfrac{15^2 \cdot 16^2}{4} = 14\,400$

c) $20^2 + 21^2 + \ldots + 30^2 = (1^2 + 2^2 + \ldots + 30^2) - (1^2 + 2^2 + \ldots + 19^2) = \dfrac{30 \cdot 31 \cdot 61}{6} - \dfrac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6} = 6\,985$

d) $16^3 + 17^3 + \ldots + 30^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + 30^3) - (1^3 + 2^3 + \ldots + 15^3) = \dfrac{30^2 \cdot 31^2}{4} - \dfrac{15^2 \cdot 16^2}{4} = 201825$

8 **Calcula.**

$\mathbf{2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 20^3}$

Ten en cuenta que, por ejemplo, $\mathbf{6^3 = (2 \cdot 3)^3 = 8 \cdot 3^3}$ y que $\mathbf{20^3 = (2 \cdot 10)^3 = 8 \cdot 10^3}$.

$$\begin{aligned} 2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 20^3 &= (2 \cdot 1)^3 + (2 \cdot 2)^3 + (2 \cdot 3)^3 + \ldots + (2 \cdot 10)^3 = \\ &= 2^3 \cdot 1^3 + 2^3 \cdot 2^3 + 2^3 \cdot 2^3 + \ldots + 2^3 \cdot 10^3 = \\ &= 2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3) = 8 \cdot \frac{10^2 \cdot 11^2}{4} = 8 \cdot 3025 = 24\,200 \end{aligned}$$

Página 66

9 **Calcula el 6.º término de la sucesión de Fibonacci, $f_6 = 8$, aplicando la fórmula.**

$$f_6 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^6\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(9+4\sqrt{5})-(9-4\sqrt{5})\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 8\sqrt{5} = 8$$

10 **[El cálculo de los elementos de la sucesión a partir de los datos del enunciado permite al alumnado trabajar la iniciativa (dimensión personal)].**

Observa que como $|1-\phi|<1$, para valores «algo grandes» de n, el número $(1-\phi)^n$ es «pequeño». Por tanto, podemos hallar los términos avanzados de la sucesión de Fibonacci, de forma aproximada, prescindiendo del sustraendo:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^n - (1-\phi)^n] \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n$$

Por ejemplo, para calcular $f_{13} = 233$ procederíamos así: $f_{13} \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{13}$. Hazlo y comprueba que el error cometido es menor que 0,001. Calcula de este modo f_{20}.

El error cometido es igual a $\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{13}\right| \approx 8{,}5837 \times 10^{-4}$, que es inferior a 0,001.

$$f_{20} \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{20} = 6765$$

11 **La *sucesión de Lucas* también tiene relación con el mundo vegetal. Se define así:**

$l_1 = 1$, $l_2 = 3$, $l_n = l_{n-2} + l_{n-1}$

Como ves, es muy parecida a la de Fibonacci.

a) Halla sus 11 primeros términos.

b) $l_1 + l_2 + \ldots + l_n = l_{n+2} - 3$. Compruébalo para $n = 6$.

c) Esta sucesión se relaciona con la de Fibonacci así:

$$f_n = \frac{l_{n-1}+l_{n+1}}{5}$$

Compruébalo hallando los 10 primeros términos de la sucesión de Fibonacci a partir de la de Lucas.

a) $l_1 = 1$, $l_2 = 3$, $l_3 = 4$, $l_4 = 7$, $l_5 = 11$, $l_6 = 18$, $l_7 = 29$, $l_8 = 47$, $l_9 = 76$, $l_{10} = 123$, $l_{11} = 199$

b) $1 + 3 + 4 + 7 + 11 + 18 = 44$

$47 - 3 = 44$

c) $f_2 = \frac{l_1+l_3}{5} = \frac{1+4}{5} = 1$, $f_3 = \frac{3+7}{5} = 2$, $f_4 = \frac{4+11}{5} = 3$, $f_5 = \frac{7+18}{5} = 5$, $f_6 = \frac{11+29}{5} = 8$,

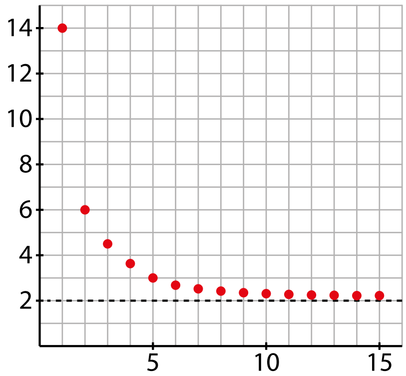
$f_7 = \frac{18+47}{5} = 13$, $f_8 = \frac{29+76}{5} = 21$, $f_9 = \frac{47+123}{5} = 34$, $f_{10} = \frac{76+199}{5} = 55$

3 ▶ LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

C.E.: CE 2.5. (EA 2.5.1.)

Página 67

1 **Representa en tu cuaderno los 15 primeros términos de la sucesión $a_n = \frac{4n+10}{2n-1}$ y asigna un valor a su límite.**



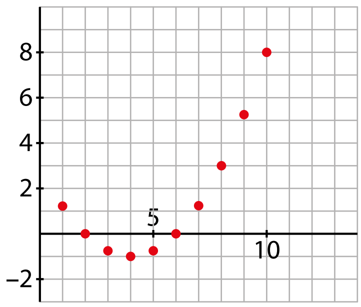
$a_1 = 14,\ a_2 = 6,\ a_3 = 4{,}4;\ a_4 \approx 3{,}71;$

$a_5 \approx 3{,}33;\ \ldots,\ a_{10} \approx 2{,}63;\ \ldots;$

$a_{100} \approx 2{,}06;\ \ldots;\ a_{1\,000} \approx 2{,}006;\ \ldots$

$\text{lím}\ a_n = 2$

2 **Representa los 10 primeros de $a_n = \frac{n^2}{4} - 2n + 3$ y asigna un valor a su límite.**



$b_1 = 1{,}25;\ b_2 = 0;\ b_3 = -0{,}75;$

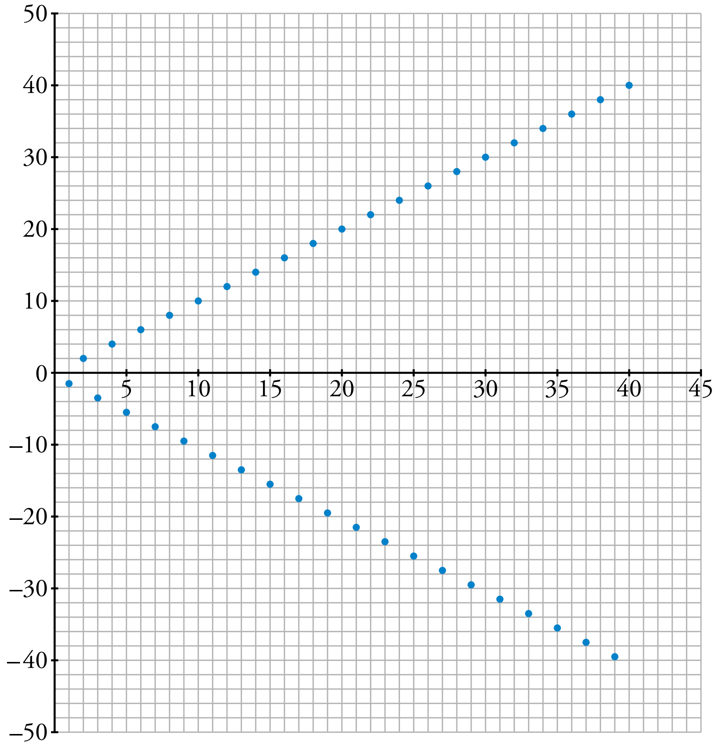
$b_4 = -1;\ b_5 = -0{,}75;\ b_6 = 0;$

$b_7 = 1{,}25;\ b_8 = 3;\ b_9 = 5{,}25;\ b_{10} = 8, \ldots,$

$b_{100} = 2\,303, \ldots$

$\text{lím}\ b_n = +\infty$

3 **Representa los primeros términos de $c_n = (-1)^n \cdot n$ y describe su comportamiento.**
¿Podríamos afirmar que $\text{lím}\ c_n = l$ o que $\text{lím}\ c_n = +\infty$?
¿O acaso que $\text{lím}\ c_n = -\infty$?



Se trata de una sucesión oscilante porque su representación gráfica da saltos hacia arriba y hacia abajo. No tiene límite porque los términos no se acercan a ningún valor concreto. Tampoco tiene límite $+\infty$ porque los términos impares (que son negativos) se hacen cada vez más pequeños. Análogamente, tampoco tiene límite $-\infty$.

Página 69

4 **Estudia el comportamiento de estas sucesiones para términos muy avanzados e indica su límite:**

a) $a_n = \frac{2n-3}{6}$ **b)** $b_n = \frac{2n-3}{n+5}$

c) $c_n = 3 - 2^n$ **d)** $d_n = 5 - \frac{1}{n^3}$

a) $a_{10} \approx 2{,}83$; $a_{100} \approx 32{,}83$; $a_{1\,000} \approx 332{,}83$; … *lím* $a_n = +\infty$

b) $b_{10} \approx 1{,}133$; $b_{100} \approx 1{,}876$; $b_{1\,000} \approx 1{,}987$; … *lím* $b_n = 2$

c) $c_{10} = -1\,021$; $c_{100} \approx -1{,}27 \cdot 103$; … *lím* $c_n = -\infty$

d) $d_{10} = 4{,}999$; $d_{100} = 4{,}999999$; … *lím* $d_n = 5$

5 **Di, razonadamente, cuáles de las siguientes sucesiones tienen límite:**

a) $a_n = -\frac{2}{n^2}$ **b)** $b_n = (-1)^n \frac{n}{n+4}$

c) $c_n = (-1)^n n^2$ **d)** $d_n = (-1)^n \frac{2}{n^2}$

a) $a_{10} = -0{,}02$; $a_{100} = -0{,}0002$; $a_{1\,000} = -0{,}000002$; … *lím* $a_n = 0$.

b) $b_{10} \approx 0{,}714$; $b_{11} \approx -0{,}733$; $b_{100} \approx 0{,}962$; $b_{101} \approx -0{,}962$; …

Los términos pares son positivos y tienden a 1; los términos impares son negativos y tienden a –1. La sucesión no tiene límite.

c) $c_1 = -1$, $c_2 = 4$, $c_3 = -9$, $c_4 = 16$, $c_5 = -25$; …

Los términos impares son negativos y tienden a $-\infty$; los términos pares son positivos y tienden a $+\infty$. Es una sucesión oscilante. No tiene límite.

d) $d_1 = -2$; $d_2 = 0{,}5$; …; $d_{100} = 0{,}0002$; $d_{101} = -0{,}000196$; … *lím* $d_n = 0$.

4 ▶ ALGUNOS LÍMITES IMPORTANTES

C.E.: CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.-EA 1.5.3.) CE 1.6. (EA 1.6.1-EA 1.6.2.) C.E. 1.8. (EA 1.8.1.-EA 1.8.2.-EA 1.8.3.-EA 1.8.4-EA 1.8.5.) C.E. 2.5. (EA 2.5.1.)

Página 71

1 **a) Calcula $\left(1-\frac{1}{80}\right)^{80}$ y comprueba que «se parece mucho» a $e^{-1}=\frac{1}{e}$. Haz lo mismo con $\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1000}$.**

¿Podemos suponer que $lím\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{e}$?

b) Calcula $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots-\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}$ y comprueba que es aproximadamente igual a e^{-1}.

¿Podemos suponer también que la sucesión $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}$ tiende a e^{-1}?

a) $a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$

$$a_{80}=\left(1-\frac{1}{80}\right)^{80}=\left(\frac{79}{80}\right)^{80}\approx 0{,}36557$$

$$a_{1\,000}=\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1\,000}=\left(\frac{999}{1000}\right)^{1\,000}\approx 0{,}36770$$

$$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0{,}36788$$

Observamos que los resultados se acercan cada vez más a $\frac{1}{e}$.

Comprobándolo con algún término más avanzado, sí podríamos suponerlo.

b) $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}-\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}=\frac{16\,481}{44\,800}\approx 0{,}36788$

Sí podemos suponerlo. Además, esta sucesión se acerca mucho más rápido a $\frac{1}{e}$ que la del apartado a), puesto que el término décimo de la sucesión ya es casi $\frac{1}{e}$.

2 **[La demostración propuesta permite trabajar esta estrategia compartiendo cada alumno y alumna el resultado obtenido con un compañero o compañera].**
Teniendo en cuenta que el término general de la sucesión de Fibonacci para n «grande» es:

$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^n-(1-\phi)^n]\approx\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$ demuestra que $lím\,\frac{f_{n+1}}{f_n}=\phi$.

Para n «grande», $\frac{f_{n+1}}{f_n}=\dfrac{\frac{\phi^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}\,\phi^{n+1}}{\sqrt{5}\,\phi^n}=\phi$, luego $lím\,\frac{f_{n+1}}{f_n}=\phi$.

3 **Sabiendo que f_n es el término general de la sucesión de Fibonacci, calcula los siguientes límites:**

a) $lím\,\frac{f_n}{f_{n+2}}$ **b) $lím\,\frac{f_n}{f_{n+3}}$**

Razonando de forma análoga al problema anterior, $lím\,\frac{f_n}{f_{n+2}}=\frac{1}{\phi^2}=\phi^{-2}$ y $lím\,\frac{f_n}{f_{n+3}}=\frac{1}{\phi^3}=\phi^{-3}$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 72

1. Dos sucesiones convergentes

Hazlo tú

- **La suma de los términos de una progresión geométrica, $a_1 + a_2 + + a_3 + \dots,$ con $r < 1$ es 4.**

  La suma de los términos de lugar impar, $a_1 + a_3 + a_5 + \dots,$ es $\frac{8}{3}$.

  Calcula a_1 y r.

  Como nos dice el enunciado:

  $S = 4\ ;\ S_{\text{IMPAR}} = \frac{8}{3}\ ;\ r < 1$

  Sabemos que por ser progresión geométrica, la suma también es igual a $S = \frac{a_1}{1-r} = 4^{(*)}$.

  Además, los términos impares forman una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 y su razón es r^2. Por tanto:

  $$S_{\text{IMPAR}} = \frac{a_1}{1-r^2} = \frac{8}{3}^{(**)}$$

  Dividiendo (*) entre (**):

  $$\frac{a_1}{1-r} : \frac{a_1}{1-r^2} = 4 : \left(\frac{8}{3}\right) \to \frac{a_1(1-r^2)}{a_1(1-r)} = \frac{4 \cdot 3}{8} \to \frac{a_1(1-r)(1+r)}{a_1(1-r)} = \frac{3}{2} \to 1 + r = \frac{3}{2} \to r = \frac{1}{2}$$

  Volviendo a (*):

  $$\frac{a_1}{1-r} = \frac{a_1}{1/2} = 4 \to a_1 = 2$$

2. Dos progresiones aritméticas

Hazlo tú

- **Escribe en función de S la suma, S_{IMPAR}, de los diez primeros términos de lugar impar de la progresión aritmética anterior.**

  $S_{\text{IMPAR}} = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{15} + a_{17} + a_{19}$

  $S_{\text{PAR}} = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} + a_{14} + a_{16} + a_{18} + a_{20}$

  $a_n = a_{n-1} + 5$

  Así: $S_{\text{PAR}} = (a_1 + 5) + (a_3 + 5) + \dots + (a_{17} + 5) + (a_{19} + 5) = S_{\text{IMPAR}} + 50$

  Y sabemos que $S = S_{\text{IMPAR}} + S_{\text{PAR}} \to S = S_{\text{IMPAR}} + 50 + S_{\text{IMPAR}} \to S_{\text{IMPAR}} = \frac{S}{2} - \frac{50}{2} = \frac{S}{2} - 25.$

3. Los cuadrados van a contracorriente

Hazlo tú

- **Halla la suma:**

  $-1 + 2 + \dots + 7 - 8 + 9 + \dots + 26 - 27 + 28 + \dots + 63 - 64 + 65 + \dots + 999 - 1\,000$

  (suma de los 1 000 primeros naturales pero con los cubos perfectos con signo menos).

  Calculamos la suma de los mil primeros números naturales sabiendo que forman una progresión aritmética.

  $$S_{1\,000} = \frac{(1 + 1000) \cdot 1000}{2} = 500\,500$$

Ahora debemos restar dos veces la suma de los primeros 10 cubos perfectos:

$$Sc_{10} = 1^3 + 2^3 + \ldots + 10^3 = \frac{10^2 \cdot 11^2}{4} = 3025$$

Por tanto, la suma pedida es $S_{1\,000} - 2 \cdot Sc_{10} = 500\,500 - 2 \cdot 3\,025 = 494\,450$.

Página 73

4. Término general

Hazlo tú

- **Halla el término general de estas sucesiones:**

a) $\frac{2}{-1}, \frac{5}{1}, \frac{10}{3}, \frac{17}{5}, \ldots$

b) 5,23; 5,2323; 5,232323; …

c) $\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{-2}{5}, \ldots$

a) No es una progresión aritmética ni geométrica.

Los numeradores son una unidad mayor que los cuadrados perfectos.

Los denominadores forman una progresión aritmética de diferencia $d = 2$.

$$a_n = \frac{n^2+1}{-1+(n-1)\cdot 2} = \frac{n^2+1}{2n-3}$$

b) Podemos escribir así los términos de la sucesión:

$$b_1 = 5 + \frac{23}{100},\quad b_2 = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000},\quad b_3 = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000} + \frac{23}{1\,000\,000}$$

Luego $b_n = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \ldots + \frac{23}{100^n} = 5 + 23 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots + \frac{1}{100^n}\right) =$

$$= 5 + 23 \cdot \left(\frac{\frac{1}{100} - \frac{1}{100^{n+1}}}{1 - \frac{1}{100}}\right) = 5 + 23 \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{100^n}}{100 - 1}\right) = 5 + 23 \cdot \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{99 \cdot 100^n}\right) = 5 + \frac{23}{99} - \frac{23}{99 \cdot 100^n}$$

c) Se trata de una progresión aritmética de diferencia $d = \frac{-3}{5}$.

$$c_n = \frac{7}{5} + (n-1) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{10-3n}{5}$$

5. Límite de sucesiones

Hazlo tú

- **Estudia los límites de las siguientes sucesiones:**

a) $a_n = \frac{5n+7}{2n-1}$ **b)** $b_n = \frac{(-1)\,n^2+4}{n+2}$

a) $a_{100} = \frac{5 \cdot 100 + 7}{2 \cdot 100 - 1} = \frac{507}{199} \approx 2{,}5477$

$$a_{1\,000} = \frac{5 \cdot 1000 + 7}{2 \cdot 1000 - 1} = \frac{5\,007}{1999} \approx 2{,}5048$$

$$a_{10\,000} = \frac{5 \cdot 10\,000 + 7}{2 \cdot 10\,000 - 1} = \frac{50\,007}{19\,999} \approx 2{,}5005$$

Observamos que los términos independientes del numerador y del denominador se hacen insignificantes comparados con los múltiplos de n.

Por tanto, $\lim \frac{5n+7}{2n-1} = \lim \frac{5n}{2n} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

b) $b_{100} = \dfrac{(-1)\cdot 100^2 + 4}{100 + 2} = -98$

$b_{1\,000} = \dfrac{(-1)\cdot 1000^2 + 4}{1000 + 2} = -998$

$b_{10\,000} = \dfrac{(-1)\cdot 10\,000^2 + 4}{10\,000 + 2} = -9\,998$

De forma similar al apartado anterior, los términos independientes son insignificantes comparados con los otros términos.

Por tanto, $\textit{lím}\ \dfrac{(-1)\,n^2 + 4}{n + 2} = \textit{lím}\ \dfrac{(-1)\,n^2}{n} = \textit{lím}\,(-1)\,n = -\infty$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 2.5. (EA 2.5.1.)

Página 74

1. Paso de decimal periódico a fracción

- **Utilizar las sucesiones para pasar el número periódico $5{,}4\overset{\frown}{7}$ a fracción.**

  - $5{,}477\ldots = 5{,}4 + 0{,}07 + 0{,}007 + 0{,}0007 + \ldots$
  - $a_1 = \frac{7}{100}$, $a_2 = \frac{7}{1000}$, $a_3 = \frac{7}{10\,000}$; $r = \frac{1}{10}$; $S_\infty = \dfrac{\frac{7}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{7}{90}$
  - $5{,}4 = \frac{54}{10} = \frac{27}{5}$
  - $5{,}477\ldots = \frac{27}{5} + \frac{7}{90} = \frac{493}{90}$

2. Intereses bancarios

- **Se hace un depósito de 5 000 € en un banco que paga un interés del 4 % anual. ¿Cuántos años se ha de dejar para superar los 8 000 €?**

  - En n años el capital se multiplicará por $1{,}04^n$.
  - $8\,000 = 5\,000 \cdot 1{,}04^n \to \frac{8\,000}{5\,000} = 1{,}04^n \to 1{,}6 = 1{,}04^n \to$

    $\to \log 1{,}6 = n \cdot \log 1{,}04 \to n = \dfrac{\log 1{,}6}{\log 1{,}04} \approx 11{,}984$

  Por tanto, superará los 8 000 € a los 12 años.

3. Límites de sucesiones

- **Hallar el límite de las siguientes sucesiones:**

  a) $\frac{4}{3}, 7, -10, -\frac{13}{3}, -\frac{16}{5}, \ldots$

  b) $\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \ldots$

a) $\frac{4}{3}, \frac{7}{1}, \frac{10}{-1}, \frac{13}{-3}, \frac{16}{-5}, \ldots$

Los numeradores forman una progresión aritmética de diferencia $d = 3$.

Los denominadores forman una progresión aritmética de diferencia $d = -2$.

$$a_n = \frac{4+(n-1)\cdot 3}{3+(n-1)\cdot(-2)} = \frac{3n+1}{-2n+5}$$

$$a_{1\,000} = \frac{3\cdot 1000+1}{-2\cdot 1000+5} = -\frac{3001}{1995} \approx -1{,}5043 \qquad a_{10\,000} = \frac{3\cdot 10\,000+1}{-2\cdot 10\,000+5} = -\frac{30\,001}{19\,995} \approx -1{,}5004$$

$$\text{lím } \frac{3n+1}{-2n+5} = -\frac{3}{2} = -1{,}5$$

b) $b_1 = \sqrt{3} = 3^{1/2}$ $\quad b_2 = \sqrt{3\sqrt{3}} = (3\cdot 3^{1/2})^{1/2} = 3^{1/2+1/4}$ $\quad b_3 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = (3\cdot(3\cdot 3^{1/2})^{1/2})^{1/2} = 3^{1/2+1/4+1/8}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ es la suma de los elementos de una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$.

La suma es $S_\infty = \dfrac{1/2}{1-1/2} = 1$.

Luego $\text{lím } b_n = 3^1 = 3$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 75

Para practicar

Criterio para formar sucesiones

1 Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son estos:

a) $a_n = 3 + \dfrac{2}{10^n}$ **b)** $b_n = \dfrac{n^2-1}{n}$ **c)** $c_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$

d) $d_n = 2^{-n}$ **e)** $e_n = n!$ **f)** $f_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n - n}{2}$

a) $a_1 = 3{,}2;\ a_2 = 3{,}02;\ a_3 = 3{,}002;\ a_4 = 3{,}0002;\ a_5 = 3{,}00002$

b) $b_1 = 0;\ b_2 = \dfrac{3}{2};\ b_3 = \dfrac{8}{3};\ b_4 = \dfrac{15}{4};\ b_5 = \dfrac{24}{5}$

c) $c_1 = 1;\ c_2 = \dfrac{5}{3};\ c_3 = 2;\ c_4 = \dfrac{11}{5};\ c_5 = \dfrac{7}{3}$

d) $d_1 = \dfrac{1}{2};\ d_2 = \dfrac{1}{4};\ d_3 = \dfrac{1}{8};\ d_4 = \dfrac{1}{16};\ d_5 = \dfrac{1}{32}$

e) $e_1 = 1;\ e_2 = 2;\ e_3 = 6;\ e_4 = 24;\ e_5 = 120$

f) $f_1 = -1;\ f_2 = 0;\ f_3 = -3;\ f_4 = 0;\ f_5 = -5$

2 Escribe el término general de estas sucesiones:

a) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dots$ **b)** $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dots$

c) $\dfrac{1}{5}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{9}{9}, \dfrac{16}{11}, \dots$ **d)** $0, \dfrac{3}{5}, \dfrac{8}{10}, \dfrac{15}{17}, \dfrac{24}{26}, \dots$

e) 2, 5, 10, 17, 26, … **f)** 1, 3, 6, 10, 15, …

a) $a_n = \dfrac{n}{n-1}$

b) $b_n = \dfrac{1}{n+1}$

c) Los numeradores son cuadrados perfectos y los denominadores forman una progresión aritmética.

$$c_n = \frac{n^2}{5+(n-1)\cdot 2} = \frac{n^2}{2n+3}$$

d) $d_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$

e) $e_n = n^2 + 1$

f) $f_1 = 1;\ f_2 = 1 + 2;\ f_3 = 1 + 2 + 3;\ f_4 = 1 + 2 + 3 + 4;\ \dots;\ f_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3 Escribe los 8 primeros términos de estas dos sucesiones cuyas leyes de recurrencia son:

a) $a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$ **b)** $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_n = \dfrac{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}{2}$

a) $0, 2, 1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{11}{8}, \dfrac{21}{16}, \dfrac{43}{32}, \dots$

b) $1, 2, 1, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{128}, \dots$

4 **Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones. Halla tres términos más de cada una.**

a) $4, 7, 3, -4, -7, \dots$

b) $2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

a) $a_1 = 4,\ a_2 = 7,\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n > 2$

b) $b_1 = 2,\ b_2 = 3,\ b_n = \dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$ para $n > 2$

Progresiones aritméticas

5 **De las siguientes sucesiones, di cuáles son progresiones aritméticas y escribe su término general:**

a) $1{,}2;\ 2{,}4;\ 3{,}6;\ 4{,}8;\ 6;\ \dots$

b) $5;\ 4{,}6;\ 4{,}2;\ 3{,}8;\ 3{,}4;\ \dots$

c) $1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ \dots$

d) $14, 13, 11, 8, 4, \dots$

e) $\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \dots$

f) $1, \frac{89}{100}, \frac{78}{100}, \frac{67}{100}, \frac{56}{100}, \dots$

a) Es una progresión aritmética con $a_1 = 1{,}2$ y $d = 1{,}2$.

$a_n = 1{,}2 + (n-1) \cdot 1{,}2 = 1{,}2n$.

b) Es una progresión aritmética con $b_1 = 5$ y $d = -0{,}4$.

$b_n = 5 + (n-1) \cdot (-0{,}4) = -0{,}4n + 5{,}4$.

c) y d) no son progresiones aritméticas.

e) La sucesión es una progresión aritmética de diferencia $d = \frac{1}{4}$.

$e_n = \frac{3}{4} + (n-1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{n+2}{4}$

f) La sucesión es una progresión aritmética de diferencia $d = \frac{-11}{100}$.

$f_n = 1 + (n-1) \cdot \left(-\frac{11}{100}\right) = \frac{111-11n}{100}$

6 **Di cuáles de estas sucesiones son progresiones aritméticas:**

a) $a_n = 3n$

b) $b_n = 5n - 4$

c) $c_n = \frac{1}{n}$

d) $d_n = \frac{8-3n}{4}$

e) $e_n = 5 + \frac{n}{2}$

f) $f_n = n^2 - 1$

a) $a_n - a_{n-1} = 3n - 3(n-1) = 3n - 3n + 3 = 3$

Es una progresión aritmética con $d = 3$.

b) $b_n - b_{n-1} = 5n - 4 - [5(n-1) - 4)] = 5n - 4 - 5n + 5 + 4 = 5$

Es una progresión aritmética con $d = 5$.

c) $c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = \frac{1}{3}, c_4 = \frac{1}{4}, \dots$

$c_2 - c_1 = \frac{-1}{2} \neq c_3 - c_2 = \frac{1}{6}$. No es una progresión aritmética.

d) $d_n - d_{n-1} = \frac{8-3n}{4} - \frac{8-3(n-1)}{4} = \frac{8-3n-8+3n-3}{4} = \frac{-3}{4}$

Es una progresión aritmética con $d = \frac{-3}{4}$.

e) $e_n - e_{n-1} = 5 + \frac{n}{2} - \left(5 + \frac{n-1}{2}\right) = 5 + \frac{n}{2} - 5 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Es una progresión aritmética con $d = \frac{1}{2}$.

f) $f_1 = 0,\ f_2 = 3,\ f_3 = 8,\ f_4 = 15, \dots$

$f_2 - f_1 = 3 \neq f_3 - f_2 = 5$. No es una progresión aritmética.

7 **Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas y comprueba los resultados con la calculadora:**

a) 3, 6, 9, 12, 15, … **b) 5; 4,9; 4,8; 4,7; 4,6; …**

c) $c_n = 4n - 2$ **d)** $d_n = \frac{1-2n}{2}$

a) $a_1 = 3$; $a_{25} = a_1 + 24d = 3 + 24 \cdot 3 = 75$

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(3+75) \cdot 25}{2} = 975$$

b) $b_1 = 5$; $b_{25} = b_1 + 24d = 5 - 24 \cdot 0{,}1 = 2{,}6$

$$S_{25} = \frac{(b_1 + b_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(5+2{,}6) \cdot 25}{2} = 95$$

c) $c_1 = 2$; $c_{25} = 98$

$$S_{25} = \frac{(c_1 + c_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(2+98) \cdot 25}{2} = 1250$$

d) $d_1 = \frac{-1}{2}$; $d_{25} = \frac{-49}{2}$

$$S_{25} = \frac{(d_1 + d_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{49}{2}\right) \cdot 25}{2} = \frac{-625}{2} = -312{,}5$$

8 **Halla la suma de los términos** a_{25} **hasta** a_{30}**, ambos inclusive, de las progresiones del ejercicio anterior. Comprueba los resultados con la calculadora.**

a) $a_{25} = 3 + 24 \cdot 3 = 75$ $a_{30} = 3 + 29 \cdot 3 = 90$

La suma es: $\frac{(75+90) \cdot 6}{2} = 495$

b) $b_{25} = 5 + 24 \cdot (-0{,}1) = 2{,}6$ $b_{30} = 3 + 29 \cdot (-0{,}1) = 0{,}1$

La suma es: $\frac{(2{,}6+0{,}1) \cdot 6}{2} = 8{,}1$

c) $c_{25} = 4 \cdot 25 - 2 = 98$ $c_{30} = 4 \cdot 30 - 2 = 118$

La suma es: $\frac{(98+118) \cdot 6}{2} = 648$

d) $d_{25} = \frac{1-2 \cdot 25}{2} = -\frac{49}{2}$ $d_{30} = \frac{1-2 \cdot 30}{2} = -\frac{59}{2}$

La suma es: $\frac{\left[-\frac{49}{2} + \left(-\frac{59}{2}\right)\right] \cdot 6}{2} = -162$

Progresiones geométricas

9 **De las siguientes sucesiones, ¿cuáles son progresiones geométricas? Escribe tres términos más en cada una y su término general.**

a) 32, 16, 8, 4, 2, … **b) 1; 0,1; 0,01; 0,001; …**

c) 1, 4, 9, 16, 25, … **d)** $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$

a) Es una progresión geométrica con $a_1 = 32$ y $r = \frac{1}{2}$.

$$a_6 = 1,\ a_7 = \frac{1}{2},\ a_8 = \frac{1}{4};\ a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^5}{2^{n-1}} = 2^{6-n}$$

b) No es una progresión geométrica; $b_6 = 36,\ b_7 = 49,\ b_8 = 64,\ b_n = n^2$.

c) Es una progresión geométrica con $c_1 = 1$ y $r = 0,1$.

$c_6 = 0,00001;\ c_7 = 0,000001;\ c_8 = 0,0000001;\ c_n = 1 \cdot 0,1^{n-1} = 0,1^{n-1}$

d) Es una progresión geométrica con $d_1 = \sqrt{2}$ y $r = \sqrt{2}$.

$d_6 = 8;\ d_7 = 8\sqrt{2};\ d_8 = 16;\ d_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n$.

10 **Calcula la suma de los 25 primeros términos de estas progresiones geométricas y halla la suma de los infinitos términos en los casos que sea posible:**

a) $a_1 = 32,\ r = 1/2$ **b)** $a_1 = 10,\ r = 1/10$

c) $a_1 = 2^{-10},\ r = 2$ **d)** $a_1 = -5,\ r = -1/4$

Comprueba los primeros resultados con la calculadora.

$S_{25} = \dfrac{a_{25} \cdot r - a_1}{r-1} = \dfrac{a_1 \cdot r^{25} - a_1}{r-1},\quad S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r}$

a) $S_{25} = \dfrac{32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{25} - 32}{\frac{1}{2} - 1} = 63,99999809 \approx 64$ $\quad S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{32}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{32}{\frac{1}{2}} = 64$

b) $S_{25} = \dfrac{10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{25} - 10}{\frac{1}{2} - 1} \approx 11,1 \approx \dfrac{100}{9}$ $\quad S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{32}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{100}{9} = 11,1$

c) $S_{25} = \dfrac{2^{-10} \cdot 2^{25} - 2^{-10}}{2-1} = 32\,767,99902 \approx 32\ 768$

No se puede calcular S_∞ porque $|r|$ no es menor que 1.

d) $S_{25} = \dfrac{(-5) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{25} - (-5)}{-\frac{1}{4} - 1} \approx -4$ $\quad S_\infty = \dfrac{-5}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \dfrac{-5}{\frac{5}{4}} = -4$

11 **Halla la suma de los términos a_{10} hasta a_{20}, ambos inclusive, de la progresión geométrica de $a_1 = 1/512$ y $r = -2$. Comprueba el resultado con la calculadora.**

$a_{10} = \dfrac{1}{512} \cdot (-2)^9 = -1$

$a_{20} = \dfrac{1}{512} \cdot (-2)^{19} = -1024$

La suma es $\dfrac{(-2) \cdot (-1024) - (-1)}{-2-1} = -683$.

Suma de potencias

12 **Calcula.**

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 50^2$

b) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 100^2$

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 50^2 = \dfrac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 42\,925$

b) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 98^2 + 100^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 49^2 + 50^2) = 2^2\,\dfrac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 171\,700$

13 **Calcula.**

$\mathbf{21^3 + 22^3 + \ldots + 58^3 + 59^3 + 60^3}$

$21^3 + 22^3 + \ldots + 58^3 + 59^3 + 60^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + 60^3) - (1^3 + 2^3 + \ldots + 20^3) =$

$= \dfrac{60^2 \cdot 61^2}{4} - \dfrac{20^2 \cdot 21^2}{4} = 3\,304\,800$

14 **Comprueba con la calculadora los resultados de las dos actividades anteriores.**

En el ejercicio 12a) tecleamos SHIFT, Σ e introducimos los datos teniendo en cuenta que el primer término es 1, el último es 50 y la sucesión es x^2. El resultado es 42 925.

En el ejercicio 12b), el primer término es 1, el último es 50 y la sucesión es $(2x)^2$. El resultado es 171 700.

En el ejercicio 13, el primer término es 21, el último es 60 y la sucesión es x^3. El resultado es 3 304 800.

Límites

15 **Calcula los términos a_{10}, a_{100} y $a_{1\,000}$, en estas sucesiones e indica cuál es su límite:**

a) $a_n = \dfrac{1}{n-1}$ **b)** $a_n = \dfrac{2n+5}{n}$

c) $a_n = \dfrac{5}{n} - 1$ **d)** $a_n = 3 - 7n$

a) $a_{10} = 0,\widehat{1}$; $a_{100} = 0,\widehat{01}$; $a_{1\,000} = 0,\widehat{001}$

$lím\ a_n = 0$

b) $a_{10} = 2{,}5$; $a_{100} = 2{,}05$; $a_{1\,000} = 2{,}005$

$lím\ a_n = 2$

c) $a_{10} = -0{,}5$; $a_{100} = -0{,}95$; $a_{1\,000} = -0{,}995$

$lím\ a_n = -1$

d) $a_{10} = -6{,}7$; $a_{100} = -697$; $a_{1\,000} = -6\,997$

$lím\ a_n = -\infty$

16 **Estudia el comportamiento de estas sucesiones para términos muy avanzados e indica el límite de cada una:**

a) $a_n = 5n - 10$ **b)** $b_n = \dfrac{n-3}{n+1}$

c) $c_n = \dfrac{n}{2n+1}$ **d)** $d_n = 10 - 5n + n^2$

e) $e_n = 1 - (n+2)^2$ **f)** $f_n = \dfrac{n \cdot (-1)^n}{n+1}$

g) $g_n = (-1)^n \cdot (n-1)^2$ **h)** $h_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

i) $i_n = n \cdot (-1)^n - n^2$ **j)** $j_n = \dfrac{3n}{n^2+1}$

k) $k_n = \dfrac{5}{3n+2}$ **l)** $l_n = (-1)^{n+1}$

a) $a_{10} = 40$; $a_{100} = 490$; $a_{1\,000} = 4\,990$

$lím\ a_n = +\infty$

b) $b_{10} = 0{,}63$; $b_{100} \approx 0{,}9603$; $b_{1\,000} \approx 0{,}996$

$lím\ b_n = 1$

c) $c_{10} \approx 0{,}476$; $c_{100} \approx 0{,}498$; $c_{1\,000} \approx 0{,}4998$

$lím\ c_n = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$

d) $d_{1\,000} = 10 - 5 \cdot 1\,000 + 1\,000^2 = 995\,010$; $d_{10\,000} = 10 - 5 \cdot 10\,000 + 10\,000^2 = 99\,950\,010$

$lím\ d_n = +\infty$

e) $e_{1\,000} = 1 - (1\,000 + 2)^2 = -1\,004\,003$; $e_{10\,000} = 1 - (10\,000 + 2)^2 = -100\,040\,003$

$lím\ e_n = -\infty$

f) $f_{1\,000} = \dfrac{1000 \cdot (-1)^{1\,000}}{1000+1} = \dfrac{1000}{1001}$; $f_{1\,001} = \dfrac{1001 \cdot (-1)^{1001}}{1001+1} = -\dfrac{1001}{1002}$

La sucesión de los términos pares tiende a 1 y la de los impares a –1, luego no tiene límite (además, es oscilante).

g) $g_{1\,000} = (-1)^{1\,000} \cdot (1\,000 - 1)^2 = 998\,001$; $g_{1\,001} = (-1)^{1\,001} \cdot (1\,001 - 1)^2 = -1\,000\,000$

Se trata de una sucesión oscilante en la que los términos pares tienden a $+\infty$ y los impares tienden a $-\infty$. Luego no tiene límite.

h) $h_{1\,000} = \dfrac{(-1)^{1000}}{1000^2} = \dfrac{1}{1000\,000}$; $h_{1\,001} = \dfrac{(-1)^{1001}}{1001^2} = -\dfrac{1}{1002\,001}$

Aunque la sucesión es oscilante, todos los términos tienden a 0, luego $lím\ h_n = 0$.

i) $i_{1\,000} = 1\,000 \cdot (-1)^{1\,000} - 1\,000^2 = -999\,000$; $i_{1\,001} = 1\,001 \cdot (-1)^{1\,001} - 1\,001^2 = -1\,003\,002$

Cuando n es grande, el primer término apenas influye en n^2 y, por tanto, $lím\ i_n = lím\ -n^2 = -\infty$.

j) $j_{1\,000} = \dfrac{3 \cdot 1000}{1000^2+1} = \dfrac{3000}{1000\,001}$; $j_{10\,000} = \dfrac{3 \cdot 10\,000}{10\,000^2+1} = \dfrac{30\,000}{100\,000\,001}$

Observamos que el término independiente del denominador es insignificante con respecto a n^2.

$lím\ j_n = lím\ \dfrac{3n}{n^2} = lím\ \dfrac{3}{n} = 0$

k) $k_{1\,000} = \dfrac{5}{3 \cdot 1000 + 2} = \dfrac{5}{3002}$; $k_{10\,000} = \dfrac{5}{3 \cdot 10\,000 + 2} = \dfrac{5}{30\,002}$

$lím\ k_n = 0$

l) $l_{1\,000} = (-1)^{1\,000\,+\,1} = -1$; $l_{1\,001} = (-1)^{1\,001\,+\,1} = 1$

Esta sucesión no tiene límite porque los términos pares siempre valen –1 y los impares, 1.

Página 76

Para resolver

17 **Calcula la suma de:**

a) Los números impares de tres cifras.

b) Los cuadrados de los números impares de tres cifras.

a) Es la suma de los términos de una progresión aritmética en la que el primer término es 101, el último es 999, y hay 450 sumandos:

$$S = \frac{(101+999) \cdot 450}{2} = 247\,500$$

b) Primero calcularemos:

$101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 999^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 999^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2) =$

$$= \frac{999 \cdot 1\,000 \cdot 1\,997}{6} - \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = 332\,162\,150$$

Ahora bien:

$101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 999^2 = (101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 999^2) - (102^2 + 104^2 + 106^2 + \ldots + 998^2)$

Por otra parte:

$102^2 + 104^2 + 106^2 + \ldots + 998^2 = (2 \cdot 51)^2 + (2 \cdot 52)^2 + (2 \cdot 53)^2 + \ldots + (2 \cdot 499)^2 =$

$= 4 \cdot (51^2 + 52^2 + \ldots + 499^2)$

Y de la misma forma que al principio,

$51^2 + 52^2 + \ldots + 499^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 499^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 50^2) =$

$$= \frac{499 \cdot 500 \cdot 999}{6} - \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 41498825$$

Finalmente,

$101^2 + 103^2 + 105^2 + \ldots + 999^2 = 332\,162\,150 - 4 \cdot 41\,498\,825 = 166\,166\,850$

18 **¿Cuánto vale la suma de los 100 primeros múltiplos de 7?**

Queremos calcular la suma de los 100 primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_1 = 7$ y $d = 7$.

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(7 + 700) \cdot 100}{2} = 35350$$

19 **En una progresión aritmética sabemos que $d = 3$, $a_k = 34$ y $S_k = 133$. Calcula k y a_1.**

$$\left.\begin{array}{l} a_k = a_1 + (k-1) \cdot d \;\to\; 34 = a_1 + (k-1) \cdot 3 \\ S_k = \dfrac{(a_1 + a_k) \cdot k}{2} \;\to\; 133 = \dfrac{(a_1 + 34) \cdot k}{2} \end{array}\right\}$$

$34 = a_1 + 3k - 3 \;\to\; a_1 = 37 - 3k$

$$133 = \frac{(37 - 3k + 34) \cdot k}{2} \;\to\; 266 = (71 - 3k)\,k$$

$26 = 71k - 3k^2 \;\to\; 3k^2 - 71k + 266 = 0$

$$k = \frac{71 \pm \sqrt{5041 - 3192}}{6} = \frac{71 \pm \sqrt{1849}}{6} = \frac{71 \pm 43}{6} = \begin{cases} k = 14/3 \text{ (no vale)} \\ k = 19 \end{cases}$$

$a_1 = 37 - 3 \cdot 19 = 37 - 57 = -20 \;\to\; a_1 = -20$

20 **En una progresión geométrica de razón $r = 3$ conocemos $S_6 = 1\,456$. Calcula a_1 y a_4.**

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot 5 - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^6 - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot 729 - a_1}{2} = \frac{728a_1}{2} = 364a_1 = 1\,456 \;\to\; a_1 = 4$$

$a_4 = a_1 \cdot r^3 = 4 \cdot 27 = 108$

21 **La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es igual a 4 y $a_2 = 1$. Calcula a_1 y la razón.**

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot r = 1 \;\to\; a_1 = \dfrac{1}{r} \\ S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r} = \dfrac{1/r}{1 - r} = \dfrac{1}{r - r^2} = 4 \;\to\; 1 = 4r - 4r^2 \end{cases}$$

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \;\to\; r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \;\to\; r = \frac{1}{2} \;\to\; a_1 = 2$$

22 **Sabemos que la suma de 138 números naturales consecutivos es 30 291. ¿Cuáles son el primero y el último?**

Supongamos que el primer término es k. Entonces el último será $k + 137$, luego:

$$30\,291 = \frac{(k + k + 137) \cdot 138}{2} \;\to\; k = 151 \text{ es el primer número natural y } k + 137 = 288 \text{ es el último}$$

23 **Calcula la suma de todos los términos comprendidos entre el 10 y el 20, ambos inclusive, de estas sucesiones dadas por recurrencia:**

a) $a_1 = 20,\ a_n = a_{n-1} + 4$

b) $b_1 = 7,\ b_2 = 13,\ b_n = b_{n-2} + 12$

c) $c_1 = 0{,}625,\ c_n = 2c_{n-1}$

d) $d_1 = 4,\ d_2 = 6,\ d_n = d_{n-2} \cdot \dfrac{9}{4}$

a) Esta sucesión es una progresión aritmética en la que $a_1 = 20$ y $d = 4$.

$a_{10} = 20 + 9 \cdot 4 = 56;\ a_{20} = 20 + 19 \cdot 4 = 96$

La suma es: $\dfrac{(56+96)\cdot 11}{2} = 836$

b) Esta sucesión es una progresión aritmética en la que $b_1 = 7$ y $d = 6$.

$b_{10} = 7 + 9 \cdot 6 = 61;\ b_{20} = 7 + 19 \cdot 6 = 121$

La suma es: $\dfrac{(61+121)\cdot 11}{2} = 1001$

c) En esta ocasión tenemos una progresión geométrica en la que $c_1 = 0{,}625$ y $r = 2$.

$c_{10} = 0{,}625 \cdot 2^9 = 320;\ c_{20} = 0{,}625 \cdot 2^{19} = 327\,680$

La suma es: $\dfrac{2 \cdot 327\,680 - 320}{2-1} = 655\,040$

d) Esta sucesión es una progresión geométrica en la que $d_1 = 4$ y $r = \dfrac{3}{2}$.

$d_{10} = 4 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^9 = \dfrac{19\,683}{128};\ d_{20} = 4 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{19} = \dfrac{1162\,261\,467}{131\,072}$

La suma es: $\dfrac{\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1162\,261\,467}{131\,072} - \dfrac{19\,683}{128}}{\dfrac{3}{2} - 1} \approx 26\,294{,}5$

24 **Halla la suma de todos los términos a partir del décimo de esta sucesión: $a_1 = 6\,144,\ a_2 = 3\,072,\ a_n = \dfrac{1}{4}\, a_{n-2}$**

La sucesión dada es una progresión geométrica de razón $r = \dfrac{1}{2}$. Por tanto, se puede calcular la suma de los infinitos términos de la sucesión.

$a_{10} = 6\,144 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = 12$

La suma pedida es $\dfrac{12}{1 - \dfrac{1}{2}} = 24$.

25 **Una célula alcanza la madurez y se reproduce por mitosis (se divide en dos) al cabo de 40 min. Partiendo de un cultivo de 625 células, ¿cuántas tendremos al cabo de 4 horas?**

Observemos la sucesión:

$a_1 = 625$ (cultivo de partida)

$a_2 = 625 \cdot 2 = 1\,250$ (40 min)

$a_3 = 1\,250 \cdot 2 = 625 \cdot 2^2 = 2\,500$ (80 min)

Vemos que los términos forman una progresión geométrica de razón $r = 2$.

El término general es $a_n = 625 \cdot 2^{n-1}$.

Por otro lado, 4 h = 4 · 60 min = 240 min se corresponden con $n = 7$.

El número de células es $a_7 = 625 \cdot 2^6 = 40\,000$.

26 ODS Meta 12.1. **[Tras la visualización del vídeo, el alumnado puede debatir sobre cómo afecta el incremento de la población mundial a la disponibilidad de recursos naturales para mantener el estilo de vida actual].**

En la primera década del siglo XXI la población de Angola creció un 2,5 % anualmente. Si a finales de 2010 había 23 millones de habitantes, ¿cuántos había a comienzos del año 2001?

Si llamamos P a la población a comienzos de 2001, la población evolucionará de la siguiente forma:

- Finales de 2001: $P\left(1+\frac{2,5}{100}\right)$
- Finales de 2002: $P\left(1+\frac{2,5}{100}\right)^2$

…

- Finales de 2010: $P\left(1+\frac{2,5}{100}\right)^{10}$

Por tanto, $P\left(1+\frac{2,5}{100}\right)^{10} = 23 \rightarrow P \cdot 1{,}025^{10} = 23 \rightarrow P = \frac{23}{1{,}025^{10}} \approx 17\,967\,563$ habitantes.

27 **Se sabe que los ángulos de cierto pentágono están en progresión aritmética. Si el menor mide 50°, halla los demás.**

* ***Recuerda la suma de los ángulos de un pentágono.***

La suma de los ángulos de un pentágono es: 180° · (5 – 2) = 540°

Si d es la diferencia de dicha progresión, tenemos que: $\frac{(50+50+4d)\cdot 5}{2} = 540$

de donde se obtiene que $d = 29$ y los demás ángulos son: 79°, 108°, 137° y 166°.

28 **Los lados de un hexágono están en progresión aritmética. Calcúlalos sabiendo que el mayor mide 13 cm y que su perímetro es de 48 cm.**

Llamamos a los lados a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6.

Sabemos que $a_6 = 13$ cm y que $S_6 = 48$. Por tanto:

$$\begin{cases} a_6 = a_1 + 5d \rightarrow 13 = a_1 + 5d \rightarrow a_1 = 13 - 5d \\ S_6 = \frac{(a_1 + a_6)\cdot 6}{2} \rightarrow 48 = (13 - 5d + 13)\cdot 3 \rightarrow 48 = (26 - 5d)\cdot 3 \end{cases}$$

$48 = 78 - 15d \rightarrow 15d = 30 \rightarrow d = \frac{30}{15} = 2 \rightarrow d = 2$

$a_1 = 13 - 5 \cdot 2 = 13 - 10 = 3 \rightarrow a_1 = 3$

Los lados del hexágono miden 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm y 13 cm.

29 **En un cine, la segunda fila de butacas está a 10 m de la pantalla y la séptima está a 16 m. ¿En qué fila debe sentarse una persona que le guste ver la pantalla a una distancia de 28 m?**

$a_7 = 16 \rightarrow a_7 = a_2 + 5d = 10 + 5d = 16 \rightarrow d = 1{,}2$

(La distancia entre las dos filas consecutivas es de 1,2 metros).

Buscamos n para que $a_n = 28$ m:

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 8{,}8 + (n-1)\cdot 1{,}2 = 28 \rightarrow 8{,}8 + 1{,}2n - 1{,}2 = 28 \rightarrow 1{,}2n = 20{,}4 \rightarrow n = 17$

La fila 17 está a 28 metros.

30 **La maquinaria de una fábrica pierde cada año un 20 % de su valor. Si costó 4 millones de euros, ¿en cuánto se valorará después de 10 años de funcionamiento?**

– Al cabo de 1 año valdrá $\to$ $(4 \cdot 10^6) \cdot 0{,}8$ €

– Al cabo de 2 años valdrá $\to$ $(4 \cdot 10^6) \cdot 0{,}8^2$ €

…

– Al cabo de 10 años valdrá $\to$ $(4 \cdot 10^6) \cdot 0{,}8^{10} \approx 429496{,}73$ €

31 **El 1 de enero depositamos 5 000 € en una cuenta bancaria a un interés anual del 6 % con abono mensual de intereses. ¿Cuánto dinero tendremos un año después si no hemos sacado nada en ese tiempo?**

* ***Un 6 % anual corresponde a $\frac{6}{12}$ = 0,5 % mensual.***

– Al cabo de 1 mes tendremos $\to$ $5\,000 \cdot 1{,}005$ €

– Al cabo de 2 meses tendremos $\to$ $5\,000 \cdot 1{,}005^2$ €

…

– Al cabo de 12 meses tendremos $\to$ $5\,000 \cdot 1{,}005^{12} \approx 5\,308{,}39$ €

32 **Utiliza las sumas de una progresión geométrica para obtener las fracciones generatrices de estos decimales periódicos:**

a) $2,\widehat{4}$ **b)** $1,\widehat{72}$ **c)** $0,3\widehat{5}$ **d)** $3,75\widehat{923}$

* ***Ten en cuenta el ejercicio guiado 1.***

a) $2{,}444\ldots = 2 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \ldots = 2 + 4\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots\right) =$

$$= 2 + 4 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 2 + 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{22}{9}$$

b) $1{,}727272\ldots = 1 + \frac{72}{100} + \frac{72}{10\,000} + \frac{72}{100\,000} + \ldots = 1 + 72 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000} + \frac{1}{10\,000\,000} + \ldots\right) =$

$$= 1 + 72 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 1 + 72 \cdot \frac{1}{99} = \frac{19}{11}$$

c) $0{,}35555\ldots = \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10\,000} + \ldots = \frac{3}{10} + 5 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10\,000} + \ldots\right) =$

$$= \frac{3}{10} + 5 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} + 5 \cdot \frac{1}{90} = \frac{16}{45}$$

d) $3{,}75923923923\ldots = 3 + \frac{75}{100} + \frac{923}{100\,000} + \frac{923}{100\,000\,000} + \ldots =$

$$= \frac{375}{100} + 923 \cdot \left(\frac{1}{100\,000} + \frac{1}{100\,000\,000} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{375}{100} + 923 \cdot \frac{\frac{1}{100\,000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{375}{100} + 923 \cdot \frac{1}{99\,900} = \frac{93\,887}{24\,975}$$

33 Calcula el límite de cada una de estas sucesiones:

a) $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$ **b)** $b_n = \frac{5^n}{n^7}$

c) $c_n = \frac{(n-1)^2}{n^2+3}$ **d)** $d_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}$

e) $e_n = \frac{3n+1}{\sqrt{n}}$ **f)** $f_n = \sqrt{\frac{4n-3}{n+2}}$

g) $g_n = \frac{(1+n)^3}{(n+2)^2}$ **h)** $h_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$

a) $a_{1\,000} = 1 + \frac{1}{2^{1000}} \approx 1$

Vemos que el límite es 1 porque el segundo sumando tiende a 0.

b) $b_{10} = \frac{5^{10}}{10^7} = \frac{125}{128}$; $b_{100} = \frac{5^{100}}{100^7} = 7{,}8886 \times 10^{55}$; $b_{150} = \frac{5^{150}}{150^7} = 4{,}1007 \times 10^{89}$

Como se puede ver la sucesión crece indefinidamente y el límite es $+\infty$.

c) $c_{10} = 0{,}7864$; $c_{100} = 0{,}9798$; $c_{1\,000} = 0{,}9980$

$lím\ c_n = 1$

d) $d_{10} = 0{,}5025$; $d_{100} = 0{,}500025$; $d_{1\,000} = 0{,}50000025$

$lím\ d_n = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

e) $e_{10} = 9{,}80$; $e_{100} = 30{,}1$; $e_{1\,000} = 94{,}90$

$lím\ e_n = +\infty$

f) $f_{10} = 1{,}756$; $f_{100} = 1{,}973$; $f_{1\,000} = 1{,}997$

$lím\ f_n = 2$

g) $g_{10} = 9{,}24$; $g_{100} = 99{,}03$; $g_{1\,000} = 999{,}003$

$lím\ g_n = +\infty$

h) $h_{10} = 0{,}760$; $h_{100} = 0{,}909$; $h_{1\,000} = 0{,}969$

$lím\ h_n = 1$

34 Calcula el término general y el límite de estas sucesiones:

a) $\frac{3}{-2}, \frac{5}{-7}, \frac{7}{-12}, \frac{9}{-17}, \frac{11}{-22}, \dots$

b) $\frac{7}{1}, \frac{4}{4}, \frac{1}{9}, \frac{-2}{16}, \frac{-5}{25}, \dots$

c) $\frac{-99}{10}, \frac{-96}{20}, \frac{-91}{30}, \frac{-84}{40}, \frac{-75}{50}, \dots$

a) Tanto las sucesiones de los numeradores como las de los denominadores son progresiones aritméticas.

$a_n = \frac{3+(n-1)\cdot 2}{-2+(n-1)\cdot(-5)} = \frac{2n+1}{-5n+3}$ $\quad lím\ a_n = -\frac{2}{5}$

b) La sucesión de los numeradores es una progresión aritmética y la de los denominadores es la sucesión de los cuadrados de los números naturales.

$b_n = \frac{7+(n-1)\cdot(-3)}{n^2} = \frac{-3n+10}{n^2}$ $\quad lím\ b_n = 0$

c) La sucesión de los numeradores se obtiene restando a 100 los cuadrados de los números naturales. Los denominadores son los múltiplos de 10.

$c_n = \frac{100-n^2}{10n}$ $\quad lím\ c_n = -\infty$

35 **Sabiendo que $S = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{10}$, escribe en función de S la suma $1 + a + a^2 + \ldots + a^{21}$.**

Llamemos T a la suma que buscamos: $T = 1 + a + a^2 + a^3 + a^{21}$

$T = 1 + \ldots + a^{10} + a^{11} + \ldots + a^{21} = S + a^{11} + \ldots + a^{21} = S + a^{11}(1 + \ldots + a^{10}) = S + a^{11}S$

36 **Halla el término general y estudia el límite de esta sucesión:**

$2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{2}, \ldots$

$a_n = \sqrt[n]{2} = 2^{1/n}$

$a_1 = 2;\ a_2 = \sqrt{2} \approx 1{,}4142;\ a_3 = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599;\ a_4 = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}1892; \ldots;\ a_{10} \approx 1{,}0718$

$a_{100} \approx 1{,}00696;\ lím\ a_n = 1$

37 **Comprueba que la sucesión $\sqrt{7}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[6]{7}, \ldots$ es una progresión geométrica. Calcula el siguiente término.**

Comprobaremos que es una progresión geométrica viendo que la división entre dos términos consecutivos es constante e igual a r:

$$\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt[6]{7^2}}{\sqrt[6]{7^3}} = \frac{1}{\sqrt[6]{7}}$$

$$\frac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[6]{7^2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{7}}$$

Calculamos el siguiente término:

$$a_4 = a_3 \frac{1}{\sqrt[6]{7}} = \frac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[6]{7}} = 1$$

38 **¿Cuántos términos de la progresión aritmética 1, 4, 7, … tienen menos de cinco cifras?**

Tenemos la progresión aritmética 1, 4, 7, … cuyo primer término es $a_1 = 1$ y $d = 3$.

$a_2 = 4 = a_1 + 1$

$a_3 = 7 = a_1 + 2d$

Si escribimos su término general:

$a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$

Queremos saber hasta qué término tenemos 4 cifras, es decir:

$a_n < 10\,000 \rightarrow 3n - 2 < 10\,000 \rightarrow 3n < 10\,002 \rightarrow n < 3\,334$

Por lo tanto si cogemos $n = 3\,333$ tenemos el término $a_{3\,333} = 3 \cdot (3\,333) - 2 = 9\,997$

Así podemos encontrar 3 333 términos con menos de cinco cifras.

39 **La suma de los n primeros términos de una sucesión viene dada por $S_n = n^2 + n + 5$. Halla a_{15}.**

Si $n = 15 \rightarrow S_{15} = 15^2 + 15 + 5 = 225 + 20 = 245$

Si $n = 14 \rightarrow S_{14} = 14^2 + 14 + 5 = 215$

También sabemos que:

$S_{15} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{15} = S_{14} + a_{15} \rightarrow a_{15} = S_{15} - S_{14} \rightarrow a_{15} = 245 - 215 = 30$

40 **a) Demuestra que:**

$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$

b) Calcula la suma de los cuadrados de los 50 primeros números pares.

c) Calcula la suma de los cuadrados de todos los números impares menores que 100.

a) $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = (2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 4)^2 + (2 \cdot 5)^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$

b) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 98^2 + 100^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 49^2 + 50^2) = 2^2\,\dfrac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 171\,700$

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 99^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 99^2 + 100^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 98^2 + 100^2) =$

$$= \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - 171\,700 = 338\,350 - 171\,700 = 166\,650$$

41 **Halla la siguiente suma:**

$11^3 + 13^3 + 15^3 + 17^3 + \ldots + 33^3$

Llamamos $S = 11^3 + 13^3 + \ldots + 31^3 + 33^3$.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3 + 11^3 + 12^3 + \ldots + 32^3 + 33^3 = \dfrac{33^2 \cdot 34^2}{4} = 314\,721$

$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 32^3 = 2^3(1^3 + 2^3 + \ldots + 16^3) = 8 \cdot \dfrac{16^2 \cdot 17^2}{4} = 147\,968$

Por tanto:

$1^3 + 3^3 + \ldots + 9^3 + 11^3 + 13^3 + \ldots + 31^3 + 33^3 = 314\,721 - 147\,968 = 166\,753$

$S = 166\,753 - (1^3 + 3^3 + \ldots + 9^3) = 166\,753 - 1\,225 = 165\,528$

Página 77

Cuestiones teóricas

42 **Sea a_n una progresión aritmética con $d = \dfrac{1}{10}$. ¿Cuál es su límite?**

$a_2 = a_1 + d = a_1 + \dfrac{1}{10}$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} = a_1 + \dfrac{2}{10}$

$a_n = a_1 + \dfrac{n-1}{10}$

Calculamos términos grandes para ver cuál es su límite:

$a_{10} = a_1 + \dfrac{9}{10}$

$a_{100} = a_1 + \dfrac{99}{10} = a_1 + 9 + \dfrac{9}{10}$

$a_{1\,000} = a_1 + \dfrac{999}{10} = a_1 + 99 + \dfrac{9}{10}$

Como vemos que buscando términos cada vez mayores hay una cantidad que no para de crecer (9, 99, 999, 9 999…), esta sucesión tiende a infinito.

43 **Si a_n es una progresión geométrica con $r = \dfrac{1}{3}$, ¿cuál es su límite?**

Al ir multiplicando por $\dfrac{1}{3}$ sucesivamente, los términos se van aproximando a cero.

Es decir, $lím\ a_n = 0$.

44 **Si la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es 5, ¿qué podemos decir del valor de r?**

Inventa un ejemplo con r positivo en el que se verifique esto. Inventa otro ejemplo con r negativo.

Podemos decir que $|r| < 1$ porque se pueden sumar sus infinitos términos.

Con $r > 0$ tenemos, por ejemplo: $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \dots$ ya que $S_\infty = \dfrac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 5.$

Con $r < 0$ tenemos, por ejemplo: $\frac{20}{3}, -\frac{20}{9}, \frac{20}{27}, -\frac{20}{81}, \dots$

En este caso $S_\infty = \dfrac{\frac{20}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = 5$

45 **La sucesión 3, 3, 3, 3, … puede considerarse una progresión aritmética y también geométrica. ¿Cuál es la diferencia en el primer caso? ¿Y la razón en el segundo?**

– Es una progresión aritmética con $d = 0$.

– También es una progresión geométrica con $r = 1$.

46 **En una progresión geométrica cualquiera, a, ar, ar^2, …, comprueba que:**

$\boldsymbol{a_1 \cdot a_6 = a_2 \cdot a_5 = a_3 \cdot a_4}$

¿Se verifica también que $a_3 \cdot a_7 = a_4 \cdot a_6$? Enuncia una propiedad que exprese los resultados anteriores.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdot a_6 = a \cdot (a \cdot r^5) = a^2 \cdot r^5 \\ a_2 \cdot a_5 = (a \cdot r) \cdot (a \cdot r^4) = a^2 \cdot r^5 \\ a_3 \cdot a_4 = (a \cdot r^2) \cdot (a \cdot r^3) = a^2 \cdot r^5 \end{array}\right\} \text{Son iguales}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_3 \cdot a_7 = (a \cdot r^2) \cdot (a \cdot r^6) = a^2 \cdot r^8 \\ a_4 \cdot a_6 = (a \cdot r^3) \cdot (a \cdot r^5) = a^2 \cdot r^8 \end{array}\right\} \text{Son iguales}$$

Para profundizar

47 **Calcula el límite de cada una de estas sucesiones:**

a) $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dots + \dfrac{n}{n^2}$

b) $\dfrac{1^2}{1^3}, \dfrac{1^2+2^2}{1^3+2^3}, \dfrac{1^2+2^2+3^2}{1^3+2^3+3^3}, \dots$

c) $\dfrac{1 \cdot 1^2}{1^3}, \dfrac{2 \cdot (1^2+2^2)}{1^3+2^3}, \dfrac{3 \cdot (1^2+2^2+3^2)}{1^3+2^3+3^3}, \dots$

d) $\dfrac{1 \cdot 2^2}{1^3}, \dfrac{2 \cdot (2^2+4^2)}{1^3+2^3}, \dfrac{3 \cdot (2^2+4^2+6^2)}{1^3+2^3+3^3}, \dots$

a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}(1+2+3+\dots+n) = \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{(1+n)\cdot n}{2}\right) = \dfrac{1}{n^2} \cdot \left(\dfrac{n+n^2}{2}\right) = \dfrac{n^2+n}{2n^2}$

Hallamos el límite: $a_{10} = 0{,}55$; $a_{100} = 0{,}505$; $a_{1\,000} = 0{,}5005$; $\text{lím } a_n = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$

b) Usamos los resultados de la página 65 de esta unidad para el numerador y el denominador.

$$b_n = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n^2(n+1)^2}{4}} = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)} = \frac{4n+2}{3n^2+3n};\ \ lím\ \frac{4n+2}{3n^2+3n} = 0$$

c) Cada término de esta sucesión es igual al correspondiente de la anterior multiplicado por el lugar que ocupa. Es decir:

$$c_n = n \cdot b_n = \frac{4n^2+2n}{3n^2+3n};\ \ lím\ \frac{4n^2+2n}{3n^2+3n} = \frac{4}{3}$$

d) Observamos que:

$2^2 = 2^2 \cdot 1^2$

$2^2 + 4^2 = 2^2 \cdot (1^2 + 2^2)$

$2^2 + 4^2 + 6^2 = 2^2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2)$

Este resultado es el cuádruple de la sucesión del numerador del apartado b), por tanto, el término general de este numerador es $n \cdot 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

El denominador es igual al denominador de la sucesión del apartado b).

$$d_n = \frac{n \cdot 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n^2(n+1)^2}{4}} = \frac{16n^2(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)^2} = \frac{16n+8}{3n+3};\ \ lím\ \frac{16n+8}{3n+3} = \frac{16}{3}$$

48 Al sumar los números naturales desde el 1 hasta n ha habido un error y se ha sumado dos veces uno de ellos. Si se ha obtenido 857, determina n y el número repetido.

Buscamos un número natural, k, tal que $S_n + k = \frac{n(n+1)}{2} + k = 857$ que tiene que cumplir $k \le n$.

Damos valores a n:

$n = 10 \rightarrow S_{10} = 55$ y, por tanto, como $857 - 55 = 802$, no hay ningún número $k \le 10$ tal que $55 + k = 857$.

Procedemos del mismo modo hasta que $857 - S_n$ sea menor o igual que n:

$n = 20 \rightarrow S_{20} = 210$, como $857 - 210 = 647 > 20$, seguimos.

$n = 30 \rightarrow S_{30} = 465$, como $857 - 465 = 392 > 30$, seguimos.

$n = 40 \rightarrow S_{40} = 820$, como $857 - 820 = 37 < 40$, hemos llegado a una solución: $n = 40$ y el número repetido es 37.

Veamos que no hay más soluciones. Para ello estudiaremos qué ocurre cuando $n = 39$ y cuando $n = 41$.

$n = 39 \rightarrow S_{39} = 780$, como $857 - 780 = 77 > 39$, este valor de n no es solución.

$n = 41 \rightarrow S_{41} = 861$, en este caso ya hemos superado el valor 857 y, por tanto, este valor de n tampoco es solución.

49 En la sucesión 4, 7, 1, 8, … para $n > 2$, el término a_n es el dígito de las unidades de la suma de los dos anteriores. ¿Cuál es el menor n para el que $S_n > 10\,000$?

Tenemos la sucesión 4, 7, 1, 8, 9, … de la que, a simple vista, no podemos deducir un término general pero si escribimos más términos, observamos que empiezan a repetirse secuencialmente:

4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2, 1, 3, 4, 7, 1, …

Los términos se repiten a partir del duodécimo.

Observamos que $S_{12} = 60$, por lo que cada 12 términos de la sucesión sumaremos 60.(*)

Veamos cuántas veces podemos hacer esta suma sin pasar de 10 000. Tenemos:

$$\frac{10\,000}{60} = 166,\widehat{6}\ \ ;\ \ 60 \cdot 166 = 9960\ ;\ \ 166 \cdot 12 = 1992$$

Por la igualdad (*), $S_{1992} = 9\,960 < 10\,000$. Sumamos de 1 en 1 los términos que faltan para acercarnos a 10 000:

$S_{1993} = 9\,960 + 4 = 9\,964$

$S_{1994} = 9\,964 + 7 = 9\,971$

$S_{1995} = 9\,971 + 1 = 9\,972$

$S_{1996} = 9\,972 + 8 = 9\,980$

$S_{1997} = 9\,980 + 9 = 9\,989$

$S_{1998} = 9\,989 + 7 = 9\,996$

$S_{1999} = 9\,996 + 6 = 10\,002$

Por lo tanto el término 1 999 es el primero que cumple la condición dada.

50 **¿Qué número ocupa el lugar 2 007 en la sucesión 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, …?**

$a_n = 1$, si $n \le 1$

$a_n = 2$, si $n \le 3$. Sabemos que $3 = 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2}$.

$a_n = 3$, si $n \le 6$. Sabemos que $6 = 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2}$.

$a_n = 4$, si $n \le 10$. Sabemos que $10 = 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$.

…

En general: $a_n = k$, si k es el menor número natural que cumple $n \le \frac{k(k+1)}{2}$.

Buscamos, por tanto, el menor natural, k', que cumpla: $2\,007 \le \frac{k'(k'+1)}{2}$. De esta forma, $a_{2\,007} = k'$.

Solucionamos la siguiente ecuación:

$\frac{k(k+1)}{2} = 2\,007 \rightarrow k^2 + k = 4\,014 \rightarrow k_1 = 62{,}8;\ k_2 = -63{,}8$ (descartamos la solución negativa).

Por tanto, $\frac{62(62+1)}{2} < 2\,007$, y el primer natural que cumple la condición deseada será:

$k' = 62 + 1 = 63$ y $a_{2\,007} = 63$.

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 2.5. (EA 2.5.1.)

Página 77

1 **Determina los términos a_1, a_{97} y a_{500} de la sucesión cuyo término general es: $a_n = \frac{n^2 - 709}{n+3}$**
¿Cuál es su límite?

$a_1 = \frac{1^2 - 709}{1+3} = -177;\ a_{97} = \frac{97^2 - 709}{97+3} = 87;\ a_{500} = \frac{500^2 - 709}{500+3} = \frac{249\,291}{503} = 495,61$

Observamos que los términos independientes se hacen insignificantes comparados con los otros términos, luego:

$lím\ a_n = lím\ \frac{n^2}{n} = lím\ n = +\infty$

2 **Escribe los diez primeros términos de la sucesión definida así: $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1}$**

$a_1 = 4;\ a_2 = 7;\ a_3 = 2 \cdot 4 - 7 = 1;\ a_4 = 2 \cdot 7 - 1 = 13;\ a_5 = 2 \cdot 1 - 13 = -11;$

$a_6 = 2 \cdot 13 - (-11) = 37;\ a_7 = 2 \cdot (-11) - 37 = -59;\ a_8 = 2 \cdot 37 - (-59) = 133;$

$a_9 = 2 \cdot (-59) - 133 = -251;\ a_{10} = 2 \cdot 133 - (-251) = 517$

3 Cabezas pensantes. **[Una vez que el alumnado haya leído el enunciado, compartirá las propuestas que tiene para encontrar los términos generales tal y como se explica en esta técnica].**
Halla el término general de las siguientes sucesiones. Indica cuáles de ellas son progresiones aritméticas y cuáles progresiones geométricas:

a) 3, 7, 11, 15, 19, 23, …
b) 1, 2, 5, 10, 17, 26, …
c) 1 024, 512, 256, 128, …
d) 3, –9, 27, –81, 243, …
e) 8/13, 19/52, 3/26, –7/52, …
f) 4, 3, 5, 2, 6, 1, 7, 0, …
g) 24, 18, 27/2, 81/8, 243/32, …
h) 0, 2, 6, 12, 20, 30, …

a) Es una progresión aritmética de diferencia $d = 4$.

$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$

b) No es una progresión. Los términos son una unidad mayor que los cuadrados perfectos, empezando por el cuadrado de 0.

$b_n = (n - 1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$

c) Es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$.

$c_n = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{10} \cdot 2^{1-n} = 2^{11-n}$

d) Es una progresión geométrica de razón $r = -3$.

$d_n = 3 \cdot (-3)^{n-1}$

e) $\frac{8}{13} = \frac{32}{52},\ \frac{19}{52},\ \frac{3}{26} = \frac{6}{52},\ \frac{-7}{52},\ \ldots$

Así vemos que es una progresión aritmética de diferencia $d = -\frac{13}{52}$.

$e_n = \frac{8}{13} + (n-1) \cdot \left(-\frac{13}{52}\right) = \frac{(45 - 13n)}{52}$

f) No es una progresión. Los términos impares forman una progresión aritmética de diferencia $d = 1$. Los términos pares forman una progresión aritmética de diferencia $d = -1$.

$$f_n = \begin{cases} 3 + \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 4 - \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

g) Es una progresión geométrica de razón $r = \frac{3}{4}$.

$$g_n = 24 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

h) No es una progresión. Observamos la siguiente relación:

$0 = 1 \cdot 0$

$2 = 2 \cdot 1$

$6 = 3 \cdot 2$

$12 = 4 \cdot 3$

$20 = 5 \cdot 4$

…

Luego $h_n = n(n-1) = n^2 - n$

4 **Halla la ley de recurrencia por la que se forman las siguientes sucesiones:**

a) 7, 8, 15, 23, 38, 61, … **b) 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, …**

c) 0, 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, … **d) 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, …**

a) Cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores. Por tanto:

$a_1 = 7 \qquad a_2 = 8 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

b) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$a_1 = 1 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 1 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

c) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 2 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

d) $a_1 = 1 \qquad a_2 = 1 \qquad a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$

5 **Halla las siguientes sumas:**

a) 3 + 7 + 11 + … + 43

b) 1 000 + 1 000 · 1,1 + 1 000 · 1,1² + … + 1 000 · 1,1¹⁵

c) 80 + 40 + 20 + 10 + 5 + …

d) $101^2 + 102^2 + 103^2 + \dots + 140^2$

e) $3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + 15^3$

a) Es la suma de los once primeros términos de una progresión aritmética de primer término $a_1 = 3$ y diferencia $d = 4$.

$a_n = 4n - 1 \qquad a_1 = 3 \qquad a_{11} = 43$

$$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{3 + 43}{2} \cdot 11 = 253$$

b) Es la suma de los quince primeros términos de una progresión geométrica de primer término $a_1 = 1\,000$ y razón $r = 1{,}1$.

$$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1} \rightarrow S_{15} = \frac{1000 \cdot 1{,}1^{15} - 1000}{1{,}1 - 1} = 31\,772{,}48$$

c) Es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de primer término $a_1 = 80$ y razón $r = 1/2$.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{80}{1 - 1/2} = 160$$

d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$101^2 + 102^2 + 103^2 + \dots + 140^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 140^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2) =$

$= \dfrac{140 \cdot 141 \cdot 281}{6} - \dfrac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = \dfrac{5546960 - 2030100}{6} = 586140$

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + 15^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 15^3) - (1^3 + 2^3) = \dfrac{15^2 \cdot 16^2}{4} - 9 = 14391$

6 **En una progresión aritmética, $a_{15} = 43$ y $a_{86} = 85{,}6$.**

a) Calcula S_{100}.

b) Obtén el valor de a_{220}.

$\left.\begin{aligned} a_{15} &= a_1 + 14d = 43 \\ a_{86} &= a_1 + 85d = 85{,}6 \end{aligned}\right\} \to 85d - 14d = 42{,}6 \to d = 0{,}6$

$a_1 = 43 - 14 \cdot 0{,}6 = 34{,}6$

a) $a_{100} = 34{,}6 + 99 \cdot 0{,}6 = 94$

$S_{100} = \dfrac{(34{,}6 + 94) \cdot 100}{2} = 6430$

b) $a_{220} = a_1 + 219 \cdot d = 34{,}6 + 219 \cdot 0{,}6 = 166$

7 **Dados estos dos términos de una sucesión, $a_1 = 2$ y $a_3 = 7$, halla cuatro términos más y el término general suponiendo que se trata de una progresión:**

a) aritmética

b) geométrica

a) Si es una progresión aritmética, entonces:

$a_3 = a_1 + 2d \to 7 = 2 + 2d \to d = 2{,}5$

Término general: $a_n = 2 + 2{,}5(n - 1)$

Términos de esta progresión son: $a_1 = 2$; $a_2 = 4{,}5$; $a_3 = 7$; $a_4 = 9{,}5$; $a_5 = 12$; $a_6 = 14{,}5$; …

b) Si es una progresión geométrica, entonces:

$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 7 \to 7 = 2 \cdot r^2 \to r = \sqrt{\dfrac{7}{2}}$

Término general: $a_n = 2\left(\sqrt{\dfrac{7}{2}}\right)^{n-1}$

Términos de esta progresión son: $a_1 = 2$; $a_2 = 2\sqrt{\dfrac{7}{2}}$; $a_3 = 7$; $a_4 = 7\sqrt{\dfrac{7}{2}}$; $a_5 = \dfrac{49}{2}$; $a6 = \dfrac{49\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

8 **Halla los límites de las siguientes sucesiones:**

a) $a_n = \dfrac{5}{n}$ **b)** $b_n = \dfrac{5 + 3n}{n + 1}$ **c)** $c_n = \dfrac{n^2 + 1}{5n}$

d) $d_n = (-5)^n + n^2$ **e)** $e_n = \dfrac{5n - 2}{3 - 2n}$ **f)** $f_n = (-3)^n$

g) $g_n = \dfrac{3}{n} + \dfrac{n}{3}$ **h)** $h_n = \dfrac{4000n^2}{-n^3}$ **i)** $i_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{2n}$

a) $a_{10} = 0{,}5$ $\quad a_{100} = 0{,}05$ $\quad a_{1\,000} = 0{,}005 \rightarrow lím\ \dfrac{5}{n} = 0$

b) $b_{10} = 3{,}18$ $\quad b_{100} = 3{,}02$ $\quad b_{1\,000} = 3{,}002 \rightarrow lím\ \dfrac{5+3n}{n+1} = 3$

c) $c_{10} = 2{,}02$ $\quad c_{100} = 20{,}002$ $\quad c_{1\,000} = 200{,}0002 \rightarrow lím\ \dfrac{n^2+1}{5n} = +\infty$

d) $d_{100} = (-5)^{100} + 100^2 = 7{,}8886 \cdot 10^{69}$

$d_{101} = (-5)^{101} + 101^2 = -3{,}9443 \cdot 10^{70}$

En esta sucesión la potencia de n apenas influye en el valor de los términos. Se trata de una sucesión oscilante en la que los términos pares tienden a $+\infty$ y los impares tienden a $-\infty$. Por tanto, no tiene límite.

e) $e_{100} = \dfrac{5\cdot 100-2}{3-2\cdot 100} = -\dfrac{498}{197} = -2{,}5279$

$e_{1\,000} = \dfrac{5\cdot 1000-2}{3-2\cdot 1000} = -\dfrac{4998}{1997} = -2{,}5028$

En esta sucesión los términos independientes tienen una influencia insignificante.

$lím\ \dfrac{5n-2}{3-2n} = lím\ \dfrac{5n}{-2n} = -\dfrac{5}{2}$

f) $f_{50} = (-3)^{50} = 7{,}1790 \cdot 10^{23}$

$f_{51} = (-3)^{51} = -2{,}1537 \cdot 10^{24}$

Se trata de una sucesión oscilante en la que los términos pares tienden a $+\infty$ y los impares, a $-\infty$. Por tanto, no tiene límite.

g) $g_{100} = \dfrac{3}{100} + \dfrac{100}{3} = 33{,}363$

$g_{1\,000} = \dfrac{3}{1000} + \dfrac{1000}{3} = 333{,}34$

En esta sucesión la primera fracción se hace cada vez más próxima a cero, ejerciendo una influencia insignificante en el resultado.

La segunda fracción se hace muy grande cuando n crece indefinidamente.

Por tanto, $lím\ g_n = lím\ \dfrac{n}{3} = +\infty$.

h) $lím\ \dfrac{4000n^2}{-n^3} = lím\ \dfrac{4000}{-n} = 0$ porque el numerador es constante y el denominador, en valor absoluto, se hace muy grande.

i) $i_{1\,000} = \dfrac{(-1)^{1\,000}+1}{2\cdot 1000} = \dfrac{1}{1000} = 0{,}001$

$i_{1\,001} = \dfrac{(-1)^{1\,001}+1}{2\cdot 1001} = 0$

Los términos impares siempre valen 0 y los pares tienden a 0 porque el numerador es constantemente 2 y el denominador se hace muy grande.

Por tanto, $lím\ i_n = 0$.

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

3 ÁLGEBRA

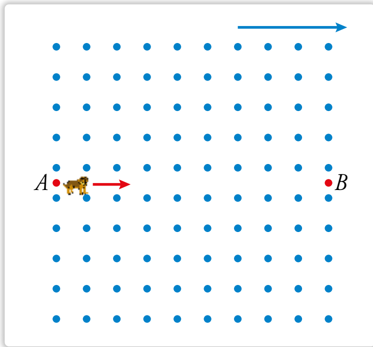
C.E.: CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.-EA 1.5.3.) CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.) CE 1.7. (EA 1.7.1.-EA 1.7.2.-EA 1.7.3.-EA 1.7.4.-EA 1.7.5.)

Página 79

Resuelve

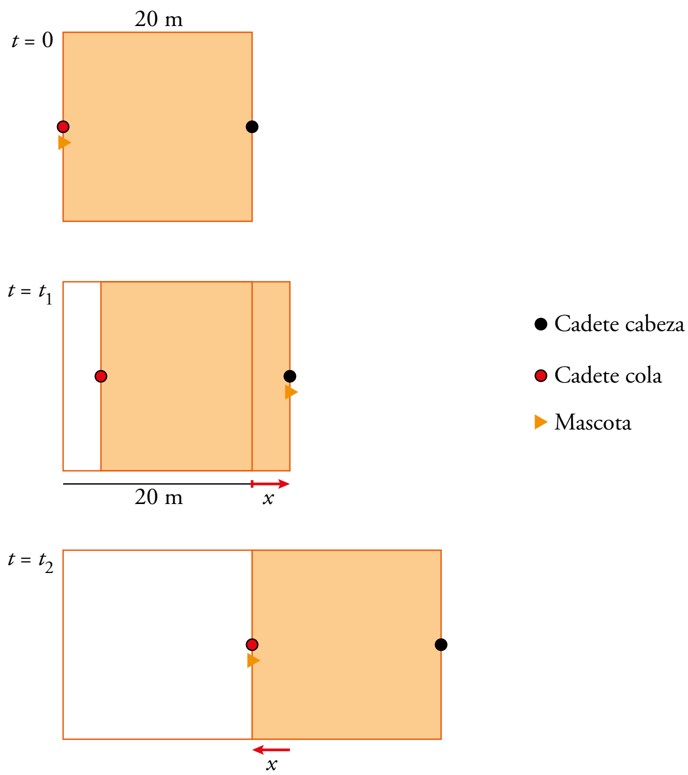
Los cadetes que desfilan con su mascota

Una compañía de cadetes, formada en cuadro de 20 metros de lado, avanza con paso regular. La mascota de la compañía, un pequeño perro, parte del centro de la última fila, punto *A*, camina en línea recta hasta el centro de la fila de cabeza, punto *B*, y regresa del mismo modo hasta el centro de la última fila. En el momento de volver a alcanzar *A*, los cadetes han recorrido exactamente 20 metros.



Suponiendo que el perro camina con velocidad constante y que no pierde tiempo en los giros, ¿cuántos metros ha recorrido?

Representamos esquemáticamente el movimiento de la mascota y de los cadetes:



Llamamos x al espacio que recorre el soldado de cabeza hasta que la mascota lo alcanza, y usaremos la fórmula $tiempo = \frac{espacio}{velocidad}$.

El tiempo que tarda la mascota en llegar hasta el soldado de cabeza, t_1, es el mismo que el que tarda el soldado de cabeza en recorrer los x metros.

Llamamos $v_{mascota}$ a la velocidad de la mascota y v_{cadete} a la velocidad de los cadetes.

La ventaja del cadete de cabeza es de 20 m.

t_1 = tiempo que tarda la mascota en llegar hasta el cadete de cabeza

$$t_1 = \frac{20}{v_{mascota} - v_{cadete}}$$

t_1 = tiempo que tarda el cadete de cabeza en recorrer los x metros

$$t_1 = \frac{x}{v_{cadete}}$$

Luego tenemos la igualdad:

$$I: \frac{20}{v_{mascota} - v_{cadete}} = \frac{x}{v_{cadete}}$$

El espacio recorrido por la mascota cuando avanza con los cadetes es $20 + x$. El espacio recorrido por la mascota al volver es x, puesto que al final se queda a 20 m del principio. Luego el espacio total recorrido por la mascota es $e = 20 + 2x$.

El tiempo total durante el cual avanza la compañía, t_2, es el mismo que el tiempo que está la mascota corriendo.

t_2 = tiempo total durante el cual avanza la compañía

$$t_2 = \frac{20}{v_{cadete}}$$

t_2 = tiempo total durante el cual corre la mascota

$$t_2 = \frac{20 + 2x}{v_{mascota}}$$

Luego tenemos la igualdad:

$$II: \frac{20 + 2x}{v_{mascota}} = \frac{20}{v_{cadete}} \rightarrow \frac{v_{mascota}}{v_{cadete}} = \frac{20 + 2x}{20}$$

Operamos en la igualdad I:

$$x(v_{mascota} - v_{cadete}) = 20 \cdot v_{cadete} \rightarrow x \cdot v_{mascota} = 20 \cdot v_{cadete} + xv_{cadete} \rightarrow$$

$$\rightarrow x \cdot v_{mascota} = v_{cadete}(20 + x) \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{mascota} = v_{cadete}\frac{(20 + x)}{x} \rightarrow \frac{v_{mascota}}{v_{cadete}} = \frac{20}{x} + 1$$

Hemos obtenido la razón entre las dos velocidades. Usamos esta relación en la igualdad II y obtenemos:

$$\frac{20 + 2x}{20} = \frac{20}{x} + 1 \rightarrow 1 + \frac{2x}{20} = \frac{20}{x} + 1 \rightarrow \frac{2x}{20} = \frac{20}{x}$$

Operamos y obtenemos:

$$2x^2 = 400 \rightarrow x^2 = 200 \rightarrow x = 10\sqrt{2} \text{ m}$$

El espacio recorrido por la mascota es $e = 20 + 2x = 20 + 10\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 20\sqrt{2} + 20$ m.

1 POLINOMIOS. FACTORIZACIÓN

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.)

Página 81

1 Comprobamos. **[La descomposición factorial propuesta por el enunciado es una buena ocasión para que el alumnado trabaje esta técnica].**

Descompón factorialmente estos polinomios:

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3\,(x^3 - 9x^2 + 24x - 20)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & 24 & -20 \\ 2 & & 2 & -14 & 20 \\ \hline & 1 & -7 & 10 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & -10 & \\ \hline & 1 & -5 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3(x-2)^2\,(x-5)$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -3 & -3 & -5 & 2 & 8 \\ 1 & & 1 & -2 & -5 & -10 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -5 & -10 & -8 & \boxed{0} \\ -1 & & -1 & 3 & 3 & 8 & \\ \hline & 1 & -3 & -2 & -8 & \boxed{0} & \\ 4 & & 4 & 4 & 8 & & \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$x^2 + x + 2 = 0 \;\to\; x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$ (no tiene solución)

$x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x-1)\,(x+1)\,(x-4)\,(x^2 + x + 2)$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 1 & 6 & 9 & 0 & -1 & -6 & -9 \\ -1 & & -1 & -5 & -4 & 4 & -3 & 9 \\ \hline & 1 & 5 & 4 & -4 & 3 & -9 & \boxed{0} \\ -3 & & -3 & -6 & 6 & -6 & 9 & \\ \hline & 1 & 2 & -2 & 2 & -3 & \boxed{0} & \\ -3 & & -3 & 3 & -3 & 3 & & \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & \boxed{0} & & \\ 1 & & 1 & 0 & 1 & & & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & & & \end{array}$$

$x^2 + 1 = 0 \;\to\; x^2 = -1$ (no tiene solución)

Así, $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9 = (x+3)^2\,(x+1)\,(x-1)\,(x^2+1)$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 4 & 0 & -15 & -5 & 6 \\
2 & & 8 & 16 & 2 & -6 \\ \hline
 & 4 & 8 & 1 & -3 & \boxed{0} \\
-1 & & -4 & -4 & 3 & \\ \hline
 & 4 & 4 & -3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$4x^2 + 4x - 3 = 0 \ \rightarrow\ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} \ \rightarrow\ x = \frac{1}{2},\ x = -\frac{3}{2}$$

$$4x^4 - 15x^2 - 5x + 6 = 4(x-2)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

2 **a) Intenta factorizar $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$.**

b) Hazlo ahora sabiendo que es divisible por $x^2 + x + 1$.

a) El polinomio dado no tiene raíces enteras (de hecho, no tiene raíces reales).

b) Hacemos la división:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +4x^3 & +8x^2 & +7x & +4 & x^2 + x + 1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & -x^2 & & & x^2 + 3x + 4 \\ \cline{1-5}
 & 3x^3 & +7x^2 & +7x & +4 & \\
 & -3x^3 & -3x^2 & -3x & & \\ \cline{2-5}
 & & 4x^2 & +4x & +4 & \\
 & & -4x^2 & -4x & -4 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Los polinomios $x^2 + x + 1$ y $x^2 + 3x + 4$ son irreducibles (las ecuaciones $x^2 + x + 1 = 0$ y $x^2 + 3x + 4 = 0$ no tienen solución).

Por tanto:

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 4)$$

3 **Intenta factorizar $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$. Vuelve a intentarlo sabiendo que $-1/2$ y $1/3$ son raíces suyas y comprueba tus resultados con la calculadora.**

El polinomio dado no tiene raíces enteras.

Teniendo en cuenta el dato adicional (que $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ son raíces), procedemos así:

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 6 & 7 & 6 & 0 & -1 \\
-1/2 & & -3 & -2 & -2 & 1 \\ \hline
 & 6 & 4 & 4 & -2 & \boxed{0} \\
1/3 & & 2 & 2 & 2 & \\ \hline
 & 6 & 6 & 6 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$6x^2 + 6x + 6 = 0$

$6(x^2 + x + 1) = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ (no tiene solución)

Por tanto:

$$6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)6(x^2 + x + 1) = (2x+1)(3x-1)(x^2 + x + 1)$$

2 ▸ FRACCIONES ALGEBRAICAS

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) **CE 2.4.** (EA 2.4.2.)

Página 83

1 **¿Verdadero o falso?**

a) $\dfrac{x+1}{x^2+1} = \dfrac{1}{x+1}$

b) $\dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{1}{x+1}$

c) $\dfrac{3x-3}{x^2-1} = \dfrac{3}{x+1}$

d) $\dfrac{x+1}{x} - 1 = \dfrac{1}{x}$

a) Para comprobar si son equivalentes, multiplicamos en cruz: $(x+1)(x+1) \neq x^2+1$, luego es falso.

b) Para comprobar si son equivalentes, multiplicamos en cruz: $(x-1)(x+1) = x^2-1$, luego es verdadero.

c) La primera fracción es el triple de $\dfrac{x-1}{x^2-1}$, y la segunda es el triple de $\dfrac{1}{x+1}$ que son las fracciones del apartado anterior, luego es verdadero.

d) Operamos en el miembro de la izquierda:

$$\frac{x+1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

Obtenemos el miembro de la derecha, luego es verdadero.

2 **Reduce previamente a común denominador las fracciones algebraicas siguientes, y súmalas:**

$$\frac{x+7}{x} \qquad \frac{x-2}{x^2+x} \qquad -\frac{2x+1}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ x^2+x = x(x+1) \\ x+1 = x+1 \end{array}\right\} \text{ mín.c.m.} = x(x+1)$$

Reducimos a común denominador:

$$\frac{x+7}{x} = \frac{(x+7)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x^2+8x+7}{x(x+1)}$$

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{x-2}{x(x+1)}$$

$$-\frac{2x+1}{x+1} = -\frac{(2x+1)x}{x(x+1)} = -\frac{2x^2+x}{x(x+1)} = -\frac{2x^2-x}{x(x+1)}$$

Las sumamos:

$$\frac{x+7}{x} + \frac{x-2}{x^2+x} - \frac{2x+1}{x+1} = \frac{x^2+8x+7}{x(x+1)} + \frac{x-2}{x(x+1)} + \frac{-2x^2-x}{x(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2+8x+7+x-2-2x^2-x}{x^2+x} = \frac{-x^2+8x+5}{x^2+x}$$

3 **Efectúa.**

a) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}$

b) $\dfrac{x}{x+1}+5x$

a) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}=$

$$=\frac{1}{(x-1)(x+1)}+\frac{2x(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{1+2x(x-1)-x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1+2x^2-2x-x^2-x}{x^2-1}=\frac{x^2-3x+1}{x^2-1}$$

b) $\dfrac{x}{x+1}+5x=\dfrac{x+5x(x+1)}{x+1}=\dfrac{x(5x+6)}{x+1}=\dfrac{5x^2+6x}{x+1}$

4 **Efectúa estas operaciones:**

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}$

b) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}$

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}=\dfrac{(x^2-2x+3)(2x+3)}{(x-2)(x+5)}=\dfrac{2x^3-x^2+9}{x^2+3x-10}$

b) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}=\dfrac{(x^2-2x+3)(x+5)}{(2x+3)(x-2)}=\dfrac{x^3+3x^2-7x+15}{2x^2-x-6}$

5 **Calcula.**

a) $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)$

b) $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4}$

a) $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)=\dfrac{x+2}{x}:\dfrac{x(x-1)}{3(2x+1)}=\dfrac{3(2x+1)(x+2)}{x^2(x-1)}$

b) $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4}=\dfrac{(x^4-x^2)(x^4+x^2)}{(x^2+1)x^4}=\dfrac{x^2(x^2-1)\cdot x^2(x^2+1)}{(x^2+1)x^4}=\dfrac{x^4(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2+1)x^4}=x^2-1$

3 ▶ RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) **CE 2.4.** (EA 2.4.2.)

Página 84

Practica 1

a) $x^2 + x - 6 = 0$ **b)** $x^2 - 2x + 1 = 0$

c) $x^2 - 3x + 3 = 0$ **d)** $3x^2 - 12 = 0$

e) $2x^2 + 10x = 0$ **f)** $x^2 = 121$

g) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **h)** $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$

i) $3x^4 - 36x^2 = 0$ **j)** $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

a) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -3$

b) $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \rightarrow x = 1$

c) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} \rightarrow$ No hay solución.

d) $x = \pm\sqrt{\dfrac{12}{3}} = \pm 2 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2$

e) $2x(x+5) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -5$

f) $x = \pm\sqrt{121} = \pm 11 \rightarrow x_1 = 11,\ x_2 = -11$

g) $y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \rightarrow y_1 = 4,\ y_2 = 1$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2;\ x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

h) $y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-36}}{2} \rightarrow$ No hay solución.

i) $3x^2(x^2 - 12) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{12},\ x_3 = \sqrt{12}$

j) $y = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = 4$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2$

Practica 2

a) $10x^4 + 7x^3 - 24x^2 + 5x + 2 = 0$ **b)** $x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x = 0$

c) $x^4 - 7x^3 + 9x^2 - x + 30 = 0$ **d)** $x^5 - x^3 - 6x^2 = 0$

a)

	10	7	–24	5	2
1		10	17	–7	–2
	10	17	–7	–2	0
–2		–20	6	2	
	10	–3	–1	0	

Por tanto: $10x^4 + 7x^3 - 24x^2 + 5x + 2 = (x-1)(x+2)(10x^2 - 3x - 1)$

Falta descomponer el factor de segundo grado: $10x^2 - 3x - 1$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+40}}{20} = \dfrac{3 \pm 7}{20} \rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2},\ x_2 = \dfrac{-1}{5}$

$10x^4 + 7x^3 - 24x^2 + 5x + 2 = (x-1)(x+2)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{5}\right)$

b) $x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x = x(x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -5 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & 3 & \boxed{0} \\ -3 & & -3 & 0 & -3 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

Nos queda por resolver $x^2 + 1 = 0$ pero no tiene solución real ya que: $x = \frac{0 \pm \sqrt{-1}}{2}$

Por tanto: $x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x = x(x-2)(x+3)(x^2+1)$

c) $x^4 - 7x^3 + 9x^2 - x + 30 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -7 & 9 & -1 & 30 \\ 3 & & 3 & -12 & -9 & -30 \\ \hline & 1 & -4 & -3 & -10 & \boxed{0} \\ 5 & & 5 & 5 & 10 & \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

Nos queda por resolver $x^2 + x + 2 = 0$ pero no tiene solución real ya que: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$

Por tanto: $x^4 - 7x^3 + 9x^2 - x + 30 = (x-3)(x-5)(x^2+x+2)$

d) $x^5 - x^3 - 6x^2 = x^2(x^3 - x - 6)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 2 & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

Nos queda por resolver $x^2 + 2x + 3 = 0$ pero no tiene solución ya que: $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2}$

Por tanto: $x^5 - x^3 - 6x^2 = x^2(x-2)(x^2+2x+3)$

Practica 3

a) $\frac{3x-2}{x} - \frac{4}{x^2} = \frac{2x-5}{x}$

b) $\frac{3+x}{x-1} + \frac{5}{x+1} = \frac{x-2}{x^2-1}$

c) $\frac{-x}{x+1} + \frac{2x+1}{2x} + \frac{1}{x^2-1} = 0$

d) $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{3x+2}{x+1}$

a) Reducimos a común denominador y multiplicamos por x^2.

$x(3x-2) - 4 = x(2x-5) \rightarrow 3x^2 - 2x - 4 = 2x^2 - 5x \rightarrow$

$\rightarrow 3x^2 - 2x - 4 - (2x^2 - 5x) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow x = -4,\ x = 1$

Comprobadas las soluciones sobre la ecuación inicial, se ve que ambas son válidas.

Soluciones: $x_1 = -4,\ x_2 = 1$.

b) Reducimos a común denominador y multiplicamos por $x^2 - 1$.

$(3+x)(x+1) + 5(x-1) = x - 2 \rightarrow x^2 + 9x - 2 = x - 2 \rightarrow x = -8,\ x = 0$

Comprobadas las soluciones sobre la ecuación inicial, se ve que ambas son válidas.

Soluciones: $x_1 = -8,\ x_2 = 0$.

c) Reducimos a común denominador y multiplicamos por $2x(x^2-1)$.

$2x(x-1)(-x)+(2x+1)(x^2-1)+2x=0 \rightarrow 3x^2-1=0 \rightarrow x=\sqrt{\frac{1}{3}};\ x=-\sqrt{\frac{1}{3}}$

Comprobadas las soluciones sobre la ecuación inicial, se ve que ambas son válidas.

Soluciones: $x_1=-\sqrt{\frac{1}{3}},\ x_2=\sqrt{\frac{1}{3}}$

d) Reducimos a común denominador y multiplicamos por $x(x+1)$.

$x^2-(x+1)=x(3x+2) \rightarrow x^2-(x+1)-x(3x+2)=0 \rightarrow -2x^2-3x-1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2},\ x=-1$

La solución $x=-1$ no es posible porque hace 0 el denominador. La única solución es $x=-\frac{1}{2}$.

Página 85

Practica 1

a) $\sqrt{4x+9}-\sqrt{2x+1}=2$

b) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{1-x}=1$

a) Despejamos una de las dos raíces.

$\sqrt{4x+9}=\sqrt{2x+1}+2$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$(\sqrt{4x+9})^2=(\sqrt{2x+1}+2)^2 \rightarrow 4x+9=2x+4\sqrt{2x+1}+5$

Aislamos el término en el que está la raíz.

$4\sqrt{2x+1}=4x+9-2x-5$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$(4\sqrt{2x+1})^2=(4x+9-2x+5)^2 \rightarrow 32x+16=4x^2+16x+16 \rightarrow$

$\rightarrow 32x+16-(4x^2+16x+16)=0 \rightarrow x_1=4,\ x_2=0$

Comprobación:

$x_1=4 \rightarrow \sqrt{4\cdot 4+9}-\sqrt{2\cdot 4+1}=5-3=2$ es válida.

$x_2=0 \rightarrow \sqrt{4\cdot 0+9}-\sqrt{2\cdot 0+1}=2$ es válida.

b) Despejamos una de las dos raíces.

$\sqrt{3x+4}=1+\sqrt{1-x}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$(\sqrt{3x+4})^2=(1-\sqrt{1-x})^2 \rightarrow 3x+4=2\sqrt{1-x}-x+2$

Aislamos el término en el que está la raíz.

$2\sqrt{1-x}=-x+2-(3x+4)$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$(2\sqrt{1-x})^2=(-x+2-(3x+4))^2 \rightarrow 4-4x=16x^2+16x+4 \rightarrow$

$\rightarrow 16x^2+16x+4-4+4x=0 \rightarrow x_1=-\frac{5}{4};\ x_2=0$

Comprobación:

$x_1=-\frac{5}{4} \rightarrow \sqrt{3\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+4}-\sqrt{1+\frac{5}{4}}=-1$ no es válida.

$x_2=0 \rightarrow \sqrt{3\cdot 0+4}-\sqrt{1-0}=1$ es válida.

Hay una solución: $x=0$.

Practica 2

a) $\mathbf{2^{x^2-4x} = \frac{1}{16}}$

b) $\mathbf{5^{x^2-1} = 7}$

c) $\mathbf{3^{x+2} - 3^x = 72}$

a) $2^{x^2-4x} = \frac{1}{2^4} \to x^2 - 4x = 4 \to x_1 = 2\sqrt{2} + 2;\ x_2 = 2 - 2\sqrt{2}$

b) $log(5^{x^2-1}) = log\,7 \to (x^2 - 1)log\,5 = log\,7 \to (x^2 - 1) = \frac{log\,7}{log\,5} = 1,2091 \to$

$\to x^2 = 1 + 1,2091 = 2,2091 \to$

$\to x = \pm\sqrt{2,2091} = \pm\ 1,4863 \to x_1 = 1,4863;\ x_2 = -1,4863$

c) Hacemos el siguiente cambio de variable: $3^x = y$

$3^2y - y = 72 \to y = 9 = 3^2$

$3^x = 3^2 \to x = 2$

Página 86

Practica

a) $\mathbf{log\,x - log\,4 = 2}$

b) $\mathbf{3\ log_5\,(x - 1) = log_5\,125}$

c) $\mathbf{2\ ln\,x = ln\,(2x + 3)}$

a) $log\,x - log\,4 = 2 \to log\,\frac{x}{4} = log\,100 \to \frac{x}{4} = 100 \to x = 400$

La solución es válida.

b) $3log_5(x-1) = log_5\,125 \to log_5(x-1)^3 = log_5\,125 \to (x-1)^3 = 125 \to x - 1 = \sqrt[3]{125} = 5 \to x = 6$

La solución es válida.

c) $2ln\,x = ln\,(2x+3) \to ln\,x^2 = ln\,(2x+3) \to x^2 = (2x+3) \to x_1 = 3$ es válida; $x_2 = -1$ no es válida porque no se puede hacer $ln\,(-1)$.

Piensa y practica

1 ¿Verdadero o falso?

a) Al resolver una ecuación con algún radical cuadrático siempre aparece alguna raíz falsa.

b) $\mathbf{4}$ **y** $\mathbf{-4}$ **son soluciones de la ecuación** $\mathbf{\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = 4}$**.**

c) $\mathbf{4}$ **y** $\mathbf{-4}$ **son soluciones de la ecuación** $\mathbf{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x} = 2}$**.**

a) Falso. Hemos resuelto ecuaciones de este tipo en las que todas las soluciones eran válidas.

Ejemplo: $\sqrt{4x+9} - \sqrt{2x+1} = 2$ en la página 85.

b) Verdadero. Si sustituimos x por 4 o por -4 obtenemos una igualdad.

c) Falso. Solo es solución $x = 4$. Al sustituir x por -4 no sale una igualdad.

2 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $x^4 - x^2 - 12 = 0$ **b)** $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

c) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ **d)** $x^4 - x^2 - 2 = 0$

a) Hacemos $x^2 = y \rightarrow y^2 - y - 12 = 0 \rightarrow y = 4,\ y = -3$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

b) Hacemos $x^2 = y \rightarrow y^2 - 8y - 9 = 0 \rightarrow y = 9,\ y = -1$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

c) Hacemos $x^2 = y \rightarrow y^2 + 10y + 9 = 0 \rightarrow y = -1,\ y = -9$

Soluciones: No hay.

d) Hacemos $x^2 = y \rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \rightarrow y = 2,\ y = -1$

Soluciones: $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = -\sqrt{2}$

3 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{10}$ **b)** $\frac{4}{x} + \frac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4}$ **d)** $\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = 3$

e) $\frac{5}{x+2} + \frac{x}{x+3} = \frac{3}{2}$ **f)** $\frac{x+3}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{26}{35}$

a) $10(x + 3) + 10x = 3x(x + 3)$

$10x + 30 + 10x = 3x^2 + 9x$

$0 = 3x^2 - 11x - 30;\ x = \frac{11 \pm 21,93}{6} = \begin{cases} 5,489 \\ -1,822 \end{cases}$

$x_1 = 5,489;\ x_2 = -1,822$

b) $12(x - 2) + 2x(x + 1) = 12x(x - 2)$

$12x - 24 + 2x^2 + 2x = 12x^2 - 24x$

$0 = 10x^2 - 38x + 24$

$0 = 5x^2 - 19x + 12;\ x = \frac{19 \pm 11}{10} = \begin{cases} 3 \\ 4/5 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ x_2 = \frac{4}{5}$

c) $4x + 4 = 3x^2;\ 0 = 3x^2 - 4x - 4$

$x = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ x_2 = \frac{-2}{3}$

d) $x(x + 1) + 2x(x - 1) = 3(x^2 - 1)$

$x^2 + x + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 3$

$x = 3$

e) $10(x + 3) + 2x(x + 2) = 3(x^2 + 5x + 6)$

$10x + 30 + 2x^2 + 4x = 3x^2 + 15x + 18$

$0 = x^2 + x - 12$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ x_2 = -4$

f) $35(x+3)(x+1) - 35(x^2+1) = 26(x^2-1)$

$35(x^2+4x+3) - 35(x^2+1) = 26(x^2-1)$

$35x^2 + 140x + 105 - 35x^2 - 35 = 26x^2 - 26$

$26x^2 - 140x - 96 = 0$

$$x = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{26} = \frac{70 \pm 86}{26} = \begin{cases} 6 \\ -8/13 \end{cases}$$

$x_1 = 6;\ x_2 = \dfrac{-8}{13}$

4 **Resuelve.**

a) $-\sqrt{2x-3} + 1 = x$

b) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} = 4$

c) $2 + \sqrt{x} = x$

d) $2 - \sqrt{x} = x$

e) $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$

f) $\sqrt{5x+1} + 2 = \sqrt{27+3x}$

a) $1 - x = \sqrt{2x-3}$

$1 + x^2 - 2x = 2x - 3;\ x^2 - 4x + 4 = 0;\ x = 2$ (no vale)

No tiene solución.

b) $2x - 3 = 16 + x + 7 + 8\sqrt{x+7}$

$x - 26 = 8\sqrt{x+7}$

$x^2 + 676 - 52x = 64(x+7)$

$x^2 + 676 - 52x = 64x + 448$

$$x^2 - 116x + 228 = 0;\ x = \frac{116 \pm 112}{2} = \begin{cases} 114 \\ 2 \to \text{(no vale)} \end{cases}$$

$x = 114$

c) $\sqrt{x} = x - 2;\ x = x^2 + 4 - 4x;\ 0 = x^2 - 5x + 4$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \to \text{(no vale)} \end{cases}$$

$x = 4$

d) $2 - x = \sqrt{x};\ 4 + x^2 - 4x = x;\ x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \to \text{(no vale)} \\ 1 \end{cases}$$

$x = 1$

e) $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$

$3x + 3 = 1 + 8 - 2x + 2\sqrt{8-2x}$

$5x - 6 = 2\sqrt{8-2x}$

$25x^2 + 36 - 60x = 4(8-2x)$

$25x^2 - 52x + 4 = 0$

$$x = \frac{52 \pm 48}{50} = \begin{cases} 2 \\ 0{,}08 \to \text{(no vale)} \end{cases}$$

Así, $x = 2$.

f) $\sqrt{5x+1}+2=\sqrt{27+3x}$

$\sqrt{5x+1}=\sqrt{27+3x}-2$

$(\sqrt{5x+1})^2=(\sqrt{27+3x}-2)^2$

$5x+1=3x-4\sqrt{3x+27}+31$

$4\sqrt{3x+27}=-(5x+1)+3x+31$

$(4\sqrt{3x+27})^2=(-2x+30)^2$

$16(3x+27)=4x^2-120x+900$

$16(3x+27)-4x^2+120x-900=0 \rightarrow x=39,\ x=3$

Comprobación:

$x = 39 \rightarrow \sqrt{5\cdot 39+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 39} \rightarrow 14 + 2 \neq 12 \rightarrow$ (no vale)

$x = 3 \rightarrow \sqrt{5\cdot 3+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 3} \rightarrow 4 + 2 = 6$

5 Resuelve.

a) $2^{3x}=0{,}5^{3x+2}$ **b)** $3^{4-x^2}=\dfrac{1}{9}$

c) $\dfrac{4^{x+1}}{2^{x+2}}=186$ **d)** $7^{x+2}=5764801$

e) $3^x+3^{x+2}=30$ **f)** $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=\dfrac{31}{5}$

a) $2^{3x}=2^{-3x-2};\ 3x=-3x-2;\ 6x=-2;\ x=\dfrac{-1}{3}$

b) $3^4-x^2=3^{-2};\ 4-x^2=-2;\ x^2=6;\ x=\pm\sqrt{6}$

$x_1=\sqrt{6};\ x_2=-\sqrt{6}$

c) $\dfrac{2^{2x-2}}{2^{x+2}}=186;\ 2^{2x-2-x-2}=186;\ 2^{x-4}=186$

$\log 2^{x-4}=\log 186;\ (x-4)\log 2=\log 186$

$x=4+\dfrac{\log 186}{\log 2}=11{,}54$

d) $7^{x+2}=7^8;\ x=6$

e) Empezamos sacando factor común:

$3^x+3^{x+2}=30 \rightarrow 3^x(1+3^2)=30 \rightarrow 10\cdot 3^x=30 \rightarrow 3^x=3 \rightarrow x=1$

f) Sacamos factor común:

$5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=\dfrac{31}{5} \rightarrow 5^x\left(5+1+\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{31}{5} \rightarrow 5^x(25+5+1)=31 \rightarrow 5^x=1 \rightarrow x=0$

6 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $2\log x-\log(x+6)=3\log 2$

b) $4\log_2(x^2+1)=\log_2 625$

c) $\log_x 27-\log_{x^2} 9=2$ **(expresa** $\log_{x^2} 9$ **como** $\log_x\ldots$**)**

a) $\log\dfrac{x^2}{x+6}=\log 8$

$x^2=8x+48;\ x^2-8x-48=0;\ x=\dfrac{8\pm 16}{2}=\begin{cases}12\\-4 \rightarrow \text{(no vale)}\end{cases}$

$x=12$

b) $\log_2(x^2+1)4=\log_2 5^4;\ x^2+1=5;\ x^2=4;\ x=\pm 2$

$x_1=2;\ x_2=-2$

c) $log_x 27 - log_{x^2} 9 = 2$

Vamos a cambiar de base usando las propiedades de los logaritmos:

$log_{x^2} 9 = \dfrac{log 9}{log x^2} = \dfrac{log 9}{2\, log x} = \dfrac{1}{2} log_x 9$

Así podemos sustituir en la ecuación inicial:

$$log_x 27 - log_{x^2} 9 = log_x 27 - \frac{1}{2} log_x 9 = log_x 3^3 - \frac{1}{2} log_x 3^2 = log_x 3 - \frac{2}{2} log_x 3 = 2\, log_x 3 = 2 \ \rightarrow\ log_x 3 = 1 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ x^1 = 3 \ \rightarrow\ x = 3$$

4 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) CE 2.4. (EA 2.4.2.)

Página 88

1 **[La justificación de si las afirmaciones son verdaderas o falsas permite trabajar la destreza expresión oral de esta clave].**

¿Verdadero o falso?

a) El sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$ **tiene dos soluciones:** $x=4,\ y=1$

b) El sistema $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ **tiene solo dos soluciones:**

$[x_1=2,\ y_1=1]$ **y** $[x_2=-2,\ y_2=-1]$

c) El sistema $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ **tiene cuatro soluciones:**

$[x_1=2,\ y_1=1];\ [x_2=2,\ y_2=-1]$

$[x_3=-2,\ y_3=1];\ [x_4=-2,\ y_4=-1]$

a) Falso, $x=4$ e $y=1$ no son dos soluciones, sino una solución para cada incógnita, luego son una solución del sistema.

b) Falso, como las dos incógnitas están al cuadrado, también son soluciones $x_3=-2,\ y_3=1$ y $x_4=2,\ y_4=-1$.

c) Verdadero, por el razonamiento del apartado anterior.

2 **Resuelve estos sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x^2-7=y+2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1-\dfrac{1}{xy} \\ xy=6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=2y+1 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y^2-x^2=16 \\ \sqrt{5-4y}-x=-(x+y) \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y=2x-1 \\ y=x^2-9 \end{array}\right\}$

$x^2-9=2x-1;\ x^2-2x-8=0$

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\dfrac{2\pm 6}{2}=\begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

$x_1=4;\ y_1=7$

$x_2=-2;\ y_2=-5$

b) $\left.\begin{array}{l} y+x=xy-1 \\ xy=6 \end{array}\right\}$

$y=5-x$

$x(5-x)=6;\ 5x-x^2=6;\ x^2-5x+6=0 \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$

$x_1=2;\ y_1=3$

$x_2=3;\ y_2=2$

c) $x = 2y + 1$

$\sqrt{3y+1} - \sqrt{y-1} = 2;\ \sqrt{3y+1} = 2 + \sqrt{y+1}$

$3y + 1 = 4 + y + 1 + 4\sqrt{y+1};\ 2y - 4 = 4\sqrt{y+1};\ y - 2 = 2\sqrt{y+1}$

$y^2 + 4 - 4y = 4y + 4;\ y^2 - 8y = 0$

$y = 8 \rightarrow x = 17$

$y = 0$ (no vale)

$x = 17;\ y = 8$

d) $\sqrt{5-4y} - x = -(x + y);\ \sqrt{5-4y} = -y$

$(\sqrt{5-4y})^2 = y^2;\ 5 - 4y = y^2 \begin{cases} y = 1 \rightarrow \text{(no vale)} \\ y = -5 \end{cases}$

$25 - x^2 = 16 \rightarrow x = -3,\ x = 3$

$x_1 = 3;\ y_1 = -5$

$x_2 = -3;\ y_2 = -5$

3 **Resuelve:**

a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log(x^2 + y) - \log(x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 27 \\ \log x - 1 = \log y \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log(2x - y^2) = \log(2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases}$

a) $y = 1 - x;\ x^2 + x(1 - x) + (1 - x)^2 = 21$

$x^2 + x - x^2 + 1 + x^2 - 2x = 21;\ x^2 - x - 20 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \rightarrow y = -4 \\ -4 \rightarrow y = 5 \end{cases}$$

$x_1 = -4;\ y_1 = 5$

$x_2 = 5;\ y_2 = -4$

b) $\left.\begin{aligned} \log \frac{x^2 + y}{x - 2y} = 1 \\ 5^{x+1} = 5^{2y+2} \end{aligned}\right\}$

$\left.\begin{aligned} x^2 + y = 10x - 20y \\ x + 1 = 2y + 2 \end{aligned}\right\}$

$x = 2y + 1$

$4y^2 + 1 + 4y + y = 20y + 10 - 20y$

$4y^2 + 5y - 9 = 0$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{8} = \frac{-5 \pm 13}{8} = \begin{cases} -9/4 \rightarrow x = -7/2 \\ 1 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$x_1 = 3;\ y_1 = 1$

$x_2 = \frac{-7}{2};\ y_2 = \frac{-9}{4}$

c) $\left.\begin{array}{l} x = 27 + y \\ log\,\dfrac{x}{y} = 1 \end{array}\right\}$

$10y = 27 + y;\ \ 9y = 27;\ \ y = 3$

$\dfrac{x}{y} = 10;\ \ x = 10y;\ \ x = 30$

$x = 30;\ \ y = 3$

d) $\begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,(2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,(2 - y) + log\,10 \\ 3^{x-1} = (3^3)^{y+3} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,10\,(2 - y) \\ 3^{x-1} = 3^{3y+9} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2x - y^2 = 10\,(2 - y) \\ x - 1 = 3y + 9 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2x - y^2 + 10y = 20 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$

$x = 10 - 3y$

$2(10 - 3y) - y^2 + 10y - 20 = 0;\ \ y\,(y - 4) = 0;\ \ y = 4,\ \ y = 0$

$y = 4$ no es válida porque aparecería $log\,(-2)$ en la primera ecuación.

$x = 10;\ \ y = 0$

5 ▶ MÉTODO DE GAUSS PARA SISTEMAS LINEALES

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) **CE 2.4.** (EA 2.4.1.)

Página 89

1 **Reconoce como escalonados y resuelve.**

a) $\left\{\begin{array}{l} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{l} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 7 \\ y = \dfrac{2x - 8}{3} = 2 \\ z = 3x + y - 12 = 21 + 2 - 12 = 11 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}}\right\} \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 2 \\ z = 11 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-6}{2} = -3 \\ x = \dfrac{-4y}{3} = 4 \\ z = 5x + y - 17 = 20 - 3 - 17 = 0 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}}\right\} \begin{array}{l} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{l} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 2x + y + 2 = -2 + 4 + 2 = 4 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}}\right\} \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{l} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 4 \\ z = y - 7 = 4 - 7 = -3 \\ x = 11 + z = 11 - 3 = 8 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}}\right\} \begin{array}{l} x = 8 \\ y = 4 \\ z = -3 \end{array}$

2 **Resuelve los siguientes sistemas escalonados:**

a) $\left\{\begin{array}{l} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = 3 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y = -5 \\ 5y = -10 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{l} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -5 \\ z = 4 \\ x = 1 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -5 \\ z = 4 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y - z = -3 \\ 3x + \quad = -5 \\ 5y = -10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-10}{5} = -2 \\ x = \dfrac{-5 - y}{3} = -1 \\ z = x + 2y + 3 = -2 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}}\right\} \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{array}$

c)

$$\left.\begin{array}{r} x-5y+3z=8 \\ 3y-\ z=5 \\ 4z=4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} z=1 \\ y=\dfrac{5+z}{3}=2 \\ x=8+5y-3z=0+10-3=15 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=15 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}$$

d) $$\left.\begin{array}{l} 4x+\ y-z=7 \\ \quad 2y \quad\;\; =8 \\ 3x \qquad\quad\; =9 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{9}{3}=3 \\ y=\dfrac{8}{2}=4 \\ z=4x+y-7=9 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=3 \\ y=4 \\ z=9 \end{array}$$

Página 90

3 **Resuelve por el método de Gauss.**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=2} \\ \boldsymbol{x-y+z=6} \\ \boldsymbol{x-y-z=0} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \boldsymbol{2x+3y\quad\ =14} \\ \boldsymbol{x-2y+z=-3} \\ \boldsymbol{2x-\ y-z=9} \end{cases}$

Comprueba los resultados con la calculadora.

a) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x-y+z=6 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)+(1.^a) \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} x+y+\ z=2 \\ 2x \qquad +2z=8 \\ 2x \qquad\qquad =2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x \qquad\ +z=4 \\ x \qquad\qquad =1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ z=4-x=3 \\ y=2-x-z=2-1-3=-2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=1 \\ y=-2 \\ z=3 \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 2x+3y \qquad =14 \\ \ x-2y+z=-3 \\ 2x-\ y-z=9 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+(2.^a) \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} 2x+3y \qquad =14 \\ \ x-2y+z=-3 \\ 3x-3y \qquad =6 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+(1.^a) \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} 2x+3y \qquad =14 \\ \ x-2y+z=-3 \\ 5x \qquad\qquad =20 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{20}{5}=4 \\ y=\dfrac{14-2x}{3}=2 \\ z=-3-x+2y=-3-4+4=-3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=4 \\ y=2 \\ z=-3 \end{array}$$

4 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{5x-4y+3z=9} \\ \boldsymbol{2x+\ y-2z=1} \\ \boldsymbol{4x+3y+4z=1} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \boldsymbol{2x-5y+4z=-1} \\ \boldsymbol{4x-5y+4z=3} \\ \boldsymbol{5x \qquad -3z=13} \end{cases}$

Comprueba los resultados con la calculadora.

a) $$\left.\begin{array}{l} 4x-4y+3z=9 \\ 2x+\ y-2z=1 \\ 4x+3y+4z=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (1.^a)+4\cdot(2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-3\cdot(2.^a) \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} 13x \qquad -\ 5z=13 \\ 2x+y-\ 2z=1 \\ -2x \qquad +10z=-2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2\cdot(1.^a)+(3.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a):2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 24x \qquad\qquad =24 \\ 2x+y-2z=1 \\ -x \qquad +5z=-1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=1 \\ z=\dfrac{-1+x}{5}=0 \\ y=1-2x+2z=-1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \\ z=0 \end{array}$$

b) $\left.\begin{aligned} 2x - 5y + 4z &= -1 \\ 4x - 5y + 4z &= 3 \\ 5x \qquad - 3z &= 13 \end{aligned}\right\}$ $\begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) \end{matrix}$ $\left.\begin{aligned} 2x - 5y + 4z &= -1 \\ 2x \qquad\qquad &= 4 \\ 5x \qquad - 3z &= 13 \end{aligned}\right\}$

$$\left.\begin{aligned} &x = 2 \\ &z = \frac{5x - 13}{3} = -1 \\ &y = \frac{2x + 4z + 1}{5} = \frac{1}{5} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x = 2 \\ &y = \frac{1}{5} \\ &z = -1 \end{aligned}$$

Página 91

5 Intenta resolver por el método de Gauss.

a) $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

Comprueba los resultados con la calculadora.

a) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ x - 2y - z &= 3 \\ 2x - y \qquad &= 0 \end{aligned}\right\}$ $\begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) \end{matrix}$ $\left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ 2x - y \qquad &= 1 \\ 2x - y \qquad &= 0 \end{aligned}\right\}$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª dicen cosas contradictorias (si $2x - y$ es igual a 1, no puede ser igual a 2). Por tanto, el sistema es incompatible.

b) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ x - 2y - z &= 3 \\ 2x - y \qquad &= 1 \end{aligned}\right\}$ $\begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) \end{matrix}$ $\left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ 2x - y \qquad &= 1 \\ 2x - y \qquad &= 1 \end{aligned}\right\}$ $\begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{matrix}$ $\left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ 2x - y \qquad &= 1 \\ 0 \qquad\qquad &= 0 \end{aligned}\right\}$

Solo quedan dos ecuaciones. Resolvemos el sistema obteniendo y, z en función de x:

(2.ª) $\rightarrow$ $y = 2x - 1$

(1.ª) $\rightarrow$ $z = -2 - y - x = -2 - (2x - 1) - x = -2 - 2x + 1 - x = -3x - 1$

Soluciones: $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = -3x - 1 \end{cases}$

Para cada valor de x, se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

Para $x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$ Para $x = -2 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \\ z = 5 \end{cases}$

6 Resuelve.

a) $\begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

Comprueba los resultados con la calculadora.

a) $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+(3.^a)\\(3.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 3x + 3z = 10 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-3\cdot(1.^a)\\(3.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 0x + 0z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\}$

La segunda ecuación es absurda. No puede ser 0 = 1. Por tanto, el sistema no tiene solución.

b) $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+(3.^a)\\(3.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 3x + 3z = 9 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-3\cdot(1.^a)\\(3.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 0x + 0z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$

La segunda ecuación no dice nada. No es una ecuación. Por tanto, solo quedan dos ecuaciones, la 1.ª y la 3.ª.

Resolvemos el sistema resultante dando los valores de x e y en función de z:

$$\begin{cases} x + z = 3 \to x = 3 - z \\ x + y - z = 1 \to y = 1 - x + z = 1(3 - z) + z = -2 + 2z \end{cases}$$

Soluciones: $\begin{cases} x = 3 - z \\ y = -2 + 2z \end{cases}$

Para cada valor que le demos a z, se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

Para $z = 0 \to x = 3,\ y = -2$.

Para $z = 4 \to x = -1,\ y = 6$.

6 ▸ INECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) **CE 2.4.** (EA 2.4.2.)

Página 92

1 **Resuelve estas inecuaciones:**

a) $3x - 2 \le 10$ **b)** $x - 2 > 1$

c) $2x + 5 \ge 6$ **d)** $3x + 1 \le 15$

a) $3x - 2 \le 10 \to 3x \le 12 \to x \le 4$

Soluciones: $\{x \,/\, x \le 4\} = (-\infty, 4]$

b) $x - 2 > 1 \to x > 3$

Soluciones: $\{x \,/\, x > 3\} = (3, +\infty)$

c) $2x + 5 \ge 6 \to 2x \ge 1 \to x \ge \frac{1}{2}$

Soluciones: $\left\{x \,/\, x \ge \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

d) $3x + 1 \le 15 \to 3x \le 14 \to x \le \frac{14}{3}$

Soluciones: $\left\{x \,/\, x \le \frac{14}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{14}{3}\right]$

2 **Resuelve estos sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} 3x - 2 \le 10 \\ x - 2 > 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 5 \ge 6 \\ 3x + 1 \le 15 \end{cases}$

Observamos que las inecuaciones que forman ambos sistemas se han resuelto en el ejercicio anterior.

a) $\begin{cases} x \le 4 \\ x > 3 \end{cases}$ *Soluciones:* $\{x \,/\, 3 < x \le 4\} = (3, 4]$

b) $\begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ x \le \frac{14}{3} \end{cases}$ *Soluciones:* $\left\{x \,/\, \frac{1}{2} \le x \le \frac{14}{3}\right\} = \left[\frac{1}{2}, \frac{14}{3}\right]$

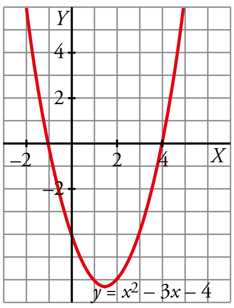
Página 93

3 **Resuelve y comprueba el resultado con la calculadora.**

a) $x^2 - 3x - 4 < 0$ **b)** $x^2 - 3x - 4 \ge 0$

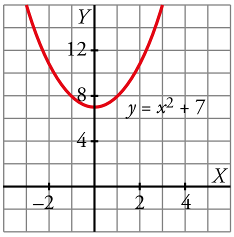
c) $x^2 + 7 < 0$ **d)** $x^2 - 4 \le 0$

a)



$x^2 - 3x - 4 < 0 \to$ intervalo $(-1, 4)$

b) $x^2 - 3x - 4 \ge 0 \to (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$

c) 

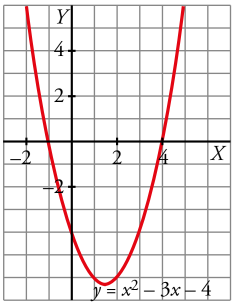
$x^2 + 7 < 0 \;\rightarrow\;$ No tiene solución.

d) $x^2 - 4 \le 0$

La parábola $y = x^2 - 4$ queda por debajo del eje X en el intervalo $(-2, 2)$; y corta al eje X en $x = -2$ y en $x = 2$. Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$.

4 **Resuelve y comprueba el resultado con la calculadora.**

a) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \ge 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 - 4 \le 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$

a) 

$2x - 7 > 5 \;\rightarrow\; 2x > 12 \;\rightarrow\; x > 6 \;\rightarrow\; (6, +\infty)$

$x^2 - 3x - 4 \ge 0 \;\rightarrow\; (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

Solución: $(6, +\infty)$

b) $\left.\begin{matrix} x^2 - 4 \le 0 \\ x - 4 > 1 \end{matrix}\right\}$

- Las soluciones de la primera inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$. (Ver apartado d) del ejercicio anterior).
- Las soluciones de la segunda inecuación son:

$$x - 4 > 1 \;\rightarrow\; x > 5 \;\rightarrow\; (5, +\infty)$$

- Las soluciones del sistema serán los puntos en común de los dos intervalos. Por tanto, el sistema no tiene solución.

7 ▶ INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) CE 2.4. (EA 2.4.2.)

Página 94

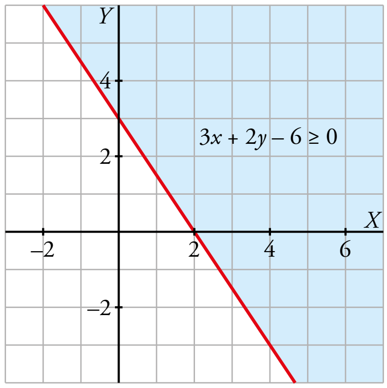
1 Resuelve.

a) $3x + 2y \geq 6$ **b)** $x - y + 1 \geq 0$

a) Dibujamos la recta $r: 3x + 2y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 + 0 - 6 \geq 0$.

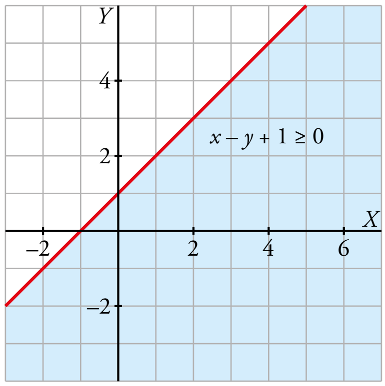
La solución es el semiplano que no contiene a O.



b) Dibujamos la recta $r: x - y + 1 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad: $0 + 0 + 1 \geq 0$.

La solución es el semiplano que contiene a O.



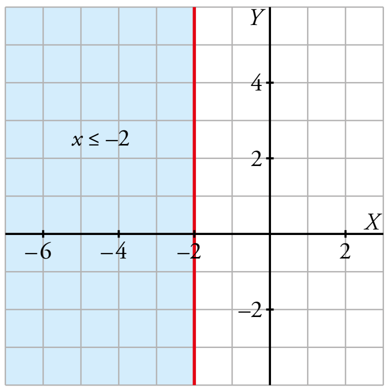
2 Resuelve.

a) $x \leq -2$ **b)** $y > 1$

a) Dibujamos la recta $r: x = -2$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 + 2 \leq 0$.

La solución es el semiplano que no contiene a O.

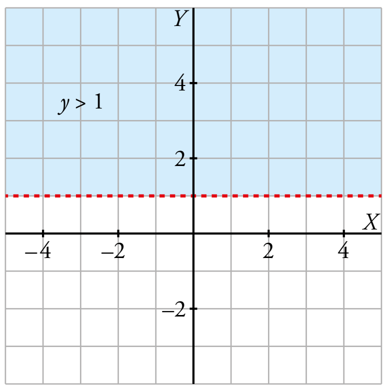


b) Dibujamos la recta $r: y = 1$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 \geq 1$.

La solución es el semiplano que no contiene a O.

La recta $y = 1$ no pertenece al conjunto de soluciones.



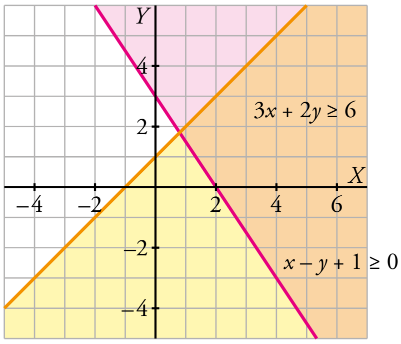
Página 95

3 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

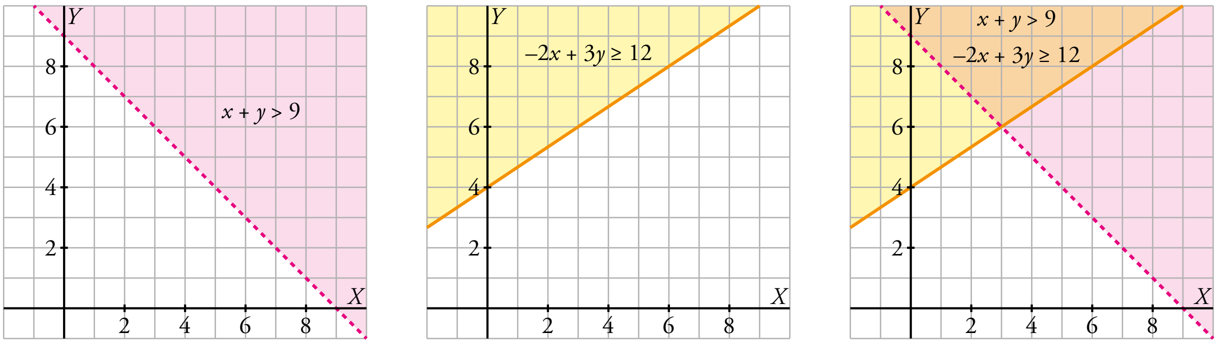
a) $\begin{cases} 3x+2y \ge 6 \\ x-y+1 \ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y>9 \\ -2x+3y \ge 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \ge 3 \\ y \le 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y \ge 11 \\ -x+2y \ge 10 \\ y \le 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y \le 11 \\ -x+2y \ge 10 \\ y<9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y<11 \\ -x+2y \le 10 \\ y \ge 9 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x-3y \le -3 \\ x+y \le 11 \\ x \ge 2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x-3y>-3 \\ x+y>11 \\ x \le 2 \end{cases}$

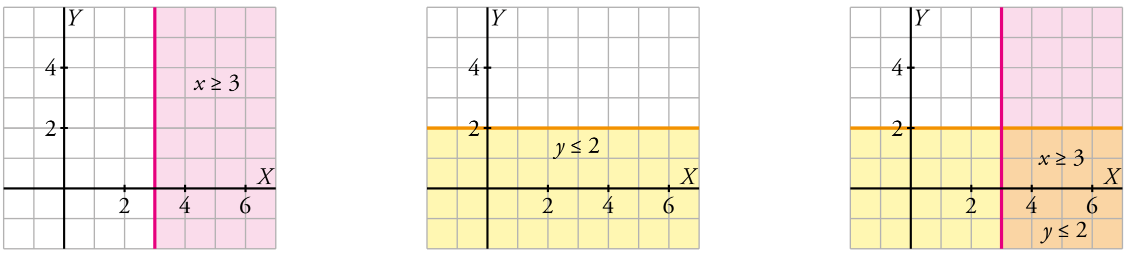
a) Ambas inecuaciones han sido resueltas en el ejercicio 1 anterior. El recinto solución del sistema es la intersección de los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones. Es decir, es el recinto de color marrón.



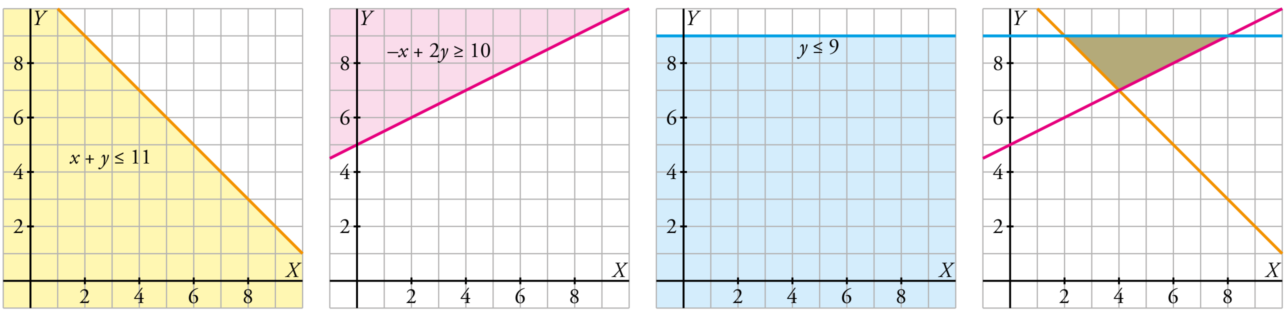
b) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La solución es el recinto marrón.



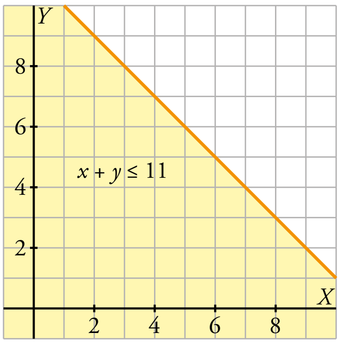
c) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La solución es el recinto marrón.

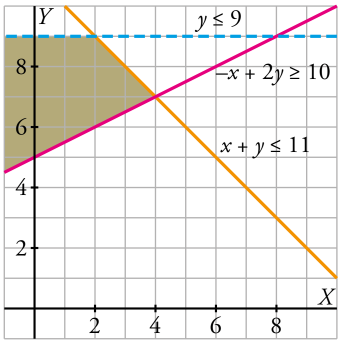


d) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los semiplanos. La solución es el triángulo de intersección.

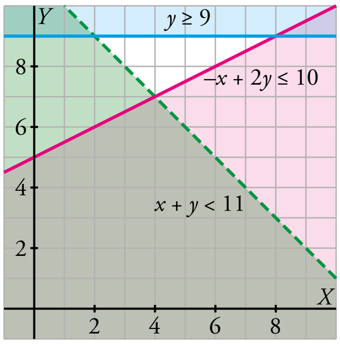


e) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos. Los semiplanos de la segunda y tercera inecuaciones coinciden con los del apartado d). Representamos el semiplano de la primera inecuación. La solución es la región común a los recintos.

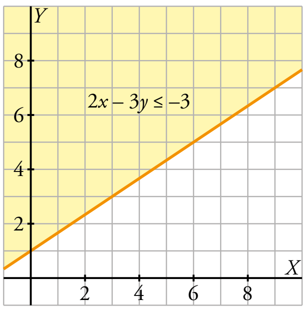


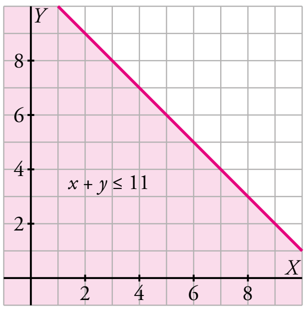


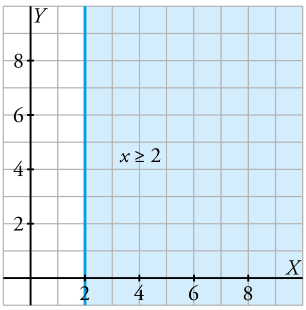
f) Resolvemos cada una de las inecuaciones. No hay ningún punto que esté en la intersección de los tres semiplanos. Luego no hay solución.

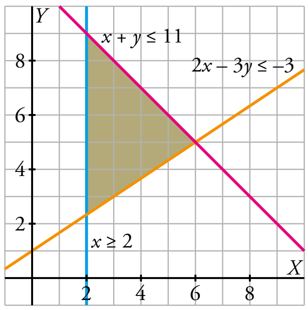


g) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos. La solución es el triángulo común a los semiplanos.

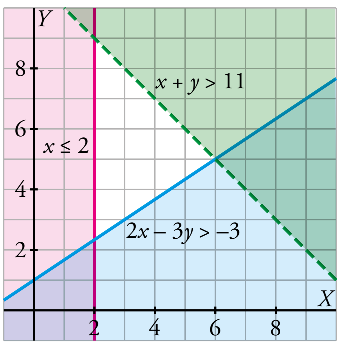








h) Resolvemos cada una de las inecuaciones. No hay ningún punto que esté en la intersección de los tres semiplanos. Luego no hay solución.



EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.)

Página 96

1. Ecuaciones polinómicas de grado tres o superior

Hazlo tú

- **Resuelve esta ecuación:**

  $12x^4 + 14x^3 - 2x = 0$

  Como no tiene término independiente, sacamos factor común $2x$:

  $2x(6x^3 + 7x^2 - 1) = 0$

  Buscamos ahora las raíces enteras del nuevo polinomio entre los divisores del término independiente y factorizamos.

	6	7	0	–1
–1		–6	–1	1
	6	1	–1	0

  $6x^3 + 7x^2 - 1 = (x + 1)(6x^2 + x - 1)$

  Como no hay más raíces enteras, para descomponer el polinomio de segundo grado resolvemos la ecuación asociada y como el coeficiente principal es 6, nos queda:

  $$12x^4 + 14x^3 - 2x = 6 \cdot 2x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) = 0$$

  Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = \frac{1}{3}$

2. Ecuaciones con valores absolutos

Hazlo tú

- **Resuelve estas ecuaciones:**

  a) $|x^2 - 2| = 2$

  b) $|3x + 1| = |2x + 4|$

  c) $|x + 3| = |2x| + 2$

  a) Seguimos las indicaciones del ejercicio resuelto 2, apartado a).

  $x^2 - 2 = 2 \to x_1 = -2,\ x_2 = 2$

  $x^2 - 2 = -2 \to x_3 = 0$

  b) Seguimos las indicaciones del ejercicio resuelto 2, apartado b).

  $3x + 1 = 2x + 4 \to x_1 = 3$

  $3x + 1 = -(2x + 4) \to x_2 = -1$

c) Seguimos las indicaciones del ejercicio resuelto 2, apartado c).

$|x+3| = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x<-3 \\ x+3 & \text{si } x \ge -3 \end{cases}$ $\quad |2x| = \begin{cases} -2x & \text{si } x<0 \\ 2x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

	$x<-3$	$-3 \le x < 0$	$x \ge 0$
$\lvert x+3 \rvert$	$-x-3$	$x+3$	$x+3$
$\lvert 2x \rvert$	$-2x$	$-2x$	$2x$
$\lvert 2x \rvert + 2$	$-2x+2$	$-2x+2$	$2x+2$

$x<-3$	$-3 \le x < 0$	$x \ge 0$
$-x-3=-2x+2$	$x+3=-2x+2$	$x+3=2x+2$
$x=5 \notin (-\infty, -3)$	$x=-1/3 \in [-3, 0)$	$x=1 \in [0, +\infty)$

Soluciones: $x_1 = -\dfrac{1}{3}$, $x_2 = 1$

Página 97

3. Ecuaciones del tipo $ax^{2n} + bx^n + c = 0$

Hazlo tú

- **Resuelve esta ecuación:**

$x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

Hacemos el cambio de variable: $x^4 = y$

La ecuación queda: $y^2 - 15y - 16 = 0 \rightarrow y_1 = 16,\ y_2 = -1$

$x = \pm\sqrt[4]{16} \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2$

$x = \pm\sqrt[4]{-1}$ que no existe.

Soluciones: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$

4. Ecuaciones exponenciales

Hazlo tú

- **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $3^{x^2+1} - 9^x = 0$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x-1} = 5$

c) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

a) $3^{x^2+1} - 9^x = 0 \rightarrow 3^{x^2+1} - (3^2)^x = 0 \rightarrow 3^{x^2+1} - 3^{3x} = 0 \rightarrow 3^{x^2+1} = 3^{2x}$

Igualamos los exponentes: $x^2 + 1 = 2x \rightarrow x = 1$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x-1} = 5$

Tomamos logaritmos en los dos miembros:

$$log\left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1} = log\,5 \rightarrow (-x-1)\,log\left(\frac{1}{2}\right) = log\,5 \rightarrow (-x-1)\,(log\,1 - log\,2) = log\,5 \rightarrow$$

$$\rightarrow -x-1 = \frac{log\,5}{-log\,2} \rightarrow -x = \frac{log\,5}{-log\,2} + 1 \rightarrow x = \frac{log\,5}{log\,2} - 1$$

c) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

Cambiamos de variable: $2^x = y$

$y^2 - 3y + 2 = 0 \rightarrow y_1 = 2,\ y_2 = 1$

$y_1 = 2 \rightarrow 2^x = 2 \rightarrow x_1 = 1$

$y_2 = 1 \rightarrow 2^x = 2^0 \rightarrow x_2 = 0$

5. Ecuaciones logarítmicas

Hazlo tú

- **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\boldsymbol{log\, x + log\, 4 = 2}$

b) $\boldsymbol{2\, log\, x - log\, (x - 1) = log\, 4}$

a) $log\, x + log\, 4 = 2 \rightarrow log\, (4x) = log\, 100 \rightarrow 4x = 100 \rightarrow x = 25$ que es solución válida.

b) $2 log\, x - log\, (x - 1) = log\, 4 \rightarrow log\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right) = log\, 4 \rightarrow \dfrac{x^2}{x-1} = 4 \rightarrow x = 2$ que es solución válida.

Página 98

6. Inecuaciones con fracciones algebraicas

Hazlo tú

- **Resuelve esta inecuación:**

$\boldsymbol{\dfrac{x-1}{x} \le x}$

$\dfrac{x-1}{x} - x \le 0 \rightarrow \dfrac{x-1-x^2}{x} \le 0$

La ecuación $x - 1 - x^2 = 0$ no tiene solución y la gráfica de $x - 1 - x^2 = 0$ no tiene valores positivos.

	(–∞, 0)	$\boldsymbol{x = 0}$	**(0, +∞)**
$\boldsymbol{x - 1 - x^2}$	–	–	–
$\boldsymbol{x}$	–	0	+
$\boldsymbol{\dfrac{x-1-x^2}{x}}$	+	No existe	–

La solución de la inecuación es $(0, +\infty)$.

7. Sistemas de inecuaciones con una incógnita

Hazlo tú

- **Resuelve.**

$\boldsymbol{x < 10 < x^2}$

$\begin{cases} x < 10 \\ x^2 > 10 \end{cases}$

Resolveremos el sistema de inecuaciones:

$\begin{cases} x < 10 \\ x^2 > 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 10 \\ x > \sqrt{10} \text{ o bien } x < -\sqrt{10} \end{cases}$

La solución es el conjunto $(-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, 10)$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 99

1. Fórmulas de Cardano-Vieta

- **Demostrar que las soluciones, x_1 y x_2, de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ cumplen lo siguiente:**

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ y por tanto sus soluciones las podemos expresar como:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Veamos que $x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$:

$$x_1 x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Veamos ahora que $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

2. Aplicación de las fórmulas de Cardano-Vieta

- **Calcula los coeficientes m y n para que esta ecuación $mx^2 + x - n = 0$ tenga por soluciones $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{1}{3}$.**

Lo podemos resolver por dos caminos diferentes.

- Por Cardano-Vieta.

  Si $x_1 = \frac{3}{4}$ y $x_2 = \frac{1}{3}$ son soluciones, cumplirán que:

  $$x_1 \cdot x_2 = \frac{-n}{m} \to \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{n}{m} \to \frac{1}{4} = \frac{n}{m} \to m = -4n\,(*)$$

  Además: $x_1 + x_2 = \frac{-1}{m}$

  $$x_1 + x_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{13}{12} = \frac{-1}{m} \to m = -\frac{12}{13}$$

  Volviendo a (*), podemos calcular $n = -\frac{3}{13}$.

- Como son soluciones también cumplen: $\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$

  Desarrollamos: $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = x^2 - \frac{13}{12}x + \frac{1}{4}$

  Multiplicamos por $-\frac{12}{13}$: $\frac{-12}{13}x^2 + x - \frac{12}{52} \to m = -\frac{12}{13}$ y $n = -\frac{3}{13}$

3. Planteamiento y resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

- **Para fabricar una lata de conservas cilíndrica de capacidad 48π cm³, se necesitan 56π cm² de chapa. Calcular las dimensiones de la lata de conservas.**

$$\begin{cases} \pi r^2 h = 48\pi \\ 2\pi r^2 + 2\pi r h = 56\pi \end{cases} \to \begin{cases} r^2 h = 48 \to h = \dfrac{48}{r^2} \\ 2r^2 + 2rh = 56 \end{cases}$$

$$2r^2 + 2r\frac{48}{r^2} = 56 \to 2r^2 + 2r\frac{48}{r^2} - 56 = 0 \to \frac{96}{r} + 2r^2 - 56 = 0 \to$$

$$\to \frac{2(r^3 - 28r + 48)}{r} = 0 \to (r^3 - 28r + 48) = 0 \to r = 4,\ r = 2,\ r = -6 \ \text{(no es válida)}$$

Soluciones: $r_1 = 4 \to h_1 = \dfrac{48}{16} = 3;\ r_2 = 2 \to h_2 = \dfrac{48}{4} = 12$

4. Planteamiento y resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

- **En un grupo de 1.º de bachillerato todos tienen como materia de modalidad biología, dibujo o tecnología. Las matrículas en biología representan el 60 % del total. Si tres alumnos de dibujo se hubiesen matriculado en tecnología, entonces las dos asignaturas tendrían el mismo número de estudiantes. Finalmente, el doble de la diferencia del número de matriculados en biología y en dibujo es el triple de la diferencia de los matriculados en dibujo y en tecnología. Hallar el número de estudiantes matriculados en cada una de las materias.**

$$\begin{cases} x - 0{,}6x - 0{,}6y - 0{,}6z = 0 \\ y - z = 6 \\ 2x - 2y - 3y + 3z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 0{,}4x - 0{,}6y - 0{,}6z = 0 \\ y - z = 6 \\ 2x - 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos la 1.ª ecuación por 5:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z = 0 \\ \quad\ \ y - z = 6 \\ 2x - 5y + 3z = 0 \end{cases} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{matrix} \ \begin{cases} 2x - 3y - 3z = 0 \\ \quad\ \ y - z = 6 \\ \ \ -2y + 6z = 0 \end{cases} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2\cdot(1.^a) \end{matrix} \ \begin{cases} 2x - 3y - 3z = 0 \\ \quad\ \ y - z = 6 \\ \quad\ \ 4z = 12 \end{cases} \to \begin{cases} x = 18 \\ y = 9 \\ z = 3 \end{cases}$$

Solución: $x = 18$ de biología, $y = 9$ de dibujo, $z = 3$ de tecnología.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 100

Para practicar

Factorización

1 **Factoriza estos polinomios y encuentra sus raíces:**

a) $9x^4 - x^2$ **b)** $4x^2 - 28x + 49$

c) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ **d)** $2x^3 - x^2 - x$

e) $x^4 - 13x^2 + 36$ **f)** $x^4 + 2x^2 + 1$

a) $9x^4 - x^2 = x^2(9x^2 - 1) = x^2(3x - 1)(3x + 1)$

Raíces: $x = 0,\ x = \dfrac{1}{3},\ x = -\dfrac{1}{3}$

b) $4x^2 - 28x + 49 = (2x - 7)^2$

Raíz: $x = \dfrac{7}{2}$

c)
$$\begin{array}{r|l} x^3 + 9x^2 + 27x + 27 & x + 3 \\ x^2 + 6x + 9 & x + 3 \\ x + 3 & x + 3 \\ 1 & \end{array}$$

$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x + 3)^3$

Raíz: $x = -3$

d)
$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - x & x \\ 2x^2 - x - 1 & x - 1 \\ 2x + 1 & 2x + 1 \\ 1 & \end{array}$$

$2x^3 - x^2 - x = x(x - 1)(2x + 1)$

Raíces: $x = 0,\ x = 1,\ x = -\dfrac{1}{2}$

e)
$$\begin{array}{r|l} x^4 - 13x^2 + 36 & x - 2 \\ x^3 + 2x^2 - 9x - 18 & x + 2 \\ x^2 - 9 & x - 3 \\ x + 3 & x + 3 \\ 1 & \end{array}$$

$x^4 - 13x^2 + 36 = (x - 2)(x - 3)(x + 3)(x + 2)$

Raíces: $x = 2,\ x = -2,\ x = 3,\ x = -3$

f) $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$

Es un producto notable. No tiene raíces porque $x^2 + 1$ no se puede descomponer.

2 **Halla, en cada uno de estos casos, el máx.c.d. $[A(x), B(x)]$ y el mín.c.m. $[A(x), B(x)]$:**

a) $A(x) = x^2 + x - 12;\ B(x) = x^3 - 9x$

b) $A(x) = x^3 + x^2 - x - 1;\ B(x) = x^3 - x$

c) $A(x) = x^6 - x^2;\ B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

a) $A(x) = (x-3)\ (x+4);\ B(x) = x(x-3)\ (x+3)$

máx.c.d. $[A(x), B(x)] = (x-3)$

mín.c.m. $[A(x), B(x)] = x(x-3)\ (x+3)\ (x+4)$

b) $A(x) = (x-1)\ (x+1)2;\ B(x) = x(x-1)\ (x+1)$

máx.c.d. $[A(x), B(x)] = (x-1)\ (x+1)$

mín.c.m. $[A(x), B(x)] = x(x-1)\ (x+1)^2$

c) $A(x) = x^2(x+1)\ (x-1)\ (x^2+1);\ B(x) = (x-1)\ (x^2+1)$

máx.c.d. $[A(x), B(x)] = (x-1)\ (x^2+1)$

mín.c.m. $[A(x), B(x)] = x^2(x+1)\ (x-1)\ (x^2+1)$

3 **Descompón los siguientes polinomios:**

a) $x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 11x + 30$

b) $3x^4 - 15x^3 + 24x^2 - 12x$

a)

	1	–4	–10	26	11	30
2		2	–4	–28	–4	–30
	1	–2	–14	–2	–15	0
–3		–3	15	–3	15	
	1	–5	1	–5	0	
5		5	0	5		
	1	0	1	0		

La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución, por tanto:

$x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 11x + 30 = (x-2)(x+3)(x-5)(x^2+1)$

b) $3x^4 - 15x^3 + 24x^2 - 12x = 3x(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$

	1	–5	8	–4
1		1	–4	4
	1	–4	4	0

Nos queda por factorizar: $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$:

$3x^4 - 15x^3 + 24x^2 - 12x = 3x(x-1)(x-2)^2$

4 **Escribe un polinomio que tenga como raíces...:**

a) 1, 2, –3, –2

b) 0, –4, –1 (doble)

a) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+2) = (x-1)(x+3)(x^2-4) = (x^2+2x-3)(x^2-4) =$

$= x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x^2 - 8x + 12 = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

b) $x(x+1)^2(x+4) = x(x^2+2x+1)(x+4) = x(x^3+2x^2+x+4x^2+8x+4) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 4x$

Fracciones algebraicas

5 **Simplifica las siguientes fracciones:**

a) $\dfrac{x^4-x^2}{x^5+3x^4+2x^3}$

b) $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}$

c) $\dfrac{-x^3-4x^2+11x+30}{x^2+2x-15}$

d) $\dfrac{x^4-4x^2}{x^3+4x^2+4x}$

a) $\dfrac{x^4-x^2}{x^5+3x^4+2x^3}=\dfrac{x^2(x-1)(x+1)}{x^3(x+2)(x+1)}=\dfrac{1}{x}\,\dfrac{x-1}{x+2}$

b) $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}=\dfrac{(x+2)^3}{(x+2)^2}=x+2$

c) $\dfrac{-x^3-4x^2+11x+30}{x+2x-15}=\dfrac{-(x+5)(x-3)(x+2)}{(x+5)(x-3)}=-x-2$

d) $\dfrac{x^4-4x^2}{x^3+4x^2+4x}=\dfrac{x^2(x-2)(x+2)}{x(x+2)^2}=x\dfrac{x-2}{x+2}$

6 **Opera y simplifica el resultado.**

a) $\dfrac{3a+3}{12a-12}:\dfrac{(a+1)^2}{a^2-1}$

b) $\dfrac{x^2+2x-3}{(x-2)^3}\cdot\dfrac{(x-2)^2}{x^2-1}$

c) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x}{x^2-3x+2}$

d) $\left(\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x}{x+2}\right):\left(1+\dfrac{x}{x+2}\right)$

e) $\left(1-\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\dfrac{x+3}{x+2}\right):\dfrac{1}{x+2}$

a) $\dfrac{3(a+1)(a+1)(a-1)}{12(a-1)(a+1)^2}=\dfrac{1}{4}$

b) $\dfrac{(x+3)(x-1)(x-2)^2}{(x-2)^3(x+1)(x-1)}=\dfrac{x+3}{(x-2)(x+1)}$

c) $\dfrac{x(x-1)-x(x-2)-x}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{x^2-x-x^2+2x-x}{(x-2)(x-1)}=0$

d) $\dfrac{(x+1)(x+2)-x^2}{x(x+2)}:\dfrac{x+2+x}{x+2}=\dfrac{3x+2}{x(x+2)}\cdot\dfrac{x+2}{2x+2}=\dfrac{3x+2}{x(2x+2)}=\dfrac{3x+2}{2x(x+1)}$

e) $\dfrac{x^2+4+4x-x^2-4x-3}{(x+2)^2}\cdot(x+2)=\dfrac{1}{x+2}$

7 **Demuestra las siguientes identidades:**

a) $\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{1-x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{a^2-1}{a^2-3a+2}:\dfrac{a^2+2a+1}{a^2-a-2}=1$

c) $\left(\dfrac{x-2}{x-3}-\dfrac{x-3}{x-2}\right):\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}\right)=2x-5$

a) $\left(\dfrac{1-x+2x}{1-x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{1-x}{x}\right)=\left(\dfrac{1+x}{(1-x)(1+x)}\right)\cdot\left(\dfrac{1-x}{x}\right)=\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\cdot\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{(a+1)(a-1)}{(a-2)(a-1)}:\dfrac{(a+1)^2}{(a-2)(a+1)}=\dfrac{(a+1)(a-2)}{(a-2)(a+1)}=1$

c) $\left(\dfrac{(x-2)^2-(x-3)^2}{(x-3)(x-2)}\right):\left(\dfrac{(x-2)-(x-3)}{(x-3)(x-2)}\right)=\dfrac{(x-2+x-3)(x-2-x+3)}{(x-3)(x-2)}:\dfrac{x-2-x+3}{(x-3)(x-2)}=$

$=\dfrac{(2x-5)}{(x-3)(x-2)}:\dfrac{1}{(x-3)(x-2)}=\dfrac{(2x-5)(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)}=2x-5$

Ecuaciones polinómicas

8 **Resuelve, cuando sea posible, las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{1+x}{2}=\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{2+x}{4}$

b) $0{,}2x+0{,}6-0{,}25(x-1)^2=1{,}25x-(0{,}5x+2)^2$

c) $(5x-3)^2-5x(4x-5)=5x(x-1)$

a) $\dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{1+x}{2}=\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{2+x}{4}$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por 16.

$x^2-6x-7=x^2-6x-7$

Obtenemos una identidad, luego las soluciones son todos los números reales.

b) $0{,}2x+0{,}6-0{,}25(x-1)^2=1{,}25x-(0{,}5x+2)^2$

$0{,}2x+0{,}6-0{,}25(x^2-2x+1)=1{,}25x-(0{,}25x^2+2x+4)$

$-0{,}25x^2+0{,}7x+0{,}35=-0{,}25x^2-0{,}75x-4$

$0{,}7x+0{,}75x=-0{,}35-4$

$1{,}45x=-4{,}35$

Solución: $x=-3$

c) $(5x-3)^2-5x(4x-5)=5x(x-1)$

$25x^2-30x+9+25x-20x^2=5x^2-5x$

$9=0$

No tiene solución.

9 **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:**

a) $0{,}5(x-1)^2-0{,}25(x+1)^2=4-x$

b) $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{2}-2\right)^2-\dfrac{x+1}{8}=\dfrac{1}{8}-\dfrac{x-1}{4}$

c) $0{,}\widehat{3}x^2-x-1{,}\widehat{3}=0$

d) $(x+1)^2-(x-2)^2=(x+3)^2+x^2-20$

e) $\dfrac{x^2-2x+5}{2}-\dfrac{x^2+3x}{4}=\dfrac{x^2-4x+15}{6}$

f) $\dfrac{3x+1}{3}-\dfrac{5x^2+3}{2}=\dfrac{x^2-1}{2}-\dfrac{x+2}{3}$

g) $(x-a)^2+x(x+b)=8b^2-x(2a-b)+a^2$

a) $0{,}5(x^2 + 1 - 2x) - 0{,}25(x^2 + 1 + 2x) = 4 - x$

$0{,}5x^2 + 0{,}5 - x - 0{,}25x^2 - 0{,}25 - 0{,}5x = 4 - x$

$0{,}25x^2 - 0{,}5x - 3{,}75 = 0$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

$x_1 = -3;\ \ x_2 = 5$

b) $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x^2}{4} + 4 - 2x\right) - \dfrac{x+1}{8} = \dfrac{1}{8} - \dfrac{2x-2}{8}$

$3x^2 + 48 - 24x - x - 1 = 1 - 2x + 2;\ \ 3x^2 - 23x + 44 = 0$

$x = \dfrac{23 \pm 1}{6} = \begin{cases} 4 \\ 11/3 \end{cases}$

$x_1 = 4;\ \ x_2 = \dfrac{11}{3}$

c) $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{3x}{3} - \dfrac{4}{3} = 0 \ \rightarrow\ x^2 - 3x - 4 = 0$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

$x_1 = 4,\ \ x_2 = -1$

d) $x^2 + 1 + 2x - x^2 - 4 + 4x = x^2 + 9 + 6x + x^2 - 20$

$0 = 2x^2 - 8;\ \ x^2 = 4$

$x_1 = -2;\ \ x_2 = 2$

e) $6x^2 - 12x + 30 - 3x^2 - 9x = 2x^2 - 8x + 30$

$x^2 - 13x = 0$

$x_1 = 0;\ \ x_2 = 13$

f) $6x + 2 - 15x^2 - 9 = 3x^2 - 3 - 2x - 4$

$0 = 18x^2 - 8x;\ \ 2x(9x - 4) = 0$

$x_1 = 0;\ \ x_2 = \dfrac{4}{9}$

g) $x^2 + a^2 - 2ax + x^2 + bx = 8b^2 - 2ax + bx + a^2$

$2x^2 = 8b^2;\ \ x^2 = 4b^2;\ \ x = \pm 2b$

$x_1 = 2b;\ \ x_2 = -2b$

10 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$**

c) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ **d) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$**

a) $x^2 = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ \ x_2 = -2;\ \ x_3 = 1;\ \ x_4 = -1$

b) $x^2 = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \ \text{(no vale)} \end{cases}$

$x_1 = 1;\ \ x_2 = -1$

c) $x^2 = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases} \ \rightarrow$ No tiene solución

d) $x^2 = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2} = \dfrac{9 \pm 7}{2} = \begin{cases} 8 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 1;\ \ x_2 = -1;\ \ x_3 = 2\sqrt{2};\ \ x_4 = -2\sqrt{2}$

11 Resuelve.

a) $(x^2-2)^2=1$ **b)** $\dfrac{3x^4-1}{4}+\dfrac{1}{2}\left(x^4-2-\dfrac{1}{2}x^2\right)=\dfrac{x^2-5}{4}$

c) $x^6-2x^3+1=0$ **d)** $x^8-15x^4-16=0$

a) $(x^2-2)^2=1 \to x^4-4x^2+4=1$

$x^4-4x^2+3=0$

$x^2=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\dfrac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}3\\1\end{cases}$

$x_1=\sqrt{3};\ x_2=-\sqrt{3};\ x_3=1;\ x_4=-1$

b) $3x^4-1+2x^4-4-x^2=x^4-5$

$4x^4-x^2=0$

$x^2(4x^2-1)=0\begin{cases}x^2=0\\4x^2-1=0\end{cases}$

$x_1=0;\ x_2=\dfrac{1}{2};\ x_3=-\dfrac{1}{2}$

c) $x^6-2x^3+1=0$

Hacemos el cambio de variable $x^3=y$.

$y^2-2y+1=0 \to y=1$

$x=\sqrt[3]{1}=1$

d) $x^8-15x^4-16=0$

Hacemos el cambio de variable $x^4=y$.

$y^2-15y-16=0 \to y=16,\ y=-1$ que no es válida.

$x=\pm\sqrt[4]{16} \to x_1=2,\ x_2=-2$

12 Resuelve estas ecuaciones:

a) $6x^3+7x^2-1=0$ **b)** $16x^5-8x^3+x=0$ **c)** $x^3+6x^2-7x-60=0$

d) $x^3-49x=0$ **e)** $x^3+9x^2+15x-25=0$ **f)** $x^6+3x^2=0$

a)

	6	7	0	–1
–1		–6	–1	1
	6	1	–1	0

Por tanto, $x_1=-1$.

Queda por resolver $6x^2+x-1=0$:

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\dfrac{-1\pm 5}{12} \to x_2=-\dfrac{1}{2},\ x_3=\dfrac{1}{3}$

Las soluciones son $x_1=-1,\ x_2=-\dfrac{1}{2},\ x_3=\dfrac{1}{3}$.

b) $16x^5-8x^3+x=0 \to x(16x^4-8x^2+1)=0$

Por tanto, $x=0$ es solución de la ecuación. Resolvemos ahora la ecuación bicuadrada, $16x^4-8x^2+1=0$.

Hacemos el cambio $y=x^2$:

$16y^2-8y+1=0 \to y=\dfrac{8\pm\sqrt{64-4\cdot 16}}{32}=\dfrac{8}{32}=\dfrac{1}{4}$ (es solución doble)

$\to x=\pm\dfrac{1}{2},\ x=\pm-\dfrac{1}{2}$ (ambas son soluciones dobles)

Las soluciones de la ecuación son, por tanto $x_1=0,\ x_2=\dfrac{1}{2},\ x_3=-\dfrac{1}{2},\ x_4=\dfrac{1}{2},\ x_5=-\dfrac{1}{2}$.

c)

	1	6	–7	–60
3		3	27	60
	1	9	20	0

Por tanto, $x_1 = 3$.

$x^2 + 9x + 20 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \dfrac{-9 \pm 1}{2} \rightarrow x_2 = -5;\ x_3 = -4$

Las soluciones son $x_1 = 3,\ x_2 = -5,\ x_3 = -4$.

d) $x^3 - 49x = x(x^2 - 49) = x(x-7)(x+7) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 7,\ x_3 = -7$

e)

	1	9	15	–25
1		1	10	25
	1	10	25	0

Por tanto, $x_1 = 1$.

$x^2 + 10x + 25 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100-100}}{2} = \dfrac{-10}{2} \rightarrow x = -5$ (raíz doble)

Las soluciones son $x_1 = 1,\ x_2 = -5,\ x_3 = -5$.

f) $x^6 - 3x^2 = 0 = x^2(x^4 - 3) \rightarrow x_1 = 0$

$x^4 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{3}$

$x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt[4]{3},\ x_3 = -\sqrt[4]{3}$ (soluciones dobles)

Ecuaciones con fracciones algebraicas

13 **Resuelve sin olvidar comprobar las soluciones:**

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x-1}{x^2} = 0$

b) $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{2x}{2-x} = -x$

c) $\dfrac{3x-7}{x} = \dfrac{8x}{x+1} - 5$

d) $\dfrac{x-3}{x^2-9} + \dfrac{x+1}{x+3} = x+2$

e) $\dfrac{x+7}{x+1} - \dfrac{7x+1}{x^2+2x+1} = x-4$

f) $\dfrac{30}{x^2+5x+6} - \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{2x+1}{x+3}$

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x-1}{x^2} = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por x^2.

$\dfrac{2x-1}{x^2} = 0 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0$$

$x = \dfrac{1}{2}$ es válida.

b) $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{2x}{2-x} = -x$

$\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{2x}{2-x} + x = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $(x-2)$.

$\dfrac{x(x-3)}{x-2} = 0 \rightarrow x(x-3) = 0$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = 0$. Son válidas.

c) $\dfrac{3x-7}{x}=\dfrac{8x}{x+1}-5$

$\dfrac{3x-7}{x}-\dfrac{8x}{x+1}+5=0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $x(x+1)$.

$\dfrac{(x-7)}{x(x+1)}=0 \;\to\; x-7=0 \;\to\; x=7$ es válida.

d) $\dfrac{x-3}{x^2-9}+\dfrac{x+1}{x+3}=x+2$

$\dfrac{x-3}{x^2-9}+\dfrac{x+1}{x+3}-x-2=0$

Reducimos a común denominador, simplificamos y multiplicamos por $(x+3)$.

$\dfrac{x-3}{x^2-9}+\dfrac{x+1}{x+3}-x-2=-\dfrac{(x+2)^2}{x+3}=0 \;\to\; x+2=0$

Solución: $x=-2$, es válida.

e) $\dfrac{x+7}{x+1}-\dfrac{7x+1}{x^2+2x+1}=x-4$

$\dfrac{x+7}{x+1}-\dfrac{7x+1}{x^2+2x+1}-x+4=0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $(x+1)^2$.

$\dfrac{-x^3+3x^2+8x+10}{(x+1)^2}=0 \;\to\; -x^3+3x^2+8x+10=0$

Factorizamos: $-x^3+3x^2+8x+10=-(x-5)(2x+x^2+2)$

La solución es $x=5$, que es válida.

f) $\dfrac{30}{x^2+5x+6}-\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{2x+1}{x+3}$

$\dfrac{30}{x^2+5x+6}-\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{2x+1}{x+3}=0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por x^2+5x+6.

$-\dfrac{3x^2+8x-28}{x^2+5x+6}=0 \;\to\; 3x^2+8x-28=0$

Soluciones: $x_1=2$, $x_2=-\dfrac{14}{3}$. Son válidas.

Página 101

Ecuaciones con radicales

14 **Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones:**

a) $\sqrt{5x+6}=3+2x$ **b)** $x+\sqrt{7-3x}=1$

c) $\sqrt{2-5x}+x\sqrt{3}=0$ **d)** $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-5}=0$

a) $5x+6=9+4x^2+12x;\; 0=4x^2+7x+3$

$x=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-48}}{8}=\dfrac{-7\pm1}{8}=\begin{cases}-1\\-3/4\end{cases}$

$x_1=-1;\; x_2=-\dfrac{3}{4}$

b) $7-3x=1+x^2-2x;\; 0=x^2+x-6$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\dfrac{-1\pm5}{2}=\begin{cases}2 \text{ (no vale)}\\-3\end{cases}$

$x=-3$

c) $2 - 5x = 3x^2$; $0 = 3x^2 + 5x - 2$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 1/3 \text{ (no vale)} \\ -2 \end{cases}$$

$x = -2$

d) $2x + 3 = x - 5$; $x = -8$ (no vale)

No tiene solución.

15 Resuelve.

a) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x-6} = 4$ **b)** $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

c) $\sqrt{\frac{7x+1}{4}} = \frac{5x-7}{6}$ **d)** $\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{x}{8}$

a) $5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x}$

$3x - 22 = -8\sqrt{2x}$

$9x^2 + 484 - 132x = 64 \cdot 2x$; $9x^2 - 260x + 484 = 0$

$$x = \frac{260 \pm 224}{18} = \begin{cases} 484/18 = 242/9 \text{ (no vale)} \\ 2 \end{cases}$$

$x = 2$

b) Aislamos un radical: $\sqrt{x-2} = 3 - \sqrt{x+1}$

Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$x - 2 = 9 - 6\sqrt{x+1} + x + 1 \rightarrow 6\sqrt{x+1} = 12 \rightarrow \sqrt{x+1} = 2$

Repetimos el proceso: $x + 1 = 4 \rightarrow x = 3$

Comprobamos la solución, $\sqrt{3-2} + \sqrt{3+1} = 3$, vemos que es válida.

c) $\frac{7x+1}{4} = \frac{25x^2 + 49 - 70x}{36}$

$63x + 9 = 25x^2 + 49 - 70x$; $0 = 25x^2 - 133x + 40$

$$x = \frac{133 \pm 117}{50} = \begin{cases} 5 \\ 8/25 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$x = 5$

d) $\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{x}{8}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 = \left(\frac{x}{8}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{64}x^2 \rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{64}x^2 = 0 \rightarrow -\frac{x^3 - 64}{64x} = 0 \rightarrow x^3 - 64 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4, \text{ solución válida.}$$

16 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

b) $\sqrt{-5 - 7x} + \sqrt{4 + x} = \sqrt{7 - 6x}$

c) $\sqrt[3]{4x-1} = x - 4$

d) $\sqrt[3]{4 - 2x} = \sqrt[6]{8x^2 - 16x}$

e) $\sqrt{2x+2} - \sqrt[4]{6x+10} = 0$

f) $\sqrt[4]{3x+1} = 4 + \sqrt[4]{3x+1}$

a) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

$\sqrt{3x} = \sqrt{x} + \sqrt{2}$

$(\sqrt{3x})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{2})^2$

$3x = x + 2\sqrt{2}\sqrt{x} + 2$

$2\sqrt{2}\sqrt{x} = 2x - 2$

$(2\sqrt{2}\sqrt{x})^2 = (2x-2)^2$

$8x = 4x^2 - 8x + 4 \rightarrow x = \sqrt{3} + 2,\ x = 2 - \sqrt{3}$ no es válida.

Solución: $x = \sqrt{3} + 2$

b) $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

$(\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x})^2 = (\sqrt{7-6x})^2 \rightarrow 2\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4} - 6x - 1 = 7 - 6x$

$2\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4} = 8 \rightarrow (\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4})^2 = 4^2 \rightarrow -7x^2 - 33x - 20 = 16$

Soluciones: $x_1 = -\dfrac{12}{7},\ x_2 = -3.$ Las dos son válidas.

c) $\sqrt[3]{4x-1} = x - 4$

Elevamos al cubo ambos miembros:

$(\sqrt[3]{4x-1})^3 = (x-4)^3 \rightarrow 4x - 1 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64 \rightarrow x^3 - 12x^2 + 48x - 64 - 4x + 1 = 0$

Factorizamos:

$x^3 - 12x^2 + 44x - 63 = (x-7)(x^2 - 5x + 9)$

Solución: $x = 7$ es válida.

d) $\sqrt[3]{4-2x} = \sqrt[6]{8x^2 - 16x}$

Elevamos a la sexta ambos miembros:

$(4-2x)^2 = 8x^2 - 16x \rightarrow 4x^2 - 16x + 16 = 8x^2 - 16x \rightarrow 4x^2 + 16 = 0$

No tiene solución.

e) $\sqrt{2x+2} - \sqrt[4]{6x+10} = 0$

Aislamos las raíces.

$\sqrt{2x+2} = \sqrt[4]{6x+10}$

Elevamos a la cuarta ambos miembros:

$(2x+2)^2 = 4x^2 + 8x + 4 = 6x + 10 \rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = 6x + 10 \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2 + 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 1,\ x = -\dfrac{3}{2}$ no es válida.

Solución: $x = 1$

f) $\sqrt[4]{3x+1} = 4 + \sqrt[4]{3x+1} \rightarrow 0 = 4 \rightarrow$ No tiene solución.

Ecuaciones exponenciales

17 Resuelve expresando ambos miembros de la ecuación como potencias de la misma base:

a) $3^{x^2+1} = \dfrac{1}{9}$

b) $\dfrac{9^{2x}}{3^x} = 27$

c) $5 \cdot 2^{x+3} = \dfrac{5}{4}$

d) $5^{x^2+3x} = 0{,}04$

e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{8}{27}$

f) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x = 81$

g) $0{,}01^x = 100$

h) $3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 36$

i) $\sqrt{2^{3x-1}} = 0{,}125$

j) $3\sqrt[3]{27^{x-1}} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{2x+5}$

k) $3 \cdot 9^x \cdot 27^x = 1$

l) $5^{x-5} \cdot 125^{2x} = 25$

a) $3^{x^2+1} = \frac{1}{9} \to 3^{x^2+1} = 3^{-2} \to x^2+1 = -2 \to x^2 = -3 \to$ No tiene solución.

b) $\frac{9^{2x}}{3^x} = 27 \to \frac{3^{4x}}{3^x} = 3^3 \to 3^{4x-x} = 3^3 \to 3x = 3 \to$ *Solución:* $x = 1$

c) $5 \cdot 2^{x+3} = \frac{5}{4} \to 5 \cdot 2^{x+3} = 5 \cdot 2^{-2} \to x+3 = -2 \to$ *Solución:* $x = -5$

d) $5^{x^2+3x} = 0,04 \to 5^{x^2+3x} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} \to 5^{x^2+3x} = \frac{1}{25} \to 5^{x^2+3x} = 5^{-2} \to x^2+3x = -2$

Soluciones: $x_1 = -1,\ x_2 = -2$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{27} \to \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \to$ *Solución:* $x = 3$

f) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81 \to \left(\frac{1}{9}\right)^x = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} \to$ *Solución:* $x = -2$

g) $(0,01)^x = 100 \to (0,01)^x = 0,01^{-2} \to$ *Solución:* $x = -2$

h) $3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 36 \to 3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 6^2 \to 6^{x+1} = 6^2 \to x+1 = 2 \to$ *Solución:* $x = 1$

i) $\sqrt{2^{3x-1}} = 0,125 \to \sqrt{2^{3x-1}} = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} \to$

$\to \sqrt{2^{3x-1}} = \frac{1}{8} \to 2^{\frac{3x-1}{2}} = 2^{-3} \to \frac{3x-1}{2} = -3 \to$ *Solución:* $x = -\frac{5}{3}$

j) $3\sqrt[3]{27^{x-1}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+5} \to 3\sqrt[3]{3^{3(x-1)}} = \left(\frac{1}{3^2}\right)^{2x+5} \to 3^{1+\frac{3(x-1)}{3}} = 3^{-2(2x+5)} \to$

$\to 1 + \frac{3(x-1)}{3} = -2(2x+5) \to x = -2(2x+5) \to$ *Solución:* $x = -2$

k) $3 \cdot 9^x \cdot 27^x = 1 \to 3 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{3x} = 3^0 \to 3^{1+2x+3x} = 3^0 \to 1 + 5x = 0 \to$ *Solución:* $x = -\frac{1}{5}$

l) $5^{x-5} \cdot 125^{2x} = 25 \to 5^{x-5} \cdot 5^{3 \cdot 2x} = 5^2 \to 5^{x-5+6x} = 5^2 \to 7x - 5 = 2 \to$ *Solución:* $x = 1$

18 Resuelve, tomando logaritmos, estas ecuaciones:

a) $\frac{1}{e^x} = 27$

b) $e^{x-9} = \sqrt{73}$

c) $2^x \cdot 3^x = 81$

d) $\frac{2^x}{3^{x+1}} = 1$

e) $2^{x+1} \cdot 16^{2x+1} = 3$

f) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 125^{x+1} = 4$

a) $\frac{1}{e^x} = 27 \to \frac{1}{27} = e^x \to ln\,\frac{1}{27} = ln\,e^x \to x = ln\,\frac{1}{27} = ln\,1 - ln\,27 = 0 - ln\,27 \to x \approx -3,296$

b) $e^{x-9} = \sqrt{73} \to ln\,e^{x-9} = ln\,\sqrt{73} \to x - 9 = \frac{1}{2}ln\,73 \to x = 9 + \frac{ln\,73}{2} \to x \approx 11,145$

c) $6^x = 81 \to x\,log\,6 = log\,81 \to x = \frac{log\,81}{log\,6} \approx 2,453$

d) $\frac{2^x}{3^x \cdot 3} = 1 \to \left(\frac{2}{3}\right)^x = 3 \to x\,log\,\frac{2}{3} = log\,3 \to x = \frac{log\,3}{log\,2 - log\,3} \approx -2,710$

e) $2^{x+1} \cdot 16^{2x+1} = 3 \to 2^{x+1} \cdot 2^{4(2x+1)} = 3 \to 2^{9x+5} = 3 \to log\,2^{9x+5} = log\,3 \to$

$\to (9x+5)\,log\,2 = log\,3 \to (9x+5) = \frac{log\,3}{log\,2} = 1,5850$

Solución: $x = \frac{1,5850 - 5}{9} = -0,3794$

f) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 125^{x+1} = 4 \to 5^{-x} \cdot 5^{3x+3} = 4 \to 5^{2x+3} = 4 \to \log 5^{2x+3} = \log 4 \to$

$\to (2x+3)\log 5 = \log 4 \to (2x+3) = \frac{\log 4}{\log 5} = 0{,}8613$

Solución: $x = \frac{0{,}8613 - 3}{2} = -1{,}0693$

19 **Resuelve las siguientes ecuaciones mediante un cambio de variable:**

a) $\mathbf{2^x + 2^{1-x} = 3}$

b) $\mathbf{2^{x+1} + 2^{x-1} = \frac{5}{2}}$

c) $\mathbf{8^{1+x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}}$

d) $\mathbf{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0}$

e) $\mathbf{9^x - 3^x - 6 = 0}$

f) $\mathbf{7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0}$

g) $\mathbf{2^{x/2} + 2^x = 6}$

h) $\mathbf{\sqrt{3^{2x}+7} = 3^x + 1}$

i) $\mathbf{2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x+1} + 3 \cdot 2^{x+2} = 8}$

a) $2^x + \frac{2}{2^x} = 3$

$z = 2^x \to x + \frac{2}{z} = 3;\ z^2 + 2 = 3z$

$z^2 - 3z + 2 = 0;\ z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \to 2^x = 2 \to x_1 = 1 \\ 1 \to 2^x = 1 \to x_2 = 0 \end{cases}$

b) $2 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2} = \frac{5}{2};\ 4 \cdot 2^x + 2^x = 5;\ 2^x = 1$

$x = 0$

c) $2^{3+3x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$

$8 \cdot (2^x)^3 + \frac{(2^x)^3}{2} = \frac{17}{16} \to 2^x = z \to 128z^3 + 8z^3 = 17$

$(128+8)(z)^3 = 17;\ (z)^3 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8} \to z = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \to 2^x = \frac{1}{2}$

$x = -1$

d) $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$2^x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 0;\ x_2 = 2$

e) $(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0;\ 3^x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \text{ (no vale)} \end{cases}$

$x = 1$

f) $7 \cdot (7^x)^2 - 50 \cdot 7^x + 7 = 0;\ 7^x = \frac{50 \pm 48}{14} = \begin{cases} 7 \\ 1/7 \end{cases}$

$x_1 = -1;\ x_2 = 1$

g) $2^{x/2} - 3 \cdot 2^x = 6 \to \sqrt{2^x} - 3 \cdot 2^x = 6$

Hacemos el cambio de variable $2^x = y$:

$\sqrt{y} - 3 \cdot y = 6 \to \sqrt{y} = 3 \cdot y + 6 \to (\sqrt{y})^2 = (3y+6)^2 \to y = 9y^2 + 36y + 36 \to$

$\to 9y^2 + 35y + 36 = 0 \to y = \frac{-35 \pm \sqrt{-71}}{18}$

No tiene solución.

h) $\sqrt{3^{2x}+7}=3^x+1$

Hacemos el cambio de variable $3^x = y$:

$\sqrt{y^2+7}=y+1 \to (\sqrt{y^2+7})^2=(y+1)^2 \to y^2+7=y^2+2y+1 \to 7=2y+1 \to y=3$

Solución: $x = 1$

i) $2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x+1} + 3 \cdot 2^{x+2} = 8$

Hacemos el cambio de variable $2^x = y$:

$y^3-3\cdot 2\cdot y^2+3\cdot 2^2 y=8 \to y^3-6y^2+12y=8 \to y^3-6y^2+12y-8=0 \to (y-2)^3=0 \to y=2$

Solución: $x = 1$

Ecuaciones logarítmicas

20 Resuelve estas ecuaciones:

a) $\boldsymbol{log\,(x^2+1)-log\,(x^2-1)=log\,\frac{13}{12}}$

b) $\boldsymbol{ln\,(x-3)+ln\,(x+1)=ln\,3+ln\,(x-1)}$

c) $\boldsymbol{(x-1)\,log\,(3^{x+1})=3\,log\,3}$

d) $\boldsymbol{log\,(x+3)-log\,(x-6)=1}$

a) $log\,\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=log\,\dfrac{13}{12}$

$12x^2+12=13x^2-13;\ 25=x^2$

$x_1=-5;\ x_2=5$

b) $ln\,(x^2-2x-3)=ln\,(3x-3)$

$x^2-2x-3=3x-3;\ x^2-5x=0$

$x=5\ \ (x=0\ \text{ no vale})$

c) $log\,(3^{(x+1)(x-1)})=log\,3^3$

$3^{(x+1)(x-1)}=3^3;\ (x+1)(x-1)=3$

$x=2\ \ (x=-2\ \text{ no vale})$

d) $log\,\dfrac{x+3}{x-6}=1$

$x+3=10x-60;\ 63=9x$

$x=7$

21 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\boldsymbol{log_5\,(x^2-2x+5)=1}$

b) $\boldsymbol{log\,\sqrt{3x+5}+log\,\sqrt{x}=1}$

c) $\boldsymbol{2\,(log\,x)^2+7\,log\,x-9=0}$

d) $\boldsymbol{\frac{1}{2}log_{11}\,(x+5)=1}$

e) $\boldsymbol{log\,(x^2+3x+36)=1+log\,(x+3)}$

f) $\boldsymbol{ln\,x+ln\,2x+ln\,4x=3}$

a) $log_5 (x^2 - 2x + 5) = log_5 5$

$x^2 - 2x + 5 = 5;\ x(x-2) = 0$

$x_1 = 0;\ x_2 = 2$

b) $\dfrac{log\,(x(3x+5))}{2} = 1;\ 3x^2 + 5x - 100 = 0$

$x = \dfrac{-5 \pm 35}{6} = \begin{cases} 5 \\ -40/6 \text{ (no vale)} \end{cases}$

$x = 5$

c) $log\ x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49+72}}{4} = \dfrac{-7 \pm 11}{4} = \begin{cases} 1;\ x_1 = 10 \\ -18/4 = -9/2;\ x_2 = 10^{-9/2} \end{cases}$

d) $log_{11} (x+5)^{1/2} = log_{11} 11$

$(x+5)^{1/2} = 11;\ (x+5) = 11^2$

$x = 116$

e) $log\ \dfrac{x^2 + 3x + 36}{x+3} = 1$

$x^2 + 3x + 36 = 10x + 30;\ x^2 - 7x + 6 = 0$

$x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \dfrac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 1;\ x_2 = 6$

f) $ln\ x + ln\ 2x + ln\ 4x = 3$

$ln\,(x \cdot 2x \cdot 4x) = 3$

$ln\,(8x^3) = 3 \ \rightarrow\ 8x^3 = e^3 \ \rightarrow\ x^3 = \dfrac{e^3}{8}$

$x = \sqrt[3]{\dfrac{e^3}{8}} = \dfrac{e}{2} \ \rightarrow\ x = \dfrac{e}{2}$

22 **Resuelve.**

a) $\boldsymbol{log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} + log_2\ x + log_4\ x^2 + log_8\ x^3 + log_{16}\ x^4 = 20}$

b) $\boldsymbol{log_2 (x - 16) = log_4 (x - 4)}$

c) $\boldsymbol{\dfrac{1}{log_2\ x} + \dfrac{1}{log_3\ x} + \dfrac{1}{log_6\ x} = 2}$

a) $log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} + log_2 x + log_4 x^2 + log_8 x^3 + log_{16} x^4 = 20$

Vamos a expresar todos los logaritmos en base 2 usando las propiedades de los logaritmos:

$$log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} = \frac{log \sqrt{x}}{log \sqrt{2}} = \frac{log x^{1/2}}{log 2^{1/2}} = \frac{\frac{1}{2}\ log x}{\frac{1}{2}\ log 2} = log_2 x$$

$$log_4 x^2 = \frac{log x^2}{log 2^2} = log_2 x$$

$$log_8 x^3 = \frac{log x^3}{log 2^3} = log_2 x$$

$$log_{16} x^4 = \frac{log x^4}{log 2^4} = log_2 x$$

Volviendo a la ecuación inicial y sustituyendo nos queda que:

$5\ log_2 x = 20 \ \rightarrow\ log_2 x = 4 \ \rightarrow\ 2^4 = x \ \rightarrow\ x = 16$

b) $log_2(x-16) = log_4(x-4)$

$log_2(x-16) = log_{2^2}(x-4) = \frac{1}{2}log_2(x-4) \to x-16 = (x-4)^{1/2} \to (x-16)^2 = x-4 \to$

$\to x^2 - 32x + 256 = x - 4 \to x^2 - 33x + 260 = 0 \to x = \frac{33 \pm \sqrt{1089 - 1040}}{2} = \frac{33 \pm 7}{2} \to$

$\to x_1 = 20;\ x_2 = 13$

c) Sabemos que $log_a b = \frac{1}{log_b a}$ y aplicando además la propiedad de suma de logaritmos con la misma base:

$\frac{1}{log_2 x} + \frac{1}{log_3 x} + \frac{1}{log_6 x} = log_x 2 + log_x 3 + log_x 6 = log_x(2 \cdot 3 \cdot 6) = log_x 36 = 2 \to x^2 = 36$

Por otra parte, sabemos que la base de un logaritmo es siempre positiva $\to x = 6$

Sistemas de ecuaciones

23 Resuelve.

a) $\begin{cases} x \cdot y = 15 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2y - x = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \sqrt{3(x+y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ h) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + 2 = x + 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

a) $x = \frac{5y}{3}$

$\frac{5y^2}{3} = 15;\ y^2 = 9 \begin{cases} y = 3 \to x = 5 \\ y = -3 \to x = -5 \end{cases}$

$x_1 = 5,\ y_1 = 3;\ x_2 = -5,\ y_2 = -3$

b) $\left.\begin{array}{l} 6y + 6x = 5xy \\ y = \frac{2-2x}{3} \end{array}\right\}$ $4 - 4x + 6x = \frac{5x(2-2x)}{3}$

$6x + 12 = 10x - 10x^2$

$10x^2 - 4x + 12 = 0$

$5x^2 - 2x + 6 = 0$

No tiene solución.

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \to (2y-7)^2 + y^2 = 10 \to \\ 2y - x = 7 \to x = 2y - 7 \end{cases}$

$\to 4y^2 - 28y + 49 + y^2 = 10 \to 5y^2 - 28y + 49 = 10 \to y = 3,\ y = \frac{13}{5}$

$y_1 = 3,\ x_1 = 1;\ y_2 = \frac{13}{5},\ x_2 = -\frac{9}{5}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \ \rightarrow \ \left(\dfrac{6}{y}\right)^2 - y^2 = 5 \ \rightarrow \ -\dfrac{y^4 - 36}{y^2} - 5 = 0 \ \rightarrow \ -\dfrac{(y^4 + 5y^2 - 36)}{y^2} = 0 \ \rightarrow \\ xy = 6 \ \rightarrow \ x = \dfrac{6}{y} \end{cases}$

$\rightarrow \ y^4 + 5y^2 - 36 = 0 \ \rightarrow \ y = 2, \ y = -2$

$y_1 = 2, \ x_1 = 3; \ y_2 = -2, \ x_2 = -3$

e) $x = (5 - y)^2$

$y^2 - 2y + 1 = 25 + y^2 - 10y$

$8y = 24; \ y = 3; \ x = 4$

$x = 4; \ y = 3$

f) $4x + 4 = y^2 + 1 + 2y; \ x = \dfrac{y^2 + 2y - 3}{4}$

$x = \dfrac{1 + 3y}{2} = \dfrac{2 + 6y}{4}$

$y^2 + 2y - 3 = 2 + 6y$

$y^2 - 4y - 5 = 0$

$y = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \ \rightarrow \ x = 8 \\ -1 \ \rightarrow \ x = -1 \end{cases}$

$x_1 = -1, \ y_1 = -1; \ x_2 = 8, \ y_2 = 5$

g) $y = 2x - 6$

$\sqrt{3(3x - 6)} = 12 - x$

$9x - 18 = 144 + x^2 - 24x$

$0 = x^2 - 33x + 162$

$x = \dfrac{33 \pm 21}{2} = \begin{cases} 27 \ \rightarrow \ y = 48 \ \text{(no vale)} \\ 6 \ \rightarrow \ y = 6 \end{cases}$

$x = 6, \ y = 6 \ \ (x = 27, \ y = 48 \ \text{ no vale})$

h) $y = 2x - 5$

$\sqrt{3x - 5} = x - 1$

$3x - 5 = x^2 + 1 - 2x$

$0 = x^2 - 5x + 6$

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \ \rightarrow \ y = 1 \\ 2 \ \rightarrow \ y = -1 \end{cases}$

$x_1 = 2, \ y_1 = -1; \ x_2 = 3, \ y_2 = 1$

24 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x + 2^y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} e^x - e^{y+1} = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 10^x \cdot 10^{y^2 - 1} = 0,1 \\ \dfrac{2^{2x}}{2^{y-1}} = 0,25 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x + 2y = 12 \end{cases}$

$y = 1 + x \to 2^x + 2^{1+x} = 12 \to 2^x + 2 \cdot 2^x = 12 \to 3 \cdot 2^x = 12 \to$

$\to 2^x = 4 \to x = 2 \to y = 1 + 2 = 3$

$x = 2,\ y = 3$

b) $\begin{cases} e^x \cdot e^{y+1} = 1 \to e^{x+y+1} = e^0 \to x = -1 - y \\ x^2 + y^2 = 1 \to (-1-y)^2 + y^2 = 1 \to 2y^2 + 2y = 0 \to y(y+1) = 0 \to y = 0;\ y = -1 \end{cases}$

$x_1 = -1,\ y_1 = 0;\ x_2 = 0,\ y_2 = -1$

c) $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases} \to \begin{cases} 5^{x+y} = 5^0 \\ 5^{x-y} = 5^2 \end{cases} \to \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

$x = 1,\ y = -1$

d) $\begin{cases} 10^x \cdot 10^{y^2-1} = 0,1 \\ \dfrac{2^{2x}}{2^{y-1}} = 0,25 \end{cases} \to \begin{cases} 10^{x+y^2-1} = 10^{-1} \\ 2^{2x-y+1} = 2^{-2} \end{cases} \to \begin{cases} x + y^2 - 1 = -1 \\ 2x - y + 1 = -2 \end{cases} \to \begin{cases} x + y^2 = 0 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} x = -y^2 \\ -2y^2 - y + 3 = 0 \to y = 1,\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$x_1 = -1,\ y_1 = 1;\ x_2 = -\dfrac{9}{4},\ y_2 = -\dfrac{3}{2}$

Página 102

25 Resuelve.

a) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \\ \log_2 \dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log (x^2 y) = 2 \\ \log x = 6 + \log y^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 25 \\ \log y = \log x - 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \ln x - \ln y = 2 \\ \ln x + \ln y = 4 \end{cases}$

a) $2\log x = 2$

$x = 10;\ y = 100$

b) $\log_2 x + 3\log_2 y = 5$

$2\log_2 x - \log_2 y = 3$

$$\begin{array}{rl} \log_2 x + 3\log_2 y &= 5 \\ 6\log_2 x - 3\log_2 y &= 9 \\ \hline 7\log_2 x \qquad &= 14 \end{array}$$

$x = 4,\ y = 2$

c) $2\log x + \log y = 2$

$\log x - 2\log y = 6$

$$\begin{array}{rl} 4\log x + 2\log y &= 4 \\ \log x - 2\log y &= 6 \\ \hline 5\log x \qquad &= 10 \to \log x = 2 \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} x = 100 \\ y = \dfrac{1}{100} \end{array}\right\}$

d) $log\,\frac{x}{y}=1;\ \frac{x}{y}=10;\ x=10y$

$100y^2-y^2=11;\ 99y^2=11;\ y^2=\frac{1}{9}\ \to\ y=\pm\frac{1}{3}$

$x=\frac{10}{3};\ y=\frac{1}{3}$

$\left(y=-\frac{1}{3}\ \text{no vale}\right)$

e) $\left.\begin{array}{l} x=25+y \\ log\,\frac{y}{x}=-1 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} y=0,1\,x \\ 0,9x=25 \end{array}$

$x=\frac{250}{9};\ y=\frac{25}{9}$

f) $\left.\begin{array}{l} ln\,x-ln\,y=2 \\ ln\,x+ln\,y=4 \end{array}\right\}$ Sumando las dos ecuaciones, queda:
$2\,ln\,x=6\ \to\ ln\,x=3\ \to\ x=e^3$

Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª, queda:

$2ln\,y=2\ \to\ ln\,y=1\ \to\ y=e$

$x=e^3;\ y=e$

Método de Gauss

26 Resuelve.

a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=2 \\ x=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 3y+z=1 \\ 4x-z=7 \end{cases}$

a) Como ya sabemos que $x=1$ sustituimos en la segunda ecuación y tenemos que $y=-1$. Ya podemos sustituir en la primera ecuación x e y para encontrar que $z=3$.

b) $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 3y+z=1 \\ 4x-z=7 \end{cases}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(1.^a) \end{array}$ $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 3y+z=1 \\ 2y-z=9 \end{cases}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+(2.^a) \end{array}$ $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 3y+z=1 \\ 5y=10 \end{cases}$

Por tanto: $y=2,\ z=-5,\ x=\frac{1}{2}$

27 Resuelve por el método de Gauss.

a) $\begin{cases} x-y-z=-10 \\ x+2y+z=11 \\ 2x-y+z=8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x+6y-2z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x-y-z=1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+y+z=18 \\ x-z=6 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x-y-z=-10 \\ x+2y+z=11 \\ 2x-y+z=8 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)+(1.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} x-y-z=-10 \\ 2x+y=1 \\ 3x-2y=-2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+2\cdot(2.^a) \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} x-y-z=-10 \\ 2x+y=1 \\ 7x=0 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \\ z=-1+10=9 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \\ z=9 \end{array}$

b) $$\left.\begin{array}{l} 2x-3y+z=0\\ 3x+6y-2z=0\\ 4x+y-z=0\end{array}\right\}\;\begin{array}{l}(1.^{a})\\(2.^{a})+2\cdot(1.^{a})\\(3.^{a})+(1.^{a})\end{array}\;\Rightarrow\;\left.\begin{array}{l}2x-3y+z=0\\7x=0\\6x-2y=0\end{array}\right\}\;\begin{array}{l}x=0\\y=0\\z=0\end{array}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3\\ 2x-y+z=2\\ x-y+z=1\end{array}\right\}\;\begin{array}{l}(1.^{a})\\(2.^{a})+(1.^{a})\\(3.^{a})+(1.^{a})\end{array}\;\Rightarrow\;\left.\begin{array}{l}x+y+z=3\\3x+2z=5\\2x+2z=4\end{array}\right\}\;\begin{array}{l}(1.^{a})\\(2.^{a})\\(3.^{a})-(2.^{a})\end{array}\;\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3\\ 3x+2z=5\\ -x=-1\end{array}\right\}\;\left.\begin{array}{l}x=1\\z=\dfrac{5-3x}{2}=1\\y=3-x-z=1\end{array}\right\}\;\begin{array}{l}x=1\\y=1\\z=1\end{array}$$

d) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=18\\ x-z=6\\ x-2y+z=0\end{array}\right\}\;\begin{array}{l}(1.^{a})\\(2.^{a})\\(3.^{a})+2\cdot(1.^{a})\end{array}\;\Rightarrow\;\left.\begin{array}{l}x+y+z=18\\x-z=6\\3x+3z=36\end{array}\right\}\;\begin{array}{l}(1.^{a})\\(2.^{a})\\(3.^{a}):3\end{array}\;\Rightarrow\;\left.\begin{array}{l}x+y+z=18\\x-z=6\\x+z=12\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l}(1.^{a})\\(2.^{a})\\(3.^{a})+(2.^{a})\end{array}\;\Rightarrow\;\left.\begin{array}{l}x+y+z=18\\x-z=6\\2x=18\end{array}\right\}\;\left.\begin{array}{l}x=9\\z=x-6=3\\y=18-x-z=6\end{array}\right\}\;\begin{array}{l}x=9\\y=6\\z=3\end{array}$$

28 **Resuelve.**

a) $$\begin{cases}3x+2y+z-3=0\\ x+y=z-5\\ x=z-2y-3\end{cases}$$

b) $$\begin{cases}7x-3y+z=-11\\ x-y+1=z\\ 2x+2y=8+z\end{cases}$$

c) $$\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=z-6\\ 2x-y-\dfrac{z}{5}=0\\ \dfrac{-3x}{4}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{2}-10\end{cases}$$

d) $$\begin{cases}\dfrac{2(x-1)}{5}+y=\dfrac{z}{6}-4\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{3}=8\\ x+2y+\dfrac{z}{4}=1\end{cases}$$

a) $$\left.\begin{array}{l}3x+2y+z-3=0\\x+y=z-5\\x=z-2y-3\end{array}\right\}\;\to\;\left.\begin{array}{l}3x+2y+z=3\\x+y-z=-5\\x+2y-z=-3\end{array}\right\}\;\begin{array}{l}(2.^{a})\\(1.^{a})\\(3.^{a})\end{array}\;\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y-z=-5\\3x+2y+z=3\\x+2y-z=-3\end{array}\right\}\;\begin{array}{l}(1.^{a})\\(2.^{a})-3\cdot(1.^{a})\\(3.^{a})-(1.^{a})\end{array}\;\Rightarrow\;\left.\begin{array}{l}x+y-z=-5\\-y+4z=18\\y=2\end{array}\right\}\;\begin{array}{l}x=-2\\y=2\\z=5\end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 7x-3y+z=-11 \\ x-y+1=z \\ 2x+2y=8+z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{rcl} 7x-3y+z&=&-11\\ x-y-z&=&-1\\ 2x+2y-z&=&8\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{(2.ª)}\\ \text{(1.ª)}\\ \text{(3.ª)}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x-y-z&=&-1\\ 7x-3y+z&=&-11\\ 2x+2y-z&=&8\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{(1.ª)}\\ \text{(2.ª)}-7\cdot\text{(1.ª)}\\ \text{(3.ª)}-2\cdot\text{(1.ª)}\end{array} \quad \left.\begin{array}{rcl} x-y-z&=&-1\\ 4y+8z&=&-4\\ 4y+z&=&10\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{(1.ª)}\\ \text{(2.ª)}\\ \text{(3.ª)}-\text{(2.ª)}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x-y-z&=&-1\\ 4y+8z&=&4\\ -7z&=&14\end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0\\ y=3\\ z=-2\end{array}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=z-6\\ 2x-y-\dfrac{z}{5}=0\\ \dfrac{-3x}{4}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{2}-10\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{rcl} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-z&=&-6\\ 2x-y-\dfrac{z}{5}&=&0\\ \dfrac{-3x}{4}-\dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{2}&=&-10\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{rcl} 3x+2y-6z&=&-36\\ 10x-5y-z&=&0\\ -9x-4y-6z&=&-120\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{(1.ª)}\\ \text{(2.ª)}\\ \text{(3.ª)}-\text{(1.ª)}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x+2y-6z&=&-36\\ 10x-5y-z&=&0\\ -12x-6y&=&-84\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{(1.ª)}-6\cdot\text{(2.ª)}\\ \text{(2.ª)}\\ 1/6\cdot\text{(3.ª)}\end{array} \quad \left.\begin{array}{rcl} -57x+32y&=&-36\\ 10x-5y-z&=&0\\ -2x-y&=&-14\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{(1.ª)}+32\cdot\text{(3.ª)}\\ \text{(2.ª)}\\ \text{(3.ª)}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -121x&=&-484\\ 10x-5y-z&=&0\\ -2x-y&=&-14\end{array}\right\} \begin{array}{l} x=4\\ y=6\\ z=10\end{array}$$

d) $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2(x-1)}{5}+y=\dfrac{z}{6}-4\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{3}=8\\ x+2y+\dfrac{z}{4}=1\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} \dfrac{2(x-1)}{5}+y-\dfrac{z}{6}=-4\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{3}=8\\ x+2y+\dfrac{z}{4}=1\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{rcl} 12x+30y-5z-12&=&-120\\ 6x-3y+4z&=&96\\ 4x+8y+z&=&4\end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{rcl} 12x+30y-5z&=&-108\\ 6x-3y+4z&=&96\\ 4x+8y+z&=&4\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{(1.ª)}+5\cdot\text{(3.ª)}\\ \text{(2.ª)}-4\cdot\text{(3.ª)}\\ \text{(3.ª)}\end{array} \quad \left.\begin{array}{rcl} 32x+70y&=&-88\\ -10x-35y&=&80\\ 4x+8y+z&=&4\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{(1.ª)}+2\cdot\text{(2.ª)}\\ \text{(2.ª)}\\ \text{(3.ª)}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 12x&=&72\\ -10x-35y&=&80\\ 4x+8y+z&=&4\end{array}\right\} \begin{array}{l} x=6\\ y=-4\\ z=12\end{array}$$

29 **Resuelve aplicando el método de Gauss.**

a) $\begin{cases} x-y=1\\ 2x+6y-5z=-4\\ x+y-z=0\end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+2y+z=3\\ x-2y+5z=5\\ 5x-2y+17z=1\end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+3z=2\\ 2x+3y+4z=1\\ -2x-y-8z=-7\end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x-y-z=2\\ 3x-2y-2z=2\\ -5x+3y+5z=-1\end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y+z=3\\ -x+2y+z=5\\ x+4y+3z=1\end{cases}$ **f)** $\begin{cases} -2x+y+z=1\\ 3x+2y-z=0\\ -x+4y+z=2\end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y \qquad = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 5 \cdot (3.^a) \\ (3.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{r} x - y \qquad = 1 \\ -3x + y \qquad = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) \end{array}$

$\left.\begin{array}{r} x - y \qquad = 1 \\ -2y \qquad = -1 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 2 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ 2x \qquad + 6z = 8 \\ 6x \qquad + 18z = 4 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : 2 \\ (3.^a) : 6 \end{array}$

$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ x \qquad + 3z = 4 \\ x \qquad + 3z = 4/6 \end{array}\right\}$ Las ecuaciones 2.ª y 3.ª dicen cosas contradictorias.

El sistema es incompatible, no tiene solución.

c) $\left.\begin{array}{r} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{r} x + y + 3z = 2 \\ -x \qquad - 5z = -5 \\ -x \qquad - 5z = -5 \end{array}\right\}$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en función de z:

$\left.\begin{array}{l} x + y = 2 - 3z \\ -x = -5 + 5z \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \to (5 - 5z) + y = 2 - 3z \to y = 2z - 3 \\ \to x = 5 - 5z \end{array}$

$x = 5 - 5z, \ y = 2z - 3, \ z = z$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + 5 \ (1.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{r} 2x - y - z = 2 \\ -x \qquad = -2 \\ 5x - 2y \qquad = 9 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = \frac{5x - 9}{2} = \frac{1}{2} \\ z = 2x - y - 2 = \frac{3}{2} \end{array}\right\}$

$x = 2, \ y = \frac{1}{2}, \ z = \frac{3}{2}$

e) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 3y + 2z = 8 \\ 3y + 2z = -2 \end{array}\right\}$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª obtenidas dicen cosas contradictorias. Por tanto, el sistema es incompatible.

f) $\left.\begin{array}{r} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{r} -2x + y + z = 1 \\ x + 3y \qquad = 1 \\ x + 3y \qquad = 1 \end{array}\right\}$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en función del parámetro y:

$\left.\begin{array}{l} -2x + z = 1 - y \\ x = 1 - 3y \end{array}\right\}$ $\to -2(1 - 3y) + z = 1 - y \to z = 3 - 7y$

$x = 1 - 3y, \ z = 3 - 7y$

Inecuaciones. Sistemas de inecuaciones

30 **Resuelve estas inecuaciones:**

a) $5(2 + x) > -5x$

b) $\dfrac{x-1}{2} > x - 1$

c) $x^2 + 5x < 0$

d) $9x^2 - 4 > 0$

e) $x^2 + 6x + 8 \geq 0$

f) $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

a) $10 + 5x > -5x;\ \ 10x > -10;\ \ x > -1$

$(-1, +\infty)$

b) $x - 1 > 2x - 2;\ \ 1 > x$

$(-\infty, 1)$

c) $x(x + 5) < 0$

$(-5, 0)$

d) $\left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$

e) $\dfrac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \dfrac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases}$

$(-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$

f) $\dfrac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \dfrac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

$[-3, 5]$

31 **Resuelve.**

a) $(x + 1)x^2(x - 3) > 0$

b) $x(x^2 + 3) < 0$

c) $\dfrac{x^2}{x+4} < 0$

d) $\dfrac{x-3}{x+2} < 0$

a) $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x+1>0 \\ x-3>0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x>-1 \\ x>3 \end{array}\Big\} \ (3, +\infty) \\ \left.\begin{array}{l} x+1<0 \\ x-3<0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x<-1 \\ x<3 \end{array}\Big\} \ (-\infty, -1) \end{array}\right\} (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

b) $(-\infty, 0)$

c)

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 0)$	$(0, +\infty)$
x^2	+	+	+
$x + 4$	–	+	+
$\dfrac{x^2}{x+4}$	–	+	+

$(-\infty, -4) \cup (-4, 0)$

d)

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, +\infty)$
$x - 3$	–	–	+
$x + 2$	–	+	+
$\dfrac{x-3}{x+2}$	+	–	+

$(-2, 3)$

32 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x < 1 \\ x > -4 \end{array}\right\} (-4, 1)$

b) $\left.\begin{array}{l} x > -\dfrac{5}{3} \\ x > 4 \end{array}\right\} (4, +\infty)$

c) $\left.\begin{array}{l} x > 17 \\ x > \dfrac{19}{5} \end{array}\right\} (17, +\infty)$

d) $\left.\begin{array}{l} x > \dfrac{3}{2} \\ x < -\dfrac{1}{5} \end{array}\right\}$ No tiene solución.

33 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} x^2 + 2x > 15 \\ 3 - 2x < 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - x^2 \ge 4 \\ 5x - 1 < 4x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 \le 4 \\ x^2 - 5x + 4 \le 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \ge 0 \\ -x^2 + 11x - 24 \ge 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 + 2x > 15 & \to \textit{Soluciones: } (-\infty, -5) \cup (3, \infty) \\ 3 - 2x < 7 & \to \textit{Soluciones: } (-2, \infty) \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $((-\infty, -5) \cup (3, \infty)) \cap (-2, \infty) = (3, \infty)$

b) $\begin{cases} 5x - x^2 \ge 4 & \to \textit{Soluciones: } [1, 4] \\ 5x - 1 < 4x + 2 & \to \textit{Soluciones: } (-\infty, 3) \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $[1, 4] \cap (-\infty\ 3) = [1, 3)$

c) $\begin{cases} x^2 \le 4 & \to \textit{Soluciones: } [-2, 2] \\ x^2 - 5x + 4 \le 0 & \to \textit{Soluciones: } [1, 4] \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $[-2, 2] \cap [1, 4] = [1, 2]$

d) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \ge 0 & \to \textit{Soluciones: } (-\infty, -1] \cup [6, \infty) \\ -x^2 + 11x - 24 \ge 0 & \to \textit{Soluciones: } [3, 8] \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $((-\infty, -1] \cup [6, \infty)) \cap [3, 8] = [6, 8]$

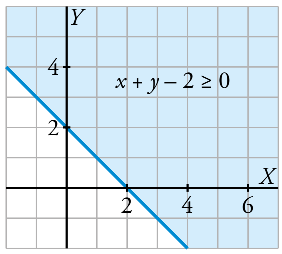
34 **Resuelve gráficamente.**

a) $x + y - 2 \ge 0$ **b)** $2x - 3y \le 6$ **c)** $\dfrac{x - 3y}{2} \le 3$ **d)** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} \ge -1$

a) Dibujamos la recta $r: x + y - 2 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad $0 + 0 - 2 \ge 0$.

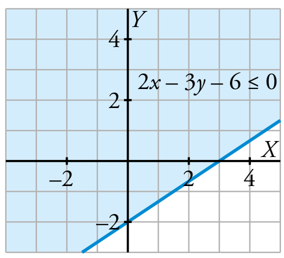
La solución es el semiplano que no contiene a O.



b) Dibujamos la recta $r: 2x - 3y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 - 6 \le 0$.

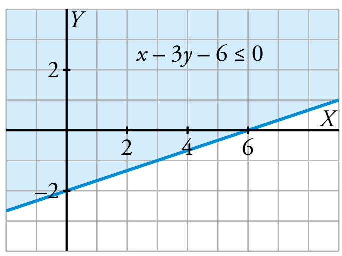
La solución es el semiplano que contiene a O.



c) $\dfrac{x - 3y}{2} \le 3 \to x - 3y - 6 \le 0$. Dibujamos la recta $r: x - 3y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 - 6 \le 0$.

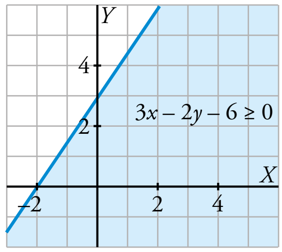
La solución es el semiplano que contiene a O.



d) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} \geq -1 \;\rightarrow\; 3x - 2y + 6 \geq 0$. Dibujamos la recta $r: 3x - 2y + 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 + 6 \geq 0$.

La solución es el semiplano que contiene a O.

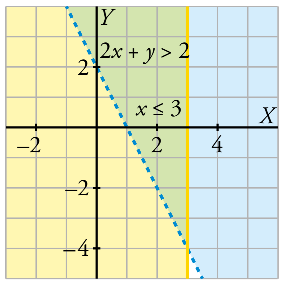


35 **Resuelve gráficamente.**

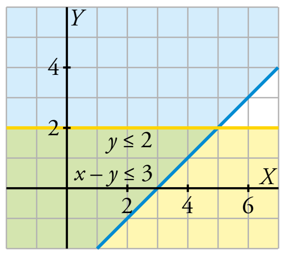
a) $\begin{cases} 2x + y > 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y \leq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - 2y \leq 5 \\ x + y \geq 8 \end{cases}$

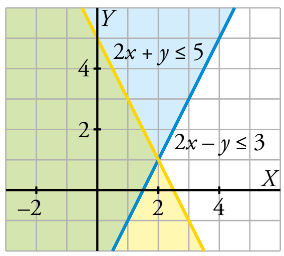
a) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La recta $2x + y = 2$ no pertenece al recinto solución.



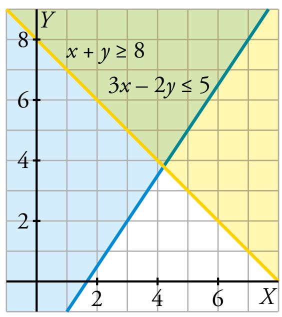
b) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



c) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



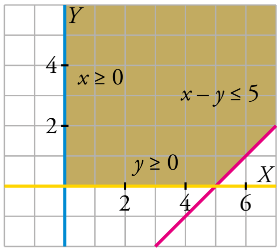
d) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



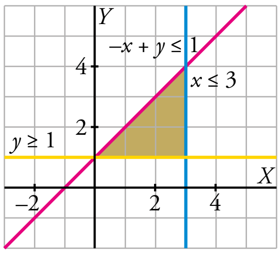
36 **Representa, en cada caso, los puntos del plano que verifican las condiciones dadas.**

a) $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x - y \le 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y \ge 1 \\ x \le 3 \\ -x + y \le 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y < 2 \\ 2x - y > 1 \\ y > 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y \le 10 \\ 2x - y \ge 0 \\ -1 \le x \le 3 \end{cases}$

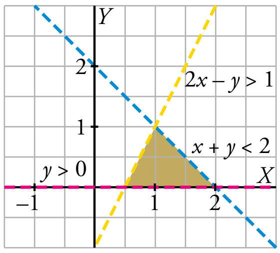
a) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos.



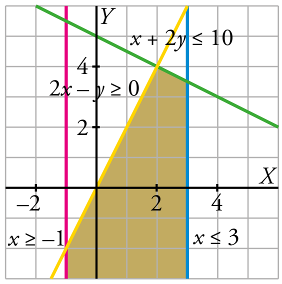
b) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es el triángulo intersección de los tres semiplanos.



c) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es el triángulo intersección de los tres semiplanos (los segmentos de los lados del triángulo no pertenecen a la solución).



d) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los cuatro semiplanos.



Página 103

Para practicar

37 **Un inversor, que tiene 28 000 €, coloca parte de su capital en un banco al 8 % y el resto en otro banco al 6 %. Si la primera parte le produce anualmente 200 € más que la segunda, ¿cuánto colocó en cada banco?**

x al 8 % $\xrightarrow{\text{1 año}}$ $0{,}08x$

$(28\,000 - x)$ al 6 % $\xrightarrow{\text{1 año}}$ $0{,}06\,(28\,000 - x)$

$0{,}08x = 0{,}06(28\,000 - x) + 200;\;\; 0{,}08x = 1\,680 - 0{,}06x + 200 \;\rightarrow\; x = 13\,428{,}57$ €

Colocó 13 428,57 € al 8 % y 14 571,43 € al 6 %.

38 **Contratamos una hipoteca en enero de 2019 con revisión semestral del tipo de interés. En julio nos sube la cuota un 4 %, en la siguiente revisión baja un 1 % respecto a julio. Si en el mes de enero de 2020 tenemos que pagar 19,24 € mensuales más que en el mismo mes del año anterior, ¿cuál era la cuota inicial?**

Usamos la fórmula $C_f = C_i \cdot \textit{índice variación}$ con $C_f =$ Cuota final, $C_i =$ Cuota inicial

El índice de variación en el primer semestre es $1 + \frac{r}{2}$ (donde r es el tanto por uno del interés).

$i.v. = 1 + 0{,}04 = 1{,}004$

El índice de variación en el segundo semestre es $1 - \frac{r}{2}$ (donde r es el tanto por uno del interés).

$i.v. = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

El índice de variación total es *índice de variación* $= 1{,}04 \cdot 0{,}99 = 1{,}0296$

$C_f = C_i \cdot \textit{índice variación} \ \rightarrow\ x + 19{,}24 = x \cdot 1{,}0296 \ \rightarrow\ x = 650$ € era la cuota inicial.

39 **[La resolución del problema permite trabajar esta estrategia].**

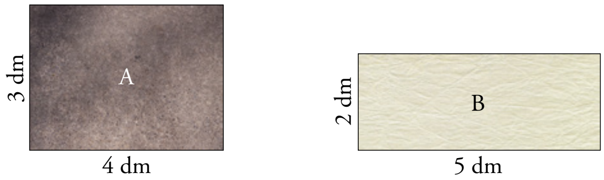
El número de visitantes a cierta exposición durante el mes de febrero se incrementó en un 12 % respecto al mes de enero. Sin embargo, en marzo sufrió un descenso del 12 % respecto a febrero. Si el número de visitantes de enero superó en 36 personas al de marzo, ¿cuántas personas vieron la exposición en enero?

Enero $\xrightarrow{+12\,\%}$ Febrero $\xrightarrow{-12\,\%}$ Marzo

x $1{,}12\,x$ $0{,}88 \cdot 1{,}12x = 0{,}9856x$

$x = 0{,}9856x + 36 \ \Rightarrow\ x = 2\,500$ personas.

40 **Para cubrir el suelo de una habitación, un solador dispone de dos tipos de baldosas:**



Eligiendo el tipo A, se necesitarían 40 baldosas menos que si se eligiera el tipo B. ¿Cuál es la superficie de la habitación?

$$\left.\begin{array}{l}\text{n.º baldosas A} \rightarrow x \\ \text{n.º baldosas B} \rightarrow x + 40\end{array}\right\} \text{ Superficie: } 12x = 10(x + 40)$$

$12x = 10x + 400$

$2x = 400$

$x = 200$ baldosas

$200 \cdot 12 = 2\,400 \text{ dm}^2 = 24 \text{ m}^2$

41 **En un número de dos cifras, las decenas son el triple de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras, se obtiene otro número 54 unidades menor. Calcula el número inicial.**

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3x}{D} \cdot \dfrac{x}{U} \rightarrow 30x + x = 31x \\ \dfrac{x}{D} \cdot \dfrac{3x}{U} \rightarrow 10x + 3x = 13x\end{array}\right\} \begin{array}{l}31x = 13x + 54 \\ 18x = 54 \\ x = 3\end{array}$$

El número es el 93.

42 **Dos grifos llenan un depósito de 1500 litros en una hora y doce minutos. Manando por separado, el primero tardaría una hora más que el segundo. ¿Cuánto tardaría en llenar el depósito cada grifo por separado?**

Entre los dos $\rightarrow$ 1 500 litros en 1,2 horas.

$$\left.\begin{array}{l} 1.^{\circ} \rightarrow t+1 \\ 2.^{\circ} \rightarrow t \end{array}\right\} \frac{1}{t+1}+\frac{1}{t}=\frac{1}{1,2} \text{ (en 1 hora)}$$

$$\frac{1,2(t+t+1)}{1,2t(t+1)}=\frac{t(t+1)}{1,2t(t+1)}$$

$2,4t + 1,2 = t^2 + t$

$t^2 - 1,4t - 1,2 = 0$

$$t=\frac{1,4 \pm 2,6}{2}=\begin{cases} 2 \\ -0,6 \text{ ¡Imposible!} \end{cases}$$

El primero tardaría 3 horas, y el segundo, 2 horas.

43 ODS Meta 12.2. **[La resolución del problema permite iniciar un debate en el aula sobre el aprovechamiento de los recursos naturales, en concreto de los recursos hídricos].**

Una piscina tarda 5 horas en llenarse utilizando su toma de agua habitual, y 20 horas si utilizamos una manguera. ¿Qué tiempo será necesario emplear para su llenado si usamos ambos métodos de forma simultánea?

En una hora, la toma de agua habitual llenaría $\frac{1}{5}$ de la piscina. En una hora la manguera llenaría $\frac{1}{20}$ de la piscina.

Entre los dos, en una hora llenarían $\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4}$ de la pisicina.

Luego necesitan 4 horas para llenar la piscina.

44 **Una bodega vende su vino de montaña a 18 €/L y su vino del valle a 12 €/L. ¿Cuántos litros de cada uno debe echar a una barrica para conseguir 60 litros de la mezcla a 14,4 €/L?**

Llamaremos x al n.º de litros de vino de montaña que vamos a emplear, e y al n.º de litros de vino de valle. Del enunciado deducimos:

$$\begin{cases} x+y=60 \ (*) \\ 14,4 \cdot 60=18x+12y \ (**) \end{cases}$$

Simplificando (**): $144 = 3x + 2y$

Simplificando (*): $x = 60 - y$

Por tanto: $144=3(60-y)+2y=180-y \rightarrow y=36 \rightarrow x=24$

45 **Calcula el lado y la apotema de un hexágono regular de 40 cm² de área.**

Un hexágono, H, regular está formado por 6 triángulos, T, cuyos lados son iguales, por lo que podemos usar sus áreas para calcular el área del hexágono.

$A_H=6 \cdot A_T=6\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$; donde la base es un lado del triángulo al que llamaremos a y h a su altura, la apotema que buscamos.

$$40=6 \cdot \frac{a \cdot \text{h}}{2} \rightarrow 3a\text{h}=40 \rightarrow \text{h}=\frac{40}{3a} \ (*)$$

Además podemos aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que nos queda de dividir en dos el triángulo regular, puesto que sabemos que tiene un ángulo recto: $a^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\text{h}^2 \rightarrow \frac{3}{4}a^2=\text{h}^2$ (**)

Sustituyendo (*) en (**): $\frac{3}{4}a^2 = \left(\frac{40}{3a}\right)^2 \to a^4 = \frac{40^2 \cdot 4}{3^2 \cdot 3} = \to a^2 = \frac{80}{3\sqrt{3}} \to a = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3^3}}$

Y volviendo a (*): $\text{h} = \frac{40}{3a} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}}$

46 **El cateto menor de un triángulo rectángulo mide 18 cm. Si su área es 216 cm^2, ¿cuánto miden la hipotenusa y el cateto mayor?**

Llamaremos h a la hipotenusa y a al cateto mayor.

Área = 216 cm^2, por tanto:

$$\begin{cases} \text{h}^2 = 18^2 + a^2 \\ 216 = \frac{a \cdot 18}{2} = 9a \to a = 24 \end{cases}$$

$\text{h}^2 = 18^2 + 24^2 = 900 \to \text{h} = \pm 30$

La hipotenusa mide 30 cm, el cateto mayor mide 24 cm.

47 **Marcos necesita 24 dm^2 de tela para construir una cometa con forma de rombo de medio metro de lado. Si cada metro de listón cuesta 12 €, ¿cuánto pagará por las dos varillas que necesita la estructura de la cometa?**

Dividimos el rombo, *R*, en 4 triángulos, *T*, iguales y rectángulos de hipotenusa h, cateto corto a y cateto largo b.

Sabemos h = 0,5 m = 5 dm.

$A_R = 24 = 4A_T = 4\frac{a \cdot b}{2} = 2ab \to 12 = ab \to a = \frac{12}{b}$ (*)

Por el teorema de Pitágoras: $5^2 = a^2 + b^2$ (**)

Sustituyendo (*) en (**):

$25 = \frac{12^2}{b^2} + b^2 \to 144 + b^4 = 25b^2 \to b^4 - 25b^2 + 144 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, usando $y = b^2$:

$y^2 - 25y + 144 = 0 \to y = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} \to y_1 = 16,\ y_2 = 9$

$y_1 = 16 \to b = \pm 4$ y como no tiene sentido que el lado de un triángulo sea negativo, $b = 4$.

$y_2 = 9 \to b = \pm 3$ y como no tiene sentido que el lado de un triángulo sea negativo, $b = 3$.

Si $b = 4 \to a = 3$

Si $b = 3 \to a = 4$

Por lo tanto necesita una varilla de 6 dm y otra de 8 dm (a y b son la mitad de cada varilla) por lo que si cada metro vale 12 € tendremos que 1 dm = 1,2 € y tendrá que pagar 14 · 1,2 = 16,8 €.

48 **Un granjero espera obtener 36 € por la venta de huevos. En el camino al mercado se le rompen cuatro docenas. Para obtener el mismo beneficio, aumenta en 0,45 € el precio de la docena. ¿Cuántas docenas tenía al principio?**

Tenía x docenas $\rightarrow \dfrac{36}{x}$ €/docena

Le quedan $x-4$ docenas $\rightarrow \left(\dfrac{36}{x}+0,45\right)$ €/docena

$\left(\dfrac{36}{x}+0,45\right)(x-4)=36$

$(36 + 0,45x)(x - 4) = 36x$

$36x - 144 + 0,45x^2 - 1,8x = 36x$

$0,45x^2 - 1,8x - 144 = 0$

$x = 20$ $(x = -16$ no vale$)$ $\Rightarrow$ Tenía 20 docenas.

49 **Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 kg por defectuosas y vende el resto, aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra, por 147 €. ¿Cuántos kilogramos compró?**

Compró x kg $\rightarrow \dfrac{125}{x}$ €/kg

Vende $(x-20)$ kg $\rightarrow \left(\dfrac{125}{x}+0,40\right)$ €/kg

$\left(\dfrac{125}{x}+0,40\right)(x-20) = 147$

$(125 + 0,40x)(x - 20) = 147x$

$125x - 2\,500 + 0,40x^2 - 8x = 147x$

$0,40x^2 - 30x - 2\,500 = 0$

$x = 125$ $(x = -50$ no vale$)$

Compró 125 kg.

50 ¿Qué te hace decir eso? **[La resolución del problema permite trabajar esta estrategia].**

Un almacén tiene contenedores de reciclado para abastecer a las dos entidades para las que trabaja durante 6 meses. Sabiendo que, si suministrara a una sola de las dos, a la primera la podría servir durante 5 meses más que a la segunda, ¿durante cuánto tiempo podría proveer a cada una de ellas si fuesen clientes únicos?

Llamamos t al n.º de meses que puede servir a la entidad A. El n.º de meses que puede servir a la entidad B es $t + 5$.

La proporción de contenedores que sirve al mes a la entidad A es $\dfrac{1}{t}$.

La proporción de contenedores que sirve al mes a la entidad B es $\dfrac{1}{t+5}$.

La proporción de contenedores servidos al mes a las dos entidades es: $\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t+5}=\dfrac{2t+5}{t(t+5)}$

Esta cantidad es la sexta parte del total puesto que puede servir a las dos entidades durante 6 meses.

$6\left(\dfrac{2t+5}{t(t+5)}\right)=1 \rightarrow$ *Soluciones:* $t = 10$, $t = -3$ que no es válida.

Puede servir solo a la primera entidad durante 10 meses.

Puede servir solo a la segunda entidad durante 15 meses.

51 Una empresa fabrica dos tipos de latas de refrescos de 33 cL. El primer tipo tiene una altura de 12 cm, y el segundo, de 15 cm. ¿Cuál tiene mayor coste de producción?

Las fórmulas del volumen y la superficie total de una lata son:

$V = \pi r^2 h;\ \ S = \pi r^2 + 2\pi r h$

A partir del volumen y la altura, calculamos el radio de la base.

Lata A:

$$h = 12 \text{ cm} \rightarrow 33 = \pi r^2 \cdot 12 \rightarrow r^2 = \frac{33}{12\pi} \rightarrow r = \sqrt{\frac{33}{12\pi}}$$

$$S_A = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi \frac{33}{12\pi} + 2\pi \sqrt{\frac{33}{12\pi}} \cdot 12 = 73{,}293$$

Lata B:

$$h = 15 \text{ cm} \rightarrow 33 = \pi r^2 \cdot 15 \rightarrow r^2 = \frac{33}{15\pi} \rightarrow r = \sqrt{\frac{33}{15\pi}}$$

$$S_B = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi \frac{33}{15\pi} + 2\pi \sqrt{\frac{33}{15\pi}} \cdot 15 = 81{,}069$$

Tiene mayor coste de producción la lata de altura 15 cm.

52 De dos triángulos rectángulos se sabe que: la suma de sus hipotenusas es 18, sus catetos menores son 3 y 5, respectivamente, y sus catetos mayores están en relación 1/3. Determina dichos triángulos.

Llamamos h_1 y h_2 a las hipotenusas de los triángulos y C_1 y C_2 a los catetos desconocidos del primer y segundo triángulo, respectivamente.

Expresamos las hipotenusas en función de los catetos $h_1 = \sqrt{3^2 + C_1^2};\ h_2 = \sqrt{5^2 + C_2^2}$

Por otra parte: $C_2 = 3C_1$

$h_1 + h_2 = 18 \rightarrow \sqrt{3^2 + C_1^2} + \sqrt{5^2 + C_2^2} = 18$

Tenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} C_2 = 3C_1 \\ \sqrt{3^2 + C_1^2} + \sqrt{5^2 + C_2^2} = 18 \end{array}\right\} \ \textit{Soluciones:}\ C_1 = -4,\ C_2 = -12;\ C_1 = 4,\ C_2 = 12$$

Como los lados tienen que ser positivos, la solución es $C_1 = 4,\ C_2 = 12$.

El triángulo T_1 tiene catetos de medidas 3 y 4 e hipotenusa de medida 5.

El triángulo T_2 tiene catetos de medidas 5 y 12 e hipotenusa de medida 13.

53 Al romper la hucha he sacado 50 monedas de 0,5 €, 1 € y 2 € que suman 40 €. Sabiendo que hay la mitad de monedas de 2 € que de 1 €, ¿cuántas monedas hay de cada clase?

Llamaremos x al n.º de monedas de 0,50 € que hemos sacado de la hucha, y al n.º de monedas de 1 € y z al n.º de monedas de 2 €. Del enunciado deducimos:

$$\begin{cases} 0{,}5x + y + 2z = 40 \\ \dfrac{y}{2} = z \\ x + y + z = 50 \end{cases}$$

Sustituimos en la primera y tercera ecuación el valor de z que indica la segunda:

$$\begin{cases} 0{,}5x + y + y = 40 \\ x + y + \dfrac{y}{2} = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 80 - 4y \\ x + y + \dfrac{y}{2} = 50 \end{cases} \rightarrow 80 - 4y + y + \frac{y}{2} = 50 \rightarrow 2(80 - 4y) + 3y = 100 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5y = 60 \rightarrow y = 12 \rightarrow z = 6 \rightarrow x = 32$$

54 **En una función de teatro se recaudan 5 200 € vendiéndose 200 entradas de tres tipos distintos: patio de butacas, a 30 €; primer y segundo piso, a 25 €, y localidades con visibilidad reducida, a 10 €. Sabiendo que el número de localidades más económicas suponen un 25 % del número de localidades de 25 €, calcula el número de entradas de cada tipo.**

Llamamos:

x = n.º de entradas de 30 € y = n.º de entradas de 25 € z = n.º de entradas de 10 €

Expresamos las condiciones en función de las incógnitas y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 200 \\ 30x + 25y + 10z = 5\,200 \\ z = 0{,}25y \end{array}\right\} \ \textit{Solución: } x = 100,\ y = 80,\ z = 20$$

Hay 100 entradas de 30 €, 80 entradas de 25 € y 20 entradas de 10 €.

55 **Preparamos un surtido con dos tipos de bombones de 10 €/kg y de 15 €/kg, respectivamente. Nuestro presupuesto es de 600 € y queremos preparar, al menos, 40 kg. ¿Qué restricciones tiene la composición del surtido?**

Llamamos:

x = cantidad de bombones de 10 €/kg

y = cantidad de bombones de 15 €/kg

Expresamos las condiciones en función de las incógnitas y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \ge 40 \\ 10x + 15y \le 600 \end{cases}$$

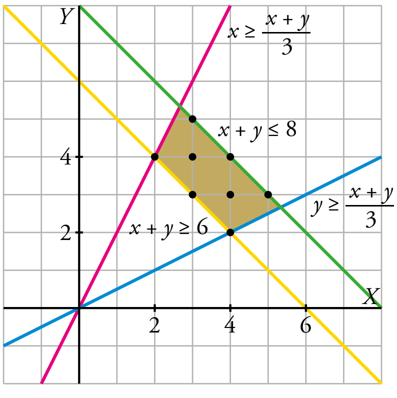
56 **[La búsqueda del número de casos posibles permite trabajar la creación y creatividad (dimensión personal) de esta clave].**

Un comité de una comunidad de vecinos debe estar formado por entre 6 y 8 personas, no pudiendo ser el número de hombres ni el de mujeres inferior a un tercio del grupo. ¿Cuántas combinaciones posibles hay?

Llamamos x al n.º de mujeres e y al n.º de hombres. Las condiciones son:

$$\begin{cases} 6 \le x + y \le 8 \\ x \ge \dfrac{x+y}{3} \\ y \ge \dfrac{x+y}{3} \end{cases}$$

Representamos el recinto solución:



Las diferentes posibilidades son: $(x = 4,\ y = 2)$, $(x = 3,\ y = 3)$, $(x = 2,\ y = 4)$, $(x = 4,\ y = 3)$, $(x = 3,\ y = 4)$, $(x = 5,\ y = 3)$, $(x = 4,\ y = 4)$, $(x = 3,\ y = 5)$, que corresponden a los puntos del recinto común cuyas coordenadas son enteras.

Página 104

Para resolver

57 **Calcula los parámetros a y b para que la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx - 12$ corte al eje X por los puntos (2, 0) y (6, 0). (Ten en cuenta las fórmulas de Cardano-Vieta).**

Los puntos de corte del eje de las abscisas nos indican dos soluciones de la ecuación $ax^2 + bx - 12 = 0$ por lo que si $x_1 = 2$ y si $x_2 = 6$ podemos aplicar las fórmulas de Cardano-Vieta:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 8$$

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{12}{a} = 12$$

Por tanto: $a = -1$, $b = 8$

58 **Calcula m y n para que $P(x) = x^4 + 2x^3 + mx^2 + nx + 24$ sea divisible por $R(x) = x^2 + x - 12$.**

Buscamos las soluciones de $R(x)$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} \to x_1 = 3 \text{ y } x_2 = -4 \to R(x) = (x-3)(x+4)$$

Como $P(x)$ tiene que ser divisible por $R(x)$, las soluciones de $R(x)$ también lo serán de $P(x)$:

$P(x) = x^4 + 2x^3 + mx^2 + nx + 24$

$P(3) = 3m + n + 53 = 0$ (*)

$P(-4) = 4m - n + 38 = 0$

Si sumamos (*) y (**): $7m + 91 = 0 \to m = \frac{-91}{7} = -13$ y $n = -14$

59 **Determina la expresión del polinomio $P(x)$ sabiendo que $P(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2 + 4$.**

Buscamos $P(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $P(x^2+1) = x^4 + 4x^2 + 4$:

$$P(x^2+1) = a(x^2+1)^2 + b(x^2+1) + c = a(x^4 + 1 + 2x^2) + bx^2 + b + c = ax^4 + a + 2ax^2 + bx^2 + b + c =$$

$$= ax^4 + (2a+b)x^2 + a + b + c$$

Para que se cumpla la igualdad $P(x^2+1) = x^4 + 4x^2 + 4$:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 4 \\ a + b + c = 4 \end{cases}$$

Por tanto, $a = 1$, $b = 2$ y $c = 1$.

60 **Halla los parámetros a y b para que estas parábolas tengan sus vértices en el eje de abscisas:**

a) $y = x^2 + ax + 25$ **b) $y = x^2 + 6x + b$**

a) Buscamos las soluciones de $y = x^2 + ax + 25 = 0$:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4 \cdot 25}}{2}$$

Que tengan solución en el eje de abscisas indica que cuando $y = 0$ la parábola solamente corta al eje de abscisas en un punto, y por lo tanto habrá una única solución. Para ello es necesario:

$\sqrt{a^2 - 4 \cdot 25} = 0 \to a = \pm 10$

b) Buscamos las soluciones de $y = x^2 - 6x + b = 0$:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4b}}{2} \text{ y, como antes, } \sqrt{36 - 4b} = 0 \to b = 9$$

61 **Resuelve.**

a) $\boldsymbol{x^7 - 16x^4 + 64x = 0}$

b) $\boldsymbol{\frac{5x+1}{x^2+2x+1} + \frac{x}{x+1} = 2}$

c) $\boldsymbol{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = x+1}$

d) $\boldsymbol{(\sqrt{x} + x + 2)x = 0}$

e) $\boldsymbol{\frac{3x}{5} + \frac{25}{9x^2} = 0}$

f) $\boldsymbol{\frac{x}{8} - \frac{2}{81x^3} = 0}$

g) $\boldsymbol{\frac{x}{2} - \frac{1}{x^2} = 0}$

h) $\boldsymbol{\frac{2}{5x} - \frac{5x^3}{2} = 0}$

a) $x^7 - 16x^4 + 64x = 0$

Factorizamos el polinomio:

$x^7 - 16x^4 + 64x = x(x-2)^2(2x + x^2 + 4)^2$

Soluciones: $x = 0$; $x = 2$

b) $\frac{5x+1}{x^2+2x+1} + \frac{x}{x+1} = 2 \rightarrow \frac{5x+1}{x^2+2x+1} + \frac{x}{x+1} - 2 = 0$

Operamos en el miembro de la izquierda:

$$\frac{5x+1}{x^2+2x+1} + \frac{x}{x+1} - 2 = -\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$$

La ecuación queda:

$-\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$ que es válida.

Solución: $x = 1$

c) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = x+1$

$(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x})^2 = (x+1)^2$

$3x + 2\sqrt{x(2x+1)} + 1 = x^2 + 2x + 1$

$2\sqrt{x(2x+1)} = x^2 - x$

$4x(2x+1) = x^4 - 2x^3 + x^2 \rightarrow x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x^2 - 4x = 0$

Factorizamos el polinomio:

$x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x^2 - 4x = x(x-4)(x+1)^2$

Soluciones: $x = 0$, $x = 4$, $x = -1$ no válida

d) $(\sqrt{x} + x + 2)x = 0$ Cada factor se iguala a cero: $x = 0$, $\sqrt{x} + x + 2 = 0$

Resolvemos $\sqrt{x} + x + 2 = 0$

$\sqrt{x} = -x - 2$

$x = x^2 + 4x + 4$

$x^2 + 3x + 4 = 0$ que no tiene soluciones.

Tenemos, entonces, solamente la solución correspondiente al primer factor.

Solución: $x = 0$

e) $\frac{3x}{5} + \frac{25}{9x^2} = 0$

$\frac{27x^3 + 125}{45x^2} = 0 \rightarrow 27x^3 + 125 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{-125}{27}} = -\frac{5}{3}$

Solución: $x = -\frac{5}{3}$

f) $\frac{x}{8} - \frac{2}{81x^3} = 0$

$\frac{x}{8} - \frac{2}{81x^3} = \frac{81x^4 - 16}{648x^3} = 0 \to 81x^4 - 16 = 0 \to x = \sqrt[4]{\frac{26}{81}} = \pm\frac{2}{3}$

Soluciones: $x = \frac{2}{3},\ x = -\frac{2}{3}$

g) $\frac{x}{2} - \frac{1}{x^2} = 0$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 2}{2x^2} = 0 \to x^3 - 2 = 0 \to x = \sqrt[3]{2}$

Solución: $x = \sqrt[3]{2}$

h) $\frac{2}{5x} - \frac{5x^3}{2} = 0$

$\frac{2}{5x} - \frac{5x^3}{2} = -\frac{25x^4 - 4}{10x} = 0 \to 25x^4 - 4 = 0 \to x = \sqrt[4]{\frac{4}{25}} = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$

Soluciones: $x = \sqrt{\frac{2}{5}},\ x = -\sqrt{\frac{2}{5}}$

62 **Resuelve las siguientes ecuaciones en las que aparecen valores absolutos:**

a) $|x - 5| = 3x - 1$　　**b)** $\left|\frac{x-3}{2}\right| = 4$

c) $|x^2 - x| = |1 - x^2|$　　**d)** $|x^2 - 3x + 1| = 1$

* ***Ver ejercicio resuelto 2.***

a) $|x - 5| = 3x - 1 \to \begin{cases} x - 5 = 3x - 1 \\ x - 5 = -(3x - 1) \end{cases} \to \begin{cases} x = -2 \\ x = 3/2 \end{cases}$

Soluciones: $x = -2,\ x = \frac{3}{2}$

b) $\left|\frac{x-3}{2}\right| = 4 \to \begin{cases} \frac{x-3}{2} = 4 \\ \frac{x-3}{2} = -4 \end{cases} \to \begin{cases} x = 11 \\ x = -5 \end{cases}$

Soluciones: $x = 11,\ x = -5$

c) $|x^2 - x| = |1 - x^2| \to \begin{cases} x^2 - x = 1 - x^2 \\ x^2 - x = -(1 - x^2) \end{cases} \to \begin{cases} x = 1,\ x = -1/2 \\ x = 1 \end{cases}$

Soluciones: $x = 1,\ x = -\frac{1}{2}$

d) $|x^2 - 3x + 1| = 1 \to \begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 1 \\ x^2 - 3x + 1 = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 3,\ x = 0 \\ x = 2,\ x = 1 \end{cases}$

Soluciones: $x = 3,\ x = 0,\ x = 2,\ x = 1$

63 **Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:**

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot 16^{x+1} \cdot 2^{1-x} = 0{,}25$　　**b)** $\frac{\sqrt{3^x}}{(1/3)^{x+1}} \cdot 9^{1-x} = 243$

c) $2^x \cdot 5^{x+1} = 10$　　**d)** $3^x \cdot 9^x = 2$

e) $25^x - 2 \cdot 5^{x+1} + 25 = 0$　　**f)** $3^{2x} + 2 \cdot 3^{x+1} = 3^3$

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot 16^{x+1} \cdot 2^{1-x} = 0,25$

$(2^{-2})^x \cdot 2^{4(x+1)} \cdot 2^{1-x} = 2^{-2}$

$2^{-2x} \cdot 2^{4x+4} \cdot 2^{1-x} = 2^{-2} \to 2^{-2x+4x+4+1-x} = 2^{-2}$

$-2x + 4x + 4 + 1 - x = -2 \to x = -7$

Solución: $x = -7$

b) $\dfrac{\sqrt{3^x}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}} \cdot 9^{1-x} = 243$

$\dfrac{3^{(1/2)\cdot x}}{3^{-(x+1)}} \cdot 3^{2(1-x)} = 3^5$

$3^{\frac{1}{2}\cdot x} \cdot 3^{x+1} \cdot 3^{2-2x} = 3^5 \to 3^{\frac{x}{2}+x+1+2-2x} = 3^5$

$\frac{x}{2} + x + 1 + 2 - 2x = 5 \to x = -4$

Solución: $x = -4$

c) $2^x \cdot 5^{x+1} = 10$

$2^x \cdot 5 \cdot 5^x = 10 \to 5 \cdot (2 \cdot 5)^x = 10 \to 5 \cdot 10^x = 10 \to 10^x = 2 \to x = \log 2$

Solución: $x = \log 2 = 0,69$

d) $3^x \cdot 9^x = 2$

$3^x \cdot 3^{2x} = 2$

$3^{3x} = 2$

$3x = \log_3 2 \to x = \dfrac{\log_3 2}{3}$

Solución: $x = \dfrac{\log_3 2}{3} = 0,21$

e) $25^x - 2 \cdot 5^{x+1} + 25 = 0$

$5^{2x} - 2 \cdot 5 \cdot 5^x + 5^2 = 0 \to (5^x - 5)^2 = 0 \to 5^x - 5 = 0 \to 5^x = 5 \to x = 1$

Solución: $x = 1$

f) $3^{2x} + 2 \cdot 3^{x+1} = 3^3$

Hacemos el cambio de variable: $3^x = y$

$y^2 + 2 \cdot 3y - 27 = 0 \to y = 3,\ y = -9$ no válida

$y = 3 \to x = 1$

Solución: $x = 1$

64 Resuelve estas ecuaciones logarítmicas:

a) $2 \log_2 x = \log_2 \dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2}$

b) $\log (x+1)^5 + \log (3x+2)^5 = 5$

c) $\log (8 + x^3) = 3 \log (x+2)$

d) $\ln 6 + (x^2 - 5x + 7) \ln 2 = \ln 12$

e) $(2x^2 + x - 3) \log 5 = 2 \log \dfrac{1}{5}$

f) $\log (3^{1-x})^{1+x} + \log 2700 = 2$

a) $2\,log_2 x = log_2 \dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; 2\,log_2 x = log_2 x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; 2\,log_2 x = log_2 x - 1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; log_2 x = -1 \;\rightarrow\; x = 2^{-1} \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{2}$

Solución: $x = \dfrac{1}{2}$

b) $log\,(x+1)^5 + log\,(3x+2)^5 = 5$

$log\,(x+1)^5 \cdot (3x+2)^5 = log\,100\,000 \;\rightarrow\; (x+1)^5 \cdot (3x+2)^5 = 10^5 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; (x+1)(3x+2) = 10 \;\rightarrow\; x = 1,\; x = -\dfrac{8}{3}$ no válida

Solución: $x = 1$

c) $log\,(8 + x^3) = 3log\,(x+2) \;\rightarrow\; log\,(8+x^3) = log\,(x+2)^3 \;\rightarrow\; (8+x^3) = (x+2)^3 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; (8+x^3) - (x+2)^3 = 0 \;\rightarrow\; -6x^2 - 12x = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x = -2$ (no válida), $x = 0$

Solución: $x = 0$

d) $ln\,6 + (x^2 - 5x + 7)\,ln\,2 = ln\,12$

$ln\,6 \cdot 2^{x^2-5x+7} = ln\,12 \;\rightarrow\; 6 \cdot 2^{x^2-5x+7} = 6 \cdot 2 \;\rightarrow\; x^2 - 5x + 7 = 1 \;\rightarrow\; x = 3,\; x = 2$

Soluciones: $x = 3,\; x = 2$

e) $(2x^2 + x - 3)\,log\,5 = 2\,log\,\dfrac{1}{5} \;\rightarrow\; log\,5^{2x^2+x-3} = log\,5^{-2} \;\rightarrow\; 2x^2 + x - 3 = -2 \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{2},\; x = -1$

Soluciones: $x = \dfrac{1}{2},\; x = -1$

f) $log\,(3^{1-x})^{1+x} + log\,2700 = 2$

$log\,(3^{(1-x)(1+x)}) + log\,27 + log\,100 = 2 \;\rightarrow\; log\,(3^{(1-x)(1+x)}) + log\,3^3 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; log\,(3^{(1-x)(1+x)+3}) = log\,1 \;\rightarrow\; 3^{(1-x)(1+x)+3} = 1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; (1-x)(1+x) + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = -2,\; x = 2$

Soluciones: $x = -2,\; x = 2$

65 **Resuelve las siguientes ecuaciones mediante un cambio de variable:**

a) $\sqrt{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^2 + 3} = -2\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$

b) $e^{3x^2-3} - 3e^{2x^2-2} + 3e^{x^2-1} - 1 = 0$

c) $\sqrt{\left(log\,\dfrac{2}{x}\right)^2 + 3} = -1 + 3\,log\,\dfrac{2}{x}$

a) $\sqrt{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^2 + 3} = -2\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$

Hacemos $2 + \dfrac{1}{x} = y \;\rightarrow\; \sqrt{y^2+3} = -2y \;\rightarrow\; y^2 + 3 = 4y^2 \;\rightarrow\; 3y^2 - 3 = 0 \;\rightarrow\; y = 1,\; y = -1$

$y = 1 \;\rightarrow\; 2 + \dfrac{1}{x} = 1 \;\rightarrow\; x = -1$

$y = -1 \;\rightarrow\; 2 + \dfrac{1}{x} = -1 \;\rightarrow\; x = -\dfrac{1}{3}$

Soluciones: $x = -1,\; x = -\dfrac{1}{3}$

b) $e^{3x^2-3} - 3e^{2x^2-2} + 3e^{x^2-1} - 1 = 0$

Hacemos el cambio de variable: $x^2 - 1 = y$

$e^{3y} - 3e^{2y} + 3e^{y} - 1 = 0$

Hacemos el cambio de variable: $e^y = t$

$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0 \rightarrow t = 1$

Deshacemos los cambios de variable:

$e^y = 1 \rightarrow y = 0$

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = 1,\ x = -1$

Soluciones: $x = 1,\ x = -1$

c) $\sqrt{\left(log\,\frac{2}{x}\right)^2 + 3} = -1 + 3\,log\,\frac{2}{x}$

Hacemos $log\,\frac{2}{x} = y$

$\sqrt{y^2 + 3} = -1 + 3y \rightarrow y^2 + 3 = (-1 + 3y)^2 = 9y^2 - 6y + 1 \rightarrow$

$\rightarrow y^2 + 3 = 9y^2 - 6y + 1 \rightarrow y = 1,\ y = -\frac{1}{4}$ no válida.

$log\,\frac{2}{x} = 1 = log\,10 \rightarrow \frac{2}{x} = 10 \rightarrow x = \frac{1}{5}$

Solución: $x = \frac{1}{5}$

66 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 5y = 17 \\ 5x - 2y = 32 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 5x + 2y = 1 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z = 8 \\ 2x + y + 2z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ 2x - 5y = 17 \\ 5x - 2y = 32 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ -7y = 7 \\ -7y = 7 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ -7y = 7 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 6 \\ y = -1 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 7 \\ 5x + 2y = 1 \\ 3x + 3y = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + 3 \cdot (1.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 7 \\ 9x = 15 \\ 9x = 21 \end{array}\right\}$

Hay dos ecuaciones que se contradicen. No hay solución.

c) $\left.\begin{array}{r} x - y + z = 8 \\ 2x + y + 2z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{r} x - y + z = 8 \\ 3y = -15 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 3 - z \\ y = -5 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 0 \\ 0 = 2 \end{array}\right\}$

Hay una ecuación imposible. No hay solución.

67 Resuelve.

a) $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=\sqrt{2y} \\ x+y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{4y+2x}=\sqrt{3y+x}-1 \\ y+x=-5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x+3)(y-5)=0 \\ (x-2)(y-1)=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x^3-3x^2+4)(y+1)=0 \\ \sqrt{24-x^3}=y+6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2y+xy^2=6 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} \sqrt{x-y}-\sqrt{x+y}=\sqrt{2y} \;\to\; \sqrt{8-2y}-\sqrt{8}=\sqrt{2y} \;\to\; \sqrt{8-2y}=\sqrt{8}+\sqrt{2y} \;\to\; 8-2y=(\sqrt{8}+\sqrt{2y})^2 \;\to \\ x+y=8 \;\to\; x=8-y \end{cases}$

$\to\; 8-2y=2y+8\sqrt{y}+8 \;\to\; 8\sqrt{y}=-4y \;\to\; 64y=16y^2 \;\to\; y=4,\; y=0$

$y=4 \;\to\; x=4$

$y=0 \;\to\; x=8$

Soluciones: $x_1=4,\; y_1=4;\; x_2=8,\; y_2=0$

b) $\begin{cases} \sqrt{4x+2y}=\sqrt{3y+x}-1 \to \sqrt{-20-4y+2y}=\sqrt{3y-5-y}-1 \;\to\; \sqrt{-20-24y}=\sqrt{2y-5}-1 \;\to \\ y+x=-5 \;\to\; x=-5-y \end{cases}$

$\to\; -20-24y=(\sqrt{2y-5}-1)^2 \;\to\; -20-24y=2y-2\sqrt{2y-5}-4 \;\to$

$\to\; \dfrac{-16-22y}{2}=\sqrt{2y-5} \;\to\; (-8-11y)^2=2y-5 \;\to\; 121y^2+176y+64=2y-5 \;\to$

$\to\; 121y^2+176y+64-2y+5=0 \;\to\; 121y^2+174y+69=0$ no tiene solución.

c) $\begin{cases} (x+3)(y-5)=0 \\ (x-2)(y-1)=0 \end{cases} \;\to\; \begin{cases} (x+3)(y-5)=0 \;\to\; x=-3 \text{ o } y=5 \\ (x-2)(y-1)=0 \;\to\; x=2 \text{ o } y=1 \end{cases}$

Por tanto, las soluciones son: $x_1=2,\; y_1=5;\; x_2=-3,\; y_2=1$.

d) $\begin{cases} (x^3-3x^2+4)(y+1)=0 \;\to\; (x^3-3x^2+4)(\sqrt{24-x^3}-6+1)=0 \;\to\; (x^3-3x^2+4)(\sqrt{24-x^3}-5)=0 \\ \sqrt{24-x^3}=y+6 \;\to\; y=\sqrt{24-x^3}-6 \end{cases}$

Cada factor se iguala a cero.

$(x^3-3x^2+4)=0 \;\to\; x=2, x=-1$

$\sqrt{24-x^3}-5=0 \;\to\; x=-1$

$x=2 \;\to\; y=-2$

$x=-1 \;\to\; y=-1$

Soluciones: $x_1=2,\; y_1=-2;\; x_2=-1,\; y_2=-1$

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=5 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=5 \\ -\dfrac{x^2-y^2}{x^2y^2}=5 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=5xy \\ -\dfrac{(x+y)(x-y)}{xyxy}=5 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=5xy \\ -5\dfrac{(x-y)}{xy}=5 \end{cases} \to$

$$\to \begin{cases} x+y=5xy \;\to\; x+y=-5(x-y) \;\to\; 6x-4y=0 \;\to\; x=\dfrac{4y}{6} \\ -(x-y)=xy \;\to\; -\dfrac{4y}{6}+y=\dfrac{1}{3}y=\dfrac{4y}{6}y \;\to\; \dfrac{1}{3}y=\dfrac{4y^2}{6} \;\to\; y=2y^2 \;\to\; y=\dfrac{1}{2},\; y=0 \text{ no válida} \end{cases}$$

$y=\dfrac{1}{2} \to x=\dfrac{1}{3}$

Solución: $x=\dfrac{1}{3},\; y=\dfrac{1}{2}$

f) $\begin{cases} x^2y+xy^2=6 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \to \begin{cases} xy(x+y)=6 \\ \dfrac{y+x}{xy}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Multiplicamos las ecuaciones y nos queda: $(x+y)^2=9$

De la segunda ecuación:

$$y+x=\frac{3}{2}xy \;\to\; y-\frac{3}{2}xy=-x \;\to\; y\left(1-\frac{3}{2}x\right)=-x \;\to\; y=\frac{-x}{1-\frac{3}{2}x} \;\to\; y=\frac{-2x}{2-3x}$$

Nos queda el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (x+y)^2=9 \\ y=\dfrac{-2x}{2-3x} \end{cases}$$

Obtenemos los dos sistemas siguientes:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ y=\dfrac{-2x}{2-3x} \end{cases} \to [x=1,\; y=2];\; [x=2,\; y=1]$$

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ y=\dfrac{-2x}{2-3x} \end{cases} \to \left[x=\frac{-3-\sqrt{17}}{2},\; y=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right];\; \left[x=\frac{-3+\sqrt{17}}{2},\; y=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right]$$

Soluciones: $[x=1,\; y=2],\; [x=2,\; y=1],\; \left[x=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2},\; y=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right];\; \left[x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2},\; y=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right]$

68 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \log_y \sqrt{x}=\dfrac{1}{2} \\ \log_x y^2=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 5 \\ \dfrac{e^x}{e^y}=e \end{cases}$

a) $\begin{cases} \log_y \sqrt{x}=\dfrac{1}{2} \\ \log_x y^2=2 \end{cases} \to \begin{cases} y^{1/2}=\sqrt{x} \\ x^2=y^2 \end{cases} \to y=x,\; y\ge 0,\; x\ge 0$

b) $\begin{cases} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 5 \\ \dfrac{e^x}{e^y}=e \end{cases} \to \begin{cases} \log(x+y)(x-y)=\log 5 \\ e^x=ee^y \end{cases} \to \begin{cases} (x+y)(x-y)=5 \to \\ x=y+1 \end{cases}$

$\to (y+1)^2-y^2=2y+1=5 \to 2y+1=5 \to y=2$

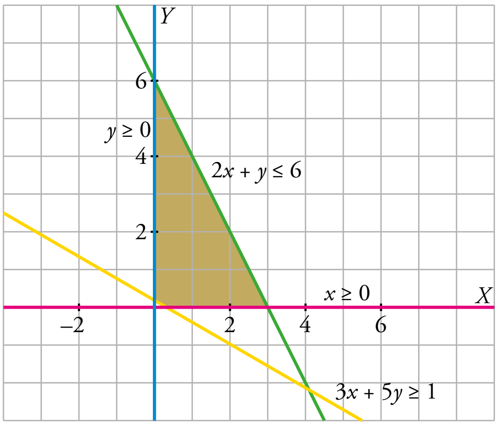
$y=2 \to x=3$

Solución: $x=3,\; y=2$

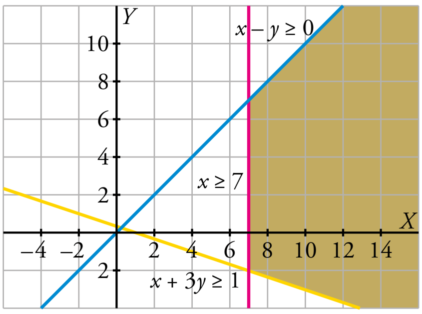
69 **Representa gráficamente el conjunto de soluciones de estos sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} 2x + y \le 6 \\ 3x + 5y \ge 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y \ge 1 \\ x \ge 7 \\ x - y \ge 0 \end{cases}$

a) El recinto intersección es:



b)



70 **Resuelve:** $\dfrac{2x+4}{x-1} \ge 0$

Después, deduce la solución de estas otras inecuaciones:

a) $\dfrac{2x+4}{x-1} < 0$ b) $\dfrac{2x+4}{x-1} \le 0$

* ***Ver ejercicio resuelto 6.***

	$(-\infty, -2]$	$[-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$2x + 4$	–	+	+
$x - 1$	–	–	+
$\dfrac{2x+4}{x-1}$	+	–	+

$\dfrac{2x+4}{x-1} \ge 0$ en $(-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$

a) *Solución:* $(-2, 1)$

b) *Solución:* $[-2, 1)$

71 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $x^4 - 4x^2 < 0$ b) $x^3 - x^2 - 6x < 0$

c) $\dfrac{4 - x^2}{(x-3)^2} > 0$ d) $\dfrac{-2}{(x-1)^3} < 0$

a) $x^2(x^2-4)<0 \Rightarrow x^2-4<0$

$x \neq 0$

$(-2, 0) \cup (0, 2)$

b) $x(x^2-x-6)<0$

$x(x-3)(x+2)<0$

$(-\infty, -2) \cup (0, 3)$

c) $\left.\begin{array}{r} x \neq 3 \\ 4-x^2>0 \end{array}\right\} (-2, 2)$

d) $x \neq 1$; $(1, +\infty)$

Página 104

Cuestiones teóricas

72 **Halla m para que al dividir el polinomio $2x^4+9x^3+2x^2-6x+m$ entre $x+4$, el resto sea igual a 12.**

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 9 & 2 & -6 & m \\ -4 & & -8 & -4 & 8 & -8 \\ \hline & 2 & 1 & -2 & 2 & \boxed{m-8} \end{array}$$

$m-8=12 \rightarrow m=20$

73 **Escribe un polinomio de grado 4 que solo tenga por raíces 0 y 1.**

Por ejemplo: $P(x)=x^3(x-1)$; $Q(x)=x^2(x-1)$

74 **Inventa ecuaciones que tengan por soluciones los valores siguientes:**

a) $3, -3, \sqrt{7}$ **y** $-\sqrt{7}$

b) 5; $0{,}3$ **y** -2

c) $0, \dfrac{1}{2}$ **y** $0{,}7$

d) $0, 1, -1$ **y** $\dfrac{1}{3}$

a) $(x-3)(x+3)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})=(x^2-9)(x^2-7)=x^4-16x^2+63$

b) $(x-5)(x-0,3)(x+2)=x^3-3,3x^2-9,1x+3$

c) $x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x-0,7)=x(x-0,5)(x-0,7)=x^3-1,2x^2+0,35x$

d) $x(x-1)(x+1)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)=x^4-\dfrac{1}{3}x^3-x^2+\dfrac{1}{3}x$

75 **[Escuchando los argumentos de sus compañeros y compañeras el alumnado puede trabajar la comprensión oral].**

¿Verdadero o falso?

a) Un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas puede ser compatible indeterminado.

b) Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas puede ser compatible determinado.

c) Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas puede ser incompatible.

a) Cierto, ya que la soluciones dependerán de una tercera incógnita y según valga esta tercera tendremos los valores de las dos primeras. Es decir puede tener solución aunque no podamos precisarla.

b) Falso, puede ser compatible pero no podremos determinarlo.

c) Cierto, es posible que no tenga una solución común.

Para profundizar

76 **Resuelve estas ecuaciones de segundo grado en las que la incógnita es x:**

a) $abx^2 - (a+b)x + 1 = 0$

b) $(x-a)^2 - 2x(x+a) - 4a^2 = 0$

c) $ax^2 + bx + b - a = 0$

d) $(a+b)x^2 + bx - a = 0$

a) $x = \dfrac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2ab} = \dfrac{a+b \pm \sqrt{a^2+b^2+2ab-4ab}}{2ab} =$

$$= \frac{a+b \pm (a-b)}{2ab} = \begin{cases} \dfrac{a+b+a-b}{2ab} = \dfrac{2a}{2ab} = \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{a+b-a+b}{2ab} = \dfrac{2b}{2ab} = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

$x_1 = \dfrac{1}{a}$; $x_2 = \dfrac{1}{b}$

b) $x^2 + a^2 - 2ax - 2x^2 - 2ax - 4a^2 = 0$

$x^2 + 4ax + 3a^2 = 0$

$x = \dfrac{-4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{2} = \dfrac{-4a \pm \sqrt{4a^2}}{2} = \dfrac{-4a \pm 2a}{2} =$

$$= \begin{cases} \dfrac{-4+2a}{2} = \dfrac{-2a}{2} = -a \\ \dfrac{-4a-2a}{2} = \dfrac{-6a}{2} = -3a \end{cases}$$

$x_1 = -a$; $x_2 = -3a$

c) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(b-a)}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ab + 4a^2}}{2a} =$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{(2a-b)^2}}{2a} = \begin{cases} \dfrac{-b+2a-b}{2a} = \dfrac{2a-2b}{2a} = \dfrac{a-b}{a} \\ \dfrac{-b-2a+b}{2a} = -1 \end{cases}$$

$x_1 = -1$; $x_2 = \dfrac{a-b}{a}$

d) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a(a+b)}}{2(a+b)} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2 + 4ab}}{2(a+b)} = \dfrac{-b \pm (2a+b)}{2(a+b)} =$

$$= \begin{cases} \dfrac{-b+2a+b}{2(a+b)} = \dfrac{a}{a+b} \\ \dfrac{-b-2a-b}{2(a+b)} = \dfrac{-(2a+2b)}{2(a+b)} = -1 \end{cases}$$

$x_1 = -1$; $x_2 = \dfrac{a}{a+b}$

77 Resuelve.

a) $|x| + 1 = |3x - 5|$

b) $|x^2 - 1| = |x| - 1$

a)

	$x < 0$	$0 \le x < \frac{5}{3}$	$x \ge \frac{5}{3}$
$\|x\|$	$-x$	x	x
$\|x\| + 1$	$-x + 1$	$x + 1$	$x + 1$
$\|3x - 5\|$	$-3x + 5$	$-3x + 5$	$3x - 5$

$x < 0$	$0 \le x < \frac{5}{3}$	$x \ge \frac{5}{3}$
$-x + 1 = -3x + 5$	$x + 1 = -3x + 5$	$x + 1 = 3x - 5$
$x = 2 \notin (-\infty, 0)$	$x = 1 \in \left[0, \frac{5}{3}\right)$	$x = 3 \in \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$

Soluciones: $x = 1,\ x = 3$

b)

	$x < -1$	$-1 \le x < 0$	$0 \le x < 1$	$1 \le x$
$\|x^2 - 1\|$	$x^2 - 1$	$1 - x^2$	$1 - x^2$	$x^2 - 1$
$\|x\|$	$-x$	$-x$	x	x
$\|x\| - 1$	$-x - 1$	$-x - 1$	$x - 1$	$x - 1$

$x < -1$	$-1 \le x < 0$	$0 \le x < 1$	$1 \le x$
$x^2 - 1 = -x - 1$	$1 - x^2 = -x - 1$	$1 - x^2 = x - 1$	$x^2 - 1 = x - 1$
$x = -1 \notin (-\infty, -1)$	$x = -1 \in [-1, 0)$	$x = 1 \notin [0, 1)$	$x = 1 \in [1, +\infty)$
$x = 0 \notin (-\infty, -1)$	$x = 2 \notin [-1, 0)$	$x = -2 \notin [0, 1)$	$x = 0 \notin [1, +\infty)$

Soluciones: $x = -1,\ x = 1$

78 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{2x+1}{x+1} > 1$

b) $\dfrac{x-1}{x+3} \ge x$

c) $\dfrac{x+1}{x-1} < \dfrac{x-1}{x+1}$

d) $\dfrac{1}{x+2} \le \dfrac{x}{x+2}$

a) $\dfrac{2x+1}{x+1} > 1 \ \rightarrow\ \dfrac{2x+1}{x+1} - 1 > 0 \ \rightarrow\ \dfrac{x}{x+1} > 0$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0]$	$[0, +\infty)$
x	–	–	+
$x + 1$	–	+	+
$\dfrac{x}{x+1}$	+	–	+

Solución: $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

b) $\dfrac{x-1}{x+3} \ge x \ \rightarrow\ \dfrac{x-1}{x+3} - x \ge 0 \ \rightarrow\ -\dfrac{(x+1)^2}{x+3} \ge 0 \ \rightarrow\ \dfrac{(x+1)^2}{x+3} \le 0$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1]$	$[-1, +\infty)$
$(x + 1)^2$	+	+	+
$x + 3$	–	+	+
$\dfrac{(x+1)^2}{x+3}$	–	+	+

Solución: $(-\infty, -3)$

c) $\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-1}{x+1} \rightarrow \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} < 0 \rightarrow 4\frac{x}{x^2-1} < 0$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0]$	$[0, 1)$	$(-1, +\infty)$
x	–	–	+	+
x^2-1	+	–	–	+
$\frac{x}{x^2-1}$	–	+	–	+

Solución: $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

d) $\frac{1}{x+2} \le \frac{x}{x+2} \rightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{x}{x+2} \le 0 \rightarrow \frac{1-x}{x+2} \le 0$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1]$	$[1, +\infty)$
$1-x$	+	+	–
$x+2$	–	+	+
$\frac{1-x}{x+2}$	–	+	–

Solución: $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$

79 **Si el resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre $x-1$ es -1 y entre $x+1$ es -3, ¿cuál es el resto de la división de $P(x)$ entre (x^2-1)?**

Si $C(x)$ y $R(x)$ son el cociente y el resto que se obtiene al dividr $P(x)$ entre x^2-1:

$P(x) = C(x)(x^2-1) + R(x)$

De $R(x)$ sabemos que es un polinomio de grado 1. Podemos llamarle $R(x) = ax + b$.

También sabemos que $R(1) = -1$ y que $R(-1) = -3$ porque:

$P(1) = C(1)\,(1^2-1) + R(1) = R(1) = -1$

$P(-1) = C(-1)\,((-1)^2-1) + R(-1) = R(-1) = -3$

Por tanto: $\begin{cases} -1 = a+b \\ -3 = -a+b \end{cases} \rightarrow a = 1,\ b = -2$

El resto que buscamos es $R(x) = x - 2$.

80 **Halla el intervalo de los valores de a para los que se cumpla la desigualdad $ax^2 - 3x + a < 0$ para cualquier número real, x.**

La representación gráfica de $ax^2 - 3x + a$ es una parábola, y buscamos los valores de a para los que siempre es negativa. Se deben cumplir, por tanto, dos condiciones:

- a debe ser un número negativo, es decir, el vértice de la parábola debe ser un máximo, no un mínimo: $a < 0$
- La gráfica no debe cortar el eje de abscisas, es decir, $ax^2 - 3x + a = 0$ no debe tener solución:

  $ax^2 - 3x + a = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4a^2}}{2a}$

  Para que la ecuación no tenga solución se debe cumplir $9 - 4a^2 < 0 \rightarrow \frac{9}{4} < a^2$

  Es decir, $a \in (-\infty, -3/2) \cup (3/2, +\infty)$.

  Por tanto, la solución es $(-\infty, -3/2)$.

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 2.4. (EA 2.4.1.-EA 2.4.2.)

Página 105

1 **Resuelve factorizando previamente.**

$\mathbf{3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0}$

$3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0$

$x(3x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x - 2) = 0$

	3	1	–9	–9	–2
–1		–3	2	7	2
	3	–2	–7	–2	0
2		6	8	2	
	3	4	1	0	

$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \begin{cases} -1 \\ -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

La ecuación factorizada queda así:

$$x(x+1)^2 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)(x-2) = 0$$

Las soluciones son: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = -\frac{1}{3}$; $x_4 = 2$

2 **Opera y simplifica el resultado.**

$$\left(\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}\right) : \frac{3x}{x-1}$$

$$\left(\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}\right) : \frac{3x}{x-1} = \frac{x^2 - x(x-1)}{x^2-1} : \frac{3x}{x-1} = \frac{(x^2 - x^2 + x)(x-1)}{3x(x^2-1)} : \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)3x} = \frac{1}{3(x+1)}$$

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\mathbf{x^4 - 3x^2 + 2 = 0}$

b) $\mathbf{\sqrt{8+2x} - x = x + 6}$

c) $\mathbf{\dfrac{3x}{x^2-4} = \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{4}{3}}$

d) $\mathbf{3^{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

e) $\mathbf{2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0}$

f) $\mathbf{\ln x + \ln 4 = 2 \ln (x+1)}$

g) $\mathbf{|3x + 1| = |x - 3|}$

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Hacemos el cambio $y = x^2$.

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$y = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{y} \begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$y = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{y} \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$

b) $\sqrt{8+2x}-x=x+6 \rightarrow \sqrt{8+2x}=2x+6$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$(\sqrt{8+2x})^2=(2x+6)^2 \rightarrow 8+2x=4x^2+36+24x \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2+22x+28=0 \rightarrow 2x^2+11x+14=0$

$x=\dfrac{-11\pm\sqrt{121-112}}{4}=\dfrac{-11\pm 3}{4}= \begin{cases} -2 \\ -7/2 \end{cases}$

Comprobada la ecuación inicial, el resultado $-\dfrac{7}{2}$ resulta no ser válido.

Por tanto, la solución de la ecuación es $x=-2$.

c) $\dfrac{3x}{x^2-4}=\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{4}{3} \rightarrow \dfrac{9x}{3(x^2-4)}=\dfrac{3x(x-2)-4(x^2-4)}{3(x^2-4)} \rightarrow$

$\rightarrow 9x=3x^2-6x-4x^2+16 \rightarrow x^2+15x-16=0 \rightarrow$

$\rightarrow x=\dfrac{-15\pm\sqrt{225+64}}{4}=\dfrac{-15\pm 17}{2}= \begin{cases} 1 \\ -16 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=1;\ x_2=-16$

d) $3^{x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow 3^{x-1}=3^{-1/2} \rightarrow x-1=-\dfrac{1}{2} \rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

e) $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0 \rightarrow (2^x)^2-6\cdot 2^x+8=0$

Hacemos el cambio $y=2^x$, con lo que obtenemos:

$y^2-6y+8=0 \rightarrow y=\dfrac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\dfrac{6\pm 2}{2}= \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$

$y=4 \rightarrow 2^x=4 \rightarrow 2^x=2^2 \rightarrow x=2$

$y=2 \rightarrow 2^x=2 \rightarrow 2^x=2^1 \rightarrow x=1$

Soluciones: $x_1=1;\ x_2=2$

f) $\ln x+\ln 4=2\ln(x+1) \rightarrow \ln 4x=\ln(x+1)^2 \rightarrow 4x=(x+1)^2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2-2x+1=0 \rightarrow (x-1)^2=0 \rightarrow x=1$

Solución: $x=1$

g) $|3x+1|=|x-3| \begin{cases} 3x+1=x-3 \rightarrow 2x=-4 \rightarrow x=-2 \\ 3x+1=-(x-3) \rightarrow 4x=2 \rightarrow x=1/2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=-2,\ x_2=\dfrac{1}{2}$

4 **Resuelve estos sistemas no lineales:**

a) $\begin{cases} xy-x^2=6 \\ x+y=7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1 \\ 2x^2-y^2-xy=2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} xy-x^2=6 \rightarrow x(7-x)-x^2=6 \rightarrow x(7-x)-x^2-6=0 \rightarrow -2x^2+7x-6=0 \rightarrow x=2,\ x=\dfrac{3}{2} \\ x+y=7 \rightarrow y=7-x \end{cases}$

$x=2 \rightarrow y=5$

$x=\dfrac{3}{2} \rightarrow y=\dfrac{11}{2}$

Soluciones: $x_1=2,\ y_1=5;\ x_2=\dfrac{3}{2},\ y_2=\dfrac{11}{2}$

b) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+xy=1 \\ 2x^2-y^2-xy=2 \end{array}\right\}$ (1.ª) / (1.ª) + (2.ª) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+xy=1 \\ 3x^2 \qquad\quad =3 \end{array}\right\} \rightarrow x=\pm 1$

$x=1 \rightarrow y^2+y=0 \rightarrow y=0,\ y=-1 \rightarrow$ *Soluciones:* $x_1=1,\ y_1=-1;\ x_2=1,\ y_2=0$

$x=-1 \rightarrow y^2-y=0 \rightarrow y=1,\ y=0 \rightarrow$ *Soluciones:* $x_3=-1,\ y_3=1;\ x_4=-1,\ y_4=0$

5 Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y - 2x = 0 \\ 3^y - 6 \cdot 3^x = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x^2+5} = y + 2 \\ \log 5x - \log y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x + y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y - z = 8 \\ 3x - 2z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y - 2x = 0 \\ 3^y - 6 \cdot 3^x = -9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 2x \\ 3^{2x} - 6 \cdot 3^x = -9 \end{array}\right\}$

Hacemos el cambio $3^x = z$:

$z^2 - 6z + 9 = 0 \rightarrow z = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = 3$

$3^x = 3 \rightarrow x = 1$

$x = 1 \rightarrow y = 2$

Solución: $x = 1,\ y = 2$

b) $\begin{cases} \sqrt{x^2+5} = y + 2 \\ \log 5x - \log y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 5 = (y+2)^2 \\ \log \dfrac{5x}{y} = \log 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 5 = y^2 + 4y + 4 \rightarrow 4y^2 + 5 = y^2 + 4y + 4 \rightarrow y = 1,\ y = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5x}{y} = 10 \rightarrow x = 2y \end{cases}$

$y = 1 \rightarrow x = 2$

$y = \dfrac{1}{3} \rightarrow x = \dfrac{2}{3}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ y_1 = 1;\ x_2 = \dfrac{2}{3},\ y_2 = \dfrac{1}{3}$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 3 \\ x + y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + 3z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ (1.ª) (2.ª) – (1.ª) (3.ª) + 2 · (1.ª) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 3 \\ -y + z = -3 \\ 7y + 7z = 7 \end{array}\right\} \rightarrow$ (1.ª) (2.ª) (3.ª) + 7 · (2.ª) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 3 \\ -y + z = -3 \\ 14z = -14 \end{array}\right\}$

$14z = -14 \rightarrow z = -1$

$-y + z = -3 \rightarrow -y - 1 = -3 \rightarrow y = 2$

$x + 2y + 2z = 3 \rightarrow x + 4 - 2 = 3 \rightarrow x = 1$

Solución: $x = 1,\ y = 2,\ z = -1$

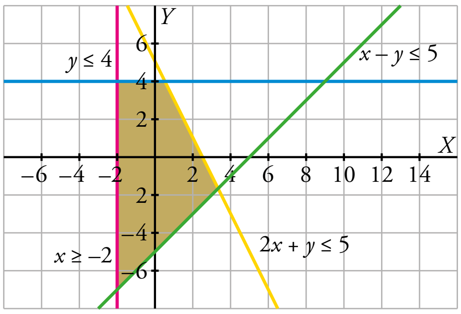
d) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 3 \\ 2x - y - z = 8 \\ 3x - 2z = 0 \end{array}\right\}$ (1.ª) (2.ª) – 2 · (1.ª) (3.ª) – 3 · (1.ª) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 3 \\ -3y + z = 2 \\ -3y + z = 9 \end{array}\right\}$

Las dos últimas filas se contradicen, luego no hay solución.

6 **Resuelve estos sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} 2x + y \le 5 \\ x - y \le 5 \\ y \le 4 \\ x \ge -2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ \dfrac{x+1}{2} - 3x \le x - 3 \end{cases}$

a)



La solución es el cuadrilátero señalado.

b) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ \dfrac{x+1}{2} - 3x \le x - 3 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ \dfrac{7}{2} - \dfrac{7}{2}x \le 0 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \to \text{Solución } [-2, 3] \\ \dfrac{7}{2} - \dfrac{7}{2}x \le 0 \to \text{Solución } [1, \infty) \end{cases}$

Solución: $x \in [1, 3]$

7 **Resuelve.**

a) $x(x-1) - 2(x+2) < x(x+1)$

b) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} \ge 0$

a) $x(x-1) - 2(x+2) < x(x+1) \to x^2 - x - 2x - 4 < x^2 + x \to$

$\to -4x - 4 < 0 \to 4x > -4 \to x > -1$

Solución: $x \in (-1, +\infty)$

b) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} \ge 0$

Para que un cociente sea positivo, el numerador y el denominador han de tener el mismo signo.

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \to (x+1)^2 \ge 0$ para cualquier valor de x.

Para $x = -3$, la ecuación no tiene solución, ya que el denominador se hace cero.

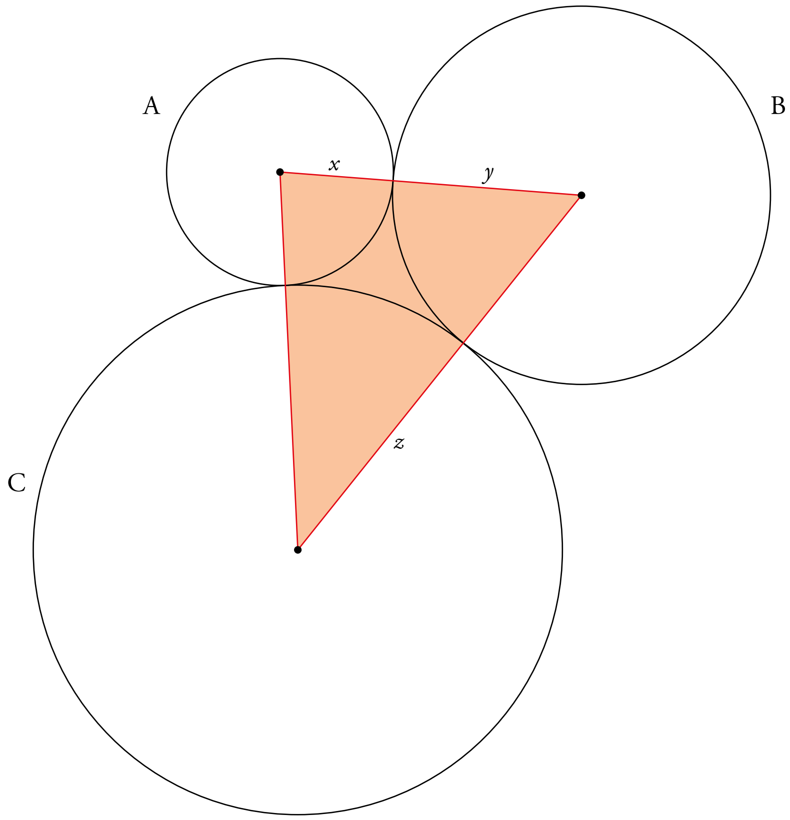
Veamos dónde es $x + 3$ positivo.

$x + 3 > 0 \to x > -3$

Solución: $x \in (-3, +\infty)$

8 **[El problema se plantea de forma que alumnado puede trabajar la asunción de riesgos (dimensión productiva) a través de la toma de decisiones necesarias para llegar a la solución correcta].**

Un circo está compuesto por tres pistas circulares tangentes dos a dos. Las distancias entre sus centros son 80, 100 y 120 metros, respectivamente. Calcula el diámetro de cada una de las pistas.



Llamamos x al radio de la pista A.

Llamamos y al radio de la pista B.

Llamamos z al radio de la pista C.

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ x + z = 100 \\ y + z = 120 \end{cases}$$

Solución: $x = 30$, $y = 50$, $z = 70$

La pista A tiene 60 m de diámetro; la pista B tiene 100 m de diámetro y la pista C tiene 140 m de diámetro.

4 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.4. (EA 1.4.1.-EA 1.4.2.-EA 1.4.3.)

Página 111

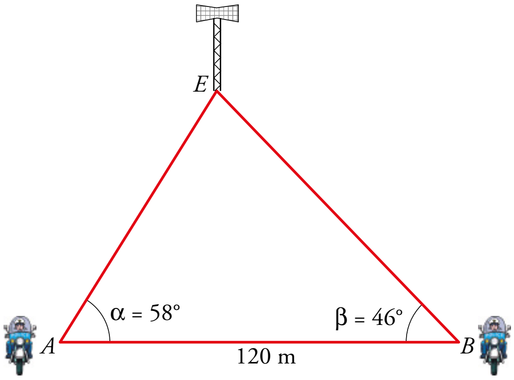
Resuelve

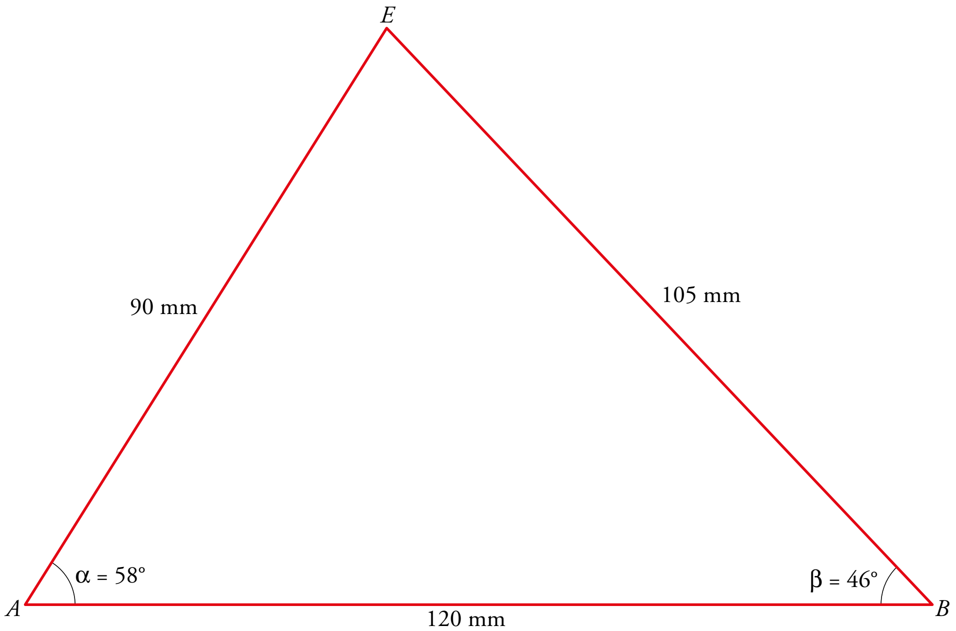
Localización de una emisora clandestina

Vamos a aplicar la técnica de la triangulación para resolver el siguiente problema:

Una emisora de radio clandestina E se sintoniza desde dos controles policiales, A y B. En cada uno de ellos se detecta la dirección en la que se encuentra, no la distancia. Por tanto, se conocen los ángulos $\alpha = 58°$ y $\beta = 46°$, así como la distancia $AB = 120$ m. Para localizar sobre el terreno la emisora E hay que calcular la distancia $\overline{AE}$ o la distancia $\overline{BE}$.

Resuelve el problema planteado realizando un dibujo en tu cuaderno a escala 1:1 000 (1 mm → 1 m). Sobre el papel, mide los lados AE y BE e interpreta el resultado en la realidad.





La emisora se encuentra a 90 m del control A y a 105 m del control B.

1 ▶ RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO (0° A 90°)

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 4.1. (EA 4.1.1.)

Página 112

Hazlo tú

1 **Sabiendo que** $\boldsymbol{sen\ \beta = 0{,}39}$ **y que** β **es agudo. Calcula** $\boldsymbol{cos\ \beta}$ **y** $\boldsymbol{tg\ \beta}$**.**

$$cos\ \beta = \sqrt{1 - sen^2\ \beta} = \sqrt{1 - (0{,}39)^2} = 0{,}92$$

$$tg\ \beta = \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = \frac{0{,}39}{0{,}92} = 0{,}42$$

2 **Conociendo** $\boldsymbol{tg\ \beta = 1{,}28}$ **y que** β **es agudo. Calcula** $\boldsymbol{sen\ \beta}$ **y** $\boldsymbol{cos\ \beta}$**.**

$s = sen\ \beta$; $c = cos\ \beta$

$$\begin{cases} s^2 + c^2 = 1 \ \rightarrow\ (1{,}28c)^2 + c^2 = 1 \ \rightarrow\ 2{,}6384c^2 = 1 \ \rightarrow\ c = 0{,}62 \\ \dfrac{s}{c} = 1{,}28 \ \rightarrow\ s = 1{,}28c \end{cases}$$

$cos\ \beta = 0{,}62$

$sen\ \beta = 1{,}28 \cdot 0{,}62 = 0{,}79$

2 ▸ RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUALESQUIERA (0° A 360°)

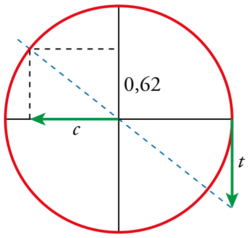
C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 4.1. (EA 4.1.1.)

Página 113

1 **Sabiendo que el ángulo α está en el segundo cuadrante $(90° < \alpha < 180°)$ y *sen* $\alpha = 0,62$, calcula *cos* α y *tg* α.**

$$cos\ \alpha = -\sqrt{1-0,62^2} = -0,78$$

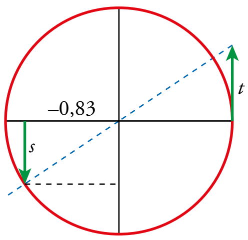
$$tg\ \alpha = \frac{0,62}{-0,78} = -0,79$$



2 **Sabiendo que el ángulo α está en el tercer cuadrante $(180° < \alpha < 270°)$ y *cos* $\alpha = -0,83$, calcula *sen* α y *tg* α.**

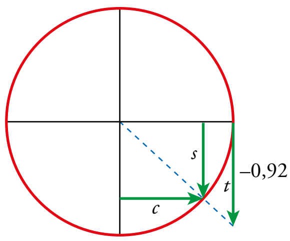
$$sen\ \alpha = -\sqrt{1-(0,83)^2} = -0,56$$

$$tg\ \alpha = \frac{-0,56}{-0,83} = 0,67$$



3 **Sabiendo que el ángulo α está en el cuarto cuadrante $(270° < \alpha < 360°)$ y *tg* $\alpha = -0,92$, calcula *sen* α y *cos* α.**

$$\left.\begin{array}{l} \frac{s}{c} = -0,92 \\ s^2 + c^2 = 1 \end{array}\right\} \text{ El sistema tiene dos soluciones: } \begin{array}{l} sen\ \alpha = -0,68;\ cos\ \alpha = 0,74 \\ s = 0,68;\ c = -0,74 \end{array}$$



4 **Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y amplíala para los ángulos 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° y 360°:**

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1				
cos	1	$\sqrt{3}/2$			0				
tg	0	$\sqrt{3}/3$			–				

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0
cos	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tg	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

3 ▶ ÁNGULOS FUERA DEL INTERVALO 0° A 360°

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) **CE 4.1.** (EA 4.1.1.)

Página 1140

1 **Pasa cada uno de los siguientes ángulos al intervalo [0°, 360°) y al intervalo (–180°, 180°]:**

a) 396° **b)** 492° **c)** 645°

d) 3 895° **e)** 7 612° **f)** 1 980°

Se trata de expresar el ángulo de la siguiente forma:

$$k \text{ o } -k, \text{ donde } k \le 180°$$

a) $396° = 396° - 360° = 36°$

b) $492° = 492° - 360° = 132°$

c) $645° = 645° - 360° = 285° = 285° - 360° = -75°$

d) $3\,895° = 3\,895° - 10 \cdot 360° = 295° = 295° - 360° = -65°$

e) $7\,612° = 7\,612° - 21 \cdot 360° = 52°$

f) $1\,980° = 1\,980° - 5 \cdot 360° = 180°$

Cuando hacemos, por ejemplo, $7\,612° = 7\,612° - 21 \cdot 360°$, ¿por qué tomamos 21? Porque, previamente, hemos realizado la división 7 612 ÷ 360 = 21.44... . Es el cociente entero.

2 **Determina el valor de estas razones trigonométricas:**

a) ***sen*** **13 290°** **b)** ***cos*** **(–1 680°)**

c) ***tg*** **3 825°** **d)** ***cos*** **4 995°**

e) ***sen*** **(–1 710°)** **f)** ***tg*** **3 630°**

g) ***cos*** **(–36 000°)** **h)** ***sen*** **(–330°)**

a) $13\,290° = 360° \cdot 36 + 330°$

$sen\ 13\,290° = sen\ 330° = -sen\ 30° = -\dfrac{1}{2}$

b) $-1\,680° = -360° \cdot 4 - 240°$

$cos\ (-1\,680°) = cos\ (-240°) = cos\ 120° = -cos\ 60° = -\dfrac{1}{2}$

c) $3\,825° = 360° \cdot 10 + 225°$

$tg\ 3\,825° = tg\ 225° = tg\ 45° = 1$

d) $4\,995° = 360° \cdot 13 + 315°$

$cos\ 4\,995° = cos\ 315° = cos\ 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) $-1\,710° = -360° \cdot 4 - 270°$

$sen\ (-1\,710°) = sen\ (-270°) = sen\ (90°) = 1$

f) $3\,630° = 360° \cdot 10 + 30°$

$tg\ 3\,630° = tg\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

g) $-36\,000° = -360° \cdot 100$

$cos\ (-36\,000°) = cos\ 0° = 1$

h) $sen\ (-330°) = sen\ 30° = \dfrac{1}{2}$

4 TRIGONOMETRÍA CON CALCULADORA

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 4.1. (EA 4.1.1.)

Página 115

Hazlo tú

1 **Sabiendo que** $sen\ \beta = 0{,}87$ **y que** $90^o < \beta < 180^o$**, calcula** $cos\ \beta$ **y** $tg\ \beta$**.**

$cos\ \beta = -0{,}493$

$tg\ \beta = -1{,}765$

Piensa y practica

1 **A partir de los datos que se ofrecen en cada apartado relativos al ángulo** α**, halla, con ayuda de la calculadora, las razones trigonométricas de** α**.**

a) $sen\ \alpha = 0{,}573;\ \alpha > 90°$

b $cos\ \alpha = 0{,}309;\ sen\ \alpha < 0$

c) $tg\ \alpha = 1{,}327;\ 180° < \alpha < 270°$

d) $cos\ \alpha = -0{,}819;\ tg\ \alpha < 0$

a) $cos\ \alpha = -0{,}82$

$tg\ \alpha = -0{,}699$

b) $sen\ \alpha = -0{,}951$

$tg\ \alpha = -3{,}078$

c) $sen\ \alpha = -0{,}799$

$cos\ \alpha = -0{,}602$

d) $sen\ \alpha = 0{,}574$

$tg\ \alpha = -0{,}7$

5 RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) **CE 4.1.** (EA 4.1.1.)

Página 117

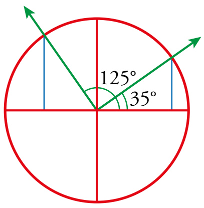
1 **Calcula las razones trigonométricas de 55°, 125°, 145°, 215°, 235°, 305° y 325° a partir de las razones trigonométricas de 35°:**

$$\textbf{sen } 35° = 0{,}57; \quad \textbf{cos } 35° = 0{,}82; \quad \textbf{tg } 35° = 0{,}70$$

- $55° = 90° - 35° \;\to\;$ 55° y 35° son complementarios.

$$\left.\begin{array}{l} sen\, 55° = cos\, 35° = 0{,}82 \\ cos\, 55° = sen\, 35° = 0{,}57 \end{array}\right\} \; tg\, 55° = \frac{sen\, 55°}{cos\, 55°} = \frac{0{,}82}{0{,}57} = 1{,}43 \quad \left(\text{También } tg\, 55° = \frac{1}{tg\, 35°} = \frac{1}{0{,}70} \approx 1{,}43\right)$$

- $125° = 90° + 35°$

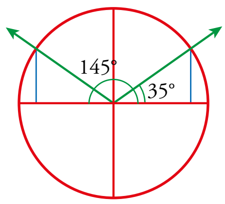


$sen\, 125° = cos\, 35° = 0{,}82$

$cos\, 125° = -sen\, 35° = -0{,}57$

$$tg\, 125° = \frac{-1}{tg\, 35°} = \frac{-1}{0{,}70} = -1{,}43$$

- $145° = 180° - 35° \;\to\;$ 145° y 35° son suplementarios.

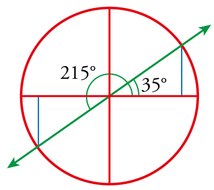


$sen\, 145° = sen\, 35° = 0{,}57$

$cos\, 145° = -cos\, 35° = -0{,}82$

$tg\, 145° = -tg\, 35° = -0{,}70$

- $215° = 180° + 35°$

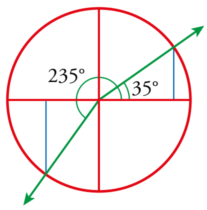


$sen\, 215° = -sen\, 35° = -0{,}57$

$cos\, 215° = -cos\, 35° = -0{,}82$

$tg\, 215° = tg\, 35° = 0{,}70$

- $235° = 270° - 35°$

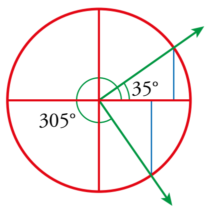


$sen\, 235° = -cos\, 35° = -0{,}82$

$cos\, 235° = -sen\, 35° = -0{,}57$

$$tg\, 235° = \frac{sen\, 235°}{cos\, 235°} = \frac{-cos\, 35°}{-sen\, 35°} = \frac{1}{tg\, 35°} = \frac{1}{0{,}70} = 1{,}43$$

- $305° = 270° + 35°$

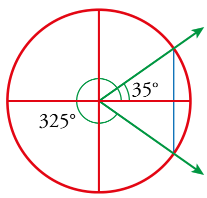


$sen\, 305° = -cos\, 35° = -0{,}82$

$cos\, 305° = sen\, 35° = 0{,}57$

$$tg\, 305° = \frac{sen\, 305°}{cos\, 305°} = \frac{-cos\, 35°}{sen\, 35°} = -\frac{1}{tg\, 35°} = -1{,}43$$

- $325° = 360° - 35° \;\; (= -35°)$



$sen\, 325° = -sen\, 35° = -0{,}57$

$cos\, 325° = cos\, 35° = 0{,}82$

$$tg\, 325° = \frac{sen\, 325°}{cos\, 325°} = \frac{-sen\, 35°}{cos\, 35°} = -tg\, 35° = -0{,}70$$

2 **Averigua las razones trigonométricas de 358°, 156° y 342°, utilizando la calculadora solo para hallar razones trigonométricas de ángulos comprendidos entre 0° y 90°.**

- $358° = 360° - 2°$

  $sen\ 358° = -sen\ 2° = -0{,}0349$

  $cos\ 358° = cos\ 2° = 0{,}9994$

  $tg\ 358° \overset{(*)}{=} -tg\ 2° = -0{,}03492$

  $(*)\ tg\ 358° = \dfrac{sen\ 358°}{cos\ 358°} = \dfrac{-sen\ 2°}{cos\ 2°} = -tg\ 2°$

- $156° = 180° - 24°$

  $sen\ 156° = sen\ 24° = 0{,}4067$

  $cos\ 156° = -cos\ 24° = -0{,}9135$

  $tg\ 156° = -tg\ 24° = -0{,}4452$

  OTRA FORMA DE RESOLVERLO:

  $156° = 90° + 66°$

  $sen\ 156° = cos\ 66° = 0{,}4067$

  $cos\ 156° = -sen\ 66° = -0{,}9135$

  $tg\ 156° = \dfrac{-1}{tg\ 66°} = \dfrac{-1}{2{,}2460} = -0{,}4452$

- $342° = 360° - 18°$

  $sen\ 342° = -sen\ 18° = -0{,}3090$

  $cos\ 342° = cos\ 18° = 0{,}9511$

  $tg\ 342° = -tg\ 18° = -0{,}3249$

3 **Dibuja, sobre la circunferencia goniométrica, ángulos que cumplan las siguientes condiciones y estima, en cada caso, el valor de las restantes razones trigonométricas:**

a) $sen\ \alpha = -\dfrac{1}{2},\ tg\ \alpha > 0$

b) $cos\ \alpha = \dfrac{3}{4},\ \alpha > 90°$

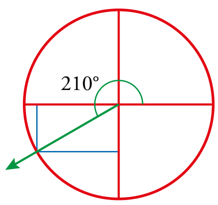
c) $tg\ \alpha = -1,\ cos\ \alpha < 0$

d) $tg\ \alpha = 2,\ cos\ \alpha < 0$

e) $sen\ \alpha = -1$

f) $cos\ \alpha = 0,\ sen\ \alpha > 0$

a)

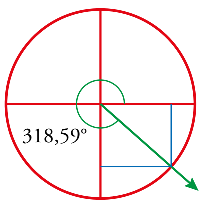


$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = -1/2 < 0 \\ tg\ \alpha > 0 \end{array}\right\} \rightarrow cos\ \alpha < 0 \rightarrow \alpha \in$ 3.er cuadrante

$cos\ 210° \approx -0{,}86$

$tg\ 210° \approx 0{,}58$

b)

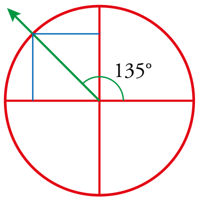


$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = 3/4 \\ \alpha > 90° \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in$ 4.° cuadrante

$sen\ 318{,}59° \approx -0{,}66$

$tg\ 318{,}59° \approx -0{,}88$

c)

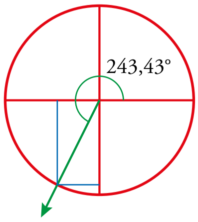


$$\left.\begin{array}{l} tg\ \beta = -1 < 0 \\ cos\ \beta < 0 \end{array}\right\} \to sen\ \beta > 0 \to \beta \in 2.^{\circ} \text{ cuadrante}$$

$sen\,135° \approx 0,7$

$cos\,135° \approx -0,7$

d)

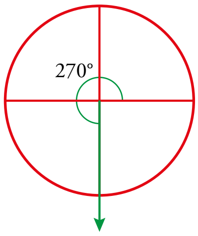


$$\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = 2 > 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{array}\right\} \to sen\ \alpha < 0 \to \alpha \in 3.^{er} \text{ cuadrante}$$

$sen\,243,43° \approx -0,9$

$cos\,243,43° \approx -0,45$

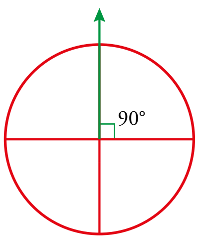
e)



$cos\ 270° = cos\ 90° = 0$

$tg\ 270°$ no existe

f)



$sen\ 90° = 1$

$tg\ 90°$ no existe

6 ▶ RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) **CE 4.2.** (EA 4.2.1.)

Página 118

Hazlo tú

1 **Los catetos de un triángulo rectángulo son $a = 47$ cm y $b = 62$ cm. Halla la hipotenusa y los ángulos.**

Por el teorema de Pitágoras, $c = \sqrt{47^2 + 62^2} = 77,8$ cm

$tg\,\hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{47}{62} \rightarrow \hat{A} = 37°\ 9'\ 52''$

$\hat{B} = 90° - \hat{A} = 90° - 37°\ 9'\ 52'' = 52°\ 50'\ 8''$

2 **En un triángulo rectángulo conocemos $\hat{B} = 62°$ y $b = 152$ m. Halla los demás elementos.**

$sen\,\hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow c = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{152}{sen\,62°} = 172,15\text{ cm}$

$tg\,\hat{B} = \frac{b}{a} \rightarrow a = \frac{b}{tg\,\hat{B}} = \frac{152}{tg\,62°} = 80,82\text{ cm}$

$\hat{A} = 90° - 62° = 28°$

3 **Conocemos la hipotenusa, $c = 72$ m, y el ángulo $\hat{A} = 23°$ de un triángulo rectángulo. Calcula b.**

$cos\,\hat{A} = \frac{b}{c} \rightarrow b = c \cdot cos\,\hat{A} = 72 \cdot cos\,23° = 66,28$ cm

Página 119

1 **Las siguientes propuestas están referidas a triángulos rectángulos que, en todos los casos, se designan por ABC, siendo C el ángulo recto.**

a) Datos: $c = 32$ cm, $\hat{B} = 57°$. Calcula a.

b) Datos: $c = 32$ cm, $\hat{B} = 57°$. Calcula b.

c) Datos: $a = 250$ m, $b = 308$ m. Calcula c y $\hat{A}$.

d) Datos: $a = 35$ cm, $\hat{A} = 32°$. Calcula b.

e) Datos: $a = 35$ cm, $\hat{A} = 32°$. Calcula c.

a) $cos\,\hat{B} = \frac{a}{c} \rightarrow a = c\,cos\,\hat{B} = 17,43$ cm

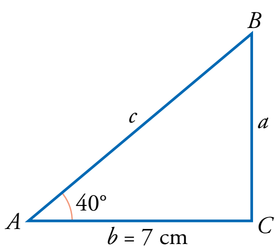
b) $sen\,\hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow b = c\,sen\,\hat{B} = 26,84$ cm

c) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 396,69$ m; $tg\,\hat{A} = \frac{a}{b} = 0,81 \rightarrow \hat{A} = 39°\ 3'\ 57''$

d) $tg\,\hat{A} = \frac{a}{b} \rightarrow b = \frac{a}{tg\,\hat{A}} = 56,01$ cm

e) $sen\,\hat{A} = \frac{a}{c} \rightarrow c = \frac{a}{sen\,\hat{A}} = 66,05$ cm

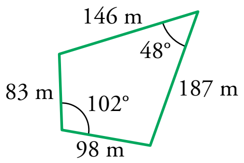
2 **Para determinar la altura de un poste nos hemos alejado 7 m de su base y hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un valor de 40°. ¿Cuánto mide el poste?**

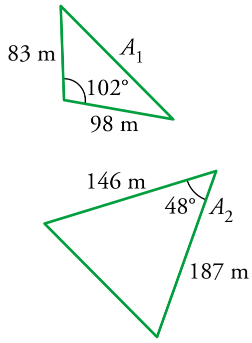


$tg\,40° = \frac{a}{7} \rightarrow a = 7\,tg\,40° = 5,87$ m

3 **[La búsqueda de un método efectivo para calcular el área con las herramientas disponibles permite trabajar el autoconocimiento (dimensión personal)].**

Halla el área del siguiente cuadrilátero. Sugerencia: pártelo en dos triángulos.





$A_1 = \frac{1}{2} 98 \cdot 83 \textit{ sen } 102° = 3\,978,13 \text{ m}^2$

$A_2 = \frac{1}{2} 187 \cdot 146 \textit{ sen } 48° = 10\,144,67 \text{ m}^2$

El área es la suma de A_1 y A_2: $14\,122,80 \text{ m}^2$

7 ▶ RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS. ESTRATEGIA DE LA ALTURA

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) **CE 4.2.** (EA 4.2.1.)

Página 121

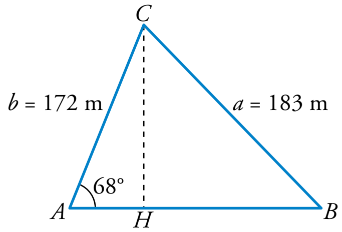
1 **En un triángulo *ABC* conocemos $\hat{A} = 68°$, $b = 172$ m y $a = 183$ m. Calcula la longitud del lado *c*.**

$\overline{AH} = 172 \cos 68° = 64{,}43$ m

$\overline{CH} = 172 \operatorname{sen} 68° = 159{,}48$ m

$\overline{HB} = \sqrt{a^2 - \overline{CH}^2} = 89{,}75$ m

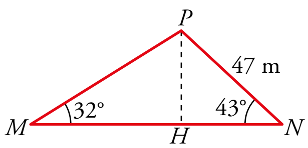
$c = \overline{AH} + \overline{HB} = 64{,}43 \text{ m} + 89{,}75 \text{ m} = 154{,}18$ m



2 **En un triángulo *MNP* conocemos $\hat{M} = 32°$, $\hat{N} = 43°$ y $\overline{NP} = 47$ m. Calcula $\overline{MP}$.**

$\operatorname{sen} 43° = \dfrac{\overline{PH}}{47} \to \overline{PH} = 47 \operatorname{sen} 43° = 32{,}05$ m

$\operatorname{sen} 32° = \dfrac{\overline{PH}}{\overline{MP}} \to \overline{MP} = \dfrac{\overline{PH}}{\operatorname{sen} 32°} = \dfrac{32{,}05}{\operatorname{sen} 32°} = 60{,}49$ m



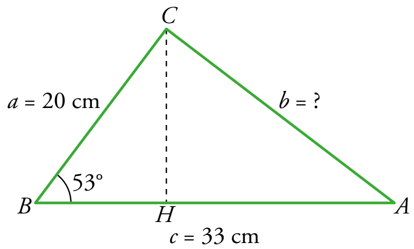
3 **En un triángulo *ABC* conocemos $a = 20$ cm, $c = 33$ cm y $\hat{B} = 53°$. Calcula la longitud del lado *b*.**

$\overline{BH} = a \cos 53° = 12{,}04$ cm

$\overline{CH} = a \operatorname{sen} 53° = 15{,}97$ cm

$\overline{HA} = c - \overline{BH} = 20{,}96$ cm

$b = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HA}^2} = 26{,}35$ cm



4 **[El alumnado deberá trabajar la asunción de riesgos (dimensión productiva) para buscar el método para calcular la altura del edificio].**

Observa el gráfico de la derecha. Estamos en *A*, medimos el ángulo bajo el que se ve el edificio (42°), nos alejamos 40 m y volvemos a medir el ángulo (35°). ¿Cuál es la altura del edificio y a qué distancia nos encontramos de él?

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 42° = \dfrac{h}{d} \to h = d\ tg\ 42° \\ tg\ 35° = \dfrac{h}{d+40} \to h = (d+40)\ tg\ 35° \end{array}\right\} \to$$

$\to d\ tg\ 42° = (d+40) tg\ 35° \to d = \dfrac{40\ tg\ 35°}{tg\ 42° - tg\ 35°} = 139{,}90$ m

$h = d\ tg\ 42° = 125{,}97$ m

La altura es 125,97 m. La primera distancia es 139,90 m, y ahora, después de alejarnos 40 m, estamos a 179,90 m.

8 ▶ DOS IMPORTANTES TEOREMAS PARA RESOLVER TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

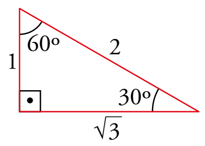
C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) CE (4.2.1.)

Página 122

1 **¿Verdadero o falso?**

a) El teorema de los senos confirma que en un triángulo, «a mayor lado se opone mayor ángulo».

b) Este triángulo rectángulo es la mitad de un triángulo equilátero.



Dividimos el seno de cada ángulo entre el lado opuesto:

- $\dfrac{sen\ 60°}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{sen\ 90°}{2} = \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{sen\ 30°}{1} = \dfrac{1/2}{1} = \dfrac{1}{2}$

Con estas igualdades se comprueba que se cumple el teorema de los senos.

a) Verdadero. Como la razón entre el lado y el seno del ángulo opuesto es constante, cuanto mayor es el lado, mayor es el seno del ángulo opuesto y, por tanto, mayor es el ángulo opuesto (al tratarse de ángulos de un triángulo).

b) Verdadero. Con estas igualdades se comprueba el teorema de los senos en el caso particular de un triángulo equilátero. Sin embargo, el teorema es mucho más general porque se pueda aplicar a triángulos cualesquiera.

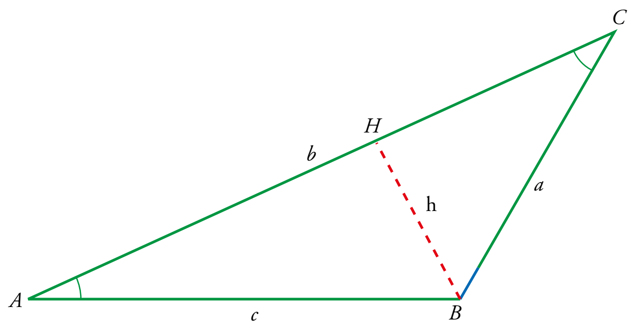
2 ¿Qué te hace decir eso? **[La justificación de la igualdad que propone el enunciado permite trabajar esta estrategia].**

Demuestra detalladamente, basándote en la demostración del teorema de los senos, la siguiente relación:

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}}$$

Lo demostramos para $\hat{C}$ ángulo agudo. (Si fuese un ángulo obtuso razonaríamos como en el ejercicio anterior).

Trazamos la altura h desde el vértice *B*. Así, los triángulos obtenidos *AHB* y *CHB* son rectángulos.



Por tanto, tenemos

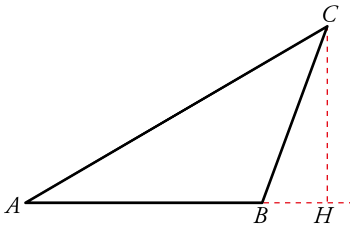
$$sen\ \hat{A} = \frac{h}{c} \rightarrow h = c\ sen\ \hat{A}$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{h}{a} \rightarrow h = a\ sen\ \hat{C}$$

$$c\ sen\ \hat{A} = a\ sen\ \hat{C}$$

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}}$$

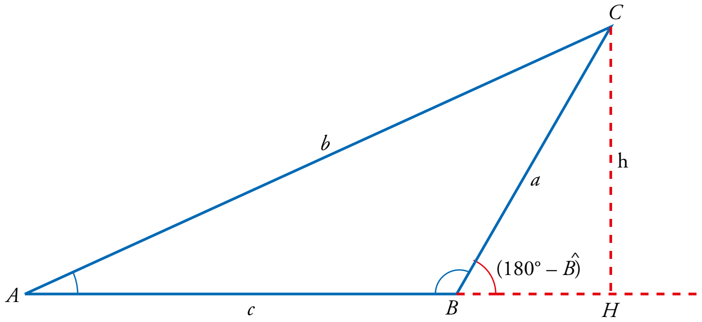
3 **Repite la demostración anterior en el caso de que $\hat{B}$ sea obtuso.**
Ten en cuenta que $sen\ (180° - \hat{B}) = sen\ \hat{B}$**.**



$$sen\ \hat{A} = \frac{h}{b} \rightarrow h = b\ sen\ \hat{A}$$

$$sen\ \hat{B} = sen\ (180° - \hat{B}) = \frac{h}{a} \rightarrow h = a\ sen\ \hat{B}$$

$$b\ sen\ \hat{A} = a\ sen\ \hat{B} \rightarrow \frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}}$$



Página 123

Hazlo tú

1 **Halla** b **y** c **conociendo** $a = 56$ **m,** $\hat{B} = 52°$ **y** $\hat{C} = 112°$**.**

$\hat{A} = 180° - 52° - 112° = 16°$

Ahora usamos el teorema de los senos.

$$\frac{56}{sen\ 16°} = \frac{b}{sen\ 52°} \rightarrow b = \frac{56 \cdot sen\ 52°}{sen\ 16°} = 160,1 \text{ m}$$

$$\frac{56}{sen\ 16°} = \frac{c}{sen\ 112°} \rightarrow c = \frac{56 \cdot sen\ 112°}{sen\ 16°} = 188,37 \text{ m}$$

2 **Calcula** $\hat{A}$ **conociendo** $a = 6$ **cm,** $b = 4$ **cm y** $\hat{B} = 30°$**.**

Por el teorema de los senos:

$$\frac{6}{sen\ \hat{A}} = \frac{4}{sen\ 30°} \rightarrow sen\ \hat{A} = \frac{6 \cdot sen\ 30°}{4} = 0,75 \rightarrow \hat{A}_1 = 48°\ 35'\ 25'' \qquad \hat{A}_2 = 131°\ 24'\ 35''$$

En este caso ambas soluciones son posibles porque $\hat{A} + \hat{B} < 180°$.

Por tanto, tenemos dos posibles triángulos, uno acutángulo y otro obtusángulo.

Piensa y practica

4 **[La justificación de si las afirmaciones son verdaderas o falsas permite trabajar la destreza expresión oral de esta clave].**

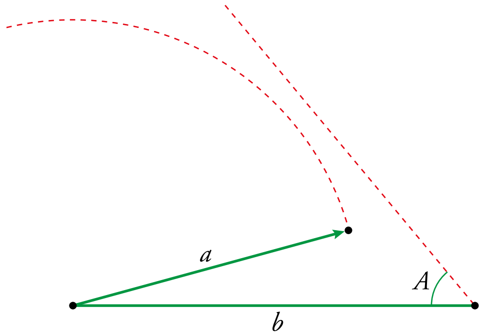
¿Verdadero o falso?

a) Si nos dan dos lados de un triángulo, a **y** b**, y el ángulo opuesto a uno de ellos,** $\hat{A}$**, y deseamos hallar el ángulo** $\hat{B}$**, con el teorema de los senos seguro que llegaremos a una solución.**

b) Si nos dan dos lados y un ángulo de un triángulo y deseamos hallar otro lado, el teorema de los senos seguro que nos permite llegar a una solución.

a) Falso.

Si el lado a no es suficientemente grande, el problema no tendrá solución como muestra el siguiente dibujo:



b) Falso.

Si nos dan el ángulo comprendido entre los dos lados, no podemos plantear el problema usando el teorema de los senos.

5 **En un triángulo ABC, conocemos $a = 4$ cm y $\hat{B} = 30°$. Halla $\hat{A}$ en los siguientes casos:**

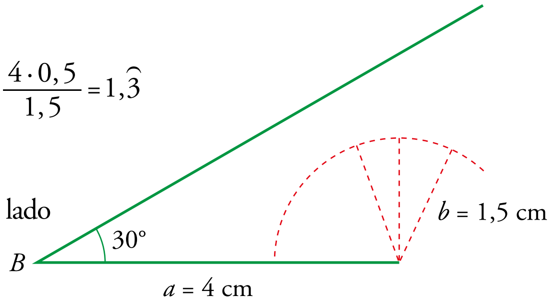
a) $b = 1,5$ cm **b) $b = 2$ cm** **c) $b = 3$ cm** **d) $b = 4$ cm**

a) $b = 1,5$ cm

$$\frac{a}{sen\,\widehat{A}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} \rightarrow \frac{4}{sen\,\widehat{A}} = \frac{1,5}{sen\,30°} \rightarrow sen\,\hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{1,5} = 1,\widehat{3}$$

¡Imposible, pues $sen\,\hat{A} \in [-1, 1]$ siempre!

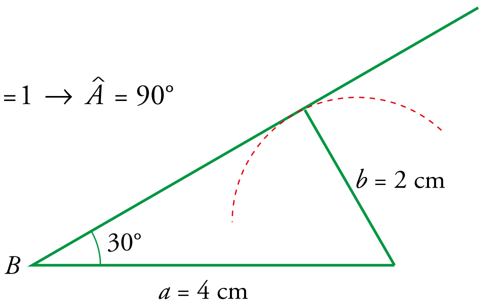
No tiene solución. Con esta medida, $b = 1,5$ cm, el lado b nunca podría tocar al lado c.



b) $b = 2$ cm

$$\frac{a}{sen\,\widehat{A}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} \rightarrow \frac{4}{sen\,\widehat{A}} = \frac{2}{sen\,30°} \rightarrow sen\,\hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{2} = 1 \rightarrow \hat{A} = 90°$$

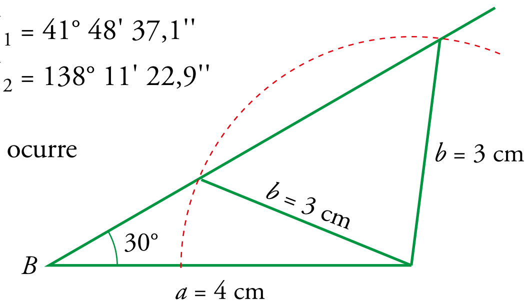
Se obtiene una única solución.



c) $b = 3$ cm

$$\frac{4}{sen\,\widehat{A}} = \frac{3}{sen\,30°} \rightarrow sen\,\hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{3} = 0,\widehat{6} \rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = 41°\ 48'\ 37,1'' \\ \hat{A}_2 = 138°\ 11'\ 22,9'' \end{cases}$$

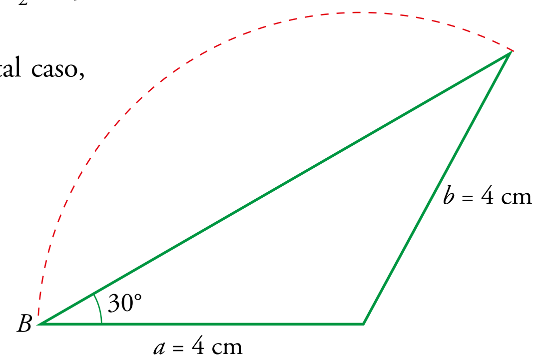
Las dos soluciones son válidas, pues en ningún caso ocurre que $\hat{A} + \hat{B} > 180°$.



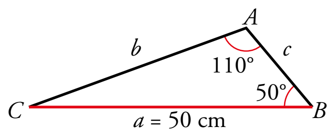
d) $b = 4$ cm

$$\frac{4}{sen\,\hat{A}} = \frac{4}{sen\,30°} \rightarrow sen\,\hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{4} = 0,5 \rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = 30° \rightarrow \text{Una solución válida.} \\ \hat{A}_2 = 150° \end{cases}$$

La solución $\hat{A}_2 = 150°$ no es válida, pues, en tal caso, sería $\hat{A} + \hat{B} = 180°$. ¡Imposible!



6 **Calcula los lados b y c del triángulo de la derecha.**



Hallamos el ángulo $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 180° - 160° = 20°$

Aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{50}{sen\,110°} = \frac{b}{sen\,50°} \rightarrow b = \frac{50 \cdot sen\,50°}{sen\,110°} = 40,76 \text{ cm}$$

$$\frac{50}{sen\,110°} = \frac{c}{sen\,20°} \rightarrow c = \frac{50 \cdot sen\,20°}{sen\,110°} = 18,2 \text{ cm}$$

Página 124

7 **¿Verdadero o falso?**

a) Si de un triángulo conocemos dos lados y el ángulo que forman, el teorema del coseno nos permite obtener el otro lado.

b) Si aplicamos el teorema del coseno a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, entonces obtenemos el teorema de Pitágoras.

a) Verdadero. Esta es la situación en la que se usa el teroema del coseno para calcular el tercer lado de un triángulo.

b) Verdadero. El ángulo opuesto a la hipotenusa es el ángulo recto y, por tanto, su coseno vale cero.

Si a es la hipotenusa, el ángulo opuesto es $\hat{A} = 90°$ y se obtiene el teorema de Pitágoras a partir del teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\,90° \rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Página 125

Hazlo tú

1 **Calcula c conociendo $a = 7$ m, $b = 22$ m y $\hat{C} = 40°$.**

Por el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos\,\hat{C} \rightarrow c = \sqrt{7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cdot cos\,40°} = 17,24 \text{ m}$$

Piensa y practica

8 **Resuelve los siguientes triángulos:**

a) $a = 12$ **cm;** $b = 16$ **cm;** $c = 10$ **cm**

b) $a = 7$ **cm;** $b = 22$ **cm;** $\hat{C} = 40°$

c) $b = 4$ **cm;** $c = 3$ **cm;** $\hat{A} = 105°$

d) $a = 4$ **m;** $\hat{B} = 45°$**;** $\hat{C} = 60°$

e) $b = 5$ **m;** $\hat{A} = \hat{C} = 35°$

f) $a = b = 10$ **cm;** $\hat{C} = 40°$

g) $a = 5$ **cm;** $\hat{A} = 75°$**;** $\hat{B} = 45°$

h) $a = 16$ **cm;** $\hat{A} = 90°$**;** $\hat{C} = 30°$

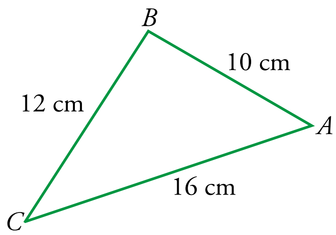
a) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

$12^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cos \hat{A}$

$144 = 256 + 100 - 320 \cos \hat{A}$

$\cos \hat{A} = \dfrac{256 + 100 - 144}{320} = 0,6625$

$\hat{A} = 48°\ 30'\ 33''$



• $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

$256 = 144 + 100 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cos \hat{B}$

$\cos \hat{B} = \dfrac{144 + 100 - 256}{240} = -0,05$

$\hat{B} = 92°\ 51'\ 57,5''$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \rightarrow \hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B}$

$\hat{C} = 38°\ 37'\ 29,5''$

b) • $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$

$c^2 = 7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cos 40° = 49 + 484 - 235,94 = 297,06$

$c = 17,24$ cm

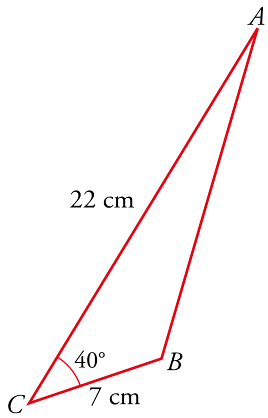
• $\dfrac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow \dfrac{7}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \dfrac{17,24}{\operatorname{sen} 40°}$

$\operatorname{sen} \hat{A} = \dfrac{7 \operatorname{sen} 40°}{17,24} = 0,26$

$\hat{A} = \begin{cases} \hat{A}_1 = 15°\ 7'\ 44,3'' \\ \hat{A}_2 = 164°\ 52'\ 15,7'' \rightarrow \text{No válida.} \end{cases}$

(La solución $\hat{A}_2$ no es válida, pues $\hat{A}_2 + \hat{C} > 180°$).

• $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 124°\ 52'\ 15,7''$



c) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 105° = 31,21$

$a = 5,59$ m

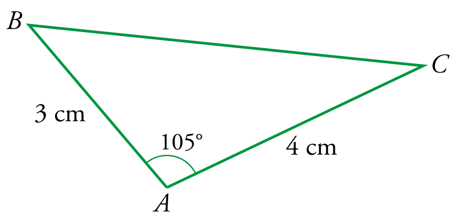
• $\dfrac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \rightarrow \dfrac{5,59}{\operatorname{sen} 105°} = \dfrac{4}{\operatorname{sen} \hat{B}}$

$\operatorname{sen} \hat{B} = \dfrac{4 \cdot \operatorname{sen} 105°}{5,59} = 0,6912$

$\hat{B} = \begin{cases} \hat{B}_1 = 43°\ 43'\ 25,3'' \\ \hat{B}_2 = 136°\ 16'\ 34,7'' \rightarrow \text{No válida.} \end{cases}$

(La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180°$).

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 31°\ 16'\ 34,7''$



d) • $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 75°$

• $\dfrac{a}{sen\ \widehat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \widehat{B}} \rightarrow \dfrac{4}{sen\ 75°} = \dfrac{b}{sen\ 45°}$

$b = \dfrac{4 \cdot sen\ 45°}{sen\ 75°} = 2,93 \text{ m}$

• $\dfrac{a}{sen\ \widehat{A}} = \dfrac{c}{sen\ \widehat{C}} \rightarrow \dfrac{4}{sen\ 75°} = \dfrac{c}{sen\ 60°}$

$c = \dfrac{4 \cdot sen\ 60°}{sen\ 75°} = 3,59 \text{ m}$

e) • $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 110°$

• $\dfrac{b}{sen\ \widehat{B}} = \dfrac{a}{sen\ \widehat{A}} \rightarrow \dfrac{5}{sen\ 110°} = \dfrac{a}{sen\ 35°}$

$a = \dfrac{5 \cdot sen\ 35°}{sen\ 110°} = 3,05 \text{ m}$

• Como $\hat{A} = \hat{C} \rightarrow a = c \rightarrow c = 3,05$ m

f) • Como los lados a y b son iguales, el triángulo es isósceles:

$\hat{A} + \hat{B} = 180° - 40° \rightarrow 2\hat{A} = 140° \rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 70°$

• $\dfrac{10}{sen\ 70°} = \dfrac{c}{sen\ 40°} \rightarrow c = \dfrac{10 \cdot sen\ 40°}{sen\ 70°} = 6,84$ cm

g) • $\hat{C} = 180° - 75° - 45° = 60°$

• $\dfrac{5}{sen\ 75°} = \dfrac{b}{sen\ 45°} \rightarrow b = \dfrac{5 \cdot sen\ 45°}{sen\ 75°} = 3,66 \text{ cm}$

• $\dfrac{5}{sen\ 75°} = \dfrac{c}{sen\ 60°} \rightarrow c = \dfrac{5 \cdot sen\ 60°}{sen\ 75°} = 4,48 \text{ cm}$

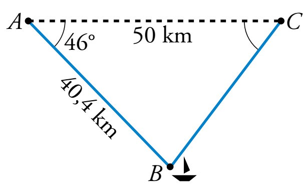
h) • $\hat{B} = 180° - 90° - 30° = 60°$

• $sen\ 30° = \dfrac{c}{16} \rightarrow c = 16 \cdot sen\ 30° = 8 \text{ cm}$

• $cos\ 30° = \dfrac{b}{16} \rightarrow b = 16 \cdot cos\ 30° = 13,86 \text{ cm}$

9 **[Para decidir cuál de las dos estaciones de radio se encuentra más cerca de *B* el alumnado deberá trabajar la iniciativa (dimensión productiva)].**

Un barco, *B*, salió de *A* y ha recorrido 40,4 km formando un ángulo de 46° con la línea de la costa hasta que se ha quedado sin combustible. Pide socorro y reciben sus señales en dos estaciones de radio, *A* y *C*, que distan entre sí 50 km. ¿Qué estación se encuentra más cerca de *B*?



$\overline{BC}^2 = 40,4^2 + 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 40,4 \cdot cos\ 46° = 1\,325,74 \rightarrow \overline{BC} = 36,4$ km

Por tanto, la más cercana es *C*.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 4.1. (EA 4.1.1.) CE 4.2. (EA 4.2.1.)

Página 126

1. Relaciones entre las razones trigonométricas

Hazlo tú

a) Si $cos\ \alpha = -3/4$ y $180° < \alpha < 270°$, calcula sin hallar el ángulo α:

$sen\ \alpha$ $\quad$ $tg\ \alpha$

$sen\ (180° + \alpha)$ $\quad$ $cos\ (90° - \alpha)$

$sen\ (360° - \alpha)$ $\quad$ $tg\ (180° - \alpha)$

b) Obtén con la calculadora el valor del ángulo α.

a) $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ sen^2\ \alpha + \left(-\dfrac{3}{4}\right)^2 = 1 \ \rightarrow\ sen\ \alpha = \pm\sqrt{1 - \dfrac{9}{16}} = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Como α pertenece al tercer cuadrante, su seno es negativo $\rightarrow\ sen\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{7}}{4}}{-\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ $\qquad$ $cos\ (90° - \alpha) = sen\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

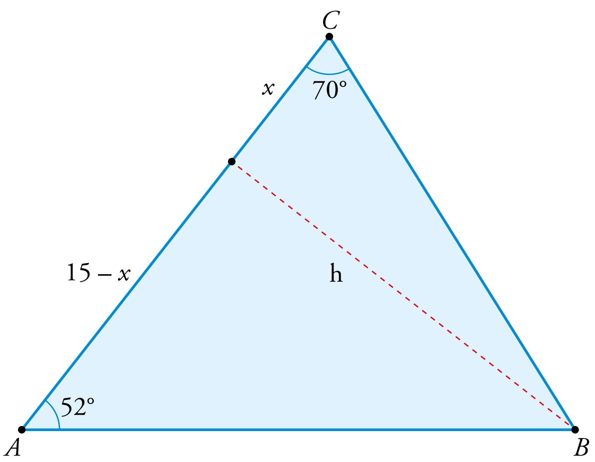
$sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ $\quad$ $tg\ (180° - \alpha) = -tg\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ $\qquad$ $sen\ (360° - \alpha) = -sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

b) 221° 24'

2. Cálculo de una distancia mediante la estrategia de la altura

Hazlo tú

- **De un triángulo ABC conocemos $\overline{AC} = 15$ m, $\hat{A} = 52°$ y $\hat{C} = 70°$. Calcula la altura sobre AC.**



Llamamos h a la altura trazada sobre el lado $\overline{AC}$. Dividimos este lado en dos partes, que medirán x y $15 - x$.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 52° = \dfrac{h}{15 - x} \ \rightarrow\ h = (15 - x) \cdot tg\ 52° \\ tg\ 70° = \dfrac{h}{x} \ \rightarrow\ h = x \cdot tg\ 70° \end{array}\right\} \rightarrow\ (15 - x) \cdot tg\ 52° = x \cdot tg\ 70° \ \rightarrow\ x = 4{,}77 \text{ m}$$

Finalmente, $h = x \cdot tg\ 70° = 4{,}77 \cdot tg\ 70° = 13{,}11$ m.

Página 127

3. Resolución de un triángulo conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Hazlo tú

- **Resuelve el triángulo *ABC* en el que conocemos a = 12 cm, b = 8,3 cm y $\hat{A}$ = 110°.**

Aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{12}{sen\,110°} = \frac{8,3}{sen\,\hat{B}} \to sen\,\hat{B} = \frac{8,3 \cdot sen\,110°}{12} = 0,65 \to \hat{B} \text{ puede ser } 40°\ 32'\ 30'' \text{ o bien } 139°\ 27'\ 30''$$

Este segundo valor no es posible porque la suma de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ sería superior a 180°.

Por tanto, $\hat{B} = 40°\ 32'\ 30''$.

$\hat{C} = 180° - (110° + 40°\ 32'\ 30'') = 29°\ 27'\ 30''$

Hallamos el lado c usando, de nuevo, el teorema de los senos:

$$\frac{12}{sen\,110°} = \frac{c}{sen\,(29°\ 27'\ 30'')} \to c = \frac{12 \cdot sen\,(29°\ 27'\ 30'')}{sen\,110°} = 6,28 \text{ cm}$$

4. Cálculo del área de una parcela descomponiéndola en triángulos

Hazlo tú

- **Halla el área del cuadrilátero irregular *ABCD* sabiendo:**

$\overline{AB}$ = 62 m; $\overline{BC}$ = 19 m; $\overline{CD}$ = 21 m; $\overline{AD}$ = 45 m; $\hat{B}$ = 60°.

Trazando la diagonal $\overline{AC}$ descomponemos el cuadrilátero en dos triángulos.

- Área del triángulo *ABC*:

$$sen\ 60° = \frac{h}{19} \to h = 19 \cdot sen\ 60° = 16,45 \text{ m}$$

$$S_{ABC} = \frac{62 \cdot 16,45}{2} = 509,95 \text{ m}^2$$

- Área del triángulo *ACD*:

Para poder usar la fórmula de Herón necesitamos el lado $\overline{AC}$. Por el teorema del coseno:

$$\overline{AC}^2 = 19^2 + 62^2 - 2 \cdot 19 \cdot 62\ cos\ 60° = 3\,027 \to \overline{AC} = \sqrt{3\,027} = 55,02 \text{ m}$$

Ahora, aplicamos la fórmula de Herón:

$$p = \frac{21 + 45 + 55,02}{2} = 60,51$$

$$S_{ACD} = \sqrt{60,51(60,51-21)(60,51-45)(60,51-55,02)} = 451,19 \text{ m}^2$$

- El área del cuadrilátero es:

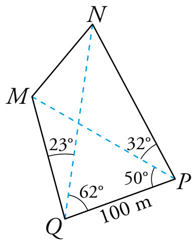
$$S_{ABCD} = 509,95 + 451,19 = 961,14 \text{ m}^2$$

Página 128

5. Cálculo de la distancia entre dos puntos inaccesibles

Hazlo tú

- **Calcula la distancia $\overline{MN}$.**



- Usando el triángulo PQM podemos calcular el lado $\overline{QM}$:

  El ángulo $\widehat{QMP} = 180° - 50° - 85° = 45°$

  $$\frac{\overline{QM}}{sen\,50°} = \frac{100}{sen\,45°} \rightarrow \overline{QM} = \frac{100 \cdot sen\,50°}{sen\,45°} = 108,34 \text{ m}$$

- Usando el triángulo PQN podemos calcular la diagonal $\overline{QN}$:

  El ángulo $\widehat{QNP} = 180° - 62° - 82° = 36°$

  $$\frac{\overline{QN}}{sen\,82°} = \frac{100}{sen\,36°} \rightarrow \overline{QN} = \frac{100 \cdot sen\,82°}{sen\,36°} = 168,47 \text{ m}$$

- Ahora usamos el teorema del coseno para hallar $\overline{MN}$:

  $$\overline{MN}^2 = 108,34^2 + 168,47^2 - 2 \cdot 108,34 \cdot 168,47\, cos\,23° = 6\,517,5$$

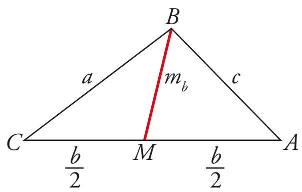
  $$\overline{MN} = \sqrt{6\,517,5} = 80,73 \text{ m}$$

6. Longitud de la mediana de un triángulo

Hazlo tú

- **Demuestra que en el triángulo de lados a, b, c, la longitud de la mediana sobre el lado b es:**

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$



Usaremos el teorema del coseno en los triángulos ABC y AMB para demostrarlo.

Aplicado en el triángulo ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\,A \rightarrow -bc\,cos\,A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} \qquad (*)$$

Aplicado en el triángulo AMB:

$$\overline{BM}^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2 - 2\frac{b}{2}c\,cos\,A \rightarrow -bc\,cos\,A = \overline{BM}^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2 \qquad (**)$$

De (*) y (**) se sigue:

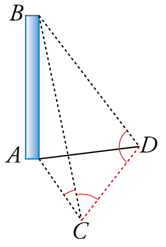
$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} = \overline{BM}^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2 \rightarrow \overline{BM}^2 = \frac{2a^2 - b^2 + 2c^2}{4} \rightarrow \overline{BM} = \frac{\sqrt{2a^2 - b^2 + 2c^2}}{2}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) CE 4.2. (EA 4.2.1.)

Página 129

1. Altura de una torre



- **Para medir la altura de la torre *AB*, nos situamos en los puntos *C* y *D* y tomamos estas medidas:**

$\overline{CD}$ = 15 m; $\widehat{ACB}$ = 40°

$\widehat{BCD}$ = 58°; $\widehat{BDC}$ = 70°

¿Qué altura tiene la torre?

$\hat{B}$ = 180° – 58° – 70° = 52°

$$\frac{\overline{BC}}{sen\,70°}=\frac{15}{sen\,52°}\ \to\ \overline{BC}=\frac{15\cdot sen\,70°}{sen\,52°}=17,89\text{ m}$$

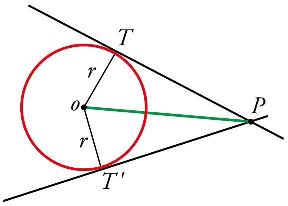
$$sen\,40°=\frac{\overline{AB}}{17,89}\ \to\ \overline{AB}=17,89\cdot sen\,40°=11,5\text{ m}$$

2. Distancia entre puntos de tangencia

- **Las tangentes trazadas desde el punto *P* a una circunferencia de centro *O* y de 14 cm de radio forman un ángulo de 32°. Calcular:**

a) La distancia de P al centro de la circunferencia.

b) La longitud de la cuerda que une los puntos de tangencia.



Sabemos que el ángulo $\widehat{OPT}$ es la mitad del ángulo $\widehat{TPT'}$ $\to$ $\widehat{OPT}=32°:2=16°$

También sabemos que r = 14 cm.

a) Teniendo en cuenta el triángulo rectángulo *OPT*:

$$sen\left(\widehat{OPT}\right)=\frac{14}{\overline{OP}}\ \to\ \overline{OP}=\frac{14}{sen\,16°}=51°12'$$

b) Queremos saber el ángulo $\widehat{TOT'}$, y para ello tenemos en cuenta que del cuadrilátero *TOT'P* conocemos tres ángulos. Como sus ángulos suman 360° y que los ángulos $\widehat{OTP}$ y $\widehat{OT'P}$ son rectos, despejamos y tenemos que el ángulo $\widehat{TOT'}$ = 360° – 90° – 90° – 32° = 148°.

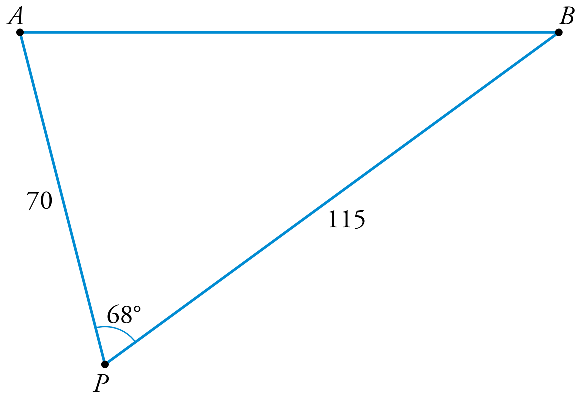
Consideramos el triángulo *TOT'*, del que conocemos un ángulo y dos lados, por lo que aplicando el teorema del coseno:

$$\overline{TT'}^2=r^2+r^2-2r^2\cos\widehat{T'OT}\ \to\ \overline{TT'}=26,9\text{ cm}$$

3. Cálculo de algunos lados y ángulos de un triángulo

- **Desde un punto P observamos los puntos A y B, situados en las orillas opuestas de una laguna, bajo un ángulo de 68°. Sabemos que $\overline{PA}$ = 70 m y $\overline{PB}$ = 115 m.**

Calcular la distancia AB y los ángulos $\widehat{PAB}$ y $\widehat{PBA}$.



$\overline{AB}^2 = 70^2 + 115^2 - 2 \cdot 70 \cdot 115 \cos 68° = 12\,093{,}8$

$\overline{AB} = \sqrt{12\,093{,}8} = 110$ m

$\frac{115}{sen\,\widehat{PAB}} = \frac{110}{sen\,68°} \to sen\,\widehat{PAB} = \frac{115 \cdot sen\,68°}{110} = 0{,}9693 \to \widehat{PAB} = 75°\,46'\,22''$

$\widehat{PBA} = 180° - 68° - 75°\,46'\,22'' = \;36°\,13'\,38''$

4. Cálculo de los ángulos de un triángulo cuando se conocen los tres lados

- **La resultante de dos fuerzas F_1 = 16 N y F_2 = 12 N, aplicadas en un mismo punto, es de R = 25 N. ¿Qué ángulo forman entre sí? ¿Y cada una de ellas con la resultante?**

$\overline{BC} = F_1 = 16$

Del triángulo ABC conocemos los 3 lados, por lo que podemos aplicar el teorema del coseno:

$R^2 = 16^2 + 12^2 - 2 \cdot 16 \cdot 12 \cdot \cos \widehat{B} \to \cos \widehat{B} = 0{,}586 \to B = 125°\,52'$

Teniendo en cuenta el paralelogramo $ABCD$ sabemos que el ángulo $\widehat{A}$ y el $\widehat{B}$ se complementan:

$$180° = \widehat{A} + \widehat{B} \to A = 54°\,8'$$

$16^2 = 12^2 + 25^2 - 2 \cdot 12 \cdot 25 \cdot \cos \widehat{CAB} = 0{,}855 \to \widehat{CAB} = 31°\,14'$ es el ángulo que forman R y F_2.

Nos falta encontrar el ángulo formado $\widehat{CAD}$, y sabemos que es la diferencia entre $\widehat{A}$ y $\widehat{CAB}$, por lo que su valor es $\widehat{A} - \widehat{CAD}$ = 22° 52'.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 130

Para practicar

Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas

1 **Utiliza las relaciones fundamentales para hallar las demás razones trigonométricas de los ángulos agudos α, β y γ.**

a) $cos\ \alpha = \sqrt{5}/3$ **b)** $sen\ \beta = 3/5$ **c)** $tg\ \gamma = 3$

a) $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to sen^2\ \alpha + \frac{5}{9} = 1 \to sen^2\ \alpha = \frac{4}{9} \to sen\ \alpha = \pm\frac{2}{3}$

- Si $sen\ \alpha = \frac{2}{3} \to tg\ \alpha = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
- Si $sen\ \alpha = -\frac{2}{3} \to tg\ \alpha = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{-2}{\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$

b) $sen^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \to \frac{9}{25} + cos^2\ \beta = 1 \to cos^2\ \beta = \frac{16}{25} \to cos\ \beta = \pm\frac{4}{5}$

- Si $cos\ \beta = \frac{4}{5} \to tg\ \beta = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$
- Si $cos\ \beta = -\frac{4}{5} \to tg\ \beta = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

c) $\frac{sen\ \gamma}{cos\ \gamma} = 3 \to sen\ \gamma = 3\,cos\ \gamma$

$sen^2\ \gamma + cos^2\ \gamma = 1 \to (3cos\ \gamma)^2 + cos^2\ \gamma = 1 \to 10cos^2\ \gamma = 1 \to cos\ \gamma = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$

- Si $cos\ \gamma = \frac{\sqrt{10}}{10} \to sen\ \gamma = \frac{3\sqrt{10}}{10}$
- Si $cos\ \gamma = -\frac{\sqrt{10}}{10} \to sen\ \gamma = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2 **Halla las razones trigonométricas de α, sin hallar α.**

a) $sen\ \alpha = -2/3$; $cos\ \alpha < 0$ **b)** $cos\ \alpha = 5/6$; $tg\ \alpha < 0$
c) $tg\ \alpha = 2,25$; $sen\ \alpha < 0$ **d)** $cos\ \alpha = -\sqrt{5}/4$; $sen\ \alpha < 0$

a) Como $cos\ \alpha < 0$, $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to \frac{4}{9} + cos^2\ \alpha = 1 \to cos^2\ \alpha = \frac{5}{9} \to cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$tg\ \alpha = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

b) Como $tg\ \alpha < 0$, $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to sen^2\ \alpha + \frac{25}{36} = 1 \to sen^2\ \alpha = \frac{11}{36} \to sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{6}$

$tg\ \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{11}}{6}}{\frac{5}{6}} = -\frac{\sqrt{11}}{5}$

c) $\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 2,25 \to sen\ \alpha = 2,25\ cos\ \alpha$

$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to (2,25cos\ \alpha)^2 + cos^2\ \alpha = 1 \to 6,0625cos^2\ \alpha = 1 \to$

$\to cos\ \alpha = -\sqrt{\frac{1}{6,0625}} = -0,4061$ (tiene el mismo signo que $sen\ \alpha$ por ser $tg\ \alpha > 0$)

$sen\ \alpha = 2,25cos\ \alpha = 2,25 \cdot (-0,4061) = -0,9137$

d) Como $sen\ \alpha < 0$, $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to sen^2\ \alpha + \frac{5}{16} = 1 \to sen^2\ \alpha = \frac{11}{6} \to sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}$

$tg\ \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}}{-\frac{\sqrt{5}}{4}} = 2\sqrt{\frac{22}{15}}$

3 **Sabiendo que** $\boldsymbol{cos}\ \alpha = 0{,}8$ **y** $\boldsymbol{sen}\ \alpha = 0{,}6$; **calcula:**

a) $cos\ (180° + \alpha)$ **b)** $sen\ (180° - \alpha)$

c) $tg\ (-\alpha)$ **d)** $sen\ (90° - \alpha)$

e) $cos\ (90° + \alpha)$ **f)** $tg\ (90° - \alpha)$

a) $cos\ (180° + \alpha) = -cos\ \alpha = -0{,}8$

b) $sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha = 0{,}6$

c) $tg\ (-\alpha) = -tg\ \alpha = -\dfrac{0{,}6}{0{,}8} = -\dfrac{3}{4}$

d) $sen\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha = 0{,}8$

e) $cos\ (90° + \alpha) = -sen\ \alpha = -0{,}6$

f) $tg\ (90° - \alpha) = \dfrac{1}{tg\ \alpha} = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{4}{3}$

4 **Si** $sen\ 42° = 0{,}67$; $cos\ 42° = 0{,}74$ **y** $tg\ 42° = 0{,}9$; **halla las siguientes razones trigonométricas sin utilizar la calculadora:**

a) $cos\ 48°$ **b)** $sen\ (-48°)$ **c)** $sen\ 138°$

d) $tg\ 318°$ **e)** $cos\ 222°$ **f)** $tg\ 858°$

a) $cos\ 48° = cos\ (90° - 42°) = sen\ 42° = 0{,}67$

b) $sen\ (-48°) = -sen\ 48° = -sen\ (90° - 42°) = -cos\ 42° = -0{,}74$

c) $sen\ 138° = sen\ (180° - 42°) = sen\ 42° = 0{,}67$

d) $tg\ 318° = tg\ (360° - 42°) = tg\ (-42°) = -tg\ 42° = -0{,}9$

e) $cos\ 222° = cos\ (180° + 42°) = -cos\ 42° = -0{,}74$

f) $tg\ 858° = tg\ (360° \cdot 2 + 138°) = tg\ 138° = tg\ (180° - 42°) = -tg\ 42° = -0{,}9$

5 **Expresa con un ángulo del primer cuadrante estas razones trigonométricas y di su valor exacto sin usar la calculadora:**

a) $sen\ 135°$ **b)** $cos\ 240°$ **c)** $tg\ 120°$

d) $cos\ 1\,845°$ **e)** $tg\ 1\,125°$ **f)** $sen\ (-120°)$

a) $sen\ 135° = sen\ (90° + 45°) = cos\ 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $cos\ 240° = cos\ (180° + 60°) = -cos\ 60° = -\dfrac{1}{2}$

c) $tg\ 120° = tg\ (180° - 60°) = -tg\ 60° = -\sqrt{3}$

d) $cos\ 1\,845° = cos\ (360° \cdot 5 + 45°) = cos\ 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) $tg\ 1\,125° = tg\ (360° \cdot 3 + 45°) = tg\ 45° = 1$

f) $sen\ (-120°) = -sen\ 120° = -sen\ (180° - 60°) = -sen\ 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6 **Halla con la calculadora el valor del ángulo** α**:**

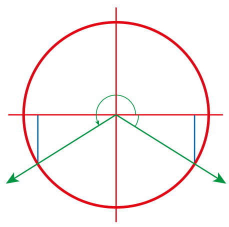
a) $sen\ \alpha = -0{,}75$; $\alpha < 270°$ **b)** $cos\ \alpha = -0{,}37$; $\alpha > 180°$

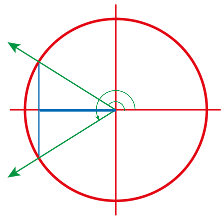
c) $tg\ \alpha = 1{,}38$; $sen\ \alpha < 0$ **d)** $cos\ \alpha = 0{,}23$; $sen\ \alpha < 0$

a) Con la calculadora $\to$ $\alpha = -48°\ 35'\ 25'' \in$ 4.° cuadrante

Como debe ser $\left.\begin{cases} sen\ \alpha < 0 \\ \alpha < 270° \end{cases}\right\} \to \alpha \in$ 3.er cuadrante

Luego $\alpha = 180° + 48°\ 35'\ 25'' = 228°\ 35'\ 25''$

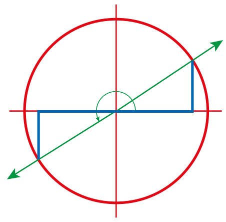




b) Con la calculadora: 111° 42' 56,3''

$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha < 0 \\ \alpha > 180° \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante

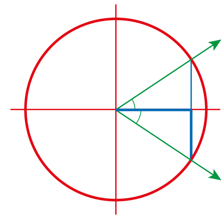
Luego $\alpha = 360° - 111°\ 42'\ 56{,}3' = 248°\ 17'\ 3{,}7''$



c) $\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = 1{,}38 > 0 \\ sen\ \alpha < 0 \end{array}\right\}$ $cos < 0 \rightarrow \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante

Con la calculadora: $tg^{-1}\ 1{,}38 = 54°\ 4'\ 17{,}39''$

$\alpha = 180° + 54°\ 4'\ 17{,}39'' = 234°\ 4'\ 17{,}4''$



d) $\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = 0{,}23 > 0 \\ sen\ \alpha < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in 4.°$ cuadrante

Con la calculadora: $cos^{-1}\ 0{,}23 = 76°\ 42'\ 10{,}5''$

$\alpha = -76°\ 42'\ 10{,}5'' = 283°\ 17'\ 49{,}6''$

7 **¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.**

a) $sen\ \alpha = cos\ (90° + \alpha)$ **b)** $sen\ (180° + \alpha) = sen\ (360° - \alpha)$

c) $cos\ \alpha = sen\ (90° + \alpha)$ **d)** $cos\ (180° + \alpha) = cos\ (180° - \alpha)$

e) $-tg\ \alpha = tg\ (360 - \alpha)$ **f)** $tg\ (180 + \alpha) = tg\ (-\alpha)$

a) Verdadero si $\alpha = 0°$ o $\alpha = 90°$ ya que:

$cos\ (90° + \alpha) - sen\ \alpha = sen\ \alpha \rightarrow \alpha = 0°$ o $\alpha = 90°$.

b) Verdadero ya que $sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha = sen\ (360° - \alpha)$.

c) Verdadero ya que $cos\ \alpha = sen\ (90° + \alpha) = cos\ \alpha$.

d) Verdadero ya que $cos\ (180° + \alpha) = -cos\ \alpha$ y $cos\ (180° - \alpha) = -cos\ \alpha$.

e) Verdadero ya que $tg\ (360° - \alpha) = tg\ (-\alpha)$.

f) $tg\ (180° + \alpha) = tg\ \alpha$ y $tg\ (-\alpha) = -tg\ (\alpha)$, por tanto, es cierto si $tg\ \alpha = -tg\ \alpha \rightarrow \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$, que es cierto si es cero, es decir cuando $sen\ \alpha = 0° \rightarrow \alpha = 0°$ o bien $\alpha = 90°$.

8 **Se llama *cosecante* de α, a la razón trigonométrica inversa del seno; *secante* de α a la inversa del coseno y *cotangente* de α a la inversa de la tangente. Se escriben así:**

$cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$ $sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}$ $cotg\ \alpha = \frac{1}{tag\ \alpha}$

a) Calcula $cosec\ \alpha$, $sec\ \alpha$ y $cotg\ \alpha$ en cada uno de los apartados del ejercicio 2.

b) Si α es el ángulo del ejercicio 3, halla:

$cotg\ (90° - \alpha)$ $cosec\ (180° - \alpha)$ $sec(180° + \alpha)$ $cotg\ (-\alpha)$

a) Con 2a):

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} = \frac{1}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

$$sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha} = \frac{1}{2/\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Con 2b):

$cosec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha} = \dfrac{6}{-\sqrt{11}}$

$sec\,\alpha = \dfrac{1}{cos\,\alpha} = \dfrac{6}{5}$

$cotg\,\alpha = \dfrac{1}{tg\,\alpha} = \dfrac{-5}{\sqrt{11}}$

Con 2c):

$cosec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha} = \dfrac{1}{-0{,}9137} = -1{,}094$

$sec\,\alpha = \dfrac{1}{cos\,\alpha} = \dfrac{1}{0{,}4061} = -2{,}462$

$cotg\,\alpha = \dfrac{1}{tg\,\alpha} = \dfrac{1}{2{,}25} = 0{,}\widehat{4}$

Con 2d):

$cosec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha} = \dfrac{-4}{\sqrt{11}}$

$sec\,\alpha = \dfrac{1}{cos\,\alpha} = \dfrac{-4}{\sqrt{5}}$

$cotg\,\alpha = \dfrac{1}{tg\,\alpha} = \dfrac{5}{\sqrt{55}}$

b) $cos\,\alpha = 0{,}8;\ \ sen\ \alpha = 0{,}6$

$cotg\,(90° - \alpha) = \dfrac{1}{tg\,(90° - \alpha)} = \dfrac{1}{\dfrac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}} = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

$sec(180° + \alpha) = \dfrac{1}{cos(180° + \alpha)} = \dfrac{1}{-cos\,\alpha} = \dfrac{1}{-0{,}8} = -1{,}25$

$cosec\,(180° - \alpha) = \dfrac{1}{sen(180° - \alpha)} = \dfrac{1}{sen\,\alpha} = \dfrac{1}{0{,}6} = 1{,}\widehat{6}$

$cotg\,(-\alpha) = \dfrac{1}{tg(-\alpha)} = \dfrac{1}{\dfrac{-sen\,\alpha}{cos\,\alpha}} = -\dfrac{0{,}8}{0{,}6} = -1{,}\widehat{3}$

9 **Halla las razones trigonométricas de los ángulos del intervalo [0°, 360°) que cumplen** ***cos*** **α = 3** ***sen*** **α.**

Para que se cumpla que *cos* α = 3 *sen* α es imprescindible que seno y coseno tengan el mismo signo, por lo que α puede pertenecer al primer o tercer cuadrante solamente. O lo que es lo mismo, que su tangente sea positiva e igual a 1/3 porque *tg* α = *sen* α/*cos* α = *sen* α/3 *sen* α = 1/3.

Como sabemos que $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$, sustituimos la igualdad dada:

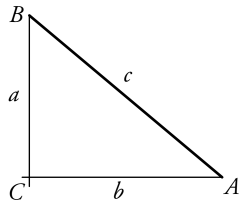
$sen^2\ \alpha + (3\ sen\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow 10\ sen^2\ \alpha = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}} \rightarrow cos\ \alpha = \pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

- Si $\alpha = 18°\ 26' \rightarrow sen\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}},\ cos\ \alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}},\ tg\ \alpha = \dfrac{1}{3}$
- Si $\alpha = 180° + 18°\ 26' = 198°\ 26' \rightarrow sen\,\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{10}},\ cos\,\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{10}},\ tg\,\alpha = \dfrac{1}{3}$
- Si $\alpha = -18°\ 25'\ 5'' = 341°\ 34'\ 55''$ (cuarto cuadrante) $\rightarrow sen\ \alpha = -0{,}316$ y $cos\,\alpha = -0{,}949$ por lo que no se cumple la igualdad. Además $tg\ \alpha = -\dfrac{1}{3}$.
- Si $\alpha = 180° - 18°\ 25'\ 5''$ (segundo cuadrante) $\rightarrow sen\,\alpha = 0{,}316$ y $cos\,\alpha = -0{,}949$ por lo que no se cumple la igualdad. Además $tg\ \alpha = -\dfrac{1}{3}$.

Por lo tanto las soluciones buscadas son $\alpha = 18°\ 25'\ 5''$ y $\alpha = 198°\ 25'\ 5''$.

Resolución de triángulos rectángulos

10 **En una película de acción, la protagonista se desliza, desde el punto más alto de un edificio de 60 m de alto, por un cable de acero sujeto al suelo formando un ángulo de 40°. Calcula la longitud del cable.**



Nos piden encontrar c sabiendo que el ángulo $\hat{A}$ = 40° y a = 60 m.

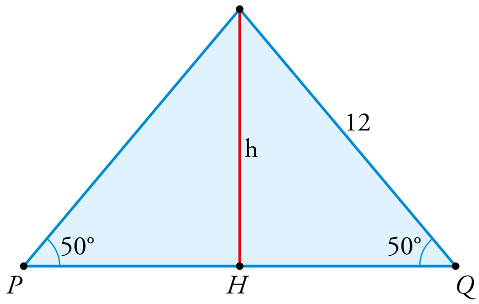
$$sen\ 40 = \frac{60}{c} \rightarrow c = \frac{60}{sen\ 40} = 93{,}3 \text{ m}$$

11 **Un mástil está sujeto a tierra con dos cables de 12 m que forman ángulos de 50° con el suelo. Calcula la altura del mástil y la distancia de la base a los puntos de sujeción.**

Altura del poste = h = 12 · *sen* 50° = 9,19 m

La distancia de la base al punto de sujeción es:

$\overline{HQ}$ = 12 · *cos* 50° = 7,71 m



12 **En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 10 m y el ángulo opuesto es de 40°. Halla su perímetro y su área.**

La medida de los ángulos iguales es $\frac{180° - 40°}{2} = 70°$.

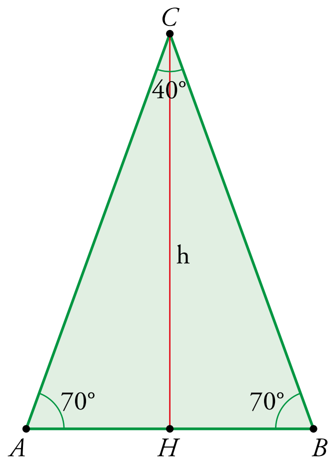
$tg\ 70° = \frac{h}{5} \rightarrow h = 5 \cdot tg\ 70° = 13{,}74$ m

$$S_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{10 \cdot 13{,}74}{2} = 68{,}7 \text{ m}^2$$

$$cos\ 70° = \frac{5}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = \frac{5}{cos\ 70°} = 14{,}62 \text{ m}$$

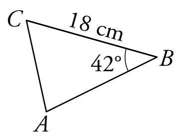
El perímetro del triángulo ABC es:

P = 2 · 14,62 + 10 = 39,24 m

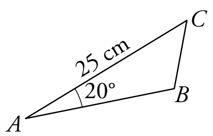


13 **Calcula la longitud de la altura trazada desde C en cada uno de los triángulos siguientes:**

a)



b)

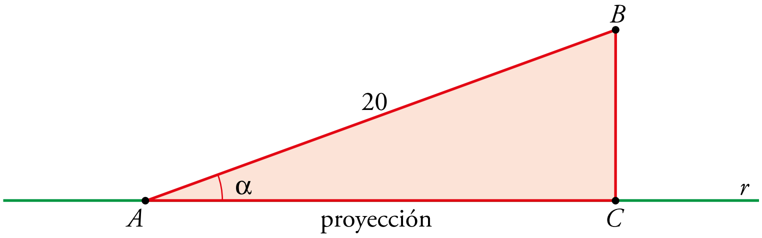


a) h = 18 · *sen* 42° = 12,04 cm

b) h = 25 · *sen* 20° = 8,55 cm

14 **Halla, en cada caso, la proyección de un segmento de 20 cm de longitud sobre una recta *r* con la que forma un ángulo α:**

a) α **= 20°** **b)** α **= 45°** **c)** α **= 80°**



Podemos obtener la proyección usando el coseno del ángulo α.

a) $\overline{AC} = 20 \cdot cos\ 20° = 18,79$ cm

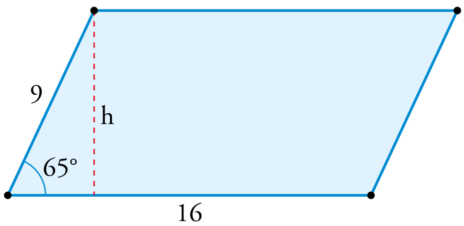
b) $\overline{AC} = 20 \cdot cos\ 45° = 14,14$ cm

c) $\overline{AC} = 20 \cdot cos\ 80° = 3,47$ cm

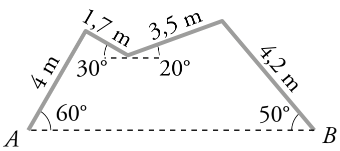
15 **Calcula el área de un paralelogramo cuyos lados, de 9 cm y 16 cm, forman un ángulo de 65°.**

h = 9 · *sen* 65° = 8,16 cm

La superficie es S = 16 · 8,16 = 130,56 cm^2



16 **El tejado de una casa tiene la forma y las medidas que se indican en la figura. Calcula la distancia $\overline{AB}$.**



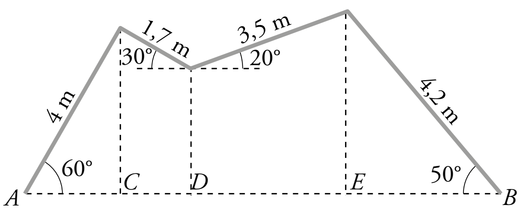
Trazamos perpendiculares del segmento $\overline{AB}$ que pasen por los tres vértices superiores. Esas rectas dividen al segmento $\overline{AB}$ en 4 partes. Las longitudes de estos segmentos, de izquierda a derecha son:

$\overline{AC} = 4 \cdot cos\ 60° = 2$ m

$\overline{CD} = 1,7 \cdot cos\ 30° = 1,47$ m

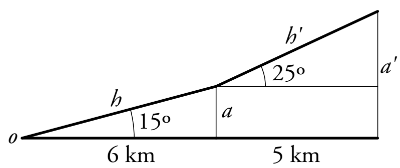
$\overline{DE} = 3,5 \cdot cos\ 20° = 3,29$ m

$\overline{EB} = 4,2 \cdot cos\ 50° = 2,7$ m



La longitud total es: $\overline{AB}$ = 2 + 1,47 + 3,29 + 2,7 = 9,46 m

17 **Un avión despega formando un ángulo de 15° con el suelo. A 6 km del punto de salida en horizontal, aumenta 10° su inclinación para subir en un ángulo de 25° con el suelo. Una montaña de 2 500 m se encuentra a 11 km del punto de partida. ¿Volará el avión sobre la montaña o tendrá que cambiar su dirección?**



$cos\ 15° = \dfrac{6}{h} \rightarrow h = \dfrac{6}{cos\ 15°} = 6,2$ km

$sen\ 15° = \dfrac{a}{h} \rightarrow a = sen\ 15° \cdot 6,2 = 1,6$ km

$cos\ 25° = \dfrac{5}{h'} \rightarrow h' = \dfrac{5}{cos\ 25°} = 5,52$ km

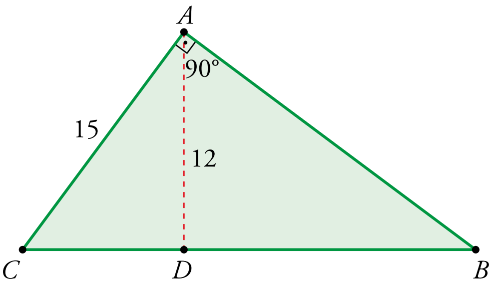
$sen\ 25° = \dfrac{a'}{h'} \rightarrow a' = sen\ 25 \cdot 5,52 = 2,33$ km $\rightarrow a + a' > 2,5$ km

Deberá cambiar de ruta.

18 **En un triángulo ABC, rectángulo en A, se conocen un cateto y la altura sobre la hipotenusa:**

$$\overline{AC} = 15 \text{ m} \qquad \overline{AD} = 12 \text{ m}$$

Halla los lados y los ángulos del triángulo.



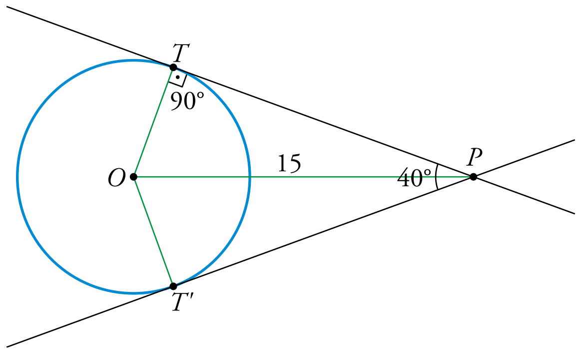
$sen\ \hat{C} = \dfrac{12}{15} = 0{,}8 \ \rightarrow\ \hat{C} = 53°\ 7'\ 48''$

$\hat{B} = 90° - 53°\ 7'\ 48'' = 36°\ 52'\ 12''$

$sen\ \hat{B} = \dfrac{12}{\overline{AB}} \ \rightarrow\ \overline{AB} = \dfrac{12}{sen\ \hat{B}} = 20 \text{ m}$

Por el teorema de Pitágoras, $\overline{BC} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ m}$.

19 **Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan las tangentes que forman entre sí un ángulo de 40°. Si la distancia de P al centro de la circunferencia es de 15 cm, ¿cuál es su radio?**



El radio $\overline{OT}$ es el cateto opuesto al ángulo de $20° = \dfrac{40°}{2}$, luego $\overline{OT} = 15 \cdot sen\ 20° = 5{,}13$ cm.

Resolución de triángulos cualesquiera

20 **Aplica el teorema de los senos para resolver el triángulo ABC en los siguientes casos:**

a) $\hat{A} = 55°$, $\hat{B} = 40°$, $c = 15$ m

b) $\hat{A} = 50°$, $a = 23$ m, $c = 18$ m

a) $\hat{C} = 180° - 55° - 40° = 85°$; $\dfrac{a}{sen\ 55°} = \dfrac{b}{sen\ 40°} = \dfrac{15}{sen\ 85°}$

$a = \dfrac{15 \cdot sen\ 55°}{sen\ 85°} = 12{,}33 \text{ cm}; \qquad b = \dfrac{15 \cdot sen\ 40°}{sen\ 85°} = 9{,}68 \text{ cm}$

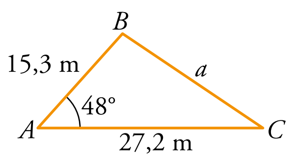
b) $\dfrac{23}{sen\ 50°} = \dfrac{18}{sen\ \hat{C}} \ \rightarrow\ sen\ \hat{C} = \dfrac{18 \cdot sen\ 50°}{23} = 0{,}6 \ \rightarrow\ \hat{C} = 36°\ 52'\ 12''$

$\hat{B} = 180° - 50° - 36°\ 52'\ 12'' = 93°\ 7'\ 48''$

$\dfrac{23}{sen\ 50°} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} \ \rightarrow\ b = \dfrac{23 \cdot sen\ \hat{B}}{sen\ 50°} = 30 \text{ cm}$

Página 131

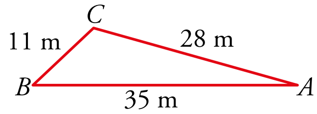
21 **Aplica el teorema del coseno para hallar el lado a del triángulo ABC, en el que $\hat{A} = 48°$, $b = 27{,}2$ m y $c = 15{,}3$ m.**



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \hat{A}$

$a^2 = 27{,}2^2 + 15{,}3^2 - 2 \cdot 27{,}2 \cdot 15{,}3\ cos\ 48° \ \rightarrow\ a = 20{,}42 \text{ m}$

22 **Halla los ángulos del triángulo *ABC* en el que *a* = 11 m, *b* = 28 m y *c* = 35 m.**



$11^2 = 28^2 + 35^2 - 2 \cdot 28 \cdot 35 \cos \hat{A} \rightarrow$

$\rightarrow \cos \hat{A} = \dfrac{28^2 + 35^2 - 11^2}{2 \cdot 28 \cdot 35} \rightarrow \hat{A} = 15° \ 34' \ 41''$

$28^2 = 11^2 + 35^2 - 2 \cdot 11 \cdot 35 \cos \hat{B} \rightarrow \cos \hat{B} = \dfrac{11^2 + 35^2 - 28^2}{2 \cdot 11 \cdot 35} \rightarrow \hat{B} = 43° \ 7' \ 28''$

$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) \rightarrow \hat{C} = 121° \ 17' \ 51''$

23 **Resuelve los siguientes triángulos:**

a) $b = 32$ **cm,** $a = 17$ **cm,** $\hat{C} = 40°$

b) $a = 85$ **cm,** $c = 57$ **cm,** $\hat{B} = 65°$

c) $a = 23$ **cm,** $b = 14$ **cm,** $c = 34$ **cm**

a) $c^2 = 32^2 + 17^2 - 2 \cdot 32 \cdot 17 \cos 40° \rightarrow c = 21{,}9$ cm

$17^2 = 32^2 + 21{,}9^2 - 2 \cdot 32 \cdot 21{,}9 \cos \hat{A} \rightarrow \hat{A} = 29° \ 56' \ 8''$

$\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) \rightarrow \hat{B} = 110° \ 3' \ 52''$

b) $b^2 = 85^2 + 57^2 - 2 \cdot 85 \cdot 57 \cos 65° \rightarrow b = 79{,}87$ cm

$57^2 = 85^2 + 79{,}87^2 - 2 \cdot 85 \cdot 79{,}87 \cos \hat{C} \rightarrow \hat{C} = 40° \ 18' \ 5''$

$\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) \rightarrow \hat{A} = 74° \ 41' \ 55''$

c) $23^2 = 14^2 + 34^2 - 2 \cdot 14 \cdot 34 \cos \hat{A} \rightarrow \hat{A} = 30° \ 10' \ 29''$

$14^2 = 23^2 + 34^2 - 2 \cdot 23 \cdot 34 \cos \hat{B} \rightarrow \hat{B} = 17° \ 48' \ 56''$

$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) \rightarrow \hat{C} = 133° \ 0' \ 35''$

24 **Resuelve los siguientes triángulos:**

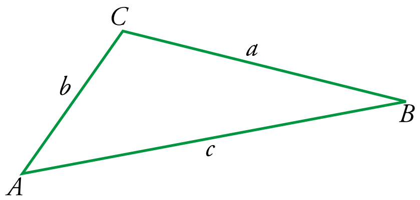
a) $a = 100$ **m,** $\hat{B} = 47°$**,** $\hat{C} = 63°$

b) $a = 70$ **m,** $b = 55$ **m,** $\hat{C} = 73°$

c) $a = 25$ **m,** $b = 30$ **m,** $c = 40$ **m**

d) $a = 15$ **m,** $b = 9$ **m,** $\hat{A} = 130°$

a) • $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 70°$



• $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} \rightarrow \dfrac{100}{\text{sen } 70°} = \dfrac{b}{\text{sen } 47°} \rightarrow$

$\rightarrow b = \dfrac{100 \cdot \text{sen } 47°}{\text{sen } 70°} = 77{,}83$ m

• $\dfrac{100}{\text{sen } 70°} = \dfrac{c}{\text{sen } 63°} \rightarrow c = \dfrac{100 \cdot \text{sen } 63°}{\text{sen } 70°} = 94{,}82$ m

b) • $c^2 = 70^2 + 55^2 - 2 \cdot 70 \cdot 55 \cdot \cos 73° = 5\,673{,}74 \rightarrow c = 75{,}3$ m

• $70^2 = 55^2 + 75{,}3^2 - 2 \cdot 55 \cdot 75{,}3 \cdot \cos \hat{A} \rightarrow$

$\rightarrow \cos \hat{A} = \dfrac{55^2 + 75{,}3^2 - 70^2}{2 \cdot 55 \cdot 75{,}3} = 0{,}4582 \rightarrow \hat{A} = 62° \ 43' \ 49{,}4''$

• $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 44° \ 16' \ 10{,}6''$

c) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \rightarrow \cos \hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{30^2 + 40^2 - 25^2}{2 \cdot 30 \cdot 40} = 0{,}7812 \rightarrow \hat{A} = 38° \ 37' \ 29{,}4''$

• $\cos \hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{25^2 + 40^2 - 30^2}{2 \cdot 25 \cdot 40} = 0{,}6625 \rightarrow \hat{B} = 48° \ 30' \ 33''$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 92° \ 51' \ 57{,}6''$

d) • $\dfrac{15}{sen\,130°} = \dfrac{9}{sen\,\widehat{B}} \rightarrow sen\ \hat{B} = \dfrac{9 \cdot sen\,130°}{15} = 0{,}4596 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = 27°\ 21'\ 46{,}8'' \\ \hat{B}_2 = 152°\ 38'\ 13{,}2'' \rightarrow \text{No válida} \end{cases}$

La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180°$.

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 22°\ 38'\ 13{,}2''$

• $\dfrac{15}{sen\,130°} = \dfrac{c}{sen\,\widehat{C}} \rightarrow c = \dfrac{15 \cdot sen\,\widehat{C}}{sen\,130°} = 7{,}54$ m

25 **Resuelve estos triángulos, teniendo en cuenta que puede que no exista solución, que la solución sea única o que existan dos soluciones:**

a) $\boldsymbol{a = 3}$ **m;** $\boldsymbol{b = 8}$ **m;** $\boldsymbol{\hat{A} = 25°}$

b) $\boldsymbol{a = 12{,}6}$ **m;** $\boldsymbol{b = 26{,}4}$ **m;** $\boldsymbol{\hat{B} = 124°\ 34'}$

c) $\boldsymbol{a = 82{,}6}$ **m;** $\boldsymbol{b = 115}$ **m;** $\boldsymbol{\hat{A} = 28°\ 4'}$

a) $\dfrac{3}{sen\,25°} = \dfrac{8}{sen\,\widehat{B}} \rightarrow sen\ \hat{B} = \dfrac{8 \cdot sen\,25°}{3} = 1{,}127 \rightarrow$ No tiene solución porque el seno de un ángulo siempre está comprendido entre –1 y 1.

b) $\dfrac{12{,}6}{sen\,\widehat{A}} = \dfrac{26{,}4}{sen\,(124°\,34')} \rightarrow sen\ \hat{A} = \dfrac{12{,}6 \cdot sen\,(124°\,34')}{26{,}4} = 0{,}393 \rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 23°\ 8'\ 29'' \\ \hat{A} = 156°\ 51'\ 31'' \end{cases}$

El segundo resultado no es válido porque $\hat{A} + \hat{B}$ sería mayor que 180° y esto es imposible. En este caso, la solución es única.

$\hat{C} = 180° - (23°\ 8'\ 29'' + 124°\ 34') = 32°\ 17'\ 31''$

Ahora, con el teorema del coseno:

$c^2 = 12{,}6^2 + 26{,}4^2 - 2 \cdot 12{,}6 \cdot 26{,}4 cos\,(32°\ 17'\ 31'') = 293{,}33 \rightarrow c = 17{,}13$ m

c) $\dfrac{82{,}6}{sen\,(28°\,4')} = \dfrac{115}{sen\,\widehat{B}} \rightarrow sen\ \hat{B} = \dfrac{115 \cdot sen\,(28°\,4')}{82{,}6} = 0{,}655 \rightarrow \begin{cases} \hat{B} = 40°\ 55'\ 11'' \\ \hat{B} = 139°\ 4'\ 49'' \end{cases}$

En este caso, tenemos dos soluciones posibles:

• Si $\hat{B} = 40°\ 55'\ 11''$:

$\hat{C} = 180° - (28°\ 4' + 40°\ 55'\ 11'') = 111°\ 0'\ 49''$

$c^2 = 82{,}6^2 + 115^2 - 2 \cdot 82{,}6 \cdot 115 cos\,(111°\ 0'\ 49'') = 26\,860 \rightarrow c = 163{,}89$ m

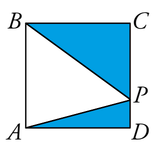
• Si $\hat{B} = 139°\ 4'\ 49''$:

$\hat{C} = 180° - (28°\ 4' + 139°\ 4'\ 49'') = 12°\ 51'\ 11''$

$c^2 = 82{,}6^2 + 115^2 - 2 \cdot 82{,}6 \cdot 115 cos\,(12°\ 51'\ 11'') = 1\,525{,}8 \rightarrow c = 39{,}06$ m

Para resolver

26 **Si el lado del cuadrado mide** $\boldsymbol{\sqrt{5}}$ **cm y el ángulo** $\boldsymbol{CBP = 36°}$**, ¿cuál es la medida del ángulo** $\boldsymbol{\widehat{BPD}}$**?**



Calculemos $\overline{BP}$, considerando el triángulo BCP:

$cos\,36° = \dfrac{\sqrt{5}}{\overline{BP}} \rightarrow \overline{BP} = 2{,}76$ cm

$sen\,36° = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{BP}} \rightarrow \overline{CP} = 1{,}62$ cm

Entonces: $\overline{PD} = \overline{CD} - \overline{CP} = \sqrt{5} - 1{,}62 = 0{,}62$ cm

Consideramos ahora el triángulo *ADP*:

$$sen\ \widehat{PAD} = \frac{0,62}{\overline{AP}}$$

$$cos\ \widehat{PAD} = \frac{\sqrt{5}}{\overline{AP}}$$

Sustituimos estos valores en la igualdad conocida: $sen^2\ \widehat{PAD} + cos^2\ \widehat{PAD} = 1$

$$\left(\frac{0,62}{\overline{AP}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{\overline{AP}}\right)^2 = 1 \ \rightarrow\ \overline{AP}^2 = 5,384 \ \rightarrow\ \overline{AP} = 2,32 \text{ cm}$$

En el triángulo *PAD*:

$$sen\ \widehat{APD} = \frac{\sqrt{5}}{2,32} = 0,964 \ \rightarrow\ \widehat{APD} = 74°35'$$

Sumando sus tres ángulos nos tiene que dar 180°, por lo tanto:

$$\widehat{PAD} = 180° - 74°35' - 90° = 15°25' \ \rightarrow\ \widehat{BAP} = 90° - 15°25' = 74°35'$$

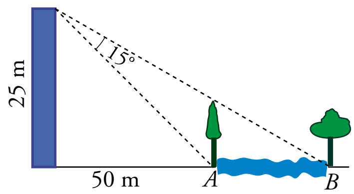
Ahora vamos con el triángulo *ABP* y aplicamos que la suma de sus ángulos es 180°:

$$\widehat{ABP} + \widehat{BPA} + \widehat{PAB} = 180° \ \rightarrow\ (90° - 36°) + \widehat{BPA} + 74°35' = 180° \ \rightarrow\ \widehat{BPA} = 51°25'$$

Buscamos el ángulo:

$$\widehat{BPD} = \widehat{BPA} + \widehat{APD} = 51°25' + 74°35' = 126°$$

27 Desde una torre de vigilancia de 25 m, observamos dos árboles situados en orillas opuestas de un río bajo un ángulo de 15°. Los dos árboles están alineados con el pie de la torre y la distancia de esta al río es de 50 m. Calcula la anchura del río.



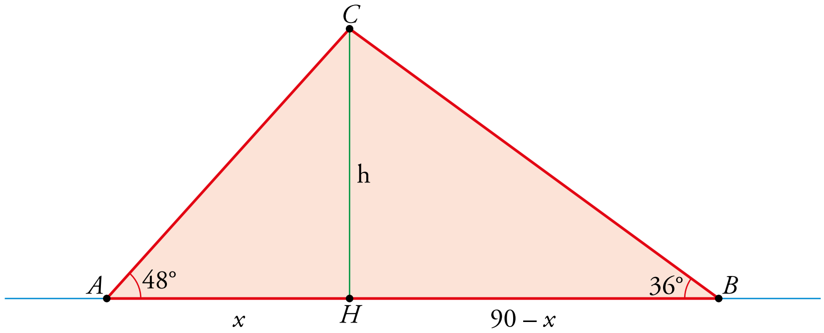
Llamamos $\hat{C}$ al ángulo complementario de $\hat{A}$.

$tg\ \hat{C} = \dfrac{50}{25} = 2 \ \rightarrow\ \hat{C} = 63°\ 26'\ 6''$

Por tanto, respecto de la torre de vigilancia, se ve el árbol cuya base están en B con un ángulo de $15° + 63°\ 26'\ 6'' = 78°\ 26'\ 6''$.

$tg\ (78°\ 26'\ 6'') = \dfrac{50 + \overline{AB}}{25} \ \rightarrow\ \overline{AB} = 72{,}17 \text{ m}$

28 **Una antena de radio está sujeta al suelo con dos cables que forman con el suelo ángulos de 36° y 48°. Los puntos de sujección de los cables están alineados con el pie de la antena y distan entre sí 90 m. Calcula la altura de la antena.**



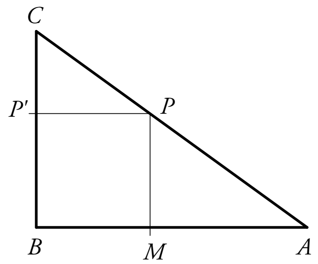
Llamemos x al segmento $\overline{AH}$. Entonces, el segmento $\overline{HB}$ será $90 - x$.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 48° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 36° = \dfrac{h}{90 - x} \end{array}\right\} \to x \cdot tg\ 48° = (90 - x) \cdot tg\ 36° \to 1{,}11x = 0{,}73(90 - x) \to$$

$$\to 1{,}84x = 65{,}7 \to x = \frac{65{,}7}{1{,}84} = 35{,}71$$

$h = 35{,}71 \cdot tg\ 48° = 35{,}71 \cdot 1{,}11 = 39{,}64$ m

29 **En un triángulo ABC, rectángulo en $\hat{B}$, conocemos el cateto $\overline{BC}$ = 8 cm y el ángulo $\hat{A}$ = 38°. En el punto medio M del cateto AB trazamos una paralela a BC que corta a AC en el punto P. Calcula el perímetro del trapecio $PCBM$.**



$$Perímetro_{PCBM} = \overline{PC} + \overline{CB} + \overline{BM} + \overline{MP} = \overline{PC} + 8 + \overline{AB}/2 + \overline{MP}$$

Buscamos el lado $\overline{AB}$ sabiendo que $\widehat{BAC}$ = 38°:

$$sen\ 38° = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{8}{\overline{CA}} \to \overline{CA} = \frac{8}{sen\ 38°} = 13 \text{ cm}$$

$$cos\ 38° = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BA}}{13} \to \overline{BA} = cos\ 38° \cdot 13 = 10{,}2 \text{ cm}$$

Teniendo en cuenta ahora el triángulo CPP', sabemos que el ángulo $\hat{P}$ es 38°, y que $\overline{PP'}$ es igual a $\overline{BM}$, por lo que $\overline{PP'}$ = 5,1 cm:

$$cos\ 38° = \frac{5{,}1}{\overline{CP}} \to \overline{CP} = \frac{5{,}1}{cos\ 38°} = 6{,}5 \text{ cm}$$

$$sen\ 38° = \frac{\overline{CP'}}{6{,}5} \to \overline{CP'} = 6{,}5 \cdot sen\ 38° = 4 \text{ cm}$$

Nos falta encontrar $\overline{MP}$, o lo que es lo mismo, $\overline{BP'}$. Como $\overline{CP'}$ = 4 cm y $\overline{CB}$ = 8 cm $\to$ $\to$ $\overline{BP'}$ = 4 cm = $\overline{MP}$

Volviendo al inicio y sustituyendo los valores hallados:

$$Perímetro_{PCBM} = 6{,}5 + 8 + \frac{\overline{BA}}{2} + \overline{MP} = 6{,}5 + 8 + 5{,}1 + 4 = 23{,}6 \text{ cm}$$

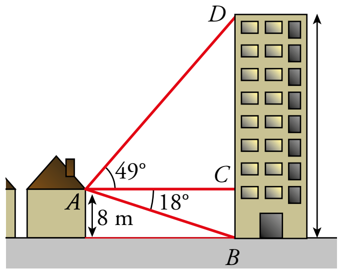
30 **En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?**

Si llamamos α al ángulo pedido, por el teorema de coseno tenemos que:

$$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos\alpha \;\rightarrow\; 49 = 25 + 64 - 80\cos\alpha \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 80\cos\alpha = 40 \;\rightarrow\; \cos\alpha = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; \alpha = 60°$$

31 **Una arquitecta quiere saber la altura del edificio que hay frente a su casa. Para ello ha tomado las medidas que aparecen en la figura desde el punto *A*. Calcula la altura del edificio *BD*.**



Queremos hallar $\overline{BD}$, y por el dibujo podemos decir:

$$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 8 + \overline{CD}$$

Por lo tanto solamente necesitamos hallar $\overline{CD}$.

En el triángulo *CAB* el ángulo $\hat{A}$ es 18°, y su lado $\overline{CB}$ = 8 m, hallemos $\overline{AC}$:

$$sen\, 18° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{8}{\overline{AB}} \;\rightarrow\; \overline{AB} = 25{,}9 \text{ m}$$

$$\cos 18° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \;\rightarrow\; \overline{AC} = \cos 18° \cdot 25{,}9 = 24{,}6 \text{ m}$$

Ahora podemos usar el triángulo *ACD*:

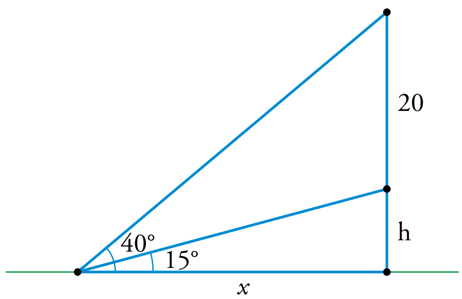
$$\cos 49° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \;\rightarrow\; \overline{AD} = 37{,}5 \text{ m}$$

$$sen\, 49° = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \;\rightarrow\; \overline{CD} = 28{,}3 \text{ m}$$

Y volviendo al inicio:

$$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 8 + \overline{CD} = 8 + 28{,}3 = 36{,}3 \text{ m}$$

32 **Un faro de 20 m de altura está colocado sobre un promontorio. Un barco ve el promontorio bajo un ángulo de 30° y el faro, bajo un ángulo de 40°. Calcula la altura del promontorio.**



Llamamos h a la altura del promontorio y x a la distancia del barco a la base del pedestal.

$$\left.\begin{array}{l} tg\, 15° = \dfrac{h}{x} \\ tg\, 40° = \dfrac{20 + h}{x} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{h}{tg\, 15°} = \frac{20 + h}{tg\, 40°} \;\rightarrow\; h \cdot tg\, 40° = (20 + h) \cdot tg\, 15° \;\rightarrow\; h = \frac{20\, tg\, 15°}{tg\, 40° - tg\, 15°} = 7{,}32 \text{ m}$$

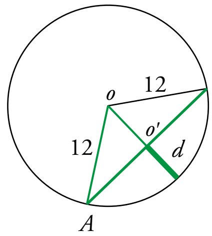
33 **En una circunferencia de 12 cm de radio trazamos una cuerda de 20 cm de longitud. Halla el ángulo correspondiente a esa cuerda y la distancia entre la cuerda y el arco.**

Los radios trazados desde los extremos de la cuerda y esta, forman un triángulo isósceles. El ángulo pedido es el opuesto a la cuerda (lado desigual) y podemos hallarlo usando el teorema del coseno.

$20^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cos\alpha \to 400 = 144 + 144 - 288\cos\alpha \to$

$\to 112 = -288 \cdot \cos\alpha \to \cos\alpha = -\dfrac{112}{288} = -0{,}3889 \to$

$\to \alpha = 112°\ 53'\ 10''$

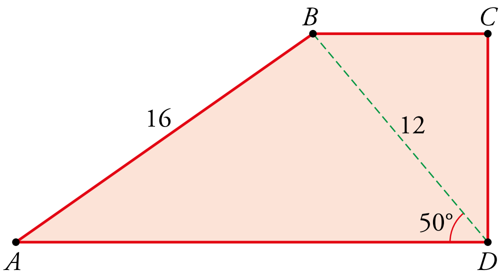


En el triángulo $OO'A$ tenemos: $sen\ \widehat{O'OA} = \dfrac{\overline{O'A}}{12} \to \overline{O'A} = 10$ cm

$\cos\widehat{O'OA} = \dfrac{\overline{OO'}}{12} \to \overline{OO'} = 6{,}62$ cm

Nosotros estamos buscando d y sabiendo que el radio de la circunferencia es 12: $d + \overline{O'O} = 12 \to d = 12 - 6{,}62 = 5{,}38$ cm

34 **De un trapecio rectángulo conocemos el lado oblicuo, que mide 16 cm, la diagonal menor, 12 cm, y el ángulo que esta forma con la base mayor, 50°. Calcula el área y el perímetro del trapecio.**



Utilizando el ángulo complementario de 50° tenemos:

$sen\ 40° = \dfrac{\overline{BC}}{12} \to \overline{BC} = 12 \cdot sen\ 40° = 7{,}71$ cm

$\cos 40° = \dfrac{\overline{CD}}{12} \to \overline{CD} = 12 \cdot \cos 40° = 9{,}19$ cm

Por otro lado, por el teorema de los senos:

$\dfrac{12}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{16}{sen\ 50°} \to sen\ \hat{A} = \dfrac{12 \cdot sen\ 50°}{16} = 0{,}5745 \to \hat{A} = 35°\ 3'\ 53''$

$\widehat{ABD} = 180° - (50° + 35°\ 3'\ 53'') = 94°\ 56'\ 7''$

$\dfrac{\overline{AD}}{sen\ \widehat{ABD}} = \dfrac{16}{sen\ 50°} \to \overline{AD} = \dfrac{16 \cdot sen\ \widehat{ABD}}{sen\ 50°} = 20{,}81$ cm

Para terminar:

$S_{ABCD} = \dfrac{20{,}81 + 7{,}71}{2} \cdot 9{,}19 = 131{,}05\ \text{cm}^2$

Perímetro = 20,81 + 9,19 + 7,71 + 16 = 53,71 cm

35 **En un rectángulo $ABCD$ de lados 8 cm y 12 cm, se traza desde B una perpendicular a la diagonal AC, y desde D, otra perpendicular a la misma diagonal. Sean M y N los puntos donde esas perpendiculares cortan a la diagonal. Halla la longitud del segmento MN.**

Los triángulos AND y BMC son iguales, luego $\overline{AN} = \overline{MC}$.

Como $\overline{MN} = \overline{AC} - \overline{AN} - \overline{MC}$, entonces $\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC}$.

Por tanto, basta con calcular $\overline{AC}$ en el triángulo ABC y $\overline{MC}$ en el triángulo BMC.

- En ABC:

  $\overline{AC}^2 = 8^2 + 12^2 = 208$ (por el teorema de Pitágoras) $\to \overline{AC} = 14{,}4$ cm

  Calculamos $\hat{C}$ (en ABC):

  $tg\ \hat{C} = \dfrac{12}{8} = 1{,}5 \to \hat{C} = 56°\ 18'\ 35{,}8''$

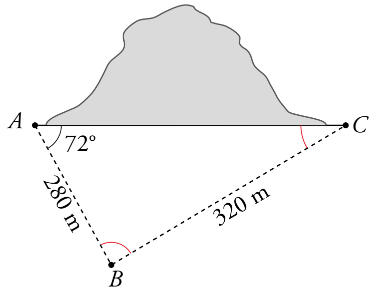
- En BMC:

  $\cos\hat{C} = \dfrac{\overline{MC}}{8} \to \overline{MC} = 8 \cdot \cos(56°\ 18'\ 35{,}8'') = 4{,}4$ cm

  Por último: $\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC} = 14{,}4 - 2 \cdot 4{,}4 = 5{,}6$ cm

36 ODS Meta 9.a. **[El planteamiento del problema permite plantear un debate sobre la importancia del desarrollo de las infraestructuras en los países que las necesiten y que estas sean sostenibles].**

Para construir un túnel entre A y C necesitamos saber su longitud y dirección. Para ello, fijamos un punto B y tomamos las medidas indicadas en la figura. Calcula $\overline{AC}$ y los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$.



Usamos el teorema de los senos:

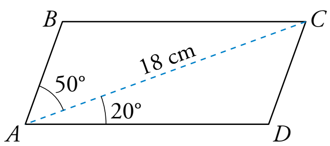
$$\frac{320}{sen\,72°} = \frac{280}{sen\,\hat{C}} \rightarrow sen\,\hat{C} = \frac{280 \cdot sen\,72°}{320} = 0{,}8322 \rightarrow \hat{C} = 56°\ 19'\ 31''$$

$\hat{B} = 180° - (72° + 56°\ 19'\ 31'') = 51°\ 40'\ 29''$

Aplicando de nuevo el teorema de los senos:

$$\frac{320}{sen\,72°} = \frac{AC}{sen\,\hat{B}} \rightarrow \overline{AC} = \frac{320 \cdot sen\,\hat{B}}{sen\,72°} = 263{,}96 \text{ m}$$

37 **En un paralelogramo $ABCD$ conocemos la diagonal mayor $\overline{AC}$ = 18 cm y los ángulos que esta forma con los lados, 20° y 50°. Calcula el área, la longitud de los lados y la otra diagonal.**



$\hat{D} = 180° - 70° = 110°$

$$\frac{18}{sen\,\hat{D}} = \frac{\overline{AD}}{sen\,50°} \rightarrow \overline{AD} = \frac{18 \cdot sen\,50°}{sen\,110°} = 14{,}67 \text{ cm}$$

La altura, h, del paralelogramo es:

$h = 18 \cdot sen\,20° = 6{,}16$ cm

$S_{ABCD} = 14{,}67 \cdot 6{,}16 = 90{,}37 \text{ cm}^2$

Para hallar la longitud de la otra diagonal calculamos primero $\overline{AB} = \overline{CD}$:

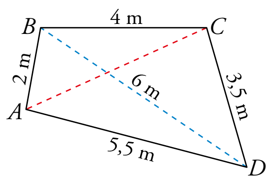
$$\frac{\overline{CD}}{sen\,20°} = \frac{18}{sen\,110°} \rightarrow \overline{CD} = \frac{18 \cdot sen\,20°}{sen\,110°} = 6{,}55 \text{ cm}$$

Aplicamos el teorema del coseno al triángulo BAD:

$\overline{BD}^2 = 6{,}55^2 + 14{,}67^2 - 2 \cdot 6{,}55 \cdot 14{,}67 cos\,70° = 192{,}38 \rightarrow \overline{BD} = 13{,}87$ cm

Página 132

38 **En un cuadrilátero $ABCD$ conocemos las medidas de los lados y de la diagonal BD. Calcula las medidas del ángulo $\hat{B}$ y de la diagonal AC.**



Aplicamos el teorema del coseno a los triángulos ABD y CBD.

$5{,}5^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 cos\,\widehat{ABD} \rightarrow 24 cos\,\widehat{ABD} = 9{,}75 \rightarrow \widehat{ABD} = 66°\ 1'\ 50''$

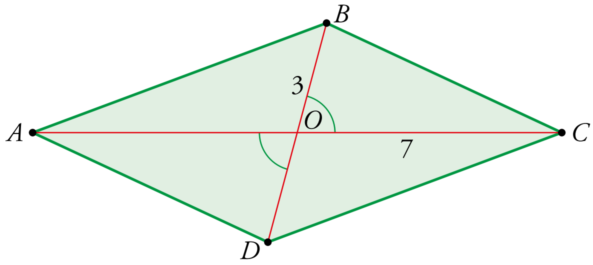
$3{,}5^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 cos\,\widehat{CBD} \rightarrow 48 cos\,\widehat{CBD} = 39{,}75 \rightarrow \widehat{CBD} = 34°\ 5'\ 36''$

$\hat{B} = 66°\ 1'\ 50'' + 34°\ 5'\ 36'' = 100°\ 7'\ 26''$

Ahora aplicamos de nuevo el teorema del coseno al triángulo ABC:

$\overline{AC}^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 cos\,(100°\ 7'\ 26'') = 22{,}81 \rightarrow \overline{AC} = 4{,}78$ cm

39 **Las diagonales de un paralelogramo miden 6 cm y 14 cm y forman un ángulo de 75°. Halla los lados y los ángulos del paralelogramo.**



Como las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio, los segmentos $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ miden, respectivamente, la mitad de la medida de las correspondientes diagonales.

Aplicamos el teorema del coseno:

$\overline{BC}^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos 75° = 47{,}13 \to \overline{BC} = \overline{AD} = 6{,}87$ cm

$\widehat{AOB} = 180° - 75° = 105°$

$\overline{AB}^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos 105° = 68{,}87 \to \overline{AB} = \overline{DC} = 8{,}3$ cm

Para calcular un ángulo, por ejemplo el ángulo $\hat{B}$, aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{7}{\operatorname{sen} \widehat{OBC}} = \frac{6{,}87}{\operatorname{sen} 75°} \to \operatorname{sen} \widehat{OBC} = \frac{7 \cdot \operatorname{sen} 75°}{6{,}87} = 0{,}9842 \to \widehat{OBC} = 79°\ 48'\ 5''$$

$$\frac{7}{\operatorname{sen} \widehat{ABO}} = \frac{8{,}3}{\operatorname{sen} 105°} \to \operatorname{sen} \widehat{ABO} = \frac{7 \cdot \operatorname{sen} 105°}{8{,}3} = 0{,}8146 \to \widehat{ABO} = 54°\ 33'\ 5''$$

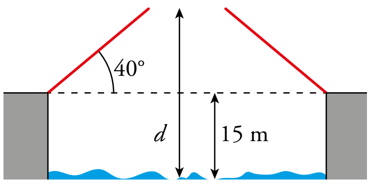
$\hat{B} = \hat{D} = 79°\ 48'\ 5'' + 54°\ 33'\ 5'' = 134°\ 21'\ 10''$

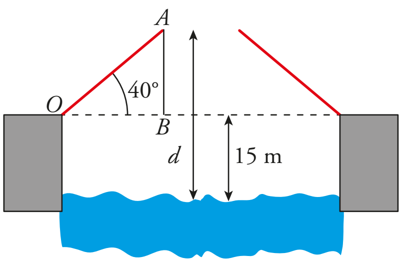
$\hat{A} = \hat{C} = 180° - 134°\ 21'\ 10'' = 45°\ 38'\ 50''$

40 **Un puente levadizo mide 140 m cerrado sobre un río. Las aberturas del puente pueden elevarse hasta 40°.**

a) Si el nivel del agua está 15 m más abajo del puente cerrado, calcula la distancia *d* entre el nivel del agua y la altura del puente cuando está abierto al máximo.

b) Calcula la separación ente las aberturas cuando el puente está totalmente abierto.





a) $d = 15 + \overline{AB}$

$$\operatorname{sen} 40° = \frac{\overline{AB}}{70} \to \overline{AB} = 45 \to d = 15 + 45 = 60 \text{ m}$$

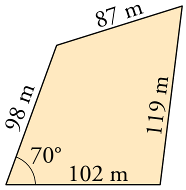
b) $140 = 2\overline{OB} + r$

El enunciado pide hallar r, por lo que debemos encontrar $\overline{OB}$:

$$\cos 40° = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{70} \to \overline{OB} = 70 \cdot \cos 40° = 53{,}62 \text{ m}$$

Por lo tanto, $r = 140 - 2 \cdot 53{,}62 = 32{,}75$ m.

41 Para hallar el área de una parcela irregular, hemos tomado las medidas indicadas en la figura. ¿Cuál es su área?



La diagonal opuesta al ángulo de 70° divide al cuadrilátero en dos triángulos.

- Área del triángulo izquierdo:

  Su altura es $h = 98 \cdot sen\ 70° = 92{,}09$ m $\rightarrow$ $\text{Área}_I = \dfrac{102 \cdot 92{,}09}{2} = 4\,696{,}6 \text{ m}^2$

- Área del triángulo derecho:

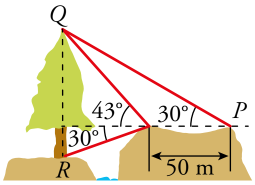
  La calcularemos usando la fórmula de Herón y, para ello, necesitamos la longitud, l, del tercer lado.

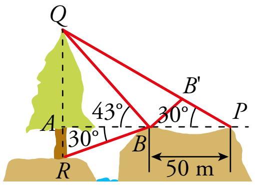
  $l^2 = 98^2 + 102^2 - 2 \cdot 98 \cdot 102 cos\ 70° = 13\,170 \rightarrow l = \sqrt{13\,170} = 114{,}76$ m

  $s = \dfrac{87 + 119 + 114{,}76}{2} = 160{,}3$

  $\text{Área}_D = \sqrt{160{,}3 \cdot (160{,}3 - 87) \cdot (160{,}3 - 119) \cdot (160{,}3 - 114{,}76)} = 4\,701 \text{ m}^2$

42 Halla la altura del árbol *QR* de pie inaccesible y más bajo que el punto de observación, con los datos de la figura.





Debemos hallar $\overline{QR}$ y para ello calcularemos $\overline{QA}$ y $\overline{AR}$.

Empezamos considerando el triángulo *QBP*, en el que $\widehat{Q} = 90° - (180° - 60° - 43°) = 13°$:

$sen\ 30° = \dfrac{\overline{BB'}}{50} \rightarrow \overline{BB'} = 25$ m

$sen\ 13° = \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{QB}} \rightarrow \overline{QB} = 111{,}1$ m

Si consideramos ahora el triángulo *QAB*:

$sen\ 43° = \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QB}} \rightarrow \overline{QA} = 75{,}8$ m

$cos\ 43° = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{QB}} \rightarrow \overline{AB} = 81{,}3$ m

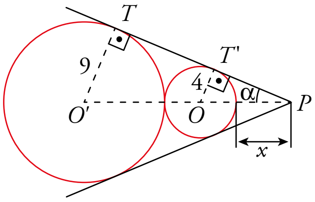
Nos falta hallar $\overline{AR}$, así que consideramos el triángulo *RAB*:

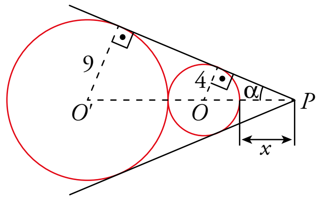
$cos\ 30° = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{RB}} \rightarrow \overline{RB} = 94$ m

$sen\ 30° = \dfrac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \rightarrow \overline{AR} = 47$ m

Por tanto: $\overline{QR} = \overline{QA} + \overline{AR} = 78{,}5 + 47 = 122{,}8$ m

43 **Dos circunferencias son tangentes exteriormente y sus radios miden 9 m y 4 m. Halla el ángulo, 2α, que forman sus tangentes comunes.**





$\overline{O'P} = 9 + 8 + x = 17 + x$

$\overline{OP} = 4 + x$

$sen\ \alpha = \dfrac{\overline{T'O}}{\overline{O'P}} = \dfrac{\overline{TO}}{\overline{OP}}$

Sustituyendo:

$\dfrac{9}{\overline{O'P}} = \dfrac{4}{\overline{OP}} \rightarrow \dfrac{9}{17 + x} = \dfrac{4}{4 + x} \rightarrow 5x = 32 \rightarrow x = \dfrac{32}{5}$ m

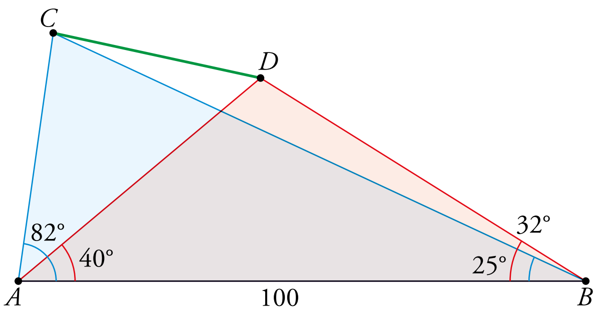
$\overline{OP} = 4 + x = \dfrac{20 + 32}{5} = \dfrac{52}{5}$ m

$sen\ \alpha = \dfrac{\overline{TO}}{\overline{OP}} = \dfrac{20}{52} \rightarrow \alpha = 22°37' \rightarrow 2\alpha = 45°14'$

44 **Dos árboles *C* y *D* se encuentran en la orilla opuesta de un río. Desde dos puntos *A* y *B*, situados en la orilla donde nos encontramos, tomamos las siguientes medidas:**

$\overline{AB}$ **= 100 m**	$\widehat{CAB}$ **= 82°**	$\widehat{DAB}$ **= 40°**
$\widehat{DBA}$ **= 32°**	$\widehat{CBA}$ **= 25°**	

Calcula la distancia que separa a los dos árboles.



Para calcular la distancia $\overline{CD}$ hallaremos primero $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$. De esta manera obtendremos el resultado aplicándole el teorema del coseno al triángulo *CAD*.

$\widehat{ACB} = 180° - (82° + 25°) = 73°$

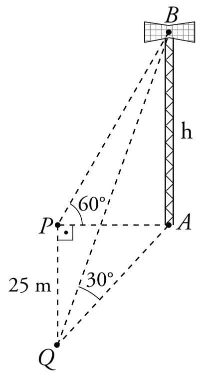
$\dfrac{100}{sen\ 73°} = \dfrac{\overline{AC}}{sen\ 25°} \rightarrow \overline{AC} = \dfrac{100 \cdot sen\ 25°}{sen\ 73°} = 44{,}19$ m

$\widehat{ADB} = 180° - (40° + 32°) = 108°$

$\dfrac{100}{sen\ 108°} = \dfrac{\overline{AD}}{sen\ 32°} \rightarrow \overline{AD} = \dfrac{100 \cdot sen\ 32°}{sen\ 108°} = 55{,}72$ m

$\overline{CD}^2 = 44{,}19^2 + 55{,}72^2 - 2 \cdot 44{,}19 \cdot 55{,}72 cos\ 42° = 1\,397{,}7 \rightarrow \overline{CD} = 37{,}39$ m

45 Para medir la altura de una antena, cuyo pie es inaccesible, nos situamos en un punto P al oeste de la antena y la observamos bajo un ángulo de 60°. Caminamos unos 25 metros hacia el sur y desde Q el ángulo de observación es de 30°. Halla la altura de la antena.



✶ Expresa $\overline{PA}$ y $\overline{QA}$ en función de h.

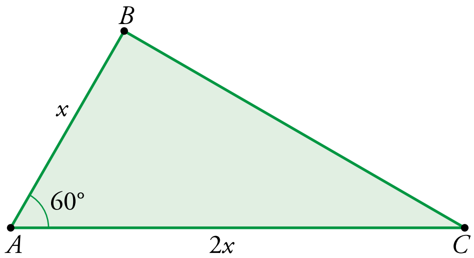
$$tg\ 30° = \frac{h}{\overline{QA}} \rightarrow \overline{QA} = \frac{h}{tg\ 30°} = h\sqrt{3}$$

$$tg\ 60° = \frac{h}{\overline{PA}} \rightarrow \overline{PA} = \frac{h}{tg\ 60°} = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

Aplicamos ahora el teorema de Pitágoras al triángulo APQ:

$$\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 + 25^2 = (h\sqrt{3})^2 \rightarrow \frac{h^2}{3} + 625 = 3h^2 \rightarrow \frac{8}{3}h^2 = 625 \rightarrow h = \frac{25}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 15{,}31 \text{ m}$$

46 Uno de los lados de un triángulo mide el doble que otro, y el ángulo comprendido entre ellos mide 60°. Halla los otros ángulos.



$$\overline{BC}^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x\cos 60° = x^2 + 4x^2 - 4x^2 \cdot \frac{1}{2} = 3x^2$$

$$\overline{BC} = x\sqrt{3}$$

$$\frac{x\sqrt{3}}{sen\ 60°} = \frac{x}{sen\ \hat{C}} \rightarrow sen\ \hat{C} = \frac{x\sqrt{3}/2}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \rightarrow \hat{C} = 30°$$

$$\hat{B} = 180° - (60° + 30°) = 90°$$

Cuestiones teóricas

47 ¿Verdadero o falso?

a) Si conocemos dos ángulos de un triángulo y un lado cualquiera, al tratar de solucionarlo, existe siempre solución única.

b) Si conocemos dos lados de un triángulo y el ángulo opuesto a uno de ellos no siempre existe solución.

c) Si conocemos los tres ángulos de un triángulo la solución es única.

d) Si conocemos dos lados de un triángulo y el ángulo que forman, puede haber dos soluciones.

a) Verdadero.

b) Falso.

c) Falso.

d) Falso.

48 ¿Existe algún valor de $\alpha \neq 0$ que verifique $2\ sen\ \alpha = tg\ \alpha$? Justifícalo.

Si $\alpha = 180°$ se cumple la igualdad, ya que el seno y la tangente de 180° valen 0.

Si $\alpha \neq 0$ y también $\alpha \neq 180°$, entonces:

$$sen\ \alpha \neq 0 \text{ y } 2sen\ \alpha = tg\ \alpha \rightarrow 2sen\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 = \frac{1}{cos\ \alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \begin{cases} 60° \\ 300° \end{cases}$$

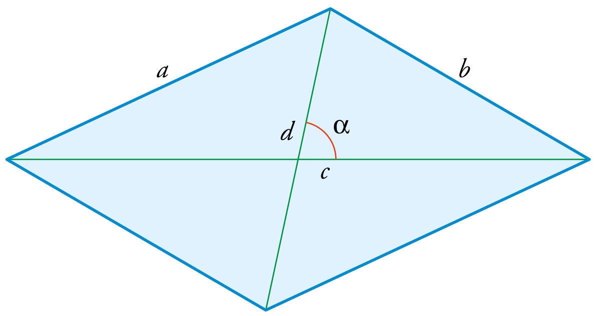
49 **Prueba que en cualquier paralelogramo de lados a y b y diagonales c y d, se verifica:**

$c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$

∗ ***Aplica el teorema del coseno en dos triángulos que tengan un vértice en el centro del paralelogramo.***

Utilizamos el hecho de que las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio y el teorema del coseno.

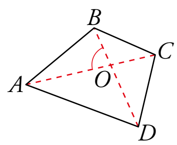
$$\left.\begin{aligned} b^2 &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{d}{2}\cos\alpha \\ a^2 &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{d}{2}\cos(180° - \alpha) \end{aligned}\right\} \rightarrow$$



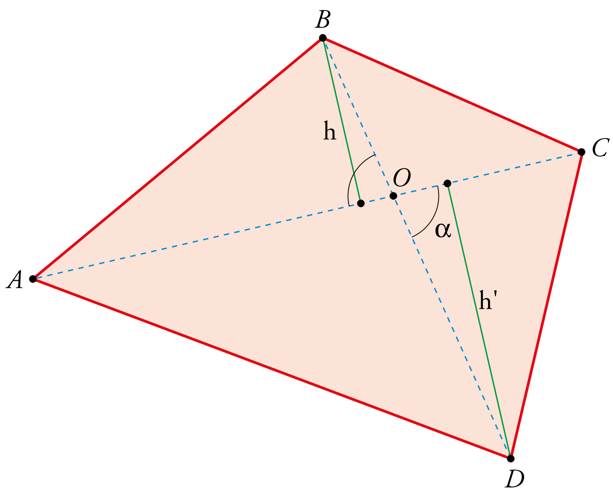
$$\rightarrow \begin{cases} b^2 = \dfrac{c^2}{4} + \dfrac{d^2}{4} - \dfrac{cd}{2}\cos\alpha \\ a^2 = \dfrac{c^2}{4} + \dfrac{d^2}{4} - \dfrac{cd}{2}(-\cos\alpha) \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro ambas ecuaciones, obtenemos que $b^2 + a^2 = \dfrac{c^2}{2} + \dfrac{d^2}{2}$, de donde se obtiene la relación $c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$.

50 **Demuestra que el área de cualquier cuadrilátero es igual a la mitad del producto de sus diagonales por el seno del ángulo que forman.**



∗ ***Ten en cuenta que:*** $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$



Descomponemos el área del cuadrilátero como la suma de las áreas de los triángulos ABC y CDA. Ambos tienen en común la base AC.

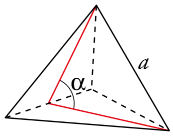
$h = \overline{OB}\cdot sen\,\alpha$

$h' = \overline{OD}\cdot sen\,\alpha$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{\overline{AC}\cdot h}{2} + \frac{\overline{AC}\cdot h'}{2} = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{OB}\cdot sen\,\alpha}{2} + \frac{\overline{AC}\cdot\overline{OD}\cdot sen\,\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AC}\,(\overline{OB} + \overline{OD})\cdot sen\,\alpha$$

51 **Comprueba que el ángulo α que forman las dos caras contiguas de un tetraedro regular de arista a, verifica que $cos\,\alpha = 1/3$.**



∗ ***Ten en cuenta que los lados del ángulo α son alturas de triángulos equiláteros.***

Como cada cara es un triángulo equilátero de lado a, la longitud de los segmentos dibujados es $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ (altura del triángulo equilátero de lado a).

Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2a\frac{\sqrt{3}}{2}\,a\frac{\sqrt{3}}{2}\,cos\,\alpha \;\to\; a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{2}a^2\,cos\,\alpha \;\to$$

$$\to\; \frac{3}{2}cos\,\alpha = \frac{1}{2} \;\to\; cos\,\alpha = \frac{1}{3} \;\to\; \alpha = 70°\,31'\,44''$$

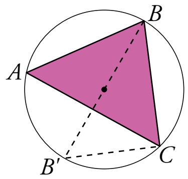
Página 133

Para profundizar

52 **Demuestra que en un triángulo cualquiera ABC se verifica la siguiente igualdad:**

$$\frac{a}{sen\,\widehat{A}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{c}{sen\,\widehat{C}} = 2R$$

Donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.



∗ ***Traza el diámetro de la circunferencia desde uno de los vértices. Aplica el teorema de los senos en los triángulos ABC y BB'C.***

Las dos primeras igualdades forman el enunciado del teorema de los senos.

Por otra parte, los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}'$ son iguales porque abarcan el mismo arco BC. Por tanto, aplicando el teorema de los senos al triángulo $BB'C$ (ya que $\hat{C} = 90°$ porque abarca un arco de 180°):

$$\frac{a}{sen\,\widehat{A}} = \frac{a}{sen\,\widehat{B}'} = \frac{\overline{BB'}}{sen\,\widehat{C}} = \frac{2R}{1} = 2R$$

53 **Elige la respuesta correcta:**

«El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo de lados 8 m, 10 m, y 12 m es»

a) 7,2 m **b) 6,05 m** **c) 10 m**

∗ ***Ten en cuenta el resultado del ejercicio anterior***

Por el ejercicio 52 sabemos que se cumple $\frac{a}{sen\,\widehat{A}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}'} = \frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{2R}{1} = 2R$.

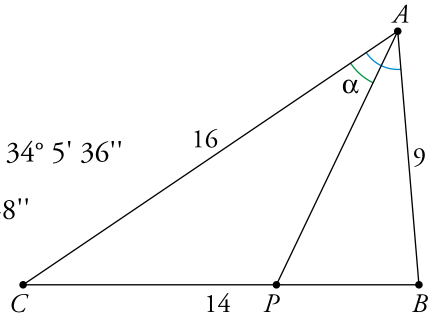
Por el teorema del coseno, como $c = 12$ es uno de los lados del triángulo:

$$12^2 = 8^2 + 10^2 - 2\cdot 80\cdot cos\,\widehat{C} \;\to\; cos\,\widehat{C} = 0,125 \;\to\; \widehat{C} = 83°49'$$

Por tanto:

$$\frac{c}{sen\,\widehat{C}} = 2R \;\to\; R = \frac{1}{2}\cdot 12,09 \;\to\; R = 6,05\text{ m}$$

54 **De un triángulo ABC conocemos los tres lados, $a = 14$ cm, $b = 16$ cm y $c = 9$ cm. Halla la longitud de la bisectriz del ángulo $\hat{A}$.**



Calculamos primero el ángulo α:

$14^2 = 16^2 + 9^2 - 2 \cdot 16 \cdot 9 \cos \hat{A} \rightarrow 288 \cos \hat{A} = 141 \rightarrow \hat{A} = 60° \, 41' \, 12''$

$\alpha = \dfrac{\widehat{A}}{2} = 30° \, 20' \, 36''$

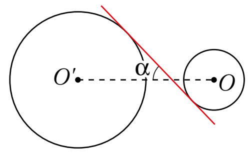
Calculamos el ángulo $\hat{C}$:

$9^2 = 16^2 + 14^2 - 2 \cdot 16 \cdot 14 \cos \hat{C} \rightarrow 448 \cos \hat{C} = 371 \rightarrow \hat{C} = 34° \, 5' \, 36''$

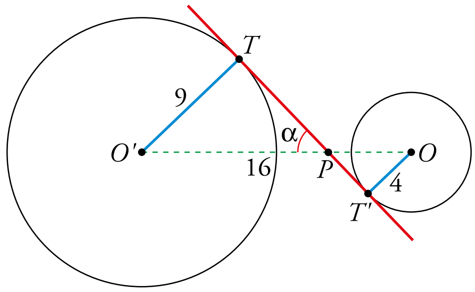
Ahora, $\widehat{APC} = 180° - (30° \, 20' \, 36'' + 34° \, 5' \, 36'') = 115° \, 33' \, 48''$

$\dfrac{16}{sen \, \widehat{APC}} = \dfrac{\overline{AP}}{sen \, \widehat{C}} \rightarrow \overline{AP} = \dfrac{16 \cdot sen \, \widehat{C}}{sen \, \widehat{APC}} = 9{,}94 \text{ cm}$

55 **Halla el ángulo que forma la tangente a estas circunferencias con la recta que une sus centros. Los radios miden 4 cm y 9 cm, y la distancia entre sus centros es de 16 cm.**



Los triángulos $OT'P$ y $O'TP$ son triángulos rectángulos.



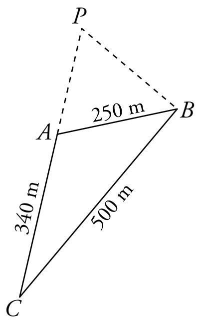
$sen \, \alpha = \dfrac{9}{\overline{O'P}} \rightarrow \overline{O'P} = \dfrac{9}{sen \, \alpha}$

$sen \, \alpha = \dfrac{4}{\overline{OP}} \rightarrow \overline{OP} = \dfrac{4}{sen \, \alpha}$

$16 = \overline{O'O} = \overline{O'P} + \overline{PO} = \dfrac{9}{sen \, \alpha} + \dfrac{4}{sen \, \alpha} \rightarrow$

$\rightarrow 16 sen \, \alpha = 13 \rightarrow sen \, \alpha = \dfrac{13}{16} \rightarrow \alpha = 54° \, 20' \, 27''$

56 **Queremos calcular la distancia desde A y B a un punto inaccesible P. Para ello, fijamos un punto C de modo que $\widehat{PBC} = 90°$ y tomamos las medidas indicadas en la figura. Calcula $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$.**



Calculamos los ángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{CAB}$.

$340^2 = 250^2 + 500^2 - 2 \cdot 250 \cdot 500 \cos \widehat{ABC} \rightarrow 250\,000 \cos \widehat{ABC} = 196\,900 \rightarrow$

$\rightarrow \widehat{ABC} = 38° \, 2' \, 18''$

$500^2 = 250^2 + 340^2 - 2 \cdot 250 \cdot 340 \cos \widehat{CAB} \rightarrow 170\,000 \cos \widehat{CAB} = -71\,900 \rightarrow \widehat{CAB} = 115° \, 1' \, 14''$

$\widehat{PAB} = 180° - 115° \, 1' \, 14'' = 64° \, 58' \, 46''$

$\widehat{PBA} = 90° - 38° \, 2' \, 18'' = 51° \, 57' \, 42''$

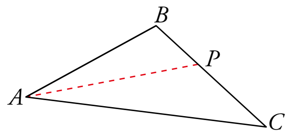
$\hat{P} = 180° - (64° \, 58' \, 46'' + 51° \, 57' \, 42'') = 63° \, 3' \, 32''$

Ahora aplicamos el teorema de los senos para calcular las distancias:

$\dfrac{\overline{PA}}{sen \, \widehat{PBA}} = \dfrac{250}{sen \, \widehat{P}} \rightarrow \overline{PA} = 220{,}87 \text{ m}$

$\dfrac{\overline{PB}}{sen \, \widehat{PAB}} = \dfrac{250}{sen \, \widehat{P}} \rightarrow \overline{PB} = 254{,}12 \text{ m}$

57 Demuestra que la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto al ángulo en segmentos proporcionales a los otros lados.



∗ ***Debes probar que*** $\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PC}}$. ***Aplica el teorema de los senos en los triángulos ABP y ACP.***

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\overline{AP}}{sen\,\widehat{B}} = \frac{\overline{BP}}{sen\,\frac{\widehat{A}}{2}} \to \overline{AP}\cdot sen\,\frac{\widehat{A}}{2} = \overline{BP}\cdot sen\,\widehat{B} \\ &\frac{\overline{AP}}{sen\,\widehat{C}} = \frac{\overline{PC}}{sen\,\frac{\widehat{A}}{2}} \to \overline{AP}\cdot sen\,\frac{\widehat{A}}{2} = \overline{PC}\cdot sen\,\widehat{C} \end{aligned}\right\} \to \overline{BP}\cdot sen\,\hat{B} = \overline{PC}\cdot sen\,\hat{C}$$

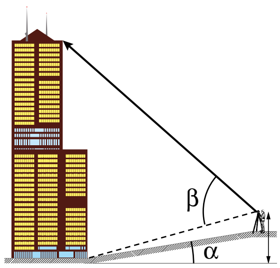
Por otro lado:

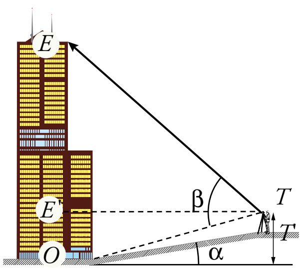
$$\frac{\overline{AB}}{sen\,\widehat{C}} = \frac{\overline{AC}}{sen\,\widehat{B}} \to sen\,\hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\cdot sen\,\hat{C}$$

Sustituyendo $sen\,\hat{B}$ en la primera relación, se obtiene:

$$\overline{BP}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\cdot sen\,\hat{C} = \overline{PC}\cdot sen\,\hat{C} \to \overline{BP}\cdot\overline{AC} = \overline{PC}\cdot\overline{AB} \to \frac{\overline{AC}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$$

58 Para medir la altura de un edificio se utiliza un teodolito cuya mira está a una altura de 1,5 m sobre el suelo que está 3 m más alto que la base del edificio. Los datos conocidos son α =10°, β = 80°. Halla la altura del edificio.





Conocemos los ángulos $\alpha = \widehat{TOO'} = 10°$ y $\beta = \widehat{OT'E} = 80°$.

Considerando el triángulo *OTO'*: $sen\,10° = \frac{3}{\overline{OT}} \to \overline{OT} = 17{,}3$ m

También sabemos: $sen\,\widehat{O'OT'} = \frac{4{,}5}{\overline{OT'}}$ (*)

Además, como la suma de los ángulos de un triángulo es 180°:

$180° = 10° + 90° + \widehat{OTO'} \to \widehat{OTO'} = 80°$

Entonces: $\widehat{OTT'} = 180° - \widehat{OTO'} = 100°$

Y aplicando el teorema del coseno:

$\overline{OO'}^2 = \overline{TO}^2 + \overline{O'T}^2 - 2\cdot\overline{TO}\cdot\overline{O'T}\cos\widehat{OTO'} \to \overline{OO'}^2 = 17{,}3^2 + 3^2 - 2\cdot 17{,}3\cdot 3\cos 80° \to \overline{OO'} = 17$ m

Aplicamos el teorema del coseno en el triángulo *OTT'*:

$\overline{OT'}^2 = \overline{TT'}^2 + \overline{OT}^2 - 2\cdot\overline{TT'}\,\overline{OT}\cos\widehat{OTT'} \to \overline{OT'}^2 = 1{,}5^2 + 17{,}3^2 - 21{,}5\cdot 17{,}3\cos 100° \to \overline{OT'} = 17{,}6$ m

Y volviendo a (*): $sen\,\widehat{O'OT'} = \frac{4{,}5}{\overline{OT'}} = \frac{4{,}5}{17{,}6} \to \widehat{O'OT'} = 14°\,48'$

Vayamos ahora a centrarnos en el triángulo *OET'*.

$\widehat{OT'E} = 80° = \widehat{E'T'E} + \widehat{E'T'O}$ (**)

Como las rectas *E' T'* y *OO'* son paralelas, y la recta que forma los ángulos $\widehat{E'T'O}$ y $\widehat{T'OO'}$ es la misma, podemos afirmar que $\widehat{E'T'O} = \widehat{T'OO'} = 14°\,48'$.

Por lo tanto y volviendo a (**): $\widehat{E'T'E} = 80° - 14° \, 48' = 65° \, 12'$

La medida que nos pide el enunciado es: $\overline{OE} = \overline{OE'} + \overline{EE'} = 4,5 + \overline{EE'}$ por lo que hallando el valor de $\overline{EE'}$ habremos terminado:

$$cos \, \widehat{E'T'E} = \frac{\overline{E'T'}}{\overline{ET'}} \rightarrow cos\left(65° \, 12'\right) = \frac{\overline{OO'}}{\overline{ET'}} = \frac{17}{\overline{ET'}} \rightarrow \overline{ET'} = 40,5 \text{ m}$$

$$sen \, \widehat{E'T'E} = \frac{\overline{EE'}}{\overline{ET'}} \rightarrow sen\left(65° \, 12'\right) = \frac{\overline{EE'}}{\overline{ET'}} = \frac{EE'}{40,5} \rightarrow \overline{EE'} = 36,8 \text{ m}$$

Y, finalmente:

$\overline{OE} = \overline{OE'} + \overline{E'E} = 4,5 + 36,8 = 41,3 \text{ m}$

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 4.1. (EA 4.1.1.) CE 4.2. (EA 4.2.1.)

1 **Expresa a través de las razones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos: 154°, 207°, 318°, 2 456°.**

$sen\ 154° = sen\ (180° - 154°) = sen\ 26°$

$cos\ 154° = -cos\ 26°$

$tg\ 154° = -tg\ 26°$

$sen\ 207° = sen\ (180° + 27°) = -sen\ 27°$

$cos\ 207° = -cos\ 27°$

$tg\ 207° = tg\ 27°$

$sen\ 318° = sen\ (360° - 42°) = -sen\ 42°$

$cos\ 318° = cos\ 42°$

$tg\ 318° = -tg\ 42°$

$sen\ 2\,456° = sen\ (360° \cdot 6 + 296°) = sen\ 296° = sen\ (360° - 64°) = -sen\ 64°$

$cos\ 2\,456° = cos\ 64°$

$tg\ 2\,456° = -tg\ 64°$

2 **Si $sen\ \alpha = \frac{4}{5}$ y $\alpha > 90°$, calcula sin hallar el ángulo α:**

a) $cos\ \alpha$

b) $tg\ \alpha$

c) $sen\ (180° + \alpha)$

d) $cos\ (90° + \alpha)$

e) $tg\ (180° - \alpha)$

f) $sen\ (90° - \alpha)$

a) $cos^2\ \alpha = 1 - sen^2\ \alpha \to cos^2\ \alpha = 1 - \frac{16}{25} \to cos^2\ \alpha = \frac{9}{25} \to cos\ \alpha = \pm\frac{3}{5} \to cos\ \alpha = -\frac{3}{5}$

b) $tg\ \alpha = \frac{4/5}{-3/5} = -\frac{4}{3}$

c) $sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha = -\frac{4}{5}$

d) $cos\ (90° + \alpha) = -sen\ \alpha = -\frac{4}{5}$

e) $tg\ (180° - \alpha) = -tg\ \alpha = \frac{4}{3}$

f) $sen\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha = -\frac{3}{5}$

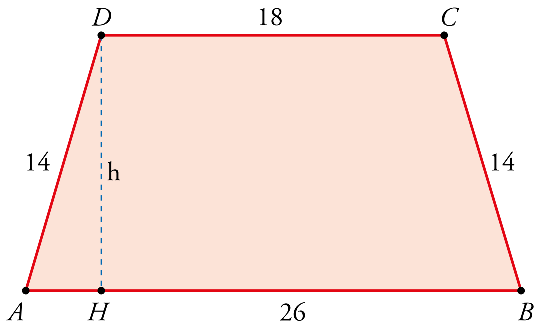
3 **Si $tg\ \alpha = -3,5$, halla α con ayuda de la calculadora, exprésalo como un ángulo del intervalo [0, 180°) y obtén su seno y su coseno.**

$a\alpha = 105°\ 56'\ 43''$

$sen\ \alpha = 0,9615$

$cos\ \alpha = -0,2747$

4 **Las bases de un trapecio isósceles miden 18 cm y 26 cm, y los lados iguales, 14 cm. Calcula sus ángulos y su área.**



$\overline{AH} = \dfrac{26-18}{2} = 4$ cm por ser isósceles.

$\cos \hat{A} = \dfrac{4}{14} = 0{,}2857 \to \hat{A} = \hat{B} = 73°\ 23'\ 54''$

Como los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360°:

$\hat{C} = \hat{D} = \dfrac{360° - 2 \cdot (73°\ 23'\ 54'')}{2} = 180° - 73°\ 23'\ 54'' = 106°\ 36'\ 6''$

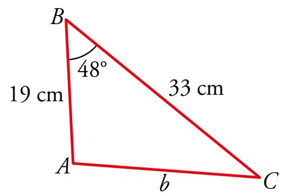
Para calcular la superficie necesitamos la altura: $h = 14 \cdot sen\ \hat{A} = 13{,}42$ cm

$S_{ABCD} = \dfrac{26+18}{2} \cdot 13{,}42 = 295{,}24\ \text{cm}^2$

5 **Resuelve el triángulo *ABC* y halla su área en estos casos:**

a) $c = 19$ **cm,** $a = 33$ **cm,** $\hat{B} = 48°$

b) $a = 15$ **cm,** $b = 11$ **cm,** $\hat{B} = 30°$



a) • Con el teorema del coseno, hallamos b:

$b^2 = 19^2 + 33^2 - 2 \cdot 19 \cdot 33\ \cos 48° = 610{,}9 \to$

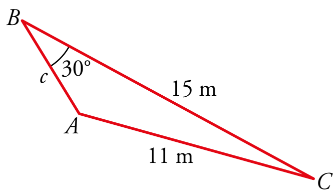
$\to b = 24{,}72$ cm

• Del mismo modo, hallamos $\hat{A}$:

$33^2 = 19^2 + 24{,}72^2 - 2 \cdot 19 \cdot 24{,}72\ \cos \hat{A} \to \cos \hat{A} = -0{,}1245 \to \hat{A} = 97°\ 9'$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 34°\ 51'$

• Área $= \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot sen\ \hat{B} = 232{,}98\ \text{cm}^2$



b) • Hallamos $\hat{A}$ con el teorema de los senos:

$\dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} \to \dfrac{15}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{11}{sen\ 30°} \to sen\ \hat{A} = 0{,}6818$

• Hay dos soluciones:

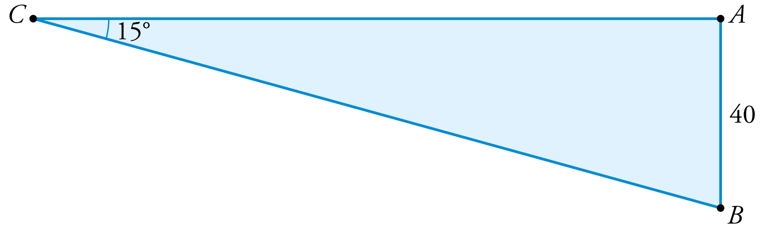
$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = 42°\ 59'\ 9'' \\ \hat{C}_1 = 107°\ 0'\ 51'' \end{array}\right\} \to \dfrac{11}{sen\ 30°} = \dfrac{c_1}{sen\ 107°\ 0'\ 51''} \to c_1 = 21{,}04\ \text{cm};$

Área $= \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot sen\ \hat{B} = 78{,}9\ \text{cm}^2$

$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_2 = 137°\ 0'\ 51'' \\ \hat{C}_2 = 12°\ 59'\ 9'' \end{array}\right\} \to \dfrac{11}{sen\ 30°} = \dfrac{c_2}{sen\ 12°\ 59'\ 9''} \to c_2 = 4{,}94\ \text{cm};$

Área $= \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot sen\ \hat{B} = 18{,}53\ \text{cm}^2$

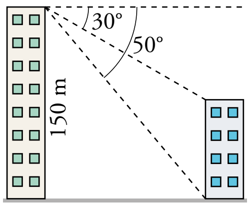
6 **El radar de un barco detecta un objeto no identificado a 40 m de profundidad y en una dirección que forma 15° con la horizontal. ¿Qué distancia tiene que recorrer un buzo para llegar desde el barco hasta el objeto?**



El buzo tiene que recorrer la distancia $\overline{BC}$.

$sen\ 15° = \dfrac{40}{\overline{BC}} \to \overline{BC} = \dfrac{40}{sen\ 15°} = 154{,}55$ m

7 **Desde la terraza de un edificio de 150 m de altura medimos los ángulos que se indican en la figura. Calcula la altura del edificio más bajo y la anchura de la calle.**



Representamos la anchura de la calle con la letra a. Usando el ángulo complementario de 50° tenemos que:

$tg\ 40° = \dfrac{a}{150} \to a = 150 \cdot tg\ 40° = 125{,}86$ m

La diferencia, d, entre las alturas de las torres podemos obtenerla mediante el ángulo de 30°:

$tg\ 30° = \dfrac{d}{125{,}86} \to d = 125{,}86 \cdot tg\ 30° = 72{,}67$ m

La altura del edificio más bajo es 150 – 72,67 = 77,33 m.

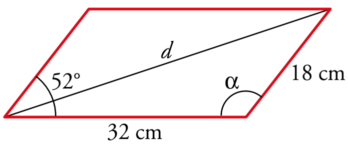
8 **Los lados de un paralelogramo miden 18 cm y 32 cm y forman un ángulo de 52°. Halla la longitud de la diagonal mayor.**

$\alpha = 180° - 52° = 128°$

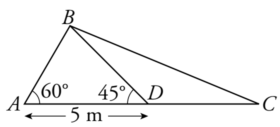
Calculamos d aplicando el teorema del coseno:

$d^2 = 18^2 + 32^2 - 2 \cdot 18 \cdot 32\ cos\ 128° = 2\,057{,}24$

$d = 45{,}36$ cm es la medida de la diagonal.



9 **De esta figura, sabemos que $\overline{BD} = \overline{DC}$, $\hat{A} = 60°$, $\widehat{ADB} = 45°$ y $\overline{AD} = 5$ m. Calcula $\overline{BC}$.**



$\widehat{ABD} = 180° - (60° + 45°) = 75°$

$\dfrac{5}{sen\ 75°} = \dfrac{\overline{BD}}{sen\ 60°} \to \overline{BD} = \dfrac{5 \cdot sen\ 60°}{sen\ 75°} = 4{,}48$ m

$\widehat{BDC} = 180° - 45° = 135°$

$\overline{BC}^{\,2} = 4{,}48^2 + 4{,}48^2 - 2 \cdot 4{,}48 \cdot 4{,}48 cos\ 135° = 68{,}525 \to \overline{BC} = 8{,}28$ m

5 FÓRMULAS Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para consultar los **criterios de evaluación** y los **estándares de aprendizaje evaluables**, véase la Programación.

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) CE 1.4. (EA 1.14.1.-EA 1.4.2.) CE 4.1. (EA 4.1.1.)

1 FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Página 137

1 **Demuestra la fórmula (II.2) a partir de la fórmula:**

$\boldsymbol{cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta}$

$cos\ (\alpha - \beta) = cos\ (\alpha + (-\beta)) = cos\ \alpha\ cos\ (-\beta) - sen\ \alpha\ sen\ (-\beta) =$

$= cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ (-sen\ \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen$

2 **Demuestra (II.3) a partir de** $\boldsymbol{tg\ (\alpha + \beta) = \dfrac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta}}$**.**

$$tg\ (\alpha - \beta) = tg\ (\alpha + (-\beta)) = \frac{tg\ \alpha + tg\ (-\beta)}{1 - tg\ \alpha\ tg\ (-\beta)} \overset{(*)}{=} \frac{tg\ \alpha + (-tg\ \beta)}{1 - tg\ \alpha\ (-tg\ \beta)} = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha\ tg\ \beta}$$

(*) Como $\left.\begin{array}{l} sen\ (-\alpha) = -sen\ \alpha \\ cos\ (-\alpha) = cos\ \alpha \end{array}\right\} \rightarrow tg\ (-\alpha) = -tg\ \alpha$

3 **Demuestra la fórmula (II.3) a partir de las siguientes:**

$\boldsymbol{sen\ (\alpha - \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta}$

$\boldsymbol{cos\ (\alpha - \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta}$

$$tg\ (\alpha - \beta) = \frac{sen\ (\alpha - \beta)}{cos\ (\alpha - \beta)} = \frac{sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta} \overset{(*)}{=} \frac{\dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta} - \dfrac{cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}}{\dfrac{cos\ \alpha\ cos\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta} + \dfrac{sen\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}} = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha\ tg\ \beta}$$

(*) Dividimos numerador y denominador por $cos\ \alpha\ cos\ \beta$.

4 **Si** $\boldsymbol{sen\ 12° = 0{,}2}$ **y** $\boldsymbol{sen\ 37° = 0{,}6}$**, halla** $\boldsymbol{cos\ 12°}$**,** $\boldsymbol{tg\ 12°}$**,** $\boldsymbol{cos\ 37°}$ **y** $\boldsymbol{tg\ 37°}$**. Calcula, a partir de ellas, las razones trigonométricas de 49° y de 25°, usando las fórmulas (I) y (II).**

- $sen\ 12° = 0{,}2$

  $cos\ 12° = \sqrt{1 - sen^2\ 12°} = \sqrt{1 - 0{,}04} = 0{,}98$

  $tg\ 12° = \dfrac{0{,}2}{0{,}98} = 0{,}2$

- $sen\ 37° = 0{,}6$

  $cos\ 37° = \sqrt{1 - sen^2\ 37°} = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$

  $tg\ 37° = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

- $49° = 12° + 37°$, luego:

  $sen\ 49° = sen\ (12° + 37°) = sen\ 12°\ cos\ 37° + cos\ 12°\ sen\ 37° = 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}98 \cdot 0{,}6 = 0{,}748$

  $cos\ 49° = cos\ (12° + 37°) = cos\ 12°\ cos\ 37° - sen\ 12°\ sen\ 37° = 0{,}98 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}664$

  $tg\ 49° = tg\ (12° + 37°) = \dfrac{tg\ 12° + tg\ 37°}{1 - tg\ 12°\ tg\ 37°} = \dfrac{0{,}2 + 0{,}75}{1 - 0{,}2 \cdot 0{,}75} = 1{,}12$

  $\left(\text{Podría calcularse } tg\ 49° = \dfrac{sen\ 49°}{cos\ 49°}\right)$.

- $25° = 37° - 12°$, luego:

  $sen\ 25° = sen\ (37° - 12°) = sen\ 37°\ cos\ 12° - cos\ 37°\ sen\ 12° = 0{,}6 \cdot 0{,}98 - 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}428$

  $cos\ 25° = cos\ (37° - 12°) = cos\ 37°\ cos\ 12° + sen\ 37°\ sen\ 12° = 0{,}8 \cdot 0{,}98 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}904$

  $$tg\ 25° = tg\ (37° - 12°) = \frac{tg\ 37° - tg\ 12°}{1 + tg\ 37°\ tg\ 12°} = \frac{0{,}75 - 0{,}2}{1 + 0{,}75 \cdot 0{,}2} = 0{,}478$$

5 **Demuestra esta igualdad:**

$$\boldsymbol{\frac{cos\ (a+b) + cos\ (a-b)}{sen\ (a+b) + sen\ (a-b)} = \frac{1}{tg\ a}}$$

$$\frac{cos\ (a+b) + cos\ (a-b)}{sen\ (a+b) + sen\ (a-b)} = \frac{cos\ a\ cos\ b - sen\ a\ sen\ b + cos\ a\ cos\ b + sen\ a\ sen\ b}{sen\ a\ cos\ b + cos\ a\ sen\ b + sen\ a\ cos\ b - cos\ a\ sen\ b} =$$

$$= \frac{2\ cos\ a\ cos\ b}{2\ sen\ a\ cos\ b} = \frac{cos\ a}{sen\ a} = \frac{1}{tg\ a}$$

6 **Demuestra las fórmulas (III.1) y (III.3) haciendo $\alpha = \beta$ en las fórmulas (I).**

$sen\ 2\alpha = sen\ (\alpha + \alpha) = sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos\ \alpha\ sen\ \alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$

$$tg\ 2\alpha = tg\ (\alpha + \alpha) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \alpha}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \alpha} = \frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\ \alpha}$$

7 **Halla las razones trigonométricas de 60° usando las de 30°.**

$$sen\ 60° = sen\ (2 \cdot 30°) = 2\ sen\ 30°\ cos\ 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 60° = cos\ (2 \cdot 30°) = cos^2\ 30° - sen^2\ 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$tg\ 60° = tg\ (2 \cdot 30°) = \frac{2\ tg\ 30°}{1 - tg^2\ 30°} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - (\sqrt{3}/3)^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - 3/9} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{2/3} = \sqrt{3}$$

8 **Halla las razones trigonométricas de 90° usando las de 45°.**

$$sen\ 90° = sen\ (2 \cdot 45°) = 2\ sen\ 45°\ cos\ 45° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$cos\ 90° = cos\ (2 \cdot 45°) = cos^2\ 45° - sen^2\ 45° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

$$tg\ 90° = tg\ (2 \cdot 45°) = \frac{2\ tg\ 45°}{1 - tg^2\ 45°} = \frac{2 \cdot 1}{1 - 1} \to \text{No existe.}$$

9 **Demuestra que:** $\boldsymbol{\dfrac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = \dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}$

$$\frac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = \frac{2\ sen\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{2\ sen\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \frac{2\ sen\ \alpha\ (1 - cos\ \alpha)}{2\ sen\ \alpha\ (1 + cos\ \alpha)} = \frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}$$

Página 138

Hazlo tú

1 Halla *cos* 15° y *tg* 15°.

- $cos\ 15° = cos\ \dfrac{30°}{2} = \sqrt{\dfrac{1+cos\ 30°}{2}} = \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}}{2} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}$

- $tg\ 15° = tg\ \dfrac{30°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-cos\ 30°}{1+cos\ 30°}} = \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

Piensa y practica

10 Siguiendo las indicaciones que se dan, demuestra detalladamente las fórmulas IV.1, IV.2 y IV.3.

- $cos\ \alpha = cos\left(2 \cdot \dfrac{\alpha}{2}\right) = cos^2 \dfrac{\alpha}{2} - sen^2 \dfrac{\alpha}{2}$

  Por la igualdad fundamental:

  $cos^2 \dfrac{\alpha}{2} + sen^2 \dfrac{\alpha}{2} = 1 \ \to\ 1 = cos^2 \dfrac{\alpha}{2} + sen^2 \dfrac{\alpha}{2}$

  De aquí:

  a) Sumando ambas igualdades:

  $1 + cos\ \alpha = 2\ cos^2 \dfrac{\alpha}{2} \ \to\ cos^2 \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+cos\ \alpha}{2} \ \to\ cos\ \dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+cos\ \alpha}{2}}$

  b) Restando las igualdades (2.ª – 1.ª):

  $1 - cos\ \alpha = 2\ sen^2 \dfrac{\alpha}{2} \ \to\ sen^2 \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-cos\ \alpha}{2} \ \to\ sen\ \dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-cos\ \alpha}{2}}$

- Por último:

  $$tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{sen\ (\alpha/2)}{cos\ (\alpha/2)} = \frac{\pm\sqrt{\dfrac{1-cos\ \alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\dfrac{1+cos\ \alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1-cos\ \alpha}{1+cos\ \alpha}}$$

11 Sabiendo que *cos* 78° = 0,2, calcula *sen* 78° y *tg* 78°. Averigua las razones trigonométricas de 39° aplicando las fórmulas del ángulo mitad.

- $cos\ 78° = 0,2$

  $sen\ 78° = \sqrt{1-cos^2 78°} = \sqrt{1-0,2^2} = 0,98$

  $tg\ 78° = \dfrac{0,98}{0,2} = 4,9$

- $sen\ 39° = sen\ \dfrac{78°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-cos\ 78°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-0,2}{2}} = 0,63$

  $cos\ 39° = cos\ \dfrac{78°}{2} = \sqrt{\dfrac{1+cos\ 78°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+0,2}{2}} = 0,77$

  $tg\ 39° = tg\ \dfrac{78°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-cos\ 78°}{1+cos\ 78°}} = \sqrt{\dfrac{1-0,2}{1+0,2}} = 0,82$

12 **Halla las razones trigonométricas de 30° a partir de *cos* 60° = 0,5.**

- $cos\ 60° = 0,5$
- $sen\ 30° = sen\ \dfrac{60°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-0,5}{2}} = 0,5$

$cos\ 30° = cos\ \dfrac{60°}{2} = \sqrt{\dfrac{1+0,5}{2}} = 0,866$

$tg\ 30° = tg\ \dfrac{60°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-0,5}{1+0,5}} = 0,577$

13 **Halla las razones trigonométricas de 45° a partir de *cos* 90° = 0.**

- $cos\ 90° = 0$
- $sen\ 45° = sen\ \dfrac{90°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-0}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 45° = cos\ \dfrac{90°}{2} = \sqrt{\dfrac{1+0}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 45° = tg\ \dfrac{90°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-0}{1+0}} = \sqrt{1} = 1$

14 Piensa y comparte en pareja. **[Compartir con el compañero o compañera la toma de decisiones que se deben tomar en este tipo de demostraciones permite trabajar esta estrategia].**

Demuestra: $2\ tg\ \alpha \cdot sen^2 \dfrac{\alpha}{2} + sen\ \alpha = tg\ \alpha$

$$2\ tg\ \alpha \cdot sen^2 \frac{\alpha}{2} + sen\ \alpha = 2\ tg\ \alpha \cdot \frac{1-cos\ \alpha}{2} + sen\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}(1-cos\ \alpha) + sen\ \alpha = sen\ \alpha \left(\frac{1-cos\ \alpha}{cos\ \alpha} + 1\right) =$$

$$= sen\ \alpha \left(\frac{1-cos\ \alpha + cos\ \alpha}{cos\ \alpha}\right) = sen\ \alpha \cdot \frac{1}{cos\ \alpha} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$$

15 **Demuestra la siguiente igualdad:**

$$\frac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = tg^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = \frac{2\ sen\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{2\ sen\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \frac{2\ sen\ \alpha\,(1-cos\ \alpha)}{2\ sen\ \alpha\,(1+cos\ \alpha)} = \frac{1-cos\ \alpha}{1+cos\ \alpha} = tg^2 \frac{\alpha}{2}$$

Página 139

16 **Para demostrar las fórmulas (V.3) y (V.4), da los siguientes pasos:**

- **Expresa en función de α y β:**

  cos **$(\alpha + \beta)$ = …** ***cos*** **$(\alpha - \beta)$ = …**

- **Suma y resta como hemos hecho arriba y obtendrás dos expresiones.**
- **Sustituye en las expresiones anteriores:**

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{array}\right\}$$

- $cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta$

  $cos\ (\alpha - \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta$

Sumando $\rightarrow$ $cos\ (\alpha + \beta) + cos\ (\alpha - \beta) = 2\ cos\ \alpha\ cos\ \beta$ (1)

Restando $\rightarrow$ $cos\ (\alpha + \beta) - cos\ (\alpha - \beta) = -2\ sen\ \alpha\ sen\ \beta$ (2)

- Llamando $\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{array}\right\} \rightarrow \alpha = \dfrac{A+B}{2},\ \beta = \dfrac{A-B}{2}$ (al resolver el sistema)

- Luego, sustituyendo en (1) y (2), se obtiene:

(1) $\rightarrow$ $cos\,A + cos\,B = 2\,cos\,\frac{A+B}{2}\,cos\,\frac{A-B}{2}$ (2) $\rightarrow$ $cos\,A - cos\,B = -2\,sen\,\frac{A+B}{2}\,sen\,\frac{A-B}{2}$

17 Transforma en producto y calcula.

a) ***sen* 75° – *sen* 15°** **b)** ***sen* 75° + *sen* 15°** **c)** ***cos* 75° – *cos* 15°**

a) $sen\,75° - sen\,15° = 2\,cos\,\frac{75°+15°}{2}\,sen\,\frac{75°-15°}{2} = 2\,cos\,45°\,sen\,30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $sen\,75° + sen\,15° = 2\,sen\,\frac{75°+15°}{2}\,cos\,\frac{75°-15°}{2} = 2\,sen\,45°\,cos\,30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $cos\,75° - cos\,15° = -2\,sen\,\frac{75°+15°}{2}\,sen\,\frac{75°-15°}{2} = -2\,sen\,45°\,cos\,30° = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

18 Expresa en forma de producto el numerador y el denominador de esta fracción y simplifica el resultado:

$$\frac{sen\,4\alpha + sen\,2\alpha}{cos\,4\alpha + cos\,2\alpha}$$

$$\frac{sen\,4\alpha + sen\,2\alpha}{cos\,4\alpha + cos\,2\alpha} = \frac{2\,sen\,\frac{4\alpha+2\alpha}{2}\,cos\,\frac{4\alpha-2\alpha}{2}}{2\,cos\,\frac{4\alpha+2\alpha}{2}\,cos\,\frac{4\alpha-2\alpha}{\alpha}} = \frac{2\,sen\,3\alpha}{2\,cos\,3\alpha} = tg\,3\alpha$$

2 ▶ ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

C.E.: CE 4.2. (EA 4.2.1.)

Página 140

Hazlo tú

1 **Resuelve** $\boldsymbol{sen\ (\alpha + 30°) = 2\ cos\ \alpha}$**.**

$sen\ (\alpha + 30°) = 2\ cos\ \alpha$

$sen\ \alpha\ cos\ 30° + cos\ \alpha\ sen\ 30° = 2\ cos\ \alpha$

$$\frac{1}{2}\ sen\ \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\ cos\ \alpha = 2\ cos\ \alpha$$

Dividimos los dos miembros entre $cos\ \alpha$:

$$\frac{1}{2}\ tg\ \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \rightarrow tg\ \alpha + \sqrt{3} = 4 \rightarrow tg\ \alpha = 4 - \sqrt{3}$$

Soluciones: $\begin{cases} \alpha_1 = 66°\ 12'\ 22'' \\ \alpha_2 = 246°\ 12'\ 22'' \end{cases}$

Hazlo tú

2 **Resuelve** $\boldsymbol{cos\ \alpha = sen\ 2\alpha}$**.**

$cos\ \alpha = sen\ 2\alpha$

$cos\ \alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha \rightarrow cos\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha = 0 \rightarrow cos\ \alpha\ (1 - 2\ sen\ \alpha) = 0$

Posibles soluciones: $\begin{cases} cos\ \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90°,\ \alpha_2 = 270° \\ 1 - 2\ sen\ \alpha = 0 \rightarrow sen\ \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 30°,\ \alpha_4 = 150° \end{cases}$

Al comprobarlas sobre la ecuación inicial, vemos que las cuatro soluciones son válidas.

Página 141

Hazlo tú

3 **Resuelve** $\boldsymbol{sen\ 3x - sen\ x = 0}$**.**

$sen\ 3x - sen\ x = 0$

$$2\ cos\ \frac{3x + x}{2}\ sen\ \frac{3x - x}{2} = 0 \rightarrow 2\ cos\ 2x\ sen\ x = 0 \rightarrow cos\ 2x\ sen\ x = 0$$

Si $cos\ 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = 90° \rightarrow x_1 = 45° \\ 2x = 270° \rightarrow x_2 = 135° \\ 2x = 90° + 360° = 450° \rightarrow x_3 = 225° \\ 2x = 270° + 360° = 630° \rightarrow x_4 = 315° \end{cases}$

Si $sen\ x = 0 \rightarrow x_5 = 0°,\ x_6 = 180°$

Piensa y practica

1 **Resuelve.**

a) $\boldsymbol{tg\ \alpha = -\sqrt{3}}$ **b)** $\boldsymbol{sen\ \alpha = cos\ \alpha}$ **c)** $\boldsymbol{sen^2\ \alpha = 1}$ **d)** $\boldsymbol{sen\ \alpha = tg\ \alpha}$

a) $x = 120° + k \cdot 360°$ o bien $x = 300° + k \cdot 360°$

Las dos soluciones quedan recogidas en:

$x = 120° + k \cdot 180° = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ rad $= x$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ rad con $k \in \mathbb{Z}$

c) $\left.\begin{array}{l}\text{Si } sen\ x = 1 \ \rightarrow\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ rad} \\ \text{Si } sen\ x = -1 \ \rightarrow\ x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ rad}\end{array}\right\} \rightarrow\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$

d) En ese caso debe ocurrir que:

$\left.\begin{array}{l}\text{O bien } sen\ x = 0 \ \rightarrow\ x = k\pi \text{ rad} \\ \text{O bien } cos\ x = 1 \ \rightarrow\ x = 2k\pi \text{ rad}\end{array}\right\} \rightarrow\ x = k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$

2 Resuelve estas ecuaciones:

a) $2\ cos^2\ \alpha + cos\ \alpha - 1 = 0$

b) $2\ sen^2\ \alpha - 1 = 0$

c) $tg^2\ \alpha - tg\ \alpha = 0$

d) $2\ sen^2\ \alpha + 3\ cos\ \alpha = 3$

a) $cos\ \alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \ \rightarrow\ \alpha_1 = 60°,\ \alpha_2 = 300° \\ -1 \ \rightarrow\ \alpha_3 = 180° \end{cases}$

Las tres soluciones son válidas (se comprueba en la ecuación inicial).

b) $2\ sen^2\ \alpha - 1 = 0 \ \rightarrow\ sen^2\ \alpha = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow\ sen\ \alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow\ \alpha_1 = 45°,\ \alpha_2 = 135°$
- Si $sen\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow\ \alpha_3 = -45° = 315°,\ \alpha_4 = 225°$

Todas las soluciones son válidas.

c) $tg^2\ \alpha - tg\ \alpha = 0 \ \rightarrow\ tg\ \alpha\ (tg\ \alpha - 1) = 0 \begin{cases} tg\ \alpha = 0 \ \rightarrow\ \alpha_1 = 0°,\ \alpha_2 = 180° \\ tg\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ \alpha_3 = 45°,\ \alpha_4 = 225° \end{cases}$

Todas las soluciones son válidas.

d) $2\ sen^2\ \alpha + 3\ cos\ \alpha = 3 \ \overset{(*)}{\rightarrow}\ 2(1 - cos^2\ \alpha) + 3\ cos\ \alpha = 3$

(*) Como $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ sen^2\ \alpha = 1 - cos^2\ \alpha$

$2 - 2\ cos^2\ \alpha + 3\ cos\ \alpha = 3 \ \rightarrow\ 2\ cos^2\ \alpha - 3\ cos\ \alpha + 1 = 0$

$cos\ \alpha = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \dfrac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$

Entonces:

- Si $cos\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ \alpha_1 = 0°$
- Si $cos\ \alpha = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow\ \alpha_2 = 60°,\ \alpha_3 = -60° = 300°$

Las tres soluciones son válidas.

3 Transforma en producto $sen\ 5\alpha - sen\ 3\alpha$ **y resuelve después la ecuación** $sen\ 5\alpha - sen\ 3\alpha = 0$**.**

$sen\ 5\alpha - sen\ 3\alpha = 0 \ \rightarrow\ 2\ cos\ \dfrac{5\alpha + 3\alpha}{2}\ sen\ \dfrac{5\alpha - 3\alpha}{2} = 0 \ \rightarrow\ 2\ cos\ \dfrac{8\alpha}{2}\ sen\ \dfrac{2\alpha}{2} = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow\ 2\ cos\ 4\alpha\ sen\ \alpha = 0 \ \rightarrow\ \begin{cases} cos\ 4\alpha = 0 \\ sen\ \alpha = 0 \end{cases}$

- Si $cos\ 4\alpha = 0 \ \rightarrow\ \begin{cases} 4\alpha = 90° & \rightarrow\ \alpha_1 = 22°\ 30' \\ 4\alpha = 270° & \rightarrow\ \alpha_2 = 67°\ 30' \\ 4\alpha = 90° + 36° & \rightarrow\ \alpha_3 = 112°\ 30' \\ 4\alpha = 270° + 360° & \rightarrow\ \alpha_4 = 157°\ 30' \end{cases}$
- Si $sen\ \alpha = 0 \ \rightarrow\ \alpha_5 = 0°,\ \alpha_6 = 180°$

Comprobamos que las seis soluciones son válidas.

4 Resuelve.

a) $4\cos 2x + 3\cos x = 1$

b) $tg\, 2x + 2\cos x = 0$

c) $\sqrt{2}\cos (x/2) - \cos x = 1$

d) $2\, sen\, x \cos^2 x - 6\, sen^3 x = 0$

a) $4\cos 2\alpha + 3\cos\alpha = 1 \rightarrow 4(\cos^2\alpha - sen^2\alpha) + 3\cos\alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 4(\cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)) + 3\cos\alpha = 1 \rightarrow 4(2\cos^2\alpha - 1) + 3\cos\alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 8\cos^2\alpha - 4 + 3\cos\alpha = 1 \rightarrow 8\cos^2\alpha + 3\cos\alpha - 5 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \cos\alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{16} = \frac{-3\pm 13}{16} = \begin{cases} 10/16 = 5/8 = 0{,}625 \\ -1 \end{cases}$$

• Si $\cos\alpha = 0{,}625 \rightarrow \alpha_1 = 51°\ 19'\ 4{,}13'',\ \alpha_2 = -51°\ 19'\ 4{,}13''$

• Si $\cos\alpha = -1 \rightarrow \alpha_3 = 180°$

Al comprobar las soluciones, las tres son válidas.

b) $tg\, 2\alpha + 2\cos\alpha = 0 \rightarrow \dfrac{2\, tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} + 2\cos\alpha = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} + \cos\alpha = 0 \rightarrow \frac{\dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \dfrac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}} + \cos\alpha = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{sen\,\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - sen^2\alpha} + \cos\alpha = 0 \rightarrow sen\,\alpha\cos\alpha + \cos\alpha(\cos^2\alpha - sen^2\alpha) = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow \cos\alpha\,(sen\,\alpha + \cos^2\alpha - sen^2\alpha) = 0 \rightarrow \cos\alpha\,(sen\,\alpha + 1 - sen^2\alpha - sen^2\alpha) \rightarrow$

$\rightarrow \cos\alpha\,(1 + sen\,\alpha - 2\, sen^2\alpha) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ 1 + sen\,\alpha - 2\, sen^2\alpha = 0 \rightarrow sen\,\alpha = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-4} = \begin{cases} -1/2 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$$

• Si $\cos\alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90°,\ \alpha_2 = 270°$

• Si $sen\,\alpha = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 210°,\ \alpha_4 = 330° = -30°$

• Si $sen\,\alpha = 1 \rightarrow \alpha_5 = 90° = \alpha_1$

Al comprobar las soluciones, vemos que todas ellas son válidas.

c) $\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} - \cos\alpha = 1 \rightarrow \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} - \cos\alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{1+\cos\alpha} - \cos\alpha = 1 \rightarrow \sqrt{1-\cos\alpha} = 1 + \cos\alpha \rightarrow$

$\rightarrow 1 + \cos\alpha = 1 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha \rightarrow \cos^2\alpha + \cos\alpha = 0 \rightarrow \cos\alpha\,(\cos\alpha + 1) = 0$

• Si $\cos\alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90°,\ \alpha_2 = 270°$

• Si $\cos\alpha = -1 \rightarrow \alpha_3 = 180°$

Al comprobar las soluciones, podemos ver que las únicas válidas son: $\alpha_1 = 90°$ y $\alpha_3 = 180°$

d) $2\, sen\,\alpha\cos^2\alpha - 6\, sen^3\alpha = 0 \rightarrow 2\, sen\,\alpha\,(\cos^2\alpha - 3\, sen^2\alpha) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2\, sen\,\alpha\,(\cos^2\alpha + sen^2\alpha - 4\, sen^2\alpha) = 0 \rightarrow 2\, sen\,\alpha\,(1 - 4\, sen^2\alpha) = 0$

• Si $sen\,\alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0°,\ \alpha_2 = 180°$

• Si $sen^2\alpha = \dfrac{1}{4} \rightarrow sen\,\alpha = \pm\dfrac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 30°,\ \alpha_4 = 150°,\ \alpha_5 = 210°,\ \alpha_6 = 330°$

Comprobamos las soluciones y observamos que son válidas todas ellas.

5 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\boldsymbol{sen\ (180° - x) = cos\ (270° - x) + cos\ 180°}$

b) $\boldsymbol{sen\ (45° - x) + \sqrt{2}\ sen\ x = 0}$

a) $sen\ (180° - \alpha) = cos\ (270° - \alpha) + cos\ 180°$

$sen\ 180°\ cos\ \alpha - cos\ 180°\ sen\ \alpha = cos\ 270°\ cos\ \alpha + sen\ 270°\ sen\ \alpha - 1$

$sen\ \alpha = -sen\ \alpha - 1 \ \rightarrow\ 2\ sen\ \alpha = -1 \ \rightarrow\ sen\ \alpha = -\dfrac{1}{2} \ \rightarrow\ \alpha_1 = 210°,\ \ \alpha_2 = 330°$

b) $sen\ (45° - \alpha) + \sqrt{2}\ sen\ \alpha = 0$

$sen\ 45°\ cos\ \alpha - cos\ 45°\ sen\ \alpha + \sqrt{2}\ sen\ \alpha = 0 \ \rightarrow\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ \alpha - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ \alpha + \sqrt{2}\ sen\ \alpha = 0$

$cos\ \alpha - sen\ \alpha + 2\ sen\ \alpha = 0 \ \rightarrow\ cos\ \alpha + sen\ \alpha = 0$

Dividimos entre $cos\ \alpha$:

$1 + tg\ \alpha = 0 \ \rightarrow\ tg\ \alpha = -1 \ \rightarrow\ \alpha_1 = 135°,\ \ \alpha_2 = 315°$

3 ▶ FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

C.E.: CE 1.4. (EA 1.4.1.-EA 1.4.2.-EA 1.4.3.) CE 3.1. (EA 3.1.1.) CE 4.1. (EA 4.1.1.)

Página 143

1 **¿Verdadero o falso?**

a) El radián es una medida de longitud equivalente al radio.

b) Un radián es un ángulo algo menor que 60°.

c) Puesto que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, un ángulo completo (360°) tiene 2π radianes.

d) 180° es algo menos de 3 radianes.

e) Un ángulo recto mide $\pi/2$ radianes.

a) Falso. El radián es una medida angular, no es una medida de longitud.

b) Verdadero, porque un radián tiene 57° 17' 45''.

c) Verdadero, porque cada radián abarca un arco de longitud r.

d) Falso. 180° es la mitad de un ángulo completo y equivale, por tanto, a π radianes, algo más de 3 radianes.

e) Verdadero. Un ángulo recto es la cuarta parte de un ángulo completo y tiene $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ radianes.

2 **Pasa a radianes los siguientes ángulos:**

a) 30° **b) 72°**

c) 90° **d) 127°**

e) 200° **f) 300°**

Expresa el resultado en función de π y luego en forma decimal. Por ejemplo:

$$30° = 30 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 0,52 \text{ rad}$$

a) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 30° = \frac{\pi}{6}$ rad $\approx 0,52$ rad

b) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 72° = \frac{2\pi}{5}$ rad $\approx 1,26$ rad

c) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 90° = \frac{\pi}{2}$ rad $\approx 1,57$ rad

d) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 127° \approx 2,22$ rad

e) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 200° = \frac{10\pi}{9}$ rad $\approx 3,49$ rad

f) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 300° = \frac{5\pi}{3}$ rad $\approx 5,24$ rad

3 **Pasa a grados los siguientes ángulos:**

a) 2 rad **b) 0,83 rad**

c) $\frac{\pi}{5}$ rad **d) $\frac{5\pi}{6}$ rad**

e) 3,5 rad **f) π rad**

a) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 2 = 114°\ 35'\ 29,6''$

b) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 0,83 = 47°\ 33'\ 19,8''$

c) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{5} = 36°$

d) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = 150°$

e) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 3,5 = 200°\ 32'\ 6,8''$

f) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \pi = 180°$

4 **Cabezas pensantes. [Antes de completar la tabla el alumnado podrá compartir en pequeños grupos el método que hay que seguir para calcular los valores correctos].**

Copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno y añade las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de cada uno de los ángulos:

GRADOS	0°	30°		60°	90°		135°	150°	
RADIANES			$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2}{3}\pi$			π

GRADOS	210°	225°		270°			330°	360°
RADIANES			$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$		

La tabla completa está en la página 144 del libro de texto.

Página 144

5 **[El alumnado puede explicar a sus compañeros y compañeras por qué cree que las afirmaciones son verdaderas o falsas para trabajar la destreza expresión oral de esta clave].**

¿Verdadero o falso?

a) Las funciones trigonométricas son periódicas.

b) Las funciones *sen* y *cos* tienen un periodo de 2π.

c) La función $tg\,x$ tiene periodo π.

d) La función $cos\,x$ es como $sen\,x$ desplazada $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda.

a) Verdadero. La forma de sus gráficas se repite a lo largo del eje horizontal, cada 2π radianes.

b) Verdadero.

$$\left.\begin{array}{l} sen\,(x+2\pi)=sen\,x \\ cos\,(x+2\pi)=cos\,x \end{array}\right\}$$ porque 2π radianes equivalen a una vuelta completa.

c) Verdadero.

$tg\,(x+\pi) = tg\,x$

Podemos observarlo en la gráfica de la función $tg\,x$ en la página 138 del libro de texto.

d) Verdadero. Se puede observar en las gráficas de la página 138 del libro de texto.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 4.1. (EA 4.1.1.) CE 4.2. (EA 4.2.1.)

Página 145

1. Razones trigonométricas de un ángulo a partir de las de otros con los que lo podemos relacionar

Hazlo tú

- **Sabiendo que *sen* 54 = 0,81, halla:**

a) ***cos*** **108°** **b)** ***tg*** **27°**

c) ***sen*** **24°** **d)** ***cos*** **99°**

a) $sen^2\, 54° + cos^2\, 54° = 1 \;\rightarrow\; 0{,}81^2 + cos^2\, 54° = 1 \;\rightarrow\; cos\, 54° = \sqrt{1-0{,}81^2} = 0{,}59$

$cos\, 108° = cos\,(2 \cdot 54°) = cos^2\, 54° - sen^2\, 54° = 0{,}59^2 - 0{,}81^2 = -0{,}31$

b) $tg\, 27° = tg\left(\dfrac{54°}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-cos\,54°}{1+cos\,54°}} = \sqrt{\dfrac{1-0{,}59}{1+0{,}59}} = 0{,}51$

c) $sen\, 24° = sen\,(54° - 30°) = sen\, 54°\, cos\, 30° - cos\, 54°\, sen\, 30° = 0{,}81 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}59 \cdot \dfrac{1}{2} = 0{,}41$

d) $cos\, 99° = cos\,(54° + 45°) = cos\, 54°\, cos\, 45° - sen\, 54°\, sen\, 45° = 0{,}59 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}81 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}16$

2. Demostración de una identidad trigonométrica

Hazlo tú

- **Demuestra:**

$\boldsymbol{cos\,\alpha\, cos\,(\alpha - \beta) + sen\,\alpha\, sen\,(\alpha - \beta) = cos\,\beta}$

$cos\,\alpha\, cos\left(\alpha - \beta\right) + sen\,\alpha\, sen\left(\alpha - \beta\right) =$

$= cos\,\alpha\left(cos\,\alpha\, cos\,\beta + sen\,\alpha\, sen\beta\right) + sen\,\alpha\left(sen\,\alpha\, cos\,\beta - cos\,\alpha\, sen\,\beta\right) =$

$= cos^2\,\alpha\, cos\,\beta + sen\,\alpha\, sen\,\beta\, cos\,\alpha + sen^2\,\alpha\, cos\,\beta - sen\,\alpha\, cos\,\beta\, cos\,\alpha = cos\,\beta\left(cos^2\,\alpha + sen^2\,\alpha\right) = cos\,\beta$

3. Simplificación de una expresión trigonométrica

Hazlo tú

- **Simplifica:**

$\boldsymbol{sen\, 2\alpha - tg\,\alpha\, cos\, 2\alpha}$

$sen\, 2\alpha - tg\,\alpha\, cos\, 2\alpha = 2sen\,\alpha\, cos\,\alpha - tg\,\alpha\left(cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha\right) = sen\,\alpha\left(2\,cos\,\alpha - cos\,\alpha + \dfrac{sen^2\,\alpha}{cos\,\alpha}\right) = sen\,\alpha\left(cos\,\alpha + \dfrac{sen^2\,\alpha}{cos\,\alpha}\right) =$

$= \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}\left(cos^2\,\alpha + sen^2\,\alpha\right) = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = tg\,\alpha$

Página 146

4. Resolución de una ecuación trigonométrica factorizable

Hazlo tú

- **Resuelve:**

$\boldsymbol{sen^3 x - sen\, x\, cos^2 x = 0}$

Extraemos factor común: $sen\, x(sen^2 x - cos^2 x) = 0$

Igualamos a cero cada factor:

$sen\, x = 0 \;\rightarrow\; x = 0° + 360° \cdot k;\; x = 180° + 360° \cdot k$

$$sen^2 x - cos^2 x = 0 \;\rightarrow\; sen^2 x - (1 - sen^2 x) = 0 \;\rightarrow\; 2sen^2 x = 1 \;=\; sen^2 x = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; sen\, x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si $sen\, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $x = 45° + 360° \cdot k;\; x = 135° + 360° \cdot k$

Si $sen\, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $x = 225° + 360° \cdot k;\; x = 315° + 360° \cdot k$

5. Resolución de una ecuación trigonométrica con dos razones de un mismo ángulo

Hazlo tú

- **Resuelve:**

$\boldsymbol{sen\, x + cos\, x = 1}$

Elevamos al cuadrado:

$$cos^2 x + sen^2 x + 2\, sen\, x\, cos\, x = 1 \;\rightarrow\; 2\, sen\, x\, cos\, x = 1 \;\rightarrow\; 2\, sen\, x\, cos\, x = 0 \;\rightarrow\; sen\, x\, cos\, x = 0 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; sen\, x = 0 \text{ o } cos\, x = 0 \;\rightarrow\; x = 0° + k180° \text{ o } x = 90° + k180°, k \in \mathbb{Z}$$

6. Resolución de una ecuación trigonométrica con dos ángulos y dos razones

Hazlo tú

- **Resuelve:**

$\boldsymbol{tg^2 \frac{x}{2} = 1 - cos\, x}$

Utilizamos la fórmula de la tangente del ángulo mitad:

$$\left(\sqrt{\frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}}\right)^2 = 1 - cos\, x \;\rightarrow\; \frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x} = 1 - cos\, x \;\rightarrow\; 1 - cos\, x = 1 - cos^2 x \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; cos^2 x - cos\, x = 0 \;\rightarrow\; cos\, x\,(1 - cos\, x) = 0 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{cases} cos\, x = 0 \;\rightarrow\; x = 90° + 360° \cdot k;\; x = 270° + 360° \cdot k \\ cos\, x = 1 \;\rightarrow\; x = 0° + 360° \cdot k \end{cases}$$

7. Resolución de una ecuación trigonométrica aplicando las fórmulas de suma de senos y cosenos

Hazlo tú

- $\boldsymbol{\dfrac{cos\, 4x + cos\, 2x}{sen\, 4x - sen\, 2x} = 1}$

Transformamos las sumas en productos:

$$\frac{2\, cos\, \frac{4x + 2x}{2}\, cos\, \frac{4x - 2x}{2}}{2\, cos\, \frac{4x + 2x}{2}\, sen\, \frac{4x - 2x}{2}} = 1 \;\rightarrow\; \frac{cos\, x}{sen\, x} = 1 \;\rightarrow\; \frac{1}{tg\, x} = 1 \;\rightarrow\; tg\, x = 1 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; x = 45° + 360° \cdot k;\; x = 225° + 360° \cdot k$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 147

1. Razones trigonométricas de $tg \frac{\alpha+\beta}{2}$

- **Conociendo** $cosec\ \alpha = \frac{5}{4}$**,** $90° < \alpha < 180°$**, y** $sec\ \beta = 3$**,** $270° < \beta < 360°$**, calcular** $tg \frac{\alpha+\beta}{2}$ **sin hallar los ángulos** α **y** β**.**

  Por su definición sabemos: $cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{4}{5}$

  También por definición: $sec\ \beta = \frac{1}{cos\ \beta} \rightarrow cos\ \beta = \frac{1}{3}$

  Calcularemos $cos\ \alpha$ y $sen\ \beta$ a partir de la igualdad:

  $cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha = 1$

  $cos\ \alpha = -\sqrt{1 - sen^2\ \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$ (sabemos que es negativo porque α pertenece al segundo cuadrante).

  $sen\ \beta = -\sqrt{1 - cos^2\ \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (sabemos que es negativo porque β pertenece al cuarto cuadrante).

  Por la fórmula del ángulo mitad:

$$tg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - cos(\alpha+\beta)}{1 + cos(\alpha+\beta)}} = \sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ \ sen\ \beta}{1 + cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3} - \frac{4}{5}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}}{1 - \frac{3}{15} + \frac{8\sqrt{2}}{15}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{18 - 8\sqrt{2}}{15}}{\frac{12 + 8\sqrt{2}}{15}}} = \sqrt{\frac{2(9 - 4\sqrt{2})}{2(6 + 4\sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{2}}{6 + 4\sqrt{2}}}$$

2. Identidades trigonométricas

- **Demostrar:** $cos\ 3x = 4\ cos^3\ x - 3\ cos\ x$

  $cos\ 3x = cos(2x + x) = cos\ 2x\ cos\ x - sen\ 2x\ sen\ x = (cos^2\ x - sen^2\ x)\ cos\ x - 2\ sen\ x\ cos\ x\ sen\ x =$

  $= cos^3\ x - sen^2\ x\ cos\ x - 2\ sen^2\ x\ cos\ x = cos^3\ x - 3\ sen^2\ x\ cos\ x = cos^3\ x - 3(1 - cos^2\ x)\ cos\ x =$

  $= cos^3\ x - 3cos\ x + 3cos^3\ x = 4cos^3\ x - 3cos\ x$

3. Expresiones algebraicas equivalentes

- **Escribir la expresión:** $cos\ (\alpha + \beta)\ cos\ (\alpha - \beta)$ **en función de** $cos\ \alpha$ **y** $sen\ \beta$**.**

  $cos\ (\alpha + \beta)\ cos\ (\alpha - \beta) = (cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta)\ (cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta) =$

  $= cos^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha\ sen^2\ \beta = cos^2\ \alpha\ (1 - sen^2\ \beta) - (1 - cos^2\ \alpha)\ sen^2\ \beta =$

  $= cos^2\ \alpha - cos^2\ \alpha\ sen^2\ \beta - sen^2\ \beta + cos^2\ \alpha\ sen^2\ \beta = cos^2\ \alpha - sen^2\ \beta$

4. Simplificación de expresiones trigonométricas

- **Simplificar esta expresión: $2\ tg\ \alpha\ cos^2 \dfrac{\alpha}{2} - sen\ \alpha$**

$$2\ tg\ \alpha\ cos^2\frac{\alpha}{2} - sen\ \alpha = 2\ tg\ \alpha\left(\pm\sqrt{\frac{1+cos\ \alpha}{2}}\right)^2 - sen\ \alpha = 2\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}\cdot\frac{1+cos\ \alpha}{2} - sen\ \alpha =$$

$$= \frac{sen\ \alpha\,(1+cos\ \alpha) - sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{sen\ \alpha + sen\ \alpha\ cos\ \alpha - sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$$

5. Otras ecuaciones trigonométricas

- **Resolver estas ecuaciones:**

a) $cos^2\,(2x + 30°) = \dfrac{1}{4}$

b) $4\ sen\ x + 4\ cos^2 x\ tg\ x + tg\ x = 0$

Expresar el resultado obtenido en grados y radianes.

a) $cos\,(2x + 30°) = \pm\dfrac{1}{2}$

Si $cos\,(2x+30°) = \dfrac{1}{2} \to \begin{cases} 2x+30° = 60° \to x = 15° + 360°\cdot k \\ 2x+30° = 300° \to x = 135° + 360°\cdot k \\ 2x+30° = 60° + 360° \to x = 195° + 360°\cdot k \\ 2x+30° = 300° + 360° \to x = 315° + 360°\cdot k \end{cases}$

Si $cos\,(2x+30°) = -\dfrac{1}{2} \to \begin{cases} 2x+30° = 120° \to x = 45° + 360°\cdot k \\ 2x+30° = 240° \to x = 105° + 360°\cdot k \\ 2x+30° = 120° + 360° \to x = 225° + 360°\cdot k \\ 2x+30° = 240° + 360° \to x = 285° + 360°\cdot k \end{cases}$

b) Si $tg\ x = 0$ entonces $x = 0° + 360°\cdot k$; $x = 180° + 360°\cdot k$ son soluciones de la ecuación, ya que el seno de estos ángulos también es 0.

Si $tg \neq 0$, dividimos entre esta función los dos términos de la ecuación:

$$\frac{4\ sen\ x}{tg\ x} + 4\ cos^2 x + 1 = 0 \to \frac{4\ sen\ x}{\frac{sen\ x}{cos\,x}} + 4\ cos^2 x + 1 = 0 \to 4\ cos^2 x + 4\ cos\ x + 1 = 0 \to$$

$$\to cos\ x = \frac{-4\pm 0}{8} = -\frac{1}{2} \to x = 120° + 360°\cdot k;\ x = 240° + 360°\cdot k$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 148

Para practicar

Fórmulas trigonométricas

1 **Calcula las razones trigonométricas de 22° 30' a partir de las de 45°.**

$$sen\,(22°\,30') = sen\,\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$cos\,(22°\,30') = cos\,\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$tg\,(22°\,30') = tg\,\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{1-\sqrt{2}/2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

2 **Si $cos\,78° = 0{,}2$ y $sen\,37° = 0{,}6$ halla las razones trigonométricas de 41° y de 115°.**

$41° = 78° - 37°$

- $sen\,78° = \sqrt{1-cos^2\,78°} = \sqrt{1-0{,}2^2} = 0{,}98$
- $cos\,37° = \sqrt{1-sen^2\,37°} = \sqrt{1-0{,}6^2} = 0{,}8$

Ahora ya podemos calcular:

- $sen\,41° = sen\,(78° - 37°) = sen\,78°\,cos\,37° - cos\,78°\,sen\,37° = 0{,}98 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}664$
- $cos\,41° = cos\,(78° - 37°) = cos\,78°\,cos\,37° + sen\,78°\,sen\,37° = 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}98 \cdot 0{,}6 = 0{,}748$
- $tg\,41° = \dfrac{sen\,41°}{cos\,41°} = \dfrac{0{,}664}{0{,}748} = 0{,}8877$
- $sen\,115° = sen\,(78° + 37°) = sen\,78°\,cos\,37° + cos\,78°\,sen\,37° = 0{,}98 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}904$
- $cos\,115° = cos\,(78° + 37°) = cos\,78°\,cos\,37° - sen\,78°\,sen\,37° = 0{,}2 \cdot 0{,}8 - 0{,}98 \cdot 0{,}6 = -0{,}428$
- $tg\,115° = \dfrac{sen\,115°}{cos\,115°} = -\dfrac{0{,}904}{0{,}428} = -2{,}112$

3 **a) Halla el valor exacto de las razones trigonométricas de 75° a partir de las de 30° y 45°.**

b) Utilizando los resultados del apartado a), calcula las razones trigonométricas de 105°; 165°; 15°; 195° y 135°.

a) $sen\,75° = sen\,(30° + 45°) = sen\,30°\,cos\,45° + cos\,30°\,sen\,45° = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$cos\,75° = cos\,(30° + 45°) = cos\,30°\,cos\,45° - sen\,30°\,sen\,45° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$tg\,75° = tg\,(30° + 45°) = \frac{tg\,30° + tg\,45°}{1 - tg\,30°\,tg\,45°} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1} = \frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}} = \sqrt{3}+2$$

b) $sen\ 105° = sen\ (30° + 75°) = sen\ 30°\ cos\ 75° + cos\ 30°\ sen\ 75° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$cos\ 105° = cos\ (30° + 75°) = cos\ 30°\ cos\ 75° - sen\ 30°\ sen\ 75° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$$tg\ 105° = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = -\sqrt{3}-2$$

$sen\ 165° = sen\ (90° + 75°) = sen\ 90°\ cos\ 75° + cos\ 90°\ sen\ 75° = cos\ 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$cos\ 165° = cos\ (90° + 75°) = cos\ 90°\ cos\ 75° - sen\ 90°\ sen\ 75° = -sen\ 75° = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$$tg\ 165° = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \sqrt{3}-2$$

$sen\ 15° = sen\ (90° - 75°) = sen\ 90°\ cos\ 75° - cos\ 90°\ sen\ 75° = cos\ 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$cos\ 15° = cos\ (90° - 75°) = cos\ 90°\ cos\ 75° + sen\ 90°\ sen\ 75° = sen\ 75° = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$$tg\ 15° = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = 2-\sqrt{3}$$

$sen\ 195° = sen\ (270° - 75°) = sen\ 270°\ cos\ 75° - cos\ 270°\ sen\ 75° = -cos\ 75° = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$cos\ 195° = cos\ (270° - 75°) = cos\ 270°\ cos\ 75° + sen\ 270°\ sen\ 75° = -sen\ 75° = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$$tg\ 195° = \frac{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{-\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3}$$

$sen\ 135° = sen\ (180° - 45°) = sen\ 180°\ cos\ 45° - cos\ 180°\ sen\ 45° = sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 135° = cos\ (180° - 45°) = cos\ 180°\ cos\ 45° + sen\ 180°\ sen\ 45° = -cos\ 45° = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$$tg\ 135° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = -1$$

4 **Sabiendo que** $\boldsymbol{cos\ \alpha = \frac{-7}{25}\ (180° < \alpha < 270°)}$ **y** $\boldsymbol{tg\ \beta = \frac{4}{3}\ (180° < \beta < 270°)}$**, calcula** $\boldsymbol{tg\ \frac{\alpha+\beta}{2}}$**.**

Usamos la relación $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$ para calcular $sen\ \alpha$:

$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha + \frac{49}{625} = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha = \frac{576}{625} \rightarrow sen\ \alpha = -\frac{24}{25}$ porque el ángulo está en el 3.er cuadrante.

$\frac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = \frac{4}{3} \rightarrow sen\ \beta = \frac{4}{3} cos\ \beta$

$sen^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \rightarrow \frac{16}{9} cos^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \rightarrow \frac{25}{9} cos^2\ \beta = 1 \rightarrow cos^2\ \beta = \frac{9}{25} \rightarrow cos\ \beta = -\frac{3}{5}$ porque también pertenece al tercer cuadrante.

$sen\ \beta = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$

Como 360° < α + β < 540°, dividiendo las desigualdades entre 2 tenemos que $180° < \frac{\alpha+\beta}{2} < 270°$.

Por tanto, $\frac{\alpha+\beta}{2}$ pertenece al tercer cuadrante y la tangente de $\frac{\alpha+\beta}{2}$ es positiva.

Calculamos $cos\,(\alpha+\beta) = cos\,\alpha\, cos\,\beta - sen\,\alpha\, sen\,\beta = \frac{-7}{25}\cdot\frac{-3}{5} - \frac{-24}{25}\cdot\frac{-4}{5} = -\frac{3}{5}$

Por tanto, $tg\,\frac{\alpha+\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\,(\alpha+\beta)}{1+cos\,(\alpha+\beta)}} = \sqrt{\frac{1-(3/5)}{1+(-3/5)}} = 2$

5 **Si $tg\,\frac{\alpha}{2} = -3$ y $\alpha < 270°$, halla $sen\,\alpha$, $cos\,\alpha$ y $tg\,\alpha$.**

$tg\,\frac{\alpha}{2} = -3 \rightarrow \sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}} = -3 \rightarrow \frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha} = 9 \rightarrow$

$\rightarrow 1 - cos\,\alpha = 9 + 9\,cos\,\alpha \rightarrow 10\,cos\,\alpha = -8 \rightarrow cos\,\alpha = -\frac{4}{5}$

$sen\,\alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$

$tg\,\alpha = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}$

6 **Si $tg\,2\alpha = \sqrt{6}$ y $\alpha < 90°$, halla $sen\,\alpha$, $cos\,\alpha$ y $tg\,\alpha$.**

$\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha} = \sqrt{6} \rightarrow 2\,tg\,\alpha = \sqrt{6} - \sqrt{6}\,tg^2\,\alpha \rightarrow \sqrt{6}\,tg^2\,\alpha + 2\,tg\,\alpha - \sqrt{6} = 0 \rightarrow tg\,\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2\sqrt{6}} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{6}}$

Como α está en el primer cuadrante, solo puede darse que $tg\,\alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$.

$sen\,\alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}}\,cos\,\alpha$

$\left(\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}}\right)^2 cos^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow \frac{8-2\sqrt{7}}{6}\,cos^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{7-\sqrt{7}}{3}\,cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow cos^2\,\alpha = \frac{3}{7-\sqrt{7}} \rightarrow cos\,\alpha = \sqrt{\frac{3}{7-\sqrt{7}}}$

$sen\,\alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\frac{3}{7-\sqrt{7}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{2(7-\sqrt{7})}}$

7 **Si sabemos que $cos\,\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{3}$ y que $180° < \alpha < 270°$, halla $cos\,2\alpha$, sin hallar el ángulo α.**

Nos dicen que el ángulo está en el tercer cuadrante, por lo que su coseno será negativo y el seno también. En cambio $\frac{\alpha}{2}$ estará en el segundo cuadrante y tendrá seno positivo y coseno negativo.

Queremos encontrar $cos\,2\alpha = cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha$ por lo que buscaremos $cos\,\alpha$ y $sen\,\alpha$.

Calculamos: $sen\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Por las fórmulas del ángulo medio: $\frac{1}{3} = cos\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}}$

Elevando al cuadrado: $\frac{1}{9} = \frac{1+cos\,\alpha}{2} \rightarrow cos\,\alpha = -\frac{7}{9}$

Por otra parte: $sen\,\alpha = 2\,sen\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\alpha}{2} = 2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

Así podemos volver al principio y sustituir:

$cos\,2\alpha = cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha = \frac{49}{81} - \frac{32}{81} = \frac{17}{81}$

8 **Transforma las siguientes sumas en productos:**

a) $\boldsymbol{sen\ 65° + sen\ 35°}$ **b)** $\boldsymbol{sen\ 65° - sen\ 35°}$

c) $\boldsymbol{cos\ 48° + cos\ 32°}$ **d)** $\boldsymbol{cos\ 48° - cos\ 32°}$

e) $\boldsymbol{\frac{1}{2} + sen\ 50°}$ **f)** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2} + cos\ 75°}$

a) $sen\,65° + sen\,35° = 2\,sen\,\dfrac{65° + 35°}{2}\,cos\,\dfrac{65° - 35°}{2} = 2\,sen\,50°\,cos\,15°$

b) $sen\,65° - sen\,35° = 2\,cos\,\dfrac{65° + 35°}{2}\,sen\,\dfrac{65° - 35°}{2} = 2\,cos\,50°\,sen\,15°$

c) $cos\,48° + cos\,32° = 2\,cos\,\dfrac{48° + 32°}{2}\,cos\,\dfrac{48° - 32°}{2} = 2\,cos\,40°\,cos\,8°$

d) $cos\,48° - cos\,32° = -2\,sen\,\dfrac{48° + 32°}{2}\,sen\,\dfrac{48° - 32°}{2} = -2\,sen\,40°\,sen\,8°$

e) $\dfrac{1}{2} + sen\,50° = sen\,30° + sen\,50° = 2\,sen\,\dfrac{30° + 50°}{2}\,cos\,\dfrac{30° - 50°}{2} = 2\,sen\,40°\,cos\,(-10°) = 2\,sen\,40°\,cos\,10°$

f) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + cos\,75° = cos\,45° + cos\,75° = 2\,cos\,\dfrac{45° + 75°}{2}\,cos\,\dfrac{45° - 75°}{2} = 2\,cos\,60°\,cos\,(-15°) = 2\,cos\,60°\,cos\,15°$

9 **Calcula el valor exacto de las siguientes expresiones sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora:**

a) $\boldsymbol{cos\ 195° + cos\ 75°}$ **b)** $\boldsymbol{sen\ 195° - sen\ 105°}$

a) $cos\,195° + cos\,75° = cos\left(180° + 15°\right) + cos\left(60° + 15°\right) =$

$= cos\,180°\,cos\,15° - sen\,180°\,sen\,15° + cos\,60°\,cos\,15° - sen\,60°\,sen\,15° =$

$= -cos\,15° - 0 + \dfrac{1}{2}\,cos\,15° - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,sen\,15° = -\dfrac{1}{2}\,cos\,15° - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,sen\,15° \quad (*)$

Buscamos el valor de $cos\,15°$ a partir de la fórmula del ángulo mitad:

$$cos\,15° = \sqrt{\frac{1 + cos\,30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$sen^2\,15° = 1 - cos^2\,15° = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \;\to\; sen\,15° = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Ya podemos sustituir en (*):

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{3}\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right) = -0,707$$

b) $sen\,195° - sen\,105° = sen\left(180° + 15°\right) - \left(sen\,90° + 15°\right) =$

$= sen\,180°\,cos\,15° + cos\,180°\,sen\,15° - \left(sen\,90°\,cos\,15° + cos\,90°\,sen\,15°\right) =$

$= 0 - sen\,15° - cos\,15° - 0 = -\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right) = -1,225$

Hemos usado los valores calculados en el apartado anterior de *sen* 15° y *cos* 15°.

10 **Si sabemos que *cosec* α = 2,5 y *sec* β =1,25, comprueba, sin hallar los ángulos α y β, que el valor aproximado de *cotg* (α + β) es 0,57.**

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} = 2,5 \ \to \ sen\ \alpha = \frac{1}{2,5} = 0,4$$

Aplicando la igualdad fundamental: $cos\ \alpha = \sqrt{1-0,4^2} = 0,916$

$$sec\ \beta = \frac{1}{cos\ \beta} = 1,25 \ \to \ cos\ \beta = \frac{1}{1,25} = 0,8$$

Aplicando la igualdad fundamental:

$sen\ \beta = \sqrt{1-0,8^2} = 0,655$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 0,436$$

$$tg\ \beta = \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = 0,818$$

Por otro lado sabemos que $cotg\left(\alpha+\beta\right) = \dfrac{1}{tg\left(\alpha+\beta\right)}$ y $tg\left(\alpha+\beta\right) = \dfrac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ \ tg\ \beta}$:

$$cotg\left(\alpha+\beta\right) = \frac{1}{tg\left(\alpha+\beta\right)} = \frac{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta}{tg\ \alpha + tg\ \beta} = \frac{1 - 0,436 \cdot 0,818}{0,436 + 0,818} = 0,513$$

11 **Si llamamos *tg* α = *t*, escribe *sen* 2α y *cos* 2α en función de *t*.**

Como $\dfrac{1}{cos^2\ \alpha} = \dfrac{cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} = \dfrac{sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} + \dfrac{cos^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} = tg^2\ \alpha + 1 = 1 + t^2 \ \to \ cos^2\ \alpha = \dfrac{1}{1+t^2}$

Por la igualdad fundamental:

$$sen^2\ \alpha = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

Por las fórmulas del ángulo doble:

$$cos\ 2\alpha = cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Finalmente, aplicando la igualdad fundamental:

$$sen^2\ 2\alpha = 1 - \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 = 1 - \frac{1-2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4} = \frac{1+2t^2+t^4-\left(1-2t^2+t^4\right)}{1+2t^2+t^4} = \frac{4t^2}{\left(1+t\right)^2} \ \to \ sen\ 2\alpha = \frac{2t}{1+t}$$

12 **Desarrolla, en función de las razones trigonométricas de α, y simplifica las siguientes expresiones:**

a) ***sen* (45° + α) – *cos* (α – 45°)**

b) $\dfrac{\boldsymbol{cos\ 2\alpha}}{\boldsymbol{cos\ \alpha + sen\ \alpha}}$

c) $\boldsymbol{cos^2\ \dfrac{\alpha}{2} \cdot sen^2\ \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{4}\ cos^2\ \alpha}$

a) $sen\ (45° + \alpha) - cos\ (\alpha - 45°) = sen\ 45°\ cos\ \alpha + cos\ 45°\ sen\ \alpha - (cos\ \alpha\ cos\ 45° + sen\ \alpha\ sen\ 45°) =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ \alpha = 0$$

b) $\dfrac{cos\ 2\alpha}{cos\ \alpha + sen\ \alpha} = \dfrac{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha}{cos\ \alpha + sen\ \alpha} = \dfrac{(cos\ \alpha + sen\ \alpha)\,(cos\ \alpha - sen\ \alpha)}{cos\ \alpha + sen\ \alpha} = cos\ \alpha - sen\ \alpha$

c) $(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 - 2\ sen\ \alpha + cos\ 2\alpha = sen^2\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha - 2\ sen\ \alpha + cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha =$

$$= 2(cos^2\ \alpha + sen\ \alpha\ cos\ \alpha - sen\ \alpha)$$

13 **Simplifica estas expresiones:**

a) $\dfrac{cosec\ x}{cotg\ x + tg\ x}$ **b)** $\dfrac{cos^4 x - sen^4 x}{(sen\ x + cos\ x)\,(sen\ x - cos\ x)}$

a) $$\frac{cosec\ x}{cotg\ x + tg\ x} = \frac{\frac{1}{sen\ x}}{\frac{1}{tg\ x} + tg\ x} = \frac{\frac{1}{sen\ x}}{\frac{1 + tg^2 x}{tg\ x}} = \frac{tg\ x}{sen\ x\left(1 + tg^2 x\right)} = \frac{\frac{sen\ x}{cos\ x}}{sen\ x\left(1 + tg^2 x\right)} =$$

$$= \frac{1}{cos\ x\left(\frac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x}\right)} = \frac{1}{cos\ x\left(\frac{1}{cos^2 x}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{cos\ x}} = cos\ x$$

b) $$\frac{cos^4 x - sen^4 x}{(sen\ x + cos\ x)\,(sen\ x - cos\ x)} = \frac{\left(cos^2 x - sen^2 x\right)\left(cos^2 x + sen^2 x\right)}{sen^2 x - cos^2 x} = -\frac{\left(cos^2 x - sen^2 x\right)\left(cos^2 x + sen^2 x\right)}{-sen^2 x + cos^2 x} =$$

$$= -\left(cos^2 x + sen^2 x\right) = -1$$

Identidades trigonométricas

14 **¿Verdadero o falso? Desarrolla y comprueba.**

a) $sen\ (\alpha + 270°) = -cos\ \alpha$ **b)** $cos\ (270° + \alpha) = sen\ \alpha$

c) $sen\ (270° - \alpha) = cos\ \alpha$ **d)** $cos\ (270° - \alpha) = -sen\ \alpha$

e) **Si** $\alpha + \beta = 120°$, **entonces:** $\dfrac{sen\ \alpha + sen\ \beta}{cos\ \alpha + cos\ \beta} = \sqrt{3}$

a) Falso.

Por la fórmula del ángulo suma: $sen\left(\alpha + 270°\right) = sen\ \alpha\ cos\ 270° + cos\ \alpha\ sen\ 270°$

Como sabemos el seno y coseno de 270°, sustituimos:

$sen\ \alpha\ cos\ 270° + cos\ \alpha\ sen\ 270° = sen\ \alpha \cdot 0 + cos\ \alpha \cdot 1 = cos\ \alpha$

b) Verdadero.

$cos\left(\alpha + 270°\right) = cos\ \alpha\ cos\ 270° - sen\ \alpha\ sen\ 270° = \left(-1\right) sen\ \alpha = cos\alpha \cdot 0 - \left(-1 \cdot sen\ \alpha\right) = sen\ \alpha$

c) Falso.

$sen\left(270° - \alpha\right) = sen\ 270°\ cos\ \alpha - cos\ 270°\ sen\ \alpha = -1\ cos\ \alpha - 0 = -\ cos\ \alpha$

d) Verdadero.

$cos\left(270° - \alpha\right) = cos\ 270°\ cos\ \alpha - sen\ 270°\ sen\ \alpha = 0 - 1\ sen\ \alpha = -\ sen\ \alpha$

e) Verdadero.

$$\frac{sen\ \alpha + sen\ \beta}{cos\ \alpha + cos\ \beta} = \frac{2\ sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{2\ cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)} = \frac{sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} = \frac{sen\ 60°}{cos\ 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

15 **Demuestra las siguientes identidades teniendo en cuenta las relaciones fundamentales:**

a) $(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 - (sen\ \alpha - cos\ \alpha)^2 = 4\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$

b) $sen\ \alpha \cdot cos^2\ \alpha + sen^3\ \alpha = sen\ \alpha$

c) $\dfrac{sen\ \alpha}{1 + cos\ \alpha} + \dfrac{sen\ \alpha}{1 - cos\ \alpha} = \dfrac{2}{sen\ \alpha}$

d) $\dfrac{cos\ \alpha + sen\ \alpha}{cos\ \alpha - sen\ \alpha} \cdot cos\ 2\alpha = 1 + sen\ 2\alpha$

a) $(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 - (sen\ \alpha - cos\ \alpha)^2 = sen^2\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha - (sen^2\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha) =$

$= sen^2\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha - cos^2\ \alpha = 4\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$

b) $sen\,\alpha \cdot cos^2\,\alpha + sen^3\,\alpha = sen\,\alpha\,(cos^2\,\alpha + sen^2\,\alpha) = sen\,\alpha \cdot 1 = sen\,\alpha$

c) $\dfrac{sen\,\alpha}{1 + cos\,\alpha} + \dfrac{sen\,\alpha}{1 - cos\,\alpha} = \dfrac{sen\,\alpha - sen\,\alpha\,cos\,\alpha + sen\,\alpha + sen\,\alpha\,cos\,\alpha}{(1 + cos\,\alpha)\,(1 - cos\,\alpha)} = \dfrac{2\,sen\,\alpha}{1 - cos^2\,\alpha} = \dfrac{2\,sen\,\alpha}{sen^2\,\alpha} = \dfrac{2}{sen\,\alpha}$

d) $\dfrac{cos\,\alpha + sen\,\alpha}{cos\,\alpha - sen\,\alpha} \cdot cos\,2\alpha = \dfrac{cos\,\alpha + sen\,\alpha}{cos\,\alpha - sen\,\alpha}\,(cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha) = \dfrac{cos\,\alpha + sen\,\alpha}{cos\,\alpha - sen\,\alpha}\,(cos\,\alpha + sen\,\alpha)\,(cos\,\alpha - sen\,\alpha) =$

$= (cos\,\alpha + sen\,\alpha)\,(cos\,\alpha + sen\,\alpha) = cos^2\,\alpha + 2\,cos\,\alpha\,sen\,\alpha + sen^2\,\alpha =$

$= 1 + 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha = 1 + sen\,2\alpha$

16 **Prueba que son verdaderas las identidades siguientes:**

a) $\boldsymbol{cos\,(x + 60°) - cos\,(x + 120°) = cos\,x}$

b) $\boldsymbol{tg\,(x + 45°) - tg\,(x - 45°) = \dfrac{2 + 2\,tg^2\,x}{1 - tg^2\,x}}$

a) $cos\,(x + 60°) - cos\,(x + 120°) = cos\,x\,cos\,60° - sen\,x\,sen\,60° - (cos\,x\,cos\,120° - sen\,x\,sen\,120°) =$

$= cos\,x\,cos\,60° - sen\,x\,sen\,60° - cos\,x\,cos\,120° + sen\,x\,sen\,120° =$

$= cos\,x\,cos\,60° - sen\,x\,sen\,60° - cos\,x \cdot (-cos\,60°) + sen\,x\,sen\,60° =$

$= 2\,cos\,x\,cos\,60° = 2 \cdot \dfrac{1}{2}\,cos\,x = cos\,x$

b) $tg\,(x + 45°) - tg\,(x - 45°) = \dfrac{tg\,x + tg\,45°}{1 - tg\,x\,tg\,45°} - \dfrac{tg\,x - tg\,45°}{1 + tg\,x\,tg\,45°} = \dfrac{tg\,x + 1}{1 - tg\,x} - \dfrac{tg\,x - 1}{1 + tg\,x} =$

$= \dfrac{1 + 2\,tg\,x + tg^2\,x - (-1 + 2\,tg\,x - tg^2\,x)}{(1 - tg\,x)\,(1 + tg\,x)} = \dfrac{2 + 2\,tg^2\,x}{1 - tg^2\,x}$

17 **Comprueba que se verifican las dos identidades siguientes:**

a) $\boldsymbol{sen\,\alpha\,sen\,(\alpha + \beta) + cos\,\alpha\,cos\,(\alpha + \beta) = cos\,\beta}$

b) $\boldsymbol{\dfrac{sen\,(\alpha + \beta)}{sen\,(\alpha - \beta)} = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{tg\,\alpha - tg\,\beta}}$

* ***En b), divide numerador y denominador entre $cos\,\alpha\,cos\,\beta$.***

a) $sen\,\alpha\,sen\,(\alpha + \beta) + cos\,\alpha\,cos\,(\alpha + \beta) = sen\,\alpha\,(sen\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sen\,\beta) + cos\,\alpha\,(cos\,\alpha\,cos\,\beta - sen\,\alpha\,sen\,\beta) =$

$= sen^2\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\alpha\,cos\,\alpha\,sen\,\beta + cos^2\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sen\,\alpha\,sen\,\beta =$

$= (sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha)\,cos\,\beta = cos\,\beta$

b) $\dfrac{sen\,(\alpha + \beta)}{sen\,(\alpha - \beta)} = \dfrac{sen\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sen\,\beta}{sen\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sen\,\beta} = \dfrac{\dfrac{sen\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sen\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}}{\dfrac{sen\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sen\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}} =$

$= \dfrac{\dfrac{sen\,\alpha\,cos\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta} + \dfrac{cos\,\alpha\,sen\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}}{\dfrac{sen\,\alpha\,cos\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta} - \dfrac{cos\,\alpha\,sen\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}} = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{tg\,\alpha - tg\,\beta}$

18 **Demuestra.**

a) $\boldsymbol{cos\ (\alpha + \beta)\ cos\ (\alpha - \beta) = cos^2 \beta - sen^2 \alpha}$

b) $\boldsymbol{sen\ (\alpha + \beta)\ sen\ (\alpha - \beta) = sen^2 \alpha - sen^2 \beta}$

a) $cos\ (\alpha + \beta)\ cos\ (\alpha - \beta) = (cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta)\ (cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta) =$

$= cos^2\ \alpha\ cos^2\ \beta + cos\ \alpha\ cos\ \beta\ sen\ \alpha\ sen\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta\ cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen^2\ \alpha\ sen^2\ \beta =$

$= cos^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha\ sen^2\ \beta = (1 - sen^2\ \alpha)\ cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha\ (1 - cos^2\ \beta) =$

$= cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha + sen^2\ \alpha\ cos^2\ \beta = cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha$

b) $sen\ (\alpha + \beta)\ sen\ (\alpha - \beta) = (sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta)\ (sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta) =$

$= sen^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - sen\ \alpha\ cos\ \beta\ cos\ \alpha\ sen\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta\ sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos^2\ \alpha\ sen^2\ \beta =$

$= sen^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - cos^2\ \alpha\ sen^2\ \beta = sen^2\ \alpha\ (1 - sen^2\ \beta) - (1 - sen^2\ \alpha)\ sen^2\ \beta =$

$= sen^2\ \alpha - sen^2\ \alpha\ sen^2\ \beta - sen^2\ \beta + sen^2 \alpha\ sen^2\ \beta = sen^2\ \alpha - sen^2 \beta$

19 **Demuestra la igualdad** $\boldsymbol{\dfrac{1 + tg^2\ (\alpha/2)}{2\ tg\ (\alpha/2)} = cosec\ \alpha}$**.**

$$\frac{1 + tg^2\left(\alpha/2\right)}{2\ tg\left(\alpha/2\right)} = \frac{1 + \left(\dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}\right)}{\pm 2\sqrt{\dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}} = \frac{\dfrac{1 + cos\ \alpha + 1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}{\pm 2\sqrt{\dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}} = \frac{2}{\pm 2\left(1 + cos\ \alpha\right)\sqrt{\dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}} = \frac{1}{\pm\left(1 + cos\ \alpha\right)\sqrt{\dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}}$$

Si elevamos al cuadrado:

$$\frac{1}{\left(1 + cos\ \alpha\right)^2\left(\dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}\right)} = \frac{1}{\left(1 + cos\ \alpha\right)\left(1 - cos\ \alpha\right)} = \frac{1}{1 - cos^2\ \alpha} = \frac{1}{sen^2\ \alpha} = cosec^2 \alpha$$

Por tanto, la igualdad queda demostrada.

20 **¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.**

a) $\boldsymbol{tg\ \alpha + \dfrac{1}{tg\ \alpha} = \dfrac{2}{sen\ 2\alpha}}$

b) $\boldsymbol{2\ tg\ \alpha \cdot cos^2\ \alpha - sen\ \alpha = \dfrac{1}{cos\ \alpha}}$

c) $\boldsymbol{cotg^2\ \alpha - cos^2\ \alpha = \dfrac{1}{tg^2\ \alpha} \cdot cos^2\ \alpha}$

d) $\boldsymbol{\dfrac{1 - sen\ x}{cos\ x} - \dfrac{cos\ x}{1 - sen\ x} = \dfrac{1}{cos\ x}}$

e) $\boldsymbol{\dfrac{1}{1 + cos\ x} + \dfrac{1}{1 - cos\ x} = 2\ cosec^2 x}$

a) $tg\ \alpha + \dfrac{1}{tg\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} + \dfrac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \dfrac{sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha}{sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \dfrac{1}{sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \dfrac{2}{2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \dfrac{2}{sen\ 2\alpha}$

b) Falso.

Basta con comprobar que no se cumple para $\alpha = 0$:

$2tg\ \alpha \cdot cos^2\ \alpha - sen\ \alpha = \dfrac{2\ sen\ \alpha \cdot cos^2 \alpha}{cos\ \alpha} - sen\ \alpha = 2\ sen\ \alpha \cdot cos\ \alpha - sen\ \alpha$; para $\alpha = 0 \to 0 - 0 = 0$

Sin embargo, $\dfrac{1}{cos\ 0°} = 1$.

c) Falso.

$$cotg^2\,\alpha - cos^2\,\alpha = \frac{1}{tg^2\,\alpha} - cos^2\,\alpha = \frac{1}{tg^2\,\alpha}(1 - sen^2\,\alpha\, cos^2\,\alpha)$$

d) Falso.

Igual que en el apartado b) probamos qué pasa para $\alpha = 0$:

$$\frac{1-0}{1} - \frac{1}{1-0} = 1 - 1 = 0$$

Sin embargo, $\frac{1}{cos\,\alpha} = 1$.

e) Verdadero.

$$\frac{1}{1+cos\,\alpha} + \frac{1}{1-cos\,\alpha} = \frac{1-cos\,\alpha + 1 + cos\,\alpha}{1-cos^2\,\alpha} = \frac{2}{sen^2\,\alpha} = 2\,cosec^2\,\alpha$$

21 Comprueba, sin utilizar la calculadora, las siguientes igualdades.

a) $sen\,130° + sen\,50° = 2\,cos\,40°$

b) $cos\,75° - cos\,15° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $sen\,130° + sen\,50° = 2\,sen\,\frac{130°+50°}{2}\,cos\,\frac{130°-50°}{2} = 2\,sen\,90°\,cos\,40° = 2\,cos\,40°$

b) $cos\,75° - cos\,15° = -2\,sen\,\frac{75°+15°}{2}\,sen\,\frac{75°-15°}{2} = -2\,sen\,45°\,sen\,30° = -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Página 149

Ángulos en radianes

22 Expresa en grados los siguientes ángulos dados en radianes:

$\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{9}$; $\frac{3\pi}{5}$; **1,5; 3,2**

$\frac{5\pi}{6}\text{ rad} = \frac{5\cdot 180°}{6} = 150°$ $\quad \frac{7\pi}{3}\text{ rad} = \frac{7\cdot 180°}{3} = 420°$ $\quad \frac{4\pi}{9}\text{ rad} = \frac{4\cdot 180°}{9} = 80°$

$\frac{3\pi}{5}\text{ rad} = \frac{3\cdot 180°}{5} = 108°$ $\quad 1,5\text{ rad} = \frac{1,5\cdot 180°}{\pi} = 85°\,56'\,37''$ $\quad 3,2\text{ rad} = \frac{3,2\cdot 180°}{\pi} = 183°\,20'\,47''$

23 Pasa a radianes estos ángulos. Exprésalos en función de π:

135°; 210°; 108°; 72°; 126°; 480°

$$135° = \frac{135\cdot\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}\text{ rad}$$

$$210° = \frac{210\cdot\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}\text{ rad}$$

$$108° = \frac{108\cdot\pi}{180} = \frac{3\pi}{5}\text{ rad}$$

$$72° = \frac{72\cdot\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}\text{ rad}$$

$$126° = \frac{126\cdot\pi}{180} = \frac{7\pi}{10}\text{ rad}$$

$$480° = \frac{480\cdot\pi}{180} = \frac{8\pi}{3}\text{ rad}$$

24 **Prueba que:**

a) $4\ sen\ \frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\ cos\ \frac{\pi}{4} + cos\ \pi = 2$

b) $2\sqrt{3}\ sen\ \frac{2\pi}{3} + 4\ sen\ \frac{\pi}{6} - 2\ sen\ \frac{\pi}{2} = 3$

c) $sen\ \frac{2\pi}{3} - cos\ \frac{7\pi}{6} + tg\ \frac{4\pi}{3} + tg\ \frac{11\pi}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

a) $4\ sen\ \frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\ cos\ \frac{\pi}{4} + cos\ \pi = 4 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1) = 2 + 1 - 1 = 2$

b) $2\sqrt{3}\ sen\ \frac{2\pi}{3} + 4\ sen\ \frac{\pi}{6} - 2\ sen\ \frac{\pi}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 = 3 + 2 - 2 = 3$

c) $sen\ \frac{2\pi}{3} - cos\ \frac{7\pi}{6} + tg\ \frac{4\pi}{3} + tg\ \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

25 **Halla el valor exacto de cada una de estas expresiones sin utilizar la calculadora:**

a) $5\ cos\ \frac{\pi}{2} - cos\ 0 + 2\ cos\ \pi - cos\ \frac{3\pi}{2} + cos\ 2\pi$

b) $sen\ \frac{\pi}{4} + sen\ \frac{\pi}{2} + sen\ \pi$

c) $cos\ \frac{5\pi}{3} + tg\ \frac{4\pi}{3} - tg\ \frac{7\pi}{6}$

d) $\sqrt{3}\ cos\ \frac{\pi}{6} + sen\ \frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\ cos\ \frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3}\ sen\ \frac{\pi}{3}$

Comprueba los resultados con calculadora.

a) $5 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot (-1) - 0 + 1 = -2$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$ $\Big\} \rightarrow$ $\mathbf{2\ cos^2 x - cos^2 x = 0}$

c) $\frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

d) $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 3 = -2$

26 **[El intercambio de información para decidir el cuadrante en el que se encuentran los ángulos permite trabajar la comunicación (dimensión social)].**

Halla las razones trigonométricas de estos ángulos e indica, sin pasar a grados, en qué cuadrante está cada uno:

a) **0,8 rad**

b) **3,2 rad**

c) **2 rad**

d) **4,5 rad**

e) **$\pi/8$ rad**

f) **$7\pi/4$ rad**

g) **$3\pi/5$ rad**

h) **$1,2\pi$ rad**

* ***Ten en cuenta:*** $\frac{\pi}{2} \approx 1,57;\quad \pi \approx 3,14;\quad \frac{3\pi}{2} \approx 4,7;\quad 2\pi \approx 6,28$

Para saber en qué cuadrante está cada uno, podemos usar también los signos de las razones trigonométricas.

a) $sen\ 0,8 = 0,72$	$cos\ 0,8 = 0,69$	$tg\ 0,8 = 1,03 \rightarrow$ Cuadrante I
b) $sen\ 3,2 = -0,06$	$cos\ 3,2 = -1$	$tg\ 3,2 = 0,06 \rightarrow$ Cuadrante III
c) $sen\ 2 = 0,91$	$cos\ 2 = -0,42$	$tg\ 2 = -2,19 \rightarrow$ Cuadrante II
d) $sen\ 4,5 = -0,98$	$cos\ 4,5 = -0,21$	$tg\ 4,5 = 4,64 \rightarrow$ Cuadrante III
e) $sen\ \frac{\pi}{8} = 0,38$	$cos\ \frac{\pi}{8} = 0,92$	$tg\ \frac{\pi}{8} = 0,41 \rightarrow$ Cuadrante I
f) $sen\ \frac{7\pi}{4} = -0,71$	$cos\ \frac{7\pi}{4} = 0,71$	$tg\ \frac{7\pi}{4} = -1 \rightarrow$ Cuadrante IV
g) $sen\ \frac{3\pi}{5} = 0,95$	$cos\ \frac{3\pi}{5} = -0,31$	$tg\ \frac{3\pi}{5} = -3,08 \rightarrow$ Cuadrante II
h) $sen\ 1,2\pi = -0,59$	$cos\ 1,2\pi = -0,81$	$tg\ 1,2\pi = 0,73 \rightarrow$ Cuadrante III

27 **En cada caso halla, en radianes, dos valores para el ángulo α tales que:**

a) $sen\ \alpha = 0{,}32$ **b)** $cos\ \alpha = 0{,}58$

c) $tg\ \alpha = -1{,}5$ **d)** $sen\ \alpha = -0{,}63$

a) $\alpha_1 = 0{,}33$; $\alpha_2 = 2{,}82$ b) $\alpha_1 = 0{,}95$; $\alpha_2 = 5{,}33$

c) $\alpha_1 = -0{,}98$; $\alpha_2 = 2{,}16$ d) $\alpha_1 = -0{,}68$; $\alpha_2 = 3{,}82$

Ecuaciones trigonométricas

28 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $2\ sen^2\ x = 1$ **b)** $3\ tg^2\ x - 1 = 0$

c) $1 - 4\ cos^2\ x = 0$ **d)** $3\ tg\ x + 4 = 0$

a) $2\ sen^2\ x = 1 \rightarrow sen^2\ x = \frac{1}{2} \rightarrow sen\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $sen\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 45° + 360° \cdot k;\ x = 135° + 360° \cdot k$
- Si $sen\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 225° + 360° \cdot k;\ x = 315° + 360° \cdot k$

Es decir, las soluciones son todos los ángulos del tipo $x = 45° + 90° \cdot k$

b) $3\ tg^2\ x - 1 = 0 \rightarrow tg^2\ x = \frac{1}{3} \rightarrow tg\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

- Si $tg\ x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 30° + 360° \cdot k;\ x = 210° + 360° \cdot k$
- Si $tg\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 150° + 360° \cdot k;\ x = 330° + 360° \cdot k$

c) $1 - 4\ cos^2\ x = 0 \rightarrow cos^2\ x = \frac{1}{4} \rightarrow cos\ x = \pm\frac{1}{2}$

- Si $cos\ x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60° + 360° \cdot k;\ x = 300° + 360° \cdot k$
- Si $cos\ x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120° + 360° \cdot k;\ x = 240° + 360° \cdot k$

d) $3\ tg\ x + 4 = 0 \rightarrow tg\ x = -\frac{4}{3} \rightarrow x = 126°\ 52'\ 12'' + 360° \cdot k;\ x = 306°\ 52'\ 12'' + 360° \cdot k$

29 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $2\ cos^2\ x - sen^2\ x + 1 = 0$ **b)** $sen^2\ x - sen\ x = 0$

c) $2\ cos^2\ x - \sqrt{3}\ cos\ x = 0$ **d)** $2cos^2\ x + sen\ x = 1$

a) $\left.2\ cos^2\ x - \underbrace{sen^2\ x + 1}_{cos^2\ x} = 0\right\} \rightarrow 2\ cos^2\ x - cos^2\ x = 0$

$cos^2 = 0 \rightarrow cos\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{cases}$

Al comprobarlas en la ecuación inicial, las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Lo que podemos expresar como:

$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $sen\ x\ (sen\ x - 1) = 0 \ \rightarrow \begin{cases} sen\ x = 0 \ \rightarrow\ x_1 = 0°,\ x_2 = 180° \\ sen\ x = 1 \ \rightarrow\ x_3 = 90° \end{cases}$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que las tres son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi \\ x_3 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, de otra forma:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k\pi = k \cdot 180° \\ x_3 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi = 90° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

(x_1 así incluye las soluciones x_1 y x_2 anteriores)

c) $cos\ x\ (2\ cos\ x - \sqrt{3}) = 0 \ \rightarrow \begin{cases} cos\ x = 0 \ \rightarrow\ x_1 = 90°,\ x_2 = 270° \\ cos\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \ \rightarrow\ x_3 = 30°,\ x_4 = 330° \end{cases}$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

NOTA: Obsérvese que las dos primeras soluciones podrían escribirse como una sola de la siguiente forma:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

d) $2\,(1 - sen^2\ x) + sen\ x = 1 \ \rightarrow\ 2 - 2\ sen^2\ x + sen\ x = 1 \ \rightarrow\ 2sen^2\ x - sen\ x - 1 = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow\ sen\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \ \rightarrow\ x_1 = 90° \\ -1/2 \ \rightarrow\ x_2 = 210°,\ x_3 = 330° \end{cases}$$

Las tres soluciones son válidas, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 210° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x_3 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

30 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $sen\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{2}$

b) $sen\ 2x-2\ cos^2 x=0$

c) $cos\ 2x-3\ sen\ x+1=0$

d) $sen\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{2}\ sen\ x=0$

a) $sen\frac{\pi}{6}cos\ x-cos\frac{\pi}{6}sen\ x+cos\frac{\pi}{3}cos\ x+sen\frac{\pi}{3}sen\ x=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}cos\ x-\frac{\sqrt{3}}{2}sen\ x+\frac{1}{2}cos\ x+\frac{\sqrt{3}}{2}sen\ x=\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}cos\ x+\frac{1}{2}cos\ x=\frac{1}{2} \to cos\ x=\frac{1}{2} \Big< \begin{array}{l} x_1=\pi/3 \\ x_2=5\pi/3 \end{array}$

Comprobamos y vemos que:

$x_1 \to sen\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)+cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=sen\left(-\frac{\pi}{6}\right)+cos\ 0=\frac{-1}{2}+1=\frac{1}{2}$

$x_2 \to sen\left(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{3}\right)+cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}\right)=sen\left(-\frac{3\pi}{3}\right)+cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Son válidas las dos soluciones. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\frac{\pi}{3}+2k\pi=60°+k\cdot 360° \\ x_2=\frac{5\pi}{3}+2k\pi=300°+k\cdot 360° \end{array}\right\} \text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

b) $2\ sen\ x\ cos\ x-2\ cos^2 x=0 \to 2\ cos\ x(sen\ x-cos\ x)=0 \to$

$$\to \left\{\begin{array}{l} cos\ x=0 \to x_1=90°,\ x_2=270° \\ sen\ x=cos\ x \to x_3=45°,\ x_4=225° \end{array}\right.$$

Comprobamos las soluciones. Todas son válidas.

$$\left.\begin{array}{l} x_1=90°+k\cdot 360°=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x_2=270°+k\cdot 360°=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \\ x_3=45°+k\cdot 360°=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x_4=225°+k\cdot 360°=\frac{5\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

También podríamos expresarlas como:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=90°+k\cdot 180°=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x_2=45°+k\cdot 180°=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

c) $cos^2 x-sen^2 x-3\ sen\ x+1=0 \to 1-sen^2 x-sen^2 x-3\ sen\ x+1=0 \to$

$\to 1-2\ sen^2 x-3\ sen\ x+1=0 \to 2\ sen^2 x+3\ sen\ x-2=0 \to$

$\to sen\ x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}= \Big< \begin{array}{l} 1/2 \to x_1=30°,\ x_2=150° \\ -2 \to \text{¡Imposible!, pues } |sen\ x|\le 1 \end{array}$

Comprobamos que la dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=30°+k\cdot 360°=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x_2=150°+k\cdot 360°=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

d) $sen\,\frac{\pi}{4}\,cos\,x + cos\,\frac{\pi}{4}\,sen\,x - \sqrt{2}\,sen\,x = 0 \;\rightarrow\; \frac{\sqrt{2}}{2}\,cos\,x + \frac{\sqrt{2}}{2}\,sen\,x - \sqrt{2}\,sen\,x = 0$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\,cos\,x - \frac{\sqrt{2}}{2}\,sen\,x = 0 \;\rightarrow\; cos\,x - sen\,x = 0 \;\rightarrow\; cos\,x = sen\,x \;\rightarrow\; x_1 = \frac{\pi}{4},\; x_2 = \frac{5\pi}{4}$

Al comprobar, podemos ver que ambas soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{4} + 2k\,\pi = 45° + k \cdot 360° \\ x_2 &= \frac{5\pi}{4} + 2k\,\pi = 225° + k \cdot 360° \end{aligned}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos agrupar las dos soluciones en: $x = \frac{\pi}{4} + k\,\pi = 45° + k \cdot 180°$ con $k \in \mathbb{Z}$

31 **Lápices al centro.** **[Esta estrategia puede resultar conveniente para la resolución de las ecuaciones trigonométricas planteadas].**

Resuelve.

a) $\boldsymbol{cos^2\,\frac{x}{2} + cos\,x - \frac{1}{2} = 0}$

b) $\boldsymbol{tg^2\,\frac{x}{2} + 1 = cos\,x}$

c) $\boldsymbol{2\,sen^2\,\frac{x}{2} + cos\,2x = 0}$

d) $\boldsymbol{4\,sen^2\,x\,cos^2\,x + 2\,cos^2\,x - 2 = 0}$

a) $\frac{1 + cos\,x}{2} + cos\,x - \frac{1}{2} = 0 \;\rightarrow\; 1 + cos\,x + 2\,cos\,x - 1 = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; 3\,cos\,x = 0 \;\rightarrow\; cos\,x = 0 \left\langle \begin{aligned} x_1 &= 90° \\ x_2 &= 270° \end{aligned}\right.$$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 &= 270 + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \end{aligned}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones: $x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{1 - cos\,x}{1 + cos\,x} + 1 = cos\,x \;\rightarrow\; 1 - cos\,x + 1 + cos\,x = cos\,x + cos^2\,x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2 = cos\,x + cos^2\,x \;\rightarrow\; cos^2\,x + cos\,x - 2 = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; cos\,x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \left\langle \begin{aligned} &1 \;\rightarrow\; x = 0° \\ &-2 \;\rightarrow\; \text{¡Imposible, pues } |cos\,x| \le 1 \end{aligned}\right.$$

Luego: $x = k \cdot 360° = 2k\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

c) $2 \cdot \frac{1 - cos\ x}{2} + cos^2 x - sen^2 x = 0 \rightarrow 1 - cos\ x + cos^2 x - (1 - cos^2 x) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 1 - cos\ x + cos^2 x - 1 + cos^2 x = 0 \rightarrow 2\ cos^2 x - cos\ x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow cos\ x\,(2\ cos\ x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} cos\ x = 0 \rightarrow x_1 = 90°,\ x_2 = 270° \\ cos\ x = 1/2 \rightarrow x_3 = 60°,\ x_4 = 300° \end{cases}$$

Se comprueba que son válidas todas. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_3 = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_4 = 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones quedaría:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \\ x_2 = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_3 = 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $4\,(1 - cos^2 x)\,cos^2 x + 2\,cos^2 x - 2 = 0 \rightarrow 4\,cos^2 x - 4\,cos^4 x + 2\,cos^2 x - 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 4\,cos^4 x - 6\,cos^2 x + 2 = 0 \rightarrow 2\,cos^4 x - 3\,cos^2 x + 1 = 0$

Sea $cos^2 x = z \rightarrow cos^4 x = z^2$

Así:

$$2z^2 - 3z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} z_1 = 1 \rightarrow cos\ x = \pm 1 \\ z_2 = \frac{1}{2} \rightarrow cos\ x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que todas son válidas. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 45° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_4 = 315° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_5 = 135° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_6 = 225° + k \cdot 360° = \frac{7\pi}{4} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

O, agrupando las soluciones:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 45° + k \cdot 90° = \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

32 **Transforma estas ecuaciones en otras equivalentes cuya incógnita sea** $tg\, x$ **y resuélvelas:**

a) $sen\, x + cos\, x = 0$

b) $sen^2\, x - 2\sqrt{3}\; sen\, x\, cos\, x + 3\, cos^2\, x = 0$

c) $sen^2\, x + sen\, x\, cos\, x = 0$

a) Dividimos toda la ecuación entre $cos\, x$:

$$\frac{sen\, x}{cos\, x} + \frac{cos\, x}{cos\, x} = 0 \to tg\, x + 1 = 0 \to tg\, x = -1 \to x = 135° + 360° \cdot k;\; x = 315° + 360° \cdot k$$

b) Dividimos toda la ecuación entre $cos^2\, x$:

$$\frac{sen^2\, x}{cos^2\, x} - 2\sqrt{3}\,\frac{sen\, x\, cos\, x}{cos^2\, x} + 3\,\frac{cos^2\, x}{cos^2\, x} = 0 \to tg^2\, x - 2\sqrt{3}\, tg\, x + 3 = 0 \to$$

$$\to tg\, x = \frac{2\sqrt{3} \pm 0}{2} = \sqrt{3} \to x = 60° + 360° \cdot k;\; x = 240° + 360° \cdot k$$

c) Dividimos toda la ecuación entre $cos^2\, x$:

$$\frac{sen^2\, x}{cos^2\, x} + \frac{sen\, x\, cos\, x}{cos^2 x} = 0 \to tg^2\, x + tg\, x = 0 \to tg\, x\,(tg\, x + 1) = 0 \to \begin{cases} tg\, x = 0 \\ tg\, x = -1 \end{cases}$$

- Si $tg\, x = 0 \to x = 0° + 360° \cdot k;\; x = 180° + 360° \cdot k$
- Si $tg\, x = -1 \to x = 135° + 360° \cdot k;\; x = 315° + 360° \cdot k$

33 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\sqrt{3}\; cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + cos\,(x - \pi) = 2$

b) $cos\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) + sen\, x - \sqrt{3}\; cos\, x = 0$

c) $sen\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$

d) $cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \sqrt{3}\; sen\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$

a) $\sqrt{3}\left(cos\,\frac{3\pi}{2}\, cos\, x - sen\,\frac{3\pi}{2}\, sen\, x\right) + cos\, x\, cos\, \pi + sen\, x\, sen\, \pi = 2 \to$

$$\to \sqrt{3}\, sen\, x - cos\, x = 2 \to \sqrt{3}\, sen\, x - 2 = cos\, x$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$3\, sen^2\, x - 4\sqrt{3}\, sen\, x + 4 = cos^2\, x \to 3\, sen^2\, x - 4\sqrt{3}\, sen\, x + 4 = 1 - sen^2\, x \to$$

$$\to 4\, sen^2\, x - 4\sqrt{3}\, sen\, x + 3 = 0 \to sen\, x = \frac{4\sqrt{3} \pm 0}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to$$

$$\to x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k;\; x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k$$

Ahora debemos comprobar las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

$x = \frac{\pi}{3} \to \sqrt{3} \cdot cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) = 1 \neq 2$ No vale.

$x = \frac{2\pi}{3} \to \sqrt{3} \cdot cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{2\pi}{3} - \pi\right) = 2$ Vale.

b) $cos\,\frac{5\pi}{6}\,cos\,x + sen\,\frac{5\pi}{6}\,sen\,x + sen\,x - \sqrt{3}\,cos\,x = 0 \;\to\; -\frac{\sqrt{3}\,cos\,x}{2} + \frac{sen\,x}{2} + sen\,x - \sqrt{3}\,cos\,x = 0 \;\to$

$\to\; \frac{3}{2}\,sen\,x = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,cos\,x$

Dividimos los dos miembros entre $cos\,x$:

$\frac{3}{2}\,tg\,x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \;\to\; tg\,x = \sqrt{3} \;\to\; x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k;\; x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi \cdot k$

c) $sen\,\frac{\pi}{4}\,cos\,x + cos\,\frac{\pi}{4}\,sen\,x + cos\,\frac{\pi}{4}\,cos\,x - sen\,\frac{\pi}{4}\,sen\,x = 1 \;\to$

$\to\; \frac{\sqrt{2}}{2}(cos\,x + sen\,x + cos\,x - sen\,x) = 1 \;\to\; 2\,cos\,x = \frac{2}{\sqrt{2}} \;\to$

$\to\; cos\,x = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\to\; x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k;\; x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi \cdot k$

d) $cos\,\frac{\pi}{3}\,cos\,x + sen\,\frac{\pi}{3}\,sen\,x - \sqrt{3}\left(sen\,\frac{\pi}{3}\,cos\,x - cos\,\frac{\pi}{3}\,sen\,x\right) = 1 \;\to$

$\to\; \frac{cos\,x}{2} + \frac{\sqrt{3}\,sen\,x}{2} - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}\,cos\,x}{2} - \frac{sen\,x}{2}\right) = 1 \;\to$

$\to\; cos\,x + \sqrt{3}\,sen\,x - 3\,cos\,x + \sqrt{3}\,sen\,x = 2 \;\to$

$\to\; -2\,cos\,x + 2\sqrt{3}\,sen\,x = 2 \;\to\; \sqrt{3}\,sen\,x = 1 + cos\,x$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$3\,sen^2\,x = 1 + 2\,cos\,x + cos^2\,x \;\to\; 3 - 3\,cos^2\,x = 1 + 2\,cos\,x + cos^2\,x \;\to$

$\to\; 4\,cos^2\,x + 2\,cos\,x - 2 = 0 \;\to\; 2\,cos^2\,x + cos\,x - 1 = 0 \;\to\; cos\,x = \frac{-1 \pm 3}{4}$

- Si $cos\,x = \frac{1}{2} \;\to\; x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k \;\to\; x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi \cdot k$
- Si $cos\,x = -1 \;\to\; x = \pi + 2\pi \cdot k$

Ahora debemos comprobar las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

- Si $x = \frac{\pi}{3} \;\to\; cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ Vale.
- Si $x = \frac{5\pi}{3} \;\to\; cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) = -2 \neq 1$ No vale.
- Si $x = \pi \;\to\; cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) - \sqrt{3} \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) = 1$ Vale.

34 Resuelve.

a) $sen\, \frac{x}{2} + cos\, \frac{x}{2} = \sqrt{2}$

b) $cos\, 3x + cos\, x = 2 \cdot cos\, 210° \cdot cos\, x$

c) $4\, sen\, \frac{x}{2} + cos\, x = 3$

a) Aplicamos las fórmulas del ángulo mitad:

$$\sqrt{\frac{1 - cos\, \alpha}{2}} + \sqrt{\frac{1 + cos\, \alpha}{2}} = \sqrt{2}$$

Elevando al cuadrado:

$$\frac{1 - cos\, \alpha}{2} + \frac{1 + cos\, \alpha}{2} + 2\sqrt{\frac{1 - cos\, \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + cos\, \alpha}{2}} = 2$$

$$1 + 2\sqrt{\frac{1 - cos^2\, \alpha}{4}} = 2 \to 1 + 2\left(\frac{sen\, \alpha}{2}\right) = 2 \to sen\, \alpha = 1 \to \alpha = 90° + 360°\, k$$

Como hemos elevado al cuadrado debemos comprobar que las soluciones son válidas y observamos que cuando k es impar, el valor de α que resulta no es solución de la ecuación pero cuando k es par, sí que lo es.

Por tanto, la solución es: $\alpha = 90° + 720°\, k$

b) Aplicando las fórmulas de la suma de cosenos:

$2\, cos\, 2x \cdot cos\, x = 2\, cos\, 210° \cdot cos\, x$

Si $cos\, x = 0$, la ecuación se cumple: $x = 90° + 180°\, k$

Si $cos\, x \neq 0$:

$2\, cos\, 2x = 2\, cos\, 210° \to cos\, 2x = cos\, 210°$

Por tanto:

$2x = 210° + 360°\, k \to x = 105° + 180°\, k$

Y como $cos\, 210° = cos\, 150°$:

$2x = 105° + 360°\, k \to x = 75° + 180°\, k$

Solución: $x = 90° + 180°$; $x = 105° + 180°\, k$; $x = 75° + 180°\, k$

c) Aplicando la fórmula del ángulo medio y restando $cos\, x$:

$$4\sqrt{\frac{1 - cos\, x}{2}} = 3 - cos\, x$$

Ahora elevamos al cuadrado:

$$\frac{16\,(1 - cos\, x)}{2} = 9 + cos^2\, x - 6\, cos\, x \to 8 - 8\, cos\, x - 9 - cos^2\, x + 6\, cos\, x = 0 \to$$

$$\to cos^2\, x + 2\, cos\, x + 1 = 0 \to cos\, x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = -1 \to x = 180° + 360°\, k$$

De nuevo, si comprobamos las soluciones, observamos que para valores impares de k, el valor de x obtenido no es solución de la ecuación mientras que para los valores pares sí que lo es, por tanto, la solución es: $x = 180° + 720°\, k$.

35 **Resuelve transformando en producto.**

a) $\boldsymbol{sen\ 6x - sen\ 4x = 2 \cdot cos\ 60° \cdot sen\ x}$

b) $\boldsymbol{sen\ 5x + sen\ 3x = 2 \cdot sen\ 240° \cdot cos\ x}$

a) Por las fórmulas de la resta de senos:

$2\ cos\ 5x \cdot sen\ x = 2\ cos\ 60° \cdot sen\ x$

Si $sen\ x = 0$, la ecuación se cumple: $x = 0° + 180°\ k$

Si $sen\ x \neq 0$, dividimos ambos miembros de la ecuación por $sen\ x$:

$2\ cos\ 5x = 2\ cos\ 60° \rightarrow cos\ 5x = cos\ 60° \rightarrow 5x = 60° + 360°\ k \rightarrow x = 12° + 72°\ k$

Como $cos\ 60° = cos\ 300°$:

$2\ cos\ 5x = 2\ cos\ 60° \rightarrow 2\ cos\ 5x = 2\ cos\ 300° \rightarrow cos\ 5x = cos\ 300° \rightarrow 5x = 300° + 360°\ k \rightarrow$

$\rightarrow x = 60° + 72°\ k$

Solución: $x = 0° + 180\ k$; $x = 12° + 72°\ k$; $x = 60° + 72°\ k$

b) Por la fórmula de la suma de los senos:

$2\ sen\ 4x\ cos\ x = 2\ sen\ 240°\ cos\ x$

Si $cos\ x = 0$, la ecuación se cumple: $x = 90° + 180°\ k$

Si $cos\ x \neq 0$, dividimos ambos miembros de la ecuación por $cos\ x$:

$2\ sen\ 4x = 2\ sen\ 240° \rightarrow sen\ 4x = sen\ 240° \rightarrow 4x = 240° + 360°\ k \rightarrow x = 60° + 60°\ k$

Como $sen\ 240° = sen\ 300°$:

$sen\ 4x = sen\ 240° \rightarrow sen\ 4x = sen\ 300° \rightarrow 4x = 300° + 360°\ k \rightarrow x = 75° + 90°\ k$

Solución: $x = 90° + 180°\ k$; $x = 60° + 72°\ k$; $x = 75° + 90°\ k$

36 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x + sen^2 y = 2} \\ \boldsymbol{x + cos^2 y = 1} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \boldsymbol{sen^2 x + cos^2 y = \frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{cos^2 x - sen^2 y = \frac{1}{2}} \end{cases}$

* ***Da las soluciones del intervalo [0°, 360°).***

a) De la segunda ecuación sabemos que $x = sen^2\ y$.

Sustituyendo en la primera ecuación: $sen^2\ y + sen^2\ y = 2 \rightarrow sen^2\ y = 1 \rightarrow x = 1$

Por tanto: $1 = sen^2\ y \rightarrow sen\ y = \pm 1 \rightarrow y = 90°,\ y = 270°$

Soluciones: $x = 1, y = 90°$; $x = 1, y = 270°$

b) Restamos las ecuaciones (1.ª ecuación – 2.ª ecuación)

$sen^2\ x - cos^2\ x + cos^2\ y + sen^2\ y = 0 \rightarrow sen^2\ x - cos^2\ x + 1 = 0 \rightarrow sen^2\ x - \left(1 - sen^2\ x\right) + 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2\ sen^2\ x = 0 \rightarrow x = 0°,\ x = 180°$

Volviendo a la primera ecuación:

$cos^2\ y = \frac{1}{2} \rightarrow cos\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Si $cos\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow y = 45°,\ y = 315°$

Si $cos\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow y = 135°,\ y = 225°$

Soluciones:

$x = 0°, y = 45°$	$x = 0°, y = 135°$	$x = 0°, y = 315°$	$x = 0°, y = 225°$
$x = 180°, y = 45°$	$x = 180°, y = 135°$	$x = 180°, y = 315°$	$x = 180°, y = 225°$

37 **Elige la respuesta correcta: «Las soluciones de la ecuación** $\boldsymbol{sen\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}}$ **en el intervalo** $\boldsymbol{[0,\ 2\pi)}$ **son»:**

a) $\frac{17\pi}{12}$ **y** $\frac{23\pi}{12}$ **b)** $\frac{\pi}{12}$ **y** $\frac{7\pi}{12}$ **c)** $\frac{5\pi}{12}$ **y** $\frac{11\pi}{12}$

Veamos que la solución correcta es a).

Para que se cumpla la igualdad dada se tiene que cumplir:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{6}-x=\frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{6}-x=\frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

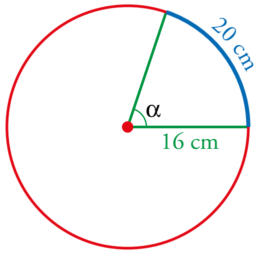
De la primera igualdad: $x=-\frac{\pi}{12}=2\pi-\frac{\pi}{12}=\frac{23\pi}{12}$

De la segunda igualdad: $x=-7\frac{\pi}{12}=2\pi-\frac{7\pi}{12}=\frac{17}{12}\pi$

Página 150

Para resolver

38 **En una circunferencia de 16 cm de radio, un arco mide 20 cm. Halla el ángulo central que corresponde a ese arco en grados y en radianes.**

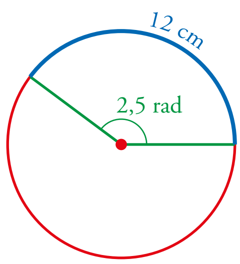


Como la circunferencia completa $(100,53\text{ cm})$ son $2\pi\ rad$, entonces:

$$\frac{100,53}{20}=\frac{2\pi}{\alpha}\ \rightarrow\ \alpha=\frac{20\cdot 2\pi}{100,53}=1,25\ rad$$

$$\alpha=\frac{360°}{2\pi}\cdot 1,25=71°\ 37'\ 11''$$

39 **En una determinada circunferencia, a un arco de 12 cm de longitud le corresponde un ángulo de 2,5 radianes. ¿Cuál es el radio de esa circunferencia?**



$$\frac{2,5\ rad}{1\ rad}=\frac{12\text{ cm}}{R\text{ cm}}\ \rightarrow\ R=\frac{12}{2,5}=4,8\text{ cm}$$

40 **Halla, en radianes, el ángulo comprendido entre 0 y** $\boldsymbol{2\pi}$ **tal que sus razones trigonométricas coincidan con las de** $\boldsymbol{\frac{19\pi}{5}}$**.**

Como $\frac{19}{5}=3,8$, el ángulo α dado verifica $2\pi<\alpha<4\pi$, luego tiene más de una vuelta completa y menos de dos vueltas.

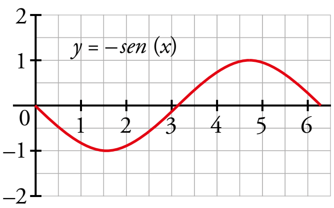
Si le restamos una vuelta (2π) obtendremos el ángulo que nos piden.

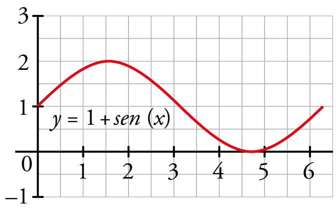
Tiene las mismas razones trigonométricas que el ángulo $\frac{19\pi}{5}-2\pi=\frac{9\pi}{5}$ y $0<\frac{9\pi}{5}\text{ rad}<2\pi$.

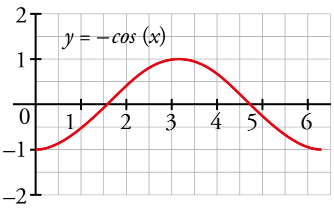
41 **Haz una tabla de valores como la de la página 144 para cada una de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente en el intervalo [0 , 2π):**

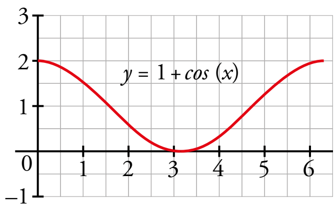
a) $y = -sen\ x$ **b)** $y = 1 + sen\ x$ **c)** $y = -cos\ x$ **d)** $y = 1 + cos\ x$

Grad (°)	rad	–sen x	1 + sen x	–cos x	1 + cos x
0	0	0	1	–1	2
30	$\pi/6$	$-1/2$	$3/2$	$-\sqrt{3}/2$	$1+\sqrt{3}/2$
45	$\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$1+\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$1+\sqrt{2}/2$
60	$\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$1+\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$3/2$
90	$\pi/2$	-1	2	0	1
120	$2\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$1+\sqrt{3}/2$	$1/2$	$1/2$
135	$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$1+\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1-\sqrt{2}/2$
150	$5\pi/6$	$-1/2$	$3/2$	$\sqrt{3}/2$	$1-\sqrt{3}/2$
180	π	0	1	1	0
210	$7\pi/6$	$1/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1-\sqrt{3}/2$
225	$5\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$1-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1-\sqrt{2}/2$
240	$4\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$1/2$
270	$3\pi/2$	1	0	0	1
300	$5\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$3/2$
315	$7\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$1-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$1+\sqrt{2}/2$
330	$11\pi/6$	$1/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$1+\sqrt{3}/2$
360	2π	0	1	–1	2



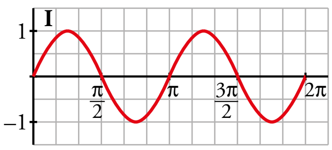


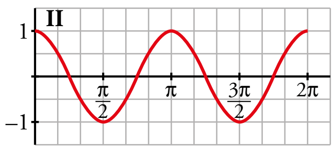


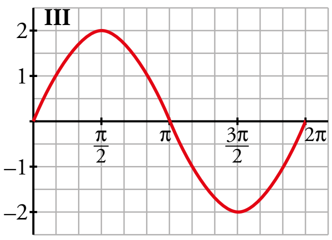


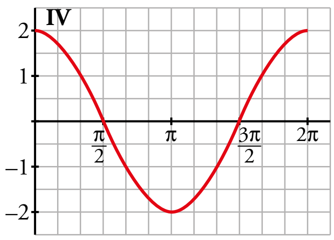
42 **Asocia a cada una de estas funciones su gráfica:**

a) $y = 2\ sen\ x$ **b)** $y = cos\ 2x$ **c)** $y = 2\ cos\ x$ **d)** $y = sen\ 2x$









a) Grafica III.
b) Gráfica II.
c) Gráfica IV.
d) Gráfica I.

43 **En un triángulo ABC conocemos $\hat{B} = 45°$ y $\cos \hat{A} = -1/5$. Calcula, sin hallar los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$, las razones trigonométricas del ángulo $\hat{C}$.**

Calculamos primero las razones trigonométricas de $\hat{A}$ y de $\hat{B}$.

$$sen^2 \hat{A} + cos^2 \hat{A} = 1 \to sen^2 \hat{A} + \frac{1}{25} = 1 \to sen^2 \hat{A} = \frac{24}{25} \to sen^2 \hat{A} = \frac{\sqrt{24}}{5} \text{ ya que } \hat{A} < 180°.$$

$$sen\ \hat{B} = sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad cos\ \hat{B} = cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\ \hat{C} = sen\ (180° - (\hat{A} + \hat{B})) = sen\ 180°\ cos\ (\hat{A} + \hat{B}) - cos\ 180°\ sen\ (\hat{A} + \hat{B}) = sen\ (\hat{A} + \hat{B}) =$$

$$= sen\ \hat{A}\ cos\ \hat{B} + cos\ \hat{A}\ sen\ \hat{B} = \frac{\sqrt{24}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{10}$$

$$cos\ \hat{C} = cos\ (180° - (\hat{A} + \hat{B})) = cos\ 180°\ cos\ (\hat{A} + \hat{B}) + sen\ 180°\ sen\ (\hat{A} + \hat{B}) = -cos\ (\hat{A} + \hat{B}) =$$

$$= -(cos\ \hat{A}\ cos\ \hat{B} - sen\ \hat{A}\ sen\ \hat{B}) = -\left(-\frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{24}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{10}$$

$$tg\ \hat{C} = \frac{sen\ \widehat{C}}{cos\ \widehat{C}} = \frac{\frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{10}}{\frac{4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{10}} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{25 - 4\sqrt{6}}{23}$$

44 **Si $sen\ x \cdot cos\ x = 0{,}25$ comprueba sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora, que $tg\ x = 2 \pm \sqrt{3}$.**

Según el enunciado:

$$sen\ x\ cos\ x = 1/4 \to sen\ x\sqrt{1 - sen^2 x} = 1/4 \to sen^2 x\ (1 - sen^2 x) = 1/16 \to$$

$$\to sen^4 x - sen^2 + 1/16 = 0$$

Obtenemos, por tanto, una ecuación bicuadrada en la que obtenemos como soluciones:

$$sen\ x = \pm\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \text{ o bien } sen\ x = \pm\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Si comprobamos las soluciones en la ecuación inicial, observamos que solo son válidas las soluciones:

$$sen\ x = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \text{ o bien } sen\ x = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Por otra parte, sabemos:

$$tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x} = \frac{sen\ x}{1/4\ sen\ x} = 4\ sen^2 x$$

$$\text{Si } sen\ x = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \to tg\ x = 4\left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\right)^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{Si } sen\ x = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \to tg\ x = 4\left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}$$

45 **Demuestra estas igualdades:**

a) $\dfrac{tg\ \alpha}{tg\ 2\alpha - tg\ \alpha} = cos\ 2\alpha$ **b)** $sen\ 3x = 3sen\ x - 4\ sen^3 x$

a) $$\frac{tg\ \alpha}{tg\ 2\alpha - tg\ \alpha} = \frac{tg\ \alpha}{\frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\ \alpha} - tg\ \alpha} = \frac{tg\ \alpha\ (1 - tg^2\ \alpha)}{2\ tg\ \alpha - tg\ \alpha\ (1 - tg^2\ \alpha)} = \frac{tg\ \alpha\ (1 - tg^2\ \alpha)}{tg\ \alpha + tg^3\ \alpha} = \frac{tg\ \alpha\ (1 - tg^2\ \alpha)}{tg\ \alpha\ (1 + tg^2\ \alpha)} =$$

$$= \frac{1 - \frac{sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha}}{1 + \frac{sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha}} = \frac{\frac{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha}}{\frac{cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha}} = \frac{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha} = cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha = cos\ 2\alpha$$

b) $sen\,3x = 3\,sen\,x - 4\,sen^3\,x \;\rightarrow\; sen\,3x - sen\,x = 2\,sen\,x - 4\,sen^3\,x$

Podemos aplicar la fórmula de la suma de senos:

$2\,cos\,2x\,sen\,x = sen\,x\left(2 - 4\,sen^2\,x\right)$

Aplicamos la fórmula del ángulo doble:

$$2\left(cos^2\,x - sen^2\,x\right)sen\,x = sen\,x\left(2 - 4\,sen^2\,x\right) \;\rightarrow\; sen\,x\left(2\,cos^2\,x - 2\,sen^2\,x - 2 + 4\,sen^2\,x\right) = 0 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; sen\,x\left(2\,cos^2\,x + 2\,sen^2\,x - 2\right) = 0 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; sen\,x\left(2 - 2\right) = 0 \;\rightarrow\; 0 = 0$$

Todos los valores de x son solución de la igualdad y, por tanto, es cierta.

46 Simplifica.

a) $\dfrac{2\,cos\,(45° + \alpha)\,cos\,(45° - \alpha)}{cos\,2\alpha}$ **b)** $sen\,\alpha \cdot cos\,2\alpha - cos\,\alpha \cdot sen\,2\alpha$

a) $$\frac{2\,cos\,(45° + \alpha)\,cos\,(45° - \alpha)}{cos\,2\alpha} = \frac{2\,(cos\,45°\,cos\,\alpha - sen\,45°\,sen\,\alpha)\,(cos\,45°\,cos\,\alpha + sen\,45°\,sen\,\alpha)}{cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha} =$$
$$= \frac{2\,(cos^2\,45°\,cos^2\,\alpha - sen^2\,45°\,sen^2\,\alpha)}{cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha} =$$
$$= \frac{2 \cdot [(\sqrt{2}/2)^2\,cos^2\,\alpha - (\sqrt{2}/2)^2\,sen^2\,\alpha]}{cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha} =$$
$$= \frac{2 \cdot 1/2\,cos^2\,\alpha - 2 \cdot 1/2\,sen^2\,\alpha}{cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha} = \frac{cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha}{cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha} = 1$$

b) $$sen\,\alpha \cdot cos\,(2\alpha) - cos\,\alpha \cdot sen\,(2\alpha) = sen\,\alpha\,(cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha) - cos\,\alpha\,2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha =$$
$$= sen\,\alpha\,cos^2\,\alpha - sen^3\,\alpha - 2\,sen\,\alpha\,cos^2\,\alpha = -sen^3\,\alpha - sen\,\alpha\,cos^2\,\alpha =$$
$$= -sen\,\alpha\,(sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha) = -sen\,\alpha$$

47 Resuelve estas ecuaciones:

a) $\dfrac{sen\,5x + sen\,3x}{cos\,x + cos\,3x} = 1$ **b)** $\dfrac{sen\,3x + sen\,x}{cos\,3x - cos\,x} = \sqrt{3}$

c) $sen\,3x - sen\,x = cos\,2x$ **d)** $sen\,3x - cos\,3x = sen\,x - cos\,x$

a) $$\frac{2\,sen\,\dfrac{5x + 3x}{2}\,cos\,\dfrac{5x - 3x}{2}}{2\,cos\,\dfrac{3x + x}{2}\,cos\,\dfrac{3x - x}{2}} = 1 \;\rightarrow\; \frac{2\,sen\,4x\,cos\,x}{2\,cos\,2x\,cos\,x} = 1 \;\rightarrow\; \frac{sen\,4x}{cos\,2x} = 1 \;\rightarrow\; \frac{sen\,(2 \cdot 2x)}{cos\,2x} = 1 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; \frac{2\,sen\,2x\,cos\,2x}{cos\,2x} = 1 \;\rightarrow\; 2\,sen\,2x = 1 \;\rightarrow\; sen\,2x = \frac{1}{2} \;\rightarrow$$
$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = 30° \;\rightarrow\; x_1 = 15° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{12} + 2k\,\pi \\ 2x = 150° \;\rightarrow\; x_2 = 75° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\,\pi \\ 2x = 390° \;\rightarrow\; x_3 = 195° + k \cdot 360° = \dfrac{13\pi}{12} + 2k\,\pi \\ 2x = 510° \;\rightarrow\; x_4 = 255° + k \cdot 360° = \dfrac{17\pi}{12} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Al comprobar, vemos que todas las soluciones son válidas.

b) $$\frac{2\,sen\,\dfrac{3x + x}{2}\,cos\,\dfrac{3x - x}{2}}{-2\,sen\,\dfrac{3x + x}{2}\,sen\,\dfrac{3x - x}{2}} = \sqrt{3} \;\rightarrow\; \frac{2\,sen\,2x\,cos\,x}{-2\,sen\,2x\,sen\,x} = \frac{cos\,x}{-sen\,x} = -\frac{1}{tg\,x} = \sqrt{3} \;\rightarrow\; tg\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 150° \\ x_2 = 330° \end{cases}$$

Ambas soluciones son válidas, luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 150° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_2 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $2\,cos\,\dfrac{3x+x}{2}\,sen\,\dfrac{3x-x}{2} = cos\,2x$

$2\,cos\,2x\,sen\,x = cos\,2x \;\rightarrow\; 2\,sen\,x = 1 \;\rightarrow\; sen\,x = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; x_1 = 30°,\; x_2 = 150°$

Comprobando, vemos que las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_2 = 150° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $sen\,3x - sen\,x = cos\,3x - cos\,x \;\rightarrow\; 2\,cos\,2x\,sen\,x = -2\,sen\,2x\,sen\,x \;\rightarrow$ (Dividimos entre $2\,sen\,x$)

$$\rightarrow\; cos\,2x = -sen\,2x \;\rightarrow\; \frac{sen\,2x}{cos\,2x} = -1 \;\rightarrow\; tg\,2x = -1 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = 315° \;\rightarrow\; x_1 = 157,5° + k \cdot 360° \\ 2x = 135° \;\rightarrow\; x_2 = 67,5° + k \cdot 360° \\ 2x = 675° \;\rightarrow\; x_3 = 337,5° + k \cdot 360° \\ 2x = 495° \;\rightarrow\; x_4 = 247,5° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos comprobar que las cuatro soluciones son válidas. Agrupándolas:

$x = 67,5° + k \cdot 90°$ con $k \in \mathbb{Z}$

48 a) Demuestra: $\boldsymbol{sen^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) - sen^2\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) = sen\,\alpha \cdot sen\,\beta}$

b) Utiliza el resultado del apartado a) para demostrar:

$$\boldsymbol{cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = sen\,\alpha \cdot sen\,\beta}$$

a) El primer miembro de la igualdad es una diferencia de cuadrados, luego podemos factorizarlo como una suma por una diferencia:

$$\left[sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] \cdot \left[sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] \overset{(*)}{=} \left[2\,sen\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\beta}{2}\right] \cdot \left[2\,cos\,\frac{\alpha}{2}\,sen\,\frac{\beta}{2}\right] =$$

$$= 4\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+cos\,\beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1-cos\,\beta}{2}} = \sqrt{(1-cos\,\beta)\,(1+cos\,\beta)\,(1+cos\,\alpha)\,(1-cos\,\beta)} =$$

$$= \sqrt{(1-cos^2\,\alpha)\,(1-cos^2\,\beta)} = \sqrt{sen^2\,\alpha \cdot sen^2\,\beta} = sen\,\alpha\,sen\,\beta$$

(*) Transformamos la suma y la diferencia en productos, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = \beta$$

b) Procedemos de manera análoga al apartado anterior, pero ahora:

$$\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} = -\beta$$

$$cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \left[cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] \cdot \left[cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] =$$

$$= \left[2\,cos\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{-\beta}{2}\right] \cdot \left[-2\,sen\,\frac{\alpha}{2}\,sen\,\frac{-\beta}{2}\right] = \left[2\,cos\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\beta}{2}\right] \cdot \left[2\,sen\,\frac{\alpha}{2}\,sen\,\frac{\beta}{2}\right] =$$

$$= 4\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+cos\,\beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1-cos\,\beta}{2}} = \sqrt{(1-cos^2\,\alpha)\,(1-cos^2\,\beta)} = \sqrt{sen^2\,\alpha \cdot sen^2\,\beta} = sen\,\alpha\,sen\,\beta$$

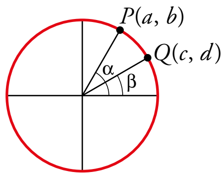
NOTA: También podríamos haberlo resuelto aplicando el apartado anterior como sigue:

$$cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=1-sen^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-1+sen^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=sen^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-sen^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\overset{(*)}{=}sen\,\alpha\;sen\,\beta$$

(*) Por el apartado anterior.

49 **En una circunferencia goniométrica dibujamos los ángulos α y β. Llamamos $\gamma=\alpha-\beta$.**



a) ¿Cuál de estas expresiones es igual a *sen* γ?

I. *ac* + *bd* **II. *bc* – *ad***

III. *ad* – *bc* **IV. *ab* + *cd***

b) ¿Alguna de ellas es igual a *cos* γ?

a) $sen\,\gamma = sen\,(\alpha-\beta) = sen\,\alpha\;cos\,\beta - cos\,\alpha\;sen\,\beta = bc - ad$ (II)

b) $cos\,\gamma = cos\,(\alpha-\beta) = cos\,\alpha\;cos\,\beta + sen\,\alpha\;sen\,\beta = bd + ac$ (I)

50 **Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante:**

a) $\begin{cases} x+y=120° \\ sen\,x-sen\,y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ **b)** $\begin{cases} sen\,x+cos\,y=1 \\ x+y=90°\end{cases}$

c) $\begin{cases} sen^2\,x+cos^2\,y=1 \\ cos^2\,x-sen^2\,y=1\end{cases}$ **d)** $\begin{cases} sen\,x+cos\,y=1 \\ 4\,sen\,x\,cos\,y=1\end{cases}$

a) De la segunda ecuación: $2\,cos\,\frac{x+y}{2}\,sen\,\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}$

Como:

$$x+y=120° \;\rightarrow\; 2\,cos\,60°\,sen\,\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2} \;\rightarrow\; 2\cdot\frac{1}{2}\,sen\,\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; sen\,\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2} \;\rightarrow\; \frac{x-y}{2}=30° \;\rightarrow\; x-y=60°$$

Así: $x+y=120°$

$x-y=60°$

$2x=180° \;\rightarrow\; x=90° \;\rightarrow\; y=30°$

Luego la solución es (90°, 30°)

b) $x+y=90° \;\rightarrow$ complementarios $\rightarrow\; sen\,x=cos\,y$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$$cos\,y+cos\,y=1 \;\rightarrow\; 2\,cos\,y=1 \;\rightarrow\; cos\,y=\frac{1}{2} \;\rightarrow\; y=60° \;\rightarrow\; x=90°-y=90°-60°=30°$$

Luego la solución es: (30°, 60°)

c) Como $\begin{cases} cos^2\,y=1-sen^2\,y \\ cos^2\,x=1-sen^2\,x\end{cases}$

El sistema queda:

$$\left.\begin{matrix} sen^2\,x+1-sen^2\,y=1 \\ 1-sen^2\,x-sen^2\,y=1\end{matrix}\right\} \;\rightarrow\; \left.\begin{matrix} sen^2\,x-sen^2\,y=0 \\ -sen^2\,x-sen^2\,y=0\end{matrix}\right\}$$

$$-2\,sen^2\,y=0 \;\rightarrow\; sen\,y=0 \;\rightarrow\; y=0°$$

Sustituyendo en la segunda ecuación (por ejemplo) del sistema inicial, se obtiene:

$$cos^2\, x - 0 = 1 \;\rightarrow\; cos^2\, x = 1 = \begin{cases} cos\, x = 1 \;\rightarrow\; x = 0° \\ cos\, x = -1 \;\rightarrow\; x = 180° \in \text{ 2.º cuadrante} \end{cases}$$

Luego la solución es: (0°, 0°)

d) $\left.\begin{array}{l} sen\, x + cos\, y = 1 \\ 4\, sen\, x\, cos\, y = 1 \end{array}\right\} \; cos\, y = 1 - sen\, x$

$$4\, sen\, x\,(1 - sen\, x) = 1 \;\rightarrow\; 4\, sen^2\, x - 4\, sen\, x + 1 = 0 \;\rightarrow\; sen\, x = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; cos\, y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Las diferentes posibilidades son:

$$\begin{cases} x = 30° + 360° \cdot k \\ y = 60° + 360° \cdot k \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 30° + 360° \cdot k \\ y = 300° + 360° \cdot k \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 150° + 360° \cdot k \\ y = 60° + 360° \cdot k \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 150° + 360° \cdot k \\ y = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$$

51 Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones en el intervalo [0, 2π):

a) $\begin{cases} cos\, x + cos\, y = -1/2 \\ cos\, x\, cos\, y = -1/2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = \pi/2 \\ \sqrt{3}\, cos\, x - cos\, y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} sen\,(x - y) = 1/2 \\ cos\,(x + y) = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} sen\, x + cos\, y = 1/2 \\ cosec\, x + sec\, y = -1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} cos\, x + cos\, y = -\dfrac{1}{2} \\ cos\, x \cdot cos\, y = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} cos\, y = -\dfrac{1}{2} - cos\, x \\ cos\, x\left(-\dfrac{1}{2} - cos\, x\right) = -\dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; -\dfrac{1}{2}\, cos\, x - cos^2\, x = -\dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; cos\, x + 2\, cos^2\, x = 1 \end{array}$

$$2\, cos^2\, x + cos\, x - 1 = 0 \;\rightarrow\; cos\, x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} \dfrac{-1-3}{4} = -1 \\ \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Si $cos\, x = -1 \;\rightarrow\; x = \pi$

  $cos\, y = -\dfrac{1}{2} - (-1) = \dfrac{1}{2} \begin{cases} y = \pi/3 \\ y = 5\pi/3 \end{cases}$

- Si $cos\, x = \dfrac{1}{2} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ x = \dfrac{5\pi}{3} \;\rightarrow\; cos\, y = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = -1 \;\rightarrow\; y = \pi \end{cases}$

  Soluciones: $\left(\pi, \dfrac{\pi}{3}\right), \left(\pi, \dfrac{5\pi}{3}\right), \left(\dfrac{\pi}{3}, \pi\right), \left(\dfrac{5\pi}{3}, \pi\right)$

b) $y = \dfrac{\pi}{2} - x$

$$\sqrt{3}\, cos\, x - cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 \;\rightarrow\; \sqrt{3}\, cos\, x - cos\,\frac{\pi}{2}\, cos\, x - sen\,\frac{\pi}{2}\, sen\, x = 1 \;\rightarrow\; \sqrt{3}\, cos\, x = sen\, x + 1$$

Elevamos al cuadrado:

$$3\, cos^2\, x = sen^2\, x + 2\, sen\, x + 1 \;\rightarrow\; 3\,(1 - sen^2\, x) = sen^2\, x + 2\, sen\, x + 1 \;\rightarrow\; 4\, sen^2\, x + 2\, sen\, x - 2 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 2\, sen^2\, x + sen\, x - 1 = 0 \;\rightarrow\; sen\, x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

- Si $sen\, x = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{6},\; x = \dfrac{5\pi}{6}$

  $x = \dfrac{\pi}{6} \;\rightarrow\; y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$ y $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ vale.

  $x = \dfrac{5\pi}{6} \;\rightarrow\; y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{3}$ no puede ser porque no está en el intervalo dado.

- Si $sen\, x = -1 \;\rightarrow\; x = \dfrac{3\pi}{2} \;\rightarrow\; y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\pi}{2} = -\pi$ tampoco es posible por el mismo motivo.

c) De la primera ecuación tenemos:

$x - y = 30$ o bien $x - y = 150$

De la segunda ecuación tenemos:

$x + y = 90$ o bien $x - y = 180$

Tenemos que resolver 4 sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 30 \\ x + y = 90 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones: $2x = 120 \rightarrow x = 60 \rightarrow y = 30$

$$\begin{cases} x - y = 150 \\ x + y = 90 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones: $2x = 240 \rightarrow x = 120 \rightarrow y = 330$

$$\begin{cases} x - y = 30 \\ x + y = 180 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones: $2x = 210 \rightarrow x = 105 \rightarrow y = 75$

$$\begin{cases} x - y = 150 \\ x + y = 180 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones: $2x = 330 \rightarrow x = 165 \rightarrow y = 345$

Soluciones: $x_1 = 60°, y_1 = 30°$; $x_2 = 120°, y_2 = 330°$; $x_3 = 105°, y_3 = 75°$; $x_4 = 165°, y_4 = 345°$

d) De la primera ecuación tenemos que $sen\ x = \frac{1}{2} - cos\ y$, y sustituimos en la segunda ecuación:

$$cosec\ x + sec\ y = -1 \rightarrow \frac{1}{sen\ x} + \frac{1}{cos\ y} = -1 \rightarrow \frac{cos\ y + \frac{1}{2} - cos\ y}{\left(\frac{1}{2} - cos\ y\right) cos\ y} = -1 \rightarrow$$

$$\rightarrow cos^2\ y - \frac{1}{2} cos\ y - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow cos\ y = 1 \quad \text{o bien} \quad cos\ y = -1/2$$

Si $cos\ y = 1 \rightarrow y = 0$

Si $cos\ y = -1/2 \rightarrow y_1 = 120, y_2 = 240$

Volvemos a la primera ecuación: $sen\ x = \frac{1}{2} - cos\ y$

Si $cos\ y = 1 \rightarrow sen\ x = -1/2 \rightarrow x_1 = 330, x_2 = 210$

Si $cos\ y = -1/2 \rightarrow sen\ x = 1 \rightarrow x = 90$

Soluciones: $x_1 = 330°, y_1 = 0°$; $x_2 = 210°, y_2 = 0°$; $x_3 = 90°, y_3 = 120°$; $x_4 = 90°, y_4 = 240°$

52 Halla los valores de α y β para los que se cumple la igualdad *sen* $(\alpha + \beta) = 2$ *sen* α *cos* β.

Como $sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta$, $sen\ (\alpha + \beta) = 2sen\ \alpha\ cos\ \beta \rightarrow$

$\rightarrow sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \beta \rightarrow cos\ \alpha\ sen\ \beta = sen\ \alpha\ cos\ \beta$

Esta relación es cierta, obviamente si $\alpha = \beta$.

Por otro lado, dividiendo entre $cos\ \alpha\ cos\ \beta$ se tiene que $\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{sen\ \beta}{cos\ \alpha}$, luego los ángulos α y β deben tener la misma tangente.

Esto ocurre cuando $\beta = \alpha + 180° \cdot k$ por la periodicidad de la función $y = tg\ x$.

Si $cos\ \alpha = 0$ entonces $0 = sen\ \alpha\ cos\ \beta \rightarrow cos\ \beta = 0$ ya que $sen\ \alpha = \pm 1$.

Por tanto, la relación también es cierta si α y β son simultáneamente de la forma $90° + 360° \cdot k$ o $270° + 360° \cdot k$.

En resumen, se verifica la igualdad cuando $\beta = \alpha + 180° \cdot k$.

53 **[El docente puede preguntar al alumnado el porqué de sus conclusiones para que trabaje la destreza expresión oral de esta clave].**

Sin desarrollar las razones trigonométricas de la suma o de la diferencia de ángulos, averigua para qué valores de x se verifica cada una de estas igualdades:

a) $sen\ 2x - sen\ (x - 60°) = 0$

b) $cos\ (2x + 60°) - cos\ (x - 45°) = 0$

c) $cos\ (2x - 30°) - cos\ (x + 45°) = 0$

a) $sen\ (x - 60°) = sen\ 2x \to sen\ 2x - sen\ (x - 60°) = 0 \to$

$$\to 2\ cos\ \frac{2x + x - 60°}{2}\ sen\ \frac{2x - (x - 60°)}{2} = 0 \to cos\ \frac{3x - 60°}{2}\ sen\ \frac{x + 60°}{2} = 0$$

- Si $cos\ \frac{3x - 60°}{2} = 0 \to \begin{cases} \frac{3x - 60°}{2} = 90° \to x = 80° + 360° \cdot k \\ \frac{3x - 60°}{2} = 270° \to x = 200° + 360° \cdot k \end{cases}$

  Si sumamos 360° encontramos otra solución: $\frac{3x - 60°}{2} = 90° + 360° \to x = 320° + 360° \cdot k$

- Si $sen\ \frac{x + 60°}{2} = 0 \to \begin{cases} \frac{x + 60}{2} = 0° \to x = 300° + 360° \cdot k \\ \frac{x + 60°}{2} = 180° \to x = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$

b) $cos\ (x - 45°) = cos\ (2x + 60°) \to cos\ (2x + 60°) - cos\ (x - 45°) = 0 \to$

$$\to -2\ sen\ \frac{2x + 60° + x - 45°}{2}\ sen\ \frac{2x + 60° - (x - 45°)}{2} = 0 \to sen\ \frac{3x + 15°}{2}\ sen\ \frac{x + 105°}{2} = 0$$

- Si $sen\ \frac{3x + 15°}{2} = 0 \to \begin{cases} \frac{3x + 15°}{2} = 0° \to x = 355° + 360° \cdot k \\ \frac{3x + 15°}{2} = 180° \to x = 115° + 360° \cdot k \end{cases}$

  Si sumamos 360° encontramos otra solución: $\frac{3x + 15°}{2} = 0° + 360° \to x = 235° + 360° \cdot k$

- Si $sen\ \frac{x + 105°}{2} = 0 \to \begin{cases} \frac{x + 105°}{2} = 0° \to x = 255° + 360° \cdot k \\ \frac{x + 105°}{2} = 180° \to x = 255° + 360° \cdot k \end{cases}$

c) $cos\ (2x - 30°) = cos\ (x + 45°) \to cos\ (2x - 30°) - cos\ (x + 45°) = 0 \to$

$$\to -2\ sen\ \frac{2x - 30° + x + 45°}{2}\ sen\ \frac{2x - 30° - (x + 45°)}{2} = 0 \to sen\ \frac{3x + 15°}{2}\ sen\ \frac{x - 75°}{2} = 0$$

- Si $sen\ \frac{3x + 15°}{2} = 0 \to \begin{cases} \frac{3x + 15°}{2} = 0° \to x = 355° + 360° \cdot k \\ \frac{3x + 15°}{2} = 180° \to x = 115° + 360° \cdot k \end{cases}$

  Si sumamos 360° encontramos otra solución: $\frac{3x + 15°}{2} = 0 + 360° \to x = 235° + 360° \cdot k$

- Si $sen\ \frac{x - 75°}{2} = 0 \to \begin{cases} \frac{x - 75°}{2} = 0° \to x = 75° + 360° \cdot k \\ \frac{x - 75°}{2} = 180° \to x = 75° + 360° \cdot k \end{cases}$

Página 151

Cuestiones teóricas

54 **¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.**

a) Las gráficas de las funciones $y = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ y de $y = sen\ x$ son iguales.

b) La gráfica de la función $y = cos(x + \pi)$ es igual que la de $y = -cos\ x$.

c) Al duplicarse un ángulo su tangente también se duplica.

d) La ecuación $sec\ x = 2$ no tiene solución.

e) La ecuación $sen\ 3x = -\frac{1}{2}$ tiene seis soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

a) Falso.

Veamos que son distintos, por ejemplo, en $x = \frac{\pi}{4}$:

$$cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Verdadero, porque el signo del coseno cambia cada 180°.

c) Falso, la fórmula del ángulo doble nos dice que no se cumple $tg\,2\alpha = 2tg\,\alpha$.

d) Falso, ya que tiene por ejemplo $\frac{\pi}{3}$ es solución:

$$sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

e) Verdadero.

Sabemos que $sen(3x) = -\frac{1}{2} \rightarrow 3x = 210° + 360°\,k$ o $x = 330° + 360°\,k$

$\rightarrow x = 70° + 120°\,k$ o $x = 110° + 120°\,k$

Por tanto, las soluciones del intervalo [0, 360°) son:

$x = 70°$, $x = 110°$, $x = 190°$, $x = 230°$, $x = 310°$, $x = 330°$

Es decir, la ecuación tiene seis soluciones en el intervalo [0, 360°).

55 **¿En qué puntos del intervalo $[0, 4\pi]$ corta al eje X cada una de las siguientes funciones?:**

a) $y = cos\ \frac{x}{2}$ **b) $y = sen\ (x - \pi)$** **c) $y = cos\ (x + \pi)$**

Los puntos de corte con el eje X son aquellos para los que $y = 0$.

a) $cos\ \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \pi \\ \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = 3\pi \end{cases}$

b) $sen\,(x - \pi) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - \pi = -\pi \rightarrow x = 0 \\ x - \pi = 0 \rightarrow x = \pi \\ x - \pi = \pi \rightarrow x = 2\pi \\ x - \pi = 2\pi \rightarrow x = 3\pi \\ x - \pi = 3\pi \rightarrow x = 4\pi \end{cases}$

c) $y = cos\,(x + \pi) = 0 \rightarrow \begin{cases} x + \pi = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{5\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{7\pi}{2} \rightarrow x = \frac{5\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{9\pi}{2} \rightarrow x = \frac{7\pi}{2} \end{cases}$

56 ¿Qué relación existe entre las gráficas de $y = sen\ x$ e $y = cos\ x$ y la de cada una de las funciones siguientes?:

a) $y = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $y = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **c)** $y = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **d)** $y = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

La relación que existe es que la gráfica de la función $y = cos\ x$ está desplazada horizontalmente hacia la izquierda $\frac{\pi}{2}$ unidades respecto de *sen x*.

a) Coincide con la gráfica de la función $y = cos\ x$.

b) Es la gráfica de la función $y = -sen\ x$.

c) Coincide con la gráfica de la función $y = sen\ x$.

d) Coincide con la gráfica de la función $y = cos\ x$.

(Además de comprobarse mediante la representación gráfica, puede probarse fácilmente usando las fórmulas de las razones trigonométricas de la suma o diferencia de ángulos).

Para profundizar

57 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $cos\ x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $2\ sen\ x + 1 > 0$

a) $cos\ x = -\sqrt{3}/2\ \ 8\ \ x = \frac{5\pi}{6},\ x = \frac{7\pi}{6}$

Por tanto, la solución es: $x \in (5\pi/6,\ 7\pi/6)$

b) Resolvemos $2\ sen\ x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{7\pi}{6},\ x = \frac{11\pi}{6}$

Por tanto, la solución es: $x \in (7\pi/6,\ 11\pi/6)$

58 Demuestra que si $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, se verifica: $tg\ \alpha + tg\ \beta + tg\ \gamma = tg\ \alpha \cdot tg\ \beta \cdot tg\ \gamma$

$$tg\ \alpha + tg\ \beta + tg\ \gamma = tg\ \alpha + tg\ \beta + tg\ (360° - (\alpha + \beta)) = tg\ \alpha + tg\ \beta + \frac{tg\ 180° - tg\ (\alpha + \beta)}{1 + tg\ 180° \cdot tg\ (\alpha + \beta)} =$$

$$= tg\ \alpha + tg\ \beta - tg\ (\alpha + \beta) = tg\ \alpha + tg\ \beta - \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta - tg^2\ \alpha\ tg\ \beta - tg\ \alpha\ tg^2\ \beta - tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} =$$

$$= \frac{-tg^2\ \alpha\ tg\ \beta - tg\ \alpha\ tg^2 \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} = tg\ \alpha\ tg\ \beta\ \frac{-tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} = tg\ \alpha\ tg\ \beta\ [-tg\ (\alpha + \beta)] =$$

$$= tg\ \alpha\ tg\ \beta\ tg\ (360° - (\alpha + \beta)) = tg\ \alpha\ tg\ \beta\ tg\ \gamma$$

59 Prueba si existe algún triángulo isósceles en el que el coseno del ángulo distinto sea igual a la suma de los cosenos de los ángulos iguales.

Si llamamos x a cada uno de los ángulos iguales, entonces el ángulo desigual es $180° - 2x$.

Se trata de ver si la siguiente ecuación tiene solución: $cos\ (180° - 2x) = 2\ cos\ x$

Veámoslo:

$$cos\ 180°\ cos\ 2x + sen\ 180°\ sen\ 2x = 2\ cos\ x \rightarrow -cos\ 2x = 2\ cos\ x \rightarrow -cos^2\ x + sen^2\ x = 2\ cos\ x \rightarrow$$

$$\rightarrow -cos^2\ x + 1 - cos^2\ x = 2\ cos\ x \rightarrow 2\ cos^2\ x + 2\ cos\ x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow cos\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Si $cos\ x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \rightarrow x = 68°\ 31'\ 45''$ tiene cada uno de los ángulos iguales y el ángulo desigual tiene $180° - 2 \cdot 68°\ 31'\ 45'' = 42°\ 56'\ 30''$

$cos\ x = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} > 1$ que no es posible porque el coseno de un ángulo no puede ser mayor que 1.

Luego no existe ningún triángulo con esas condiciones.

60 **[La resolución de los sistemas de ecuaciones planteados permite al alumnado trabajar la iniciativa (dimensión productiva de esta clave)].**

Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones en el intervalo [0, 2π):

a) $\begin{cases} sen\ x + sen\ y = \sqrt{3}/2 \\ sen^2\ x + sen^2 y = 3/4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} sen\ x \cdot cos\ y = 1/4 \\ cos\ x \cdot sen\ y = 1/4 \end{cases}$

a) Elevamos al cuadrado la primera ecuación:

$$sen^2\ x + 2\ sen\ x\ sen\ y + sen^2\ y = \frac{3}{4} \to 2\ sen\ x\ sen\ y + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \to sen\ x\ sen\ y = 0$$

Si $sen\ x = 0 \to x = 0,\ x = \pi$

Además, $sen\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \to y = \frac{\pi}{3},\ y = \frac{2\pi}{3}$

Sustituimos en el sistema para comprobarlas porque pueden aparecer soluciones falsas al elevar al cuadrado.

$\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{2\pi}{3}\right)$ Valen.

Si $sen\ y = 0 \to y = 0,\ y = \pi$

Además, $sen\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \to x = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{2\pi}{3}$

Sustituimos en el sistema para comprobarlas porque pueden aparecer soluciones falsas al elevar al cuadrado.

$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \left(\frac{2\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ Valen.

b) Elevamos al cuadrado la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$sen^2\ x\ cos^2\ y = \frac{1}{16} \to cos^2\ y = \frac{1}{16\ sen^2 x}$$

$$cos^2\ x\ sen^2\ y = \frac{1}{16} \to cos^2\ x\,(1 - cos^2\ y) = \frac{1}{16} \to cos^2\ x\left(1 - \frac{1}{16\ sen^2\ x}\right) = \frac{1}{16} \to$$

$$\to (1 - sen^2\ x)\left(1 - \frac{1}{16\ sen^2\ x}\right) = \frac{1}{16} \to 1 - \frac{1}{16\ sen^2\ x} - sen^2\ x + \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \to$$

$$\to 1 - \frac{1}{16\ sen^2\ x} - sen^2\ x = 0 \to 16\ sen^2\ x - 1 - 16\ sen^4\ x = 0 \to$$

$$\to 16\ sen^4\ x - 16\ sen^2\ x + 1 = 0 \to sen^2\ x = \frac{16 + \sqrt{192}}{32} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$$

- Si $sen\ x = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \to cos\ y = \frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

  $x = 75°,\ x = 105°,\ y = 75°,\ y = 285°$

  Ahora comprobamos las soluciones porque al elevar al cuadrado pueden aparecer resultados falsos:

  (75°, 75°) → Vale.

  (75°, 285°) → No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

  (105°, 75°) → No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

  (105°, 285°) → Vale.

- Si $sen\ x = -\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \to cos\ y = -\dfrac{1}{4 \cdot \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = -\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

  $x = 285°,\ x = 255°,\ y = 105°,\ y = 255°$

  Ahora comprobamos las soluciones porque al elevar al cuadrado pueden aparecer resultados falsos:

  (285°, 105°) $\to$ Vale.

  (285°, 255°) $\to$ No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

  (255°, 105°) $\to$ No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

  (255°, 255°) $\to$ Vale.

61 Demuestra que:

a) $sen\ x = \dfrac{2\ tg\ (x/2)}{1 + tg^2\ (x/2)}$ **b)** $cos\ x = \dfrac{1 - tg^2\ (x/2)}{1 + tg^2\ (x/2)}$

a) Desarrollamos y operamos en el segundo miembro de la igualdad:

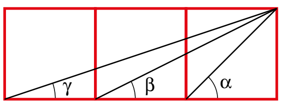
$$\frac{2\ tg\ \frac{x}{2}}{1 + tg^2\ \frac{x}{2}} = \frac{2\sqrt{\frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}}}{1 + \frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}} = \frac{2\sqrt{\frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}}}{\frac{1+cos\ x+1-cos\ x}{1+cos\ x}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}}}{\frac{2}{1+cos\ x}} = (1+cos\ x)\sqrt{\frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}} =$$

$$= \sqrt{(1+cos\ x)^2\ \frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}} = \sqrt{(1+cos\ x)(1-cos\ x)} = \sqrt{1-cos^2\ x} = \sqrt{sen^2\ x} = sen\ x$$

b) $$\frac{1 - tg^2\ \frac{x}{2}}{1 + tg^2\ \frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}}{1 + \frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}} = \frac{\frac{1+cos\ x-1+cos\ x}{1+cos\ x}}{\frac{1+cos\ x+1-cos\ x}{1+cos\ x}} = \frac{2\ cos\ x}{2} = cos\ x$$

62 Demuestra que, en la siguiente figura, $\alpha = \beta + \gamma$**:**



Supongamos que los cuadrados tienen lado l.

Por una parte,

$tg\ \alpha = \dfrac{l}{l} = 1$

Por otro lado,

$$tg\ (\beta + \gamma) = \frac{tg\ \beta + tg\ \gamma}{1 - tg\ \beta\ tg\ \gamma} = \frac{\frac{l}{2l} + \frac{l}{3l}}{1 - \frac{l}{2l} \cdot \frac{l}{3l}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$$

Así, α y $\beta + \gamma$ son dos ángulos comprendidos entre 0° y 90° cuyas tangentes coinciden. Por tanto, los ángulos tienen que ser iguales, es decir, $\alpha = \beta + \gamma$.

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1-EA 1.3.2.) CE 3.1. (EA 3.1.1.) CE 4.2. (EA 4.2.1.)

Página 151

1 Expresa los radianes en grados y viceversa.

a) $\frac{3\pi}{5}$ ***rad*** **b)** **1,4 *rad*** **c)** **140°**

a) 108° b) 80° 13' c) $7\pi/9$

2 ¿Cuánto mide el arco correspondiente a un ángulo de 0,75 radianes en una circunferencia de 12 cm de diámetro?

Aplicamos la fórmula de la longitud de un arco:

$$L = radio \cdot \alpha(rad) = 6 \cdot 0,75 = 4,5$$

3 Si $\boldsymbol{cos\ \alpha = -\frac{1}{4}}$ **y** $\boldsymbol{\alpha < \pi}$**, halla:**

a) $\boldsymbol{sen\ \alpha}$ **b)** $\boldsymbol{cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}$ **c)** $\boldsymbol{tg\ \frac{\alpha}{2}}$ **d)** $\boldsymbol{sen\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)}$

a) $sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1 \to sen^2 \alpha + \frac{1}{16} = 1 \to sen^2 \alpha = \frac{15}{16} \to sen\ \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ya que el ángulo está en el 2.º cuadrante.

b) $cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = cos\ \frac{\pi}{3}\ cos\ \alpha - sen\ \frac{\pi}{3}\ sen\ \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-3\sqrt{5} - 1}{8}$

c) $tg\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ porque $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$

d) $sen\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = sen\ \frac{\pi}{6}\ cos\ \alpha - cos\ \frac{\pi}{6}\ sen\ \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-3\sqrt{5} - 1}{8}$

4 Demuestra cada una de estas igualdades:

a) $\boldsymbol{tg\ 2\alpha = \frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\ \alpha}}$

b) $\boldsymbol{sen\ (\alpha + \beta) \cdot sen\ (\alpha - \beta) = sen^2\ \alpha - sen^2\ \beta}$

a) $tg\ 2\alpha = \frac{sen\ 2\alpha}{cos\ 2\alpha} = \frac{2sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{cos^2 \alpha - sen^2\ \alpha} = \frac{\frac{2sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{cos^2\ \alpha}}{1 - \frac{sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha}} = \frac{2tg\ \alpha}{1 - tg^2 \alpha}$

b) $sen\ (\alpha + \beta) \cdot sen\ (\alpha - \beta) = (sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta)\ (sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta) =$

$= sen^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - cos^2\ \alpha\ sen^2\ \beta = sen^2\ \alpha\ (1 - sen^2\ \beta) - (1 - sen^2\ \alpha)\ sen^2\ \beta =$

$= sen^2\ \alpha - sen^2\ \alpha\ sen^2\ \beta - sen^2\ \beta + sen^2\ \alpha\ sen^2\ \beta = sen^2\ \alpha - sen^2\ \beta$

5 **Resuelve.**

a) $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$ **b)** $2\, tg\, x \cos^2 \frac{x}{2} - sen\, x = 1$

a) $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$

$\cos^2 x - sen^2 x - (-sen\, x) = 1 \to 1 - sen^2 x - sen^2 x + sen\, x - 1 = 0 \to$

$\to -2\, sen^2 x + sen\, x = 0 \to sen\, x(-2\, sen\, x + 1) = 0 \begin{cases} sen\, x = 0 \to x = 0°,\ x = 180° \\ sen\, x = \frac{1}{2} \to x = 30°,\ x = 150° \end{cases}$

Soluciones:

$x_1 = 360° \cdot k;\ x_2 = 180° + 360° \cdot k;\ x_3 = 30° + 360° \cdot k;\ x_4 = 150° + 360° \cdot k,$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $2tg\, x \cos^2 \frac{x}{2} - sen\, x = 1 \to 2tg\, x \frac{1 + \cos x}{2} - sen\, x = 1 \to tg\, x + tg\, x \cos x - sen\, x = 1 \to$

$\to tg\, x + \frac{sen\, x}{\cos x} \cos x - sen\, x = 1 \to tg\, x = 1 \begin{cases} x_1 = 45° + 360° \cdot k \\ x_2 = 225° + 360° \cdot k \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

6 **a) Simplifica:** $\frac{sen\, 5x - sen\, 3x}{\cos 5x + \cos 3x}$

b) Resuelve: $\frac{sen\, 5x - sen\, 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = cotg\, x$

a) Aplicando las fórmulas de suma y resta de seno y coseno:

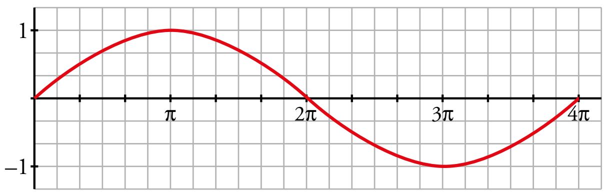
$\frac{sen\, 5x - sen\, 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \frac{2 \cos 4x\, sen\, x}{2 \cos 4x \cos x} = \frac{sen\, x}{\cos x} = tg\, x$

b) Tenemos que resolver $cotg\, x = \frac{sen\, x}{\cos x} \to \frac{1}{tg\, \alpha} = tg\, \alpha \to tg^2\, \alpha = 1 \to tg\, \alpha \pm 1$

$x_1 = 45° + 180°\, k$

$x_2 = 135° + 180°\, k$

7 **Asocia a esta gráfica una de las siguientes expresiones y di cuál es su periodo:**



a) $y = \frac{sen\, x}{2}$ **b)** $y = sen\, 2x$ **c)** $y = sen\, \frac{x}{2}$

La función representada es de periodo 4π y se corresponde con la del apartado c).

Podemos comprobarlo estudiando algunos puntos. Por ejemplo:

$x = \pi \to y = sen \frac{\pi}{2} = 1$

$x = 2\pi \to y = sen \frac{2\pi}{2} = sen\, \pi = 0$

$x = 3\pi \to y = sen \frac{3\pi}{2} = -1$

$x = 4\pi \to y = sen \frac{4\pi}{2} = sen\, 2\pi = 0$

8 **Resuelve dando las soluciones en el intervalo [0°, 360°).**

a) $\begin{cases} sen\ x + sen\ y = 3/2 \\ sen\ x\ sen\ y = 1/2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} sen\ 3x + sen\ y = 3/2 \\ cos\ \dfrac{3x-y}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

a) Aislamos *sen x* en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$\left(\frac{3}{2} - sen\ y\right) sen\ y = \frac{1}{2} \to sen\ y = \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}}{-2} \to sen\ y = 1 \text{ o } sen\ y = \frac{1}{2}$$

Si $sen\ y = 1 \to sen\ x = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \to x = 30,\ \ y = 90$ o bien $x = 150,\ \ y = 90$

Si $sen\ y = 1/2 \to sen\ \ x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \to x = 90,\ y = 30$ o bien $x = 90,\ \ y = 150$

Solución del sistema:

$x_1 = 30° + 360°,\ \ y_1 = 90° + 360°\ k$

$x_2 = 150° + 360°\ k,\ \ y_2 = 90° + 360°\ k$

$x_3 = 90° + 360°\ k,\ \ y_3 = 30° + 360°\ k$

$x_4 = 90° + 360°\ k,\ \ y_4 = 150° + 360°\ k$

b) Para resolver el sistema, aplicaremos las fórmulas de suma de senos a la primera ecuación:

$$sen\ 3x + sen\ y = 2sen\ \frac{3x+y}{2}\ cos\ \frac{3x-y}{2} = 3/2$$

Ahora podemos sustituir la segunda ecuación en la primera:

$$2\ sen\ \frac{3x+y}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \to sen\ \frac{3x+y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \frac{3x+y}{2} = 60° \text{ o bien } \frac{3x+y}{2} = 120°\ (*)$$

Si $\dfrac{3x+y}{2} = \dfrac{\pi}{3} \to y = \dfrac{2\pi}{3} - 3x$

Y de la segunda ecuación: $cos\ \dfrac{(3x-y)}{2} = 3/2 \to \dfrac{3x-y}{2} = 30°$ o bien $\dfrac{3x-y}{2} = 330°\ (**)$

Combinamos (*) y (**) para encontrar sus soluciones:

$\begin{cases} \dfrac{3x+y}{2} = 60 \\ \dfrac{3x-y}{2} = 30 \end{cases}$ Solución: $x = 30°,\ \ y = 30°$

$\begin{cases} \dfrac{3x+y}{2} = 60 \\ \dfrac{3x-y}{2} = 330 \end{cases}$ Solución: $x = 130°,\ \ y = -270° = 90°$

$\begin{cases} \dfrac{3x+y}{2} = 120 \\ \dfrac{3x-y}{2} = 30 \end{cases}$ Solución: $x = 50°,\ \ y = 90°$

$\begin{cases} \dfrac{3x+y}{2} = 120 \\ \dfrac{3x-y}{2} = 330 \end{cases}$ Solución: $x = 150°,\ \ y = -210° = 150°$

$x_1 = 30° + 360°\ k,\ \ y_1 = 30° + 360°\ k$

$x_2 = 130° + 360°\ k,\ \ y_2 = 90° + 360°\ k$

$x_3 = 50° + 360°\ k,\ \ y_3 = 90° + 360°\ k$

$x_4 = 150° + 360°\ k,\ \ y_4 = 150° + 360°\ k$

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

6 NÚMEROS COMPLEJOS

C.E.: CE 2.2. (EA 2.2.1.)

Página 153

Resuelve

¿Cómo operar con $\sqrt{-1}$?

Vamos a proceder como antiguamente: cuando nos encontremos con $\sqrt{-1}$ seguiremos adelante operando con ella con naturalidad y teniendo en cuenta que $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

1 **Con el fin de comprobar que a y b son las raíces de un polinomio, podemos poner $(x - a)(x - b)$ y operar para obtener dicho polinomio. Por ejemplo, vamos a aplicar esta técnica para comprobar que $2 + 3\sqrt{-1}$ y $2 - 3\sqrt{-1}$ son las raíces del polinomio $x^2 - 4x + 13$:**

$$[x - (2 + 3\sqrt{-1})][x - (2 - 3\sqrt{-1})] = x^2 - (2 + 3\sqrt{-1})x - (2 - 3\sqrt{-1})x + (2 + 3\sqrt{-1})(2 - 3\sqrt{-1}) =$$

$$= x^2 - 2x - 3\sqrt{-1}x - 2x + 3\sqrt{-1}x + 2^2 - (3\sqrt{-1})^2 = x^2 - 4x + 4 - 9 \cdot (-1) = x^2 - 4x + 13$$

Halla las raíces de la ecuación $x^2 - 4x + 5$ y, aplicando la técnica que acabamos de ver, comprueba que efectivamente lo son.

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = 2 \pm \sqrt{-1}$$

$$\left[x - (2 + \sqrt{-1})\right]\left[x - (2 - \sqrt{-1})\right] = x^2 - x(2 - \sqrt{-1}) - x(2 + \sqrt{-1}) + (2 + \sqrt{-1})(2 - \sqrt{-1}) =$$

$$= x^2 - 4x + 4 - 2\sqrt{-1} + 2\sqrt{-1} - (-1) = x^2 - 4x + 5$$

2 **Comprobemos ahora que -8 tiene tres raíces cúbicas: -2, $1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}$ y $1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}$.**

La primera es clara:

$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$

Veamos la segunda:

$$(1 + \sqrt{3}\sqrt{-1})^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot (\sqrt{3}\sqrt{-1}) + 3 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3}\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{3}\sqrt{-1})^3 =$$

$$= 1 + 3\sqrt{3}\sqrt{-1} + 3(\sqrt{3})^2(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{3})^3(\sqrt{-1})^3 = 1 + 3\sqrt{3}\sqrt{-1} + 9(-1) + 3\sqrt{3}(-1 \cdot \sqrt{-1}) =$$

$$= 1 + 3\sqrt{3}\sqrt{-1} - 9 - 3\sqrt{3}\sqrt{-1} = -8$$

Comprueba tú la tercera viendo que $(1 - \sqrt{3}\sqrt{-1})^3$ es igual a -8.

$$(1 - \sqrt{3}\sqrt{-1})^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3}\sqrt{-1} + 3 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3}\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{3}\sqrt{-1})^3 =$$

$$= 1 - 3\sqrt{3}\sqrt{-1} + 3 \cdot 3 \cdot (-1) - 3\sqrt{3} \cdot (-1)\sqrt{-1} = 1 - 3\sqrt{3}\sqrt{-1} - 9 + 3\sqrt{3}\sqrt{-1} = -8$$

1 ▶ EN QUÉ CONSISTEN LOS NÚMEROS COMPLEJOS

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 2.2. (EA 2.2.1.-EA 2.2.2.)

Página 154

1 La inversa. **[El alumnado puede buscar contraejemplos de las afirmaciones falsas para poner en práctica esta llave de pensamiento].**

¿Verdadero o falso?

a) El número 7 es un número real. Por tanto, no es un número complejo.

b) Si $a + bi$ es un número complejo, entonces no puede ser número real.

c) Para que el número complejo $a + bi$ sea imaginario hace falta que a sea cero.

d) Para que el número complejo $a + bi$ sea imaginario es necesario que b sea distinto de cero.

e) El número $0 + 0i$ ni es complejo ni es real.

f) El número 5 no tiene conjugado.

g) Si un número complejo coincide con su conjugado, entonces es un número real.

h) Si un número complejo coincide con su opuesto, entonces es el cero.

i) Si el opuesto de un número complejo coincide con su conjugado, entonces es imaginario puro.

a) Falso. Los números reales son números complejos cuya parte imaginaria es cero.

b) Falso. Si $b = 0$ el número complejo también es un número real.

c) Falso. La parte real no influye. Es imaginario si su parte imaginaria no es nula.

d) Verdadero.

e) Falso. El número $0 + 0i$ es real pero no es imaginario porque su parte imaginaria es cero.

f) Falso. El conjugado de $5 = 5 + 0i$ es $5 = 5 - 0i$.

g) Verdadero. Si $a + bi = a - bi \to b = -b \to 2b = 0 \to b = 0$

Por tanto, su parte imaginaria es cero y es un número real.

h) Verdadero. Si $a + bi = -a - bi \to 2a + 2bi = 0 \to \begin{cases} 2a = 0 \to a = 0 \\ 2b = 0 \to b = 0 \end{cases}$

i) Verdadero (siempre que el número no sea cero).

Si $-a - bi = a - bi \to -a = a \to 2a = 0 \to a = 0$

2 **De los siguientes números complejos:**

$$3 + 2i, \; -\sqrt{3} + 5i, \; 2i, \; 7, \; 0$$

a) ¿Cuáles son números reales? Ponlos en forma binómica.

b) ¿Cuáles son imaginarios?

c) ¿Cuáles son imaginarios puros? Ponlos en forma binómica.

d) Escribe el opuesto de cada uno de ellos.

e) Escribe el conjugado de cada uno de ellos.

a) $7 = 7 + 0i$ y $0 = 0 + 0i$ son números reales.

b) Los números imaginarios son $3 + 2i$, $-\sqrt{3} + 5i$ y $2i$.

c) $2i = 0 + 2i$ es imaginario puro.

d) El opuesto de $z = 3 + 2i$ es $-z = -3 - 2i$.

El opuesto de $z = -\sqrt{3} + 5i$ es $-z = \sqrt{3} - 5i$.

El opuesto de $z = 2i$ es $-z = -2i$.

El opuesto de $z = 7$ es $-z = -7$.

El opuesto de $z = 0$ es $-z = 0$.

e) El conjugado de $z = 3 + 2i$ es $\overline{z} = 3 - 2i$.

El conjugado de $z = 2i$ es $\overline{z} = -2i$.

El conjugado de $z = 0$ es $\overline{z} = 0$.

El conjugado de $z = -\sqrt{3} + 5i$ es $\overline{z} = -\sqrt{3} - 5i$.

El conjugado de $z = 7$ es $\overline{z} = 7$.

Página 155

3 Representa gráficamente los siguientes números complejos y di cuáles son reales, cuáles son imaginarios y, de estos, cuáles son imaginarios puros:

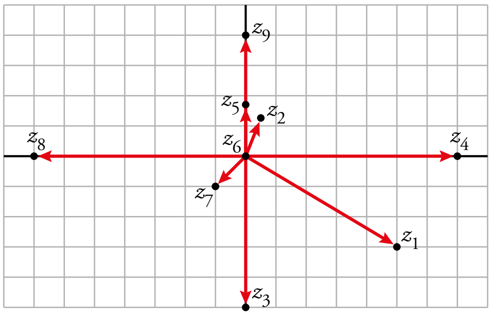
$$\mathbf{5 - 3i;\ \frac{1}{2} + \frac{5}{4}i;\ -5i;\ 7;\ \sqrt{3}i;\ 0;\ -1 - i;\ -7;\ 4i}$$

Si llamamos:

$z_1 = 5 - 3i$ $\qquad z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{4}i$ $\qquad z_3 = -5i$

$z_4 = 7$ $\qquad z_5 = \sqrt{3}\,i$ $\qquad z_6 = 0$

$z_7 = -1 - i$ $\qquad z_8 = -7$ $\qquad z_9 = 4i$



Son reales z_4, z_6 y z_8. El resto son imaginarios. Son imaginarios puros z_3, z_5 y z_9.

4 Resuelve las ecuaciones y representa las soluciones.

a) $\mathbf{z^2 + 4 = 0}$

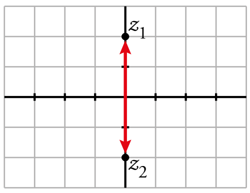
b) $\mathbf{z^2 + 6z + 10 = 0}$

c) $\mathbf{3z^2 + 27 = 0}$

d) $\mathbf{3z^2 - 27 = 0}$

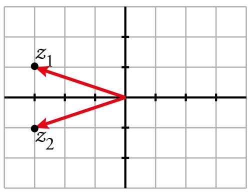
a) $z^2 + 4 = 0 \ \rightarrow\ z^2 = -4 \ \rightarrow\ z = \pm\sqrt{-4} \ \rightarrow\ z = \pm i$

Las soluciones son $z_1 = i$ y $z_2 = -i$.



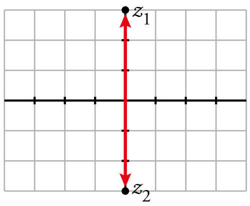
b) $z^2 + 6z + 10 = 0 \ \rightarrow\ z = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i$

Las soluciones son: $z_1 = -3 + i$ y $z_2 = -3 - i$.



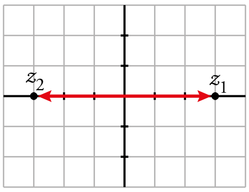
c) $3z^2 + 27 = 0 \ \rightarrow\ z^2 = -9 \ \rightarrow\ z = \pm\sqrt{-9} \ \rightarrow\ z = \pm 3i$

Las soluciones son $z_1 = 3i$ y $z_2 = -3i$.



d) $3z^2 - 27 = 0 \rightarrow z^2 = 9 \rightarrow z = \pm\sqrt{9} \rightarrow z = \pm 3$

Las soluciones son: $z_1 = 3$ y $z_2 = -3$.



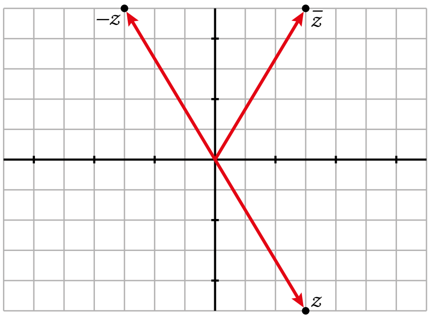
5 **Representa gráficamente cada número complejo, su opuesto y su conjugado.**

a) $\boldsymbol{3 - 5i}$ **b)** $\boldsymbol{5 + 2i}$ **c)** $\boldsymbol{-1 - 2i}$

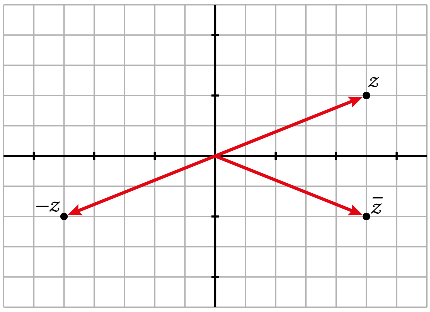
d) $\boldsymbol{-2 + 3i}$ **e)** $\boldsymbol{5}$ **f)** $\boldsymbol{0}$

g) $\boldsymbol{2i}$ **h)** $\boldsymbol{-5i}$ **i)** $\boldsymbol{-2}$

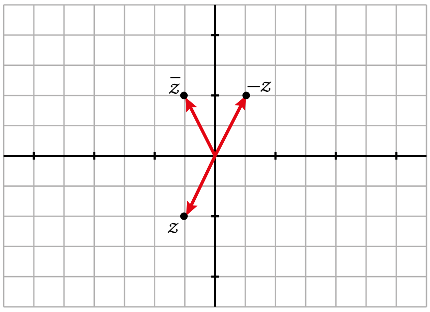
a) $z = 3 - 5i \rightarrow \begin{cases} -z = -3 + 5i \\ \overline{z} = 3 + 5i \end{cases}$



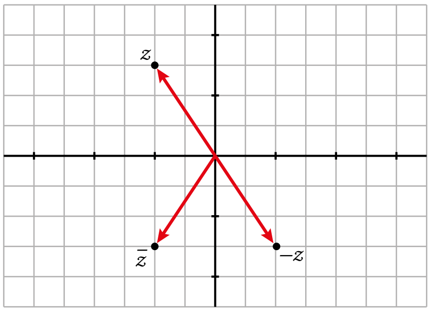
b) $z = 5 + 2i \rightarrow \begin{cases} -z = -5 - 2i \\ \overline{z} = 5 - 2i \end{cases}$



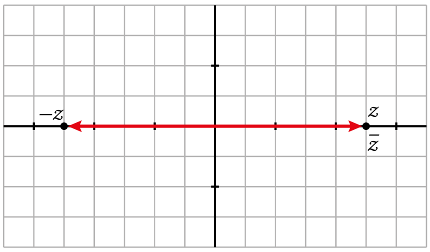
c) $z = -1 - 2i \rightarrow \begin{cases} -z = 1 + 2i \\ \overline{z} = -1 + 2i \end{cases}$



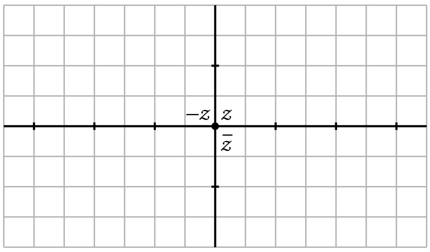
d) $z = -2 + 3i \rightarrow \begin{cases} -z = 2 - 3i \\ \overline{z} = -2 - 3i \end{cases}$



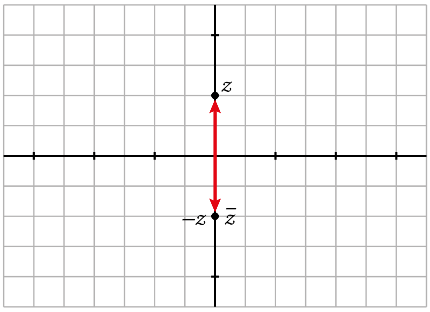
e) $z = 5 + 0i \rightarrow \begin{cases} -z = -5 + 0i \\ \overline{z} = 5 - 0i \end{cases}$



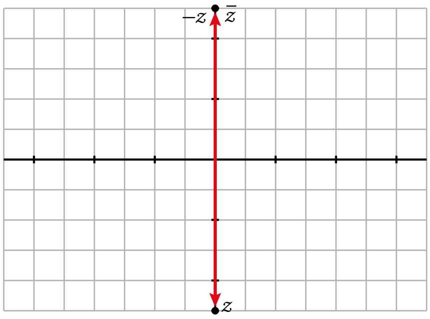
f) $z = 0 + 0i \rightarrow \begin{cases} -z = 0 + 0i \\ \overline{z} = 0 - 0i \end{cases}$



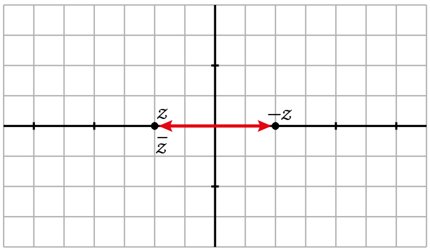
g) $z = 0 + 2i \to \begin{cases} -z = 0 - 2i \\ \overline{z} = 0 - 2i \end{cases}$



h) $z = 0 - 5i \to \begin{cases} -z = 0 + 5i \\ \overline{z} = 0 + 5i \end{cases}$



i) $z = -2 + 0i \to \begin{cases} -z = 2 - 0i \\ \overline{z} = -2 - 0i \end{cases}$



6 **[La búsqueda del método para solucionar la ecuación permite poner en práctica la asunción de riesgos de la dimensión productiva de esta clave].**

¿Cuántas soluciones tiene $z^3 + 2z^2 + 17z = 0$? Hállalas y represéntalas.

Sacamos z factor común y ya tenemos que $z = 0$ es una solución:

$$z(z^2 + 2z + 17) = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 17}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{4(1-17)}}{2} = -1 \pm \frac{2\sqrt{(-16)}}{2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{16}i}{2} = 1 \pm 4i$$

Por lo que sus dos soluciones imaginarias son conjugadas.

2 ▶ OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 2.2. (EA 2.2.1.-EA 2.2.2.)

Página 156

1 **¿Verdadero o falso?**

a) La suma de un número complejo y su opuesto es 0.

b) La suma de un número complejo y su conjugado es un número imaginario puro.

c) La suma de un número complejo y su conjugado es un número real.

d) El cuadrado de un número complejo cualquiera es un número real.

e) El cuadrado de un número imaginario puro es un número real.

f) El cociente de dos números imaginarios puros es un número real pues $\frac{ai}{a'i} = \frac{a}{a'}$.

a) Verdadero. En efecto, $(a + bi) + (-a - bi) = 0$.

b) Falso. Por ejemplo, $(5 + 3i) + (5 - 3i) = 10$.

c) Verdadero. Porque $(a + bi) + (a - bi) = 2a$ es un número real.

d) Falso. Por ejemplo, $(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$ no es un número real.

e) Verdadero. En efecto, $(bi)^2 = b^2i^2 = -b^2$ es un número real.

f) Verdadero. Podemos simplificar la fracción dividiendo numerador y denominador entre i.

Página 157

Hazlo tú

1 **Obtén un polinomio de segundo grado cuyas raíces sean $\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2}i$.**

$P(x) = (x - \sqrt{2}i)[x - (-\sqrt{2}i)] = (x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i) = x^2 - (\sqrt{2}i)^2 = x^2 - (-2) = x^2 + 2$

Piensa y practica

2 **Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:**

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i)$

b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i)$

c) $(3 + 2i)(4 - 2i)$

d) $(2 + 3i)(5 - 6i)$

e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i)$

f) $\frac{2 + 4i}{4 - 2i}$

g) $\frac{1 - 4i}{3 + i}$

h) $\frac{4 + 4i}{-3 + 5i}$

i) $\frac{5 + i}{-2 - i}$

j) $\frac{1 + 5i}{3 + 4i}$

k) $\frac{4 - 2i}{i}$

l) $6 - 3\left(5 + \frac{2}{5}i\right)$

m) $\frac{(-3i)^2(1 - 2i)}{2 + 2i}$

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i) = 6 - 5i + 2 - i + 10 - 12i = 18 - 18i$

b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i) = 2 - 3i - 5 - 4i + 3 - 2i = -9i$

c) $(3 + 2i)(4 - 2i) = 12 - 6i + 8i - 4i^2 = 12 + 2i + 4 = 16 + 2i$

d) $(2 + 3i)(5 - 6i) = 10 - 12i + 15i - 18i^2 = 10 + 3i + 18 = 28 + 3i$

e) $(-i + 1)\,(3 - 2i)\,(1 + 3i) = (-3i + 2i^2 + 3 - 2i)\,(1 + 3i) = (3 - 2 - 5i)\,(1 + 3i) =$

$= (1 - 5i)\,(1 + 3i) = 1 + 3i - 5i - 15i^2 = 1 + 15 - 2i = 16 - 2i$

f) $\dfrac{2+4i}{4-2i} = \dfrac{(2+4i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \dfrac{8+4i+16i+8i^2}{16-4i^2} = \dfrac{20i}{16+4} = \dfrac{20i}{20} = i$

g) $\dfrac{1-4i}{3+i} = \dfrac{(1-4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \dfrac{3-i-12i+4i^2}{9-i^2} = \dfrac{3-13i-4}{9+1} = \dfrac{-1-13i}{10} = \dfrac{-1}{10} - \dfrac{13}{10}i$

h) $\dfrac{4+4i}{-3+5i} = \dfrac{(4+4i)(-3-5i)}{(-3+5i)(-3-5i)} = \dfrac{-12-20i-12i-20i^2}{9-25i^2} = \dfrac{-12-32i+20}{9+25} =$

$= \dfrac{8-32i}{34} = \dfrac{8}{34} - \dfrac{32}{34}i = \dfrac{4}{17} - \dfrac{16}{17}i$

i) $\dfrac{5+i}{-2-i} = \dfrac{(5+i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \dfrac{-10+5i-2i+i^2}{4+1} = \dfrac{-10+3i-1}{5} = \dfrac{-11+3i}{5} = \dfrac{-11}{5} + \dfrac{3}{5}i$

j) $\dfrac{1+5i}{3+4i} = \dfrac{(1+5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{3-4i+15i-20i^2}{9-16i^2} = \dfrac{3+11i+20}{9+16} = \dfrac{23+11i}{25} = \dfrac{23}{25} + \dfrac{11}{25}i$

k) $\dfrac{4-2i}{i} = \dfrac{(4-2i)(-i)}{i(-i)} = \dfrac{-4i+2i^2}{1} = -4i - 2 = -2 - 4i$

l) $6 - 3\left(5 + \dfrac{2}{5}i\right) = 6 - 15 + \dfrac{6}{5}i = -9 + \dfrac{6}{5}i$

m) $\dfrac{(-3i)^2(1-2i)}{(2+2i)} = \dfrac{9i^2(1-2i)}{(2+2i)} = \dfrac{-9(1-2i)}{(2+2i)} = \dfrac{-9+18i}{(2+2i)} = \dfrac{(-9+18i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} =$

$= \dfrac{-18+18i+36i-36i^2}{4-4i^2} = \dfrac{-18+54i+36}{4+4} = \dfrac{18+54i}{8} = \dfrac{18}{8} + \dfrac{54}{8}i = \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{4}i$

3 **Halla las siguientes potencias:**

a) $\boldsymbol{(2 + 3i)^3}$ **b)** $\boldsymbol{(1 - 2i)^4}$

a) $(2+3i)^3 = \binom{3}{0}2^3 + \binom{3}{1}2^2\cdot 3i + \binom{3}{2}2\cdot(3i)^2 + \binom{3}{3}(3i)^3 =$

$= 8 + 3\cdot 4\cdot 3i + \dfrac{3\cdot 2}{2}\cdot 2\cdot(-9) + 27i(-1) = 8 + 36i - 54 - 27i = -46 + 9i$

b) $(1-2i)^4 = \binom{4}{0}1^4 + \binom{4}{1}1^3(-2i) + \binom{4}{2}1^2(-2i)^2 + \binom{4}{3}1\cdot(-2i)^3 + \binom{4}{4}(-2i)^4 =$

$= 1 + 4\cdot(-2i) + \dfrac{3\cdot 4}{2}\cdot(-4) + \dfrac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2}(-8)\,i^3 + 16 = 1 - 8i - 24 + 32i + 16 = -7 + 24i$

4 **Obtén polinomios cuyas raíces sean:**

a) $\boldsymbol{2 + \sqrt{3}\,i}$ **y** $\boldsymbol{2 - \sqrt{3}\,i}$

b) $\boldsymbol{-3i}$ **y** $\boldsymbol{3i}$

c) $\boldsymbol{1 + 2i}$ **y** $\boldsymbol{3 - 4i}$

(Observa que solo cuando las dos raíces son conjugadas, el polinomio tiene coeficientes reales).

a) $[x - (2 + \sqrt{3}i)]\,[x - (2 - \sqrt{3}i)] = [(x - 2) - \sqrt{3}i]\,[(x - 2) + \sqrt{3}i] = (x - 2)^2 - (\sqrt{3}i)^2 =$

$= x^2 - 4x + 4 - 3i^2 = x^2 - 4x + 4 + 3 = x^2 - 4x + 7$

b) $[x - (-3i)]\,[x - 3i] = [x + 3i]\,[x - 3i] = x^2 - 9i^2 = x^2 + 9$

c) $[x - (1 + 2i)]\,[x - (3 - 4i)] = [(x - 1) - 2i]\,[(x - 3) + 4i] =$

$= (x - 1)\,(x - 3) + 4(x - 1)i - 2(x - 3)i - 8i^2 =$

$= x^2 - 4x + 3 + (4x - 4 - 2x + 6)i + 8 = x^2 - 4x + 11 + (2x + 2)i =$

$= x^2 - 4x + 11 + 2ix + 2i = x^2 + (-4 + 2i)x + (11 + 2i)$

5 **Calcula x para que $(25 - xi)^2$ sea imaginario puro. (Ayuda: desarrolla $(25 - xi)^2$ e iguala a cero la componente real).**

$(25 - xi)^2 = 625 + x^2 i^2 - 50xi = (625 - x^2) - 50xi$

Para que sea imaginario puro:

$625 - x^2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 625 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{625} = \pm 25$

Hay dos soluciones: $x_1 = -25$, $x_2 = 25$

6 **[El conocimiento de las propiedades de los números complejos necesario para resolver la actividad permite trabajar la productividad (dimensión productiva de esta clave)].**

Calcula x para que $(2 + xi)^2$ sea imaginario puro.

Desarrollamos:

$$(2 + xi)^2 = 4 + x^2 i^2 + 4xi = 4 - x^2 + 4xi$$

Queremos que sea imaginario puro, es decir que no tenga parte real, por lo que se tiene que cumplir:

$$4 - x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{4} \;\rightarrow\; x = \pm 2$$

3 ▶ NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 2.2. (EA 2.2.1.)

Página 159

1 Parada de 5 minutos. **[La reflexión por parejas que plantea esta técnica puede ser una buena forma de que el alumnado coopere para decidir si las afirmaciones son verdaderas o falsas].**

¿Verdadero o falso?

a) Los módulos de dos números complejos opuestos son iguales pero con signos distintos.

b) Los módulos de dos complejos opuestos son iguales.

c) Los módulos de dos complejos conjugados son iguales.

d) Los argumentos de dos números complejos opuestos difieren en 180°.

e) Los argumentos de dos números complejos conjugados son opuestos $(\alpha \text{ y } -\alpha)$.

f) El argumento de cualquier número real es 0°.

g) El argumento de los números reales negativos es 180°.

h) El argumento de un imaginario puro es 90° o 270°.

a) Falso. El módulo de un número complejo no nulo siempre es un número positivo.

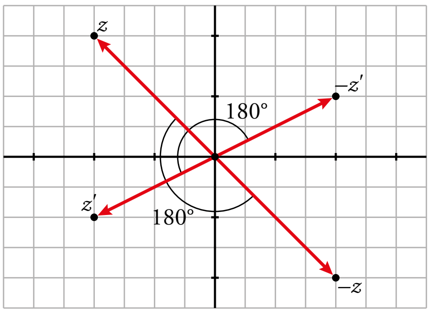
b) Verdadero.

Si $z = a + bi \to -z = -a - bi \to |-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

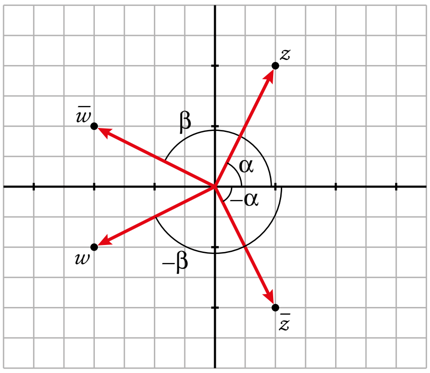
c) Verdadero.

Si $z = a + bi \to \overline{z} = a - bi \to |\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

d) Verdadero. Podemos verlo en el gráfico siguiente:



e) Verdadero. Podemos verlo en el gráfico siguiente:



f) Falso. Solo los números reales positivos tienen argumento 0°.

g) Verdadero, porque sus afijos están en el eje horizontal negativo que forma 180° con el eje horizontal positivo.

h) Verdadero, porque su afijo está en el eje vertical que forma 90° con el eje horizontal positivo, en el caso en que la parte imaginaria sea positiva, y 270° en el caso en que la parte imaginaria sea negativa.

2 **Escribe en forma polar los siguientes números complejos:**

a) $1+\sqrt{3}i$ **b)** $\sqrt{3}+i$ **c)** $-1+i$

d) $5-12i$ **e)** $3i$ **f)** -5

a) $1+\sqrt{3}i = 2_{60°}$ b) $\sqrt{3}+i = 2_{30°}$ c) $-1+i = \sqrt{2}_{135°}$

d) $5-12i = 13_{292°\,37'}$ e) $3i = 3_{90°}$ f) $-5 = 5_{180°}$

3 **Expresa en forma polar el opuesto y el conjugado de r_α.**

Opuesto: $-z = r_{180°+\alpha}$ Conjugado: $\bar{z} = r_{360°-\alpha}$

4 **Escribe en forma binómica estos números complejos:**

a) $5_{(\pi/6)\text{ rad}}$ **b)** $2_{135°}$ **c)** $2_{495°}$

d) $3_{240°}$ **e)** $5_{180°}$ **f)** $4_{90°}$

a) $5_{(\pi/6)} = 5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

b) $2_{135°} = 2(\cos 135° + i\,\text{sen}\,135°) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

c) $2_{495°} = 2_{135°} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

d) $3_{240°} = 3(\cos 240° + i\,\text{sen}\,240°) = 3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

e) $5_{180°} = -5$

f) $4_{90°} = 4i$

5 **Escribe en forma binómica y en forma polar el complejo:**

$\boldsymbol{z = 8(\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°)}$

$z = 8_{30°} = 8(\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{2} + \frac{8}{2}i = 4\sqrt{3} + 4i$

6 **Sean los números complejos $z_1 = 4_{60°}$ y $z_2 = 3_{210°}$.**

a) **Expresa z_1 y z_2 en forma binómica.**

b) **Halla $z_1 \cdot z_2$ y z_2/z_1, y exprésalos en forma polar.**

c) **Compara los módulos de $z_1 \cdot z_2$ y de z_2/z_1 con los de z_1 y z_2 e intenta encontrar relaciones entre ellos.**

a) $z_1 = 4_{60°} = 4(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$

$z_2 = 3_{210°} = 3(\cos 210° + i\,\text{sen}\,210°) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

b) $z_1 \cdot z_2 = (2+2\sqrt{3}i)\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) = -3\sqrt{3} - 3i - 9i - 3\sqrt{3}i^2 = -3\sqrt{3} - 12i + 3\sqrt{3} = -12i = 12_{270°}$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)}{(2+2\sqrt{3}i)} = \frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)(2-2\sqrt{3}i)}{(2+2\sqrt{3}i)(2-2\sqrt{3}i)} = \frac{-3\sqrt{3} - 3i + 9i + 3\sqrt{3}i^2}{4-12i^2} =$$

$$= \frac{-3\sqrt{3} + 6i - 3\sqrt{3}}{4+12} = \frac{-6\sqrt{3} + 6i}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150°}$$

c) $z_1 \cdot z_2 = 4_{60°} \cdot 3_{210°} = (4 \cdot 3)_{60° + 210°} = 12_{270°}$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3_{210°}}{4_{60°}} = \left(\frac{3}{4}\right)_{210° - 60°} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150°}$$

7 **Realiza el ejercicio 3 de la página 157 pasando primero a forma polar. Convierte la solución a forma binómica y comprueba que obtienes los mismos resultados.**

a) En el ejercicio 3a) de la página 157 hemos visto que $(2+3i)^3 = -46+9i$.

Pasamos a forma polar, veamos que $2+3i = \sqrt{13}_{56^\circ 19'}$

Empezamos buscando el módulo: $r = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Busquemos su argumento: $tg\,\alpha = \frac{3}{2} \rightarrow \alpha = 56,31^\circ = 56^\circ 19'$

Calculamos ahora $(2+3i)^3 = (\sqrt{13}_{56^\circ 19'})^3$, que tendrá módulo igual a $13\sqrt{13}$ y argumento $56^\circ 19' \cdot 3 = 169^\circ 10'$.

Por lo tanto: $(2+3i)^3 = (13\sqrt{13})_{169^\circ 10'}$

Pasemos ahora la solución a binómica para ver que obtenemos el mismo resultado.

$$a = 13\sqrt{13}\,cos(169^\circ 10') = -46$$

$$b = 13\sqrt{13}\,sen(169^\circ 10') = 9$$

b) En la actividad 3b) de la página 157 hemos visto que $(1-2i)^4 = -7+24i$.

Pasamos a forma polar. Veamos que $1-2i = \sqrt{5}_{-63^\circ 26'}$.

$r = \sqrt{1+5} = \sqrt{5}$

$tg\,\alpha = -2 \rightarrow \alpha = -63^\circ 26'$

Calculamos ahora $(1-2i)^4 = (\sqrt{5}_{-63^\circ 26'})^4$ que tendrá módulo 25 y su argumento será:

$-63^\circ 26' \cdot 4 = -253^\circ 44' = -253{,}74^\circ + 360^\circ = 106^\circ 16'$

Por lo tanto: $(1-2i)^4 = 25_{106^\circ 16'}$

Pasemos ahora la solución a binómica para ver que obtenemos el mismo resultado.

$$a = 25\,cos(106^\circ 26') = -7$$

$$b = 25\,sen(106^\circ 16') = 24$$

4 ▶ OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA POLAR

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) **CE 2.2.** (EA 2.2.1.-EA 2.2.2.)

Página 160

1 ¿Verdadero o falso?

a) Al multiplicar un número complejo z por la unidad imaginaria i, se gira 90° alrededor del origen.

b) Al dividir z por i, se gira 90° alrededor del origen en el sentido de las agujas del reloj.

c) El módulo de $r_\alpha \cdot r'_\beta$ puede ser menor que r.

d) $(r_{45°})^4$ es un número real negativo.

e) $r_{30°}$ y $r_{330°}$ son conjugados.

f) $r_{30°}$ y $r_{210°}$ son opuestos.

a) Verdadero, porque $i = 1_{90°}$. Al multiplicar por i mantenemos el módulo del número complejo y sumamos un ángulo de 90° a su argumento, es decir, lo giramos 90° en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

b) Verdadero, porque $i = 1_{90°}$. Al dividir por i mantenemos el módulo del número complejo y restamos un ángulo de 90° a su argumento, es decir, lo giramos 90° en el sentido de las agujas del reloj.

c) Verdadero. Si $r' < 1$ el módulo del producto, que es $r \cdot r'$, es menor que r.

d) Verdadero. $(r_{45°})^4 = (r^4)_{4 \cdot 45°} = (r^4)_{180°}$ que está en la parte negativa del eje real.

e) Verdadero. 330° = –30°. Por tanto, son números complejos conjugados.

f) Verdadero. Los ángulos 210° y 30° se diferencian en 180°. Por tanto, son números complejos opuestos.

Página 161

Hazlo tú

1 Halla z_1/z_2; z_1^6; z_2^3.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4_{60°}}{3_{210°}} = \left(\frac{4}{3}\right)_{60° - 210°} = \left(\frac{4}{3}\right)_{-150°} = \left(\frac{4}{3}\right)_{210°}$$

$$z_1^6 = (4_{60°})^6 = (4^6)_{6 \cdot 60°} = 4\,096_{360°} = 4\,096_{0°}$$

$$z_2^3 = (3_{210°})^3 = (3^3)_{3 \cdot 210°} = 27_{630°} = 27_{270°}$$

Piensa y practica

2 Efectúa estas operaciones y da el resultado en forma polar y en forma binómica:

a) $1_{150°} \cdot 5_{30°}$ **b) $6_{45°} : 3_{15°}$**

c) $2_{10°} \cdot 1_{40°} \cdot 3_{70°}$ **d) $5_{(2\pi/3)\ rad} : 1_{60°}$**

e) $(1 - \sqrt{3}i)^5$ **f) $(3 + 2i) + (-3 + 2i)$**

a) $1_{150°} \cdot 5_{30°} = 5_{180°} = -5$

b) $6_{45°} : 3_{15°} = 2_{30°} = 2\,(cos\ 30° + i\ sen\ 30°) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

c) $2_{10°} \cdot 1_{40°} \cdot 3_{70°} = 6_{120°} = 6\,(cos\ 120° + i\ sen\ 120°) = 6\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 + 3\sqrt{3}\,i$

d) $5_{(2\pi/3)\ rad} : 1_{60°} = 5_{120°} : 1_{60°} = 5_{60°} = 5\,(cos\ 60° + i\ sen\ 60°) = 5\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

e) $(1 - \sqrt{3}\,i)^5 = (2_{300°})^5 = 32_{1\,500°} = 32_{60°} = 32\,(cos\ 60° + i\ sen\ 60°) = 32\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 + 16\sqrt{3}\,i$

f) $4i = 4_{90°}$

3 Compara los resultados en cada caso.

a) $(2_{30°})^3$, $(2_{150°})^3$, $(2_{270°})^3$

b) $(2_{60°})^4$, $(2_{150°})^4$, $(2_{240°})^4$, $(2_{330°})^4$

a) $(2_{30°})^3 = 2^3_{3\cdot 30°} = 8_{90°}$

$(2_{150°})^3 = 2^3_{3\cdot 150°} = 8_{450°} = 8_{90°}$

$(2_{270°})^3 = 8_{3\cdot 270°} = 8_{810°} = 8_{90°}$

b) $(2_{60°})^4 = 2^4_{4\cdot 60°} = 16_{240°}$

$(2_{150°})^4 = 16_{600°} = 16_{240°}$

$(2_{240°})^4 = 16_{960°} = 16_{240°}$

$(2_{330°})^4 = 16_{1320°} = 16_{240°}$

4 Dados los complejos $z = 5_{45°}$, $w = 2_{15°}$, $t = 4i$, obtén en forma polar:

a) $z \cdot t$

b) $\dfrac{z}{w^2}$

c) $\dfrac{z^3}{w \cdot t^2}$

d) $\dfrac{z \cdot w^3}{t}$

$z = 5_{45°}$ $\quad w = 2_{15°}$ $\quad t = 4i = 4_{90°}$

a) $z \cdot w = 10_{60°}$

b) $\dfrac{z}{w^2} = \dfrac{z}{4_{30°}} = \dfrac{5_{45°}}{4_{30°}} = \left(\dfrac{5}{4}\right)_{15°}$

c) $\dfrac{z^3}{w \cdot t^2} = \dfrac{125_{135°}}{2_{15°} \cdot 16_{180°}} = \left(\dfrac{125}{32}\right)_{-60°} = \left(\dfrac{125}{32}\right)_{300°}$

d) $\dfrac{z \cdot w^3}{t} = \dfrac{5_{45°} \cdot 8_{45°}}{4_{90°}} = 10_{0°} = 10$

5 Expresa $cos\ 3\alpha$ y $sen\ 3\alpha$ en función de $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$ utilizando la fórmula de Moivre. Ten en cuenta que:

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(1_\alpha)^3 = 1\,(cos\ \alpha + i\ sen\ \alpha)^3 = cos^3\ \alpha + i\ 3\ cos^2\ \alpha\ sen\ \alpha + 3\ i^2\ cos\ \alpha\ sen^2\ \alpha + i^3\ sen^3\ \alpha =$

$= cos^3\ \alpha + 3\ cos^2\ \alpha\ sen\ \alpha\ i - 3\ cos\ \alpha\ sen^2\ \alpha - i\ sen^3\ \alpha =$

$= (cos^3\ \alpha - 3\ cos\ \alpha\ sen^2\ \alpha) + (3\ cos^2\ \alpha\ sen\ \alpha - sen^3\ \alpha)\ i$

Por otra parte: $(1_\alpha)^3 = 1_{3\alpha} = cos\ 3\alpha + i\ sen\ 3\alpha$

Por tanto: $cos\ 3\alpha = cos^3\ \alpha - 3\ cos\ \alpha\ sen^2\ \alpha$

$sen\ 3\alpha = 3\ cos^2\ \alpha\ sen\ \alpha - sen^3\ \alpha$

5 ▶ RADICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) **CE 2.2.** (EA 2.2.1.-EA 2.2.2.)

Página 163

1 ¿Verdadero o falso?

a) Los números reales negativos no tienen raíces cuadradas en el campo complejo.

b) El real –9 tiene dos raíces imaginarias puras, $3i$ y $-3i$.

c) El número 16 tiene dos raíces cuartas reales, 2 y –2, y otras dos imaginarias puras, $2i$ y $-2i$.

d) Ninguna de las cuatro raíces cuartas de –16 es un número real.

e) El número –8 tiene una raíz cúbica real, el –2. Las otras dos raíces cúbicas son números imaginarios conjugados.

f) $2_{84°}$ es una raíz quinta de $32_{60°}$.

a) Falso. Las raíces cuadradas de los números reales negativos son números complejos imaginarios puros.

b) Verdadero. Porque $(3i)^2 = 3^2 i^2 = -9$ y $(-3i)^2 = (-3)^2 i^2 = -9$.

c) Verdadero. Porque $2^4 = 16$, $(-2)^4 = 16$, $(2i)^4 = 2^4 i^4 = 16$ y $(-2i)^4 = (-2)^4 i^4 = 16$.

d) Verdadero. La potencia cuarta de un número real no nulo siempre es un número positivo y no puede dar nunca –16.

e) Verdadero. Las raíces están en los vértices de un triángulo equilátero y son $2_{60°}$, $-2 = 2_{180°}$ y $2_{300°}$.

Como los ángulos 300° y 60° son opuestos porque 300° = 360° – 60°, los correspondientes números son conjugados.

f) Verdadero: $(2_{84°})^5 = (2^5)_{5 \cdot 84°} = 32_{420°} = 32_{60°}$

2 Halla las seis raíces sextas de 1. Represéntalas y exprésalas en forma binómica.

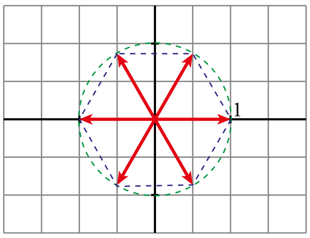
$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1_{0°}} = 1_{(360° \cdot k)/6} = 1_{60° \cdot k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$1_{0°} = 1$ $\quad 1_{60°} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ $\quad 1_{120°} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$1_{180°} = -1$ $\quad 1_{240°} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ $\quad 1_{300°} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Representación



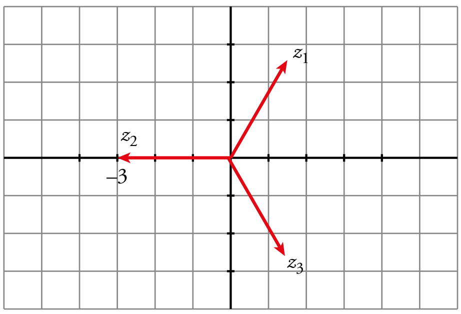
3 Resuelve $z^3 + 27 = 0$. Representa sus soluciones.

$z^3 + 27 = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180°}} = 3_{(180° + 360° n)/3} = 3_{60° + 120° n}$; $n = 0, 1, 2$

$z_1 = 3_{60°} = 3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i$

$z_2 = 3_{180°} = -3$

$z_3 = 3_{300°} = 3(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°) = 3\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$



4 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\boldsymbol{z^4 + 81 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{z^6 + 64 = 0}$

a) $z^4+81=0 \to z=\sqrt[4]{-81}=\sqrt[4]{81_{180°}}=3_{(180°+360°k)/4}=3_{45°+90°k};\ k=0,1,2,3$

Las cuatro raíces son:

$$3_{45°}=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i;\ 3_{135°}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i;\ 3_{225°}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i;\ 3_{315°}=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

b) $z^6+64=0 \to z=\sqrt[6]{-64}=\sqrt[6]{64_{180°}}=2_{(180°+360°k)/6}=2_{30°+60°k};\ k=0,1,2,3,4,5$

Las seis raíces son:

$$2_{30°}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}+i \qquad 2_{90°}=2i$$

$$2_{150°}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}+i \qquad 2_{210°}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}-i$$

$$2_{270°}=-2i \qquad 2_{330°}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}-i$$

5 **Calcula.**

a) $\boldsymbol{\sqrt[3]{-i}}$ **b)** $\boldsymbol{\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}}$ **c)** $\boldsymbol{\sqrt{-25}}$ **d)** $\boldsymbol{\sqrt[3]{\dfrac{-2+2i}{1+\sqrt{3}i}}}$

a) $\sqrt[3]{-i}=\sqrt[3]{1_{270°}}=1_{(270°+360°k)/3};\ k=0,1,2$

Las tres raíces son:

$$1_{90°}=i \qquad 1_{210°}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \qquad 1_{330°}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

b) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}=\sqrt[4]{16_{120°}}=2_{(120°+360°k)/4}=2_{30°+90°k};\ k=0,1,2,3$

Las cuatro raíces son:

$$2_{30°}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}+i \qquad 2_{120°}=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+\sqrt{3}i$$

$$2_{210°}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-1-\sqrt{3}i \qquad 2_{300°}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-\sqrt{3}\cdot i$$

c) $\sqrt{-25}=\sqrt{25_{180°}}=5_{(180°+360°k)/2}=5_{90°+180°k};\ k=0,1$

Las dos raíces son: $5_{90°}=5i;\ 5_{270°}=-5i$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{-2+2i}{1+\sqrt{3}i}}=\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{8}_{135°}}{2_{60°}}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}_{75°}}=\sqrt[6]{2}_{(75°+360°k)/3}=\sqrt[6]{2}_{25°+120°k};\ k=0,1,2$

Las tres raíces son: $\sqrt[6]{2}_{25°};\ \sqrt[6]{2}_{145°};\ \sqrt[6]{2}_{265°}$

6 **Comprueba que si** $\boldsymbol{z}$ **y** $\boldsymbol{w}$ **son dos raíces sextas de 1, entonces también lo son los resultados de las siguientes operaciones:**

$$z\cdot w,\ \frac{z}{w},\ z^2,\ z^3$$

z y w raíces sextas de 1 $\to z^6=1,\ w^6=1$

$(z\cdot w)^6=z^6\cdot w^6=1\cdot 1=1 \to z\cdot w$ es raíz sexta de 1.

$\left(\dfrac{z}{w}\right)^6=\dfrac{z^6}{w^6}=\dfrac{1}{1}=1 \to \dfrac{z}{w}$ es raíz sexta de 1.

$(z^2)^6=z^{12}=(z^4)^3=1^3=1 \to z^2$ es raíz sexta de 1.

$(z^3)^6=z^{18}=z^{16}\cdot z^2=(z^4)^4\cdot z^2=1^4\cdot 1^2=1\cdot 1=1 \to z^3$ es raíz sexta de 1.

7 **El número $4 + 3i$ es la raíz cuarta de un cierto número complejo, z. Halla las otras tres raíces cuartas de z.**

$4 + 3i = 5_{36°\,52'}$

Las otras tres raíces cuartas de z serán:

$5_{36°\,52' + 90°} = 5_{126°\,52'} = -3 + 4i$

$5_{36°\,52' + 180°} = 5_{216°\,52'} = -4 - 3i$

$5_{36°\,52' + 270°} = 5_{306°\,52'} = 3 - 4i$

8 **Calcula las siguientes raíces y representa gráficamente sus soluciones:**

a) $\sqrt{-121}$ **b)** $\sqrt[3]{-125}$ **c)** $\sqrt[3]{2-2i}$

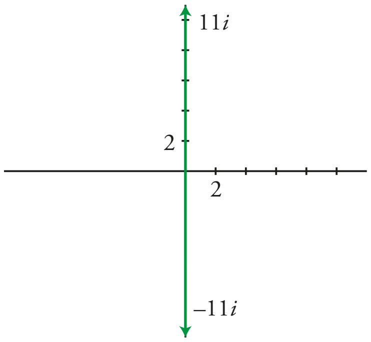
d) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i}}$ **e)** $\sqrt[5]{\dfrac{-32}{i}}$ **f)** $\sqrt[3]{64i}$

a) $\sqrt{-121} = \sqrt{121_{180°}} = \sqrt{121}_{\frac{180°}{2}} = 11_{90° + 180°k}$ para $k = 0, 1$

Sus argumentos son $90°$ y $270°$ por lo que sus dos raíces serán:

$z_1 = 11_{90°} = 11i$

$z_2 = 11_{270°} = -11i$



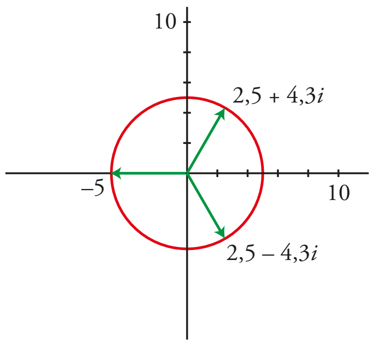
b) $\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{125_{180°}} = \sqrt[3]{125}_{\frac{180°}{3}} = 5_{60° + 120°k}$ para $k = 0, 1, 2$

Sus tres raíces son

$z_1 = 5_{60°} = 2,5 + 4,3i$

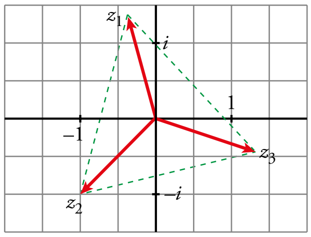
$z_2 = 5_{180°} = -5$

$z_3 = 5_{300°} = 2,5 - 4,3i$



c) $\sqrt[3]{2-2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{315°}} = \sqrt{2}_{(315° + 360°\,k)/3} = \sqrt{2}_{105° + 120°\,k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:



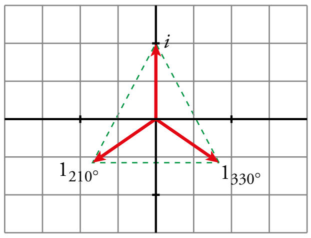
$z_1 = \sqrt{2}_{105°} = -0,37 + 1,37i$

$z_2 = \sqrt{2}_{225°} = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 - i$

$z_3 = \sqrt{2}_{345°} = 1,37 - 0,37i$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i}} = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}_{315°}}{\sqrt{2}_{45°}}} = \sqrt[3]{1_{270°}} = 1_{(270° + 360°\,k)/3} = 1_{90° + 120°\,k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:



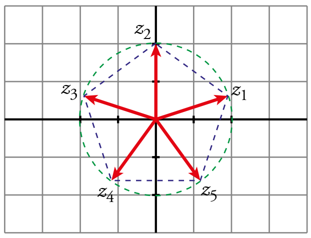
$1_{90°} = i$

$1_{210°} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

$1_{330°} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

e) $\sqrt[5]{-\dfrac{32}{i}} = \sqrt[5]{-\dfrac{32\,(-i)}{i\,(-i)}} = \sqrt[5]{32i} = \sqrt[5]{32_{90°}} = 2_{(90° + 360°\,k)/5} = 2_{18° + 72°\,k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son:



$z_1 = 2_{18°} = 1,9 + 0,6i$

$z_2 = 2_{90°} = 2i$

$z_3 = 2_{162°} = -1,9 + 0,6i$

$z_4 = 2_{234°} = -1,2 - 1,6i$

$z_5 = 2_{306°} = 1,2 - 1,6i$

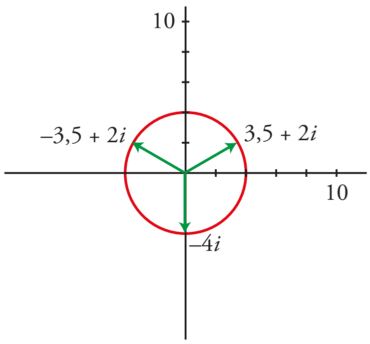
f) $\sqrt[3]{64i} = \sqrt[3]{64_{90°}} = 4_{\frac{90°}{3}} = 4_{30° + 120° k}$ para $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$z_1 = 4_{30°} = 3,5 + 2i$

$z_2 = 4_{150°} = -3,5 + 2i$

$z_3 = 4_{270°} = -4i$



6 ▶ NÚMEROS COMPLEJOS CON LA CALCULADORA

C.E.: CE 2.2. (EA 2.2.1.-EA 2.2.2.)

Página 164

1 Comprueba con la calculadora los resultados de los ejercicios 2, 3 y 4 de la página 161.

Ejercicio 2 de la página161.

a) Se configura la calculadora en formato complejos: MENU → **2:Complejos**

Como los números están en forma polar: SHIFT MENU ⊚ → **2:Complejos** y se escoge la forma polar.

Para introducir los números, por ejemplo, $1_{150°}$, hay que pulsar:

1 SHIFT ENG 15

Para pasar el resultado del producto, en este caso $5_{180°}$, a forma polar:

OPTN ⊚ 2 =

Y se obtiene el resultado, –5.

b) Se resuelve de forma análoga al apartado a).

c) Se resuelve de forma análoga al apartado a).

d) Se resuelve de forma análoga al apartado a) teniendo en cuenta que $2\pi/3 = 120°$.

e) En este caso, el número está dado en forma binomial, así que hay que configurar la calculadora en este modo: SHIFT MENU ⊚ → **2:Complejos** y se escoge esta forma.

La operación se introduce de esta forma:

(1 − √■ 3 ⊚ ENG) x■ 5 =

Para pasar el resultado, en este caso, $16 + 27{,}713i$, a forma polar:

OPTN ⊚ 1 =

Y se obtiene el resultado, $32_{60°}$.

f) Se resuelve de forma análoga al apartado e).

El ejercicio 3 de la página 161 se resuelve de forma análoga al ejercicio 1a) anterior.

El ejercicio 4 de la página 161 se resuelve de forma análoga al ejercicio 1a) anterior, teniendo en cuenta que previamente hay que hallar $t = 4i$ en forma polar.

2 a) Halla las raíces cúbicas de 1 y las de –1 con la calculadora resolviendo las ecuaciones $x^3 - 1 = 0$ y $x^3 + 1 = 0$.

b) Halla las raíces cuartas de 16 y de –16.

Para resolver este ejercicio hay que utilizar la configuración descrita en el recuadro «Cálculo de soluciones (complejas de una solución con la calculadora)».

a) Las raíces cúbicas de 1 son: $x_1 = 1;\ x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2};\ x_3 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

Las raíces cúbicas de –1 son: $x_1 = -1;\ x_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2};\ x_3 = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

b) Para hallar las raíces cuartas de 16 hay que resolver la ecuación $x^4 - 16 = 0$:

$x_1 = 2;\ x_2 = -2;\ x_3 = 2i;\ x_4 = -2i$

Para hallar las raíces cuartas de 16 hay que resolver la ecuación $x^4 + 16 = 0$:

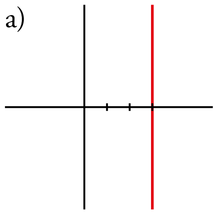
$x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i;\ x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i;\ x_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i;\ x_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

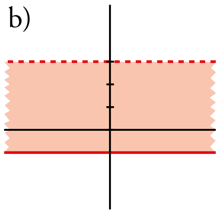
7 ▶ DESCRIPCIONES GRÁFICAS CON NÚMEROS COMPLEJOS

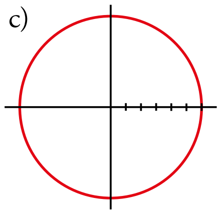
C.E.: CE 2.2. (EA 2.2.1.-EA 2.2.2.)

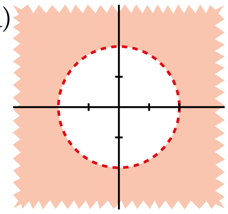
Página 165

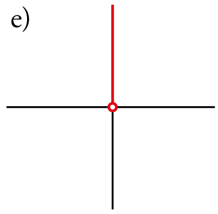
1 **Describe con palabras cada una de las familias («son los números complejos cuya parte real vale…»), escribe su ecuación o inecuación (usando *Re*, *Im*, | |, *Arg*) y da un representante de cada una de ellas.**

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

a) $Re\, z = 3$

b) $-1 \le Im\, z < 3$

c) $|z| = 6$

d) $|z| > 2$

e) $Arg\, z = 90°$

2 **Representa:**

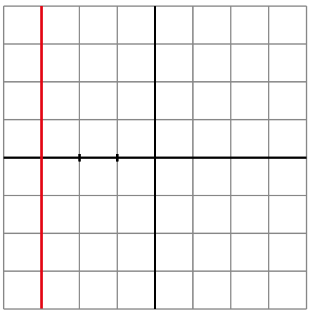
a) $Re\,(z) = -3$

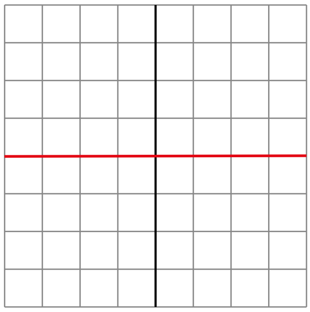
b) $Im\,(z) = 0$

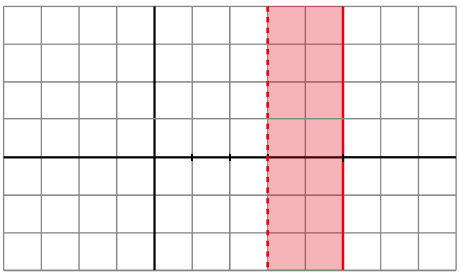
c) $3 < Re\,(z) \le 5$

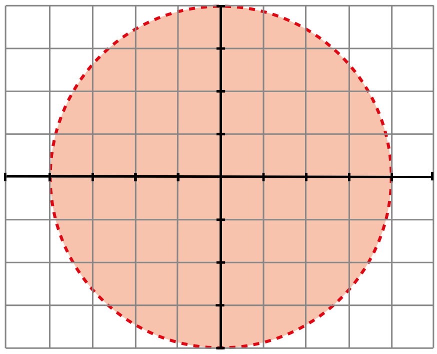
d) $|z| < 4$

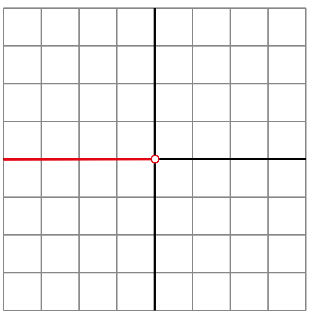
e) $Arg\,(z) = 180°$

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 2.2. (EA 2.2.1.-EA 2.2.2.)

Página 166

1. Operaciones con números complejos en forma binómica

Hazlo tú

- **Calcula el valor de a y b para que se verifique $a - 3i = \frac{1+bi}{5-3i}$.**

Calculamos el segundo miembro de la igualdad.

$$\frac{1+bi}{5-3i} = \frac{(1+bi)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)} = \frac{5+3i+5bi+3bi^2}{25+9} = \frac{5-3b+(3+5b)i}{34}$$

Igualamos las partes real e imaginaria.

$$\begin{cases} a = \dfrac{5-3b}{34} \\ -3 = \dfrac{3+5b}{34} \to -102 = 3+5b \to b = -21 \end{cases}$$

$$a = \frac{5-3b}{34} \to a = \frac{5-3(-21)}{34} \to a = 2$$

2. Números complejos conjugados

Hazlo tú

- **El producto de dos números complejos conjugados es $48_{0°}$ y el argumento de su cociente es 60°. Hállalos.**

Llamemos r_α y $r_{-\alpha}$ a los dos números complejos conjugados que buscamos.

$$r_\alpha \cdot r_{-\alpha} = 48_{0°} \to \begin{cases} r^2 = 48° \\ \alpha - \alpha = 0° \end{cases} \to r = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$r_\alpha / r_{-\alpha} = 1_{2\alpha} \to 2\alpha = 60° \to \alpha = 30°$$

Por tanto, los números son:

$$z_1 = (4\sqrt{3})_{30°}$$

$$z_2 = (4\sqrt{3})_{-30°} = (4\sqrt{3})_{330°}$$

3. Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo y los números complejos

Hazlo tú

- **Halla *sen* 15° y *cos* 15° a partir del cociente $1_{45°} : 1_{30°}$.**

$1_{45°} : 1_{30°} = 1_{15°} = 1\,(cos\,15° + i\,sen\,15°) = cos\,15° + i\,sen\,15°$

$$\left.\begin{array}{l} 1_{45°} = 1\,(cos\,45° + i\,sen\,45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ 1_{30°} = 1\,(cos\,30° + i\,sen\,30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \end{array}\right\} \to$$

$$\to \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i+\sqrt{6}i+\sqrt{2}}{3+1} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i}{4}$$

Por tanto:

$$cos\,15° + i\,sen\,15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i \rightarrow \begin{cases} cos\,15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ sen\,15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Página 167

4. Operaciones con números complejos en forma polar

Hazlo tú

- **Calcula y representa las soluciones de $\sqrt[4]{(-2+2\sqrt{3}i)^3}$.**

Pasamos $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ a forma polar teniendo en cuenta que se encuentra en el segundo cuadrante.

$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

$tg\,\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = 120°$

Ahora calculamos $z^3 = (4_{120°})^3 = (4^3)_{3\,.\,120°} = 64_{360°} = 64_{0°}$

Las raíces cuartas buscadas son:

$\sqrt[4]{64_{0°}} = \sqrt[4]{64}_{\frac{0 \cdot 360k}{4}};\ k = 0, 1, 2, 3$

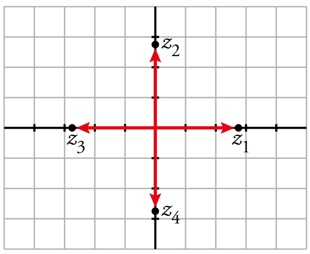
Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2\sqrt{2}_{0°} = 2\sqrt{2}\,(cos\,0° + i\,sen\,0°) = 2\sqrt{2}$

Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2\sqrt{2}_{90°} = 2\sqrt{2}\,(cos\,90° + i\,sen\,90°) = 2\sqrt{2}\,i$

Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2\sqrt{2}_{180°} = 2\sqrt{2}\,(cos\,180° + i\,sen\,180°) = -2\sqrt{2}$

Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2\sqrt{2}_{270°} = 2\sqrt{2}\,(cos\,270° + i\,sen\,270°) = -2\sqrt{2}\,i$

La representación gráfica de las raíces es:



5. Resolución de ecuaciones en ℂ

Hazlo tú

- **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $z^4 + 1 = 0$

b) $iz + 3i - 2 = 1 + i$

a) $z^4 + 1 = 0 \rightarrow z^4 = -1 \rightarrow z = \sqrt[4]{-1}$

$-1 = 1_{180°}$. Por tanto, $z = \sqrt[4]{1_{180°}} = 1_{(180+360k)/4};\ k = 0, 1, 2, 3$

Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 1_{45°} = 1\,(cos\,45° + i\,sen\,45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 1_{135°} = 1\,(cos\,135° + i\,sen\,135°) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 1_{225°} = 1\,(cos\,225° + i\,sen\,225°) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 1_{315°} = 1\,(cos\,315° + i\,sen\,315°) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

b) $iz + 3i - 2 = 1 + i \rightarrow iz = 1 + i - 3i + 2 \rightarrow iz = 3 - 2i \rightarrow z = \frac{3-2i}{i} = \frac{(3-2i)\,i}{i \cdot i} = -2 - 3i$

6. Cálculo del valor de un parámetro real en una igualdad entre complejos

Hazlo tú

- **Halla el valor de *x*:**

$\sqrt{x} = \sqrt{3 + \sqrt{7}i} + \sqrt{3 - \sqrt{7}i}$

Elevamos al cuadrado los dos miembros y operamos:

$x = 3 + \sqrt{7}i + 3 - \sqrt{7}i + 2\sqrt{9 - 7i^2} = 6 + 8 = 14$

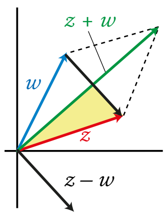
Página 168

7. Ley del paralelogramo

Hazlo tú

- **Si los vectores tuvieran el mismo módulo, formarían un rombo y sus diagonales serían perpendiculares. Interpreta gráficamente la situación para encontrar otra demostración del teorema de Pitágoras.**

Como dice el enunciado tenemos un rombo de diagonales perpendiculares, cuyos 4 lados tendrán igual módulo z. Consideremos el triángulo rectángulo coloreado, cuya hipotenusa será z, y sus catetos $\frac{z+w}{2}$ y $\frac{z-w}{2}$.



Sustituimos los datos que tenemos en nuestro caso concreto para ver que se cumple el teorema de Pitágoras:

$$2\left(|z|^2 + |w|^2\right) = |z+w|^2 + |z-w|^2 \rightarrow 2\left(|z|^2 + |z|^2\right) = |z+w|^2 + |z-w|^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4|z|^2 = |z+w|^2 + |z-w|^2 \rightarrow |z|^2 = \frac{|z+w|^2 + |z-w|^2}{4} = \frac{|z+w|^2}{4} + \frac{|z-w|^2}{4} = \left|\frac{z+w}{2}\right|^2 + \left|\frac{z-w}{2}\right|^2$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 169

1. Números reales y números imaginarios

- **Hallar el valor que debe tener x para que el cociente $\frac{1+3xi}{3-4i}$ sea:**

a) Un número real.

b) Un número imaginario puro.

$$\frac{1+3xi}{3-4i} = \frac{(1+3xi)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i+9xi+12\,xi^2}{9+16} = \frac{3-12x+(4+9x)\,i}{25}$$

a) Para que sea real, la parte imaginaria debe ser 0.

$4+9x=0 \;\rightarrow\; x=-\frac{9}{4}$

b) Para que sea imaginario puro, la parte real debe ser 0.

$3-12x=0 \;\rightarrow\; x=\frac{1}{4}$

2. Números complejos que cumplen ciertas condiciones

- **Hallar un número complejo que tenga el mismo módulo que $4\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ y cuyo afijo esté en la bisectriz del primer o tercer cuadrante.**

El número buscado debe ser de la forma $a+ai$ para que esté en la bisectriz del primer o tercer cuadrante.

$$|a+ai| = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2}$$

$$|4\sqrt{2}+3\sqrt{2}i| = \sqrt{(4\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}$$

Luego:

$$\sqrt{2a^2} = 5\sqrt{2} \;\rightarrow\; 2a^2 = 50 \;\rightarrow\; a^2 = 25 \;\rightarrow\; \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_2 = -5 \end{cases}$$

Por tanto, los números complejos buscados son $z_1 = 5+5i$ y $z_2 = -5-5i$.

3. Suma de números complejos expresados en forma polar

- **Calcular:**

$$\mathbf{2_{\frac{\pi}{6}} - \sqrt{3}_{\pi} + 3_{\frac{3\pi}{2}}}$$

$$2_{\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}+i$$

$$\sqrt{3}_{\pi} = \sqrt{3}\,(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi) = -\sqrt{3}$$

Por tanto:

$$2_{\frac{\pi}{6}} - \sqrt{3}_{\pi} + 3_{\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{3}+i-(-\sqrt{3})+(-3i) = 2\sqrt{3}-2i \quad \text{(que está en el cuarto cuadrante)}$$

$$|2\sqrt{3}-2i| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = 4$$

$$tg\,\alpha = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; \alpha = 330° = \frac{11\pi}{6}\ \text{rad}$$

4. Potencias y raíces de números complejos

- **Una de las raíces sextas de un número complejo z es $-\sqrt{3}+i$. Calcular z y el área del hexágono cuyos vértices son los afijos de las raíces sextas de z. Hallar esos afijos.**

Como $z=(-\sqrt{3}+i)^6$, pasamos a forma polar el número $-\sqrt{3}+i$ que está en el segundo cuadrante.

$$|-\sqrt{3}+i|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$$

$$tg\ \alpha=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3} \to \alpha=150°$$

$$z=(2_{150°})^6=(2^6)_{6\cdot 150°}=64_{900°}=64_{180°}$$

$$\sqrt[6]{64_{180°}}=\sqrt[6]{64}_{(180\cdot 360k)/6};\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

Las raíces y los afijos son:

Si $k=0 \to z_1=2_{30°}=2(cos\ 30°+i\ sen\ 30°)=\sqrt{3}+i \to A(\sqrt{3},1)$

Si $k=1 \to z_2=2_{90°}=2(cos\ 90°+i\ sen\ 90°)=2i \to B(0,2)$

Si $k=2 \to z_3=2_{150°}=2(cos\ 150°+i\ sen\ 150°)=-\sqrt{3}+i \to C(-\sqrt{3},1)$

Si $k=3 \to z_4=2_{210°}=2(cos\ 210°+i\ sen\ 210°)=-\sqrt{3}-i \to D(-\sqrt{3},-1)$

Si $k=4 \to z_5=2_{270°}=2(cos\ 270°+i\ sen\ 270°)=-2i \to E(0,-2)$

Si $k=5 \to z_6=2_{330°}=2(cos\ 330°+i\ sen\ 330°)=\sqrt{3}-i \to F(\sqrt{3},-1)$

La longitud del lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita, que es igual al módulo de cualquiera de las raíces, es decir, 2. El apotema del hexágono regular es $2\cdot cos\ 30°=\sqrt{3}$.

Por tanto, el área del hexágono es:

$$A=\frac{\text{perímetro}\cdot\text{apotema}}{2}=\frac{6\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}\ \text{u}^2$$

5. Interpretación gráfica de igualdades con números complejos

- **Representar los números complejos que cumplen la condición dada.**

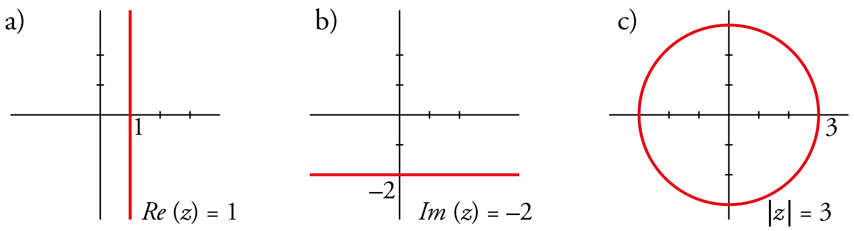
a) $z+\bar{z}=2$

b) $z-\bar{z}=-4i$

c) $|z|=3$

a) Si $z=a+bi \to a+bi+a-bi=2 \to 2a=2 \to a=1 \to Re(z)=1$ y se obtiene la figura a).

b) Si $z=a+bi \to a+bi-(a-bi)=-4i \to 2bi=-4i \to 2b=-4 \to b=-2 \to Im\ (z)=-2$ y se obtiene la figura b).



EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 170

Para practicar

Números complejos en forma binómica. Operaciones

1 **Calcula.**

a) $(3+2i)(2-i)-(1-i)(2-3i)$

b) $3+2i(-1+i)-(5-4i)$

c) $-2i-(4-i)5i$

d) $(4-3i)(4+3i)-(4-3i)^2$

e) $(2+i)^3-(2-i)^2$

f) $(1+2i)^4$

Comprueba los resultados con la calculadora.

a) $(3+2i)(2-i)-(1-i)(2-3i)=6-3i+4i-2i^2-2+3i+2i-3i^2=$

$=6-3i+4i+2-2+3i+2i+3=9+6i$

b) $3+2i(-1+i)-(5-4i)=3-2i+2i^2-5+4i=3-2i-2-5+4i=-4+2i$

c) $-2i-(4-i)5i=-2i-20i+5i^2=-22i-5=-5-22i$

d) $(4-3i)(4+3i)-(4-3i)^2=16-(3i)^2-16-9i^2+24i=16+9-16+9+24i=18+24i$

e) $(2+i)^3-(2-i)^2=(2+i)(2+i)^2-(2-i)^2=(2+i)(4+4i-1)-(4-4i-1)=$

$=6+8i+3i-4-3+4i=-1+15i$

f) $(1+2i)^4=(1+2i)^2(1+2i)^2=(1+4i-4)(1+4i-4)=(-3+4i)(-3+4i)=9-12i-12i-16=-7-24i$

2 **Calcula.**

a) i^{37} **b)** i^{126} **c)** i^{-7} **d)** i^{64} **e)** i^{-216}

a) $i^{37}=i^1=i$

b) $i^{126}=i^2=-1$

c) $i^{-7}=\dfrac{1}{i^7}=\dfrac{1}{-i}=i$

d) $i^{64}=i^0=1$

e) $i^{-216}=\dfrac{1}{i^{216}}=\dfrac{1}{i^0}=\dfrac{1}{1}=1$

3 **Calcula en forma binómica.**

a) $\dfrac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i}$

b) $\dfrac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)}$

c) $\dfrac{2+5i}{3-2i}(1-i)$

d) $\dfrac{1+i}{2-i}+\dfrac{-3-2i}{1+3i}$

e) $\dfrac{(2+i)^3+(2i)^4}{i}$

f) $\dfrac{(1-i)^3-i^8}{(1+i)^2}$

a) $\dfrac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i}=\dfrac{12-6i+12i-6i^2}{2-2i}=\dfrac{18+6i}{2-2i}=\dfrac{(18+6i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)}=$

$=\dfrac{36+36i+12i-12}{4+4}=\dfrac{24+48i}{8}=3+6i$

b) $\dfrac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)}=\dfrac{-2+3i}{-4+4i-2i-2}=\dfrac{-2+3i}{-6+2i}=\dfrac{(-2+3i)(-6-2i)}{(-6+2i)(-6-2i)}=$

$=\dfrac{12+4i-18i+6}{36+4}=\dfrac{18-14i}{40}=\dfrac{9-7i}{20}=\dfrac{9}{20}-\dfrac{7}{20}i$

c) $\dfrac{2+5i}{3-2i}(1-i)=\dfrac{2-2i+5i+5}{3-2i}=\dfrac{7+3i}{3-2i}=\dfrac{(7+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{21+14i+9i-6}{9+4}=\dfrac{15+23i}{13}=\dfrac{15}{13}+\dfrac{23}{13}i$

d) $\dfrac{1+i}{2-i}+\dfrac{-3-2i}{1+3i}=\dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}+\dfrac{(-3-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{2+i+2i-1}{4+1}+\dfrac{-3+9i-2i-6}{1+9}=$

$=\dfrac{1+3i}{5}+\dfrac{-9+7i}{10}=\dfrac{2+6i-9+7i}{10}=\dfrac{-7+13i}{10}=\dfrac{-7}{10}+\dfrac{13}{10}i$

e) $\dfrac{(2+i)^3+(2i)^4}{i}=\dfrac{2+11i+16}{i}=\dfrac{18+11i}{i}=11-18i$

f) $\dfrac{(1-i)^3-i^8}{(1+i)^2}=\dfrac{-2-2i-1}{(1+i)^2}=\dfrac{-3-2i}{2i}=-1+\dfrac{3}{2}i$

4 **Dados $z=1-3i$, $w=-3+2i$, $t=-2i$, calcula:**

a) zwt **b)** $zt-w(t+z)$ **c)** $\dfrac{w}{z}t$

d) $\dfrac{2z-3t}{w}$ **e)** $\dfrac{3z+it}{3}w$ **f)** $\dfrac{z^2-wt^2}{2}$

$z=1-3i$; $w=-3+2i$; $t=-2i$

a) $zwt=(1-3i)(-3+2i)(-2i)=(-3+2i+9i-6i^2)(-2i)=(3+11i)(-2i)=-6i-22i^2=22-6i$

b) $zt-w(t+z)=(1-3i)(-2i)-(-3+2i)(-2i+1-3i)=(-2i+6i^2)-(-3+3i)(1-5i)=$

$=(-6-2i)-(-3+2i)(1-5i)=(-6-2i)-(-3+15i+2i-10i^2)=$

$=(-6-2i)-(7+17i)=-13-19i$

c) $\dfrac{w}{z}t=\dfrac{-3+2i}{1-3i}(-2i)=\dfrac{6i-4i^2}{1-3i}=\dfrac{(4+6i)(1+3i)}{1^2-(3i)^2}=\dfrac{4+12i+6i+18i^2}{1+9}=$

$=\dfrac{-14+18i}{10}=-\dfrac{7}{5}+\dfrac{9}{5}i$

d) $\dfrac{2z-3t}{w}=\dfrac{2(1-3i)-3(-2i)}{-3+2i}=\dfrac{2-6i+6i}{-3+2i}=\dfrac{2(-3-2i)}{(-3)^2-(2i)^2}=\dfrac{-6-4i}{9+4}=-\dfrac{6}{13}-\dfrac{4}{13}i$

e) $\dfrac{3z+it}{3}w=\dfrac{3(1-3i)+i(-2i)}{3}(-3+2i)=\dfrac{3-9i+2}{3}(-3+2i)=$

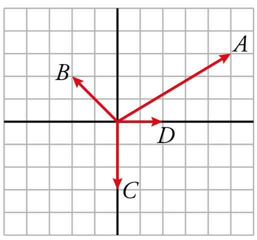
$=\left(\dfrac{5}{3}-3i\right)(-3+2i)=-5+\dfrac{10}{3}i+9i-6i^2=1+\dfrac{37}{3}i$

f) $\dfrac{z^2-wt^2}{2}=\dfrac{(1-3i)^2-(-3+2i)(-2i)^2}{2}=\dfrac{1-6i+9i^2-(-3+2i)(-4)}{2}=$

$=\dfrac{-8-6i-12+8i}{2}=\dfrac{-20}{2}+\dfrac{2}{2}i=-10+i$

5 **Los puntos A, B, C, D corresponden a los afijos de los números complejos z_1, z_2, z_3, z_4.**

Efectúa y representa.



a) $z_1\cdot z_4-z_2\cdot z_3$ **b)** $(z_2-z_1)^2$

c) $\dfrac{5(z_1-z_4)}{z_2+z_3}$ **d)** $\dfrac{\overline{z}_1-\overline{z}_2}{z_3+z_4}$

$z_1=5+3i$ $z_2=-2+2i$ $z_3=-3i$ $z_4=2$

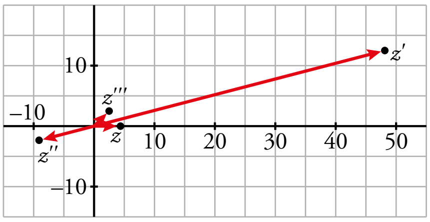
a) $z=z_1\cdot z_4-z_2\cdot z_3=(5+3i)2-(-2+2i)(-3i)=10+6i-6i+6i^2=4$

b) $z'=(z_2-z_1)^2=[-2+2i-(5+3i)]^2=(-7-i)^2=49+14i+i^2=48+14i$

c) $z'' = \dfrac{5(z_1 - z_4)}{z_2 + z_3} = \dfrac{5(5+3i-2)}{-2+2i+(-3i)} = \dfrac{5(3+3i)}{-2-i} = \dfrac{(15+15i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \dfrac{-30+15i-30i+15i^2}{4+1} = -9-3i$

d) $z''' = \dfrac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{z_3 + z_4} = \dfrac{5-3i-(-2-2i)}{2-3i} = \dfrac{(7-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{14+21i-2i-3i^2}{4+9} = \dfrac{17+19i}{13}$

Representación gráfica:



6 **Dado el número complejo** $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$**, prueba que:**

a) $1 + z + z^2 = 0$ **b)** $\dfrac{1}{z} = z^2$

a) $z^2 = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}i^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = -\dfrac{2}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$1 + z + z^2 = 1 + \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = 0$

b) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i} = \dfrac{1}{\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}} = \dfrac{2}{-1+\sqrt{3}\,i} = \dfrac{2(-1-\sqrt{3}\,i)}{(-1+\sqrt{3}\,i)(-1-\sqrt{3}\,i)} =$

$= \dfrac{2(-1-\sqrt{3}\,i)}{1+3} = \dfrac{2(-1-\sqrt{3}\,i)}{4} = \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$z^2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (lo habíamos calculado en a).

Por tanto; $\dfrac{1}{z} = z^2$.

7 **Calcula** m **y** n **para que se verifique la igualdad** $(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$**.**

$(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$

$(2+n) + (m+5)\,i = 7 - 2i \ \rightarrow \ \left.\begin{cases} 2+n=7 \\ m+5=-2 \end{cases}\right\} \begin{array}{l} n=5 \\ m=-7 \end{array}$

8 **Determina** k **para que el cociente** $\dfrac{k+i}{1+i}$ **sea igual a** $2 - i$**.**

$\dfrac{k+i}{1+i} = \dfrac{(k+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{k-ki+i+1}{1+1} = \dfrac{(k+1)+(1-k)\,i}{2} = \left(\dfrac{k+1}{2}\right) + \left(\dfrac{1-k}{2}\right)i = 2 - i \ \rightarrow \ \begin{cases} \dfrac{k+1}{2} = 2 \ \rightarrow \ k=3 \\ \dfrac{1-k}{2} = -1 \ \rightarrow \ k=3 \end{cases}$

Por tanto, $k = 3$.

9 **Dados los complejos** $2 - ai$ **y** $3 - bi$**, halla** a **y** b **para que su producto sea igual a** $8 + 4i$**.**

$(2-ai)(3-bi) = 8+4i$

$6 - 2bi - 3ai + abi^2 = 8+4i$

$6 - 2bi - 3ai - ab = 8+4i$

$(6-ab) + (-2b-3a)\,i = 8+4i$

$$\begin{cases} 6 - ab = 8 \\ -2b - 3a = 4 \end{cases}$$

$$b = \frac{4 + 3a}{-2}$$

$$6 - a\left(\frac{4 + 3a}{-2}\right) = 8 \rightarrow 6 + \frac{4a + 3a^2}{2} = 8$$

$$\frac{4a + 3a^2}{2} = 2 \rightarrow 4a + 3a^2 = 4 \rightarrow 3a^2 + 4a - 4 = 0$$

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6} \begin{cases} a = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \rightarrow b = -3 \\ a = \dfrac{-12}{6} = -2 \rightarrow b = 1 \end{cases}$$

Números complejos en forma polar

10 **Representa estos números complejos, sus opuestos y sus conjugados. Exprésalos en forma polar:**

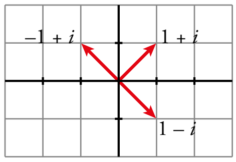
a) $\boldsymbol{1 - i}$ **b)** $\boldsymbol{-1 + i}$ **c)** $\boldsymbol{\sqrt{3} + i}$ **d)** $\boldsymbol{-\sqrt{3} - i}$

e) $\boldsymbol{-4}$ **f)** $\boldsymbol{-2i}$ **g)** $\boldsymbol{-\frac{3}{4}i}$ **h)** $\boldsymbol{2 + 2\sqrt{3}i}$

a) $1 - i = \sqrt{2}_{315°}$

Opuesto: $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

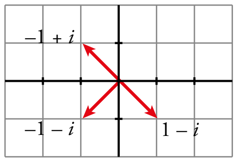
Conjugado: $1 + i = \sqrt{2}_{45°}$



b) $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

Opuesto: $1 - i = \sqrt{2}_{315°}$

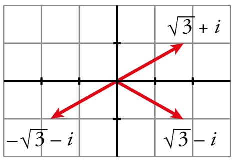
Conjugado: $-1 - i = \sqrt{2}_{225°}$



c) $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$

Opuesto: $-\sqrt{3} - i = 2_{210°}$

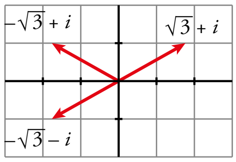
Conjugado: $\sqrt{3} - i = 2_{330°}$



d) $-\sqrt{3} - i = 2_{210°}$

Opuesto: $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$

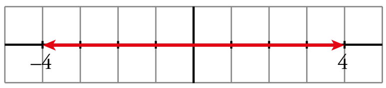
Conjugado: $-\sqrt{3} + i = 2_{150°}$



e) $-4 = 4_{180°}$

Opuesto: $4 = 4_{0°}$

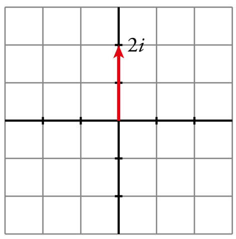
Conjugado: $-4 = 4_{180°}$



f) $-2i = 2_{90°}$

Opuesto: $2i = 2_{90°}$

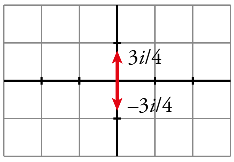
Conjugado: $2i = 2_{90°}$



g) $-\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{270°}$

Opuesto: $\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{90°}$

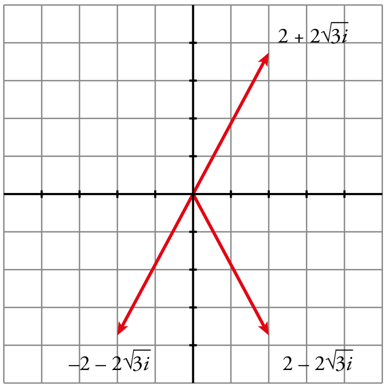
Conjugado: $\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{90°}$



h) $2 + 2\sqrt{3}\,i = 4_{60°}$

Opuesto: $-2 - 2\sqrt{3}\,i = 4_{240°}$

Conjugado: $2 - 2\sqrt{3}\,i = 4_{300°}$



11 **Escribe en forma binómica estos números complejos:**

a) $2_{45°}$ **b)** $3_{\pi/6}$ **c)** $\sqrt{2}_{180°}$ **d)** $17_{0°}$

e) $1_{\pi/2}$ **f)** $5_{270°}$ **g)** $1_{150°}$ **h)** $4_{100°}$

a) $2_{45°} = 2\,(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

b) $3_{(\pi/6)} = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

c) $\sqrt{2}_{180°} = \sqrt{2}\,(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°) = \sqrt{2}\,(-1 + i \cdot 0) = -\sqrt{2}$

d) $17_{0°} = 17$

e) $1_{(\pi/2)} = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i$

f) $5_{270°} = -5i$

g) $1_{150°} = \cos 150° + i \operatorname{sen} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

h) $4_{100°} = 4\,(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°) = 4\,(-0,17 + i \cdot 0,98) = -0,69 + 3,94i$

12 **Dados los complejos $z_1 = 2_{270°}$; $z_2 = 4_{120°}$; $z_3 = 3_{315°}$; calcula:**

a) $z_1 \cdot z_2$ **b)** $z_2 \cdot z_3$ **c)** $z_1 \cdot z_3$

d) $\frac{z_3}{z_1}$ **e)** $\frac{z_2}{z_1}$ **f)** $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2}$

g) z_1^2 **h)** z_2^3 **i)** z_3^4

Comprueba los resultados con la calculadora.

a) $z_1 \cdot z_2 = 8_{30°}$ b) $z_2 \cdot z_3 = 12_{75°}$ c) $z_1 \cdot z_3 = 6_{225°}$

d) $\frac{z_3}{z_1} = 1,5_{45°}$ e) $\frac{z_2}{z_1} = 2_{-150°} = 2_{210°}$ f) $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2} = 1,5_{105°}$

g) $z_1^2 = 4_{180°}$ h) $z_2^3 = 64_{0°}$ i) $z_3^4 = 81_{180°}$

13 **Calcula:** $\dfrac{(2_{45°})^2}{[i(1+i)]^3}$

$$\frac{(2_{45°})^2}{\left[i(1+i)\right]^3} = \frac{4_{90°}}{i^3(1+i)(1+i)^2} = \frac{4i}{i^3(1+i)(1+i)^2} = \frac{4}{i^2(1+i)(2i)} = \frac{4}{2-2i} = \frac{2}{1-i} = \frac{2}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = 1+i$$

14 **Expresa en forma polar y calcula.**

a) $(-1-i)^5$ **b)** $\sqrt[4]{1-\sqrt{3}\,i}$ **c)** $\sqrt[4]{64}$

d) $\sqrt[3]{125i}$ **e)** $(-2\sqrt{3}+2i)^6$ **f)** $(3-4i)^3$

a) $(-1-i)^5 = (\sqrt{2}_{225°})^5 = 4\sqrt{2}_{1\,125°} = 4\sqrt{2}_{45°} = 4\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 4+4i$

b) $\sqrt[4]{1-\sqrt{3}\,i} = \sqrt[4]{2_{300°}} = \sqrt[4]{2}_{(300°+360°\,n)/4} = \sqrt[4]{2}_{75°+90°\,n}$; $n = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son: $\sqrt[4]{2}_{75°}$ $\sqrt[4]{2}_{165°}$ $\sqrt[4]{2}_{255°}$ $\sqrt[4]{2}_{345°}$

c) $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{64_{0°}} = \sqrt[4]{2^6}_{(360°\,k)/4} = 2\sqrt{2}_{90°\,k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son: $2\sqrt{2}_{0°} = 2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}_{90°} = 2\sqrt{2}\,i$ $2\sqrt{2}_{180°} = -2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}_{270°} = -2\sqrt{2}\,i$

d) $\sqrt[3]{125i} = \sqrt[3]{125_{90°}} = 5_{30°+120°k}$ para $k = 0, 1, 2$

Las 3 raíces son:

$5_{30°} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}+\dfrac{5}{2}i$

$5_{150°} = \dfrac{-5\sqrt{3}}{2}+\dfrac{5}{2}i$

$5_{270°} = -5i$

e) $(-2\sqrt{3}+2i)^6 = (4_{150°})^6 = 4\,096_{900°} = 4\,096_{180°} = -4\,096$

f) $(3-4i)^3 = (5_{306°\,52'})^3 = 125_{920°\,36'} = 125_{200°\,36'}$

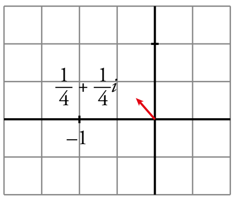
15 **Calcula y representa gráficamente el resultado.**

a) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$ **b)** $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{2-i}}$

a) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}_{315°}}{2_{30°}}\right)^3 = \left(\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{285°}\right)^3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)_{855°} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)_{135°} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\cos 135 + i\,\operatorname{sen} 135°) =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{-1}{4}+\dfrac{1}{4}i$



b) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{2-i}} = \sqrt[3]{\dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}} = \sqrt[3]{\dfrac{1+3i}{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i} =$

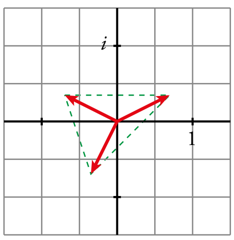
$= \sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)_{71°\,34'}} = \left(\dfrac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{(71°\,34'+360°\,k)/3} = \sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{23°\,51'+120°\,k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{23°\,51'} = 0{,}785+0{,}347i$

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{143°\,51'} = -0{,}693+0{,}56i$

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{263°\,51'} = -0{,}092-0{,}853i$



16 **Calcula y representa las soluciones.**

a) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}\,i}$ **b)** $\sqrt[4]{-16}$ **c)** $\sqrt[3]{-27i}$

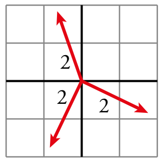
a) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}\,i}=\sqrt[3]{8_{300°}}=2_{(300°+360°\,k)/3}=2_{100°+120°\,k}$; $k=0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$2_{100°}=-0{,}35+1{,}97i$

$2_{220°}=-1{,}53-1{,}26i$

$2_{340°}=1{,}88-0{,}68i$

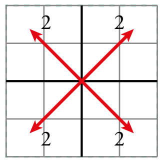


b) $\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16_{180°}}=2_{(180°+360°\,k)/4}=2_{45°+90°\,k}$; $k=0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$2_{45°}=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$ $\quad 2_{135°}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$

$2_{225°}=-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$ $\quad 2_{315°}=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$



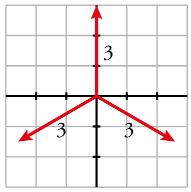
c) $\sqrt[3]{-27i}=\sqrt[3]{27_{270°}}=3_{(270°+360°\,k)/3}$; $k=0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$3_{90°}=3i$

$3_{210°}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}i$

$3_{330°}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}i$



17 **Calcula pasando a forma polar.**

a) $(1+i\sqrt{3})^5$ **b)** $\dfrac{8}{(1-i)^5}$

c) $\sqrt[6]{-729}$ **d)** $\sqrt{\dfrac{2-2i}{-3+3i}}$

a) $(1+i\sqrt{3})^5=(2_{60°})^5=32_{300°}=32\,(\cos 300°+i\,\mathrm{sen}\,300°)=32\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16-16\sqrt{3}\,i$

b) $\dfrac{8}{(1-i)^5}=\dfrac{8_{0°}}{(\sqrt{2}_{315°})^5}=\dfrac{8_{0°}}{4\sqrt{2}_{1\,575°}}=\dfrac{8_{0°}}{4\sqrt{2}_{135°}}=\left(\dfrac{8}{4\sqrt{2}}\right)_{-135°}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)_{225°}=$

$=\sqrt{2}_{225°}=\sqrt{2}\,(\cos 225°+i\,\mathrm{sen}\,225°)=\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-1-i$

c) $\sqrt[6]{-729}=\sqrt[6]{729_{180°}}=3_{30°+60°k}$ para $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$3_{30°}=2{,}6+\dfrac{3}{2}i$ $\quad 3_{90°}=3i$ $\quad 3_{150°}=-2{,}6+\dfrac{3}{2}i$

$3_{210°}=-2{,}6-\dfrac{3}{2}i$ $\quad 3_{270°}=-3i$ $\quad 3_{330°}=2{,}6-\dfrac{3i}{2}$

d) $\sqrt{\dfrac{2-2i}{-3+3i}}=\sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}_{315°}}{3\sqrt{2}_{135°}}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)_{180°}=\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{(180°+360°\,k)/2}=\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{90°+180°\,k}$; $k=0, 1$

Las dos raíces son:

$\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{90°}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i$ $\quad \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{270°}=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i$

18 **Expresa en forma polar z, su opuesto $-z$, y su conjugado $\bar{z}$ en cada uno de estos casos:**

a) $z = 1 - \sqrt{3}i$ **b)** $z = -2 - 2i$

c) $z = -2\sqrt{3} + 2i$ **d)** $z = -5$

e) $z = 7i$ **f)** $z = -3 - 4i$

a) $z = 1 - \sqrt{3}\,i = 2_{300°}$; $-z = -1 + \sqrt{3}\,i = 2_{120°}$; $\bar{z} = 1 + \sqrt{3}\,i = 2_{60°}$

b) $z = -2 - 2i = 2\sqrt{2}_{225°}$; $-z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}_{45°}$; $\bar{z} = -2 + 2i = 2\sqrt{2}_{135°}$

c) $z = -2\sqrt{3} + 2i = 4_{150°}$; $-z = 2\sqrt{3} - 2i = 4_{330°}$; $\bar{z} = -2\sqrt{3} - 2i = 4_{210°}$

d) $z = -5 = 5_{180°}$; $-z = 5 = 5_{0°}$; $\bar{z} = -5 = 5_{180°}$

e) $z = 7i = 7_{90°}$; $-z = -7i = 7_{270°}$; $\bar{z} = -7i = 7_{270°}$

f) $z = -3 - 4i = 5_{233,13°}$; $-z = 3 + 4i = 5_{53,13°}$; $\bar{z} = -3 + 4i = 5_{126,87°}$

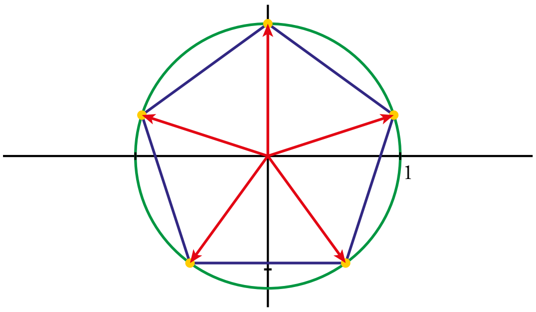
19 **Representa los polígonos regulares que tienen por vértices los afijos de las siguientes raíces:**

a) $\sqrt[5]{i}$ **b)** $\sqrt[6]{-1}$ **c)** $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i}$

a) $\sqrt[5]{i} = \sqrt[5]{1_{90°}} = 1_{(90° + 360°\,k)/5} = 1_{18° + 72°\,k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son: $1_{18°}$; $1_{90°}$; $1_{162°}$; $1_{234°}$; $1_{306°}$

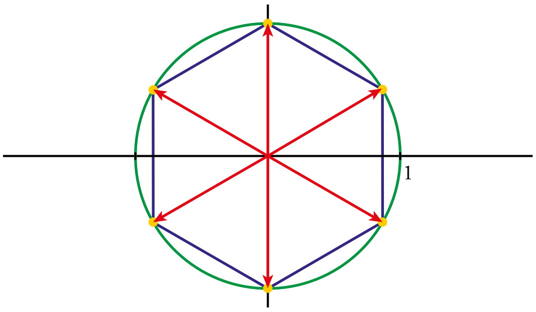
Representación del polígono (pentágono):



b) $\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180°}} = 1_{(180° + 360°\,k)/6} = 1_{30° + 60°\,k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son: $1_{30°}$; $1_{90°}$; $1_{150°}$; $1_{210°}$; $1_{270°}$; $1_{330°}$

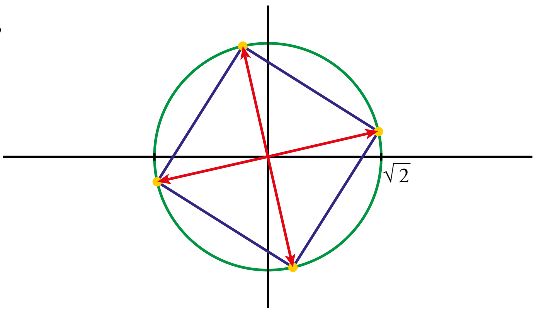
Representación del polígono (hexágono):



c) $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i} = \sqrt[4]{4_{30°}} = \sqrt[4]{2^2}_{(30° + 360°\,k)/4} = \sqrt{2}_{7°\,30' + 90°\,k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son: $\sqrt{2}_{7°\,30'}$; $\sqrt{2}_{97°\,30'}$; $\sqrt{2}_{187°\,30'}$; $\sqrt{2}_{277°\,30'}$

Representación del polígono (cuadrado):



20 **Calcula $\bar{z}^5$ y $\sqrt[4]{z}$, siendo $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.**

Primero, pasamos z a forma polar:

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$tg\,\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = 120°$$ porque z está en el segundo cuadrante.

Luego $z = 1_{120°}$.

$\overline{z}^5 = (1_{-120°})^5 = (1_{240°})^5 = (1^5)_{5 \cdot 240°} = 1_{120°} = z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1_{240°}} = (\sqrt[4]{1})_{(240° + 360° k)/4}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 1_{60°} = 1\,(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 1_{150°} = 1\,(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 1_{240°} = 1\,(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 1_{330°} = 1\,(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Página 171

Ecuaciones y sistemas en $\mathbb{C}$

21 **Resuelve y expresa las soluciones en forma binómica:**

a) $z^2 + 4 = 0$ **b)** $z^2 + z + 4 = 0$

c) $z^2 + 3z + 7 = 0$ **d)** $z^2 - z + 1 = 0$

a) $z^2 + 4 = 0 \rightarrow z^2 = -4 \rightarrow z = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i \;\begin{cases} z_1 = -2i \\ z_2 = 2i \end{cases}$

b) $z^2 + z + 4 = 0 \rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{15}\,i}{2} \;\begin{cases} z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i \\ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i \end{cases}$

c) $z^2 + 3z + 7 = 0 \rightarrow z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-28}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{19}\,i}{2} \;\begin{cases} z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i \\ z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i \end{cases}$

d) $z^2 - z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} \;\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

22 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $z^5 + 32 = 0$ **b)** $iz^3 - 27 = 0$

c) $z^3 + \frac{1}{8}i = 0$ **d)** $iz^4 + 4 = 0$

a) $z^5 + 32 = 0 \rightarrow z^5 = -32$

$z = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32_{180°}} = 2_{(180° + 360° k)/5} = 2_{36° + 72° k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son:

$2_{36°}$ $2_{108°}$ $2_{180°}$ $2_{252°}$ $2_{324°}$

b) $iz^3 - 27 = 0 \rightarrow z^3 + 27i = 0 \rightarrow z^3 = -27i$

$z = \sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270°}} = 3_{(270° + 360° k)/3} = 3_{90° + 120° k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$3_{90°}$ $3_{210°}$ $3_{330°}$

c) $z^3 + (1/8)\,i = 0 \;\rightarrow\; z = \sqrt[3]{(-1/8)\,i} = \sqrt[3]{1/8_{270°}} = 1/2_{(270° + 360°\,k)/3} = 1/2_{90° + 120°\,k};\;\; k = 0,\ 1,\ 2$

Las tres raíces son:

$1/2_{90°} = 2i \qquad 1/2_{210°} = -\sqrt{3} - i \qquad 1/2_{330°} = \sqrt{3} - i$

d) $iz^4 + 4 = 0 \;\rightarrow\; z^4 - 4i = 0 \;\rightarrow\; z^4 = 4i$

$z = \sqrt[4]{4i} = \sqrt[4]{4_{90°}} = \sqrt{2}_{(90° + 360°\,k)/4} = \sqrt{2}_{22°\,30' + 90°\,k};\;\; k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

Las cuatro raíces son:

$\sqrt{2}_{22°\,30'} = 1,3 + 0,5i$

$\sqrt{2}_{112°\,30'} = -0,5 + 1,3i$

$\sqrt{2}_{202°\,30'} = -1,3 - 0,5i$

$\sqrt{2}_{292°\,30'} = 0,5 - 1,3i$

23 Resuelve las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$:

a) $z^2 + 4i = 0$ **b) $z^2 - 2z + 5 = 0$**

c) $2z^2 + 10 = 0$ **d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$**

a) $z^2 + 4i = 0 \;\rightarrow\; z^2 = -4i \;\rightarrow\; z = \sqrt{-4i} = \sqrt{4_{270°}} \;\rightarrow\; z = 2_{(270° + 360°\,k)/2};\;\; k = 0,\ 1$

Las dos raíces son: $z_1 = 2_{135°},\; z_2 = 2_{315°}$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0 \;\rightarrow\; z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{1 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$ $\begin{cases} z_1 = 1 - 2i \\ z_2 = 1 + 2i \end{cases}$

c) $2z^2 + 10 = 0 \;\rightarrow\; 2z^2 = -10 \;\rightarrow\; z^2 = -5 \;\rightarrow\; z = \pm\sqrt{5}\,i$ $\begin{cases} z_1 = -\sqrt{5}\,i \\ z_2 = \sqrt{5}\,i \end{cases}$

d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

$z^2 = t$

$t^2 + 13t + 36 = 0$

$t = \dfrac{-13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \dfrac{-13 \pm 5}{2}$ $\begin{cases} t = -4 \\ t = -9 \end{cases}$

$z^2 = -4 \;\rightarrow\; z = \pm 2i$

$z^2 = -9 \;\rightarrow\; z = \pm 3i$

Las soluciones son: $2i = 2_{90°};\; -2i = 2_{270°};\; 3i = 3_{90°};\; -3i = 3_{270°}$

24 Obtén las cuatro soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $z^4 - 1 = 0$ **b) $z^4 + 16 = 0$** **c) $z^4 - 8z = 0$**

a) $z^4 - 1 = 0 \;\rightarrow\; z^4 = 1 \;\rightarrow\; z = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1_{0°}} = 1_{360°\,k/4} = 1_{90°k};\;\; k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

Las cuatro raíces son:

$1_{0°} = 1 \qquad 1_{90°} = i$

$1_{180°} = -1 \qquad 1_{270°} = -i$

b) $z^4 + 16 = 0 \;\rightarrow\; z^4 = -16 \;\rightarrow\; z^4 = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180°}} = 2_{(180° + 360°\,k)/4} = 2_{45° + 90°\,k};\;\; k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

Las cuatro raíces son:

$2_{45°} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$2_{135°} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$2_{225°} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

$2_{315°} = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

c) $z^4 - 8z = 0 \;\to\; z(z^3 - 8) = 0 \left\langle \begin{array}{l} z = 0 \\ z = \sqrt[3]{8} \end{array} \right.$

$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8_{0°}} = 2_{(360°\,k)/3} = 2_{120°\,k}; \;\; k = 0, 1, 2$

Las soluciones de la ecuación son: $0;\;\; 2_{0°} = 2;\;\; 2_{120°} = -1 + \sqrt{3}\,i;\;\; 2_{240°} = -1 - \sqrt{3}\,i$

25 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{3z - w = 1 - i} \\ \boldsymbol{2z - 3w = 8 - 8i} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \boldsymbol{z + 3w = 8 - 3i} \\ \boldsymbol{2z + w = 6 - i} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \boldsymbol{5z + 4w = 11i} \\ \boldsymbol{3z - 2w = 11i} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \boldsymbol{2z - 5w = -5 + 2i} \\ \boldsymbol{4z - 3w = -3 - 10i} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3z - \;\; w = 1 - i \\ 2z - 3w = 8 - 8i \end{cases} \xrightarrow{-3\cdot(1.^a)} \begin{cases} -9z + 3w = -3 + 3i \\ \;\;\, 2z - 3w = 8 - 8i \end{cases}$

Sumando obtenemos: $-7z = 5 - 5i \;\to\; z = -\dfrac{5}{7} + \dfrac{5}{7}i$

$3\left(-\dfrac{5}{7} + \dfrac{5}{7}i\right) - w = 1 - i \;\to\; w = -\dfrac{15}{7} + \dfrac{15}{7}i - 1 + i = -\dfrac{22}{7} + \dfrac{22}{7}i$

b) $\begin{cases} \;\, z + 3w = 8 - 3i \\ 2z + \;\; w = 6 - i \end{cases} \xrightarrow{-2\cdot(1.^a)} \begin{cases} -2z - 6w = -16 + 6i \\ \;\;\, 2z + \;\; w = 6 - i \end{cases}$

Sumando obtenemos: $-5w = -10 + 5i \;\to\; w = 2 - i$

$z + 3(2 - i) = 8 - 3i \;\to\; z = 8 - 3i - 6 + 3i = 2$

c) $\begin{cases} 5z + 4w = 11i \\ 3z - 2w = 11i \end{cases} \xrightarrow{2\cdot(2.^a)} \begin{cases} 5z + 4w = 11i \\ 6z - 4w = 22i \end{cases}$

Sumando obtenemos: $11z = 33i \;\to\; z = 3i$

$5(3i) + 4w = 11i \;\to\; 4w = -4i \;\to\; w = -i$

d) $\begin{cases} 2z - 5w = -5 + 2i \\ 4z - 3w = -3 - 10i \end{cases} \xrightarrow{-2\cdot(1.^a)} \begin{cases} -4z + 10w = 10 - 4i \\ \;\;\; 4z - \;\; 3w = -3 - 10i \end{cases}$

Sumando obtenemos: $7w = 7 - 14i \;\to\; w = 1 - 2i$

$2z - 5(1 - 2i) = -5 + 2i \;\to\; 2z = -5 + 2i + 5 - 10i \;\to\; z = -4i$

Interpretación gráfica de igualdades y desigualdades

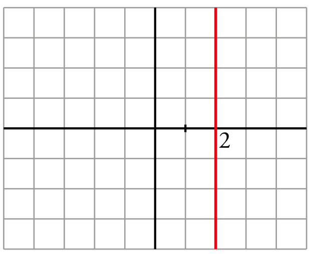
26 **Representa y describe con palabras cada una de estas familias de números complejos:**

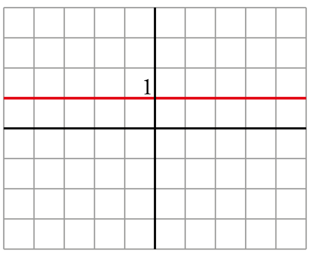
a) $\boldsymbol{Re\,(z) = 2}$ **b)** $\boldsymbol{Im\,(z) = 1}$

c) $\boldsymbol{Re\,(z) \le 0}$ **d)** $\boldsymbol{-1 \le Im\,(z) \le 3}$

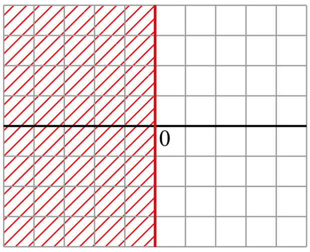
e) $\boldsymbol{-2 < Re\,(z) < 5}$ **f)** $\boldsymbol{|z| \le 3}$

g) $\boldsymbol{Arg\,(z) = 45°}$ **h)** $\boldsymbol{0° \le Arg\,(z) \le 90°}$

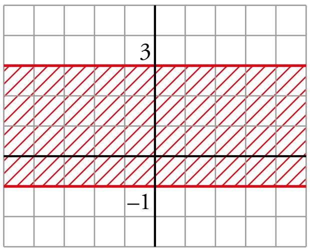
a)


b)


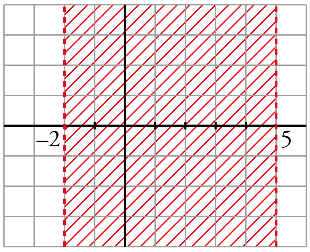
c)



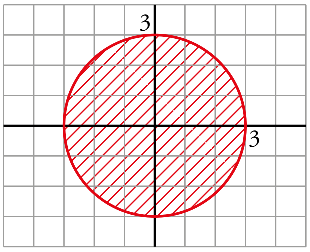
d)



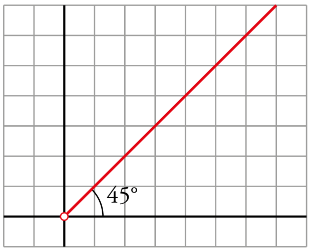
e)



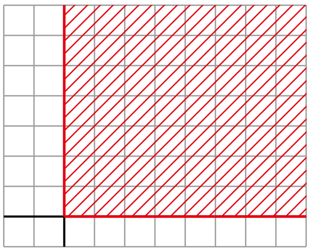
f)



g)



h)



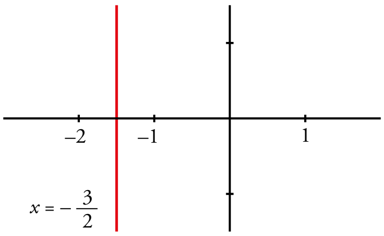
27 Representa los números complejos z tales que $z + \bar{z} = -3$.

Llamamos $z = x + iy$.

Entonces: $\bar{z} = x - iy$

Así, $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = -3 \rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

Representación:



28 Representa los números complejos que verifican:

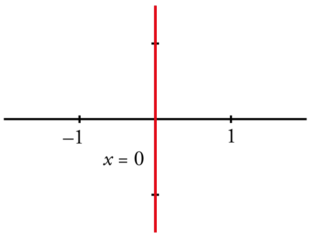
a) $\bar{z} = -z$

b) $|z + \bar{z}| = 3$

c) $|z - \bar{z}| = 4$

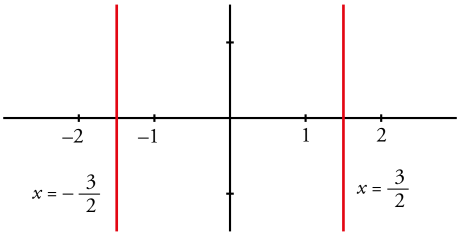
a) $z = x + iy \rightarrow \bar{z} = x - iy$

$\bar{z} = -z \rightarrow x - iy = -x - iy \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$ (es el eje imaginario)



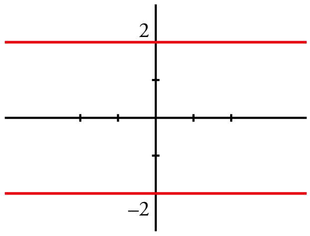
b) $z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x$

$|z + \overline{z}| = |2x| = 3 \begin{cases} 2x = 3 \ \to \ x = 3/2 \\ 2x = -3 \ \to \ x = -3/2 \end{cases}$

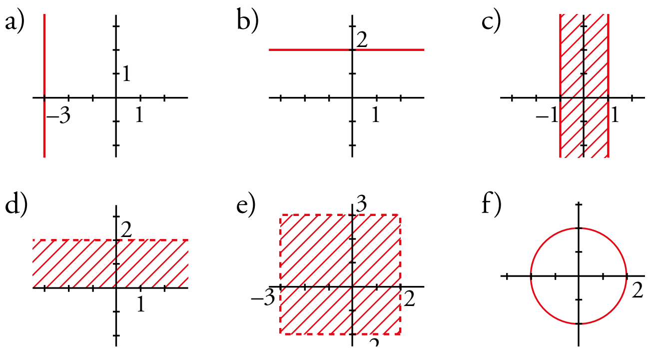


c) $z - \overline{z} = x + iy - z + iy = 2yi$

$|z - \overline{z}| = |2yi| = |2y| = 4 \begin{cases} 2y = 4 \ \to \ y = 2 \\ 2y = -4 \ \to \ y = -2 \end{cases}$



29 **Escribe las condiciones que deben cumplir los números complejos cuya representación gráfica es la siguiente:**



* *En a), b) y f) es una igualdad. En c) y d), una desigualdad. En e), dos desigualdades.*

a) $Re\, z = -3$ b) $Im\, z = 2$ c) $-1 \le Re\, z \le 1$

d) $0 \le Im\, z < 2$ e) $\begin{cases} -3 < Re\, z < 2 \\ -2 < Im\, z < 3 \end{cases}$ f) $|z| = 3$

Para resolver

30 **Calcula a y b de modo que se verifique: $(a + bi)^2 = 3 + 4i$**

$(a + bi)^2 = 3 + 4i \ \to \ a^2 + bi^2 + 2abi = 3 + 4i \ \to$

$\to \ a^2 - b^2 + 2abi = 3 + 4i \ \to \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \ \to \ b = \dfrac{4}{2a} = \dfrac{2}{a} \end{cases}$

$a^2 - \left(\dfrac{2}{a}\right)^2 = 3 \ \to \ a^2 - \dfrac{4}{a^2} = 3 \ \to \ a^4 - 4 = 3a^2 \ \to \ a^4 - 3a^2 - 4 = 0$

$$a^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2 \\ a^2 = -1 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$a = -2 \rightarrow b = -1$

$a = 2 \rightarrow b = 1$

31 **Halla el valor de b para que el producto $(3 - 6i)(4 + bi)$ sea un número:**

a) Imaginario puro. **b) Real.**

$$(3-6i)(4+bi) = 12 + 3bi - 24i + 6b = (12+6b) + (3b-24)\,i$$

a) $12 + 6b = 0 \rightarrow b = -2$

b) $3b - 24 = 0 \rightarrow b = 8$

32 **Calcula x para que el resultado de $(x + 2 + ix)(x - i)$ sea un número real.**

$(x+2+ix)(x-i) = x^2 - xi + 2x - 2i + x^2 i - xi^2 =$

$= x^2 - xi + 2x - 2i + ix^2 + x = (x^2 + 3x) + (x^2 - x - 2)\,i$

Para que sea real, ha de ser:

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

33 **¿Para qué valores de x es imaginario puro el cociente $\frac{x-4i}{x+i}$?**

$$\frac{x-4i}{x+i} = \frac{(x-4i)(x-i)}{(x+i)(x-i)} = \frac{x^2-4}{x^2+1} + \frac{-5x}{x^2+1}\,i$$

Para que sea imaginario puro, ha de ser:

$$\frac{x^2-4}{x^2+1} = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

34 **Calcula el valor que debe tener a para que el módulo del cociente $\frac{a+2i}{1-i}$ sea $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.**

$$z = \frac{a+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{a+ai+2i+2i^2}{1+1} = \frac{a-2+(a+2)\,i}{2}$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{a-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+4}{2}} \rightarrow \sqrt{\frac{a^2+4}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$\frac{a^2+4}{2} = \frac{9}{2} \rightarrow a^2 = 5 \begin{cases} a_1 = \sqrt{5} \\ a_2 = -\sqrt{5} \end{cases}$$

35 **Halla el valor de x en las siguientes igualdades:**

a) $\sqrt{4+\sqrt{20}\,i} + \sqrt{4-\sqrt{20}\,i} = \sqrt{x}$ **b)** $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{6}\,i} - \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{6}\,i} = \sqrt{2x}$

a) $\sqrt{4+\sqrt{20}\,i} + \sqrt{4-\sqrt{20}\,i} = \sqrt{x}$

Elevamos al cuadrado a ambos lados y operamos:

$x = 4 + \sqrt{20}\,i + 4 - \sqrt{20}\,i + 2\sqrt{36}$

$x = 20$

b) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{6}\,i} - \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{6}\,i} = \sqrt{2x}$

Elevamos al cuadrado a ambos lados y operamos:

$2x = \sqrt{3} + \sqrt{6}\,i + \sqrt{3} - \sqrt{6}\,i - 2\sqrt{9}$

$2x = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{9} \rightarrow x = \sqrt{3} - 3$

36 **Si $z = (i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \ldots + i^{10})(3 + ki)$, halla el valor de k para que el módulo de z sea 5.**

$i^0 + i^1 + \ldots + i^{10} = \dfrac{i \cdot i^{10} - i^0}{i - 1}$ porque es la suma de los términos de una progresión geométrica de razón i.

$$\frac{i \cdot i^{10} - i^0}{i - 1} = \frac{i^{11} - i^0}{i - 1} = \frac{-i - 1}{i - 1} = \frac{(-i - 1)(i + 1)}{(i - 1)(i + 1)} = \frac{-i^2 - i - i - 1}{i^2 - 1} = \frac{-2i}{-2} = i$$

Por tanto: $z = i \cdot (3 + ki) = -k + 3i$

$|z| = \sqrt{(-k)^2 + 3^2} = \sqrt{k^2 + 9}$

$|z| = 5 \rightarrow \sqrt{k^2 + 9} = 5 \rightarrow k_1 = 2,\ k_2 = -2$

37 **Halla dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos $\pi/3$, y la suma de sus módulos 8.**

* ***Llámalos r_α y s_β y escribe las condiciones que los relacionan.***

$\dfrac{r}{s} = 3$

$r + s = 8$

$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{3}$

$\alpha - \beta = 0°$

Hallamos sus módulos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{r}{s} = 3 \\ r + s = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} r = 3s \\ 3s + s = 8;\ 4s = 8;\ s = 2;\ r = 6 \end{array}$$

Hallamos sus argumentos:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{3} \\ \alpha - \beta = 0 \end{array}\right\} \alpha = \beta;\ 2\beta = \frac{\pi}{3};\ \beta = \frac{\pi}{6};\ \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Los números serán: $6_{\pi/6}$ y $2_{\pi/6}$

38 **El producto de dos números complejos es –27 y uno de ellos es igual al cuadrado del otro. Calcúlalos.**

Llamemos z y w a los complejos buscados.

$$\left\{\begin{array}{l} zw = -27 \rightarrow w^3 = -27 \rightarrow w = \sqrt[3]{-27} \rightarrow w = \sqrt[3]{27_{180°}} = 3_{(180° \cdot 360° k)/3};\ k = 0, 1, 2 \\ z = w^2 \end{array}\right.$$

- Si $k = 0 \rightarrow w_1 = 3_{60°} = 3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

  $z_1 = w_1^2 = (3_{60°})^2 = 9_{120°} = 9(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) = -\dfrac{9}{2} + \dfrac{9\sqrt{3}}{2}i$

- Si $k = 1 \rightarrow w_2 = 3_{180°} = 3(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°) = -3$

  $z_2 = w_2^2 = (3_{180°})^2 = 9_{0°} = 9(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°) = 9$

- Si $k = 2 \rightarrow w_3 = 3_{300°} = 3(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

  $z_3 = w_3^2 = (3_{300°})^2 = 9_{240°} = 9(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) = -\dfrac{9}{2} - \dfrac{9\sqrt{3}}{2}i$

Hemos obtenido tres soluciones del problema.

39 **Halla dos números complejos conjugados sabiendo que su suma es 8 y que la suma de sus módulos es 10.**

$$\left.\begin{array}{l} z+\bar{z}=8 \\ |z|+|\bar{z}|=10 \end{array}\right\} \text{ Como } |z|=|\bar{z}| \to |z|=5$$

Si llamamos:

$z=a+bi \to \bar{z}=a-bi$

$z+\bar{z}=a+bi+a-bi=2a=8 \to a=4$

$|z|=|\bar{z}|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+b^2}=5 \to 16+b^2=25 \to b^2=9 \to b=\pm\sqrt{9}=\pm 3$

Hay dos soluciones:

$z_1=4+3i \to \bar{z}_1=4-3i$

$z_2=4-3i \to \bar{z}_2=4+3i$

40 **Representa gráficamente los resultados que obtengas al hallar $\sqrt[3]{-2-2i}$ y calcula la longitud del lado del triángulo que se forma al unir esos tres puntos.**

* ***Usa el teorema del coseno para hallar la longitud del lado.***

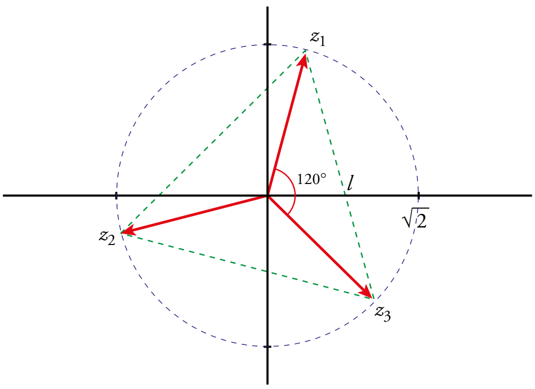
$\sqrt[3]{-2-2i}=\sqrt[3]{\sqrt{8}_{225°}}=\sqrt{2}_{(225°+360°k)/3}=\sqrt{2}_{75°+120°k}$

Las tres raíces son:

$z_1=\sqrt{2}_{75°}$

$z_2=\sqrt{2}_{195°}$

$z_3=\sqrt{2}_{315°}$



Para hallar la longitud del lado, aplicamos el teorema del coseno:

$l^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos 120°=2+2-4\left(-\frac{1}{2}\right)=4+2=6$

$l=\sqrt{6}$

41 **Dibuja el hexágono cuyos vértices son los afijos de $\sqrt[6]{-64}$.**

¿Obtienes el mismo hexágono con los afijos de $\sqrt[6]{64i}$; $\sqrt[6]{64}$; $\sqrt[6]{-64i}$?

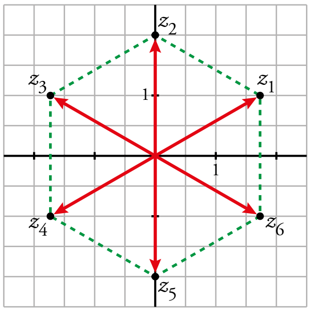
Compruébalo y representa los resultados obtenidos.

$\sqrt[6]{-64}=\sqrt[6]{64_{180°}}=2_{(180°+360°k)/6}$; $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k=0 \to z_1=2_{30°}=2(\cos 30°+i\,\text{sen}\,30°)=\sqrt{3}+i$
- Si $k=1 \to z_2=2_{90°}=2(\cos 90°+i\,\text{sen}\,90°)=2i$
- Si $k=2 \to z_3=2_{150°}=2(\cos 150°+i\,\text{sen}\,150°)=-\sqrt{3}+i$
- Si $k=3 \to z_4=2_{210°}=2(\cos 210°+i\,\text{sen}\,210°)=-\sqrt{3}-i$

- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{270°} = 2(\cos 270° + i \text{ sen } 270°) = -2i$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{330°} = 2(\cos 330° + i \text{ sen } 330°) = \sqrt{3} - i$

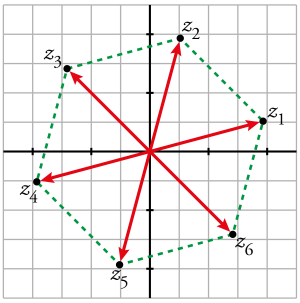
Representación gráfica:



No se obtiene el mismo hexágono porque las raíces sextas de dos números distintos son diferentes. Se obtienen hexágonos girados con respecto al primero. Veamos los siguientes casos:

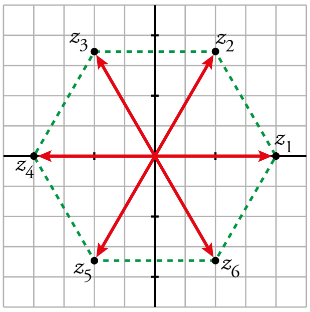
$\sqrt[6]{64i} = \sqrt[6]{64_{90°}} = 2_{(90° + 360° k)/6}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{15°}$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{75°}$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{135°}$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{195°}$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{255°}$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{315°}$



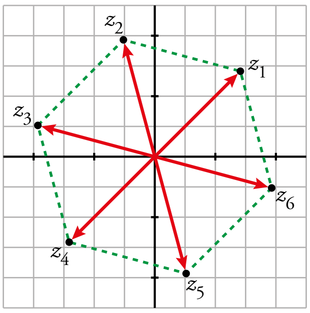
$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64_{0°}} = 2_{(0° + 360° k)/6}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{0°}$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{60°}$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{120°}$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{180°}$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{240°}$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{300°}$

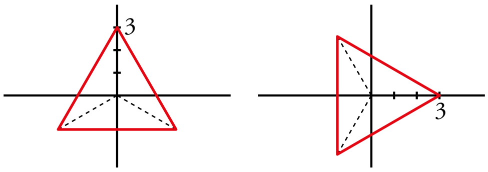


$\sqrt[6]{-64i} = \sqrt[6]{64_{270°}} = 2_{(270° + 360° k)/6}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{45°}$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{105°}$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{165°}$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{225°}$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{285°}$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{345°}$



42 **[El análisis de la información gráfica permite al alumnado trabajar la creación y creatividad de la dimensión personal de esta clave].**
Halla los números complejos que corresponden a los vértices de estos triángulos equiláteros.



Calcula en cada caso el número complejo cuyas raíces cúbicas son esos vértices.

Como los afijos están en los vértices de un triángulo equilátero, los números complejos son:

a) $z_1 = 3_{90°} = 3i$

$z_2 = 3_{210°} = 3(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

$z_3 = 3_{330°} = 3(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

b) $z_1 = 3_{0°} = 3$

$z_2 = 3_{120°} = 3(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$z_3 = 3_{240°} = 3(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

Página 172

43 **¿Pueden ser las raíces de un complejo z los números $2_{28°}$, $2_{100°}$, $2_{172°}$, $2_{244°}$ y $2_{316°}$? En caso afirmativo, halla z.**

* ***Comprueba si el ángulo que forman cada dos de ellas es el de un pentágono regular.***

$28° + 72° = 100° \qquad 100° + 72° = 172°$

$172° + 72° = 244° \qquad 244° + 72° = 316°$

Sí son las raíces quintas de un número complejo. Lo hallamos elevando a la quinta cualquiera de ellas:

$$z = (2_{28°})^5 = 32_{140°}$$

44 Comprobamos. **[Antes de corregir el ejercicio en clase, el alumnado puede compartir sus conclusiones y aportar las estrategias que ha seguido para su realización].**

El número complejo $3_{40°}$ es vértice de un pentágono regular. Halla los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.

Los otros vértices serán:

$$3_{112°} \qquad 3_{184°} \qquad 3_{256°} \qquad 3_{328°}$$

El número será: $z = (3_{40°})^5 = 243$

45 **Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es $1 + i$. Halla z y las otras raíces cúbicas.**

$1 + i = \sqrt{2}_{45°}$

Las otras raíces cúbicas son:

$\sqrt{2}_{45°+120°} = \sqrt{2}_{165°} \qquad \sqrt{2}_{165°+120°} = \sqrt{2}_{285°}$

Hallamos z:

$$z = (1+i)^3 = (\sqrt{2}_{45°})^3 = \sqrt{8}_{135°} = \sqrt{8}(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°) = \sqrt{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 + 2i$$

46 **Busca dos números complejos cuya suma sea $-3 + 3i$ y que una de las raíces cuadradas de su cociente sea $2i$.**

Sean z y w los números complejos buscados. Entonces,

$$\begin{cases} z + w = -3 + 3i \\ \dfrac{z}{w} = (2i)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z + w = -3 + 3i \rightarrow -4w + w = -3 + 3i \rightarrow w = 1 - i \\ z = -4w \end{cases}$$

$z = -4(1 - i) = -4 + 4i$

47 **Expresa $cos\ 4\alpha$ y $sen\ 4\alpha$ en función de $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$, utilizando la fórmula de Moivre. Ten en cuenta que: $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.**

$$cos\ 4\alpha + i\ sen\ 4\alpha = (cos\ \alpha + i\ sen\ \alpha)^4 = cos^4\ \alpha + 4i\ cos^3\ \alpha\ sen\ \alpha - 6\ cos^2\ \alpha\ sen^2\ \alpha - 4i\ cos\ \alpha\ sen^3\ \alpha + sen^4\ \alpha =$$
$$= cos^4\ \alpha - 6\ cos^2\ \alpha\ sen^2\ \alpha + sen^4\ \alpha + i(4\ cos^3\ \alpha\ sen\ \alpha - 4\ cos\ \alpha\ sen^3\ \alpha)$$

De aquí obtenemos que:

$cos\ 4\alpha = cos^4\ \alpha - 6\ cos^2\ \alpha\ sen^2\ \alpha + sen^4\ \alpha$

$sen\ 4\alpha = 4\ cos^3\ \alpha\ sen\ \alpha - 4\ cos\ \alpha\ sen^3\ \alpha$

48 **[La interpretación de la información aportada por el enunciado y la búsqueda de una solución permite trabajar la iniciativa (dimensión productiva de esta clave)].**

Un pentágono regular con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Halla los otros vértices y la longitud de su lado.

El punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ corresponde al afijo del número complejo $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2_{45°}$.

Para hallar los otros vértices, multiplicamos z por $1_{72°}$:

$z_2 = 2_{117°} = -0,91 + 1,78i$ $z_3 = 2_{189°} = -1,97 - 0,31i$

$z_4 = 2_{261°} = -0,31 - 1,97i$ $z_5 = 2_{333°} = 1,78 - 0,91i$

Los otros cuatro vértices serán:

(–0,91; 1,78) (–1,97; –0,31) (–0,31; –1,97) (1,78; –0,91)

Hallamos la longitud del lado aplicando el teorema del coseno:

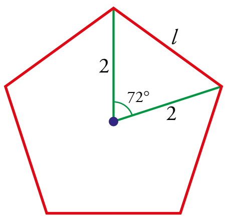
$l^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2cos\ 72°$

$l^2 = 4 + 4 - 4 \cdot 0,31$

$l^2 = 8 - 1,24$

$l^2 = 6,76$

$l = 2,6$ unidades



49 **El afijo de $3 + 2i$ es uno de los vértices de un cuadrado con centro en el origen de coordenadas. Halla los otros vértices y el área del cuadrado.**

Si tenemos un vértice de un cuadrado centrado en el origen, para calcular los otros vértices tenemos que multiplicar por $i = 1_{90°}$ y así hacer giros de 90°.

$z_1 = 3 + 2i$ $z_2 = (3 + 2i)i = -2 + 3i$ $z_3 = (-2 + 3i)i = -3 - 2i$ $z_4 = (-3 - 2i)i = 2 - 3i$

Los otros vértices serán: (–2, 3), (–3, –2) y (2, –3).

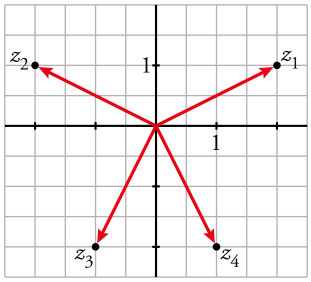
La diagonal del cuadrado mide: $2|z_1| = 2\sqrt{9+4} = 2\sqrt{13}$ porque está centrado en el origen.

El área del cuadrado es (usando la fórmula del área de un rombo):

$$A = \frac{2\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{13}}{2} = 26\ u^2$$

50 **¿Pueden ser los números complejos $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -1 - 2i$ y $z_4 = 1 - 2i$, las raíces de un número complejo? Justifica tu respuesta.**

No, porque sus afijos no se encuentran en los vértices de un polígono regular centrado en el origen. Podemos comprobarlo en el siguiente gráfico:



51 **Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:**

a) $1 + i$ **y** $1 - i$ **b)** $5i$ **y** $-5i$

c) $2 - 3i$ **y** $2 + 3i$ **d)** $4 - i$ **y** $1 + 2i$

a) $[x - (1 + i)][x - (1 - i)] = x^2 - (1 - i)x - (1 + i)x + (1 - i^2) =$

$= x^2 - (1 - i + 1 + i)x + (1 - i^2) = x^2 - 2x + 2 = 0$

b) $(x - 5i)(x + 5i) = x^2 + 5xi - 5xi - 25i^2 = x^2 + 25 = 0$

c) $[x - (2 - 3i)][x - (2 + 3i)] = (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) =$

$= x^2 - 2x + 3xi - 2x + 4 - 6i - 3xi + 6i - 9i^2 = x^2 - 4x + 13 = 0$

d) En este caso, la ecuación de segundo grado no tendrá coeficientes reales porque las soluciones no son números complejos conjugados.

$[x - (4 - i)][x - (1 + 2i)] = (x - 4 + i)(x - 1 - 2i) = x^2 - (5 + i)x + 6 + 7i = 0$

52 **Halla el valor que debe tener m para que $1 - 2i$ sea una solución de la ecuación siguiente: $z^2 - mz + 5 = 0$**

Calculamos las soluciones de la ecuación:

$$z = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 20}}{2} = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2 - 20}{4}}$$

Si $\frac{m}{2} = 1 \to m = 2 \to \frac{m^2 - 20}{4} = \frac{4 - 20}{4} = -4$

Comprobamos ahora cuáles son las soluciones si $m = 2$.

$$z = \frac{2}{2} \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$$

Luego, en efecto, $1 - 2i$ es una de ellas.

53 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $2z + 3i - 2 = 3 + zi$ **b)** $(5 + i)z = 3z + 4i - 2$

c) $(1 - i)z^2 = 1 + i$ **d)** $(i^{23} - i^{37})z = 2i^{22} - 3i^{19}$

a) $2z - zi = 3 - 3i + 2 \to z(2 - i) = 5 - 3i \to z = \frac{5 - 3i}{2 - i} = \frac{(5 - 3i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{13 - i}{5}$

b) $(5 + i)z - 3z = 4i - 2 \to (2 + i)z = 4i - 2 \to z = \frac{4i - 2}{2 + i} = \frac{2i(2 + i)}{2 + i} = 2i$

c) $z^2 = \frac{1 + i}{1 - i} \to z^2 = \frac{(1 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} \to z^2 = \frac{(1 + i)^2}{2}$

$z_1 = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_2 = -\frac{1 + i}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

d) $(-i - i)z = 2(-1) - 3(-i) \to -2iz = -2 + 3i \to z = \frac{-2 + 3i}{-2i} = -\frac{3}{2} - i$

54 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} z+w=-1+2i \\ iz+(1-i)\,w=1+3i \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} z-w=5-3i \\ (2+i)\,z+iw=3-3i \end{cases}$

c) $\begin{cases} z+w=-1+2i \\ z-w=-3+4i \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} z+2w=2+i \\ iz+w=5+5i \end{cases}$

a) Multiplicamos por $-i$ la primera ecuación:

$\left.\begin{array}{l} -iz-iw=i+2 \\ iz+(1-i)\,w=1+3i \end{array}\right\}$ Sumamos miembro a miembro:

$-iw+(1-i)w=i+2+1+3i \;\rightarrow\; (1-2i)w=3+4i$

$$w=\frac{3+4i}{1-2i}=\frac{(3+4i)\,(1+2i)}{1^2-2i^2}=\frac{-5+10i}{5}=-1+2i$$

$z=-1+2i-w=-1+2i+1-2i=0$

Solución: $z=0$; $w=-1+2i$

b) Multiplicamos por i la primera ecuación:

$\left.\begin{array}{l} zi-wi=5i+3 \\ (2+i)\,z+wi=3-3i \end{array}\right\}$ Sumamos miembro a miembro:

$zi+(2+i)\,z=5i+3+3-3i \;\rightarrow\; (2+2i)\,z=6+2i$

$$z=\frac{6+2i}{2+2i}=\frac{(6+2i)\,(2-2i)}{4-4i^2}=\frac{16-8i}{8}=2-i$$

$w=z-5+3i=2-i-5+3i=-3+2i$

Solución: $z=2-i$; $w=-3+2i$

c) $\left.\begin{array}{l} z+w=-1+2i \\ z-w=-3+4i \end{array}\right\}$ Sumando miembro a miembro:

$2z=-4+6i \;\rightarrow\; z=-2+3i$

$w=(-1+2i)-(-2+3i)=1-i$

Solución: $z=-2+3i$; $w=1-i$

d) $\left.\begin{array}{l} z+2w=2+i \\ iz+w=5+5i \end{array}\right\}$ Multiplicamos por –2 la 2.ª ecuación y sumamos:

$\left.\begin{array}{l} z+2w=2+i \\ -2iz-2w=-10-10\,i \end{array}\right\}$ $(1-2i)\,z=-8-9i \;\rightarrow\; z=\dfrac{-8-9i}{1-2i}=2-5i$

$$w=\frac{2+i-(2-5i)}{2}=\frac{6i}{2}=3i$$

Solución: $z=2-5i$; $w=3i$

55 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $z^3+z^2-2=0$ **b)** $z^3-3z^2+z+5=0$

c) $z^4-7z^2-144=0$ **d)** $z^4+2z^2+2=0$

a) Usando el método de Ruffini, obtenemos:

$z^3+z^2-2=(z-1)\,(z^2+2z+2) \;\rightarrow\; z_1=1$

$z^2+2z+2=0 \;\rightarrow\; z=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=-1\pm i \;\rightarrow\; z_2=-1+i,\; z_3=-1-i$

b) Usando el método de Ruffini, obtenemos:

$z^3 - 3z^2 + z + 5 = (z+1)(z^2 - 4z + 5) \rightarrow z_1 = -1$

$z^2 - 4z + 5 = 0 \rightarrow z = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i \rightarrow z_2 = 2 + i,\ z_3 = 2 - i$

c) $z^4 - 7z^2 - 144 = 0$

Se trata de una ecuación bicuadrada. Haciendo el correspondiente cambio de variable, obtenemos:

$z^2 = -9 \rightarrow z = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i \rightarrow z_1 = 3i,\ z_2 = -3i$

$z^2 = 16 \rightarrow z = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \rightarrow z_3 = 4,\ z_4 = -4$

d) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$

Se trata de una ecuación bicuadrada. Haciendo el correspondiente cambio de variable, obtenemos:

$z^2 = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$

$z^2 = -1 + i = \sqrt{2}_{135°} \rightarrow z = \sqrt{\sqrt{2}_{135°}} = \sqrt[4]{2}_{(135 + 360° k)/2};\ k = 0, 1 \rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}_{67,5°};\ z_2 = \sqrt[4]{2}_{247,5°}$

$z^2 = -1 - i = \sqrt{2}_{225°} \rightarrow z = \sqrt{\sqrt{2}_{225°}} = \sqrt[4]{2}_{(225° + 360° k)/2};\ k = 0, 1 \rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}_{112,5°};\ z_2 = \sqrt[4]{2}_{292,5°}$

56 Halla los números complejos cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.

Buscamos los números tales que $z^2 = \overline{z}$.

En forma polar, $(r_\alpha)^2 = r_{-\alpha}$

$$(r^2)_{2\alpha} = r_{-\alpha} \rightarrow \begin{cases} r^2 = r \\ 2\alpha = -\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r(r-1) = 0 \\ 3\alpha = 0° + 360° k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_1 = 0,\ r_2 = 1 \\ \alpha_1 = 0°,\ \alpha_2 = 120°,\ \alpha_3 = 240° \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \rightarrow z_1 = 0 \text{ es una solución} \\ r_2 = 1 \rightarrow z_2 = 1_{0°},\ z_3 = 1_{120°},\ z_4 = 1_{240°} \text{ son las demás soluciones} \end{cases}$$

(Para calcular los valores de α hemos igualado 3α a 0°, 360° y 720°.)

Los números son:

$z_1 = 0 \quad z_2 = 1_{0°} \quad z_3 = 1_{120°} \quad z_4 = 1_{240°}$

Cuestiones teóricas

57 ¿Se puede decir que un número complejo es real si su argumento es 0°?

No, también son reales los números con argumento 180° (los negativos).

58 Si $z = r_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha + 180°}$ y $r_{360° - \alpha}$?

$r_{\alpha + 180°} = -z$ (opuesto de z)

$r_{360° - \alpha} = \overline{z}$ (conjugado de z)

59 Comprueba que:

a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

c) $\overline{kz} = k\,\overline{z}$, **con** $k \in \mathbb{R}$

$z = a + bi = r_\alpha \rightarrow \overline{z} = a - bi = r_{360° - \alpha}$

$w = c + di = r'_\beta \rightarrow \overline{w} = c - di = r'_{360° - \beta}$

a) $z + w = (a + c) + (b + d)i \rightarrow \overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i$

$\overline{z} + \overline{w} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)i = \overline{z + w}$

b) $z \cdot w = (r \cdot r')_{\alpha + \beta} \to \overline{z \cdot w} = (r \cdot r')_{360° - (\alpha + \beta)}$

$\overline{z} \cdot \overline{w} = (r \cdot r')_{360° - \alpha + 360° - \beta} = (r \cdot r')_{360° - (\alpha + \beta)} = \overline{z \cdot w}$

c) $kz = ka + kbi \to \overline{kz} = ka - kbi$

$k\overline{z} = ka - kbi = \overline{kz}$

60 **Demuestra la siguiente identidad:**

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1_{0°}}{r_\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{360° - \alpha} \to \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|}$$

61 **El producto de dos números complejos imaginarios, ¿puede ser real? Acláralo con un ejemplo.**

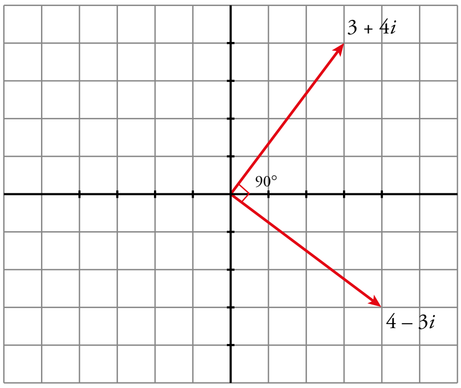
Sí. Por ejemplo:

$z = i, \ w = i$

$z \cdot w = i \cdot i = i^2 = -1 \in \mathbb{R}$

62 **Representa el número complejo $z = 4 - 3i$. Multiplícalo por i y comprueba que el resultado que obtienes es el mismo que si aplicas a z un giro de 90°.**

$iz = 4i - 3i^2 = 3 + 4i$



63 **¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su opuesto?**

Se diferencian en 180°. Si el argumento del número es α, el de su opuesto es:

$$180° + \alpha$$

64 **¿Qué condición debe cumplir un número complejo $z = a + bi$ para que $\bar{z} = \frac{1}{z}$?**

* ***Halla $\frac{1}{z}$, e iguala a $a - bi$.***

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = a - bi$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{a^2 + b^2} = a \\ \dfrac{-b}{a^2 + b^2} = -b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{a}{a} = a^2 + b^2 \to a^2 + b^2 = 1 \text{ (módulo 1)} \\ \text{Ha de tener módulo 1.} \end{array}$$

65 **Sean z y w dos números complejos tales que:**

$$|z| = \sqrt{2} \qquad |w| = \sqrt{2}$$

Determina cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas y cuáles son falsas:

a) $|z + w| = 2\sqrt{2}$ **b)** $|3z| = 3\sqrt{2}$

c) $|z \cdot w| = 2$ **d)** $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Para resolver este problema debemos tener en cuenta que $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$:

$z = a + bi \rightarrow z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

a) Falso, porque $z + w$ representa la diagonal del cuadrado cuyos lados son z y w. Por tanto, su longitud no puede ser la suma de las longitudes de los lados.

b) Verdadero.

Si $z = a + bi \rightarrow 3z = 3a + 3bi$

$|3z| = |3a + 3bi| = \sqrt{(3a)^2 + (3b)^2} = 3\sqrt{a^2 + b^2} = 3|z| = 3\sqrt{2}$

c) Verdadero. El módulo del producto de dos números complejos es el producto de los módulos, tal como hemos visto en las operaciones en forma polar.

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

d) Verdadero. En forma polar $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1_{0°}}{r_\alpha} = \left(\dfrac{1}{r}\right)_{-\alpha}$ y, por tanto, el módulo del inverso de un número complejo es el inverso del módulo.

$\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

66 **Si $z = r_\alpha$ y $w = s_\beta$, ¿qué relación debe existir entre α y β para que ocurra cada una de las siguientes afirmaciones sea verdadera?**

a) $z \cdot w$ **es imaginario puro.**

b) $\dfrac{z}{w}$ **es un número real.**

c) $z \cdot w$ **se encuentra en la bisectriz del primer o tercer cuadrante.**

a) $z \cdot w = r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha + \beta}$

Por tanto $\alpha + \beta = 90°$ o $\alpha + \beta = 270°$, es decir, $\beta = 90° - \alpha$, $\beta = 450° - \alpha$ o $\beta = 270° - \alpha$, $\beta = 630° - \alpha$.

b) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\dfrac{r}{s}\right)_{\alpha - \beta}$

Por tanto, $\alpha - \beta = 0°$ o $\alpha - \beta = 180°$, es decir, $\beta = \alpha$ o $\beta = \alpha - 180°$.

c) $z \cdot w = r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha + \beta}$

Por tanto, $\alpha + \beta = 45°$ o $\alpha + \beta = 225°$, es decir, $\beta = 45° - \alpha$, $\beta = 405° - \alpha$ o $\beta = 225° - \alpha$, $\beta = 585° - \alpha$.

67 **Sea $z \neq 0$ un número complejo y $w = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Justifica que los afijos de z, zw y zw^2 son los vértices de un triángulo equilátero.**

$$|w| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$tg\, \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = 120°$$

El afijo de $zw = z \cdot (1_{120°})$ es el punto que se obtiene girando z un ángulo de 120° respecto del origen de coordenadas.

De la misma forma, el afijo de $zw^2 = z \cdot (1_{240°})$ es el punto que se obtiene girando z un ángulo de 240° respecto del origen de coordenadas.

Por tanto, los afijos de los tres números complejos están en los vértices de un triángulo equilátero.

Página 173

Para profundizar

68 Cualquier ecuación cúbica (aunque no tenga ninguna raíz entera), $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, se puede resolver mediante el método de Cardano, aplicando esta fórmula:

$$z = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{a}{3}$$

con $p = \dfrac{3b - a^2}{3}$, $q = \dfrac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$ **y** $\Delta = \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3$

Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene una solución real y dos complejas; si $\Delta = 0$, tiene dos soluciones reales, una de ellas doble y la otra simple (aunque también pueden coincidir); y, si $\Delta < 0$, se obtienen tres soluciones reales simples. Este último caso resulta muy interesante, pues resulta necesario pasar por los números complejos para obtener las soluciones reales.

Resuelve, usando el método de Cardano, esta ecuación:

$$z^3 + 2z^2 - z - 2 = 0$$

Para ello, aplica la fórmula anterior. Obtendrás $\Delta = \dfrac{-1}{3}$, por lo que $\sqrt{\Delta} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}i$.

Para calcular las raíces de la ecuación, expresa $\dfrac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}$ y $\dfrac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}$ en forma polar y halla todas sus raíces.

Para la ecuación que nos piden solucionar tenemos $a = 2$, $b = -1$, $c = -2$.

Busquemos los valores de p, q y Δ:

$$p = \frac{-3-4}{3} = -\frac{7}{3} \qquad q = \frac{16+18-54}{27} = \frac{-20}{27}$$

$$\Delta = \left(-\frac{10}{27}\right)^2 + \left(\frac{-7}{9}\right)^3 = \frac{100}{729} - \frac{343}{729} = -\frac{243}{729} = -\frac{1}{3} \to \sqrt{\Delta} = \sqrt{-\frac{1}{3}} = \frac{i}{\sqrt{3}}$$

Por tanto: $-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\Delta} = \dfrac{20}{54} + \dfrac{i}{\sqrt{3}}$

Buscamos la forma polar de $-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\Delta} = \dfrac{20}{54} + \dfrac{i}{\sqrt{3}} = \dfrac{10}{27} + \dfrac{i}{\sqrt{3}}$:

$$r = \sqrt{\frac{100}{729} + \frac{1}{3}} = 0{,}69$$

$$tg\,\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{10}{27}} = \frac{27}{10\sqrt{3}} \to \alpha = 57{,}3° \to \frac{10}{27} + \frac{i}{\sqrt{3}} = 0{,}69_{57{,}3°}$$

Para encontrar la forma polar de $\dfrac{10}{27} - \dfrac{i}{3}$ calculamos r y α:

$$r = \sqrt{\frac{100}{729} + \frac{1}{3}} = 0{,}69$$

$$tg\,\alpha = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{10}{27}} = \frac{-27}{10\sqrt{3}} \to \alpha = -57{,}3° \to \frac{10}{27} + \frac{i}{\sqrt{3}} = 0{,}69_{-57{,}3°}$$

Para hallar el valor de z con el método de Cardano nos falta hallar las raíces cúbicas de estas dos expresiones:

$$\sqrt[3]{\frac{10}{27}+\frac{i}{\sqrt{3}}}=\sqrt[3]{0{,}69_{57{,}3°}}=0{,}88_{19°+\frac{360°}{3}k} \quad \text{para} \quad k=0,\ 1,\ 2$$

Sus 3 raíces son: $0{,}88_{19°}$; $0{,}88_{139°}$; $0{,}88_{258°}$ que en forma binómica se escriben como:

$z_1 = -0{,}17 - 0{,}87i$

$z_2 = 0{,}83 + 0{,}29i$

$z_3 = -0{,}67 + 0{,}58i$

$$\sqrt[3]{\frac{10}{27}-\frac{i}{\sqrt{3}}}=\sqrt[3]{0{,}69_{-57{,}3°}}=0{,}88_{-19°+\frac{360°}{3}k} \quad \text{para} \quad k=0,\ 1,\ 2$$

Sus 3 raíces son: $0{,}88_{-19°}$; $0{,}88_{101°}$; $0{,}88_{221°}$ que en forma binómica se escriben como:

$z_4 = \overline{z_1} = -0{,}17 + 0{,}87i$

$z_5 = \overline{z_2} = 0{,}83 - 0{,}29i$

$z_6 = \overline{z_3} = -0{,}67 + 0{,}58i$

Buscamos ahora las raíces de la ecuación aplicando la fórmula:

$$z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}-\frac{a}{3}=-\frac{2}{3}$$

Como $\Delta < 0$, sabemos por el enunciado que habrá 3 soluciones reales, por lo que al sumar las raíces encontradas, lo hacemos de forma que la parte imaginaria sea 0. Hemos visto que cada raíz z_1, z_2, z_3 tiene una raíz conjugada en z_4, z_5, z_6 por lo que sumando una raíz y su conjugada obtendremos la parte imaginaria igual a cero como queremos:

$$z_1 + z_4 = -0{,}17 - 0{,}87i + (-0{,}17 + 0{,}87i) - \frac{2}{3} = -1$$

$$z_2 + z_5 = 0{,}83 + 0{,}29i + (0{,}83 - 0{,}29i) - \frac{2}{3} = 1$$

$$z_3 + z_6 = -0{,}67 + 0{,}58i + (-0{,}67 + 0{,}58i) - \frac{2}{3} = -2$$

69 Halla los números complejos cuyo cubo coincide con el cuadrado de su conjugado.

Si el número complejo es r_α tenemos que:

$$(r_\alpha)^3 = (r_{-\alpha})^2 \rightarrow (r^3)_{3\alpha} = (r^2)_{-2\alpha} \rightarrow \begin{cases} r^3 = r^2 \\ 3\alpha = -2\alpha \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r^3 - r^2 = 0 \\ 5\alpha = 0° + 360°k \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r^2(r-1) = 0 \\ 5\alpha = 0° + 360°k \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_1 = 0,\ r_2 = 1 \\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 72°,\ \alpha_3 = 144°,\ \alpha_4 = 216°,\ \alpha_5 = 288° \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \rightarrow z_1 = 0 \text{ es una solución} \\ r_2 = 1 \rightarrow z_2 = 1_{0°},\ z_3 = 1_{72°},\ z_4 = 1_{144°},\ z_5 = 1_{216°},\ z_6 = 1_{288°} \end{cases}$$

son las demás soluciones.

Los números son: 0, $1_{0°}$, $1_{72°}$, $1_{144°}$, $1_{216°}$ y $1_{288°}$.

70 **Si el producto de dos números complejos es –8 y dividiendo el cubo de uno de ellos entre el otro obtenemos de resultado 2, ¿cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?**

$$\left.\begin{array}{l} z = r_\alpha \\ w = r'_\beta \\ -8 = 8_{180°} \\ 2 = 2_{0°} \end{array}\right\} r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta} = 8_{180°} \to \begin{cases} r \cdot r' = 8 \\ \alpha + \beta = 180° \end{cases}$$

$$\frac{(r_\alpha)^3}{r'_\beta} = \frac{r^3{}_{3\alpha}}{r'_\beta} = \left(\frac{r^3}{r'}\right)_{3\alpha-\beta} = 2_{0°} \to \begin{cases} \dfrac{r^3}{r'} = 2 \\ 3\alpha - \beta = 0° \end{cases}$$

Así:

$$\left.\left.\begin{array}{l} r \cdot r' = 8 \\ r^3 = 2r' \end{array}\right\} \begin{array}{l} r' = \dfrac{8}{r} \\ r' = \dfrac{r^3}{2} \end{array}\right\} \frac{8}{r} = \frac{r^3}{2} \to 16 = r^4 \to \begin{cases} r = 2 \\ r' = 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 180° \\ 3\alpha = \beta \end{array}\right\} \alpha + 3\alpha = 180° \to 4\alpha = 180° \to \begin{cases} \alpha = 45° \\ \beta = 135° \end{cases}$$

Por tanto, $z = 2_{45°}$, $w = 4_{135°}$

71 **Calcula el inverso de los números complejos siguientes y representa gráficamente el resultado que obtengas:**

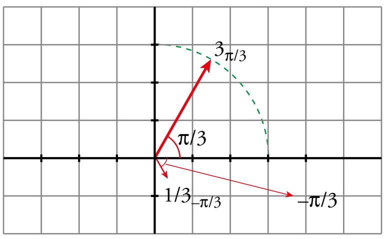
a) $\mathbf{3_{\pi/3}}$

b) $\mathbf{2i}$

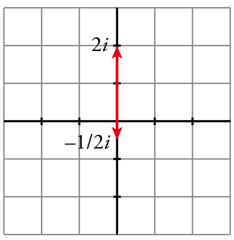
c) $\mathbf{-1 + i}$

¿Qué relación existe entre el módulo y el argumento de un número complejo y de su inverso?

a) $\dfrac{1}{3_{\pi/3}} = \dfrac{1_{0°}}{3_{\pi/3}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{-\pi/3} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{5\pi/3}$



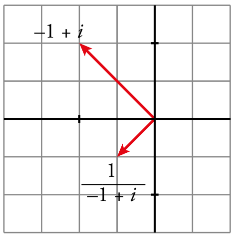
b) $\dfrac{1}{2i} = \dfrac{-i}{2} = \dfrac{-1}{2}i = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{270°}$



c) $-1+i=\sqrt{2}_{135°}$

$$\frac{1}{-1+i}=\frac{1_{0°}}{\sqrt{2}_{135°}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{-135°}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{225°}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

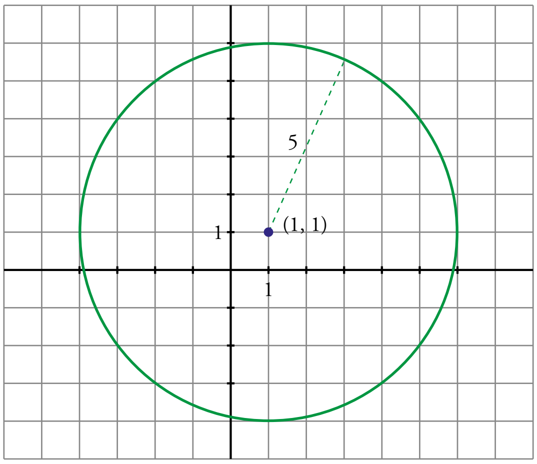
Si $z=r_\alpha$ entonces $\frac{1}{z}=\left(\frac{1}{r}\right)_{360°-\alpha}$.



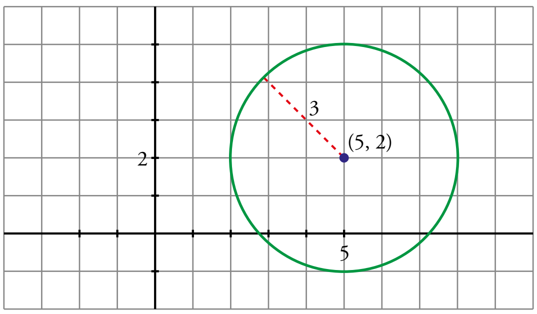
72 **Representa gráficamente las igualdades siguientes. ¿Qué figura se determina en cada caso?**

a) $|z-(1+i)|=5$ **b)** $|z-(5+2i)|=3$

a) Circunferencia con centro en (1, 1) y radio 5.



b) Circunferencia con centro en (5, 2) y radio 3.



73 **Escribe la condición que verifican todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro (1, 1) y radio 3.**

$|z-(1+i)|=3$

74 **La suma de los números complejos $z = a + 3i$ y $w = b - 5i$ dividida por su diferencia es un número imaginario puro. Prueba que z y w han de tener el mismo módulo.**

$z + w = a + b - 2i$

$z - w = a - b + 8i$

$\dfrac{a+b-2i}{a-b+8i} = ki$ con k número real $\rightarrow$ $a + b - 2i = (a - b + 8i)ki$ $\rightarrow$

$$\rightarrow a+b-2i = -8k + k(a-b)i \rightarrow \begin{cases} a+b=-8k \\ -2=k(a-b) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b=-8k \\ a-b=-\dfrac{2}{k} \end{cases}$$

Multiplicando miembro a miembro obtenemos: $a^2 - b^2 = 16$

Por otro lado:

$|z| = \sqrt{a^2+3^2} = \sqrt{a^2+9}$

$|w| = \sqrt{b^2+(-5)^2} = \sqrt{b^2+25}$

Para que los módulos sean iguales, debería ser:

$\sqrt{a^2+9} = \sqrt{b^2+25} \rightarrow a^2+9 = b^2+25 \rightarrow a^2-b^2=16$ y esto es exactamente lo que hemos obtenido a partir de los datos del problema.

75 **Sea z un número complejo cuyo afijo está en la bisectriz del primer cuadrante. Comprueba que $\dfrac{z-1-i}{z+1+i}$ es un número real.**

El número complejo que está en la bisectriz del primer cuadrante es de la forma $z = a + ai$.

$$\frac{a+ai-1-i}{a+ai+1+i} = \frac{a-1+(a-1)i}{a+1+(a+1)i} = \frac{[a-1+(a-1)i]\cdot[a+1-(a+1)i]}{[a+1+(a+1)i]\cdot[a+1-(a+1)i]} =$$

$$= \frac{(a-1)(a+1)-(a-1)(a+1)i+(a-1)(a+1)i-(a-1)(a+1)i^2}{(a+1)^2+(a+1)^2} =$$

$$= \frac{2(a-1)(a+1)}{2(a+1)^2} = \frac{a-1}{a+1}$$, que es un número real.

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 2.2. (EA 2.2.1.-EA 2.2.2.)

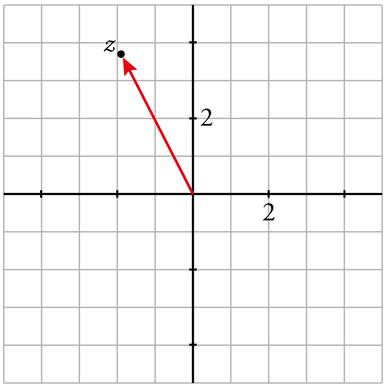
Página 173

1 **Efectúa y representa la solución.**

$$\frac{(3-2i)^2-(1+i)(2-i)}{-3+i}$$

$$\frac{(3-2i)^2-(1+i)(2-i)}{-3+i}=\frac{9+4i^2-12i-(2-i+2i-i^2)}{-3+i}=\frac{5-12i-3-i}{-3+i}=$$

$$=\frac{(2-13i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}=\frac{-6+13i^2-2i+39i}{9-i^2}=\frac{-19+37i}{10}=-\frac{19}{10}+\frac{37}{10}i$$



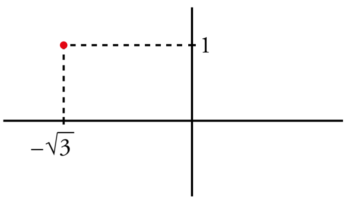
2 **Calcula z y expresa el resultado en forma binómica.**

$$\sqrt[4]{z}=\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}\,i}$$

$$z=\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}\,i}\right)^4$$

Pasamos numerador y denominador a forma polar:

$$-\sqrt{3}+i \;\Big\langle\; \begin{array}{l} r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2 \\ tg\ \alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \;\to\; \alpha=150° \end{array}$$



$$\sqrt{2}\,i \;\to\; \sqrt{2}_{90°}$$

$$z=\left(\frac{2_{150°}}{\sqrt{2}_{90°}}\right)^4=(\sqrt{2}_{60°})^4=4_{240°} \;\to\; z=4\,(\cos 240°+i\ sen\ 240°)$$

$$z=4\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2-2\sqrt{3}\,i$$

3 **Halla a y b para que se verifique la igualdad:**

$5(a-2i)=(3+i)(b-i)$

$$5a-10i=3b-i^2-3i+bi \;\to\; 5a-10i=3b+1+(-3+b)\,i$$

Igualando las componentes $\left\{\begin{array}{l} 5a=3b+1 \\ -10=-3+b \end{array}\right\} \;\to\; b=-7,\ a=-4$

4 **Resuelve la ecuación:**

$z^2 - 10z + 29 = 0$

$$z = \frac{10 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{10 \pm 4i}{2} \begin{cases} z_1 = 5 + 2i \\ z_2 = 5 - 2i \end{cases}$$

Soluciones; $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 5 - 2i$

5 **Calcula el valor que debe tomar x para que el módulo de $\frac{x + 2i}{1 - i}$ sea igual a 2.**

$$\frac{x+2i}{1-i} = \frac{(x+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{x+2i^2+xi+2i}{1-i^2} = \frac{x-2+(x+2)i}{1+1} = \frac{x-2}{2} + \frac{x+2}{2}i$$

$$\text{Módulo} = \sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{2}\right)^2} = 2 \to \sqrt{\frac{x^2+4}{2}} = 2 \to \frac{x^2+4}{2} = 4 \to$$

$$\to x^2 + 4 = 8 \to x^2 = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$

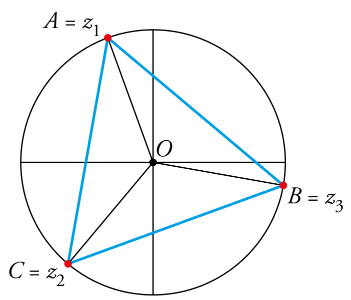
6 **Halla el lado del triángulo cuyos vértices son los afijos de las raíces cúbicas de $4\sqrt{3} - 4i$.**

$z = \sqrt[3]{4\sqrt{3} - 4i}$

Expresamos $4\sqrt{3} - 4i$ en forma polar:

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = 8 \\ tg\ \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \to \alpha = 330° \end{array}\right\} 4\sqrt{3} - 4i = 8_{330°}$$

$$z = \sqrt[3]{8_{330°}} = \sqrt[3]{8}_{(330° + 360°k)/3} \begin{cases} z_1 = 2_{110°} \\ z_2 = 2_{230°} \\ z_3 = 2_{350°} \end{cases}$$



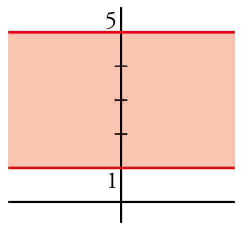
En el triángulo AOB conocemos dos lados, $\overline{OA} = \overline{OB} = 2$, y el ángulo comprendido, 120°. Aplicando el teorema del coseno, obtenemos el lado del triángulo, $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cos 120° = 12 \to \overline{AB} = \sqrt{12} = 3\sqrt{3} \text{ u}$$

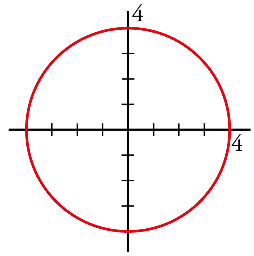
7 **Representa gráficamente.**

a) $1 \le Im(z) \le 5$ **b)** $|z| = 4$ **c)** $z + \bar{z} = -4$

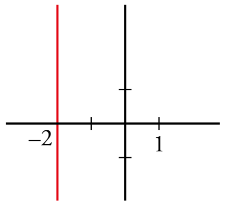
a)



b)



c) $a + bi + a - bi = -4 \to 2a = -4 \to a = -2$



8 **Halla dos números complejos tales que su cociente sea $2_{150°}$ y su producto $18_{90°}$.**

$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = 2_{150°} \rightarrow \frac{r}{s} = 2;\ \alpha - \beta = 150°$

$r_\alpha \cdot s_\beta = 18_{90°} \rightarrow r \cdot s = 18;\ \alpha + \beta = 90°$

Resolvemos los sistemas:

$\begin{cases} \frac{r}{s} = 2 \\ r \cdot s = 18 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha - \beta = 150° \\ \alpha + \beta = 90° \end{cases}$

Obtenemos:

$\begin{cases} r = 6 \\ s = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 120° \\ \beta = -30° = 330° \end{cases}$

Los números son $6_{120°}$ y $3_{330°}$. Otra posible solución es: $6_{300°}$ y $3_{150°}$.

9 **Demuestra que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.**

Supongamos que $z = a + bi$. Entonces:

$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + bai - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

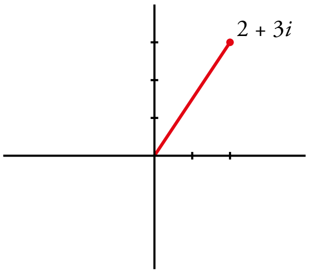
10 **Calcula el valor de $\cos 120°$ y de $\operatorname{sen} 120°$ a partir del producto $1_{90°} \cdot 1_{30°}$.**

$1_{90°} \cdot 1_{30°} = 1(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°) \cdot 1(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) =$

$$= i \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$1_{90°} \cdot 1_{30°} = 1_{120°} = 1(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow \cos 120° = -\frac{1}{2};\ \operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

11 **Halla el número complejo z que se obtiene al transformar el complejo $2 + 3i$ mediante un giro de 30° con centro en el origen.**



Multiplicamos por $1_{30°} = 1(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$.

$z = (2 + 3i) \cdot 1_{30°} = (2 + 3i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$z = \sqrt{3} + \frac{3}{2}i^2 + i + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$z = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2} + \frac{2 + 3\sqrt{3}}{2}i$

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

7 VECTORES

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.2.) CE 1.8. (EA 1.8.2.-EA 1.8.3.-EA 1.8.4.) CE 1.9. (EA 1.9.1.) CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2. EA 1.14.3.)

Página 179

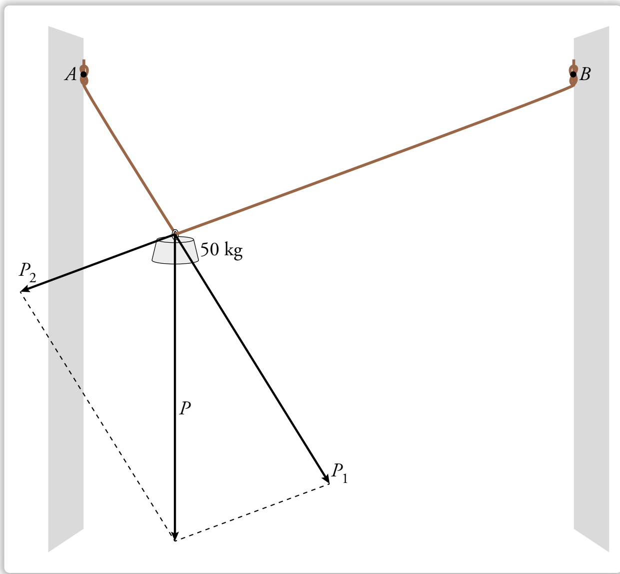
Resuelve

Descomposición de una fuerza

I. Una cuerda de 10 m de larga cuelga de dos escarpias, A y B, situadas a la misma altura y a 8 m de distancia entre sí. De ella se cuelga una pesa de 50 kg de masa que permanece en equilibrio en un punto situado a 3 m de A y a 7 m de B.

Observa que descomponemos el peso, *P*, que produce los 50 kg de masa, en dos componentes, P_1 y P_2, cada una de las cuales tira de uno de los trozos de cuerda.

Estima, midiendo y teniendo en cuenta la escala, la magnitud de cada una de las dos componentes del peso.



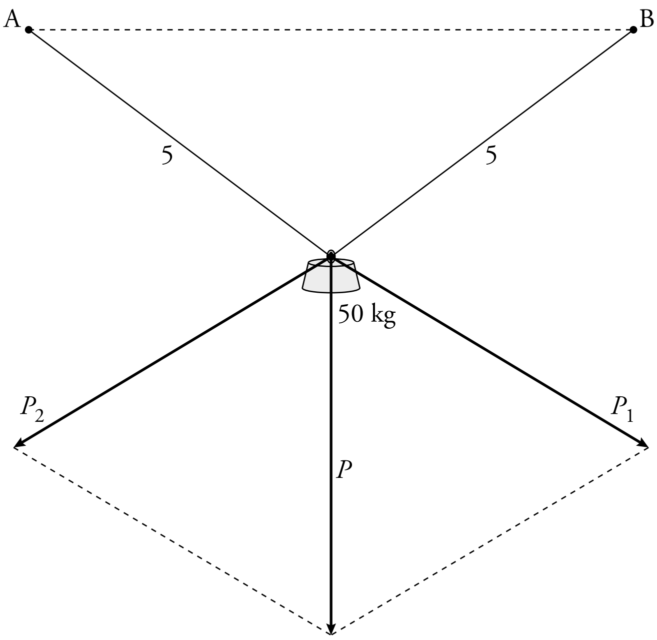
II. Repite la construcción suponiendo que la masa se coloca simétricamente respecto a las dos escarpias (5 m de cuerda a cada lado). Estima, midiendo, la tracción que, en este caso, debe soportar cada trozo de cuerda.

III. Vuelve a repetir la construcción para una cuerda de doble longitud y en la que se coloca la pesa simétricamente.

Si la cuerda fuera débil y temieras que pudiera romperse con tracciones fuertes, ¿cuál de las tres situaciones I, II o III te parecería la más adecuada para colgar la pesa?

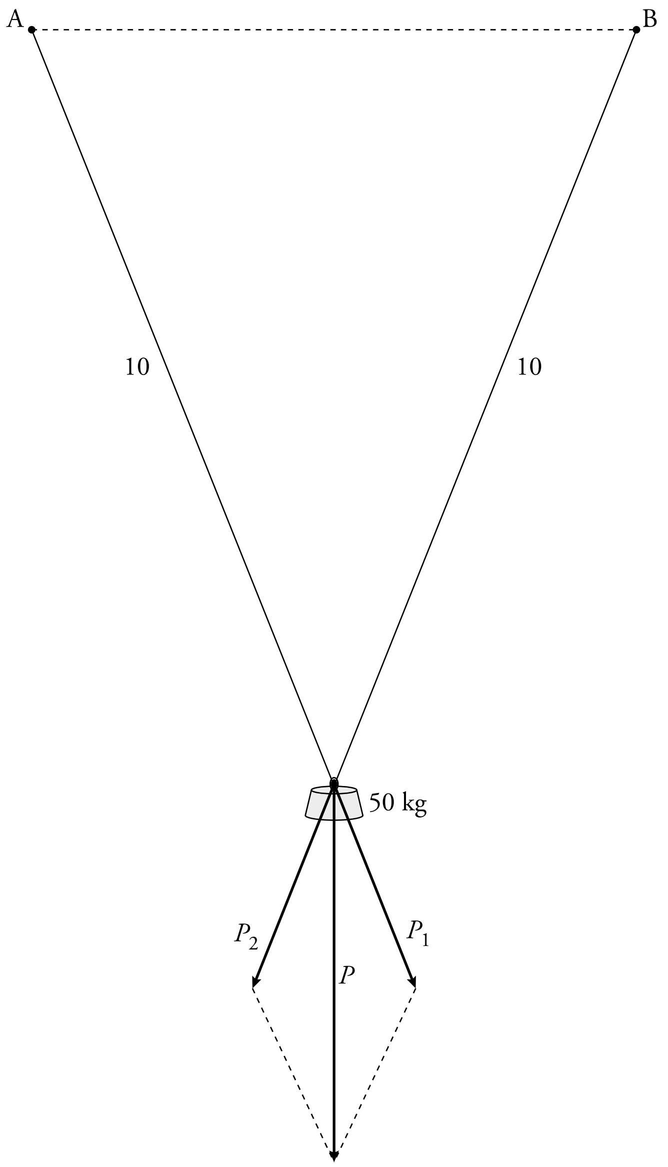
I. $P = 50$ kg $\quad P_1 = 48$ kg $\quad P_2 = 27$ kg

II.



Cada componente del peso es de unos 42 kg.

III.



Cada componente del peso es de unos 27 kg.

Conclusiones: Si la cuerda es débil, tenemos que colgar el peso en el centro y cuanto más larga sea la cuerda, mejor.

2 ▶ COORDENADAS DE UN VECTOR

C.E.: CE 1.13. (EA 1.13.4.) CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.-EA 1.14.3.)

Página 183

1 **Si $\vec{u}(-2, 5)$ y $\vec{v}(1, -4)$ son las coordenadas de dos vectores respecto de una base, halla las coordenadas respecto de la misma base de:**

a) $2\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{u} - \vec{v}$

c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$

d) $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$

a) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-2, 5) + (1, -4) = (-4, 10) + (1, -4) = (-3, 6)$

b) $\vec{u} - \vec{v} = (-2, 5) - (1, -4) = (-2, 5) + (-1, 4) = (-3, 9)$

c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = 3(-2, 5) + \frac{1}{3}(1, -4) = (-6, 15) + \left(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \left(\frac{-17}{3}, \frac{41}{3}\right)$

d) $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} = -\frac{1}{2}(-2, 5) - 2(1, -4) = \left(1, \frac{-5}{2}\right) + (-2, 8) = \left(-1, \frac{11}{2}\right)$

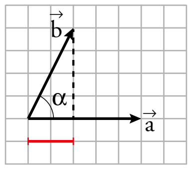
3 ▶ PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.2. (EA 1.2.2.) CE 4.3. (EA 4.3.1.-EA 4.3.2.)

Página 184

1 Piensa y comparte en pareja. **[El alumnado podrá compartir sus argumentos para trabajar esta estrategia].**

¿Verdadero o falso?



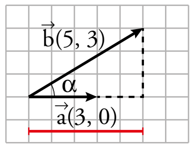
Demostramos que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$:

$$\cos\alpha = \frac{2}{|\vec{b}|} \to |\vec{b}|\cos\alpha = 2 \to |\vec{b}| = \frac{2}{\cos\alpha}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = 5 \cdot 2 = 10$$

Verdadero. Partimos de la longitud de la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ y de su expresión en relación con el producto escalar de dos vectores para calcular el producto escalar de dichos vectores.

2 Observando el razonamiento del ejercicio anterior, calcula $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



$$|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}|\cos\alpha = 5 \to \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = 3 \cdot 5 = 15$$

3 Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cumplen que: $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = \frac{3}{2}$, $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 30°$. Calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b)** $\vec{v} \cdot \vec{u}$ **c)** $(-\vec{u}) \cdot \vec{v}$

d) $(3\vec{u}) \cdot (-5\vec{v})$ **e)** $\vec{u} \cdot \vec{u}$ **f)** $\vec{v} \cdot (-\vec{v})$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos 30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

b) $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{3}$

c) $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -3\sqrt{3}$

d) $(3\vec{u}) \cdot (-5\vec{v}) = 3(-5)(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -15 \cdot 3\sqrt{3} = -45\sqrt{3}$

e) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \cos 0° = 16$

f) $\vec{v} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{v} \cdot \vec{v} = -|\vec{v}|^2 = -\frac{9}{4}$

4 Si $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$, averigua el ángulo $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$. (Usa la calculadora).

$$\cos\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-2}{3 \cdot 5} = -\frac{2}{15} \to \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 97°\ 39'\ 44'$$

5 Preparar la tarea. **[El alumnado, por grupos, puede analizar los pasos a realizar para hacer el cálculo planteado correctamente].**

Halla $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{u})$ y $\vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{u})$ sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$, $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 120°$.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos 120° + |\vec{u}|\,|\vec{u}|\cos 0° =$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot 3 = -\frac{15}{2} + 9 = \frac{3}{2}$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} = 25 - \left(-\frac{15}{2}\right) = \frac{65}{2}$$

Página 186

1 Lápices al centro. **[La estructura en cuatro apartados del ejercicio permite trabajar esta estrategia].**

Dados $\vec{u}(3, -4)$ y $\vec{v}(-1, 3)$. Calcula.

a) $\vec{u} \bullet \vec{v}$ y $\vec{v} \bullet \vec{u}$

b) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

c) El valor de k para que $(4, k)$ sea perpendicular a $\vec{v}$.

d) La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y su vector proyección.

a) $\vec{u} \bullet \vec{v} = (3, -4) \bullet (-1, 3) = 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 = -15$

$\vec{v} \bullet \vec{u} = (-1, 3) \bullet (3, -4) = (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = -15$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{-15}{5\sqrt{10}} = -0{,}9486832981 \;\rightarrow\; (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 161°\ 33'\ 54''$

c) $(4, k) \perp (-1, 3) \;\rightarrow\; (4, k) \bullet (-1, 3) = 0 \;\rightarrow\; -4 + 3k = 0 \;\rightarrow\; k = \dfrac{4}{3}$

Para que $(4, k)$ sea perpendicular a $\vec{v}$, ha de ser $k = \dfrac{4}{3}$.

d) $proy_{\vec{v}}\vec{u} = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{-15}{\sqrt{10}} = \dfrac{-15\sqrt{10}}{10} = \dfrac{-3\sqrt{10}}{2}$

El vector proyección, como $|\vec{v}| = \sqrt{10}$, será: $\dfrac{-3\sqrt{10}}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{10}} \cdot (-1, 3) = \left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{9}{2}\right)$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 187

1. Producto escalar en bases no ortonormales

Hazlo tú

- **Calcula el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$, siendo $\vec{a}(0, 3)$ y $\vec{b}(-1, 1)$ sus coordenadas respecto a la base *B*.**

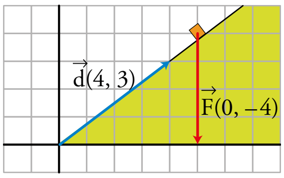
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3\vec{v} \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) = 3\vec{v} \cdot (-\vec{u}) + 3\vec{v} \cdot \vec{v} = -3\vec{u} \cdot \vec{v} + 3\,|\vec{v}|^2 = -9 + 9 = 0$

Página 188

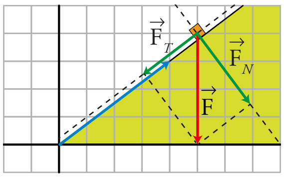
4. Descomponer un vector

Hazlo tú

- **Realiza el mismo problema con estos otros datos:**



Resolución gráfica:



Resolución analítica:

El vector $\vec{d}(4,3)$ es paralelo a la rampa y, por tanto, a $\vec{F_T}$. El vector $\vec{n}(3,-4)$ es perpendicular a $\vec{d}$ y, por tanto, paralelo a $\vec{F_N}$.

Por ser $\vec{F_T}$ paralelo a $\vec{d}(4,3)$: $\vec{F_T} = k\vec{d} = (4k,\ 3k),\ k \in \mathbb{R}$

Por ser $\vec{F_N}$ paralelo a $\vec{n}(3,-4)$: $\vec{F_N} = h\vec{n} = (3h, -4h),\ h \in \mathbb{R}$

$\vec{F} = \vec{F_T} + \vec{F_N} \rightarrow (0,-4) = (4k,\ 3k) + (3h,\ -4h) = (4k + 3h,\ 3k - 4h)$

Igualando coordenadas:

$$\begin{cases} 0 = 4k + 3h \\ -4 = 3k - 4h \end{cases}$$

Por tanto: $k = -\dfrac{12}{25};\ h = \dfrac{16}{25}$

$\vec{F_N} = \left(\dfrac{48}{25}, -\dfrac{64}{25}\right);\ \vec{F_T} = \left(-\dfrac{48}{25}, -\dfrac{36}{25}\right)$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 4.3. (EA 4.3.1.-EA 4.3.2.)

Página 189

1. Obtención de vectores paralelos y perpendiculares a uno dado

- **Dado el vector $\vec{v}(9, 12)$, calcular las coordenadas de los siguientes vectores:**

a) $\vec{u}$, unitario y de la misma dirección que el vector $\vec{v}$.

b) $\vec{w}$, ortogonal al vector $\vec{v}$ y del mismo módulo.

c) $\vec{z}$, de módulo 5 y ortogonal a $\vec{v}$.

a) $|\vec{v}| = \sqrt{81+144} = 15$

$\vec{u}_1 = \frac{1}{15}(9,12) = \left(\frac{9}{15}, \frac{12}{15}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

Otra solución: $\vec{u}_2 = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

b) $\vec{w}_1 = (-12, 9)$

Otra solución: $\vec{w}_2 = (12, -9)$

c) $|\vec{w}| = \sqrt{144+81} = 15$

$\vec{z}_1 = 5 \cdot \frac{1}{15}(-12, 9) = (-4, 3)$

$\vec{z}_2 = 5 \cdot \frac{1}{15}(12, -9) = (4, -3)$

2. Demostración de que un triángulo es isósceles

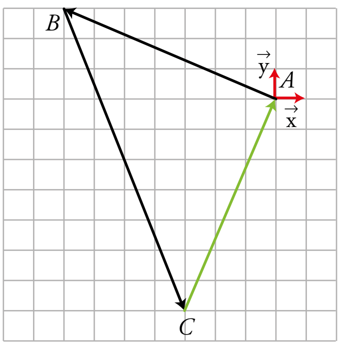
- **Dados $\vec{AB}(-7, 3)$ y $\vec{BC}(4, -10)$, comprobar que el triángulo formado por los vectores $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ y $\vec{AC}$ es isósceles.**

a) Comparando sus lados.

b) Comparando sus ángulos.

Resolución gráfica:

Vemos que el módulo de $\vec{AB}$ es igual al de $\vec{AC}$ y los ángulos $\hat{B} = \hat{C}$. Además, $\hat{A} = 90°$.



Resolución analítica:

Empezamos dibujando el vector $\vec{AB}(-7, 3)$ desde el punto $A(0, 0)$ por lo que $B(-7, 3)$.

Calculemos $\vec{AC}$ como la suma de los vectores que ya tenemos de inicio:

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \to (-7, 3) + (4, -10) = (-3, -7)$

Ya podemos decir, por sus coordenadas, que $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ son perpendiculares.

Calculemos los módulos de los 3 vectores:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{49+9} = \sqrt{58} = 7{,}6$

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{16+100} = \sqrt{116} = 10{,}8$

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{9+49} = \sqrt{58} = 7{,}6$

Por lo que el triángulo tiene dos lados iguales.

Como $\hat{A} = 90°$ ya que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son perpendiculares, podemos calcular el ángulo en $\hat{B}$.

$$cos\ \hat{B} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{7{,}6}{10{,}8} = 0{,}7 \rightarrow \hat{B} = 45°$$

Y como los ángulos del triángulo deben sumar $180° \rightarrow \hat{C} = 45°$

Hemos comprobado que el triángulo tiene dos lados iguales y también dos ángulos iguales.

3. Cálculo de los módulos de la suma y de la diferencia de dos vectores

- **De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ conocemos sus módulos, 1 y $\sqrt{2}$, respectivamente, y sabemos que forman un ángulo de 45°.**

  Hallar $|\vec{a}+\vec{b}|$ y $|\vec{a}-\vec{b}|$.

a$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a} \bullet \vec{a} + \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{b} \bullet \vec{a} + \vec{b} \bullet \vec{b} =$

$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \bullet \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot cos\ 45° + 2 =$

$$= 1 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 5$$

$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{5}$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b}) \bullet (\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a} \bullet \vec{a} - \vec{a} \bullet \vec{b} - \vec{b} \bullet \vec{a} + \vec{b} \bullet \vec{b} =$

$= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \bullet \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot cos\ 45° + 2 =$

$$= 1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 1$$

$|\vec{a}-\vec{b}| = 1$

4. Cálculo de ángulos en un rombo

- **Los vectores $\overrightarrow{AB}(6, 8)$ y $\overrightarrow{AD}(10, 0)$ son dos lados contiguos de un rombo.**

  a) Comprobar que sus lados son iguales.

  b) Comprobar que sus diagonales son perpendiculares.

  c) Hallar los ángulos interiores del rombo.

  d) Calcular la longitud de sus diagonales.

a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{100+0} = \sqrt{100} = 10$

b) Veamos que:

$\vec{d}_1 = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = (10,0) + (6,8) = (16,8) = \overrightarrow{AC}$

$\vec{d}_2 = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = (6,8) - (10,0) = (-4,8) = \overrightarrow{BD}$

Veamos que son perpendiculares comprobando que su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = 16 \cdot 4 + 8 \cdot (-8) = 64 - 64 = 0$

c) Hallemos el ángulo entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$, es decir, el $\hat{A}$ según el dibujo:

$$cos\,\hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{(6,8) \bullet (10,0)}{100} = \frac{60+0}{100} = 0,6 \rightarrow \hat{A} = 53°\,7'\,48''$$

Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD}$, calculemos el ángulo en $\hat{B}$:

$$cos\,\hat{B} = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet -\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |-\overrightarrow{AD}|} = \frac{(6,8) \bullet (-10,0)}{100} = \frac{-60+0}{100} = -0,6 \rightarrow \hat{B} = 126°\,52'\,12''$$

d) $|\vec{d}_1| = |(16,8)| = \sqrt{16^2 + 8^2} = \sqrt{256+64} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$

$|\vec{d}_2| = |(-4,8)| = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

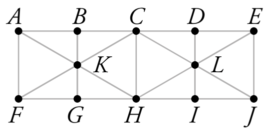
C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 190

Para practicar

Los vectores y sus operaciones

1 **Observa la siguiente figura:**



a) Compara el módulo, la dirección y el sentido de las siguientes parejas de vectores: $\overrightarrow{AB}$ **e** $\overrightarrow{IJ}$**;** $\overrightarrow{AH}$ **y** $\overrightarrow{LC}$**.**

b) Calcula $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}$ **y** $\overrightarrow{HC} + 2\overrightarrow{CL}$**.**

c) Completa las siguientes igualdades: $\overrightarrow{LC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{L\ldots}$**;** $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{H\ldots} = \overrightarrow{HC}$

a) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{IJ}$ tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

$\overrightarrow{AH}$ y $\overrightarrow{LC}$ tienen misma dirección, sentido contrario y $|\overrightarrow{AH}| = 2|\overrightarrow{LC}|$.

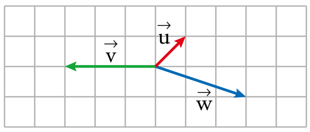
b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{HC} + 2\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{HJ}$

c) $\overrightarrow{LC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{LD}$

$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{HC}$

2 **Sean** $\vec{u}$**,** $\vec{v}$ **y** $\vec{w}$ **los siguientes vectores:**



Representa en una cuadrícula:

a) $\vec{u} + \vec{v}$

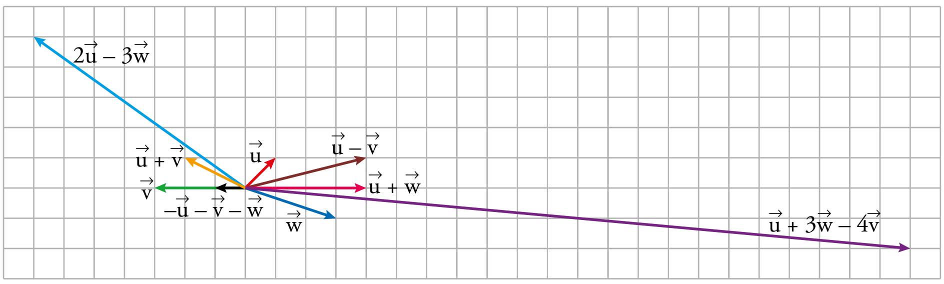
b) $\vec{u} - \vec{v}$

c) $\vec{u} + \vec{w}$

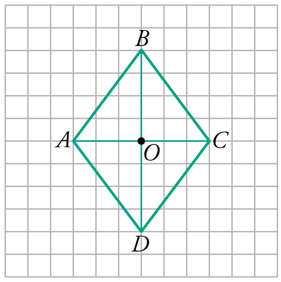
d) $2\vec{u} - 3\vec{w}$

e) $\vec{u} + 3\vec{w} - 4\vec{v}$

f) $-\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$



3 **Observa el rombo y expresa el resultado de cada suma o resta como se hace en los apartados resueltos a) y b).**



a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

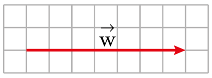
e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

f) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA}$

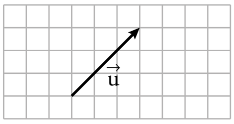
a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\vec{0}$ c) $\overrightarrow{DC}$

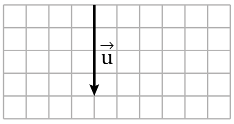
d) $\vec{0}$ e) $\overrightarrow{AC}$ f) $2\overrightarrow{DC}$

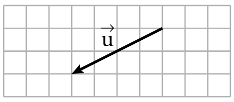
4 **Considera el vector $\vec{w}$:**

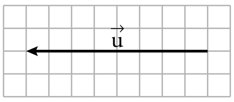


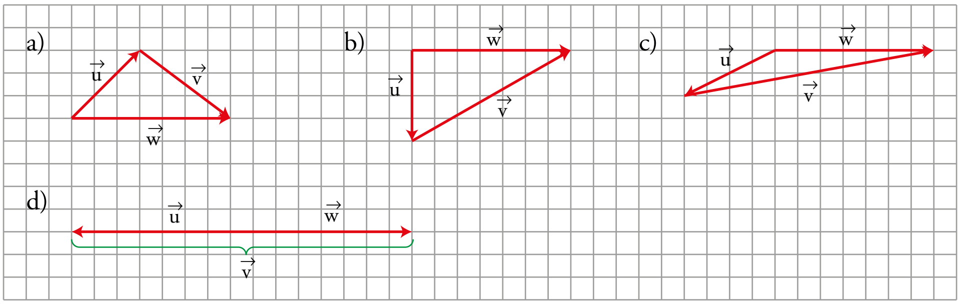
Dibuja en cada uno de estos casos un vector $\vec{v}$ que sumado con $\vec{u}$ dé como resultado $\vec{w}$:

a)


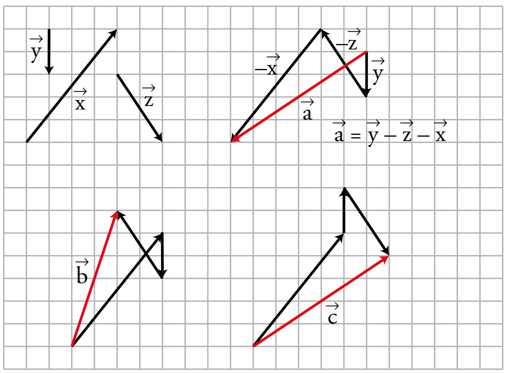
b)


c)


d)




5 **Hemos obtenido los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ operando con los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$. ¿Qué operaciones hemos hecho en cada caso?**



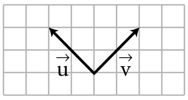
$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}$ $\vec{c} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z}$

Bases y coordenadas

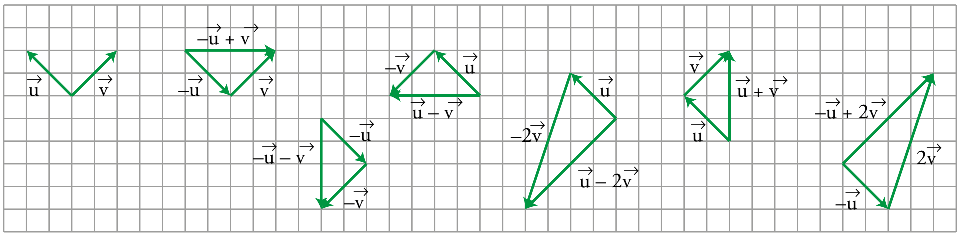
6 **A la vista de la figura, dibuja los vectores:**

$$-\vec{u}+\vec{v} \qquad \vec{u}-\vec{v} \qquad \vec{u}+\vec{v}$$

$$-\vec{u}-\vec{v} \qquad -\vec{u}+2\vec{v} \qquad \vec{u}-2\vec{v}$$



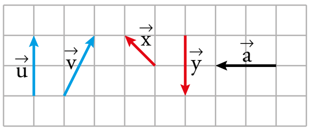
Si tomamos como base $B(\vec{u}, \vec{v})$, ¿cuáles son las coordenadas de los vectores que has dibujado?



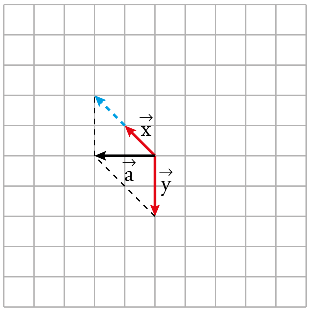
$-\vec{u}+\vec{v}=(-1, 1)$ $\qquad$ $\vec{u}-\vec{v}=(1, -1)$ $\qquad$ $\vec{u}+\vec{v}=(1, 1)$

$-\vec{u}-\vec{v}=(-1, -1)$ $\qquad$ $-\vec{u}+2\vec{v}=(-1, 2)$ $\qquad$ $\vec{u}-2\vec{v}=(1, -2)$

7 **Escribe el vector $\vec{a}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Escríbelo también como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

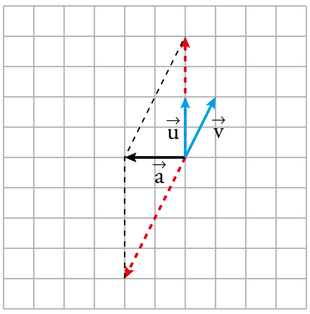


¿Cuáles son las coordenadas de $\vec{a}$ respecto de la base $B(\vec{x}, \vec{y})$? ¿Y respecto de la base $B'(\vec{u}, \vec{v})$?



$\vec{a}=2\vec{x}+\vec{y}$

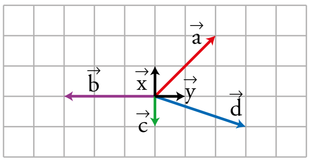
En la base $B(\vec{x}, \vec{y})$, las coordenadas de $\vec{a}$ son $\vec{a}=(2, 1)$.



$\vec{a}=2\vec{u}-2\vec{v}$

En la base $B'(\vec{u}, \vec{v})$, las coordenadas de $\vec{a}$ son $\vec{a}=(2, -2)$.

8 **Escribe las coordenadas de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ respecto de la base $B(\vec{x}, \vec{y})$.**



$\vec{a} = (2, 2)$; $\vec{b} = (0, -3)$; $\vec{c} = (-1, 0)$; $\vec{d} = (-1, 3)$

9 **¿En qué casos $B(\vec{u}, \vec{v})$ es una base?**

a) $\vec{u}(3, -1)$, $\vec{v}(1, 3)$ **b)** $\vec{u}(2, 6)$, $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

a) Sí, tienen distinta dirección ($\vec{u} \neq k\vec{v}$ para cualquier k). Basta con representarlos gráficamente para comprobarlo.

b) No, pues tienen la misma dirección ($\vec{u} = 3\vec{v}$).

10 1-2-4. **[Los alumnos y las alumnas pueden compartir sus respuestas que, seguramente serán diferentes y, posteriormente, debatirlas para encontrar una posición común].**

Considera el vector $\vec{u}(-1, -3)$. Escribe un vector $\vec{v}$ para que $B(\vec{u}, \vec{v})$:

a) Sea una base. **b) Sea una base ortogonal.**

c) No sea base. **d) Sea una base ortonormal.**

a) Para que formen una base sus coordenadas no pueden ser proporcionales. Hay muchas soluciones, pero una de ellas es $\vec{v} = (1, 4)$.

b) Para que sea ortogonal necesitamos que su producto escalar sea igual a cero:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = (-1, -3) \bullet (v_1, v_2) = -v_1 - 3v_2$$

escogemos uno de ellos, por ejemplo $\vec{v} = (-3, 1)$.

c) Para que no formen una base, sus coordenadas tienen que ser proporcionales. Hay muchas soluciones, pero una de ellas es $\vec{v} = (2, 6)$.

d) Para que sea ortonormal necesitamos que sea ortogonal y que su módulo sea 1. Cogeremos la base de b) y solamente necesitamos dividirlos entre su módulo:

$$\frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{1+9}}(-1, -3) = \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{9+1}}(-3, 1) = \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

Página 191

11 **Dados los vectores $\vec{u}(3, -5)$ y $\vec{v}(-2, 1)$, calcula:**

a) $-2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ **b)** $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v})$

a) $-2\,(3, -5) + \frac{1}{2}(-2, 1) = (-6, 10) + \left(-1, \frac{1}{2}\right) = \left(-7, \frac{21}{2}\right)$

b) $\frac{1}{2}[(3, -5) + (-2, 1)] - \frac{2}{3}[(3, -5) - (-2, 1)] = \frac{1}{2}(1, -4) - \frac{2}{3}(5, -6) = \left(\frac{1}{2}, -2\right) + \left(\frac{-10}{3}, 4\right) = \left(\frac{-17}{6}, 2\right)$

12 **Halla el vector $\vec{b}$ tal que $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, siendo $\vec{a}(-1, 3)$ y $\vec{c}(7, -2)$.**

$$(7, -2) = 3(-1, 3) - \frac{1}{2}(b_1, b_2) \ \rightarrow \ \begin{cases} 7 = -3 - (1/2)\, b_1 \ \rightarrow \ b_1 = -20 \\ -2 = 9 - (1/2)\, b_2 \ \rightarrow \ b_2 = 22 \end{cases}$$

$\vec{b}\,(-20, 22)$

13 **Dados los vectores $\vec{a}(3, -2)$, $\vec{b}(-1, 2)$ y $\vec{c}(0, -5)$, calcula m y n de modo que $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.**

$(0, -5) = m(3, -2) + n(-1, 2) \rightarrow \begin{cases} 0 = 3m - n \\ -5 = -2m + 2n \end{cases}$

Despejando en la primera ecuación, $n = 3m$, y sustituyendo en la segunda:

$-5 = -2m + 6m \rightarrow -5 = 4m \rightarrow m = \dfrac{-5}{4} \rightarrow n = \dfrac{-15}{4}$

14 **Expresa el vector $\vec{a}(-1, -8)$ como combinación lineal de $\vec{b}(3, -2)$ y $\vec{c}\left(4, -\frac{1}{2}\right)$.**

$(-1, -8) = m(3, -2) + n\left(4, -\dfrac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} -1 = 3m + 4n \\ -8 = -2m - \dfrac{1}{2}n \end{cases}$

Resolvemos el sistema por reducción (por ejemplo). Para ello, multiplicamos la segunda ecuación por 8 (en los dos miembros) y sumamos miembro a miembro las dos:

$$\begin{array}{rcl} -1 &=& 3m + 4n \\ -64 &=& -16m - 4n \\ \hline -65 &=& -13m \end{array} \rightarrow m = \frac{-65}{-13} = 5$$

Sustituyendo en una de las dos ecuaciones y despejando n:

$-1 = 3m + 4n \rightarrow -1 = 3 \cdot (5) + 4n \rightarrow -16 = 4n \rightarrow n = -4$

Así, podemos decir: $\vec{a} = 5\vec{b} - 4\vec{c}$

15 **En una base ortonormal las coordenadas de un vector son $\vec{v}(2, -5)$. Halla las coordenadas de $\vec{v}$ en la base $B = ((1, -1), (0, -1))$.**

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x}(1,-1) \\ \vec{y}(0,-1) \\ \vec{v}(2,-5) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y} \rightarrow (2,-5) = a(1,-1) + b(0,-1) = (a,-a) + (0,-b) = (a,-a-b) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{cases} 2 = a \\ -5 = -a - b \end{cases}\right\} \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 3 \end{array}$$

Las coordenadas de $\vec{v}$ en la nueva base son (2, 3).

Producto escalar. Módulo y ángulo

16 **Dados los vectores $\vec{x}(5, -2)$, $\vec{y}(0, 3)$, $\vec{z}(-1, 4)$, calcula:**

a) $\vec{x} \cdot \vec{y}$ **b)** $\vec{x} \cdot \vec{z}$ **c)** $\vec{y} \cdot \vec{z}$

a) $\vec{x} \cdot \vec{y} = (5, -2) \cdot (0, 3) = -6$

b) $\vec{x} \cdot \vec{z} = (5, -2) \cdot (-1, 4) = -5 - 8 = -13$

c) $\vec{y} \cdot \vec{z} = (0, 3) \cdot (-1, 4) = 12$

17 **De los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sabemos que:**

$\vec{u}(-1, 1)$; $|\vec{v}| = 1$; $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 45°$; $\vec{w} \perp \vec{v}$

Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

$|\vec{u}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos 45° = \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, porque $\cos 90° = 0$.

18 **Dados $\vec{u}(2, 3)$, $\vec{v}(-3, 1)$ y $\vec{w}(5, 2)$, calcula:**

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w}$ **b)** $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$ **d)** $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v})$

a) $3\vec{u} + 2\vec{v} = 3(2, 3) + 2(-3, 1) = (6, 9) + (-6, 2) = (0, 11)$

$(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w} = (0, 11) \cdot (5, 2) = 0 \cdot 5 + 11 \cdot 2 = 0 + 22 = 22$

b) $\left.\begin{array}{l}\vec{u} \cdot \vec{w} = (2, 3) \cdot (5, 2) = 10 + 6 = 16 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = (-3, 1) \cdot (5, 2) = -15 + 2 = -13\end{array}\right\} \to \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{w} = 16 - (-13) = 16 + 13 = 29$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3) \cdot (-3, 1) = -6 + 3 = -3$

$(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = -3(5, 2) = (-15, -6)$

d) $\vec{v} \cdot \vec{v} = (-3, 1) \cdot (-3, 1) = 9 + 1 = 10$

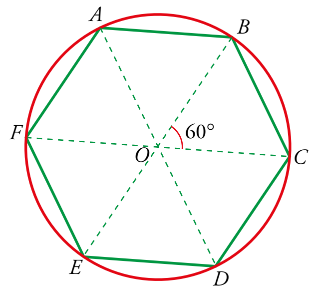
$\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (2, 3) \cdot 10 = (20, 30)$

19 **En una circunferencia de centro *O* y de radio 2 cm, se inscribe un hexágono regular de vértices *A, B, C, D, E, F*. Calcula los productos:**

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ **b)** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED}$ **d)** $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF}$

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60° = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$



b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120° = 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} \overset{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot \cos 0° \overset{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

(*) *OAB* es un triángulo equilátero, luego:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OA}| = 2$$

Razonamos igual para $|\overrightarrow{ED}|$.

d) $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{EF}$ (mismo módulo, misma dirección y sentido opuesto)

Luego: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 180° = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4$

20 **Si *A*, *B* y *C* son los vértices de un triángulo equilátero de lado 1, calcula:**

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **b)** $2\overrightarrow{AB} \cdot (-3\overrightarrow{AC})$

c) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}$ **d)** $(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC}$

En un triángulo equilátero, los lados miden 1 y forman un ángulo de 60°.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 60° = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) $2\overrightarrow{AB} \cdot (-3\overrightarrow{AC}) = 2 \cdot (-3)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{6}{2} = 3$

c) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 1^2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

d) $(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \frac{1}{2} - 3|\overrightarrow{AC}|^2 = 1 - 3 \cdot 1 = -2$

21 **Comprueba si las siguientes parejas de vectores son perpendiculares:**

a) $\vec{u}(0, 1)$, $\vec{v}(2, 4)$ **b)** $\vec{u}(0, 7)$, $\vec{v}(-5, 0)$

c) $\vec{u}(2, 5)$, $\vec{v}(5, 2)$ **d)** $\vec{u}(3, 6)$, $\vec{v}(-2, 1)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0,1) \cdot (2, 4) = 4 \neq 0 \rightarrow$ No son perpendiculares.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 7) \cdot (-5, 0) = 0 \rightarrow$ Sí son perpendiculares.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 5) \cdot (5, 2) = 20 \neq 0 \rightarrow$ No son perpendiculares.

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 6) \cdot (-2, 1) = 0 \rightarrow$ Sí son perpendiculares.

22 **Obtén, en cada caso, un vector paralelo y otro perpendicular al vector dado.**

a) $\vec{u}(0, 3)$ **b)** $\vec{u}(-2, 0)$

c) $\vec{u}(3, \rightarrow)$ **d)** $\vec{u}(-1, -1)$

	PARALELO	PERPENDICULAR
a)	(0, 9)	(3, 0)
b)	(10, 0)	(0, –5)
c)	(30, 80)	(–8, 3)
d)	(2, 2)	(1, –1)

23 **Calcula k para que el producto $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sea igual a 0 en los siguientes casos:**

a) $\vec{u}(6, k)$, $\vec{v}(-1, 3)$ **b)** $\vec{u}\left(\frac{1}{5}, -2\right)$, $\vec{v}(k, 3)$

c) $\vec{u}(-3, -2)$, $\vec{v}(5, k)$ **d)** $\vec{u}(k, -k)$, $\vec{v}(5, 5)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 3k = 0 \rightarrow k = 2$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{1}{5}, -2\right) \cdot (k, 3) = \frac{1}{5}k - 6 = 0 \rightarrow k = 30$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, -2) \cdot (5, k) = -2k - 15 = 0 \rightarrow k = -\frac{15}{2}$

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (k, -k) \cdot (5, 5) = 0 \rightarrow$ Cualquier $k \in \mathbb{R}$ es válido.

24 **Halla el módulo de cada uno de los siguientes vectores:**

$\vec{u}(3, 2)$ $\vec{v}(-2, 3)$ $\vec{w}(5, 0)$

$|\vec{u}| = |(3, 2)| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$|\vec{v}| = |(-2, 3)| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$|\vec{w}| = |(5, 0)| = \sqrt{25+0} = 5$

25 **Halla el valor de m para que el módulo del vector $\vec{u}\left(\frac{3}{5}, m\right)$ sea igual a 1.**

$$|\vec{u}| = \left|\left(\frac{3}{5}, m\right)\right| = \sqrt{\frac{9}{25} + m^2} = 1 \rightarrow m = -\frac{4}{5},\ m = \frac{4}{5}$$

26 **Dada la base $B(\vec{u}, \vec{v})$ donde $\vec{u}(3, -4)$ y $\vec{v}(0, -8)$, determina, en cada caso, una base B' de vectores unitarios tales que:**

a) Los vectores de B' sean paralelos a los de B.

b) Los vectores de B' sean perpendiculares a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $B' = (\vec{u}\,', \vec{v}\,')$

$|\vec{u}| = \sqrt{9+16} = 5$; $|\vec{v}| = \sqrt{0+64} = 8$

$\vec{u}\,' = \frac{1}{5}\vec{u} = \frac{1}{5}(3, -4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ $\qquad$ $\vec{v}\,' = \frac{1}{8}\vec{v} = \frac{1}{8}(0, -8) = (0, -1)$

b) $B' = (\vec{u}\,', \vec{v}\,')$

$\vec{u}\,' \perp \vec{u} \to \vec{u}\,' = (4, 3)$

$\vec{v}\,' \perp \vec{v} \to \vec{v}\,' = (8, 0)$

27 **Dado el vector $\vec{u}(-5, k)$ calcula k de modo que:**

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$.

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{34}$.

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \to (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \to -20 - 2k = 0 \to k = -10$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{(-5)^2 + k^2} = \sqrt{25 + k^2} = \sqrt{34} \to 25 + k^2 = 34 \to k^2 = 9 \to k = \pm 3$

Hay, pues, dos soluciones.

28 **Dado el vector $\vec{u}(5, 12)$, determina:**

a) Los vectores unitarios paralelos a $\vec{u}$.

b) Los vectores ortogonales a $\vec{u}$ que tengan el mismo módulo que $\vec{u}$.

c) Los vectores unitarios y perpendiculares a $\vec{u}$.

$|\vec{u}| = \sqrt{25+144} = 13$

a) $\vec{v}_1 = \frac{1}{13}(5, 12) = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$

$\vec{v}_2 = -\frac{1}{13}(5, 12) = \left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

b) $\vec{v}_1 = (-12, 5)$

$\vec{v}_2 = (12, -5)$

c) $\vec{v}_1 = \frac{1}{13}(-12, 5) = \left(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$

$\vec{v}_2 = -\frac{1}{13}(-12, 5) = \left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

29 **Halla un vector de módulo 50 que sea perpendicular al vector $\vec{a}(8, 6)$.**

$\vec{u}\,' = (6, -8)$ es perpendicular a $\vec{a}$.

$|\vec{u}\,'| = \sqrt{36+64} = 10$

Un vector con esta dirección y de módulo 1 es:

$\vec{u} = \frac{1}{10}(6, -8) = \left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

El vector que buscamos es:

$\vec{v} = 50\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = (30, -40)$

También es solución $\vec{v}\,' = (-30, 40)$.

30 **Halla el ángulo que forman estos pares de vectores:**

a) $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(1, -5)$ **b)** $\vec{m}(4, 6)$, $\vec{n}(3, -2)$ **c)** $\vec{a}(1, 6)$, $\vec{b}\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$

a) $cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 5}{\sqrt{9+4}\sqrt{1+25}} = -\dfrac{7}{26}\sqrt{2} \approx -0{,}38 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 112°\ 20'\ 12''$

b) $cos\,(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \dfrac{4 \cdot 3 - 6 \cdot 2}{\sqrt{16+36}\sqrt{9+4}} = 0 \rightarrow (\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 90°$

c) $cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 \cdot 3}{\sqrt{1+36}\sqrt{\frac{1}{4}+9}} = -1 \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180°$

31 **Dados** $\vec{u}\left(\frac{1}{2}, k\right)$ **y** $\vec{v}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, **calcula** k **para que** $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$ **formen un ángulo de 60°.**

$$cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + k \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}} = cos\,60° = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{4}+k^2} = 1 \rightarrow k = -\frac{1}{2}\sqrt{3};\ k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

32 **Calcula** x, **de modo que el producto escalar de** $\vec{a}(3, -5)$ **y** $\vec{b}(x, 2)$ **sea igual a 7. ¿Qué ángulo forman los vectores** $\vec{a}$ **y** $\vec{b}$**?**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3, -5) \cdot (x, 2) = 7 \rightarrow 3x - 10 = 7 \rightarrow x = \dfrac{17}{3}$

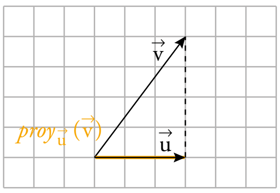
$$cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{7}{\sqrt{9+25}\sqrt{\left(\frac{17}{3}\right)^2+4}} = \frac{21\sqrt{442}}{2\,210} \approx 0{,}2 \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 79°\ 31'\ 17''$$

33 **Calcula la proyección de** $\vec{u}$ **sobre** $\vec{v}$, **la de** $\vec{v}$ **sobre** $\vec{u}$ **y representa gráficamente cada situación.**

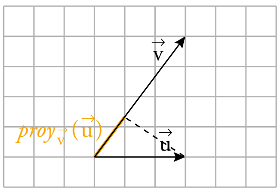
a) $\vec{u}(3, 0)$ **y** $\vec{v}(3, 4)$ **b)** $\vec{u}(1, 3)$ **y** $\vec{v}(-4, 2)$ **c)** $\vec{u}(-2, -5)$ **y** $\vec{v}(5, -2)$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{9+0} = 3;\ |\vec{v}| = \sqrt{9+16} = 5;\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{9}{3 \cdot 5} = \dfrac{3}{5}$

$proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}|\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 5 \cdot \dfrac{3}{5} = 3$

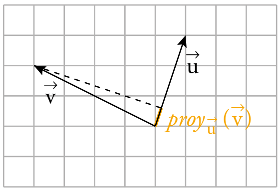


$proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}|\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 3 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{5}$

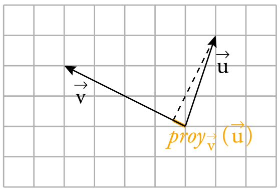


b) $|\vec{u}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$; $|\vec{v}| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$; $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{-4 \cdot 6}{\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$

$proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 2\sqrt{5} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{10} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$



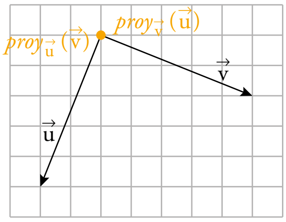
$proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{10} \cdot \dfrac{1}{10}\sqrt{2} = \dfrac{1}{5}\sqrt{5}$



c) $|\vec{u}| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$; $|\vec{v}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$; $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$

$proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$

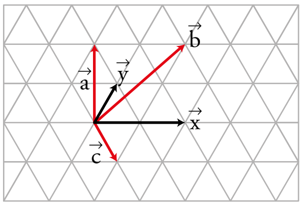
$proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$



Página 192

Para resolver

34 **Expresa los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.**



$\vec{a} = -\dfrac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y}$ $\qquad$ $\vec{b} = \dfrac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y}$ $\qquad$ $\vec{c} = \dfrac{1}{2}\vec{x} - \vec{y}$

35 **Sean los puntos A, B y C los vértices de un triángulo. Si $\overrightarrow{AB}(-1, 4)$, $\overrightarrow{AC}(3, -1)$ y $\overrightarrow{BC}(4, -5)$, ¿puede tratarse de un triángulo rectángulo?**

$\overrightarrow{AB} = (-1, 4)$; $\overrightarrow{AC} = (3, -1)$; $\overrightarrow{BC} = (4, -5)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1, 4) \cdot (3, -1) = -7$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1, 4) \cdot (4, -5) = -24$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (3, -1) \cdot (4, -5) = 17$

Ninguno de los tres productos escalares es cero, luego ningún par de vectores es perpendicular.

Los lados no son perpendiculares. Por tanto, el triángulo no es rectángulo.

36 **Sean $\vec{a}(-6, 8)$ y $\vec{b}(3, 4)$. Halla, en cada caso, un vector $\vec{c}(x, y)$ perpendicular a $\vec{b}$ tal que:**

a) $|\vec{c}| = |\vec{a}|$ **b) $|\vec{c}| = 1$** **c) $\vec{c} \cdot \vec{a} = 4$**

a) $|\vec{a}| = \sqrt{36+64} = 10$; $|\vec{b}| = \sqrt{9+16} = 5$

Un vector $\vec{c} \perp \vec{b}$ es de la forma $\vec{c} = k \cdot (-4, 3)$.

$\vec{c} = k(-4, 3) = 10 \cdot \frac{1}{5}(-4, 3) = (-8, 6)$

b) $\vec{c} = \frac{1}{5}(-4, 3) = \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

c) $\vec{c} \cdot \vec{a} = k \cdot (-4, 3) \cdot (-6, 8) = 24k + 24k = 48k = 4 \rightarrow k = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$

$\vec{c} = \frac{1}{12}(-4, 3) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$

37 **Dados los vectores $\vec{u}(-1, a)$ y $\vec{v}(b, 15)$, halla a y b, en cada caso, de modo que:**

a) $\vec{u} \perp \vec{v}$ y $|\vec{u}| = \sqrt{10}$ **b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$ y $|\vec{v}| = 17$**

a) $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ |\vec{u}| = \sqrt{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-1, a) \cdot (b, 15) = 0 \\ \sqrt{1+a^2} = \sqrt{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15a - b = 0 \\ 1 + a^2 = 10 \end{cases}$

Soluciones: $a_1 = -3$, $b_1 = -45$; $a_2 = 3$, $b_2 = 45$

b) $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 7 \\ |\vec{v}| = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-1, a) \cdot (b, 15) = 7 \\ \sqrt{b^2 + 15^2} = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15a - b = 7 \\ b^2 + 15^2 = 17^2 \end{cases}$

Soluciones: $a_1 = -\frac{1}{15}, b = -8$; $a_2 = 1$, $b_2 = 8$

38 **Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$, siendo $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 0)$, halla k de modo que $(\vec{a} + \vec{b})$ sea ortogonal a $(\vec{a} - \vec{b})$.**

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= 2(2,3) - (-3,0) = (7,6) \\ \vec{b} &= -3(2,3) + k(-3,0) = (-6-3k, -9) \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} \vec{a} + \vec{b} = (1-3k, -3) \\ \vec{a} - \vec{b} = (13+3k, 15) \end{cases}$$

Ahora, como el producto escalar de ambos vectores debe ser 0, por ser ortogonales:

$(1 - 3k, -3) \cdot (13 + 3k, 15) = 0 \rightarrow (1 - 3k)(13 + 3k) + (-3) \cdot 15 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 13 + 3k - 39k - 9k^2 - 45 = 0 \rightarrow 9k^2 + 36k + 32 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow k = \frac{-36 \pm \sqrt{1296 - 1152}}{18} = \frac{-36 \pm \sqrt{144}}{18} = \frac{-36 \pm 12}{18} = \begin{cases} -24/18 = -4/3 = k_1 \\ -48/18 = -8/3 = k_2 \end{cases}$$

39 **Calcula la proyección de $\vec{u} + \vec{v}$ sobre $\vec{u}$ sabiendo que $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$ y $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 45°$.**

Por ser $|\vec{u}| = |\vec{v}| \rightarrow (\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \frac{1}{2}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 22°\ 30'$

$$proy_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u} + \vec{v}|\ cos(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \sqrt{|\vec{u} + \vec{v}|^2}\ cos(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \sqrt{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})}\ cos(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) =$$

$$= \sqrt{|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2}\ cos\ 22°\ 30' = \sqrt{4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4}\ cos\ 22°\ 30' =$$

$$= \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} \cdot 0{,}92 \approx 3{,}4$$

40 **Si A, B y C son los vértices de un triángulo, clasifica en cada caso estos triángulos según la amplitud de sus ángulos:**

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$ **y** $\overrightarrow{BC} = (3, -2)$

b) $\overrightarrow{AB} = (4, 1)$ **y** $\overrightarrow{CA} = (-3, 2)$

c) $\overrightarrow{BC} = (4, -2)$ **y** $\overrightarrow{CA} = (-7, 1)$

d) $\overrightarrow{AB} = (2, 0)$ **y** $\overrightarrow{CA} = (-4, 2)$

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$ y $\overrightarrow{BC} = (3, -2)$

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} = 3 - 4 = -1 < 0 \rightarrow$ Es un triángulo obtusángulo.

b) $\overrightarrow{AB} = (4, 1)$ y $\overrightarrow{CA} = (-3, 2)$

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CA} = -12 + 2 = -10 < 0 \rightarrow$ Es un triángulo obtusángulo.

c) $\overrightarrow{BC} = (4, -2)$ y $\overrightarrow{CA} = (-7, 1)$

$\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{CA} = -28 - 2 = -30 < 0 \rightarrow$ Es un triángulo obtusángulo.

d) $\overrightarrow{AB} = (2, 0)$ y $\overrightarrow{CA}\ (-4, 2)$

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CA} = -8 + 0 = -8 < 0 \rightarrow$ Es un triángulo obtusángulo.

41 **Calcula el ángulo que forman estos vectores con $\vec{y}\,(1, 0)$.**

a) $\vec{u}\,(3, 4)$ **b)** $\vec{v}\,(-4, 1)$

c) $\vec{w}\,(0, -5)$ **d)** $\vec{x}\,(3, 0)$

a) $\vec{u} \bullet \vec{y} = |\vec{u}| \cdot |\vec{y}| \cdot cos(\widehat{\vec{u}, \vec{y}})$

Sustituimos y calculamos:

$3 + 0 = \sqrt{9 + 16} \cdot \sqrt{1} \cdot cos(\widehat{\vec{u}, \vec{y}}) \rightarrow \widehat{\vec{u}, \vec{y}} = 53° 7' 5''$

b) Usaremos la misma fórmula:

$-4 = \sqrt{17} \cdot \sqrt{1} \cdot cos(\widehat{\vec{v}, \vec{y}}) \rightarrow \widehat{\vec{v}, \vec{y}} = 165° 57' 22''$

c) Usaremos la misma fórmula:

$0 = \sqrt{25} \cdot \sqrt{1} \cdot cos(\widehat{\vec{w}, \vec{y}}) \rightarrow \widehat{\vec{w}, \vec{y}} = 90°$

d) En este caso son vectores proporcionales por lo que su ángulo es cero. Si lo calculamos:

$3 = \sqrt{9} \cdot \sqrt{1} \cdot cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) \rightarrow \widehat{\vec{x}, \vec{y}} = 0°$

42 **De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabemos que $|\vec{a}| = 3$ y $|\vec{b}| = 5$ y que forman un ángulo de 120°. Calcula $|\vec{a} - \vec{b}|$.**

Como: $\vec{v} \bullet \vec{v} = |\vec{v}|\,|\vec{v}|\, cos\, 0° = |\vec{v}|^2 \cdot 1 = |\vec{v}|^2$

Entonces podemos decir que:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \bullet \vec{a} - 2\vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{b} \bullet \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\, cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 =$$

$$= 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot cos\, 120° + 5^2 = 9 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 25 = 49$$

Luego: $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$

43 **Si $|\vec{u}| = 3$ y $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -11$, halla $|\vec{v}|$.**

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = -11$

Como $|\vec{u}| = 3$, se tiene que:

$3^2 - |\vec{v}|^2 = -11 \rightarrow |\vec{v}|^2 = 20 \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{20}$

44 **Si $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ y $|\vec{u} + \vec{v}| = 5$, ¿qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$?**

Razonando como en el problema guiado número 2, llegamos a:

$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\,|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + |\vec{v}|^2$

Sustituyendo los valores conocidos:

$5^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 3^2$

$25 = 16 + 24\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 9$

$cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{25 - 25}{24} = 0 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 90°$

45 **Si $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ y $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$:**

a) Halla el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

b) Calcula el ángulo entre $\vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$.

c) Halla el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{a} + \vec{b}$.

a) $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$

Sustituimos y calculamos:

$7 = 1 + 4 - 2\,(2\,cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) \rightarrow cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \dfrac{7-5}{4} = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 120°$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\,cos\,(\vec{a}, \vec{b}) = 2\,cos\,(\vec{a}, \vec{b}) = -1$

$\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{a} - |\vec{b}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 = -1 - 4 = -5$

$\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{b}|\,|\vec{a} - \vec{b}|\,cos\,(\vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) = 2\sqrt{7}\;cos\left(\widehat{\vec{b}, \vec{a} - \vec{b}}\right)$

Igualando tenemos:

$2\sqrt{7}\;cos\left(\widehat{\vec{b}, \vec{a} - \vec{b}}\right) = -5 \rightarrow cos\left(\widehat{\vec{b}, \vec{a} - \vec{b}}\right) = \dfrac{-5}{2\sqrt{7}} \rightarrow \left(\widehat{\vec{b}, \vec{a} - \vec{b}}\right) = 160°\,53'\,3''$

c) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \rightarrow \left(\widehat{\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}}\right) = 90°$

46 **Calcula x para que los vectores $\vec{a}(7, 1)$ y $\vec{b}(1, x)$ formen un ángulo de 45°.**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 + x = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,cos\,45° \rightarrow 7 + x = \sqrt{50} \cdot \sqrt{1 + x^2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$

$\rightarrow 14 + 2x = \sqrt{100\,(1 + x^2)} \rightarrow \dfrac{14 + 2x}{10} = \sqrt{1 + x^2} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{7 + x}{5} = \sqrt{1 + x^2} \rightarrow \dfrac{49 + x^2 + 14x}{25} = 1 + x^2 \rightarrow$

$\rightarrow 49 + x^2 + 14x = 25 + 25x^2 \rightarrow 24x^2 - 14x - 24 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 12x^2 - 7x - 12 = 0 \rightarrow x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 576}}{24} \begin{cases} x_1 = 4/3 \\ x_2 = -3/4 \end{cases}$

47 **Halla un vector unitario que forme un ángulo de 30° con el vector $\vec{a}(1, \sqrt{3})$.**

Llamamos $\vec{u} = (x, y)$ al vector buscado:

$$\begin{cases} \widehat{(\vec{u}, \vec{a})} = 30° \\ |\vec{u}| = 1 \end{cases} \to \begin{cases} cos\ 30° = \dfrac{x + y\sqrt{3}}{1 \cdot \sqrt{1+3}} \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x + y\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \sqrt{3} = x + y\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son: $x = 0, y = 1;\ x = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}, y = \dfrac{1}{2}$

Por tanto: $\vec{u}_1 = (0, 1);\ \vec{u}_2 = \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3}, \dfrac{1}{2}\right)$

48 **Determina x para que los vectores $\vec{u}(x, 1)$ y $\vec{v}(x, 0)$ formen un ángulo de 30°.**

$$cos\ 30° = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1} \cdot x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to 2x = \sqrt{3}\sqrt{x^2+1} \to 4x^2 = 3(x^2+1) \to x = \pm\sqrt{3}$$

49 **De una base $B(\vec{u}, \vec{v})$ se sabe que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$ y que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. En esa base las coordenadas de dos vectores son $\vec{x}(1, 2)$ e $\vec{y}(-1, 1)$. Calcula $\vec{x} \cdot \vec{y}$.**

* *Mira el problema resuelto número 1.*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) =$$
$$= -\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + 2\vec{v} \cdot \vec{v} =$$
$$= -|\vec{u}|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2|\vec{v}|^2 = 4 - (-1) + 2 = 7$$

50 **Dados $\vec{a}(1, 2)$ y $\vec{b}(5, 5)$, expresa el vector $\vec{b}$ como suma de dos vectores: uno de la misma dirección que $\vec{a}$ y otro ortogonal a $\vec{a}$.**

* *Mira el problema resuelto número 4.*

$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y}$, donde:

- $\vec{x}$ tiene la misma dirección de $\vec{a} \to \vec{x} = k\vec{a} = k(1, 2) = (k, 2k)$
- $\vec{y} \perp \vec{a} \to \vec{y} = h(-2, 1) = (-2h, h)$

Entonces:

$(5, 5) = \vec{x} + \vec{y} = (k, 2k) + (-2h, h) = (k - 2h, 2k + h)$

$$\left.\begin{array}{l} 5 = k - 2h \\ 5 = 2k + h \end{array}\right\} \begin{array}{l} k = 3 \\ h = -1 \end{array}$$

Los vectores pedidos son $\vec{x}(3, 6)$ e $\vec{y}(2, -1)$.

51 **Se sabe que $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ y $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ son perpendiculares y que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios. ¿Cuál es el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$?**

Si $\vec{c} \perp \vec{d} \to \vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \to (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0 \to 5\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 10\vec{b} \cdot \vec{a} - 8\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$

Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios $\to |\vec{a}| = 1 = |\vec{b}|$

$5|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8|\vec{b}|^2 = 5 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8 = 0 \to$

$\to \vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{1}{2} \to \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\ cos\ \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = cos\ \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \dfrac{1}{2} \to \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 60°$

52 **Demuestra que el vector $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$ es perpendicular al vector $\vec{c}$.**

Hay que probar que el producto escalar de ambos vectores es igual a 0.

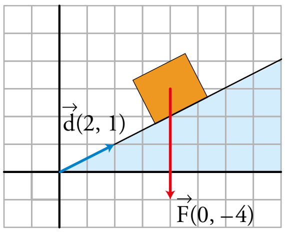
- Veamos primero cuáles son las coordenadas del primer vector:

$$\begin{aligned}(\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} &= (b_1c_1 + b_2c_2)\,(a_1, a_2) - (a_1c_1 + a_2c_2)\,(b_1, b_2) = \\ &= ((b_1c_1 + b_2c_2)\,a_1, (b_1c_1 + b_2c_2)\,a_2) - ((a_1c_1 + a_2c_2)\,b_1, (a_1c_1 + a_2c_2)\,b_2) = \\ &= (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2, a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2) - (a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2, a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2) = \\ &= (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2 - a_1b_1c_1 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2 - a_1b_2c_1 - a_2b_2c_2) = \\ &= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1)\end{aligned}$$

- Calculamos ahora:

$$\begin{aligned}[(\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b}] \cdot \vec{c} &= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1) \cdot (c_1, c_2) = \\ &= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2)\,c_1 + (a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1)\,c_2 = \\ &= a_1b_2c_2c_1 - a_2b_1c_2c_1 + a_2b_1c_1c_2 - a_1b_2c_1c_2 = 0\end{aligned}$$

53 **[El ejercicio propone consultar el ejercicio resuelto 4. El alumnado puede aprovechar esta ayuda para trabajar la dimensión productiva (productividad)].**



Descompón $\vec{F}$ en dos vectores, $\vec{F}_T$ y $\vec{F}_N$, de modo que $\vec{F}_T$ sea paralelo a la rampa y $\vec{F}_N$, perpendicular.

* ***Mira el problema resuelto número 4.***

El vector $\vec{d}(2,1)$ es paralelo a la rampa y, por tanto, a $\vec{F}_T$. El vector $\vec{n}(1,-2)$ es perpendicular a $\vec{d}$ y, por tanto, paralelo a $\vec{F}_N$.

Por ser $\vec{F}_T$ paralelo a $\vec{d}(2,1)$: $\vec{F}_T = \vec{d}k = (2k, k), k \in \mathbb{R}$

Por ser $\vec{F}_N$ paralelo a $\vec{n}(1,-2)$: $\vec{F}_N = \vec{n}\text{h} = (\text{h}, -2\text{h}), \text{h} \in \mathbb{R}$

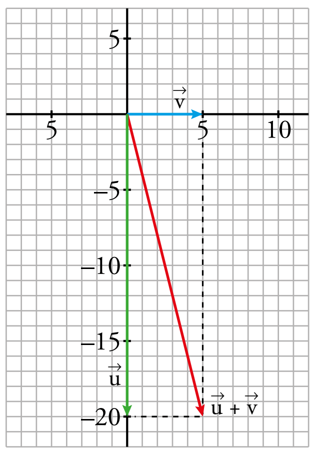
$$\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_N \rightarrow (0, -4) = (2k, k) + (\text{h}, -2\text{h}) = (2k + \text{h}, k - 2\text{h})$$

Igualando coodenadas: $\begin{cases} 0 = 2k + \text{h} \\ -4 = k - 2\text{h} \end{cases}$

Por tanto: $k = -\dfrac{4}{5}$; $\text{h} = \dfrac{8}{5}$

54 **Rastreador de problemas.** **[La resolución del problema planteado se puede aprovechar para trabajar esta estrategia de pensamiento].**

Una barca se desplaza por un río en dirección sur a una velocidad de 20 km/h. Si empieza a soplar un viento en dirección este a 5 km/h, ¿en qué dirección y a qué velocidad se moverá la barca?



La velocidad es $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2} = \sqrt{400 + 25} = 5\sqrt{17}$

La dirección es $(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}})$. Calculemos este ángulo:

$cos\,(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \dfrac{20}{5\sqrt{17}} \approx 0,97 \rightarrow (\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) \approx 14°\ 4'\ 11''$

Se mueve en dirección sureste con 14° 4' 11'' respecto de la dirección sur.

55 **Calcula analítica y gráficamente el vector proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ en cada caso.**

a) $\vec{u}(3, 4)$ **y** $\vec{v}(4, -4)$

b) $\vec{u}(\rightarrow, 6)$ **y** $\vec{v}(2, -1)$

a) $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}|\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$

Luego, $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) \cdot \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (0, 0)$

b) $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}|\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{5}\,\dfrac{(8, 6) \cdot (2, -1)}{10\sqrt{5}} = 1$

Luego, $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) \cdot \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \dfrac{1}{10}(8, 6) = \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

Si el ángulo es agudo, $proy_{\vec{u}}(\vec{v})$ tiene el mismo sentido que $\vec{u}$, si el triángulo es obtuso, tiene sentido contrario a $\vec{u}$.

Cuestiones teóricas

56 **Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:**

a) **Si** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$**, entonces** $B(\vec{u}, \vec{v})$ **es una base.**

b) **Dos vectores paralelos pueden tener sus coordenadas no proporcionales.**

c) **Si dos vectores son perpendiculares, sus coordenadas no pueden ser proporcionales.**

d) $\overrightarrow{AB}$ **y** $\overrightarrow{BA}$ **tienen igual módulo, pero distinta dirección.**

e) **El módulo de** $-3\vec{v}$ **es el triple que el módulo de** $\vec{v}$**.**

a) Verdadera, porque los vectores son perpendiculares, luego no tienen la misma dirección.

b) Falsa. Si son paralelos, sus coordenadas son proporcionales porque $\vec{u} = k\vec{v}$.

c) Verdadera. Si las coordenadas fueran proporcionales, serían paralelos.

d) Falsa. Tienen el mismo módulo y la misma dirección, pero sentidos contrarios.

e) Verdadera: $|-3\vec{v}| = |-3|\,|\vec{v}| = 3|\vec{v}|$

Página 193

57 **¿Cómo es el ángulo formado** $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$ **en estos casos?**

a) $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) > 0$ **b)** $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) < 0$ **c)** $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = 0$

a) $0° < (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) < 90°$ b) $90° < (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) < 180°$ c) $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 90°$

58 **Indica si el resultado de las siguientes operaciones es un número o un vector:**

a) $2\vec{a} \cdot \vec{b}$ **b)** $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

c) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{c}$ **d)** $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

a) Número. b) Vector.

c) Número. d) Número.

59 **Si $B(\vec{a}, \vec{b})$ es una base de los vectores del plano, señala cuáles de estos pares de vectores pueden ser otra base:**

a) $(3\vec{a}, -2\vec{b})$

b) $(-\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$

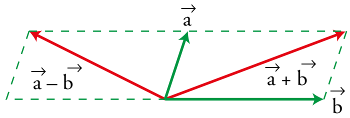
c) $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$

d) $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a})$

a) Sí, pues no tienen la misma dirección, ya que $3\vec{a}$ tiene la dirección de $\vec{a}$ y $-2\vec{b}$ tiene la dirección de $\vec{b}$ (que, por ser $B(\vec{a}, \vec{b})$ base, no es la misma).

b) No, pues $-\vec{a} - \vec{b} = -1(\vec{a} + \vec{b})$, luego los dos vectores tienen la misma dirección (y sentidos opuestos).

c) Sí, pues tienen distinta dirección.



d) No, pues tienen la misma dirección al ser $\vec{a} - \vec{b} = -1(\vec{b} - \vec{a})$.

60 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no nulos. Indica qué ángulo forman en los siguientes casos:**

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$

d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,5\,|\vec{a}||\vec{b}|$

a) $cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 1 \;\rightarrow\; (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0°$

b) $\vec{a} \perp \vec{b} \;\rightarrow\; (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90°$

c) $cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = -1 \;\rightarrow\; (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180°$

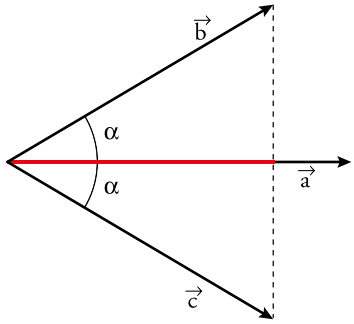
d) $cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0,5 \;\rightarrow\; (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$

61 **Demuestra gráficamente que:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \;\; \textbf{no implica que} \;\; \vec{b} = \vec{c}$$

Podemos dibujar dos vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ con un mismo módulo y que formen el mismo ángulo con $\vec{a}$, pero distintos.

Así probamos que la implicación no es cierta.



62 **Prueba, que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$, entonces:**

$$\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c}), \qquad m, n \in \mathbb{R}$$

Hay que probar que $\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = 0$. Veamos:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b}) + n(\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ \text{Como: } \vec{a} \perp \vec{b} \;\rightarrow\; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \qquad\quad \vec{a} \perp \vec{c} \;\rightarrow\; \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m \cdot 0 + n \cdot 0$$

63 **Prueba que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c})$, entonces se verifica que $\vec{a} \perp \vec{c}$.**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \text{Si } \vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c}) \rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$$

64 **Justifica por qué $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \le |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.**

$|cos\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})| = \left| \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \right| = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} \le 1$ porque el coseno de un ángulo, en valor absoluto, siempre es menor o igual que 1.

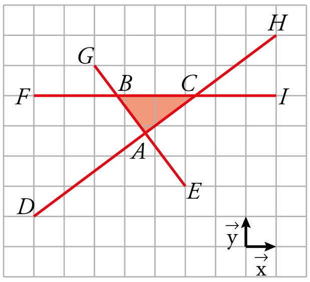
Luego, pasando el denominador (que siempre es positivo) al segundo miembro:

$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$

Para profundizar

65 **[La resolución de esta actividad de profundización requiere que el alumnado trabaje la dimensión productiva (innovación)].**

Halla los ángulos interiores del triángulo *ABC*.



Observa que puedes expresar estos ángulos como ángulos entre vectores. Las coordenadas de estos vectores las obtendrás expresándolos como combinación lineal de la base $B(\vec{x}, \vec{y})$.

$\overrightarrow{DH} = (8, 6);\ \overrightarrow{EG} = (-3, 4)$

$\hat{A} = (\widehat{\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{EG}})$

$cos\ \hat{A} = cos\ (\widehat{\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{EG}}) = \dfrac{(8, 6) \cdot (-3, 4)}{|(8, 6)||(-3, 4)|} = 0 \rightarrow \hat{A} = 90°$

$\overrightarrow{HD} = (-8, -6);\ \overrightarrow{IF} = (-8, 0)$

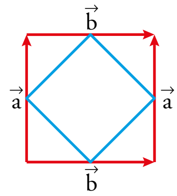
$\hat{C} = (\widehat{\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{IF}})$

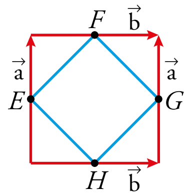
$cos\ \hat{C} = cos\ (\widehat{\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{IF}}) = \dfrac{(-8, -6) \cdot (-8\ 0)}{|(-8, -6)||(-8, 0)|} = \dfrac{64}{80} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

$\hat{C} = 35°\ 52'\ 11''$

$\hat{B} = 90° - 35°\ 52'\ 11'' = 54°\ 7'\ 49''$

66 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores que definen un cuadrado. Demuestra que los puntos medios de sus lados definen otro cuadrado.**





$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} \end{array}\right\} \to \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \\ \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \end{array}\right\} \to \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$$

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{EH}|^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} - 2\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \\ |\overrightarrow{EF}|^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} + 2\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \end{array}\right\} \to |\overrightarrow{EH}| = |\overrightarrow{EF}|$$

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FG} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} =$$

$= -\frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 = 0$ porque el polígono original era cuadrado y, por tanto, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

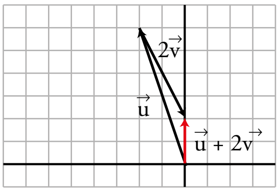
Como los otros dos lados son paralelos a estos, también son perpendiculares entre sí. Luego los lados del polígono *EFGH* miden lo mismo, los opuestos son paralelos y son perpendiculares dos a dos. Por tanto, el polígono *EFGH* es un cuadrado.

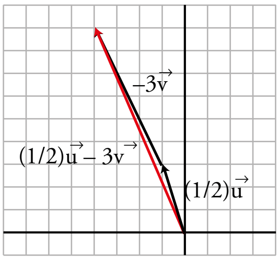
AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.-EA 1.14.3.) CE 4.3. (EA 4.3.1.-EA 4.3.2.)

Página 193

1 **Si tenemos $\vec{u}(-2, 6)$ y $\vec{v}(1, -2)$, calcula gráficamente y utilizando coordenadas, $\vec{u} + 2\vec{v}$ y $\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v}$.**





$\vec{u} + 2\vec{v} = (-2, 6) + 2(1, -2) = (-2, 6) + (2, -4) = (0, 2)$

$\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v} = \frac{1}{2}(-2, 6) - 3(1, -2) = (-1, 3) - (3, -6) = (-4, 9)$

2 **Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores unitarios que forman un ángulo de 60°. Calcula:**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b) $(3\vec{u}) \cdot (-2\vec{v})$** **c) $proy_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v})$**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos 60° = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) $3\vec{u} \cdot (-2\vec{v}) = -6(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -3$

c) $proy_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})}{|\vec{u}|} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v}}{1} = |\vec{u}|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

3 **Expresa el vector $\vec{a}(-1, -9)$ como combinación lineal de los vectores de la base $B = ((-2, 3), (-1, 5))$.**

$(-1, -9) = k(-2, 3) + s(-1, 5) = (-2k - s, 3k + 5s)$

$$\left.\begin{array}{l} -1 = -2k - s \\ -9 = 3k + 5s \end{array}\right\} \begin{array}{l} s = 1 - 2k \\ -9 = 3k + 5(1 - 2k) \to -9 = -7k + 5 \to k = 2 \end{array} \to s = 1 - 4 = -3$$

Por tanto: $(-1, -9) = 2(-2, 3) - 3(-1, 5) \to \vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

4 **Consideramos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cuyas coordenadas respecto a una base ortonormal son $\vec{u}(0, 2)$ y $\vec{v}(1, \sqrt{3})$. Calcula:**

a) Su producto escalar.

b) El módulo de ambos vectores.

c) El ángulo que forman.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 2) \cdot (1, \sqrt{3}) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$, $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

c) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = arc \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°$

5 **Considera el vector $\vec{u}(3, -4)$. Calcula:**

a) Un vector paralelo a $\vec{u}$ de módulo 1.

b) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ de módulo 2.

a) $|\vec{u}| = 5;\ \vec{v} = \frac{1}{5}(3, -4) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

b) $\vec{v} = 2 \cdot \frac{1}{5}(4, 3) = \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

6 **Sea $\vec{u}(-3, k)$. Calcula k de forma que:**

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -6)$.

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a 5.

a) El producto escalar de dos vectores ortogonales es igual a 0.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, k) \cdot (4, -6) = -12 - 6k = 0 \ \rightarrow\ k = -2$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{9 + k^2} = 5 \ \rightarrow\ 9 + k^2 = 25 \ \rightarrow\ k = \pm 4$

7 **Determina las coordenadas de un vector $\vec{a}(x, y)$ que forme con $\vec{v}(-1, 0)$ un ángulo de 60° y cuyo módulo sea 2.**

$cos\ (\widehat{\vec{a}, \vec{v}}) = cos\ 60° = \frac{1}{2} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-x}{2 \cdot 1} \ \rightarrow\ x = -1$

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + y^2} = 2 \ \rightarrow\ 1 + y^2 = 4 \ \rightarrow\ y^2 = 3 \ \rightarrow\ y = \pm\sqrt{3}$

Hay dos soluciones para el vector $\vec{a}$: $\begin{cases} \vec{a}(-1, \sqrt{3}) \\ \vec{a}(-1, -\sqrt{3}) \end{cases}$

8 **Obtén un vector $\vec{u}(x, y)$ ortogonal a $\vec{v}(8, 6)$ y cuyo módulo sea la mitad del de $\vec{v}$.**

$\vec{u} \perp \vec{v} \ \Leftrightarrow\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2};\ \ |\vec{v}| = \sqrt{64 + 36} = 10$

$(x, y) \cdot (8, 6) = 8x + 6y = 0$

$|\vec{u}| = \frac{1}{2}|\vec{v}| \ \rightarrow\ \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \ \rightarrow\ x^2 + y^2 = 25$

Resolvemos el sistema:

$\left.\begin{array}{l} 8x + 6y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} x = -\frac{3}{4}y \\ \frac{9}{16}y^2 + y^2 = 25 \ \rightarrow\ \frac{25}{16}y^2 = 25 \ \rightarrow\ y^2 = 16 \ \rightarrow\ y = \pm 4 \end{array}$

$y = 4 \ \rightarrow\ x = -3$

$y = -4 \ \rightarrow\ x = 3$

Hay dos soluciones: $\vec{u}(-3, 4);\ \vec{u}(3, -4)$

9 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores unitarios que forman un ángulo de 120°. Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.**

a$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$

$= |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\ cos\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 =$

$= 1 - 1 + 1 = 1 \ \rightarrow\ |\vec{a} + \vec{b}| = 1$

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$

$= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\ cos\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 =$

$= 1 + 1 + 1 = 3 \ \rightarrow\ |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

8 GEOMETRÍA ANALÍTICA

C.E.: CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2-EA 1.5.3.) CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.) CE 1.9. (EA 1.9.1.) CE 1.14. (EA 1.14.3.)

Página 195

Resuelve

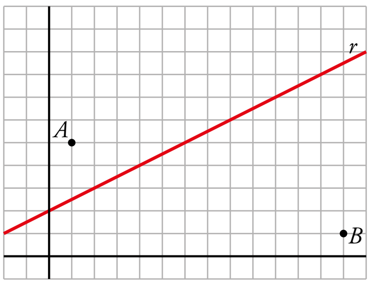
El embarcadero

Tenemos dos pueblos, A y B, cada uno a un lado de un canal. Se desea construir un embarcadero situado exactamente a la misma distancia de los dos pueblos. ¿Dónde habrá que hacerlo?

Para decidirlo, colocamos unos ejes coordenados y razonamos del siguiente modo:

Los puntos de la mediatriz del segmento AB están a la misma distancia de los extremos de este. Por tanto, el punto buscado, P, es la intersección de la recta r (el canal) con la recta s (perpendicular a AB en su punto medio).

Halla las coordenadas de P.



Coordenadas de $A = (1, 5)$

Coordenadas de $B = (13, 1)$

Hallamos las coordenadas de M, punto medio entre A y B.

$$M = \left(\frac{1+13}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (7, 3)$$

Hallamos el vector $\overrightarrow{AB} = (13, 1) - (1, 5) = (12, -4)$

La recta s pasa por M y tiene vector de dirección $\vec{d} = (4, 12)$.

La ecuación de s es: $\dfrac{x-7}{4} = \dfrac{y-3}{12}$

La ecuación de r es $y = \dfrac{1}{2}x + 2$.

P es la solución del sistema: $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + 2 \\ \dfrac{x-7}{4} = \dfrac{y-3}{12} \end{cases} \rightarrow x = 8, \ y = 6$

Solución: $P = (8, 6)$

1 ▶ PUNTOS Y VECTORES EN EL PLANO

C.E.: CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 197

Hazlo tú

1 **Averigua m para que $P(1, 4)$, $Q(5, –2)$ y $R(m, 0)$ estén alineados.**

$\overrightarrow{PQ} = (4, -6)$

$\overrightarrow{QR} = (m, 0) - (5, -2) = (m - 5, 2)$

$$\frac{4}{m-5} = \frac{-6}{2} \to m - 5 = \frac{-3}{4} \to m = \frac{17}{4} = 4,25$$

Piensa y practica

1 **Halla las coordenadas de $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{NM}$, siendo $M(7, –5)$ y $N(–2, –11)$.**

$\overrightarrow{MN} = (-2, -11) - (7, -5) = (-9, -6)$

$\overrightarrow{NM} = (7, -5) - (-2, -11) = (9, 6)$

2 **Averigua si están alineados los puntos $P(7, 11)$, $Q(4, –3)$ y $R(10, 25)$.**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (-3, -14) \\ \overrightarrow{QR} = (6, 28) \end{array}\right\} \to \frac{-3}{6} = \frac{-14}{28} \to A,\ B \text{ y } C \text{ están alineados.}$$

3 **Halla las coordenadas del punto A sabiendo que $B(–2, 1)$ y $\overrightarrow{AB} = (–5, 6)$.**

Buscamos $A(x, y)$, lo encontraremos a partir del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (-2 - x, 1 - y) = (-5, 6) \to \begin{cases} -2 - x = -5 \to x = 3 \\ 1 - y = 6 \to y = -5 \end{cases} \to A(3, -5)$$

4 **Determina los valores de los parámetros a y b donde $\overrightarrow{AB} = (–3, –2)$, $A(a, 2)$ y $B(–2, b)$.**

$$\overrightarrow{AB} = (-2 - a, b - 2) = (-3, -2) \to \begin{cases} -2 - a = -3 \to a = 1 \\ b - 2 = -2 \to b = 0 \end{cases} \to A(1, 2) \text{ y } B(-2, 0)$$

Página 198

5 Lápices al centro. **[Los alumnos pueden exponer en grupo sus estrategias de resolución para encontrar los puntos que propone el ejercicio tal y como se indica en esta técnica].**

Dados los puntos $P(3, 9)$ y $Q(8, –1)$:

a) Halla el punto medio de PQ.

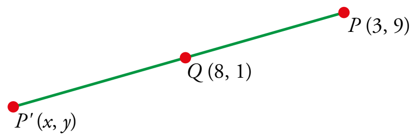
b) Halla el simétrico de P respecto de Q.

c) Halla el simétrico de Q respecto de P.

d) Obtén un punto A de PQ tal que $\overrightarrow{PA} = 2/3\ \overrightarrow{AQ}$.

e) Obtén un punto B de PQ tal que $\overrightarrow{PB}/\overrightarrow{PQ} = 1/5$.

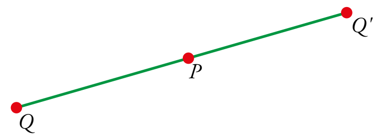
a) $M\left(\dfrac{3+8}{2}, \dfrac{9+(-1)}{2}\right) = \left(\dfrac{11}{2}, 4\right)$



b) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{3+x}{2} = 8 \;\rightarrow\; x = 13 \\ \dfrac{9+y}{2} = -1 \;\rightarrow\; y = -11 \end{array}\right\} P'(13, -11)$

c) Llamamos $Q'(x', y')$ al simétrico de Q respecto de P.

Así:



$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x'+8}{2} = 3 \;\rightarrow\; x' = -2 \\ \dfrac{y'+(-1)}{2} = 9 \;\rightarrow\; y' = 19 \end{array}\right\} Q'(-2, 19)$

d) Llamamos $A(x, y)$ al punto que buscamos. Debe cumplirse que:

$\overrightarrow{PA} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AQ} \;\rightarrow\; (x-3, y-9) = \dfrac{2}{3}(8-x, -1-y)$

$\left.\begin{array}{l} x-3 = \dfrac{2}{3}(8-x) \;\rightarrow\; x = 5 \\ y-9 = \dfrac{2}{3}(-1-y) \;\rightarrow\; y = 5 \end{array}\right\} A(5, 5)$

e) Llamamos $B(x, y)$ al punto que buscamos.

$\overrightarrow{PB} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{PQ} \;\rightarrow\; (x-3, y-9) = \dfrac{1}{5}(5, -10) = (1, -2)$

$\left.\begin{array}{l} x-3 = 1 \;\rightarrow\; x = 4 \\ y-9 = -2 \;\rightarrow\; y = 7 \end{array}\right\} B(4, 7)$

2 ▶ ECUACIONES DE UNA RECTA

C.E.: CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.-EA 1.14.3.) CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 200

Hazlo tú

1 **Obtén las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $P(7, -4)$ y $Q(3, 2)$.**

Vector de posición de P: $\vec{p} = (7, -4)$

Vector de dirección de la recta: $\vec{d} = (3, 2) - (7, -4) = (-4, 6)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 7 - 4\lambda \\ y = -4 + 6\lambda \end{cases}$$

Ecuación en forma continua:

$$\frac{x-7}{-4} = \frac{y+4}{6}$$

Hazlo tú

2 **Obtén las ecuaciones paramétricas de la recta $\frac{x-5}{0} = \frac{y}{-7}$.**

Vector de posición de P: $\vec{p} = (5, 0)$

Vector de dirección de la recta: $\vec{d} = (0, -7)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -7\lambda \end{cases}$$

Página 202

Hazlo tú

1 **Obtén todas las formas posibles de la ecuación de la recta que pasa por $A(-2, 5)$ y $B(3, -5)$.**

Vector de posición de A: $\overrightarrow{OA} = (-2, 5)$

Vector de dirección de la recta: $\vec{d} = (3, -5) - (-2, 5) = (5, -10) = 5(1, -2)$

Vamos a tomar como vector de dirección de la recta un vector proporcional al anterior: $\vec{d'} = (1, -2)$.

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \end{cases}$$

Ecuación en forma continua:

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-2}$$

Ecuación implícita:

$$-2(x+2) = y - 5 \rightarrow -2x - 4 = y - 5 \rightarrow -2x - y + 1 = 0$$

Ecuación explícita:

$$y = -2x + 1$$

Ecuación punto-pendiente:

$$m = \frac{-2}{1}$$

$$y = -2(x+2) + 5$$

Hazlo tú

2 **Obtén la ecuación implícita de** $r: \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 4 - \lambda \end{cases}$.

$\frac{x}{5} = \frac{y-4}{-1} \;\to\; -x = 5y - 20 \;\to\; -x - 5y + 20 = 0$

Página 203

Hazlo tú

3 **Da las ecuaciones paramétricas de la recta** $y = -2x + 7$.

Encontramos un punto A de la recta dando a x el valor 0: $x = 0 \;\to\; A = (0, 7)$

$$m = -2 \;\to\; \vec{d} = (1, -2)$$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 - 2\lambda \end{cases}$

Hazlo tú

4 **Halla las ecuaciones paramétricas e implícita de la recta** $\frac{x-5}{0} = \frac{y+1}{2}$.

Punto de la recta: $A = (5, -1)$

$\vec{d} = (0, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$

Ecuación implícita: $x = 5$

Piensa y practica

1 **Halla las ecuaciones paramétricas, continua, implícita, explícita y punto-pendiente de la recta que pasa por** A **y** B**, en cada caso:**

a) $A(-1, -1)$, $B(3, 3)$ **b)** $A(0, 4)$, $B(6, 0)$

c) $A(3, 5)$, $B(-1, 5)$ **d)** $A(3, 5)$, $B(3, 2)$

a) $A(-1, -1)$, $B(3, 3) \;\to\; \overrightarrow{AB} = (4, 4)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{cases}$ Continua: $\frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{4}$

Implícita: $x - y = 0$ Explícita: $y = x$

b) $A(0, 4)$, $B(6, 0) \;\to\; \overrightarrow{AB} = (6, -4)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 4 - 4\lambda \end{cases}$ Continua: $\frac{x}{6} = \frac{y-4}{-4}$

Implícita: $-4x - 6y + 24 = 0$ Explícita: $y = \frac{-4}{6}x + 4$

c) $A(3, 5)$, $B(-1, 5) \;\to\; \overrightarrow{AB} = (-4, 0)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 - 4\lambda \\ y = 5 \end{cases}$ Continua: $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-5}{0}$

Implícita: $y - 5 = 0$ Explícita: $y = 5$

d) $A(3, 5)$, $B(3, 2)$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = (0, -3)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 - 3\lambda \end{cases}$

Continua: $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y-5}{-3}$

Implícita: $x - 3 = 0$

Explícita: No existe, pues se trata de una recta vertical de ecuación $x = 3$.

2 **Obtén las ecuaciones implícita, paramétricas y continua de la recta $y = 2x + 3$.**

$y = 2x + 3$

- Buscamos dos puntos de la recta y su vector dirección:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0 + 3 = 3 \rightarrow A(0, 3) \\ \text{Si } x = 1 \rightarrow y = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \rightarrow B(1, 5) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, 2)$$

- Implícita: $2x - y + 3 = 0$
- Paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

- Continua:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-3}{2}$$

3 1-2-4. **[Los alumnos y las alumnas pueden primero buscar las soluciones de forma individual para luego ponerlas en común tal y como se indica en esta estrategia].**

a) Encuentra dos puntos, P y Q, pertenecientes a la recta r: $2x - 3y + 6 = 0$.

b) Comprueba que $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a $(2, -3)$.

c) Escribe las ecuaciones paramétricas de r.

d) Escribe su ecuación explícita y comprueba que el vector $(1, m)$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ (m es la pendiente de r).

a) r: $2x - 3y + 6 = 0$

Si $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0 - 3y + 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow P(0, 2)$

Si $x = -3 \rightarrow 2 \cdot (-3) - 3y + 6 = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow Q(-3, 0)$

b) $\overrightarrow{PQ} = (-3, -2)$

$\overrightarrow{PQ} \perp (2, -3) \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot (2, -3) = 0$

$(-3, -2) \cdot (2, -3) = (-3) \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) = -6 + 6 = 0$

c) r: $\begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{cases}$

d) Despejamos y en la ecuación de r:

$2x - 3y + 6 = 0 \rightarrow 2x + 6 = 3y \rightarrow \dfrac{2}{3}x + 2 = y$

Explícita: $y = \dfrac{2}{3}x + 2$

$m = \dfrac{2}{3} \rightarrow (1, m) = \left(1, \dfrac{2}{3}\right)$

El vector $\left(1, \dfrac{2}{3}\right)$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ si sus coordenadas son proporcionales:

$(-3, -2) = \lambda\left(1, \dfrac{2}{3}\right) \rightarrow \lambda = -3$

Los vectores son proporcionales y, por tanto, paralelos.

3 ▶ HAZ DE RECTAS

C.E.: CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 204

1 **Halla la recta del haz de centro $P(-3, 5)$ que pasa por el punto $Q(8, 4)$.**

Hemos de hallar la recta que pasa por $P(-3, 5)$ y $Q(8, 4)$.

$\overrightarrow{PQ} = (11, -1)$

$r: \dfrac{x+3}{11} = \dfrac{y-5}{-1}$

2 **Los haces de rectas cuyos centros son $P(4, 0)$ y $Q(-6, 4)$ tienen una recta en común. ¿Cuál es?**

Es la recta que pasa por $P(4, 0)$ y $Q(-6, 4)$.

$\overrightarrow{PQ} = (-10, 4)$

$r: \dfrac{x-4}{-10} = \dfrac{y-0}{4}$

3 **[El trabajo con el haz de rectas propuesto por el enunciado puede servir para poner en práctica la iniciativa (dimensión productiva) de esta clave].**

Las siguientes rectas:

$$r: 3x - 5y - 7 = 0 \qquad s: x + y + 4 = 0$$

forman parte de un mismo haz. ¿Cuál de las rectas de ese haz tiene pendiente 4?

- El centro del haz es el punto de corte de r y s. Lo hallamos:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 5y - 7 = 0 \\ x + \ \ y + 4 = 0 \end{array}\right\} \to x = -y - 4$$

$$3(-y-4) - 5y - 7 = 0 \to -8y - 19 = 0 \to y = -\frac{19}{8}$$

$$x = -y - 4 = \frac{19}{8} - 4 = -\frac{13}{8}$$

El centro del haz es el punto $P\left(-\dfrac{13}{8}, -\dfrac{19}{8}\right)$.

- Ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente igual a 4:

$$y = \frac{19}{8} + 4\left(x + \frac{13}{8}\right) \to 32x - 8y + 7 = 0$$

4 ▸ REFLEXIONES SOBRE ECUACIONES CON Y SIN «PARÁMETROS»

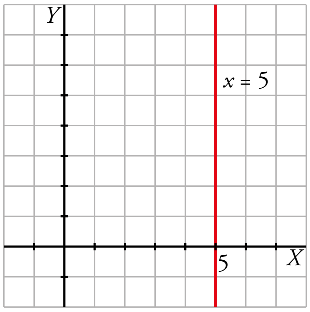
C.E.: CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 205

1 **Representa.**

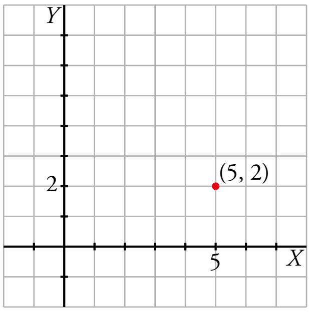
a) $x = 5$ **b)** $\begin{cases} x = 5 \\ y = \lambda \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ **d)** $y = 2$ **e)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x = t \\ y = s \end{cases}$

a)

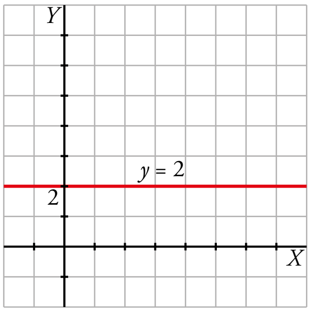


b) Es la misma que la del apartado a).

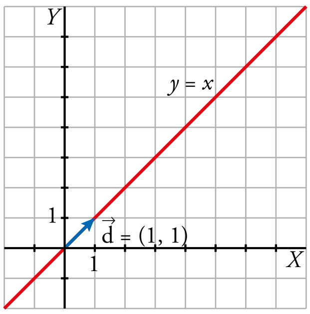
c) Es un punto, el punto (5, 2).



d)



e) Pasa por $O = (0, 0)$. Tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$.



f) Tenemos cualquier punto del plano, pues no hay ninguna restricción.

5 PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.-EA 1.14.3.) CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 206

1 ¿Verdadero o falso? Cada una de las siguientes rectas es paralela a $\frac{x-2}{5}=\frac{y-1}{2}$:

a) $2x+5y-4=0$ **b)** $5x+2y=0$ **c)** $2x-5y+1=0$

d) $y=\frac{5}{2}x+4$ **e)** $y=\frac{-5}{2}x+1$ **f)** $y=\frac{2}{5}x-3$

El vector de dirección de la recta $\frac{x-2}{5}=\frac{y-2}{2}$ es $\vec{d}=(5, 2)$.

a) Vector de dirección: $(-5, 2) \nparallel (5, 2) \Rightarrow$ Falso.

b) Vector de dirección: $(-2, 5) \nparallel (5, 2) \Rightarrow$ Falso.

c) Vector de dirección: $(5, 2) \parallel (5, 2) \Rightarrow$ Verdadero.

d) $m=\frac{5}{2} \rightarrow$ Vector de dirección: $(2, 5) \nparallel (5, 2) \Rightarrow$ Falso.

e) $m=-\frac{5}{2} \rightarrow$ Vector de dirección: $(2, -5) \nparallel (5, 2) \Rightarrow$ Falso.

f) $m=\frac{2}{5} \rightarrow$ Vector de dirección: $(5, 2) \parallel (5, 2) \Rightarrow$ Verdadero.

2 ¿Verdadero o falso? Cada una de las siguientes rectas es perpendicular a $x-2y+4=0$:

a) $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-2\lambda \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=3+\lambda \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda \end{cases}$

d) $y=2x+1$ **e)** $y=-2x+3$ **f)** $y=\frac{x}{2}$

El vector perpendicular a la recta $x-2y+4=0$ es $(1, -2)$.

a) Vector de dirección: $(1, -2) \parallel (1, -2) \Rightarrow$ Verdadero.

b) Vector de dirección: $(-2, 1) \nparallel (1, -2) \Rightarrow$ Falso.

c) Vector de dirección: $(1, 2) \nparallel (1, -2) \Rightarrow$ Falso.

d) $m=2 \rightarrow$ Vector de dirección: $(1, 2) \nparallel (1, -2) \Rightarrow$ Falso

e) $m=-2 \rightarrow$ Vector de dirección: $(1, -2) \parallel (1, -2) \Rightarrow$ Verdadero.

f) $m=\frac{1}{2} \rightarrow$ Vector de dirección: $(2, 1) \nparallel (1, -2) \Rightarrow$ Falso.

Página 207

Hazlo tú

1 Halla una paralela y una perpendicular a r: $\frac{x+5}{3}=\frac{y-1}{-2}$ que pasen por $(7, -5)$.

El vector de dirección de la recta $\frac{x+5}{3}=\frac{y-1}{-2}$ es $\vec{d}=(3, -2)$. Vector normal: $\vec{n}=(2, 3)$.

Recta paralela:

$$r_1: \begin{cases} x=\ \ 7+3\lambda \\ y=-5-2\lambda \end{cases}$$

Recta perpendicular:

$$r_2: \begin{cases} x = 7 + 2\lambda \\ y = -5 + 3\lambda \end{cases}$$

Hazlo tú

2 **Halla la recta $r_1 \parallel r: 5x - y + 4 = 0$ que pase por (3, –5); y la recta $r_2 \perp r$ que pase por (0, 0).**

El vector de dirección de la recta $r: 5x - y + 4 = 0$ es $\vec{d} = (-1, -5) = -(1, 5)$. Vector normal: $\vec{n} = (5, -1)$.

Recta paralela:

$$r_1: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -5 + 5\lambda \end{cases}$$

Recta perpendicular:

$$r_2: \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -5 - \lambda \end{cases}$$

Hazlo tú

3 **Dada la recta $r: \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y}{-5}$, halla:**

a) Las ecuaciones paramétricas de $r_1 \perp r$ que pase por (–2, 0);

b) La ecuación implícita de $r_2 \parallel r$ que pase por (0, –3);

c) La ecuación explícita de $r_3 \parallel r$ que pase por (–3, 5).

El vector de dirección de la recta $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y}{-5}$ es $\vec{d} = (2, -5)$. Vector normal: $\vec{n} = (5, 2)$.

a) Recta perpendicular:

$$r_1: \begin{cases} x = -2 + 5\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$$

b) Recta paralela:

$$r_2: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{-5} \rightarrow -5x = 2y + 6 \rightarrow -5x - 2y - 6 = 0$$

c) Recta paralela:

$$r_3: \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{-5} \rightarrow -5x - 15 = 2y - 10 \rightarrow -5x - 2y - 5 = 0 \rightarrow y = -\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$$

Piensa y practica

3 **Escribe las ecuaciones paramétricas de dos rectas que pasen por $P(4, -3)$ y sean paralela y perpendicular, respectivamente, a $r: \begin{cases} x = 2 - 5\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \end{cases}$.**

$r: \begin{cases} x = 2 - 5\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \end{cases} \rightarrow$ Vector dirección de r: $\vec{v}_r = (-5, 2)$

- Recta paralela a r que pasa por P:

  $P(4, -3)$; $\vec{v}_s = \vec{v}_r = (-5, 2)$

  $s: \begin{cases} x = 4 - 5\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \end{cases}$

- Recta perpendicular a r que pasa por P:

$P(4, -3)$; $\vec{v}_l = (2, 5)$

$$l: \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = -3 + 5\lambda \end{cases}$$

4 **Dada la recta r: $y = -2x + 5$, halla:**

a) Las ecuaciones paramétricas de una recta r_1 paralela a r que pase por $(0, -2)$.

b) La ecuación explícita de una recta r_2 paralela a r y de otra r_3, perpendicular a r y que ambas pasen por $(0, 1)$.

c) La ecuación implícita de una recta r_4, perpendicular a r y que pase por $(-2, 5)$.

$r: y = -2x + 5$

Pendiente $m = -2 \to$ Vector de dirección de la recta es $\vec{d} = (1, -2)$. Vector normal: $\vec{n} = (2, 1)$.

a) $r_1: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases}$

b) $r_2: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} \to -2x = y - 1 \to y = -2x + 1$

$r_3: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} \to x = 2y - 2 \to x - 2y + 2 = 0 \to y = \dfrac{1}{2}x + 1$

c) $r_4: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-5}{1} \to x + 2 = 2y - 10 \to x - 2y + 12 = 0$

5 **Dada s: $\begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 3\lambda \end{cases}$, halla:**

a) La ecuación continua de una recta r_1 perpendicular a s que pase por $P_1(5, -3)$.

b) La ecuación implícita de r_2 paralela a s que pase por $P_2(0, 4)$.

c) La ecuación explícita de r_3 perpendicular a s que pase por $P_3(-3, 0)$.

$s: \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 3\lambda \end{cases} \to P(5, 0) \in s$; $\vec{v}_s = (-1, 3)$

a) El vector dirección de r_1 es $\vec{v}_{r_1} = (3, 1)$. $P_1(5, -3) \in r_1$.

$r_1: \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+3}{1}$

b) El vector dirección de r_2 es el mismo que el de s: $\vec{v}_{r_2} = (-1, 3)$. $P_2(0, 4) \in r_2$.

$r_2: \dfrac{x-0}{-1} = \dfrac{y-4}{3} \to 3x = -y + 4 \to 3x + y - 4 = 0$

c) El vector dirección de r_3 es el mismo que el de r_1: $\vec{v}_{r_3} = (3, 1)$. $P_3(-3, 0) \in r_3$.

$r_3: \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-0}{1} \to y = \dfrac{1}{3}x + 1$

6 **Determina las ecuaciones implícitas de dos rectas que pasen por $P(-3, 4)$ y sean paralela y perpendicular, respectivamente, a $r: 5x - 2y + 3 = 0$.**

$r: 5x - 2y + 3 = 0 \ \rightarrow \ 5x + 3 = 2y \ \rightarrow \ y = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

La pendiente de r es $m_r = \frac{5}{2}$

- Recta s paralela a r que pasa por $P(-3, 4)$:

  $m_s = m_r = \frac{5}{2}$

  $s: y - 4 = \frac{5}{2}(x + 3) \ \rightarrow \ s: 5x - 2y + 23 = 0$

- Recta l perpendicular a r que pasa por $P(-3, 4)$:

  $m_l = -\frac{l}{m_r} = -\frac{2}{5}$

  $l: y - 4 = -\frac{2}{5}(x + 3) \ \rightarrow \ l: 2x + 5y - 14 = 0$

6 ▶ POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

C.E.: CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 208

Hazlo tú

1 Determina la posición relativa y el punto de corte, si existe, de las rectas

$$r_1: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -5 - 5\lambda \end{cases} \text{ y } r_2: \begin{cases} x = -4 + \lambda \\ y = 6 - \lambda \end{cases}.$$

Vector de dirección de r_1: $\vec{d} = (2, -5)$

Vector de dirección de r_2: $\vec{d}\,' = (1, -1)$

No son proporcionales, luego las rectas se cortan.

Punto de corte:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda = -4 + \mu \\ -5 - 5\lambda = 6 - \mu \end{cases} \to \mu = 1, \ \lambda = -2$$

Para esos valores de los parámetros: $x = -4 + 1 = -3$; $y = 6 - 1 = 5$

Punto de corte: $(-3, 5)$

Hazlo tú

2 Halla la posición relativa de las rectas $r_1: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + 5\lambda \end{cases}$ **y** $r_2: \begin{cases} x = 8 + 4\lambda \\ y = 3 + 10\lambda \end{cases}$.

Vector de dirección de r_1: $\vec{d} = (2, 5)$

Vector de dirección de r_2: $\vec{d}\,' = (4, 10)$

Son proporcionales, $(4, 10) = 2(2, 5)$, luego las rectas son paralelas o coincidentes.

Punto de r_1: $(0, 1)$

Sustituimos en r_2:

$$\begin{cases} 0 = 8 + 4\lambda \\ 1 = 3 + 10\lambda \end{cases} \to \begin{cases} 0 = 8 + 4\lambda \to \lambda = -2 \\ 1 = 3 + 10\lambda \to \lambda = -\frac{1}{5} \end{cases} \to \text{No hay solución, las rectas son paralelas.}$$

Hazlo tú

3 Determina la posición relativa de $r_1: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + 5\lambda \end{cases}$ **y** $r_2: \begin{cases} x = 8 + 4\lambda \\ y = 21 + 10\lambda \end{cases}$.

Vector de dirección de r_1: $\vec{d} = (2, 5)$

Vector de dirección de r_2: $\vec{d}\,' = (4, 10)$

Son proporcionales, $(4, 10) = 2(2, 5)$, luego las rectas son paralelas o coincidentes.

Punto de r_1: $(0, 1)$

Sustituimos en r_2:

$$\begin{cases} 0 = 8 + 4\lambda \\ 1 = 21 + 10\lambda \end{cases} \to \begin{cases} 0 = 8 + 4\lambda \to \lambda = -2 \\ 1 = 21 + 10\lambda \to \lambda = -2 \end{cases}$$

Para $t = -2$ obtenemos el punto $(0, 1)$ que está en las dos rectas.

Las rectas r_1 y r_2 tienen la misma dirección y un punto en común, luego son coincidentes.

Página 209

1 Comprobamos. **[Los alumnos y las alumnas pueden compartir las comprobaciones de la posición relativas de las rectas con sus compañeros y compañeras tal y como explica esta estrategia].**

Averigua la posición relativa de estos pares de rectas:

a) $r: 3x + 5y - 8 = 0$

$s: 6x + 10y + 4 = 0$

b) $r: 2x + y - 6 = 0$

$s: x - y = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 7 + 5\lambda \\ y = -2 - 3\lambda \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}$

d) $r: 3x - 5y = 0, \quad s: \begin{cases} x = 2 + 5\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \end{cases}$

a) $r: 3x + 5y - 8 = 0 \;\rightarrow\; \vec{n}_r = (3, 5)$

$s: 6x + 10y + 4 = 0 \;\rightarrow\; \vec{n}_s = (6, 10)$

$\frac{3}{6} = \frac{5}{10} \neq \frac{-8}{4} \;\rightarrow$ Las dos rectas son paralelas.

b) $r: 2x + y - 6 = 0 \;\rightarrow\; \vec{n}_r = (2, 1)$

$s: x - y = 0 \;\rightarrow\; \vec{n}_s = (1, -1)$

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \;\rightarrow$ Las dos rectas se cortan.

c) $r: \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases} \;\rightarrow\; \vec{v}_r = (5, -3)$

$s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \;\rightarrow\; \vec{v}_s = (1, -2)$

$\frac{5}{1} \neq \frac{-3}{-2} \;\rightarrow$ Las dos rectas se cortan.

d) $r: 3x - 5y = 0 \;\rightarrow\; \vec{n}_r = (3, -5) \;\rightarrow\; \vec{v}_r = (5, 3)$

$s: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \;\rightarrow\; \vec{v}_s = (5, 3),\; P_s = (2, 1)$

Como $\vec{v}_r = \vec{v}_s$ y $P_s \notin r$, las rectas son paralelas.

7 ÁNGULO DE DOS RECTAS

C.E.: CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 210

1 **Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:**

a) $r_1: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 7 + \lambda \end{cases}$ $\quad r_2: \begin{cases} x = 1 - 4\lambda \\ y = 4 + 3\lambda \end{cases}$

b) $r_1: x + 2y - 17 = 0$ $\quad r_2: 3x - 5y + 4 = 0$

c) $r_1: y = 5x - 1$ $\quad r_2: y = 4x + 3$

d) $r_1: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 7 + \lambda \end{cases}$ $\quad r_2: 3x - 5y + 4 = 0$

a) $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1); \ \vec{v}_{r_2} = (-4, 3)$

$$cos\ \alpha = \frac{|(-2,1)\cdot(-4,3)|}{|(-2,1)|\,|(-4,3)|} = \frac{11}{(\sqrt{5})\cdot(5)} \approx 0{,}9838699101 \ \rightarrow \ \alpha = 10°\ 18'\ 17{,}45''$$

b) Vector normal de r_1: $\vec{n}_1 = (1, 2)$

Vector normal de r_2: $\vec{n}_2 = (3, -5)$

$$cos\ \alpha = \frac{|(1,2)\cdot(3,-5)|}{|(1,2)|\,|(3,-5)|} = \frac{7}{(\sqrt{5})\cdot(\sqrt{34})} \approx 0{,}5368754922 \ \rightarrow \ \alpha = 57°\ 31'\ 43{,}71''$$

c) $m_{r_1} = 5; \ m_{r_2} = 4$

$$tg\ \alpha = \left|\frac{4-5}{1+5\cdot 4}\right| = \frac{1}{21} \approx 0{,}0476190 \ \rightarrow \ \alpha = 2°\ 43'\ 34{,}72''$$

d) $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1); \ \vec{v}_{r_2} = (5, 3)$

$$cos\ \alpha = \frac{|(-2,1)\cdot(5,3)|}{|(-2,1)|\,|(5,3)|} = \frac{7}{(\sqrt{5})\cdot(\sqrt{34})} \approx 0{,}5368754922 \ \rightarrow \ \alpha = 57°\ 31'\ 43{,}71''$$

8 ▶ CÁLCULO DE DISTANCIAS

C.E.: CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.-EA 1.5.3.) CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.) CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.-EA 1.14.3.) CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 211

1 $P(-6, -3)$, $Q(9, 5)$

$r: 3x - 4y + 9 = 0$

$s: 5x + 15 = 0$

Calcula la distancia entre P y Q, las distancias de cada uno de los puntos a cada recta y la distancia entre r y s.

Veamos que la distancia entre r y s es cero ya que tienen punto de corte:

$s: x = -3$, sustituimos en $r: -9 - 4y + 9 = 0 \;\to\; y = 0 \;\to\; (-3, 0)$ es punto de corte de r y s.

2 **a) Halla el área del triángulo de vértices $A(-3, 8)$, $B(-3, 2)$, $C(5, 2)$ con la fórmula de Herón.**

b) Hállala, también, mediante la aplicación de la fórmula habitual $S = \dfrac{b \cdot h_b}{2}$, siendo b la medida del lado AC. ¿Hay otra forma más sencilla?

a) $A(-3, 8)$, $B(-3, 2)$, $C(5, 2)$

Fórmula de Herón: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\left.\begin{array}{l} a = |\overrightarrow{BC}| = |(8, 0)| = 8 \\ b = |\overrightarrow{AC}| = |(8, -6)| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10 \\ c = |\overrightarrow{AB}| = |(0, -6)| = 6 \end{array}\right\} \; p = \frac{8 + 10 + 6}{2} = 12$$

$$S = \sqrt{12(12-8)(12-10)(12-6)} = \sqrt{12 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6} = \sqrt{576} = 24 \text{ u}^2$$

b) $S = \dfrac{b \cdot h_b}{2}$

- $b = |\overrightarrow{AC}| = 10$ (del apartado anterior)
- Hallamos la ecuación de la recta que pasa por $A(-3, 8)$ y $C(5, 2)$:

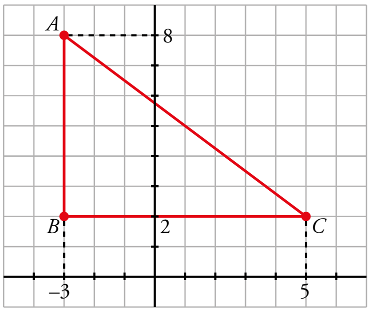
  Pendiente: $m = \dfrac{-6}{8} = \dfrac{-3}{4} \;\to\; y = 2 - \dfrac{3}{4}(x - 5) \;\to\; r: 3x + 4y - 23 = 0$

- $h_b = dist\,[B, r] = \dfrac{|3 \cdot (-3) + 4 \cdot (2) - 23|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{24}{5}$

  $S = \dfrac{10 \cdot (24/5)}{2} = 24 \text{ u}^2$

Habría sido más sencillo si hubiéramos dibujado el triángulo.

Observa:



Es claro que $\overline{AB} = 6$ y $\overline{BC} = 8$.

Como el triángulo es rectángulo, $S = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ u}^2$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.-EA 1.14.3.) CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

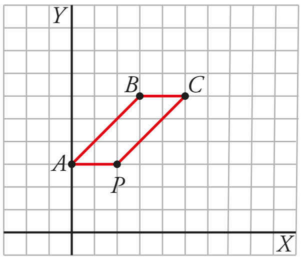
Página 212

1. Puntos y vectores en el plano

Hazlo tú

- **Dados los puntos $A(0, 3)$, $B(3, 6)$ y $C(5, 6)$, halla otro punto, P, que haga que el cuadrilátero formado por los cuatro puntos sea un paralelogramo. Atención: puede haber dos soluciones.**

Consideramos que $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AP}$:



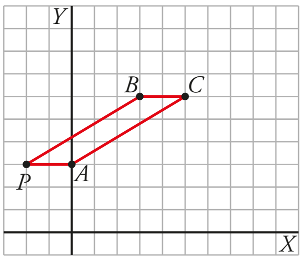
$\overrightarrow{BC}$ está sobre la recta $y = 6$.

Así que una paralela a ella será cualquier recta con $y = constante.$

$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AP} \to$ buscamos una paralela que pase por $A(0, 3) \to y = 3$ es la que buscamos $\to$ como P está sobre esta recta tendremos $P(p, 3)$ y $\overrightarrow{AP} = (p, 0)$.

Sabemos que debe cumplirse: $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AP}| \to \sqrt{4} = \sqrt{p^2} \to p = \pm 2$

La solución que hemos dibujado es $P(2, 3)$, y la segunda solución, $P = (-2, 3)$ sería así:



2. Simétrico de un punto respecto de una recta

Hazlo tú

- **Halla el punto simétrico de $A(2, 2)$ respecto de la recta $r: y = 6 - x$.**

Pendiente de r: $m = -1$

Pendiente de la recta s perpendicular a r: $m' = -\dfrac{1}{-1} = 1$

Vector de dirección de la recta s: $\vec{d}' = (1, 1)$

Ecuación de s: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} \to x - 2 = y - 2 \to x - y = 0$

M es el punto de intersección de las rectas r y s:

$$\begin{cases} y = 6 - x \\ x - y = 0 \end{cases} \to x = 3,\ y = 3 \to M = (3, 3)$$

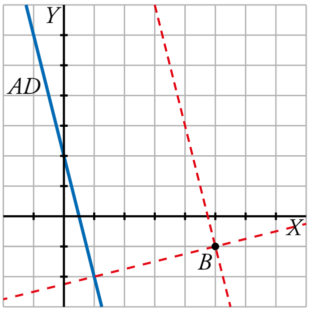
M es el punto medio entre A y $A' = (x, y)$

$$(3, 3) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+2}{2}\right) \to \begin{cases} 3 = \dfrac{x+2}{2} \to x = 4 \\ 3 = \dfrac{y+2}{2} \to y = 4 \end{cases} \to A' = (4, 4)$$

3. Rectas paralelas y perpendiculares a una dada

Hazlo tú

- **Del cuadrado $ABCD$ conocemos el vértice $B(5, -1)$ y la ecuación del lado AD, $y = -4x + 2$. Halla la ecuación de los lados BC y AB.**



El lado BC es paralelo a AD y pasa por $B = (5, -1)$:

Pendiente de AD: $m = -4$

Pendiente de BC: $m = -4$. Vector de dirección de BC: $\vec{d} = (1, -4)$

Ecuación de BC: $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y+1}{-4}$

El lado AB es perpendicular a AD y pasa por $B = (5, -1)$:

Pendiente de AB: $m = \dfrac{1}{4}$. Vector de dirección de BC: $\vec{d}\,' = (4, 1)$

Ecuación de AB: $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y+1}{4}$

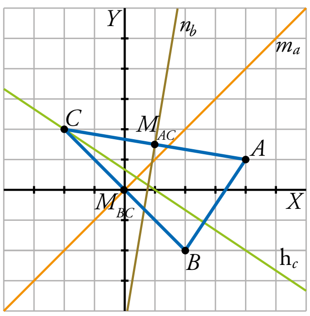
Página 213

4. Rectas notables en un triángulo

Hazlo tú

- **En el triángulo de vértices $A(4, 1)$, $B(2, -2)$ y $C(-2, 2)$ calcula la mediatriz relativa al lado BC, la altura que parte de C y la mediana relativa al lado AC.**

Usamos la misma notación que en el ejercicio resuelto.



a) La mediatriz relativa al lado BC, m_a, es la perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ que pasa por M_{BC}.

$\overrightarrow{BC} = (-2, 2) - (2, -2) = (-4, 4)$

$M_{BC} = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = (0, 0)$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{BC}$: $\vec{d}' = (4, 4)$

Ecuación de m_a: $\frac{x}{4} = \frac{y}{4} \to x = y$

b) La altura que parte de C, h_C, es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y pasa por C.

$\overrightarrow{AB} = (2, -2) - (4, 1) = (-2, 3)$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$: $\vec{d}' = (3, 2)$

Ecuación de h_C: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{2}$

c) La mediana relativa al lado AC, n_b, es perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ y pasa por M_{AC}.

$\overrightarrow{AC} = (-2, 2) - (4, 1) = (-6, 1)$

$M_{AC} = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{AC}$: $\vec{d}' = (1, 6)$

Ecuación de n_b: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-\frac{3}{2}}{6}$

5. Rectas paralelas a una dada a una distancia determinada

Hazlo tú

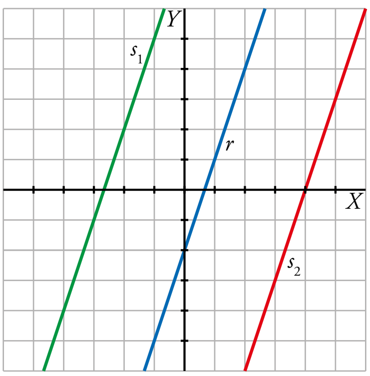
- **Halla las ecuaciones de las rectas que distan $\sqrt{10}$ unidades de r: $y = 3x - 2$.**

s_k: $3x - y + k = 0$

Punto de r: $P = (0, -2)$

$$dist(P, s_k) = \sqrt{10} \to \frac{|3 \cdot 0 - (-2) + k|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{10} \to |k+2| = 10 \to \begin{cases} k+2=10 \to k=8 \\ k+2=-10 \to k=-12 \end{cases}$$

Las rectas buscadas son s_1: $3x - y + 8 = 0$ y s_2: $3x - y - 12 = 0$.



6. Distancias y área en un triángulo

Hazlo tú

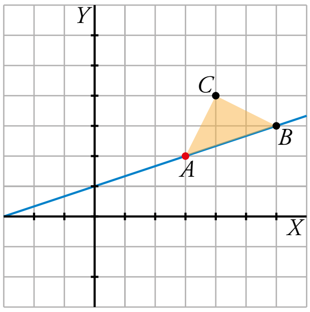
- **Resuelve este mismo ejercicio para $r: x - 3y + 3 = 0$, $B(6, 3)$ y $C(4, 4)$.**

a) Sustituimos las coordenadas de los vértices B y C en la ecuación de r. Obtenemos que $B \in r$ y $C \notin r$. Por tanto, el lado desigual es AB: $dist(A, C) = dist(B, C) \neq dist(A, B)$.

Como $A \in r$, sus coordenadas deben cumplir su ecuación, es decir, $A = (3y - 3, y)$.

$dist(A, C) = dist(B, C) \to \sqrt{(4-(3y-3))^2 + (4-y)^2} = \sqrt{4+1} \to 10y^2 - 50y + 65 = 5 \to y_1 = 3,\ y_2 = 2$

Obtenemos dos soluciones, $A(3, 2)$ y $A'(6, 3)$, pero $A' = B$ no es válida.



b) Tomando como base AB, Área $= \frac{1}{2}$ base · altura $= \frac{1}{2} \cdot dist(A, B) \cdot dist(C, r)$

$dist(A, B) = \sqrt{(3-6)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}$ u

$dist(C, r) = \dfrac{|4 - 12 + 3|}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ u

Área $= \dfrac{1}{2}\sqrt{10}\dfrac{\sqrt{10}}{2} = \dfrac{5}{2} = 2,5$ u^2

Página 214

7. Recta que pasa por un punto y forma un ángulo determinado con otra recta dada

Hazlo tú

- **Halla la ecuación de una recta que pase por el origen de coordenadas y forme un ángulo de 60° con la recta $r: y = x + 3$.**

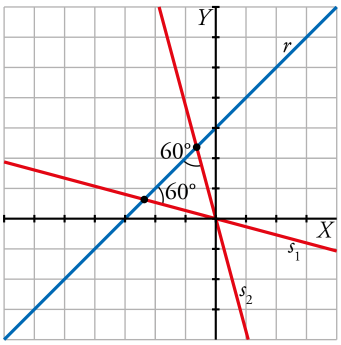
Pendiente de r: $m_r = 1$

Pendiente de s: m_s

$$tg\ 60° = \left|\frac{1-m_s}{1+m_s}\right| \to \sqrt{3} = \left|\frac{1-m_s}{1+m_s}\right| \to \begin{cases} \dfrac{1-m_s}{1+m_s} = \sqrt{3} \to m_s = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \\ \dfrac{1-m_s}{1+m_s} = -\sqrt{3} \to m_s = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \end{cases}$$

Como pasa por $O = (0, 0)$:

$$s_1: y = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x; \quad s_2: y = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}x$$

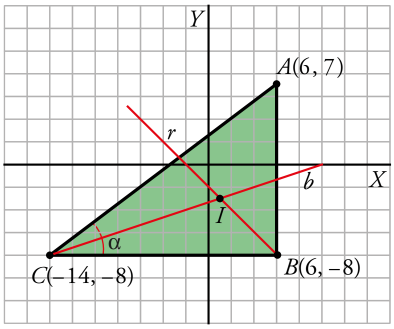


8. Cálculo del incentro de un triángulo rectángulo

Hazlo tú

- **Calcula las coordenadas del incentro del triángulo cuyos vértices son:**

$A(6, 7)$, $B(6, –8)$ y $C(–14, –8)$



Por su construcción, $\hat{B} = 90°$.

Busquemos la bisectriz de $\hat{B}$, la recta r que forma 45° con el eje X y con la recta por B y C, que es la recta $y = –8$.

Su pendiente es $–1$: $y = –x + k$

Además pasa por B: $–8 = –6 + k \rightarrow k = –2 \rightarrow r: y = –x – 2$

Busquemos ahora la bisectriz de $\hat{C}$, la recta que forma un ángulo $\frac{\alpha}{2}$ con el eje X y con la recta $y = –8$.

Sabemos que su pendiente es $tg\,\frac{\alpha}{2}$:

$$cos\,\alpha = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{|(-20, 0)|}{(-20, -15)} = \frac{20}{\sqrt{625}} = \frac{4}{5}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \rightarrow b: y = \frac{1}{3}x + k$$

También sabemos que pasa por C: $-8 = \frac{1}{3}(-14) + k \rightarrow k = -\frac{10}{3} \rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$

Buscamos el punto de corte de r y b, que será el incentro buscado:

$$\begin{cases} y = -x - 2 \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3} \end{cases}$$

Sustituimos la primera en la segunda:

$$-x - 2 = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3} \rightarrow -\frac{4}{3}x = -\frac{10}{3} + 2 = -\frac{4}{3} \rightarrow x = 1;\ y = -3 \rightarrow I(1, -3)$$

Página 215

9. Cálculo de las bisectrices de dos rectas

Hazlo tú

- **Halla el ángulo entre las rectas r y s y las ecuaciones de sus dos bisectrices:**

$$r: \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 7 + \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \end{cases}$$

Si llamamos α al ángulo que forman r y s:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{(2,3)} \cdot \overrightarrow{(1,4)}|}{|\overrightarrow{(2,3)}|\,|\overrightarrow{(1,4)}|} = \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{17}} \to \alpha = 19°39'$$

Buscamos ahora la bisectriz entre r y s, por lo que queremos saber su punto de corte P:

$$(-2 + 2\lambda, 1 + 3\lambda) = (7 + \mu, 1 + 4\mu) \to \mu = 2\lambda - 9$$

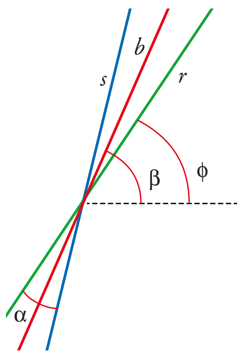
Si sustituimos ahora en la segunda coordenada:

$$1 + 3\lambda = 1 + 4(2\lambda - 9) \to -5\lambda = -36 \to \lambda = \frac{36}{5} \to P = \left(\frac{62}{5}, \frac{113}{5}\right)$$

El ángulo que forma b con r y s es $\frac{\alpha}{2}$, por lo que buscaremos su tangente:

$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-0,942}{1+0,942}} = 0,173$ y su signo es positivo ya que α pertenece al primer cuadrante.

Para saber la pendiente de b necesitamos hallar la tangente del ángulo que forma b con el eje de las abscisas, ángulo al que llamaremos β, teniendo en cuenta que ϕ será el ángulo de r con el eje de abscisas:



$\beta = \theta + \frac{\alpha}{2}$ es el ángulo que forma b con el eje X.

ϕ es la pendiente de r, por tanto, $\phi = \frac{3}{2}$.

$$tg\,\beta = tg\left(\phi + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{tg\phi + tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - tg\phi \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2 + 0,173}{1 - \frac{3}{2} \cdot 0,173} = 2,26$$

b pasa por P y tiene pendiente 2,26:

$$b: \; y = 2,26\left(x - \frac{62}{5}\right) + \frac{113}{5}$$

Nos falta hallar la segunda bisectriz, que sabemos que es perpendicular a b y pasa por P:

$$y = -\frac{1}{2,26}\left(x - \frac{62}{5}\right) + \frac{113}{5} \to y = -0,44\left(x - \frac{62}{5}\right) + \frac{113}{5}$$

10. Recta simétrica a otra respecto a una tercera dada

Hazlo tú

- **Halla la recta t, simétrica de la recta $r: -2x + 3y + 2 = 0$ respecto de la recta $s: -5x + y + 18 = 0$.**

Calculamos A, el punto de intersección de r y t:

$$\begin{cases} -2x + 3y + 2 = 0 \\ -5x + y + 18 = 0 \end{cases} \rightarrow A = (4, 2)$$

Ahora, tomamos un punto P de r: $P = (1, 0)$

Calculamos la recta a perpendicular a s que pasa por $P = (1, 0)$:

$$\vec{d}_s = (-1, -5) \rightarrow \vec{d}_a = (5, -1)$$

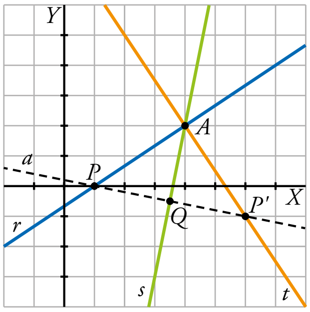
$$a: \frac{x-1}{5} = \frac{y}{-1} \rightarrow -x + 1 = 5y \rightarrow -x - 5y + 1 = 0$$

Determinamos Q, punto de corte de a y s:

$$\begin{cases} -x - 5y + 1 = 0 \\ -5x + y + 18 = 0 \end{cases} \rightarrow Q = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Calculamos $P' = (x, y)$, simétrico de P respecto a Q:

$$\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right) \rightarrow P' = (6, -1)$$



La recta t pasa por $A = (4, 2)$ y por P'.

$$\overrightarrow{AP'} = (6, -1) - (4, 2) = (2, 3)$$

$$t: \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{3}$$

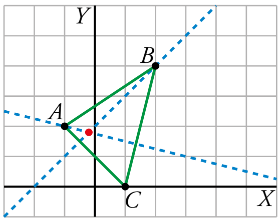
EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 216

1. Cálculo del ortocentro de un triángulo

- **Hallar el ortocentro del triángulo de vértices $A(-1, 2)$, $B(2, 4)$ y $C(1, 0)$.**



a) $\overrightarrow{BC} = (-1, -4)$

Altura h_A: Pasa por $A = (-1, 2)$ y tiene vector de dirección $\overrightarrow{d_{h_A}} = (-4, 1)$.

h_A: $\dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y-2}{1} \to x + 1 = -4y + 8 \to x + 4y - 7 = 0$

b) $\overrightarrow{AC} = (2, -2)$

Altura h_B: Pasa por $B = (2, 4)$ y tiene vector de dirección $\overrightarrow{d_{h_B}} = (2, 2)$.

h_B: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{2} \to 2x - 4 = 2y - 8 \to 2x - 2y + 4 = 0$

El ortocentro es el punto de corte de h_A y h_B:

$$\begin{cases} x + 4y - 7 = 0 \\ 2x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \to x = -\frac{1}{5},\ y = \frac{9}{5}$$

Ortocentro: $\left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$

2. Determinación de un punto que equidista de dos rectas

- **Determinar un punto P del eje de ordenadas que equidiste de estas rectas:**

r: $6x - 8y + 1 = 0$

s: $4x + 3y - 3 = 0$

a) $P \in OY \to P = (0, y)$

b) $P = (0, y)$

$$dist(P, r) = dist(P, s) \to \frac{|-8y+1|}{\sqrt{36+64}} = \frac{|3y-3|}{\sqrt{16+9}} \to \frac{|-8y+1|}{10} = \frac{|3y-3|}{5} \to$$

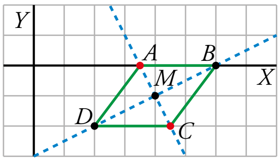
$$\to \begin{cases} \dfrac{-8y+1}{10} = \dfrac{3y-3}{5} \to y = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{-8y+1}{10} = -\dfrac{3y-3}{5} \to y = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Los puntos solución son:

$$P = \left(0, \frac{1}{2}\right),\ P' = \left(0, -\frac{5}{2}\right)$$

3. Vértices de un rombo

- **Un rombo *ABCD* tiene el vértice *A* en el eje de abscisas. Otros dos vértices opuestos son *B*(6, 0) y *D*(2, –2). Hallar *A* y *C*.**



$\overrightarrow{BD} = (-4, -2)$

$M_{BD} = \left(\frac{6+2}{2}, \frac{0-2}{2}\right) = (4, -1)$

d = diagonal AC perpendicular a BD

d pasa por M_{BD} y tiene vector director (–2, 4).

$$d: \frac{x-4}{-2} = \frac{y+1}{4} \rightarrow 4x - 16 = -2y - 2 \rightarrow 4x + 2y - 14 = 0$$

A es la intersección de d y el eje OX:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 14 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{7}{2}, y = 0 \rightarrow A = \left(\frac{7}{2}, 0\right)$$

$C = (x, y)$ es el simétrico de A respecto a M_{BD}:

$$(4, -1) = \left(\frac{x + \frac{7}{2}}{2}, \frac{y}{2}\right) \rightarrow C = \left(\frac{9}{2}, -2\right)$$

4. Vértices de un triángulo conocidas algunas rectas notables

- **En un triángulo *ABC* conocemos el vértice *A*(3, 5), la ecuación de la mediatriz relativa al lado *AB*, m_c: $x - 2y + 2 = 0$ y la altura que pasa por *B*, h_B: $3x - y - 14 = 0$.**

Además, sabemos que *BC* está sobre la altura h_B.

Calcular los vértices *B* y *C*.

a) El lado AC pasa por $A = (3, 5)$ y es perpendicular a h_B.

Vector de dirección del lado AC: $\vec{d} = (3, -1)$

Ecuación del lado AC: $\frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{-1} \rightarrow -x + 3 = 3y - 15 \rightarrow -x - 3y + 18 = 0$

b) $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ -x - 3y + 18 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 6, y = 4 \rightarrow C = (6, 4)$

c) El lado AB pasa por $A = (3, 5)$ y es perpendicular a m_C.

Vector de dirección del lado AB: $\vec{d} = (1, -2)$

Ecuación de lado AB: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} \rightarrow -2x + 6 = y - 5 \rightarrow -2x - y + 11 = 0$

d) $\begin{cases} 3x - y - 14 = 0 \\ -2x - y + 11 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 5, y = 1 \rightarrow B = (5, 1)$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad excepto el 1.9. (EA todos los tratados en la unidad excepto el 1.9.1.)

Página 217

Para practicar

Coordenadas de puntos

1 **Halla las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$, siendo:**

a) $A(0, 0)$, $B(-1, 2)$ **b) $A(2, 3)$, $B(-2, 5)$**

a) $\overrightarrow{AB} = (-1, 2) - (0, 0) = (-1, 2)$

$\overrightarrow{BA} = (0, 0) - (-1, 2) = (1, -2)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, 5) - (2, 3) = (-4, 2)$

$\overrightarrow{BA} = (2, 3) - (-2, 5) = (4, -2)$

2 **Determina si los puntos $A(5, -2)$, $B(3, -2)$ y $C(-5, -2)$ están alineados.**

$\overrightarrow{AB} = (3, -2) - (5, -2) = (-2, 0)$

$\overrightarrow{BC} = (-5, -2) - (3, -2) = (-8, 0)$

Las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son proporcionales, por tanto, A, B y C están alineados.

3 **Determina k para que los puntos $A(-3, 5)$, $B(2, 1)$ y $C(6, k)$ estén alineados.**

Debe ocurrir que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ sean proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (5, -4)\\ \overrightarrow{BC} = (4, k-1)\end{array}\right\} \to \frac{5}{4} = \frac{-4}{k-1} \to 5k - 5 = -16 \to k = \frac{-11}{5}$$

4 **Sean $A(8, -2)$ y $B(-4, 2)$ dos puntos. Calcula:**

a) M, punto medio de A y B.

b) S, simétrico de A respecto a B.

c) P, tal que A sea el punto medio del segmento BP.

a) $M = \left(\frac{8-4}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = (2, 0)$

b) B es el punto medio entre A y $S = (x, y)$

$$(-4, 2) = \left(\frac{x+8}{2}, \frac{y-2}{2}\right) \to \begin{cases} -4 = \dfrac{x+8}{2} \to x = -16 \\ 2 = \dfrac{y-2}{2} \to y = 6 \end{cases}$$

$S = (-16, 6)$

c) P es el simétrico de B respecto de $A \to A$ es el punto medio entre B y P.

$P = (x, y)$

$$(8, -2) = \left(\frac{x-4}{2}, \frac{y+2}{2}\right) \to \begin{cases} 8 = \dfrac{x-4}{2} \to x = 20 \\ -2 = \dfrac{y+2}{2} \to y = -6 \end{cases}$$

$P = (20, -6)$

5 **Da las coordenadas del punto P que divide al segmento de extremos $A(3, 4)$ y $B(0, -2)$ en dos partes tales que $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA}$.**

Sea $P(x, y)$.

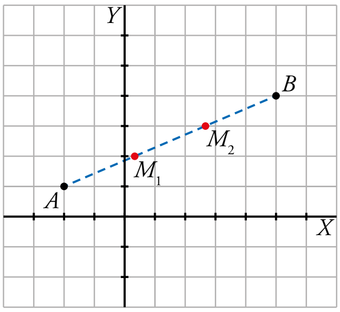
Sustituimos en la condición que nos imponen:

$\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA} \to (x - 0, y - (-2)) = 2(3 - x, 4 - y) \to$

$$\to \begin{cases} x = 2(3-x) \\ y + 2 = 2(4-y) \end{cases} \to \begin{cases} x = 6 - 2x \\ y + 2 = 8 - 2y \end{cases} \to \begin{cases} 3x = 6 \\ 3y = 6 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \to P(2, 2)$$

6 **Determina los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales, siendo $A(-2, 1)$ y $B(5, 4)$.**

Buscamos las coordenadas de los puntos M_1, M_2 de la figura.



$\overrightarrow{AB} = (7, 3)$

$M_1 = (x, y)$

$$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM_1} \to (7, 3) = 3(x + 2, y - 1) \to \begin{cases} 7 = 3x + 6 \to x = \dfrac{1}{3} \\ 3 = 3y - 3 \to y = 2 \end{cases} \to M_1 = \left(\dfrac{1}{3}, 2\right)$$

$M_2 = (x, y)$

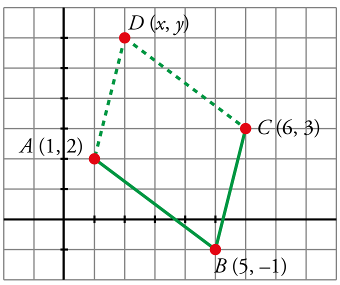
$$\overrightarrow{AM_2} = 2\overrightarrow{AM_1} \to (x + 2, y - 1) = 2\left(\dfrac{1}{3} + 2, 2 - 1\right) \to \begin{cases} x + 2 = \dfrac{14}{3} \to x = \dfrac{8}{3} \\ y - 1 = 2 \to y = 3 \end{cases} \to M_2 = \left(\dfrac{8}{3}, 3\right)$$

7 **Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $A(1, 2)$, $B(5, -1)$ y $C(6, 3)$.**

Sea $D(x, y)$.

Debe cumplirse: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

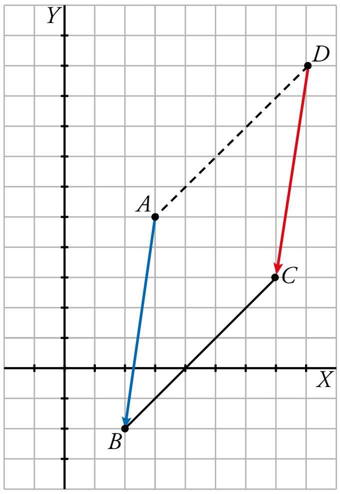
$$(5 - 1, -1 -2) = (6 - x, 3 - y) \to \begin{cases} 4 = 6 - x \\ -3 = 3 - y \end{cases} \to \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \to D(2, 6)$$



8 **Conocemos tres vértices de un rombo $ABCD$, $A(3, 5)$, $B(2, -2)$ y $C(7, 3)$. Determina el vértice D.**

* *Las diagonales de un rombo se cortan en sus puntos medios y son perpendiculares.*

En un rombo, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



$\overrightarrow{AB} = (-1, -7)$

$D = (x, y)$

$(-1, -7) = (7 - x, 3 - y) \rightarrow \begin{cases} -1 = 7 - x \rightarrow x = 8 \\ -7 = 3 - y \rightarrow y = 10 \end{cases} \rightarrow D = (8, 10)$

Ecuaciones de rectas

9 **Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta que pasa por A y tiene dirección paralela al vector $\vec{d}$.**

a) $A(-3, 7)$, $\vec{d}(4, -1)$ **b)** $A(-1, 0)$, $\vec{d}(0, 2)$

Obtén 2 puntos más para cada recta.

a) Ecuación vectorial: $(x, y) = (-3, 7) + k(4, -1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -3 + 4k \\ y = 7 - k \end{cases}$

Dando valores al parámetro k, obtenemos puntos: (1, 6), (5, 5)

b) Ecuación vectorial: $(x, y) = (-1, 0) + k(0, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + 0 \cdot k \\ y = 2k \end{cases}$

Puntos: (–1, 2), (–1, 4)

10 **Escribe la ecuación de la recta que pasa por P y Q de todas las formas posibles.**

a) $P(6, -2)$ y $Q(0, 5)$ **b)** $P(3, 2)$ y $Q(3, 6)$

c) $P(0, 0)$ y $Q(8, 0)$ **d)** $P(0, 0)$ y $Q(0, -2)$

a) $\overrightarrow{PQ} = (-6, 7)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (6, -2) + t(-6, 7)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 6 - 6t \\ y = -2 + 7t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x - 6}{-6} = \dfrac{y + 2}{7}$

Ecuación implícita: $7x + 6y - 30 = 0$

Ecuación explícita: $y = -\dfrac{7}{6}x + 5$

b) $\overrightarrow{PQ} = (0, 4)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (3, 2) + t(0, 4)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + 4t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y-2}{4}$

Ecuación implícita: $x - 3 = 0$

c) $\overrightarrow{PQ} = (8, 0)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t(8, 0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 8t \\ y = 0 \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-0}{8} = \dfrac{y-0}{0}$

Ecuación implícita y explícita: $y = 0$

d) $\overrightarrow{PQ} = (0, -2)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t(0, -2)$

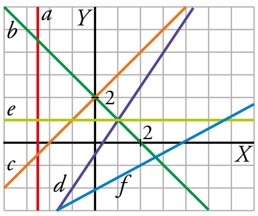
Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{-2}$

Ecuación implícita: $x = 0$

Ecuación explícita no tiene.

11 **Halla las ecuaciones de las rectas *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f*.**



$a \rightarrow x = -\dfrac{5}{2}$

$b \rightarrow \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{-1}$

$c \rightarrow \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{1}$

$d \rightarrow \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3}$

$e \rightarrow y = 1$

$f \rightarrow y = \dfrac{x}{2} - 2$

12 **Determina un vector normal y la ecuación implícita de cada una de las siguientes rectas:**

a) $r: \dfrac{x+1}{-2} = y - 1$

b) $s: \begin{cases} x = -\lambda + 1 \\ y = 5\lambda - 2 \end{cases}$

c) $t: \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = -2 + 3\lambda \end{cases}$

d) $u: y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{7}$

a) $\vec{n} = (1, 2)$

Ecuación implícita: $x + 2y + k = 0$

Como pasa por $P = (-1, 0)$, sustituimos sus coordenadas en la ecuación de la recta para calcular k.

$-1 + 0 + k = 0 \rightarrow k = 1$

$r: x + 2y + 1 = 0$

b) $\vec{n} = (5, 1)$

Ecuación implícita: $5x + y + k = 0$

Como pasa por $P = (-1, 2)$, sustituimos sus coordenadas en la ecuación de la recta para calcular k.

$5(-1) + 2 + k = 0 \rightarrow k = 3$

$s: 5x + y + 3 = 0$

c) Un punto de t es $A(1, -2)$.

El vector director de t es $\vec{v}(1, 3)$, por lo que un vector normal será $\vec{w}(3, -1)$ y la pendiente de una recta normal será $-\dfrac{1}{3}$.

Su ecuación implícita será:

$3(x-1) - (y+2) = 0 \rightarrow 3x - y - 5 = 0$

d) Un vector normal de u es $\vec{v}\left(\dfrac{1}{4}, -1\right)$, y buscamos un punto de u, por ejemplo $A\left(0; \dfrac{5}{7}\right)$:

$x = \dfrac{1}{4}t;\ y = \dfrac{5}{7} - t \rightarrow 4x = \dfrac{5}{7} - y \rightarrow 4x + y - \dfrac{5}{7} = 0$ es una recta solución

13 **Obtén, para cada una de las siguientes rectas, un vector dirección, un vector normal y su pendiente:**

a) $r_1: \begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = 5\lambda \end{cases}$

b) $r_2: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{1-y}{4}$

c) $r_3: x + 3 = 0$

d) $r_4: y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$

$\vec{d}$: vector de dirección; $\vec{n}$: vector normal; m = pendiente.

a) $\vec{d} = (2, 5)$; $\vec{n} = (-5, 2)$; $m = \dfrac{5}{2}$

b) $\vec{d} = (2, 4)$; $\vec{n} = (-4, 2)$; $m = 2$

c) $\vec{d} = (0, 1)$; $\vec{n} = (1, 0)$; m no se puede calcular porque es una recta vertical.

d) $\vec{d} = (3, 1)$; $\vec{n} = (1, -3)$; $m = \dfrac{1}{3}$

14 **Determina un punto y un vector dirección de cada recta. Utilízalos para dar sus ecuaciones continuas y paramétricas.**

a) $3x - 2y + 1 = 0$ **b)** $y = 2(x - 1) + 7$ **c)** $x - 3 = 0$ **d)** $y = \dfrac{2}{3}x + 1$

$\vec{d}$: vector de dirección

a) $\vec{d} = (2, 3)$; $P = \left(0, \frac{1}{2}\right)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \frac{1}{2} + 3\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x}{2} = \frac{y - \frac{1}{2}}{3}$

b) $\vec{d} = (1, 2)$; $P = (0, 5)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 + 2\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x}{1} = \frac{y-5}{2}$

c) $\vec{d} = (0, 1)$; $P = (3, 0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x-3}{0} = \frac{y}{1}$

d) $\vec{d} = (3, 2)$; $P = (0, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2}$

15 Comprueba si el punto $P(5, –7)$ pertenece a estas rectas:

a) $r: \begin{cases} x = 5 \\ y = 13 - 2\lambda \end{cases}$ **b)** $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5}$

a) Sustituimos las coordenadas de P en la ecuación de la recta:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 13 - 2\lambda \end{cases} \to \begin{cases} 5 = 5 \\ -7 = 13 - 2\lambda \end{cases} \to t = 10$$

Hay solución, luego $P \in r$.

b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5} \to \frac{5-1}{2} = \frac{-7-3}{5} \to \frac{4}{2} \neq \frac{-10}{5}$ luego $P \notin s$.

16 Halla el valor de k para que la recta $x + ky - 7 = 0$ contenga al punto $A(5, –2)$.

$(5, –2) \to 5 + k(–2) – 7 = 0 \to –2k = 2 \to k = –1$

Haz de rectas

17 Consideramos el haz de rectas de centro (3, –2).

a) Escribe la ecuación de este haz de rectas.

b) ¿Qué recta de este haz pasa por el punto (–1, 5)?

c) ¿Cuál de las rectas del haz es paralela a $2x + y = 0$?

d) Determina la ecuación de la recta del haz cuya distancia al origen es igual a 3.

a) $a(x – 3) + b(y + 2) = 0$; o bien $y = –2 + m(x – 3)$

b) Si pasa por (–1, 5), entonces, sustituyendo en $y = –2 + m(x – 3)$, obtenemos:

$5 = –2 + m(–1 – 3) \to 7 = –4m \to m = -\frac{7}{4}$; es decir:

$y = -2 - \frac{7}{4}(x - 3) \to 4y = –8 – 7x + 21 \to 7x + 4y – 13 = 0$

c) Si es paralela a $2x + y = 0$ tendrá pendiente –2.

Por tanto, será:

$y = –2 – 2(x – 3) \to y = –2 – 2x + 6 \to 2x + y – 4 = 0$

d) Una recta del haz tiene por ecuación:

$y = -2 + m(x - 3) \ \rightarrow \ y = -2 + mx - 3m \ \rightarrow \ mx - y - 3m - 2 = 0$

Su distancia al origen ha de ser igual a 3:

$\frac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+1}} = 3$; es decir:

$|-3m - 2| = 3\sqrt{m^2+1}$. Elevamos al cuadrado y operamos:

$9m^2 + 12m + 4 = 9(m^2 + 1)$

$9m^2 + 12m + 4 = 9m^2 + 9$

$12m = 5 \ \rightarrow \ m = \frac{5}{12}$

Por tanto, será:

$\frac{5}{12}x - y - \frac{5}{12} - 2 = 0 \ \rightarrow \ 5x - 12y - 39 = 0$

18 **Determina cuál es el centro del haz de rectas de la ecuación $3kx + 2y - 3k + 4 = 0$.**

Llamamos (x_0, y_0) al centro del haz. Vamos a escribir la ecuación que nos dan de la forma:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

$3kx + 2y - 3k + 4 = 0 \ \rightarrow \ 3k(x - x_0) + 2(y - y_0) = 0$

$3kx - 3kx_0 + 2y - 2y_0 = 0$

$3kx + 2y - 3kx_0 - 2y_0 = 0$

Han de ser iguales las dos ecuaciones. Por tanto:

$-3kx_0 = -3k \ \rightarrow \ x_0 = 1$

$-2y_0 = 4 \ \rightarrow \ y_0 = -2$

El centro del haz es el punto $(1, -2)$.

19 **Las rectas $r: y = 3$ y $s: y = 2x - 1$ forman parte del mismo haz de rectas. ¿Qué recta de dicho haz tiene pendiente -2?**

Si $r: y = 3$ y $s: y = 2x - 1$ están en el mismo haz de rectas, el centro de dicho haz es el punto de corte de estas rectas: $P(2, 3)$.

Buscamos la recta que pasa por $P(2, 3)$ y tiene pendiente $m = -2$:

$$y = -2(x - 2) + 3 \ \rightarrow \ y = -2x + 7$$

20 **Escribe en cada caso la ecuación del haz de rectas en el que están incluidas las siguientes rectas:**

a) $3x + y - 2 = 0; \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y-5}{-3}$

b) $\begin{cases} x = 7 + 3\lambda \\ y = 1 + 4\lambda \end{cases}$ **y su perpendicular que pasa por (0, 0).**

c) $x - 2y + 5 = 0$ **y su recta simétrica con respecto a la bisectriz del primer cuadrante.**

a) Transformamos la segunda recta a forma continua:

$3(x - 1) = -1(y - 5) \ \rightarrow \ 3x + y - 8 = 0$

Tenemos que las dos rectas tienen el mismo vector normal (3, 1) por lo que son rectas paralelas y no existe el haz de rectas porque no hay punto de corte

b) La recta buscada s es perpendicular a r, por lo que su vector director es por ejemplo $\vec{v}(4, -3)$.

Además pasa por (0, 0):

$s: x = 4t; \ y = -3t$

Buscamos su punto de corte, A:

$4t = 7 + 3\lambda;\ -3t = 1 + 4\lambda$

Aislamos en la primera ecuación: $\lambda = \frac{4t-7}{3}$

Sustituimos en la segunda:

$-3t = 1 + 4\left(\frac{4t-7}{3}\right) \to -9t = 3 + 16t - 28 \to t = 1 \to A(4, -3)$

Ya podemos escribir el haz de rectas por A como:

$k(x-4) + k'(y+3) = 0$

c) La bisectriz del primer cuadrante es la recta b: $y = x$ y se corta con r en el punto $P(5, 5)$.

Por lo tanto ya podemos definir el haz de rectas porque tenemos el punto de corte también con la recta simétrica, que pasará también por P:

$$k(x-5) + k'(y-5) = 0$$

Página 218

Paralelismo y perpendicularidad

21 **Escribe las ecuaciones de dos rectas que pasen por (0, 0): una paralela y otra perpendicular a cada una de las rectas de las actividades 12 y 13.**

Del ejercicio 12:

r tiene $\vec{v}(2, 1) \to$ paralela $r': \frac{x}{2} = y$; perpendicular $r'': \frac{x}{1} = \frac{y}{-2}$

s tiene $\vec{v}(-1, 5) \to$ paralela $r': \frac{x}{-1} = \frac{y}{5}$; perpendicular $r'': \frac{x}{5} = \frac{y}{1}$

t tiene $\vec{v}(1, 3) \to$ paralela $r': \frac{x}{1} = \frac{y}{3}$; perpendicular $r'': \frac{x}{3} = \frac{y}{-1}$

u tiene $\vec{v}(3, 1) \to$ paralela $r': \frac{x}{3} = \frac{y}{1}$; perpendicular $r'': \frac{-x}{1} = \frac{y}{3}$

Del ejercicio 13:

r_1 tiene $\vec{v}(2, 5) \to$ paralela $r': \frac{x}{2} = \frac{y}{5}$; perpendicular $r'': \frac{x}{5} = \frac{y}{-2}$

r_2 tiene $\vec{v}(2, -4) \to$ paralela $r': \frac{x}{2} = \frac{y}{-4}$; perpendicular $r'': \frac{x}{-4} = \frac{y}{-2}$

r_3 tiene $\vec{v}(0, 1) \to$ paralela $r': x = 0$; perpendicular $r'': y = 0$

r_4 tiene $\vec{v}\left(1, \frac{1}{3}\right) \to$ paralela $r': x = 3y$; perpendicular $r'': 3x = -y$

22 **Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$, obtén en forma explícita las siguientes rectas:**

a) Paralela a r que pasa por $A(-1, -3)$.

b) Perpendicular a r que pasa por $B(-2, 5)$.

$r: \begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases} \to \vec{v}_r = (-5, 1)$

a) $\vec{v}_s = (-5, 1)$, $A(-1, -3) \to s: y = -\frac{1}{5}(x+1) - 3 \to s: y = -\frac{1}{5}x - \frac{16}{5}$

b) $\vec{v}_s = (1, 5)$, $B(-2, 5) \to s: y = 5(x+2) + 5 \to s: y = 5x + 15$

23 **De una cierta recta r conocemos su pendiente $m = \frac{2}{3}$. Halla la recta s en cada caso.**

a) s es paralela a r y pasa por (0, 0).

b) s es perpendicular a r y pasa por (1, 2).

a) Al ser paralela, tiene la misma pendiente. Además, pasa por (0, 0). Por tanto, $s: y = \frac{2}{3}x$.

b) Al ser perpendicular, su pendiente es $-\frac{1}{m} = \frac{-3}{2}$. Por tanto, $y = \frac{-3}{2}(x-1)+2 \to y = \frac{-3}{2}x + \frac{7}{2}$.

24 **Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, -3)$ y es:**

a) Paralela a la recta $2x - 3y + 5 = 0$.

b) Perpendicular a la recta $x + y - 3 = 0$.

c) Paralela a la recta $2y - 3 = 0$.

d) Perpendicular a la recta $x + 5 = 0$.

a) r tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 2)$ y pasa por $P(1, -3) \to r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2}$

b) r tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $P(1, -3) \to r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1}$

c) Es paralela al eje OX y pasa por $P(1, -3) \to r: y = -3$

d) Es paralela al eje OX y pasa por $P(1, -3) \to r: y = -3$

25 **El vector normal de la recta r es $\vec{n}(2, -3)$. Obtén, en cada caso, la ecuación de la recta s.**

a) s es paralela a r y contiene al punto $P(2, -3)$.

b) s es perpendicular a r y pasa por $Q(0, 1)$.

a) s tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 2)$ y pasa por $P(2, -3)$.

$s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2}$

b) s tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, -3)$ y pasa por $Q(0, 1)$.

$s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3}$

26 **Escribe las ecuaciones de las siguientes rectas:**

a) r_1, paralela al eje de abscisas que pasa por $A(-1, -2)$.

b) r_2, perpendicular al eje OX que contiene a $B(1, 0)$.

c) r_3, paralela al eje de ordenadas que pasa por $C(3, 5)$.

d) r_4, perpendicular al eje OY que contiene a $D(-1, 7)$.

a) $r_1: y = -2$ b) $r_2: x = 1$ c) $r_3: x = 3$ d) $r_4: y = 7$

27 **Dada la recta $4x + 3y - 6 = 0$, escribe la ecuación de la recta perpendicular a ella en el punto de corte con el eje de ordenadas.**

Punto de corte con el eje de ordenadas P:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to x = 0, y = 2$$

s tiene vector de dirección $\vec{d} = (4, 3)$ y pasa por $P = (0, 2)$.

$s: \frac{x}{4} = \frac{y-2}{3}$

28 **Determina, en cada caso, una recta que pase por el punto $P(-2, -3)$ y sea:**

a) Paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

b) Perpendicular a la bisectriz del segundo cuadrante.

a) Bisectriz del primer cuadrante: $y = x$

s tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $P = (-2, -3)$.

$s: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+3}{1} \rightarrow x + 2 = y + 3$

b) Bisectriz del segundo cuadrante: $y = -x$

s tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $P = (-2, 3)$.

$s: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+3}{1} \rightarrow x + 2 = y + 3$

29 **De un triángulo conocemos el vértice $A(1, 3)$ y la recta $r: 2x - 3y + 6 = 0$ que contiene al lado BC. Halla la ecuación de la altura relativa al vértice A.**

h_A es perpendicular a r y pasa por $A = (1, 3)$.

h_A tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, -3)$ y pasa por $A = (1, 3)$.

$h_A: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-3}$

30 **Halla, en cada caso, el valor de k para que la recta $r: y = kx + 1$ sea:**

a) Paralela al eje OX.

b) Perpendicular a la recta $2x + 3y + 7 = 0$.

Pendiente de r: $m = k$

a) Pendiente del eje OX: $m' = 0$, luego $m = m' = 0 \rightarrow k = 0$

b) Pendiente de $2x + 3y + 7 = 0$: $m' = -\dfrac{2}{3}$, luego $m = -\dfrac{1}{m'} = \dfrac{3}{2} \rightarrow k = \dfrac{3}{2}$

31 **Halla el punto simétrico de $P(1, 1)$ respecto a la recta de ecuación $x - 2y - 4 = 0$.**

** Mira el problema resuelto número 2.*

Llamamos r a la recta: $x - 2y - 4 = 0$.

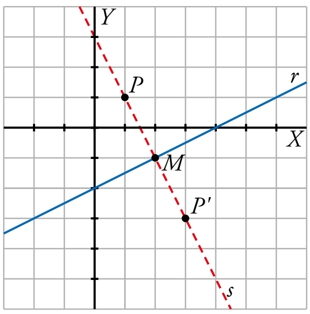
s: perpendicular a r que pasa por $P = (1, 1)$

s tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -2)$

$s: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} \rightarrow -2x + 2 = y - 1 \rightarrow -2x - y + 3 = 0$

M = punto de corte de las rectas

$\begin{cases} -2x - y + 3 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2, y = -1 \rightarrow M = (2, -1)$



M es el punto medio entre P y $P' = (x, y)$, su simétrico respecto de r.

$(2, -1) = \left(\dfrac{x+1}{2}, \dfrac{y+1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{x+1}{2} \rightarrow x = 3 \\ -1 = \dfrac{y+1}{2} \rightarrow y = -2 \end{cases} \rightarrow P' = (3, -3)$

Posición relativa de dos rectas

32 **Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Calcula el punto de corte cuando sean secantes.**

a) $r: 5x + y + 7 = 0;\ s: \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = -10\lambda - 3 \end{cases}$

b) $r: 3x + 5y + 10 = 0;\ s: -3x + 5y + 10 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 3\lambda - 1 \\ y = \lambda + 3 \end{cases};\ s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

d) $r: y = 2x + 1;\ s: y = \dfrac{-1}{2}x + 1$

a) Buscamos un vector dirección de cada recta:

$r: 5x + y + 7 = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (5, 1) \rightarrow \vec{v}_r = (-1, 5)$

$s: \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = -10\lambda - 3 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (2, -10)$

Como los vectores dirección son proporcionales $(\vec{v}_s = -2\vec{v}_r)$, las rectas o son paralelas o son coincidentes.

Como $P(1, -3) \in s$ y $P \notin r$, las rectas son paralelas.

b) Buscamos un vector dirección de cada recta:

$r: 3x + 5y + 10 = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (3, 5) \rightarrow \vec{v}_r = (-5, 3)$

$s: -3x + 5y + 10 = 0 \rightarrow \vec{n}_s = (-3, 5) \rightarrow \vec{v}_s = (5, 3)$

Como los vectores dirección no son proporcionales, las rectas son secantes.

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas se obtiene el punto de corte, (0, –2).

c) Buscamos un vector dirección de cada recta

$r: \begin{cases} x = 3\lambda - 1 \\ y = \lambda + 3 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (3, 1)$

$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (1, 2)$

Como los vectores dirección no son proporcionales, las rectas son secantes.

El punto de corte se obtiene tomando $\lambda = 1$ en la recta r y $\lambda = 2$ en la recta s. Es el punto (2, 4).

d) $m_r = 2;\ m = -\dfrac{1}{2} \rightarrow$ Las rectas son perpendiculares.

$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 1 \end{cases} \rightarrow x = 0, y = 1 \rightarrow$ Punto de corte $P = (0, 1)$.

33 **A partir de la recta $r: 3x - 5y + 7 = 0$, escribe la ecuación implícita de una recta que sea:**

a) paralela a r.

b) secante y no perpendicular a r.

c) perpendicular a r.

d) coincidente (distinta ecuación).

a) $3x - 5y = 0$

b) $x - y = 0$

c) $5x + 3y + 7 = 0$

d) $6x - 10y + 14 = 0$

34 **Determina k para que las rectas r y s sean paralelas.**

$r: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-2}$ $\qquad$ $s: \dfrac{x+5}{-6} = \dfrac{y-1}{k}$

Para que sean paralelas, sus vectores dirección han de ser proporcionales, es decir:

$$\frac{3}{-6} = \frac{-2}{k} \to k = 4$$

35 **Halla el valor de k para que estas rectas sean coincidentes:**

$r: 2x + 3y + 5 = 0$ $\qquad$ $s: \begin{cases} x = -6\lambda + k \\ y = 4\lambda + 2 \end{cases}$

Expresamos ambas rectas en forma implícita:

r: $2x + 3y + 5 = 0$

s: $4x + 6y - 12 - 4k = 0$

Para que $r = s$, estas ecuaciones tienen que ser proporcionales, y por tanto:

$$-12 - 4k = 10 \to k = \frac{22}{-4} = \frac{-11}{2}$$

36 **Calcula k para que r y s sean perpendiculares.**

$r: y = 2x + 1$ $\qquad$ $s: 3x + ky + 3 = 0$

$m_r = 2;\ m = -\dfrac{3}{k}$

Para que sean perpendiculares, $m_r = -\dfrac{1}{m_s}$.

Luego, $2 = \dfrac{k}{3} \to k = 6$

Ángulos

37 **Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:**

a) $r: y = 2x + 5$
$\quad s: y = -3x + 1$

b) $r: 3x - 5y + 7 = 0$
$\quad s: 10x + 6y - 3 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases};\ s: \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = 4 + \lambda \end{cases}$

d) $r: 2x - y = 0$
$\quad s: 2y + 3 = 0$

a) $\left.\begin{array}{l} r: y = 2x + 5 \\ s: y = -3x + 1 \end{array}\right\} \to$ sus pendientes son: $\begin{cases} m_r = 2 \\ m_s = -3 \end{cases}$

$$tg\ \alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right| = \left|\frac{2-(-3)}{1 + 2(-3)}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = 1 \to \alpha = 45°$$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{v} = (3, -5) \perp r_1 \\ \vec{w} = (10, 6) \perp r_2 \end{array}\right\} \to \alpha \equiv \widehat{r_1, r_2} = \widehat{\vec{v}, \vec{w}} \to cos\ \alpha = \dfrac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \dfrac{|30 - 30|}{|\vec{v}||\vec{w}|} = 0 \to \alpha = 90°$

c) Los vectores dirección de esas rectas son $\vec{d}_1 = (-1, 2)$ y $\vec{d}_2 = (-3, 1)$.

Entonces:

$$cos\ \alpha = \frac{|\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2|}{|\vec{d}_1||\vec{d}_2|} = \frac{|3+2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \alpha = 45°$$

d) $\left.\begin{array}{l}\vec{a}_1 = (2, -1) \perp r_1 \\ \vec{a}_2 = (0, 2) \perp r_2\end{array}\right\} \to \alpha \equiv \widehat{r_1, r_2} = \widehat{\vec{a}_1, \vec{a}_2} \to$

$$\to \cos\alpha = \frac{|\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|} = \frac{|0-2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{5}\cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,4472 \to \alpha = 63°\ 26'\ 5,82''$$

38 Calcula las ecuaciones de las bisectrices de las rectas del ejercicio anterior.

* ***La resolución del ejercicio resuelto 9 puede ayudarte.***

a) $\alpha = 45° \to tg\frac{\alpha}{2} = 0,4142$

Punto de corte: $P\left(-\frac{4}{5}, \frac{17}{5}\right)$

$tg\ \phi = 2$ (pendiente de r)

Buscamos la pendiente de la bisectriz:

$$tg\ \beta = tg\left(\phi + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{tg\ \phi + tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - tg\ \phi \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2 + 0,4142}{1 - 2 \cdot 0,4142} = 14,061$$

La bisectriz buscada es: $y = 14,061\left(x + \frac{4}{5}\right) + \frac{17}{5}$

La segunda bisectriz pasa por el mismo punto P y es perpendicular a la primera bisectriz, por lo tanto:

$$y = -\frac{1}{14,061}\left(x + \frac{4}{5}\right) + \frac{17}{5}$$

b) $\alpha = 90° \to tg\frac{\alpha}{2} = 1$

Punto de corte: $P(-0,397; 1,61)$

$tg\ \phi = \frac{3}{5}$ $\left(\text{pendiente de } r\text{: } y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}\right)$

Buscamos la pendiente de la bisectriz:

$$tg\ \beta = tg\left(\phi + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{tg\ \phi + tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - tg\ \phi \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{5} + 1}{1 - \frac{3}{5}} = 4$$

La bisectriz buscada es:

$$y = 4\,(x + 0,397) + 1,162$$

La segunda bisectriz pasa por el mismo punto P y es perpendicular a la primera bisectriz, por lo tanto:

$$y = -0,25\,(x + 0,397) + 1,162$$

c) $\alpha = 45° \to tg\frac{\alpha}{2} = 0,4142$

Punto de corte: $P(1,4; 3,2)$

$tg\ \phi = -2$ (pendiente de r)

Buscamos la pendiente de la bisectriz:

$$tg\ \beta = tg\left(\phi + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{tg\ \phi + tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - tg\ \phi \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{-2 + 0,4142}{1 + 2 \cdot 0,4142} = -0,867$$

La bisectriz buscada es:

$y = -0,867\,(x - 1,4) + 3,2$

La segunda bisectriz pasa por el mismo punto P y es perpendicular a la primera bisectriz, por lo tanto:

$$y = \frac{1}{0,867}(x - 1,4) + 3,2$$

d) $cos\,\alpha = 0,4472 \;\rightarrow\; tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}} = 0,618$

Punto de corte: $P\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right)$

En este caso como s es paralela al eje de las X, la pendiente de la bisectriz es directamente $tg\,\frac{\alpha}{2}$:

$tg\,\beta = tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0,618$

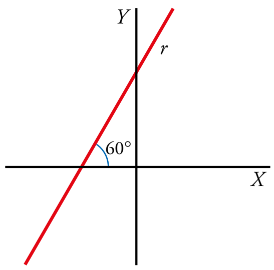
La bisectriz buscada es:

$y = 0,618\left(x + \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{2}$

La segunda bisectriz pasa por el mismo punto P y es perpendicular a la primera bisectriz, por lo tanto:

$$y = -\frac{1}{0,618}\left(x + \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{2}$$

39 Calcula n de modo que la recta $3x + ny - 2 = 0$ forme un ángulo de 60° con el eje OX.



$$\left.\begin{array}{l} tg\,60° = \sqrt{3} \\ m_r = -\frac{3}{n} \end{array}\right\} \text{Como } tg\,60° = m_r, \text{ se tiene que:}$$

$$\sqrt{3} = -\frac{3}{n} \;\rightarrow\; n = \frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

40 Calcula m y n en estas rectas sabiendo que r pasa por el punto $P(1, 4)$ y que r y s forman un ángulo de 45°:

r: $mx - 2y + 5 = 0$ $\qquad$ s: $nx + 6y - 8 = 0$

$P \in r \;\rightarrow\; m \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 5 = 0 \;\rightarrow\; m = 3$

r: $3x - 2y + 5 = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \;\rightarrow\; m_r = \frac{3}{2}$

s: $nx + 6y - 8 = 0 \;\rightarrow\; y = -\frac{n}{6}x + \frac{8}{6} \;\rightarrow\; m_s = -\frac{n}{6}$

$tg\,45° = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}\right| = \left|\frac{-(n/6) - (3/2)}{1 - (n/6)\,(3/2)}\right| = \left|\frac{-2n - 18}{12 - 3n}\right| = 1$

Hay dos posibilidades:

- $\frac{-2n - 18}{12 - 3n} = 1 \;\rightarrow\; -2n - 18 = 12 - 3n \;\rightarrow\; n = 30$
- $\frac{-2n - 18}{12 - 3n} = -1 \;\rightarrow\; -2n - 18 = -12 + 3n \;\rightarrow\; n = -\frac{6}{5}$

Página 219

41 **Las rectas de ecuación $r: 3x - 2y + 6 = 0$; $s: 2x + y - 6 = 0$ y $t: 2x - 5y - 4 = 0$ son los lados de un triángulo. Represéntalo y halla sus ángulos.**

$A(5, k)$, $B(3, -2)$, $\overrightarrow{AB} = (-2, -2 - k)$

$dist(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2-k)^2} = 2 \rightarrow 4 + 4 + 4k + k^2 = 4 \rightarrow k^2 + 4k + 4 = 0 \rightarrow k = -2$

Distancias

42 **Calcula en cada caso la distancia entre A y B:**

a) $A(0, 0)$ y $B(3, 4)$ **b) $A(-1, 4)$ y $B(3, -2)$**

c) $A(1, 1)$ y $B(-2, 3)$ **d) $A(-3, -5)$ y $B(-2, -1)$**

a) $|\overrightarrow{AB}| = |(3, 4)| = \sqrt{9 + 16} = 5$

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(4, -6)| = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

c) $|\overrightarrow{AB}| = |(-3, 2)| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

d) $|\overrightarrow{AB}| = |(1, 4)| = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$

43 **Calcula k de modo que la distancia entre los puntos $A(5, k)$ y $B(3, -2)$ sea igual a 2.**

$A(5, k)$, $B(3, -2)$, $\overrightarrow{AB} = (-2, -2 - k)$

$dist(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2-k)^2} = 2 \rightarrow 4 + 4 + 4k + k^2 = 4 \rightarrow k^2 + 4k + 4 = 0 \rightarrow k = -2$

44 **Determina, en cada caso, si el triángulo ABC es equilátero, isósceles o escaleno.**

a) $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, \sqrt{3})$

b) $A(1, 3)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 7)$

c) $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$, $C(-2, -3)$

a) $dist(A, B) = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-0)^2} = 2$

$dist(A, C) = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = 2$

$dist(B, C) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = 2$

Triángulo equilátero.

b) $dist(A, B) = \sqrt{(1-3)^2 + (3-5)^2} = 2\sqrt{2}$

$dist(A, C) = \sqrt{(1+1)^2 + (3-7)^2} = 2\sqrt{5}$

$dist(B, C) = \sqrt{(3+1)^2 + (5-7)^2} = 2\sqrt{5}$

Triángulo isósceles.

c) $dist(A, B) = \sqrt{(2+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$

$dist(A, C) = \sqrt{(2+2)^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{13}$

$dist(B, C) = \sqrt{(2+2)^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{13}$

Triángulo isósceles.

45 **Halla la longitud del segmento que determina la recta $x - 2y + 5 = 0$ al cortar a los ejes de coordenadas.**

Hay que calcular la distancia entre los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas.

Calculamos primero dichos puntos:

- $\begin{cases} x-2y+5=0 \\ x=0 \end{cases} \to -2y+5=0 \to y=\dfrac{5}{2} \to A\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

- $\begin{cases} x-2y+5=0 \\ y=0 \end{cases} \to x+5=0 \to x=-5 \to B(-5, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

- Luego $\overline{AB} = dist(A, B) = \sqrt{(5-0)^2 + \left(0-\dfrac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{25+\dfrac{25}{4}} = \sqrt{\dfrac{125}{4}} = \dfrac{5}{2}\sqrt{5}$

46 Halla las distancias de $O(0, 0)$ y $P(-1, 2)$ a estas rectas:

a) $3x - 4y + 5 = 0$ **b) $2x + 5 = 0$**

c) $\begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 8\lambda \end{cases}$ **d) $(x, y) = \left(\dfrac{-1}{2}, 1\right) + (2, 1)\lambda$**

a) $dist(O, r) = \dfrac{|5|}{\sqrt{9+16}} = 1$ u

$dist(P, r) = \dfrac{|3\cdot(-1) - 4\cdot 2 + 5|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{6}{5}$ u

b) $dist(O, r) = \dfrac{|5|}{\sqrt{0+4}} = \dfrac{5}{2}$ u

$dist(P, r) = \dfrac{|2\cdot(-1)+5|}{\sqrt{0+4}} = \dfrac{3}{2}$ u

c) $r: \dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{8} \to 8x - 6y = 0$

$dist(O, r) = \dfrac{|0|}{\sqrt{64+36}} = 0$ u $\to O \in r$

$dist(P, r) = \dfrac{|8\cdot(-1) - 6\cdot 2|}{\sqrt{64+36}} = 2$ u

d) $r: \dfrac{x+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{y-1}{1} \to x + \dfrac{1}{2} = 2y - 2 \to x - 2y + \dfrac{3}{2} = 0 \to 2x - 4y + 3 = 0$

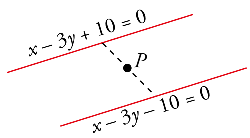
$dist(O, r) = \dfrac{|3|}{\sqrt{4+16}} = \dfrac{3}{10}\sqrt{5}$ u

$dist(P, r) = \dfrac{|2\cdot(-1) - 4\cdot 2 + 3|}{\sqrt{4+16}} = \dfrac{7}{10}\sqrt{5}$ u

47 Determina c para que la distancia de $r: x - 3y + c = 0$ al punto $(6, 2)$ sea de $\sqrt{10}$ unidades (hay dos soluciones).

$dist(P, r) = \dfrac{|1\cdot 6 - 3\cdot 2 + c|}{\sqrt{1+9}} = \dfrac{|6-6+c|}{\sqrt{10}} = \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

Hay dos soluciones: $\begin{cases} \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \to c_1 = 10 \\ \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10} \to c_2 = -10 \end{cases}$



Las dos rectas solución serán dos rectas paralelas.

48 **Halla la distancia entre los siguientes pares de rectas:**

a) $r: 3x + 5 = 0;\ \ s: \begin{cases} x = 2/5 \\ y = 3 - 4\lambda \end{cases}$

b) $r: y = \dfrac{-2}{3}x + 1;\ \ s: \dfrac{1-x}{3} = \dfrac{y+1}{2}$

c) $r: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \end{cases};\ \ s: \begin{cases} x = 1 - 8\lambda \\ y = 6\lambda \end{cases}$

d) $r: 2x + 4y + 8 = 0;\ \ s: y = -\dfrac{1}{2}x$

a) $P' = (0, 0) \in r'$

$$dist(r, r') = dist(P', r) = \frac{|5|}{\sqrt{9+0}} = \frac{5}{3}\ \text{u}$$

b) Las rectas son paralelas.

$P' = (1, -1) \in r'$

$r: 2x + 3y - 1 = 0$

$dist(r, r') = dist(P', r) =\ \text{u}$

c) Son paralelas, $P(1, 0) \in s$.

$$r: 3x + 4y - 10 = 0 \ \rightarrow\ d(r, s) = d(P, s) = \frac{|3-10|}{\sqrt{9+16}} = \frac{7}{5}$$

d) Veamos que no son paralelas y por lo tanto su distancia es cero. Encontramos el punto de corte (8, –4) o vemos por sus vectores que no son paralelas:

$$s: \vec{v}(1, -2)$$

Tal y como nos dan r lo más rápido es encontrar su vector normal $\vec{n}(2, 4)$ o un vector director $\vec{u}(4, -2)$.

Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales no pueden ser paralelos.

49 **Comprueba que el triángulo de vértices $A(-3, 1)$, $B(0, 5)$ y $C(4, 2)$ es rectángulo y halla su área.**

Veamos si se cumple el teorema de Pitágoras:

$$\left.\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(0+3)^2 + (5-1)^2} = 5 \\ |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{(4+3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{50} \\ |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{4^2 + (2-5)^2} = 5 \end{aligned}\right\}\ 5^2 + 5^2 = (\sqrt{50})^2 \ \rightarrow\ \text{Por tanto, el triángulo es rectángulo.}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12{,}5\ \text{u}^2$$

50 **Halla el área del cuadrado de diagonal AB, con $A(5, -3)$ y $B(-7, 2)$.**

$\overrightarrow{AB} = (-12, 5)$

$|\overrightarrow{AB}| = 13$

Buscamos el punto medio entre A y B:

$$Q = \frac{A+B}{2} = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

Buscamos la recta d perpendicular a AB por Q, con vector $\vec{n}(5, 12)$:

$b: \dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y+\frac{1}{2}}{12}$; sus puntos son de la forma: $\left(-1+5t, -\dfrac{1}{2}+12t\right)$

Sabemos que los puntos C y D pertenecen a la recta b y su distancia a Q es la mitad de la distancia entre A y B:

$$C\left(-1+5t, -\frac{1}{2}+12t\right)$$

$$|\overrightarrow{QC}| = |(5t,\ 12t)| = \sqrt{25t^2+144t^2} = \pm 13t = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{13}{2} \to t = \pm\frac{1}{2}$$

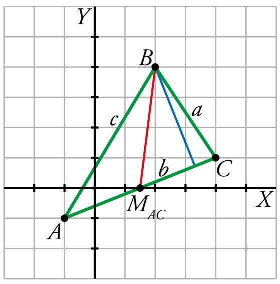
- Si $t = +\dfrac{1}{2} \to C = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{11}{2}\right)$
- Si $t = -\dfrac{1}{2} \to D = \left(\dfrac{-7}{2}, \dfrac{-13}{2}\right)$

$\text{Área} = |\overrightarrow{AC}|^2 = \dfrac{169}{2} = 84{,}5\ \text{u}^2$

NOTA: La podríamos haber encontrado más rápidamente teniendo en cuenta que el área se puede expresar también en función de la medida de su diagonal:

$$\text{Área} = \frac{d^2}{2} = \frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{2} = \frac{13^2}{2} = \frac{169}{2} = 84{,}5\ \text{u}^2$$

51 En el triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(2, 4)$ y $C(4, 1)$, halla las longitudes de la mediana y de la altura que parten de B.



a) Longitud de la mediana = $dist(B, M_{AC})$

$M_{AC} = \left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$

$dist\ (B, M_{AC}) = \sqrt{\left(2-\dfrac{3}{2}\right)^2 + (4-0)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{65}$

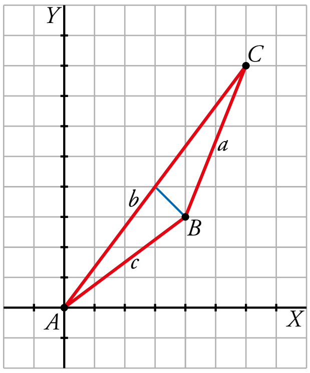
b) Longitud de la altura = $dist(B, \text{lado } AC)$

$\overrightarrow{AC} = (5, 2)$

$r: \dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y+1}{2} \to 2x+2 = 5y+5 \to$ lado AC: $2x - 5y - 3 = 0$

$dist(B, r) = \dfrac{|2\cdot 2 - 5\cdot 4 - 3|}{\sqrt{4+25}} = \dfrac{19}{29}\sqrt{29}$ u

52 **Dado el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(4, 3)$ y $C(6, 8)$, calcula su área.**



$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$$

$$\text{Base} = dist(A, C) = \sqrt{(0-6)^2 + (0-8)^2} = 10 \text{ u}$$

Altura = $dist(B, \text{lado } AC)$

Lado AC:

$\overrightarrow{AC} = (6, 8)$

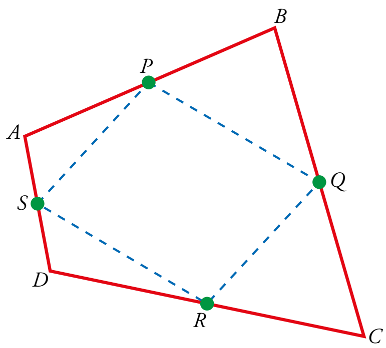
$$r: \frac{x}{6} = \frac{y}{8} \to 8x - 6y = 0 \to 4x - 3y = 0$$

$$dist(B, \text{lado } AC) = \frac{|4 \cdot 4 - 3 \cdot 3|}{\sqrt{16+9}} = \frac{7}{5} \text{ u}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{7}{5} = 7 \text{ u}^2$$

Para resolver

53 **Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo. Compruébalo con el cuadrilátero de vértices $A(3, 8)$, $B(5, 2)$, $C(1, 0)$ y $D(-1, 6)$.**



$$P\left(\frac{5+3}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (4, 5) \qquad Q(3, 1);\ R(0, 3);\ S(1, 7)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (3-4, 1-5) = (-1, -4) \\ \overrightarrow{SR} = (0-1, 3-7) = (-1, -4) \end{array}\right\} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \qquad \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{SP} = (4-1, 5-7) = (3, -2) \\ \overrightarrow{RQ} = (3-0, 1-3) = (3, -2) \end{array}\right\} \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$$

54 **En un triángulo equilátero conocemos dos vértices, $A(\sqrt{3}/2, 0)$ y $B(-\sqrt{3}/2, 0)$. Halla el tercer vértice.**

El vértice $C = (x, y)$ está en la mediatriz del segmento AB y $dist(A, C) = dist(A, B)$.

r: Mediatriz de AB

$\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}, 0)$

Punto medio de AB:

$M_{AB} = (0, 0)$

$r: x = 0$

$$dist(A, C) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + y^2 + \frac{3}{4}}$$

$$dist(A, B) = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{3}$$

Las coordenadas de C son la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - \sqrt{3}x + y^2 + \frac{3}{4} = \sqrt{3} \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + \frac{3}{4} = \sqrt{3} \end{cases} \to y = \frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3} \to y = -\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3}$$

Hay dos triángulos equiláteros con vértices A y B.

$$C = \left(0, \frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3}\right),\ C' = \left(0, -\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3}\right)$$

55 Los puntos $A(2, 2)$ y $B(5, 1)$ son dos vértices consecutivos del hexágono regular *ABCDEF*. Calcula:

a) La altura del hexágono (el doble de su apotema). **b) El área del hexágono.**

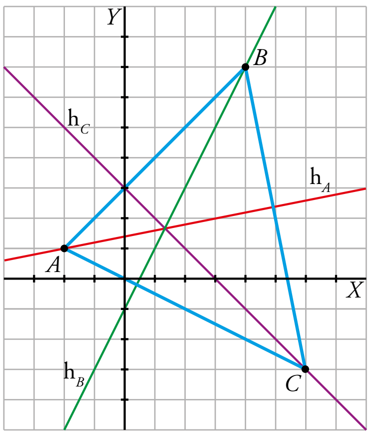
a) $|\overrightarrow{AB}| = (3, -1)$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10}$

Al ser A y B vértices consecutivos del hexágono, serán también dos vértices de uno de los 6 triángulos equiláteros que hay dentro del hexágono, por lo que sabemos cuánto miden los lados de estos triángulos. La altura del triángulo h parte en dos triángulos rectángulos a dicho triángulo equilátero, por lo que podemos aplicar el teorema de Pitágoras para encontrar dicha altura:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = \mathrm{h}^2 + \left|\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right|^2 \to 10 = \mathrm{h}^2 + \frac{10}{4} \to \mathrm{h} = \frac{\sqrt{30}}{2} \to \mathrm{h}' = \sqrt{30} \text{ es la altura del hexágono}$$

b) $$\text{Área}_{\text{HEXÁGONO}} = 6 \cdot \text{Área}_{\text{TRIÁNGULO}} = 6 \cdot \frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot \mathrm{h}}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{30}}{2}}{2} = 15\sqrt{3}$$

56 Calcula las ecuaciones de las alturas del triángulo de vértices $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$ y $C(6, -3)$. Halla el ortocentro.



- h_A es perpendicular a BC y pasa por $A = (1, 3)$.

  $\overrightarrow{BC} = (2, -10) = 2(1, -5)$

  h_A tiene vector de dirección $\vec{d} = (5, 1)$ y pasa por $A = (-2, 1)$.

  h_A: $\frac{x + 2}{5} = \frac{y - 1}{1} \to x + 2 = 5y - 5 \to x - 5y + 7 = 0$

- h_B es perpendicular a AC y pasa por $B = (4, 7)$.

  $\overrightarrow{AC} = (8, -4) = 4(2, -1)$

  h_B tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 2)$ y pasa por $B = (4, 7)$.

  h_B: $\frac{x - 4}{1} = \frac{y - 7}{2} \to 2x - 8 = y - 7 \to 2x - y - 1 = 0$

- h_C es perpendicular a AB y pasa por $C = (6, -3)$.

  $\overrightarrow{AB} = (6, 6) = 6(1, 1)$

  h_C tiene vector de dirección $\vec{d} = (-1, 1)$ y pasa por $C = (6, -3)$.

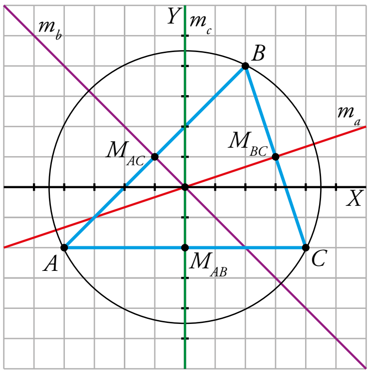
  h_C: $\dfrac{x-6}{-1} = \dfrac{y+3}{1} \rightarrow x - 6 = -y - 3 \rightarrow x + y - 3 = 0$

  El ortocentro es el punto de intersección de las alturas. Como las tres alturas se cortan en el mismo punto, para calcular el ortocentro es suficiente con resolver el sistema formado por dos de las alturas.

  $$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{4}{3}, y = \frac{5}{3}$$

  Las coordenadas del ortocentro son $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

57 Da las ecuaciones de las mediatrices del triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(4, -2)$ y $C(2, 4)$. Halla el circuncentro.



- m_a es perpendicular a BC y pasa por M_{BC}.

  BC tiene vector de dirección $\overrightarrow{BC} = (-2, 6) = 2(-1, 3)$.

  $M_{BC} = (3, 1)$

  m_a tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 1)$ y pasa por $M_{BC} = (3, 1)$.

  m_a: $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{1} \rightarrow x - 3y = 0$

- m_b es perpendicular a AC y pasa por M_{AC}.

  AC tiene vector de dirección $\overrightarrow{AC} = (6, 6) = 6(1, 1)$.

  $M_{AC} = (-1, 1)$

  m_b tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -1)$ y pasa por $M_{BC} = (-1, 1)$.

  m_b: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} \rightarrow x + y = 0$

- m_c es perpendicular a AB y pasa por M_{AB}.

  AB tiene vector de dirección $\overrightarrow{AB} = (8, 0) = 8(1, 0)$.

  $M_{AB} = (0, -2)$

  m_c tiene vector de dirección $\vec{d} = (0, 1)$ y pasa por $M_{AB} = (0, -2)$.

  m_c: $x = 0$

  El circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices. Como las tres mediatrices se cortan en el mismo punto, para calcular el circuncentro es suficiente con resolver el sistema formado por dos de las mediatrices.

  $$\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0, \ y = 0$$

  Las coordenadas del circuncentro son: (0, 0).

58 **Los puntos $A(-2, 6)$, $B(-5, -3)$ y $C(2, -2)$ son tres puntos de una circunferencia. Calcula su centro y su radio.**

El centro de la circunferencia será el punto intersección de las 3 mediatrices de los lados del triángulo *ABC*, que pasan por el punto medio de sus lados y el vértice contrario:

$\overrightarrow{AB}=(-3,-9)$

$\overrightarrow{BC}=(7,1)$

$\overrightarrow{AC}=(4,-8)$

$A'=\dfrac{B+C}{2}=\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{5}{2}\right)$

$B'=\dfrac{A+C}{2}=(0,2)$

$C'=\dfrac{A+B}{2}=\left(-\dfrac{7}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

m_a pasa por A', podemos definir un vector director $\vec{a}$ perpendicular a $\overrightarrow{BC}=(7,1)\to$

$\to \vec{a}(1,-7)$ y $m_a\colon \dfrac{x+\frac{3}{2}}{1}=\dfrac{y+\frac{5}{2}}{-7}$

m_b pasa por B', podemos definir un vector director $\vec{b}$ perpendicular a $\overrightarrow{AC}=(4,-8)\to$

$\to \vec{b}(2,1)$ y $m_b\colon x=2y-4$

m_c pasa por C', podemos definir un vector director $\vec{c}$ perpendicular a $\overrightarrow{AB}=(-3,-9)\to$

$\to \vec{c}(3,-1)$ y $m_c\colon \dfrac{x+\frac{7}{2}}{3}=\dfrac{y-\frac{3}{2}}{-1}$

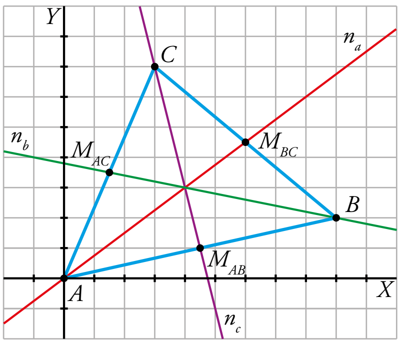
Buscamos el centro de la circunferencia en la intersección de dos de las 3 mediatrices:

$$m_b\cap m_c=O\ \to\ \begin{cases}-\left(x+\dfrac{7}{2}\right)=3\left(y-\dfrac{3}{2}\right)\\ x=2y-4\end{cases}$$

$O(-2,1)$ será el centro de la circunferencia, su radio será $\left|\overrightarrow{OC}\right|=5$.

59 **[La aplicación de las definiciones necesarias para buscar las rectas y el punto indicados servirá para que el alumnado trabaje el autoconocimiento (dimensión personal)].**

En el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(9, 2)$ y $C(3, 7)$, determina las ecuaciones de las medianas y calcula el baricentro.



- n_a pasa por A y por M_{BC}.

$M_{BC}=\left(\dfrac{12}{2},\dfrac{9}{2}\right)=\left(6,\dfrac{9}{2}\right)$

$\overrightarrow{AM_{BC}}=\left(6,\dfrac{9}{2}\right)=\dfrac{3}{2}(4,3)$

n_a tiene vector de dirección $\vec{d}=(4,3)$ y pasa por $A=(0,0)$.

$n_a\colon \dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{3}\ \to\ 3x-4y=0$

- n_b pasa por B y por M_{AC}.

$M_{AC} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$\overrightarrow{BM_{AC}} = \left(\frac{-15}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}(-5, 1)$

n_b tiene vector de dirección $\vec{d} = (-5, 1)$ y pasa por $B = (9, 2)$.

n_b: $\frac{x-9}{-5} = \frac{y-2}{1} \rightarrow x - 9 = -5y + 10 \rightarrow x + 5y - 19 = 0$

- n_c pasa por C y por M_{AB}.

$M_{AB} = \left(\frac{9}{2}, 1\right)$

$\overrightarrow{CM_{AB}} = \left(\frac{3}{2}, -6\right) = \frac{3}{2}(1, -4)$

n_c tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -4)$ y pasa por $C = (3, 7)$.

n_c: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{-4} \rightarrow -4x + 12 = y - 7 \rightarrow -4x - y + 19 = 0$

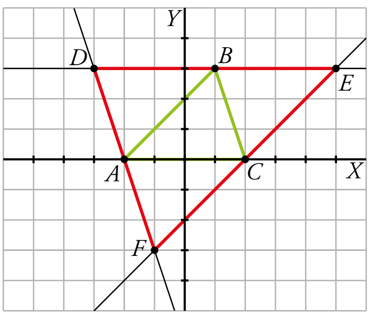
El baricentro es el punto de intersección de las medianas. Como las tres medianas se cortan en el mismo punto, para calcular el baricentro es suficiente con resolver el sistema formado por dos de las medianas.

$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ -4x - y + 19 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 4, y = 3$

Las coordenadas del baricentro son: (4, 3).

60 **En un triángulo de vértices $A(-2, 0)$, $B(1, 3)$ y $C(2, 0)$ trazamos desde cada vértice una recta paralela al lado opuesto. Halla los vértices del triángulo que determinan los puntos de corte de estas rectas y comprueba que es semejante a ABC.**

* ***Para comprobar que dos triángulos son semejantes, basta ver que sus ángulos son iguales.***



$\overrightarrow{AB} = (3, 3) = 3(1, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (4, 0) = 4(1, 0)$

$\overrightarrow{BC} = (1, -3)$

El lado EF:

- Es paralelo a AB y pasa por C.
- Tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $C = (2, 0)$.
- $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} \rightarrow x - 2 = y \rightarrow x - y - 2 = 0$

El lado DE:

- Es paralelo a AC y pasa por B.
- Tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 0)$ y pasa por $B = (1, 3)$.
- $y = 3$

El lado DF:

- Es paralelo a BC y pasa por A.
- Tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -3)$ y pasa por $C = (-2, 0)$.
- $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{-3} \rightarrow -3x - 6 = y \rightarrow -3x - y - 6 = 0$

Los puntos de corte de cada par de rectas son: $D(-3, 3)$, $E(5, 3)$ y $F(-1, -3)$.

$$cos\,\widehat{D} = cos\,(\widehat{(1,-3),(1,0)}) = cos\,(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}}) = cos\,\widehat{C}$$

$$cos\,\widehat{E} = cos\,(\widehat{(1,1),(1,0)}) = cos\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = cos\,\widehat{A}$$

Si tienen dos ángulos iguales, los triángulos son semejantes.

61 a) Calcula el punto, P', de la recta $r: x - 2y + 4 = 0$ más cercano al punto $P(1, -2)$.

b) ¿A qué distancia se encuentra de él?

c) Comprueba que la distancia que has hallado es igual a la distancia de P a r.

La distancia mínima de un punto a una recta se halla trazando la perpendicular de dicho punto a la recta, por lo que buscaremos la recta s que pasa por P y es perpendicular a r. El vector perpendicular a r será $v(1, -2)$.

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} \rightarrow -2x + 2 = y + 2$$

El punto buscado es la intersección de r y s:

$$\begin{cases} x = 2y + 4 \\ -2x + 2 = y + 2 \end{cases}$$

b) $dist(P, P') = \sqrt{\left(1 + \frac{4}{5}\right)^2 + \left(-2 - \frac{8}{5}\right)^2} = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$

c) $dist(P, r) = \dfrac{|1 + 4 + 4|}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$

62 Calcula el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas $r: x = 3$; $s: 2x + 3y - 6 = 0$ y $t: x - y - 7 = 0$.

Los vértices están en la intersección de las rectas.

$A = r \cap s$

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3, y = 0 \rightarrow A = (3, 0)$$

$B = r \cap t$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3, y = -4 \rightarrow B = (3, -4)$$

$C = s \cap t$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{27}{5}, y = -\frac{8}{5} \rightarrow C = \left(\frac{27}{5}, -\frac{8}{5}\right)$$

Área $= \dfrac{1}{2} \cdot$ base $\cdot$ altura

Base $= dist(A, B) = \sqrt{(3-3)^2 + (0-4)^2} = 4$ u

Altura $= dist(C, lado\ AB)$

Lado $AB = l$; $\overrightarrow{AB} = (0, 4) = 4(0, 1)$

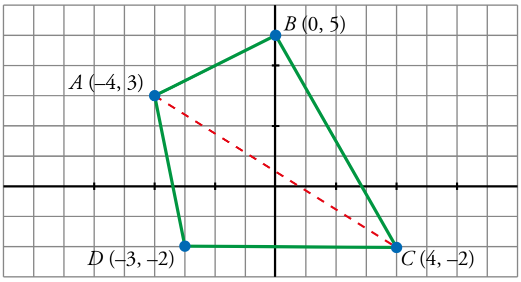
l tiene vector de dirección $\vec{d} = (0, 1)$ y pasa por $A = (3, 0)$.

l: $x = 3 \rightarrow x - 3 = 0$

$$dist(C, lado\ AB) = \frac{\left|\frac{27}{5} - 3\right|}{1} = \frac{12}{5}\text{ u}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{12}{5} = \frac{24}{5}\text{ u}^2$$

63 **Halla el área del cuadrilátero de vértices $A(-4, 3)$, $B(0, 5)$, $C(4, -2)$ y $D(-3, -2)$.**



- La diagonal AC divide el cuadrilátero en dos triángulos con la misma base, cuya medida es:

  $|\overrightarrow{AC}| = |(8, -5)| = \sqrt{89}$

- Sean h_B y h_D las alturas desde B y D, respectivamente, a la base:

  $h_B = dist(B, r)$ y $h_D = dist(D, r)$

  donde r es la recta que contiene el segmento $\overrightarrow{AC}$.

  Tomando como vector dirección de r el vector $\overrightarrow{AC}$, la ecuación de dicha recta es:

  $$\left.\begin{array}{l} 5x + 8y + k = 0 \\ \text{Como } (-4, 3) \in r \end{array}\right\} -20 + 24 + k = 0 \rightarrow k = -4 \rightarrow r: 5x + 8y - 4 = 0$$

  Luego:

  $$h_B = dist(B, r) = \frac{|5 \cdot 0 + 8 \cdot 5 - 4|}{\sqrt{89}} = \frac{36}{\sqrt{89}}$$

  $$h_D = dist(D, r) = \frac{|5(-3) + 8(-2) - 4|}{\sqrt{89}} = \frac{35}{\sqrt{89}}$$

- Así:

  $$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ADC} = \frac{b \cdot h_B}{2} + \frac{b \cdot h_D}{2} = \frac{b}{2}(h_B + h_D) = \frac{\sqrt{89}}{2}\left(\frac{36}{\sqrt{89}} + \frac{35}{\sqrt{89}}\right) = \frac{71}{2}$$

64 **El lado desigual del triángulo isósceles ABC, tiene por extremos $A(1, -2)$ y $B(4, 3)$. El vértice C está en la recta $3x - y + 8 = 0$. Halla las coordenadas de C y el área del triángulo.**

- La recta del lado desigual (base) tiene como vector dirección $\overrightarrow{AB} = (3, 5)$:

  $$r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases} \rightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} \rightarrow r: 5x - 3y - 11 = 0$$

- La recta que contiene la altura tiene por vector dirección $\vec{a} = (-5, 3) \perp \overrightarrow{AB}$ y pasa por el punto medio del lado desigual AB, es decir, por $M\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

  $$h_c: \begin{cases} x = \frac{5}{2} - 5t \\ y = \frac{1}{2} + 3t \end{cases} \rightarrow \frac{2x-5}{-10} = \frac{2y-1}{6} \rightarrow h_c: 12x + 20y - 40 = 0 \rightarrow h_c: 6x + 10y - 20 = 0$$

- $C = s \cap h_c$ donde $s: 3x - y + 8 = 0$.

$$\begin{cases} 3x - \ \ y + \ \ 8 = 0 \\ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} -6x + \ \ 2y - 16 = 0 \\ \ \ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases}$$

$12y - 36 = 0 \ \to \ y = \dfrac{36}{12} = 3 \ \to \ 3x - 3 + 8 = 0 \ \to \ 3x + 5 = 0 \ \to \ x = \dfrac{-5}{3}$

Luego: $C\left(\dfrac{-5}{3}, 3\right)$

- Área $= \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CM}|}{2} \overset{(*)}{=} \dfrac{\sqrt{34} \cdot \sqrt{\left(\dfrac{850}{6}\right)}}{2} \approx 14,17$

$$(*) \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3, 5) \ \to \ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{34} \\ \overrightarrow{CM}\left(\dfrac{-25}{6}, \dfrac{-5}{2}\right) \ \to \ |\overrightarrow{CM}| = \dfrac{\sqrt{850}}{6} \end{cases}$$

65 **Calcula c para que la distancia entre las rectas de ecuaciones $4x + 3y - 6 = 0$ y $4x + 3y + c = 0$ sea igual a 3.**

Sea $P \in r_1$ donde $x_0 = 0 \ \to \ y_0 = 2 \ \to \ P(0, 2) \in r_1$

Así, $dist(r_1, r_2) = dist(P, r_2) = \dfrac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{16 + 9}} = 3 \ \to \ \dfrac{|6 + c|}{5} = 3 \ \to \ \begin{cases} 6 + c = 15 \ \to \ c_1 = 9 \\ 6 + c = -15 \ \to \ c_2 = -21 \end{cases}$

Página 220

66 **Determina, en cada caso, un punto P de la recta $r: y = -x + 1$ tal que:**

a) La distancia de P a $s: 3x - 4y + 2 = 0$ sea 1.

b) P diste 3 unidades del eje OX.

c) La distancia de P al eje OY sea 4 unidades.

d) P equidiste de las rectas $x - y + 5 = 0$ y $x + y + 1 = 0$.

a) $P = (x, y)$

$P \in r \ \to \ y = -x + 1$

$dist(P, r) = \dfrac{|3x - 4y + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = 1$

Las coordenadas de P son la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ \dfrac{|3x - 4y + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = 1 \end{cases} \to \ \dfrac{|3x - 4(-x + 1) + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = 1 \ \to$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{3x - 4(-x + 1) + 2}{\sqrt{9 + 16}} = 1 \ \to \ x = 1 \\ \dfrac{3x - 4(-x + 1) + 2}{\sqrt{9 + 16}} = -1 \ \to \ x = -\dfrac{3}{7} \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \ \to \ y = 0 \\ x = -\dfrac{3}{7} \ \to \ y = \dfrac{10}{7} \end{cases}$$

Soluciones: $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = \left(-\dfrac{3}{7}, \dfrac{10}{7}\right)$

b) Eje OX: $y = 0$

$dist(P, OX) = \dfrac{|y|}{1} = 3$

Las coordenadas de P son la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = -x+1 \\ \dfrac{|y|}{1} = 3 \end{cases} \to \frac{|-x+1|}{1} = 3 \to \begin{cases} \dfrac{-x+1}{1} = 3 \to x = -2 \\ \dfrac{-x+1}{1} = -3 \to x = 4 \end{cases} \to \begin{cases} x = -2 \to y = 3 \\ x = 4 \to y = -3 \end{cases}$$

Soluciones: $P_1 = (-2, 3)$, $P_2 = (4, -3)$

c) Eje OY: $x = 0$

$dist(P, OX) = \dfrac{|x|}{1} = 4$

Las coordenadas de P son la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = -x+1 \\ \dfrac{|x|}{1} = 4 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{x}{1} = 4 \to x = 4 \\ \dfrac{x}{1} = -4 \to x = -4 \end{cases} \to \begin{cases} x = 4 \to y = -3 \\ x = -4 \to y = 5 \end{cases}$$

Soluciones: $P_1 = (4, -3)$, $P_2 = (-4, 5)$

d) $dist(P, r) = \dfrac{|x-y+5|}{\sqrt{1+1}}$, $dist(P, r') = \dfrac{|x+y+1|}{\sqrt{1+1}}$

Las coordenadas de P son la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = -x+1 \\ \dfrac{|x-y+5|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{|x+y+1|}{\sqrt{1+1}} \end{cases} \to |x-(-x+1)+5| = |x+(-x+1)+1| \to$$

$$\to \begin{cases} x-(-x+1)+5 = x+(-x+1)+1 \to x = -1 \\ x-(-x+1)+5 = -(x+(-x+1)+1) \to x = -3 \end{cases} \to \begin{cases} x = -1 \to y = 2 \\ x = -3 \to y = 4 \end{cases}$$

Soluciones: $P_1 = (-1, 2)$, $P_2 = (-3, 4)$

67 Halla un punto del eje de abscisas que equidiste de las rectas $4x + 3y + 6 = 0$ y $3x + 4y - 9 = 0$.

$P(x, 0)$ debe verificar $dist(P, r) = dist(P, s)$:

$$\frac{|4x+3\cdot 0+6|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x+4\cdot 0-9|}{\sqrt{25}} \to \begin{cases} 4x+6 = 3x-9 \to x_1 = -15 \\ 4x+6 = -(3x-9) \to x_2 = 3/7 \end{cases}$$

Soluciones: $P_1(-15, 0)$, $P_2\left(\dfrac{3}{7}, 0\right)$

68 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas r y s y forma un ángulo de 45° con la recta $x + 5y - 6 = 0$.

***r*: $3x - y - 9 = 0$** ***s*: $x - 3 = 0$**

Llamamos t a la recta que buscamos. t pasa por $P = r \cap s$ y tiene pendiente m.

$$tg\,45° = \left|\frac{m-5}{1+5m}\right| \to 1 = \left|\frac{m-5}{1+5m}\right| \to \begin{cases} \dfrac{m-5}{1+5m} = 1 \to m = -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{m-5}{1+5m} = -1 \to m = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y - 9 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \to x = 3,\ y = 0 \to P = (3, 0)$$

t_1 tiene pendiente $m = -\dfrac{3}{2}$ y pasa por $P = (3, 0)$.

t_1: $y = -\dfrac{3}{2}(x-3)$

t_2 tiene pendiente $m = \dfrac{2}{3}$ y pasa por $P = (3, 0)$.

t_2: $y = \dfrac{2}{3}(x - 3)$

69 **Dadas r: $2x - y - 17 = 0$ y s: $3x - ky - 8 = 0$, calcula k para que r y s se corten formando un ángulo de 60°.**

$$cos\,(\widehat{r, s}) = \left|\frac{(1, 2)\cdot(k, 3)}{\sqrt{1+4}\,\sqrt{k^2+9}}\right| \to cos\,60° = \left|\frac{k+6}{\sqrt{5}\,\sqrt{k^2+9}}\right| \to \frac{1}{2} = \left|\frac{k+6}{\sqrt{5}\,\sqrt{k^2+9}}\right| \to$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{k+6}{\sqrt{5}\,\sqrt{k^2+9}} \to k = 24 - 15\sqrt{3} \\ -\dfrac{1}{2} = \dfrac{k+6}{\sqrt{5}\,\sqrt{k^2+9}} \to k = 24 + 15\sqrt{3} \end{cases}$$

Soluciones: $k_1 = 24 - 15\sqrt{3}$; $k_2 = 24 + 15\sqrt{3}$

70 **Halla los ángulos del triángulo cuyos vértices son $A(-3, 2)$, $B(8, -1)$ y $C(3, -4)$.**

$\overrightarrow{AB} = (11, -3)$; $\overrightarrow{AC} = (6, -6) = 6(1, -1)$; $\overrightarrow{BC} = (-5, -3)$

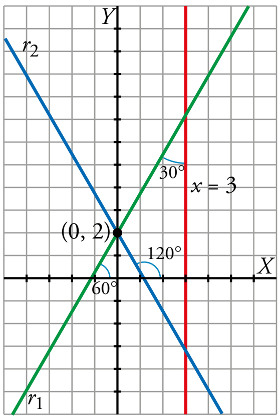
r contiene al lado AB; s contiene al lado AC; t contiene al lado BC

$$cos\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{(11, -3)\cdot(1, -1)}{\sqrt{121+9}\,\sqrt{1+1}} = 0,87 \to (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = 29°\,45'$$

$$cos\,(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{(-11, 3)\cdot(-5, -3)}{\sqrt{121+9}\,\sqrt{25+9}} = 0,69 \to (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = 46°\,14'$$

$$(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = 180° - (29°\,45' + 46°\,14') = 104°\,1'$$

71 **Halla la ecuación de la recta que pasa por (0, 2) y forma un ángulo de 30° con $x = 3$.**



La recta r forma un ángulo de 60° o de 120° con el eje OX.

Su pendiente es:

$$\begin{cases} m_1 = tg\,60° = \sqrt{3}, \text{ o bien} \\ m_2 = tg\,120° = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que debe pasar por $P(0, 2)$, las posibles soluciones son:

r_1: $y = \sqrt{3}x + 2$

r_2: $y = -\sqrt{3}x + 2$

72 **Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por $A(-2, 2)$ y forman un ángulo de 60° con $x = y$.**

$b: x = y \rightarrow$ su pendiente es $m_b = 1$

$tg\ 60° = \left|\frac{1-m}{1+1 \cdot m}\right| \rightarrow \sqrt{3} = \left|\frac{1-m}{1+m}\right| \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} + \sqrt{3}m = 1 - m \rightarrow m_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \\ -\sqrt{3} - \sqrt{3}m = 1 - m \rightarrow m_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que pasan por $A(-2, 2)$:

$r_1: y - 2 = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}(x+2)$

$r_2: y - 2 = \frac{1+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}(x+2)$

ECUACIONES PUNTO-PENDIENTE

73 **Dada la recta $r: 2x - 3y + 5 = 0$, halla la ecuación de la recta simétrica de r respecto al eje de abscisas.**

Calculamos $P = r \cap OX$:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{5}{2},\ y = 0 \rightarrow P = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$$

Buscamos un punto Q de r y encontramos su simétrico, Q', respecto de OX:

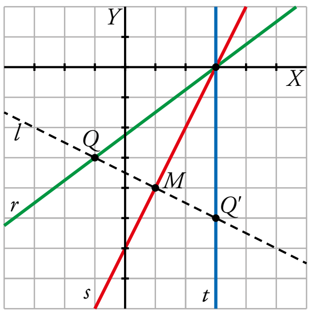
$Q = \left(0, \frac{5}{3}\right) \rightarrow Q' = \left(0, -\frac{5}{3}\right)$

La recta r' pasa por P y por Q':

$\overrightarrow{PQ'} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{6}(3, -2)$

$r': \dfrac{x + \frac{5}{2}}{3} = \dfrac{y}{-2}$

74 **Halla la recta, t, simétrica a $r: -3x + 4y + 9 = 0$ respecto de la recta $s: 2x - y - 6 = 0$.**



Calculamos $P = r \cap s$:

$$\begin{cases} -3x + 4y + 9 = 0 \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3,\ y = 0 \rightarrow P = (3, 0)$$

Buscamos un punto $Q \neq P$ de r y encontramos su simétrico, Q', respecto de s.

$Q \in r \rightarrow x = -1 \rightarrow y = -3$

$Q = (-1, -3)$

Simétrico de Q respecto de s:

Calculamos la recta l perpendicular a s que pasa por Q:

l tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, -1)$ y pasa por $Q = (-1, -3)$.

$l: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} \to -x-1 = 2y+6 \to -x-2y-7=0$

$M = s \cap l$

$\begin{cases} -x-2y-7=0 \\ 2x-y-6=0 \end{cases} \to x = 1, y = -4 \to M = (1, -4)$

M es el punto medio entre Q y $Q' = (x, y)$.

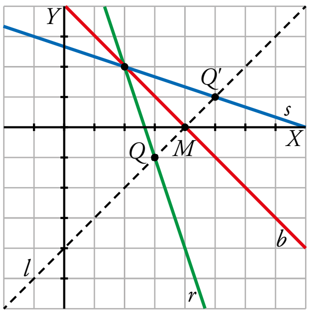
$(1, -4) = \left(\dfrac{x-1}{2}, \dfrac{y-3}{2}\right) \to \begin{cases} 1 = \dfrac{x-1}{2} \to x = 3 \\ -4 = \dfrac{y-3}{2} \to y = -5 \end{cases} \to Q' = (3, -5)$

La recta t pasa por P y por $Q' = (3, -5)$:

$\overrightarrow{PQ'} = (0, -5) = 5(0, 1)$

$t: x = 3$

75 **La recta $b: y = -x + 4$ es la bisectriz del ángulo formado por las rectas $r: 3x + y - 8 = 0$ y s. Halla la ecuación de s.**



s es la simétrica de r respecto de b.

b tiene pendiente $m = -1$. Calculamos $P = r \cap b$:

$\begin{cases} 3x + y - 8 = 0 \\ y = -x + 4 \end{cases} \to x = 2, y = 2 \to P = (2, 2)$

Buscamos un punto $Q \neq P$ de r y encontramos su simétrico, Q', respecto de b.

$Q \in r \to x = 3 \to y = -1$

$Q = (3, -1)$

Para hallar el simétrico de Q respecto de b, calculamos la recta l perpendicular a b que pasa por Q:

l tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $Q = (3, -1)$.

$l: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{1} \to x - 3 = y + 1 \to x - y - 4 = 0$

$M = b \cap l$

$\begin{cases} y = -x + 4 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \to x = 4, y = 0 \to M = (4, 0)$

M es el punto medio entre Q y $Q' = (x, y)$:

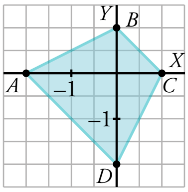
$$(4, 0) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y-1}{2}\right) \to \begin{cases} 4 = \dfrac{x+3}{2} \to x = 5 \\ 0 = \dfrac{y-1}{2} \to y = 1 \end{cases} \to Q' = (5, 1)$$

La recta s pasa por P y por $Q' = (5, 1)$

$\overrightarrow{PQ'} = (3, -1)$

$s: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-2}{-1}$

76 **Sean A, B, C y D los puntos de corte de las rectas $x - 2y + 2 = 0$ y $2x - y - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas. Prueba que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio isósceles y halla su área.**



Sean: $A = r \cap \text{eje } OX: \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = -2 \to A(-2, 0)$

$B = r \cap \text{eje } OY: \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to y = 1 \to B(0, 1)$

$C = s \cap \text{eje } OX: \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = 1 \to C(1, 0)$

$D = s \cap \text{eje } OY: \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to y = -2 \to D(0, -2)$

Calculamos los vectores dirección de los lados:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 1) \\ \overrightarrow{BC} = (1, -1) \\ \overrightarrow{CD} = (-1, -2) \\ \overrightarrow{DA} = (-2, 2) \end{array}\right\} \to \begin{cases} \overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{BC} \to \overrightarrow{BC} \,/\!/\, \overrightarrow{DA} \\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5} = |\overrightarrow{CD}| \end{cases}$$

Luego, efectivamente, $ABCD$ es un trapecio isósceles de bases BC y DA.

Para calcular el área necesitamos la altura:

$$\text{Como } \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD}(2, -2) \\ D(0, -2) \end{array}\right\} \to y = -x - 2 \to AD: x + y + 2 = 0$$

$$h = dist(B, AD) = \frac{|0 + 1 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Así:

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{DA}|}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9 \cdot 2}{4} = \frac{9}{2}$$

77 **La recta $x + y - 2 = 0$ y una recta paralela a ella que pasa por el punto (0, 5) determinan, junto con los ejes de coordenadas, un trapecio isósceles. Halla su área.**

$$\left.\begin{array}{l} s \,/\!/\, r: x + y - 2 = 0 \to x + y + k = 0 \\ P(0, 5) \in s \end{array}\right\} \to 0 + 5 + k = 0 \to k = -5$$

Luego $s: x + y - 5 = 0$

Sean: $A = r \cap \text{eje } X: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = 2 \to A(2, 0)$

$B = r \cap \text{eje } Y: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to y = 2 \to B(0, 2)$

$C = s \cap \text{eje } X: \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = 5 \to C(5, 0)$

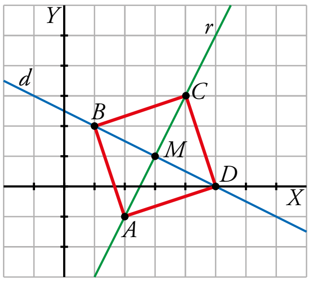
$D = s \cap \text{eje } Y: \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to y = 5 \to D(0, 5)$

$\overrightarrow{AB} = (-2, 2);\ \overrightarrow{CD} = (-5, 5)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot \text{h} = \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot dist(A, s) = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{50}}{2} \cdot \frac{|2 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{21}{2} \text{ u}^2$$

78 **De un cuadrado conocemos la ecuación de una de sus diagonales, $d: x + 2y - 5 = 0$, y un vértice, $A(2, -1)$. Calcula el resto de vértices y su área.**



$A \notin d$, luego el vértice C es el simétrico de A respecto de d.

r: perpendicular a d que pasa por A.

r tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 2)$ y pasa por $A = (2, -1)$.

$r: \dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y + 1}{2} \to 2x - y = 5$

$M = r \cap d$

$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \to x = 3, y = 1 \to M = (3, 1)$

M es el punto medio entre A y $C = (x, y)$.

$$(3, 1) = \left(\frac{x + 2}{2}, \frac{y - 1}{2}\right) \to \begin{cases} 3 = \dfrac{x + 2}{2} \to x = 4 \\ 1 = \dfrac{y - 1}{2} \to y = 3 \end{cases} \to C = (4, 3)$$

El vértice $B = (x, y)$ verifica: $B \in d$ y $dist(M, A) = dist(M, B)$, luego B es solución del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (-1-1)^2} \end{cases} \to \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{5} \end{cases} \to x = 1, y = 2; x = 5, y = 0$$

Estas son las coordenadas de los vértices que faltan: $B = (1, 2)$, $D = (5, 0)$.

Tenemos un cuadrado de lado $\sqrt{10}$. Su área es 10 u^2.

79 Halla el área del mayor triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia de diámetro AB, con $A(5, -3)$ y $B(-7, 2)$.

Para que el área sea máxima su base y su altura deberán ser tan grandes como podamos, por lo que deberán ser su diámetro y su radio:

$$\text{diámetro} = |\overrightarrow{AB}| = |(-12, 5)| = 13$$

$$\text{radio} = \frac{\text{diámetro}}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\text{diámetro} \cdot \text{radio}}{2} = \frac{13 \cdot \frac{13}{2}}{2} = \frac{169}{4} = 42{,}25$$

80 Dos de los lados de un paralelogramo están sobre las rectas $x + y - 2 = 0$ y $x - 2y + 4 = 0$ y uno de sus vértices es el punto (6, 0). Halla los otros vértices.

- Como las rectas no son paralelas, el punto donde se corten será un vértice:

$$\begin{matrix} r_1: \\ r_2: \end{matrix} \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ -x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$3y - 6 = 0 \to y = 2 \to x + 2 - 2 = 0 \to x = 0$$

Luego un vértice es $A(0, 2)$.

- El vértice que nos dan, $C(6, 0)$, no pertenece a ninguna de las rectas anteriores (pues no verifica sus ecuaciones, como podemos comprobar fácilmente sustituyendo los valores de x e y por las coordenadas de C). Así pues, el vértice C no es consecutivo de A.

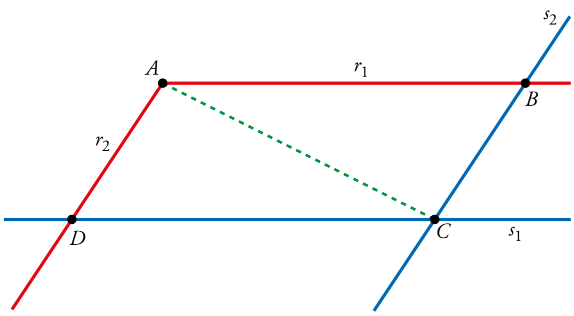
Sean $s_1 \parallel r_1$ una recta que pasa por C y $s_2 \parallel r_2$ una recta que pasa por C.

Se trata de las rectas sobre las que están los otros lados.

Así, los otros vértices, B y D, serán los puntos de corte de:

$r_1 \cap s_2 = B$

$r_2 \cap s_1 = D$



$$s_1: \begin{cases} x + y + a = 0 \\ C \in s_1 \to 6 + 0 + a = 0 \to a = -6 \end{cases} \to s_1: x + y - 6 = 0$$

$$s_2: \begin{cases} x - 2y + b = 0 \\ C \in s_2 \to 6 - 0 + b = 0 \to b = -6 \end{cases} \to s_2: x - 2y - 6 = 0$$

- $B = r_1 \cap s_2 : \begin{cases} x + \ \ y - 2 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$

  Resolviendo el sistema:

  De la primera ecuación $\to$ $x = 2 - y$ $\to$ en la segunda $\to$ $2 - y - 2y - 6 = 0$ $\to$

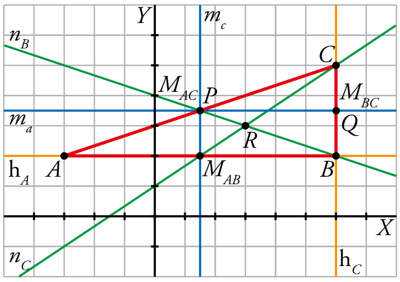
  $$\to y = \frac{-4}{3} \to x = \frac{10}{3} \to B\left(\frac{10}{3}, \frac{-4}{3}\right)$$

- $D = r_2 \cap s_1 : \left.\begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ x + \ \ y - 6 = 0 \to x = 6 - y \end{cases}\right\} \to 6 - y - 2y + 4 = 0 \to$

  $$\to y = \frac{10}{3} \to x = \frac{8}{3} \to D\left(\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

81 **[La búsqueda de los puntos que deben estar alienados en la recta de Euler requiere que el alumnado trabaje la asunción de riesgos (dimensión productiva)].**

En un triángulo, baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados. La recta que los contiene se llama recta de Euler. Compruébalo en el triángulo de vértices $A(-3, 2)$, $B(6, 2)$ y $C(6, 5)$.



- Circuncentro: P.

  Calculamos dos mediatrices y su intersección.

  m_a es perpendicular a BC y pasa por M_{BC}.

  BC tiene vector de dirección $\overrightarrow{BC} = (6, 5) - (6, 2) = (0, 2) = 2(0, 1)$

  $M_{BC} = \left(6, \frac{7}{2}\right)$

  m_a tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 0)$ y pasa por $M_{BC} = \left(6, \frac{7}{2}\right)$.

  $m_a : y = \frac{7}{2}$

  m_c es perpendicular a AB y pasa por M_{AB}.

  AB tiene vector de dirección $\overrightarrow{AB} = (6, 2) - (-3, 2) = (9, 0) = 9(1, 0)$.

  $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

  m_c tiene vector de dirección $\vec{d} = (0, 1)$ y pasa por $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

  $m_c : x = \frac{3}{2}$

  El circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices.

  $$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

  Las coordenadas del circuncentro son $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

- Baricentro: R.

Calculamos dos medianas y su intersección.

n_b pasa por B y por M_{AC}.

$$M_{AC}=\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{BM_{AC}}=\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)-(6,2)=\left(-\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}(-3,1)$$

n_b tiene vector de dirección $\vec{d}=(-3,1)$ y pasa por $B=(6,2)$.

$$n_b\colon \frac{x-6}{-3}=\frac{y-2}{1}\ \to\ x-6=-3y+6\ \to\ x+3y-12=0$$

n_c pasa por C y por M_{AB}.

$$M_{AB}=\left(\frac{3}{2},2\right)$$

$$\overrightarrow{CM_{AB}}=\left(\frac{3}{2},2\right)-(6,5)=\left(-\frac{9}{2},-3\right)=-\frac{3}{2}(3,2)$$

n_c tiene vector de dirección $\vec{d}=(3,2)$ y pasa por $C=(6,5)$.

$$n_c\colon \frac{x-6}{3}=\frac{y-5}{2}\ \to\ 2x-12=3y-15\ \to\ 2x-3y+3=0$$

El baricentro es el punto de intersección de las medianas. Como las tres medianas se cortan en el mismo punto, para calcular el baricentro es suficiente con resolver el sistema formado por dos de las medianas.

$$\begin{cases} x+3y-12=0\\ 2x-3y+\ \ 3=0\end{cases}\ \to\ x=3,\ y=3$$

Las coordenadas del baricentro son: $R=(3,3)$.

- Ortocentro: Q.

Calculamos dos alturas y su intersección.

h_A es perpendicular a BC y pasa por $A=(-3,2)$.

$\overrightarrow{BC}=(0,2)=2(0,1)$

h_A tiene vector de dirección $\vec{d}=(1,0)$ y pasa por $A=(-3,2)$.

$h_A\colon y=2$

h_C es perpendicular a AB y pasa por $C=(6,5)$.

$\overrightarrow{AB}=9(1,0)$

h_C tiene vector de dirección $\vec{d}=(0,1)$ y pasa por $C=(6,5)$.

$h_C\colon x=6$

El ortocentro es el punto de intersección de las alturas.

$$\begin{cases} x=6\\ y=2\end{cases}$$

Las coordenadas del ortocentro son: $Q=(6,2)$.

$$P=\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right);\quad Q=(6,2);\quad R=(3,3)$$

Para ver si están alineados, calculamos los vectores:

$$\overrightarrow{PQ}=(6,2)-\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}(3,-1)$$

$$\overrightarrow{QR}=(3,3)-(6,2)=(-3,1)=(-1)(3,-1)$$

Luego los vectores son proporcionales y, por tanto, los puntos están alineados.

82 **$A(0, 0)$ y $B(3, 6)$ son dos puntos de la recta $y = 2x$. C y D son los puntos de la recta $2x - y + 5 = 0$ más cercanos a B y A, respectivamente. Calcula el área del rectángulo $ABCD$.**

Buscamos la recta t que es perpendicular a s y pasa por A, ya que entonces calculando la intersección de t con s encontraremos el punto C.

El vector director v de t es normal a $s \to \vec{v}(2, -1)$

$$t: \frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-1} \to -\frac{x}{2} = y$$

Para calcular $t \cap s$, sustituimos t en s:

$$2x + \frac{x}{2} + 5 = 0 \to x = -2;\ y = 1 \to C(-2, 1)$$

$$\text{Área} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = |(3, 6)| \cdot |(-2, 1)| = \sqrt{45}\sqrt{5} = 15$$

83 **De un triángulo conocemos dos vértices, $A(0, 0)$ y $B(5, 0)$ y la longitud del lado AC, 3. Además, la tangente del ángulo formado por los lados AB y AC es $\frac{4}{3}$.**

a) Calcula la ecuación del lado AC.

b) Determina el vértice C.

c) Halla la longitud de la altura relativa a C.

d) Obtén el área del triángulo.

* ***Puedes calcular la altura utilizando razones trigonométricas.***

a) La recta que contiene al lado AC tiene pendiente $\frac{4}{3}$ porque el lado AB está en el eje OX, y la tangente del ángulo que forma una recta con el eje horizontal positivo es su pendiente, luego $r: y = \frac{4}{3}x$.

b) C está en la recta $r: y = \frac{4}{3}x$ y $dist(A, C) = 3$, luego C es solución del sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 3 \end{cases} \to x = -\frac{9}{5}, y = -\frac{12}{5};\ x = \frac{9}{5}, y = \frac{12}{5}$$

Como la tangente del ángulo es positiva, $C = \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

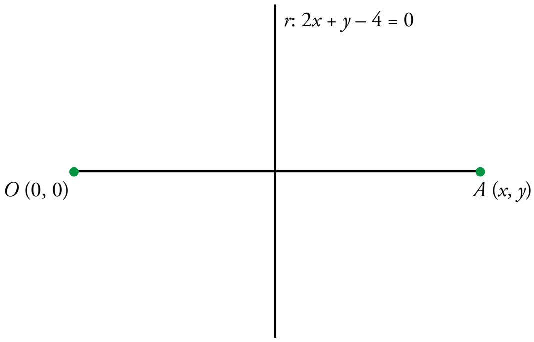
c) $AB: y = 0$

Altura = $dist(C, AB) = \frac{12}{5}$ u

d) $dist(A, B) = 3$ u

Área = $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{12}{5} = \frac{18}{5}$ u^2

84 **La recta $2x + y - 4 = 0$ es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto (0, 0). Halla las coordenadas del otro extremo.**



Un vector dirección de la recta es $\vec{v} = (1, -2)$.

- Debe verificarse que: $\vec{v} \perp \overrightarrow{OA} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$

$$(1, -2) \cdot (x, y) = 0 \to x - 2y = 0 \to x = 2y$$

- Además, el punto medio de OA, M, pertenece a la recta:

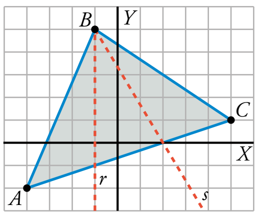
$$M\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \in r \to 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \to$$

$$\to 2 \cdot \frac{2y}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \to 4y + y - 8 = 0 \to$$

$$\to y = \frac{8}{5} \to x = 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$$

Luego: $A\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$

85 **Dado el triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(-1, 5)$ y $C(5, 1)$, halla las ecuaciones de las rectas r y s que parten de B y cortan a AC, dividiendo al triángulo en tres triángulos de igual área.**



- La altura de los tres triángulos es igual a la distancia de B al lado AC. Por tanto, tendrán la misma área si tienen la misma base. Así, se trata de hallar los puntos, P y Q, que dividen al lado AC en tres partes iguales.

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{3} = \left(-\frac{2}{3}, -1\right); \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OC}}{3} = \left(\frac{8}{3}, 0\right)$$

- La recta r es la que pasa por B y por P:

$x = -1$

- La recta s es la que pasa por B y por Q:

$$m = \frac{5 - 0}{-1 - 2} = -\frac{5}{3}$$

$$y = 5 - \frac{5}{3}(x + 1)$$

86 **De un rombo $ABCD$ sabemos que los vértices B y D están en la recta $r: y = 2x + 2$ y que $A(4, 0)$. Halla las coordenadas de C.**

La diagonal BD está en la recta r.

Las diagonales de un rombo son perpendiculares y se cortan en el punto medio, luego la perpendicular trazada desde A a la recta r, que llamaremos s, cortará a r en el punto medio M entre A y $C = (x, y)$.

La recta s perpendicular a r tiene pendiente $m = -\frac{1}{2}$ y pasa por $A = (4, 0)$.

$s: y = -\frac{1}{2}x + k$

Sustituimos las coordenadas de A en la ecuación para calcular k.

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + k \to k = 2 \to s: y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$M = r \cap s$

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \to x = 0, y = 2 \to M = (0, 2)$$

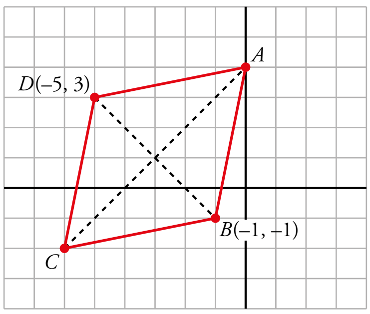
$$(0, 2) = \left(\frac{x+4}{2}, \frac{y}{2}\right) \to \begin{cases} 0 = \frac{x+4}{2} \to x = -4 \\ 2 = \frac{y}{2} \to y = 4 \end{cases} \to C = (-4, 4)$$

87 **Un rombo $ABCD$ tiene un vértice en el eje de ordenadas; otros dos vértices opuestos son $B(-1, -1)$ y $D(-5, 3)$. Halla las coordenadas de los vértices A y C y el área del rombo.**

Sea $A \in$ eje $Y \to A = (0, y_1)$ y sea el punto $C = (x_2, y_2)$.

Como estamos trabajando con un rombo, sus diagonales AC y BD se cortan en su punto medio, M.

Además, $AC \perp BD$.



- $M\left(\frac{-1-5}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (-3, 1)$ es el punto medio de BD (y de AC).

- Sea d la recta perpendicular a BD por M (será, por tanto, la que contiene a AC):

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BD} = (-4, 4) \to \vec{d} = (4, 4) \text{ es vector dirección de } d \\ M(-3, 1) \in d \end{array}\right\} \to$$

$$\to \begin{cases} \text{La pendiente de } d \text{ es } m_d = \frac{4}{4} = 1 \\ M(-3, 1) \in d \end{cases} \to d: y - 1 = (x + 3) \to d: y = x + 4$$

- Así:

$$A = d \cap \text{eje } Y: \begin{cases} y = x + 4 \\ x = 0 \end{cases} \to y = 4 \to A(0, 4)$$

- M es el punto medio de $AC \rightarrow (-3,\ 1) = \left(\dfrac{0+x_2}{2}, \dfrac{4+y_2}{2}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} -3 = \dfrac{x_2}{2} \rightarrow x_2 = -6 \\ 1 = \dfrac{4+y_2}{2} \rightarrow y_2 = -2 \end{array}\right\} \rightarrow C(-6,\ -2)$

- Área $= \dfrac{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}{2}$

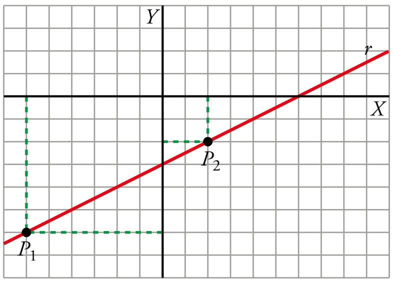
$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AC}| = |(-6, -6)| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \\ |\overrightarrow{BD}| = |(-4, 4)| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Área} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 24 \text{ u}^2$$

88 Encuentra un punto en la recta $x - 2y - 6 = 0$ que equidiste de los ejes de coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Eje } X\text{: } y = 0 \\ \text{Eje } Y\text{: } x = 0 \\ P(x, y) \in r \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} dist\,(P, \text{eje } X) = dist\,(P, \text{eje } Y) \\ x - 2y - 6 = 0 \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{|y|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \dfrac{|x|}{\sqrt{0^2+1^2}} \\ x - 2y - 6 = 0 \end{array}\right. \rightarrow \text{dos casos: } \left\{\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} y - 2y - 6 = 0 \rightarrow y_1 = -6 \rightarrow x_1 = -6 \\ -y - 2y - 6 = 0 \rightarrow y_2 = -2 \rightarrow x_2 = 2 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} P_1(-6, -6) \\ P_2(2, -2) \end{array}\right.$$



89 Un punto P, que es equidistante de los puntos $A(3, 4)$ y $B(-5, 6)$, dista el doble del eje de abscisas que del eje de ordenadas. ¿Cuáles son las coordenadas de P?

- $d(P, OX) = 2d(P, OY) \rightarrow |y| = 2|x| \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 2x \\ y = -2x \end{array}\right.$

- $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{PB}| \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(-5-x)^2 + (6-y)^2} \rightarrow$

$$\rightarrow x^2 + 9 - 6x + y^2 + 16 - 8y = x^2 + 25 + 10x + y^2 + 36 - 12y \rightarrow$$

$$\rightarrow -6x - 8y + 25 = 10x - 12y + 61 \rightarrow 16x - 4y + 36 = 0 \rightarrow 4x - y + 9 = 0$$

- Como deben cumplirse las dos condiciones, habrá dos soluciones:

$$P_1\text{: } \left\{\begin{array}{l} y = 2x \\ 4x - y + 9 = 0 \end{array}\right. \rightarrow 4x - 2x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{-9}{2} \rightarrow y = -9$$

Luego: $P_1\left(\dfrac{-9}{2}, -9\right)$

$$P_2\text{: } \left\{\begin{array}{l} y = -2x \\ 4x - y + 9 = 0 \end{array}\right. \rightarrow 4x + 2x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2} \rightarrow y = 3$$

Luego: $P_2\left(\dfrac{-3}{2}, 3\right)$

Página 221

Cuestiones teóricas

90 **¿Verdadero o falso?**

a) Si el punto P' es el simétrico de P respecto de la recta r, entonces $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular al vector director de r.

b) Si en la recta $r: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \end{cases}$ damos a λ los valores 1, 2 y 3, obtenemos respectivamente los puntos *A, B* y *C*. Entonces C es simétrico de A con respecto a B.

c) La recta $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ pasa por el origen de coordenadas.

d) La recta $ax + by + c = 0$ es perpendicular a $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

e) Si el punto $P(m, n)$ es la intersección de $s: \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ y $r: ax + by + c = 0$ con $c \neq 0$, la distancia entre r y el origen de coordenadas es $\sqrt{m^2 + n^2}$ (ayúdate con un dibujo).

f) La recta $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 \end{cases}$ es paralela al eje *Y*.

g) La recta $4x - 2 = 0$ es paralela al eje Y.

a) Verdadero, por definición, tal y como hemos visto en el ejercicio resuelto 2 de la página 212.

b) Verdadero.

Si $\lambda = 1$, $A(6, -2)$.

Si $\lambda = 2$, $B(10, -5)$.

Si $\lambda = 3$, $C(14, -8)$.

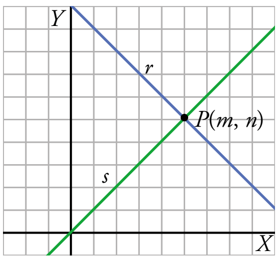
$$\frac{A + C}{2} = \frac{(20, -10)}{2} = (10, -5)$$

c) Verdadero. Está en forma continua, pasa por (0, 0) y tiene vector director (a, b).

d) Verdadero. La forma implícita de la primera recta nos dice precisamente que su vector normal es (a, b).

e) Verdadero.

El vector director de s es (a, b), que a su vez es el vector normal de r, por lo que son perpendiculares. Entonces se cumple por definición de distancia de un punto a una recta.



f) Falso. Un vector director es (3, 0), por lo que es paralela al eje de las *X*.

g) Verdadero. La recta es $x = 1/2$.

91 **[La respuesta clara a las cuestiones planteadas requiere que el alumnado trabaje la destreza expresión escrita de esta clave].**

a) ¿Qué se puede decir de una recta si en su ecuación general falta el término independiente?

b) ¿Y si falta el término en x?

c) ¿Y si falta el término en y?

a) La recta pasa por (0, 0).

b) Es una recta horizontal (paralela al eje OX).

c) Es una recta vertical (paralela al eje OY).

Para profundizar

92 **Las rectas $x + y - 2 = 0$ y $9x - 3y - 4 = 0$ son dos alturas del triángulo ABC de vértice $A(2, 2)$. Halla las ecuaciones de los lados del triángulo.**

A no pertenece a ninguna de las dos alturas, luego los lados del triángulo estarán en las rectas que pasan por $A = (2, 2)$ y son perpendiculares a las rectas dadas.

$r: x + y - 2 = 0$ tiene vector de dirección $(-1, 1)$.

El *lado* AB tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $A = (2, 2)$.

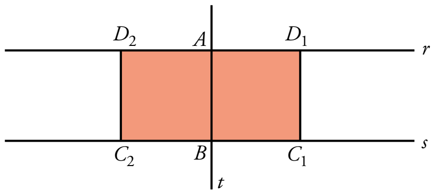
Lado AB: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} \to x - 2 = y - 2 \to x - y = 0$

$s: 9x - 3y - 4 = 0$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (-3, 9) = 3(-1, 3)$.

El *lado* AC tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 1)$ y pasa por $A = (2, 2)$.

Lado AC: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-2}{1} \to x - 2 = 3y - 6 \to x - 3y - 4 = 0$

93 **Dos vértices contiguos de un cuadrado son $A(3, 1)$ y $B(4, 5)$. Calcula los otros vértices. ¿Cuántas soluciones hay?**



C y D son puntos de las rectas s y r perpendiculares a AB, y cuyas distancias a B y A, respectivamente, son $|\overrightarrow{AB}|$:

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \to s: x + 4y + k = 0 \\ \text{Como } B \in s\end{array}\right\} \to 4 + 20 + k = 0 \to k = -24 \to s: x + 4y - 24 = 0$

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \to r: x + 4y + k' = 0 \\ \text{Como } A \in r\end{array}\right\} \to 3 + 4 + k' = 0 \to k' = -7 \to r: x + 4y - 7 = 0$

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \to t: 4x - y + k'' = 0 \\ \text{Como } A \in t\end{array}\right\} \to 12 - 1 + k'' = 0 \to k'' = -11 \to t: 4x - y - 11 = 0$

- C y D son puntos que están en las rectas cuya distancia a AB es $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{17}$.

  Sean $P(x, y)$ tales que:

  $$dist(P, t) = \frac{|4x - y - 11|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

  $$\begin{cases} 4x - y - 11 = 17 \to \\ 4x - y - 11 = -17 \to \end{cases} \begin{cases} t_1: 4x - y - 28 = 0 \\ t_2: 4x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

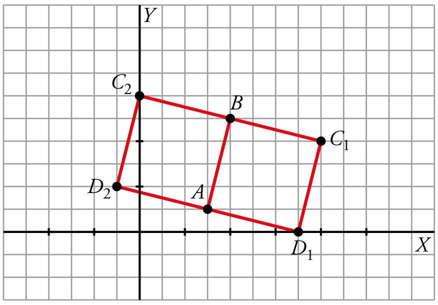
Son dos rectas paralelas. Hay dos soluciones. Así:

$$C_1 = t_1 \cap s \begin{cases} 4x - y - 28 = 0 \\ x + 4y - 24 = 0 \ \to \ x = 24 - 4y \end{cases} \to \ 96 - 16y - y - 28 = 0 \ \to \ y = 4 \ \to \ x = 8 \ \to \ C_1(8, 4)$$

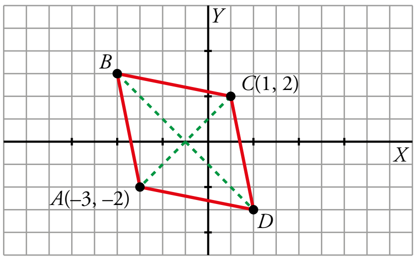
$$C_2 = t_2 \cap s \begin{cases} 4x - y + 6 = 0 \\ x + 4y - 24 = 0 \ \to \ x = 24 - 4y \end{cases} \to \ 96 - 16y - y + 6 = 0 \ \to \ y = 6 \ \to \ x = 0 \ \to \ C_2(0, 6)$$

$$D_1 = t_1 \cap r \begin{cases} 4x - y - 28 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \ \to \ x = 7 - 4y \end{cases} \to \ 28 - 16y - y - 28 = 0 \ \to \ y = 0 \ \to \ x = 7 \ \to \ D_1(7, 0)$$

$$D_2 = t_2 \cap r \begin{cases} 4x - y + 6 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \ \to \ x = 7 - 4y \end{cases} \to \ 28 - 16y - y + 6 = 0 \ \to \ y = 2 \ \to \ x = -1 \ \to \ D_2(-1, 2)$$



94 **La diagonal menor de un rombo mide lo mismo que su lado y sus extremos son los puntos $A(-3, -2)$ y $C(1, 2)$. Halla los vértices B y D y el perímetro del rombo.**



- $\overrightarrow{AC} = (4, 4) \ \to \ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

  Como esta diagonal mide lo mismo que el lado, entonces el perímetro será:

  Perímetro $= 4\,|\overrightarrow{AC}| = 16\sqrt{2}$

- Los otros dos vértices están en la perpendicular de $\overrightarrow{AC}$ por su punto medio $M(-1, 0)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \text{La recta } AC \text{ tiene por vector director } (1, 1) \ \to \ x - y + k = 0 \\ \text{Como, además, } A(-3, -2) \in \text{ recta } AC \end{array}\right\} \to$$

  $$\to \ -3 + 2 + k = 0 \ \to \ k = 1 \ \to \ AC: x - y + 1 = 0$$

  La recta s perpendicular a AC será:

  $$\left.\begin{array}{l} s: x + y + k' = 0 \\ \text{Como } M(-1, 0) \in s \end{array}\right\} \to \ -1 + k' = 0 \ \to \ k' = 1 \ \to \ s: x + y + 1 = 0$$

  Los puntos B y C serán los (x, y) que estén en s y cuya distancia al vértice A sea igual a la diagonal, es decir, igual a $4\sqrt{2}$.

  $(x, y) \in s \ \to \ x + y + 1 = 0 \ \to \ x = -1 - y$

$$\sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2}=4\sqrt{2} \to (x+3)^2+(y+2)^2=32 \to$$

$$\to (2-y)^2+(y+2)^2=32 \to 4+y^2-4y+y^2+4+4y=32 \to 2y^2=24 \to$$

$$\to y^2=12 \to \begin{cases} y_1=2\sqrt{3} \to x_1=-1-2\sqrt{3} \\ y_2=-2\sqrt{3} \to x_2=-1+2\sqrt{3} \end{cases}$$

Luego, los vértices B y C son:

$$(-1-2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}) \text{ y } (-1+2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$$

95 **Demuestra que las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ son:**

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

* ***Utiliza que $2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{BG}$ donde M es el punto medio de AC.***

$G=(x, y)$

$$M_{AC}=\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$$

$$2\overrightarrow{GM_{AC}}=\overrightarrow{BG}$$

$$2\left(\frac{x_1+x_3}{2}-x, \frac{y_1+y_3}{2}-y\right)=(x-x_2, y-y_2)$$

$$\begin{cases} 2\left(\dfrac{x_1+x_3}{2}-x\right)=x-x_2 \\ 2\left(\dfrac{y_1+y_3}{2}-y\right)=y-y_2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1+x_3-2x=x-x_2 \\ y_1+y_3-2y=y-y_2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1+x_3+x_2=3x \\ y_1+y_3+y_2=3y \end{cases} \to \begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_3+x_2}{3} \\ y=\dfrac{y_1+y_3+y_2}{3} \end{cases}$$

96 **$A(1, 1)$ y $B(5, 1)$ son dos vértices de un trapecio rectángulo y uno de sus lados está sobre la recta $y = x + 1$. Calcula los otros dos vértices (hay dos soluciones).**

Podemos comprobar que $A, B \notin r$.

Como un lado está sobre r, los otros dos vértices están en r y, por tanto, A y B son vértices consecutivos.

Además, un vector dirección de r es $\vec{r}=(1, 1)$, que no es proporcional a $\overrightarrow{AB}=(4, 0)$.

Por tanto, $\vec{r} \nparallel \overrightarrow{AB} \to$ los lados AB y CD no son paralelos, luego no son las bases del trapecio.

Podemos construir dos trapecios:

a) ABC_1D_1, donde AB es la altura del trapecio:

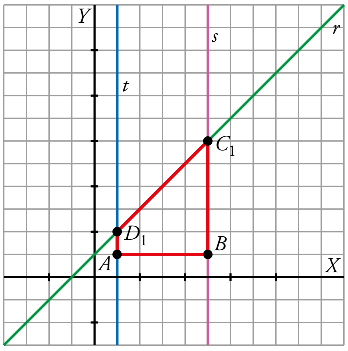
C_1 y D_1 serán los puntos de corte de r con las rectas perpendiculares a AB que pasan por B y A, respectivamente.

- $\left.\begin{array}{l} t \perp \overrightarrow{AB} \to 4x+k=0 \\ \text{Como } A(1,1) \in t \end{array}\right\} \to 4+k=0 \to k=-4 \to t: 4x-4=0 \to t: x=1$

  Así: $D_1 = t \cap r: \begin{cases} x=1 \\ y=x+1 \end{cases} \to y=2 \to D_1(1, 2)$

- $\left.\begin{array}{l} s \perp \overrightarrow{AB} \to 4x+k=0 \\ \text{Como } B(5,1) \in s \end{array}\right\} \to 4 \cdot 5+k=0 \to k=-20 \to s: 4x-20=0 \to s: x=5$

Así: $C_1 = s \cap r: \begin{cases} x = 5 \\ y = x + 1 \end{cases} \rightarrow y = 6 \rightarrow C_1(5, 6)$



b) ABC_2D_2, donde C_2D_2 es la altura del trapecio:

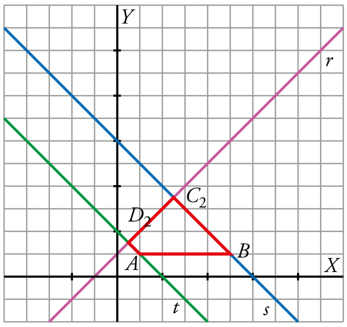
C_2 y D_2 serán los puntos de corte de r con las rectas perpendiculares a r que pasan por B y A, respectivamente (es decir, C_2 y D_2 son los pies de dichas perpendiculares).

- $\left.\begin{array}{l} t \perp r \rightarrow y = -x + k \\ \text{Como } A \in t \end{array}\right\} \rightarrow 1 = -1 + k \rightarrow k = 2 \rightarrow t: y = -x + 2$

  Así: $D_2 = t \cap r: \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + 1 \end{cases} \rightarrow -x + 2 = x + 1 \rightarrow 1 = 2x \rightarrow x = \dfrac{1}{2} \rightarrow y = \dfrac{3}{2} \rightarrow D_2\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

- $\left.\begin{array}{l} s \perp r \rightarrow y = -x + k \\ \text{Como } B \in s \end{array}\right\} \rightarrow 1 = -5 + k \rightarrow k = 6 \rightarrow s: y = -x + 6$

  Así: $C_2 = s \cap r: \begin{cases} y = -x + 6 \\ y = x + 1 \end{cases} \rightarrow -x + 6 = x + 1 \rightarrow 5 = 2x \rightarrow x = \dfrac{5}{2} \rightarrow y = \dfrac{7}{2} \rightarrow C_2\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$



97 **Toda recta se puede expresar como $x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta = d$, donde θ es el ángulo que forma la recta con el eje de ordenadas y d es su distancia al origen de coordenadas (se conoce como *ecuación de Hesse*). Escribe en esa forma la recta $4x + 3y - 12 = 0$.**

$dist(O, r) = \dfrac{|-12|}{5}$

$d = \dfrac{|-12|}{5} = \dfrac{12}{5}$

Dividimos entre 5 en la ecuación de la recta y obtenemos:

$\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y = \dfrac{12}{5} \rightarrow 0{,}8x + 0{,}6y = \dfrac{12}{5}$

$0{,}8 = \cos 36° \, 52'$

$0{,}6 = \operatorname{sen} 36° \, 52'$

Luego la ecuación que buscamos es: $x \cos 36° \, 52' + y \operatorname{sen} 36° \, 52' = \dfrac{12}{5}$

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 173

1 Se consideran los puntos $A(0, 1)$, $B(4, 9)$ y $C(-4, k)$.

a) Calcula las coordenadas de un punto P que divide al segmento AB en dos partes tales que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$.

b) Determina k para que el punto C sea el simétrico de B respecto de A.

a) $A(0, 1)$, $B(4, 9)$, $C(-4, k)$

Sea $P(x, y)$:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} \to (x, y-1) = \frac{1}{3}(4-x, 9-y) \to \left.\begin{cases} 3x = 4 - x \to x = 1 \\ 3y - 3 = 9 - y \to y = 3 \end{cases}\right\} \to P(1, 3)$$

b) A debe ser el punto medio de CB.

$$(0, 1) = \left(\frac{4-4}{2}, \frac{9+k}{2}\right) \to 9 + k = 2 \to k = -7$$

2 Calcula la ecuación de estas rectas:

a) Pasa por $A(3, 2)$ y por $B(-2, 1)$, en forma paramétrica e implícita.

b) Pasa por (0, 0) y tiene pendiente $m = -\frac{1}{3}$, en forma continua y explícita.

a) Vector dirección $\vec{d} = \overrightarrow{BA} = (5, 1)$. Vector de posición: $\vec{p}(3, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$

$t = y - 2$; $x = 3 + 5(y - 2) = 3 + 5y - 10 \to x - 5y + 7 = 0$

Ecuación implícita: $x - 5y + 7 = 0$

b) $m = -\frac{1}{3} \to$ vector dirección: $\vec{d}(3, -1)$

Ecuación continua: $\frac{x}{3} = \frac{y}{-1}$

$3y = -x \to y = -\frac{x}{3}$

Ecuación explícita: $y = -\frac{x}{3}$

3 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

a) Pasa por $P(2, -3)$ y es perpendicular a $y = \frac{-2}{5}x + 1$.

b) Es paralela a $2x + 3y + 1 = 0$ y su ordenada en el origen es 2.

a) Una recta perpendicular a la dada tiene pendiente $m = \frac{5}{2}$. Como ha de pasar por $P(2, -3)$, su ecuación es:

$$y + 3 = \frac{5}{2}(x - 2) \to 2y + 6 = 5x - 10 \to 5x - 2y - 16 = 0$$

b) Una recta paralela a $2x + 3y + 1 = 0$ es $2x + 3y + k = 0$.

Como ha de pasar por (0, 2), debe ser $k = -6$.

La recta buscada es $2x + 3y - 6 = 0$.

4 **Escribe la ecuación del haz de rectas que pasa por (5, 1) y halla la recta de dicho haz que pasa por (0, 1).**

El haz de rectas que pasa por el punto (5, 1) es $a(x-5)+b(y-1)=0$.

La recta del haz que pasa por (0, 1) es la recta que pasa por (5, 1) y por (0, 1). Por tanto, su ecuación es:

$$\frac{x}{5}=\frac{y-1}{0} \to y=1$$

5 **Estudia la posición relativa de las rectas r y s y de las rectas r y t, donde:**

$$r\!: 3x+5y-34=0 \qquad s\!: y=\frac{5}{3}x \qquad t\!: \begin{cases} x=k \\ y=2 \end{cases}$$

- Posición relativa de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vector dirección de } r,\ \vec{d}_r(-5,3) \\ \text{Vector dirección de } s,\ \vec{d}_s(3,5) \end{array}\right\} \ r \text{ y } s \text{ son perpendiculares.}$$

- Posición relativa de r y t:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vector dirección de } t,\ \vec{d}_t(1,0) \\ \text{Vector dirección de } r,\ \vec{d}_r(-5,3) \end{array}\right\} \ r \text{ y } t \text{ son secantes.}$$

6 **Calcula k para que las rectas $r\!: y=3$ y $s\!: y=kx+1$ formen un ángulo de 60°.**

La recta $r\!: y=3$ es paralela al eje de abscisas. Así, la tangente del ángulo que forman r y s coincide con la pendiente de s, que es igual a k. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha=k \\ tg\ 60°=\sqrt{3} \end{array}\right\} k=\sqrt{3}$$

7 **Considera los puntos $A(0, k)$ y $B(8, 5)$ y la recta $r\!: 3x+4y+1=0$. Determina el valor de k para que:**

a) La distancia entre A y B sea igual a 10.

b) La distancia entre A y r sea 1.

a) $dist(A, B)=\sqrt{8^2+(5-k)^2}=\sqrt{64+25+k^2-10k}=10 \to k^2-10k-11=0 \ \begin{cases} k=11 \\ k=-1 \end{cases}$

b) $dist(A, r)=\dfrac{|3\cdot 0+4\cdot k+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|4k+1|}{5}=1 \ \begin{cases} 4k+1=5 \to k=1 \\ 4k+1=-5 \to k=-3/2 \end{cases}$

8 **En el triángulo de vértices $A(-3, 2)$, $B(1, 3)$ y $C(4, 1)$, halla el ortocentro y el circuncentro.**

ORTOCENTRO: $R=h_A \cap h_B \cap h_C$ donde h_A, h_B y h_C son las tres alturas (desde A, B y C, respectivamente).

- $h_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC}=(3,-2) \to \vec{a}=(2,3) \\ A \in h_A \end{cases} \to h_A\!: \begin{cases} x=-3+2t \\ y=2+3t \end{cases} \to \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{3} \to h_A\!: 3x-2y+13=0$

- $h_B \begin{cases} \vec{b} \perp \overrightarrow{AC}=(7,-1) \to \vec{b}=(1,7) \\ B \in h_B \end{cases} \to h_B\!: \begin{cases} x=1+t \\ y=3+7t \end{cases} \to x-1=\dfrac{y-3}{7} \to h_B\!: 7x-y-4=0$

- $h_C \begin{cases} \vec{c} \perp \overrightarrow{AB}=(4,1) \to \vec{c}=(1,-4) \\ C \in h_C \end{cases} \to h_C\!: \begin{cases} x=4+t \\ y=1-4t \end{cases} \to x-4=\dfrac{y-1}{-4} \to h_C\!: 4x+y-17=0$

Bastaría con haber calculado dos de las tres alturas y ver el punto de intersección:

$$\mathrm{h}_B \cap \mathrm{h}_C: \begin{cases} 7x - y - \ \ 4 = 0 \\ 4x + y - 17 = 0 \end{cases} \quad \text{Sumando:}$$

$$11x \qquad - 21 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{21}{11}; \ y = 7x - 4 = 7 \cdot \frac{21}{11} - 4 = \frac{147 - 44}{11} = \frac{103}{11} \ \rightarrow \ R\left(\frac{21}{11}, \frac{103}{11}\right)$$

NOTA: Puede comprobarse que el ortocentro, R, está también en h_A. Basta con sustituir en su ecuación.

CIRCUNCENTRO: $S = m_A \cap m_B \cap m_C$, donde m_A, m_B y m_C son las tres mediatrices (desde A, B y C, respectivamente)

- $m_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC} \ \rightarrow \ \vec{a} = (2, 3) \\ \text{Punto medio de } BC\text{: } M\left(\frac{5}{2}, 2\right) \in m_A \end{cases} \rightarrow \ y - 2 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right) \ \rightarrow \ y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$

- $m_C \begin{cases} \vec{c} \perp \overrightarrow{AB} = (4, 1) \ \rightarrow \ \vec{c} = (1, -4) \\ \text{Punto medio de } AB\text{: } M'\left(-1, \frac{5}{2}\right) \in m_C \end{cases} \rightarrow \ y - \frac{5}{2} = -4(x + 1) \ \rightarrow \ y = -4x - \frac{3}{2}$

Así:

$$S = m_A \cap m_C: \begin{cases} y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} \\ y = -4x - \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \ \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} = -4x - \frac{3}{2} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 6x - 7 = -16x - 6 \ \rightarrow \ 22x = 1 \ \rightarrow \ x = \frac{1}{22} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ y = -4 \cdot \frac{1}{22} - \frac{3}{2} = \frac{-4 - 33}{22} = \frac{-37}{22}$$

Así, $S\left(\frac{1}{22}, \frac{-37}{22}\right)$.

NOTA: Se podría calcular m_B y comprobar que $S \in m_B$.

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

9 LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.8. (EA 1.8.1.-EA 1.8.2.-EA 1.8.3.-EA 1.8.4.-EA 1.8.5.) CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.)

Página 223

Resuelve

¿Dónde se situará el depósito?

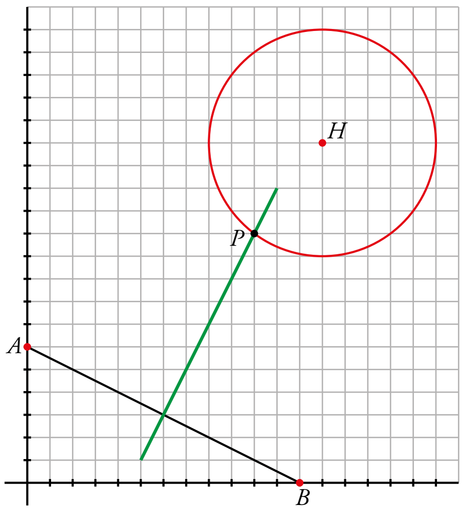
ODS Meta 7.2. **[Tras visionar el vídeo, el docente puede plantear un debate en el aula, sobre la urgencia de disminuir nuestra dependencia de fuentes de energía no renovables].**

Se quiere instalar un gran depósito de propano para abastecer a una factoría industrial y a dos urbanizaciones.

Han de cumplirse las siguientes condiciones: conviene que el depósito esté lo más cerca de la factoría, pero por razones de seguridad, no puede estar a menos de 500 m de un horno que hay en ella. Por tanto habrá de situarse, exactamente, a 500 m del horno, H. Además, se desea que esté a la misma distancia de A que de B.

Para resolverlo, llevamos los datos a unos ejes cartesianos (1 cuad = 100 m) y suponemos que los puntos H, A y B se sitúan donde se indica en la gráfica de la derecha.

- **La circunferencia es el conjunto de puntos que están a 500 m del horno. Analíticamente, son puntos (x, y) cuya distancia a $H(13, 15)$ es 5. Exprésalo mediante una ecuación.**
- **La recta verde es el conjunto de puntos que equidistan de A y de B. Analíticamente, es una recta que pasa por (6, 3) y tiene pendiente 2. Escribe su ecuación.**
- **El punto P donde hemos de situar el depósito de propano se obtiene hallando la intersección de las dos líneas que acabamos de describir. Resuelve el sistema que forman sus ecuaciones para hallar las coordenadas de P.**



- $\sqrt{(x-13)^2+(y-15)^2}=5$
- $\dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y-3}{2} \to 2x-y-9=0$
- $\begin{cases}\sqrt{(x-13)^2+(y-15)^2}=5\\ 2x-y-9=0\end{cases} \to x=\dfrac{72}{5},\ y=\dfrac{99}{5};\ x=10,\ y=11$

La solución es $P = (10, 11)$ porque el depósito debe estar cerca de las urbanizaciones.

1 LUGARES GEOMÉTRICOS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.) CE 4.5. (EA 4.5.1.)

Página 224

Hazlo tú

1 **Halla la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son $A(0, 0)$ y $B(6, 4)$.**

$X = (x, y)$ punto de la mediatriz.

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-6)^2+(y-4)^2} \rightarrow x^2+y^2 = x^2+36-12x+y^2+16-8y$$

Mediatriz: $-12x - 8y + 52 = 0 \rightarrow -3x - 2y + 13 = 0$

Página 225

Hazlo tú

2 **Halla la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por r_1: $5x - 12y = 0$ y r_2: $12x + 5y = 0$.**

$X = (x, y)$ punto de la bisectriz.

$$\frac{|5x-12y|}{13} = \frac{|12x+5y|}{13} \rightarrow |5x-12y| = |12x+5y| \rightarrow \begin{cases} 5x-12y = 12x+5y \\ 5x-12y = -(12x+5y) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} B_1: -7x-17y=0 \\ B_2: 17x-7y=0 \end{cases}$$

3 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de cuadrados de distancias a $P(2, 5)$ y a $Q(4, -1)$ es 40, es decir, $\overline{XP}^2 - \overline{XQ}^2 = 40$.**

$X = (x, y)$ punto del lugar geométrico.

$$\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}\right)^2 = 40 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x-2)^2+(y-5)^2-((x-4)^2+(y+1)^2) = 40 \rightarrow 4x-12y+12 = 40 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x - 12y - 28 = 0 \text{ es una recta.}$$

Piensa y practica

1 Saco de dudas. **[La búsqueda de lugares geométricos puede servir para trabajar esta técnica].**

Halla las ecuaciones de estos lugares geométricos:

a) Mediatriz del segmento de extremos $A(-5, -3)$, $B(7, 1)$. Comprueba que es una recta perpendicular al segmento en su punto medio.

b) Circunferencia de centro $O(-3, 4)$ y radio 5. Comprueba que pasa por el origen de coordenadas.

c) Bisectrices de los ángulos formados por las rectas:

$$r_1: 5x + y + 3 = 0$$
$$r_2: x - 2y + 16 = 0$$

Comprueba que las bisectrices son dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto en que se cortan las rectas r_1 y r_2.

a) Los puntos $X(x, y)$ deben cumplir $dist(X, A) = dist(X, B)$:

$$\sqrt{(x+5)^2+(y+3)^2} = \sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}$$

Elevamos al cuadrado y desarrollamos:

$$x^2+10x+25+y^2+6y+9 = x^2-14x+49+y^2-2y+1$$
$$10x+14x+6y+2y+34-50 = 0 \rightarrow 24x+8y-16 = 0$$
$$3x+y-2 = 0 \rightarrow y = -3x+2$$

- El punto medio de AB es $M(1, -1)$ que, efectivamente, está en la recta (pues verifica la ecuación).
- La pendiente de la recta es $m_r = -3$, y la del segmento es:

$$m_{AB} = \frac{1-(-3)}{7-(-5)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Cumplen que $m_r \cdot m_{AB} = (-3)\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \rightarrow AB \perp r$

b) Los puntos $X(x, y)$ son tales que:

$$dist\,(X, O) = 5 \rightarrow \sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2} = 5 \rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 8y + 25 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 8y = 0$$

c) Son los puntos $X(x, y)$:

$$dist\,(X, r_1) = dist\,(X, r_2) \rightarrow \frac{|5x+y+3|}{\sqrt{26}} = \frac{|x-2y+16|}{\sqrt{5}}$$

Se dan dos casos: $\sqrt{5}\,(5x+y+3) = \sqrt{26}\,(x-2y+16)$

$\sqrt{5}\,(5x+y+3) = -\sqrt{26}\,(x-2y+16)$

Son dos rectas: $b_1\!: (5\sqrt{5}-\sqrt{26})x + (\sqrt{5}+2\sqrt{26})y + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} = 0$

$b_2\!: (5\sqrt{5}+\sqrt{26})x + (\sqrt{5}-2\sqrt{26})y + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} = 0$

- Sus pendientes son:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = \dfrac{-(5\sqrt{5}-\sqrt{26})}{\sqrt{5}+2\sqrt{26}} \\[2ex] m_2 = \dfrac{-(5\sqrt{5}+\sqrt{26})}{\sqrt{5}-2\sqrt{26}} \end{array}\right\} \rightarrow m_1 \cdot m_2 = \frac{25 \cdot 5 - 26}{5 - 4 \cdot 26} = \frac{99}{-99} = -1 \rightarrow b_1 \perp b_2$$

- Calculamos el punto de corte de las rectas iniciales y comprobamos que está también en ambas bisectrices:

$$\left.\begin{array}{l} r_1\!: 5x+y+3=0 \rightarrow y=-5x-3 \\ r_2\!: x-2y+16=0 \end{array}\right\} \rightarrow x - 2(-5x-3) + 16 = 0 \rightarrow x + 10x + 6 + 16 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 11x = -22 \rightarrow x = -2$$

Luego: $y = -5(-2) - 3 = 7$

El punto de corte es $(-2, 7)$, que se puede comprobar fácilmente que está en b_1 y b_2 sustituyendo en sus ecuaciones respectivas:

$$b_1\!: (5\sqrt{5}-\sqrt{26}) \cdot (-2) + (\sqrt{5}+2\sqrt{26}) \cdot 7 + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} =$$

$$= -10\sqrt{5} + 2\sqrt{26} + 7\sqrt{5} + 14\sqrt{26} + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} = 0$$

$$b_2\!: (5\sqrt{5}+\sqrt{26}) \cdot (-2) + (\sqrt{5}-2\sqrt{26}) \cdot 7 + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} =$$

$$= -10\sqrt{5} - 2\sqrt{26} + 7\sqrt{5} - 14\sqrt{26} + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} = 0$$

- Por tanto, b_1 y b_2 son dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto que r_1 y r_2.

2 ▶ ESTUDIO DE LA CIRCUNFERENCIA

C.E.: CE 4.5. (EA 4.5.1.-EA 4.5.2.)

Página 226

Hazlo tú

1 **Escribe la ecuación de la circunferencia de centro (–5, 2) y radio 3.**

$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 9 \rightarrow x^2 + 10x + y^2 - 4y + 29 = 9 \rightarrow x^2 + 10x + y^2 - 4y + 20 = 0$

Página 227

Hazlo tú

2 **¿Qué ecuaciones corresponden a circunferencias? Obtén su centro y su radio utilizando la fórmula y completando cuadrados.**

a) $\mathbf{2x^2 + 2y^2 - 8x = 0}$ **b)** $\mathbf{x^2 - y^2 + 7x - 2 = 0}$

c) $\mathbf{x^2 + y^2 - 3x + 4xy - 16 = 0}$ **d)** $\mathbf{x^2 + y^2 + 10x - 2y + 40 = 0}$

e) $\mathbf{x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0}$ **f)** $\mathbf{x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0}$

a) Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$x^2 + y^2 - 4x = 0 \rightarrow A = -4$

$r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2} = 2 > 0$

Es una circunferencia de centro (2, 0) y radio 2.

Completando cuadrados:

$(x - 2)^2 + y^2 = 4$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 4$

Es una circunferencia de centro (2, 0) y radio 2.

b) No es una circunferencia ya que su término y^2 tiene signo negativo. No podríamos escribirlo en forma $(y - b)^2$.

c) $x^2 + y^2 - 3x + 4xy - 16 = 0$

Hay término en $xy \rightarrow$ No es circunferencia.

d) $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 40 = 0$

Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$r^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 40 = -14 < 0 \rightarrow$ No es circunferencia.

Completando cuadrados:

$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = -40 + 25 + 1 = -14 < 0$

No es circunferencia.

e) Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$r = \sqrt{9 + 16 - 25} = 0$

No es circunferencia.

Completando cuadrados:

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = -25 + 9 + 16 = 0$

No es circunferencia.

f) Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$r = \sqrt{1 + 4 - 6} = \sqrt{-1}$

No es circunferencia.

Completando cuadrados:

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = -6 + 5 = -1$

No es circunferencia.

3 **Repite la actividad con $M(0, 6)$, $N(-2, 0)$ y $\overline{PM}/\overline{PN} = 3$.**

$X = (x, y)$ punto del lugar geométrico.

$$\frac{\sqrt{(x-6)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}} = 3 \to \sqrt{(x-6)^2 + y^2} = 3\sqrt{(x+2)^2 + y^2} \to (x-6)^2 + y^2 = 9[(x+2)^2 + y^2] \to$$

$$\to x^2 - 12x + y^2 + 36 = 9x^2 + 36x + 9y^2 + 36 \to 8x^2 + 8y^2 + 48x = 0 \to x^2 + y^2 + 6x = 0 \to$$

$\to$ Es una circunferencia de centro $(-3, 0)$ y radio $r = \sqrt{9} = 3$.

Piensa y practica

1 **Halla la ecuación de la circunferencia de centro (–5, 12) y radio 13.**

Comprueba que pasa por el punto (0, 0).

$(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 169 \to x^2 + y^2 + 10x - 24y = 0$

Si sustituimos $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación, esta se verifica. Por tanto, la circunferencia pasa por (0, 0).

2 **Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los extremos del segmento AB, $A(-3, 0)$ y $B(5, 0)$, es 50.**

$X = (x, y)$ punto del lugar geométrico.

$$\left(\sqrt{(x+3)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-5)^2 + y^2}\right)^2 = 50 \to (x+3)^2 + y^2 + (x-5)^2 + y^2 = 50 \to$$

$$\to 2x^2 + 2y^2 - 4x - 16 = 0 \to x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$$

Es una circunferencia de centro (1, 0) y radio $r = \sqrt{4 + 8} = 2\sqrt{3}$.

Página 228

Hazlo tú

1 **Halla la posición relativa de las rectas**

s_1: $y = x - 1$

s_2: $y = x + 1$

s_3: $y = 3$

respecto de la circunferencia anterior.

- Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0 \\ y = x - 1 \end{cases} \to x = 4, y = 3;\ x = 0,\ y = -1$$

Hay dos soluciones, se cortan en dos puntos, luego son secantes.

- Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \to \text{No hay solución, luego son exteriores.}$$

- Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow x = 4, \ y = 3$$

Hay una solución, se cortan en un punto, luego son tangentes.

Piensa y practica

3 **Estudia la posición relativa de la circunferencia**

$$\boldsymbol{C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0}$$

respecto de las rectas:

$\boldsymbol{s_1: 3x - 4y - 26 = 0}$ $\qquad$ $\boldsymbol{s_2: 5x - 8y + 60 = 0}$

$\boldsymbol{s_3: 3x - 4y - 1 = 0}$ $\qquad$ $\boldsymbol{s_4: x = 5}$

Halla los puntos de corte y de tangencia, si los hubiera.

- $\left.\begin{array}{l} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_1: 3x - 4y - 26 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 3x = 4y + 26 \rightarrow x = \frac{4}{3}y + \frac{26}{3}$

$$\left(\frac{4}{3}y + \frac{26}{3}\right)^2 + y^2 - 6\left(\frac{4}{3}y + \frac{26}{3}\right) - 4y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\frac{16}{9}y^2 + \frac{676}{9} + \frac{208}{9}y + y^2 - 8y - 52 - 4y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16y^2 + 676 + 208y + 9y^2 - 72y - 468 - 36y - 108 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 25y^2 + 100y + 100 = 0 \rightarrow y^2 + 4y + 4 = 0 \rightarrow (y + 2)^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -2 \ \text{(solución única)}$$

$$x = \frac{4}{3}(-2) + \frac{26}{3} \rightarrow x = 6$$

C y s_1 son tangentes en el punto $(6, -2)$.

- $\left.\begin{array}{l} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_2: 5x - 8y + 60 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 5x = 8y - 60 \rightarrow x = \frac{8}{5}y - 12$

$$\left(\frac{8}{5}y - 12\right)^2 + y^2 - 6\left(\frac{8}{5}y - 12\right) - 4y - 12 = 0 \rightarrow \frac{64}{25}y^2 + 144 - \frac{192}{5}y + y^2 - \frac{48}{5} + 72 - 4y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 64y^2 + 3\,600 - 960y + 25y^2 - 240 + 1\,800 - 100y - 300 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 89y^2 - 1\,060y + 4\,860 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

s_2 es exterior a la circunferencia C.

- $\left.\begin{array}{l} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_3: 3x - 4y - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 3x = 4y + 1 \rightarrow x = \frac{4}{3}y + \frac{1}{3}$

$$\left(\frac{4}{3}y + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 - 6\left(\frac{4}{3}y + \frac{1}{3}\right) - 4y - 12 = 0 \rightarrow \frac{16}{9}y^2 + \frac{1}{9} + \frac{8}{9}y + y^2 - 8y - 2 - 4y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16y^2 + 1 + 8y + 9y^2 - 72y - 18 - 36y - 108 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 25y^2 - 100y - 125 = 0 \rightarrow y^2 - 4y - 5 = 0 \begin{cases} y_1 = 5 \rightarrow x_1 = 7 \\ y_2 = -1 \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

C y s_3 son secantes en los puntos $(7, 5)$ y $(-1, -1)$.

- $\left.\begin{array}{l} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_4: x = 5 \end{array}\right\} \to 25 + y^2 - 30 - 4y - 12 = 0 \to y^2 - 4y - 17 = 0$

  $y = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-17)}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{84}}{2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{21}}{2} = 2 \pm \sqrt{21} \begin{array}{l} y_1 = 2 + \sqrt{21} \\ y_2 = 2 - \sqrt{21} \end{array}$

  C y s_4 se cortan en los puntos $(5, 2 + \sqrt{21})$ y $(5, 2 - \sqrt{21})$.

4 **¿Para qué valores de b la recta $y = x + b$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$?**

La recta será tangente a la circunferencia si la distancia del centro de la circunferencia a la recta es igual al radio de la circunferencia.

$C: x^2 + y^2 = 9 \to O = (0, 0),\ R = 3$

$r: y = x + b \to x - y + b = 0$

$dist\ (O, r) = \dfrac{|0 - 0 + b|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|b|}{\sqrt{2}} = 3 \to b = \pm 3\sqrt{2}$

5 **Halla la posición relativa de $C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ respecto de las rectas:**

$s_1: x + y = 10$ **$s_2: 4x + 3y + 20 = 0$**

$s_3: 3x - 4y = 0$ **$s_4: y = -2$**

$C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0 \to O = (3, -4),\ r = 5$

- $dist\ (O, r_1) = \dfrac{|3 - 4 - 10|}{\sqrt{1 + 1}} = \dfrac{11}{\sqrt{2}} \approx 7{,}78 > 5 \to r_1$ es exterior a C.
- $dist\ (O, r_2) = \dfrac{|4 \cdot 3 + 3(-4) + 20|}{\sqrt{16 + 9}} = \dfrac{20}{5} = 4 < 5 \to r_2$ y C se cortan en dos puntos.
- $dist\ (O, r_3) = \dfrac{|3 \cdot 3 - 4(-4)|}{\sqrt{9 + 16}} = \dfrac{25}{5} = 5 \to r_3$ y C son tangentes.
- $dist\ (O, r_4) = \dfrac{|-4 + 2|}{\sqrt{0 + 1}} = \dfrac{2}{1} = 2 < 5 \to r_4$ y C se cortan en dos puntos.

Página 229

6 **Halla la potencia de $P(-3, 8)$ a estas circunferencias:**

$C_1: x^2 + y^2 - 14x + 20 = 0$

$C_2: O(4, -3),\ r = 20$

Di si P es interior o exterior a C_1 y a C_2.

$C_1: x^2 + y^2 - 14x + 20 = 0 \to O_1 = (7, 0),\ r_1 = \sqrt{49 - 20} = \sqrt{29}$

$C_2: O(4, -3),\ r = 20$

$P(-3, 8)$

$\mathcal{P}(P \text{ a } C_1) = (7 + 3)^2 + (0 - 8)^2 - (\sqrt{29})^2 = 100 + 64 - 29 = 135 > 0 \to P$ es exterior a C_1.

$\mathcal{P}(P \text{ a } C_2) = (4 + 3)^2 + (-3 - 8)^2 - (20)^2 = 49 + 121 - 400 = -230 < 0 \to P$ es interior a C_2.

7 Halla el eje radical de estas circunferencias:

$$\boldsymbol{C_1: x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = 0}$$

$$\boldsymbol{C_2: x^2 + y^2 - 6y = 0}$$

Comprueba que es perpendicular a la línea de sus centros.

Calculamos las potencias de un punto genérico $P(x, y)$ a C_1 y a C_2:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{P}(P \text{ a } C_1) = x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = 0 \\ \mathcal{P}(P \text{ a } C_2) = x^2 + y^2 - 6y = 0 \end{array}\right\} \text{ Igualamos ambas expresiones:}$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = x^2 + y^2 - 6y \rightarrow -4x + 18y - 11 = 0$$

Ecuación del eje radical: $4x - 18y + 11 = 0 \rightarrow m = \dfrac{4}{18} = \dfrac{2}{9}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Centro de } C_1 \rightarrow O_1 = (2, -6) \\ \text{Centro de } C_2 \rightarrow O_2 = (0, 3) \end{array}\right\} \overrightarrow{O_1 O_2} = (-2, 9) \rightarrow$$

$\rightarrow$ La pendiente de la recta que une O_1 y O_2 es $m' = -\dfrac{9}{2}$.

Como $m \cdot m' = \left(\dfrac{2}{9}\right) \cdot \left(-\dfrac{9}{2}\right) = -1$, el eje radical y la recta que une O_1 y O_2 son perpendiculares.

3 ▶ LAS CÓNICAS COMO LUGARES GEOMÉTRICOS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.) **CE 4.5.** (EA 4.5.1.)

Página 231

Hazlo tú

1 **Dados los puntos $F_1(-3, 0)$ y $F_2(1, -2)$ y la recta $r: x + 2y - 5 = 0$, obtén las ecuaciones de:**

a) La elipse de focos F_1 y F_2 y constante 20.

b) La hipérbola de focos F_1 y F_2 y constante 2.

c) La parábola cuyo foco es F_1 y cuya directriz es r.

a) $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 20$

b) $\left|\sqrt{(x+3)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}\right| = 2$

c) $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = \dfrac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{1+4}}$

Piensa y practica

1 Cadena de consecuencias. **[El alumnado puede utilizar este organizador gráfico para representar la sucesión de razonamientos que le han conducido al resultado final].**

Halla la ecuación de la elipse de focos $F_1(4, 0)$ y $F_2(-4, 0)$ y cuya constante es 10.

Una vez puesta la ecuación inicial, pasa una raíz al segundo miembro, eleva al cuadrado (¡atención con el doble producto!), simplifica, aísla la raíz, vuelve a elevar al cuadrado y simplifica hasta llegar a la ecuación $9x^2 + 25y^2 = 225$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la elipse, entonces:

$dist\,(P, F_1) + dist\,(P, F_2) = 10$

$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10$

$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

Elevamos al cuadrado: $(x-4)^2 + y^2 = 100 + (x+4)^2 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

Operamos: $x^2 - 8x + 16 + y^2 = 100 + x^2 + 8x + 16 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

$20\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 16x + 100$

$5\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 4x + 25$

Elevamos al cuadrado: $25(x^2 + 8x + 16 + y^2) = 16x^2 + 200x + 625$

Simplificamos:

$25x^2 + 200x + 400 + 25y^2 = 16x^2 + 200x + 625 \ \rightarrow\ 9x^2 + 25y^2 = 225$

2 **Halla la ecuación de la hipérbola de focos $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$ y cuya constante es 6. Simplifica como en el ejercicio anterior hasta llegar a la expresión $16x^2 - 9y^2 = 144$.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la hipérbola, entonces:

$|dist\,(P, F_1) - dist\,(P, F_2)| = 6$

$dist\,(P, F_1) - dist\,(P, F_2) = \pm 6$

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \pm 6$

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = \pm 6 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

Elevamos al cuadrado:

$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 36 + x^2 + 10x + 25 + y^2 \pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

$\pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 20x + 36$

$\pm 3\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 5x + 9$

Elevamos al cuadrado: $9(x^2 + 10x + 25 + y^2) = 25x^2 + 90x + 81$

$9x^2 + 90x + 225 + 9y^2 = 25x^2 + 90x + 81$

$16x^2 - 9y^2 = 144$

3 **Halla la ecuación de la parábola de foco $F(-1, 0)$ y directriz $r: x = 1$. Simplifica hasta llegar a la expresión $y^2 = -4x$.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, entonces:

$dist\,(P, F) = dist\,(P, r)$

$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = |x - 1|$

Elevamos al cuadrado: $x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 2x + 1$

Simplificamos: $y^2 = -4x$

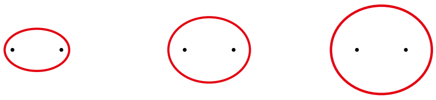
4 ▶ ESTUDIO DE LA ELIPSE

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.8. (EA 1.8.1.-EA 1.8.2.-EA 1.8.3.-EA 1.8.4.-EA 1.8.5.) CE 1.9. (EA 1.9.1.) CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.) CE 4.5. (EA 4.5.1.-EA 4.5.2.)

Página 232

1 Análisis asociativo. **[El docente puede plantear preguntas alrededor de la cuestión central planteada por el ejercicio para trabajar esta estrategia].**

¿Verdadero o falso? Si varias elipses tienen la misma distancia focal, cuanto más grande sea la constante $k = 2a$, mayor es la excentricidad.



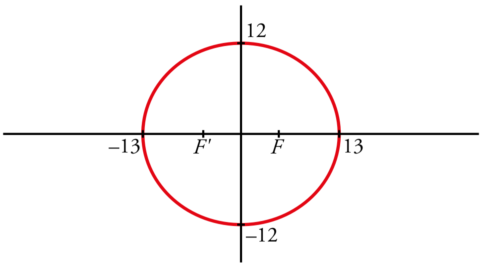
Falso. Al contrario; como $e = \frac{c}{a}$, si el numerador c es constante, cuanto mayor sea el denominador a, menor será el cociente, que es la excentricidad.

Página 233

2 **Una elipse tiene sus focos en los puntos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y su constante es $k = 26$.**

Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida. Represéntala.

- Semieje mayor: $k = 26 \rightarrow 2a = 26 \rightarrow a = 13$
- Semidistancia focal: $\overline{FF'} = 10 \rightarrow 2c = 10 \rightarrow c = 5$
- Semieje menor: $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$
- Excentricidad: $\frac{c}{a} = \frac{5}{13} \approx 0{,}38 \rightarrow exc \approx 0{,}38$
- Ecuación reducida: $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$



Página 234

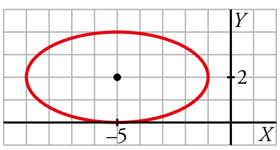
3 Saco de dudas. **[El cálculo de los elementos de las elipses se puede aprovechar para trabajar esta técnica].**

Representa y halla la excentricidad y los focos.

a) $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ **b)** $9x^2 + 16y^2 = 144$

c) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{64} = 1$ **d)** $x^2 + 4(y-3)^2 = 4$

a)

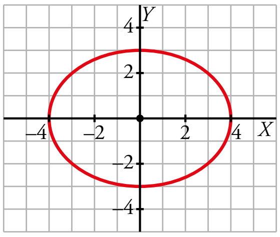


$c = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$

$exc = \frac{\sqrt{12}}{4} \approx 0{,}87$

$\alpha = -5;\ \beta = 2;\ F_1 = \left(-5 + 2\sqrt{3}, 2\right);\ F_2 = \left(-5 - 2\sqrt{3}, 2\right)$

b)



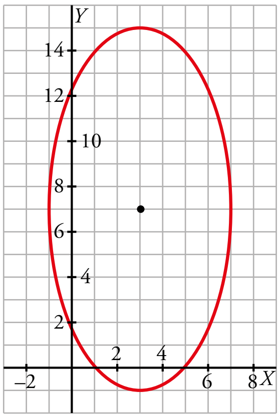
$$9x^2 + 16y^2 = 144 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{144}{9}} + \frac{y^2}{\frac{144}{16}} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16 = a^2,\ 9 = b^2 \rightarrow c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$$

$$exc = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$F_1 = \left(\sqrt{7}, 0\right);\ F_2 = \left(-\sqrt{7}, 0\right)$

c)

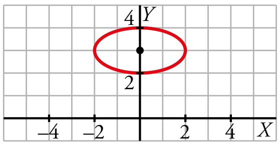


$$c = \sqrt{64-16} = \sqrt{48}$$

$$exc = \frac{\sqrt{48}}{8} \approx 0,87$$

$\alpha = 3;\ \beta = 7;\ F_1 = \left(3, 7 + 4\sqrt{3}\right);\ F_2 = \left(3, 7 - 4\sqrt{3}\right)$

d)



$$x^2 + 4(y-3)^2 = 4 \rightarrow \frac{x^2}{4} + (y-3)^2 = 1 \rightarrow 4 = a^2,\ 1 = b^2$$

$$a = 2,\ b = 1;\ c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

$$exc = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

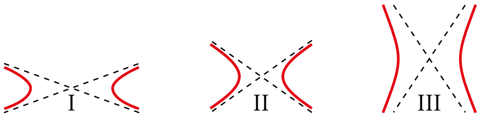
$\alpha = 0;\ \beta = 3;\ F_1 = \left(\sqrt{3}, 3\right);\ F_2 = \left(-\sqrt{3}, 3\right)$

5 ESTUDIO DE LA HIPÉRBOLA

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.8. (EA 1.8.1.-EA 1.8.2.-EA 1.8.3.-EA 1.8.4.-EA 1.8.5.) CE 1.9. (EA 1.9.1.) CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.) CE 4.5. (EA 4.5.1.-EA 4.5.2.)

Página 236

1 **¿Verdadero o falso?**



a) La hipérbola III es la más excéntrica.

b) La hipérbola I es la menos excéntrica.

a) Verdadero, porque el valor absoluto de la pendiente de las asíntotas, $m = \left|\frac{b}{a}\right|$, es muy grande, luego la excentricidad, $e = \frac{c}{a}$, será más grande, puesto que $c > b$.

b) Verdadero, porque las asíntotas $y = \frac{b}{a}x$ tienen poca pendiente en valor absoluto, luego la excentricidad, $e = \frac{c}{a} < \left|\frac{b}{a}\right|$, será más pequeña.

2 **Una hipérbola tiene sus focos en los puntos:**

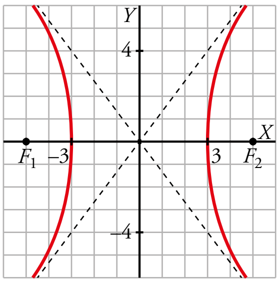
$$F_1(5, 0) \quad \text{y} \quad F_2(-5, 0)$$

y su constante es $k = 6$.

Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida.

Represéntala.

- Semieje: $k = 2a = 6 \rightarrow a = 3$
- Semidistancia focal: $\overline{F_1F_2} = 10 \rightarrow c = 5$
- Cálculo de b: $b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow b = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4 \rightarrow b = 4$
- Excentricidad: $exc = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$
- Asíntotas: $y = \frac{4}{3}x;\ y = -\frac{4}{3}x$
- Ecuación reducida: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$



Página 237

3 **Representa.**

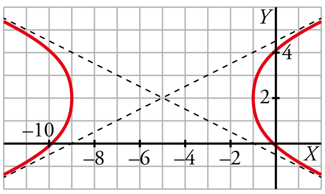
a) $\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

b) $9x^2 - 16y^2 = 144$

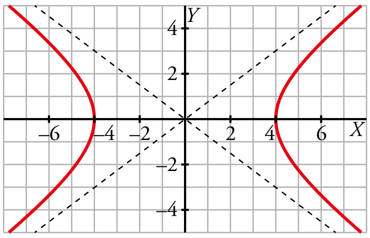
c) $\frac{(y-7)^2}{64} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$

d) $x^2 - 4(y-3)^2 = 4$

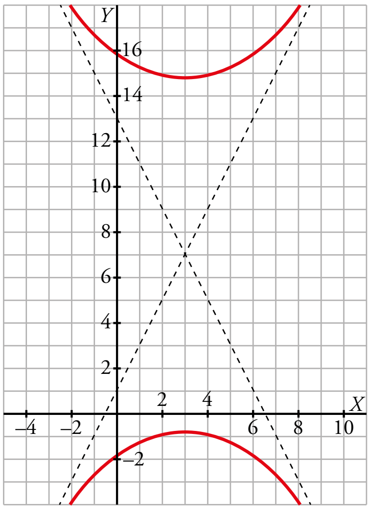
a)



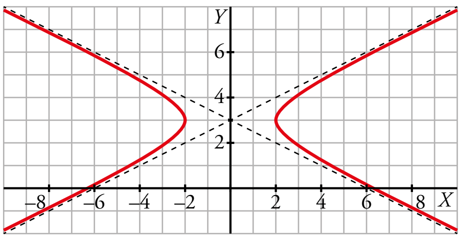
b) $9x^2 - 16y^2 = 144 \rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$



c)



d) $x^2 - 4(y-3)^2 = 4 \rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{(y-3)^2}{1} = 1$



Página 238

4 **Calcula la distancia focal y las coordenadas de los focos de las siguientes hipérbolas equiláteras:**

a) $y = \dfrac{1}{x}$ **b)** $y = -\dfrac{2}{x}$ **c)** $y = \dfrac{18}{x}$ **d)** $xy = \dfrac{1}{4}$

a) $k = 1$; $F_1 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$; $F_2 = \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

distancia focal $= 2\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 4$

b) $k = -2$ tiene los focos en el segundo y cuarto cuadrantes.

$F_1 = (-2, 2)$; $F_2 = (2, -2)$

distancia focal $= 2\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$

c) $k = 18$

$F_1 = (6, 6)$; $F_2 = (-6, -6)$

distancia focal $= 2\sqrt{72} = 12\sqrt{2}$

d) $k = \frac{1}{4}$

$F_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ F_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

distancia focal $= 2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 2$

5 **[El ejercicio puede plantear dudas a los compañeros y las compañeras, de forma que el alumnado pueda trabajar la comunicación (dimensión social)].**

Dadas las funciones de proporcionalidad inversa del ejercicio anterior, escribe la ecuación que describe cada una de las gráficas giradas 45° con respecto al origen de coordenadas.

a) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

c) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$

d) $\frac{x^2}{1/2} - \frac{y^2}{1/2} = 1$

6 ▶ ESTUDIO DE LA PARÁBOLA

C.E.: CE 4.5. (EA 4.5.1.-EA 4.5.2.)

Página 239

1 **Halla la ecuación reducida de la parábola de foco $F(1,5; 0)$ y directriz $x = –1,5$.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola: $dist\,(P, F) = dist\,(P, d)$, donde d es la directriz y F el foco.

$$\sqrt{(x-1,5)^2 + y^2} = |x + 1,5|$$

$$x^2 - 3x + 2,25 + y^2 = x^2 + 3x + 2,25 \rightarrow y^2 = 6x$$

- De otra forma:

  Distancia del foco a la directriz: $p = 3$

  Ecuación reducida: $y^2 = 6x$

2 **Halla la ecuación reducida de una parábola como la del ejercicio 1 pero con el vértice en (–2, 3).**

Del ejercicio anterior sabemos que $p = 3$ y si el vértice es $V(0, 0) \rightarrow y^2 = 6x$

Con vértice $V(-2, 3) : (y - 3)^2 = 6(x + 2)$

Página 240

3 **Halla las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de las siguientes parábolas:**

a) $y = 4x^2$ **b)** $y = \frac{1}{2}x^2$ **c)** $y = -\frac{1}{8}x^2$ **d)** $y = -0,1x^2$

a) $k = 4$

$F\left(0, \frac{1}{16}\right)$

$d: y = -\frac{1}{16}$

b) $k = \frac{1}{2}$

$F\left(0, \frac{\frac{1}{4}}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$d: y = -\frac{1}{2}$

c) $k = \frac{-1}{8}$

$F(0, 2)$

$d: y = 2$

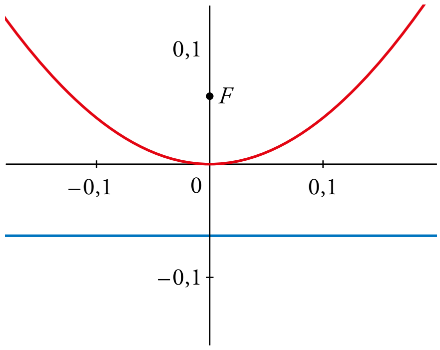
d) $k = -0,1$

e) $F\left(0, \frac{1}{-0,4}\right) = \left(0, \frac{-5}{2}\right)$

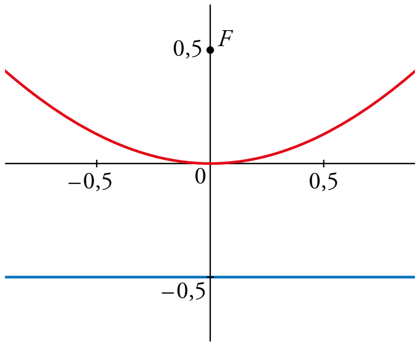
f) $d: y = \frac{1}{0,4} = 2,5$

4 **Dibuja las parábolas del ejercicio anterior y sus elementos.**

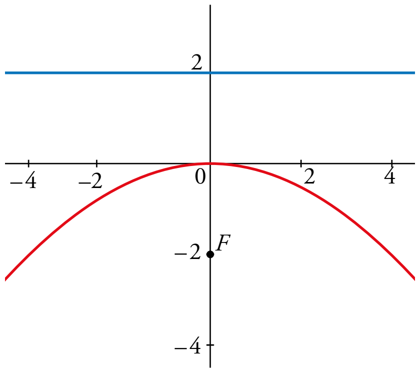
a)



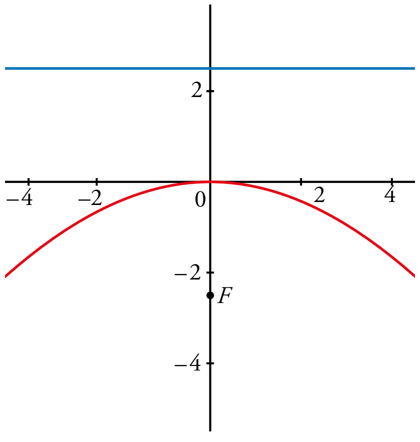
b)



c)



d)



5 **Calcula el foco y la directriz de esta parábola:**

$$y = -\frac{1}{10}x^2 + x - \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{10}x^2 + x - \frac{1}{2} = -\left(\frac{1}{10}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{x^2}{10} - \frac{2x}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} + \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\left[\left(\frac{x}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] = -\left[\left(\frac{x}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - 2\right] \rightarrow (y-2)(-1) = \left(\frac{x}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{10}}\left(x - \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{10}(x-5)^2 \rightarrow -10(y-2) = (x-5)^2$$

$p = -5;\ b = 2;\ a = 5$

$V(5, 2);\ F = (5, 2) + \left(0, \frac{p}{2}\right) = \left(5, 2 - \frac{5}{2}\right) = \left(5, -\frac{1}{2}\right);\ d\!: y = V_y - \frac{p}{2} = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 4.5. (EA 4.5.1.-EA 4.5.2.)

Página 242

Hazlo tú

1. Determinación de una circunferencia conocidos tres puntos por los que pasa

- **Obtén el centro, el radio y la ecuación de la circunferencia que pasa por $P(-1, 3)$, $Q(2, -2)$ y $R(3, 0)$.**

r: mediatriz de PQ

$\overrightarrow{PQ} = (2, -2) - (-1, -3) = (3, 1)$

r: tiene vector de dirección $\vec{d} = (-1, 3)$ y pasa por $M_{PQ} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

$$r: \frac{x - \frac{1}{2}}{-1} = \frac{y + \frac{5}{2}}{3} \rightarrow 3x + y + 1 = 0$$

s: mediatriz de PR

$\overrightarrow{PR} = (2, -2) - (3, 0) = (1, 2)$

r: tiene vector de dirección $\vec{d} = (-2, 1)$ y pasa por $M_{PR} = \left(\frac{5}{2}, -1\right)$

$$r: \frac{x - \frac{5}{2}}{-2} = \frac{y + 1}{1} \rightarrow 2x + 4y - 1 = 0$$

$$\text{Centro} \rightarrow \begin{cases} 3x + \ \ y + 1 = 0 \\ 2x + 4y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2} \rightarrow C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Radio} = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

La ecuación de la circunferencia es: $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

2. Circunferencia que pasa por un punto y cuyo centro está sobre una determinada recta

- **Obtén la ecuación de la circunferencia de radio $\sqrt{40}$ que pasa por $P(2, 11)$ y cuyo centro pertenece a la recta de ecuación $x - 3y + 11 = 0$.**

El centro será $C(3b - 11, b)$ por pertenecer a la recta indicada.

Como P pertenece a la circunferencia: $dist(P, C) = r$.

Desarrollamos:

$$|(3b - 11 - 2, b - 11)| = \sqrt{9b^2 - 78b + 169 + b^2 - 22b + 121} = \sqrt{40} \rightarrow b^2 - 100b + 290 = 40 \rightarrow b = 5$$

$C(4, 5)$ y la circunferencia es $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 40$.

En este caso existe una única solución porque la distancia del punto P a la recta dada es exactamente $\sqrt{40}$.

Página 243

Hazlo tú

3. Descripción de una cónica a partir de su ecuación

- **Describe las siguientes cónicas, obtén sus elementos y dibújalas:**

a) $x^2 - 2y + 2 = 0$

b) $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

c) $x^2 + 9y^2 - 2x - 8 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$

a) $x^2 - 2y + 2 = 0 \rightarrow$ Parábola con eje vertical.

$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

$x^2 = 2y - 2 = 2(y - 1) \rightarrow p = 1$

Foco: $F = \left(0, 1 + \dfrac{1}{2}\right) = \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = 1 - \dfrac{1}{2} \rightarrow y = \dfrac{1}{2}$

b) $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

Es una hipérbola porque los coeficientes de x^2 e y^2 tienen distinto signo.

Completamos cuadrados:

$(x^2 - 2x + 1) - 4y^2 - 3 - 1 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 - 4y^2 = 4 \rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 1$

Centro: $O = (1, 0)$. Focos en el eje X.

Semiejes: $a = 2$, $b = 1$

Semidistancia focal: $c = \sqrt{5}$

Excentricidad: $exc = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Asíntotas: $y = \pm\dfrac{1}{2}(x - 1)$

c) $x^2 + 9y^2 = 2x - 8 = 0$

Los coeficientes de x^2 e y^2 son distintos, pero del mismo signo; es una elipse.

Completamos cuadrados:

$(x^2 - 2x + 1) + 9y^2 - 8 - 1 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 + 9y^2 = 9 \rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{9} + y^2 = 1$

Es una elipse de centro $O(1, 0)$ y eje mayor paralelo al eje X.

Semiejes: $a = 3$, $b = 1$

Semidistancia focal: $c = \sqrt{8}$

Excentricidad: $exc = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$

d) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$

Se trata de una circunferencia porque los coeficientes de x^2 e y^2 son 1 y no hay término en xy.

Completamos cuadrados:

$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + 9 - 4 - 9 = 0 \rightarrow (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$

Circunferencia de centro $O(-2, -3)$ y radio $r = 2$.

Página 244

Hazlo tú

4. Ecuación de una elipse no centrada en el origen

- **Obtén la ecuación de la elipse de focos $F(3, -2)$ y $F(3, 6)$ y cuya excentricidad es $exc = \frac{4}{5}$.**

$O = M_{FF'} = (3, 2)$

$dist\,(F', F) = 8 = 2c \to c = 4$

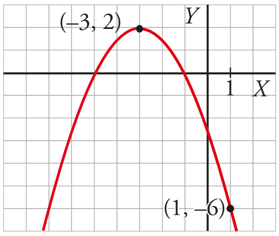
$e = \frac{4}{5} = \frac{4}{a} \to a = 5$

$b = \sqrt{25 - 16} = 3$

La ecuación requerida es: $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

6. Elementos de una parábola de eje vertical a partir de su representación gráfica

- **Calcula el foco y la directriz de esta parábola.**



$V(-3, 2)$

$P(1, -6)$

Buscamos una parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{La abscisa del vértice de la parábola es: } Vx = -3 = -\frac{b}{a} \to 6a - b = 0 \ (1) \\ P \in \text{parábola} \to -6 = a + b + c \ (2) \\ V \in \text{parábola} \to 2 = 9a - 3b + c \ (3) \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema formado por (1), (2) y (3):

$$a = -\frac{1}{2};\ b = -3;\ c = -\frac{5}{2}$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{5}{2}$$

Sabemos que $a = \frac{1}{2p} \to p = -1$

Si tuviera $V(0, 0)$:

$$F\left(0, \frac{p}{2}\right) \text{ y } d\text{: } y = -\frac{p}{2} \to F\left(0, \frac{-1}{2}\right) \text{ y } d\text{: } y = \frac{1}{2}$$

Pero $V(-3, 2)$:

$$F(-3, 2) + \left(0, \frac{p}{2}\right) = \left(-3, \frac{3}{2}\right)$$

$$d\text{: } y = V_y - \frac{p}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Página 245

Hazlo tú

7. Centro radical de tres circunferencias

- **Halla el centro radical de estas tres circunferencias:**

C_1: $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 14 = 0$

C_2: $x^2 + y^2 - 10y - 8y + 37 = 0$

C_3: $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$

Buscamos el eje radical entre C_1 y C_2:

$$x^2 + y^2 - 6x + 6y - 14 = x^2 + y^2 - 10x - 8y + 37 \to y = \frac{x}{4} + \frac{17}{8}$$

Buscamos el eje radical entre C_3 y C_2:

$$x^2 + y^2 - 8x + 7 = x^2 + y^2 - 10y - 8y + 37 \to y = \frac{4x}{9} + \frac{5}{3}$$

Buscamos ahora el punto de corte entre los dos ejes radicales:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{17}{8} \\ y = \dfrac{4x}{9} + \dfrac{5}{3} \end{cases} \to x = \frac{33}{14} \to y = \frac{19}{7} \to R\left(\frac{33}{14}, \frac{19}{7}\right)$$

8. Ecuación de una parábola con vértice distinto de (0, 0) dados el foco y la directriz

- **Halla la ecuación de la parábola de eje horizontal cuyo foco es $F(4, -3)$ y cuya directriz es $x = 2$.**

Calculamos la distancia del foco a la directriz, $p = 4 - 2 = 2$.

$$V\left(\frac{4+2}{2}, -3\right) = (3, -3)$$

$$(y+3)^2 = 4(x-3)$$

9. Cálculo de la recta tangente a una parábola en un punto

- **Resuelve este ejercicio para la parábola $y^2 = -4x$ y el punto $A(-4, 4)$.**

Haz de rectas que pasan por $A = (-4, 4)$:

$y = m(x + 4) + 4$, $m \in \mathbb{R}$, más la recta vertical $x = -4$

$$y^2 = -4x \begin{cases} y = m(x+4) + 4 \\ y^2 = -4x \end{cases} \to y = m\left(\frac{y^2}{-4} + 4\right) + 4 \to 4y = -my^2 + 16m + 16$$

$$my^2 + 4y - 16m - 16 = 0$$

Si las rectas son tangentes a la parábola, el discriminante de esta ecuación tiene que ser 0.

$$\Delta = 16 - 4 \cdot m \cdot (-16m - 16) = 0 \to m = -\frac{1}{2}$$

La recta tangente es:

$$y = -\frac{1}{2}(x + 4) + 4$$

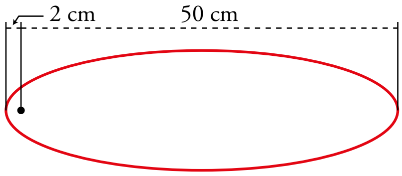
EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 246

Hazlo tú

1. Cálculo de los elementos de una elipse

- **Calcular la distancia focal, el semieje menor y la excentricidad de esta elipse:**



distancia focal = 50 – 2 = 48 $\to$ c = 24

a = semieje mayor = $\dfrac{52}{2} = 26$

semieje menor = b: = $a^2 = b^2 + c^2 \to b = \sqrt{676 - 576} = \sqrt{100} = 10$

excentricidad $= \dfrac{c}{a} = \dfrac{24}{26} = 0,92$

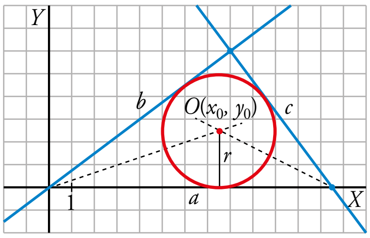
2. Circunferencia inscrita en un triángulo

- **Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo de lados a, b y c, siendo:**

a: y = 0

b: 3x – 4y = 0

c: 4x + 3y – 50 = 0



- *dist* (P, a) = *dist* (P, b) $\to$ $\left|\dfrac{y}{1}\right| = \left|\dfrac{3x - 4y}{5}\right|$

5y = 3x – 4y

–5y = 3x – 4y $\to$ No vale porque la bisectriz del ángulo tiene pendiente positiva.

- *dist* (P, a) = *dist* (P, b) $\to$ $\left|\dfrac{y}{1}\right| = \left|\dfrac{4x + 3y - 50}{5}\right|$

5y = 4x + 3y – 50 $\to$ No vale porque la bisectriz del ángulo tiene pendiente negativa.

–5y = 4x + 3y – 50

- Incentro:

$$\begin{cases} 5y = 3x - 4y \\ -5y = 4x + 3y - 50 \end{cases} \to x = \frac{15}{2},\ y = \frac{5}{2} \to O = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

- r = *dist* (O, a) = $\left|\dfrac{\frac{5}{2}}{1}\right| = \dfrac{5}{2}$

- Ecuación de la circunferencia inscrita:

$$\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$x^2-15x+y^2-5y+\frac{125}{2}=\frac{25}{4} \rightarrow 4x^2+4y^2-60x-20y+225=0$$

3. Rectas tangente y normal a una circunferencia en un punto

- **Sean r y s, respectivamente, las rectas tangente y normal a una circunferencia en un punto P.**

$$r: x+y-7=0 \qquad s: x-y-9=0$$

Calcular la ecuación de la circunferencia sabiendo que su radio es $r=2\sqrt{2}$.

Punto de tangencia:

$$\begin{cases} x+y-7=0 \\ x-y-9=0 \end{cases} \rightarrow x=8,\ y=-1 \rightarrow P=(8,-1)$$

Centro de la circunferencia:

$$\begin{cases} x-y-9=0 \\ \sqrt{(8-x)^2+(1-y)^2}=2\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y-9=0 \\ (8-x)^2+(-1-y)^2=8 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{cases} x-y-9=0 \\ x^2-16x+y^2+2y+65=8 \end{cases}\right\} \begin{matrix}\rightarrow \\ \rightarrow\end{matrix}$$

$$\rightarrow x=9+y$$

$$\rightarrow (9+y)^2-16(9+y)+y^2+2y+65=8 \rightarrow y=1,\ y=-3$$

$$\begin{cases} y=1 \rightarrow x=10 \\ y=-3 \rightarrow x=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} O=(10,1) \\ O=(6,-3) \end{cases}$$

Hay dos circunferencias:

$$(x-10)^2+(y-1)^2=8$$

$$(x-6)^2+(y+3)^2=8$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 247

Para practicar

Lugares geométricos

1 **Halla, en cada caso, la mediatriz del segmento *AB*.**

a) *A*(5, –1) *B*(–3, 1) **b) *A*(3, 6) *B*(–1, 6)**

Comprueba que es una recta perpendicular a *AB*.

$X = (x, y)$ punto genérico de la mediatriz.

a) $dist\,(X, A) = dist\,(X, B)$

$$\sqrt{(5-x)^2+(-1-y)^2} = \sqrt{(-3-x)^2+(1-y)^2} \rightarrow x^2 - 10x + y^2 + 2y + 26 = x^2 + 6x + y^2 - 2y + 10$$

Mediatriz: $-16x + 4y + 16 = 0 \rightarrow \vec{d} = (-4, -16)$

$\overrightarrow{AB} = (-8, 2)$

$(-8, 2) \cdot (-4, -16) = 0$, luego las rectas son perpendiculares.

b) $dist\,(X, A) = dist\,(X, B)$

$$\sqrt{(3-x)^2+(6-y)^2} = \sqrt{(-1-x)^2+(6-y)^2} \rightarrow x^2 - 6x + y^2 - 12y + 45 = x^2 + 2x + y^2 - 12y + 37$$

Mediatriz: $-8x + 8 = 0 \rightarrow \vec{d} = (0, 8)$

$\overrightarrow{AB} = (-4, 0)$

$(0, 8) \cdot (-4, 0) = 0$, luego las rectas son perpendiculares.

2 **Halla el lugar geométrico de los puntos *P*(*x*, *y*) cuya diferencia de cuadrados de distancias a los puntos *A*(0, 0) y *B*(6, 3) es 15. ¿Qué figura obtienes?**

$X = (x, y)$ punto genérico del lugar geométrico.

$|x^2 + y^2 - ((6-x)^2 + (3-y)^2)| = 15$

$|12x + 6y - 45| = 15$

$$\begin{cases} 12x + 6y - 45 = 15 \\ 12x + 6y - 45 = -15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12x + 6y - 60 = 0 \\ 12x + 6y - 30 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas paralelas.

3 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $4x - 3y + 11 = 0$ es 6.**

$P(x, y)$ cumple que $dist\,(P, r) = 6 \rightarrow \dfrac{|4x - 3y + 11|}{\sqrt{16+9}} = 6 \rightarrow |4x - 3y + 11| = 30 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 11 = 30 \\ 4x - 3y + 11 = -30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_1: 4x - 3y - 19 = 0 \\ r_2: 4x - 3y + 41 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas paralelas entre sí y paralelas, a su vez, a la recta dada.

4 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas r y s. Interpreta el resultado.**

$$r: 3x - 5y + 11 = 0 \qquad s: 3x - 5y + 3 = 0$$

$P(x, y)$ tales que $d(P, r) = d(P, s) \rightarrow \dfrac{|3x-5y+11|}{\sqrt{34}} = \dfrac{|3x-5y+3|}{\sqrt{34}} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x-5y+11 = 3x-5y+3 \rightarrow 11 = 3 \text{ ¡¡Imposible!!} \\ 3x-5y+11 = -3x+5y-3 \rightarrow 6x-10y+14=0 \rightarrow r: 3x-5y+7=0 \end{cases}$$

Es una recta paralela a las dos rectas dadas que, a su vez, son paralelas entre sí, como puede verse por sus coeficientes, pues:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = 1 \neq \frac{C}{C'} = \frac{11}{3}$$

5 **Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas r y s:**

$$r: 4x - 3y + 8 = 0 \qquad s: 12x + 5y - 7 = 0$$

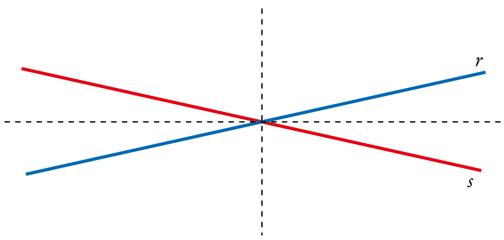
Son todos los puntos $P(x, y)$ tales que $d(P, r) = d(P, s)$:

$$\frac{|4x-3y+8|}{\sqrt{25}} = \frac{|12x+5y-7|}{\sqrt{169}} = \frac{|4x-3y+8|}{5} = \frac{|12x+5y-7|}{13} \rightarrow \begin{cases} 13(4x-3y+8) = 5(12x+5y-7) \\ 13(4x-3y+8) = -5(12x+5y-7) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 52x-39y+104 = 60x+25y-35 \\ 52x-39y+104 = -60x-25y+35 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x+64y-139=0 \\ 112x-14y+69=0 \end{cases}$$

Luego hay dos soluciones, bisectrices de los ángulos cóncavo y convexo que forman las rectas r y s.

Ambas bisectrices se cortan en el punto de corte de las rectas r y s, y son perpendiculares.



6 **Calcula el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $P(1, 0)$ sea la mitad de la distancia a la recta $x = 4$. ¿Qué figura obtienes?**

Buscamos los puntos $P'(x,y)$ tales que:

$$2dist(P, P') = dist(P', x=4) \quad (*)$$

$$dist(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(x-1, y)| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}$$

$$dist(P', x=4) = \frac{|x+0-4|}{\sqrt{1+0}} = |x-4|$$

Volviendo a (*):

$$2\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2} = |x-4|$$

Elevamos al cuadrado:

$$4(x^2 - 2x + 1 + y^2) = (x-4)^2 \rightarrow 3x^2 + 4y^2 = 12$$

La solución es una elipse con eje horizontal.

Circunferencias

7 **Halla, en cada caso, el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto A es d.**

a) $A(0, 5)$ **y** $d = 2$

b) $A(0, 0)$ **y** $d = 1$

c) $A(-2, 0)$ **y** $d = \frac{1}{2}$

d) $A(-1, -5)$ **y** $d = \frac{3}{5}$

$X = (x, y)$ punto genérico del lugar geométrico.

a) $dist\ (X, A) = d$

$\sqrt{x^2 + (y-5)^2} = 2 \to x^2 + (y-5)^2 = 4 \to$ Circunferencia de centro $A = (0, 5)$ y radio $d = 2$.

b) $dist\ (X, A) = d$

$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \to x^2 + y^2 = 1 \to$ Circunferencia de centro $A = (0, 0)$ y radio $d = 1$.

c) $dist\ (X, A) = d$

$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \frac{1}{2} \to (x+2)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \to$ Circunferencia de centro $A = (-2, 0)$ y radio $d = \frac{1}{2}$.

d) $dist\ (X, A) = d$

$\sqrt{(x+1) + (y+5)^2} = \frac{3}{5} \to (x+1)^2 + (y+5)^2 = \frac{9}{25} \to$ Circunferencia de centro $A = (-1, -5)$ y radio $d = \frac{3}{5}$.

8 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuyo cociente de distancias a los puntos $A(0, 6)$ y $B(0, 3)$ es 2, es decir:**

$$\frac{dist(P, A)}{dist(P, B)} = 2$$

$X = (x, y)$ punto genérico del lugar geométrico.

$$\frac{dist\ (P, A)}{dist\ (P, B)} = \frac{\sqrt{x^2 + (y-6)^2}}{\sqrt{x^2 + (y-3)^2}} = 2$$

$x^2 + (y-6)^2 = 2(x^2 + (y-3)^2) \to x^2 + y^2 - 12y + 36 = 2x^2 + 2y^2 - 12y + 18 \to x^2 + y^2 = 18$

Circunferencia de centro $A = (0, 0)$ y radio $d = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

9 **Da, en cada caso, la ecuación de la circunferencia que tiene centro C y radio r.**

a) $C(0, 0)$ **y** $r = 1$

b) $C(2, -3)$ **y** $r = 2$

c) $C(-1, 0)$ **y** $r = \frac{2}{3}$

d) $C(0, 3)$ **y** $r = \frac{5}{4}$

$X = (x, y)$ punto genérico.

a) $dist\ (X, A) = r$

$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \to x^2 + y^2 = 1$

b) $dist\ (X, A) = r$

$\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = 2 \to (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$

c) $dist\ (X, A) = r$

$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \frac{2}{3} \to (x+1)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$

d) $dist\ (X, A) = r$

$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \frac{5}{4} \to x^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{16}$

10 **Averigua cuáles de las siguientes expresiones corresponden a circunferencias y, en ellas, halla su centro y su radio:**

a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 10 = 0$ **b)** $x^2 - y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 + xy - x + 4y - 8 = 0$ **d)** $2x^2 + 2y^2 - 16x + 24 = 0$

a) Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 1 - 10 = 7 > 0$$

Es una circunferencia de centro (4, –1) y radio $\sqrt{7}$.

b) Los coeficientes de x^2 e y^2 no son iguales. No es una circunferencia.

c) Hay un término xy. No es una circunferencia.

d) Los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales y no tienen término en xy. Dividimos entre 2 la igualdad: $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 0 - 12 = 4 > 0$$

Es una circunferencia de centro (4, 0) y radio $\sqrt{4} = 2$.

11 **Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ y tiene centro en $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$.**

$X = (x, y)$ punto genérico.

$dist\ (X, A) = r$

$r = dist\ (P, Q)$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 - x + y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{13}{36} = \frac{1}{4} \rightarrow 36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y + 4 = 0 \rightarrow 9x^2 - 9x + 9y^2 - 6y + 1 = 0$$

12 **Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(0, -5)$ y cuyo diámetro es igual a 10.**

$X = (x, y)$ punto genérico.

$dist\ (X, C) = r$

$r = 5$

$$\sqrt{(x)^2 + (y + 5)^2} = 5 \rightarrow x^2 + (y + 5)^2 = 25$$

13 **Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(1, -2)$ y por $B(2, -1)$ y tiene radio 1.**

El centro de la circunferencia está en la mediatriz de AB y $dist\ (O, A) = 1$.

Mediatriz:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1);\ M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$m: \frac{x - \frac{3}{2}}{-1} = \frac{y + \frac{3}{2}}{1} \rightarrow 2x - 3 = -2y - 3 \rightarrow x = -y$$

$$dist\ (O, A) = 1 \rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2} = 1$$

O es solución de:

$$\begin{cases} x = -y \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1 \end{cases} \to x = 1,\ y = -1;\ x = 2,\ y = -2$$

Hay dos circunferencias que verifican las condiciones:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \ \text{ y } \ (x-2)^2 + (y+2)^2 = 1$$

14 **Uno de los diámetros de una circunferencia tiene por extremos $A(3, -2)$ y $B(7, 0)$. Halla la ecuación de la circunferencia.**

El centro es: $M_{AB} = (5, -1)$

$r = dist\,(O, A) = \sqrt{(5-3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{5}$

Ecuación: $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 5$

15 **Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(2, -4)$, $B(8, -10)$ y $C(4, -8)$.**

* ***Mira el ejercicio resuelto 1.***

r: mediatriz de AB

$\overrightarrow{AB} = (2, -4) - (8, -10) = (6, -6) = 6(1, -1)$

r: tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $M_{AB} = (5, -7)$

$r: \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y+7}{1} \to x - y - 12 = 0$

s: mediatriz de PR

$\overrightarrow{AC} = (2, -4) - (4, -8) = (-2, 4) = 2(-1, 2)$

s: tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, 1)$ y pasa por $M_{AC} = (3, -6)$

$s: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+6}{1} \to x - 2y - 15 = 0$

Centro $\to \begin{cases} x - y - 12 = 0 \\ x - 2y - 15 = 0 \end{cases} \to x = 9,\ y = -3 \to C = (9, -3)$

Radio $= |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2-9)^2 + (-4+3)^2} = 5\sqrt{2}$

La ecuación de la circunferencia es $(x-9)^2 + (y+3)^2 = 50$

16 **Da la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto $(2, -5)$ y es tangente al eje de abscisas.**

$r = dist\,(O, \text{eje } OX) = 5$

La ecuación de la circunferencia es $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 25$.

17 **Obtén la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en el punto $(3, -4)$ y que es tangente al eje de ordenadas.**

$r = dist\,(O, \text{eje } OY) = 3$

La ecuación de la circunferencia es $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$.

18 **Determina la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen de coordenadas y es tangente a la recta $x + y - 3 = 0$.**

$r = dist\,(O, s) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = \dfrac{9}{2}$.

19 **Determina las rectas tangente y normal a la circunferencia $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 13$ en el punto $A(-2, 1)$.**

$A \in$ circunferencia.

La normal es la recta que une A con el centro de la circunferencia C.

$C = (-4, -2)$

$\overrightarrow{AC} = (-2, 1) - (-4, -2) = (2, 3)$

$n: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{3} \to 3x - 2y + 8 = 0$

La tangente es perpendicular a la normal y pasa por A.

$t: \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-1}{2} \to 2x + 3y + 1 = 0$

Posiciones relativas de rectas y circunferencias

20 **Calcula la distancia del centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ a la recta $r: 2x - y + 3 = 0$. ¿Cuál es la posición de r respecto a la circunferencia?**

El centro de la circunferencia es $C(0, 1)$ y su radio es $R = \sqrt{2}$ La distancia de C a r es:

$$dist\,(C, r) = \frac{|-1+3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,89 < \sqrt{2} \approx 1,41$$

Luego la circunferencia y la recta son secantes.

21 **Estudia la posición relativa de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ respecto de cada una de las siguientes rectas:**

$$r_1: x + y - 1 = 0 \qquad r_2: 3x - 4y + 9 = 0$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y cada una de las rectas.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

No hay solución $\to$ Son exteriores.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ 3x - 4y + 9 = 0 \end{cases} \to x = \frac{9}{5},\ y = \frac{18}{5}$$

22 **[El diseño de una estrategia efectiva de resolución requiere una asunción de riesgos (dimensión productiva) por parte del alumnado].**

Estudia la posición relativa de la circunferencia de ecuación $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ respecto a cada una de las siguientes rectas:

$$r_1: x - 2 = 0 \qquad r_2: y = 0 \qquad r_3: y = 2x + 1$$

- $r_1: x - 2 = 0$

  a) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y la recta.

  $$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$$ No hay solución, luego son exteriores.

b) $C = (-1, 2)$

$$\left.\begin{array}{l} dist(C, r_1) = \left|\dfrac{-1-2}{1}\right| = 3 \\ r = 2 \end{array}\right\} \; dist\,(C, r_1) > r$$

Como la distancia del centro de la circunferencia a la recta es mayor que el radio, son exteriores.

- r_2: $y = 0$

a) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y la recta.

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases} \;\to\; x = -1, \;\; y = 0$$

Hay una única solución, luego son tangentes.

b) $C = (-1, 2)$

$$\left.\begin{array}{l} dist(C, r_2) = \left|\dfrac{-2}{1}\right| = 2 \\ r = 2 \end{array}\right\} \; dist\,(C, r_2) = r$$

Como la distancia del centro de la circunferencia a la recta es igual que el radio, son tangentes.

- r_3: $y = 2x + 1$

a) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y la recta.

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ y = 2x+1 \end{cases} \;\to\; x_1 = \frac{1}{5}\sqrt{11} + \frac{1}{5},\;\; y_1 = \frac{2}{5}\sqrt{11} + \frac{7}{5};\;\; x_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{11},\;\; y_2 = \frac{7}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{11}$$

Hay dos soluciones, luego son secantes.

b) $C = (0, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} dist(C, r_3) = \left|\dfrac{-2-2+1}{\sqrt{5}}\right| = \dfrac{3}{5}\sqrt{5} = 1,3416 \\ r = 2 \end{array}\right\} \; dist\,(C, r_3) < r$$

Como la distancia del centro de la circunferencia a la recta es menor que el radio, son secantes.

23 Utiliza, en cada caso, los dos métodos siguientes:

a) Resolviendo los sistemas de ecuaciones formados por la circunferencia y cada recta.

b) Comparando la medida del radio con la distancia de cada recta al centro de la circunferencia.

Solución indicada en el ejercicio 22.

24 Estudia la posición relativa de la recta $y = x + b$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en función del parámetro b.

El centro de la circunferencia es $C(0, 0)$ y su radio es $r = 1$.

Hallamos la distancia de C a la recta $s: x - y + b = 0$: $d = dist\,(C, s) = \dfrac{|b|}{\sqrt{2}}$

Para que la recta sea tangente a la circunferencia, ha de ser $d = r$, es decir:

$$\frac{|b|}{\sqrt{2}} = 1 \;\to\; |b| = \sqrt{2} \begin{cases} b = \sqrt{2} \\ b = -\sqrt{2} \end{cases}$$

25 **Determina la posición relativa de la recta $y = 2x - 3$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = a$ en función del valor del parámetro a.**

$C = (0, 0)$ es el centro de la circunferencia y $R = \sqrt{a}$, su radio.

Llamamos r: $y = 2x - 3$

$$\left.\begin{array}{l} dist(C, r) = \left|\dfrac{-3}{\sqrt{5}}\right| = \dfrac{3}{5}\sqrt{5} \\ R = \sqrt{a} \end{array}\right\} \dfrac{3}{5}\sqrt{5} = \sqrt{a} \rightarrow a = \dfrac{9}{5}$$

- Si $a < \dfrac{9}{5}$, la recta y la circunferencia son exteriores.
- Si $a = \dfrac{9}{5}$, la recta y la circunferencia son tangentes.
- Si $a > \dfrac{9}{5}$, la recta y la circunferencia son secantes.

Página 248

Potencia de un punto a una circunferencia

26 **Determina la potencia de los puntos $P(5, 2)$, $Q(2, 1)$ y $R(-1, 0)$ a la circunferencia:**

C: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$

Utilízalo para estudiar la posición relativa de P, Q y R respecto de C.

C: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \rightarrow O(3, 2)$, $r = 2$

$P(5, 2) \rightarrow \mathcal{P} = (5 - 3)^2 + (2 - 2)^2 - 4 = 0 = 0$; por tanto, P pertenece a C.

$Q(2, 1) \rightarrow \mathcal{P} = (2 - 3)^2 + (1 - 2)^2 - 4 = -2 < 0$; por tanto, Q es un punto interior a C.

$R(-1, 0) \rightarrow \mathcal{P} = (-1 - 3)^2 + (0 - 2)^2 - 4 = 16 > 0$; por tanto, R es un punto exterior a C.

27 **Halla y representa el eje radical de los siguientes pares de circunferencias:**

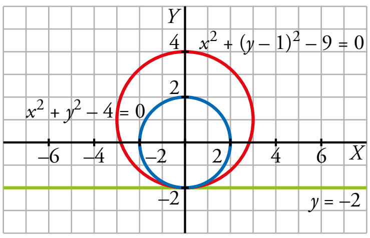
a) $x^2 + y^2 = 4$ **y** $x^2 + (y - 1)^2 = 9$

b) $(x - 3)^2 + y^2 = 5$ **y** $(x - 7)^2 + y^2 = 9$

c) $x^2 + (y - 3)^2 = 2$ **y** $(x - 5)^2 + y^2 = 1$

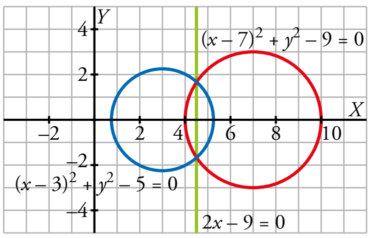
a) $x^2 + y^2 - 4 = x^2 + (y - 1)^2 - 9$

$x^2 + y^2 - 4 = x^2 + y^2 - 2y - 8 \rightarrow 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -2$



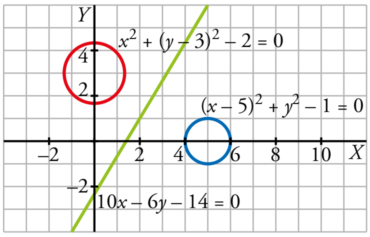
b) $(x - 3)^2 + y^2 - 5 = (x - 7)^2 + y^2 - 9$

$x^2 - 6x + y^2 + 4 = x^2 - 14x + y^2 + 40 \rightarrow 8y - 36 = 0 \rightarrow 2x - 9 = 0$



c) $x^2 + (y-3)^2 - 2 = (x-5)^2 + y^2 - 1$

$x^2 + y^2 - 6y + 7 = x^2 - 10x + y^2 + 24 \rightarrow 10x - 6y - 14 = 0$



28 **Calcula el centro radical de estas tres circunferencias:**

C_1: $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$

C_2: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

C_3: $x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$

* ***Mira el ejercicio resuelto 7.***

Hallamos el eje radical de C_1 y C_2:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = x^2 + y^2 - 1 \rightarrow -4x + 6y + 1 = 0$$

Buscamos el eje radical entre C_3 y C_2:

$$x^2 + y^2 + 6x + 5 = x^2 + y^2 - 1 \rightarrow -1 = 6x + 5 \rightarrow x = -1$$

Buscamos ahora el punto de corte entre los dos ejes radicales:

$$\begin{cases} -4x + 6y + 1 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \rightarrow x = -1 \rightarrow y = \frac{-5}{6} \rightarrow R\left(-1, -\frac{5}{6}\right)$$

Elipses

29 **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$ es 10.**

Es una elipse de focos $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$, y constante $k = 10$, es decir, $2a = 10$ y $c = 4$.

Así: $a = 5$; $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$

La ecuación será: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

30 **De una elipse conocemos sus focos $F(0, 1)$ y $F'(0, -1)$ y su constante $k = 4$. Determina su ecuación.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la elipse, entonces:

$dist\,(P, F) + dist\,(P, F') = 2a$, es decir:

$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4 \rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 16 + x^2 + (y+1)^2 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 16 + x^2 + y^2 + 2y + 1 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \rightarrow -4y - 16 = -8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \rightarrow$

$\rightarrow (4y + 16)^2 = 64[x^2 + (y+1)^2] \rightarrow 16y^2 + 256 + 128y = 64x^2 + 64y^2 + 64 + 128y \rightarrow$

$\rightarrow 192 = 64x^2 + 48y^2 \rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$

- De otra forma:

  El centro de la elipse es el punto medio del segmento que une F con F', es decir: (0, 0).

  Por otra parte:

  $2c = dist\,(F, F') = |\overrightarrow{F'F}| = |(0, 2)| = 2 \to c = 1$

  $2a = 4 \to a = 2 \to a^2 = 4$

  $b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$

Por tanto, la ecuación es: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$

31 **Halla la ecuación de la elipse de focos (–2, 0) y (2, 0) sabiendo que la longitud de su eje mayor es 10.**

$c = 2;\ 2a = 10 \to a = 5;\ b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$

Ecuación: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$

32 **Escribe la ecuación de la elipse cuyos focos son $F(-3, 0)$ y $F'(3, 0)$ y cuya excentricidad es igual a 0,5.**

$c = 3;\ exc = \frac{c}{a} = 0,5 \to a = \frac{c}{0,5} = \frac{3}{0,5} = 6$

$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 9 = 27$

Ecuación: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

33 **Da la ecuación de la elipse que pasa por (3, 1) y tiene por focos (4, 0) y (–4, 0).**

La ecuación es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- Como pasa por (3, 1) $\to \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$
- Como $a^2 = b^2 + c^2$ y sabemos que $c = 4 \to a^2 = b^2 + 16$

Teniendo en cuenta las dos condiciones anteriores:

$$\frac{9}{b^2 + 16} + \frac{1}{b^2} = 1 \to 9b^2 + b^2 + 16 = b^4 + 16b^2 \to b^4 + 6b^2 - 16 = 0$$

$$b^2 = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} \begin{cases} b^2 = 2 \\ b^2 = -8 \text{ (No vale)} \end{cases}$$

Así: $a^2 = 2 + 16 = 18$

Por tanto, la ecuación de la elipse será: $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$

34 **De una elipse, centrada en (0, 0), se sabe que su eje mayor, que es igual a 10, está sobre el eje X. Además, pasa por el punto (3, 3). Obtén su ecuación.**

$A = (3, 3)$

Eje mayor = 10 $\to a = 5$

Eje mayor = $OX \to$ El centro es $O = (0, 0)$

La ecuación de la elipse será: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$(3, 3) \in$ elipse $\to \dfrac{3^2}{25} + \dfrac{3^2}{b^2} = 1 \to \dfrac{9}{25} + \dfrac{9}{b^2} = 1 \to b = -\dfrac{15}{4},\ b = \dfrac{15}{4}$

Como b es positivo $\to b = \dfrac{15}{4}$

La ecuación queda:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{225}{16}} = 1 \to \frac{x^2}{25} + \frac{16y^2}{225} = 1$$

35 **Determina, en cada caso, la ecuación de la elipse, centrada en (0, 0), que tiene estas características:**

a) Su excentricidad es 1/2 y su eje mayor está sobre el eje Y y es igual a 2.

b) Sus vértices son (–2, 0), (2, 0), (0, –4) y (0, 4).

a) Eje mayor = 2 $\to b = 1$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{1} = 1;\ e = \frac{c}{b} = \frac{1}{2} \to \frac{c}{1} = \frac{1}{2} \to c = \frac{1}{2}$$

$$a^2 = b^2 - c^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

La ecuación queda:

$$\frac{x^2}{\frac{3}{4}} + \frac{y^2}{1} = 1 \to \frac{4x^2}{3} + y^2 = 1$$

b) Eje mayor = OY

Eje mayor = 8 $\to b = 4$

$a = 2$

La ecuación queda: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

36 **Halla los vértices, los focos y la excentricidad de las siguientes elipses dadas por sus ecuaciones. Represéntalas:**

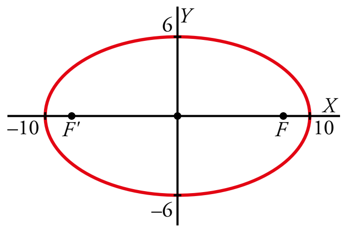
a) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ **b)** $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{100} = 1$ **c)** $9x^2 + 25y^2 = 25$ **d)** $9x^2 + 4y^2 = 3$

a) Vértices: (10, 0); (–10, 0); (0, 6) y (0, –6)

Focos: $c = \sqrt{100 - 36} = 8$

$F(8, 0)$ y $F'(-8, 0)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{8}{10} = 0,8$

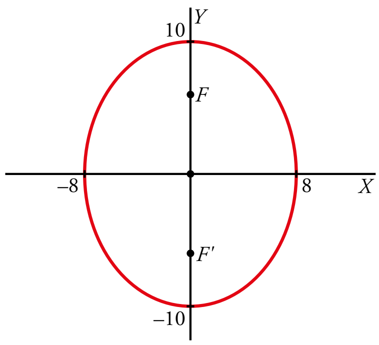


b) Vértices: (8, 0); (–8, 0); (0, 10) y (0, –10)

Focos: $c = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$

$F(0, 6)$ y $F'(0, -6)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{6}{10} = 0,6$



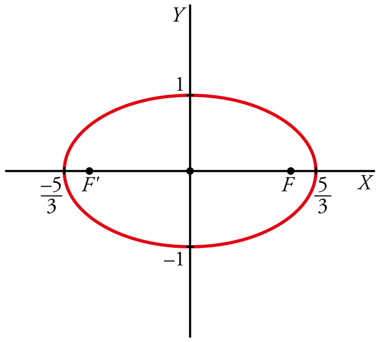
c) $9x^2 + 25y^2 = 25 \rightarrow \dfrac{x^2}{25/9} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

Vértices: $\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$; $\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$; $(0, 1)$ y $(0, -1)$

Focos: $c = \sqrt{\dfrac{25}{9} - 1} = \sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{4}{3}$

$F = \left(\dfrac{4}{3}, 0\right)$ y $F'\left(-\dfrac{4}{3}, 0\right)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{4/3}{5/3} = \dfrac{4}{5} = 0,8$



d) $9x^2 + 4y^2 = 3 \rightarrow \dfrac{x^2}{3/9} + \dfrac{y^2}{3/4} = 1$

La elipse tiene eje mayor = OY y centro $O = (0, 0)$.

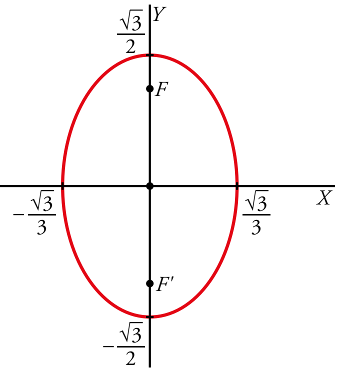
$a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$c^2 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{9} = \dfrac{5}{12} \rightarrow c = \sqrt{\dfrac{5}{12}}$

Vértices: $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$; $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$; $\left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(0, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Focos: $F = \left(0, \sqrt{\dfrac{5}{12}}\right)$ y $F'\left(0, -\sqrt{\dfrac{5}{12}}\right)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{\sqrt{\dfrac{5}{12}}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{5}$



37 **Halla los vértices, los focos y la excentricidad de estas elipses no centradas en el origen de coordenadas. Represéntalas:**

a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1$ **b)** $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$

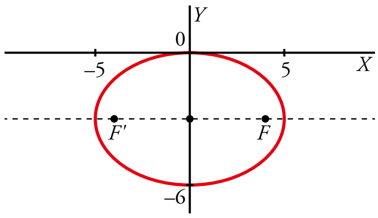
a) Centro: $O = (0, -3)$

$c = \sqrt{25 - 9} = 4$

$e = \dfrac{4}{5}$

Vértices: $(5, -3)$; $(-5, -3)$; $(0, 0)$, $(0, -6)$

Focos: $F = (4, -3)$, $F' = (-4, -3)$



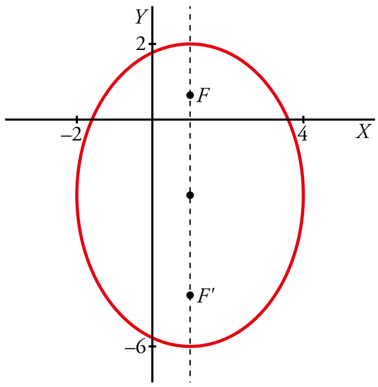
b) Centro: $O = (1, -2)$

$c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

$e = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

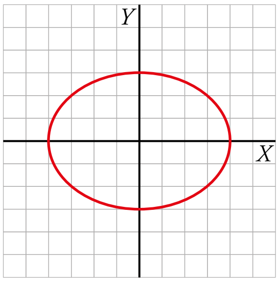
Vértices: $(-2, -2)$; $(4, -2)$; $(1, 2)$; $(1, -6)$

Focos: $F = (1, -2 + \sqrt{7})$, $F' = (1, -2 - \sqrt{7})$

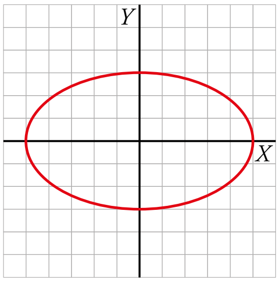


38 Indica la ecuación de estas elipses y calcula su excentricidad:

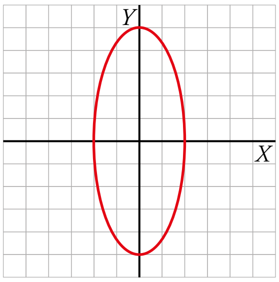
a)



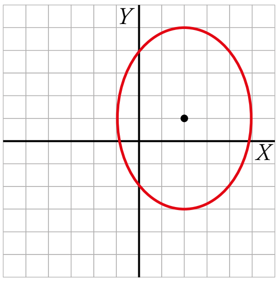
b)



c)



d)



Tomaremos medidas sobre el dibujo en cada caso.

a) $a = 4;\ b = 3 \ \to\ 4^2 = 3^2 + c^2 \ \to\ c = \sqrt{7}$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1;\ exc = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} = 0{,}66$$

b) $a = 5;\ b = 3 \ \to\ 5^2 = 3^2 + c^2 \ \to\ c = 4$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1;\ exc = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

c) $a = 2;\ b = 5$ como $a < b \ \to\ 5^2 = 2^2 + c^2 \ \to\ c = \sqrt{21}$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1;\ exc = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5} = 0{,}92$$

d) $a = 3;\ b = 4$ como $a < b \ \to\ 4^2 = 3^2 + c^2 \ \to\ c = \sqrt{7}$

Su vértice es $V(2, 1)$.

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1;\ exc = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} = 0{,}66$$

Hipérbolas

39 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a $F'(-4, 0)$ y $F(4, 0)$ es 6.

Es una hipérbola de focos F y F' y constante $2a = 6$.

Por tanto, $a = 3,\ c = 4,\ b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{7} = 1$

40 Halla la ecuación de la hipérbola de focos (–4, 0) y (4, 0) y distancia entre vértices, 4.

$c = 4;\ 2a = 4 \ \to\ a = 2;\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$

41 **Obtén la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas son $y = \pm \frac{1}{5}x$ y uno de sus vértices es (2, 0).**

$a = 2;\ \frac{b}{a} = \frac{1}{5} \to \frac{b}{2} = \frac{1}{5} \to b = \frac{2}{5}$

Ecuación: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4/25} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{4} - \frac{25y^2}{4} = 1$

42 **De una hipérbola sabemos que pasa por el punto $(8, 5\sqrt{3})$ y sus focos son (–3, 0) y (3, 0). Calcula su ecuación.**

- Hallamos la constante de la hipérbola: $|dist\,(P, F) - dist\,(P, F')| = 2a$

  $\left| |\overrightarrow{FP}| - |\overrightarrow{F'P}| \right| = 2a \to \left| |(11, 5\sqrt{3})| - |(5, 5\sqrt{3})| \right| = 2a$

  $\sqrt{121+75} - \sqrt{25+75} = 2a \to 14 - 10 = 2a \to 4 = 2a \to a = 2$

- Como $a = 2$ y $c = 3$, entonces $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$
- La ecuación es: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

43 **Halla la ecuación de la hipérbola de focos (–3, 0) y (3, 0) y asíntotas $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}x$.**

$c = 3$

$\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \to b = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$

$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}a\right)^2 = \frac{9}{5}a^2 \to 9 = \frac{9}{5}a^2 \to a = \sqrt{5} \to b = \frac{2\sqrt{5}}{5}\sqrt{5} = 2$

La ecuación pedida es: $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

44 **Halla los vértices, los focos, las excentricidades y las asíntotas de las hipérbolas dadas por estas ecuaciones. Dibújalas:**

a) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$

b) $\frac{9x^2}{16} - y^2 = 1$

c) $x^2 - 4y^2 = 1$

d) $x^2 - 4y^2 = 4$

e) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{36} = 1$

f) $y^2 - 16x^2 = 16$

g) $9x^2 - 4y^2 = 36$

h) $4x^2 - y^2 + 16 = 0$

i) $\frac{x^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{64} = 1$

j) $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$

a) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$

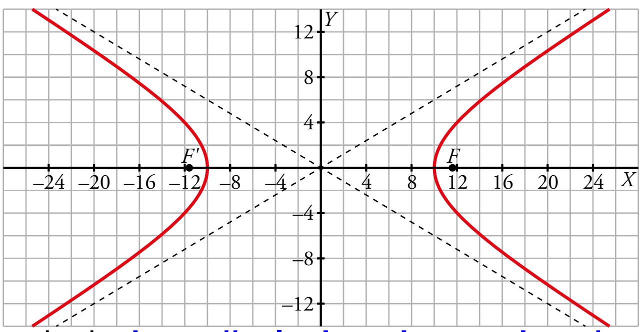
$a = 10,\ b = 6,\ c = \sqrt{100+36} = \sqrt{136}$

Vértices: (10, 0); (–10, 0)

Focos: $F = (\sqrt{136}, 0),\ F' = (-\sqrt{136}, 0)$

$e = \frac{\sqrt{136}}{10}$

Asíntotas: $y = \pm \frac{3}{5}x$



b) $\dfrac{9x^2}{16} - y^2 = 1$

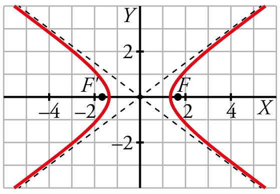
$a = \dfrac{4}{3}, \; b = 1, \; c = \sqrt{\dfrac{16}{9} + 1} = \dfrac{5}{3}$

Vértices: $\left(\dfrac{4}{3}, 0\right); \left(-\dfrac{4}{3}, 0\right)$

Focos: $F = \left(\dfrac{5}{3}, 0\right), \; F' = \left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$

$$e = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{5}{4}$$

Asíntotas: $y = \pm\dfrac{3}{4}x$



c) $x^2 - 4y^2 = 1$

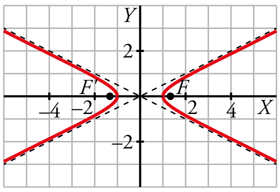
$a = 1, \; b = \dfrac{1}{2}, \; c = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

Vértices: (1, 0); (–1, 0)

Focos: $F = \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{5}, 0\right); \; F' = \left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{5}, 0\right)$

$e = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

Asíntotas: $y = \pm\dfrac{1}{2}x$



d) $x^2 - 4y^2 = 4 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$

$a = 2, \; b = 1, \; c = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

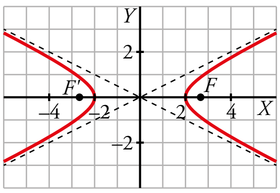
Vértices: (2, 0); (–2, 0)

Focos: $F = (\sqrt{5}, 0)$

$F' = (-\sqrt{5}, 0)$

$e = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

Asíntotas: $y = \pm\dfrac{1}{2}x$



e) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{36} = 1$

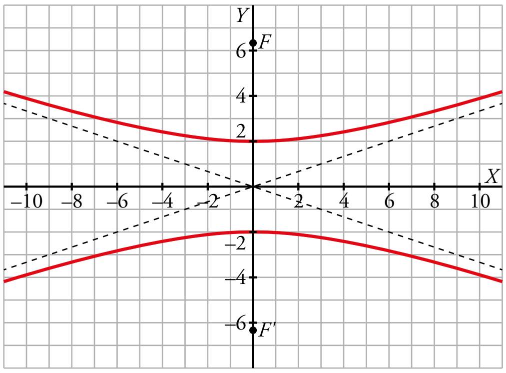
$a = 2,\ \ b = 6,\ \ c = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$

Vértices: (0, 2); (0, –2)

Focos: $F = (0, \sqrt{40});\ \ F' = (0, -\sqrt{40})$

$e = \dfrac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$

Asíntotas: $y = \pm\ \dfrac{1}{3}\, x$



f) $y^2 - 16x^2 = 16\ \longrightarrow\ \dfrac{y^2}{16} - x^2 = 1$

$a = 4,\ \ b = 1,\ \ c = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

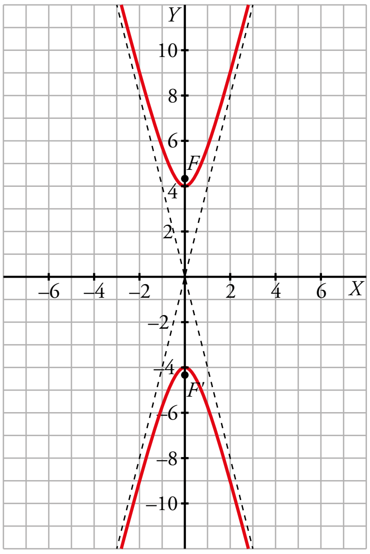
Vértices: (0, 4); (0, –4)

Focos: $F = (0, \sqrt{17})$

$F' = (0, -\sqrt{17})$

$e = \dfrac{\sqrt{17}}{4}$

Asíntotas: $y = \pm\ 4x$



g) $9x^2 - 4y^2 = 36\ \longrightarrow\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

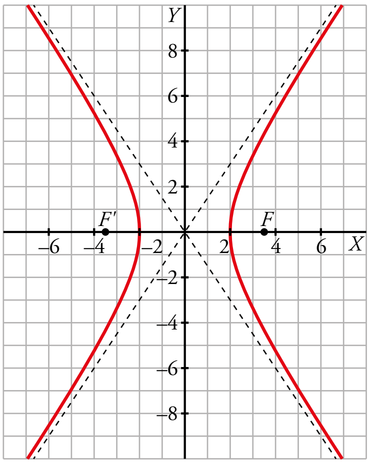
$a = 2,\ \ b = 3,\ \ c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Vértices: (2, 0); (–2, 0)

Focos: $F = (\sqrt{13}, 0);\ \ F' = (-\sqrt{13}, 0)$

$e = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

Asíntotas: $y = \pm\ \dfrac{3}{2}\, x$



h) $4x^2 - y^2 + 16 = 0 \rightarrow y^2 - 4x^2 = 16 \rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$

$a = 4,\ \ b = 2,\ \ c = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

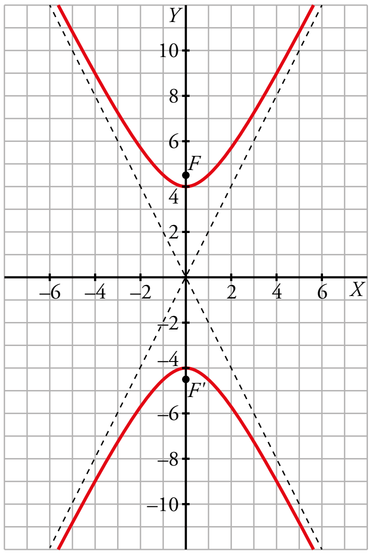
Vértices: $(0, 4)$; $(0, -4)$

Focos: $F = (0, \sqrt{20})$

$F' = (0, -\sqrt{20})$

$e = \frac{\sqrt{20}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Asíntotas: $y = \pm\, 2x$



i) Centro: $O = (0, 1)$

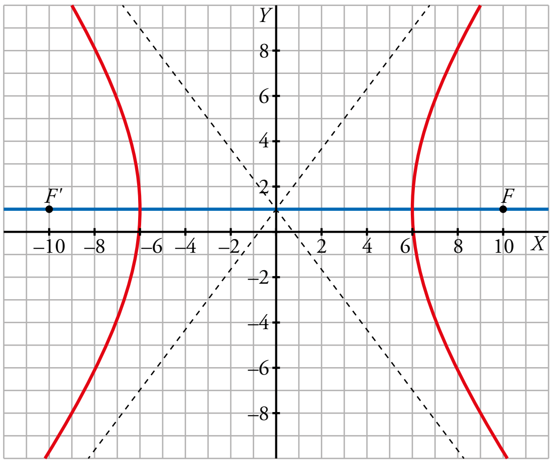
$a = 6,\ \ b = 8,\ \ c = \sqrt{36+64} = 10$

Vértices: $(6, 1)$; $(-6, 1)$

Focos: $F = (10, 1)$; $F' = (-10, 1)$

$e = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

Asíntotas: $y - 1 = \pm\, \frac{8}{6}x$



j) Centro: $O = (1, 1)$

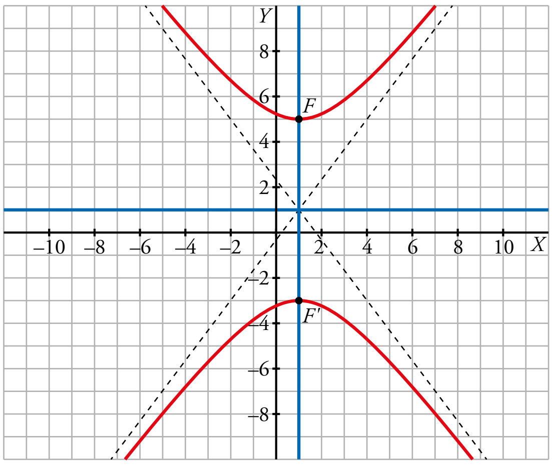
$a = 4,\ \ b = 3,\ \ c = \sqrt{16+9} = 5$

Vértices: $(1, 3)$; $(1, -1)$

Focos: $F = (1, 5)$; $F' = (1, -3)$

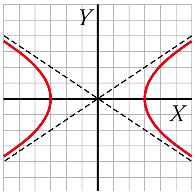
$e = \frac{5}{4}$

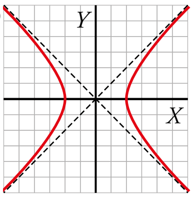
Asíntotas: $y - 1 = \pm\, \frac{4}{3}(x - 1)$



Página 249

45 **Indica la ecuación de cada una de las siguientes hipérbolas y calcula su excentricidad.**

a) 

b) 

a) $a = 3;\ b = 2 \ \to\ c^2 = 3^2 + 2^2 \ \to\ c = \sqrt{13}$

$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1;\ exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{3} = 1{,}2$

b) $a = 2;\ b = 2 \ \to\ c^2 = 2^2 + 2^2 \ \to\ c = 2\sqrt{2}$

$\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1 \ \to\ x^2 - y^2 = 4;\ exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = 1{,}41$

46 **Halla las coordenadas de los focos y la distancia focal de estas hipérbolas equiláteras:**

a) $y = \dfrac{1}{4x}$ **b)** $y = -\dfrac{3}{x}$ **c)** $y = \dfrac{12}{x}$

a) $k = \dfrac{1}{4};\ c = 2\sqrt{k} = 1 \ \to$ distancia focal $= 2c = 2$

Sus focos serán:

$F_1 = \left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}, \sqrt{\dfrac{1}{2}}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$F_2 = \left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $k = -3$; al ser $k < 0$ está en el segundo y cuarto cuadrante $c = 2\sqrt{-k} = 2\sqrt{3} \ \to$

$\to$ distancia focal $= 2c = 4\sqrt{3}$

Sus focos serán:

$F_1 = \left(-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right)$

$F_2 = \left(\sqrt{6}, -\sqrt{6}\right)$

c) $k = 12;\ c = 2\sqrt{k} = 4\sqrt{3} \ \to$ distancia focal $= 2c = 8\sqrt{3}$

Sus focos serán:

$F_1 = \left(2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}\right)$

$F_2 = \left(-2\sqrt{6}, -2\sqrt{6}\right)$

Parábolas

47 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto (3, 0) y de la recta $y = -3$.**

Es una parábola cuyo foco es $F(3, 0)$ y cuya directriz es $d: y + 3 = 0$. Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, entonces:

$$dist\,(P, F) = dist\,(P, d) \ \to\ \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = |y + 3| \ \to$$

$$\to\ x^2 - 6x + 9 + y^2 = y^2 + 6y + 9 \ \to\ y = \frac{x^2}{6} - x$$

O bien: $(x - 3)^2 = 6\left(y + \dfrac{3}{2}\right)$

48 **Halla, en cada caso, la ecuación de la parábola de foco F y directriz d.**

a) $F(5, 0)$; d: $x = -5$ **b)** $F(-3, 0)$; d: $x = 3$

c) $F(0; 2{,}5)$; d: $y = -2{,}5$ **d)** $F(0, -4)$; d: $y = 4$

a) $\dfrac{p}{2} = 5 \;\to\; p = 10 \;\to\; 2p = 20$. Ecuación: $y^2 = 20x$

b) $dist\,(F, d) = 6 = p$

$F \in OX$

$y^2 = -12x$

c) $dist\,(F, d) = 5 = p$

$F \in OY$

$y^2 = 10x$

d) $dist\,(F, d) = 8 = p$

$F \in OY$

$y^2 = -16x$

49 **Determina la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen de coordenadas y cuya directriz es $y = 3$.**

El foco será $F(0, -3)$. Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola y d: $y - 3 = 0$ es la directriz, entonces:

$dist\,(P, F) = dist\,(P, d) \;\to\; \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = |\,y - 3\,| \;\to\; x^2 + y^2 + 6y + 9 = y^2 - 6y + 9 \;\to$

$\to\; x^2 = -12y$

50 **Calcula la ecuación de la parábola de foco F y directriz d:**

a) $F(3, 5)$; d: $x = 1$ **b)** $F(-2, 1)$; d: $x = -6$

c) $F(1, -2)$; d: $y = -4$ **d)** $F(0, 3)$; d: $y = -5$

* ***Mira el ejercicio resuelto 8.***

a) $d\colon x = 1 \;\to\; -\dfrac{p}{2} = 1 \;\to\; p = -2$

El vértice no es (0,0). Busquemos $V(a, b)$:

$(a + 1, b) = (3, 5) \;\to\; b = 5;\; a = 2$

Por tanto:

$(y - 5)^2 = 4(x - 2)$

b) $d\colon x = -6 \;\to\; -\dfrac{p}{2} + V_x = -6 \;\to\; p = 4$

$V(-4, 1)$

Por tanto:

$(y - 1)^2 = 8(x + 4)$

c) $V(1, -3)$; $p = 2$

$(x - 1)^2 = 4(y + 3)$

d) $V(0, -1)$; $p = 8$

$x^2 = 16(y + 1)$

51 **Halla la ecuación de la parábola con foco $F(1, 1)$ y vértice $V(1, 1/2)$.**

Tenemos el vértice y el foco sobre $x = 1 \rightarrow$ Es una parábola vertical.

Además su vértice no es (0,0).

$$d: x = 1 \rightarrow -\frac{p}{2} = 1 \rightarrow p = -2$$

$$\left(0, \frac{p}{2}\right) + \left(1, \frac{1}{2}\right) = (1, 1) \rightarrow p = 1 \rightarrow (x-1)^2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

52 **Halla los vértices, los focos y las directrices de las siguientes parábolas. Represéntalas:**

a) $y^2 = 6x$ **b)** $y^2 = -6x$ **c)** $y = x^2$ **d)** $y = \frac{x^2}{4}$

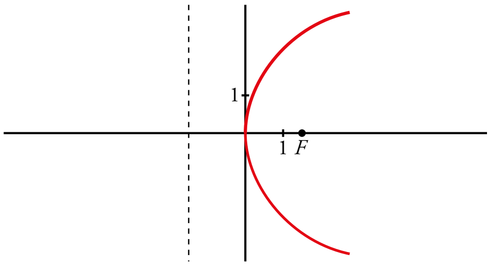
e) $y^2 = 4(x-1)$ **f)** $(y-2)^2 = 8x$ **g)** $(x-1)^2 = -8(y+1)$ **h)** $(y+2)^2 = -4(x-1)$

a) $\left.\begin{array}{l} y^2 = 2px \\ y^2 = 6x \end{array}\right\} 2p = 6 \rightarrow p = 3 \rightarrow \frac{p}{2} = \frac{3}{2}$

Vértice: (0, 0)

Foco: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

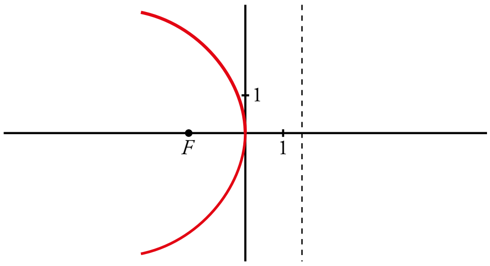
Directriz: $x = -\frac{3}{2}$



b) Vértice: (0, 0)

Foco: $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

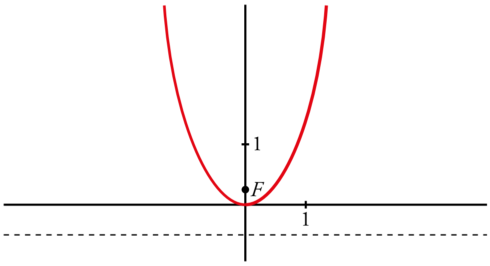
Directriz: $x = \frac{3}{2}$



c) Vértice: (0, 0)

Foco: $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

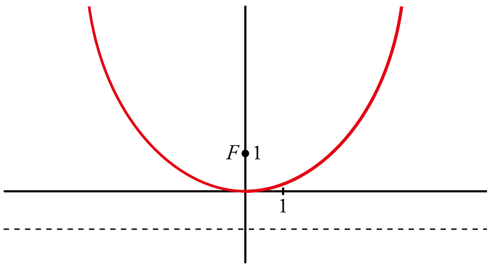
Directriz: $y = -\frac{1}{4}$



d) Vértice: (0, 0)

Foco: (0, 1)

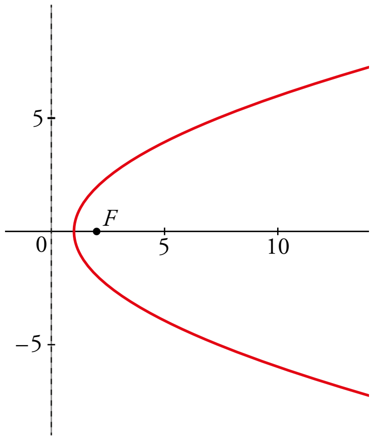
Directriz: $y = -1$



e) $V(1, 0);\ p = 2$

$F\left(\dfrac{p}{2}+1, 0\right) \to F(2, 0)$

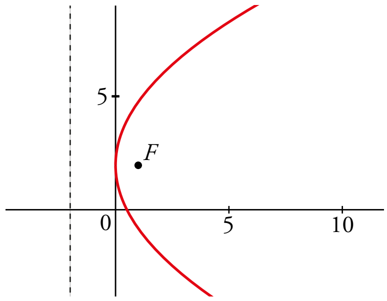
$d: x = -\dfrac{p}{2} + V_x = -1 + 1 = 0 \to d: x = 0$



f) $V(0, 2);\ p = 4$

$F\left(\dfrac{p}{2}, 2\right) \to F(2, 2)$

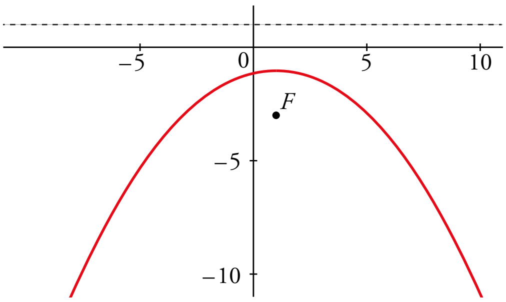
$d: x = -\dfrac{p}{2} \to d: x = -2$



g) $V(1, -1);\ p = -4$

$F\left(1, \dfrac{p}{2} - 1\right) \to F(1, -3)$

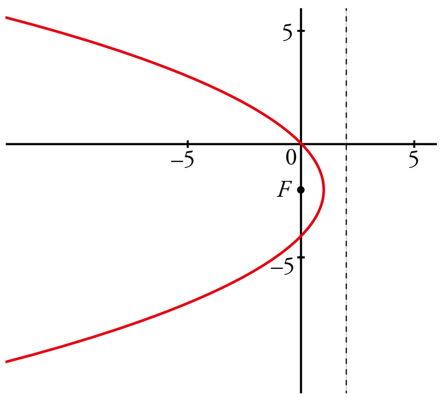
$d: y = -\dfrac{p}{2} + V_y \to d: y = 1$



h) $V(1, -2);\ p = -2$

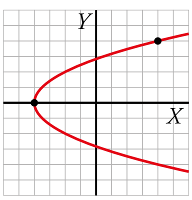
$F\left(1 + \dfrac{p}{2}, -2\right) \to F(0, -2)$

$d: x = -\dfrac{p}{2} + V_x \to d: x = 2$

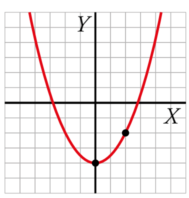


53 **Calcula las ecuaciones de estas parábolas:**

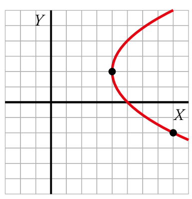
a)



b)



c)



* ***Mira el ejercicio resuelto 6.***

a) $V(-4, 0)$

A partir de su vértice y de la orientación mostrada en el dibujo, sabemos que la parábola será de la forma: $y^2 = 2p(x + 4)$.

Además, el punto (4,4) pertenece a la parábola, por lo que tendrá que cumplir su ecuación:

$4^2 = 2p(4+4) \rightarrow p = 1$

Ya podemos escribir la ecuación: $y^2 = 2(x+4)$.

b) $V(0, -4) \rightarrow x^2 = 2p(y+4)$

$P(2, -2)$ pertenece a la parábola $\rightarrow 4 = 2p \cdot 2 \rightarrow p = 1$

$x^2 = 2(y+4)$

c) $V(4, 2) \rightarrow (y-2)^2 = 2p(x-4)$

$P(8, -2)$ pertenece a la parábola $\rightarrow 16 = 2p \cdot 4 \rightarrow p = 2$

$(y-2)^2 = 4(x-4)$

54 Halla la ecuación de la parábola de vértice en el punto (2, 3) y que pasa por el punto (4, 5).

$X = (x, y)$ punto genérico.

$(y-3)^2 - 2p(x-2) = 0$

$(4, 5) \in$ Parábola $\rightarrow (5-3)^2 - 2p(4-2) = 0 \rightarrow 4 - 4p = 0 \rightarrow p = 1$

Parábola: $(y-3)^2 - 2(x-2) = 0$

Para resolver

55 Identifica las siguientes cónicas, calcula sus elementos característicos y dibújalas:

a) $\mathbf{4x^2 + 9y^2 = 36}$

b) $\mathbf{16x^2 - 9y^2 = 144}$

c) $\mathbf{9x^2 + 9y^2 = 25}$

d) $\mathbf{x^2 - 4y^2 = 16}$

e) $\mathbf{y^2 = 14x}$

f) $\mathbf{25x^2 + 144y^2 = 900}$

g) $\mathbf{\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-4)^2}{25} = 1}$

h) $\mathbf{\dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1}$

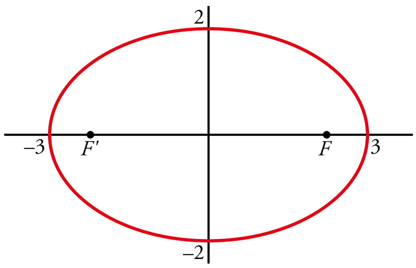
i) $\mathbf{(x+2)^2 = 4(y+5)}$

j) $\mathbf{x^2 + y^2 - 2x + 4y = -4}$

a) $4x^2 + 9y^2 = 36 \rightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

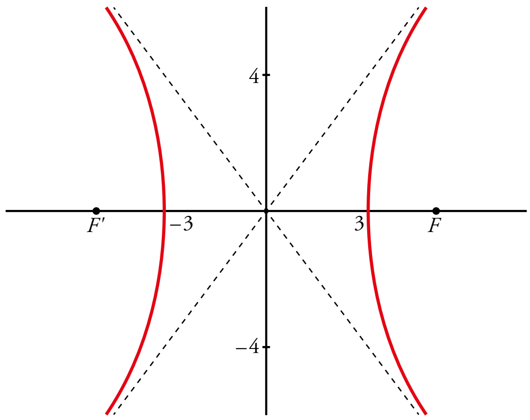
Es una elipse $\rightarrow a = 3,\ b = 2,\ c = \sqrt{5}$

$exc = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \approx 0,75$



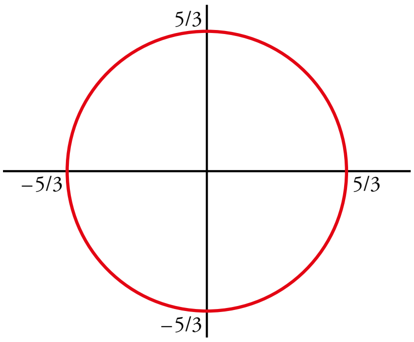
b) $16x^2 - 9y^2 = 144 \rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Es una hipérbola $\rightarrow \begin{cases} a = 3,\ b = 4,\ c = 5;\ exc = \dfrac{5}{3} \approx 1,67 \\ \text{Asíntotas: } y = \dfrac{4}{3}x;\ y = -\dfrac{4}{3}x \end{cases}$



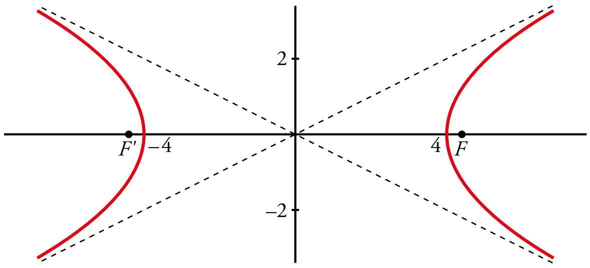
c) $9x^2 + 9y^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 = \frac{25}{9}$

Es una circunferencia de centro (0, 0) y radio $\frac{5}{3}$.



d) $x^2 - 4y^2 = 16 \rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

Es una hipérbola $\rightarrow \begin{cases} a = 4,\ b = 2,\ c = 2\sqrt{5};\ exc = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12 \\ \text{Asíntotas: } y = \frac{1}{2}x;\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$

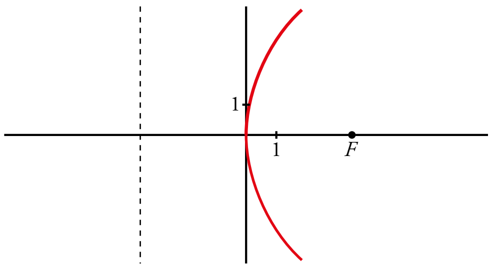


e) Es una parábola.

Vértice: (0, 0)

Foco: $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$

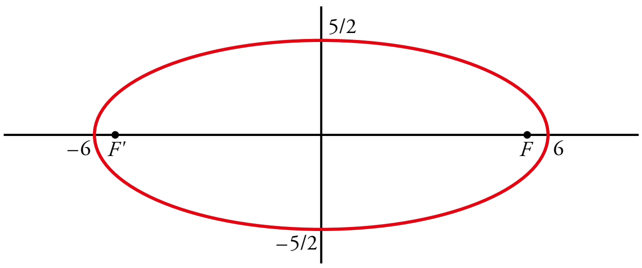
Directriz: $x = -\frac{7}{2}$



f) $25x^2 + 144y^2 = 900 \rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25/4} = 1$

Es una elipse $\rightarrow a = 6,\ b = \frac{5}{2},\ c = \frac{\sqrt{119}}{2}$

$exc = \frac{\sqrt{119}}{12} \approx 0,91$



56 **Calcula el vértice, el foco y la directriz de cada una de las siguientes parábolas:**

a) $y^2 - x + 2 = 0$

b) $y^2 - 2y - 4x + 1 = 0$

c) $x^2 - 4x - 6y - 2 = 0$

d) $y^2 - 4y - 6x - 5 = 0$

* ***Mira el ejercicio resuelto 3d).***

a) $y^2 = x - 2 \;\rightarrow\; p = \frac{1}{2};\; V(2, 0)$

Buscamos el foco:

$F = (2, 0) + \left(\frac{p}{2}, 0\right) = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$

Buscamos su directriz:

$d\colon x = \frac{-p}{2} + V_x = \frac{-1}{4} + 2 = \frac{7}{4}$

b) $(y - 1)^2 = 4x \;\rightarrow\; p = 2;\; V(0, 1)$

Buscamos el foco:

$F = (2, 0) + \left(\frac{p}{2}, 0\right) = (1, 1)$

Buscamos su directriz:

$d\colon x = \frac{-p}{2} + V_x = -1 + 0 = -1$

c) Vamos a completar cuadrados para poder escribir la ecuación de la parábola como nos interesa:

$x^2 - 4x + 4 - 6y - 2 = 4 \;\rightarrow\; (x - 2)^2 = 6y + 6 = 6(y + 1) \;\rightarrow\; p = 3;\; V(2, -1)$

Buscamos el foco: $F = (2, 1) + \left(0, \frac{p}{2}\right) = \left(2; \frac{1}{2}\right)$

Buscamos su directriz $d\colon y = \frac{-p}{2} + V_y = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$

d) Vamos a completar cuadrados para poder escribir la ecuación de la parábola como nos interesa:

$y^2 - 4y + 4 - 6x - 5 = 4 \;\rightarrow\; (y - 2)^2 = 6x + 9 = 6\left(x + \frac{9}{6}\right) = 6\left(x + \frac{3}{2}\right) \;\rightarrow\; p = 3;\; V\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$

Buscamos el foco: $F = \left(-\frac{3}{2}, 2\right) + \left(\frac{p}{2}, 0\right) = (0, 2)$

Buscamos su directriz $d\colon x = \frac{-p}{2} + V_x = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -3$

57 **a) Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C(-1, 1)$ y es tangente a la recta $3x - 4y - 3 = 0$.**

b) De todas las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante, encuentra las que sean tangentes a la circunferencia hallada en el apartado anterior.

a) El radio, r, de la circunferencia es la distancia del centro $C(-1, 1)$ a la recta $s\colon 3x - 4y - 3 = 0$; es decir:

$r = dist\,(C, s) = \frac{|-3 - 4 - 3|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2$

La ecuación será: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$, o bien, $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

b) Las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante son de la forma $y = x + k$, es decir, $t\colon x - y + k = 0$. La recta t es tangente a la circunferencia cuando la distancia del centro de la circunferencia, $C(-1, 1)$, a la recta es igual al radio, 2. Es decir:

$dist\,(C, t) = \frac{|-1 - 1 + k|}{\sqrt{2}} = 2 \;\rightarrow\; \frac{|k - 2|}{\sqrt{2}} = 2 \;\rightarrow\; |k - 2| = 2\sqrt{2} \begin{cases} k - 2 = 2\sqrt{2} \;\rightarrow\; k = 2 + 2\sqrt{2} \\ k - 2 = -2\sqrt{2} \;\rightarrow\; k = 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$

Hay dos rectas: $\begin{cases} y = x + 2 + 2\sqrt{2} \\ y = x + 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$

58 Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por (–3, 2) y (4, 1) y es tangente al eje *X*.

El centro está en la mediatriz del segmento AB.

$A = (-3, 2)$, $B = (4, 1)$

$\overrightarrow{AB} = (7, -1) \to \vec{d} = (1, 7)$

$M_{AB} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$m: \frac{x - (1/2)}{1} = \frac{y - (3/2)}{7} \to 7x - \frac{7}{2} = y - \frac{3}{2} \to y = 7x + 2$

$dist\,(O, A) = dist\,(O, OX) = r$

$\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = y$

Las coordenadas del centro son la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = 7x - 2 \\ \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = 1 \end{cases} \to x_1 = 21,\ y_1 = 145;\ x_2 = 1,\ y_2 = 5$$

Hay dos circunferencias que cumplen la condición:

$C: (x-1)^2 + (y-5)^2 = 25$

$C': (x-21)^2 + (y-145)^2 = 145^2 = 21\,025$

59 De la circunferencia *C* se sabe que tiene su centro en la recta $x - 3y = 0$ y pasa por los puntos (–1, 4) y (3, 6). Obtén la ecuación de *C*.

Si el centro está sobre la recta $x - 3y = 0$, es de la forma $C(3y, y)$.

El centro está a igual distancia de $A(-1, 4)$ que de $B(3, 6)$. Además, esta distancia es el radio, r, de la circunferencia:

$$r = dist\,(A, C) = dist\,(B, C) \to |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \to \sqrt{(3y+1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(3y-3)^2 + (y-6)^2}$$

$$9y^2 + 1 + 6y + y^2 + 16 - 8y = 9y^2 + 9 - 18y + y^2 + 36 - 12y$$

$$28y = 28 \to y = 1 \to x = 3y = 3$$

Por tanto, el centro de la circunferencia está en $O(3, 1)$, y su radio es:

$$r = |\overrightarrow{AO}| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

La ecuación es: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$, o bien, $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$.

60 Determina la ecuación de la circunferencia de radio 10 que, en el punto (7, 2), es tangente a la recta $3x - 4y - 13 = 0$.

Las coordenadas del centro son la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 13 = 0 \\ \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2} = 10 \end{cases} \to x_1 = 15,\ y_1 = 8;\ x_2 = -1,\ y_2 = -4$$

Hay dos circunferencias que cumplen la condición:

$C: (x-15)^2 + (y-8)^2 = 100$

$C': (x+1)^2 + (y+4)^2 = 100$

61 Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo de vértices $A(3, 2)$, $B\left(1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ y $C\left(5 + \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

$A = (3, 2)$, $B = (1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $C = (5 + \sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$\overrightarrow{AB} = (1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2}) - (3, 2) = (-\sqrt{2} - 2, -\sqrt{2} - 2) = (-\sqrt{2} - 2)\,(1, 1)$

Lado AB: $x - 3 = y - 2 \to x - y - 1 = 0$

$\overrightarrow{AC} = (5+\sqrt{2}, -\sqrt{2}) - (3, 2) = (\sqrt{2}+2, -\sqrt{2}-2) = (\sqrt{2}+2)(1, -1)$

Lado AC: $x - 3 = -y + 2 \ \to\ x + y - 5 = 0$

$\overrightarrow{BC} = (1-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) - (5+\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (-2\sqrt{2}-4, 0) = (-2\sqrt{2}-4)(1, 0)$

Lado BC: $y = -\sqrt{2} \ \to\ y + \sqrt{2} = 0$

Bisectriz de $\hat{A}$: $|x - y - 1| = |x + y - 5| \ \to\ y = 2,\ x = 3$

Tomamos $x = 3$, que es la recta interior al triángulo.

Bisectriz de $\hat{C}$:

$$\left|\frac{x+y-5}{\sqrt{2}}\right| = |y+\sqrt{2}| \to \begin{cases} \dfrac{x+y-5}{\sqrt{2}} = y+\sqrt{2} \\[2mm] \dfrac{x+y-5}{\sqrt{2}} = -(y+\sqrt{2}) \end{cases} \to \begin{cases} x+y-5 = \sqrt{2}y + 2 \\ x+y-5 = -\sqrt{2}y - 2 \end{cases} \to \begin{cases} x + (1-\sqrt{2})y - 7 = 0 \\ x + (1+\sqrt{2})y - 3 = 0 \end{cases}$$

Tomamos $x + (1 + \sqrt{2})y - 3 = 0$, que es la recta interior al triángulo.

El incentro es la intersección de las bisectrices: $\begin{cases} x = 3 \\ x + (1+\sqrt{2})y - 3 = 0 \end{cases} \to x = 3,\ y = 0 \to P = (3, 0)$

radio = *dist* $(P, \text{lado } BC) = \sqrt{2}$

Circunferencia inscrita: $C: (x-3)^2 + y^2 = 2$

62 **Halla la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo determinado por la recta $y = -x + 4$ y los ejes de coordenadas. Calcula la ecuación de la recta tangente a esta circunferencia en (0, 0).**

Vértices del triángulo:

$A \to \begin{cases} y = -x + 4 \\ x = 0 \end{cases} \to A = (0, 4) \qquad B \to \begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \to B = (4, 0) \qquad C = (0, 0)$

$\overrightarrow{AB} = (4, -4) = 4(1, -1),\ M_{AB} = (2, 2)$

m_c: $x - 2 = -(y - 2)$

$\overrightarrow{AC} = (0, -4) = 4(0, -1),\ M_{AC} = (0, 2)$

m_b: $x - 2 = 0$

El circuncentro es la intersección de las mediatrices: $\begin{cases} x - 2 = -(y-2) \\ x = 2 \end{cases} \to x = 2,\ y = 2 \to P = (2, 2)$

radio = *dist* $(P, C) = \sqrt{8}$

Circunferencia circunscrita, $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$

La recta tangente en $(0, 10)$ es de la forma $y = wx$. Imponiendo que C y r se cortan en un solo punto, se obtiene $y = -x$.

63 **Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el cuadrado de vértices $A(-3, 3)$, $B(-1, 3)$, $C(-1, 1)$ y $D(-3, 1)$.**

$A = (-3, 3),\ B = (-1, 3),\ C = (-1, 1),\ D = (-3, 1)$

Diagonal AC: $y = -x$

Diagonal BD: $y = x + 4$

Centro: $\begin{cases} y = -x \\ y = x + 4 \end{cases} \to x = -2,\ y = 2 \to P = (-2, 2)$

Lado AB: $y = 3$

radio = *dist* (P, lado AB) = 1

Circunferencia inscrita, $C: (x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$

64 Halla la ecuación de la circunferencia de radio 5 que pasa por $P(1, 1)$ y cuyo centro pertenece a la recta $x + 3y - 19 = 0$.

** Mira el ejercicio resuelto 2.*

Sabemos que $P(1, 1)$ pertenece a la circunferencia y que el centro O de la circunferencia está sobre la recta $s: x + 3y - 19 = 0$.

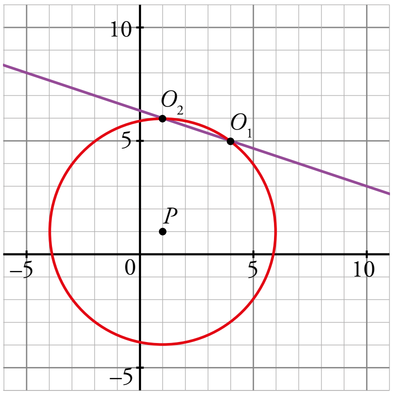
Para definir el centro O definiremos la circunferencia auxiliar C_1 con centro en P y de radio 5. Entonces O estará en el punto de corte de s y C_1.

$C_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$

De s sabemos que $x = 19 - 3y$, sustituimos en C_1:

$(18-3y)^2 + (y-1)^2 = 25 \rightarrow 10y^2 - 110y + 300 = 0 \rightarrow y^2 - 11y + 30 = 0 \rightarrow y_1 = 5, y_2 = 6$

Tenemos dos soluciones: $O_1 = (4, 5)$ y $O_2 = (1, 6)$



Por lo tanto el ejercicio tiene dos soluciones distintas, según el centro:

$C_1: (x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$

$C_2: (x-1)^2 + (y-6)^2 = 25$

65 Estudia la posición relativa del punto $P(0, 3)$ respecto a la circunferencia $(x-m)^2 + y^2 = 25$ en función de los valores del parámetro m.

$(x-m)^2 + y^2 = 25$

Centro: $O = (m, 0)$

Radio: $r = 5$

$dist\,(P, O) = \sqrt{m^2+9} = 5 \rightarrow m = -4,\ m = 4$

$\sqrt{m^2+9} < 5 \rightarrow m \in (-4, 4)$

$\sqrt{m^2+9} > 5 \rightarrow m \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$

Si $m \in (-4, 4) \rightarrow P$ es interior a la circunferencia C.

Si $m = -4$ o $m = 4 \rightarrow P \in C$

Si $m \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty) \rightarrow P$ es exterior a C.

66 Estudia en función de k la posición relativa de la recta $s: 4x + 3y + k = 0$ respecto a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$.

Depende del número de soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x + 3y + k = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-3y-k}{4} \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\frac{-3y-k}{4}\right)^2 + y^2 - 2\left(\frac{-3y-k}{4}\right) - 6y + 6 = 0$$

$k^2 + 6ky + 8k + 25y^2 - 72y + 96 = 0 \;\rightarrow\; 25y^2 + (6k - 72)y + 96 + 8k + k^2 = 0$

El número de soluciones depende del signo del discriminante.

$\Delta = (6k - 72)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (96 + 8k + k^2) = -64k^2 - 1\,664k - 4\,416$

- Si $-64k^2 - 1\,664k - 4\,416 = 0 \;\rightarrow\; k = -3,\; k = -23 \;\rightarrow$ Solución única $\rightarrow$ Son tangentes.
- Si $-64k^2 - 1\,664k - 4\,416 < 0 \;\rightarrow\; k \in (-\infty, -23) \cup (-3, \infty) \;\rightarrow$ No hay solución $\rightarrow$ Son exteriores.
- Si $-64k^2 - 1\,664k - 4\,416 > 0 \;\rightarrow\; k \in (-23, -3) \;\rightarrow$ Dos soluciones $\rightarrow$ Son secantes.

Página 250

67 Halla los puntos de intersección de cada pareja de circunferencias y di cuál es su posición relativa.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 - 6x - 16 = 0 \;\rightarrow\; -6x = 12 \;\rightarrow\; x = -2 \\ 4 + y^2 = 4 \;\rightarrow\; y^2 = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \end{array}$

Las circunferencias se cortan en el punto (–2, 0).

La primera circunferencia tiene centro en (3, 0) y radio 5; la segunda tiene centro en (0, 0) y radio 2. La distancia entre sus centros es $d = 3$. Como la diferencia entre sus radios es $5 - 2 = 3 = d$, las circunferencias son tangentes interiores.

b) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0 \end{array}\right\}$ Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª: $6y = 0 \;\rightarrow\; y = 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0 \;\rightarrow\; (x - 3)^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 3$

Las circunferencias se cortan en el punto (3, 0).

La primera circunferencia tiene su centro en (3, 2) y radio 2; la segunda tiene su centro en (3, –1) y radio 1. La distancia entre sus centros es $d = 3$, igual que la suma de sus radios. Por tanto, las circunferencias son tangentes exteriores.

68 Considera las circunferencias C_1: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$ y C_2: $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 10$.

a) Comprueba que ambas circunferencias son secantes y calcula sus puntos de corte, A y B.

b) Halla las potencias de los puntos A y B a las circunferencias C_1 y C_2.

c) A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿qué podrías decir del eje radical de ambas circunferencias?

d) ¿Puedes generalizar este resultado para un par cualquiera de circunferencias secantes?

a) Calculamos los puntos de corte resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 \\ (x-3)^2 + (y+3)^2 = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 + 2y + 2 = 2 \\ x^2 - 6x + y^2 + 18 = 10 \end{cases} \rightarrow x_1 = 0,\; y_1 = -2;\; x_2 = 2,\; y_2 = 0$$

Puntos de corte: $A = (0, -2)$, $B = (2, 0)$, luego son secantes.

b) $A \in C_1 \cap C_2 \;\rightarrow\; A$ verifica las ecuaciones de C_1 y $C_2 \;\rightarrow\; \mathcal{P}(A, C_1) = \mathcal{P}(A, C_2) = 0$

$B \in C_1 \cap C_2 \;\rightarrow\; B$ verifica las ecuaciones de C_1 y $C_2 \;\rightarrow\; \mathcal{P}(B, C_1) = \mathcal{P}(B, C_2) = 0$

c) El eje radical es la recta que pasa por A y por B.

d) Sí, pues el razonamiento del apartado b) muestra que los puntos de corte siempre tienen potencia igual a cero respecto a las dos circunferencias. Luego el eje radical siempre pasa por ellos.

69 **Dos circunferencias se cortan en los puntos (0, 0) y (0, 8). ¿Cuál es su eje radical? Justifica tu respuesta.**

El eje radical es la recta que pasa por A y por B, pues los puntos de corte siempre tienen potencia cero respecto a las dos circunferencias. Luego el eje radical siempre pasa por ellos.

Eje radical: $x = 0$

70 **[La escritura de una ecuación que cumpla los requisitos del enunciado permite trabajar la iniciativa (dimensión productiva)].**

Escribe la ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas y focos en el eje de abscisas, sabiendo que pasa por el punto $P(8, -3)$ y que su eje mayor es igual al doble del menor.

El eje mayor es igual al doble del menor, es decir: $a = 2b$. Además, pasa por el punto $P(8, -3)$. Luego:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{64}{4b^2}+\frac{9}{b^2}=1 \rightarrow \frac{16}{b^2}+\frac{9}{b^2}=1 \rightarrow \frac{25}{b^2}=1 \rightarrow 25 = b^2;\ a^2 = 4b^2 = 100$$

La ecuación es: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$

71 **Halla la ecuación de la hipérbola centrada en el punto (4, 5), cuyos focos son $F(2, 5)$ y $F'(6, 5)$ y cuyo semieje menor es $b = 1$.**

Centro = (4, 5)

Eje paralelo a OX

$c = dist\,(C, F) = 2$

$a^2 = 4 - 1 = 3$

Ecuación de la hipérbola: $\frac{(x-4)^2}{3}-\frac{(y-5)^2}{1}=1$

72 **Halla la ecuación de la siguiente hipérbola:**

- **Tiene el centro en el origen de coordenadas.**
- **Tiene los focos en el eje de abscisas.**
- **Pasa por el punto $P\left(\sqrt{5/2}, 1\right)$.**
- **Una de sus asíntotas es la recta $y = 2x$.**

Ecuación de la hipérbola: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{b}{a}=2 \rightarrow b=2a$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1$

Pasa por $P=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, 1\right)$

$$\frac{5/2}{a^2}-\frac{1}{4a^2}=1 \rightarrow \frac{10-1}{4a^2}=1 \rightarrow 4a^2=9 \rightarrow a^2=\frac{9}{4}$$

La ecuación pedida es: $\frac{x^2}{9/4}-\frac{y^2}{9}=1$

73 **Halla la ecuación de la hipérbola equilátera cuyos focos son (5, 0) y (–5, 0).**

Centro = (0, 0)

$c = 5 = \sqrt{2a^2} \rightarrow a = \frac{5}{2}\sqrt{2} \rightarrow a^2 = \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

La ecuación pedida es:

$$\frac{x^2}{\frac{25}{2}} - \frac{y^2}{\frac{25}{2}} = 1$$

74 **El cometa Halley describe una órbita elíptica, estando el Sol en uno de sus focos, de excentricidad 0,96657. Si su distancia mínima al Sol (perihelio) es de 0,6 UA, calcula cuál es la máxima (afelio). Recuerda que 1 UA (unidad astronómica) es la distancia media entre la Tierra y el Sol.**

Focos: *Sol*, *F*

$dist\,(Halley, Sol) + dist\,(Halley, F) = 2a$

$e = \frac{c}{a} = 0{,}96657 \rightarrow c = 0{,}96657a$

Luego la distancia mínima se alcanza cuando el cometa está en el vértice correspondiente al foco del Sol y es:

$a - c = 0{,}6$

$\begin{cases} a - c = 0{,}6 \\ c = 0{,}96657a \end{cases} \rightarrow a = 17{,}946,\ \ c = 17{,}348$

La distancia máxima se alcanza cuando la Tierra está en el vértice opuesto al foco del Sol y es:

$2a - 0{,}6 = 2 \cdot 17{,}948 - 0{,}6 = 35{,}296$ UA

75 **La Tierra describe una órbita elíptica, estando el Sol en uno de sus focos. En esta trayectoria, la distancia mínima Tierra-Sol es de 147 095 248 km, y la máxima es de 152 100 492 km. Calcula la excentricidad de la órbita e interpreta el resultado obtenido.**

Focos: *Sol*, *F*

dist mínima + *dist máxima* = $2a$

$dist\,(Tierra, Sol) + dist\,(Tierra, F) = 2a$

$147\,095\,248 + 152\,100\,492 = 2a \rightarrow a = 1{,}4960 \cdot 10^8$

La distancia mínima se alcanza cuando la Tierra está en el vértice correspondiente al foco del Sol y es:

$a - c = 147\,095\,248$

$1{,}4960 \cdot 10^8 - c = 147\,095\,248 \rightarrow c = 2{,}5048 \cdot 10^6$

$e = \frac{c}{a} = \frac{2{,}5048 \cdot 10^6}{1{,}4960 \cdot 10^8} = 1{,}6743 \cdot 10^{-2} = 0{,}0167$

Como la excentricidad es muy pequeña, la órbita es casi una circunferencia.

76 **Asocia cada una de las siguientes ecuaciones a una de las gráficas que están a continuación:**

a) $x^2 + 4y^2 = 4$

b) $x^2 + y^2 = 9$

c) $y^2 - 9x^2 = 9$

d) $2xy = 1$

e) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

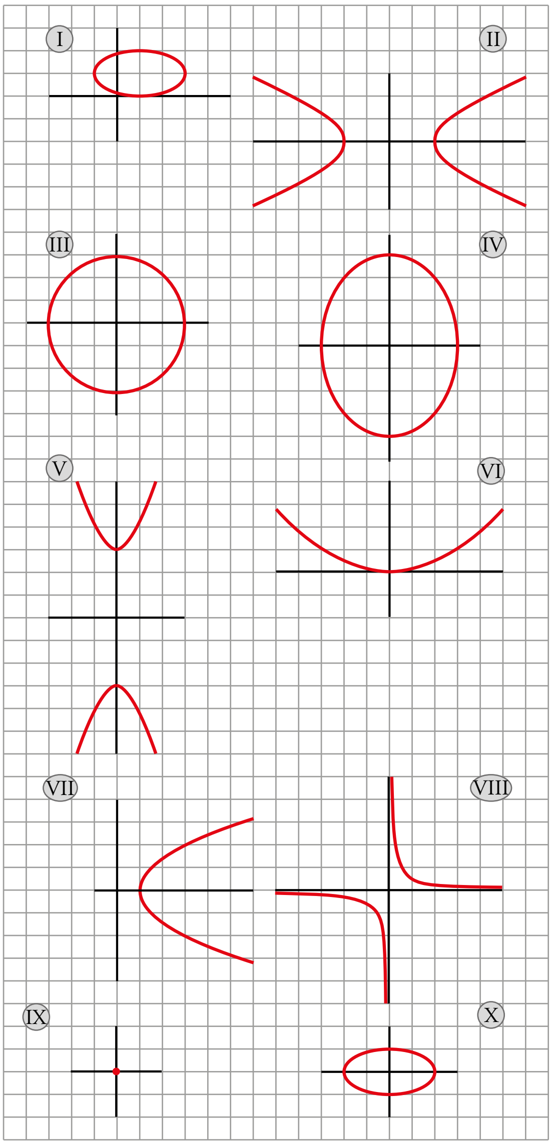
f) $\frac{x^2}{9} - y = 0$

g) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

h) $y^2 = 2(x - 1)$

i) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 0$

j) $\frac{(x-1)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$



a) X b) III c) V d) VIII e) IV

f) VI g) II h) VII i) IX j) I

Cuestiones teóricas

77 Determina si las siguientes ecuaciones corresponden a cónicas. Si es así, indica qué cónica es:

a) $-\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} + 1$ **b)** $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} - 1$

c) $x^2 + y^2 + x + y + 1 = 0$ **d)** $y^2 + 2y = x$

a) No es ninguna cónica porque $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = -1$ no es posible. La suma de dos números positivos no puede dar un resultado negativo.

b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$. Hipérbola con focos en el eje *OY*.

c) Si es alguna cónica, es una circunferencia, pero

$$r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

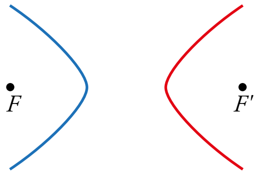
es imposible porque un radio no puede ser negativo, luego no es una cónica.

d) Es una parábola $(y + 1)^2 = x + 1$

Página 251

78 **Sabemos que en esta hipérbola $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 4$.**

¿Qué rama corresponde a $\overline{PF} - \overline{PF'} = 4$ y cuál corresponde a $\overline{PF'} - \overline{PF} = 4$?

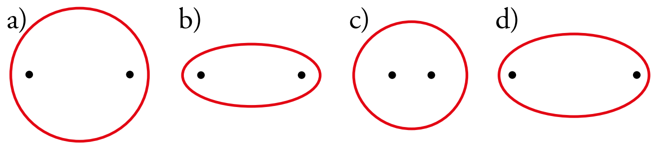


$\overline{PF} - \overline{PF'} = 4 \rightarrow$ Los puntos están más lejos de F, luego es la rama roja.

$\overline{PF'} - \overline{PF} = 4 \rightarrow$ Los puntos están más lejos de F', luego es la rama azul.

79 **[La justificación del porqué las elipses están mal dibujas permite trabajar la destreza expresión oral de esta clave].**

Teniendo en cuenta la definición de elipse y tomando sobre el dibujo algunas medidas, di cuáles de estas elipses con sus focos están mal dibujadas:



a) Está mal dibujada porque a y b son casi iguales, luego c tiene que ser muy pequeño y, sin embargo, los focos están muy separados, siendo c la distancia al centro del foco.

b) Mal. a es la hipotenusa del triángulo que une el centro, un foco y un vértice del eje OY, y no mide igual que el semieje mayor.

c) Bien. Dibujamos el triángulo rectángulo cuyos vértices son el centro de la elipse, el vértice superior de la elipse y un foco. La medida de la hipotenusa de ese triángulo es similar a la medida del semieje horizontal.

d) Bien. Dibujamos el triángulo rectángulo cuyos vértices son el centro de la elipse, el vértice superior de la elipse y un foco. La medida de la hipotenusa de ese triángulo es similar a la medida del semieje horizontal.

80 **[La lectura de los afirmaciones requiere trabajar la destreza comprensión escrita].**

¿Verdadero o falso?

a) Si la distancia de una recta al centro de una elipse es mayor que el semieje mayor, no se cortan.

b) Todas las hipérbolas equiláteras tienen la misma excentricidad.

c) Las parábolas del tipo $y^2 = -2px$ tienen excentricidad –1.

d) Por tres puntos alineados no puede pasar una circunferencia.

e) Cuanto más se alejan el foco y la directriz de una parábola, mayor es su excentricidad.

a) Verdadero.

Si la elipse tiene los focos sobre el eje Y entonces su eje mayor estará sobre este eje también.

b) Verdadero. Sabemos que en este caso $c = \sqrt{2}a$ y $exc = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$.

c) Falso. La excentricidad de una parábola es siempre 1.

d) Verdadero. Por tres puntos alineados pasa una recta.

e) Falso. En una parábola su excentricidad es siempre 1.

Para profundizar

81 **a) Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos $A(-3, 0)$ y $B(3, 0)$ es 68. Puedes comprobar que se trata de una circunferencia de centro $O(0, 0)$. ¿Cuál es su radio?**

b) Generaliza: Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a $A(-a, 0)$ y $B(a, 0)$ es k (constante), y comprueba que se trata de una circunferencia de centro $O(0, 0)$. Di el valor de su radio en función de a y de k. ¿Qué relación deben cumplir a y k para que realmente sea una circunferencia?

a) $P = (x, y)$

$(dist\,(P, A))^2 = (x + 3)^2 + y^2$

$(dist\,(P, B))^2 = (x - 3)^2 + y^2$

$(x + 3)^2 + y^2 + (x - 3)^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 + 18 = 68 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 50 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$

Circunferencia de centro $O = (0, 0)$ y radio $r = 5$

b) $(x + a)^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2 = k \rightarrow 2a^2 + 2x^2 + 2y^2 = k \rightarrow x^2 + y^2 = \frac{k}{2} - a^2$

Circunferencia de centro $O = (0, 0)$ y radio $r = \sqrt{\frac{k}{2} - a^2}$

Para que sea una circunferencia, $\frac{k}{2} > a^2 \rightarrow k > 2a^2$

82 **a) Considera la circunferencia C: $(x - 1)^2 + y^2 = 25$ y el punto $P(9, 6)$. Sea r la recta que une P con el centro de la circunferencia. Halla A y B, puntos de corte de r y C. Comprueba que la potencia de P respecto a C coincide con $d(P, A) \cdot d(P, B)$.**

b) Demuestra que el apartado anterior es cierto si sustituimos r por cualquier recta secante a C que pase por P.

* ***Haz un dibujo y llama A' y B' a los puntos de corte de C y la nueva recta. Aplica semejanza a los triángulos $AB'P$ y $A'PB$.***

a) $(x - 1)^2 + y^2 = 25$

$O = (1, 0)$

$\overrightarrow{PO} = (8, 6) = 2(4, 3)$

Recta PO: $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{3} \rightarrow 3x - 4y - 3 = 0$

Puntos de intersección:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 3 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 25 \end{cases} \rightarrow x_1 = -3,\ y_1 = -3;\ x_2 = 5, y_2 = 3 \rightarrow A = (-3, -3),\ B = (5, 3)$$

$\mathcal{P}(P, C) = (9 - 1)^2 + 6^2 - 25 = 75$

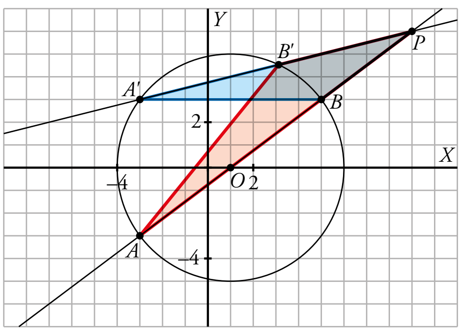
$d(P, A) \cdot d(P, B) = \sqrt{144 + 81} \cdot \sqrt{16 + 9} = 15 \cdot 5 = 75$

b) Sean dos rectas que pasan por P y son secantes a C.

Los triángulos PAB' y $PA'B$ son semejantes porque tienen un ángulo común y un ángulo inscrito con arco común, luego los lados son proporcionales:

$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB} \rightarrow PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$

Luego el resultado no depende de la recta secante elegida.



83 **Calcula el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancias a estas rectas es 2:**

r: $2x + 3y = 0$ **s: $y = \frac{2}{3}x$**

Buscamos el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que:

$$dist(P, r) \cdot dist(P, s) = 2$$

$$\frac{|2x+3y|}{\sqrt{4+9}} \cdot \frac{|2x-3y|}{\sqrt{4+9}} = 2 \rightarrow (2x+3y)(2x-3y) = 26 \rightarrow 4x^2 - 9y^2 = 26 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{26}{4}} - \frac{y^2}{\frac{26}{9}} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x^2}{\frac{13}{2}} - \frac{y^2}{\frac{26}{9}} = 1$$

Por lo tanto el lugar geométrico es una hipérbola.

AUTOEVALUACIÓN

Página 251

1 Halla la ecuación de la bisectriz de los ángulos formados por las siguientes rectas:

r_1**:** $x = 3$

r_2**:** $3x - 4y + 1 = 0$

Los puntos $X(x, y)$ deben cumplir: $dist\,(X, r_1) = dist\,(X, r_2)$

$$\left.\begin{array}{l} dist\,(X, r_1) = |x-3| \\ dist\,(X, r_2) = \dfrac{|3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}} \end{array}\right\} |x-3| = \frac{|3x-4y+1|}{5}$$

Eliminando los valores absolutos obtenemos dos ecuaciones, las que corresponden a las dos bisectrices, perpendiculares entre sí:

$5(x-3) = 3x - 4y + 1 \rightarrow 2x + 4y - 16 = 0 \rightarrow x + 2y - 8 = 0$

$-5(x-3) = 3x - 4y + 1 \rightarrow 8x - 4y - 14 = 0 \rightarrow 4x - 2y - 7 = 0$

2 Escribe la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(1, -3)$ **y pasa por el punto** $A(5, 0)$**.**

La ecuación de la circunferencia es de la forma $(x-1)^2 + (y+3)^2 = r^2$. Para determinar r^2, sustituimos $A(5, 0)$ en la ecuación:

$$(5-1)^2 + 3^2 = r^2 \rightarrow r^2 = 25$$

La ecuación de la circunferencia es, por tanto, $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$. O, en su forma simplificada:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$$

3 Consideramos la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x = 0$ **y la recta** $r: 3x - 4y + k = 0$**. Calcula los valores que debe tomar** k **para que** r **sea interior, tangente o exterior a la circunferencia.**

Hallamos primero el centro, O_C, y el radio, R, de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \rightarrow O_C = (1, 0) \text{ y } R = 1$$

Calculamos la distancia del centro de la circunferencia, O_C, a la recta $r: 3x - 4y + k = 0$:

$$d = dist\,(O_C, r) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + k|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3+k|}{5}$$

- Para que r sea interior a la circunferencia, ha de ser $d < R = 1$.

$$\frac{|3+k|}{5} < 1 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{3+k}{5} < 1 \rightarrow k < 2 \\ -\dfrac{3+k}{5} < 1 \rightarrow \dfrac{3+k}{5} > -1 \rightarrow k > -8 \end{array}\right\} \text{ Es decir, } k \in (-8, 2).$$

- Para que r sea tangente a la circunferencia, ha de ser $d = R = 1$.

$$\frac{|3+k|}{5} = 1 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{3+k}{5} = 1 \rightarrow k = 2 \\ -\dfrac{3+k}{5} = 1 \rightarrow k = -8 \end{array}\right.$$

- Para que r sea exterior a la circunferencia, ha de ser $d > R = 1$.

$$\frac{|3+k|}{5} > 1 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{3+k}{5} > 1 \rightarrow k > 2 \\ -\dfrac{3+k}{5} > 1 \rightarrow \dfrac{3+k}{5} < -1 \rightarrow k < -8 \end{array}\right\} \text{ Es decir, } k \in (-\infty, -8) \cup (2, +\infty).$$

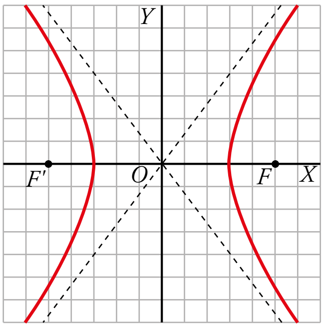
4 **Describe las siguientes cónicas. Obtén sus elementos y dibújalas:**

a) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ **b)** $\dfrac{(x-5)^2}{9}-\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$

a) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$

Es una hipérbola en la que:

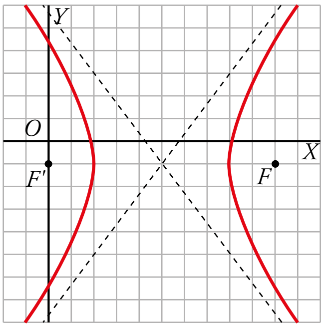
- $a = 3,\ b = 4$
- Asíntotas: $y = \dfrac{4}{3}x,\ y = -\dfrac{4}{3}x$
- Semidistancia focal: $c = \sqrt{a^2+b^2}=5$
- Focos: $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$
- Vértices: $V(3, 0)$ y $V'(-3, 0)$



b) $\dfrac{(x-5)^2}{9}-\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$

Es una hipérbola igual a la del apartado anterior pero centrada en el punto $(5, -1)$.

- $a = 3,\ b = 4,\ c = 5$
- Asíntotas: $y = \dfrac{4}{3}x-\dfrac{23}{3};\ y = -\dfrac{4}{3}x+\dfrac{17}{3}$
- Focos: $F(10, -1),\ F'(0, -1)$
- Vértices: $V(8, -1),\ V'(2, -1)$



5 **Obtén la ecuación de la elipse de focos $F(-4, 0)$ y $F'(4, 0)$ y excentricidad 0,8.**

$F(-4, 0)\ \ F'(4, 0)\ \ exc = 0{,}8$

$c = \dfrac{|\overline{FF'}|}{2}=4$

$exc = \dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{a}=0{,}8 \rightarrow a = 5$

$b^2 = a^2-c^2 = 25-16 = 9 \rightarrow b = 3$

La ecuación de la elipse es $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

6 **Escribe la ecuación de la parábola que tiene directriz $x = 3$ y como vértice, el origen de coordenadas.**

d: $x = 3$

En una parábola $y^2 = 2px$, la recta directriz es $x = -\dfrac{p}{2}$.

Por tanto, $3 = -\dfrac{p}{2} \rightarrow p = -6$

La ecuación de la parábola es $y^2 = -12x$.

7 **Halla los focos, la excentricidad y las asíntotas de la hipérbola que tiene por ecuación: $9y^2 - 16x^2 = 144$.**

Dibújala.

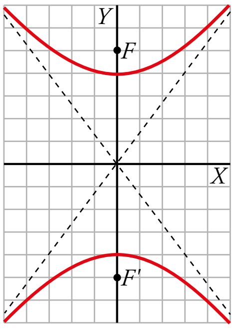
$9y^2 - 16x^2 = 144 \rightarrow \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

$a^2 = 16 \rightarrow a = 4;\ b^2 = 9 \rightarrow b = 3;\ c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5$

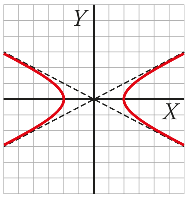
Los focos son $F(0, 5)$ y $F'(0, -5)$.

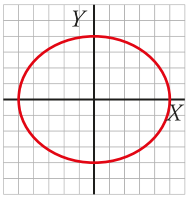
Excentricidad: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$

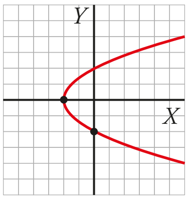
Asíntotas: $y = \dfrac{4}{3}x$ e $y = -\dfrac{4}{3}x$



8 **Indica las ecuaciones de las siguientes cónicas:**

a) 

b) 

c) 

a) $V(2, 0);\ b = 1;\ a = 2 \rightarrow \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$

b) $b = 4;\ a = 5;\ V(0, 0) \rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

c) $V(-2, 0);\ y^2 = 2p(x + 2)$

$P(0, -2)$ tiene que cumplir su ecuación $\rightarrow 4 = 2p \cdot 2 \rightarrow p = 1 \rightarrow y^2 = 2(x + 2)$

9 **Dadas estas circunferencias:**

$\mathbf{C_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0}$

$\mathbf{C_2: x^2 + y^2 - 4x - 18y + 21 = 0}$

$\mathbf{C_3: x^2 + y^2 - 8x - 5y + 1 = 0}$

Represéntalas y calcula su centro radical.

- Eje radical de C_1 y C_2:

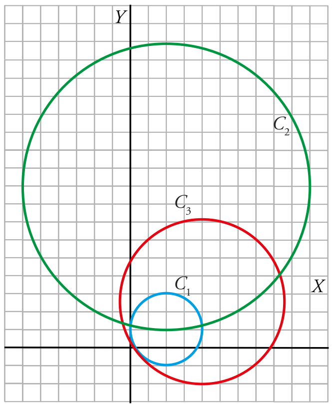
$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = x^2 + y^2 - 4x - 18y + 21 = 0 \rightarrow y = \dfrac{5}{4}$

- Eje radical de C_2 y C_3:

$x^2 + y^2 - 8x - 5y + 1 = x^2 + y^2 - 4x - 18y + 21 = 0 \rightarrow -4x + 13y - 20 = 0$

- Punto de corte de los dos ejes radicales:

$$\begin{cases} -4x + 13y - 20 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{15}{16} \rightarrow P'\left(-\dfrac{15}{16}, \dfrac{5}{4}\right) \\ y = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$



Para consultar los **criterios de evaluación** y los **estándares de aprendizaje evaluables**, véase la Programación.

10 FUNCIONES ELEMENTALES

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) **CE 1.6.** (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.)

Página 257

Resuelve

Familias de funciones

Ya conoces muchas familias de funciones: sus nombres, cómo son sus expresiones analíticas y qué forma tienen sus gráficas.

Asocia cada nombre de familia con su representación gráfica y con su expresión analítica general.

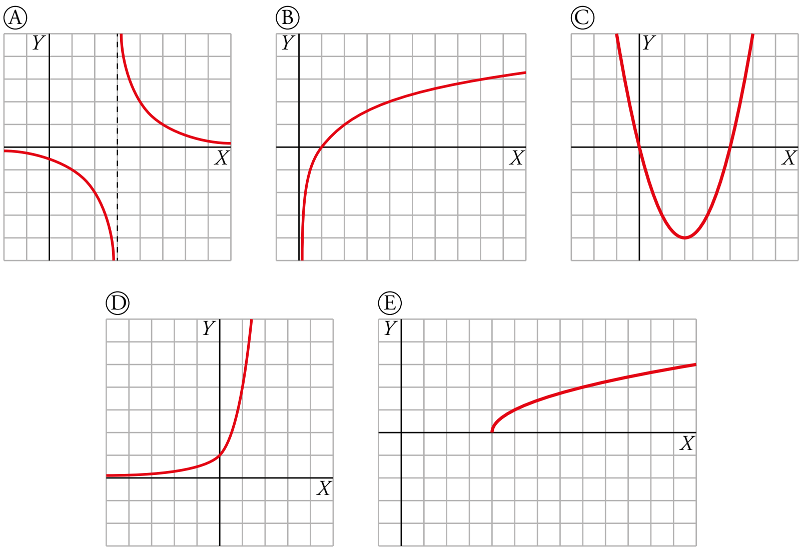
1. Cuadrática

2. Raíz

3. Proporcionalidad inversa

4. Exponencial

5. Logarítmica



I. $y = \sqrt{x-4}$ **II.** $y = 4^x$ **III.** $y = x^2 - 4x$ **IV.** $y = \log_2 x$ **V.** $y = \dfrac{2}{x-3}$

$1 \rightarrow C \rightarrow III$

$2 \rightarrow E \rightarrow I$

$3 \rightarrow A \rightarrow V$

$4 \rightarrow D \rightarrow II$

$5 \rightarrow B \rightarrow IV$

2 ▸ DOMINIO DE DEFINICIÓN

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA1.10.3.) CE 3.1. (EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 261

Piensa y practica

Halla el dominio de definición de cada una de las siguientes funciones:

1 **a)** $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 4x^2 + 3x}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 1}$

a) Veamos dónde se anula el denominador:

$x^3 - 4x^2 + 3x = x(x-3)(x-1) = 0 \ \rightarrow \ Dom = \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$

b) El denominador no se anula nunca para valores reales $\rightarrow$ $Dom = \mathbb{R}$

2 **a)** $y = log(x^3 - 6x^2 + 8x)$ **b)** $y = \sqrt{x^3 - 6x^2 + 8x}$

a) La función *log* debe actuar sobre valores positivos. Por tanto, los valores de x del dominio son los que cumplen:

$x^3 - 6x^2 + 8x > 0 \ \rightarrow \ x(x-2)(x-4) > 0$

$x = 0$, $x = 2$, $x = 4$ no pertenecen al dominio ya que el valor de la expresión anterior sería cero. Estudiamos qué pasa entre estos valores para encontrar el dominio:

- Si $x < 0 \ \rightarrow \ x - 2 < 0; \ x - 4 < 0 \ \rightarrow \ x(x-2)(x-4) < 0$
- Si $0 < x < 2 \ \rightarrow \ x > 0; \ x - 2 < 0; \ x - 4 < 0 \ \rightarrow \ x(x-2)(x-4) > 0$
- Si $2 < x < 4 \ \rightarrow \ x > 0; \ x - 2 > 0; \ x - 4 < 0 \ \rightarrow \ x(x-2)(x-4) < 0$
- Si $4 < x \ \rightarrow \ x > 0; \ x - 2 > 0; \ x - 4 > 0 \ \rightarrow \ x(x-2)(x-4) > 0$

Por tanto:

$Dom = (0, 2) \cup (4, +\infty)$

b) La función *raíz* debe actuar sobre valores positivos o cero. Por tanto:

$x^3 - 6x^2 + 8x = x(x-2)(x-4) \geq 0$

Según los cálculos del ejercicio anterior:

$Dom = [0, 2] \cup [4, +\infty)$

3 $y = \dfrac{log\,(x^3 - 6x^2 + 8x)}{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 8x}}$

En este caso, la raíz tampoco puede anularse, por tanto, según los cálculos del ejercicio anterior, x debe cumplir: $x^3 - 6x^2 + 8x > 0$

Por tanto:

$Dom = (0, 2) \cup (4, +\infty)$

4 **a)** $y = \sqrt{x^3 - 2x^2 + x - 2}$ **b)** $y = log\,(x^3 - 2x^2 + x - 2)$

a) Necesitamos que la expresión dentro de la raíz sea ≥ 0:

$x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2+1)$

La expresión $x^2 + 1$ siempre es positiva, por lo que el signo dependerá solamente de $x - 2$. Es decir:

$Dom = [2, +\infty)$

b) Necesitamos que la expresión dentro del logaritmo sea positiva. Por tanto, según el apartado anterior:

$Dom = (2, +\infty)$

5 $y = \dfrac{\sqrt{x}}{log\ x}$ **Atención: ¿para qué valores de x se anula el denominador? $log\,x = 0 \rightarrow x = \ldots$**

La raíz debe darse sobre casos no negativos: $x \geq 0$.

El logaritmo debe darse sobre casos positivos: $x > 0$.

Además, el denominador no puede ser cero: $log(x) = 0 \rightarrow x = 1$

$Dom = (0,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$

6 **a)** $y = \dfrac{log\,(x-3)}{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}$ **b)** $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}{log\,(x-3)}$

a) El logaritmo debe darse sobre casos positivos: $x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$

La raíz debe darse sobre casos no negativos y el denominador no puede ser cero:

$x^2 - 7x + 10 = (x-5)\,(x-2) > 0$

- Si $3 < x < 5 \rightarrow x - 5 < 0;\ x - 2 > 0 \rightarrow (x-5)\ (x-2) < 0$
- Si $5 < x \rightarrow x - 5 > 0;\ x - 2 > 0 \rightarrow (x-5)\ (x-2) > 0$

Por tanto: $Dom = (5,\ +\infty)$

b) El logaritmo debe darse sobre casos positivos: $x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$

Además, el denominador no puede ser cero $\rightarrow$ $log(x-3) = 0$ si $x - 3 = 1 \rightarrow x = 4$

La raíz debe darse sobre casos no negativos: $x^2 - 7x + 10 = (x-5)\,(x-2) \geq 0$

Por tanto, a partir de los cálculos del apartado anterior, deducimos:

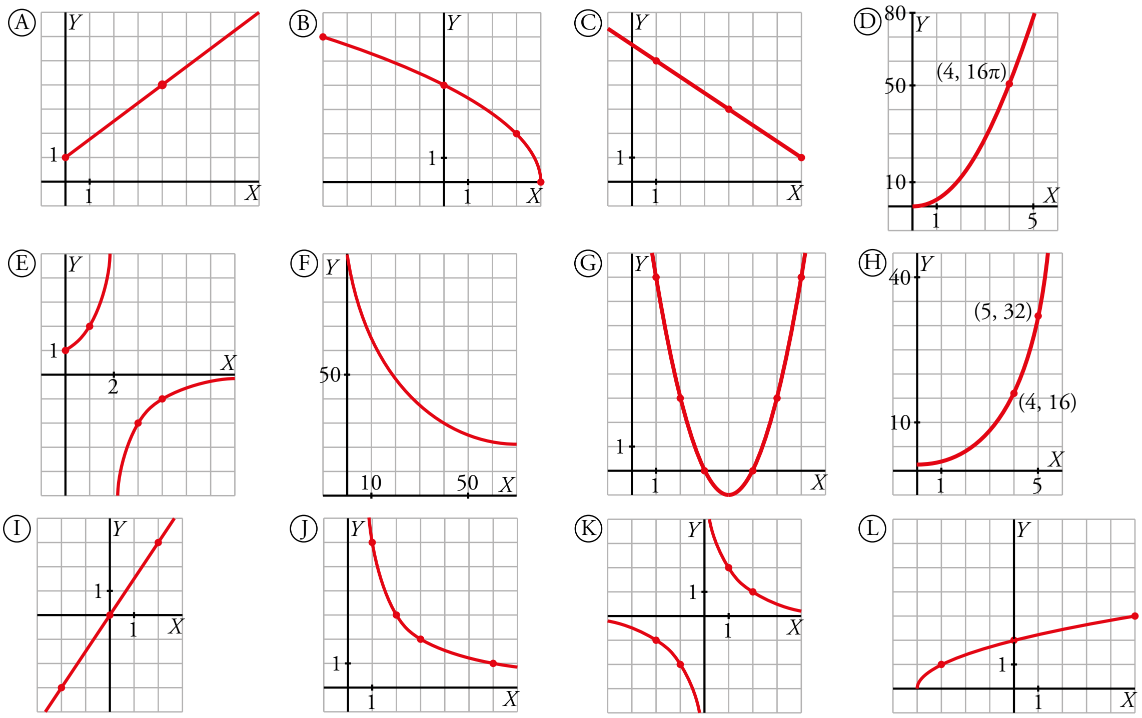
$Dom = [5,\ +\infty)$

3 ▶ FAMILIAS DE FUNCIONES ELEMENTALES

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.) CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 1.13. (EA 1.13.2.) CE 3.1. (EA 3.1.2.-EA 3.1.3.-EA 3.1.4.)

Página 265

1 **Asocia a cada una de las siguientes gráficas una ecuación:**



LINEALES	CUADRÁTICAS	PROPORCIONALIDAD INVERSA	RADICALES	EXPONENCIALES
L_1 $y = \frac{3}{2}x$	C_1 $y = x^2 - 8x + 15$	PI_1 $y = \frac{1}{x}$	R_1 $y = \sqrt{2x+4}$	E_1 $y = 2^x$
L_2 $y = -\frac{2}{3}(x-1)+5$	C_2 $y = (x+3)(x+5)$	PI_2 $y = \frac{2}{2-x}, x \geq 0$	R_2 $y = \sqrt{x+4}$	E_2 $y = 0{,}5^x$
L_3 $3x + 2y = 0$	C_3 $y = x^2, \ x > 0$	PI_3 $y = \frac{2}{x}$	R_3 $y = 2\sqrt{4-x}$	E_3 $y = 20 + 80 \cdot 0{,}95^x$
L_4 $y = \frac{3}{4}x + 1$	C_4 $y = \pi x^2, \ x > 0$	PI_4 $y = \frac{6}{x}, \ x > 0$	R_4 $y = -\sqrt{4+x}$	E_4 $y = 3^x$

A → L_4 B → R_3 C → L_2 D → C_4
E → PI_2 F → E_3 G → C_1 H → E_1
I → L_1 J → PI_4 K → PI_3 L → R_2

2 **Cada uno de los siguientes enunciados se corresponde con una gráfica de entre las del ejercicio anterior. Identifícala.**

1. **Superficie, en centímetros cuadrados, de un círculo. Radio, en centímetros.**
2. **Aumento de una lupa. Distancia al objeto, en centímetros.**
3. **Temperatura de un cazo de agua que se deja enfriar desde 100 °C. Tiempo, en minutos.**
4. **Número de amebas que se duplican cada hora. Se empieza con una.**
5. **Longitud de un muelle, en decímetros. Mide 1 dm y se alarga 75 mm por cada kilo que se le cuelga.**
6. **Dimensiones (largo y ancho, en centímetros) de rectángulos cuya superficie es de 6 cm^2.**

1. D 2. E 3. F 4. H 5. A 6. J

3 **¿Qué te hace decir eso? [La decisión sobre las afirmaciones puede completarse a través de las tres fases que propone esta estrategia].**

¿Verdadero o falso?

a) En una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, cuanto mayor es a, más ancha es la parábola que la representa.

b) Las gráficas de $y = 5x^2 + bx + c$ son idénticas. Se sitúan en posiciones distintas al variar b y c.

c) Todas las parábolas de ecuación $y = ax^2 + c$ tienen su vértice en el punto de abscisa $x = 0$.

a) Falso. Por ejemplo, la función cuadrática $y = 4x^2$ es más estrecha que la función $y = x^2$.

b) Verdadero. Como la anchura de la parábola está determinada por el término de x^2, los otros solo influyen en la posición de la parábola respecto de los ejes de coordenadas.

c) Verdadero. Como no tiene término en x, la abscisa del vértice es $\frac{0}{2a} = 0$.

4 **¿Verdadero o falso?**

a) Las funciones $y = -\sqrt{kx}$ se representan mediante medias parábolas con el eje paralelo al eje Y.

b) El dominio de definición de $y = -a\sqrt{x+b}$ es $[-b, +\infty)$.

c) Los ejes X e Y son asíntotas de las funciones $y = \frac{k}{x}$.

d) El dominio de definición de $y = \frac{k}{a+x}$ es $\mathbb{R} - \{k\}$.

a) Falso. El eje de estas medias parábolas es el eje X.

b) Verdadero. La función está definida si $x + b \geq 0$, es decir, si $x \geq -b$. Por tanto, el dominio de definición es el intervalo dado.

c) Verdadero.

d) Falso. La función no está definida si $a + x = 0 \rightarrow x = -a$. El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-a\}$.

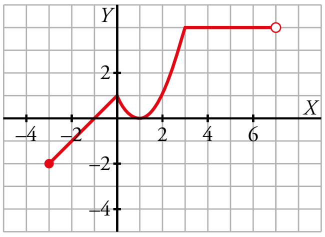
4 ▶ FUNCIONES DEFINIDAS «A TROZOS»

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 3.1. (EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 266

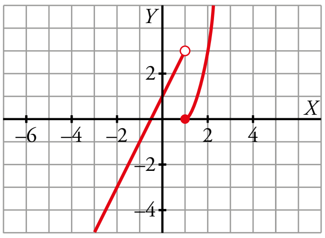
1 **Representa esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -3 \le x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 4 & \text{si } 3 \le x < 7 \end{cases}$$

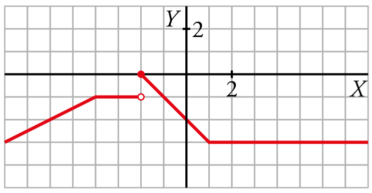


2 **Haz la representación gráfica de la siguiente función:**

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$



3 **Escribe la expresión analítica que corresponde a la siguiente gráfica:**



Primer tramo:

- Recta que pasa por los puntos $(-6, -2)$ y $(-4, -1)$.
- La pendiente es $\dfrac{-1-(-2)}{-4-(-6)} = \dfrac{1}{2}$ y la ecuación es $y - (-1) = \dfrac{1}{2}(x - (-4))$.

Segundo tramo:

- $y = -1$

Tercer tramo:

- Pertenece a una recta que pasa por $(0, -2)$ y $(1, -3)$.
- La pendiente es $\dfrac{-3-(-2)}{1-0} = -1$ y la ecuación es $y - (-2) = -x$.

Cuarto tramo: $y = -3$

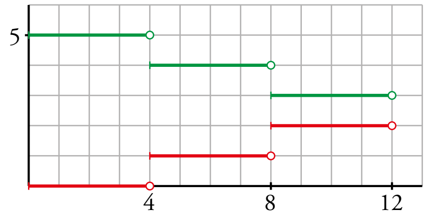
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1 & \text{si } x < -4 \\ -1 & \text{si } -4 \le x < -2 \\ -x - 2 & \text{si } -2 \le x < 1 \\ -3 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

Página 267

4 **¿Verdadero o falso?**

a) La gráfica roja corresponde a la función $y = Ent\left(\frac{x}{4}\right)$.

b) La gráfica verde corresponde a la función $y = 5 + Ent\left(\frac{x}{4}\right)$.



a) Verdadero.

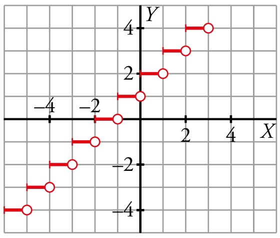
b) Falso. La gráfica verde es $y = 5 - Ent\left(\frac{x}{4}\right)$

5 **Representa:**

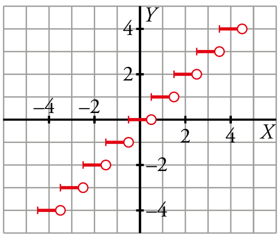
a) $y = Ent(x) + 2$

b) $y = Ent(x + 0{,}5)$

a) $y = Ent(x) + 2$



b) $y = Ent(x + 0{,}5)$

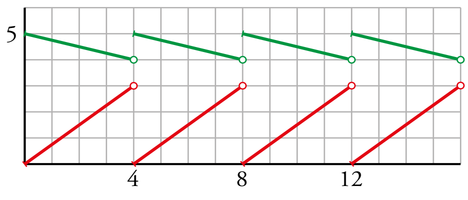


6 **¿Verdadero o falso?**

a) La gráfica roja corresponde a $y = 3Mant\left(\frac{x}{4}\right)$.

b) La gráfica roja corresponde a $y = 3Mant(4x)$.

c) La gráfica verde corresponde a $y = 5 - Mant\left(\frac{x}{4}\right)$.



a) Verdadero

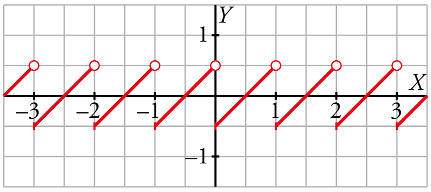
b) Falso

c) Verdadero

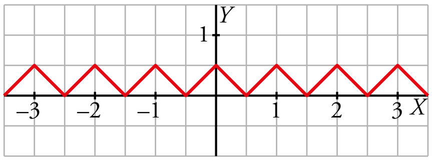
7 **Representa:**

a) $y = Mant(x) - 0{,}5$ **b)** $y = |Mant(x) - 0{,}5|$

a) $y = Mant\ (x) - 0{,}5$



b) $y = |Mant\ (x) - 0{,}5|$



5 TRANSFORMACIONES ELEMENTALES DE FUNCIONES

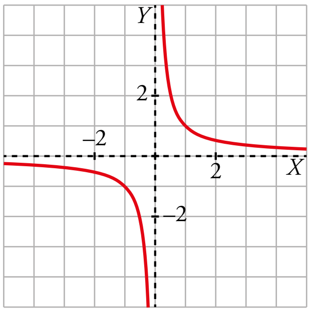
C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 3.1. (EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 268

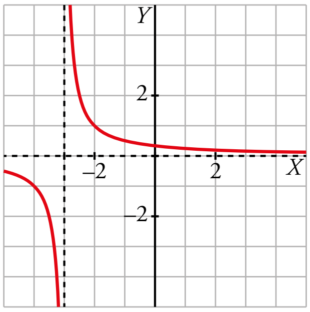
1 Representa sucesivamente.

a) $y = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \frac{1}{x+3}$ **c)** $y = -\frac{1}{x+3}$ **d)** $y = -\frac{1}{x+3} + 8$

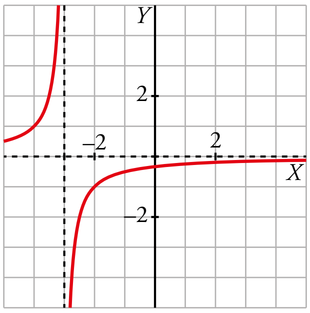
a)



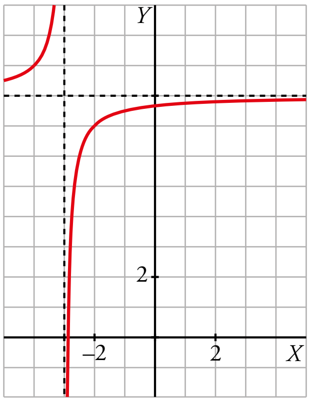
b) Se obtiene desplazando la gráfica anterior tres unidades a la izquierda.



c) Es la simétrica de la anterior respecto del eje X.



d) Es igual a la anterior trasladándola 8 unidades hacia arriba.



Página 269

2 **Si $y = f(x)$ pasa por (3, 8), di un punto de:**

$$y = f(x) - 6,\ y = f(x+4),\ y = \frac{1}{2}f(x),\ y = 2f(x),\ y = -f(x),\ y = f(-x),\ y = -2f(-x) + 3$$

$y = f(x) - 6 \to (3, 2)$ $\quad y = f(x+4) \to (-1, 8)$ $\quad y = \frac{1}{2}f(x) \to (3, 4)$

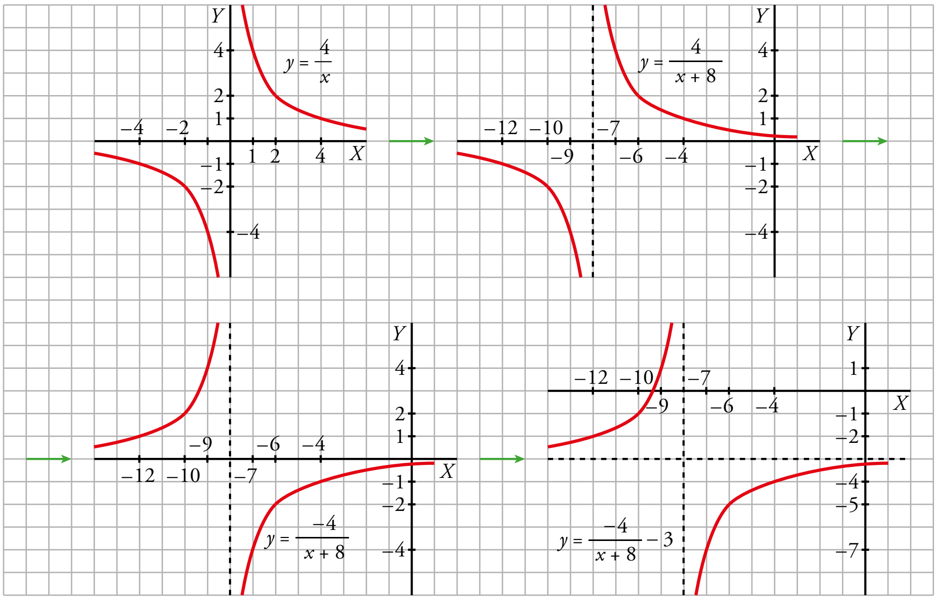
$y = 2f(x) \to (3, 16)$ $\quad y = -f(x) \to (3, -8)$ $\quad y = f(-x) \to (-3, 8)$

$y = -2f(-x) + 3 \to (-3, -13)$

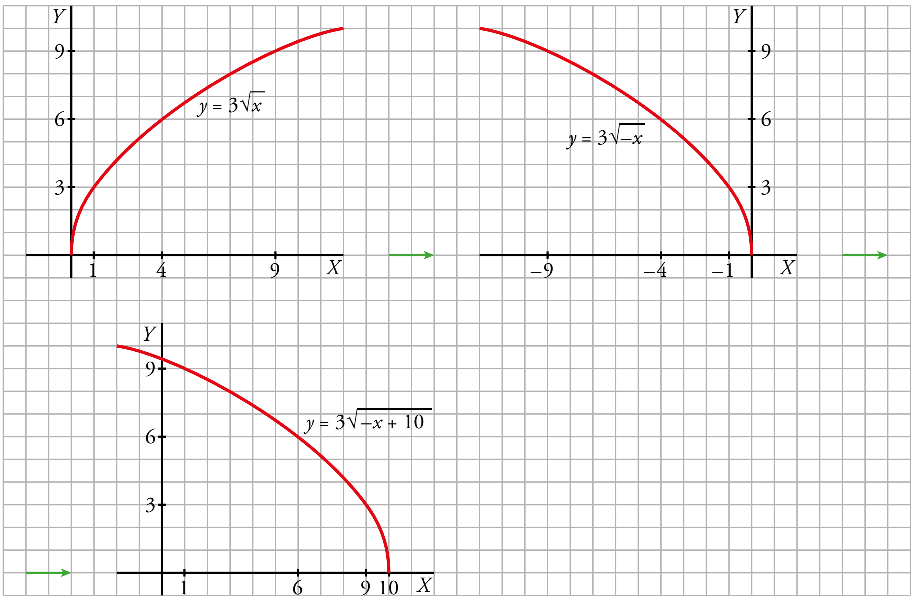
3 **Representa.**

a) $y = -\dfrac{4}{x+8} - 3$ $\qquad$ **b)** $y = 3\sqrt{-x+10}$

a) Representamos $y = \dfrac{4}{x} \to y = \dfrac{4}{x+8} \to y = -\dfrac{4}{x+8} \to y = -\dfrac{4}{x+8} - 3$



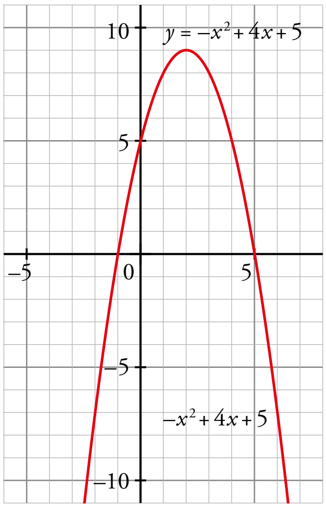
b) Representamos $y = 3\sqrt{x} \to y = 3\sqrt{-x} \to y = 3\sqrt{-(x-10)}$



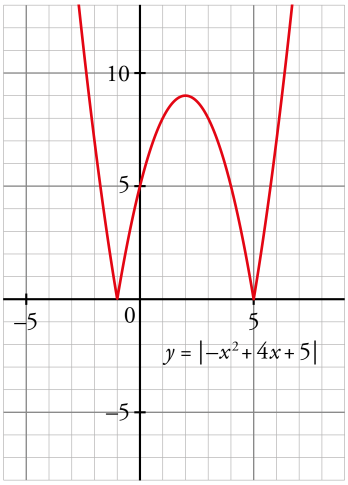
Página 270

4 **Representa:** $y = |-x^2 + 4x + 5|$

Dibujamos la parábola sin valor absoluto:

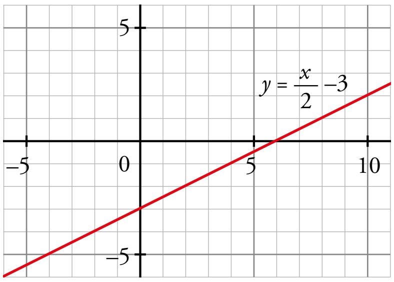


Los puntos de corte con el eje de las abscisas son $x = -1$; $x = 5$. Por tanto entre estos dos valores la gráfica sube sus valores por encima del eje de las X:

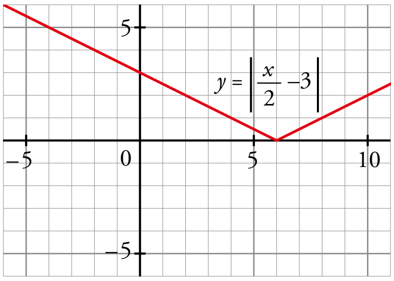


5 **Representa gráficamente:** $y = \left|\dfrac{x}{2} - 3\right|$

Dibujamos primero la recta sin valor absoluto $y = \dfrac{x}{2} - 3$:



Corta el eje de las X en (6,0) por lo que subimos todo el trozo de recta que quedaba por debajo de este eje:



6 ▶ COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) **CE 3.1.** (EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 272

1 **Si $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = x^2$, obtén las expresiones de $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$. Halla $f[g(4)]$ y $g[f(4)]$.**

$f[g(x)] = f[x^2] = x^4 - 5x^2 + 3$

$g[f(x)] = g[x^2 - 5x + 3] = (x^2 - 5x + 3)^2$

$f[g(4)] = 179;\ g[f(4)] = 1$

2 **Si $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = x + \frac{\pi}{2}$, obtén las expresiones de $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$. Halla el valor de estas funciones en $x = 0$ y $x = \pi/4$.**

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(sen\ x) = sen\ x + \frac{\pi}{2}$$

$$f \circ f(x) = f[f(x)] = f(sen\ x) = sen\ (sen\ x)$$

$$g \circ g(x) = g[g(x)] = g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = x + \pi$$

$$f \circ g(0) = sen\ \frac{\pi}{2} = 1$$

$$g \circ f(0) = sen\ 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$f \circ f(0) = sen\ (sen\ 0) = 0$$

$$g \circ g(0) = 0 + \pi = \pi$$

$$f \circ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g \circ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2} + \pi}{2}$$

$$f \circ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(sen\ \frac{\pi}{4}\right) = 0,65$$

$$g \circ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

3 **Si $f(x) = sen\ x$, $g(x) = x^2 + 5$, halla las expresiones de las funciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$. Halla el valor de estas funciones en $x = 0$ y $x = 2$.**

- $f(g(x)) = f(x^2 + 5) = sen\,(x^2 + 5)$

  $f(g(0)) = f(5) = sen\,5 = -0,96$

  $f(g(2)) = f(9) = sen\,9 = 0,41$

- $g(f(x)) = g(senx) = sen^2 x + 5$

  $g(f(0)) = g(0) = 5$

  $g(f(2)) = g(sen\,2) = sen^2 2 + 5 = 5,83$

- $f(f(x)) = f(senx) = sen\,(senx)$

  $f(f(0)) = f(0) = 0$

  $f(f(2)) = f(sen\,2) = f(0,91) = 0,79$

- $g(g(x)) = g(x^2 + 5) = (x^2 + 5)^2 + 5 = x^4 + 10x^2 + 30$

  $g(g(0)) = g(5) = 25 + 5 = 30$

  $g(g(2)) = g(9) = 81 + 5 = 86$

4 **Dado $f(x) = x + 1$, obtén en cada caso la función $g(x)$ para que se cumpla:**

a) $g[f(x)] = x - 2$

b) $f[g(x)] = x^2 + 3x - 2$

c) $g \circ f(x) = x^2 + 2x$

d) $f \circ g(x) = x$

a) $g(x) = x - 3 \;\rightarrow\; g(f(x)) = g(x + 1) = x + 1 - 3 = x - 2$

b) $g(x) = x^2 + 3x - 3 \;\rightarrow\; f(g(x)) = f(x^2 + 3x - 3) = x^2 + 3x - 3 + 1 = x^2 + 3x - 2$

c) $g(x) = x^2 - 1 \;\rightarrow\; g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 - 1 = x^2 + 2x$

d) $g(x) = x - 1 \;\rightarrow\; f(g(x)) = f(x - 1) = x - 1 + 1 = x$

7 FUNCIÓN INVERSA O RECÍPROCA DE OTRA

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 3.1. (EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 273

1 **[El alumnado puede colaborar explicando el sentido de las afirmaciones trabajando así la destreza expresión oral].**

¿Verdadero o falso?

a) La función recíproca de $y = x$ es $y = \frac{1}{x}$.

b) Cada una de las funciones $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ es recíproca de sí misma.

c) La inversa de $y = \frac{9}{x}$, $x \in [3, 9]$ es $y = \frac{9}{x}$, $x \in [1, 3]$.

d) Si una función es creciente, su recíproca es decreciente.

a) Falso. Las gráficas de esas funciones no son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante, puesto que una es recta y la otra es curva.

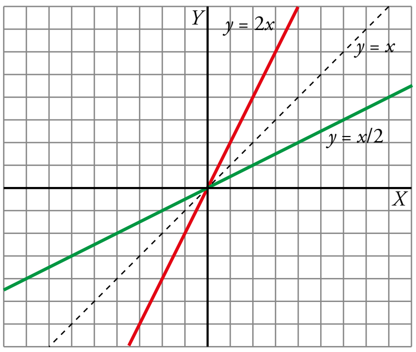
b) Verdadero. Si $f(x) = x$ y calculamos $f \circ f(x) = f[f(x)] = f(x) = x$, vemos que f es recíproca de sí misma.

Análogamente, si $g(x) = \frac{1}{x}$ y calculamos $g \circ g(x) = g[g(x)] = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1/x} = x$, vemos que g es recíproca de sí misma.

c) Verdadero. Podemos comprobarlo en el gráfico. La gráfica verde es simétrica, respecto de la bisectriz del primer cuadrante, de la gráfica roja.

d) Falso. Por ejemplo, la recíproca de la función $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, es la función $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, y ambas son crecientes.

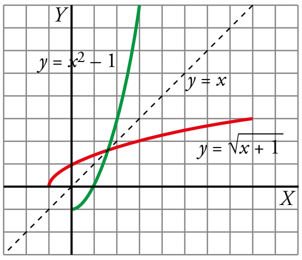
2 **Representa $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$ y comprueba que son inversas.**



3 **Comprueba que hay que descomponer $y = x^2 - 1$ en dos ramas para hallar sus inversas. Averigua cuáles son.**

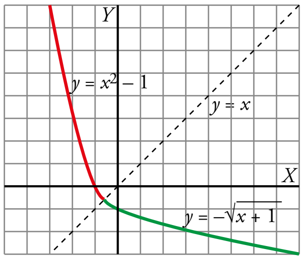
a) $y = x^2 - 1$ si $x \geq 0$

$y^{-1} = \sqrt{x+1}$



b) $y = x^2 - 1$ si $x < 0$

$y^{-1} = -\sqrt{x+1}$



4 **Comprueba que la función recíproca de $y = 2x + 4$ es $y = \frac{1}{2}x - 2$.**

Llamemos $f(x) = 2x + 4$ y $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$

$f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 2\left(\frac{1}{2}x - 2\right) + 4 = x$

$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2x + 4) = \frac{1}{2}(2x + 4) - 2 = x$

Luego $g = f^{-1}$.

Página 274

5 **¿Verdadero o falso?**

La función recíproca de $y = 2^x$, $x > 0$ es $y = log_2 x$, $x > 1$.

Falso. La función recíproca de $y = 2^x$, $x > 0$ es $y = log_2 x$, $x > 0$.

6 **Halla la función recíproca de:**

$$y = log_2 x, \ x \in [8, 32]$$

La función recíproca es $y = 2^x$, $x \in [3, 5]$.

8 FUNCIONES ARCO

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.13. (EA 1.13.2.) CE 3.1. (EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 276

1 **¿Verdadero o falso?**

a) **La función $y = arc\ tg\ x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ es la recíproca de la función $y = tg\ x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.**

b) $arc\ sen\ 0 = \frac{\pi}{2}$ **c)** $arc\ cos\ 0 = \frac{\pi}{2}$ **d)** $arc\ cos\ \pi = -1$

e) $arc\ cos\ (-1) = \pi$ **f)** $arc\ sen\ \frac{\pi}{2}$ **no existe** **g)** $arc\ tg\ 1 = \frac{\pi}{4}$

a) Verdadero. Las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

b) Falso. $sen\ 0 = 0 \rightarrow arc\ sen\ 0 = 0$

c) Verdadero, ya que $cos\ \frac{\pi}{2} = 0$.

d) Falso, ya que $cos\ (-1) = 0,54$.

e) Verdadero: $cos\ \pi = -1$

f) Verdadero, ya que *sen x* toma valores en (–1, 1), y este intervalo es el dominio de la función *arc sen x*.

g) Verdadero: $tg\ \frac{\pi}{4} = 1$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 1.6. (EA 1.6.1.)

Página 277

Hazlo tú

1. Dominio de definición

- **Halla el dominio de definición de las funciones:**

a) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$

b) $g(x) = ln\ (sen\ x)$

a) Buscamos los valores de x tales que $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{-2} = \frac{-5 \pm 1}{-2} \rightarrow x = 2,\ x = 3$$

Estos dos puntos pertenecen al dominio, veamos qué pasa en los intervalos restantes:

$-x^2 + 5x - 6 \geq 0 \rightarrow -(x-2)(x-3) \geq 0 \rightarrow (x-2)(x-3) \leq 0$

- Si $x < 2 \rightarrow x - 2 < 0;\ x - 3 < 0 \rightarrow (x-2)\ (x-3) > 0$
- Si $2 < x < 3 \rightarrow x - 2 > 0;\ x - 3 < 0 \rightarrow (x-2)\ (x-3) < 0$
- Si $x < 3 \rightarrow x - 2 > 0;\ x - 3 > 3 \rightarrow (x-2)\ (x-3) > 0$

Por tanto:

$Dom\ f = [2, 3]$

b) La función logaritmo solamente está definida para valores positivos, por lo que necesitamos que se cumpla:

$sen\ x > 0 \rightarrow 2k\pi < x < (2k+1)\pi$, para k entero

Por tanto:

$Dom\ g = \{x \mid 2\pi < x < (2k+1)\pi$, para k entero$\}$

Página 278

Hazlo tú

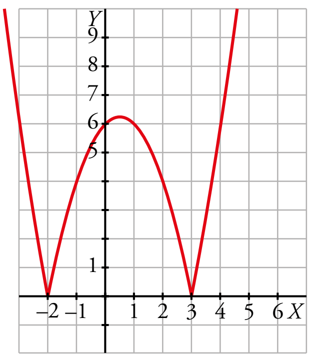
4. Valor absoluto de una función

- **Define por intervalos y representa:**

a) $f(x) = |x^2 - x - 6|$ **b)** $f(x) = x - |x|$ **c)** $f(x) = ln\ |x - 3|$

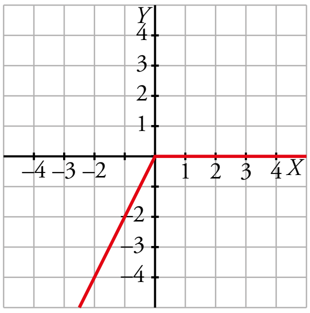
a) La parábola $y = x^2 - 4x - 5$ tiene su vértice en el punto $(2, -9)$. Es negativa entre -1 y 5. Luego en ese intervalo su gráfica es $-f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si } -1 < x \leq 5 \\ x^2 - 4x - 5 & \text{si } 5 < x \end{cases}$$



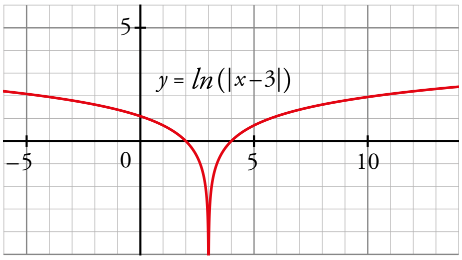
b) Por la definición de la función valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x-(-x) & \text{si } x<0 \\ x-x & \text{si } 0 \le x \end{cases} = \begin{cases} 2x & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$



c) $|x-3| > 0$ si $x \ne 3 \rightarrow Dom\, f(x) = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

$$f(x) = \begin{cases} ln\,(x-3) & \text{si } x>3 \\ ln\,(-x+3) & \text{si } x<3 \end{cases}$$



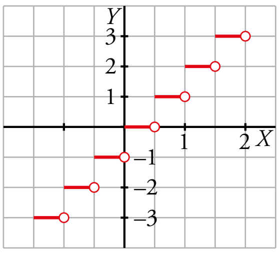
Página 279

Hazlo tú

5. Función «parte entera»

- **Representa $f(x) = Ent\,(2x)$.**

Esta gráfica es como la de la función parte entera, pero contraída a la mitad en el sentido del eje horizontal.



Página 280

Hazlo tú

6. Composición y función inversa

- **Halla $g \circ f$ y $f \circ g$, siendo: $f(x) = 3x^2 - 5$ y $g(x) = \sqrt{2^{x-1}}$**

$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(3x^2 - 5) = \sqrt{2^{3x^2-5-1}} = \sqrt{2^{3x^2-6}}$

$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{2^{x-1}}) = 3\sqrt{2^{x-1}}^2 - 5 = 3 \cdot 2^{x-1} - 5$

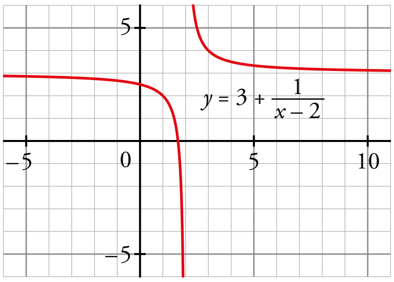
7. Representación de hipérbolas

- **Representa la función $y = \dfrac{3x-5}{x-2}$ y su inversa.**

Dividimos los polinomios de numerador entre denominador y obtenemos:

$$\frac{3x-5}{x-2} = \frac{3(x-2)+1}{x-2} = 3 + \frac{1}{x-2} \;\rightarrow\; f(x) = 3 + \frac{1}{x-2}$$

La gráfica de $f(x)$ es como la gráfica de $\dfrac{1}{x}$ desplazada 3 unidades hacia arriba y 2 unidades a la derecha:

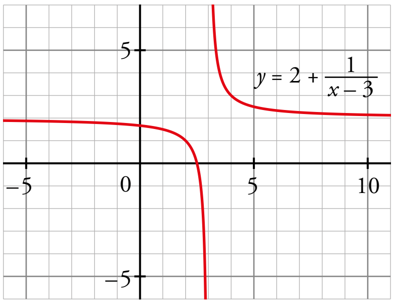


Tenemos que hallar ahora su inversa, por lo que cambiamos sus variables y despejamos:

$$x = \frac{3y-5}{y-2} \;\rightarrow\; x(y-2) = 3y-5 \;\rightarrow\; xy - 2x = 3y - 5 \;\rightarrow\; y(x-3) = -5 + 2x \;\rightarrow\; y = \frac{2x-5}{x-3}$$

Por tanto $f^{-1}(x) = \dfrac{2x-5}{x-3} = 2 + \dfrac{1}{x-3}$

La gráfica de la función inversa es como la de $\dfrac{1}{x}$ desplazando 2 unidades hacia arriba y 3 hacia la derecha $f^{-1}(x) = 2 + \dfrac{1}{x-3}$.



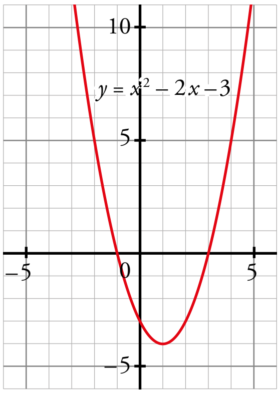
8. Transformaciones elementales de funciones

- **Describe las transformaciones que debemos hacer en la gráfica de $y = x^2$ para representar $f(x) = x^2 - 2x - 3$.**

Completando cuadrados:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = (x-1)^2 - 4$$

Por lo tanto para dibujar su gráfica partimos de la gráfica de $y = x^2$, hacemos una traslación de 1 unidad a la derecha y 4 unidades hacia abajo:



EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 3.1. (EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 280

1. Interpolación lineal

- **El porcentaje de personas que tenían acceso a Internet en España era en 2018 el 86,1 % y, en 2014, el 74,4 %.**

  Estimar el porcentaje en 2016.

  Para escribir la recta que pasa por A y B buscamos su vector director, por ejemplo puede ser:

  $\overrightarrow{BA} = (4; 11,7)$

  Podemos escribir esta recta:

  $$\frac{x-2018}{4} = \frac{y-86,1}{11,7} \ \to\ y = \frac{11,7x - 23\,610,6 + 344,4}{4} \ \to\ y = 2,925x - 5\,816,55$$

  Así:

  $f(x) = 2,925x - 5\,816,55$

  Por tanto: $f(2016) = 80,25$

2. Ecuación de una parábola

- **Escribir la ecuación de una parábola que tiene el vértice en el punto (1, 9) y corta al eje Y en (0, 8).**

  Buscamos a, b, c sabiendo que $V(1,9) \to 1 = -\dfrac{b}{2a} \to -2a = b$ (1)

  Sustituimos en la ecuación los dos puntos que sabemos que pertenecen a la parábola:

  $P(0,8) \to 8 = c$ (2)

  $V(1,9) \to 9 = a + b + c$ (3)

  Resolviendo el sistema formado por (1), (2), (3):

  $$c = 8,\ a = -1,\ b = 2 \ \to\ y = -x^2 + 2x + 8$$

  Una segunda forma de resolver el problema es considerando $y = a(x-1)^2 + k$:

  $V(1,9) \to 9 = k$

  $P(0,8) \to 8 = a + k \to a = -1 \to y = -(x-1)^2 + 9$

3. Una función polinómica

- **Considerar todos los conos cuya generatriz mide 15 cm.**

  a) Escribir la función que nos da el volumen del cono según lo que mide su altura, x.

  b) ¿Cuál es su dominio de definición?

  a) Usando el teorema de Pitágoras tenemos que:

  $R = \sqrt{15^2 - x^2} = \sqrt{225 - x^2}$

  Luego $V(x) = \dfrac{1}{3}\pi x\left(\sqrt{225 - x^2}\right)^2 = \dfrac{\pi(225x - x^3)}{3}$

  b) La altura es un número positivo que no puede ser mayor que la generatriz. Por tanto, el dominio de definición de $V(x)$ es $Dom = (0, 15)$.

4. Función logística

- **La función $f(x) = \dfrac{12\,000}{1 + 499\,(1{,}09^{-x})}$ da las ventas totales de un videojuego x días después de su lanzamiento. ¿En qué día se llegó a 6000 juegos vendidos?**

Tenemos que hallar el valor de x tal que:

$$\frac{12\,000}{1+499\,(1{,}09^{-x})} = 6000 \rightarrow \frac{12\,000}{6\,000} = 1 + 499(1{,}09^{-x}) \rightarrow 2 - 1 = 499(1{,}09^{-x}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{499} = 1{,}09^{-x}$$

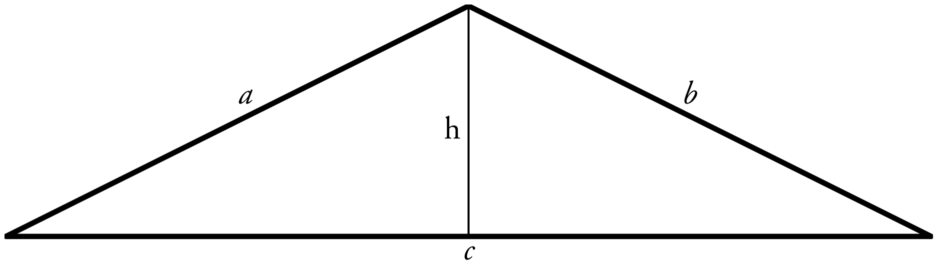
Tomando logaritmos y despejando:

$$\frac{\log 499}{\log 1{,}09} = x \rightarrow x = 72 \text{ días}$$

5. Área de un triángulo

- **El perímetro de un triángulo isósceles es 30 cm. Expresa su área en función del lado desigual. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esa función?**

El triángulo es isósceles de lados a, b, c, por lo que tendrá dos lados iguales (por ejemplo, $a = b$).



Por ser $a = b$, la altura h parte al lado c en dos partes iguales a las que llamaremos x:

$$c = 2x$$

Conocemos su perímetro: $P = 30 = 2a + 2x \rightarrow a = 15 - x$

Por el teorema de Pitágoras, aplicado a uno de los triángulos rectángulos obtenidos al dibujar la altura:

$a^2 = \text{h} + x^2 \rightarrow (15 - x)^2 = 225 - 30x + x^2 = \text{h}^2 + x^2 \rightarrow \text{h} = \sqrt{225 - 30x}$

Ya podemos escribir la función área en función de x:

$$A(x) = \frac{2x\text{h}}{2} = x\sqrt{225 - 30x}$$

Para hallar el dominio hay que tener en cuenta que el área no puede ser cero, si no, no existiría el triángulo, y que el interior de la raíz tiene que ser positivo (tampoco puede ser igual a cero por el mismo motivo). Por lo que:

$x > 0$ y $225 - 30x > 0 \rightarrow x \in (0; 7{,}5)$

Para estos valores de x el máximo que alcanza la función es $25\sqrt{3}$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 281

Para practicar

Dominio de definición

1 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \dfrac{2}{(x+5)^2}$ **b)** $y = \dfrac{3x+2}{x^3+x}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x^2-x+2}$ **d)** $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2}$

a) La función no está definida cuando $x = -5$. Su dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{-5\}$.

b) $x^3 + x = 0$, tiene como única solución $x = 0$. El dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$.

c) La función no está definida cuando $x^2 - x + 2 = 0$, que no tiene solución. Por tanto, el dominio es $Dom = \mathbb{R}$.

d) Las fracciones no se pueden evaluar ni en $x = 0$ ni en $x = -2$. El dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$.

2 Estudia el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \sqrt{2x+5}$ **b)** $y = \sqrt{7-x}$ **c)** $y = \sqrt{x^2+3x+4}$ **d)** $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$

a) Para que esté definida debe ser $2x + 5 \geq 0$, cuya solución es $\left[-\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$. Su dominio es este intervalo, $Dom = \left[-\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

b) En este caso $x \leq 7$. El dominio de definición es $Dom = (-\infty, 7]$.

c) $x^2 + 3x + 4 \geq 0 \rightarrow Dom = \mathbb{R}$

d) Para que ambas raíces existan simultáneamente debe cumplirse a la vez que $x \geq 1$ y $x \geq 2$. El dominio es $Dom = [2, +\infty)$.

3 Di cuál es el dominio de definición de:

a) $y = 3 + 2^{1-x}$ **b)** $y = \log_2 (x + 3)$ **c)** $y = \ln (2 - x)$ **d)** $y = \sqrt{2^x}$

a) Su dominio es $\mathbb{R}$ porque la función exponencial siempre está definida.

b) Para que exista el logaritmo, su argumento debe ser positivo. Por tanto, $x + 3 > 0$ y el dominio es $Dom = (-3, +\infty)$.

c) Análogamente al caso anterior, $x < 2$. Su dominio es $Dom = (-\infty, 2)$.

d) La función exponencial siempre toma valores positivos. Por tanto, la raíz siempre se puede evaluar y el dominio de definición de esta función es $Dom = \mathbb{R}$.

4 Determina el dominio de definición de las funciones:

a) $y = e^{\sqrt{-x}}$ **b)** $y = \ln (\sqrt{x} - 2)$ **c)** $y = \sqrt{1 + \log_2 x}$

d) $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2x+1}$ **e)** $y = \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}}$ **f)** $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$

Los apartados e) y f), ¿corresponden a la misma función?

a) Para que exista la raíz: $-x \geq 0 \rightarrow Dom = (-\infty, 0]$

b) Para que exista la raíz: $x \geq 0$
Para que exista el logaritmo: $\sqrt{x} - 2 > 0 \rightarrow x > 4$ $\Bigg\} \rightarrow Dom = (4, +\infty)$

c) Para que exista la raíz: $1 + log_2 x \geq 0 \;\rightarrow\; log_2 x \geq -1$
La igualdad se da para $2^{-1} = x \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{2}$ $\Bigg\} \rightarrow\; Dom = \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

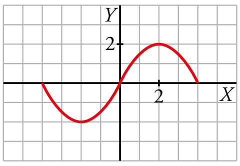
d) Para que exista la raíz: $4 - x^2 \geq 0 \;\rightarrow\; x \in [-2, 2]$
Para que no se anule el denominador: $x \neq \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; Dom = \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ $\Bigg\} \rightarrow\; Dom = \left[-2, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, 2\right]$

e) Para que exista la raíz del numerador: $x + 3 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq -3$
Para que exita la raíz del denominador y sea no nula: $x - 2 > 0 \;\rightarrow\; x > 2$ $\Bigg\} \rightarrow\; Dom = (2, +\infty)$

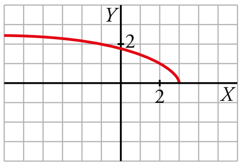
f) Para que exista la raíz, el denominador no puede ser cero: $x \neq 2$
Además, tiene que ser de un número positivo o cero: $\dfrac{x+3}{x-2} \geq 0 \;\rightarrow\; x > 2$ o $x < -3$ $\Bigg\} \rightarrow\; Dom = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$

5 Observa las gráficas de estas funciones e indica cuál es su dominio de definición y su recorrido:

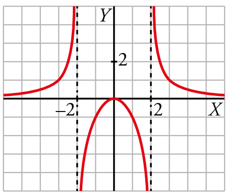
a)



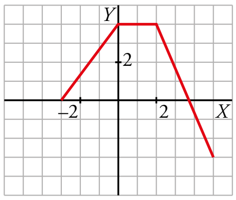
b)



c)



d)



a) Dominio: $[-4, 4]$ Recorrido: $[-2, 2]$

b) Dominio: $(-\infty, 3]$ Recorrido: $[0, +\infty)$

c) Dominio: $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ Recorrido: $\mathbb{R}$

d) Dominio: $[-3, 5]$ Recorrido: $[-3, 4]$

6 La función $h(t) = 80 + 64t - 16t^2$ nos da la altura a la que está una pelota lanzada hacia arriba en el instante t, hasta que vuelve al suelo. ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

Necesitamos calcular el tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo. Para ello es necesario resolver la ecuación:

$80 + 64t - 16t^2 = 0$, que tiene una solución posible, $t = 5$.

Como el tiempo no puede ser negativo, el dominio es $Dom = [0, 5]$.

El recorrido de la función definida entre 0 y 5 tendrá su máximo en el vértice de la parábola.

$h(t) = 16(5 + 4t - t^2) \;\rightarrow\; h(t) - 161(t^2 - 4t + 4 - 4 + 5) \;\rightarrow\; h(t) = -16((t-2)^2 + 9) \;\rightarrow$

$\rightarrow$ El vértice está en $t = 2$.

$h(2) = 144$

$h(0) = 5$

$h(5) = 0$

Por tanto, el recorrido es el intervalo $[0, 144]$.

7 **Escribe la función que nos da el área de un rectángulo de perímetro 16 cm, en función de su base *x*. ¿Cuál es su dominio de definición y su recorrido?**

La función área es $A(x) = x(8 - x) = 8x - x^2$, que es una función cuadrática.

Su dominio es $Dom = (0, 8)$.

El valor máximo lo alcanza en el vértice, cuya abscisa es $\frac{-8}{-2} = 4$. Este valor es $A(4) = 16$. Por tanto, el recorrido de la función es el intervalo (0, 16].

8 **[El análisis de la función del enunciado permite al alumnado trabajar la iniciativa (dimensión productiva de esta clave)].**

La temperatura de una persona, desde que comienza su enfermedad hasta que vuelve a tener 37 °C, ha evolucionado según la función $T(t) = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 37$, siendo t el número de días transcurridos desde el inicio de la enfermedad. ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

Calculamos los días en los que tiene 37 °C.

$$-0{,}1t^2 + 1{,}2t + 37 = 37 \rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 12$$

Es decir, a los 12 días vuelve a tener 37 °C de temperatura. El dominio es el intervalo [0, 12].

Como se trata de una función cuadrática con las ramas hacia abajo, el valor máximo lo alcanza en el vértice, cuya abscisa es $\frac{-1{,}2}{-0{,}2} = 6$.

La temperatura máxima es $-0{,}1 \cdot 6^2 + 1{,}2 \cdot 6 + 37 = 40{,}6$ °C.

En consecuencia, el recorrido es el intervalo [37; 40,6].

Funciones elementales

9 **Interpretación compartida. [El trabajo con imágenes permite que el alumnado ponga en práctica esta técnica].**

Asocia a cada gráfica su fórmula.

a) $y = 1{,}5^x$

b) $y = \sqrt{x + 2}$

c) $y = \frac{x^2}{3} - 1$

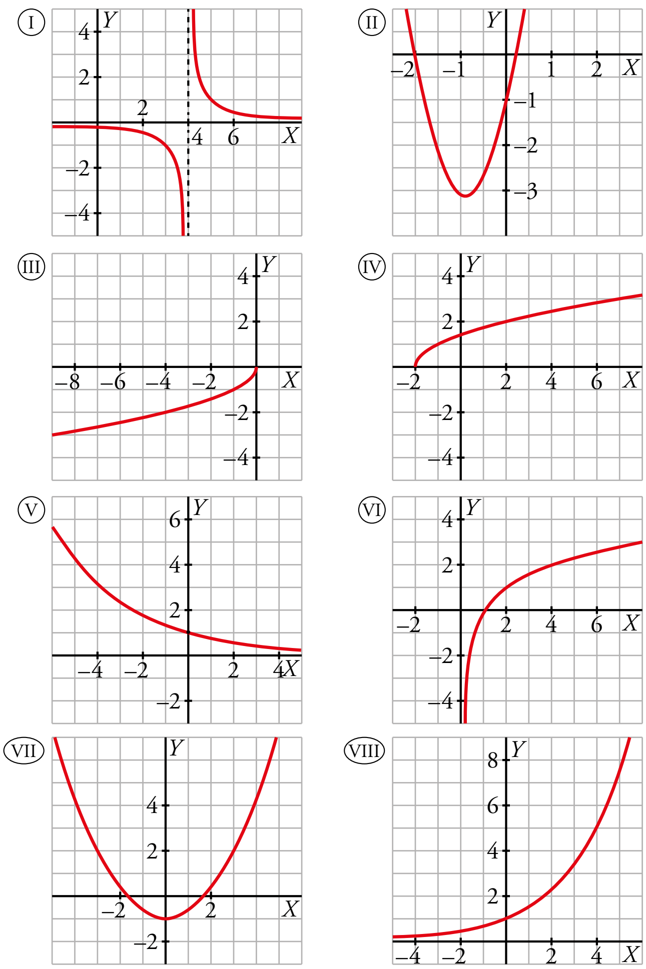
d) $y = \frac{1}{x - 4}$

e) $y = 3x^2 + 5x - 1$

f) $y = 0{,}75^x$

g) $y = \log_2 x$

h) $y = -\sqrt{-x}$



a) VIII

b) IV

c) VII

d) I

e) II

f) V

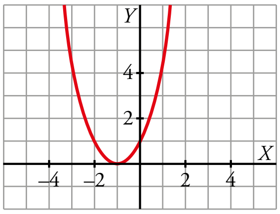
g) VI

h) III

10 **Representa las siguientes parábolas hallando el vértice, los puntos de corte con los ejes de coordenadas y algún punto próximo al vértice:**

a) $y = x^2 + 2x + 1$ **b)** $y = 0{,}5x^2 - 2x + 1$ **c)** $y = -x^2 + 3x - 5$ **d)** $y = -1{,}5x^2 - 3x - 2$

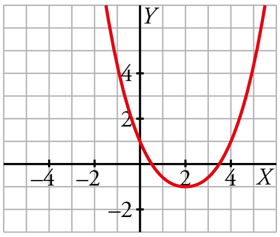
a)



Vértice: $(-1, 0)$

Cortes con los ejes: $(-1, 0)$, $(0, 1)$

b)



Vértice: abscisa $= \frac{2}{1} = 2$; ordenada $= 0{,}5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = -1$

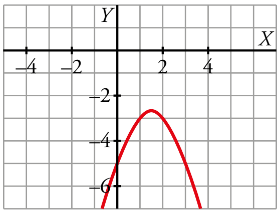
Corte con el eje vertical: $x = 0 \rightarrow y = 1$

Corte con el eje horizontal:

$y = 0 \rightarrow 0{,}5x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{1} = 2 \pm \sqrt{2} \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{2};\ x_2 = 2 - \sqrt{2}$

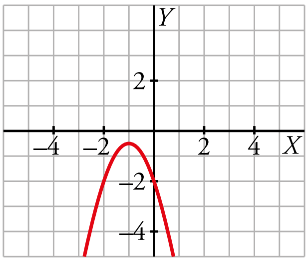
c)



Vértice: $\left(\frac{3}{2}, \frac{-11}{4}\right)$

Cortes con los ejes: $(-5, 0)$

d)



Vértice: abscisa $= \frac{3}{-3} = -1$; ordenada $= -1{,}5 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 2 = -0{,}5$

Corte con el eje vertical: $x = 0 \rightarrow y = -2$

Corte con el eje horizontal: $y = 0 \rightarrow 1{,}5x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{-3}$

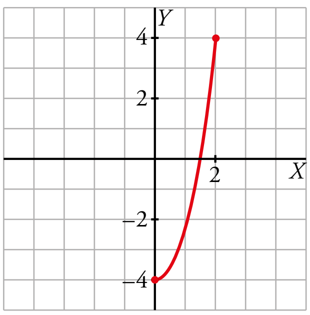
No corta al eje horizontal. Podemos evaluar ahora en algún punto cercano al vértice; por ejemplo, $(-2, -2)$, $(0, -2)$.

11 **Representa estas funciones en el intervalo indicado:**

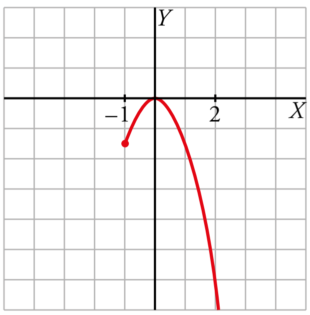
a) $y = 2x^2 - 4$, $[0, 2]$ **b)** $y = -\frac{3x^2}{2}$, $x \geq -1$ **c)** $y = \frac{1}{x}$, $x < 0$

d) $y = 0{,}6^x$, $[-3, 3]$ **e)** $y = \log_2 x$, $(0, 7]$ **f)** $y = \sqrt{x}$, $[0, 1]$

a) $y = 2x^2 - 4$, $[0, 2]$

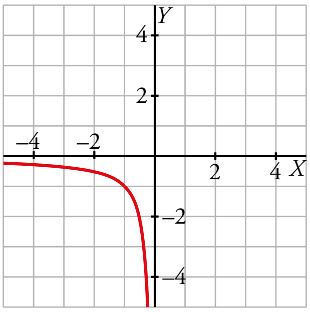


b) $y = -\frac{3x^2}{2}$, $x \geq -1$



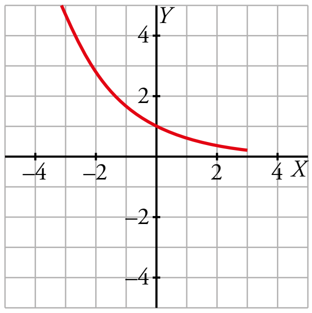
c) $y = \dfrac{1}{x}$, $x < 0$

Se trata de una rama de la función de proporcionalidad inversa y su gráfica es:



d) $y = 0{,}6^x$, $[-3, 3]$

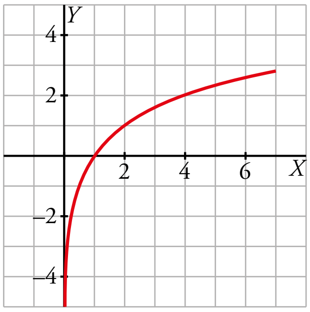
Es una función exponencial con base menor que 1. Mediante una tabla de valores obtenemos:



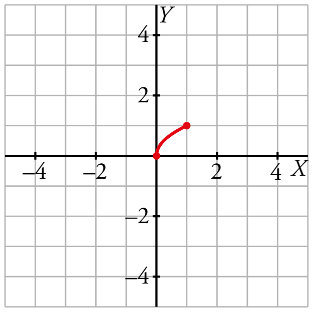
x	y
–3	4,6
–1	1,67
0	1
1	0,6
3	0,21

e) $y = log_2\, x$, $(0, 7]$

Es un fragmento de la función logaritmo en base 2.



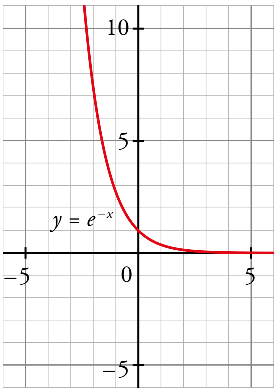
f) $y = \sqrt{x}$, $[0, 1]$



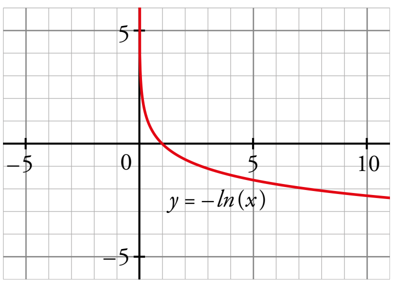
12 **Representa las siguientes funciones:**

a) $f(x) = e^{-x}$ **b)** $f(x) = -ln\, x$ **c)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$

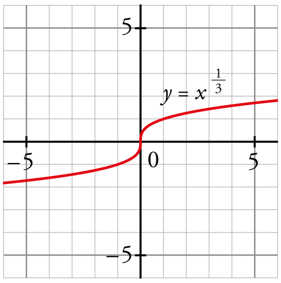
a) Es la simétrica de e^x respecto al eje Y.



b) Es la simétrica de $ln\, x$ respecto al eje X.



c) Es la inversa de x^3.



Página 282

Funciones definidas «a trozos»

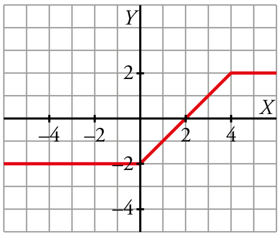
13 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

a) $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 \le x < 4 \\ 2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

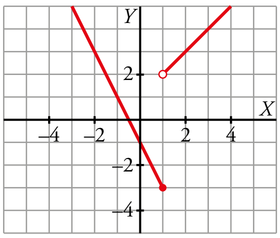
b) $y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

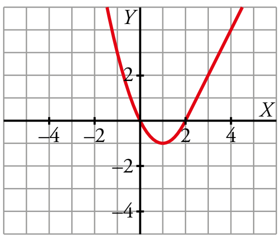
a)



b) Construimos una tabla de valores para cada recta y obtenemos la gráfica.



c) Hallamos el vértice de la parábola, (1, –1), y los puntos de corte, (0, 0) y (2, 0) (primer trozo). Construimos una tabla de valores para el segundo trozo y obtenemos:



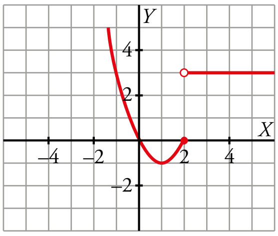
14 **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:**

a) $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \le 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

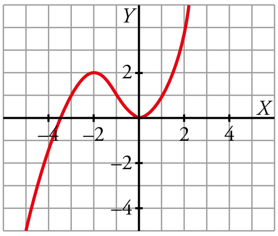
b) $y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

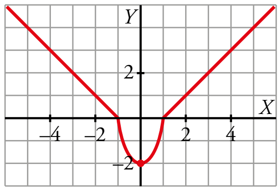
a)



b)



c)

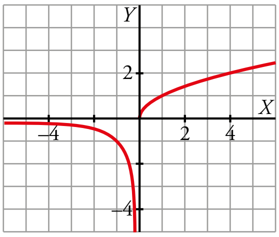


15 **Representa.**

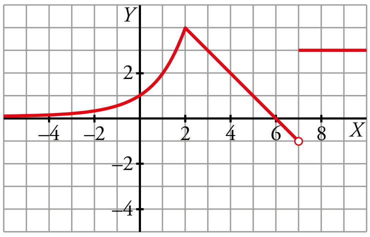
a) $y = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ -x + 6 & \text{si } 2 \le x < 7 \\ 3 & \text{si } x \ge 7 \end{cases}$

a) Está formada por dos trozos de funciones ya representadas en ocasiones anteriores.



b)



16 **Representa las siguientes funciones y defínelas como funciones «a trozos»:**

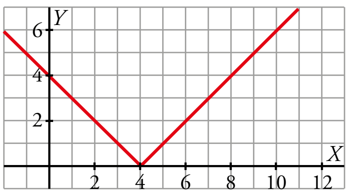
a) $y = |4 - x|$

b) $y = |3x + 6|$

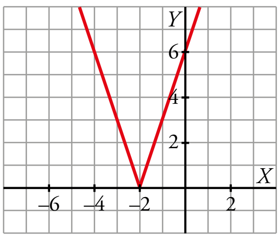
c) $y = \left|\dfrac{x-3}{2}\right|$

d) $y = |-x - 1|$

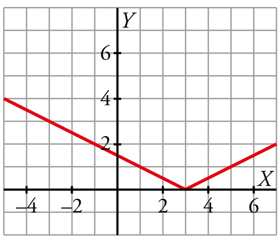
a)



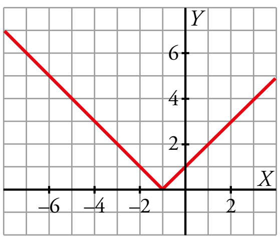
b)



c)



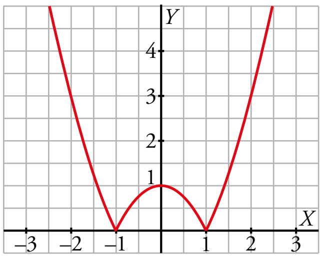
d)



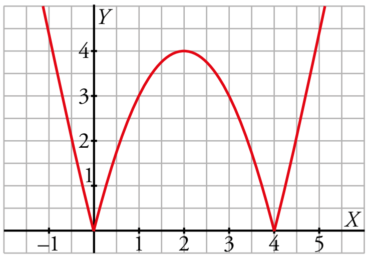
17 **Representa estas funciones:**

a) $y = |x^2 - 1|$ **b)** $y = |x^2 - 4x|$ **c)** $y = |x^2 + 2x - 3|$ **d)** $y = |x^2 - 2x + 1|$

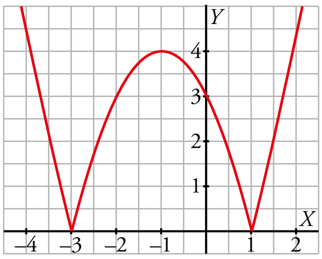
a)



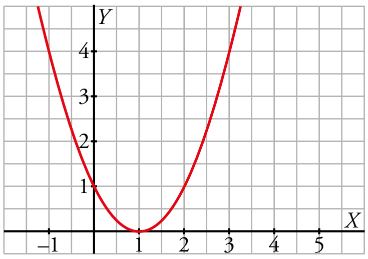
b)



c)



d)

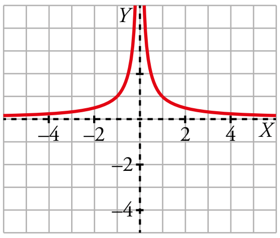


18 **Representa.**

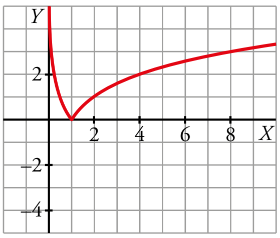
a) $y = \left|\dfrac{1}{x}\right|$ **b)** $y = |log_2\, x|$ **c)** $y = \dfrac{|x|}{x}$ **d)** $y = 2|x| + x$

La función valor absoluto de $f(x)$ mantiene la parte positiva de la gráfica y convierte la parte negativa de $f(x)$ en $-f(x)$, es decir, en la simétrica de $f(x)$ respecto del eje horizontal.

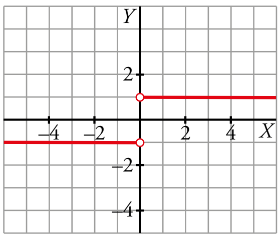
a)



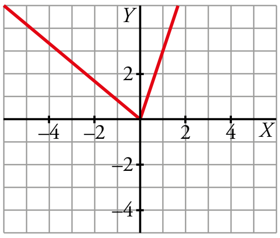
b)



c) $y = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} -\dfrac{x}{x} & \text{si } x < 0 \\[2mm] \dfrac{x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$



d) $y = 2|x| + x = \begin{cases} 2(-x) + x & \text{si } x < 0 \\ 2x + x & \text{si } x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$



19 **Representa las funciones siguientes:**

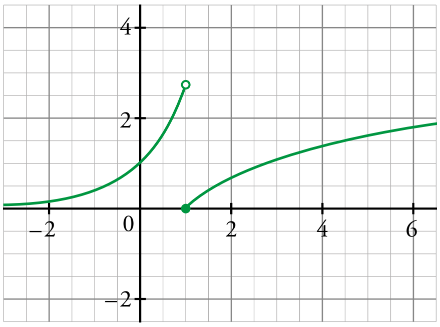
a) $y = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} \cos x & \text{si } -\pi \le x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \le x \le \pi \end{cases}$

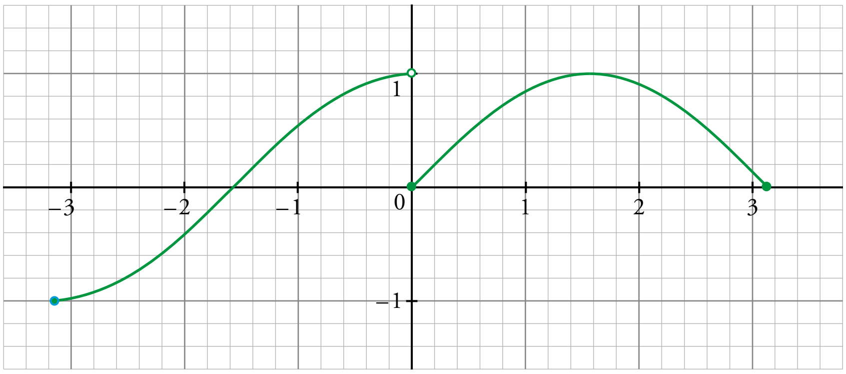
c) $y = \begin{cases} 5 - x & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{2}{x-2} & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} 2^{x-3} & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

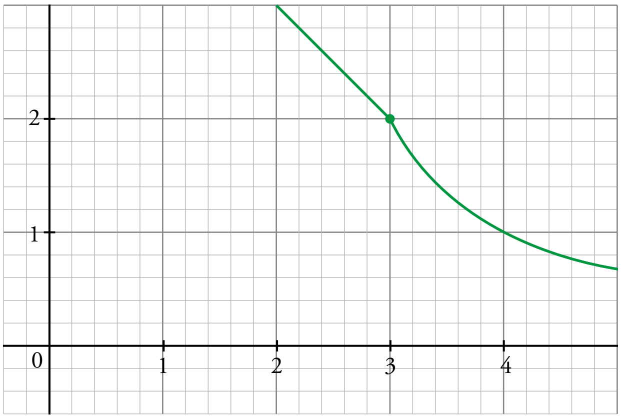
a)



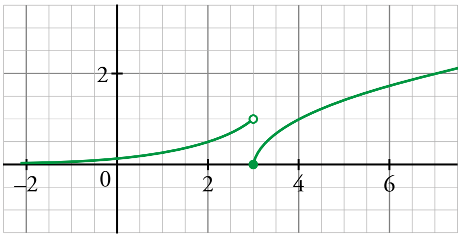
b)



c)



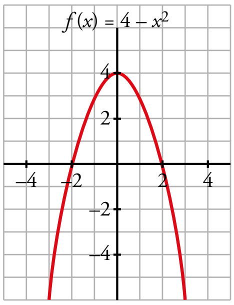
d)



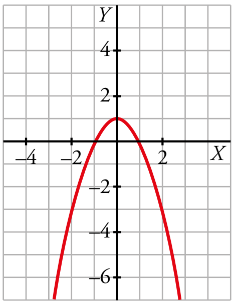
Transformaciones de una función

20 **Representa $f(x) = 4 - x^2$ y, a partir de ella, representa:**

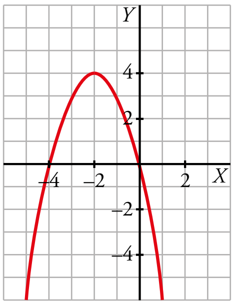
a) $y = f(x) - 3$ **b)** $y = f(x + 2)$ **c)** $y = |f(x)|$



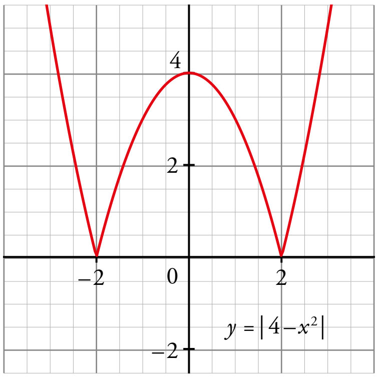
a)



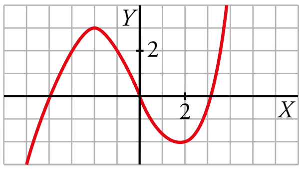
b)



c) La función no toma valores negativos:



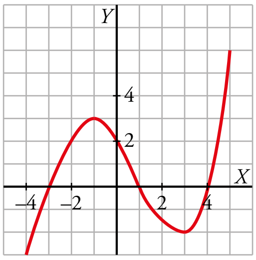
21 **Esta es la gráfica de la función $y = f(x)$:**



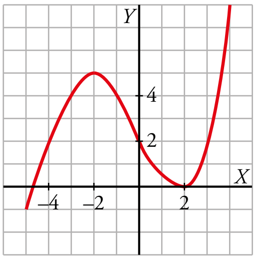
Representa, a partir de ella, las funciones:

a) $y = f(x - 1)$ **b)** $y = f(x) + 2$ **c)** $y = |f(x)|$

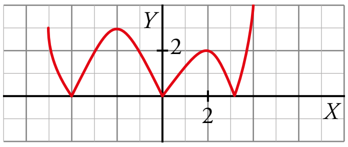
a)



b)

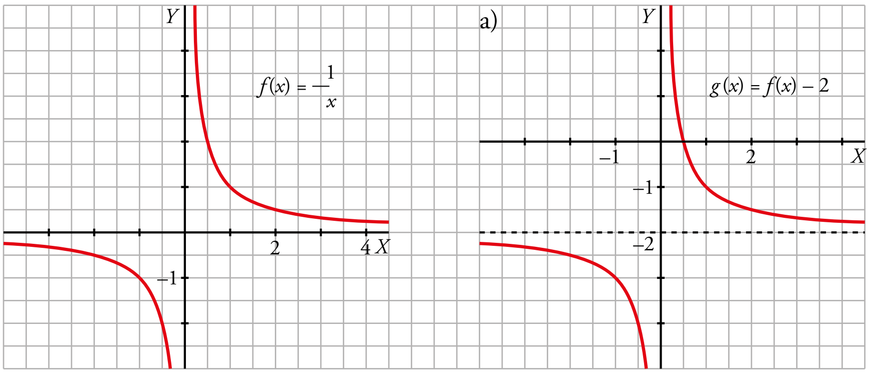


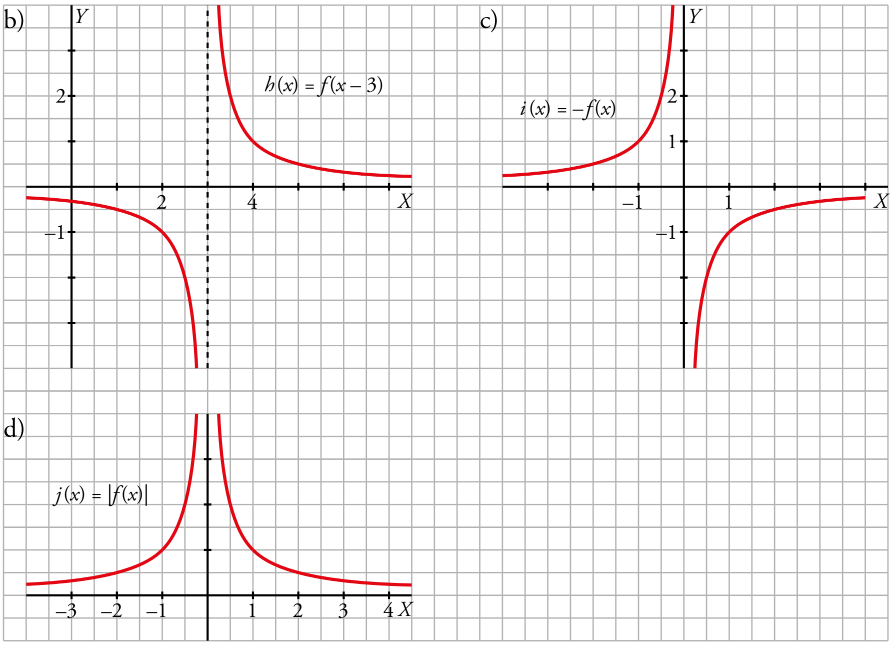
c) La función no toma valores negativos:



22 **A partir de la gráfica de $f(x) = 1/x$, representa:**

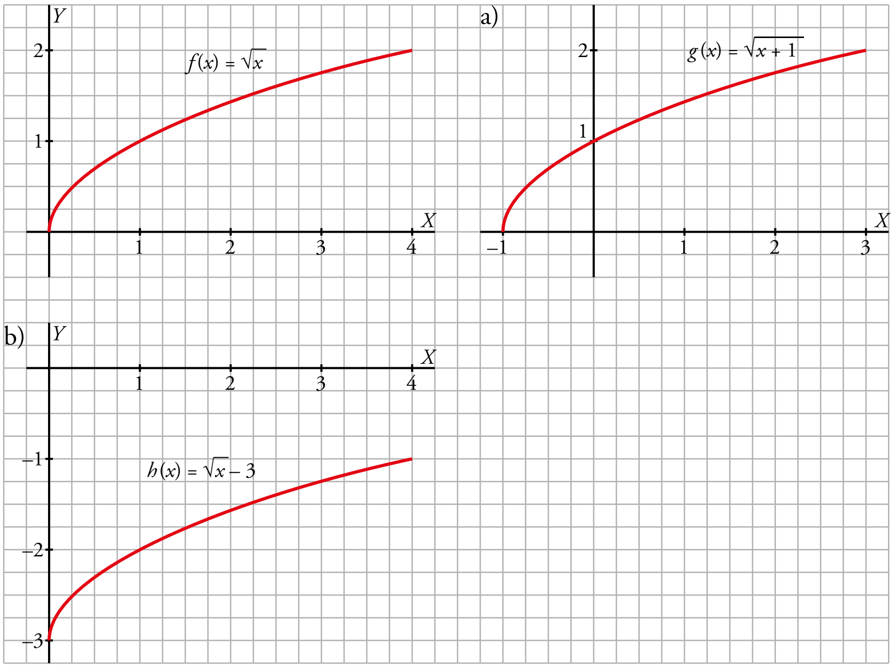
a) $g(x) = f(x) - 2$ **b)** $h(x) = f(x - 3)$ **c)** $i(x) = -f(x)$ **d)** $j(x) = |f(x)|$





23 **Representa la función $f(x) = \sqrt{x}$ y dibuja a partir de ella:**

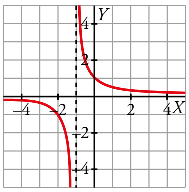
a) $g(x) = f(x + 1)$ **b)** $h(x) = f(x) - 3$ **c)** $j(x) = |f(x)|$

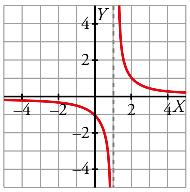


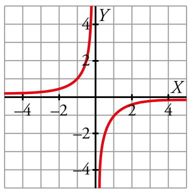
c) Es la misma gráfica que $f(x) = \sqrt{x}$ ya que $f(x)$ es siempre positiva.

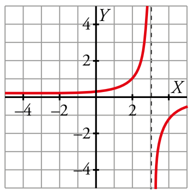
24 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x-1}$ **c)** $y = \dfrac{-1}{x}$ **d)** $y = \dfrac{-1}{x-3}$

a)


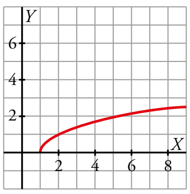
b)


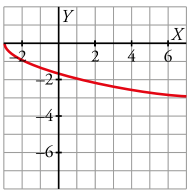
c)


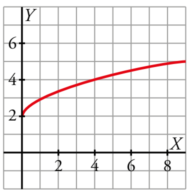
d)


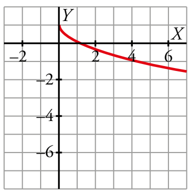
25 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{x-1}$ **b)** $y = -\sqrt{x+3}$ **c)** $y = 2 + \sqrt{x}$ **d)** $y = 1 - \sqrt{x}$

a)


b)


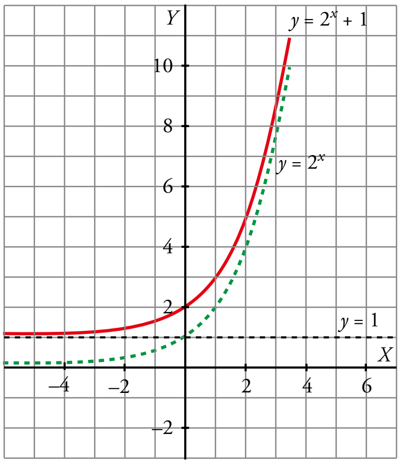
c)


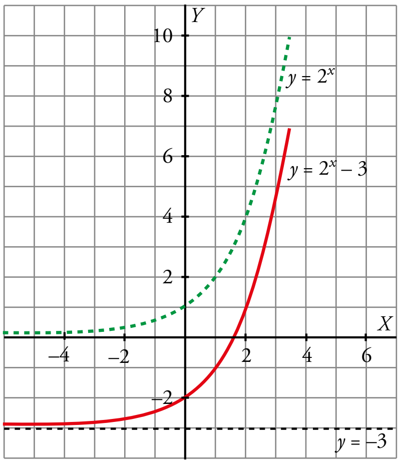
d)


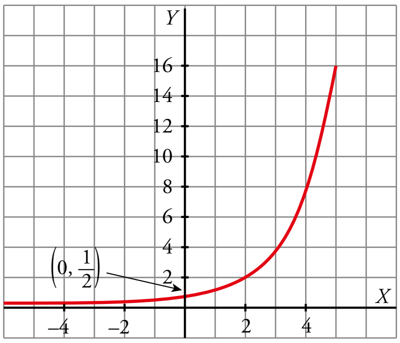
26 **Representa estas funciones:**

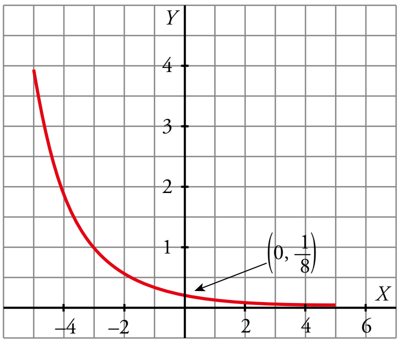
a) $y = 2^x + 1$ **b)** $y = 2^x - 3$ **c)** $y = 2^{x-1}$

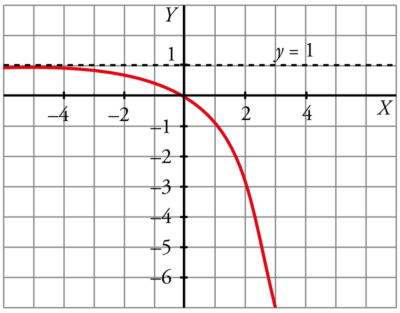
d) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3}$ **e)** $y = 1 - 2^x$ **f)** $y = 2^{-x}$

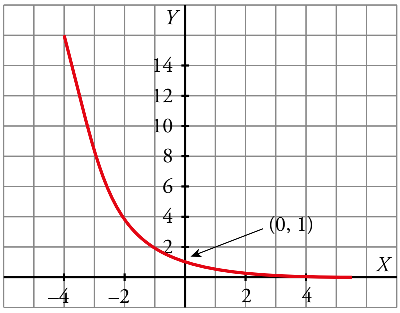
a)


b)


c)


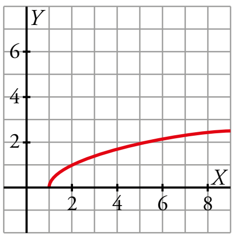
d)


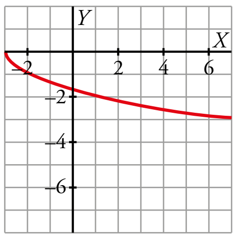
e)


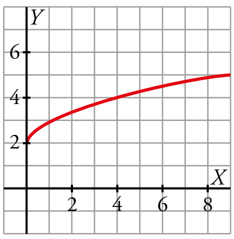
f)


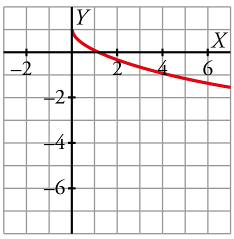
27 **Representa estas funciones a partir de la gráfica de $y = log_2 x$:**

a) $y = 1 + log_2 x$ **b)** $y = log_2 (x - 1)$ **c)** $y = -log_2 x$ **d)** $y = log_2 (-x)$

a)


b)


c)


d)


28 **Expresa estas funciones de la forma $y = a(x - m)^2 + p$ y describe las transformaciones que tenemos que hacer para representarlas a partir de $y = x^2$:**

a) $y = x^2 - 10x + 16$ **b)** $y = 3x^2 - 3x + 5$

a) $y = x^2 - 10x + 16 \rightarrow y = x^2 - 10x + 25 - 25 + 16 \rightarrow y = (x-5)^2 - 9$

Trasladamos la gráfica 5 unidades a la derecha y 9 hacia abajo.

b) $y = 3x^2 - 3x + 5 \rightarrow y = 3\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{5}{3}\right) \rightarrow y = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$

Aplanamos la parábola cerrándola un poco (está multiplicando el factor 3), trasladamos la gráfica media unidad a la derecha y $\frac{17}{4}$ unidades hacia arriba.

29 **Expresa las siguientes funciones de la forma $y = \frac{k}{x-a} + b$ y describe las transformaciones que tenemos que hacer para representarla a partir de $y = \frac{1}{x}$:**

a) $y = \frac{3x}{x-1}$ **b)** $y = \frac{x-2}{x-4}$ **c)** $y = \frac{3x+2}{x+1}$ **d)** $y = \frac{x+1}{x-1}$

a) $y = \frac{3x}{x-1} = \frac{3(x-1)+3}{x-1} = 3 + \frac{3}{x-1}$

Se estira la gráfica de $\frac{1}{x}$ (el factor 3 está multiplicando), se desplaza 3 unidades hacia arriba y 1 hacia la derecha.

b) $y = \frac{(x-2)}{x-4} = \frac{x-4+2}{x-4} = 1 + \frac{2}{x-4}$

Estiraremos la gráfica de $\frac{1}{x}$ (el factor 2 está multiplicando), y se traslada 1 unidad hacia arriba y 4 unidades a la derecha.

c) $y = \frac{3x+2}{x+1} = \frac{3(x+1)-1}{x+1} = 3 - \frac{1}{x+1}$

Es la simétrica de $\frac{1}{x}$ respecto del eje X, trasladada 1 unidad hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba.

d) $y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

Se estira la gráfica (el factor 2 está multiplicando), y se traslada 1 unidad hacia arriba y 1 unidad a la derecha.

Página 283

Composición y función inversa

30 **Dadas las funciones**

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = \frac{3}{x-2} \qquad h(x) = \sqrt{x-3}$$

obtén las expresiones de:

a) $f \circ g$ **b)** $g \circ f$ **c)** $f \circ h$

d) $g \circ h$ **e)** $h \circ f$ **f)** $h \circ g$

Halla, si es posible, el valor de las funciones obtenidas en los puntos $x = 5$ y en $x = 0$.

a) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{3}{x-2}\right) = \left(\dfrac{3}{x-2}\right)^2 + 1 = \dfrac{9}{(x-2)^2} + 1 = \dfrac{x^2-4x+13}{(x-2)^2}$

$f \circ g(5) = \dfrac{5^2-4\cdot 5+13}{(5-2)^2} = 2$

$f \circ g(0) = \dfrac{0^2-4\cdot 0+13}{(0-2)^2} = \dfrac{13}{4}$

b) $g \circ f(x) = g[f(x)] = g(x^2+1) = \dfrac{3}{x^2+1-2} = \dfrac{3}{x^2-1}$

$g \circ f(5) = \dfrac{3}{5^2-1} = \dfrac{1}{8}$

$g \circ f(0) = \dfrac{3}{0^2-1} = -3$

c) $f \circ h(x) = f[h(x)] = f(\sqrt{x-3}) = \sqrt{x-3}^{\,2} + 1 = x-2$

$f \circ h(5) = 5-2 = 3$

$f \circ h(0) = 0-2 = -2$

d) $g \circ h(x) = g[h(x)] = g(\sqrt{x-3}) = \dfrac{3}{\sqrt{x-3}-2}$

$g \circ h(5) = \dfrac{3}{\sqrt{5-3}-2} = \dfrac{3}{\sqrt{2}-2}$

$g \circ h(0)$ no existe.

e) $h \circ f(x) = h[f(x)] = h(x^2+1) = \sqrt{x^2+1-3} = \sqrt{x^2-2}$

$h \circ f(5) = \sqrt{5^2-2} = \sqrt{23}$

$h \circ f(0)$ no existe.

f) $h \circ g(x) = h[g(x)] = h\left(\dfrac{3}{x-2}\right) = \sqrt{\dfrac{3}{x-2}-3} = \sqrt{\dfrac{-3x+9}{x-2}}$

$h \circ g(5)$ no existe.

$h \circ g(0)$ no existe.

31 **Explica cómo a partir de las funciones**

$$f(x) = 2^{x-1} \qquad g(x) = \sqrt{x}+2 \qquad h(x) = \frac{1}{x-3}$$

se pueden obtener estas otras:

a) $m(x) = 2^{\sqrt{x}+1}$ **b)** $n(x) = \sqrt{2^{x-1}}+2$ **c)** $p(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3}}+2$

d) $q(x) = 2^{\frac{4-x}{x-3}}$ **e)** $r(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ **f)** $s(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}}-1}$

a) $m(x) = f \circ g(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{x}+2) = 2^{\sqrt{x}+2-1} = 2^{\sqrt{x}+1}$

b) $n(x) = g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2^{x-1}) = \sqrt{2^{x-1}}+2$

c) $p(x) = g \circ h(x) = g[h(x)] = g\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3}}+2$

d) $q(x) = f \circ h(x) = f[h(x)] = f\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = 2^{\frac{1}{x-3}-1} = 2^{\frac{4-x}{x-3}}$

e) $r(x) = h \circ g(x) = h[g(x)] = h(\sqrt{x} + 2) = \frac{1}{\sqrt{x} + 2 - 3} = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$

f) $s(x) = h \circ g \circ f(x) = h \circ g[f(x)] = h \circ g(2^{x-1}) = h(\sqrt{2^{x-1}} + 2) = \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}} + 2 - 3} = \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}} - 1}$

32 Halla la función inversa de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{3x-1}{2}$ **b)** $y = \sqrt{2x-1}$ **c)** $y = 1 + 2^{x-3}$

d) $y = 2 + log_3(x+1)$ **e)** $y = \sqrt{4-x},\ x \le 4$ **f)** $y = \frac{2x-3}{x+1}$

a) Para encontrar la función inversa debemos intercambiar las variables x e y para luego aislar de nuevo la variable y:

$$x = \frac{3y-1}{2} \to f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3}$$

b) $x = \sqrt{2y-1} \to 2y - 1 = x^2 \to f^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{2}$

c) $x = 1 + 2^{y-3} \to x - 1 = 2^{y-3} \to log(x-1) = (y-3)\,log(2) \to log(x-1) + 3\,log(2) = y\,log(2) \to$

$$\to f^{-1}(x) = \frac{log(x-1) + 3\,log(2)}{log(2)} = \frac{log(x-1)}{log(2)} + 3$$

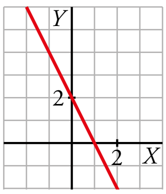
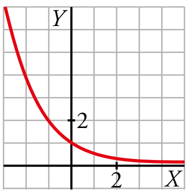
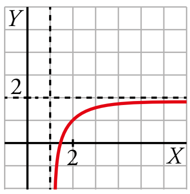
d) $x = 2 + log_3(y+1) \to 3^x = 3^{2 + log_3(y+1)} = 9(y+1) \to f^{-1}(x) = \frac{3^x}{9} - 1$

e) $x = \sqrt{4-y} \to 4 - y = x^2 \to f^{-1}(x) = 4 - x^2$

Como $Dom\ f(x) = \{x \mid x \le 4\} \to y = 4 - x^2 \ge 4 - 4 = 0 \to Dom\ f^{-1}(x) = [0, +\infty)$

f) $x = \frac{2y-3}{y+1} \to x - 2 = \frac{-5}{y+1} \to y = \frac{-5}{x-2} - 1 \to f^{-1}(x) = \frac{-3-x}{x-2}$

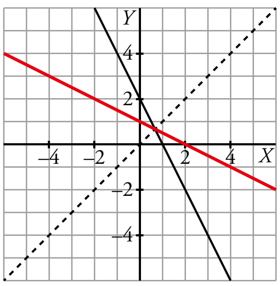
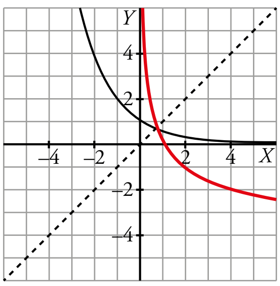
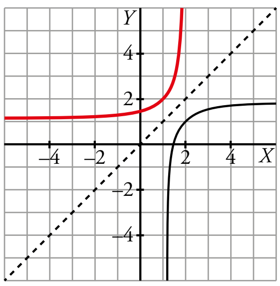
33 Representa gráficamente la función inversa en cada caso:

a) 
b) 
c) 

Calcula sobre la gráfica correspondiente:

$f^{-1}(2)$ $f^{-1}(1)$ $f^{-1}(-1)$

Hacemos una simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante para dibujar la función inversa.

a) 
b) 
c) 

34 **Comprueba si cada par de funciones son una inversa de la otra. Para ello, calcula $f \circ f^{-1}$ o bien $f^{-1} \circ f$:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$; $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 2$

b) $f(x) = \sqrt{2x+3}$; $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+2}{3}$

c) $f(x) = 1 + \log_2 \dfrac{x}{3}$; $f^{-1}(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$

a) $f \circ f^{-1}(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(\dfrac{1}{x} - 2\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x} - 2 + 2} = x$

b) $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1} f(x)] = f(\sqrt{2x+3}) = \dfrac{\sqrt{2x+3}^2 + 2}{3} = \dfrac{2x+5}{3}$

En este caso no es verdad que las funciones sean recíprocas. f^{-1} es incorrecta.

c) $f \circ f^{-1}(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(1 + \log_2 \dfrac{x}{3}\right) = 3 \cdot 2^{1 + \log_2[(x/3) - 1]} = 3 \cdot 2^{\log_2 (x/3)} = 3 \cdot \dfrac{x}{3} = x$

35 **Considera la función $y = \sqrt{x+2}$, $x \in [-2, 7]$.**

a) ¿Cuál es su recorrido?

b) Obtén su función inversa, y determina el dominio de definición y el recorrido de esta.

a) Como la función es creciente, calculamos los valores en los extremos del intervalo.

$x = -2 \rightarrow y = \sqrt{-2+2} = 0$

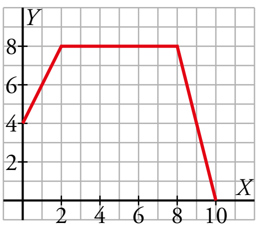
$x = 7 \rightarrow y = \sqrt{7+2} = 3$

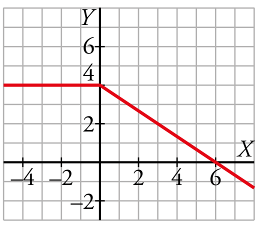
El recorrido es el intervalo [0, 3].

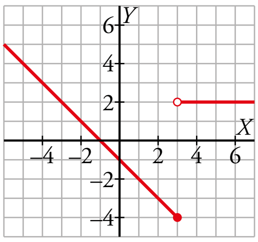
b) $y = \sqrt{x+2} \rightarrow x = \sqrt{y+2} \rightarrow y = x^2 - 2,\ x \in [0, 3]$ es la función inversa. Su dominio es el intervalo [0, 3] y el recorrido es el intervalo [–2, 7].

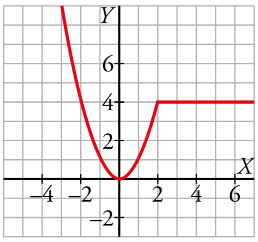
Para resolver

36 **Obtén la expresión analítica de las siguientes funciones:**

a)


b)


c)


d)


a) Primer tramo:

Función lineal con pendiente 2 y ordenada en el origen 4, luego la expresión es $y = 2x + 4$.

Segundo tramo: $y = 8$

Tercer tramo:

Función lineal que pasa por los puntos (8, 8) y (10, 0). Su pendiente es $\frac{0-8}{10-8} = -4$.

La expresión es $y - 8 = -4(x - 8) \to y = 40 - 4x$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 8 & \text{si } 2 < x \le 8 \\ 40-4x & \text{si } 8 < x \le 10 \end{cases}$$

b) Primer tramo: $y = 4$

Segundo tramo:

Función lineal con pendiente $-\frac{2}{3}$ y ordenada en el origen 4, luego la expresión es $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \le 0 \\ -\frac{2x}{3}+4 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

c) $f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x \le 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

37 Determina, en cada caso, la ecuación de la parábola de la que conocemos el vértice y otro punto.

a) $V(1, -4)$, $P(-1, 0)$ **b)** $V(-2, 3)$, $P(0, 6)$

a) Si la parábola es $y = ax^2 + bx + c$ tenemos que:

$$V(1, -4) \to \begin{cases} \frac{-b}{2a} = 1 \to b = -2a \\ -4 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \to -4 = a + b + c \end{cases}$$

$P(-1, 0) \to 0 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \to 0 = a - b + c$

$$\begin{cases} b = -2a \\ -4 = a + b + c \\ 0 = a - b + c \end{cases}$$

La solución del sistema es: $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$.

La parábola buscada es $y = x^2 - 2x - 3$.

b) Si la parábola es $y = ax^2 + bx + c$, tenemos que:

$$V(-2, 3) \to \begin{cases} \frac{-b}{2a} = -2 \to b = 4a \\ 3 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \to 3 = 4a - 2b + c \end{cases}$$

$P(0, 6) \to 6 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \to 6 = c$

$$\begin{cases} b = 4a \\ 3 = 4a - 2b + c \\ c = 6 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $a = \frac{3}{4}$, $b = 3$, $c = 6$.

La parábola buscada es $y = \frac{3}{4}x^2 + 3x + 6$.

38 **Obtén el valor de y en grados y radianes.**

a) $y = \textit{arc sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $y = \textit{arc cos}\,\frac{1}{2}$ **c)** $y = \textit{arc tg}\,1$

d) $y = \textit{arc sen}\,(-1)$ **e)** $y = \textit{arc cos}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **f)** $y = \textit{arc tg}\,\sqrt{3}$

a) 60° b) 60° c) 45°

d) –90° e) 120° f) 60°

39 **Calcula en radianes.**

a) $\textit{arc sen}\left(\textit{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $\textit{arc cos}\,(\textit{cos}\,\pi)$ **c)** $\textit{arc tg}\left(\textit{tg}\,\frac{\pi}{5}\right)$

d) $\textit{tg}\,(\textit{arc tg}\,1)$ **e)** $\textit{sen}\,(\textit{arc cos}\,(-1))$ **f)** $\textit{arc cos}\,(\textit{tg}\,\pi)$

a) $\textit{arc sen}\left(\textit{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ b) $\textit{arc cos}\,(\textit{cos}\,\pi) = \pi$ c) $\textit{arc tg}\left(\textit{tg}\,\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$

d) $\textit{tg}\,(\textit{arc tg}\,1) = 1$ e) $\textit{sen}\,(\textit{arc cos}\,(-1)) = 0$ f) $\textit{arc cos}\,(\textit{tg}\,\pi) = \frac{\pi}{2}$

40 **[El análisis de este tipo de funciones es una oportunidad para trabajar la dimensión social (comunidad y bien común) de esta clave].**

En las funciones de oferta y demanda, se llama *cantidad de equilibrio* al número de unidades que hay que producir para que la oferta y la demanda se igualen, $o(x) = d(x)$; y se llama *precio de equilibrio* al precio con el cual se consigue esa igualdad.

a) Halla el precio y la cantidad de equilibrio de un producto con funciones de oferta y demanda $o(x) = 2{,}5x - 100$ y $d(x) = 300 - 1{,}5x$ (x en euros, d y o en miles de unidades del producto).

b) Si el precio del producto es de 80 €, ¿habrá escasez o exceso del mismo? ¿Y si el precio fuese de 120 €?

c) ¿Cuáles serían el precio y la cantidad de equilibrio si las funciones de oferta y demanda fuesen $o(x) = 0{,}25x^2 - 100$ y $d(x) = 185 - 2x$?

a) $o(x) = d(x) \to 2{,}5x - 100 = 300 - 1{,}5x \to x = 100$ € es el precio de equilibrio.

La cantidad de equilibrio es $o(100) = d(100) = 300 - 1{,}5 \cdot 100 = 150$ miles de unidades.

b) Si $x = 80$, hay escasez, porque la demanda supera a la oferta. En efecto:

$o(80) = 2{,}5 \cdot 80 - 100 = 100$

$d(80) = 300 - 1{,}5 \cdot 80 = 180$

Si $x = 120$, hay exceso, porque la oferta supera a la demanda. En efecto:

$o(80) = 2{,}5 \cdot 120 - 100 = 200$

$d(80) = 300 - 1{,}5 \cdot 120 = 120$

c) $o(x) = d(x) \to 0{,}25x^2 - 100 = 185 - 2x$ da lugar a una única solución posible: $x = 30$ €.

La cantidad de equilibrio es $o(30) = d(30) = 125$ miles de unidades.

Página 283

41 **Se sabe que la retención de conocimientos de un curso va disminuyendo con el paso del tiempo. Un estudio de psicología concluye que el porcentaje que se recuerda t meses después de finalizado el curso, viene dado por la función:**

$$R(t) = 94 - 46{,}8\,\log\,(t + 1)$$

a) Calcula el porcentaje del curso que se recordará cuando pase un año.

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo se recordará la mitad de los conocimientos?

a) En 12 meses recordará: $R(12) = 41{,}86\,\%$

b) Al inicio recuerda $R(0) = 94$. Queremos saber cuándo recordará la mitad:

$$R(t) = 94 - 46{,}8\,log(t+1) = \frac{94}{2} \to 47 - 46{,}8\,log(t+1) = 0 \to -\frac{47}{-46{,}8} = log(t+1) \to$$

$$\to 1{,}004 = log(t+1) \to 10^{1{,}004} = t+1 \to t = 10{,}0925 - 1 = 9{,}009$$

Recordará la mitad al cabo de 9 meses.

42 **En cierto país se aplican estos impuestos sobre los salarios mensuales:**

- **20 % de la parte del salario bruto comprendida entre 800 €, que es el salario mínimo, y 2 500 €.**
- **40 % de la parte del salario bruto superior a 2 500 €.**

a) ¿Qué salario neto corresponde a 1 500 € de salario bruto? ¿Y a 3 000 €?

b) Escribe la función que da los impuestos a pagar, según el salario bruto *x*.

c) ¿Cuál debe ser, como mínimo, el salario bruto para que el neto sea superior a 2 500 €?

a) Tenemos en cuenta que los primeros 800 € no tienen impuestos.

El salario neto para 1 500 € es:

$$1500 - \frac{20}{100}(1500 - 800) = 1\,060 \text{ €}$$

Para encontrar el salario neto para 3 000 € debemos considerar 3 tramos donde se cobran diferentes impuestos:

$$3\,000 - \frac{20}{100}(2\,500 - 800) - \frac{400}{100}(3\,000 - 2\,500) = 2\,460 \text{ €}$$

b) Calculamos la función que nos da los impuestos $I(x)$ definiéndola como una función a trozos:

$$I(x) = \begin{cases} 0{,}2(x - 800) & \text{si } 800 \le x \le 2\,500 \\ 0{,}2(2\,500 - 800) + 0{,}4(x - 2\,500) & \text{si } x > 2\,500 \end{cases}$$

Es decir:

$$I(x) = \begin{cases} 0{,}2(x - 800) & \text{si } 800 \le x \le 2\,500 \\ 0{,}2 \cdot 1700 + 0{,}4(x - 2\,500) & \text{si } x > 2\,500 \end{cases}$$

c) $x - I(x) > 2\,500 \to x - 0{,}2 \cdot 1700 - 0{,}4(x - 2\,500) > 2\,500 \to x - 340 - 0{,}4x + 1\,000 > 2\,500 \to$

$\to 0{,}6x > 1840 \to x > 3\,066{,}66$

El salario neto debe ser superior a 3 066,66 euros.

43 **Una feria ganadera está abierta al público entre las 10 y las 20 horas. El número de visitantes viene dado por la función $N(t) = -20t^2 + Bt + C$, donde t es la hora de visita.**

Sabiendo que a las 17 h se alcanza el máximo de 1 500 visitantes, halla B y C y representa la función.

Como la función $N(t)$ es una parábola con las ramas hacia abajo, el número máximo se alcanza en el vértice de la parábola, luego:

$$\frac{-B}{2 \cdot (-20)} = 17 \to B = 680 \to N(t) = -20t^2 + 680t + C$$

Como a las 17 h la feria tiene 1 500 visitantes, se tiene que:

$$1\,500 = -20 \cdot 17^2 + 680 \cdot 17 + C \to C = -4\,280$$

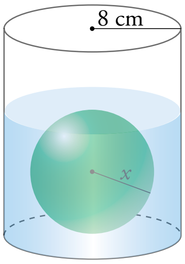
La función es $N(t) = -20t^2 + 680t - 4\,280$

Para representar la función calculamos $N(10) = 520$ y $N(20) = 1\,320$. El vértice y estos dos puntos son suficientes para construir la gráfica.

44 **En un cilindro de radio 8 cm, depositamos una bola esférica de radio x y echamos agua hasta que cubra la bola.**

Escribe la función que da la cantidad de agua que hay que echar según la medida del radio de la bola.

¿Cuál es su dominio de definición?



Como la bola tiene radio x, la altura del agua es $2x$. El volumen del agua es el volumen de un cilindro de radio 8 y altura $2x$ menos el volumen de una esfera de radio x.

$$V(x) = \pi \cdot 8^2 \cdot 2x - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot x^3 = 128\pi x - \frac{4}{3}\pi x^3 = 4\pi x \left(32 - \frac{x^2}{3}\right)$$

45 **Un fabricante vende mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y sabe que por cada 10 euros de subida venderán 2 electrodomésticos menos.**

a) ¿Cuáles serán los ingresos si sube los precios 50 euros?

b) Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.

c) ¿Cuál debe ser la subida para que los ingresos de la fábrica sean máximos?

a) En este caso vendería 90 electrodomésticos a 450 euros cada uno; luego los ingresos serían de $450 \cdot 90 = 40\,500$ euros.

b) $I(x) = (400 + 10x)\,(100 - 2x) = -20x^2 + 200x + 40\,000$

(x, en decenas de euros)

c) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{-40} = 5 \;\rightarrow\; 50 \text{ euros}$$

46 **Un cultivo de bacterias comienza con 100 células. Media hora después hay 435. Si ese cultivo sigue un crecimiento exponencial del tipo $y = ka^t$ (t en minutos), calcula k y a y representa la función. ¿Cuánto tardará en llegar a 5 000 bacterias?**

$y = ka^t$

$t = 0,\ y = 100 \ \rightarrow\ 100 = k \cdot a^0 \ \rightarrow\ k = 100$

$t = 30,\ y = 435 \ \rightarrow\ 435 = 100 \cdot a^{30} \ \rightarrow\ a^{30} = 4{,}35 \ \rightarrow$

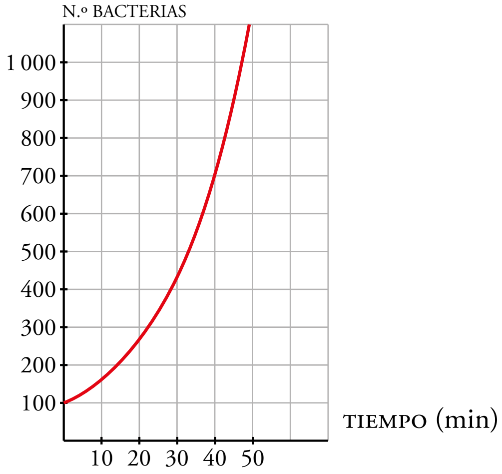
$\rightarrow\ a = 4{,}35^{1/30} \ \rightarrow\ a \approx 1{,}05$

La función es $y = 100 \cdot 1{,}05^x$.

Si $y = 5\,000 \ \rightarrow\ 5\,000 = 100 \cdot 1{,}05^x$

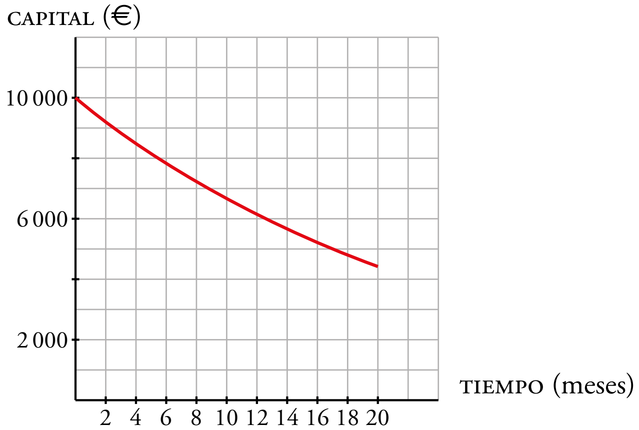
$50 = 1{,}05^x \ \rightarrow\ x = \dfrac{\log 50}{\log 1{,}05} \approx 80$ min

Tardará 80 minutos, aproximadamente.



47 **Un negocio en el que invertimos 10 000 €, pierde un 4% mensual. Escribe la función que nos da el capital que tendremos según los meses transcurridos, y represéntala. ¿Cuánto tiempo tardará el capital inicial en reducirse a la mitad?**

$y = 10\,000 \cdot 0{,}96^x$



Si $y = 5\,000 \ \rightarrow\ 5\,000 = 10\,000 \cdot 0{,}96^x$

$0{,}96^x = 0{,}5 \ \rightarrow\ x = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}96} \approx 16{,}98$ meses

Tardará 17 meses, aproximadamente.

48 **Una taza de café recién hecho está a 75 °C. Después de 3 minutos en una habitación a 21 °C, la temperatura del café ha descendido a 64 °C. Si la temperatura, T, del café en cada instante t viene dada por la expresión $T = A\,e^{kt} + 21$, calcula A y k y representa la función.**

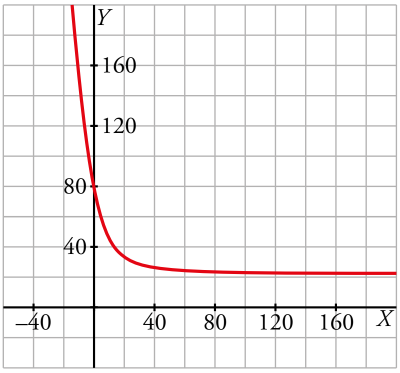
¿Cuánto tendremos que esperar para que la temperatura del café sea de 45 °C?

Por los datos del problema, la función temperatura pasa por los puntos (0, 75) y (3, 64), luego:

$$75 = A \cdot e^{k \cdot 0} + 21 \ \rightarrow\ A = 54$$

$$64 = 54 \cdot e^{k \cdot 3} + 21 \ \rightarrow\ e^{3k} = \frac{43}{54} = 0{,}796 \ \rightarrow\ k = \frac{\ln 0{,}796}{3} = -0{,}076$$

Por tanto, $T = 54 \cdot e^{-0{,}076t} + 21$



Si la temperatura del café es de 45°, entonces:

$$45 = 54 \cdot e^{-0{,}076t} + 21 \;\rightarrow\; e^{-0{,}076t} = \frac{24}{54} = 0{,}444 \;\rightarrow\; t = \frac{\ln 0{,}444}{-0{,}076} = 10{,}7 \text{ minutos}$$

Debemos esperar 10 minutos 42 segundos para que alcance los 45°.

49 **Para enviar un paquete desde Adelaida a París, un servicio de correo cobra 50 € por paquetes que pesen hasta 2 kg y 10 € por cada kg o fracción adicional.**

a) Calcula lo que cuesta enviar un paquete de 5 kg.

b) Escribe la expresión analítica del precio de enviar un paquete de x kg para x menor o igual a 8.

c) Represéntala gráficamente.

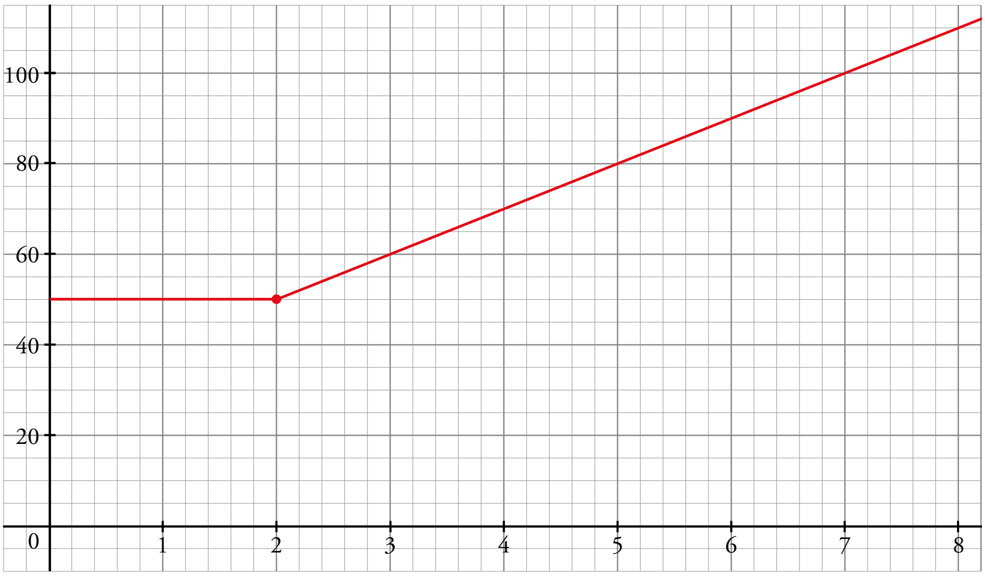
a) Si el paquete pesa 5 kg nos cobrarán:

$50 + (5 - 2)\,10 = 80$ €

b) La definimos a trozos, usando la parte entera para incluir todos los casos:

$$E(x) = \begin{cases} 50 & \text{si } x \le 2 \\ 50 + 10\,(x - 2) & \text{si } 2 < x \le 8 \end{cases}$$

c)



50 **Un charco circular de agua se está evaporando al sol. Al cabo de t minutos su radio es $g(t) = \dfrac{15}{t+2}$ cm.**

a) Expresa el área del charco en función del tiempo.

b) ¿Cuál será el área del charco al cabo de 10 min?

c) ¿Qué relación tiene la función del apartado a) con las funciones $f(r) = \pi r^2$ y $g(t) = \dfrac{15}{t+2}$?

a) El área de un círculo es $A = \pi r^2$ por lo que podemos escribir:

$$A(t) = \pi g^2(t) = \frac{225\pi}{(t+2)^2}$$

b) $A(10) = \dfrac{225\pi}{(10+2)^2} = \dfrac{225\pi}{144} = 1{,}56\pi = 4{,}9 \text{ cm}$

c) $f(g(t)) = f\left(\dfrac{15}{t+2}\right) = \dfrac{225\pi}{(t+2)^2} = A(t)$

51 **La recta $y = 20x + 1$ corta a $y = a^x$ en $x = 0$ y $x = 4$.**

a) Calcula a.

b) Para ese valor de a, escribe la ecuación de la recta, s, que corta a $y = log_a x$ en $x = 1$ y $x = 81$.

c) ¿Qué relación hay entre las rectas r y s?

a) $\left.\begin{array}{l} y = 20x + 1 \\ y = a^x \end{array}\right\} \to 20x + 1 = a^x \to x = 0; x = 4$

Si $x = 0$: $1 = 1 \to$ El valor $x = 0$ no ofrece información relativa al valor de a.

Si $x = 4$: $81 = a^4 \to a = 3$

b) Si $x = 1$: $y = log_3 1 \to y = 0 \to P(1, 0) \in s$

Si $x = 81$: $y = log_3 81 \to y = 4 \to P(81, 4) \in s$

$\overrightarrow{PQ} = (80, 4)$ es vector director de s. Por tanto:

$s: \dfrac{x-1}{80} = \dfrac{y}{4} \to y = \dfrac{x-1}{20}$

c) Veamos que r y s son secantes:

$20x + 1 = \dfrac{x-1}{20} \to 400x - x = -1 - 20 \to x = -\dfrac{21}{399} = 0{,}05 \to y = 0{,}05$

Por otra parte, el vector director de r es $\vec{u}(1, 20)$ y el de s es $\vec{v}(20, 1)$ por lo que las rectas son secantes pero no son perpendiculares

Cuestiones teóricas

52 **[Este ejercicio requiere la comprensión de las afirmaciones y trabajar la destreza comprensión escrita de esta clave].**

¿Verdadero o falso? Justifícalo y pon ejemplos.

a) Si $a > 0$, se cumple $a^{log_a x} = x$.

b) La función $y = arc\ cos\ x$ corta el eje Y en $(0, \pi/2)$.

c) En la función $y = a^x$ no podemos dar a x valores negativos cuando $0 < a < 1$.

d) El dominio de la función $y = arc\ tg\ x$ es $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

e) Si $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ entonces $arc\ sen\ (cos\ x) = \dfrac{\pi}{2} - x$

a) Verdadero.

$$a^{log_a x} = x \rightarrow log(a^{log_a x}) = log\,x \rightarrow log_a x\, log\,a = log\,x \rightarrow log_a x = \frac{log\,x}{log\,a}$$

Es cierto por las propiedades de los logaritmos.

b) Verdadero: $cos\frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow arc\,cos\,0 = \frac{\pi}{2}$

c) Falso: por ejemplo $a = \frac{1}{2} \rightarrow y = 0,5^x$

Si $x = -1 \rightarrow y = 0,5^{-1} = 2$

d) Falso. Su dominio son todos los reales. En cambio su recorrido sí es $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

e) Verdadero. La función se puede definir ya que:

$$sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right)cos\,x - cos\left(\frac{\pi}{2}\right)sen\,x = cos\,x - 0 = cos\,x$$

53 Dadas $f(x) = x^2 - x + 1$ y $g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}$:

a) ¿Cuál debe ser el dominio de f para que exista f^{-1}?

b) Halla $g \circ f$, y di cómo son entre sí f y g.

c) ¿Cuál es dominio de $f \circ g$ y de $g \circ f$?

a) Buscamos la función inversa:

$$x = y^2 - y - 1 \rightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x \rightarrow \sqrt{x - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} = y \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}$$

Para que esté definida el valor interior de la raíz debe ser positivo $\rightarrow x \geq \frac{3}{4}$

$$Dom\,f^{-1}(x) = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$$

Por tanto, para que exista $f^{-1}(x)$, solo podemos aplicar f a los valores mayores o iguales que $\frac{3}{4}$.

b) Hemos visto en el apartado anterior que g es la función inversa de f, y por lo tanto:

$g(f(x)) = x$

c) $Dom\,g(f(x)) = \mathbb{R}$

$$Dom\,f(g(x)) = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$$

Página 285

54 Demuestra que $y = log_b(x - a)$ e $y = log_c(x - a)$ cortan al eje OX en el mismo punto.

Los puntos de corte de una función con el eje OX son aquellos que verifican $y = 0$.

Para que el logaritmo de un número sea 0, su argumento debe ser 1. Por tanto, el punto de corte es:

$$x = a + 1 \rightarrow \begin{cases} y = log_b(a + 1 - a) = log_b 1 = 0 \\ y = log_c(a + 1 - a) = log_c 1 = 0 \end{cases}$$

55 **Calcula x en las siguientes expresiones:**

a) $arc\ tg\ x = -72°$ **b)** $arc\ sen\ x = 75°$ **c)** $arc\ cos\ x = \dfrac{\pi}{3}$ **rad** **d)** $arc\ tg\ x = 1{,}5$ **rad**

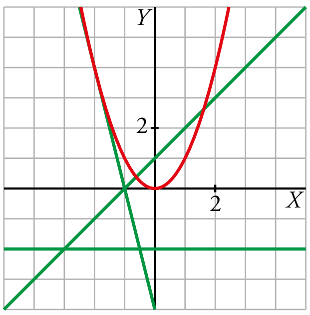
a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) 0,966 c) $\dfrac{1}{2}$ d) 14,101

56 **¿Cuántas soluciones puede tener cada uno de estos sistemas?**

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax + b \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = ax + b \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y = 1/x \\ y = ax + b \end{cases}$

a) Puede tener como máximo dos soluciones, dependiendo de la posición relativa de la parábola y la recta. Es decir, el sistema puede tener 0, 1 o 2 soluciones.

Desde otro punto de vista, la ecuación $x^2 = ax + b$ puede tener 0, 1 o 2 soluciones.



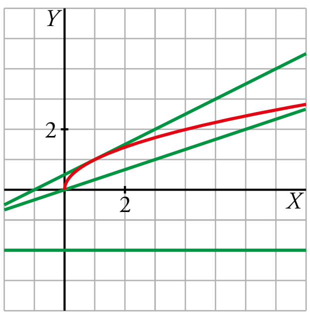
$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -2 \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -4x - 4 \end{array}\right\}$ Tiene una solución, (–2, 4).

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x + 1 \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

b) Este caso es análogo al anterior. En función de la posición relativa de la semiparábola y la recta, el sistema puede tener 0, 1 o 2 soluciones.

La ecuación $\sqrt{x} = ax + b$ puede tener, como máximo, dos soluciones.



$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = -2 \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = \dfrac{1}{2}(x+1) \end{array}\right\}$ Tiene una solución, (1, 1).

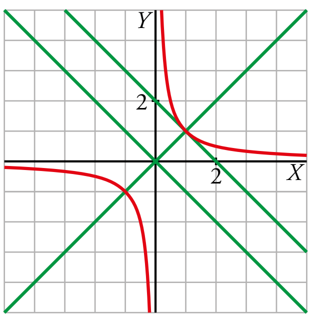
$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = \dfrac{1}{3}x \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, (0, 0) y (9, 3).

c) El sistema da lugar a una ecuación de segundo grado como podemos ver.

$\dfrac{1}{x} = ax + b \ \to\ x(ax + b) = 1 \ \to\ ax^2 + bx - 1 = 0$

Por tanto, al igual que en los casos anteriores, puede tener, como máximo, dos soluciones.

También puede interpretarse desde el punto de vista de la posición relativa de una hipérbola y una recta.



$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x} \\ y = -x \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x} \\ y = -x + 2 \end{array}\right\}$ Tiene una solución, (1, 1).

$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x} \\ y = x \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, (1, 1) y (–1, –1).

Para profundizar

57 **Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$.**

a) Represéntalas y di, en cada caso, cuál es su dominio y su recorrido.

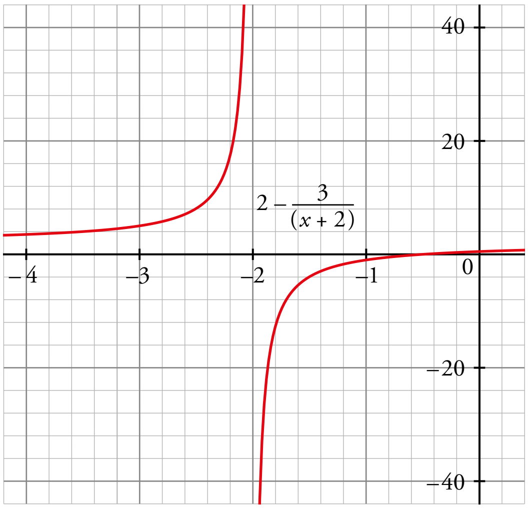
b) ¿Cuál es dominio de $f \circ g$ y de $g \circ f$?

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2} = 2 - \dfrac{3}{x+2}$

Dibujamos $f(x)$ a partir de $-\dfrac{1}{x}$: estiramos la gráfica, trasladamos 2 a la izquierda y 2 hacia arriba.

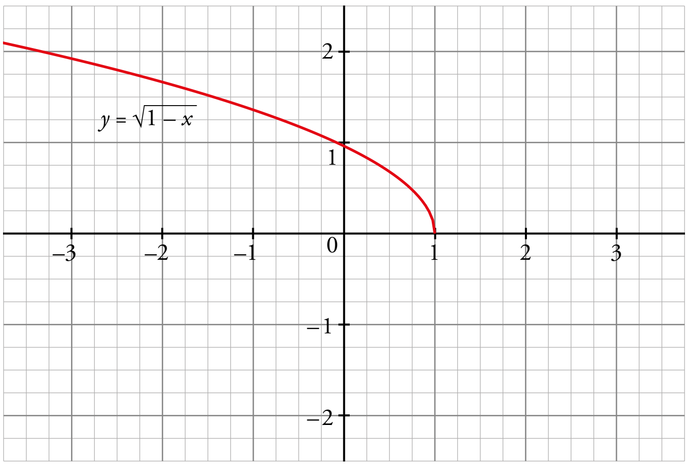
Para que no se anule el denominador necesitamos que $x \neq -2$.

Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-2\}$ *Rec* $f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$



Dibujamos $g(x)$, teniendo en cuenta que solamente tomará valores positivos o cero, y que no existe para valores de $x > 1$ porque si no, no existiría su raíz.

Dom $g(x) = (-\infty, 1]$ *Rec* $g(x) = [0, +\infty)$



b) Veamos el dominio de $f(g(x)) = \dfrac{2\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+2}$:

Como $\sqrt{1-x}+2$ siempre es distinto de cero: *Dom* $f(g(x))$ = *Dom* $g(x) = (-\infty, 1]$.

Veamos ahora el dominio de $g(f(x)) = \sqrt{1 - \dfrac{2x+1}{x+2}} = \sqrt{\dfrac{-x+1}{x+2}}$.

Se debe cumplir: $\dfrac{-x+1}{x+2} \geq 0$.

Si $x < -2 \rightarrow -x + 1 > 0;\ x + 2 < 0 \rightarrow \dfrac{-x+1}{x+2} < 0$

Si $x = -2 \rightarrow \frac{-x+1}{x+2}$ no existe

Si $-2 < x < 1 \rightarrow -x+1 > 0;\ x+2 > 0 \rightarrow \frac{-x+1}{x+2} > 0$

Si $x = 1 \rightarrow \frac{-x+1}{x+2} = 0$

Si $1 < x \rightarrow -x+1 < 0;\ x+2 > 0 \rightarrow \frac{-x+1}{x+2} < 0$

Por tanto: $Dom\ g(f(x)) = (-2, 1]$.

58 **Si $f(x) = ax - 4$ y $g(x) = bx + 3$, determina la condición que deben cumplir a y b para que $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ para todo x.**

$f(g(x)) = f(bx+3) = a(bx+3) - 4 = abx + 3a - 4$

$g(f(x)) = g(ax-4) = b(ax-4) + 3 = abx - 4b + 3$

$f(g(x)) = g(f(x)) \rightarrow 3a - 4 = -4b + 3 \rightarrow a = \frac{-4b+7}{3}$ para cualquier valor de x.

59 **¿Cuántas soluciones tienen estas ecuaciones?**

a) $-\frac{3}{2}x + 4 = \log_2 x$ **b)** $e^x = \sqrt{x}$ **c)** $e^x = 4 - x^2$ **d)** $\ln x = \frac{1}{x}$

Busca, cuando sea posible, una solución aproximada.

a) $y = \log_2 x$ es una función logarítmica creciente definida en $(0, +\infty)$.

$y = -\frac{3x}{2} + 4$ recta decreciente definida para todo x, por tanto, es imposible que la recta no corte a la gráfica del logaritmo o que la corte más de una vez.

La ecuación solo puede tener una solución.

b) Sabemos que $y = \sqrt{x}$ está definida en $[0, +\infty)$.

Por otra parte, en $x = 0$, $e^0 = 1 > 0 = \sqrt{0}$.

También sabemos que la función e^x crece mucho más rápido que $\sqrt{x}$ así que como $e^x > \sqrt{x}$ en $x = 0$ y crece más rápido, las gráficas nunca se cortarán.

La ecuación no tiene solución.

c) Si representamos gráficamente las funciones $y = e^x$ e $y = 4 - x^2$, observamos que se cortan en dos puntos. Las abscisas de estos puntos son las soluciones de la ecuación dada. Vemos que uno de ellos está muy cerca de $x = 1$.

$e^1 = e \approx 2{,}72$

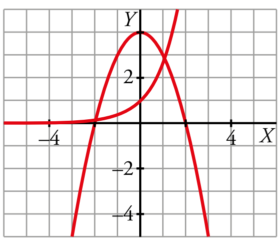
$4 - 1^2 = 3$

Probemos ahora en $x = 1{,}1$

$e^{1{,}1} \approx 3$

$4 - 1{,}1^2 = 2{,}79$

Una solución aproximada, a la vista de los resultados anteriores, es $x = 1{,}05$



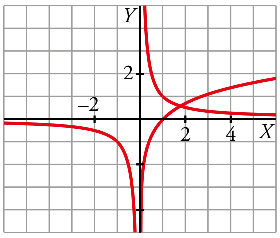
d) Si representamos gráficamente las funciones $y = ln\ x$ e $y = \frac{1}{x}$, observamos que se cortan en un punto. Su abscisa es la solución de la ecuación dada.

Si tomamos $x = 1{,}75$, obtenemos:

$ln\ 1{,}75 = 0{,}56$

$\frac{1}{1{,}75} = 0{,}57$

Por tanto, una solución aproximada es $x = 1{,}75$.



60 **Una función f tiene la siguiente propiedad:**

$f(2x + 1) + 3 = 4x^2 + 6x + 2f(1)$

¿Cuánto vale $f(2)$?

Buscamos primero $f(1)$, y para ello podemos sustituir en la igualdad dada si $x = 0$:

$f(1) + 3 = 2f(1) \rightarrow f(1) = 3$

Para encontrar $f(2)$ necesitamos que $2x + 1 = 2 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

$$f(2) + 3 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(1) = 1 + 3 + 6 = 10 \rightarrow f(2) = 7$$

61 **Definimos la función $f(x) = a - \sqrt{ax + b}$ para cualquier par de números reales (a, b). Dos números reales m y n se dice que son sustituibles si existe un par (a, b) tal que la función asociada a ese par, cumple $f(m) = n$ y $f(n) = m$.**

Comprueba que 2 y 3 son sustituibles. ¿Lo son también 4 y 7? Halla en cada caso a y b.

Veamos que 2 y 3 son sustituibles, resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} a - \sqrt{2a + b} = 3 \\ a - \sqrt{3a + b} = 2 \end{cases} \rightarrow \text{Aislamos la raíz y elevamos al cuadrado:}$$

$$\begin{cases} 2a + b = 9 - 6a + a^2 \\ 2a + b = 9 - 6a + a^2 \end{cases} \rightarrow \text{restamos ambas ecuaciones: } a = -5 + 2a \rightarrow a = 5$$

Sustituyendo en valor de a encontramos b: $10 + b = 9 - 30 + 25 \rightarrow b = -6$

Por tanto, 2 y 3 son sustituibles.

Veamos si son sustituibles 4 y 7:

$$\begin{cases} a - \sqrt{4a + b} = 7 \\ a - \sqrt{7a + b} = 4 \end{cases} \rightarrow \text{Aislamos la raíz y elevamos al cuadrado:}$$

$$\begin{cases} 4a + b = 49 - 14a + a^2 \\ 7a + b = 16 - 8a + a^2 \end{cases} \rightarrow a = 11;\ b = -28$$

Por tanto, 4 y 7 son sustituibles.

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.) CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 3.1. (EA 3.1.2.-EA 3.1.3.-EA 3.1.4.)

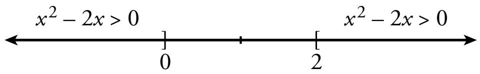
Página 285

1 Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **b)** $y = \dfrac{2}{x^3 - x^2}$

a) La función está definida por los valores de x tales que $x^2 - 2x \geq 0$.

Resolvemos la inecuación:



$Dom = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) Los valores de x que anulan el denominador no pertenecen al dominio de la función.

$$x^3 - x^2 = 0 \rightarrow x^2(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

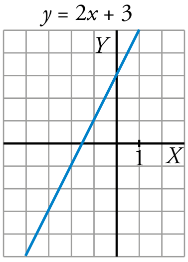
$Dom = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

2 Representa gráficamente las siguientes funciones:

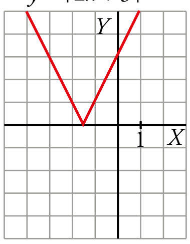
a) $y = |2x + 3|$ **b)** $y = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) La recta $y = 2x + 3$ corta al eje X en $x = -\dfrac{3}{2}$. Para valores menores que $-\dfrac{3}{2}$, cambiamos el signo de la ordenada. Por ejemplo: $(-2, -1) \rightarrow (-2, 1)$.

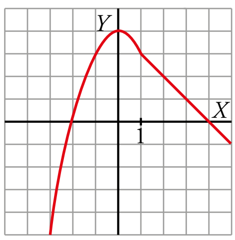
$y = 2x + 3$



$y = |2x + 3|$

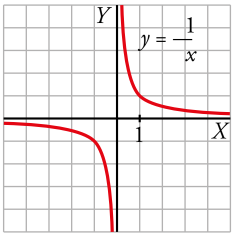


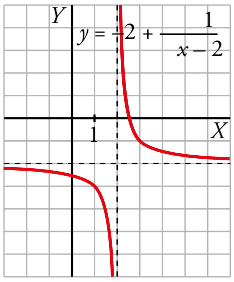
b) Para valores menores que 1, la gráfica es una parábola de vértice (0, 4). Para valores mayores que 1, es una recta.



3 Representa $y = \dfrac{1}{x}$**. A partir de ella, dibuja la gráfica de** $y = \dfrac{-2x + 5}{x - 2}$**.**

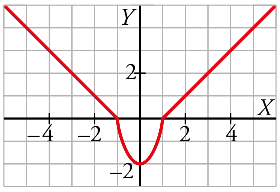
$$\begin{array}{r|l} -2x + 5 & x - 2 \\ \hline 2x - 4 & -2 \\ 1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \frac{-2x + 5}{x - 2} = -2 + \frac{1}{x - 2}$$





(*) La gráfica de $y = \frac{-2x+5}{x-2}$ es como la de $y = \frac{1}{x}$ trasladada 2 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo.

4 **Determina la expresión analítica de esta función definida en el intervalo [–6, 6]. ¿Cuál es su recorrido?**



Definimos la función a trozos:

- $x \in [-6, -1]$: debemos encontrar la recta que pasa por $P(-1,\ 0)$ y $Q(-2,\ 1)$, con vector $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1) \rightarrow y = -x - 1$.
- $x \in (-1, 1)$: partimos de la parábola $y - b = k(x-a)^2$ donde $(a,\ b) = (0,\ -2)$ es el vértice $\rightarrow$ $\rightarrow y + 2 = kx^2$

  Además, sabemos que pasa por el punto $P(1, 0)$: $2 = k \rightarrow y + 2 = 2x^2$
- $x \in [1, 6]$: debemos encontrar la recta que pasa por $P(1,\ 0)$ y $Q(2,\ 1)$, con vector $\overrightarrow{PQ} = (1, 1) \rightarrow y = x - 1$.

  Su recorrido son los valores que toma la ordenada:

  $Rec = [-2,\ 5]$

5 **Dadas $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \frac{1}{x-3}$, halla:**

a) $f[g(2)]$ **b)** $g[f(15)]$ **c)** $f \circ g$ **d)** $g^{-1}(x)$

a) $f[g(2)] = f\left(\frac{1}{2-3}\right) = f(-1) = \sqrt{-1+1} = 0$

b) $g[f(15)] = g(\sqrt{15+1}) = g(4) = \frac{1}{4-3} = 1$

c) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\frac{1}{x-3}+1} = \sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$

d) $x = \frac{1}{y-3} \rightarrow xy - 3x = 1 \rightarrow y = \frac{1+3x}{x}$

$g^{-1}(x) = \frac{1+3x}{x}$

6 **Depositamos en un banco 2 000 € al 6 % anual.**

a) Escribe la función que nos dice cómo evoluciona el capital a lo largo del tiempo. ¿Qué tipo de función es? Represéntala.

b) ¿En cuánto tiempo se duplicará el capital?

a) Al cabo de un año el capital se convertirá en:

$$2\,000 + 2\,000 \cdot \frac{6}{100} = 2\,000\left(1+\frac{6}{100}\right) = 2\,000 \cdot 1{,}06$$

Al final del segundo año, el capital será $2\,000 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}06 = 2\,000 \cdot 1{,}06^2$

Luego la función que da el capital al cabo de t años es:

$C(t) = 2\,000 \cdot 1{,}06^t$

b) Tenemos que calcular el tiempo, t, necesario para que:

$$4\,000 = 2\,000 \cdot 1{,}06^t \;\rightarrow\; 1{,}06^t = 2 \;\rightarrow\; t = \frac{\log 2}{\log 1{,}06} = 11{,}9$$

Deberán pasar 12 años para que el capital se haya duplicado.

7 **El precio de venta de un artículo viene dado por la expresión $p = 12 - 0{,}01x$ (x = número de artículos fabricados; p = precio, en cientos de euros).**

a) Si se fabrican y se venden 500 artículos, ¿cuáles serán los ingresos obtenidos?

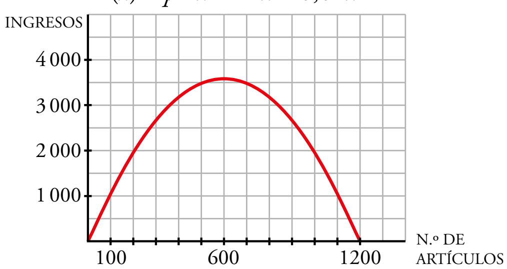
b) Representa la función *número de artículos-ingresos*.

c) ¿Cuántos artículos se deben fabricar para que los ingresos sean máximos?

a) Si se venden 500 artículos, su precio será:

$p(500) = 12 - 0{,}01 \cdot 500 = 7$ cientos de euros $\rightarrow$ Ingresos $= 500 \cdot 700 = 350\,000$ €

b) $I(x) = p \cdot x = 12x - 0{,}01x^2$



c) Hallamos el vértice de la parábola:

$$\begin{cases} x = \dfrac{12}{-0{,}02} = 600 \text{ artículos} \\ y = 12 \cdot 600 - 0{,}01 \cdot 600^2 = 3\,600 \text{ cientos de euros} \end{cases}$$

Deben fabricar 600 artículos para obtener unos ingresos máximos (360 000 euros).

8 **[Este problema es una oportunidad para trabajar la dimensión social (comunidad y comunicación) de esta clave].**

La dosis de un fármaco comienza con 10 mg y cada día debe aumentar 2 mg hasta llegar a 20 mg. Se debe seguir 15 días con esa cantidad y a partir de entonces ir disminuyendo 4 mg cada día.

a) Representa la función que describe este enunciado y determina su expresión analítica.

b) Di cuáles son su dominio y su recorrido.

a) En el 5.º día la dosis alcanza los 20 mg y este ya es el primero de los 15 días de tratamiento con la dosis máxima. Por tanto, el 19.º día es el último que toma 20 mg.

La expresión es $f(x) = \begin{cases} 10+2x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ 20 & \text{si } 5 < x \le 20 \\ 100-4x & \text{si } 20 < x \end{cases}$

b) El dominio es el intervalo [0, 24].

El recorrido es el intervalo [0, 20].

9 ODS Meta 11.c. **[Tras visionar el vídeo de la meta se puede proponer un debate sobre la conveniencia o no de que la población se concentre en grandes ciudades].**

Para estudiar el crecimiento poblacional de una ciudad se requiere una función del tipo $P(t) = P_0\, e^{kt}$. Al iniciarse el estudio, la ciudad tenía 50 000 habitantes y 10 años después, 74 590 habitantes.

a) Determina la función.

b) ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a los 100 000 habitantes?

a) Consideramos t en años.

$P(0) = P_0 e^{k0} = 50\,000 \to P_0 = 50\,000$

$P(10) = 50\,000e^{10k} = 74\,590 \to \dfrac{74\,590}{50\,000} = e^{10k}$

Aplicamos el logaritmo neperiano:

$k = \dfrac{1}{10}\, ln\left(\dfrac{7\,459}{5\,000}\right) = 0,04$

Por tanto:

$P(t) = 50\,000e^{0,04t}$

b) $P(t) = 50\,000e^{0,04t} = 100\,000 \to e^{0,04t} = 2 \to t = \dfrac{ln(2)}{0,04} = 17,32$ años

Para consultar los **criterios de evaluación** y los **estándares de aprendizaje evaluables**, véase la Programación.

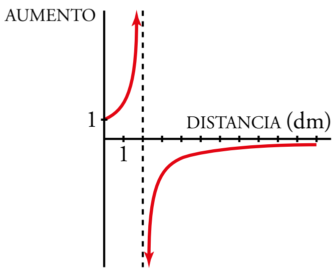
11 LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD Y RAMAS INFINITAS

C.E.: CE 1.11. (EA 1.11.1.) CE 1.12. (EA 1.12.1.)

Página 287

Resuelve

A través de una lupa



El *aumento* A producido por cierta lupa viene dado por la siguiente ecuación:

$$A = \frac{2}{2-d}$$

donde d es la *distancia* (en decímetros) entre el objeto que queremos observar y la lupa.

Si acercamos el objeto a la lupa hasta tocarla $(d = 0)$, su tamaño se mantiene igual. Esto, en términos de límites, se escribe así:

$$\lim_{d \to 0} A = 1$$

¿Cómo se escribiría lo siguiente en términos de límites?

a) Si acercamos el objeto a 2 dm, aproximadamente, se hace más y más grande. Además, el objeto se verá al derecho si $d < 2$, o invertido, si $d > 2$.

$$\lim_{d \to 2^-} A = \dots \qquad \lim_{d \to 2^+} A = \dots$$

b) Si alejamos la lupa del objeto, este se ve cada vez más pequeño.

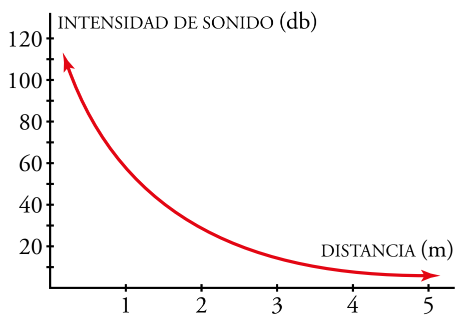
$$\lim_{d \to +\infty} A = \dots$$

a) $\lim_{d \to 2^-} A = +\infty$

$\lim_{d \to 2^+} A = -\infty$

b) $\lim_{d \to +\infty} A = 0$

Ruido y silencio



Si acercamos la oreja a un foco de sonido, este se hace insoportable. Si la alejamos mucho, deja de oírse. Traduce estos hechos a límites, llamando I a la *intensidad del sonido* (en decibelios) y d a la *distancia* (en metros) a la que nos colocamos del foco emisor:

$$\lim_{d \to 0} I = \dots \qquad \lim_{d \to +\infty} I = \dots$$

$\lim_{d \to 0} I = +\infty \qquad \lim_{d \to +\infty} I = 0$

1 COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN EL INFINITO

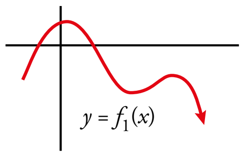
C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 3.2. (EA 3.2.1.)

Página 289

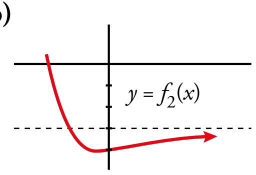
1 Cabezas pensantes. **[La búsqueda de los límites propuestos, permite trabajar esta técnica].**

Di el límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones:

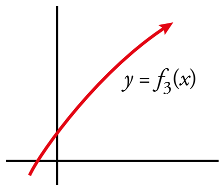
a)



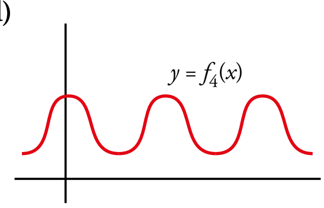
b)



c)



d)



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = -\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = -3$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x)$ no existe.

2 CALCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES CUANDO $x \to +\infty$

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 3.2.(EA 3.2.1.)

Página 290

1 **Di el valor del límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$ **b)** $f(x) = 5x^3 + 7x$

c) $f(x) = x - 3x^4$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{3x}$

e) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x^3-1}{-5}$

a) $-\infty$ b) $+\infty$

c) $-\infty$ d) 0

e) 0 f) $-\infty$

2 **Como $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 200x^2) = +\infty$, halla un valor de x para el cual sea $x^3 - 200x^2 > 1\,000\,000$.**

Por ejemplo, para $x = 1\,000$, $f(x) = 800\,000\,000$.

3 **Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 - 10x} = 0$, halla un valor de x para el cual sea $\dfrac{1}{x^2-10x} < 0{,}0001$.**

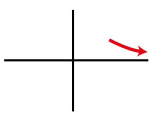
Por ejemplo, para $x = 1\,000$, $f(x) = 0{,}0000\overset{\frown}{01}$.

Página 291

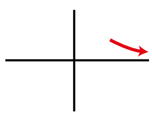
4 **Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{3}{x}$ **c)** $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **d)** $f(x) = 3x - 5$

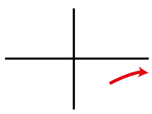
a) 0



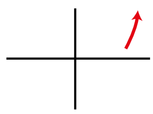
b) 0



c) 0



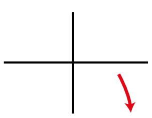
d) $+\infty$



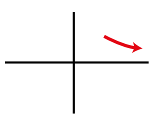
5 **Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:**

a) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{-5}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2-3}{1+2x^3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-3}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1-x^3}{1+x^3}$

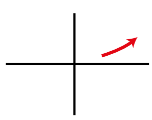
a) $-\infty$



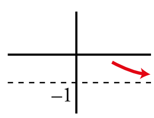
b) 0



c) $+\infty$



d) -1

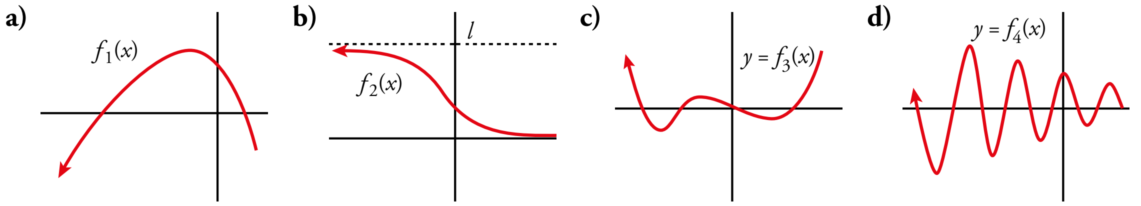


3 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CUANDO $x \to -\infty$

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 3.2. (EA 3.2.1.)

Página 292

1 **Indica el límite cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones:**



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = l$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = +\infty$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_4(x) =$ no existe

4 ▶ CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES CUANDO $x \to -\infty$

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 3.2. (EA 3.2.1.)

Página 293

1 **Halla los límites cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$ de las funciones siguientes:**

a) $f(x) = -2x^3 + 7x^2$ **b)** $f(x) = 3x^4 - 7x$

c) $f(x) = 10^x$ **d)** $f(x) = \sqrt{5x-8}$

e) $f(x) = \sqrt{-2x^2+1}$ **f)** $f(x) = -5^x$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + 7x^2) = \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^3 + 7x^2) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^4 - 7x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^4 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^4 - 7x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^4 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 10^x = 0$

Ya que para $x = -10$, $10^{-10} = \dfrac{1}{10^{10}} = 0{,}00000000001$ y análogamente ocurriría para valores negativos de x menores que -10.

De forma similar a la anterior, podemos comprobar que $\lim\limits_{x \to +\infty} 10^x = +\infty$.

d) El límite cuando x tiende a $-\infty$ no tiene sentido porque la función está definida para $x \geq \dfrac{8}{5}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{5x-8} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{5x} = +\infty$ porque el radicando tiende a $+\infty$.

e) No tiene sentido calcular ninguno de los dos límites porque el dominio de definición de la función es el intervalo $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} -5^x = 0$

Ya que para $x = -10$, $-5^{-10} = -\dfrac{1}{5^{10}} = -0{,}0000001024$ y análogamente ocurriría para valores negativos de x menores que -10.

De forma similar a la anterior, podemos comprobar que $\lim\limits_{x \to +\infty} -5^x = -\infty$.

2 **Halla los límites cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$ de las funciones siguientes:**

a) $f(x) = \sqrt{3-x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2+3}{-x^3}$

c) $f(x) = \dfrac{-x^3}{x^2+3}$ **d)** $f(x) = \dfrac{5x^3-10}{3x^3+10x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{3-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$ porque el radicando tiende a $+\infty$.

El límite cuando x tiende a $+\infty$ no tiene sentido porque la función está definida solo cuando $x \leq 3$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+3}{-x^3} \underset{\downarrow}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{-x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-x} = 0$

Términos de mayor grado.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3}{-x^3} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-x} = 0$$

Términos de mayor grado.

c) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x^3}{x^2+3} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$$

Términos de mayor grado.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x^3}{x^2+3} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$$

Términos de mayor grado.

d) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3-10}{3x^3+10x^2} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3}{3x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

Términos de mayor grado.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3-10}{3x^3+10x^2} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3}{3x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

Términos de mayor grado.

5 ▸ COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. LÍMITES Y CONTINUIDAD

C.E.: CE 1.11. (EA 1.11.1.) CE 1.12.(EA 1.12.1.) CE 1.13. (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.-EA 1.13.3.) CE 3.2. (EA 3.2.1.-EA 3.2.2.-EA 3.2.3.)

Página 294

1 **Comprueba que** $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ **dando a** x **valores menores que 1, cada vez más próximos a 1, como, por ejemplo, 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; …**

$$x = 0{,}9 \;\to\; \frac{1}{(0{,}9-1)^2} = 100$$

$$x = 0{,}99 \;\to\; \frac{1}{(0{,}99-1)^2} = 10\,000$$

$$x = 0{,}999 \;\to\; \frac{1}{(0{,}999-1)^2} = 1\,000\,000$$

$$x = 0{,}9999 \;\to\; \frac{1}{(0{,}9999-1)^2} = 100\,000\,000$$

$$\vdots$$

$$x = \underset{n\text{ - veces}}{0{,}99\ldots99} \;\to\; \frac{1}{(0{,}99\ldots9-1)^2} = \underset{2n\text{ - veces}}{100\ldots0}$$

Luego $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

2 **Comprueba, dando valores a la variable** x**, las siguientes igualdades:**

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2+5) = 6$

a) $x = 0{,}9 \;\to\; \dfrac{1}{0{,}9-1} = -10$

$x = 0{,}99 \;\to\; \dfrac{1}{0{,}99-1} = -100$

$x = 0{,}999 \;\to\; \dfrac{1}{0{,}999-1} = -1\,000$

$\vdots$

$x = \underset{n\text{ - veces}}{0{,}9\ldots9} \;\to\; \dfrac{1}{\underset{\text{n - veces}}{0{,}9\ldots9}-1} = \underset{n\text{ - veces}}{-10\ldots0}$

Luego $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$

b) $x = 0{,}9 \;\to\; (0{,}9)^2 + 5 = 5{,}81$

$x = 0{,}99 \;\to\; (0{,}99)^2 + 5 = 5{,}9801$

$x = 0{,}999 \;\to\; (0{,}999)^2 + 5 = 5{,}998001$

$x = 0{,}9999 \;\to\; (0{,}9999)^2 + 5 = 5{,}99980001$

Luego $\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 5) = 6$

Página 295

Ejercicios

- **Comprueba que**

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} (x^2 + 5) = 6$$

dando a x los valores: 2; 1,5; 1,1; 1,01; 1,001; 1,0001; …

- $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

$x = 2 \to \dfrac{1}{(2-1)^2} = 1$

$x = 1{,}5 \to \dfrac{1}{(1{,}5-1)^2} = 4$

$x = 1{,}1 \to \dfrac{1}{(1{,}1-1)^2} = 100$

$x = 1{,}01 \to \dfrac{1}{(1{,}01-1)^2} = 10\,000$

$x = 1{,}001 \to \dfrac{1}{(1{,}001-1)^2} = 1\,000\,000$

$x = 1{,}0001 \to \dfrac{1}{(1{,}0001-1)^2} = 100\,000\,000$

Luego $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

- $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$

$x = 2 \to \dfrac{1}{2-1} = 1$

$x = 1{,}5 \to \dfrac{1}{1{,}5-1} = 2$

$x = 1{,}1 \to \dfrac{1}{1{,}1-1} = 10$

$x = 1{,}01 \to \dfrac{1}{1{,}01-1} = 100$

$x = 1{,}001 \to \dfrac{1}{1{,}001-1} = 1\,000$

$x = 1{,}0001 \to \dfrac{1}{1{,}0001-1} = 10\,000$

Luego $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$

- $\lim_{x \to 1^+} (x^2 + 5) = 6$

$x = 2 \to (2)^2 + 5 = 9$

$x = 1{,}5 \to (1{,}5)^2 + 5 = 7{,}25$

$x = 1{,}1 \to (1{,}1)^2 + 5 = 6{,}21$

$x = 1{,}01 \to (1{,}01)^2 + 5 = 6{,}0201$

$x = 1{,}001 \to (1{,}001)^2 + 5 = 6{,}002001$

$x = 1{,}0001 \to (1{,}0001)^2 + 5 = 6{,}00020001$

Luego $\lim_{x \to 1^+} (x^2 + 5) = 6$

Página 297

3 **Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y qué tipo de discontinuidad presenta:**

a) $y = \dfrac{x+2}{x-3}$ b) $y = \dfrac{x^2-3x}{x}$

c) $y = \dfrac{x^2-3}{x}$ d) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

a) Rama infinita en $x = 3$ (asíntota vertical).

b) Discontinuidad evitable en $x = 0$ (le falta ese punto).

c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).

d) Salto en $x = 4$.

4 **Explica por qué son continuas las siguientes funciones y determina el intervalo en el que están definidas:**

a) $y = x^2 - 5$ b) $y = \sqrt{5-x}$

c) $y = \begin{cases} 3x-4 & \text{si } x < 3 \\ x+2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ d) $y = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 5 \end{cases}$

a) Está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$, por ser una función polinómica.

b) Está definida y es continua en $(-\infty, 5]$.

Las funciones dadas mediante una expresión analítica sencilla (las que conocemos) son continuas donde están definidas.

c) Está definida en todo $\mathbb{R}$. Es continua, también, en todo $\mathbb{R}$. El único punto en que se duda es el 3: las dos ramas toman el mismo valor para $x = 3$.

$3 \cdot 3 - 4 = 9 - 4 = 5 \qquad 3 + 2 = 5$

Por tanto, las dos ramas empalman en el punto $(3, 5)$. La función es también continua en $x = 3$.

d) También las dos ramas empalman en el punto $(2, 2)$. Por tanto, la función es continua en el intervalo en el que está definida: $[0, 5)$.

5 **Halla m para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$:**

$$y = \begin{cases} x^2-5 & \text{si } x < 3 \\ mx+10 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

y es continua en $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ por serlo las funciones $f_1(x) = x^2 - 5$ y $f_2(x) = mx + 10$.

Hemos de procurar, pues, que también lo sea en el punto de empalme, $x = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} y = f_1(3) = (3)^2 - 5 = 4 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} y = f_2(3) = 3m + 10 \end{array}\right\} 4 = 3m + 10 \rightarrow 3m = 4 - 10 \rightarrow 3m = -6 \rightarrow m = \frac{-6}{3} \rightarrow m = -2.$$

Para que y sea continua en $x = 3$, ha de ser $m = -2$.

6 **Calcula m y n para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$:**

$$y = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x < 0 \\ x^2+mx+n & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ 45-x^2 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

y es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, 6) \cup (6, +\infty)$ por serlo las funciones $f_1(x) = 2x + 3$, $f_2(x) = x^2 + mx + n$ y $f_3(x) = 45 - x^2$.

Hemos de procurar, pues, que también lo sea en los puntos de empalme.

- $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(0) = 3 \\ f_2(0) = n \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} y = 3 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} y = n \end{array}\right\} 3 = n$$

Para que y sea continua en $x = 0$ ha de ser $n = 3$.

- $x = 6$

$$\left.\begin{array}{l} f_2(6) = 36 + 6m + 3 \\ f_3(6) = 45 - 36 = 9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 6^-} y = 6m + 39 \\ \lim\limits_{x \to 6^+} y = 9 \end{array}\right\} 6m + 39 = 9 \to 6m = -30 \to m = -\frac{30}{6} \to m = -5.$$

Si $m = -5$ y $n = 3$, entonces $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

7 **Calcula p y q para que f sea continua en $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} px + 2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } 2 \le x \le 5 \\ -\frac{1}{5}x + q & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

$f(x)$ es continua en $(-\infty, 2) \cup (2, 5) \cup (5, +\infty)$ por serlo las funciones $f_1(x) = px + 2$, $f_2(x) = 4$ y $f_3(x) = -\frac{1}{5}x + q$.

Hemos de procurar, pues, que también lo sea en los puntos de empalme.

- $x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = 2p + 2 \\ f_2(2) = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2p + 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4 \end{array}\right\} 2p + 2 = 4 \to 2p = 20 \to p = 1.$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$ ha de ser $p = 1$.

- $x = 5$

$$\left.\begin{array}{l} f_2(5) = 4 \\ f_3(5) = -1 + q \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = -1 + q \end{array}\right\} 4 = -1 + q \to q = 5.$$

Si $p = 1$ y $q = 5$, entonces $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

6 ▸ CÁLCULO DE LÍMITES EN UN PUNTO

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 3.2. (EA 3.2.1.)

Página 298

1 Calcula razonadamente el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x-2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0,1} \log_{10} x$

a) $-\dfrac{3}{2}$ b) 0 c) $\sqrt{3}$ d) –1

Página 299

2 Calcula n para para que exista el límite en $x = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} n - x^3 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 4 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ tenga límite en $x = -1$ ha de cumplirse $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} f_1(x) = f_1(-1) = n - (-1)^3$ pues $f_1(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto $\lim\limits_{x \to -1} f_1(x)$ coincide con $f_1(-1)$.

$f_1(-1) = n + 1$.

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f_2(x) = f_2(-1) = 2\,(-1) + 4 = 12$ pues $f_2(-1)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto $\lim\limits_{x \to -1} f_2(x)$ coincide con $f_2(-1)$.

Ha de cumplirse, pues, $n + 1 = 2 \;\to\; n = 1$.

Para $n = 1$, $f(x)$ tiene límite en –1 y vale 2:

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$.

3 Calcula k para que esta función tenga límite en $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k & \text{si } x \le 3 \\ 7 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Halla su límite en $x = 0$ y en $x = 11$.

Para que $f(x)$ tenga límite en $x = 3$ ha de cumplirse $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f_1(x) = f_1(3)\; 3^3 - 2 \cdot 3 + k = 27 - 6 + k = k + 21$ pues $f_1(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto $\lim\limits_{x \to 3} f_1(x)$ coincide con $f_1(3)$.

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f_2(x) = f_2(3) = 7$ pues $f_2(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto $\lim\limits_{x \to 3} f_2(x)$ coincide con $f_2(3)$.

Ha de cumplirse, pues, $k + 21 = 7 \;\to\; k = -14$.

Para $k = -14$, $f(x)$ tiene límite en 3 y vale 7.

Digamos, también, en consecuencia, para $k = -14$ $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = f_1(0) = 0^3 - 2 \cdot 0 - 14 = -14$

$\lim\limits_{x \to 11} f(x) = f(11) = f_2(11) = 7$

4 **Halla el límite de esta función en $x = 0$, $x = 3$ y $x = 4$:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 5x + 3 & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

- Límite en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^3 - 5x + 3) = 0^3 - 5 \cdot 0 + 3 = 3$$

- Límite en $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (x^3 - 5x + 3) = 3^3 - 5 \cdot 3 + 3 = 15$$

- Límite en $x = 4$:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} (x^3 - 5x + 3) = 4^3 - 5 \cdot 4 + 3 = 47$$

5 **Halla el límite de esta función en $x = 3$:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x < 3 \\ -x + 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Halla también su límite en $x = 1$ y en $x = 7$.

- $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} f_2(x) = f_2(3) = -3 + 2 = -1.$
- $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} f_1(x) = f_1(1) = 2 \cdot 1 + 5 = 7.$
- $\lim_{x \to 7} f(x) = \lim_{x \to 7} f_2(x) = f_2(7) = -7 + 2 = -5.$

Página 301

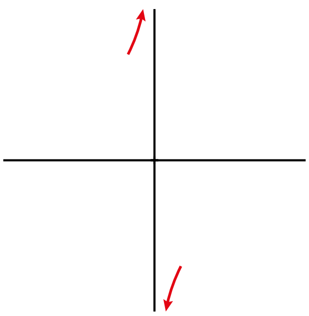
6 **Calcula cada uno de los siguientes límites y representa los resultados:**

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x-3}{x}$ b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x-3}{x^2}$ c) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

a) El denominador se anula en $x = 0$, pero no el numerador. Por tanto, el límite es infinito, con signo más o menos.

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \to \dfrac{-0{,}01 - 3}{-0{,}01} = 301 \to \lim_{x \to 0^-} \dfrac{x-3}{x} = +\infty$

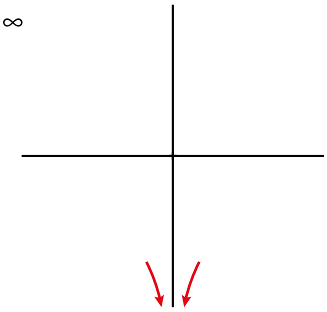
DERECHA: $x = 0{,}01 \to \dfrac{0{,}01 - 3}{0{,}01} = -299 \to \lim_{x \to 0^+} \dfrac{x-3}{x} = -\infty$



b) El denominador se anula en $x = 0$, pero no el numerador. Por tanto, el límite es infinito, con signo más o menos.

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \to \dfrac{-0{,}01 - 3}{(-0{,}01)^2} = -30\,100 \to \lim_{x \to 0^-} \dfrac{x-3}{x^2} = -\infty$

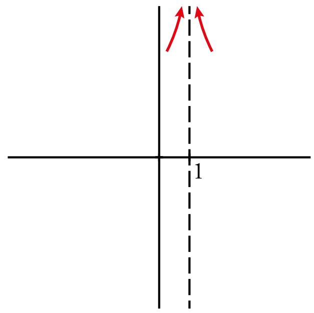
DERECHA: $x = 0{,}01 \to \dfrac{0{,}01 - 3}{0{,}01^2} = -29\,900 \to \lim_{x \to 0^+} \dfrac{x-3}{x^2} = -\infty$



c) El denominador se anula en $x = 1$, pero no el numerador. Por tanto, el límite es infinito, con signo más o menos.

IZQUIERDA: $x = 0{,}99 \to \dfrac{0{,}99^3}{(0{,}99-1)^2} = 9\,703 \to \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$

DERECHA: $x = 1{,}01 \to \dfrac{1{,}01^3}{(1{,}01-1)^2} = 10\,303 \to \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$



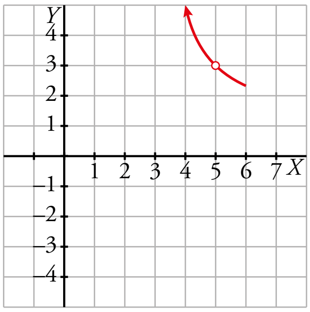
7 a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-4x-5}{x^2-8x+15}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3-5x^2}{x^2}$

a) Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 5$.

Simplificamos la fracción:

$$\frac{x^2-4x-5}{x^2-8x+15} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-3)(x-5)} = \frac{x+1}{x-3}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2-4x-5}{x^2-8x+15} = \lim_{x \to 5} \frac{x+1}{x-3} = 3$$



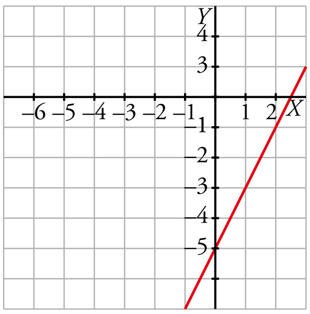
b) Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 0$.

Simplificamos la fracción:

$$\frac{2x^3-5x^2}{x^2} = \frac{x^2(2x-5)}{x^2} = 2x-5$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^3-5x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} (2x-5) = -5$$

$y = 2x - 5$



8 **a)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3+3x^2}{x^4}$

a) Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 1$.

Simplificamos la fracción $\to \dfrac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+x} = \dfrac{(x+5)(x-1)}{x(x-1)^2} = \dfrac{x+5}{x(x-1)}$

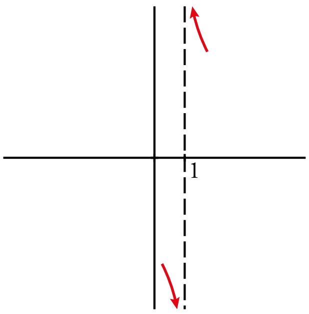
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+x} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+5}{x(x-1)}$ $\to$ Ahora se anula el denominador, pero no el numerador. Por tanto, los límites laterales son $\pm\infty$.

Estudiamos el signo de la función a uno y otro lado de 1.

IZQUIERDA: $x = 0{,}99 \to \dfrac{0{,}99^2+4\cdot 0{,}99-5}{0{,}99^3-2\cdot 0{,}99^2+0{,}99} = -605 \to \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+x} = -\infty$

DERECHA $x = 1{,}01 \to \dfrac{1{,}01^2+4\cdot 1{,}01-5}{1{,}01^3-2\cdot 1{,}01^2+1{,}01} = 595 \to \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+x} = +\infty$

Por tanto, el límite pedido no existe.



b) Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 0$.

Simplificamos la fracción $\to \dfrac{x^3+3x^2}{x^4} = \dfrac{x^2(x+3)}{x^4} = \dfrac{x+3}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3+3x^2}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+3}{x^2}$ $\to$ Ahora se anula el denominador, pero no el numerador. Por tanto, los límites laterales son $\pm\infty$.

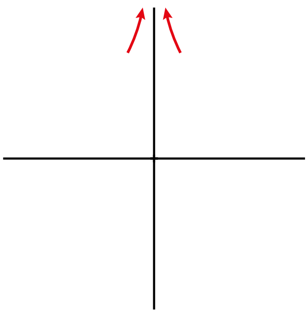
Estudiamos la función a uno y otro lado de 0.

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \to \dfrac{(-0{,}01)^3+3\cdot(-0{,}01)^2}{(-0{,}01)^4} = 29\,900 \to \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^3+3x^2}{x^4} = +\infty$

DERECHA $x = 0{,}01 \to \dfrac{0{,}01^3+3\cdot 0{,}01^2}{0{,}01^4} = 30\,100 \to \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3+3x^2}{x^4} = +\infty$

Por tanto, el límite de esta función cuando $x \to 0$ es $+\infty$.

$y = \dfrac{x+3}{x^2}$



7 ▶ RAMAS INFINITAS. ASÍNTOTAS

C.E.: CE 1.13. (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.-EA 1.13.3.) **CE 3.2.** (EA 3.2.1.)

Página 303

1 **Determina las asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas:**

a) $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$ b) $y = \dfrac{3x^2-7}{x-2}$ c) $y = \dfrac{1}{x}$ d) $y = -\dfrac{1}{x^2}$ e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

a) Como el denominador se anula cuando $x = 2$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{x-2} = \frac{7}{0} = \pm\infty$$

IZQUIERDA: $x = 1{,}99 \;\rightarrow\; \dfrac{3\cdot 1{,}99+1}{1{,}99-2} = -697 \;\rightarrow\; \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x+1}{x-2} = -\infty$

DERECHA: $x = 2{,}01 \;\rightarrow\; \dfrac{3\cdot 2{,}01+1}{2{,}01-2} = 703 \;\rightarrow\; \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x+1}{x-2} = +\infty$

Por tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x+1}{x-2} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x\to +\infty} 3 = 3$$

Términos de mayor grado.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x+1}{x-2} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x\to -\infty} 3 = 3$$

Términos de mayor grado.

Por tanto, la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal.

Para saber la posición de la curva respecto de la asíntota horizontal, debemos tener en cuenta que

$$y = \frac{3x+1}{x-2} = 3 + \frac{7}{x-2}.$$

Cuando $x \rightarrow +\infty$ el cociente $\dfrac{7}{x-2}$ toma valores positivos y la función está por encima de la asíntota.

Cuando $x \rightarrow -\infty$, ocurre lo contrario y la función está por debajo de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

b) Como el denominador se anula cuando $x = 2$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-7}{x-2} = \frac{5}{0} = \pm\infty$$

IZQUIERDA: $x = 1{,}99 \;\rightarrow\; \dfrac{3\cdot 1{,}99^2-7}{1{,}99-2} = -488{,}03 \;\rightarrow\; \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x^2-7}{x-2} = -\infty$

DERECHA: $x = 2{,}01 \;\rightarrow\; \dfrac{3\cdot 2{,}01^2-7}{2{,}01-2} = 512{,}03 \;\rightarrow\; \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x^2-7}{x-2} = +\infty$

Por tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2-7}{x-2} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x\to +\infty} 3x = +\infty$$

Términos de mayor grado.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2-7}{x-2} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x\to -\infty} 3x = -\infty$$

Términos de mayor grado.

Por tanto, no tiene asíntotas de este tipo.

Ahora estudiamos las asíntotas oblicuas:

$$y = \frac{3x^2 - 7}{x - 2} = 3x + 6 + \frac{5}{x - 2}$$

La recta $y = 3x + 6$ es una asíntota oblicua ya que $\frac{5}{x-2}$ tiende a 0 cuando $x \to \pm\infty$.

Cuando $x \to +\infty$ el cociente $\frac{5}{x-2}$ toma valores positivos y la función está por encima de la asíntota oblicua.

Cuando $x \to -\infty$, ocurre lo contrario y la función está por debajo de la asíntota.

c) Como el denominador se anula cuando $x = 0$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \ \to \ \frac{1}{-0{,}01} = -100 \ \to \ \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

DERECHA: $x = 0{,}01 \ \to \ \frac{1}{0{,}01} = 100 \ \to \ \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Cuando $x \to +\infty$, la función es positiva y está por encima de la asíntota horizontal. Cuando $x \to -\infty$, la función es negativa y está por debajo de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

d) Como el denominador se anula cuando $x = 0$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{-x^2} = \frac{1}{0} = -\infty$ porque la función siempre toma valores negativos.

Por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-x^2} = 0$$

Por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Como la función siempre toma valores negativos, está por debajo de la asíntota horizontal.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

e) La función está definida cuando $x^2 - 9 > 0$, es decir, cuando $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. En los puntos -3 y 3 se producen divisiones entre 0. Vamos a estudiar en ellos la existencia de asíntotas, pero solo podremos calcular límites por uno de los lados en cada punto.

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Porque la función siempre es positiva. Luego las rectas $x = -3$ y $x = 3$ son asíntotas verticales.

La recta $y = 0$ es claramente una asíntota horizontal porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = 0$.

Tanto si $x \to +\infty$ como si $x \to -\infty$, la función queda por encima de la asíntota horizontal por tomar valores positivos.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

8 ▶ RAMAS INFINITAS EN LAS FUNCIONES RACIONALES

C.E.: CE 1.13. (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.-EA 1.13.3.) **CE 3.2.** (EA 3.2.1.-EA 3.2.2.-EA 3.2.3.)

Página 305

1 **Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones y, a partir de ellas, perfila la forma de la curva:**

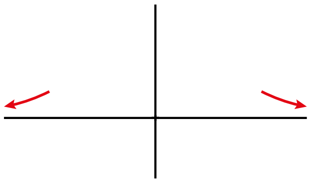
a) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ b) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ c) $y = \dfrac{x^4}{x^2+1}$ d) $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$

e) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ f) $y = \dfrac{x^3}{1+x^2}$ g) $y = \dfrac{x^2+3x}{x+1}$ h) $y = \dfrac{2x^3-3x^2}{x-1}$

a) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$. Asíntota: $y = 0$

Como la función siempre es positiva, queda por encima de la asíntota.

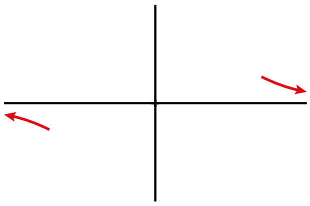


b) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$. Asíntota: $y = 0$

Estudiamos el signo de su diferencia con la asíntota:

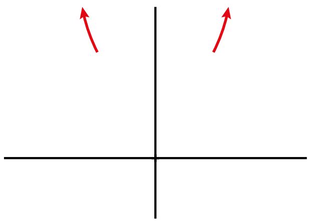
$$f(x) - 0 = \frac{x}{1+x^2} \begin{cases} + \text{ si } x \to +\infty \to \text{Por encima de la asíntota} \\ - \text{ si } x \to -\infty \to \text{Por debajo de la asíntota} \end{cases}$$



c) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito: como *grado de* $P(x)$ – *grado de* $Q(x) = 2$, tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$ y otra cuando $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^4}{x^2+1} = +\infty \to$ Las ramas parabólicas son hacia arriba.



d) Asíntotas verticales. Obtenemos las raíces del denominador:

$x^2 - 2x = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = 2$ son asíntotas porque el numerador no se anula en estos valores.

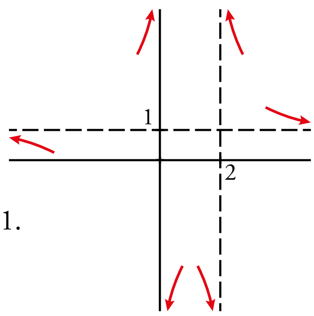
Estudiamos la posición de la curva respecto a ellas:

	PRÓXIM. $x = 0$		PRÓXIM. $x = 2$	
x	–0,01	0,01	1,99	2,01
$\dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$	+	–	–	+

Ramas en el infinito: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = 1$. Asíntota: $y = 1$.

Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota:

$$f(x) - 1 = \frac{x^2+2}{x^2-2x} - 1 = \frac{2+2x}{x^2-2x} \begin{cases} + \text{ si } x \to +\infty \to \text{Por encima de la asíntota} \\ - \text{ si } x \to -\infty \to \text{Por debajo de la asíntota} \end{cases}$$

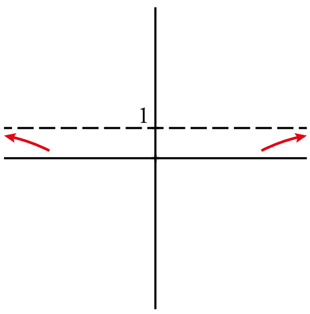


e) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$. Asíntota: $y = 1$

Estudiamos el signo de su diferencia con la asíntota:

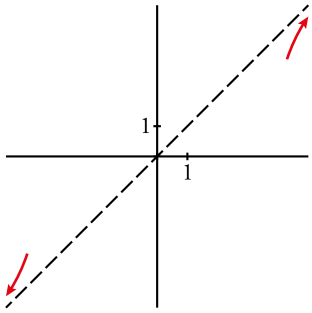
$$f(x) - 1 = \frac{-1}{1+x^2} \begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \to \text{Por debajo de la asíntota} \\ - \text{ si } x \to -\infty \to \text{Por debajo de la asíntota} \end{cases}$$



f) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula nunca.

Ramas en el infinito: como *grado de* $P(x)$ – *grado de* $Q(x) = 1$, tiene una asíntota oblicua.

$y = \dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{x^2-1} \;\longrightarrow$ La recta $y = x$ es la asíntota.



Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota:

$$f(x) - x = \frac{-x}{x^2+1}\begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \to \text{Por debajo de la asíntota} \\ + \text{ si } x \to -\infty \to \text{Por encima de la asíntota}\end{cases}$$

g) Asíntota vertical: $x = -1$ porque se anula el denominador y no el numerador.

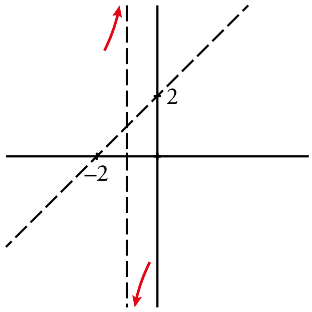
Estudiamos su posición:

IZQUIERDA: $f(-1{,}01) = \dfrac{(-1{,}01)^2 + 3\cdot(-1{,}01)}{-1{,}01+1} = 200{,}99$ (positivo)

DERECHA: $f(-0{,}99) = \dfrac{(-0{,}99)^2 + 3\cdot(-0{,}99)}{-0{,}99+1} = -198{,}99$ (negativo)

Ramas en el infinito: como *grado de* $P(x)$ – *grado de* $Q(x) = 1$, tiene una asíntota oblicua.

$y = \dfrac{x^2+3x}{x+1} = x + 2 - \dfrac{2}{x+1} \;\longrightarrow$ La recta $y = x + 2$ es la asíntota.



Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota:

$$f(x) - (x+2) = \frac{-2}{x+1}\begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \to \text{Por debajo de la asíntota} \\ + \text{ si } x \to -\infty \to \text{Por encima de la asíntota}\end{cases}$$

h) Asíntota vertical: $x = 1$ porque se anula el denominador y no el numerador.

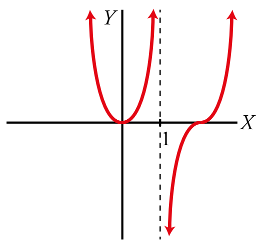
Estudiamos su posición:

IZQUIERDA: $f(0{,}99) = \dfrac{2\cdot(0{,}99)^3 - 3\cdot(0{,}99)^2}{0{,}99-1} = 99{,}97$ (positivo)

DERECHA: $f(1{,}01) = \dfrac{2\cdot(1{,}01)^3 - 3\cdot(1{,}01)^2}{1{,}01-1} = -99{,}97$ (negativo)

Ramas en el infinito: como *grado de* $P(x)$ – *grado de* $Q(x) = 2$, tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$ y otra cuando $x \to +\infty$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2}{x-1} +\infty \to \text{Rama parabólica hacia arriba} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2}{x-1} +\infty \to \text{Rama parabólica hacia arriba}\end{cases}$$



9 RAMAS INFINITAS EN LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

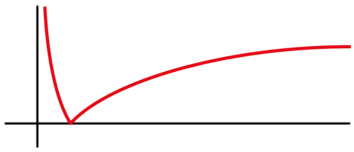
C.E.: CE 1.12. (EA 1.12.1.) CE 3.2. (EA 3.2.1.)

Página 306

1 **¿Qué te hace decir eso? [La decisión sobre las afirmaciones puede completarse a través de las tres fases que propone esta estrategia].**

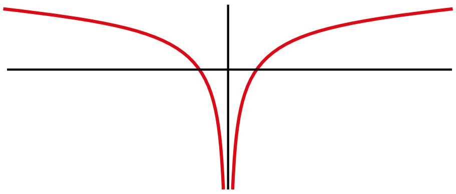
¿Verdadero o falso?

a) La función $y = |log_2 x|$ se representa así:



Tiene dos ramas infinitas: una asíntota vertical en $y = 0$ y una rama parabólica cuando $x \to +\infty$.

b) La función $y = log_2 |x|$ se representa así:



Tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y sendas ramas parabólicas en $-\infty$ y en $+\infty$.

a) Falso. Tiene una asíntota vertical en $x = 0$ no en $y = 0$.

b) Verdadero.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 1.13. (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.-EA 1.13.3.)

Página 307

1. Cálculo de límites de una función en un punto

Hazlo tú

- **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 2x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{(x+2)^2}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 2x} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminación. Tenemos que simplificar la fracción.

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 2x} = \frac{(x-1)^2}{2x(x-1)} = \frac{x-1}{2x}; \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 2x} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2x} = 0$$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{(x+2)^2} = \dfrac{-2}{0} = -\infty$ porque el denominador siempre es positivo y el numerador siempre es negativo en las proximidades del punto $x = -2$. (En este caso no son necesarios los límites laterales).

c) Multiplicamos el numerador y el denominador por el binomio conjugado del numerador. Después dividimos ambos por x.

$$\frac{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}{x} = \frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2 - \left(\sqrt{1-x}\right)^2}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \frac{(1+x) - (1-x)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \frac{1+x-1+x}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1$$

2. Cálculo de límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$

Hazlo tú

- **Calcula** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **y** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **en los siguientes casos:**

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 5}$ **d)** $f(x) = \dfrac{5x + 3}{x^2 - 2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 - 1} = +\infty$ porque el radicando es tan grande como queramos dando a x valores muy grandes.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2 - 1} = +\infty$ por una razón análoga a la anterior.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2} \underset{\downarrow}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2}{-2x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{-2} = -2$

Términos de mayor grado.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2} \underset{\downarrow}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2}{-2x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{-2} = -2$

Términos de mayor grado.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x - 5} \underset{\downarrow}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

Términos de mayor grado.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x - 5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x + 3}{x^2 - 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x + 3}{x^2 - 2} = 0$ porque el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Página 308

4. Límites y continuidad de una función definida «a trozos»

Hazlo tú

- **Halla el límite de la función**

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{si } x < 3 \\ x - 2, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

en $x = 0$ y en $x = 3$. Estudia su continuidad.

- En $x = 0$ como $0 < 3$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2x - 3 = -3$.

- $x = 3$ es el «punto de ruptura». Por ello hay que estudiar los límites laterales.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} (x - 2) = 1 \end{array} \right\} \text{ No coinciden, por tanto, no existe } \lim_{x \to 3} f(x).$$

f es discontinua en $x = 3$ porque no existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$; en ese punto la función tiene un salto infinito.

Por estar formada por funciones polinómicas, f es continua para todo número real distinto de 3. Lo expresamos así $\mathbb{R} - \{3\}$.

5. Función continua en un punto

Hazlo tú

- **Halla el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x \leq 1 \\ x + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.**

Estudiamos la continuidad en el «punto de ruptura» $x = 1$.

$f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = 2 - 5 = -3$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} 2x - 5 = -3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} x + k = k + 1 \end{array} \right\} \text{ Para que exista } \lim_{x \to 3} f(x) \text{ debe ser } -3 = k + 1 \ \to \ k = -4.$$

Para $k = -4$, f es continua en $x = 1$. Además f es continua en $\mathbb{R}$, porque lo son $f_1(x) = 2x - 5$ y $f_2(x) = x - 4$ es todo $\mathbb{R}$.

Página 309

6. Ramas infinitas y asíntotas

Hazlo tú

- **Estudia las asíntotas de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

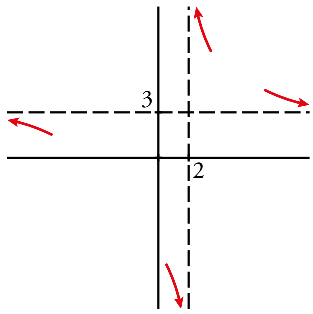
a) • Asíntotas verticales:

$x - 2 = 0 \ \to \ x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 1}{x - 2} = \dfrac{5}{0} = \pm\infty \ \to \ x = 2$ es una asíntota vertical.

Si $x \to 2^-$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{-} = - \right)$ $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{+} = + \right)$ $f(x) \to +\infty$



• Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x-1}{x-2} = 3$; $y = 3$ es una asíntota horizontal.

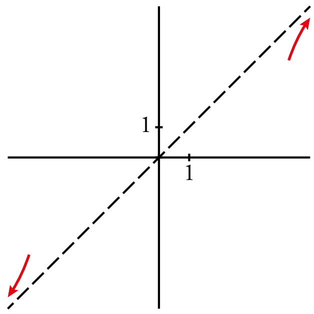
Estudiamos la posición de la curva.

$f(x) - 3 = \dfrac{3x-1}{x-2} - 3 = \dfrac{5}{x-2}$

Si $x \to +\infty$, $f(x) - 3 > 0$. La curva está sobre la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x) - 3 < 0$. La curva está bajo de la asíntota.

b) • Asíntotas verticales. No tiene porque su denominador nunca se anula.



• Asíntotas horizontal u oblicua.

Como el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador, hay asíntota oblicua. Dividiendo obtenemos:

$\dfrac{x^3}{x^2+2} = x - \dfrac{2x}{x^2+2} \to y = x$ es asíntota oblicua.

Estudiamos la posición:

$d = f(x) - y = -\dfrac{2x}{x^2+2}\begin{cases} \text{Si } x \to +\infty \ (d < 0) \ f(x) < y \\ \text{Si } x \to -\infty \ (d > 0) \ f(x) > y \end{cases}$

c) • Asíntotas verticales:

$x^2 - 4 = 0 \to x = \pm 2$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{x^2-4} = \dfrac{4}{0} = \pm\infty \to x = 2$ es una asíntota vertical.

Si $x \to 2^-$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right) \to f(x) \to -\infty$.

Si $x \to 2^+$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right) \to f(x) \to +\infty$.

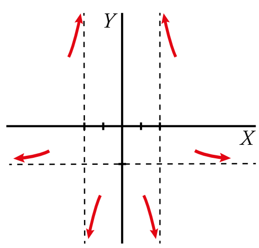
$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2}{x^2-4} = \dfrac{4}{0} = \pm\infty \to x = -2$ es una asíntota vertical.

Si $x \to -2^-$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right) \to f(x) \to +\infty$.

Si $x \to -2^+$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right) \to f(x) \to -\infty$.

• Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2-4} = 1 \to y = 1$ es una asíntota horizontal.



Estudiamos la posición de la curva:

$f(x) - 1 = \dfrac{x^2}{x^2-4} - 1 = \dfrac{x^2 - x^2 + 4}{x^2-4} = \dfrac{4}{x^2-4}$

Si $x \to +\infty$, $f(x) - 1 > 0 \to$ La curva está sobre la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x) - 1 > 0 \to$ La curva está sobre la asíntota.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 3.2. (EA 3.2.1.)

Página 310

1. Límites de una función definida «a trozos»

- **Dada la función**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 3x - 5 & \text{si } 0 \le x < 4 \\ 9x - x^2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

hallar $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **y** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (9x - x^2) = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

- Como $x = 0$ es un punto de ruptura, debemos calcular límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (3x - 5) = -5$$

El límite en $x = 0$ no existe.

2. Parámetros de una función que cumple ciertas condiciones

- **Hallar** a**,** b **y** c **en** $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx}{x - c}$ **para que tenga como asíntotas** $x = 2$ **e** $y = 2x - 1$**.**

Para que $x = 2$ sea una asíntota vertical, el denominador se debe anular en este punto.

$2 - c = 0$ 8 $c = 2$

Luego $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx}{x - 2}$

Dividimos los polinomios para calcular la asíntota oblicua:

$$\frac{ax^2 + bx}{x - 2} = ax + 2a + b + \frac{4a + 2b}{x - 2}$$

Por tanto, $\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$, de donde $a = 2$, $b = -5$

3. Ramas infinitas en funciones exponenciales y logarítmicas

- **Estudiar y representar las ramas infinitas de las funciones siguientes:**

a) $f(x) = 1{,}5^x$

b) $f(x) = 0{,}4^x - 2$

c) $f(x) = \ln(2x - 4)$

a) • Asíntotas verticales. No tiene por ser continua.

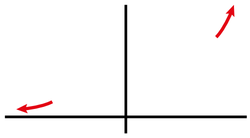
• Asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1{,}5^x = +\infty$ por ser una función exponencial con base mayor que 1.

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1{,}5^x = 0$ por el mismo motivo.

Luego $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

Tiene una rama parabólica cuando $x \to +\infty$.



b) • Asíntotas verticales. No tiene por ser continua.

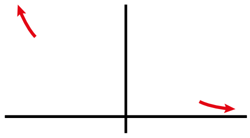
• Asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 0{,}4^x - 2 = -2$, ya que $0{,}4^x \to 0$ cuando $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} 0{,}4^x - 2 = +\infty$, ya que $0{,}4^x \to \infty$ cuand $x \to -\infty$.

Luego $y = -2$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

Tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$.



c) El dominio de definición de la función es el intervalo $(2, +\infty)$ ya que se debe cumplir que $2x - 4 > 0$. En el dominio es una función continua y no tiene asíntotas verticales.

Estudiamos el comportamiento cerca del punto $x = 2$ por la derecha. Podemos verlo evaluando algunos puntos.

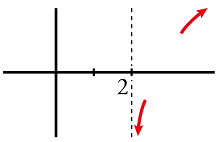
$x = 2{,}001 \to ln\,(2 \cdot 2{,}001 - 4) = -6{,}2$

$x = 2{,}0001 \to ln\,(2 \cdot 2{,}0001 - 4) = -8{,}5$

$\lim\limits_{x \to 2^+} ln\,(2x - 4) = -\infty$

Luego $x = 2$ es una asíntota vertical cuando $x \to 2^+$.

Tiene una rama parabólica en el infinito de crecimiento cada vez más lento hacia arriba por ser una función logarítmica y $\lim\limits_{x \to +\infty} ln\,(2x - 4) = +\infty$.



4. Asíntota oblicua en funciones irracionales

• **Hallar las asíntotas oblicuas de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.**

$y = ax + b$ es asíntota oblicua de f si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ y $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b$

• Calculamos $a = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} \underset{\downarrow}{=} \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} 1 = 1$

Términos de mayor grado.

• Calculamos $b = \lim\limits_{x \to \infty} \left[\sqrt{x^2 + 4} - 1 \cdot x\right] = \infty - \infty$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{\left(\sqrt{x+4}+x\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+4}+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x} =$$

$$= \frac{4}{\infty + \infty} = \frac{4}{\infty} = 0.$$

Luego la asíntota oblicua es: $y = 1 \cdot x + 0 \ \to \ y = x$.

5. Límites de valor absoluto

- **Calcular** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 2\,|x|}{x}$**.**

Definimos $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\,|x|}{x}$ por intervalos.

Definimos $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2 + 2x}{x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < 0 \\ x + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

Calculamos $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x - 2 = -2$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x + 2 = 2$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} \ \to$ No existe límite.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

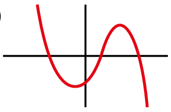
C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 311

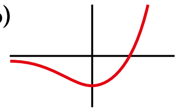
Límite cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$

1 **Determina cuál es el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ en las siguientes gráficas:**

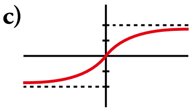
a)



b)



c)



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

2 **Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de cada una de las siguientes funciones. Representa los resultados que obtengas.**

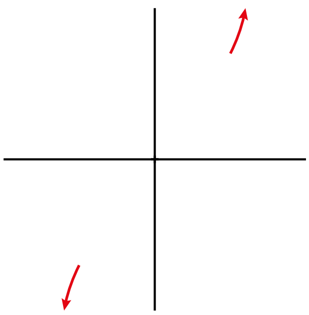
a) $f(x) = x^3 - 10x$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ **c)** $f(x) = 7 - 3x$

d) $f(x) = -x^2 + 8x + 9$ **e)** $f(x) = 1 - (x - 2)^2$ **f)** $f(x) = 7x^2 - x^3$

g) $f(x) = (5 - x)^2$ **h)** $f(x) = (x + 1)^3 - 2x^2$

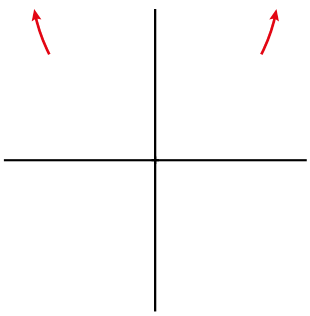
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 10x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 10x) = -\infty$



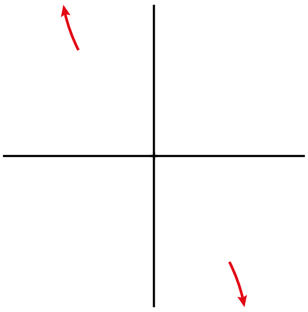
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$



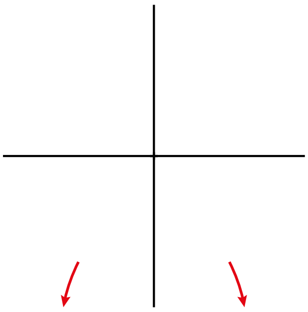
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 - 3x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (7 - 3x) = +\infty$



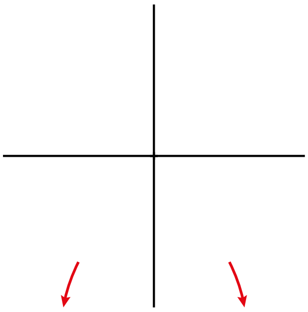
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + 8x + 9) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 + 8x + 9) = -\infty$



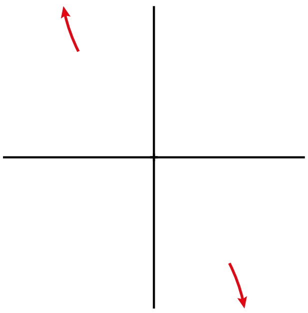
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [1 - (x - 2)^2] = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [1 - (x - 2)^2] = -\infty$



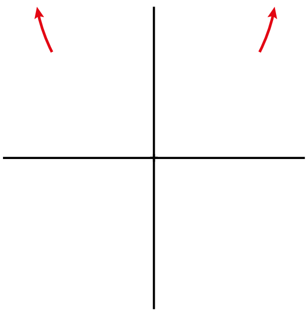
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7x^2 - x^3) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (7x^2 - x^3) = +\infty$



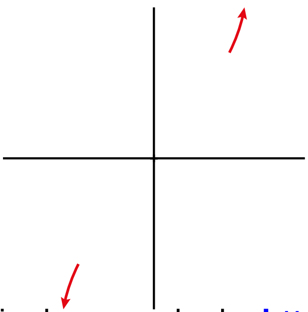
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5 - x)^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (5 - x)^2 = +\infty$



h) $\lim\limits_{x \to +\infty} [(x + 1)^3 - 2x^2] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [(x + 1)^3 - 2x^2] = -\infty$



3 **Halla el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de cada una de estas funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3-7}{4x^2+3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

d) $f(x) = \dfrac{-3}{x^2+2x-4}$ **e)** $f(x) = \dfrac{5^{-x}}{2}$ **f)** $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x-3} = 2$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x-3} = 2$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-7}{4x^2+3} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3-7}{4x^2+3} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3}{x^2+2x-4} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3}{x^2+2x-4} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5^{-x}}{2} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5^{-x}}{2} = +\infty$

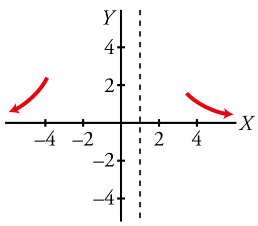
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 - \dfrac{1}{x^2} = 3$ $\lim\limits_{x \to -\infty} 3 - \dfrac{1}{x^2} = 3$

4 **Calcula los límites de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ y representa las ramas que obtengas:**

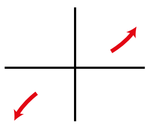
a) $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{-2x^2}{3-x}$ **c)** $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+5}{1-x}$ **e)** $f(x) = \dfrac{2-3x}{x+3}$ **f)** $f(x) = \dfrac{3-2x}{5-2x}$

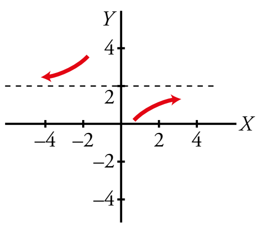
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0$



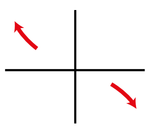
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x} = -\infty$



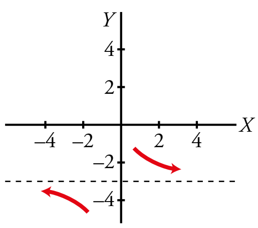
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2$



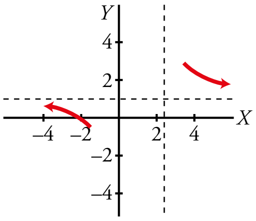
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x} = +\infty$



e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+3} = -3$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2-3x}{x+3} = -3$



f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x} = 1$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x} = 1$



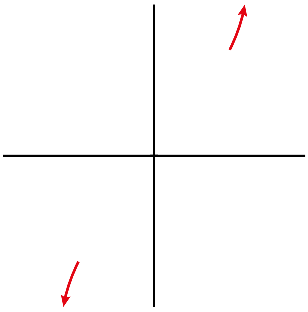
5 **Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ y representa los resultados.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ $\quad$ **b)** $f(x) = \dfrac{3x^2}{(x-1)^2}$ $\quad$ **c)** $f(x) = \dfrac{1-12x^2}{3x^2}$

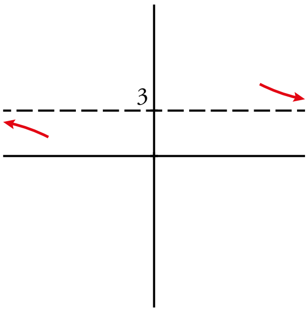
d) $f(x) = \dfrac{1-x}{(2x+1)^2}$ $\quad$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^3-x^2}{7-x^2}$ $\quad$ **f)** $f(x) = \dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9}$

Para calcular estos límites debemos tener en cuenta la regla de los grados del numerador y del denominador.

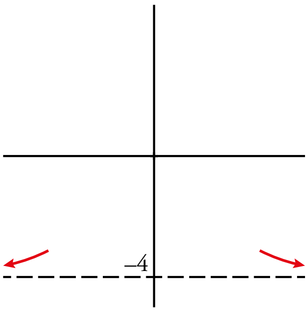
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty$



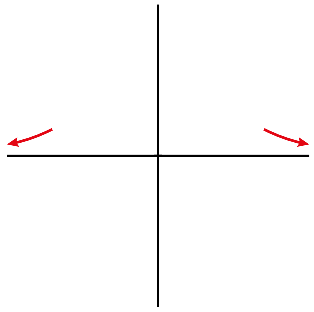
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{(x-1)^2} = 3$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2}{(x-1)^2} = 3$



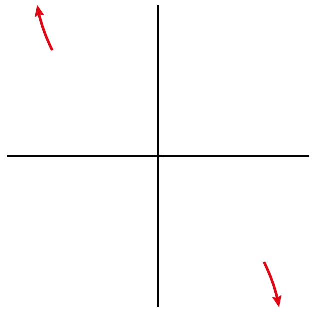
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-12x^2}{3x^2} = -4$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-12x^2}{3x^2} = -4$



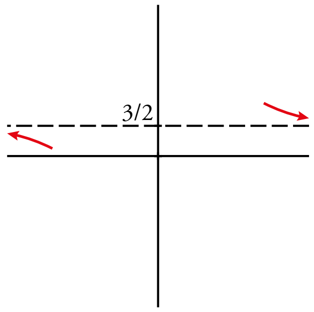
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x}{(2x+1)^2} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-x}{(2x+1)^2} = 0$



e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-x^2}{7-x^2} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3-x^2}{7-x^2} = +\infty$



f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9} = 3/2 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9} = 3/2$



6 **Di cuál es el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$:**

a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ 5-x & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le 4 \\ \log_2 x & \text{si } x > 4 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \begin{cases} -3x & \text{si } x < 2 \\ 1+2^{-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (5-x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2 = 2$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3-x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x = \log_2 \infty = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2 = 2$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + 2^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{2^x} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -3x = +\infty$

Límite en un punto

7 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}$ **b)** $\lim_{x \to 0} \left(\cos \frac{x}{3} - 3 tg\, x\right)$ **c)** $\lim_{x \to 2} \log_2 \left(\frac{3x-5}{4-x}\right)$

d) $\lim_{x \to 1/2} e^{2x-1}$ **e)** $\lim_{x \to e} \ln \sqrt{x}$ **f)** $\lim_{x \to 2} \frac{x}{x-2}$

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}$ está definida y es continua en $x = 1$.

Por tanto, $\lim_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} = \sqrt[3]{1 - 2 + 1} = 0$.

b) $f(x) = \cos \frac{x}{3} - 3\ \mathrm{tg} x$ está definida y es continua en $x = 0$.

Por tanto, $\lim_{x \to 0} \left(\cos \frac{x}{3} - 3\mathrm{tg}\, x\right) = \cos 0 - 3\mathrm{tg}\ 0 = 1$.

c) $f(x) = \log_2 2 \left(\frac{3x-5}{4-x}\right)$ está definida y es continua en $x = 2$.

Por tanto, $\lim_{x \to 2} \log_2 \left(\frac{3x-5}{4-x}\right) = \log_2 \left(\frac{6-5}{4-2}\right) = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = -1$.

d) $f(x) = e^{2x-1}$ está definida y es continua en $x = 1/2$.

Por tanto, $\lim_{x \to 1/2} e^{2x-1} = e^{1-1} = e^0 = 1$.

e) $f(x) = \ln \sqrt{x}$ está definida y es continua en $x = e$.

Por tanto, $\lim_{x \to e} \ln \sqrt{x} = \ln \sqrt{e} = \ln e^{1/2} = \frac{1}{2} \ln e = 1/2$.

f) $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

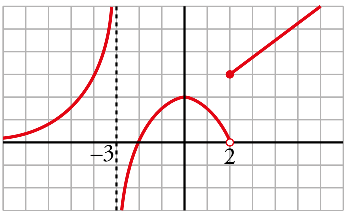
$\lim_{x \to 2} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0} = \infty$.

Veamos el signo:

$\lim_{x \to 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty$.

$\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty$.

8 **Sobre la gráfica de la siguiente función $f(x)$, halla:**



a) $\lim_{x \to -3^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x \to -3^+} f(x)$ **c)** $\lim_{x \to 0} f(x)$

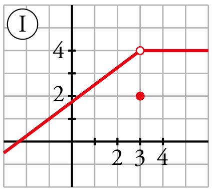
d) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ **e)** $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ **f)** $\lim_{x \to -2} f(x)$

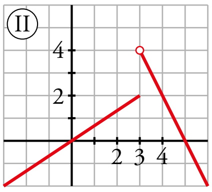
a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 2

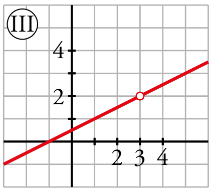
d) 0 e) 3 f) 0

9 **Relaciona cada una de estas expresiones con su gráfica:**

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$ **b)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$ **c)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **no existe**







a) III b) I c) II

10 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$, **halla:**

a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

a) 5

b) 4

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

11 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ **calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

a) Como $0 < 3$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$.

b) $x = 3$ es el punto de ruptura. Usaremos límites laterales.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} 2x = 6 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} = \dfrac{0}{0} \to \text{Indeterminación.} \end{cases}$$

Para calcular el límite por la derecha necesitamos simplificar la fracción:

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x}$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x+3}{x} = 2$$

Luego los límites laterales son distintos y $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe.

c) Como $5 > 3$, $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} = \dfrac{8}{5}$.

12 **En la función** $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si } x < -1 \\ 3x-1 & \text{si } -1 \le x < 4 \\ 4\sqrt{x}+3 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$, **halla:**

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 9} f(x)$

a) $x = -1$ es un punto de ruptura. Usaremos límites lererales para calcular el límite.

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2-2) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} (3x-1) = -4 \end{cases}$$ Por tanto, no existe el límite.

b) $x = 4$ es un punto de ruptura. Usaremos límites laterales para calcular el límite.

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 4^-} (3x-1) = 11 \\ \lim_{x \to 4^+} (4\sqrt{x}+3) = 11 \end{cases} \quad \text{Por tanto,} \quad \lim_{x \to 4} f(x) = 11$$

c) Como $9 > 4$, $\lim_{x \to 9} f(x) = \lim_{x \to 9} (4\sqrt{x}+3) = 15$

13 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2+3x}{x}$ **b)** $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2+x}$ **c)** $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4}$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2}$ **e)** $\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3}$ **f)** $\lim_{x \to 1} \frac{x^4-1}{x^2-1}$

a) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2+3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(2x+3)}{x} = 3$

b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2+x} = \lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2+x} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)} = \frac{3}{-1} = -3$

c) $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)}{(x+2)(x-2)} = -\frac{1}{4}$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} = 3$

e) $\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)}{(x+3)(x+1)} = -\frac{1}{2}$

f) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1} = 2$

Página 312

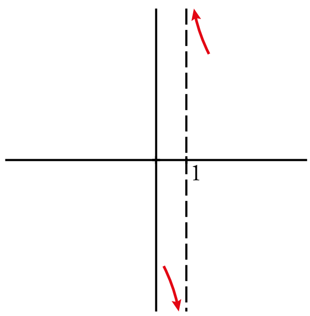
14 **Resuelve los siguientes límites y representa los resultados:**

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1}$ **b)** $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{x^2}$

c) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2}{x^2+2x}$ **d)** $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^4-10x^2}$

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$

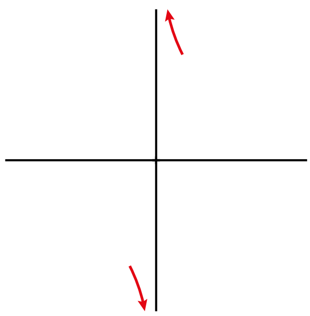
- Si $x \to 1^- \to \left(f(x) = \frac{+}{-} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 1^+ \to \left(f(x) = \frac{+}{+} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$



b) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{x^2} = \frac{0}{0} \to$ Indeterminación.

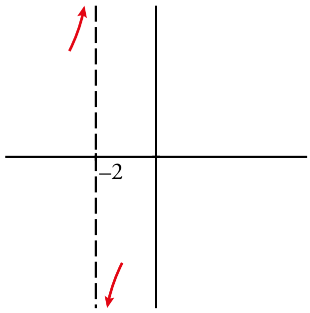
$\frac{x^2+x}{x^2} = \frac{x(x+1)}{x^2} = \frac{x+1}{x}$; $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$

- Si $x \to 0^- \to \left(f(x) = \frac{+}{-} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 0^+ \to \left(f(x) = \frac{+}{+} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2}{x^2 + 2x} = \dfrac{4}{0} = \pm\infty$

- Si $x \to -2^- \to \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)\ f(x) \to +\infty$
- Si $x \to -2^+ \to \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)\ f(x) \to -\infty$



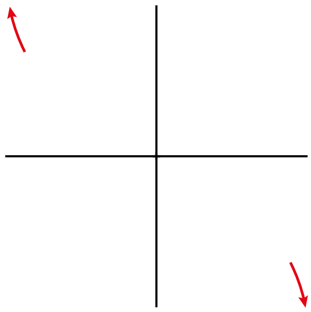
d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^4 - 10x^2} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$\dfrac{x^3}{x^4 - 10x^2} = \dfrac{x^3}{x^2(x^2 - 10)} = \dfrac{x}{x^2 - 10}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^4 - 10x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2 - 10} = 0$

$f(0)$ no está definido.

Si $x < 0,\ f(x) > 0$ y si $x > 0,\ f(x) < 0$



15 **Calcula los siguientes límites y representa los resultados:**

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2}$ **d)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1}$

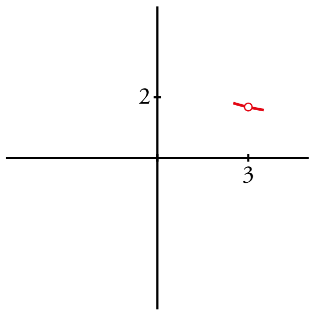
e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \dfrac{(x + 2)(x - 3)}{x(x - 3)} = \dfrac{x + 2}{x}$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x + 2}{x} = \dfrac{5}{3}$

Dando a x valores próximos a 3 podemos averiguar cómo se acerca por ambos lados.

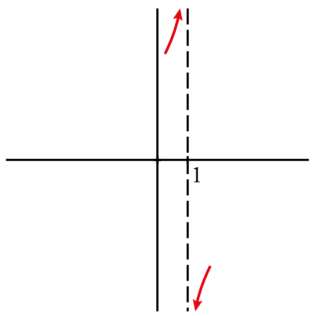


b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

Simplificamos: $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 1)^2} = \dfrac{x - 2}{x - 1}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 2}{x - 1} = \infty$

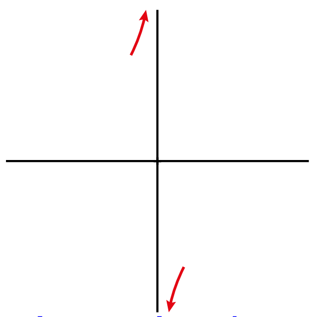
- Si $x \to 1^- \to \left(f(x) = \dfrac{-}{-} = +\right)\ f(x) \to +\infty$
- Si $x \to 1^+ \to \left(f(x) = \dfrac{-}{+} = -\right)\ f(x) \to -\infty$



c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$\dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \dfrac{x(x - 2)}{x^2(x + 1)} = \dfrac{x - 2}{x(x + 1)}$

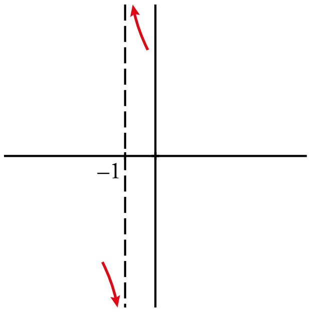
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 2}{x(x + 1)} = \dfrac{-2}{0} = \pm\infty$



• Si $x \to 0^- \to \left(f(x) = \frac{-}{-} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$

• Si $x \to 0^+ \to \left(f(x) = \frac{-}{+} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{0}{0} \to$ Indeterminación.



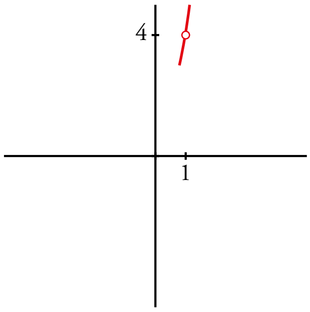
$$\frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x^2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

• Si $x \to -1^- \to \left(f(x) = \frac{+}{-} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$

• Si $x \to -1^+ \to \left(f(x) = \frac{+}{+} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \to$ Indeterminación.

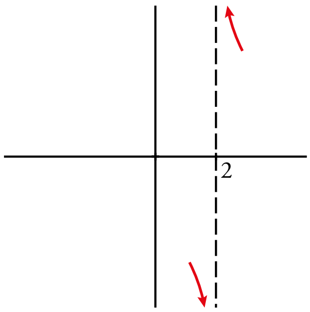


$$\frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x-1)} = \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1} = (x^2 + 1)(x + 1)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} [(x^2 + 1)(x + 1)] = 4$$

Dando a x valores próximos a 1 podemos averiguar cómo se acerca por ambos lados.

f) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \frac{0}{0} \to$ Indeterminación.



$$\frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{2(x+2)}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x+2)}{x-2} = \frac{8}{0} = \pm\infty$$

• Si $x \to 2^- \to \left(f(x) = \frac{+}{-} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$

• Si $x \to 2^+ \to \left(f(x) = \frac{+}{+} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$

16 Calcula.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{7 - 5x}{x^2 + 1}\right)^{2 - 5x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \log_2 \left(\frac{3x + 4}{x^2 + 1}\right)^5$

c) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{e^{\operatorname{sen} x}}{1 + \cos x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 10} \log (2\sqrt{3x - 5})^3$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{7 - 5x}{x^2 + 1}\right)^{2 - 5x} = \left(\frac{7 - 5}{1 + 1}\right)^{2 - 5} = \left(\frac{2}{2}\right)^{-3} = 1$

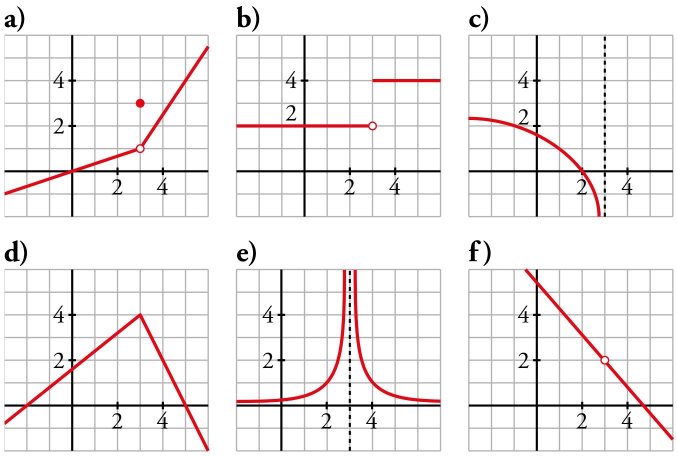
b) $\lim\limits_{x \to 2} \log_2 \left(\frac{3x + 4}{x^2 + 1}\right)^5 = \log_2 \left(\frac{6 + 4}{4 + 1}\right)^5 = \log_2 (2)^5 = 5 \log_2 2 = 5$

c) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{e^{\operatorname{sen} x}}{1 + \cos x} = \frac{e^1}{1} = e$

d) $\lim\limits_{x \to 10} \log (2\sqrt{3x - 5})^3 = 3 \log (2\sqrt{3 \cdot 10 - 5}) = 3 \log 10 = 3$

Continuidad de una función

17 **¿Cuál de estas funciones es continua en $x = 3$? Señala, en cada una de las otras, la razón de su discontinuidad:**



a) Discontinuidad de tipo IV en $x = 3$, porque el valor de la función no coincide con el límite en el punto.

b) Discontinuidad de salto finito (tipo II). La función existe en $x = 3$, pero los límites laterales, aunque existen, son distintos.

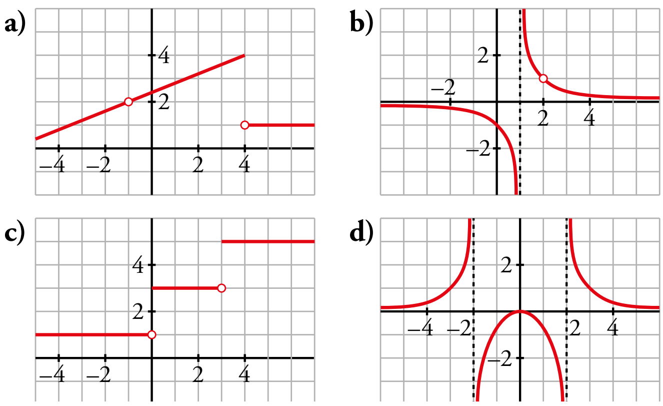
c) Discontinuidad de salto infinito (tipo I). Tiene un asíntota vertical por la izquierda en $x = 3$.

d) Continua.

e) Discontinuidad de salto infinito (tipo I). Tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

f) Discontinuidad de tipo III. La función no está definida en $x = 3$, pero existe el límite en dicho punto.

18 **Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y el tipo de discontinuidad:**



a) Discontinuidad de tipo III en $x = -1$.

Discontinuidad de salto finito en $x = 4$ (tipo II).

b) Discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ (tipo I).

Discontinuidad de tipo III en $x = 2$.

c) Discontinuidades de salto finito en $x = 0$ y $x = 3$ (tipo II).

d) Discontinuidades de salto infinito en $x = -2$ y $x = 2$ (tipo I).

19 **Comprueba que solo una de estas funciones es continua en $x = 1$. Explica la razón de la discontinuidad en las demás:**

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x<1 \\ 3 & \text{si } x>1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x\neq 1 \\ -1 & \text{si } x=1 \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x<1 \\ x-3 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

a) La función no está definida en $x = 1$. Por otro lado:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} (x+2) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 3 = 3 \end{cases} \quad \text{Luego existe } \lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

Por tanto, tiene una discontinuidad de tipo III en $x = 1$.

b) $f(1) = -1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x = 2$$

En este caso, tiene una discontinuidad de tipo IV.

c) $f(1) = 1 - 3 = -2$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} -2 = -2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} (x-3) = -2 \end{cases}$$

Esta función es continua en $x = 1$.

d) La función no está definida en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

- Si $x \to 1^-$ $\left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 1^+$ $\left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I) en $x = 1$.

20 **Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos de ruptura:**

a) $f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x<-1 \\ x^2+3 & \text{si } x\geq -1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x<1 \\ 2^{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{si } x<0 \\ x-2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \begin{cases} 5-x & \text{si } x<3 \\ \dfrac{2}{x-2} & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

a) $f(-1) = (-1)^2 + 3 = 4$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} (3-x) = 4 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2+3) = 4 \end{cases} \quad \text{La función es continua en } x = -1.$$

b) $f(1)$ no está definido.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 2^{x-1} = 1 \end{cases} \quad \text{La función tiene una discontinuidad del tipo III en } x = 1.$$

c) $f(0) = 0 - 2 = -2$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{4-x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (x-2) = -2 \end{cases} \quad \text{La función tiene una discontinuidad de salto finito (tipo II) en } x = 0.$$

d) $f(3) = \dfrac{2}{3-2} = 2$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} (5-x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2}{x-2} = 2 \end{cases} \quad \text{La función es continua en } x = 3.$$

21 **Estas funciones, ¿son discontinuas en algún punto?**

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq -1 \\ -1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x} & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} 2^{x-3} & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) La función está formada por un trozo de parábola y otro de recta, luego el único punto posible de discontinuidad sería el punto de ruptura. Estudiamos la continuidad en él.

$f(1) = 1 - 1 = 0$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (1 - x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1) = 0 \end{cases}$$

La función también es continua en $x = 1$, por tanto, no es discontinua en ningún punto.

b) Esta función coincide con la parábola $y = x^2$ salvo en el punto $x = -1$. Luego tiene una discontinuidad de tipo IV en dicho punto.

c) La función está formada por un trozo de hipérbola, la cual no está definida en $x = 0$ $\left(f(0) = \dfrac{4}{0} = \infty\right)$, y otro de recta, luego el único punto posible de discontinuidad sería el punto de ruptura. Estudiamos la continuidad en él.

$f(2) = 2$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} x = 2 \end{cases}$$

La función también es continua en $x = 2$, por tanto, solo tiene discontinuidad de tipo III en $x = 0$.

d) La función está formada por dos trozos de funciones cuyas expresiones analíticas son elementales (correctamente definidas), luego el único punto posible de discontinuidad sería el punto de ruptura. Estudiamos la continuidad en él.

$f(3)$ no está definido.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} 2^{x-3} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = 0 \end{cases}$$ En el punto $x = 3$ hay una discontinuidad de salto finito (tipo II).

22 **Determina para qué números reales son continuas las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ **b)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}$ **c)** $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 4}$

d) $f(x) = ln\,(x^2 - 2x)$ **e)** $y = 2^{3-x}$ **f)** $f = |x - 5|$

a) $f(x)$ por un lado es un cociente, luego los posibles puntos de discontinuidad son aquellos que anulan el denominador,

$$\sqrt{x-1} = 0 \to x - 1 = 0 \to x = 1 \to \text{Punto de discontinuidad}$$

Por otro lado hay que calcular los puntos para los que la raíz no existe, que son aquellos que hacen negativo el radicando,

$$x - 1 < 0 \to x < 1$$

Conclusión: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ menos en el intervalo $(-\infty, 1]$, luego su dominio es $(1, +\infty)$.

b) Por un lado se trata de un cociente, luego los puntos donde no es continua son aquellos que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 1 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{1} \;\rightarrow\; x = \pm 1 \;\rightarrow\; \text{Puntos de discontinuidad}$$

Por otro lado hay que ver los puntos para los que la raíz no existe, que son aquellos que hacen negativo al radicando

$$x + 2 < 0 \;\rightarrow\; x < -2$$

Conclusión: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ menos en el intervalo $(-\infty, -2]$ y en los puntos 1 y –1. Luego el dominio es $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

c) Se trata de una raíz, luego hay que ver en qué puntos no existe la raíz, que son aquellos que hacen negativo el radicando.

$$x^2 + 5x + 4 < 0$$

$$x^2 + 5x + 4 < 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

Para $x = -1$ y $x = -4$ se anula la ecuación

$$\begin{array}{cccccc} + & & - & & + & \\ \hline & -4 & & -1 & & 0 \end{array}$$

$x^2 + 5x + 4 < 0$ si $x \in (-4, -1)$

Conclusión: $f(x) = \sqrt{x^2+5x+4}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ menos en el intervao $(-4, -1)$.

Luego el dominio es $(-\infty,-4]\cup[-1,+\infty)$

d) $f(x)$ es un logaritmo neperiano, luego hay que ver en qué puntos se cumple $x^2(x - 2) \le 0$.

$$x^2 - 2x \le 0 \;\rightarrow\; x(x-2) \le 0$$

$$x = 0$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$\begin{array}{ccccccl} - & & + & & + & & \rightarrow x \\ \hline & 0 & & 2 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccl} - & & - & & + & & \rightarrow (x-2) \\ \hline & 0 & & 2 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccl} + & & - & & + & & \rightarrow x(x-2) \\ \hline & 0 & & 2 & & & \end{array}$$

Luego en $x \in [0, 2]$ $f_1(x) = x^2 - 2x$ es negativa o cero.

Conclusión: $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ menos en el intervalo $[0, 2]$. Luego el dominio es $(-\infty, 0)\cup-(2,+\infty)$

e) Se trata de una función exponencial con exponente polinómico, luego es continua para todo $\mathbb{R}$.

f) Definimos la función a trozos.

$$|x-5| = 0 \rightarrow f(x)\begin{cases} -x+5 & \text{si } x < 5 \\ x-5 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$$

Se trata de una función cuyas ramas son polinómicas, luego son continuas en su dominio de definición.

Solo hay que comprobar que sea continua en el “punto de ruptura” $x = 5$.

$$f(5) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^-} f(x)$$

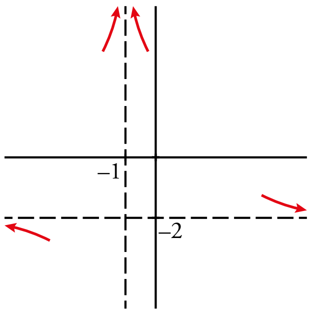
$$\left.\begin{array}{r} f(5) = 5-5 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 5-5 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = -5+5 = 0 \end{array}\right\} f \text{ es continua en todo } \mathbb{R}$$

Asíntotas

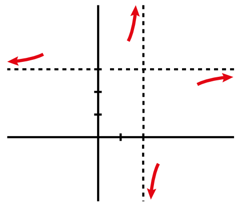
23 **De una función $y = f(x)$ conocemos sus asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas.**

$$x = -1 \begin{cases} \text{si } x \to -1^-, & f(x) \to +\infty \\ \text{si } x \to -1^+, & f(x) \to +\infty \end{cases} \qquad y = -2 \begin{cases} \text{si } x \to +\infty, & f(x) > -2 \\ \text{si } x \to -\infty, & f(x) < -2 \end{cases}$$

Representa esta información.



24 **Esta gráfica muestra la posición de la curva $y = f(x)$ respecto da sus asíntotas. Di cuáles son estas y describe su posición.**



- Asíntota vertical: $x = 2$

  Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$

- Asíntota horizontal: $y = 3$

  Si $x \to -\infty$, $f(x) - 3 > 0$

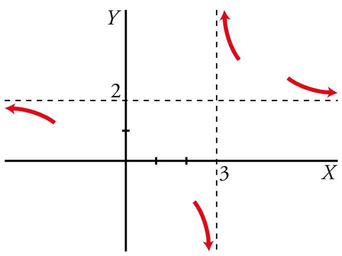
  Si $x \to +\infty$, $f(x) - 3 < 0$

25 **Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:**

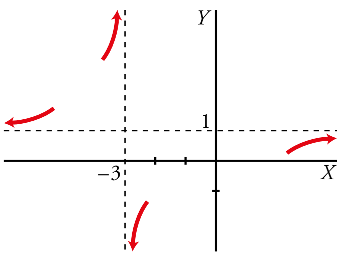
a) $y = \dfrac{2x}{x-3}$ **b)** $y = \dfrac{x-1}{x+3}$ **c)** $y = \dfrac{2x+3}{4-x}$

d) $y = \dfrac{2}{1-x}$ **e)** $y = \dfrac{1}{2-x}$ **f)** $y = \dfrac{4x+1}{2x-3}$

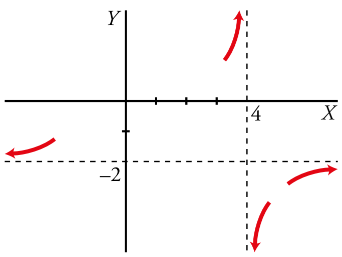
a) Asíntotas: $x = 3$; $y = 2$



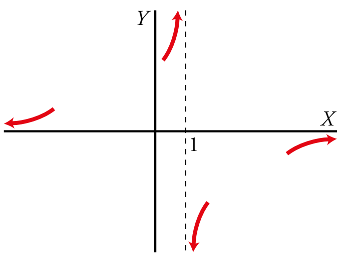
b) Asíntotas: $x = -3$; $y = 1$



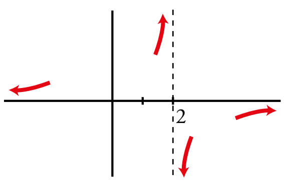
c) Asíntotas: $x = 4$; $y = -2$



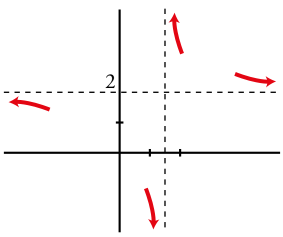
d) Asíntotas: $x = 1$; $y = 0$



e) Asíntotas: $x = 2$; $y = 0$



f) Asíntotas: $x = \dfrac{3}{2}$; $y = 2$



Página 313

26 Estudia las asíntotas de las siguientes funciones y su posición respecto a la gráfica:

a) $y = \dfrac{3x+1}{2x-3}$ **b)** $y = \dfrac{2x+1}{x^2}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$

d) $y = \dfrac{-2}{(x+1)^2}$ **e)** $y = \dfrac{4}{x^2-2x}$ **f)** $y = \left(\dfrac{3x}{x-2}\right)^2$

a) • Asíntotas verticales:

$2x - 3 = 0 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \dfrac{3}{2} \rightarrow$ Posible asíntota vertical.

• $x = \dfrac{3}{2}$

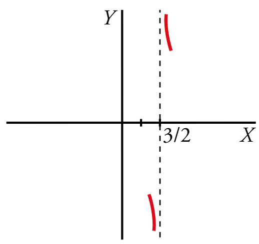
$$\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{3x+1}{2x-3} = \frac{\frac{9}{2}+1}{0} = \infty \rightarrow \text{Estudiamos los signos.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to \frac{3}{2}^-} \frac{3x+1}{2x-3} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to \frac{3}{2}^+} \frac{3x+1}{2x-3} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{Hay una asíntota vertical en } x = \frac{3}{2}.$$

Estudiamos la posición:

si $x \rightarrow \dfrac{3^-}{2}$, $f(x) \rightarrow -\infty$

si $x \rightarrow \dfrac{3^+}{2}$, $f(x) \rightarrow +\infty$



• Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{2x-3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

↓

Términos de mayor grado.

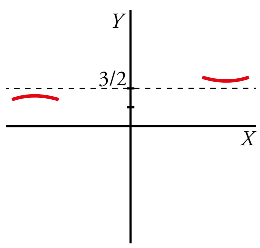
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+1}{2x-3} = \frac{-\infty}{-\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

↓

Términos de mayor grado.

Luego $y = \dfrac{3}{2}$ es asíntota horizontal.

Estudiamos la posición:



$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{3x-1}{2x-3} - \frac{3}{2}\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{6x-2-6x+9}{2(2x-3)}\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{7}{2(2x-3)}\right] = 0^+ \rightarrow \text{La curva está por encima de la asíntota.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{3x-1}{2x-3} - \frac{3}{2}\right] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{7}{2(2x-3)}\right] = 0^- \rightarrow \text{La curva está por debajo de la asíntota.}$$

• Asíntotas oblicuas:

No hay, ya que hay una asíntota horizontal.

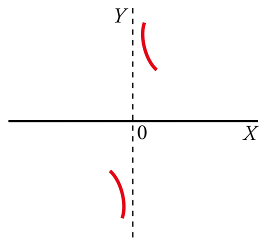
b) • Asíntotas verticales:

$x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Posible asíntota vertical.

• $x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x+1}{x^2} = \dfrac{1}{0} = \infty \rightarrow$ Estudiamos los signos.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2x+1}{x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x+1}{x^2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ Hay una asíntota vertical en $x = 0$.



Estudiamos la posición:

si $x \rightarrow 0^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$

si $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$

• Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x^2} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Términos de mayor grado.}}}{\dfrac{\infty}{\infty}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0^+$

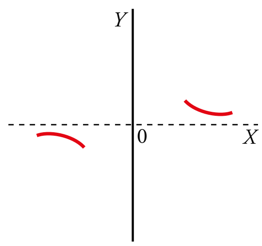
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{x^2} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Términos de mayor grado.}}}{\dfrac{-\infty}{\infty}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x} = 0^-$

Luego $y = 0$ es asíntota horizontal.

Estudiamos la posición:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{2x+1}{x^2} - 0\right] = 0^+ \rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{2x+1}{x^2} - 0\right] = 0^- \rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.



• Asíntotas oblicuas:

No hay porque hay horizontales.

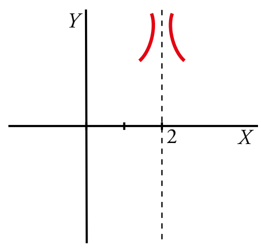
c) • Asíntotas verticales:

$(x-2)^2 = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow$ Posible asíntota vertical.

• $x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{(x-2)^2} = \dfrac{4}{0} = \infty \rightarrow$ Estudiamos los signos.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{(x-2)^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2}{(x-2)^2} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ Hay una asíntota vertical en $x = 2$.



Estudiamos la posición:

si $x \rightarrow 2^-$, $f(x) \rightarrow +\infty$

si $x \rightarrow 2^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$

• Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{(x-2)^2} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Términos de mayor grado.}}}{\dfrac{\infty}{\infty}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} 1 = 1$

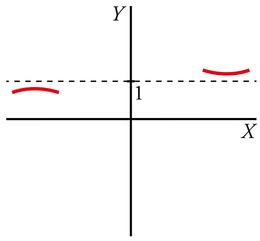
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} 1 = 1$$

↓

Términos de mayor grado.

Luego $y = 1$ es asíntota horizontal.

Estudiamos la posición:



$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{(x-2)^2} - 1\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2 - x^2 + 4x - 4}{(x-2)^2}\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x-4}{x^2-4x+4} = 0^+ \;\to\; \text{La curva está por encima.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{x^2}{(x-2)^2} - 1\right] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{4x-4}{x^2-4x+4}\right] = 0^- \;\to\; \text{La curva está por debajo.}$$

- Asíntotas oblicuas:

  No hay porque hay horizontales.

d) • Asíntotas verticales:

$(x-1)^2 = 0 \;\to\; x + 1 = 0 \;\to\; x = -1 \;\to\;$ Posible asíntota vertical.

- $x = -1$

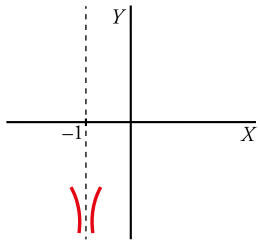
$$\lim_{x \to -1} \frac{-2}{(x+1)^2} = \frac{-2}{0} = -\infty \;\to\; \text{Estudiamos los signos.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -1^-} \frac{-2}{(x+1)^2} = -\infty \\ \lim_{x \to -1^+} \frac{-2}{(x-2)^2} = -\infty \end{array}\right\} \;\to\; \text{Hay una asíntota vertical en } x = -1.$$

Estudiamos la posición:

si $x \to -1^-$, $f(x) \;\to\; -\infty$

si $x \to -1^+$, $f(x) \;\to\; -\infty$



- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{(x-1)^2} = 0$$

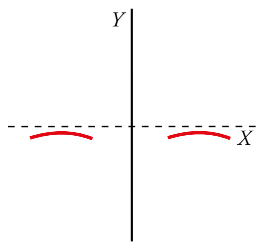
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2}{(x+1)^2} = 0$$

Luego $y = 0$ es asíntota horizontal.

Estudiamos la posición:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{-2}{(x+1)^2} - 0\right] = 0^- \;\to\; \text{La curva está por debajo.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{-2}{(x+1)^2} - 0\right] = 0^- \;\to\; \text{La curva está por debajo.}$$



- Asíntota oblicua:

  No hay porque hay horizontal.

e) • Asíntotas verticales:

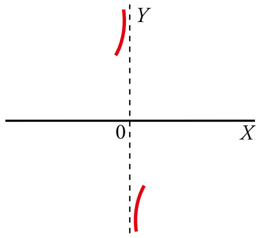
$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{array} \right\rangle \text{ Posibles asíntotas verticales.}$$

• $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4}{x^2 - 2x} = \frac{4}{0} = \infty \rightarrow \text{Estudiamos los signos.}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{4}{x^2 - 2x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{4}{x^2 - 2x} = -\infty$$

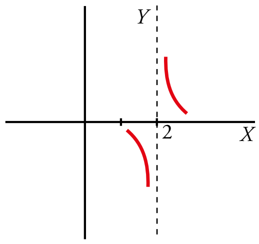


• $x = 2$

$$\lim_{x \to 2} \frac{4}{x^2 - 2x} = \frac{4}{0} = \infty \rightarrow \text{Estudiamos los signos.}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{4}{x^2 - 2x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{4}{x^2 - 2x} = +\infty$$



• Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x^2} = \frac{4}{+\infty} = 0^+$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2x) = \lim_{x \to +\infty} x^2$$

Luego $y = 0$ es asíntota horizontal.

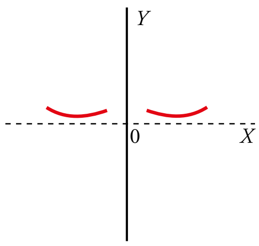
Estudiamos la posición:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{4}{x^2 - 2x} - 0 \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x^2} = 0^+ \rightarrow$$

$\rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{4}{x^2 - 2x} - 0 \right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to +-\infty} \frac{4}{x^2} = 0^+ \rightarrow$$

$\rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.



• Asíntota oblicua:

No tiene por tener asíntota horizontal.

f) • Asíntotas verticales:

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow$ Posible asíntota vertical.

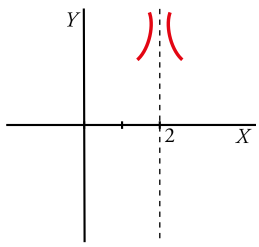
• $x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{3x}{x-2}\right)^2 = +\infty \\ \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{3x}{x-2}\right)^2 = +\infty \end{array}\right\rangle \rightarrow \text{Hay una asíntota vertical en } x = 2.$$

Estudiamos la posición:

si $x \to 2^-$, $f(x) \rightarrow +\infty$

si $x \to 2^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$



- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x}{x-2}\right)^2 = \lim_{x \to +\infty} \frac{9x^2}{(x-2)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{9x^2}{x^2-4x+4} = \underbrace{\frac{\infty}{\infty}}_{\text{Términos de mayor grado}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{9x^2}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} 9 = 9$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x}{x-2}\right)^2 = \underbrace{\frac{\infty}{\infty}}_{\text{Términos de mayor grado}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{9x^2}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} 9 = 9$$

Luego $y = 9$ es asíntota horizontal.

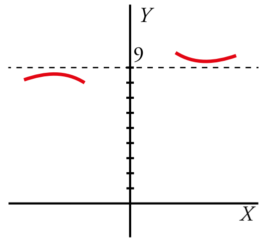
Estudiamos la posición:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{3x}{x-2}\right)^2 - 9\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{9x^2 - 9(x-2)^2}{(x-2)^2}\right] = \lim_{x \to +\infty} = \left[\frac{36x-36}{(x-2)^2}\right] =$$

$= 0^+ \longrightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\left(\frac{3x}{x-2}\right)^2 - 9\right] = \lim_{x \to -\infty} = \left[\frac{36x-36}{x^2-4x+4}\right] =$$

$= 0^- \longrightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.



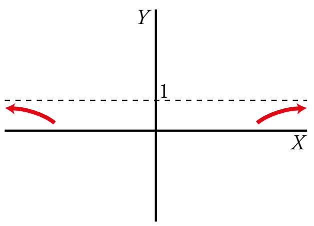
27 **Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:**

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2+4}$ **b)** $y = \dfrac{3}{x^2+1}$

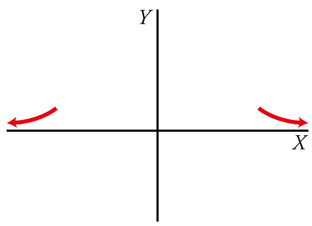
c) $y = \dfrac{2x^2-1}{x^2}$ **d)** $y = \dfrac{x^4}{x-1}$

e) $y = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$ **f)** $y = \dfrac{3x}{x^2-1}$

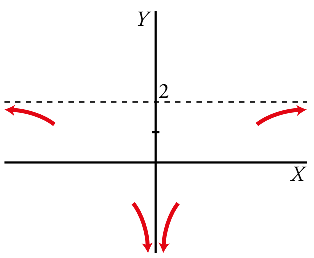
a) Asíntota: $y = 1$



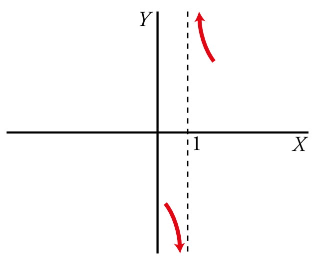
b) Asíntota: $y = 0$



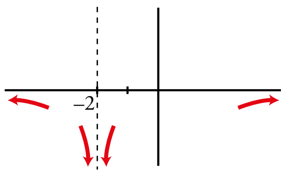
c) Asíntotas: $x = 0$; $y = 2$



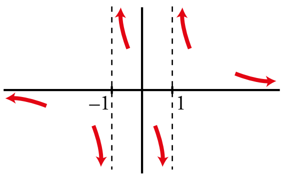
d) Asíntota: $x = 1$



e) Asíntotas: $x = -2$; $y = 0$



f) Asíntotas: $x = 1$, $x = -1$; $y = 0$



28 **Cada una de las siguientes funciones tiene una asíntota oblicua. Hállala y estudia la posición de la curva respecto a ella:**

a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+1}$

b) $f(x) = \dfrac{3 + x - x^2}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 3}{2x}$

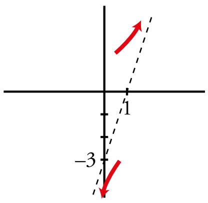
d) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 3}$

e) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3}{x^2 - 2}$

f) $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 3}{2x - 2}$

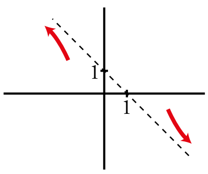
a) $\dfrac{3x^2}{x+1} = 3x - 3 + \dfrac{3}{x+1}$

Asíntota oblicua: $y = 3x - 3$



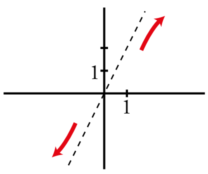
b) $\dfrac{3 + x - x^2}{x} = -x + 1 + \dfrac{3}{x}$

Asíntota oblicua: $y = -x + 1$



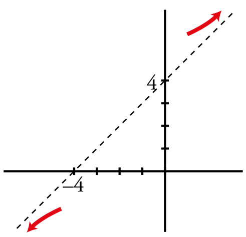
c) $\dfrac{4x^2 - 3}{2x} = 2x - \dfrac{3}{2x}$

Asíntota oblicua: $y = 2x$



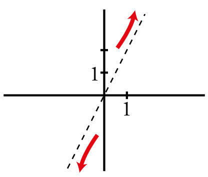
d) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x - 3} = x + 4 + \dfrac{10}{x - 3}$

Asíntota oblicua: $y = x + 4$



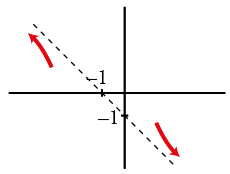
e) $\dfrac{2x^3 - 3}{x^2 - 2} = 2x + \dfrac{4x - 3}{x^2 - 2}$

Asíntota oblicua: $y = 2x$



f) $\dfrac{-2x^2+3}{2x-2} = -x-1+\dfrac{1}{2x-2}$

Asíntota oblicua: $y = -x - 1$



29 **Estudia las ramas infinitas de las siguientes funciones. Si tienen asíntotas, determina su posición con la curva:**

a) $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

b) $y = \dfrac{x^3-2x^2+3x-6}{2(x-2)^2}$

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

d) $y = \dfrac{x^3-4x^2+8x-12}{x-3}$

a) • Asíntotas verticales:

El denominador se anula cuando $x = 2$, $x = -2$. Calculamos:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{-8}{0} = \pm\infty \;\to\; x = -2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Estudiamos la posición:

si $x \to -2^-$, $f(x) \to -\infty$

si $x \to -2^+$, $f(x) \to +\infty$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{8}{0} = \pm\infty \;\to\; x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Estudiamos la posición:

si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

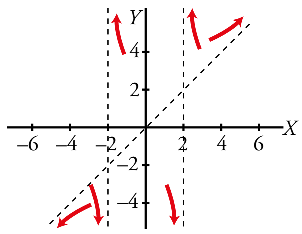
• Ramas en el infinito:

Como la diferencia entre los grados del numerador y del denominador es 1, tiene una asíntota oblicua.

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x}{(x+2)(x-2)}$$

La recta $y = x$ es la asíntota oblicua. Estudiamos la posición:

$$f(x) - x = \frac{x^3}{x^2-4} - x = \frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4} = \frac{4x}{x^2-4}\begin{cases} + \text{ Si } x \to +\infty \\ - \text{ Si } x \to -\infty \end{cases}$$



b) • Asíntotas verticales:

El denominador no se anula para ningún valor de x, luego $f(x)$ no tiene asíntotas verticales:

• Ramas en el infinito:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2+x+1} = 1 \\[2ex] \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2+x+1} = 1\end{array}\right\} \to y = 1 \to \text{Asíntota horizontal.}$$

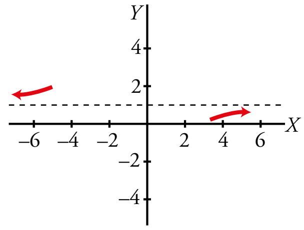
Estudiamos la posición:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x+1} - 1\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x^2 - x - 1}{x^2+x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-1}{x^2+x+1} = 0^- \to$$

$\to$ La curva está por debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x+1} - 1\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x^2 - x - 1}{x^2+x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x-1}{x^2+x+1} = 0^+ \to$$

$\to$ La curva está por encima de la asíntota.



c) • Asíntotas verticales:

El denominador se anula cuando $x = 2$. Calculamos:

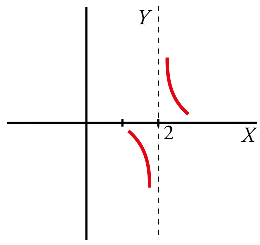
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x-2)^2} = \frac{0}{0} \to \text{Indeterminación.}$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x-2)^2} = \frac{(x-2)(x^2+3)}{2(x-2)^2} = \frac{x^2+3}{2(x-2)}; \ \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2+3}{2(x-2)} = \frac{7}{0} = \pm\infty$$

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical. Estudiamos la posición:

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$



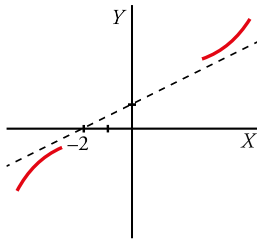
• Ramas en el infinito:

Como la diferencia entre los grados del numerador y del denominador es 1, tiene una asíntota oblicua.

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x-2)^2} = \frac{x^2+3}{2(x-2)} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{7}{2x-4}$$

La recta $y = \frac{x}{2} + 1$ es la asíntota oblicua. Estudiamos la posición:

$$f(x) - \left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{7}{2x-4} \quad \begin{cases} + \text{ si } x \to +\infty \\ - \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$



d) • Asíntotas verticales:

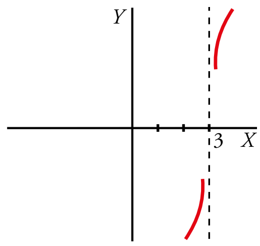
El denominador se anula cuando $x = 3$. Calculamos:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 12}{x-3} = \frac{3}{0} = \pm\infty$$

La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. Estudiamos la posición:

Si $x \to 3^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 3^+$, $f(x) \to +\infty$

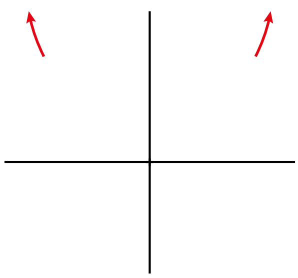


• Ramas en el infinito:

Como la diferencia entre los grados del numerador y del denominador es 2, tiene ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido y ambas son hacia arriba porque:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 12}{x-3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 12}{x-3} = +\infty$$



Para resolver

30 **Calcula, en cada caso, el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \ne 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} kx - 2 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x+3} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3 + k \end{array}\right\} \; 5 = 3 + k \to k = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{array}\right\} \; 5 = 4 + 2k \to k = 1/2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x+1)}{x} = 1 \to k = 1$

d) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = k - 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \sqrt{4} = 2 \end{array}\right\} \; k - 2 = 2 \to k = 4$

31 **Calcula k para que las siguientes funciones sean continuas en el punto donde cambia su definición. Estudia después su continuidad:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} & \text{si } x \ne 5 \\ k & \text{si } x = 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} & \text{si } x \ne 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x - 1} & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} e^{k - \sqrt{x}} & \text{si } x < 4 \\ \log_2 (x - 2) & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

a) Comenzamos estudiando el punto $x = 5$.

$f(5) = k$

$\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$\dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \dfrac{(x+5)(x-5)}{x(x-5)} = \dfrac{x+5}{x}$

$\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x+5}{x} = 2$

Si $k = 2$, la función es continua en $x = 5$.

Observamos que el denominador también se anula en $x = 0$, luego $f(0)$ no existe. Además:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \dfrac{-25}{0} = \pm\infty$

Por tanto, en $x = 0$ tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I). En el resto de los puntos es continua.

b) Comenzamos estudiando el punto $x = 1$.

$f(1) = k$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \frac{0}{0} \to \text{Indeterminación.}$$

$$\frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x}{x+2}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{3}$$

Si $k = \frac{1}{3}$, la función es continua en $x = 1$.

Vemos que el denominador también se anula en $x = -2$, luego $f(-2)$ no existe. Además,

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \frac{6}{0} = \pm\infty$$

Por tanto, en $x = -2$ tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I). En el resto de los puntos es continua.

c) Comenzamos estudiando el punto $x = 3$.

$f(3) = \sqrt{4} = 2$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{k}{x-1} = \frac{k}{2}$$

$$\frac{k}{2} = 2 \to k = 4$$

Si $k = 4$, la función es continua en $x = 3$.

Observamos que el denominador también se anula en $x = 1$, luego $f(1)$ no existe. Además:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{4}{x-1} = \frac{4}{0} = \pm\infty$$

Por tanto, en $x = 1$ tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I). En el resto de los puntos es continua.

d) Comenzamos estudiando el punto $x = 4$.

$f(4) = log_2(4-2) = log_2 2 = 1$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} e^{k - \sqrt{x}} = e^{k-2}$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} log_2(x-2) = log_2 2 = 1$$

$$e^{k-2} = 1 \to ln\, e^{k-2} = ln\, 1 \to (k-2)\, ln\, e = 0 \to k - 2 = 0 \to k = 2$$

Si $k = 2$, la función es continua en $x = 4$.

32 **Determina a y b para que esta función sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x + b & \text{si } x < -2 \\ 4 & \text{si } -2 \le x \le 3 \\ ax - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en los puntos de ruptura.

- $x = -2$

$f(-2) = 4$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to -2^-} 3x + b = -6 + b \\ \lim_{x \to -2^+} 4 = 4 \end{cases}$$

Por tanto, $-6 + b = 4 \to b = 10$ para que exista el límite y la función sea continua en $x = -2$.

- $x = 3$

  $f(3) = 4$

  $$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 3^-} 4 = 4 \\ \lim_{x \to 3^+} ax - 2 = 3a - 2 \end{cases}$$

  Por tanto $3a - 2 = 4 \to a = 2$ para que exista el límite y la función sea continua en $x = 3$.

  Si $a = 2$ y $b = 10$ la función es continua en los puntos de ruptura. En los demás puntos también es continua por estar formada por trozos de rectas.

33 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+3}}{x}$ **b)** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}$ **c)** $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{100x}{\sqrt[3]{x^2}}$

d) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{4-x^3}}$ **e)** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^6-7x}}{4x-2}$ **f)** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2}$

* *Fíjate en el apartado a) del ejercicio resuelto 2.*

Calcularemos estos límites usando el criterio de los grados del numerador y del denominador.

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+3}}{x} = 0$ b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}} = 3$ c) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{100x}{\sqrt[3]{x^2}} = -\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{4-x^3}} = 0$ e) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^6-7x}}{4x-2} = +\infty$ f) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2} = \sqrt{2}$

34 Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas:

a) $y = 2^{x+3}$ **b)** $y = 1{,}5^x - 1$ **c)** $y = 2 + e^x$ **d)** $y = e^{-x} + 1$

e) $y = log\,(x-3)$ **f)** $y = 1 - ln\,x$ **g)** $y = ln\,(2x+4)$ **h)** $y = ln\,(x^2+1)$

a) $\lim_{x \to +\infty} 2^{x+3} = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido).

$\lim_{x \to -\infty} 2^{x+3} = 0$ (asíntota horizontal).

b) $\lim_{x \to +\infty} (1{,}5^x - 1) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido).

$\lim_{x \to -\infty} (1{,}5^x - 1) = -1$ (asíntota horizontal).

c) $\lim_{x \to +\infty} (2 + e^x) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido).

$\lim_{x \to -\infty} (2 + e^x) = 2$ (asíntota horizontal).

d) $\lim_{x \to +\infty} (e^{-x} + 1) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right) = 1$ (asíntota horizontal).

$\lim_{x \to -\infty} (e^{-x} + 1) = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido).

e) Su dominio es $(3, +\infty)$.

$\lim_{x \to +\infty} log\,(x-3) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más lento).

$\lim_{x \to 3^+} log\,(x-3) = -\infty$ (asíntota vertical).

f) Su dominio es $(0, +\infty)$.

$\lim_{x \to +\infty} (1 - ln\,x) = -\infty$ (rama parabólica hacia abajo de crecimiento cada vez más lento).

$\lim_{x \to -\infty} (1 - ln\,x) = +\infty$ (asíntota vertical).

g) Su dominio es $(-2, +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(2x + 4) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más lento).

$\lim\limits_{x \to -2^+} \ln(2x + 4) = -\infty$ (asíntota vertical).

h) Su dominio es $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más lento).

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más lento).

35 Halla el límite de estas funciones en los puntos que anulan su denominador y di cuáles son sus asíntotas verticales:

a) $f(x) = \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$

b) $g(x) = \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2}$

a) Hallamos las raíces del denominador.

$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$

- $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminación.

$\dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \dfrac{(4x + 3)(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)^2} = \dfrac{4x + 3}{x - 2}$; $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} =$

$= \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x + 3}{x - 2} = \dfrac{5}{4}$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminación.

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x + 3}{x - 2} = \dfrac{11}{0} = \pm\infty$

IZQUIERDA: $x = 1{,}99 \rightarrow \dfrac{4 \cdot 1{,}99 + 3}{1{,}99 - 2} = -1\,096 \rightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = -\infty$

DERECHA: $x = 2{,}01 \rightarrow \dfrac{4 \cdot 2{,}01 + 3}{2{,}01 - 2} = 1\,104 \rightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = +\infty$

b) Hallamos las raíces del denominador.

$x^4 + 2x^3 - 8x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$

- $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminación.

$\dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \dfrac{(x - 2)(x + 4)^2}{x^2(x + 4)(x - 2)} = \dfrac{x + 4}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{x^2} = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \dfrac{-32}{0} = \pm\infty$

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \rightarrow \dfrac{-0{,}01 + 4}{(-0{,}01)^2} = 39\,900 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = +\infty$

DERECHA: $x = 0{,}001 \rightarrow \dfrac{0{,}01 + 4}{0{,}01^2} = 40\,100 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminación.

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 4}{x^2} = \dfrac{3}{2}$

Las asíntotas verticales son:

- De $f(x)$, la recta $x = 2$.
- De $g(x)$, la recta $x = 0$.

36 **Halla las asíntotas de las siguientes funciones y representa su posición respecto a la curva:**

a) $f(x) = \dfrac{3}{1+e^{-x}}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{e^{x}-1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{2-\log_2 x}$

a) • Asíntotas verticales:

Buscamos aquellos puntos que anulan el denominador:

$1 + e^{-x} = 0 \rightarrow e^{-x} = -1 \rightarrow$ No es posible ya que $e^{a} > 0$.

Luego no hay asíntotas verticales.

• Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{1+e^{-x}} = \dfrac{3}{1+e^{-\infty}} = \dfrac{3}{1+0} = 3 \rightarrow y = 3$ es asíntota horizontal, si $x \rightarrow +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{1+e^{-x}} = \dfrac{3}{1+e^{\infty}} = \dfrac{3}{1+\infty} = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal, si $x \rightarrow -\infty$.

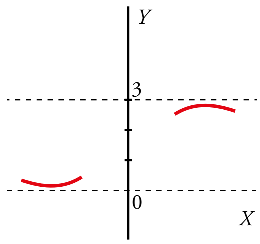
Estudiamos sus posiciones:

$y = 3 \rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{1+e^{-x}} - 3\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-3-3e^{-x}}{1+e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3e^{-x}}{1+e^{-x}} = 0^{-} \rightarrow$

$\rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

$y = 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{1+e^{-x}} - 0\right) = \dfrac{3}{+\infty} = 0^{+} \rightarrow$

$\rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.



• Asíntota oblicua:

No hay ya que hay asíntota horizontal.

b) • Asíntotas verticales:

Buscamos aquellos puntos que anulan el denominador:

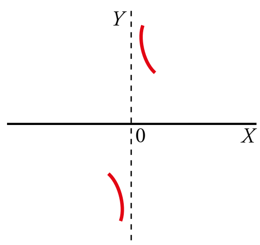
$e^{x} - 1 = 0 \rightarrow e^{x} = 1 \rightarrow x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{e^{x}-1} = \pm\infty \rightarrow x = 0$ es una asíntoma vertical.

Estudiamos la posición:

si $x \rightarrow 0^{-}, f(x) \rightarrow -\infty$

si $x \rightarrow 0^{+}, f(x) \rightarrow +\infty$



• Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{x}-1} = \dfrac{1}{e^{+\infty}-1} = \dfrac{3}{+\infty} = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal, si $x \rightarrow +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^{x}-1} = \dfrac{1}{e^{-\infty}-1} = \dfrac{1}{0-1} = -1 \rightarrow y = -1$ es asíntota horizontal, si $x \rightarrow -\infty$.

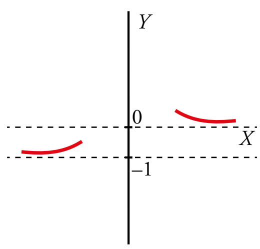
Estudiamos las posiciones:

$y = 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^{x}-1} - 0\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{x}-1} = \dfrac{1}{+\infty} = 0^{+} \rightarrow$

$\rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

$y = -1 \rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{e^{x}-1} + 1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+e^{x}-1}{e^{x}-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x}}{e^{x}-1} = 0^{+} \rightarrow$

$\rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.



- Asíntota oblicua:

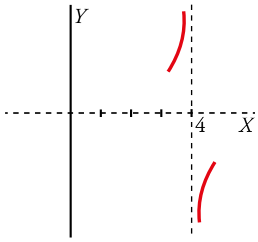
  No hay por haber asíntota horizontal.

c) • Asíntotas verticales:

Buscamos aquellos puntos que anulan el denominador:

$2 - log_2\, x = 0 \;\rightarrow\; log_2\, x = 2 \;\rightarrow\; 2^2 = x \;\rightarrow\; x = 4$

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{2 - log_2\, x} = \dfrac{1}{2-2} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty \;\rightarrow\; x = 4$ es una asíntoma vertical.



Estudiamos la posición:

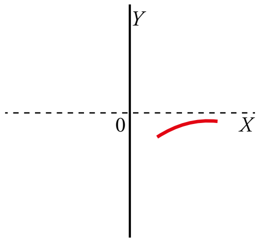
si $x \rightarrow 4^-, f(x) \rightarrow +\infty$

si $x \rightarrow 4^+, f(x) \rightarrow -\infty$

- Asíntota horizontal:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2 - log_2\, x} = \dfrac{1}{2-(+\infty)} = \dfrac{1}{-\infty} = 0 \;\rightarrow\; y = 0$ es asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{2 - log_2\, x}$ no existe, ya que el dominio de definición de $\log_2 x$ es $(0, +\infty)$.



Estudiamos la posición:

$y = 0 \;\rightarrow\; \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{1}{2 - log_2\, x} - 0\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2 - log_2\, x} = \dfrac{1}{-\infty} = 0^- \;\rightarrow$

$\rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Asíntotas oblicuas:

Si $x \;\rightarrow +\infty$ no hay, ya que hay asíntota horizontal.

Si $x \;\rightarrow -\infty$ no existe $log_2\, x$.

37 Determina el límite de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ cuando $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$. Di cuáles son sus asíntotas y sitúa la curva respecto a ellas.

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{0} = \pm\infty$

  La recta $x = 0$ es una asíntota vertical. Estudiamos su posición:

  Si $x \rightarrow 0^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$

  Si $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = 1$, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal por la derecha.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = -1$ (numerador y denominador tienen distinto signo).

  La recta $y = -1$ es una asíntota horizontal por la izquierda.

  Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) - 1 = \dfrac{\sqrt{x^2+3} - x}{x} > 0$, la función está encima de la asíntota.

  Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) - (-1) = \dfrac{\sqrt{x^2+3} + x}{x} < 0$, la función está debajo de la asíntota.

38 **Considera las funciones $y = sen\,x$ e $y = cos\,x$ definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$. Halla las asíntotas de las funciones $f(x) = \frac{1}{sen\,x}$; $g(x) = \frac{1}{cos\,x}$; $h(x) = \frac{1}{1-2cos\,x}$ y sitúa la curva respecto a ellas.**

Solo tiene sentido el estudio de las asíntotas verticales.

- $f(x) = \frac{1}{sen\,x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

  $sen\,x = 0 \to x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi$ son asíntotas verticales.

  Posición:

  Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to \pi^-$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to \pi^+$, $f(x) \to -\infty$

  Si $x \to 2\pi^-$, $f(x) \to -\infty$

- $g(x) = \frac{1}{cos\,x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

  $cos\,x = 0 \to x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{3\pi}{2}$ son asíntotas verticales.

  Posición:

  Si $x \to \frac{\pi}{2}^-$, $g(x) \to +\infty$

  Si $x \to \frac{\pi}{2}^+$, $g(x) \to -\infty$

  Si $x \to \frac{3\pi}{2}^-$, $g(x) \to -\infty$

  Si $x \to \frac{3\pi}{2}^+$, $g(x) \to +\infty$

- $h(x) = \frac{1}{1-2\,cos\,x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

  $1 - 2cos\,x = 0 \to x = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{5\pi}{3}$ son asíntotas verticales.

  Posición:

  Si $x \to \frac{\pi}{3}^-$, $h(x) \to -\infty$

  Si $x \to \frac{\pi}{3}^+$, $h(x) \to +\infty$

  Si $x \to \frac{5\pi}{3}^-$, $h(x) \to +\infty$

  Si $x \to \frac{5\pi}{3}^+$, $h(x) \to -\infty$

39 ODS Meta 14.4. **[Tras el visionado del vídeo el docente puede plantear un análisis de las consecuencias que pueden tener las malas prácticas pesqueras].**

El número de peces de una piscifactoría evoluciona según la función $f(t) = 50 + \frac{100t^2}{t^2+1}$ (t en días).

a) Prueba que la población de peces se recupera durante la primera semana.

b) ¿El crecimiento será indefinido o se estabilizará?

a) Calculamos una tabla con los valores de la primera semana.

t	0	1	2	3	4	5	6
f(t)	50	100	130	140	144	146	147

Podemos comprobar que el número crece pero de una forma cada vez más lenta.

b) Para estudiar el comportamiento de la función a largo plazo podemos calcular $\lim_{x \to +\infty} \left(50 + \frac{100t^2}{t^2+1}\right) = 150$.

Este resultado indica claramente que el crecimiento tiende a estabilizarse.

Página 314

40 **Una fábrica produce chips para aparatos electrónicos. El coste de fabricación viene dado por la función de expresión $C(x) = \dfrac{6}{1-e^{-x}}$ donde x es la cantidad de chips fabricados (en miles) y $C(x)$ el coste total (en millones de euros).**

a) Calcula e interpreta $\lim\limits_{x \to +\infty} C(x)$.

b) Llamamos $C_m(x)$ al coste medio de fabricación de un chip. Expresa $C_m(x)$ en función de x y calcula e interpreta $\lim\limits_{x \to +\infty} C_m(x)$.

Función coste $C(x) = \dfrac{6}{1-6^{-x}}$ — x = n.º chips fabricados; C = millones de euros

a) $\lim\limits_{x \to \infty} C(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6}{1-e^{-x}} = \dfrac{6}{1-e^{-\infty}} = \dfrac{6}{1-0} = 6 \to$

(al ser x n.º de chips, se supone que se van a fabricar cada vez más, luego $x \to +\infty$)

$\to$ Interpretación: el coste al fabricar un gran número de chips se estabiliza en 6 millones de euros.

b) $Cm(x)$ coste medio

$$Cm(x) = \frac{\frac{6}{(1-e^{-x})}}{x} = \frac{6}{x(1-e^{-x})} \to Cm(x) = \frac{1}{x(1-e^{-x})}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{6}{x(1-e^{-x})} = \frac{6}{+\infty} = 6$$

Interpretación: si la producción es muy alta el coste de cada chip se va reduciendo tendiendo a cero.

41 **Calcula el valor de a y b, para que la función $f(x) = \dfrac{ax+b}{2x-1}$ corte al eje de ordenadas en (0, 3) y verifique $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.**

¿Cuáles son sus asíntotas?

$f(x) = \dfrac{ax+b}{2x-1}$

- Si corta al eje de ordenada, en (0, 3) $\to$ El (0, 3) es un punto de la función:

  $3 = \dfrac{a \cdot 0 + b}{2 \cdot 0 - 1} \to 3 = -b \to b = -3$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 \to \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax-3}{2x-1} = 3 \to \dfrac{a}{2} = 3 \to a = 6$

  $f(x) = \dfrac{6x-3}{2x-1}$ corta al eje de ordenadas en (0, 3) y verifica que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

42 **Determina el valor de a y de b de modo que las rectas $x = 3$ e $y = \dfrac{3}{2}$ sean asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{ax+3}{bx-4}$.**

¿Puede tener asíntota oblicua?

Para que $x = 3$ sea una asíntota, el denominador se debe anular en ese punto. Luego:

$b \cdot 3 - 4 = 0 \to b = \dfrac{4}{3}$

$$f(x) = \frac{ax+3}{\frac{4}{3}x-4} = \frac{3ax+9}{4x-12}$$

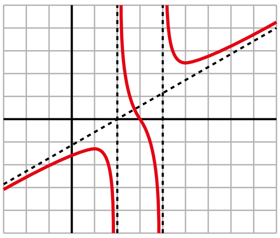
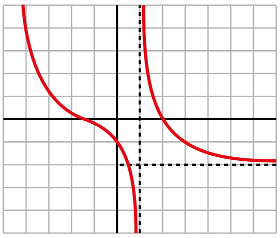
Para que $y = \dfrac{3}{2}$ sea una asíntota horizontal tiene que ocurrir que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$.

Por otro lado, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3ax+9}{4x-12} = \dfrac{3a}{4}$

Por tanto, $\dfrac{3a}{4} = \dfrac{3}{2} \to a = 2$

No puede tener asíntota oblicua.

43 **Observa la gráfica de las siguientes funciones y describe sus ramas infinitas, sus asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas:**

a)  **b)** 

a) Asíntotas verticales: rectas $x = 2$ y $x = 4$.

Posición:

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 4^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 4^+$, $f(x) \to +\infty$

Asíntota oblicua: recta $y = \frac{x}{2} - 1$

Posición:

Si $x \to +\infty$, $f(x) > \frac{x}{2} - 1$

Si $x \to -\infty$, $f(x) < \frac{x}{2} - 1$

b) Asíntotas verticales: recta $x = 1$

Si $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$

Asíntota horizontal: recta $y = -2$ en $+\infty$

Si $x \to +\infty$, $f(x) > 2$

Rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido en $-\infty$.

44 **Representa, en cada caso, una función que cumpla las condiciones dadas.**

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$, $f(x) < 3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $f(x) < 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$, $f(x) > -1$

c) **Asíntota vertical:** $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

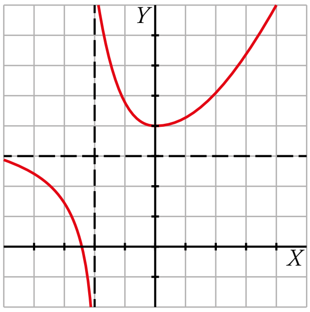
Asíntota oblicua: $y = x + 2$

diferencia $[f(x) - y] < 0$ **si** $x \to \pm\infty$

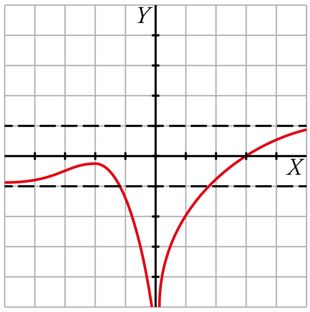
d) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, $f(x) > 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $f(x) < 2$

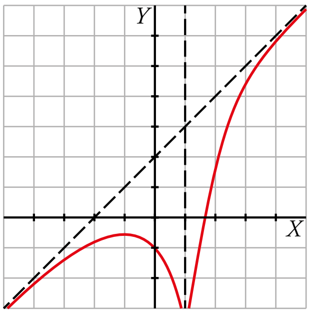
a)



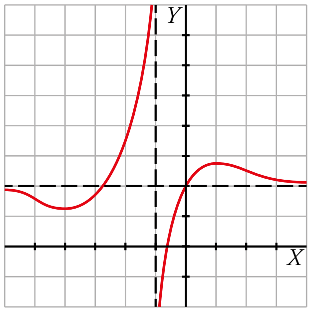
b)



c)



d)



45 Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \le 2 \\ ln\,(x-1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$, calcula el valor de a y de b para que f sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

Para que su gráfica pase por el origen de coordenadas, $f(0) = 0$.

Por tanto, $2 \cdot 0^2 + a \cdot 0 + b = 0$, de donde vemos que $b = 0$.

Exigimos la continuidad en el punto de ruptura:

$f(2) = 2 \cdot 2^2 + a \cdot 2 = 2a + 8$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (2x^2 + ax) = 2a + 8 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} ln\,(x-1) = 0 \end{cases} \qquad \text{Luego } 2a + 8 = 0 \ \to \ a = -4$$

La función es continua en el resto de $\mathbb{R}$ porque está formada por dos trozos: uno de parábola y otro de función logarítmica bien definido.

46 Calcula el valor de a para que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 5x}{x+1} - ax$ sea un número real.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 - 5x}{x+1} - ax \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 5x - ax^2 - ax}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(3-a)x^2 - (5+a)x}{x+1}$$

Para que el límite sea un número real, el grado del numerador debe ser igual al del denominador. Por tanto:

$3 - a = 0 \ \to \ a = 3$, resultando ser el límite igual a -8.

47 Halla los siguientes límites (utiliza la calculadora).

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{ln\,x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^5}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\,(2x+3)}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2^x - x^4)$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}75^x - x^2)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x} = 0$ porque para $x = 100 \ \to \ \dfrac{100^3}{e^{100}} = 3{,}7201 \cdot 10^{-38}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$ porque para $x = 10\,000 \to \dfrac{10\,000}{\ln 10\,000} = 1\,085{,}7$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^5} = +\infty$ porque para $x = 100 \to \dfrac{e^{100} - 1}{100^5} = 2{,}6881 \cdot 10^{33}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(2x+3)}{x^2} = 0$ porque para $x = 100 \to \dfrac{\ln(2 \cdot 100 + 3)}{100^2} = 0{,}00053$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - x^4) = +\infty$ porque para $x = 100 \to 2^{100} - 100^4 = 1{,}2677 \cdot 10^{30}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}75x - x^2) = -\infty$ porque para $x = 100 \to 0{,}75^{100} - 100^2 = -10\,000$

48 La función $f(x) = \dfrac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9}$ es discontinua en $x = 3$ y $x = -3$. Estudia el tipo de discontinuidad que presenta en esos puntos según los valores de m.

La función $f(x)$ en los puntos $x = 3$ y $x = -3$ no está definida.

- $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9}$

  Si $3^3 + m \cdot 3^2 + 9 = 0$, es decir, si $m = -4$, tendríamos una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$.

  Por tanto, si $m = -4$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x^2 - x - 3)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 3}{x + 3} = \dfrac{1}{2}$

  La discontinuidad en $x = 3$ es evitable del tipo III.

  Para $m = -4$, en $x = -3$ tenemos una discontinuidad de salto infinito (tipo I) porque:

  $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 9} = \dfrac{-54}{0} = \pm\infty$

- $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9}$

  Si $(-3)^3 + m \cdot (-3)^2 + 9 = 0$, es decir, si $m = 2$, tendríamos una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$.

  Por tanto, si $m = 2$, $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+3)(x^2 - x + 3)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - x + 3}{x - 3} = \dfrac{-5}{2}$

  y tenemos una discontinuidad evitable de tipo III en $x = -3$.

  Para $m = 2$, en $x = 3$ hay una discontinuidad de salto infinito (tipo I) porque:

  $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \dfrac{54}{0} = \pm\infty$

Si $m \neq -4$ y $m \neq 2$, las discontinuidades en $x = 3$ y $x = -3$ son de salto infinito (tipo I) porque el numerador de la función no se anula.

49 Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{2x}}{x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{4 - x} - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{2x - 1} - 3}{x - 5}$

d) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x - 7}{\sqrt{3x + 4} - 5}$

* *Fíjate en el apartado d) del ejercicio resuelto 2.*

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{2x}}{x - 2} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\frac{x - \sqrt{2x}}{x - 2} = \frac{(x - \sqrt{2x})(x + \sqrt{2x})}{(x-2)(x + \sqrt{2x})} = \frac{x^2 - 2x}{(x-2)(x + \sqrt{2x})} = \frac{x(x-2)}{(x-2)(x + \sqrt{2x})} = \frac{x}{x + \sqrt{2x}}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x}{x + \sqrt{2x}} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{4-x}-1} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\frac{x-3}{\sqrt{4-x}-1} = \frac{(x-3)(\sqrt{4-x}+1)}{(\sqrt{4-x}-1)(\sqrt{4-x}+1)} = \frac{(x-3)(\sqrt{4-x}+1)}{3-x} = \sqrt{4-x}+1$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{\sqrt{4-x}-1} = \lim_{x \to 3} \sqrt{4-x}+1 = 2$$

c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5} = \frac{(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{2x-1}+3)}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} = \frac{2x-10}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} = \frac{2(x-5)}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} = \frac{2}{\sqrt{2x-1}+3}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{2}{\sqrt{2x-1}+3} = \frac{1}{3}$$

d) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x-7}{\sqrt{3x+4}-5} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\frac{x-7}{\sqrt{3x+4}-5} = \frac{(x-7)(\sqrt{3x+4}+5)}{(\sqrt{3x+4}-5)(\sqrt{3x+4}+5)} = \frac{(x-7)(\sqrt{3x+4}+5)}{3x-21} = \frac{(x-7)(\sqrt{3x+4}+5)}{3(x-7)} = \frac{\sqrt{3x+4}+5}{3}$$

$$\lim_{x \to 7} \frac{x-7}{\sqrt{3x+4}-5} = \lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{3x+4}+5}{3} = \frac{10}{3}$$

Cuestiones teóricas

50 **[La justificación de los ejemplos es una oportunidad para trabajar la destreza expresión escrita de esta clave].**

¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta y pon ejemplos.

a) Si no existe $f(2)$, no se puede calcular $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

b) Si no existe $f(1)$, $f(x)$ no puede ser continua en $x = 1$.

c) Una función no puede tener dos asíntotas horizontales.

d) Una función puede tener cinco asíntotas verticales.

e) La recta $x = 1$ es asíntota vertical de $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

f) La función $y = 2^{-x}$ no tiene asíntotas.

g) $\lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{4-x} = \lim\limits_{x \to 4^+} \sqrt{4-x}$

a) Falso. En una discontinuidad evitable de tipo III no existe la función en un punto pero sí existe el límite.

b) Verdadero, ya que no se cumple una de las condiciones de la continuidad.

c) Verdadero. Si tuviera tres o más asíntotas horizontales, dos de ellas coincidirían por uno de los extremos del eje OX y esto es imposible porque la función no puede tender simultáneamente a dos resultados diferentes.

d) Verdadero. Incluso puede tener infinitas asíntotas verticales, como ocurre con la función $y = tg\, x$.

e) Falso. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} =$$

$= \lim\limits_{x \to 1} (\sqrt{x}+1) = 1+1 = 2 \to$ No hay asíntota vertical en $x = 1$

f) Falso. Porque $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2^x} = 0$ y la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

g) Falso.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 4^+} \sqrt{4-x} \quad \text{no existe} \\ \lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{4-x} \quad \text{sí existe}\end{array}\right\} \text{Luego la igualdad es falsa.}$$

51 **Dada la función $f(x) = a^{xn} + bx^{n-1} + \ldots + h$, justifica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:**

a) Si $a > 0$ y n es par, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b) Si $a > 0$ y n es impar, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

c) Si $a < 0$ y n es par, entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

d) Si $a < 0$ y n es impar, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

a) Falso.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = +\infty$ porque $ax^n > 0$ al ser n par y $a > 0$.

b) Falso.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = -\infty$ porque $ax^n < 0$ al ser n impar y $a > 0$.

c) Verdadero.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = -\infty$ porque $ax^n < 0$ al ser n par y $a < 0$.

d) Verdadero.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = +\infty$ porque $ax^n > 0$ al ser n impar y $a < 0$.

52 **Pon un ejemplo de una función que tenga una asíntota vertical en $x = 2$ y que exista $f(2)$.**

Respuesta abierta.

Si tiene asíntota vertical en $x = 2$, esto quiere decir que puede ser un cociente en el cual se anula el denominador para $x = 2$.

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-2)}$$

Para que exista $f(2)$ definimos las funciones en dos ramas:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

53 **Escribe una función cuyo denominador se anule en $x = 1$ y que no tenga asíntota vertical en ese punto.**

Respuesta abierta.

Si se anula el denominador en $x = 1$ $\rightarrow$ Debe llevar el factor $(x - 1)$.

Como no hay asíntota vertical en $x = 1$ $\rightarrow$ El factor $(x - 1)$ se puede simplificar al calcular el $\lim\limits_{x \to 1}$.

Por ejemplo: $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} \rightarrow f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

54 **La función $y = 2^{1/x}$, ¿tiene límite cuando $x \to 0$?**

$\lim\limits_{x \to 0} 2^{1/x} = 2^{\pm\infty}$

Estudiamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 0^+} 2^{1/x} = 2^{\pm\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} 2^{1/x} = 2^{-\infty} = 0$

Por tanto, no existe el límite dado.

Para profundizar

Página 315

55 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x|x-1|$

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (|x| + x - 3)$

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (|x+4| + |x|)$

d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (|x+2| - |x|)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x(x-1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x(-x+1) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^2 + x = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (|x| + x - 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + x - 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 3) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (|x| + x - 3) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x + x - 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} -3 = -3$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (|x+4| + |x|) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + 4 + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x + 4) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (|x+4| + |x|) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x - 4 - x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x - 4) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (|x+2| - |x|) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + 2 - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2 = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (|x+2| - |x|) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x - 2 + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2 = -2$

56 **Halla las asíntotas de las funciones siguientes:**

a) $y = \dfrac{|x|}{2-x}$

b) $y = \dfrac{|2x+4|}{x}$

c) $y = \dfrac{|2x-1|}{x}$

a) • Verticales: $x = 2$

Posición:

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$

• Horizontales:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|x|}{2-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2-x} = -1$. La recta $y = -1$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x|}{2-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{2-x} = 1$. La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

b) • Verticales: $x = 0$

Posición:

Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

• Horizontales:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|2x+4|}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+4}{x} = 2 \to y = 2$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|2x+4|}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x-4}{x} = -2 \to y = -2$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

c) • Verticales: $x = 1$

Posición:

Si $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$

- Horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|2x+1|}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2. \text{ La recta } y = 2 \text{ es una asíntota horizontal cuando } x \to +\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{|2x+1|}{x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x+1}{x-1} = -2. \text{ La recta } y = -2 \text{ es una asíntota horizontal cuando } x \to -\infty.$$

57 Demuestra que la recta $y = 2x$ es asíntota oblicua hacia $+\infty$ de la función $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

- Asíntota oblicua: $y = ax + b$.

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2 = 2$$

$\downarrow$

Términos de mayor grado

$$b = \lim_{x \to +\infty} [x + \sqrt{x^2+1} - 2x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2+1} - x] = \infty - \infty \to \text{Indeterminación}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{(\sqrt{x^2+1} + x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{(\sqrt{x^2+1} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Luego la asíntota oblícua es: $y = 2x + 0 \to y = 2x$.

58 Halla los siguientes límites:

a) $\displaystyle \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{2x+1}-3}$ **b** $\displaystyle \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{3x-2}-5}{\sqrt{2x+7}-5}$

a) $\displaystyle \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{2x+1}-3} = \frac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\frac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{2x+1}-3} = \frac{(\sqrt{6x+1}-5)(\sqrt{6x+1}+5)(\sqrt{2x+1}+3)}{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{6x+1}+5)(\sqrt{2x+1}+3)} = \frac{(6x-24)(\sqrt{2x+1}+3)}{(2x-8)(\sqrt{6x+1}+5)} =$$

$$= \frac{6(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}{2(x-4)(\sqrt{6x+1}+5)} = \frac{3(\sqrt{2x+1}+3)}{\sqrt{6x+1}+5}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{2x+1}-3} = \lim_{x \to 4} \frac{3(\sqrt{2x+1}+3)}{\sqrt{6x+1}+5} = \frac{9}{5}$$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{3x-2}-5}{\sqrt{2x+7}-5} = \frac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\frac{\sqrt{3x-2}-5}{\sqrt{2x+7}-5} = \frac{(\sqrt{3x-2}-5)(\sqrt{3x-2}+5)(\sqrt{2x+7}+5)}{(\sqrt{2x+5}+5)(\sqrt{3x-2}+5)(\sqrt{2x+7}+5)} = \frac{(3x-27)(\sqrt{2x+7}+5)}{(2x-18)(\sqrt{3x-2}+5)} =$$

$$= \frac{3(x-9)(\sqrt{2x+7}+5)}{2(x-9)(\sqrt{3x-2}+5)} = \frac{3(\sqrt{2x+7}+5)}{2(\sqrt{3x-2}+5)}$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{3x-2}-5}{\sqrt{2x+7}-5} = \lim_{x \to 9} \frac{3(\sqrt{2x+7}+5)}{2(\sqrt{3x-2}+5)} = \frac{3}{2}$$

59 Calcula las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ y estudia la posición de la función respecto de ellas. ¿Tiene asíntota horizontal?

El dominio de definición de la función es la solución de la inecuación $x^2 - 1 > 0$, es decir, $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Las asíntotas verticales son las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Solo podemos acercarnos por un lado en cada una de las asíntotas.

Posición:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Veamos ahora las asíntotas horizontales. Usamos la regla de los grados del numerador y del denominador.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

Por tanto, no tiene asíntotas horizontales.

60 Halla las asíntotas de $y = 2x - 2^{-x}$.

- Asíntotas verticales:

  $\lim_{x \to a} (2x - 2^{-x}) = 2a - 2^{-a} \to$ Al ser a un número real $x \to a$, el valor del límite es un número real $\to$

  $\to$ No hay asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales:

  $\lim_{x \to +\infty} (2x - 2^{-x}) = \lim_{x \to +\infty} 2x - \lim_{x \to +\infty} 2^{-x} = \infty - 0 = \infty \to$ No hay asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

  $\lim_{x \to -\infty} (2x - 2^{-x}) = -2(+\infty) - (+\infty) = -\infty \to$ No hay asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

- Asíntota oblicua:

  Debido a la función 2^{-x}, vemos si $x \to +\infty$ y si $x \to -\infty$

  $\boxed{x \to +\infty}$

- $a = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 2^{-x}}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{x} - \frac{2^{-x}}{x}\right) \to 2 - \lim_{x \to +\infty} \frac{2^{-x}}{x} = 2 - 0 = 2$

- $b = \lim_{x \to +\infty} \left[(2x - 2^{-x}) - 2x\right] = \lim_{x \to +\infty} -2^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2^x}\right) = 0$

  Luego la asíntota oblicua es: $y = 2x$ si $x \to +\infty$

  $\boxed{x \to -\infty}$

- $a = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 2^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} + \lim_{x \to -\infty} \frac{2^{-x}}{-x} = 2 + \infty = \infty \to$

  $\to$ No hay asíntota oblicua.

61 Determina cuál debe ser el valor a y b para que se cumpla la igualdad: $\lim_{x \to +\infty} \left(ax + b - \frac{2x^2 - 1}{x + 2}\right) = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(ax + b - \frac{(2x^2-1)}{x+2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(ax + \frac{2bx^2 - b}{x+2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax(x+2) + 2b\,x^2 - b}{x+2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} = \frac{ax^2 + 2ax + 2b\,x^2 - b}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2(a+2b) + 2ax - b}{x+2} = 0 \to$$

$\to$ El grado del numerador debe ser menor que el grado del denominador $\to$

$\to (a+2b)x^2 + 2a\,x - b$ debe ser un polinomio de grado 0 $\to \begin{Bmatrix} a + 2b = 0 \\ 2a = 0 \end{Bmatrix}$

$2a = 0 \to \boxed{a = 0} \to 2b = 0 \to \boxed{b = 0}$

62 **Calcula el valor de a y b para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$. ¿Para estos valores tiene f alguna asíntota?**

$$f(x) = \begin{cases} a - 2^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ ln(x + b) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ tiene que ocurrir: $f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$.

- $f(0) = 1$
- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} a - 2x = a$

  $\boxed{a = 1}$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} ln(x + b) = ln\, b$

  $ln\, b = 1 \to \boxed{b = e}$

  $$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ ln(x + e) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función está definida por ramas, las tres ramas son continuas en los intervalos en los que están definidas, luego $f(x)$ no tiene ninguna discontinuidad.

63 **Calcula a y b para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto (2, 3) y tenga una asíntota oblicua de pendiente 4:**

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{a - x}, \quad a \neq 0$$

¿Cuál será esa asíntota oblicua?

- Como pasa por (2, 3) $\to x = 2, y = 3 \to 3 = \dfrac{4a + b}{a - 2} \to 3a - 6 = 4a + b \to -6 = a + b$
- Como $y = 4x + b$ es asíntota oblicua $\to 4 = \lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} \to \lim_{x \to \infty} \dfrac{\frac{ax^2 + b}{a - x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{ax^2 + b}{ax - x^2} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

  $= \lim_{x \to \infty} = \dfrac{ax^2}{-x^2} = \lim_{x \to \infty} (-a) = -a$

  Luego $4 = -a \to \boxed{a = -4}$

  Tenemos: $\left.\begin{array}{r} -6 = a + b \\ a = -4 \end{array}\right\} \to -6 = -4 + b \to \boxed{b = -2}$

  La asíntota oblicua es: $y = 4x - 2$

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 3.2. (EA 3.2.1-EA 3.2.2.-EA 3.3.3.)

Página 315

1 **Calcula el límite de** $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \le 3 \\ x^2-x-7, & x > 3 \end{cases}$ **en los puntos de abscisas 0, 3 y 5. Di si** f **es continua en esos puntos.**

$$f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \le 3 \\ x^2-x-7, & x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 3^-} f(x) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = 3^2 - 3 - 7 = -1 \end{cases} \text{ No tiene límite en } x = 3.$$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 5^2 - 5 - 7 = 13$$

Es continua en $x = 0$ y en $x = 5$. No es continua en $x = 3$, porque no tiene límite en ese punto.

2 **Halla los siguientes límites:**

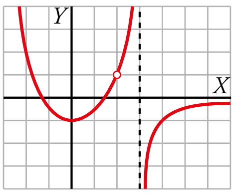
a) $\lim_{x \to 0} 2^{x-1}$ **b)** $\lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}}$ **c)** $\lim_{x \to 4} \frac{x}{(x-4)^2}$

a) $\lim_{x \to 0} 2^{x-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

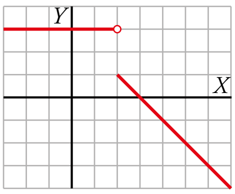
b) $\lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{3}$

c) $\lim_{x \to 4} \frac{x}{(x-4)^2} = +\infty$ (Si $x \to 4^+$ o si $x \to 4^-$, los valores de la función son positivos).

3 **a)**



b)



Halla, en cada caso, los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 3} f(x); \quad \lim_{x \to 2} f(x); \quad \lim_{x \to +\infty} f(x); \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

a) $\lim_{x \to 3} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{cases}$ No tiene límite en $x = 3$.

$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 2} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 2^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{cases}$ No tiene límite en $x = 2$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

4 **Halla las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 2x}$ y estudia la posición de la curva respecto a ellas.**

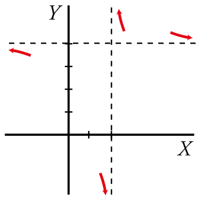
Simplificamos: $\dfrac{4x^2}{x^2 - 2x} = \dfrac{4x}{x - 2} \to y = \dfrac{4x}{x - 2}$

- Asíntota vertical: $x = 2$

Posición $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4x}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x}{x-2} = +\infty \end{cases}$

- Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4x}{x-2} = 4$; $y = 4$

Posición: $\begin{cases} x \to +\infty, & y > 4 \\ x \to -\infty, & y < 4 \end{cases}$



5 **Justifica qué valor debe tomar a para que la función $f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$.**

$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$

La función es continua para valores de x menores que 1 y mayores que 1, porque ambos tramos son rectas.

Para que sea continua en $x = 1$, debe cumplirse: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$f(1) = a - 2$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a - 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - 2a \end{cases}$

Para que exista el límite, debe ser: $a - 2 = 4 - 2a \to 3a = 6 \to a = 2$

6 **Halla el límite de $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6}$ cuando $x \to 3$; $x \to 2$; $x \to +\infty$; $x \to -\infty$ y representa la información que obtengas.**

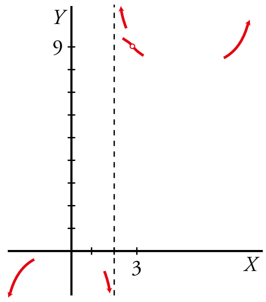
- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{0}{0}$

  Simplificamos: $\dfrac{x^2(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{x^2}{x-2}$

  $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2}{x-2} = 9$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{x-2} \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

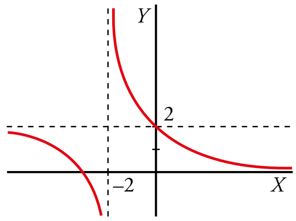
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-2} = -\infty$



7 **Representa una función que cumpla las siguientes condiciones:**

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ **b)** $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$



8 **Estudia, en cada caso, las ramas infinitas y las asíntotas de la función y sitúa la curva respecto a ellas:**

a) $f(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{-2x^2}{2x - 3x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 + 4}$ **d)** $f(x) = 3 - 2^{-x}$

a) • Asíntotas verticales.

$1 - x^2 = 0 \to x^2 = 1 \to x = \pm 1 \to$ Posibles asíntotas verticales

$\boxed{x = 1}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x}{1 - x^2} = \dfrac{2}{0} = \infty \to$ Hay una asíntota vertical en $x = 1$

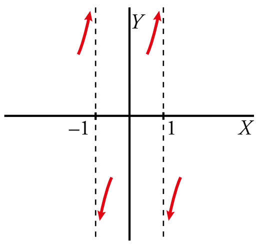
Estudiamos la posición:

si $x \to 1^-, f(x) \to +\infty$

si $x \to 1^-, f(x) \to +\infty$

$\boxed{x = -1}$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x}{1 - x^2} = \dfrac{-2}{0} = -\infty \to$ Hay una asíntota vertical en $x = -1$



Estudiamos la posición:

si $x \to -1^-, f(x) \to +\infty$

si $x \to -1^+, f(x) \to -\infty$

• Ramas en el infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{-x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{-x} = \frac{2}{-\infty} = 0^-$$

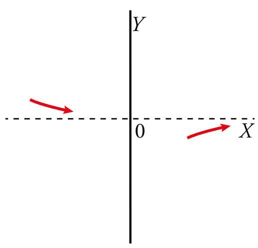
↓

Términos de mayor grado

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{-x} = \frac{2}{\infty} = 0^+$$

↓

Términos de mayor grado



Luego $y = 0$ es asíntota horizontal.

Estudiamos la posición:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{2x}{1 - x^2} - 0\right] = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{1 - x^2} = 0^- \to$ La curva está por debajo de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to -+\infty} \left[\dfrac{2x}{1 - x^2} - 0\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{1 - x^2} = 0^+ \to$ La curva está por encima de la asíntota.

• Asíntotas oblicuas no hay ya que hay asíntota horizontal.

b) • Asíntotas verticales:

$$2x-3x^2=0 \ \to \ x(2-3x)=0 \ \begin{cases} x=0 \\ 2-3x=0 \ \to \ 2=3x \ \to \ x=2/3 \end{cases}$$

$x = 0$, $x = 2/3$ $\to$ Posibles asíntotas verticales.

$\boxed{x=0}$

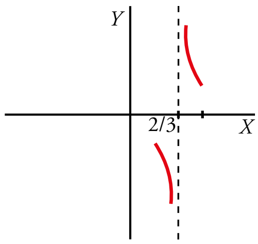
$$\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{2x-3x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{x(2-3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{2-3x}=\frac{0}{2}=0 \ \to$$

$\to$ No hay asíntota vertical en $x=0$.

$\boxed{x=\dfrac{2}{3}}$

$$\lim_{x\to 2/3}\frac{-2x^2}{2x-3x^2}=\frac{-8/9}{0}=\infty \ \to \ \text{Estudiamos los signos.}$$

$$\lim_{x\to 2/3}\frac{-2x}{2-3x}= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-/3}\dfrac{-2x}{2-3x}=\dfrac{-4/3}{0^+}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+/3}\dfrac{-2x}{2-3x}=\dfrac{-4/3}{0^-}=+\infty \end{cases} \to$$



$\to$ Hay una asíntota vertical en $x=\dfrac{2}{3}$.

Estudiamos la posición:

si $x \to 2^-/3, f(x) \to -\infty$

si $x \to 2^-/3, f(x) \to +\infty$

• Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{2x-3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{-3x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{3}=\frac{2}{3} \ \to$$

$\downarrow$

Términos de mayor grado

$\to$ Asíntota horizontal $y=\dfrac{2}{3}$.

Estudiamos la posición:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2x^2}{2x-3x^2}-\frac{2}{3}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2-4x+6x^2}{3(2x-3x^2)}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$\downarrow$

Términos de mayor grado

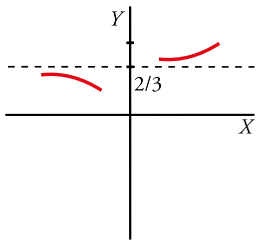
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{-3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{3x}=0^+ \ \to \ \text{La curva está por encima de la asíntota.}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-2x^2}{2x-3x^2}-\frac{2}{3}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{2x-3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{-3x^2}=$$

$\downarrow$

Términos de mayor grado

$$=\lim_{x\to-+\infty}\frac{-4}{-3x}=0^- \ \to \ \text{La curva está por debajo de la asíntota.}$$



• Asíntotas oblicuas no hay ya que hay asíntota horizontal.

c) No tiene asíntotas verticales porque $x^2+4\neq 0$ para cualquier valor de x.

No tiene asíntotas horizontales porque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{x^2+4}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^2+4}=-\infty$.

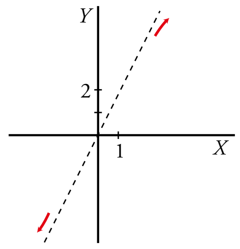
Tiene una asíntota oblicua, porque el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 & x^2+4 \\ \hline -2x^3-8x & 2x \\ \quad -8x & \end{array}$$

$$y = \frac{2x^3}{x^2+4} = 2x - \frac{8x}{x^2+4}$$

Asíntota oblicua: $y = 2x$

Posición $\begin{cases} x \to +\infty & \text{curva} < \text{asíntota} \\ x \to -\infty & \text{curva} > \text{asíntota} \end{cases}$



d) • Asíntotas verticales:

$f(x) = 3 - \dfrac{1}{2^x}$ el denominador nunca se hace cero $\to$

$\to$ No hay asíntotas verticales.

• Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} (3 - 2^{-x}) = \lim_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{1}{2^x}\right) = 3 - 0 = 3 \;\to\; y = 3 \;\to$$

$$\downarrow$$

$$2^{+\infty} = +\infty$$

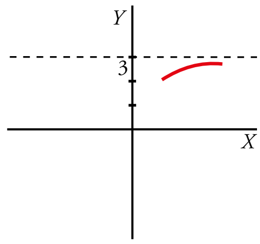
$\to$ Es asíntota horizontal si $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - 2^{-x}) = 3 - \infty \to -\infty \to$ No hay asíntota horizontal.

Estudiamos la posición para $y = 3$

$$\lim_{x \to +\infty} \left((3 - 2^{-x}) - 3\right) = \lim_{x \to +\infty} (-2^{-x}) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2^x}\right) = 0^- \;\to$$

$\to$ La curva está por debajo de la asíntota.



• Asíntota oblicua:

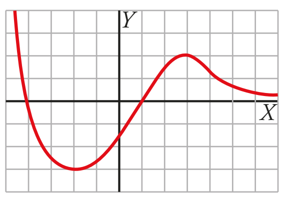
Si $x \to +\infty \to$ No hay, ya que hay asíntotas horizontales.

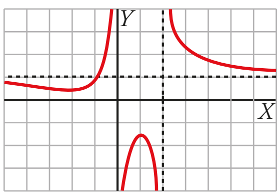
Si $x \to -\infty \to$ puede ser que tenga asíntota oblicua.

$y = ax + b$

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{3 - 2^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-3}{x} - \frac{2^{-x}}{x}\right) = +\infty \;\to\; \text{No hay asíntota oblicua.}$$

9 **Observa estas gráficas y describe sus ramas infinitas, asíntotas y posición de la curva con respecto a ellas.**





a) • No hay asíntotas verticales.

• $y = 0$ es asíntota horizontal si $x \to +\infty$.

La curva está por encima de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 0) = 0^+$

• No hay asíntota oblicua.

• Rama infinita si $x \to -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) • Asíntotas verticales:

$x = 0$, $x = 2$

Estudiamos las posiciones:

Si $x \to 0^-$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 0^+$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

b) • Asíntota horizontal $y = 1$:

Estudiamos la posición:

$x \to -\infty$, $f(x)$ por debajo de la asíntota $\to \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - 1) = 0^-$

$x \to +\infty$, $f(x)$ por encima de la asíntota $\to \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 1) = 0^+$

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

12 DERIVADAS

C.E.: CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.-EA 1.5.3.) CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.) CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.)

Página 317

Resuelve

Movimiento de una partícula

Una investigadora, para estudiar el movimiento de una partícula, la ha iluminado con destellos de *flash* cada décima de segundo (0,1 s) durante cuatro segundos. Esta es la fotografía a tamaño real:

1. Aproxima la velocidad de la partícula en el instante $t = 2$ s hallando su velocidad media en los intervalos [2; 2,5] y [2; 2,1]. Para ello, toma medidas sobre la fotografía. Observa que P_2; $P_{2,1}$ y $P_{2,5}$ son las posiciones de la partícula en los instantes 2 s; 2,1 s y 2,5 s, respectivamente.

2. Calcula las velocidades medias anteriores tomando valores sobre la ecuación del movimiento de dicha partícula: $s = \frac{1}{2}(t^4 - 8t^3 + 18t^2)$

3. Halla ahora las velocidades medias en los intervalos [2; 2,001] y [2; 2,000001] tomando de nuevo valores sobre la ecuación del movimiento de la partícula. ¿Podemos considerar que esta última velocidad media es muy parecida a la velocidad instantánea en $t = 2$ s?

1. La distancia que separa los puntos en los instantes $t = 2$ y $t = 2,5$ es de 12,5 mm, luego la velocidad es:

$$\frac{12,5}{0,5} = 25 \text{ mm/s} = 2,5 \text{ cm/s}$$

La distancia que separa los puntos en los instantes $t = 2$ y $t = 2,1$ es de 3,5 mm, luego la velocidad es:

$$\frac{3,5}{0,1} = 33 \text{ mm/s} = 3,5 \text{ cm/s}$$

2. $$\left.\begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{2}(2^4 - 8 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2) = 12 \text{ cm} \\ s_2 = \frac{1}{2}(2,5^4 - 8 \cdot 2,5^3 + 18 \cdot 2,5^2) = 13,28 \text{ cm} \end{array}\right\} \to v_1 = \frac{13,28 - 12}{0,5} = 2,56 \text{ cm/s}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \text{ cm} \\ s_3 = \frac{1}{2}(2,1^4 - 8 \cdot 2,1^3 + 18 \cdot 2,1^2) = 12,37 \text{ cm} \end{array}\right\} \to v_2 = \frac{12,37 - 12}{0,1} = 3,77 \text{ cm/s}$$

3. $$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \text{ cm} \\ s_4 = \frac{1}{2}(2,001^4 - 8 \cdot 2,001^3 + 18 \cdot 2,001^2) = 12,003997 \text{ cm} \end{array}\right\} \to v = \frac{12,003997 - 12}{0,001} = 3,997 \text{ cm/s}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \text{ cm} \\ s_5 = \frac{1}{2}(2,000001^4 - 8 \cdot 2,000001^3 + 18 \cdot 2,000001^2) = 12,000004 \text{ cm} \end{array}\right\} \to v = \frac{12,000004 - 12}{0,000001} = 4 \text{ cm/s}$$

Sí podemos considerar que esta última velocidad es muy parecida a la velocidad instantánea en $t = 2$ s porque el intervalo de tiempo transcurrido es tan solo una millonésima de segundo.

1 MEDIDA DEL CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

C.E.: CE 3.3. (EA 3.3.1.)

Página 318

Hazlo tú

1 **Halla la T.V.M. de $y = \sqrt{x-1}$ en $[1, 2]$, $[1, 5]$ y $[1, 10]$.**

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{0}}{1} = 1$$

$$\text{T.V.M. } [1, 5] = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{0}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{T.V.M. } [1, 10] = \frac{f(10)-f(1)}{10-1} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{0}}{9} = \frac{1}{3}$$

Piensa y practica

1 Piensa y comparte en pareja. **[La decisión sobre la corrección de las afirmaciones se puede aprovechar para trabajar esta estrategia].**

¿Verdadero o falso?

a) La T.V.M. mide el crecimiento medio de una función en un intervalo.

b) Si f es creciente en $[a, b]$, su T.V.M. en ese intervalo es positiva, y si es decreciente, su T.V.M. es negativa.

c) Si la T.V.M. de f en $[a, b]$ es 0, significa que f es constante en $[a, b]$.

a) Verdadero.

b) Verdadero. El signo de la T.V.M. depende solo del signo del numerador. Si f es creciente $f(b) > f(a)$, luego el numerador es positivo. Si f es decreciente, $f(b) < f(a)$, luego el numerador es negativo.

c) Falso. Solo podemos afirmar que $f(a) = f(b)$. Esto no quiere decir que sea constante.

2 **Halla la T.V.M. de la función $y = x^2 - 8x + 12$ en los siguientes intervalos:**

$[1, 2]$, $[1, 3]$, $[1, 4]$, $[1, 5]$, $[1, 6]$, $[1, 7]$, $[1, 8]$

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{0-5}{1} = -5$$

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{-3-5}{2} = -4$$

$$\text{T.V.M. } [1, 4] = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{-4-5}{3} = -3$$

$$\text{T.V.M. } [1, 5] = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{-3-5}{4} = -2$$

$$\text{T.V.M. } [1, 6] = \frac{f(6)-f(1)}{6-1} = \frac{0-5}{5} = -1$$

$$\text{T.V.M. } [1, 7] = \frac{f(7)-f(1)}{7-1} = \frac{5-5}{6} = 0$$

$$\text{T.V.M. } [1, 8] = \frac{f(8)-f(1)}{8-1} = \frac{12-5}{7} = 1$$

3 **Halla la T.V.M. de $y = x^2 - 8x + 12$ en el intervalo variable [1, 1 + h].**

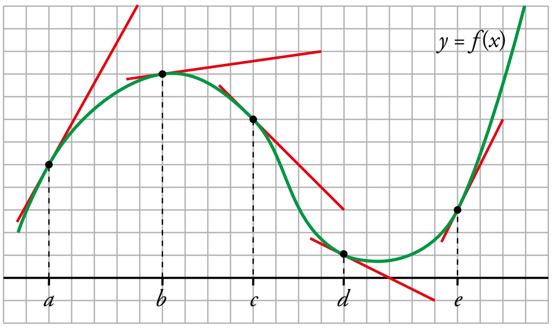
Comprueba que, dando a h los valores adecuados, se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

$$\text{T.V.M. } [1,\ 1+\text{h}] = \frac{f(1+\text{h})-f(1)}{\text{h}} = \frac{(1+\text{h})^2-8(1+\text{h})+12-5}{\text{h}} = \frac{\text{h}^2-6\text{h}}{\text{h}} = \frac{\text{h}(\text{h}-6)}{\text{h}} = \text{h}-6$$

Dando a h los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

Página 319

4 **Calcula $f'(a)$, $f'(b)$, $f'(c)$, $f'(d)$ y $f'(e)$.**



PUNTO	PENDIENTE
a	$f'(-8) = \frac{9}{5}$
b	$f'(-3) = \frac{1}{7}$
c	$f'(1) = -1$
d	$f'(5) = -\frac{1}{2}$
e	$f'(10) = 2$

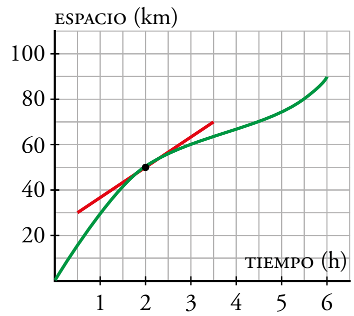
5 **Comprobamos.** **[El trabajo con la pendiente de la gráfica que propone el ejercicio puede servir para trabajar esta técnica].**

La siguiente gráfica muestra el espacio recorrido por un ciclista a lo largo de una carrera.

a) Calcula su velocidad media entre estas horas:
[1, 2], [1, 3], [1; 4,5], [1; 5,5] y [1, 6]

b) Halla la velocidad que llevaba a las 2 h.

c) Estima su velocidad a las 5 h 30 min.



Vemos los valores que toma la función en cada punto:

$f(1) = 30$ km

$f(2) = 50$ km

$f(3) = 60 \text{ km}$

$f(4,5) = 70 \text{ km}$

$f(5,5) = 80 \text{ km}$

a) $\text{T.V.M.}[1,2] = \dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 20 \text{ km/h}$

$\text{T.V.M.}[1,3] = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = 15 \text{ km/h}$

$\text{T.V.M.}[1;4{,}5] = \dfrac{f(4,5) - f(1)}{4,5 - 1} = \dfrac{40}{3,5} = 11,43 \text{ km/h}$

$\text{T.V.M.}[1;5{,}5] = \dfrac{f(5,5) - f(1)}{5,5 - 1} = \dfrac{50}{4,5} = 11,1 \text{ km/h}$

b) Aproximamos la velocidad en $t = 2$:

$\dfrac{f(2,5) - f(2)}{0,5} = \dfrac{58 - 50}{0,5} = 16 \text{ km/h}$

$\dfrac{f(2,25) - f(2)}{0,25} = \dfrac{54 - 50}{0,25} = 16 \text{ km/h}$

$\dfrac{f(2) - f(1,5)}{0,5} = \dfrac{50 - 42}{0,5} = 16 \text{ km/h}$

$\dfrac{f(2) - f(1,75)}{0,25} = \dfrac{50 - 46}{0,25} = 16 \text{ km/h}$

Podemos decir entonces que su velocidad a las dos horas es de 16 km/h.

c) Aproximamos la velocidad en $t = 5{,}5$ (es decir, a las 5 h 30 min):

$\dfrac{f(6) - f(5,5)}{0,5} = \dfrac{90 - 80}{0,5} = 20 \text{ km/h}$

$\dfrac{f(5,5) - f(5)}{0,5} = \dfrac{80 - 75}{0,5} = 10 \text{ km/h}$

Haciendo un promedio, podemos decir entonces que su velocidad a las 5 h 30 min es de unos 15 km/h.

2 ▸ OBTENCIÓN DE LA DERIVADA A PARTIR DE LA EXPRESIÓN ANALÍTICA

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) CE 3.3. (EA 3.3.1.)

Página 321

Hazlo tú

1 **Halla la derivada de $y = \dfrac{3}{x-2}$ en los puntos de abscisas 1, –1 y 5.**

- $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$$f(1+h) = \frac{3}{1+h-2} = \frac{3}{h-1}$$

$$f(1) = \frac{3}{1-2} = -2$$

$$f(1+h) - f(1) = \frac{3}{h-1} - (-3) = \frac{3h}{h-1}$$

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{3h}{h-1}}{h} = \frac{3}{h-1}$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{3}{h-1} = -3$$

- $f'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

$$f(-1+h) = \frac{3}{-1+h-2} = \frac{3}{h-3}$$

$$f(-1) = \frac{3}{-1-2} = -1$$

$$f(-1+h) - f(-1) = \frac{3}{h-3} - (-1) = \frac{h}{h-3}$$

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\frac{h}{h-3}}{h} = \frac{1}{h-3}$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h-3} = -\frac{1}{3}$$

- $f'(5) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h}$

$$f(5+h) = \frac{3}{5+h-2} = \frac{3}{h+3}$$

$$f(5) = \frac{3}{5-2} = 1$$

$$f(5+h) - f(5) = \frac{3}{h+3} - 1 = \frac{-h}{h+3}$$

$$\frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \frac{\frac{-h}{h+3}}{h} = -\frac{1}{h+3}$$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \left(-\frac{1}{h+3}\right) = -\frac{1}{3}$$

Hazlo tú

2 **Halla la derivada de $y = \frac{x^2}{2} + 7x$ en los puntos de abscisas 0, 1, 2, 3, 4 y 5.**

$$f(x+h) = \frac{(x+h)^2}{2} + 7(x+h) = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} + 7x + 7h$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} + 7x + 7h - \left(\frac{x^2}{2} + 7x\right) = xh + \frac{h^2}{2} + 7h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{xh + \frac{h^2}{2} + 7h}{h} = x + \frac{h}{2} + 7$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(x + \frac{h}{2} + 7\right) = x + 7$$

$f'(0) = 0 + 7 = 7$ $f'(1) = 1 + 7 = 8$ $f'(2) = 9$ $f'(3) = 10$ $f'(4) = 11$ $f'(5) = 12$

Piensa y practica

1 **¿Verdadero o falso?**

a) La derivada de una función, $y = f(x)$, en $x = a$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

b) $f'(3) = 0$ significa que la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $x = 3$ es paralela al eje X.

c) Si $f'(2) > 0$, entonces f es creciente en el punto de abscisa 2.

a) Verdadero.

b) Verdadero. La pendiente de la recta tangente en $x = 3$ es cero, luego la recta es horizontal.

c) Verdadero, debido a la inclinación de la recta tangente a f en ese punto.

2 **Halla la derivada de $y = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa –2.**

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$f(-2+h) - f(-2) = \frac{1}{-2+h} + \frac{1}{2} = \frac{-2+h+2}{2(-2+h)} = \frac{h}{2h-4}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{2h-4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h-4} = -\frac{1}{4}$$

3 **Halla la derivada de $y = -2x + 4$ en los puntos de abscisas –3, 0, 4 y 7. Explica por qué obtienes en todos los casos el mismo resultado.**

- $f'(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$

  $f(-3+h) - f(-3) = -2(-3+h) + 4 - 10 = 6 - 2h - 6 = -2h$

  $f'(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

- $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$

  $f(h) - f(0) = -2h + 4 - 4 = -2h$

  $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

• $f'(4) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h}$

$f(4 + h) - f(4) = -2(4 + h) + 4 - (-4) = -8 - 2h + 8 = -2h$

$f'(4) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

• $f'(7) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(7+h) - f(7)}{h}$

$f(7 + h) - f(7) = -2(7 + h) + 4 - (-10) = -14 - 2h + 14 = -2h$

$f'(7) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

Como la función es una línea recta, crece o decrece siempre de la misma forma y al ser la derivada una forma de medir el crecimiento de una función, esta debe valer lo mismo en todos los puntos.

4 **Halla la derivada de $y = 3x^2 - 5x + 1$ en los puntos de abscisas –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.**

Calculamos la derivada de forma general y la evaluamos en cada uno de los puntos pedidos.

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f(x + h) - f(x) = 3(x + h)^2 - 5(x + h) + 1 - (3x^2 - 5x + 1) =$

$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 1 - 3x^2 + 5x - 1 = 3h^2 + 6hx - 5h$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h^2 + 6hx - 5h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (3h + 6x - 5) = 6x - 5$

$f'(-2) = -17$

$f'(-1) = -11$

$f'(0) = -5$

$f'(1) = 1$

$f'(2) = 7$

$f'(3) = 13$

$f'(4) = 19$

$f'(5) = 25$

$f'(6) = 31$

3 ▶ FUNCIÓN DERIVADA DE OTRA

C.E.: CE 3.3. (EA 3.3.1.)

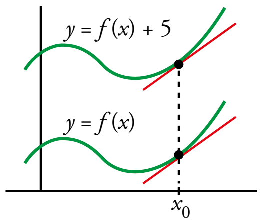
Página 322

1 **[La comprensión del enunciado propuesto sirve para trabajar la destreza comprensión escrita de esta clave].**

¿Verdadero o falso?

Las rectas tangentes en un punto cualquiera, x_0, a las gráficas de $y = f(x)$ e $y = f(x) + 5$ son paralelas.

Eso significa que las dos funciones tienen la misma función derivada.



Verdadero, porque al ser paralelas las rectas tangentes en cualquier punto, deben tener la misma pendiente en todos los puntos.

2 **Halla la derivada de $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ y, a partir de ella, calcula $f'(4)$, $f'(-1)$, $f'(1)$ y $f'(5)$.**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{3}{x+h-2} - \dfrac{3}{x-2}}{h} = 3 \cdot \frac{\dfrac{x-2-x-h+2}{(x+h-2)(x-2)}}{h} = \frac{-3}{(x+h-2)(x-2)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(x+h-2)(x-2)} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$f'(4) = \frac{-3}{4}$$

$$f'(-1) = \frac{-1}{3}$$

$$f'(1) = -3$$

$$f'(5) = \frac{-1}{3}$$

3 **Halla la función derivada de $f(x) = \sqrt{x-3}$ y calcula las pendientes de las rectas tangentes a la curva en los puntos de abscisas $x = 4$ y $x = 7$.**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h-3} - \sqrt{x-3}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h-3} - \sqrt{x-3})(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3})}{h(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3})} =$$

$$= \frac{x+h-3-(x-3)}{h(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3})} = \frac{1}{\sqrt{x-3} + \sqrt{h+x-3}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x-3} + \sqrt{h+x-3}} = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

$$f'(4) = \frac{1}{2}$$

$$f'(7) = \frac{1}{4}$$

4 **Halla la función derivada de $f(x) = x^3 + x^2$.**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3+(x+h)^2-(x^3+x^2)}{h} = \frac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3+h^2+2hx+x^2-x^3-x^2}{h} =$$

$$= \frac{3hx^2+3h^2x+h^3+h^2+2hx}{h} = 3x^2+3hx+h^2+h+2x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2+3hx+h^2+h+2x) = 3x^2+2x$$

4 ▶ REGLAS PARA OBTENER LAS DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) **CE 3.3.** (EA 3.3.1.-EA 3.3.2.)

Página 323

1 Halla las funciones derivadas de estas funciones:

a) $f(x) = x^5$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **c)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **d)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ **e)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{x^2}$

a) $f'(x^5) = 5x^4$

b) $f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = f'(x^{-2}) = -2x^{-3} = \dfrac{-2}{x^3}$

c) $f'\left(\sqrt[3]{x}\right) = f'(x^{1/3}) = \dfrac{1}{3}x^{(1/3)-1} = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $f'\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = f'(x^{2/3}) = \dfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \dfrac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

e) $f'\left(\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{x^2}\right) = f'\left(\dfrac{x^{3/2}\cdot x^{4/3}}{x^2}\right) = f'\left(x^{5/6}\right) = \dfrac{5}{6}x^{(5/6)-1} = \dfrac{5}{6\sqrt[6]{x}}$

Página 325

Hazlo tú

1 Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5x^4 - 2x^2 + 3x - 7$ **b)** $g(x) = \sqrt{5x} - \sqrt[3]{3x^4}$ **c)** $h(x) = \dfrac{3x}{x^2\sqrt[3]{x}}$

a) $f'(x) = 5\cdot 4x^3 - 2\cdot 2x + 3 = 20x^3 - 4x + 3$

b) $g(x) = \sqrt{5}\,\sqrt{x} - \sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{x^4} = \sqrt{5}\,x^{1/2} - \sqrt[3]{3}\,x^{4/3}$

$g'(x) = \sqrt{5}\cdot\dfrac{1}{2}x^{-1/2} - \sqrt[3]{3}\cdot\dfrac{4}{3}x^{1/3} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{4\sqrt[3]{3}}{3}\sqrt[3]{x}$

c) $h(x) = \dfrac{3x}{x^2\,x^{1/3}} = 3x^{-4/3}$

$h'(x) = 3\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)x^{-7/3} = -\dfrac{4}{x^{7/3}} = -\dfrac{4}{x^2\sqrt[3]{x}}$

Hazlo tú

2 Hazlo tú. Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{5^{4x}}{125}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 3}$ **c)** $h(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x}$

a) $f(x) = \dfrac{1}{125}(5^4)^x = \dfrac{1}{125}625^x$

$f'(x) = \dfrac{1}{125}625^x\,ln\,625 = \dfrac{ln\,625}{125}625^x$

b) $g'(x) = \dfrac{(2x-3)\cdot(x^2+x-3) - (x^2-3x+1)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-3)^2} = \dfrac{2x^3 - x^2 - 9x + 9 - (2x^3 - 5x^2 - x + 1)}{(x^2+x-3)^2} = \dfrac{4x^2 - 8x + 8}{(x^2+x-3)^2}$

c) $h(x) = x^2 - 5x + 2 - \dfrac{1}{x}$

$h'(x) = 2x - 5 + \dfrac{1}{x^2}$

Para practicar

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

2 $f(x) = 5x^2 + 7x - 2\sqrt{x}$

$$f'(x) = 5 \cdot 2x + 7 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 10x + 7 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3 $f(x) = \sqrt{3x^3} \cdot e^x$

$$f(x) = \sqrt{3}\,\sqrt{x^3}\,e^x = \sqrt{3}\,x^{3/2}\,e^x$$

$$f'(x) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\,e^x + x^{3/2}\,e^x\right) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\,e^x + x\sqrt{x}\,e^x\right) = \sqrt{3x}\,e^x\left(\frac{3}{2} + x\right)$$

4 $f(x) = \dfrac{e^x \cdot cos\ x}{2^{x+4}}$

$$f(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x\,cos\ x}{2^x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{(e^x\,cos\ x - e^x\,sen\ x)\,2^x - e^x\,cos\ x\ 2^x\,ln\ 2}{(2^x)^2} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x\,cos\ x - e^x\,sen\ x - e^x\,cos\ x\ ln\ 2}{2^x} =$$

$$= \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x\,(cos\ x - sen\ x - ln\ 2\ cos\ x)}{2^x}$$

5 $f(x) = x \cdot 3^x \cdot tg\ x$

$$f'(x) = 3^x \cdot tg\ x + x \cdot 3^x\,ln\ 3 \cdot tg\ x + \frac{x \cdot 3^x}{cos^2\ x}$$

6 $f(x) = \dfrac{log_2\ x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln\ 2} \cdot x - lon_2\ x \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{1}{ln\ 2} - log_2\ x}{x^2} = \frac{1 - ln\ 2\ log_2\ x}{x^2\ ln\ 2}$$

7 $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x + 3}{x^2}$

$$f(x) = 2x - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2x - 5 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x^{-2}$$

$$f'(x) = 2 + \frac{5}{x^2} + 3 \cdot (-2)\,x^{-3} = 2 + \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3}$$

8 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)\,2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

9 $f(x) = (arc\ sen\ x)(x + 3)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}(x + 3) + (arc\ sen\ x) \cdot 1 = \frac{x + 3}{\sqrt{1 - x^2}} + arc\ sen\ x$$

10 $f(x) = \dfrac{arc\ sen\ x}{cos\ x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos x - (arc\ sen\ x)(-sen\ x)}{\cos^2 x} = \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\cos x + (arc\ sen\ x)\ sen\ x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sqrt{1-x^2}\,(arc\ sen\ x)\ sen\ x}{\sqrt{1-x^2}\,\cos^2 x}$$

11 $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot 5^x}{x^3}$

$$f(x) = \frac{1}{x}5^x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}5^x + \frac{1}{x}5^x \ln 5 = 5^x\frac{x \ln 5 - 1}{x^2}$$

Página 326

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

12 $f(x) = sen\ (x^2 - 5x + 7)$

$$f'(x) = (2x - 5)\ cos\ (x^2 - 5x + 7)$$

13 $f(x) = \sqrt[3]{(5x+3)^2} = (5x+3)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(5x+3)^{-1/3} \cdot 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x+3}}$$

14 $f(x) = sen^2\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$D\left(sen^2\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \begin{cases} (\square^2)' = 2\square \\ (sen\,\square)' = cos\,\square \\ \left(3x+\frac{\pi}{2}\right)' = 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2sen\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 3 = 6sen\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$$

También, usando la fórmula del seno del ángulo doble, podríamos dar el resultado de esta otra manera:

$$f'(x) = 2sen\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 3 = 3sen\,(6x+\pi) = -3\ sen\ 6x$$

15 $f(x) = \dfrac{log\ x^2}{x}$

$$f(x) = \frac{2\log x}{x} \to f'(x) = \frac{2(1 - \ln 10 \log x)}{x^2 \ln 10}$$

16 $f(x) = cos\ (3x - \pi)$

$$f'(x) = -3\ sen\ (3x - \pi)$$

17 $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$$

18 $f(x) = x\,e^{2x+1}$

$f'(x) = e^{2x+1} + x\,e^{2x+1} \cdot 2 = e^{2x+1}(1+2x)$

19 $f(x) = \dfrac{sen\,(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}\,cos\,(x^2+1) + [x\,sen\,(x^2+1)]/\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \frac{2x\,(1-x^2)\,cos\,(x^2+1) + x\,sen\,(x^2+1)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

6 ▶ UTILIDADES DE LA FUNCIÓN DERIVADA

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) **CE 3.3.** (EA 3.3.1.)

Página 328

Hazlo tú

1 **Escribe las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva de la función $f(x) = ln\ (tg\ x)$ en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$.**

Para escribir la ecuación de una recta debemos conocer un punto y su pendiente.

Hallamos la ordenada de $x = \frac{\pi}{4}$: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = ln(1) = 0$

Punto de tangencia: $P\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

Hallamos la pendiente de la recta tangente: $m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{tg(x)} \cdot \frac{1}{(cos\,x)^2} = \frac{1}{sen\,x\,cos\,x} \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{0,5} = 2 \rightarrow y = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2x - \frac{\pi}{2}$$

Página 329

Hazlo tú

1 **Halla los puntos singulares de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$ y determina los intervalos donde crece o decrece.**

Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$

$f(1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 3 = 10 \rightarrow (-1, 10)$ es un punto singular.

$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 3 = -17 \rightarrow (2, -17)$ es otro punto singular.

Teniendo en cuenta las ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = -\infty$$

Tenemos que los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$ son intervalos de crecimiento. En el intervalo $(-1, 2)$ la función decrece.

7 OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.) CE 3.3. (EA 3.3.1.-EA 3.3.3.)

Página 331

1 Dada la función $y = x^3 - 15x^2 + 63x$, halla:

Su máximo en:

a) [2, 8] **b) [2, 9]** **c) [2, 10]**

Su mínimo en:

d) [2, 8] **e) [1, 8]** **f) [0, 8]**

Llamaremos:

$f(x) = x^3 - 15x^2 + 63x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 30x + 63 = x^2 - 10x + 21$

Veamos dónde se anula la derivada:

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100-84}}{2} \rightarrow x = 7,\ x = 3$$

a) En [2,8] tenemos dos puntos singulares en $x = 3$ y $x = 7$. Tenemos que ver qué valores toma la función en dichos puntos, además de en los extremos:

$f(2) = 74$

$f(3) = 81$

$f(7) = 49$

$f(8) = 56 \rightarrow$ Tiene un máximo en $x = 3$.

b) En [2,9] solamente nos falta estudiar la función en $x = 9$:

$f(9) = 81 \rightarrow$ Tiene un máximo en $x = 3$ y $x = 9$.

c) En [2,10] nos falta estudiar la función en $x = 10$:

$f(10) = 130 \rightarrow$ Tiene un máximo en $x = 10$.

d) El mínimo está en $x = 7$.

e) Nos falta estudiar la función en $x = 1$:

$f(1) = 49 \rightarrow$ Tiene dos mínimos en $x = 7$ y $x = 1$.

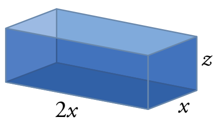
f) Nos falta estudiar la función en $x = 0$:

$f(0) = 0 \rightarrow$ El mínimo está en $x = 0$.

2 Se quiere construir una pecera de metacrilato ortoédrica abierta por arriba, cuya base es un rectángulo el doble de largo que de ancho y con capacidad de 36 dm³. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para minimizar el gasto de material?

Si el lado menor de la base está comprendido entre:

a) 1 dm y 2 dm **b) 4 dm y 6 dm** **c) Sin restricciones**



$$V = 36 = 2xxz = 2x^2 z \rightarrow z = \frac{18}{x^2}$$

$$S(x) = 2xz + 4xz + 2x^2 = 6xz + 2x^2$$

Sustituimos z en $S(x) = \frac{108}{x} + 2x^2$, donde $x > 0$.

a) $x \in [1, 2]$

Veamos los puntos singulares de la función, si pertenecen al intervalo, y qué ocurre en sus extremos:

$S'(x) = -\frac{108}{x^2} + 4x = 0 \rightarrow x = 3$ está fuera de nuestro intervalo.

$S(1) = 110$

$S(2) = 62 \rightarrow$ Tiene un mínimo en $x = 2$.

Las dimensiones serán 2 dm × 4 dm × 4,5 dm.

b) $x \in [4, 6]$

Veamos qué ocurre en los extremos:

$S(4) = 59$

$S(6) = 90 \rightarrow$ Tiene un mínimo en $x = 4$.

Las dimensiones serán 4 dm × 8 dm × 1,125 dm.

c) En este caso solamente sabemos que $x > 0$, y que en $x = 3$ hay un punto singular. Veamos si es mínimo viendo cómo se comporta la función en los extremos:

$\lim\limits_{x \to 0} S(x) = +\infty; \ \lim\limits_{x \to \infty} S(x) = +\infty \rightarrow x = 3$ es un mínimo

Las dimensiones serán 3 dm × 6 dm × 1 dm.

8 REGLA DE L'HÔPITAL

C.E.: CE 3.3. (EA 3.3.1.)

Página 332

1 **Calcula estos límites aplicando la regla de L'Hôpital:**

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - x^2 - 4x - 2}{x^2 - 4x - 5}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^4 - 4x^3 - 5x^2}$ d) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{3\, sen\, x}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{ln\,(x+1)}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x^3 - x^2 - 4x - 2)}{(x^2 - 4x - 5)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - 2x - 4}{2x - 4} = -\dfrac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - 5}{2x + 3} = \dfrac{-1}{7}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^4 - 4x^3 - 5x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 6x}{4x^3 - 12x^2 - 10x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \dfrac{6x - 6}{12x^2 - 12x - 10} = \dfrac{3}{5}$

d) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x - 4}{2x - 8} = \dfrac{6}{2} = 3$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{3\, senx} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{3\cos x} = \dfrac{0}{3} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{senx}{ln(x+1)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{\dfrac{1}{x+1}} = \lim\limits_{x \to 0} \cos x\,(x+1) = 1$

2 **Halla estos límites aplicando L'Hôpital:**

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - sen\, x}{\cos x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{tg\, 3x}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log x}{x}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{25x^3}$

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - senx}{\cos x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{-\cos x}{-senx} = \dfrac{0}{-1} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{tg\, 3x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5}{(1 + tg^2\, 3x) \cdot 3} = \dfrac{5}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log x}{x} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{ln 10}}{1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{ln 10} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{25x^3} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{75x^2} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{150x} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{150} = \dfrac{+\infty}{150} = +\infty$

3 **Calcula** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - ln\,(1+x)}{x\, ln\,(x+1)}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - ln(1+x)}{x\, ln(x+1)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \left(\dfrac{1}{1+x}\right)}{ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{(x+1)\, ln(x+1) + x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\dfrac{x+1}{x+1} + ln(x+1) + 1} = \frac{1}{2}$$

9 ▶ REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) CE 3.4. (EA 3.4.1.-EA 3.4.2.)

Página 334

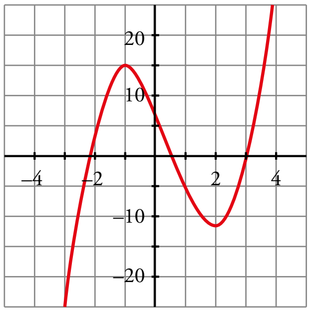
1 **Representa estas funciones:**

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ **b)** $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$ **c)** $y = x^4 + 4x^3$

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \rightarrow x_1 = -1, \; x_2 = 2$

Máximo en (–1, 15).

Mínimo en (2, –12).



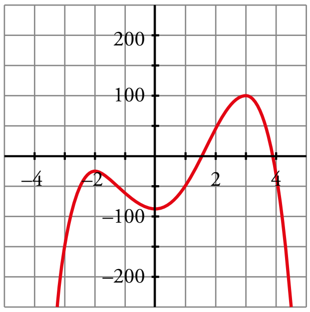
b) $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 72x = -12x(x^2 - x - 6) = 0$

$x = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Máximo en (–2, –26) y en (3, 99).

Mínimo en (0, –90).



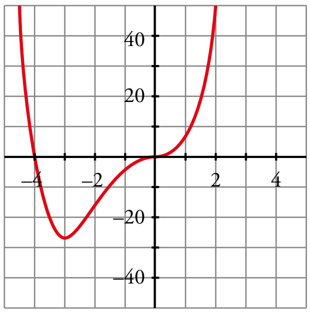
c) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

Mínimo en (–3, –27).

Punto de inflexión en (0, 0).

$f(x) = 0 \rightarrow x^3(x + 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$

Puntos de corte con los ejes: (0, 0) y (–4, 0).



Página 336

2 **Representa las siguientes funciones racionales, siguiendo los pasos de la página anterior:**

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **e)** $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

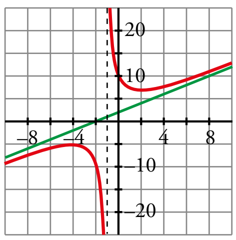
a) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+1) - (x^2 + 3x + 11)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x + 3x + 3 + 3 - x^2 - 3x - 11}{(x+1)^2} =$

$= \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x_1 = 2, \; x_2 = -4$

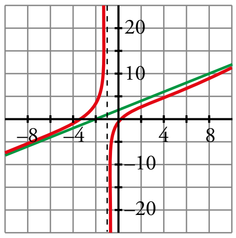
Máximo en (–4, –5). Mínimo en (2, 7).

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$



b) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+3x+3-x^2-3x}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} \neq 0$

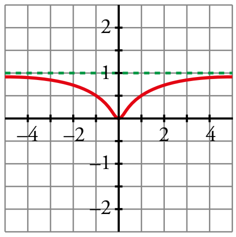


Puntos de corte con los ejes: (0, 0) y (–3, 0)

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$

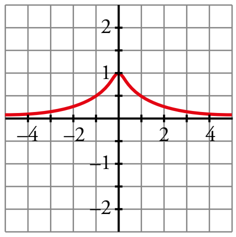
c) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow x = 0$



Mínimo en (0, 0).

Asíntota horizontal: $y = 1$

d) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow x = 0$

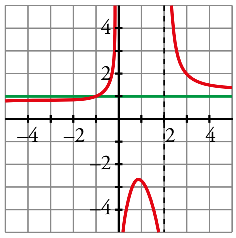


Máximo en (0, 1).

Asíntota horizontal: $y = 0$

e) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-2x)-(x^2+2)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{2x^3-4x^2-2x^3+2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} =$

$$= \frac{-2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} = 0 \rightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 0{,}73 \\ x_2 = -2{,}73 \end{cases}$$



Máximo en (0,73; –2,73).

Mínimo en (–2,73; 0,73).

Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 1$

f) • Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asíntota vertical:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \end{array}\right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

• Asíntota horizontal:

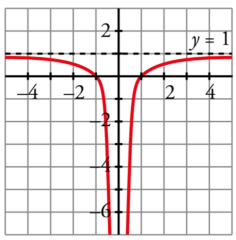
$y = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $y = 1$ es asíntota horizontal

Cuando $x \to -\infty$, $y < 1$; y cuando $x \to +\infty$, $y < 1$.

Por tanto, la curva está por debajo de la asíntota.

• Puntos singulares:

$f'(x) = \dfrac{2x\cdot x^2-(x^2-1)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{2x^3-2x^3+2x}{x^4} = \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3}$



$f'(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene puntos singulares

Observamos que $f'(x) < 0$ si $x < 0$; y que $f'(x) > 0$ si $x > 0$.

Luego la función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y es creciente en $(0, +\infty)$.

• Corta al eje X en (–1, 0) y (1, 0).

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) CE 3.3. (EA 3.3.1.)

Página 337

Hazlo tú

1. Función derivada a partir de la definición

- **Dada $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, halla $f'(x)$ aplicando la definición.**

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x+h}{x+h+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{(x+h)(x+1) - x(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{x^2 + x + hx + h - x^2 - xh - x}{(x+h+1)(x+1)} =$$

$$= \frac{h}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{(x+h+1)(x+1)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

2. Reglas de derivación

- **Halla $f'(x)$ siendo: $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$**

$$f(x) = 2\ln\frac{x+1}{x} = 2[\ln(x+1) - \ln x]$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{x+1} \cdot 1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{x(x+1)}$$

3. Ecuación de la recta tangente a una curva, que es paralela a una recta

- **Halla las tangentes a $y = x^3 - 2x^2$ paralelas a $y = -x$.**

Buscamos los valores por los que $f'(x) = -1$:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = -1 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} \rightarrow x = 1,\ x = \frac{1}{3}$$

$f(1) = -1 \rightarrow P(1, -1)$ es punto de tangencia

La primera tangente es: $y = -1(x-1) - 1 \rightarrow y = -x$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} = -\frac{5}{27} \rightarrow Q\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{27}\right)$ es punto de tangencia

La segunda tangente es:

$$y = -1\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{27} \rightarrow y = -x + \frac{4}{27}$$

Página 338

Hazlo tú

4. Tangente común a dos curvas

- **Halla la tangente común a estas curvas:**

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad g(x) = (x-2)^2$$

$f'(x) = 2x \;\rightarrow\; f'(a) = 2a$

$f(a) = a^2 - 1$

Definimos la recta tangente a f en el punto $(a, f(a))$ como:

$y = a^2 - 1 + 2a(x-a) = -a^2 - 1 + 2ax$

$g'(x) = 2(x-2) \;\rightarrow\; g(b) = 2(b-2)$

$g(b) = (b-2)^2$

Definimos la recta tangente a g en el punto $(b, g(b))$ como:

$y = (b-2)^2 + 2(b-2)(x-b) = -b^2 + 4 + (2b-4)x$

Si las dos tangentes deben ser la misma, sus coeficientes deben ser los mismos, así que:

$$\begin{cases} -a^2 - 1 = -b^2 + 4 \\ 2a = 2b - 4 \;\rightarrow\; a = b - 2 \end{cases}$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$4b - 4 - 1 = 4 \;\rightarrow\; b = \frac{9}{4} \;\rightarrow\; a = \frac{1}{4}$

Así la recta tangente a ambas será: $y = -\frac{17}{16} + \frac{x}{2}$

5. Tangentes trazadas desde un punto exterior a la curva

- **Halla las ecuaciones de las tangentes a la curva $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 3$ trazadas desde el punto $A(1, -1)$.**

Buscamos la recta tangente que pasará por un punto $P(a, f(a))$ con pendiente $f'(a)$:

$f'(x) = x - 2 \;\rightarrow\; f'(a) = a - 2$

$f(a) = \frac{a^2}{2} - 2a + 3$

La recta será: $y = f(a) + f'(a)(x-a) = \frac{a^2}{2} - 2a + 3 + (a-2)(x-a) \;\rightarrow\; y = -\frac{a^2}{2} + 3 + (a-2)x$

Además sabemos que esta recta pasa por el punto $A(1, -1)$:

$-1 = -\frac{a^2}{2} + 3 + (a-2) \;\rightarrow\; -\frac{a^2}{2} + a + 2 = 0 \;\rightarrow\; a = 1 \pm \sqrt{5}$

Tenemos dos puntos de tangencia y dos rectas, ambas pasan por A:

$P\left(1+\sqrt{5}, 4-\sqrt{5}\right)$ y recta $y = -\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{2} + 3 + x\left(-1+\sqrt{5}\right)$

$Q\left(1-\sqrt{5}, 4+\sqrt{5}\right)$ y recta $y = -\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}{2} + 3 + x\left(-1-\sqrt{5}\right)$

6. Coeficientes de una función

- **Calcula los coeficientes a, b, c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ para que pase por (0, 5) y tenga un punto singular en (2, –3).**

Pasa por (0, 5) $\rightarrow f(0) = c = 5$

Pasa también por su punto singular (2, –3) $\rightarrow f(2) = 8a + 2b + 5 = -3$ (1)

Además si es punto singular, en $x = 2$ se anula la derivada de f:

$f'(x) = 3ax^2 + b \rightarrow f'(2) = 12a + b = 0 \rightarrow b = -12a$

Sustituimos en (1): $-16a = -8 \rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow b = -6$

La solución buscada es $y = \frac{1}{2}x^3 - 6x + 5$

Página 339

Hazlo tú

7. Puntos singulares. Intervalos de crecimiento y decrecimiento

- **a) Halla los puntos singulares de la función:**

$$f(x) = x^3 - 12x - 8$$

b) Escribe sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = \pm 2$ tenemos dos puntos singulares:

$P(2, -24)$

$Q(-2, 8)$

Estudiemos sus ramas infinitas para ver si se trata de mínimos o de máximos:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Por tanto: P es mínimo, Q es máximo.

b) Para ello debemos estudiar el signo de su derivada:

Si $x < -2 \rightarrow f'(x) > 0$

Si $-2 < x < 2 \rightarrow f'(x) < 0$

Si $2 < x \rightarrow f'(x) > 0$

Por tanto:

f decrece en (–2, 2) y crece en (–∞, –2) y (2, +∞).

8. Problema de optimización

- **De todos los rectángulos de 36 m de perímetro, halla las dimensiones del que tiene la mayor superficie.**

Llamamos b y h a la base y a la altura del rectángulo, respectivamente.

Como el perímetro es 36, se tiene que $2b + 2\text{h} = 36 \rightarrow \text{h} = 18 - b$

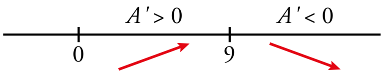
Buscamos el rectángulo de área máxima:

$A = b\text{h} = b(18 - b)$

Hallamos los puntos singulares:

$A' = 0 \rightarrow A' = 18 - 2b = 0 \rightarrow b = 9$

Estudiamos si el valor obtenido es un máximo:



Por tanto, para $b = 9$ el área es máxima.

Calculamos h: $h = 18 - 9 = 9$ y obtenemos el área máxima $A = 81\ m^2$.

Página 340

Hazlo tú

9. Estudio y representación de una función polinómica

- **Estudia y representa esta función:**

$$\boldsymbol{f(x) = 1 + (x - 3)^3}$$

Por ser una función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.

- Ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} [1 + (x - 3)^3] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [1 + (x - 3)^3] = -\infty$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 3(x - 3)^2$

$f'(x) = 0 \ \to \ 3(x - 3)^2 = 0 \ \to \ x = 3$

Como $f(3) = 1$, el punto $(3, 1)$ es el único punto singular.

- Crecimiento y decrecimiento:

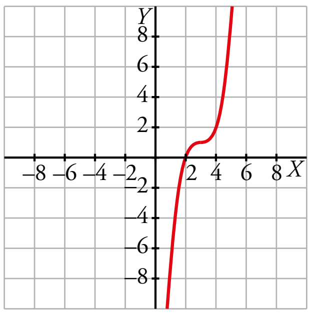
Como $f'(x) = 3(x - 3)^2 > 0$ para todo $x \neq 3$, la función crece a ambos lados de $x = 3$ y no es ni máximo ni mínimo.

- Cortes con los ejes:

$x = 0 \ \to \ y = -26$

$y = 0 \ \to \ 1 + (x - 3)^3 = 0 \ \to \ (x - 3)^3 = -1 \ \to \ x = 2$

- Gráfica:



10. Estudio y representación de una función racional

- **Estudia y representa esta función:**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^2 + 8}{x}}$$

La función no está definida en $x = 0 \ \to \ Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

- Asíntota vertical: $x = 0$

  Posición:

  Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$

  Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

- Asíntotas horizontales y oblicuas:

  Como el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, tiene una asíntota oblicua. Dividimos:

  $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x} \to$ La asíntota es $y = 2x$

  Posición:

  Si $x \to -\infty$, $f(x) - y = \dfrac{8}{x} < 0$. Curva bajo la asíntota.

  Si $x \to +\infty$, $f(x) - y = \dfrac{8}{x} > 0$. Curva sobre la asíntota.

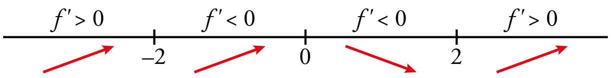
- Puntos singulares:

  $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$

  $f'(x) = 0 \to \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \to 2x^2 - 8 = 0 \to x = -2, \; x = 2$

  $f(-2) = -8$, $f(2) = 8$. Por tanto, $(-2, -8)$ y $(2, 8)$ son los puntos singulares.

- Crecimiento y decrecimiento:



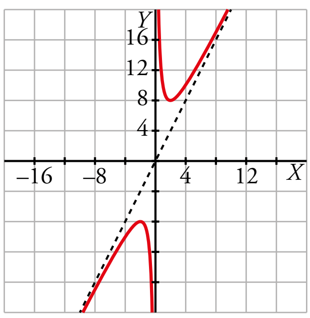
- Cortes con los ejes:

  No corta al eje OY.

  $y = 0 \to \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \to 2x^2 + 8 = 0$ No tiene solución (no corta al eje OX).

- Gráfica:

  $y = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$



Página 341

Hazlo tú

11. Función derivada de funciones definidas «a trozos»

- **Halla la función derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - 1 & \text{si } x < 4 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

a) Llamamos $f_1(x) = \dfrac{x^2}{4} - 1$ y $f_2(x) = 2x - 5$

Ambas funciones son continuas.

$\left.\begin{array}{l} f_1(4) = \dfrac{4^2}{4} - 1 = 3 \\ f_2(4) = 2 \cdot 4 - 5 = 3 \end{array}\right\}$ Como ambas coinciden, la función es continua en $x = 4$.

$\left.\begin{array}{l} f'_1(x) = \dfrac{x}{2} \to f'_1(4) = 2 \\ f'_2(x) = 2 \to f'_2(4) = 2 \end{array}\right\}$ Como coinciden, la función es derivable en $x = 4$ y $f'(4) = 2$.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x < 4 \\ 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

b) Llamamos $g_1(x) = 3 - x$ y $g_2(x) = x^2 + 3$

Ambas funciones son continuas.

$\left.\begin{array}{l} g_1(-1) = 3 - (-1) = 4 \\ g_2(-1) = (-1)^2 + 3 = 4 \end{array}\right\}$ Como ambas coinciden, la función es continua en $x = -1$.

$\left.\begin{array}{l} g'_1(x) = -1 \to g'_1(-1) = -1 \\ g'_2(x) = 2x \to g'_2(-1) = -2 \end{array}\right\}$ Como son distintas, la función no es derivable en $x = -1$.

La función derivada es $g'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Página 342

Hazlo tú

12. Parámetros para que una función sea continua y derivable

- **Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en el punto que se indica:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x \le 2 \\ 4x - b & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{en } x = 2$$

Llamamos $f_1(x) = ax^2 + 1$ y $f_2(x) = 4x - b$.

Ambas funciones son continuas.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, se debe cumplir que $f_1(2) = f_2(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = 4a + 1 \\ f_2(2) = 8 - b \end{array}\right\} \text{ Por tanto: } 4a + 1 = 8 - b$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 2$, se debe cumplir que $f'_1(2) = f'_2(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'_1(x) = 2ax \rightarrow f'_1(2) = 4a \\ f'_2(x) = 4 \rightarrow f'_2(2) = 4 \end{array}\right\} \text{ Luego } 4a = 4$$

Resolvemos el sistema resultante:

$$\left.\begin{array}{r} 4a + 1 = 8 - b \\ 4a = 4 \end{array}\right\} \rightarrow a = 1,\ b = 3$$

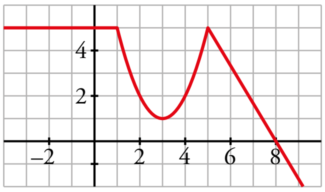
EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 3.3. (EA 3.3.2.)

Página 343

1. Derivadas sobre la gráfica

- **Observando la gráfica de esta función $y = f(x)$:**



a) Hallar el valor de $f'(-2)$, $f'(3)$, $f'(6)$.

b) ¿Para qué valores de x es $f'(x) < 0$?

a) $f'(-2) = 0$ porque es constante en las proximidades de $x = -2$.

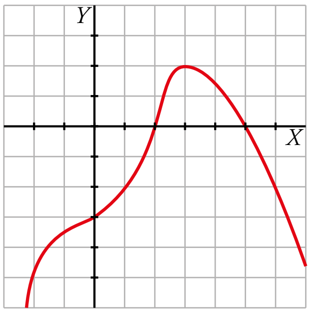
$f'(3) = 0$ porque en $x = 3$ hay un mínimo.

$f'(6) = -\frac{5}{3}$ porque la gráfica es la recta $y = \frac{-5x + 40}{3}$ con pendiente $-\frac{5}{3}$.

b) $f'(x) < 0$ en $(1, 3) \cup (5, +\infty)$ porque la función es decreciente en estos intervalos.

2. Función polinómica

- **Representar una función polinómica sabiendo que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$, que sus puntos de tangente horizontal son $(0, -3)$ y $(3, 2)$, y que corta al eje X solo en $x = 2$ y en $x = 5$.**



3. Producto máximo

- **De todos los pares de números mayores que 0 cuya suma es igual a 12, hallar aquel cuyo producto del cuadrado del mayor por el menor es máximo.**

Buscamos dos números x e y que cumplen:

$x = 2a$, $y = 2t$

donde $t > a > 0$; $a, t \in \mathbb{N}$

Además: $x + y = 12 \to 2a + 2t = 12 \to x = 6 - t$

Definimos la función: $f(t) = (2t)^2\, 2(6 - t) = 48t^2 - 8t^3$

Buscamos sus puntos singulares:

$f'(t) = -24t^2 + 96t = 0 \;\rightarrow\; t = 0;\; t = \dfrac{96}{24} = 4$

Descartamos la primera solución ya que por el enunciado sabemos que ninguno de los dos números puede ser 0, por lo que tenemos el punto singular (4, 256) de $f(t)$.

Si $t \in (0, 4) \rightarrow f' > 0 \rightarrow f$ creciente

Si $t > 4 \rightarrow f' < 0 \rightarrow f$ decreciente

Por lo que hemos encontrado un máximo. Por tanto, los números son:

$$x = 2a = 4$$

$$y = 2t = 8$$

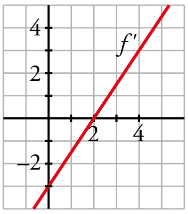
4. Gráfica de la función derivada

- **Esta es la gráfica de f', función derivada de f.**

a) Obtener $f'(0)$, $f'(2)$ y $f'(4)$.

b) ¿Tiene f algún punto singular?

c) Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de f.



a) $f'(0) = -3 \quad f'(2) = 0 \quad f'(4) = 3$

b) En $x = 2$ se anula la derivada primera. Además, esta es negativa a la izquierda de 2 y positiva a la derecha. Por tanto, la función pasa de decreciente a creciente en $x = 2$ y este punto es un mínimo.

c) La función decrece en $(-\infty, 2)$ y crece en $(2, +\infty)$.

5. Regla de la cadena

- **Si $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$, $g(2) = 3$, $g'(2) = 1$, ¿cuál es la ecuación de la tangente a $y = g[f(x)]$ en $x = 1$?**

$g[f(1)] = g(2) = 3$

$D\,[g[f(1)]] = g'[f(1)] \cdot f'(1) = g'(2) \cdot f'(1) = 1 \cdot (-1) = -1$

La ecuación de la recta tangente es $y = -1(x - 1) + 3$, es decir, $y = -x + 4$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 344

Para practicar

Tasa de variación media. Definición de derivada

1 **Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo [1, 3] e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:**

a) $f(x) = 1/x$ **b)** $f(x) = (2-x)^3$ **c)** $f(x) = x^2 - x + 1$ **d)** $f(x) = 2^x$

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{f(3)-f(1)}{2}$$

a) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \dfrac{1/3-1}{2} = -\dfrac{1}{3} \to$ Decrece

b) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \dfrac{-1-1}{2} = -1 \to$ Decrece

c) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \dfrac{7-1}{2} = 3 \to$ Crece

d) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \dfrac{8-2}{2} = 3 \to$ Crece

2 **a) Halla la T.V.M. de las funciones $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en el intervalo [1, 1 + h].**

b) Calcula la T.V.M. de esas funciones en el intervalo [1; 1,5] utilizando las expresiones obtenidas en el apartado anterior.

a) Para la función $f(x)$:

$$\text{T.V.M. } [1, 1+h] = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{-(1+h)^2+5(1+h)-3-1}{h} = \frac{-1-2h-h^2+5+5h-4}{h} = 3-h$$

Para la función $g(x)$:

$$\text{T.V.M. } [1, 1+h] = \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \frac{\dfrac{1}{1+h+1}-\dfrac{1}{2}}{h} = \frac{\dfrac{2-h-2}{2(2+h)}}{h} = \frac{-1}{2h+4}$$

b) Para la función $f(x)$:

$\text{T.V.M. } [1; 1{,}5] = 3 - 0{,}5 = 2{,}5$

Para la función $g(x)$:

$$\text{T.V.M. } [1; 1{,}5] = \frac{-1}{2\cdot 0{,}5+4} = \frac{-1}{5}$$

3 **a) Compara la T.V.M. de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ en los intervalos [2, 3] y [3, 4], y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.**

b) Calcula el crecimiento en el punto $x = -1$ de f y de g.

a) Para $f(x)$: T.V.M. [2, 3] = 19

T.V.M. [3, 4] = 37

Para $g(x)$: T.V.M. [2, 3] = 18

T.V.M. [3, 4] = 54

b) En [2, 3] crece más $f(x)$.

En [3, 4] crece más $g(x)$.

4 **Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba y su posición viene dada por la función $s(t) = 30t - 5t^2$, donde $s(t)$ es la distancia al suelo en metros y t el tiempo en segundos. Calcula.**

a) La velocidad media entre $t = 0$ y $t = 3$.

b) La velocidad instantánea en $t = 2$ y en $t = 3$.

a) $\dfrac{s(3) - s(0)}{3 - 0} = \dfrac{45}{3} = 15$ m/s

b) $s'(x) = 30 - 10t$

$s'(2) = 10$ m/s es la velocidad instantánea en $t = 2$

$s'(3) = 0$ m/s es la velocidad instantánea en $t = 3$

5 **Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$, utilizando la definición de derivada:**

a) $f(x) = 3x^2 - 1$ b) $f(x) = (2x + 1)^2$ c) $f(x) = 3/x$ d) $f(x) = 1/(x + 2)^2$

a) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(1+h)^2 - 1 - 2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(1+h^2+2h) - 3}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3 + 3h^2 + 6h - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(3h+6)}{h} = 6$

b) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2(1+h)+1)^2 - 9}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2h+3)^2 - 9}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4h^2 + 9 + 12h - 9}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(4h+12)}{h} = 12$

c) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3/(1+h) - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3 - 3 - 3h}{h(1+h)} = -3$

d) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(1+h+2)^2} - \dfrac{1}{9}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{9 - h^2 - 6h - 9}{9(h+3)^2}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h^2 - 6h}{9h(h+3)^2} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h-6}{9(h+3)^2} = \dfrac{-2}{27}$

6 **Aplica la definición de derivada para hallar la pendiente de las rectas tangentes a las curvas $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{3x - 7}$ en $x = 2$.**

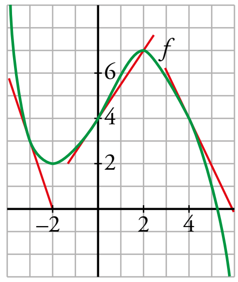
- $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{4(2+h) - (2+h)^2 - 4}{h} = \dfrac{8 + 4h - 4 - 4h - h^2 - 4}{h} = -h$

$f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (-h) = 0$

- $\dfrac{g(2+h) - g(2)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{3(2+h) - 7} - (-1)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{3h - 1} + 1}{h} = \dfrac{3}{3h - 1}$

$g'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3}{3h - 1} = -3$

7 **Observa la gráfica de f en la que se han trazado las tangentes en $x = -3$, $x = 0$ y $x = 4$ y responde.**



a) ¿Cuál es el valor de $f'(-3)$, $f'(0)$ y $f'(4)$?

b) ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?

c) En $x = 1$, ¿la derivada es positiva o negativa? ¿Y en $x = 3$?

a) $f'(-3) = -3$ $\qquad f'(0) = \dfrac{3}{2}$ $\qquad f'(4) = -2$

b) En $x = -2$ y $x = 2$.

c) En $x = 1$ la derivada es positiva porque la pendiente de la tangente lo es. Análogamente, la derivada en $x = 3$ es negativa.

8 **Halla la función derivada de las siguientes funciones, aplicando la definición:**

a) $f(x) = \dfrac{(5x-3)}{2}$ $\qquad$ **b)** $f(x) = x^2 + 7x - 1$

c) $f(x) = x^3 - 5x$ $\qquad$ **d)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

a) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{5(x+h)-3}{2} - \dfrac{5x-3}{2}}{h} = \frac{5x+5h-3-5x+3}{2h} = \frac{5}{2}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

b) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2+7(x+h)-1-(x^2+7x-1)}{h} = \frac{x^2+2hx+h^2+7x+7h-1-x^2-7x+1}{h} =$$

$$= 2x + h + 7$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h + 7) = 2x + 7$$

c) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3-5(x+h)-(x^3-5x)}{h} = \frac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3-5x-5h-x^3+5x}{h} =$$

$$= 3x^2 + 3hx + h^2 - 5$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2 - 5) = 3x^2 - 5$$

d) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{x+h-1}{x+h} - \dfrac{x-1}{x}}{h} = \frac{x(x+h-1)-(x+h)(x-1)}{hx(x+h)} = \frac{x^2+hx-x-(x^2-x+hx-h)}{hx(x+h)} =$$

$$= \frac{1}{x(h+x)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x(h+x)} = \frac{1}{x^2}$$

Reglas de derivación

9 **Halla la función derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 7x^2 - 4x$

b) $f(x) = 3\cos(2x + \pi)$

c) $f(x) = \frac{1}{3x} + \sqrt{x}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

e) $f(x) = \frac{1}{7x+1} + \frac{\sqrt{2x}}{3}$

f) $f(x) = x\, sen\, \frac{x}{2}$

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$

h) $f(x) = \ln 3x + e^{-x}$

i) $f(x) = \frac{tg\, x}{2}$

j) $f(x) = \sqrt{3}\, arc\, sen\, 2x$

a) $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x - 4 = x^2 + 14x - 4$

b) $f(x) = -3\cos 2x$

$f'(x) = -3(-sen\, 2x) \cdot 2 = 6 sen\, 2x$

c) $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

e) Teniendo en cuenta que $\frac{\sqrt{2x}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{x}$:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (7x+1) - 1 \cdot 7}{(7x+1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-7}{(7x+1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{x}}$$

f) $f'(x) = 1 \cdot sen\, \frac{x}{2} + x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = sen\, \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

g) $f(x) = (x-4)^{-1/2}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^{-3/2} = -\frac{1}{2(x-4)\sqrt{x-4}}$$

h) $f(x) = \ln 3 + \ln x + e^{-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + e^{-x}(-1) = \frac{1}{x} - e^{-x}$$

i) $f'(x) = \frac{1 + tg^2\, x}{2}$ o también $f'(x) = \frac{1}{2\cos^2 x}$

j) $f'(x) = \sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1-4x^2}}$

10 Aplica las reglas de derivación y simplifica si es posible.

a) $f(x) = (5x - a)^3$

b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{3x} + \dfrac{x}{a}\right)^4$

c) $f(x) = \sqrt[3]{(6-x)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-4}}$

f) $f(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{2x+1}$

g) $f(x) = x^3 \cos^2 3x$

h) $f(x) = tg^3\, x^2$

i) $f(x) = \sqrt{7 \cdot \ln x}$

j) $f(x) = arc\ tg\ \dfrac{x^2}{3}$

a) $f'(x) = 3(5x-2)^2 \cdot 5 = 15(5x-2)^2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{81}\left(\dfrac{1}{x} + x\right)^4$

$$f'(x) = \frac{4}{81}\left(\frac{1}{x}+x\right)^3\left(-\frac{1}{x^2}+1\right) = \frac{4}{81}\left(\frac{1+x^2}{x}\right)^3\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = \frac{4}{81}\,\frac{(x^4-1)(x^2+1)^2}{x^5}$$

c) $f(x) = (6-x)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(6-x)^{-1/3}(-1) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{6-x}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{6-x}}$$

d) $f(x) = \dfrac{e^x(1+e^{-2x})}{e^x} = 1 + e^{-2x}$

$f'(x) = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}$

e) $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-4}}}\cdot\frac{3x^2(x^2-4)-x^3\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^3}}\;\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}\;\frac{x(x^3-12x)}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}\cdot\frac{x^3-12x}{(x^2-4)^2}$$

f) $$f'(x) = \frac{3x^2}{8}e^{2x+1} + \frac{x^3}{8}e^{2x+1}\cdot 2 = \frac{e^{2x+1}}{8}(2x^3+3x^2)$$

g) $f'(x) = 3x^2\cos^2 3x + x^3 \cdot 2\cos 3x \cdot (-sen\, 3x)\cdot 3 = 3x^2[\cos^2 3x - 2x \cos 3x\ sen\, 3x] = 3x^2[\cos^2 3x - x\ sen\, 6x]$

h) $f'(x) = 3tg^2\, x^2 \cdot (1 + tg^2\, x^2)\cdot 2x = 6x\, tg^2\, x^2 \cdot (1 + tg^2\, x^2)$

i) $f(x) = \sqrt{7}\sqrt{\ln x}$

$$f'(x) = \sqrt{7}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{7}}{2x\sqrt{\ln x}}$$

j) $$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{3}\right)^2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{9}{x^2+9}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{x^2+9}$$

11 **Deriva las siguientes funciones:**

a) $f(t) = \sqrt{t} \cdot \left(\dfrac{3t+5}{32}\right)$

b) $f(t) = \dfrac{3t^2+2t}{1-t}$

c) $f(t) = \dfrac{t}{\ln t} + (\ln t)^2$

d) $f(t) = \sqrt{e^{3t-2}}$

e) $f(t) = \sqrt[3]{\dfrac{t^2+1}{2t}}$

f) $f(t) = \cos\left(\dfrac{3t+\pi}{2}\right) + tg^2\, t$

a) $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\left(\dfrac{3t+5}{32}\right) + \sqrt{t}\left(\dfrac{3}{32}\right) = \dfrac{3t+5}{64\sqrt{t}} + \dfrac{3\sqrt{t}}{32} = \dfrac{9t+5}{64\sqrt{t}}$

b) $f'(t) = \dfrac{(6t+2)(1-t)-(3t^2+2t)(-1)}{(1-t)^2} = \dfrac{-3t^2+6t+2}{(1-t)^2}$

c) $f'(t) = \dfrac{\ln t - t/t}{(\ln t)^2} + 2\ln t\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{1}{\ln t} - \dfrac{1}{(\ln t)^2} + \dfrac{2\ln t}{t}$

d) $f'(t) = \dfrac{3}{2}e^{3t-2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{e^{3t-2}}} = \dfrac{3\sqrt{e^{3t-2}}}{2}$

e) $f'(t) = \dfrac{1}{3\left(\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{x}\right)\right)^{\frac{2}{3}}} \cdot \dfrac{(2t^2)^2 - 2t^2 - 2}{4t^2} = \dfrac{t^2-1}{2t^2\, 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{t^2-1}{3\sqrt[3]{2}\,t^2\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^{\frac{2}{3}}}$

f) $f'(t) = -\dfrac{3}{2}sen\left(\dfrac{(3t+\pi)}{2}\right) + \dfrac{2tg\, t}{\cos^2 t} = -\dfrac{3}{2}\left(sen\left(\dfrac{3t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{3t}{2}\right)sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) + \dfrac{2tg\, t}{\cos^2 t} =$

$= -\dfrac{3}{2}\cos\left(\dfrac{3t}{2}\right) + \dfrac{2tg\, t}{\cos^2 t}$

12 **Deriva las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \sqrt{arc\cos e^x}$

b) $f(x) = \log(sen\, x^2)$

c) $f(x) = sen^2\, x + e^{\cos x}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{2x}}{2^{x-1}}$

e) $f(x) = e^{sen\, x} \cdot \ln tg\, x$

f) $f(x) = 3\cos(\ln x)$

g) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$

h) $f(x) = arc\, tg\, \dfrac{1-x}{1+x}$

i) $f(x) = 7^{\sqrt{x}} + \dfrac{\cos x}{x^2}$

j) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{arc\cos e^x}} \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot e^x = \dfrac{-e^x}{2\sqrt{arc\cos e^x\,(1-e^{2x})}}$

b) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}} = \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^{1/2} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x}{x^2+1}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{\dfrac{x}{x^2+1}} \cdot \dfrac{1(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{x^2+1}{x}\,\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{2x(x^2+1)}$

c) $f'(x) = 2sen\, x\cos x + e^{\cos x}(-sen\, x) = sen\, 2x - sen\, x \cdot e^{\cos x}$

d) $f(x) = \sqrt[4]{2} \cdot \dfrac{x^{1/4}}{2^{x-1}}$

$$f'(x) = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\frac{1}{4} \cdot x^{-3/4} \cdot 2^{x-1} - x^{1/4} \cdot 2^{x-1} \cdot \ln 2 \cdot 1}{(2^{x-1})^2} = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \ln 2 \sqrt[4]{x}}{2^{x-1}} = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{1 - 4x \ln 2}{2^{x+1} \cdot \sqrt[4]{x^3}}$$

e) $f'(x) = e^{sen\, x} \cdot \cos x \cdot \ln tg\, x + e^{sen\, x} \cdot \dfrac{1}{tg\, x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = e^{sen\, x} \left(\cos x \cdot \ln tg\, x + \dfrac{1}{sen\, x \cos x} \right)$

f) $f'(x) = 3\,[-sen\,(\ln x)] \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{-3\, sen\,(\ln x)}{x}$

g) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x}}$

h) $f'(x) = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2} \dfrac{-1\,(1+x) - (1-x)\,1}{(1+x)^2} = \dfrac{(1+x)^2}{(1+x)^2 + (1-x)^2} \dfrac{-2}{(x+1)^2} = \dfrac{-2}{2 + 2x^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}$

i) $f'(x) = 7^{\sqrt{x}} \cdot \ln 7 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{-sen\, x \cdot x^2 - \cos x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{\ln 7 \cdot 7^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{x\, sen\, x + 2 \cos x}{x^3}$

j) $f(x) = \dfrac{e^x (1 - e^{-2x})}{e^x (1 + e^{-2x})} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

$$f'(x) = \frac{-e^{-2x}(-2)(1 + e^{-2x}) - (1 - e^{-2x})\, e^{-2x}(-2)}{(1 + e^{-2x})^2} = \frac{2e^{-2x}(1 + e^{-2x}) + 2e^{-2x}(1 - e^{-2x})}{(1 + e^{-2x})^2} = \frac{4e^{-2x}}{(1 + e^{-2x})^2}$$

13 **Aplica las propiedades de los logaritmos antes de aplicar las reglas de derivación, para obtener la derivada de estas funciones:**

a) $f(x) = \ln \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ **b)** $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{x}{x^2 + 1}}$ **c)** $f(x) = \ln (x \cdot e^{-x})$

d) $f(x) = \log \dfrac{(3x - 5)^3}{x}$ **e)** $f(x) = \log (tg\, x)^2$ **f)** $f(x) = \log \dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$

a) $f(x) = \ln (x^2 + 1) - \ln (x^2 - 1)$

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1} - \dfrac{2x}{x^2 - 1} = \dfrac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{x^4 - 1} = \dfrac{-4x}{x^4 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}[\ln x - \ln (x^2 + 1)]$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{x^2 + 1}\right] = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^2 + 1 - 2x^2}{x^3 + x}\right] = \dfrac{1 - x^2}{2x^3 + 2x}$

c) $f(x) = \ln x + \ln e^{-x} = \ln x - x$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1 - x}{x}$

d) $f(x) = 3 \log (3x - 5) - \log x$

$f'(x) = 3 \cdot \dfrac{3}{3x - 5} \cdot \dfrac{1}{\ln 10} - \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln 10} = \dfrac{1}{\ln 10}\left[\dfrac{9}{3x - 5} - \dfrac{1}{x}\right] =$

$= \dfrac{1}{\ln 10} \cdot \dfrac{9x - 3x + 5}{(3x^2 - 5x)} = \dfrac{6x + 5}{\ln 10\,(3x^2 - 5x)}$

e) $f(x) = 2\ log\ (tg\ x)$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1 + tg^2\ x}{tg\ x} \cdot \frac{1}{ln\ 10} = \frac{2\,(1 + tg^2\ x)}{tg\ x \cdot ln\ 10}$$

f) $f(x) = -\frac{x}{2} log(e)$

$$f'(x) = -\frac{log(e)}{2}$$

Página 345

Recta tangente y recta normal

14 **Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función f en el punto de abscisa indicado en cada caso.**

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ **en** $x = 2$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ **en** $x = 3$

c) $f(x) = \frac{2-x}{x^3}$ **en** $x = -1$

d) $f(x) = ln\ x$ **en** $x = e^2$

e) $f(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **en** $x = \frac{\pi}{3}$

a) $f'(x) = 2x - 5$

$f(2) = 0$

$f'(2) = -1$

La recta tangente es $y = -1(x - 2) + 0$, es decir, $y = -x + 2$

La recta normal es $y = \frac{-1}{-1}(x-2)+0$, es decir, $y = x - 2$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$f(3) = 2$

$f'(3) = \frac{1}{4}$

La recta tangente es $y = \frac{1}{4}(x - 3) + 2$, es decir, $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

La recta normal es $y = \frac{-1}{1/4}(x-3)+2$, es decir, $y = -4x + 14$

c) $f'(x) = \frac{-1 \cdot x^3 - (2-x) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{2x-6}{x^4}$

$f(-1) = -3$

$f'(-1) = -8$

La recta tangente es $y = -8(x + 1) - 3$, es decir, $y = -8x - 11$

La recta normal es $y = \frac{-1}{-8}(x + 1) - 3$, es decir, $y = \frac{1}{8}x - \frac{23}{8}$

d) $f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(e^2) = 2$

$f'(e^2) = \frac{1}{e^2}$

La recta tangente es $y = \frac{1}{e^2}(x - e^2) + 2$, es decir, $y = \frac{1}{e^2}x + 1$

La recta normal es $y = \frac{-1}{1/e^2}(x - e^2) + 2$, es decir, $y = -e^2x + e^4 - 2$

e) $f'(x) = cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

La recta tangente es $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$

La recta normal es $y=\frac{-1}{-\sqrt{3}/2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$, es decir, $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$

15 Comprobamos. **[El alumnado puede compartir sus soluciones tal y como indica esta técnica].**

Determina los puntos en los que la pendiente de la recta tangente a cada una de las siguientes funciones es igual a 2:

a) $y = x^2 - 2x$ **b)** $y = \frac{x}{x+2}$ **c)** $y = 4\sqrt{x+3}$ **d)** $y = ln\,(4x-1)$

a) $f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 2 \rightarrow 2x - 2 = 2 \rightarrow x = 2$

b) $f'(x) = \frac{1\cdot(x+2)-x\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}$

$f'(x) = 2 \rightarrow \frac{2}{(x+2)^2} = 2 \rightarrow (x+2)^2 = 1 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3$

c) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+3}}$

$f'(x) = 2 \rightarrow \frac{2}{\sqrt{x+3}} = 2 \rightarrow \sqrt{x+3} = 1 \rightarrow x = -2$

d) $f'(x) = \frac{4}{4x-1}$

$f'(x) = 2 \rightarrow \frac{4}{4x-1} = 2 \rightarrow 4x - 1 = 2 \rightarrow x = \frac{3}{4}$

16 **Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta tangente a f, que sea paralela a la recta dada.**

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ **paralela a** $2x + y + 1 = 0$

b) $f(x) = x^3 - 3x$ **paralela a** $y = 6x + 10$

c) $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ **paralela a** $5x - y = 0$

a) $2x + y + 1 = 0 \rightarrow y = -2x - 1$

Por tanto, la recta tangente debe tener pendiente –2 para que sea paralela.

$f'(x) = 2x + 4$

$f'(x) = -2 \rightarrow 2x + 4 = -2 \rightarrow x = -3$

$f(-3) = -2$ y la recta tangente es $y = -2(x+3) - 2$.

b) La recta tangente debe tener pendiente 6 para que sea paralela.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 6 \rightarrow 3x^2 - 3 = 6 \rightarrow x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3}$

Si $x = -\sqrt{3} \to f(-\sqrt{3}) = 0$

La recta tangente en $x = -\sqrt{3}$ es $y = 6(x + \sqrt{3})$

Si $x = \sqrt{3} \to f(\sqrt{3}) = 0$

La recta tangente en $x = \sqrt{3}$ es $y = 6(x - \sqrt{3})$

c) $5x - y = 0 \to y = 5x$

Por tanto, la recta tangente debe tener pendiente 5 para que sea paralela.

$$f'(x) = \frac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 5 \to \frac{5}{(x+2)^2} = 5 \to (x+2)^2 = 1 \to x_1 = -1,\ x_2 = -3$$

Si $x = -1 \to f(-1) = -4$

La recta tangente en $x = -1$ es $y = 5(x + 1) - 4$

Si $x = -3 \to f(-3) = 6$

La recta tangente en $x = -3$ es $y = 5(x + 3) + 6$

17 Obtén los puntos donde la recta tangente es horizontal y escribe su ecuación.

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$ **b)** $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ **c)** $y = x^4 - 4x^3$

d) $y = x^3 - 12x$ **e)** $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ **f)** $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

Los puntos donde la recta tangente es horizontal son aquellos en los que $f'(x) = 0$.

a) $f'(x) = 6x - 2$

$$f'(x) = 0 \to 6x - 2 = 0 \to x = \frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} + 5 = \frac{14}{3}$$

La ecuación de la recta tangente es $y = \dfrac{14}{3}$

b) $f'(x) = 6x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \to 6x^2 - 6x = 0 \to x = 0,\ x = 1$

$f(0) = 0 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

$f(1) = 0 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = 0$.

c) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 0 \to 4x^3 - 12x^2 = 0 \to x = 0,\ x = 3$

$f(0) = 0 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

$f(3) = -27 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 3$ es $y = -27$.

d) $f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 12 = 0 \to x = -2,\ x = 2$

$f(-2) = 16 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = -2$ es $y = 16$.

$f(2) = -16 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y = -16$.

e) $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \to \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \to x^2 - 1 = 0 \to x = -1,\ x = 1$$

$f(-1) = 1 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = -1$ es $y = -2$.

$f(1) = 1 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = 2$.

f) $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

$f(0) = 0 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

18 Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a la función $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.

Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen haciendo $y = 0$.

$y = 0 \rightarrow 4 - x^2 = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 2$

$f'(x) = -2x$

Si $x = -2 \rightarrow f'(-2) = 4$. La recta tangente en $x = -2$ es $y = 4(x + 2)$

Si $x = 2 \rightarrow f'(2) = -4$. La recta tangente en $x = 2$ es $y = -4(x - 2)$

Las rectas normales son: en $x = -2$, $y = -\dfrac{1}{4}(x + 2)$ y en $x = 2$, $y = \dfrac{1}{4}(x - 2)$

Puntos singulares: crecimiento y decrecimiento

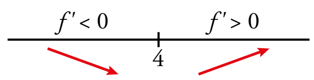
19 Halla, en cada caso, los puntos singulares de la función y determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

a) $f(x) = x^2 - 8x + 3$ **b)** $f(x) = 12x - 3x^2$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2$

d) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

a) $f'(x) = 2x - 8$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 4$

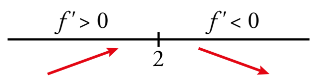


Como $f(4) = -5$, el punto $(4, -5)$ es un punto singular.

Intervalo de crecimiento $(4, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento $(-\infty, 4)$.

b) $f'(x) = 12 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 12 - 6x = 0 \rightarrow x = 2$



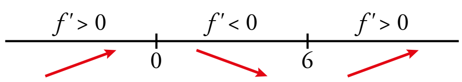
Como $f(2) = 12$, el punto $(2, 12)$ es un punto singular.

Intervalo de crecimiento $(-\infty, 2)$. Intervalo de decrecimiento $(2, +\infty)$.

c) $f'(x) = x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 6$

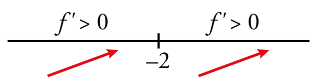
Como $f(0) = 0$ y $f(6) = -36$, los puntos $(0, 0)$ y $(6, -36)$ son puntos singulares.



Intervalos de crecimiento $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento $(0, 6)$.

d) $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 12x + 12 = 0 \rightarrow x = -2$



Como $f(-2) = -8$, el punto $(-2, -8)$ es un punto singular.

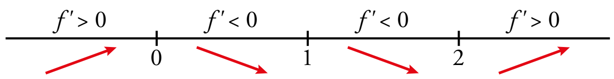
Intervalo de crecimiento $\mathbb{R}$.

e) $Dom = \mathbb{R} - \{1\}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$f'(x) = 0 \ \to \ \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \ \to \ x = 0, \ x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$ son puntos singulares.



Intervalos de crecimiento $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Intervalos de decrecimiento $(0, 1) \cup (1, 2)$

f) $Dom = \mathbb{R} - \{-2\}$

$f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$

No tiene puntos singulares. Como $f'(x) > 0$ siempre que $x \neq -2$ y la función no está definida en $x = -2$, los intervalos de crecimiento son $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

20 **Comprueba que las siguientes funciones no tienen puntos singulares y determina los intervalos donde crecen o decrecen:**

a) $y = x^3 + 3x$ **b)** $y = \dfrac{1}{x}$ **c)** $y = \sqrt{x}$ **d)** $y = \ln x$

a) $f'(x) = 3x^2 + 3$

$f'(x) = 0 \ \to \ 3x^2 + 3 = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$, la función es creciente en todo $\mathbb{R}$.

b) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \ \to \ -\dfrac{1}{x^2} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) < 0$ siempre que $x \neq 0$ y no está definida en $x = 0$, los intervalos de decrecimiento son $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

c) $Dom = [0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0 \ \to \ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$ siempre que $x \neq 0$, el intervalo de crecimiento es $[0, +\infty)$.

d) $Dom = (0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \ \to \ \dfrac{1}{x} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$ en su dominio de definición, el intervalo de crecimiento es $(0, +\infty)$.

21 **Halla los puntos singulares de las siguientes funciones y, con ayuda de las ramas infinitas, determina si son máximos o mínimos:**

a) $y = x^3 - 2x^2 + x + 2$ **b)** $y = 3x^2 - x^3$ **c)** $y = x^4 - 8x^2 + 10$

d) $y = -3x^4 - 12x$ **e)** $y = \dfrac{3}{x^2 + 1}$ **f)** $y = \dfrac{x^3 + 4}{x}$

a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 4x + 1 = 0 \to x = \frac{1}{3},\ x = 1$

Como $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{58}{27}$ y $f(1) = 2$, los puntos $\left(\frac{1}{3}, \frac{58}{27}\right)$ y $(1, 2)$ son puntos singulares.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ Por tanto $\left(\frac{1}{3}, \frac{58}{27}\right)$ es un máximo y $(1, 2)$ es un mínimo.

b) $f'(x) = 6x - 3x^2$

$f'(x) = 0 \to 6x - 3x^2 = 0 \to x = 0,\ x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$ son puntos singulares.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$ Por tanto, $(0, 0)$ es un mínimo y $(2, 4)$ es un máximo.

c) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$f'(x) = 0 \to 4x^3 - 16x = 0 \to x = -2,\ x = 0,\ x = 2$

Como $f(-2) = -6$, $f(0) = 10$ y $f(2) = -6$, los puntos $(-2, -6)$, $(0, 10)$ y $(2, -6)$ son puntos singulares.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ Por tanto, $(-2, -6)$ y $(2, -6)$ son mínimos.

El punto $(0, 10)$ debe ser un máximo porque está entre dos mínimos.

d) $f'(x) = -12x^3 - 12$

$f'(x) = 0 \to -12x^3 - 12 = 0 \to x = -1$

Como $f(-1) = 9$ el punto $(-1, 9)$ es un punto singular.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$ Por tanto, $(-1, 9)$ es un máximo.

e) $f'(x) = \frac{-6x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \to \frac{-6x}{(x^2+1)^2} = 0 \to x = 0$

Como $f(0) = 3$, el punto $(0, 3)$ es un punto singular.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\}$ Por tanto, $(0, 3)$ es un máximo.

f) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

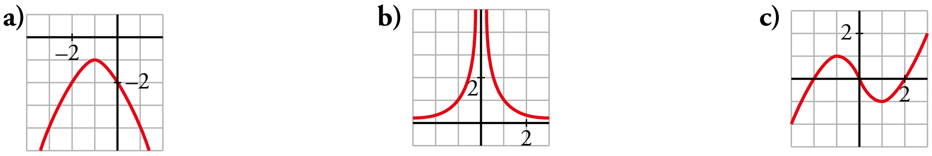
$f'(x) = 2x - \frac{4}{x^2}$

$f'(x) = 0 \to 2x - \frac{4}{x^2} = 0 \to x = \sqrt[3]{2}$

Como $f\left(\sqrt[3]{2}\right) = 3\sqrt[3]{4}$, el punto $\left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right)$ es un punto singular.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ Por tanto, $\left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right)$ es un mínimo.

22 **Indica en cada una de estas funciones los valores de x en los que f' es positiva y en los que f' es negativa:**



a) $f' > 0$ si $x < -1$

$f' < 0$ si $x > -1$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

$f' < 0$ si $x > 0$

c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f' < 0$ si $x \in (-1, 1)$

Gráficas de funciones polinómicas y racionales

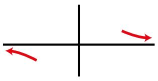
23 **De una función polinómica sabemos que:**

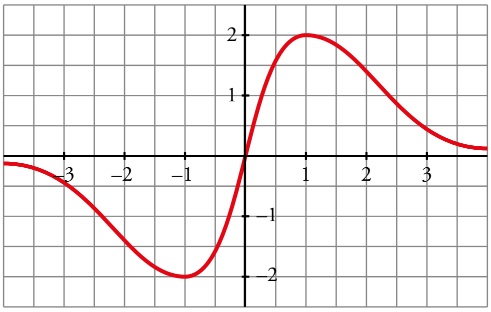
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- **Su derivada es igual a 0 solo en (–2, 2) y en (2, –1).**
- **Corta a los ejes solo en (0, 0) y en (4, 0).**

Represéntala gráficamente.

24 **Representa una función continua $f(x)$ de la que sabemos que:**

- **Sus puntos de tangente horizontal son (–1, –2) y (1, 2).**
- **Sus ramas infinitas son así:**

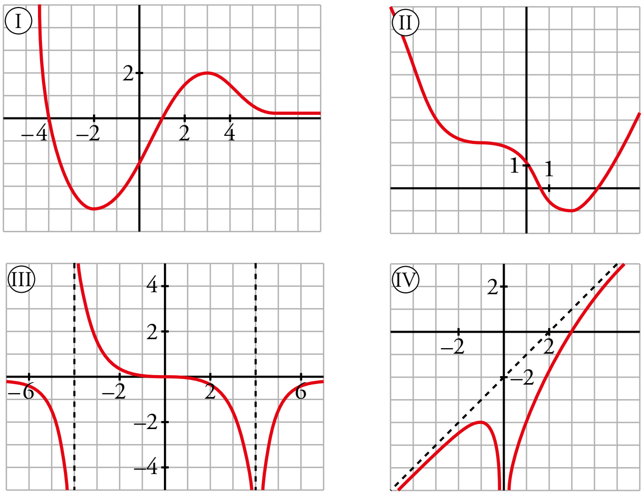




25 En las siguientes gráficas describe:

a) Dominio de definición, ramas infinitas, asíntotas y posición de la curva repecto a ellas.

b) Puntos de tangente horizontal, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.



a) • Función I:

$Dom = (-\infty, +\infty)$

Tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y la función queda por encima de la asíntota $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

• Función II:

$Dom = (-\infty, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

No tiene asíntotas.

• Función III:

$Dom = (-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ y la función queda por debajo de la asíntota.

La recta $x = -4$ es una asíntota vertical y la función tiende a $-\infty$ cuando se acerca a la asíntota por la izquierda, y a $+\infty$ cuando se acerca por la derecha.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal también cuando $x \to +\infty$ y la función queda por debajo de la asíntota.

• Función IV:

$Dom = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

La recta $y = x - 2$ es una asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$. En ambos casos la función queda por debajo de la asíntota.

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical y la función tiende a $-\infty$ por los dos lados.

b) • Función I:

Los puntos de pendiente horizontal son $(-2, -4)$ y $(3, 2)$.

El punto $(-2, -4)$ es un mínimo. El punto $(3, 2)$ es un máximo.

La función crece en $(-2, 3)$ y decrece en $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

- Función II:

  Tiene un punto de pendiente horizontal en (–1, 2) y otro en (–2, 2).

  El punto (–1, 2) es un mínimo. El punto (–2, 2) es un punto singular pero no es ni máximo ni mínimo.

  La función crece en (2, +∞) y decrece en (–∞, 2).

- Función III:

  Tiene un punto de pendiente horizontal en (0, 0).

  No tiene ni máximos ni mínimos.

  La función crece en (4, +∞) y decrece en (–∞, –4) ∪ (4, 4).

- Función IV:

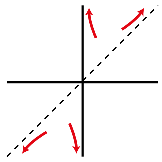
  Tiene un punto de pendiente horizontal en (–1, – 4).

  Solo tiene un punto singular, el máximo (–1, – 4).

  La función crece en (–∞, –1) ∪ (0, +∞) y decrece en (–1, 0).

Página 346

26 Comprueba que la función $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ tiene dos puntos de tangente horizontal, (–1, –2) y (1, 2); sus asíntotas son $x = 0$ e $y = x$ y la posición de la curva respecto a las asíntotas es la que se indica en la ilustración. Represéntala.



$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

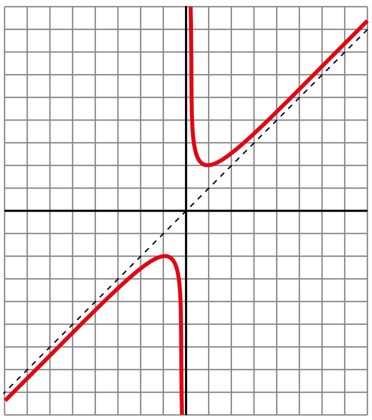
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$

Puntos (–1, –2) y (1, 2).

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Asíntota vertical en $x = 0$.

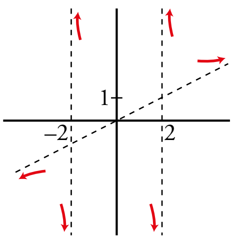
Asíntota oblicua en $y = x$.

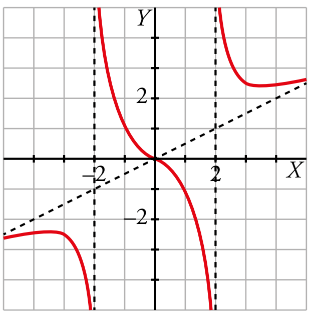


27 Completa la gráfica de una función de la que sabemos que tiene tres puntos singulares:

$$\left(-3, \frac{-5}{2}\right),\ (0, 0),\ \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

y que sus ramas infinitas son las representadas a la derecha.





28 **Representa una función $y = f(x)$ de la que conocemos:**

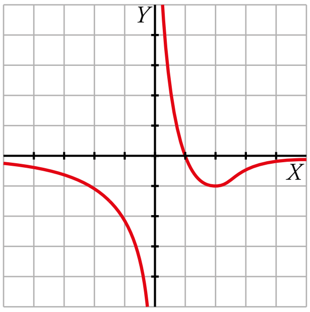
- **Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$**
- **Corta al eje X en $x = 1$.**
- **Asíntota horizontal: $y = 0$**

  Si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$

  Si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$
- **Asíntota vertical: $x = 0$**

  Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$
- **Mínimo en $(2, -1)$.**



29 **Representa $y = f(x)$ de la que conocemos:**

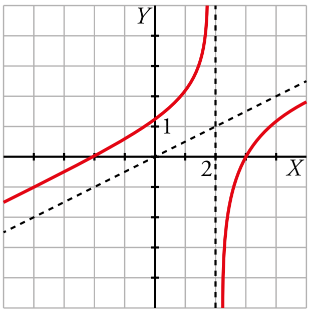
- **Asíntota vertical: $x = 2$**

  Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$

  Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$
- **Asíntota oblicua: $y = x/2$**

  Si $x \to +\infty$, $f(x) < x/2$

  Si $x \to -\infty$, $f(x) > x/2$
- **Cortes con los ejes: $(0, 1)$, $(-2, 0)$, $(3, 0)$**



30 **Dada la función $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ comprueba que:**

- **Tiene derivada nula en $(0, 0)$.**
- **La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.**

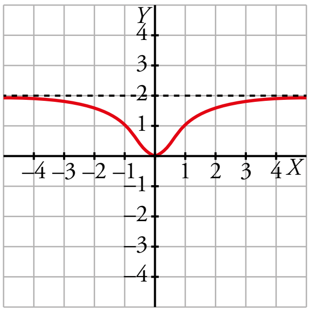
Estudia la posición de la curva con respecto a la asíntota y represéntala.

- $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{array}\right\} \to \text{La derivada en } (0, 0) \text{ es nula.}$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = 2 \to$ La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.
- $f(x) - 2 = \dfrac{2x^2}{1+x^2} - 2 = -\dfrac{2}{x^2+1}$

Como la diferencia siempre es negativa, la función queda por debajo de la asíntota $y = 2$.



31 Representa las siguientes funciones hallando los puntos singulares y las ramas infinitas:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ **b)** $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

c) $f(x) = 12x - x^3$ **d)** $f(x) = -x^4 + 4x^2$

a) Buscamos sus puntos singulares:

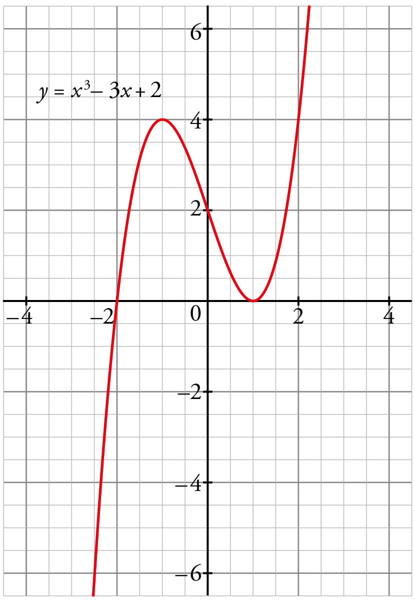
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \to x = 1; x = -1 \to$ Puntos singulares $A(1, 0)$ y $B(-1, 4)$.

Estudiamos sus ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Por tanto, $A(1, 0)$ tiene que ser un mínimo y $B(-1, 4)$ un máximo:



b) Buscamos sus puntos singulares:

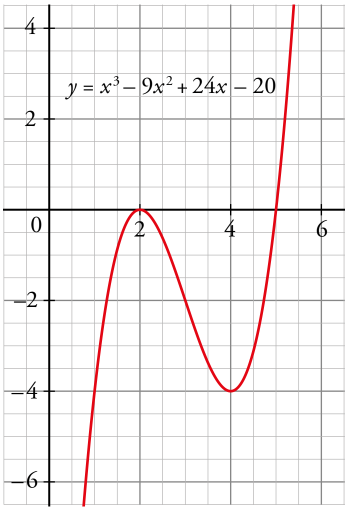
$f'(x) = 12 - 3x^2 \to x = 4, x = -2 \to A(4, -4)$ y $B(-2, 0)$ son puntos singulares.

Estudiamos sus ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Vemos que $A(4, -4)$ tiene que ser un mínimo y $B(2, 0)$ un máximo:



c) Buscamos su puntos singulares:

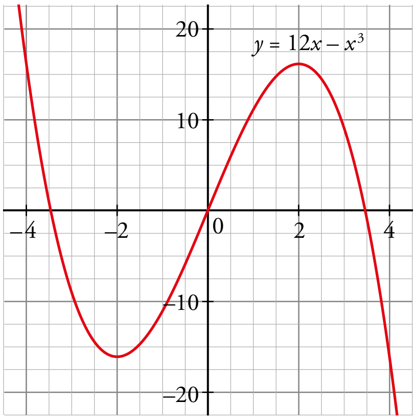
$f'(x) = 12 - 3x^2 = 0 \rightarrow x = -2, x = 2 \rightarrow A(-2, -16)$ y $B(2, 16)$ son puntos singulares.

Estudiamos sus ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Vemos que $A(-2, -16)$ tiene que ser un mínimo y $B(2, 16)$ un máximo:



d) Buscamos su puntos singulares:

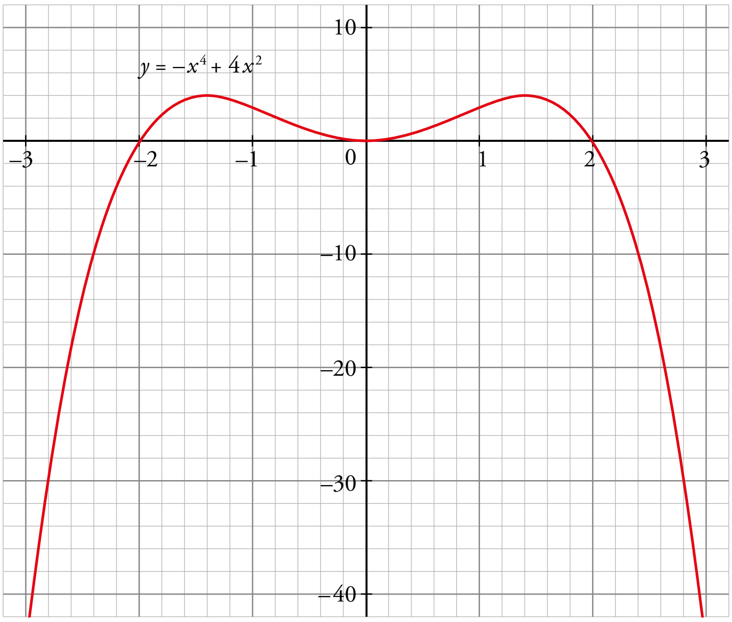
$f'(x) = -4x^3 + 8x = 0 \rightarrow x = 0, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2} \rightarrow A(0, 0),\ B\left(\sqrt{2}, 4\right),\ C\left(-\sqrt{2}, 4\right)$ son puntos singulares.

Estudiamos sus ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Y entonces $A(0, 0)$ tiene que ser un mínimo, y $B\left(\sqrt{2}, 4\right)$ y $C\left(-\sqrt{2}, 4\right)$ son máximos:



Para resolver

32 ODS Meta 3.7. **[Tras el visionado del vídeo, se puede plantear un debate sobre la urgencia de reducir el vertido de residuos peligrosos al aire, al suelo y al agua].**

La cantidad de material radiactivo que queda al cabo de t años en una muestra de 100 gramos, se puede calcular mediante la función $C(t) = 100 \cdot 0{,}68^t$.

a) Halla la T.V.M. en los intervalos [0, 3] y [5, 7].

b) Halla $C'(2)$ y $C'(10)$.

c) Interpreta los resultados obtenidos.

a) T.V.M. $[0,3] = \dfrac{C(3)-C(0)}{3-0} = \dfrac{100\,(0{,}68^3-1)}{3} = -22{,}85$

T.V.M. $[5,7] = \dfrac{C(7)-C(5)}{7-5} = \dfrac{100\,(0{,}68^7-0{,}68^5)}{2} = -3{,}91$

b) $C'(t) = 100 \cdot 0{,}68^t\, ln(0{,}68)$

$C'(2) = -17{,}83$

$C'(10) = -0{,}815$

Los valores de la T.V.M. nos indican que la variación decrece, es decir que cuanto más tiempo pasa menos material radioactivo queda por cada 100 g. Al inicio, entre 0 y 3 años, la cantidad de material radioactivo decrece más rápidamente.

Así, la función decrece en dichos intervalos, desde el inicio.

Además, su derivada nos confirma que sigue decreciendo a los dos y diez años, y que a los dos años decrecía más que a los diez años porque su derivada es mucho menor. La derivada nos indica la pendiente de la recta tangente en dichos puntos, que va creciendo conforme pasan los años. Es decir, la curva decreciente se va suavizando.

33 **a) Halla el vértice de la parábola $y = x^2 + 6x + 11$ teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal.**

b) Halla la abscisa del vértice de una parábola cualquiera $y = ax^2 + bx + c$.

a) $f'(x) = 2x + 6 = 0 \;\rightarrow\; x = -3$

Punto (–3, 2).

b) $f'(x) = 2ax + b$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2ax + b = 0 \rightarrow x = \dfrac{-b}{2a}$ es la abscisa del vértice.

$f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\dfrac{-b}{2a}\right) + c = \dfrac{-b^2+4ac}{4a}$ es la ordenada de vértice.

34 **Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 1 \rightarrow 4a + 2b + c = 1 \\ f'(2) = 2 \rightarrow 4a + b = 2 \\ f(5) = -2 \rightarrow 25a + 5b + c = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -7 \end{array}$$

La función es $f(x) = -x^2 + 6x - 7$.

35 **Halla el valor de x para el que las tangentes a las curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$ e $y = x^2 + 6x$ sean paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.**

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \rightarrow f'(x) = 6x - 2 \\ g(x) = x^2 + 6x \rightarrow g'(x) = 2x + 6 \end{array}\right\} 6x - 2 = 2x + 6 \rightarrow x = 2$$

Para $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ la tangente en $x = 2$ es:

$y = 10(x-2) + 13 \rightarrow y = 10x - 7$

Para $g(x) = x^2 + 6x$ la tangente en $x = 2$ es:

$y = 10(x-2) + 16 \rightarrow y = 10x - 4$

36 **Halla a, b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x = -4$ y en $x = 0$ y que pase por $(1, 1)$.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4) = 0 \rightarrow 48 - 8a + b = 0 \\ f'(0) = 2 \rightarrow b = \ 0 \\ f(1) = 1 \rightarrow 1 + a + b + c = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 6 \\ c = -6 \end{array}$$

La función es $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$.

37 **La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $4x - 3y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?**

Despejamos y de la ecuación de la recta tangente: $y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3}$.

$f'(2)$ es la pendiente de la recta tangente en $x = 2$, es decir, $f'(2) = \dfrac{4}{3}$.

Como la recta tangente y la curva pasan por el punto de tangencia, $f(2) = \dfrac{4}{3} \cdot 2 + \dfrac{1}{3} = 3$.

38 **Halla una función de segundo grado sabiendo que pasa por (0, 1) y que la pendiente de la recta tangente en el punto (2, –1) vale 0.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \;\rightarrow\; 1 = c \\ f(2) = -1 \;\rightarrow\; -1 = 4a + 2b + c \\ f'(2) = 0 \;\rightarrow\; 0 = 4a + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array}$$

La función es $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

39 **Estudia y representa.**

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ **b)** $f(x) = x^4 + 4x^3$

c) $f(x) = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$ **d)** $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$

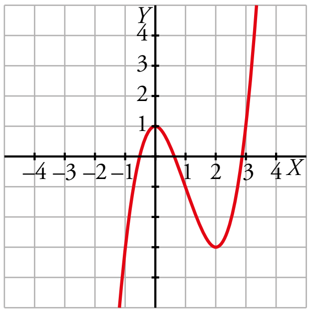
a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 2$

$f(0) = 2,\;\; f(2) = -3 \;\rightarrow$ Los puntos singulares son (0, 1) y (2, –3).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = -\infty$



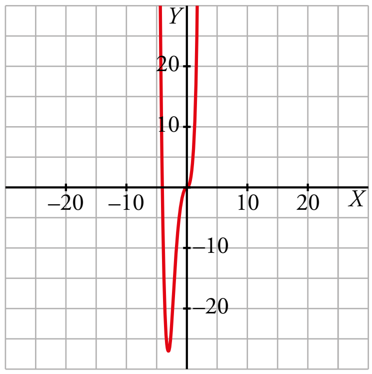
b) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x^3 + 12x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = -3,\; x = 0$

$f(-3) = -27,\; f(0) = 0 \;\rightarrow$ Los puntos singulares son (–3, –27) y (0, 0).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$

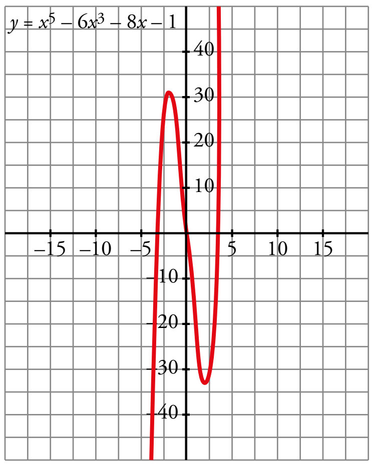


c) $f'(x) = 5x^4 - 18x^2 - 8$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 2 \;\rightarrow\; f(2) = -33 \;\rightarrow\; (2, -33) \\ x = -2 \;\rightarrow\; f(-2) = 31 \;\rightarrow\; (-2, 31) \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = +\infty$

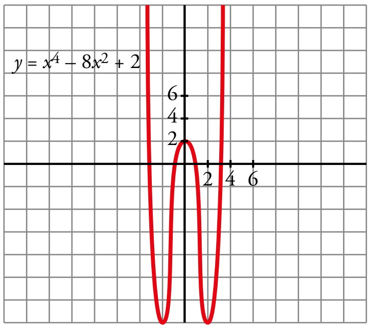


d) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow (0, 2) \\ x = 2 \rightarrow f(2) = -14 \rightarrow (2, -14) \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = -14 \rightarrow (-2, -14) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = -\infty$$



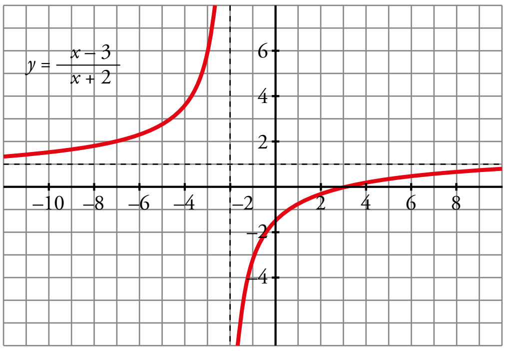
40 **Comprueba que estas funciones no tienen puntos de tangente horizontal. Represéntalas estudiando sus ramas infinitas y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2-1}{x}$

c) $y = \dfrac{x^3}{3} + 4x$ **d)** $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

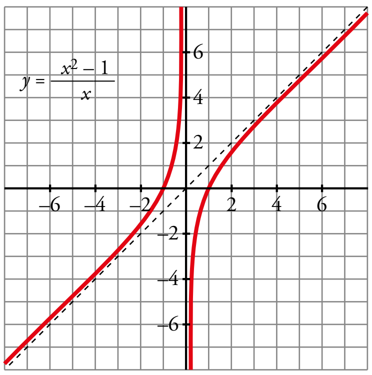
a) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$, $(3, 0)$.



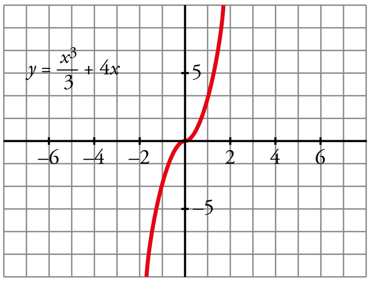
b) $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: $(1, 0)$, $(-1, 0)$



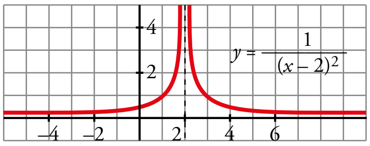
c) $f'(x) = x^2 + 4 \neq 0$

El punto de corte es (0, 0).



d) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$

El punto de corte es $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$.



41 **Estudia y representa las siguientes funciones:**

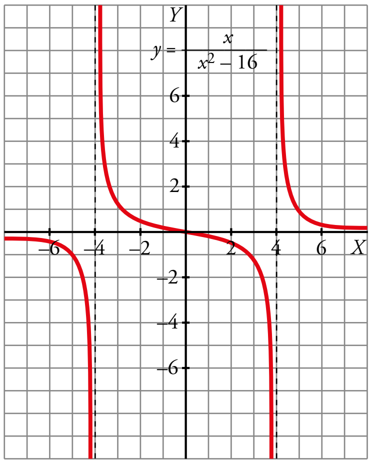
a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 16}$ **b)** $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$ **c)** $y = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$ **d)** $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$

Asíntotas verticales: $x = -4$, $x = 4$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.

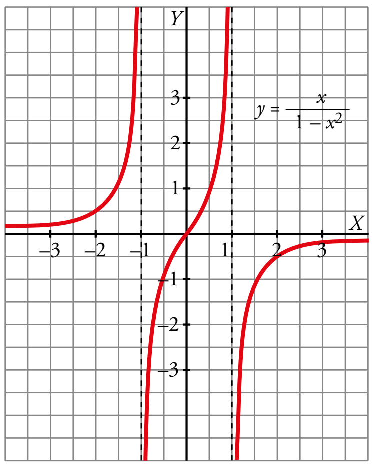


b) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.



c) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}$

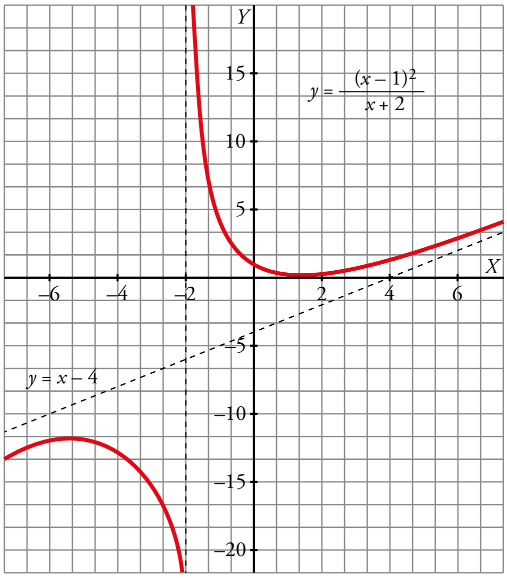
Asíntotas verticales: $x = -2$

Asíntotas oblicuas: $y = x - 4$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(1, 0)$, $(-5, 12)$



d) $f'(x) = \dfrac{2x}{(1 - x^2)^2}$

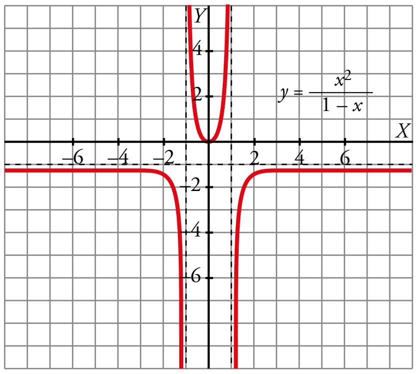
Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = -1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(0, 0)$



Página 347

42 **Halla las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y los mínimos y representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$

c) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 - 5}{2x - 4}$

a) $f'(x) = \dfrac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$

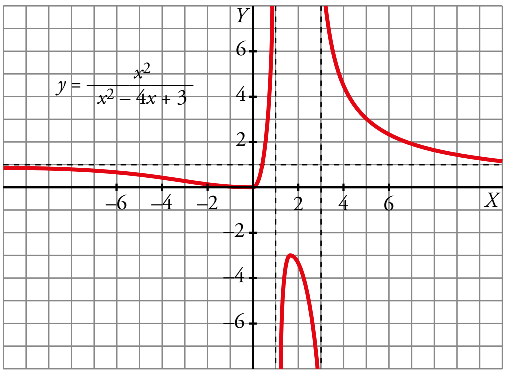
Asíntotas verticales: $x = 3$, $x = 1$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

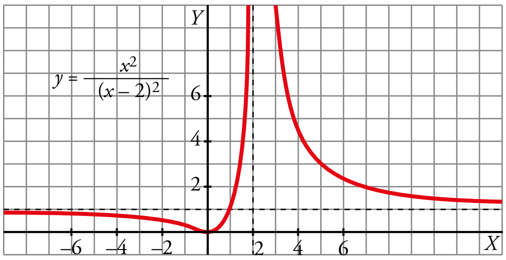
No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(0, 0)$, $\left(\dfrac{3}{2}, -3\right)$



b) $f'(x) = -\dfrac{4x}{(x-2)^3}$



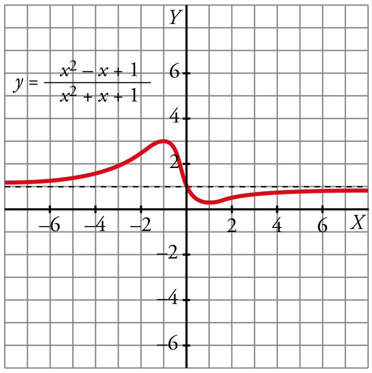
Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son: $(0, 0)$

c) $f'(x) = \dfrac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$



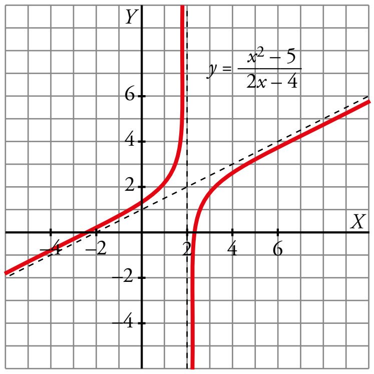
Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$, $(-1, 3)$

d) $f'(x) = \dfrac{2x^2-8x+10}{(2x-4)^2}$



Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas oblicuas: $y = \dfrac{x}{2} + 1$

No hay asíntotas horizontales ni puntos de tangente horizontal.

43 Calcula el valor de a para que $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{x+a}\right)$ verifique que $f'(2) = 0$.

$f(x) = 2\ln x - \ln(x+a)$

$f'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x+a} \to f'(2) = 1 - \dfrac{1}{2+a}$

$f'(2) = 0 \to 1 - \dfrac{1}{2+a} = 0 \to a = -1$

44 Dadas $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$, halla el valor de a y b para que la recta tangente a f en $x = -2$ sea $y = 2x - 3$.

Como la recta tangente en $x = -2$ es $y = 2x - 3$, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = 2(-2) - 3 = -7 \\ f'(-2) = 2 \end{array}\right\}$$

$f'(x) = 6x^2 + 24x + a$

$f'(-2) = 2 \to 6(-2)^2 + 24(-2) + a = 2 \to a = 26$

$f(-2) = -7 \to 2(-2)^3 + 12(-2)^2 + 26(-2) + b = -7 \to b = 13$

45 **Halla el valor de k para que la tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 5x + k$ en $x = 1$ pase por el origen de coordenadas.**

- Pendiente de la recta tangente:

  $f'(x) = 2x - 5 \to f'(1) = -3$
- Punto de tangencia: $x = 1$; $y = 1 - 5 + k \to (1, -4 + k)$
- Ecuación de la recta tangente:

  $y = -4 + k - 3(x - 1)$
- Para que pase por (0, 0), debe verificarse:

  $0 = -4 + k + 3 \to k = 1$

46 **Halla los puntos de la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ en los que la recta tangente forma un ángulo de 45° con el eje de abscisas.**

Si la recta tangente forma un ángulo de 45° con el eje OX, su pendiente es $tg\,45° = 1$.

Buscamos los puntos donde $f'(x) = 1$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

$f'(x) = 1 \to 3x^2 - 6x + 1 = 1 \to x = 0,\ x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = -2$, los puntos (0, 0) y (2, –2) son los que cumplen las condiciones del problema.

47 **Dada la parábola $y = 5 + 6x - 3x^2$, se traza la cuerda que une los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 3$. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a esa cuerda.**

$f(0) = 5$ y $f(3) = -4$. Por tanto, la pendiente de la cuerda que pasa por estos puntos es $\dfrac{-4-5}{3-0} = -3$.

Tratamos de encontrar el punto que cumple la igualdad $f'(x) = -3$:

$f'(x) = 6 - 6x$

$f'(x) = -3 \to 6 - 6x = -3 \to x = \dfrac{3}{2}$

Como $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 5 + 6 \cdot \dfrac{3}{2} - 3 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{29}{4}$, la recta tangente es $y = -3\left(x - \dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{29}{4}$.

48 **Dada la función $f(x) = ax^3 + bx$, halla a y b para que f pase por el punto (1, 3) y en ese punto la tangente sea paralela a la recta $y = 4x + 1$.**

Pasa por $(1, 3) \to f(1) = 3 \to a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = 3 \to a + b = 3$

Para que la recta tangente sea paralela a la recta dada, $f'(1) = 4$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$f'(1) = 4 \to 3a \cdot 1^2 + b = 4 \to 3a + b = 4$

Ahora, resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 3 \\ 3a + b = 4 \end{array}\right\} \to a = \frac{1}{2},\ b = \frac{5}{2}$$

49 **Dadas $f(x) = x^2 - x + 1$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$, represéntalas, halla su punto de corte y comprueba que, en ese punto, tienen una tangente común.**

- $f(x) = x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$

Partiendo de la función x^2 solamente tenemos que trasladarla $\frac{1}{2}$ a la derecha y $\frac{3}{4}$ hacia arriba. Se trata de una parábola de vértice $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

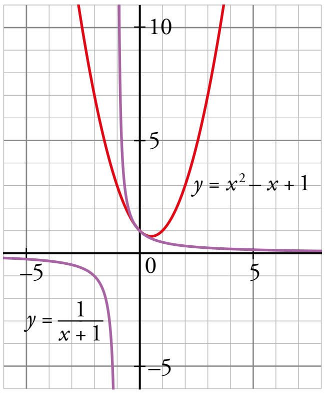
- $g(x) = \frac{1}{x+1}$

Partiendo de la función $\frac{1}{x}$ solamente tenemos que trasladarla 1 unidad a la izquierda. Su asíntota vertical estará en –1.

Su punto de corte se halla en (0, 1). Veámoslo:

$f(x) = g(x) \rightarrow x^2 - x + 1 = \frac{1}{x+1} \rightarrow (x^2 - x + 1)(x + 1) = 1 \rightarrow x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow x^3 = 0 \rightarrow x = 0$



Veamos que tienen una tangente igual en el punto de corte.

Sabemos que la tangente en el punto (0,1) de f se puede escribir así:

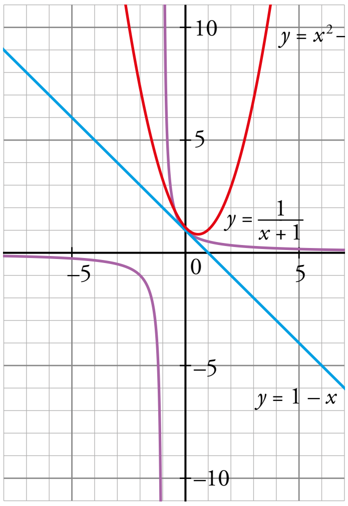
$y = f(0) + f'(0)(x - 0) \rightarrow y = 1 + f'(0)x$

Y la de la función g: $y = 1 + g'(0)x$

Por lo tanto serán la misma recta si $f'(0) = g'(0)$.

$f'(x) = 2x - 1 \rightarrow f'(0) = -1$

$g'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \rightarrow g'(0) = -1 \rightarrow$ la recta tangente es la misma: $y = 1 - x$



50 Halla a y b para que $f(x) = ax^2 - 1$ y $g(x) = x^2 + 3x + b$ tengan la misma tangente en $x = 2$.

Recta tangente a f en $x = 2$: $y = f(2) + f'(2)(x - 2)$

Recta tangente a g en $x = 2$: $y = g(2) + g'(2)(x - 2)$

Estas dos tangentes serán iguales si $f(2) = g(2)$ y $f'(2) = g'(2)$:

- $f(2) = 4a - 1 = 10 + b = g(2)$ (*)
- $f'(x) = 2ax \to f'(2) = 4a$

  $g'(x) = 2x + 3 \to g'(2) = 7$

Por tanto: $4a = 7 \to a = \dfrac{7}{4}$

Volviendo a (*): $b = -4$

La recta tangente a ambas funciones es $y = 6 + 7(x - 2)$.

51 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{1}{x-2}$ que pasa por el punto $P(4, 0)$.

Buscamos el punto a para definir la tangente de f en a: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

$f(a) = \dfrac{1}{a-2}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2} \to f'(a) = -\dfrac{1}{(a-2)^2}$

La recta tangente es: $y = \dfrac{1}{a-2} - \dfrac{1}{(a-2)^2}(x - a)$

Queremos que dicha tangente pase por el punto $P(4, 0)$:

$0 = \dfrac{1}{a-2} - \dfrac{1}{(a-2)^2}(4 - a) \to \dfrac{2(a-3)}{a-2} = 0 \to a = 3 \to y = 1 - (x - 3) \to y = 4 - x$ es la tangente a f en $(3, 1)$ que pasa por P.

52 Determina, en cada caso, los valores máximo y mínimo de la función en el intervalo que se indica.

a) $y = x^2 - 6x - 4,\ x \in [0, 5]$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5,\ x \in [-1, 4]$

c) $y = x^3 - 3x^2,\ x \in [-2, 4]$

d) $y = \dfrac{x}{x^2+1},\ x \in [0, 2]$

Hallamos los puntos singulares que quedan dentro de los diferentes intervalos, evaluamos en ellos y en los extremos de los intervalos.

a) $f'(x) = 2x - 6$

$f'(x) = 0 \to 2x - 6 = 0 \to x = 3$

$f(0) = -4 \quad f(3) = -13 \quad f(5) = -9$

El máximo se encuentra en $x = 0$ y vale -4.

El mínimo se encuentra en $x = 3$ y vale -13.

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 12x + 12 = 0 \to x = 2$

$f(-1) = -24 \quad f(2) = 3 \quad f(4) = 83$

El máximo se encuentra en $x = 4$ y vale 83.

El mínimo se encuentra en $x = -1$ y vale -24.

c) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2$

$f(-2) = -20 \quad f(0) = 0 \quad f(2) = -4 \quad f(4) = 16$

El máximo se encuentra en $x = 4$ y vale 16.

El mínimo se encuentra en $x = -2$ y vale –20.

d) $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$

$f(0) = 0 \quad f(-1) = f(1) = \dfrac{1}{2} \quad f(2) = \dfrac{2}{5}$

El máximo se encuentra en $x = 1$ y vale $\dfrac{1}{2}$.

El mínimo se encuentra en $x = 0$ y vale 0.

53 Halla los máximos y los mínimos de las funciones $y = sen\ x$ e $y = cos\ x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

• $y = sen\ x$

$f'(x) = cos\ x$

$f'(x) = 0 \rightarrow cos\ x = 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{3\pi}{2}$

$f(0) = 0 \quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \quad f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1 \quad f(2\pi) = 0$

El máximo se encuentra en $x = \dfrac{\pi}{2}$ y vale 1.

El mínimo se encuentra en $x = \dfrac{3\pi}{2}$ y vale –1.

• $y = cos\ x$

$f'(x) = -sen\ x$

$f'(x) = 0 \rightarrow sen\ x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi$

$f(0) = 1 \quad f(\pi) = -1 \quad f(2\pi) = 1$

Los máximos se encuentran en $x = 0$ y $x = 2\pi$ y valen 1.

El mínimo se encuentra en $x = \pi$ y vale –1.

54 Estudia el crecimiento de las siguientes funciones y di cuáles son sus máximos y sus mínimos:

a) $y = (x^2 - 3x + 1)e^x$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{e^x}$ **c)** $y = ln\ (x^2 + 1)$ **d)** $y = x\ ln\ x$

a) Puntos singulares:

$f'(x) = (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x + 1)e^x = e^x(x^2 - x - 2)$

$f'(x) = 0 \rightarrow e^x(x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 2$

Crecimiento y decrecimiento:

$f' > 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
	-1		2	

$f(-1) = \dfrac{5}{e} \rightarrow \left(-1, \dfrac{5}{e}\right)$ es un máximo.

$f(2) = -e^2 \rightarrow (-1, -e^2)$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

Intervalos de decrecimiento: $(-1, 2)$.

b) Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \frac{2x - x^2}{e^x} = 0 \;\to\; x = 0,\;\; x = 2$$

Crecimiento y decrecimiento:

$f' < 0$	0	$f' > 0$	2	$f' < 0$
$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$f(0) = 0 \;\to\; (0, 0)$ es un mínimo.

$f(2) = \dfrac{4}{e^2} \;\to\; \left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$ es un máximo.

Intervalos de crecimiento: $(0, 2)$.

Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \frac{2x}{x^2+1} = 0 \;\to\; x = 0$$

Crecimiento y decrecimiento:

$f' < 0$	0	$f' > 0$
$\searrow$		$\nearrow$

$f(0) = 0 \;\to\; (0, 0)$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento: $(0, +\infty)$.

Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0)$.

d) $Dom = (0, +\infty)$

Puntos singulares:

$f'(x) = \ln x + 1$

$f'(x) = 0 \;\to\; \ln x + 1 = 0 \;\to\; x = e^{-1}$

Crecimiento y decrecimiento:

0	$f' < 0$	e^{-1}	$f' > 0$
	$\searrow$		$\nearrow$

$f(e^{-1}) = -e^{-1} \;\to\; (e^{-1}, -e^{-1})$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento: $(e^{-1}, +\infty)$.

Intervalos de decrecimiento: $(0, e^{-1})$.

55 Prueba que existe un punto de la curva $y = arc\ tg \dfrac{x-1}{x+1}$ en el que la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

La bisectriz del primer cuadrante tiene pendiente 1. Por tanto, el punto en el que la recta tangente es paralela a ella, cumple la ecuación.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$f'(x) = 1 \;\to\; \frac{1}{x^2+1} = 1 \;\to\; x = 0$$

$f(0) = -\frac{\pi}{4} \rightarrow$ En el punto $\left(0, -\frac{\pi}{4}\right)$ la tangente a la curva es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

56 La trayectoria de un móvil viene dada por la función $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. En un punto P de $f(x)$, el móvil deja su trayectoria y continúa en línea recta por la tangente a f en P.

¿Cuáles deben ser las coordenadas de P para que esa tangente pase por el punto $A(3, 0)$?

* ***Fíjate en el problema resuelto 5.***

Si $P(a, f(a))$ es el punto por donde pasa la recta tangente a f, podemos escribir la tangente como:

$y = f(a) + f'(a)(x - a)$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f'(a) = -\frac{1}{a^2}$

La recta tangente será: $y = 1 + \frac{1}{a} - \frac{x-a}{a^2}$

Queremos que esta tangente pase por $A(3, 0) \rightarrow 0 = 1 + \frac{1}{a} - \frac{3-a}{a^2} \rightarrow \frac{a^2 + 2a - 3}{a^2} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow a = 1;\ a = -3$

Podemos descartar la solución $a = -3$ ya que no pertenece al domino de la función $\rightarrow a = 1$.

$f(1) = 2$

$f'(1) = -1$

La tangente será $y = 3 - x$, en el punto buscado, $P(1, 2)$.

57 [El análisis de la función propuesto permite al alumnado trabajar la iniciativa de la dimensión productiva de esta clave].

La función $f(x) = \frac{60x}{x^2+9}$ indica los beneficios obtenidos por una empresa desde que comenzó a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en años).

a) Represéntala gráficamente.

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

c) ¿Perderá dinero la empresa en algún momento?

a) $f'(x) = \frac{60(x^2+9) - 60x \cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \frac{60x^2 + 540 - 120x^2}{(x^2+9)^2} = \frac{-60x^2 + 540}{(x^2+9)^2} = 0 \rightarrow x = 3$ ($x = -3$ no está en el dominio).

Máximo en (3, 10).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \rightarrow$ asíntota horizontal: $y = 0$

La gráfica sería:

b) Beneficio máximo en $x = 3 \rightarrow$ A los 3 años.

El beneficio sería $f(3) = 10$ miles de euros.

c) No perderá dinero ni llegará un momento en que no obtenga beneficios ni pérdidas, pues $f(x) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x > 0$.

58 **[El alumnado puede ayudar a sus compañeros en la resolución del problema para trabajar la comunidad y bien común de la dimensión social de esta clave].**

Los costes de producción de un producto (en €) de una empresa vienen dados por: $C = 40\,000 + 20q + q^2$, donde q es el número de unidades producidas. El precio de venta de cada unidad es de 520 €.

a) Expresar en función de q el beneficio de la empresa cuando se venden todas las unidades.

b) ¿Cuántas unidades hay que producir para que el beneficio sea máximo?

a) $B(q) = 520q - C(q) = 500q - 40\,000 - q^2$

b) Para que sea máximo $B'(q) = 0$: $B'(q) = 500 - 2q \to q = 250$

Vemos que es el máximo, ya que B' es positiva si $q \in (0, 250)$ y negativa si $q > 250$.

59 **Con una barra de hierro de 10 m queremos construir una portería. ¿Cuáles serán sus dimensiones para que su área sea máxima?**

Llamamos x a la medida de los postes y z a la del larguero.

Sabemos que $10 = 2x + z \to z = 10 - 2x$

Su área será: $A = z \cdot x = (10 - 2x)x = 10x - 2x^2$

Para que sea máxima: $A'(x) = 10 - 4x = 0 \to x = \dfrac{10}{4} = 2,5 \to z = \dfrac{20}{4} = 5$

60 **Halla dos números cuya suma sea 34 y tales que su producto sea máximo.**

Supongamos que los números son x e y:

$x + y = 34 \to y = 34 - x$

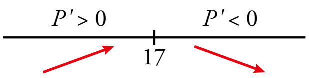
Buscamos el producto máximo:

$P = xy = x(34 - x) = 34x - x^2$

$P' = 34 - 2x$

$P' = 0 \to 34 - 2x = 0 \to x = 17 \to y = 17$

Comprobamos que el valor obtenido es un máximo del producto



Por tanto, los números son $x = 17$, $y = 17$ y el producto máximo es 289.

61 **Encuentra dos números positivos cuyo producto sea 100 y su suma sea mínima.**

Sean x, y los números positivos.

$xy = 100 \to y = \dfrac{100}{x}$

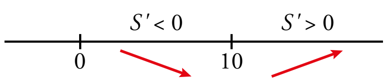
La suma es $S = x + y = x + \dfrac{100}{x}$

Queremos encontrar la suma mínima:

$S' = 1 - \dfrac{100}{x^2}$

$S' = 0 \to 1 - \dfrac{100}{x^2} = 0 \to x = \pm 10 \to x = 10$ (solo es válido el resultado positivo)

Veamos si es un mínimo:



Por tanto, cuando $x = 10$, $y = \dfrac{100}{10} = 10$, se obtiene la suma mínima, que es $S = 20$.

62 **El área de un rectángulo es 180 cm². ¿Qué dimensiones debe tener para que su perímetro sea mínimo?**

Llamamos z a su base y x a su altura.

$$\text{Área} = zx = 180 \;\rightarrow\; z = \frac{180}{x}$$

$$\text{Perímetro} = 2x + 2z = 2x + 2\left(\frac{180}{x}\right)$$

$$P(x) = 2x + \frac{360}{x} \;\rightarrow\; P'(x) = 2 - \frac{360}{x^2} = 0 \text{ para que sea mínimo } \rightarrow\; x = \pm 6\sqrt{5}$$

Descartamos la solución negativa ya que x es la medida de uno de los lados.

$$x = 6\sqrt{5} \;\rightarrow\; z = \frac{180}{6\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}} = \frac{30\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5}$$

Por tanto, se trata de un cuadrado.

Sabemos que $x = 6\sqrt{5}$ es mínimo ya que:

$P'(x) < 0$ si $0 < x < 6\sqrt{5} \rightarrow P$ decrece

$P'(x) > 0$ si $x > 6\sqrt{5} \rightarrow P$ crece

63 **Halla la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 30 cm cuya área sea la mayor posible.**

* ***Llama x a la mitad de la base.***

Si llamamos x a la mitad de la base y h a la altura del triángulo, el lado desigual mide $2x$ y cada uno de los lados iguales mide $\frac{30 - 2x}{2} = 15 - x$.

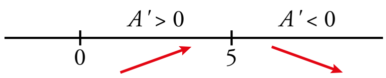
Por el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{(15 - x)^2 - x^2} = \sqrt{225 - 30x}$

El área del triángulo es $A = \frac{2x\sqrt{225 - 30x}}{2} = x\sqrt{225 - 30x}$

$$A' = \sqrt{225 - 30x} + \frac{x(-30)}{2\sqrt{225 - 30x}} = \frac{225 - 30x - 15x}{\sqrt{225 - 30x}} = \frac{225 - 45x}{\sqrt{225 - 30x}}$$

$$A' = 0 \;\rightarrow\; \frac{225 - 45x}{\sqrt{225 - 30x}} = 0 \;\rightarrow\; 225 - 45x = 0 \;\rightarrow\; x = 5 \text{ cm}$$

Comprobamos si hemos obtenido un máximo.



En efecto, $x = 5$ cm es un máximo. La base mide 10 cm, la altura mide $h = \sqrt{225 - 150} = 5\sqrt{3}$ cm y el área máxima es $A = 25\sqrt{3}$ cm².

64 **De todos los ortoedros de base cuadrada y área total igual a 20 cm² halla las dimensiones del que tiene el mayor volumen.**

Supongamos que x es el lado de la base cuadrada y que y es la altura del ortoedro.

El área total es igual a 20 cm² $\rightarrow\; 2x^2 + 4xy = 20 \;\rightarrow\; y = \frac{10 - x^2}{2x}$

El volumen del ortoedro es $V = x^2 y = x^2\,\frac{10 - x^2}{2x} = \frac{10x - x^3}{2}$.

Hallamos el valor de x que da el volumen máximo.

$$V' = \frac{10 - 3x^2}{2}$$

$V' = 0 \;\to\; \dfrac{10-3x^2}{2} = 0 \;\to\; x = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$ (el resultado negativo no tiene sentido).

$$\begin{array}{ccccc} & V'>0 & & V'<0 & \\ 0 & \nearrow & \sqrt{\dfrac{10}{3}} & \searrow & \end{array}$$

La altura es $y = \dfrac{10-\sqrt{10/3}^{\,2}}{2\sqrt{10/3}} = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$ y el volumen máximo, $V = \dfrac{10}{3}\sqrt{\dfrac{10}{3}}$ cm^3.

Página 348

65 Aplica la regla de L'Hôpital para resolver estos límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{sen\ x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\ x}{5x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{ln\ x}{x^2+5x-1}$ **d)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{ln\,(2x+1)}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-sen\ x}{sen\ x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\ x}{x+tg\ x}$ **g)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos\ x}{(e^x-1)^2}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\,[x-ln\,(1+x)]}{x\ ln\,(1+x)}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{sen\ x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{cos\ x} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\ x}{5x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+tg^2 x}{5} = \dfrac{1}{5}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{ln\ x}{x^2+5x-1} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1/x}{2x+5} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x(2x+5)} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{ln\,(2x+1)} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{\dfrac{2}{2x+1}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x\,(2x+1)}{2} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-sen\ x}{sen\ x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos\ x}{cos\ x} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\ x}{x+tg\ x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{cos\ x}{1+1+tg^2 x} = \dfrac{1}{2}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos\ x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\ x}{2\,(e^x-1)\,e^x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\ x}{2e^{2x}-2e^x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{cos\ x}{4e^{2x}-2e^x} = \dfrac{1}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\,[x-ln\,(1+x)]}{x\ ln\,(1+x)} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\left[1-\dfrac{1}{1+x}\right]}{ln\,(1+x)+\dfrac{x}{1+x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\cdot\dfrac{x}{1+x}}{\dfrac{(1+x)\,ln\,(1+x)+x}{1+x}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{(1+x)\,ln\,(1+x)+x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4}{ln\,(1+x)+\dfrac{1+x}{1+x}+1} = \dfrac{4}{2} = 2$

66 Estudia la continuidad y la derivabilidad de estas funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+1 & \text{si } x<2 \\ -2x+5 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{si } x<3 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} e^x+2 & \text{si } x\le 0 \\ x^2+x+3 & \text{si } x>0 \end{cases}$

a) Llamemos $f_1(x) = x^2 - 2x + 1$ y $f_2(x) = -2x + 5$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = 1 \\ f_2(2) = 1 \end{array}\right\}$ Por tanto, la función $f(x)$ también es continua en el punto de ruptura y, en consecuencia, lo es en todo $\mathbb{R}$.

$f'_1(x) = 2x - 2$ y $f'_2(x) = -2$

$\left.\begin{array}{l} f'_1(2) = 2 \\ f'_2(2) = -2 \end{array}\right\}$ Como $f'_1(2) \neq f'_2(2)$, la función $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

La derivada queda así:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b) Llamemos $g_1(x) = 2x - 5$ y $g_2(x) = \sqrt{x-2}$. Ambas funciones son continuas y derivables donde están definidas.

$\left.\begin{array}{l} g_1(3) = 1 \\ g_2(3) = 1 \end{array}\right\}$ Por tanto, la función $g(x)$ también es continua en el punto de ruptura y, en consecuencia, lo es en todo $\mathbb{R}$.

$g'_1(x) = 2$ y $g'_2(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$

$\left.\begin{array}{l} g'_1(3) = 2 \\ g'_2(3) = 1/2 \end{array}\right\}$ Como $g'_1(3) \neq g'_2(3)$, la función $g(x)$ no es derivable en $x = 3$.

La derivada queda así:

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

c) Llamemos $h_1(x) = e^x + 2$ y $h_2(x) = x^2 + x + 3$. Ambas funciones son continuas y derivables.

$\left.\begin{array}{l} h_1(0) = 3 \\ h_2(0) = 3 \end{array}\right\}$ Por tanto, la función $h(x)$ también es continua en el punto de ruptura y, en consecuencia, lo es en todo $\mathbb{R}$.

$h'_1(x) = e^x$ y $h'_2(x) = 2x + 1$

$\left.\begin{array}{l} h'_1(0) = 1 \\ h'_2(0) = 1 \end{array}\right\}$ Como $h'_1(0) = h'_2(0)$, la función $h(x)$ es derivable en $x = 0$ y $h'(0) = 1$.

La derivada queda así:

$$h'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

67 Calcula, en cada caso, los valores de m y n para que las funciones siguientes sean derivables en $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \le 2 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} mx^2 + nx - 3 & \text{si } x < 1 \\ 2nx - 4 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x \le 0 \\ mx + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d) $j(x) = \begin{cases} mx^2 + 3x & \text{si } x < -2 \\ x^2 - nx - 4 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

a) Llamemos $f_1(x) = x^2 - 5x + m$ y $f_2(x) = -x^2 + nx$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

Para que la función sea continua en el punto de ruptura $x = 2$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = -6 + m \\ f_2(2) = -4 + 2n \end{array}\right\} \to -6 + m = -4 + 2n$$

$f'_1(x) = 2x - 5$ y $f'_2(x) = -2x + n$

Para que sea derivable en el punto de ruptura $x = 2$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} f'_1(2) = -1 \\ f'_2(2) = -4 + n \end{array}\right\} \to -1 = -4 + n$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -6 + m = -4 + 2n \\ -1 = -4 + n \end{array}\right\} \to \text{Los valores son } m = 8,\ n = 3.$$

b) Llamemos $g_1(x) = mx^2 + nx - 3$ y $g_2(x) = 2nx - 4$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

Para que la función sea continua en el punto de ruptura $x = 1$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} g_1(1) = m + n - 3 \\ g_2(1) = 2n - 4 \end{array}\right\} \to m + n - 3 = 2n - 4$$

$g'_1(x) = 2mx + n$ y $g'_2(x) = 2n$

Para que sea derivable en el punto de ruptura $x = 1$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} g'_1(1) = 2m + n \\ g'_2(1) = 2n \end{array}\right\} \to 2m + n = 2n$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} m + n - 3 = 2n - 4 \\ 2m + n = 2n \end{array}\right\} \to \text{Los valores son } m = 1,\ n = 2.$$

c) Llamemos $h_1(x) = (x - 1)^3$ y $h_2(x) = mx + n$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

Para que la función sea continua en el punto de ruptura $x = 0$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} h_1(0) = -1 \\ h_2(0) = n \end{array}\right\} \to n = -1$$

$h'_1(x) = 3(x - 1)^2$ y $h'_2(x) = m$

Para que sea derivable en el punto de ruptura $x = 0$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} h'_1(0) = 3 \\ h'_2(0) = m \end{array}\right\} \to m = 3$$

d) Llamemos $j_1(x) = mx^2 + 3x$ y $j_2(x) = x^2 - nx - 4$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

Para que la función sea continua en el punto de ruptura $x = -2$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} j_1(-2) = 4m - 6 \\ j_2(-2) = 2n \end{array}\right\} \to 4m - 6 = 2n$$

$j'_1(x) = 2mx + 3$ y $j'_2(x) = 2x - n$

Para que sea derivable en el punto de ruptura $x = -2$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} j'_1(-2) = -4m+3 \\ j'_2(-2) = -4-n \end{array}\right\} \to -4m+3 = -4-n$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4m-6 = 2n \\ -4m+3 = -4-n \end{array}\right\} \to \text{Los valores son } m = 2,\ n = 1.$$

Cuestiones teóricas

68 **Comprueba que la función $y = (2 - x)^3$ pasa por los puntos (0, 8), (2, 0) y (3 –1) y que su derivada se anula en el punto (2, 0). ¿Puede ser un máximo o un mínimo ese punto? Justifica tu respuesta.**

Llamamos $f(x) = (2-x)^3$. Comprobamos que los puntos pertenecen a *f*:

(0, 8): $f(0) = 2^3 = 8$

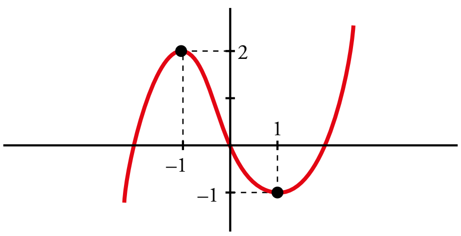
(2, 0): $f(2) = (2-2)^3 = 0$

(3, –1): $f(3) = (-1)^3 = -1$

$f'(x) = 3(2-x)^2(-1) \to f'(2) = 0$

El punto no puede ser máximo: si fuera máximo la función debería crecer a la izquierda del punto (2, 0), pero tenemos el punto (0, 8) y nuestra función es polinómica, no tiene asíntotas, por lo que no puede ser un máximo. Tampoco puede ser un mínimo, por la existencia del punto (3, –1), así que será punto singular pero ni máximo ni mínimo.

69 **Dibuja una función que tenga derivada nula en $x = 1$ y en $x = -1$, derivada negativa en el intervalo [–1, 1] y positiva para cualquier otro valor de x.**

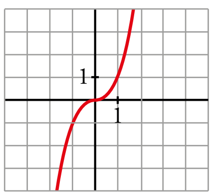


70 **Pon ejemplos de funciones f cuya derivada sea $f'(x) = 2x$. ¿Cuántas existen?**

Existen infinitas.

$f(x) = x^2 + k$, donde x es cualquier número.

71 **Esta es la gráfica de la función $y = x^3$.**



a) ¿Tiene algún punto singular?

b) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$?

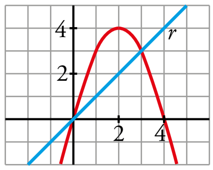
c) ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en $x = 0$?

a) El punto (0, 0) tiene tangente horizontal. Este es el único punto singular.

b) La función es creciente en $x = 0$.

c) La recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

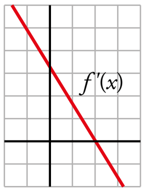
72 **¿Existe algún punto de la función $y = 4x - x^2$ en el que la tangente sea paralela a la recta r? En caso afirmativo, hállalo.**



$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 4 - 2x \\ \text{Pendiente de la recta} = 1 \end{array}\right\} \; 4 - 2x = 1 \;\rightarrow\; x = \frac{3}{2}$$

Punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$

73 **Esta es la gráfica de f', la función derivada de f.**



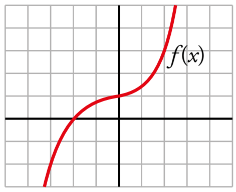
a) ¿Tiene f algún punto de tangente horizontal?

b) ¿Es f creciente o decreciente?

a) Sí, en $x = 2$, puesto que $f'(2) = 0$.

b) Si $x < 2$ es creciente, pues $f' > 0$; y si $x > 2$ es decreciente, pues $f' > 0$.

74 **Observa la gráfica de la función $y = f(x)$.**



¿Cuál será la gráfica de una función $y = g(x)$ tal que $g'(x) = f'(x)$ y $g(0) = -1$?

Como $f(0) = 1$, debe ser $g(x) = f(x) - 2$, es decir, sería la misma gráfica que la de $f(x)$ pero desplazada dos unidades hacia abajo. De esta forma:

$g(0) = f(0) - 2 = 1 - 2 = -1$

$g'(x) = D[f(x) - 2] = f'(x)$

75 **Dadas las funciones $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x$ y $f(x) = e^{2x}$ halla, en cada caso, f', f'', f''', f^{IV}. ¿Cuál será la derivada enésima de cada una de las funciones dadas?**

- $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x$

  $f'(x) = 4x^3 - 10x + 6$

  $f''(x) = 12x^2 - 10$

  $f'''(x) = 24x$

  $f^{IV}(x) = 24$

  $f^{V}(x) = 0$ y, desde esta, todas las derivadas sucesivas siguientes.

- $f(x) = e^{2x}$

  $f'(x) = 2\,e^{2x}$

  $f''(x) = 4\,e^{2x}$

  $f'''(x) = 8\,e^{2x}$

  $f^{IV}(x) = 16\,e^{2x}$

  La fórmula general, teniendo en cuenta que los coeficientes son potencias de base 2, es:

  $f^{n)}(x) = 2^n e^{2x}$

76 **Sabemos que $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Halla, si es posible:**

a) $f'[g(2)]$ **b) $f'[g(x)]$** **c) $g'[f(4)]$** **d) $[f(g(x))]'$**

$Dom\, f = \mathbb{R} - \{3\}$

$Dom\, g = \mathbb{R}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{(x-3)^2} \;\rightarrow\; Dom\, f' = \mathbb{R} - \{3\}$

$g'(x) = 2x \;\rightarrow\; Dom\, g' = \mathbb{R}$

a) $f'(g(2)) = f'(5) = -\dfrac{1}{4}$

Podemos hacer el cálculo porque $g(2) \in Dom\ f'$.

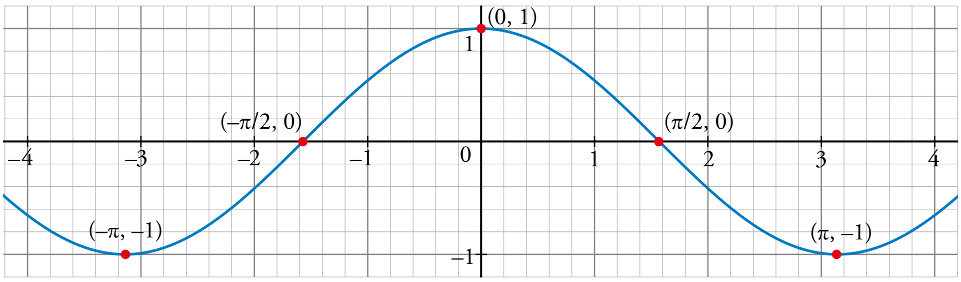
b) $f'(g(x)) = f'(x^2+1) = -\dfrac{1}{(x^2-2)^2}$ si $x \neq \pm\sqrt{2}$

Podemos calcular $f'(g(x))$ pero no en todos los puntos del recorrido de $g(x)$, solamente si lo restringimos antes.

c) $g'(f(4)) = g'(1) = 2$

d) $\left[f(g(x))\right]' = \left[f(x^2+1)\right]' = \left[\dfrac{1}{x^2-2}\right]' = -\dfrac{2x}{(x^2-2)^2}$ definida si $x \neq \pm\sqrt{2}$.

77 **¿Cuál es la mayor pendiente que puede tener una tangente a la curva *y = cos x*?**



Dibujamos $f(x) = cos\, x$, y estudiamos la función entre $[-\pi, \pi]$. Será suficiente porque sabemos que la gráfica se repite.

Vemos que la tangente en $-\pi$ será horizontal, con pendiente cero. Si buscamos valores de x en el intervalo $\left(-\pi, \dfrac{-\pi}{2}\right)$ la pendiente de su tangente empieza a crecer hasta llegar a $x = -\dfrac{-\pi}{2}$, donde tendrá pendiente positiva máxima. A partir de ahí empieza a disminuir otra vez.

Veámoslo analíticamente:

Queremos saber cuándo será máxima la pendiente de una tangente a $f(x)$, es decir, cuándo será máxima $f'(x) = -sen\, x$. Para ello vemos dónde se anula su derivada:

$$f''(x) = -cos\ x = 0 \;\rightarrow\; x = -\frac{\pi}{2},\ x = \frac{\pi}{2}$$

Veamos si alguno de ellos es máximo de f':

Si $x \in \left(-\pi, \dfrac{-\pi}{2}\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f'$ es creciente

Si $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f'$ es decreciente

Si $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f'$ es creciente

Por lo tanto su mayor pendiente será en el punto $\dfrac{-\pi}{2}$ y su valor: $f'\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) = -sen\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) = 1$

Para generalizarlo diremos que su mayor pendiente será en los puntos: $x = \dfrac{-\pi}{2} + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x - 24$$

78 **Sabemos que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ y $h(x) = e^{f(x)}$. ¿Cuál de estos tres valores corresponde a $h'(0)$?:**

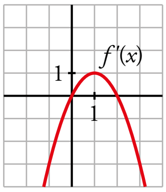
a) $\frac{1}{e}$ **b)** 0 **c)** 1

$h'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

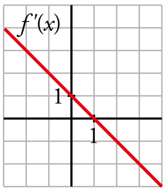
Por tanto, $h'(0) = e^{f(0)} \cdot f'(0) = e^0 \cdot 1 = 1$, que se corresponde con c).

79 **¿Cuál de estas gráficas corresponde a la función derivada de una curva que tiene un máximo en $x = 1$? ¿Por qué?**

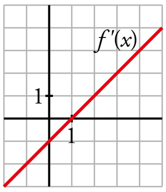
a)



b)

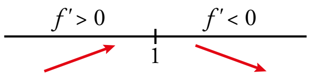


c)



La gráfica del apartado b), porque $f'(1) = 0$.

Además,



En consecuencia, $x = 1$ es un máximo.

80 **¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.**

a) **Si $f'(a) > 0$, entonces f es creciente en $x = a$.**

b) **Si $f'(a) = 0$, entonces f no crece ni decrece en $x = a$.**

c) **Si f es decreciente en $x = a$, entonces $f'(a) < 0$.**

d) **Si la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$ es $y = 3x - 5$, entonces $f'(2) = 3$ y $f(2) = 1$.**

e) **Si $f'(5) = 0$ y f es creciente para cualquier otro valor de x, entonces f no tiene tangente horizontal en $x = 5$.**

f) **La función $tg\, x$ no tiene puntos singulares.**

a) Verdadero.

b) Falso. Hay funciones con puntos singulares donde la función es creciente. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es creciente en el punto singular (0, 0).

c) Falso. La función $f(x) = -x^3$ siempre es decreciente y $f'(0) = 0$.

d) Verdadero. $f'(2)$ es la pendiente de la tangente y $(2, f((2)) = (2, 1)$ es el punto de tangencia.

e) Falso. Tiene un punto de inflexión, es decir, de tangente horizontal.

f) Verdadero. La derivada, $1/cos^2(x)$, nunca se anula.

Página 349

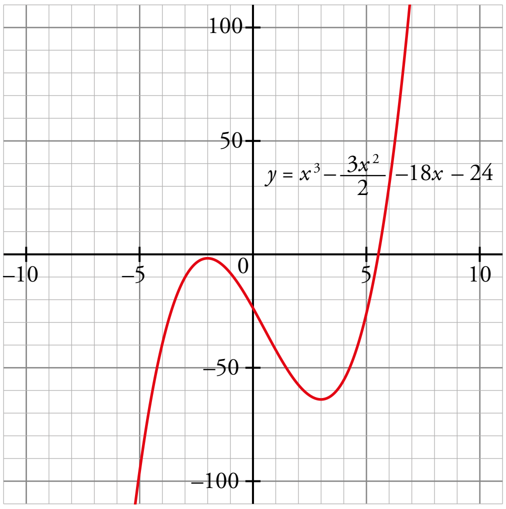
81 **Sea f una función polinómica de tercer grado tal que $f'(-2) = 0$ y $f'(3) = 0$. Dibuja si es posible una función en cada uno de los siguientes casos:**

a) **No existe ningún valor del intervalo (–2, 3) en el que $f(x) = 0$.**

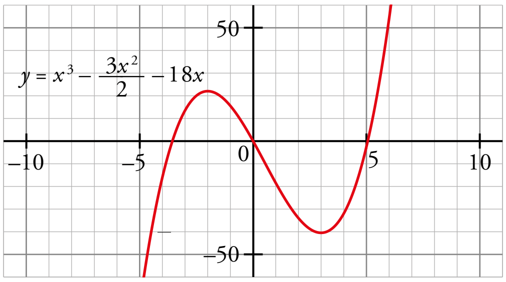
b) **Existe un solo valor de x en el intervalo (–2, 3) en el que $f(x) = 0$.**

c) **Existen dos valores de x en el intervalo (–2, 3) en los que $f(x) = 0$.**

a) Sí es posible, pueden ser puntos singulares sin que la gráfica corte el eje de abscisas entre ellos, por debajo del eje de las x: $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x - 24$

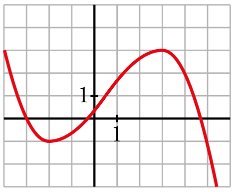


b) Sí es posible, la gráfica puede dibujar un máximo en –2 y un mínimo en 3 pasando por el (0, 0), como por ejemplo: $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x$



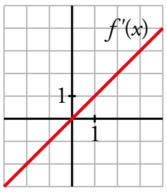
c) No es posible. Para ello debería tener otro máximo o mínimo en el intervalo descrito. Eso no es posible ya que su derivada es de segundo grado y tendrá dos soluciones como mucho. Por lo que no puede tener más máximos ni mínimos

82 **Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$.**

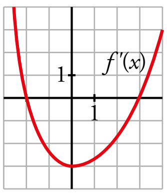


¿Cuál de las siguientes gráficas puede ser la de $f'(x)$? Justifícalo:

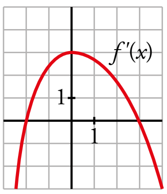
a)



b)



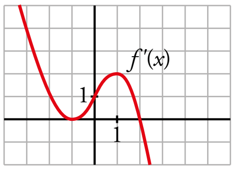
c)

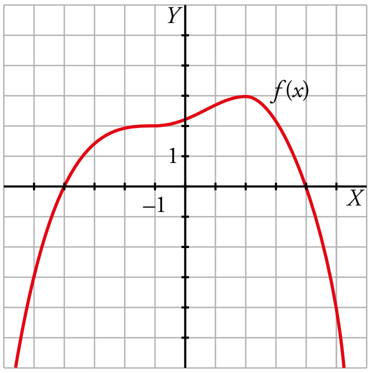


La gráfica del apartado c), porque $f'(-2) = f'(3) = 0$ al ser $x = -2$ y $x = 3$ puntos singulares de $f(x)$. Como $f(x)$ crece en el intervalo $(-2, 3)$, $f'(x) > 0$ y esto solo ocurre en el apartado c). El resto de la gráfica de c) es coherente con la de $f(x)$.

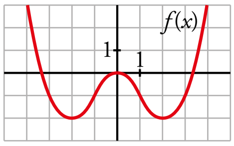
Para profundizar

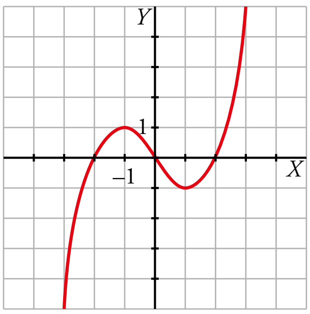
83 **Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos que $f(-1) = 2$, $f(2) = 3$ y que tiene por gráfica de su función derivada $f'(x)$ la siguiente:**





84 **Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y representa de forma aproximada la función $y = f'(x)$.**





85 **Demuestra que no es posible trazar una recta tangente a la curva $f(x) = 4x - x^2$ desde el punto $A(2, -3)$.**

Si existe un punto $(a, f(a))$ por el que pase una tangente, esta será:

$y = f(a) + f'(a)(x - a)$

$f'(x) = 4 - 2x = 0 \;\to\; y = (4a - a^2) + (4 - 2a)(x - a)$

Si dicha tangente contiene al punto $A(2, -3)$: $-3 = (4a - a^2) + (4 - 2a)(2 - a) \;\to$

$\to\; -3 = 4a - a^2 + 8 - 4a - 4a + 2a^2 \;\to\; a^2 - 4a + 11 = 0 \;\to\; a = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 44}}{2}$

No tiene solución en los reales $\to$ No existe la tangente buscada.

86 **Halla los lados del rectángulo de área máxima entre todos los que tienen la diagonal igual a 12 cm.**

Llamemos x, y a la base y a la altura del rectángulo, respectivamente.

$x^2 + y^2 = 12^2 \;\to\; y = \sqrt{144 - x^2}$

El área del rectángulo es:

$A = xy = x\sqrt{144 - x^2}$

Hallamos el valor que da el área máxima:

$$A' = \sqrt{144 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{144 - x^2}} = \frac{144 - 2x^2}{\sqrt{144 - x^2}}$$

$A' = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{144 - 2x^2}{\sqrt{144 - x^2}} = 0 \;\rightarrow\; 144 - 2x^2 = 0 \;\rightarrow$ Obtenemos solo una solución válida: $x = 6\sqrt{2}$ cm.

Comprobamos que es un máximo:

0		$6\sqrt{2}$	
	$A' > 0$ ↗		$A' < 0$ ↘

Los lados $x = 6\sqrt{2}$ cm, $y = \sqrt{144 - (6\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{2}$ cm nos dan el rectángulo de área máxima, que es $A = 72$ cm^2.

87 **Se quiere construir un barril cilíndrico con una capacidad de 150 L. Halla el radio y la altura del cilindro para que la cantidad de chapa empleada en su construcción sea mínima.**

Sean r y h el radio y la altura del cilindro, respectivamente.

$\pi r^2 \text{h} = 150 \;\rightarrow\; \text{h} = \dfrac{150}{\pi r^2}$

La cantidad de chapa es igual a la suma del área lateral más las áreas de las tapas:

$$A = 2\pi r\text{h} + 2\pi r^2 = 2\left(\pi r\,\frac{150}{\pi r^2} + \pi r^2\right) = 2\left(\frac{150}{r} + \pi r^2\right)$$

Hallamos el valor que da el área mínima.

$$A' = 2\left(-\frac{150}{r^2} + 2\pi r\right)$$

$$A' = 0 \;\rightarrow\; -\frac{150}{r^2} + 2\pi r = 0 \;\rightarrow\; 2\pi r = \frac{150}{r^2} \;\rightarrow\; r^3 = \frac{150}{2\pi} \;\rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \text{h} = \frac{150}{\pi r^2} = \frac{150}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}\right)^2} = 2\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$$

Comprobamos que $r = \sqrt[3]{\dfrac{75}{\pi}}$ es un mínimo:

0		$\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$	
	$A' < 0$ ↘		$A' > 0$ ↗

Por tanto, las medidas son $r = \sqrt[3]{\dfrac{75}{\pi}}$ dm, $\text{h} = 2\sqrt[3]{\dfrac{75}{\pi}}$ dm.

88 **Halla las asíntotas de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ y estudia la posición, de la curva con respecto a ellas. Calcula los puntos singulares y representa la función.**

Asíntotas oblicuas:

Como la función no es un cociente de polinomios, hallamos las asíntotas oblicuas usando límites.

Recordemos que si la asíntota es $y = ax + b$, entonces:

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = 0$$

Cuando $x \to +\infty$, la asíntota oblicua es $y = x$.

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x} = -1 \text{ (porque } x \text{ es negativa)}$$

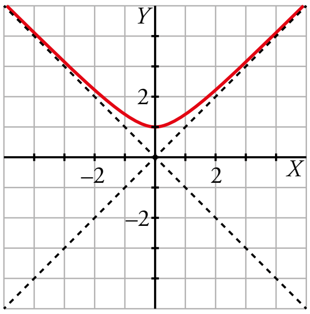
$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - (-x)\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)} = 0$$

Cuando $x \to -\infty$, la asíntota oblicua es $y = -x$.

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Esta derivada solo se anula si $x = 0$. Como $f(0) = 1$, el único punto singular es $(0, 1)$.

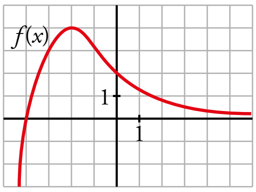


AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 3.3. (EA 3.3.1.) CE3.4. (EA 3.4.1.-EA 3.4.2.)

Página 349

1 Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y responde.



a) ¿Cuál es la T.V.M. en los intervalos [0, 3] y [–4, –2]?

b) ¿Tiene algún punto de tangente horizontal?

c) ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?

d) Sabemos que la tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. ¿Cuánto vale $f'(0)$?

a) T.V.M. $[0, 3] = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{1/2 - 2}{3} = -\dfrac{1}{2}$

T.V.M. $[-4, -2] = \dfrac{f(-2) - f(-4)}{-2 - (-4)} = \dfrac{4 - 0}{-2 + 4} = 2$

b) Sí, $P(-2, 4)$.

c) Si $x < -2$, $f'(x) > 0$.

d) La recta $y = -x$ (bisectriz del 2.º cuadrante) tiene pendiente igual a –1. Por tanto, $f'(0) = -1$.

2 Dada $f(x) = x^2 - 3x$, prueba que $f'(-2) = -7$ aplicando la definición de derivada.

$f'(-2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$

$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) = 4 + 6 = 10$

$f(-2 + h) = (-2 + h)^2 - 3(-2 + h) = 4 - 4h + h^2 + 6 - 3h = h^2 - 7h + 10$

$f(-2 + h) - f(-2) = h^2 - 7h$

$\dfrac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \dfrac{h^2 - 7h}{h} = h - 7$

$\lim\limits_{h \to 0} h - 7 = -7$

Por tanto, $f'(-2) = -7$.

3 Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x^2}$ **b)** $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{3} \cdot e^{-x}\right)$ **c)** $f(x) = \cos^2 \pi x$ **d)** $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right)^3$

a) $f(x) = x^{1/3} + 2x^{-2}$

$f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} - 4x^{-3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{4}{x^3}$

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{3}\right) + \ln e^{-x} = \ln x - \ln 3 - x$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1 - x}{x}$

c) $f'(x) = 2\pi \cos \pi x(-\mathit{sen}\ \pi x) = -2\pi \cos \pi x \cdot \mathit{sen}\ \pi x$

d) $f'(x) = 3\left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right)^2 D\left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right) = 3\dfrac{x^4}{(x - 2)^2} \cdot \dfrac{2x(x - 2) - x^2}{(x - 2)^2} = \dfrac{3x^4(x^2 - 4x)}{(x - 2)^4}$

4 **Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = ln\, x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$.**

Punto de tangencia: $x = 1,\ y = ln\, 1^2 = 0 \ \to\ P(1, 0)$

Pendiente de la recta tangente: $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x} \ \to\ f'(1) = 2$

Ecuación: $y = 0 + 2(x - 1) \ \to\ y = 2x - 2$

5 **Halla los puntos singulares de la función $y = 2 + (1 - x)^3$. ¿Tiene máximo o mínimo relativo esa función?**

$f(x) = 2 + (1 - x)^3 \ \to\ f'(x) = 3(1 - x)^2(-1) = -3(1 - x)^2$

$f'(x) = 0 \ \to\ -3(1 - x)^2 = 0 \ \to\ 1 - x = 0 \ \to\ x = 1$

$f(1) = 2 + (1 - 1)^3 = 2$

Punto singular: (1, 2).

Como $f'(x) = -3(1 - x)^2$ es menor que 0 para cualquier valor de $x \neq 1$, f es decreciente en todo su dominio y, por tanto, el punto singular no es máximo ni mínimo.

6 **Estudia y representa la función $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2 - 3x$. Indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.**

Estudiemos sus puntos singulares y su crecimiento mediante su derivada:

$$f'(x) = x^2 + 2x - 3 = 0 \ \to\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \ \to\ x = -3; x = 1$$

$P(-3, 9)$ y $Q\left(1; \dfrac{5}{3}\right)$ son puntos singulares. Veamos si son máximo o mínimo:

$x < -3: f' > 0 \ \to\ f$ creciente

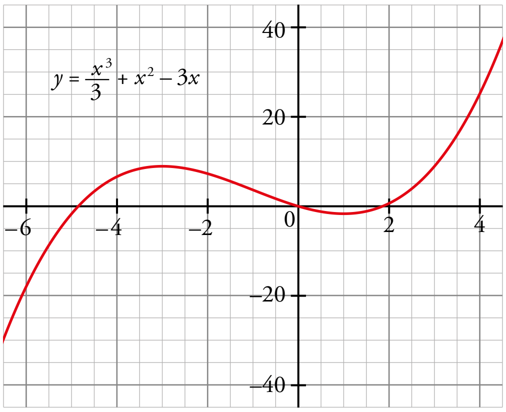
$-3 < x < 1: f' < 0 \ \to\ f$ decreciente

$x > 1: f' > 0 \ \to\ f$ creciente $\to\ P(-3, 9)$ es máximo y $Q\left(1; \dfrac{5}{3}\right)$ es mínimo

Estudiemos sus ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



7 **Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{2 - x}$.**

a) **Estudia las asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas.**

b) **Halla los máximos y los mínimos.**

c) **Represéntala.**

a) • Asíntotas verticales. Recta $x = 2$ porque este valor anula el denominador pero no el numerador.

IZQUIERDA: $\dfrac{1,99^2 - 2 \cdot 1,99 + 4}{2 - 1,99} = 398 \to f(x) \to +\infty$

DERECHA: $\dfrac{2,01^2 - 2 \cdot 2,01 + 4}{2 - 2,01} = -402 \to f(x) \to -\infty$

• Ramas infinitas. Como la diferencia entre los grados del numerador y del denominador es 1, tiene una asíntota oblicua.

$\dfrac{x^2 - 2x + 4}{-x + 2} = -x - \dfrac{4}{x - 2} \to$ La recta $y = -x$ es la asíntota oblicua.

$f(x) - (-x) = -\dfrac{4}{x - 2}$

Si $x \to -\infty$, $f(x) - (-x) > 0 \to$ La función está encima de la asíntota.

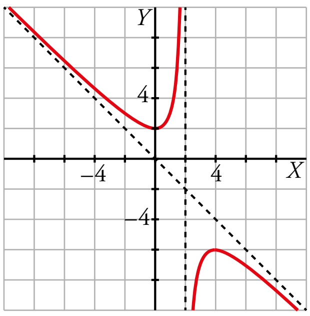
Si $x \to +\infty$, $f(x) - (-x) < 0 \to$ La función está debajo de la asíntota.

b) $f'(x) = \dfrac{(2x - 2)(2 - x) - (x^2 - 2x + 4) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \dfrac{-x^2 + 4x}{(2 - x)^2}$

$f'(x) = 2 \to \dfrac{-x^2 + 4x}{(2 - x)^2} = 0 \to -x^2 + 4x = 0 \to x = 0,\ x = 4$

$f(0) = 0$, $f(4) = -6 \to$ Los puntos $(0, 2)$ y $(4, -6)$ son puntos singulares, donde el primero es un mínimo y el segundo es un máximo.

c)



8 **Estudia y representa $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.**

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntota vertical: $x = 0$. Posición $\begin{cases} x \to 0^-, & f(x) \to -\infty \\ x \to 0^+, & f(x) \to -\infty \end{cases}$

Asíntota horizontal:

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 1$; $y = 1$. Posición $\begin{cases} x \to +\infty, & f(x) < 1 \\ x \to -\infty, & f(x) < 1 \end{cases}$

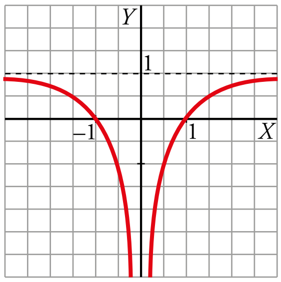
Puntos singulares:

$f'(x) = \dfrac{2x\,x^2 - (x^2 - 1)\,2x}{(x^2)^2} = \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3}$

$f'(x) = 0 \to \dfrac{2}{x^3} = 0$. No tiene solución.

No tiene puntos singulares.

Esta es su gráfica:



9 **Calcula el valor de b y c para que la función $y = x^3 + bx^2 + c$ tenga un punto singular en $P(2, -3)$.**

Si $P(2, -3)$ es un punto singular, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = -3 \\ f'(2) = 0 \end{array}\right\}$$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2^3 + b \cdot 2^2 + c = -3 \\ 3 \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 4b + c = -11 \\ 4b = -12 \end{array}\right\} \to b = -3, \ c = 1$$

10 **Calcula dos números cuya suma sea 50 y tales que la suma de sus cuadrados sea mínima.**

Sean x e y dos números.

$x + y = 50 \to y = 50 - x$

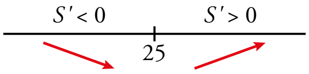
La suma de los cuadrados es $S = x^2 + y^2 = x^2 + (50 - x)^2 = 2x^2 - 100x + 2\,500$

Buscamos que la suma de cuadrados sea mínima:

$S' = 4x - 100$

$S' = 0 \to 4x - 100 = 0 \to x = 25 \to y = 50 - 25 = 25$

Ahora comprobamos si el valor $x = 25$ es un mínimo:



Por tanto, cuando $x = y = 25$ se obtiene la suma de cuadrados mínima que es, $S = 1\,250$.

13 DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.) CE 1.13. (EA 1.13.1.) CE 5.3. (EA 5.3.1.)

Página 355

Resuelve

Relación funcional y relación estadística

En cada uno de estos casos debes decir si, entre las dos variables que se citan, hay relación funcional o estadística (correlación) y, en este último caso, indicar si es positiva o negativa:

a) En un conjunto de familias:

Estatura media de los padres-Estatura media de los hijos

b) Entre los países del mundo respecto a España:

Volumen de exportación-Volumen de importación

c) En los países del mundo:

Tasa de mortalidad infantil-Médicos por cada 1 000 habitantes

d) En las viviendas de una ciudad:

KWh consumidos durante enero-Coste del recibo de la luz

Número de personas en cada casa-Coste del recibo de la luz

e) En los equipos de fútbol:

Posición al finalizar la liga-Número de partidos perdidos

Posición al finalizar la liga-Número de partidos ganados

a) Estadística, porque la estatura media de los padres no nos permite saber exactamente la estatura media de los hijos. Hay correlación positiva. Normalmente, los hijos de padres altos son altos.

b) Estadística, porque el volumen de exportación no nos permite saber exactamente el volumen de importación. Hay correlación negativa. Normalmente, los países que exportan mucho, importan poco.

c) Estadística, porque la tasa de mortalidad infantil no nos permite saber exactamente el número de médicos por cada 1 000 habitantes. Hay correlación negativa. Normalmente, los países que tienen una tasa de mortalidad infantil grande, tienen pocos médicos por cada 1 000 habitantes.

d) *kWh consumidos durante enero - Coste del recibo de la luz* → Funcional; si conocemos los kWh consumidos durante enero, podemos calcular el coste del recibo de la luz.

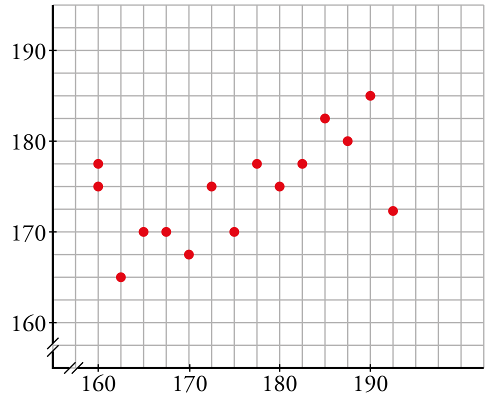
Número de personas en cada casa - Coste del recibo de la luz → Estadística, porque el número de personas en cada casa no nos permite saber exactamente el coste del recibo de la luz. Hay correlación positiva. Normalmente, cuantas más personas hay en una casa, más luz se consume.

e) *Posición al finalizar la liga - Número de partidos perdidos* → Estadística, porque la posición al finalizar la liga no nos permite saber exactamente el número de partidos perdidos. Hay correlación negativa. Normalmente, cuanto más alta es la posición en la liga, menos partidos se han perdido.

Posición al finalizar la liga - Número de partidos ganados → Estadística, porque la posición al finalizar la liga no nos permite saber exactamente el número de partidos ganados. Hay correlación positiva. Normalmente, cuanto más alta es la posición en la liga, más partidos se han ganado.

Ejemplo de relación estadística

En la siguiente gráfica, cada punto representado corresponde a un chico. La abscisa es la estatura de su padre, y la ordenada, su propia altura:



a) Identifica a Guillermo y Gabriel, hermanos de buena estatura, cuyo padre es bajito.

b) Identifica a Sergio, de estatura normalita, cuyo padre es muy alto.

c) ¿Podemos decir que hay una cierta relación entre las estaturas de estos 15 chicos y las de sus padres?

a) Guillermo y Gabriel están representados mediante los puntos (160, 175) y (160; 177,5).

b) Sergio está representado con el punto (192,5; 172,5).

c) Sí; en general, cuanto más alto sea el padre, más altos son los hijos.

1 DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES. NUBES DE PUNTOS

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) CE 5.1. (EA 5.1.1.-EA 5.1.2.) CE 5.2. (EA 5.2.1.-EA 5.2.2.-EA 5.2.3.-EA 5.2.4.)

Página 357

1 **[La lectura de los enunciados permite trabajar la destreza expresión escrita de esta clave].**

¿Verdadero o falso?

a) En una distribución bidimensional, para cada valor de x solo puede haber un valor de y.

b) Cuantos más puntos tenga una distribución bidimensional, más fuerte es su correlación.

c) Las series temporales son distribuciones estadísticas en las que una de las variables es el tiempo. Aunque no sean distribuciones bidimensionales propiamente dichas, pueden tratarse del mismo modo que estas.

a) Falso, se pueden mirar las nubes de puntos de esta misma página.

b) Falso, la correlación depende de la relación entre las características que se estudian en una población, no del número de elementos de la población.

c) Verdadero.

2 CORRELACIÓN LINEAL

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) CE 5.1. (EA 5.1.1.-EA 5.1.2.) CE 5.2. (EA 5.2.1.-EA 5.2.2.-EA 5.2.3.-EA 5.2.4.)

Página 359

1 **¿Verdadero o falso?**

a) Cuanto más próximos estén a una recta los puntos de una distribución bidimensional, más fuerte es su correlación lineal.

b) Si la recta de regresión tiene pendiente negativa, la correlación lineal es negativa.

c) Si los puntos de la nube no se aproximan a ninguna recta, entonces las variables están incorreladas.

a) Verdadero. Porque la correlación estudia las distancias de los puntos a la recta de regresión. Cuanto más pequeña es la distancia a la recta, mayor es la correlación.

b) Verdadero. Una recta de pendiente negativa indica, como el signo del coeficiente de correlación, que al aumentar una variable, la otra disminuye.

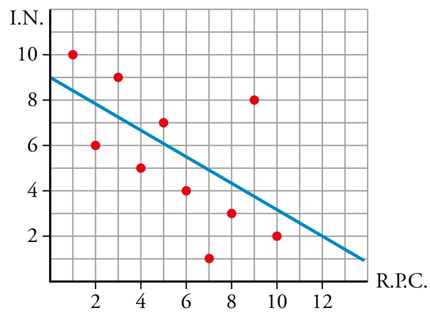
c) Verdadero.

2 **[La interpretación de los datos de la tabla requiere poner en práctica la iniciativa (dimensión productiva de esta clave)].**

La siguiente tabla muestra cómo se ordenan entre sí diez países, A, B, C…, según dos variables, R.P.C. (*renta per cápita*) e I.N. (*índice de natalidad*). Representa los resultados en una nube de puntos, traza la recta de regresión y di cómo te parece la correlación.

PAÍSES	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
R.P.C.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I.N.	10	6	9	5	7	4	1	3	8	2

La correlación es negativa y moderadamente alta (–0,62).



3 ▶ PARÁMETROS ASOCIADOS A UNA DISTRIBUCIÓN BIDIMENSIONAL

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) CE 1.13. (EA 1.13.1.) CE 5.1. (EA 5.1.1.-EA 5.1.4.) CE 5.3. (EA 5.3.1.)

Página 361

1 **¿Verdadero o falso?**

a) El signo de la correlación (r) coincide con el de la covarianza (σ_{xy}).

b) Si cambiamos las unidades en que se expresa la variable x, entonces se modifican los valores de $\bar{x}$, σ_x y σ_{xy}.

c) Aunque cambiemos las unidades en que se da la variable x (o y, o ambas) el valor de la correlación, r, no cambia.

a) Verdadero, $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$; como σ_x y σ_y son positivas, el signo de r es el de σ_{xy}.

b) Falso. Varían todos los parámetros menos r, porque r es el único que no tiene dimensiones.

c) Verdadero.

2 **Obtén mediante cálculos manuales los coeficientes de correlación de las distribuciones del epígrafe anterior:**

Salto de altura-Salto con pértiga

Salto de altura-1 500 m lisos

Salto de altura-Lanzamiento de peso

Comprueba tus resultados con la calculadora.

x: salto de altura

y: salto con pértiga

Elaboramos la tabla como en el ejercicio resuelto:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	1	1	1	1
2	4	4	16	8
3	2	9	4	6
4	3	16	9	12
5	5	25	25	25
6	7	36	49	42
7	6	49	36	42
8	8	64	64	64
36	36	204	204	200

$$\bar{x} = \frac{36}{8} = 4,5 \qquad \bar{y} = \frac{36}{8} = 4,5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{200}{8} - 4,5^2} = 2,2913$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{200}{8} - 4,5^2} = 2,2913$$

$$\sigma_{xy} = \frac{200}{8} - 4,5 \cdot 4,5 = 4,75$$

$$r = \frac{4,75}{2,2913 \cdot 2,2913} = 0,90475$$

x: salto de altura

y: 1 500 m lisos

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	3	1	9	3
2	2	4	4	4
3	5	9	25	15
4	1	16	1	4
5	7	25	49	35
6	6	36	36	36
7	4	49	16	28
8	8	64	64	64
36	36	204	204	189

$$\bar{x} = \frac{36}{8} = 4{,}5 \qquad \bar{y} = \frac{36}{8} = 4{,}5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{204}{8} - 4,5^2} = 2{,}2913$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{204}{8} - 4,5^2} = 2{,}2913$$

$$\sigma_{xy} = \frac{189}{8} - 4{,}5 \cdot 4{,}5 = 3{,}375$$

$$r = \frac{3,375}{2,2913 \cdot 2,2913} = 0{,}64285$$

x: salto de altura

y: lanzamiento de peso

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	7	1	49	7
2	5	4	25	10
3	8	9	64	24
4	6	16	36	24
5	4	25	16	20
6	1	36	1	6
7	3	49	9	21
8	2	64	4	16
36	36	204	204	128

$$\bar{x} = \frac{36}{8} = 4{,}5 \qquad \bar{y} = \frac{36}{8} = 4{,}5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{204}{8} - 4,5^2} = 2{,}2913$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{204}{8} - 4,5^2} = 2{,}2913$$

$$\sigma_{xy} = \frac{128}{8} - 4{,}5 \cdot 4{,}5 = -4{,}25$$

$$r = \frac{-4,25}{2,2913 \cdot 2,2913} = -0{,}80952$$

4 RECTA DE REGRESIÓN

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) CE 1.13. (EA 1.13.1.) CE 5.1. (EA 5.1.5.) CE 5.2. (EA 5.2.1.-EA 5.2.2.-EA 5.2.3.-EA 5.2.4.)

Página 363

1 **¿Verdadero o falso?**

a) Cuanto más fuerte sea la correlación, más puntos habrá de la nube que se encuentren exactamente sobre la recta de regresión.

b) Cuanto más fuerte sea la correlación, más cerca de la recta de regresión estarán los puntos de la nube.

c) Cuanto más fuerte sea la correlación, más fiables serán las estimaciones hechas a partir de la recta de regresión.

a) Falso. Aunque la correlación sea muy grande, es posible que ningún punto de la nube de puntos esté sobre la recta.

b) Falso. Habrá muchos puntos cerca de la recta, pero puede haber puntos aislados lejos de la recta.

c) Verdadero. Los valores de una de las variables son más predecibles, puesto que están muy próximos a la recta de regresión.

5 HAY DOS RECTAS DE REGRESIÓN

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) **CE 5.1.** (EA 5.1.5.) **CE 5.2.** (EA 5.2.1.-EA 5.2.2.-EA 5.2.3.-EA 5.2.4.) **CE 5.3.** (EA 5.3.1.)

Página 364

1 ¿Verdadero o falso?

a) En una distribución bidimensional en la que se estudien conjuntamente las estaturas (x) y los pesos (y) de un grupo de jóvenes en la cual $\bar{x} = 170$ cm e $\bar{y} = 65$ kg, es imposible que las rectas de regresión sean $y = 0{,}8x - 67$ e $y = 1{,}1x - 121$.

b) Si en una distribución bidimensional es $\bar{x} = 3$ e $\bar{y} = 5$, entonces es posible que las rectas de regresión sean $y = 2x - 1$ e $y = -x + 8$, pues ambas se cortan en (3, 5).

c) Si las rectas de regresión son $y = \frac{1}{5}x + 10$ e $y = 11x - 2$, entonces la correlación es débil porque las rectas forman un ángulo próximo a 90°.

a) $\left\{\begin{array}{l} y = 0{,}8x - 67 \\ y = 1{,}1x - 121 \end{array}\right\}$ $x = 180{,}0$; $y = 77{,}0 \rightarrow$ Se cortan en (180, 77).

El punto de corte de las rectas de regresión debe ser $(\bar{x}, \bar{y}) = (170, 65)$, luego es verdadera la afirmación.

b) Falso. El signo de la pendiente de las dos rectas de regresión debe ser igual.

c) Verdadero. Se puede observar en las gráficas de esta página.

6 TABLAS DE CONTINGENCIA

C.E.: CE 1.13. (EA 1.13.1.) CE 5.1. (EA 5.1.1.-EA 5.1.2.-EA 5.1.3.-EA 5.1.4.-EA 5.1.5.) CE 5.3. (EA 5.3.1.)

Página 365

1 **Calcula la media y la desviación típica de la distribución marginal de la x. Para ello, asigna a cada intervalo de edades su marca de clase (punto medio) y al último intervalo asígnale el valor 75.**

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
21,5	50	1 075	462,25	23 112,5
30,5	85	2 592,5	930,25	79 071,25
43	140	6 020	1 849	258 860
58	100	5 800	3 364	336 400
75	125	9 375	5 625	703 125
	500	24 862,5		1 400 568,75

$$\bar{x} = \frac{24\,862,5}{500} = 49,725$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1\,400\,568,75}{500} - 49,725^2} = 18,126$$

2 ¿Qué te hace decir eso? **[Esta estrategia de pensamiento se puede trabajar en esta actividad].**

La distribución marginal de la y corresponde a una variable cualitativa. Por tanto, no tiene media ni desviación típica. El único parámetro que podemos asignarle es la moda. ¿Cuál es?

Moda = Deportes.

Página 366

3 **Comprueba que la siguiente tabla corresponde a la distribución de x condicionada a $y \in$ {INF., DOC.}.**

x	18-25	26-35	36-50	51-65	más de 65
f	9	21	36	26	46

Halla su media y su desviación típica.

x_i	21,5	30,5	43	58	75	
INF	4	6	15	11	25	61
DOC	5	15	21	15	21	77
INF-DOC	9	21	36	26	46	138

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
21,5	9	193,5	462,25	4 160,25
30,5	21	640,5	930,25	19 535,25
43	36	1 548	1 849	66 564
58	26	1 508	3 364	87 464
75	46	3 450	5 625	258 750
	138	7 340		436 473,5

$$\bar{x} = \frac{7\,340}{138} = 53,188$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{436\,473,5}{138} - 53,188^2} = 18,273$$

4 **Haz la distribución de y condicionada a $x < 36$.**

y_i	f_i
INF	10
DOC	20
ENT	20
DEP	54
PEL	26
OTR	5

5 **Comprueba, calculando las frecuencias relativas, que el suceso PEL. no es independiente de la edad.**

x_i	21,5	30,5	43	58	75	
PEL	11	15	20	16	11	73
	0,15068493	0,20547945	0,2739726	0,21917808	0,15068493	

Se observa que las frecuencias relativas varían según la edad.

6 **Haz la distribución de x condicionada a NO DEPORTE y compara sus frecuencias relativas con las de la distribución marginal de la x.**

x_i	21,5	30,5	43	58	75	
NO DEP	61	105	166	119	138	589

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
21,5	61	1 311,5	462,25	28 197,25
30,5	105	3 202,5	930,25	97 676,25
43	166	7 138	1 849	306 934
58	119	6 902	3 364	400 316
75	138	10 350	5 625	776 250
	589	28 904		1 609 373,5

$$\bar{x} = \frac{28\,904}{589} = 49,073$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1\,609\,373,5}{589} - 40,073^2} = 33,56$$

La media es similar; sin embargo, la desviación típica es mayor si consideramos los datos de las personas que no ven deportes.

Página 368

7 **Otro grupo de 154 personas han realizado los mismos test, con los resultados que se dan en la tabla de la derecha. Halla el coeficiente de correlación.**

y_i \ x_i	0	1	2	3	4
0	17	22	6	4	1
1	15	14	8	2	0
2	13	6	10	5	1
3	5	4	2	6	2
4	3	1	0	3	4

De los datos obtenemos las siguientes tablas:

y_i \ x_i	0	1	2	3	4	
0	17	22	6	4	1	50
1	15	14	8	2	0	39
2	13	6	10	5	1	35
3	5	4	2	6	2	19
4	3	1	0	3	4	11
	53	47	26	20	8	154

Distribución marginal de la x:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
0	53	0	0	0
1	47	47	1	47
2	26	52	4	104
3	20	60	9	180
4	8	32	16	128
	154	191		459

$$\bar{x} = \frac{191}{154} = 1,24$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{459}{154} - 1,24^2} = 1,20$$

Distribución marginal de la y:

y_i	f_i	$y_i \cdot f_i$	y_i^2	$y_i^2 \cdot f_i$
0	50	0	0	0
1	39	39	1	39
2	35	70	4	140
3	19	57	9	171
4	11	44	16	176
	154	210		526

$$\bar{y} = \frac{210}{154} = \frac{15}{11} = 1,36$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{526}{154} - 136^2} = 1,25$$

$$\sigma_{xy} = \frac{332}{154} - 1,36 \cdot 1,20 = 0,52$$

$$r = \frac{0,52}{1,25 \cdot 1,20} = 0,35$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.) CE 1.13. (EA 1.13.1.) CE 5.2. (EA 5.2.1.-EA 5.2.2.-EA 5.2.3.-EA 5.2.4.)

Página 370

3. Obtención de la correlación a partir de las dos rectas de regresión

Hazlo tú

- **Calcula las medias de las distribuciones y el coeficiente de correlación a partir de estas dos rectas de regresión:**

  $\boldsymbol{y = 0{,}77x + 4{,}64}$

  $\boldsymbol{x = 1{,}2y - 4{,}73}$

  a) $(\bar{x},\ \bar{y})$ son las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas de regresión.

$$\begin{cases} y = 0{,}77x + 4{,}64 \\ x = 1{,}2y - 4{,}73 \end{cases}$$

$\to y = 0{,}77(1{,}2y - 4{,}73) + 4{,}64 \to y = \dfrac{9979}{760} = 13{,}13 \to x = 11{,}02$

Por tanto, $(\bar{x},\ \bar{y}) = (11{,}02;\ 13{,}13)$.

b) Calculamos el coeficiente de correlación a partir de las pendientes de las rectas de regresión:

$$m_{yx} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}} = 0{,}77$$

$$m_{yx} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}} = 1{,}2$$

$$r = \sqrt{m_{yx} \cdot m_{xy}} = \sqrt{0{,}77 \cdot 1{,}2} = 0{,}96$$

La correlacion es positiva y fuerte.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 5.2. (EA 5.2.1.-EA 5.2.2.-EA 5.2.3.-EA 5.2.4.)

Página 371

1. Dos rectas de regresión. Estimaciones

- **La siguiente tabla relaciona las variables**

x: gastos en publicidad (miles de euros)

y: ventas (miles de euros)

durante los 6 primeros meses de promoción de un cierto producto:

x	1	2	3	4	5	6
y	10	17	30	28	39	47

a) Hallar las dos rectas de regresión.

b) Efectuar la estimación $\hat{y}(5{,}5)$ y explicar su significado.

c) Para obtener unas ventas de 20 000 €, ¿cuántos miles de euros se estima que hay que gastar en publicidad?

¿Serán fiables estas estimaciones?

a)

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	10	1	100	10
2	17	4	289	34
3	30	9	900	90
4	28	16	784	112
5	39	25	1 521	195
6	47	36	2 209	282
21	171	91	5 803	723

$$\bar{x} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

$$\bar{y} = \frac{171}{6} = 28{,}5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{91}{6} - 3{,}5^2} = 1{,}71$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{5\,803}{6} - 28{,}5^2} = 12{,}45$$

$$\sigma_{xy} = \frac{723}{6} - 3{,}5 \cdot 28{,}5 = 20{,}75$$

Pendiente de la recta de regresión de Y sobre X:

$$m_{yx} = \frac{20{,}75}{1{,}71^2} = 7{,}1$$

$$y - 28{,}5 = 7{,}1(x - 3{,}5)$$

Pendiente de la recta de regresión de X sobre Y:

$$m_{xy} = \frac{12{,}45^2}{20{,}75} = 7{,}47$$

$$y - 28{,}5 = 7{,}47(x - 3{,}5)$$

b) $\hat{y}(5{,}5) = 7{,}1(5{,}5 - 3{,}5) + 28{,}5 = 42{,}7$

c) $\hat{x}(20) \rightarrow 20 - 28{,}5 = 7{,}47(x - 3{,}5) \rightarrow y = 2{,}36$

$$r = \frac{20{,}75}{1{,}71 \cdot 12{,}45} = 0{,}97$$

2. Tabla de doble entrada

- **Una compañía discográfica ha recopilado en la tabla de la derecha la siguiente información sobre el número de conciertos dados por 15 grupos musicales durante un verano, y las ventas de discos de estos grupos (en miles).**

DISCOS (x) \ CONC. (y)	10-30	30-40	40-80
1-5	3	0	0
5-10	1	4	1
10-20	0	1	5

a) Calcular el número medio de discos vendidos.

b) ¿Cuál es el coeficiente de correlación?

c) Obtener la recta de regresión de Y sobre X.

d) Si un grupo musical vende 18 000 discos, ¿qué número de conciertos se prevé para él?

a)

DISCOS (x_i) \ CONC. (y_j)	20	35	60	
3	3	0	0	3
7,5	1	4	1	6
15	0	1	5	6
	4	5	6	

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 3 + 7,5 \cdot 6 + 15 \cdot 6}{15} = 9,6$$

b)

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
3	3	9	9	27
7,5	6	45	56,25	337,5
15	6	90	225	1 350
	15	144		1 714,5

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1714,5}{15} - 9,6^2} = 4,71$$

y_i	f_i	$y_i \cdot f_i$	y_i^2	$y_i^2 \cdot f_i$
20	4	80	400	1 600
35	5	175	1 225	6 125
60	6	360	3 600	21 600
	15	615		29 325

$$\bar{y} = \frac{20 \cdot 4 + 35 \cdot 5 + 60 \cdot 6}{15} = 41$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{29\,325}{15} - 41^2} = 16,55$$

$$\Sigma x \cdot y \cdot f = 6\,855$$

$$\sigma_{xy} = \frac{6\,855}{15} - 9,6 \cdot 41 = 63,4$$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{63,4}{4,71 \cdot 16,55} = 0,81$$

c) $m_{yx} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}} = \dfrac{63,4}{4,71^2} = 2,86$

$y - 41 = 2,86(x - 9,6) \rightarrow y = 2,86x + 13,51$

d) La previsión de conciertos será:

$\hat{y}(18) = 2,86 \cdot 18 + 13,51 = 65$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 372

Para practicar

Sin fórmulas

1 **[Las dudas que surjan sobre las relaciones entre las variables planteadas pueden ser tratadas según esta técnica].**

Para cada uno de los siguientes casos, indica:

- **Cuáles son las variables que se relacionan.**
- **Si se trata de una relación funcional o de una relación estadística y, en este último caso, determina el signo de la correlación.**

a) ***Renta mensual de una familia-Gasto mensual en electricidad***

b) ***Radio de una esfera-Volumen de esta***

c) ***Litros de lluvia recogidos en una ciudad***

Tiempo dedicado a ver la televisión por sus habitantes

d) ***Longitud del trayecto recorrido en una línea de cercanías***

Precio del billete

e) ***Peso de los alumnos de 1.º de Bachillerato***

Número de calzado que usan

f) ***Toneladas de tomate recogidas en una cosecha***

Precio del kilo de tomate en el mercado

g) ***Superficie de una vivienda-Valor de la misma***

Indica en cada caso cómo crees que será la correlación: fuerte, intermedia o débil.

a) Renta (€), gasto (€).

Correlación positiva.

b) Relación funcional.

c) Relación estadística. Seguramente muy débil. Positiva (¿cabe pensar que cuanto más llueva más tiempo pasarán en casa y, por tanto, más verán la televisión?).

d) Aunque lo parezca *a priori*, seguramente la relación no es funcional. Es una correlación positiva fuerte.

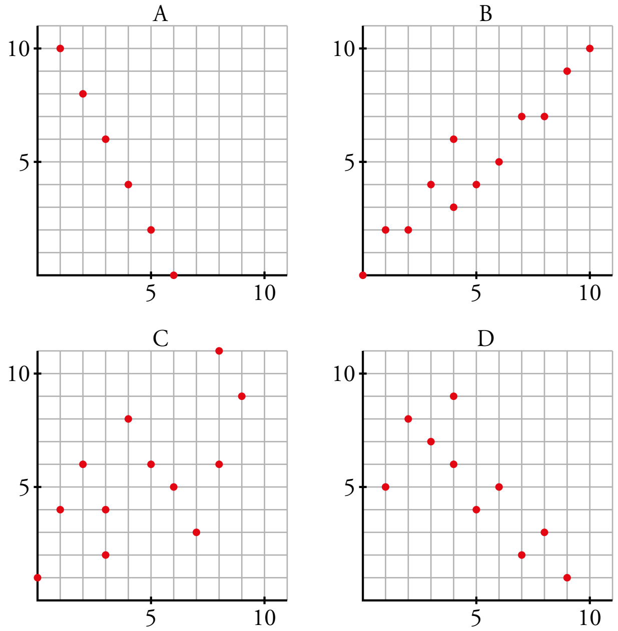
e) Correlación positiva.

f) Correlación negativa (cuanto mayor sea la cosecha, más baratos estarán los tomates).

g) Correlación positiva.

2 **[Las diferencias entre las gráficas que dibujarán los alumnos pueden ser analizadas según esta técnica].**

a) Copia en tu cuaderno y traza a ojo una recta de regresión para cada una de estas distribuciones bidimensionales:



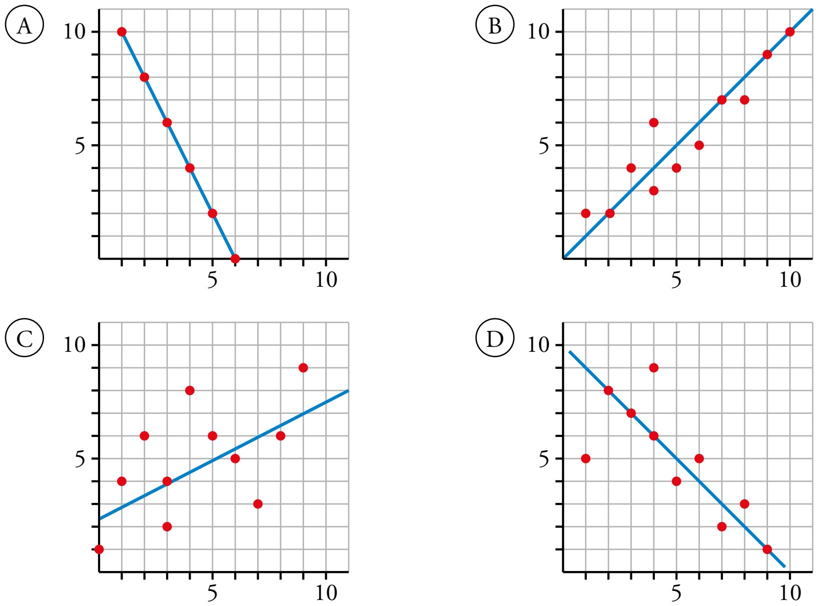
b) ¿Cuáles de ellas tienen correlación positiva y cuáles tienen correlación negativa?

c) Sin hacer cálculos, elige, de entre los siguientes valores, la correlación de cada una de las distribuciones:

0 0,64 1 –0,98 0,95 –1 –0,76

d) Una de ellas presenta relación funcional; ¿cuál? Da la expresión analítica de la función que relaciona las dos variables.

a)

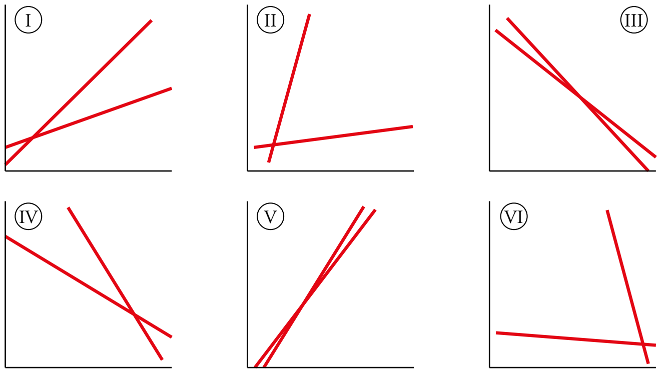


b) B y C tienen correlación positiva; A y D, negativa.

c) A → –1; B → 0,95; C → 0,64; D → –0,76

d) La A es relación funcional: $y = 12 - 2x$.

3 **Cada una de estas seis distribuciones bidimensionales está representada por sus dos rectas de regresión:**



Sus coeficientes de correlación son, no respectivamente:

–0,9 0,99 0,6 –0,2 –0,5 0,1

Asigna, razonadamente, a cada una su valor.

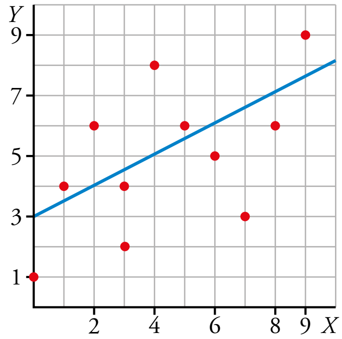
I → 0,6 II → 0,1 III → –0,9

IV → –0,5 V → 0,99 VI → –0,2

4 **Representa la nube de puntos de esta distribución y estima cuál de estos tres puede ser el coeficiente de correlación:**

a) $r = 0{,}98$ **b)** $r = -0{,}87$ **c)** $r = 0{,}58$

x	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9
y	1	4	6	2	4	8	6	5	3	6	9

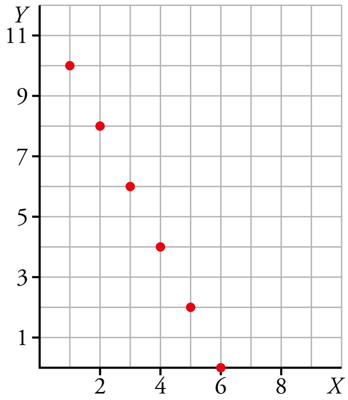


El coeficiente de correlación es $r = 0{,}58$.

5 **Representa sobre papel cuadriculado la nube de puntos correspondiente a esta distribución:**

x	1	2	3	4	5	6
y	10	8	6	4	2	0

¿Cuál crees que es el coeficiente de correlación?



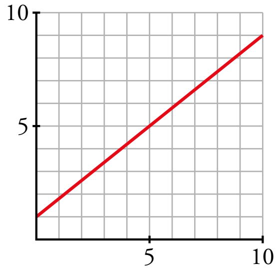
$r = -1$ porque están alineados.

6 Sumamos. **[La creación de un conjunto de puntos que cumpla las condiciones indicadas permite trabajar la innovación (dimensión productiva)].**

a) En tu cuaderno, en una cuadrícula como esta, sitúa diez puntos de modo que estimes que su correlación sea 0,9 y una de sus rectas de regresión sea la que ves.

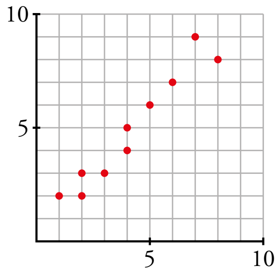
b) Repite la experiencia para conseguir un coeficiente de correlación de 0,6.

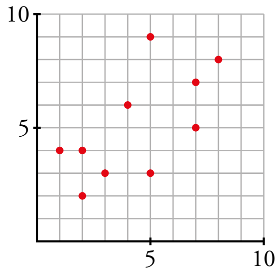
c) Haz lo mismo para un coeficiente de 0,3.

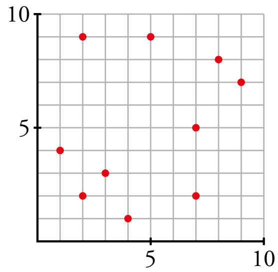


∗ ***Atención: se pide estimar, pero no calcular.***

a) $r = 0,9$ b) $r = 0,6$ c) $r = 0,3$





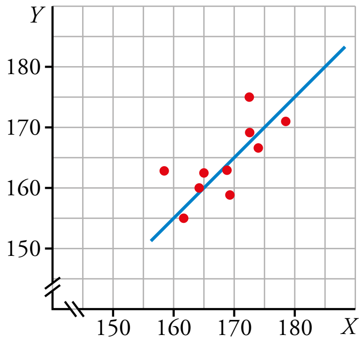


7 **Las estaturas de 10 chicas, x, y las de sus madres, y, son:**

x_i	158	162	164	165	168	169	172	172	174	178
y_i	163	155	160	161	164	158	175	169	166	172

a) Representa estos valores mediante una nube de puntos.

b) Traza a ojo una recta de regresión y di si la correlación es positiva o negativa y más o menos fuerte de lo que esperabas.



La correlación es positiva y fuerte.

Página 373

Con fórmulas

8 **Esta es la distribución bidimensional dada por la nube de puntos B del ejercicio 2:**

x	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10
y	0	2	2	4	3	6	4	5	7	7	9	10

Halla mediante cálculos manuales:

a) $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x, σ_y, σ_{xy}.

b) El coeficiente de correlación, r. Interprétalo.

c) Las ecuaciones de las dos rectas de regresión.

d) Comprueba los resultados con la calculadora.

$n = 12$, $\Sigma x = 59$, $\Sigma y = 59$

$\Sigma x^2 = 401$ $\Sigma y^2 = 389$ $\Sigma xy = 390$

a) $\bar{x} = 4,92$ $\bar{y} = 4,92$

$\sigma_x = 3,04$ $\sigma_y = 2,87$ $\sigma_{xy} = 8,33$

b) $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 0,95$. Se trata de una correlación fuerte y positiva.

c) Recta de regresión de Y sobre X:

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = 0,90 \rightarrow y = 4,92 + 0,9(x - 4,92)$$

Recta de regresión de X sobre Y:

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = 1,01 \rightarrow y = 4,92 + \frac{1}{1,01}(x - 4,92) \rightarrow y = 4,92 + 0,99(x - 4,92)$$

9 a) Representa la nube de puntos correspondiente a la siguiente distribución bidimensional:

x	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9
y	1	4	6	2	4	8	6	5	3	6	9

b) Comprueba con la calculadora que sus parámetros son:

$\bar{x} = 4{,}4$ $\quad \bar{y} = 4{,}9$ $\quad \sigma_{xy} = 3{,}67$

$\sigma_x = 2{,}77$ $\quad \sigma_y = 2{,}31$ $\quad r = 0{,}57$

c) Halla las ecuaciones de las dos rectas de regresión, X sobre Y e Y sobre X, y represéntalas junto con la nube de puntos.

a) Representada en el ejercicio 4.

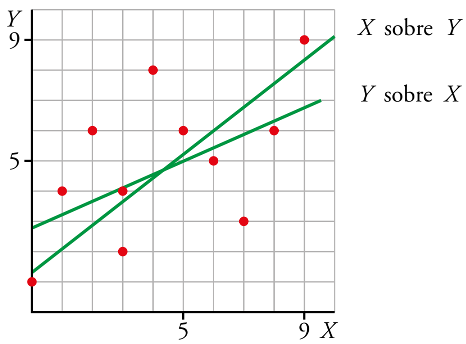
b) Se comprueba.

c) • Recta de regresión de Y sobre X:

$$m_{yx} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{3{,}67}{2{,}77^2} = 0{,}48 \rightarrow y = 4{,}9 + 0{,}48(x - 4{,}4) \rightarrow y = 0{,}48x + 2{,}79$$

• Recta de regresión de X sobre Y:

$$m_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{3{,}67}{2{,}31^2} = 0{,}69 \rightarrow \frac{1}{m_{xy}} = 1{,}45 \rightarrow y = 4{,}9 + 1{,}45(x - 4{,}4) \rightarrow y = 1{,}45x - 1{,}48$$



10 Una distribución bidimensional en la que los valores de x son 12, 15, 17, 21, 22 y 25, tiene una correlación $r = 0{,}99$ y su recta de regresión es $y = 10{,}5 + 3{,}2x$.

a) Calcula $\hat{y}(13)$, $\hat{y}(20)$, $\hat{y}(30)$, $\hat{y}(100)$.

b) ¿Cuáles de las estimaciones anteriores son fiables, cuál poco fiable y cuál no se debe hacer?

c) Expresa los resultados en términos adecuados.

Por ejemplo:

$\hat{y}(13) = 52{,}1$. «Para $x = 13$ es muy probable que el valor correspondiente de y sea próximo a 52».

a) $\hat{y}(13) = 52{,}1$; $\hat{y}(20) = 74{,}5$; $\hat{y}(30) = 106{,}5$; $\hat{y}(100) = 330{,}5$

b) $\hat{y}(13)$ e $\hat{y}(20)$ son estimaciones fiables, $\hat{y}(30)$ es poco fiable e $\hat{y}(100)$ es una estimación nada fiable.

c) Son fiables $\hat{y}(13)$ e $\hat{y}(20)$, porque 13 y 20 están en el intervalo de valores utilizados para obtener la recta de regresión.

$\hat{y}(30)$ es menos fiable, pues 30 está fuera del intervalo, aunque cerca de él.

$\hat{y}(100)$ es una estimación nada fiable, pues 100 está muy lejos del intervalo [12, 25].

11 **Observa la distribución D del ejercicio 2.**

a) Descríbela mediante una tabla de valores.

b) Realiza los cálculos para obtener su coeficiente de correlación.

c) Representa los puntos en tu cuaderno.

Halla la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X y represéntala.

d) Calcula $\hat{y}(4{,}5)$, $\hat{y}(11)$, $\hat{y}(20)$ dilucidando cuánto de fiables son dichas estimaciones.

a)

x	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9
y	5	8	7	6	9	4	5	2	3	1

b) $n = 10$ $\quad \Sigma x = 49 \quad \bar{x} = \dfrac{49}{10} = 4{,}9$

$\Sigma y = 50 \quad \bar{y} = \dfrac{50}{10} = 5$

$\Sigma x^2 = 301 \quad \sigma_x = \sqrt{\dfrac{301}{10} - 4{,}9^2} = 2{,}47$

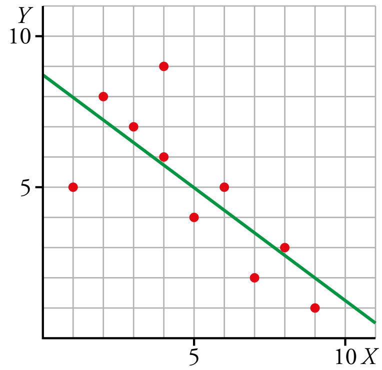
$\Sigma y^2 = 310 \quad \sigma_y = \sqrt{\dfrac{301}{10} - 5^2} = 2{,}45$

$\Sigma xy = 199 \quad \sigma_{xy} = \dfrac{199}{10} - 4{,}9 \cdot 5 = -4{,}6$

$$r = \frac{4{,}6}{2{,}47 \cdot 2{,}45} = -0{,}76$$

c) Recta de regresión de Y sobre X:

$$y = 5 - \frac{4{,}6}{6{,}1}(x - 4{,}9) \to y = 8{,}675 - 0{,}75x$$



d) $\hat{y}(4{,}5) = 5{,}56$

$\hat{y}(11) = -3{,}04$

$\hat{y}(20) = -14{,}95$

Como $r = 0{,}76$, la estimación para 4,5 la podemos considerar fiable, pero las de 11 y 20, que no están en el intervalo de datos, no se pueden considerar muy fiables.

12 Piensa y comparte en pareja. **[Compartir con el compañero o compañera la toma de decisiones que se deben tomar en este tipo de cálculos permite trabajar esta estrategia].**

Calcula las correlaciones correspondientes a las nubes de puntos que inventaste en el ejercicio 6. Comprueba si las correlaciones obtenidas se parecen a las que pretendías alcanzar.

a) $r = 0,97$ b) $r = 0,64$ c) $r = 0,25$

Para resolver

13 **La siguiente tabla recoge los datos económicos de algunas de las películas más rentables de un año (las cantidades están dadas en millones de euros):**

x: GASTOS	18	15	20	11	10	6	6	14	16	12
y: RECAUDACIÓN	93	83	80	47	46	44	36	34	33	26

a) Calcula el coeficiente de correlación.

b) Halla la recta de regresión de Y sobre X y estima qué recaudación cabe esperar si se invierten 30 millones de euros.

a) $r = 0,6$

b) $y = 3,05x + 13,05$

$\hat{y}(30) = 104,55$

Cabe esperar que se recauden 104,55 millones de euros.

14 **Un excursionista, en diez marchas distintas, toma las siguientes medidas:**

x: altura de lugar (en m)

y: presión atmosférica (en mm Hg)

z: número de pulsaciones en reposo

x	0	184	231	481	730	911	1 343	1 550	1 820	2 184
y	760	745	740	720	700	685	650	630	610	580
z	73	78	75	78	83	80	89	80	85	92

Halla el coeficiente de correlación y la recta de regresión para la distribución x-y y para x-z y analiza los resultados.

- x: altura del lugar (en m)

  y: presión atmosférica (en mm Hg)

  $r = –0,99$

  Recta de regresión: $y = –0,08x + 759$

  Hay casi una relación funcional entre la altura de un lugar y su presión atmosférica. Además, cuando aumenta la altura, disminuye la presión.

- x: altura del lugar (en m)

  z: número de pulsaciones en reposo

  $r = 0,85$

  Recta de regresión: $y = 6,87x + 74,8$

  Hay una correlación fuerte entre la altura de un lugar y el número de pulsaciones, en reposo, de una persona. Además, cuando aumenta la altura, aumentan las pulsaciones en reposo.

15 **ODS** Meta 11.7. **[Tras el visionado del vídeo el docente puede plantear un debate sobre cuáles son las mejores alternativas de movilidad a los vehículos contaminantes].**

El equipo de gobierno de una gran ciudad ha introducido una tasa para disminuir el tráfico en el centro. La tasa, x, se fijó en 4 €/día el primer año y ha subido 2 €/día cada año. La siguiente tabla muestra la media diaria de vehículos, y, en millones, que entran cada día a la ciudad, durante los ocho primeros años.

x: TASA	4	6	8	10	12	14	16	18
y: N.° DE VEHÍCULOS	2,4	2,5	2,2	2,3	2,0	1,8	1,7	1,5

a) Calcula el coeficiente de correlación y la recta de regresión de Y sobre X.

b) Si el gobierno quiere llegar a reducir el número medio de vehículos diarios a 1 millón, ¿qué tasa se estima que debe imponer? ¿Es fiable esta estimación?

a) $\bar{x} = 11$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1136}{8} - 11^2} = 4,58$$

$\bar{y} = 2,05$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{34,52}{8} - 2,05^2} = 0,335$$

$$\sigma_{xy} = \frac{168,6}{8} - 11 \cdot 2,05 = -1,475$$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-1,475}{4,58 \cdot 0,335} = -0,96$$

Busquemos la recta de regresión de Y sobre X:

$$y = 2,05 + \frac{-1,475}{4,58^2}(x - 11) = 2,05 - 0,07(x - 11)$$

b) Buscamos la recta de regresión de X sobre Y:

$$x = \bar{x} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \bar{y}) = 11 - \frac{1,475}{0,335^2}(y - 2,05) = 11 - 13,14(y - 2,05)$$

$$\hat{x}(1) = 11 - 13,14(1 - 2,05) = 24,8$$

La tasa debe ser de 24,8 euros diarios.

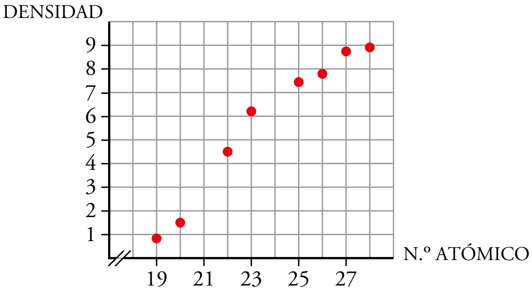
Aunque $|r| = 0,96$ es muy próximo a 1, el valor estudiado no está en el intervalo observado, así que la estimación hay que tomarla con reservas.

16 **La siguiente tabla relaciona el número atómico de varios metales, x, con su densidad, y, en g/cm³:**

ELEMENTO	K	Ca	Ti	V	Mn	Fe	Co	Ni
N.° ATÓMICO	19	20	22	23	25	26	27	28
DENSIDAD	0,86	1,54	4,50	6,11	7,44	7,88	8,86	8,91

a) Representa los puntos, halla el coeficiente de correlación y calcula la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X.

b) Estima la densidad del cromo sabiendo que su número atómico es 24 → Cr (24).

a) 

$r = 0,98$

$y = -16,69 + 0,95x$

b) $\hat{y}(24) = 4,9$

La densidad del cromo se estima en, aproximadamente, 6,11. Su valor real es 7,1.

Página 374

17 **Esta tabla recoge tres variables sociométricas de doce países:**

a) Halla manualmente el coeficiente de correlación entre las variables x-y y entre las variables x-z.

b) ¿Qué conclusiones sacas de los resultados obtenidos?

c) Comprueba los resultados con la calculadora.

PAÍS	x: RENTA PER CÁPITA ($)	y: ÍNDICE DE NATALIDAD (‰)	z: EXPECTATIVA DE VIDA AL NACER (AÑOS)
A	873	50	49
B	402	48	50
C	536	47	54
D	869	44	57
E	1 171	41	61
F	636	36	64
G	1 417	35	59
H	2 214	31	63
I	1 334	28	63
J	769	26	61
K	1 720	25	64
L	2 560	24	70

a) x: renta per cápita ($).

y: índice de natalidad (‰).

$r = -0,68$

La correlación es negativa; es decir, si aumenta la renta per cápita, disminuye el índice de natalidad.

x: renta per cápita ($).

z: expectativa de vida al nacer (años).

$r = 0,82$

La correlación es positiva; es decir, si aumenta la renta per cápita, aumenta la expectativa de vida al nacer.

b) La correlación es mayor en valor absoluto en el segundo caso, luego la renta per cápita es más determinante de la expectativa de vida al nacer que del índice de natalidad.

18 **La siguiente tabla muestra el tiempo, x, diario de estudio de matemáticas y la nota, y, en el último examen correspondiente a 8 estudiantes (100 es la nota máxima).**

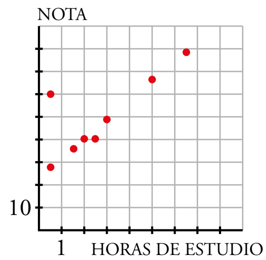
x	1,5	0,5	2,5	3	0,5	2	5	6,5
y	36	27	40	49	60	40	66	78

a) Dibuja la correspondiente nube de puntos y calcula el coeficiente de correlación.

b) Identifica en la nube un punto que se sale de la tendencia de los demás en el contexto del problema y no lo tengas en cuenta para calcular el coeficiente de correlación y la recta de regresión de Y sobre X.

c) Si Ana estudió unas 8 horas, ¿qué nota estimas que le corresponderá? Ten en cuenta la recta de regresión que hallaste en el apartado b).

d) Estudia la fiabilidad del resultado del apartado c).

a) 

$\bar{x} = 2{,}69$

$\sigma_x = \sqrt{11{,}16 - 2{,}69^2} = 1{,}98$

$\bar{y} = 49{,}5$

$\sigma_y = \sqrt{2\,708{,}25 - 49{,}5^2} = 16{,}06$

$\sigma_{xy} = 157{,}69 - 2{,}69 \cdot 49{,}5 = 24{,}53$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{24{,}53}{1{,}98 \cdot 16{,}06} = 0{,}77$$

b) Repetimos los cálculos sin tener en cuenta el punto (0,5; 60):

$\bar{x} = 3$

$\sigma_x = 1{,}93$

$\bar{y} = 48$

$\sigma_y = 16{,}64$

$\sigma_{xy} = 31{,}93$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{31{,}93}{1{,}93 \cdot 16{,}64} = 0{,}994$$

El coeficiente de correlación se acerca mucho a 1 por lo que la correlación una vez eliminado el punto más alejado ha pasado a ser fuerte. Se puede decir que tenemos casi una relación funcional.

La recta de regresión será:

$$y = 48 + \frac{31{,}93}{1{,}93^2}(x - 3) \to y = 48 + 8{,}57\,(x - 3)$$

$$\hat{y}(8) = 48 + 8{,}57\,(8 - 3) = 90{,}85$$

Le corresponderán 90,85 puntos.

c) Aunque r es muy cercano a 1, el resultado no se puede considerar muy preciso porque el valor buscado no se encuentra dentro del rango donde teníamos datos.

19 **Elegimos seis automóviles al azar. Su antigüedad, en años, y el número de kilómetros que han rodado, en miles de kilómetros, están relacionados por la siguiente tabla:**

ANTIGÜEDAD	1	2	4	4	5	6	7
KILÓMETROS RECORRIDOS	15	45	32	61	60	132	93

a) Calcula la media y la desviación típica.

b) Calcula el coeficiente de correlación e interprétalo.

c) Si un automóvil tiene tres años, ¿cuántos kilómetros estimas que ha rodado?

d) ¿Y si tiene cinco años? ¿Y diez? Justifica tus respuestas.

x: antigüedad

y: kilómetros recorridos

a) $\bar{x} = 4{,}14$

$\sigma_x = 1{,}96$

$\bar{y} = 62{,}57$

$\sigma_y = 36{,}37$

b) $r = 0{,}81$

Es positiva; es decir, si aumenta la antigüedad, aumentan los kilómetros recorridos. La correlación es fuerte porque r está próximo a 1.

c) Recta de regresión de Y sobre X:

$y = 15{,}1x$

$\hat{y}(3) = 15{,}1 \cdot 3 = 45{,}3 \rightarrow$ Se estima que recorre 45 300 km en 3 años.

$\hat{y}(5) = 15{,}1 \cdot 5 = 75{,}5 \rightarrow$ Se estima que recorre 75 500 km en 5 años.

$\hat{y}(10) = 15{,}1 \cdot 10 = 151 \rightarrow$ Se estima que recorre 151 000 km en 10 años.

Esta última estimación es menos precisa que las anteriores, pues 10 no está en el intervalo [0, 7] del que se tienen los datos.

Cuestiones teóricas

20 Piensa y comparte en pareja. **[El alumnado puede plantear las razones por las que ha llegado a una determinada conclusión tal y como se explica en esta estrategia].**

El coeficiente de correlación de una distribución bidimensional es 0,87. Si los valores de las variables se multiplican por 10, ¿cuál será el coeficiente de correlación de la nueva distribución?

El mismo, puesto que r no depende de las unidades; es adimensional.

21 **[La justificación de la respuesta permite trabajar al alumnado la destreza expresión oral].**

Hemos calculado la covarianza de una cierta distribución y ha resultado negativa. Justifica por qué podemos afrmar que tanto el coeficiente de correlación como las pendientes de las dos rectas de regresión son números negativos.

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Como σ_x y σ_y son positivas, el signo de r es el mismo que el de σ_{xy}, luego si la covarianza es negativa, r también lo es.

$m_{yx} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$, cuyo signo es el mismo que el signo de σ_{xy}.

$m_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$ cuyo signo es el mismo que el signo de σ_{xy}.

Luego si la covarianza es negativa, m_{yx} y m_{xy} son negativas.

22 **¿Qué punto tienen en común las dos rectas de regresión?**

El centro de gravedad de la distribución, $(\bar{x}, \bar{y})$.

23 **¿Qué condición debe cumplir r para que las estimaciones hechas con la regresión sean fiables?**

$|r|$ debe estar próximo a 1.

24 **Prueba que el producto de m_{yx} y $\dfrac{1}{m_{xy}}$ es igual al coeficiente de determinación, r^2.**

Sabemos que $m_{yx} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x{}^2}$ y $m_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_y{}^2}$:

$$m_{yx} \cdot m_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x{}^2} \cdot \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y{}^2} = \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \right)^2 = r^2$$

25 **Sabiendo que m_1 y m_2 son las pendientes de las dos rectas de regresión, expresa en función de ellas el coeficiente de correlación lineal.**

$r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

$m_{yx} \cdot \dfrac{1}{m_{xy}} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \dfrac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = r^2$

Luego $r = \sqrt{m_{yx} \cdot \dfrac{1}{m_{xy}}}$

26 **La estatura media de 100 escolares es de 155 cm con una desviación típica de 15,5 cm.**

La recta de regresión de la estatura respecto al peso es $y = 80 + 1{,}5x$ (x: en kg; y: estatura en cm).

a) ¿Cuál es el peso medio de esos escolares?

b) ¿Cuál es el signo del coeficiente de correlación entre peso y estatura?

a) La recta de regresión pasa por $(\bar{x}, \bar{y})$, luego el peso medio será la solución de la ecuación:

$\bar{y} = 80 + 1{,}5\bar{x} \;\rightarrow\; 155 = 80 + 1{,}5\bar{x} \;\rightarrow\; \bar{x} = 50$ kg

b) El signo del coeficiente de correlación entre peso y estatura es el mismo que el de la pendiente de la recta de regresión, luego es positivo.

27 **¿Verdadero o falso?**

a) Si la pendiente de la recta de regresión de Y sobre X es 1, la correlación entre las dos variables es muy fuerte.

b) Si la pendiente de la recta de regresión de Y sobre X es negativa, la pendiente de la recta de regresión de X sobre Y también es negativa.

c) En una relación funcional lineal las dos rectas de regresión coinciden.

d) Cuanto más fuerte sea la correlación entre dos variables, mayor es su coeficiente de determinación.

e) En una distribución bidimensional de dos puntos distintos el coeficiente de correlación es 1.

f) Imagina dos nubes de puntos, A y B, con el mismo coeficiente de correlación, 0,98. La distribución A tiene 8 puntos y la B, 100. Si añadimos en cada una un nuevo punto que se separa «mucho» de la recta de regresión, el coeficiente de correlación de A disminuirá mucho más que el de B.

a) Falso. Si la pendiente de la recta de regresión de Y sobre X es 1, sabemos que la covarianza es igual a la varianza de x, pero no que r esté próximo a 1.

b) Verdadero, porque $m_{yx} \cdot \dfrac{1}{m_{xy}} = r^2 > 0$

El producto es un número positivo, luego las dos pendientes tienen que tener el mismo signo.

c) Verdadero. En una relación funcional, $r = 1$.

$r = \sqrt{m_{yx} \cdot \dfrac{1}{m_{xy}}} \;\rightarrow\; 1 = m_{yx} \cdot \dfrac{1}{m_{xy}} \;\rightarrow\; m_{xy} = m_{yx}$

Como las dos rectas pasan por $(\bar{x}, \bar{y})$ y tienen la misma pendiente, coinciden.

d) Verdadero, porque $0 \leq r^2 \leq 1$.

Si la correlación es muy fuerte, $|r|$ está próximo a 1, luego r^2 se aproxima a 1.

e) Verdadero, porque la recta pasará por los dos puntos que tenemos. Por dos puntos pasa una única recta, y r será exactamente 1. Se dice que la correlación es perfecta.

f) Verdadero. Añadiendo un punto a una nube de 100 puntos la importancia de este punto queda más disimulada que entre 8 puntos. Cuantos menos puntos tiene una nube, más notoriedad tiene cada punto en ella.

Página 375

Para profundizar

28 **En una autoescuela, cada alumno realiza un total de 80 tests repartidos en 4 tandas de 20. La siguiente tabla relaciona las variables número de la tanda (x) y número de fallos (y):**

x \ y	0-3	4-7	8-11	1-15
1	0	4	11	5
2	1	10	7	2
3	12	7	1	0
4	16	4	0	0

Por ejemplo: En la tercera tanda, en 12 de los tests se encontraron de 0 a 3 fallos; en 7, de 4 a 7 fallos…

a) Calcula manualmente el coeficiente de correlación y halla la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X.

b) ¿Cuántos fallos se estima que tendrá un alumno en la primera tanda? ¿Y en la segunda? ¿Y en la última?

c) Comprueba los resultados con la calculadora.

a)

TANDA = x_i \ FALLOS = y_i	1,5	5,5	9,5	13,5	
1	0	4	11	5	20
2	1	10	7	2	20
3	12	7	1	0	20
4	16	4	0	0	20
	29	25	19	7	80

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
1	20	20	1	20
2	20	40	4	80
3	20	60	9	180
4	20	80	16	320
	80	200		600

$$\bar{x} = \frac{200}{80} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{600}{80} - 2,5^2} = 1,12$$

y_i	f_i	$y_i \cdot f_i$	y_i^2	$y_i^2 \cdot f_i$
1,5	29	43,5	2,25	65,25
5,5	25	137,5	30,25	756,25
9,5	19	180,5	90,25	1 714,75
13,5	7	94,5	182,25	1 275,75
	80	456		3 812

$\bar{y} = \dfrac{456}{80} = \dfrac{57}{10} = 5{,}7$

$\sigma_y = \sqrt{\dfrac{3\,812}{80} - 5{,}7^2} = 3{,}89$

$\Sigma x \cdot y \cdot f = 876$

$\sigma_{xy} = \dfrac{876}{80} - 2{,}5 \cdot 5{,}7 = -3{,}3$

$r = \dfrac{-3{,}3}{1{,}12 \cdot 3{,}89} = -0{,}76$

$m_{yx} = \dfrac{-3{,}3}{1{,}12^2} = -2{,}63$

Recta de regresión de Y sobre X: $y - 5{,}7 = -2{,}63(x - 2{,}5)$

b) $\hat{y}(1) = -2{,}63(1 - 2{,}5) + 5{,}7 = 9{,}645$

Se estima que tendrá entre 9 y 10 fallos en la primera tanda.

$\hat{y}(2) = -2{,}63(2 - 2{,}5) + 5{,}7 = 7{,}015$

Se estima que tendrá 7 fallos en la segunda tanda.

$\hat{y}(4) = -2{,}63(4 - 2{,}5) + 5{,}7 = 1{,}755$

Se estima que tendrá entre 1 y 2 fallos en la cuarta tanda, más veces 2 fallos que 1.

29 **En un estudio realizado a los trabajadores de una cadena de fabricación de piezas de coches sobre su productividad quincenal, se relacionan las horas trabajadas (x) con las unidades producidas (y).**

Sabemos que:

- **La recta de regresión de Y sobre X es:**

  $y = 3{,}47x + 32{,}01$

- **La recta de regresión de X sobre Y es:**

  $y = 3{,}81x + 5{,}36$

- **El intervalo de horas empleadas por los trabajadores es [60, 85].**

a) Halla $\bar{x}$, $\bar{y}$ y el coeficiente de correlación.

b) Si un operario trabaja 70 horas en una quincena, ¿cuántas unidades se estima que produzca? ¿Cómo de fiable es esta estimación? ¿Y si trabaja en total 40 horas? ¿Y si fueran 120 horas?

c) Si un empleado esta quincena ha llegado a producir 300 piezas, ¿cuántas horas se estima que ha trabajado?

a) $(\bar{x}, \bar{y})$ es el punto de corte de las dos rectas de regresión:

$$\left.\begin{cases} y = 3{,}47x + 32{,}01 \\ y = 3{,}81x + 5{,}36 \end{cases}\right\} \to \bar{x} = 78{,}38;\ \bar{y} = 304$$

$r^2 = \dfrac{m_{yx}}{m_{xy}} = \dfrac{3{,}47}{3{,}81} = 0{,}91 \to r = \sqrt{0{,}91} = 0{,}95394$

b) $\hat{y}(70) = 3{,}47 \cdot 70 + 32{,}01 = 274{,}91$

Se estima que el operario produzca unas 275 unidades trabajando 70 horas.

Como r es muy próximo a 1 y, además, 70 está en el intervalo de horas empleadas, la estimación es muy fiable.

$\hat{y}(40) = 3{,}47 \cdot 40 + 32{,}01 = 170{,}81$

Se estima que el operario produzca casi 171 unidades trabajando 40 horas. Esta estimación no es tan fiable como la anterior porque $40 \notin [60, 85]$.

$\hat{y}(120) = 3{,}47 \cdot 120 + 32{,}01 = 448{,}41$

Se estima que el operario produzca alrededor de 448 unidades trabajando 120 horas. Esta estimación no es muy fiable porque $120 \notin [60, 85]$.

c) $300 = 3{,}81x + 5{,}36 \rightarrow x = 77{,}33$

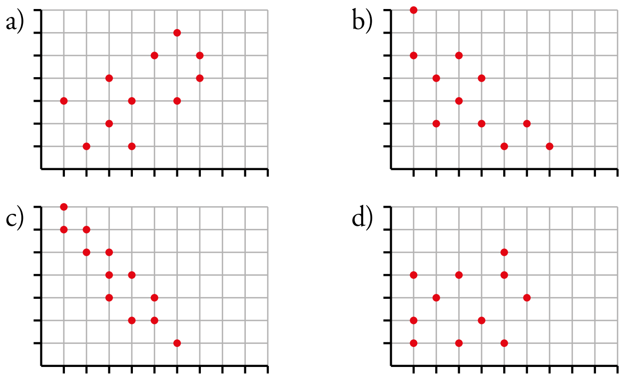
Se estima que ha trabajado entre 77 y 78 horas.

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 5.1. (EA 5.1.1.-EA 5.1.2.) CE 5.2. (EA 5.2.1.-EA 5.2.2.-EA 5.2.3.-EA 5.2.4.) CE 5.3. (EA 5.3.1.)

Página 375

1 **Observa estas distribuciones bidimensionales:**



Asigna razonadamente uno de los siguientes coeficientes de correlación a cada gráfica:

0,2 –0,9 –0,7 0,6

La correlación de a) es positiva, y las de b) y c), negativas. En d) no se aprecia correlación. La correlación de c) es más fuerte que la de b). Por tanto:

a) $\to 0{,}6$ b) $\to -0{,}7$ c) $\to -0{,}9$ d) $\to 0{,}2$

2 **Representa esta distribución bidimensional:**

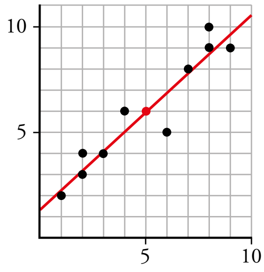
x	1	2	2	3	4	6	7	8	8	9
y	2	4	3	4	6	5	8	9	10	9

a) Calcula los parámetros $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x, σ_y y σ_{xy}.

b) Halla el coeficiente de correlación.

c) Halla la recta de regresión de Y sobre X.

d) Estima el valor de y para $x = 5$ y para $x = 10$. ¿Son «buenas» estas estimaciones?



a) $\bar{x} = 5$, $\bar{y} = 6$

$\sigma_x = 2{,}8$; $\sigma_y = 2{,}7$; $\sigma_{xy} = 7{,}1$

b) $r = 0{,}95$

c) $y = 0{,}91x + 1{,}45$

d) $\hat{y}(5) = 6$; $\hat{y}(10) = 10{,}55$

Las estimaciones son muy fiables porque $r = 0{,}95$ es un valor muy alto. Si se tratase de «notas» (de 0 a 10), la segunda estimación habría que «hacerla real» y darle el valor 10.

3 **La recta de regresión de Y sobre X de una distribución bidimensional es $y = 1{,}6x - 3$. Sabemos que $\bar{x} = 10$ y $r = 0{,}8$.**

a) Calcula $\bar{y}$.

b) Estima el valor de y para $x = 12$ y para $x = 50$. ¿Qué estimación te parece más fiable?

c) Halla la recta de regresión de X sobre Y.

a) Puesto que la recta pasa por $(\bar{x}, \bar{y})$:

$\bar{y} = 1{,}6\bar{x} - 3 = 1{,}6 \cdot 10 - 3 = 13$

b) $\hat{y}(12) = 1{,}6 \cdot 12 - 3 = 16{,}2$

$\hat{y}(50) = 1{,}6 \cdot 50 - 3 = 77$

La primera estimación es aceptable por ser 12 próximo a $\bar{x} = 10$ (carecemos de información sobre los valores que toma x). La segunda estimación es muy poco significativa, pues 50 se separa demasiado de $\bar{x}$.

c) Conociendo $r = 0{,}8$ y el coeficiente de regresión de Y sobre X (pendiente de la recta), 1,6:

(Coef. Y sobre X) · (Coef. X sobre Y) = r^2

Coef. X sobre $Y = \dfrac{0{,}8^2}{1{,}6} = 0{,}4$

Por tanto, la pendiente de la recta de regresión de X sobre Y es $m_{xy} = \dfrac{1}{0{,}4} = 2{,}5$.

Ecuación de la recta de regresión de X sobre Y: $y = 6 + 2{,}5(x - 5)$

4 **El *consumo mensual de energía per cápita*, y, en miles de kWh, y la *renta per cápita*, x, en miles de euros, de seis países son:**

	A	B	C	D	E	F
x	11,1	8,5	11,3	4,5	9,9	6,5
y	5,7	5,0	5,1	2,7	4,6	3,1

a) Calcula la recta de regresión de Y sobre X.

b) Halla el coeficiente de correlación entre el consumo y la renta.

c) ¿Qué predicción podemos hacer sobre el consumo de energía per cápita de un país cuya renta per cápita es de 4 400 €? (Recuerda que en la tabla se da la renta en miles de euros.)

d) Estima la *renta per cápita* que tendrá un país en el cual el *consumo de energía per cápita* ha sido de 9 000 kWh.

e) ¿Cómo de fiables son estas estimaciones?

$\bar{x} = 8{,}63$; $\bar{y} = 4{,}37$

$\sigma_x = 2{,}46$, $\sigma_y = 1{,}09$, $\sigma_{xy} = 2{,}51$

a) Recta de regresión de Y sobre X: $y = 4{,}37 + \dfrac{2{,}51}{2{,}46^2}(x - 8{,}63) \rightarrow y = 0{,}80 + 0{,}41x$

b) Coeficiente de correlación: $r = \dfrac{2{,}51}{1{,}09 \cdot 2{,}46} = 0{,}93$

c) Para $x = 4{,}4$ estimamos el valor de y: $\hat{y}(4{,}4) = 0{,}79 + 0{,}41 \cdot 4{,}4 = 2{,}59$

Se le estima un consumo de energía de 2,59 miles de kWh por habitante.

d) $9 = 0{,}80 + 0{,}41\hat{x}(9) \rightarrow \hat{x}(9) = 20 \rightarrow$ Se estima una renta per cápita de 20 000 €.

e) En la primera estimación (apartado c), el valor $x = 4{,}4$ es próximo a los valores de la tabla. Como el coeficiente de correlación es alto (0,93), la estimación es razonablemente fiable. En la segunda estimación (apartado d), el valor $y = 9$ es lejano a los de la tabla. Por tanto, la estimación es poco fiable.