UNIDAD 1: Números Reales

ACTIVIDADES-PÁG. 10

1. Teniendo en cuenta las propiedades de las potencias, obtenemos:

a) $9^2 \cdot 3^{-2} \cdot 27 = (3^2)^2 \cdot 3^{-2} \cdot 3^3 = 3^4 \cdot 3^{-2} \cdot 3^3 = 3^{4-2+3} = 3^5$

b) $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]^{-2} \cdot 25 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-6} \cdot 5^2 = 5^6 \cdot 5^2 = 5^8$

c) $\frac{3^6 \cdot 2^8 \cdot 5^3}{9^3 \cdot 25^3 \cdot 4^4} = \frac{3^6 \cdot 2^8 \cdot 5^3}{3^6 \cdot 5^6 \cdot 2^8} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$

2. En las tablas aparecen los valores pedidos.

Truncamiento de	$\sqrt{0,6} = 0,774\ 596\ 6...$	$\sqrt{6} = 2,449\ 489\ 7...$
a) A las décimas	0,7	2,4
b) A las milésimas	0,774	2,449
c) A las millonésimas	0,774 596	2,449 489

Redondeo de	$\sqrt{0,6} = 0,774\ 596\ 6...$	$\sqrt{6} = 2,449\ 489\ 7...$
a) A las décimas	0,8	2,4
b) A las milésimas	0,775	2,449
c) A las millonésimas	0,774 597	2,449 490

3. Si la velocidad de la luz es $3 \cdot 10^8$ m/s, el tiempo que tardará en recorrer 300 km = $3 \cdot 10^5$ m será:

$$t = \frac{3 \cdot 10^5\ m}{3 \cdot 10^8\ m/s} = \frac{1}{10^3}\ s = 0,001\ s.$$

El tiempo es una milésima de segundo.

4. Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos:

$$\left(\sqrt{11 - 4\sqrt{6}}\right)^2 = 11 - 4\sqrt{6}$$

$$\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 8 + 3 - 4\sqrt{6} = 11 - 4\sqrt{6}$$

5. Las raíces enésimas son números reales siempre que:

- **n** sea par y **a** sea un número real no negativo.

- **n** sea impar y **a** sea un número real cualquiera.

ACTIVIDADES-PÁG. 27

1. El valor de la suma es:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2m = m \cdot (m + 1)$$

2. Resolvemos el problema en los siguientes pasos:

● Supongamos que el camello lleva un bidón hasta la mitad del camino, vuelve a Kamal, carga con otro bidón hasta el mismo punto y se bebe uno de los bidones transportados, quedándole otro. Repitiendo el proceso conseguirá llevar 50 bidones hasta la mitad del camino. De aquí repitiendo lo mismo hasta Wadi conseguirá que lleguen 25 según la expresión:

$$25 \text{ bidones} = 100 \cdot \frac{1^2}{2^2}$$

● Si mejoramos al solución conseguiremos que lleguen más bidones, haciendo el camino en tres fases tras el primer tercio, el camello habrá bebido 33,333… bidones y quedan 66,666… En el segundo tercio se bebe 22,222… y quedan 44,444…. En Wadi se bebe 14,81… y quedan 29,629… bidones, es decir:

$$100 \cdot \frac{8}{27} = 100 \cdot \frac{2^3}{3^3} \cong 29{,}63 \ \ \textit{bidones}$$

● Avanzando por cuartos de camino se puede mejorar la solución, llegan:

$$100 \cdot \frac{81}{256} = 100 \cdot \frac{3^4}{4^4} = 100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cong 31{,}64 \ \ \textit{bidones}$$

● Siguiendo así sucesivamente, se puede decir que en el mejor de los casos llegan:

$$100 \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^{100} = 100 \cdot \frac{1}{e} = \cong \ 36{,}788 \ \ \textit{bidones}$$

ACTIVIDADES-PÁG. 29

1. a) Teniendo en cuenta las propiedades de las potencias, obtenemos:

$$\left[\left(\frac{2}{7}\right)^{12} : \left(\frac{7}{2}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{-4}\right]^{-2} = \left[\left(\frac{2}{7}\right)^{12} : \left(\frac{2}{7}\right)^{7} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{-4}\right]^{-2} = \left[\left(\frac{2}{7}\right)^{12-7-4}\right]^{-2} =$$

$$= \left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^{2} = \frac{49}{4} = 12{,}25$$

b) Operando, obtenemos:

$$\left[3\left(1-\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{15}\left(2-\frac{1}{2}\right)^2\right]:7=\left[3\cdot\frac{2}{3}-\frac{4}{15}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]:7=\left[2-\frac{3}{5}\right]:7=\frac{7}{5}:7=\frac{1}{5}=0{,}2$$

2. a) Sacando factores de los radicandos y operando, obtenemos:

$$\left(7\sqrt{63}-8\sqrt{\frac{175}{4}}+\frac{4}{3}\sqrt{112}\right)\cdot\frac{6}{\sqrt{7}}=\left(7\cdot3\sqrt{7}-8\cdot\frac{5\sqrt{7}}{2}+\frac{4}{3}\cdot4\sqrt{7}\right)\cdot\frac{6}{\sqrt{7}}=$$

$$=\left(21\sqrt{7}-20\sqrt{7}+\frac{16}{3}\sqrt{7}\right)\cdot\frac{6}{\sqrt{7}}=\frac{19\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{6}{\sqrt{7}}=38$$

b) Racionalizamos los denominadores y operamos, obteniendo:

$$\frac{2}{\sqrt{6}}-\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}-\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{12-3\sqrt{6}}{15}=\frac{-4}{5}+\frac{8\sqrt{6}}{15}$$

En el gráfico pueden verse la resolución de las actividades 1 y 2 con Wiris.

Actividad 1

$$\left(\left(\frac{2}{7}\right)^{12}/\left(\frac{7}{2}\right)^{-7}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{-4}\right)^{-2}\rightarrow\frac{49}{4}$$

$$\left(3\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{15}\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)^2\right)/7\rightarrow\frac{1}{5}$$

Actividad 2

$$\left(7\cdot\sqrt{63}-8\cdot\sqrt{\frac{175}{4}}+\frac{4}{3}\cdot\sqrt{112}\right)\cdot\frac{6}{\sqrt{7}}\rightarrow 38$$

$$\frac{2}{\sqrt{6}}-\frac{3\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}}\rightarrow\frac{8\cdot\sqrt{6}}{15}-\frac{4}{5}$$

3. a) Operamos en ambos miembros de la igualdad:

En el primer miembro, $\left(\frac{2}{25}\cdot\frac{15}{9}\right)^x=\left(2\cdot5^{-1}\cdot3^{-1}\right)^x$

En el segundo miembro, $\frac{625 \cdot 4^2}{81^{-1}} = \left(2^{-4} \cdot 5^4 \cdot 3^4\right) = \left(2 \cdot 5^{-1} \cdot 3^{-1}\right)^{-4}$

Igualando las potencias obtenemos x = - 4.

b) Operamos en ambos miembros de la igualdad:

En el primer miembro, $\left[\left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot (3)^x\right]^{-2} : 27 = \left(3^{-6} \cdot 3^x\right)^{-2} : 3^3 = 3^{12-2x-3} = 3^{9-2x}$

En el segundo miembro, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-6} = \left(3^{-1}\right)^{-6} = 3^6$

Igualando las potencias y los exponentes obtenemos x = $\frac{3}{2}$.

ACTIVIDADES-PÁG. 30

1. Las soluciones pueden verse en la tabla.

	$-\sqrt{49}$	**23,5**	**0**	$\sqrt{11}$	$2,1\widehat{3}$	$-\frac{1,4}{0,5}$	$\frac{23}{3}$	**- 4²**	$\sqrt[3]{-27}$	$\frac{\pi}{5}$
Menor conjunto numérico al que pertenece	**Z**	**Q**	**N**	**R**	**Q**	**Q**	**Q**	**Z**	**Z**	**I**

2. Las siguientes afirmaciones son:

a) Falsa, el número 5, por ejemplo, es real (entero) y no es irracional.

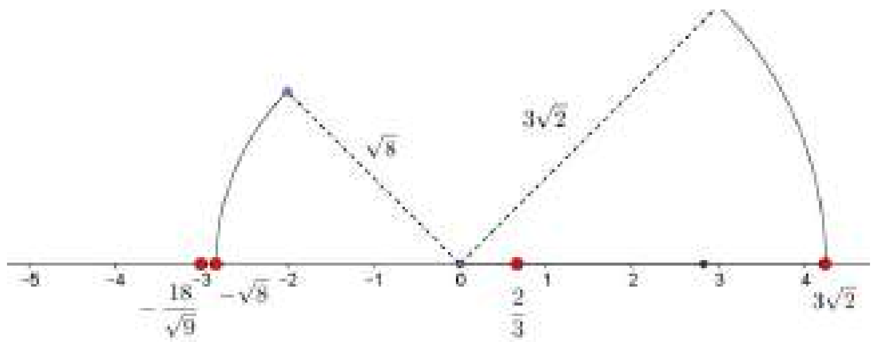
b) Verdadera, por ejemplo, $\frac{15}{3} = 5$ es racional y entero.

c) Verdadero, los números enteros no son decimales.

d) Falsa, los números decimales con infinitas cifras decimales no periódicas no son números racionales

3. Las representaciones pueden verse en los dibujos.

Representación de los números: a) $3\sqrt{2}$ b) $-\sqrt{8}$ c) $-\dfrac{18}{\sqrt{9}}=-3$ d) $0,\widehat{6}=\dfrac{2}{3}$



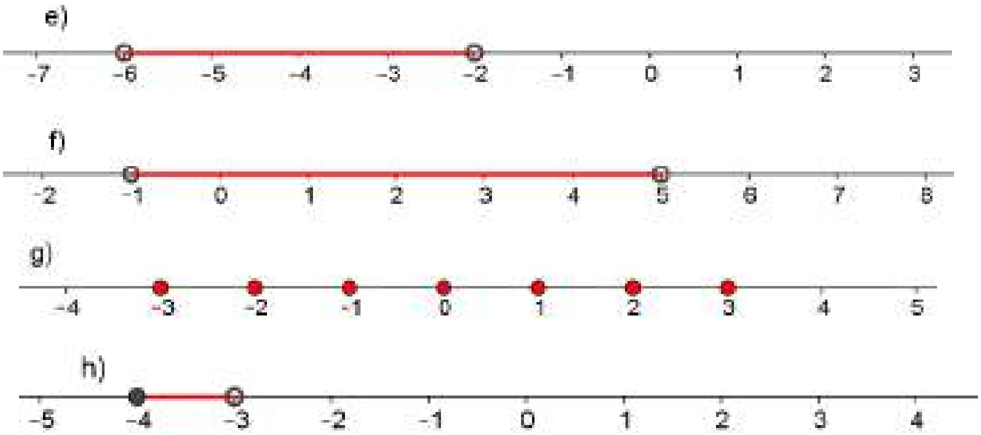
Representación de los conjuntos:

e) A = $\{a \in R \,/\, a < -2 \ y \ a > -6\}$ = (- 6, - 2)

f) E (2, 3) = (- 1, 5)

g) $B = \{x \in Z \,/\, x > 4 \ ó \ x > -4\} = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,\ldots\ldots\}$

h) $(-\infty, -3) \cap [-4,3] = [-4, -3)$



4. La respuesta puede verse en la tabla que sigue.

Apartado	Conjunto	Acotado	Supremo	Ínfimo	Máximo	Mínimo
a)	$(1, 11)$	Si	11	1	No	No
b)	[- 1, 2)	Si	2	- 1	No	- 1
c)	$[-5, +\infty)$	No	No	- 5	No	- 5
d)	{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}	Si	10	3	10	3
e)	$[-2, +\infty)$	No	No	- 2	No	- 2
f)	$(-\infty, 6)$	No	6	No	No	No
g)	(- 2, 2)	Si	2	- 2	No	No
h)	(- 8, - 4)	Si	- 4	- 8	No	No

5. Las soluciones pueden verse en la tabla.

Apartado	Conjunto	Acotado	Supremo	Ínfimo	Máximo	Mínimo
a)	$(-\infty, -1)$	No	- 1	No	-1	No
b)	[- 10, 12)	Si	12	- 10	No	- 10
c)	$(-6, -4) \cup [3, 5]$	Si	5	- 6	5	No
d)	{- 3, - 1, 1, 3, 5}	Si	5	- 3	5	- 3

6. El centro es el punto $\dfrac{-3+6}{2} = 1{,}5$ y el radio vale 6 – 1,5 = 4,5.

Por tanto, el entorno buscado es E (1,5; 4,5)

7. a) Las soluciones de la inecuación $|3+2x| \geq 9$ son:

$$|3+2x| \geq 9 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3+2x \geq 9 & \Rightarrow \quad 2x \geq 6 \quad \Rightarrow \quad x \geq 3 \\ (-(3+2x) \geq 9 & \Rightarrow \quad -2x \geq 12 \quad \Rightarrow \quad x \leq -6 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones es $(-\infty, -6] \cup [3, +\infty)$. La representación gráfica puede verse en el dibujo.

b) Las soluciones de la inecuación $\left|\dfrac{x-4}{3}\right| < 2$ son:

$$\left|\frac{x-4}{3}\right| < 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x-4}{3} < 2 & \Rightarrow \quad x-4 < 6 \quad \Rightarrow \quad x < 10 \\ -\dfrac{x-4}{3} < 2 & \Rightarrow \quad -(x-4) < 6 \quad \Rightarrow \quad x > -2 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones es (- 2, 10). La representación gráfica puede verse en el dibujo.

ACTIVIDADES-PÁG. 31

8. La tabla completa puede verse a continuación:

Valor exacto	0,654371…	218,75364…	0,07642…	**32,55628…….**	3,42456…
Aproximación decimal a décimas por defecto y cota de error	0,6 0,1	**218,7** **0,1**	0,0 0,1	32,5 0,1	3,4 0,1
Aproximación decimal a milésimas por exceso y cota de error	0,655 0,001	218,754 0,001	0,077 0,001	32,557 0,001	**3,425** **0,001**
Redondeo a centésimas y cota de error	0,65 0,005	218,75 0,005	**0,08** **0,005**	32,56 0,005	3,42 0,005
Truncamiento a diezmilésimas y cota de error	**0,6543** **0,0001**	218,7536 0,0001	0,07642 0,0001	32,5562 0,0001	3,4245 0,0001

9. La asociación de cada número con su aproximación o redondeo es:

a) con 4) b) con 6) c) con 5) d) con 1) e) con 3) f) con 2)

10. Consideramos como valor real π = 3,141592.

Para la fracción $\frac{223}{71}$ obtenemos:

$$\text{Error absoluto} = \left|3{,}141592 - \frac{223}{71}\right| = 0{,}000\ 746...$$

$$\text{Error relativo} = \frac{\textit{Error absoluto}}{\textit{Valor real}} = \frac{0{,}000\ 746}{3{,}141592} = 0{,}000\ 237...$$

Para la fracción $\frac{22}{7}$ obtenemos:

$$\text{Error absoluto} = \left|3{,}141592 - \frac{22}{7}\right| = 0{,}001\ 265...$$

$$\text{Error relativo} = \frac{\textit{Error absoluto}}{\textit{Valor real}} = \frac{0{,}001\ 265}{3{,}141592} = 0{,}000\ 4022...$$

11. En la tabla aparecen los resultados:

Planeta	Distancia media al Sol en unidades astronómicas (ua)	Orden de magnitud
Mercurio	$3,870989 \times 10^{-1}$	10^{-1}
Venus	$7,233320 \times 10^{-1}$	10^{0}
Tierra	1×10^{0}	10^{0}
Marte	$1,523662 \times 10^{0}$	10^{0}
Júpiter	$5,203363 \times 10^{0}$	10^{1}
Saturno	$9,537070 \times 10^{0}$	10^{1}
Urano	$1,919059 \times 10^{1}$	10^{1}
Neptuno	$3,006896 \times 10^{1}$	10^{1}

12. a) Los números en notación científica son:

$x = 0,000000000003 = 3 \times 10^{-12}$

$y = 432$ cienmilésimas $= 4,32 \times 10^{-3}$

$z = 243$ millones $= 2,43 \times 10^{8}$

$t = 623000000000000 = 6,23 \times 10^{14}$

b) Los resultados de las operaciones son:

i) $x + y = 4,320\,000\,003 \times 10^{-3}$

ii) $t - 1000\,z = 6,22757 \times 10^{14}$

iii) $x \cdot z \cdot t = 4,54167 \times 10^{11}$

iv) $y : x \cdot t = 8,9712\ 10^{-1}$

13. Los cálculos quedan:

Si un año-luz son $9,4605 \cdot 10^{12}$ km, entonces un minuto-luz será:

$$\frac{9,4605 \cdot 10^{12}}{365 \cdot 24 \cdot 60} = 17\,999\,429,22\ km = 1,799\,9429 \cdot 10^{7}\ km$$

Si un año-luz son $9,4605 \cdot 10^{12}$ km, entonces un segundo-luz será:

$$\frac{9,4605 \cdot 10^{12}}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 299\,990,4871\ km = 2,999\,904871 \cdot 10^{5}\ km$$

La distancia Marte-Sol en el Afelio es 249 100 000 km = $2,491 \cdot 10^{8}$ km y en segundos-luz será:

$$\frac{2,491 \cdot 10^{8}}{2,999904871 \cdot 10^{5}} = 830,360\ segundos - luz$$

La distancia Marte-Sol en el Perihelio es 206 700 000 km = $2,067 \cdot 10^{8}$ km y en minutos-luz será:

$$\frac{2,067 \cdot 10^{8}}{1,7999429 \cdot 10^{7}} = 11,484\ \min utos - luz$$

ACTIVIDADES-PÁG. 32

14. Las soluciones son:

a) $\sqrt{36a^4 b^2} = 6a^2 b$ c) $\sqrt[4]{256 z^8} = 4z^2$ e) $\sqrt[3]{125 a^3 b^6} = 5ab^2$

b) $\sqrt[3]{-8x^6 y^3} = -2x^2 y$ d) $\sqrt[5]{243 x^{15}} = 3x^3$ f) $\sqrt[4]{16 x^8 y^4} = 2x^2 y$

15. Las potencias y raíces pedidas son:

a) $\sqrt[4]{a} = a^{1/4}$ c) $\sqrt[5]{a^4} = a^{4/5}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{-2/3}$ g) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}} = a^{-3/2}$

b) $3^{3/2} = \sqrt{3^3}$ d) $7^{2/3} = \sqrt[3]{7^2}$ f) $7^{-3/2} = \dfrac{1}{\sqrt{7^3}}$ h) $5^{-2/3} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

16. Los radicales son:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$ c) $\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt{5}}} = \sqrt[4]{5^3}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{a}}} = \sqrt[18]{a}$

b) $\left(\sqrt[5]{ab^2}\right)^3 = \sqrt[5]{a^3 b^6}$ d) $\left(\sqrt{a^3\sqrt{b}}\right)^4 = a^6 b$ f) $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^9}} = \sqrt[12]{a^{13}}$

17. Las expresiones quedan:

a) $\sqrt{500} = 10\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{a^3 b^4} = ab\sqrt[3]{b}$

c) $\sqrt[3]{-160} = (-2)\sqrt[3]{20}$

d) $\sqrt[4]{625x^5 y^6} = 5xy\sqrt[4]{xy^2}$

e) $\sqrt{64a^7 b^5} = 8a^3 b^2\sqrt{ab}$

f) $\sqrt[5]{x^5 y^7 z^9} = xyz\sqrt[5]{y^2 z^4}$

g) $\sqrt{9a^2 - 9} = 3\sqrt{a^2 - 1}$

h) $\sqrt{x^2 + x^2 y} = x\sqrt{1+y}$

18. Los radicales quedan:

a) $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$

b) $3ab\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{27a^5 b^3}$

c) $3\sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{3^7}$

d) $a^4 b^2\sqrt{2a^3 b} = \sqrt{2a^{11} b^5}$

e) $2\sqrt[3]{2a} = \sqrt[3]{16a}$

f) $4ab\sqrt[3]{2a^2 b} = \sqrt[3]{1284a^5 b^4}$

19. Las soluciones son:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3^3} = \sqrt{3^4} = 3^2$

b) $\sqrt[3]{a}\cdot a^2 = \sqrt[3]{a^7} = a^{7/3}$

c) $\sqrt[4]{2a^5} : \sqrt[4]{2a^3} = \sqrt{a} = a^{1/2}$

d) $a^{-1}\cdot\sqrt[3]{a^2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}} = a^{-1/3}$

e) $\sqrt[5]{3^6} : \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{3^2} = 3^{2/5}$

f) $\sqrt{a} : \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a} = a^{1/6}$

20. Los resultados son:

a) $5\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - \frac{5}{4}\sqrt{3} = -\frac{3}{4}\sqrt{3}$

b) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{2} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{2} - \frac{7}{12}\sqrt[3]{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{50} - \frac{1}{3}\sqrt{8} + \frac{7}{2}\sqrt{18} - \frac{3}{4}\sqrt{98} = \frac{115}{12}\sqrt{2}$

d) $3\sqrt[3]{250} - 15\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{54} = 0$

e) $3\sqrt{36a} - 5\sqrt{4a} - \sqrt{25a} + 6\sqrt{a} = 9\sqrt{a}$

f) $3x^2\sqrt[3]{27x} - 7\sqrt[3]{x^7} - x\sqrt[3]{x^4} = x^2\sqrt[3]{x}$

21. El perímetro del hexágono mide $48\sqrt{3}\ cm \approx 83{,}14\ cm$.

El área del hexágono mide $288\sqrt{3}\ cm^2 \approx 498{,}83 cm^2$.

ACTIVIDADES-PÁG. 33

22. Los resultados son:

a) $\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{28}{3} - 2\sqrt{3}$

b) $2 \cdot \sqrt[3]{60} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{18} = 60$

c) $\left(3\sqrt{5} - 2\right)^2 - 6\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{5} - 2\right) = 19$

d) $\left(\sqrt{2} + 2\right)^2 - \left(\sqrt{2} + 2\right) \cdot \left(\sqrt{2} - 2\right) = 8 + 4\sqrt{2}$

e) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{3} = .-\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

f) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{45} - \frac{3}{2}\sqrt{20}\right) \cdot \frac{2}{3}\sqrt{125} = -\frac{50}{3}$

g) $\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{8} + 2\sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{72} - \sqrt{20} - \sqrt{2}\right) = 30$

h) $\left(\sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80}\right) : \left(\sqrt{245} - \sqrt{20}\right) = 1$

i) $\left(\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2-3\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=6-12\sqrt{6}$

j) $\left(\sqrt{75}-\sqrt{27}+2\sqrt{12}\right):3\sqrt{3}=2$

23. Las soluciones son:

a) Los radicales equivalentes a $\sqrt{2}$, y $\sqrt[5]{5}$ son $\sqrt[10]{2^5}=\sqrt[10]{32}$ y $\sqrt[10]{5^2}=\sqrt[10]{25}$; por tanto, $\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}$

b) Los radicales equivalentes a $\sqrt[3]{10}$ y $\sqrt[5]{100}$ son $\sqrt[15]{10^5}$ y $\sqrt[15]{10^6}$; por tanto, $\sqrt[3]{10}<\sqrt[5]{100}$

c) Los radicales equivalentes a $\sqrt[3]{2^{-1}}$, $\sqrt[9]{3}$, $\sqrt{5}$ son $\sqrt[18]{2^{-6}}$, $\sqrt[18]{3^2}$ y $\sqrt[18]{5^9}$; por tanto, $\sqrt[3]{2^{-1}}<\sqrt[9]{3}<\sqrt{5}$

d) Los radicales equivalentes a $\sqrt[4]{36}$,. $\sqrt[3]{15}$ y $\sqrt[6]{100}$ son:
$\sqrt[12]{36^3}=\sqrt[12]{46656}$, $\sqrt[12]{15^4}=\sqrt[12]{50625}$ y $\sqrt[12]{100^2}={}^{21}\sqrt[8]{10000}$; por tanto, $\sqrt[6]{100}<\sqrt[4]{36}<.\sqrt[3]{15}$

24. Tras operar obtenemos:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{6}=2\sqrt[12]{54}$

b) $\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[12]{a^7}=\sqrt[12]{a^{25}}$

c) $\sqrt[4]{8a^3b}:\sqrt{2ab}=\sqrt[4]{\dfrac{2a}{b}}$

d) $\dfrac{\sqrt[12]{64}}{\sqrt[4]{4}}=1$

e) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt[8]{15625}=25$

f) $\sqrt[4]{a^2b^3}\cdot\sqrt[6]{2a^3b^2}=\sqrt[12]{4a^{12}b^{13}}$

g) $\sqrt{5\sqrt[3]{5^2}}=\sqrt[6]{5^5}$

h) $\dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[6]{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt[6]{2^5}$

25. Tras racionalizar se obtiene:

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

c) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}}=2\sqrt[3]{3}$

d) $\dfrac{7}{\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{3}}=\dfrac{\sqrt[6]{27\,783}}{3}$

e) $\dfrac{12\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=6\sqrt{3}+6$

f) $\dfrac{-3}{2\sqrt{3}-3}=-2\sqrt{3}-3$

g) $\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}=-9+4\sqrt{5}$

h) $\dfrac{\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}+5}=3-\sqrt{7}$

26. Obviando la constante h = 183 cm en cada una de las series, puede comprobarse, con facilidad, que se cumple:

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2+1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\varphi$$

$$\varphi^3 = \varphi \cdot \varphi^2 = \varphi \cdot (1+\varphi) = \varphi + \varphi^2$$

$$\varphi^4 = \varphi \cdot \varphi^3 = \varphi \cdot (\varphi + \varphi^2) = \varphi^2 + \varphi^3$$

$$\varphi^5 = \varphi \cdot \varphi^4 = \varphi \cdot (\varphi^2 + \varphi^3) = \varphi^3 + \varphi^4$$

Y así sucesivamente.

También se cumple:

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2\cdot(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi = 1 + \varphi^{-1} = 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi^{-2} = \frac{1}{\varphi^2} = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{6+2\sqrt{5}} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{1}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\varphi}$$

$$\varphi^{-1} + \varphi^{-2} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} = \frac{\varphi}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^2} = \frac{\varphi+1}{\varphi^2} = \frac{\varphi^2}{\varphi^2} = 1$$

Y así sucesivamente.

ACTIVIDADES-PÁG. 34

27. Las soluciones son:

a) $48 + 10\sqrt[3]{9}$ b) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ c) 2

28. Las expresiones racionalizadas y simplificadas son:

a) $\dfrac{22\sqrt{6} - 47}{5}$ b) $\dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}$ c) $1-\sqrt{3}$

29. Los radicales simplificados son:

a) $a^{\frac{1}{72}} = \sqrt[72]{a}$ b) $\dfrac{6-\sqrt{2}}{17}$ c) 5

30. a) Elevamos los dos miembros al cuadrado y operamos:

$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 = 2^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 4+2\sqrt{3} - 2\sqrt{(4+2\sqrt{3})\cdot(4-2\sqrt{3})} + 4 - 2\sqrt{3} = 4 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 - 2\sqrt{4} = 4 \;\Rightarrow\; 8-4=4.$$

Se verifica la igualdad.

b) Elevamos los dos miembros al cuadrado

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2+2\sqrt{12}+6}{16} \quad \Rightarrow \quad \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16}$$

Se verifica la igualdad.

31. El valor de las expresiones es:

$$\left(\frac{1+\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{7+2\sqrt{6}}{7-2\sqrt{6}} - \frac{7-2\sqrt{6}}{7+2\sqrt{6}} = \frac{\left(7+2\sqrt{6}\right)^2 - \left(7-2\sqrt{6}\right)^2}{7^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2} = \frac{56\sqrt{6}}{25}$$

32. a) Partimos de un segmento OA de longitud 1. Por uno de sus extremos levantamos el segmento AB, también de longitud 1. Trazamos el segmento OB que con el punto A forma el triángulo rectángulo OAB.

En el extremo B del segmento OB trazamos el segmento BC perpendicular al anterior. Trazamos el segmento OC y tenemos otro triángulo rectángulo OBC.

En el extremo C repetimos la construcción anterior y así en todos los nuevos puntos que van apareciendo.

b) Para determinar la longitud del segmento OB utilizamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo OAB y obtenemos:

$$OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Para calcular la longitud del segmento OC con el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo OBC y obtenemos:

$$OC = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

Para calcular la longitud del segmento OD repetimos lo anterior en el triángulo rectángulo OCD y obtenemos:

$$OD = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

Para determinar la longitud de los otros segmentos se procede de forma análoga.

Observamos que se obtiene la sucesión de los radicales:

$$OB = \sqrt{2},\ OC = \sqrt{3},\ OD = \sqrt{4} = 2,\ OE = \sqrt{5},\ OF = \sqrt{6},\ OG = \sqrt{7}, \ldots$$

c) Para obtener un segmento de longitud $\sqrt{10}$ basta con repetir el proceso de construcción tres pasos más.

33. Expresamos el número $\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ en la forma $\sqrt{\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}}$.

Racionalizamos el radicando: $\sqrt{\dfrac{1}{2-\sqrt{2}} \cdot \dfrac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}$.

Operamos en el radicando: $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

34. a) Los 5 litros de sangre son 5 dm^3. Como cada dm^3 contiene 10^6 mm^3, entonces toda la sangre del paciente, en mm^3, será $5 \cdot 10^6$ mm^3.

Si el número de glóbulos rojos por mm^3 de sangre ha sido de $4{,}8 \cdot 10^6$; el número de glóbulos rojos del paciente serán:

$$(5 \cdot 10^6) \cdot (4{,}8 \cdot 10^6) = 2{,}4 \cdot 10^{13}.$$

b) Un kilómetro tiene 10^6 mm, por tanto, la longitud en kilómetros de todos los glóbulos rojos del paciente serán:

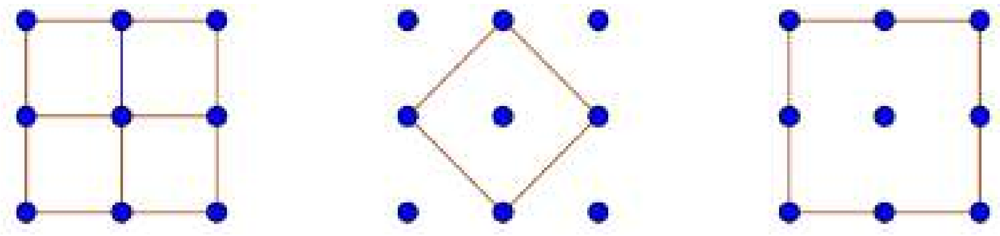
$$(2{,}4 \cdot 10^{13}) : (10^6) = 240\,000 \text{ km}$$

c) Si la longitud del Ecuador es aproximadamente de 40 000 km, el número de vueltas que da la hilera de glóbulos rojos alrededor de la Tierra será:

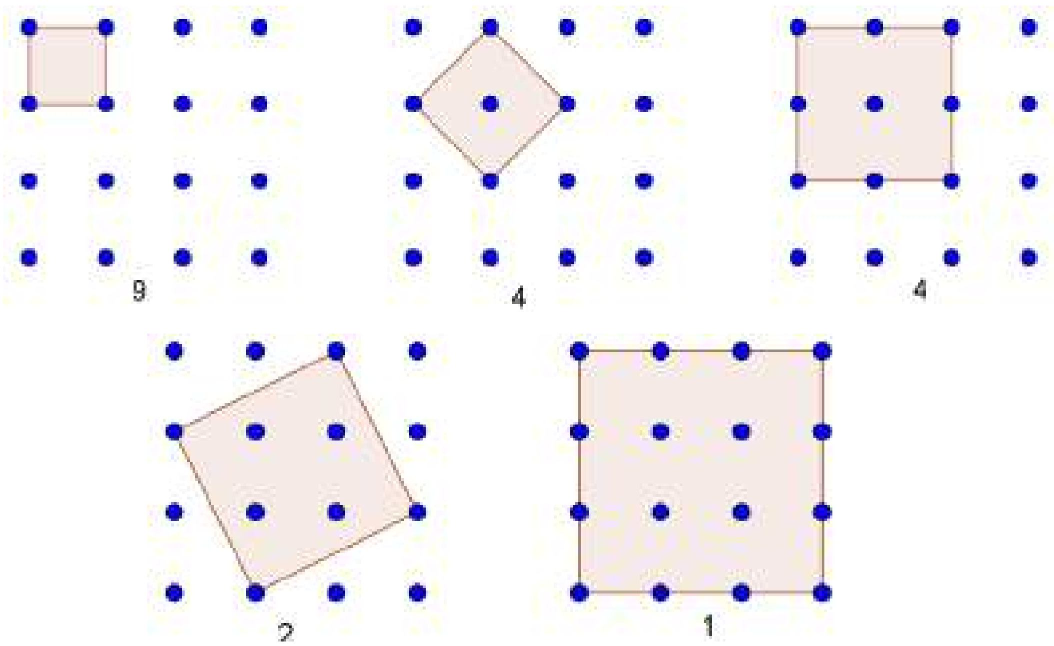
$$240\,000 : 40\,000 = 6.$$

ACTIVIDADES-PÁG. 35

a) y b) En una cuadrícula de 3 x 3 puntos se pueden dibujar 6 cuadrados de 3 tamaños diferentes.



c) Sobre una cuadrícula de 4 x 4 puntos se pueden dibujar 20 cuadrados de 5 tamaños diferentes.



d) En una cuadrícula de 8 x 8 puntos se pueden dibujar cuadrados de 13 tamaños diferentes y podremos encontrar:

$$1 \cdot 7^2 + 2 \cdot 6^2 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 4^2 + 5 \cdot 3^2 + 6 \cdot 2^2 + 7 \cdot 1^2 = 336 \text{ cuadrados.}$$

e) Sobre una cuadrícula de n x n puntos se pueden dibujar cuadrados de 2n - 3 tamaños diferentes y el siguiente número de cuadrados:

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i \cdot (n-i)^2 = 1 \cdot (n-1)^2 + 2 \cdot (n-2)^2 + 3 \cdot (n-3)^2 + \ldots + (n-1) \cdot 1^2 = \frac{n^4 - n^2}{12}$$

UNIDAD 2: Álgebra I: Polinomios, ecuaciones y sistemas

ACTIVIDADES-PÁG. 36

1. Los resultados son:

a) Cociente: $x^2 + x + 4$ y resto: - 2 b) Cociente: $x^3 – 2x^2 + 5x – 10$ y resto: 20

2. Operando obtenemos:

a) $$\frac{x-2}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{x^2-4x+4}=\frac{x-2}{(x-1)\cdot(x+1)}\cdot\frac{x+1}{(x-2)^2}=\frac{1}{(x-1)\cdot(x-2)}=\frac{1}{x^2-3x+2}$$

b) $$\left(x-\frac{x}{x+1}\right):\left(x+\frac{x}{x+1}\right)=\frac{x^2}{x+1}:\frac{x\cdot(x+2)}{x+1}=\frac{x}{x+2}$$

3. Los resultados son:

a) La expresión es una ecuación con solución x = 2.

b) La expresión es una identidad que se verifica para cualquier valor de x.

4. Si llamamos x al número de piezas que tenía al principio e y al valor inicial de cada pieza, podemos formular el sistema:

$$\begin{cases} x\cdot y = 560 \\ (x-1)\cdot(y+10) = 560 \end{cases}$$

La solución del sistema es x = 8 e y = 70. Por tanto, el alfarero tenía 8 piezas al principio.

ACTIVIDADES-PÁG. 53

1. Sí puede ser cierto; se trata de dos padres que se han casado cada uno con la hija del otro.

2. Diremos que:

$a_1 = 7$

$a_2 = 8$

…

$a_n = 7 + (n – 1) \cdot 1 = n + 6$

Además sabemos que $a_n + n = 42$. Sustituyendo y operando, obtenemos n = 18 damas.

Con el valor anterior, tenemos $a_n = 42 – 18 = 24$ caballeros.

Había 18 damas y 24 caballeros.

3. Luís tarda 15 minutos en llegar a la sierra.

La perra, por lo tanto, ha estado moviéndose durante 15 minutos. Por tanto ha recorrido:

$$16\ {}^{km}\!/_{h} : 4\ h = 4\ kilómetros$$

4. Llamando x e y a las incógnitas podemos formular la "igualdad":

$$2000 - 19xy = 9 + x + y$$

Desarrollando los números según la expresión decimal:

$2000 - (1000 + 900 + 10x + y) = 9 + x + y$

Operando, obtenemos la ecuación $11x + 2y = 91$, cuya solución con sentido es $x = 7$, $y = 7$.

Es decir, Astérix nació en el año 1977 y en el año 2000 tenía 23 años.

ACTIVIDADES-PÁG. 55

1. a) La factorización del polinomio es $P(x) = 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 + 1)(x + 1)(x - 3)$ y sus raíces son -1 y 3.

b) La factorización del polinomio es $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = (x - 1)(x + 2)(2x + 1)$ y sus raíces son 1; -2 y $-1/2$.

En el gráfico pueden verse la resolución de la actividad 1 con Wiris.

Actividad 1

factorizar$(2x^4-4x^3-4x^2-4x-6) \rightarrow 2\cdot(x-3)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$

resolver$(2x^4-4x^3-4x^2-4x-6=0) \rightarrow \{\{x=-1\},\{x=3\}\}$

factorizar$(2x^3+3x^2-3x-2) \rightarrow (x-1)\cdot(x+2)\cdot(2\cdot x+1)$

resolver$(2x^3+3x^2-3x-2=0) \rightarrow \left\{\{x=-2\},\{x=1\},\left\{x=-\frac{1}{2}\right\}\right\}$

2. Los resultados son:

a) $$\left(a - \frac{a^2-1}{a+1}\right) : \left(\frac{a^2-a}{a-1} + 1\right) = \frac{a+1}{a+1} : \frac{a^2-1}{a-1} = \frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)(a^2-1)} = \frac{1}{a+1}$$

b) $$\frac{-2x^2 + 2x + 6}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{-3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{x+2}$$

En el gráfico pueden verse la resolución de la actividad 2 con Wiris.

Actividad 2

factorizar$(2x^4-4x^3-4x^2-4x-6) \rightarrow 2\cdot(x-3)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$

resolver$(2x^4-4x^3-4x^2-4x-6=0) \rightarrow \{\{x=-1\},\{x=3\}\}$

factorizar$(2x^3+3x^2-3x-2) \rightarrow (x-1)\cdot(x+2)\cdot(2\cdot x+1)$

resolver$(2x^3+3x^2-3x-2=0) \rightarrow \left\{\{x=-2\},\{x=1\},\left\{x=-\frac{1}{2}\right\}\right\}$

fracciones_simples$\left(\frac{-2x^2+2x+6}{x^3+x^2-2x}\right) \rightarrow \{\{-3,x\},\{2,x-1\},\{-1,x+2\}\}$

3. Las soluciones son:

a) Pasamos el paréntesis (14 – x) al segundo miembro y elevamos al cuadrado y operamos:

$$\sqrt{2x^2-3x+10}-(14-x)=0 \Rightarrow \sqrt{2x^2-3x+10}=14-x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2-3x+10=196-28x+x^2 \Rightarrow x^2+25x-186=0$$

Las soluciones de la ecuación cuadrática son x = 6 y x = - 31, que ambas son soluciones de la ecuación inicial.

b) Despejamos x de la primera ecuación, x = y + 4. Sustituimos en la segunda ecuación y obtenemos la ecuación cuadrática $y^2+4y+5=0$, que no tiene soluciones reales.

Por tanto, el sistema carece de soluciones.

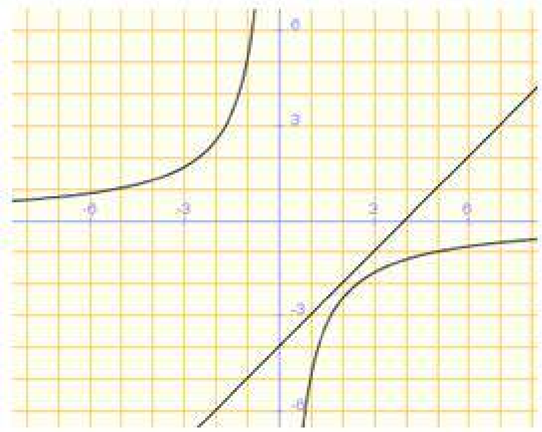
En el gráfico pueden verse la resolución de la actividad 3 con Wiris.

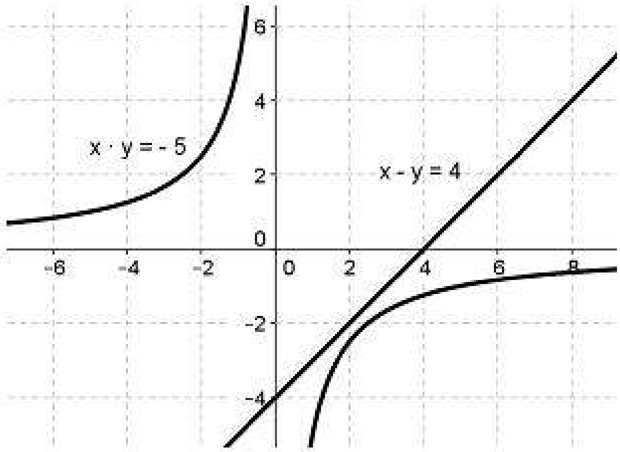
Actividad 3

resolver$(\sqrt{2x^2-3x+10}-(14-x)=0) \rightarrow \{\{x=-31\},\{x=6\}\}$

resolver$\left\{\begin{matrix} x-y=4 \\ x\cdot y=-5 \end{matrix}\right\} \rightarrow \{\square\}$

En los dibujos puede verse como la recta y la hipérbola no se cortan.





ACTIVIDADES-PÁG. 56

1. Operando y utilizando la identidad de polinomios, se obtiene a = 2 y b = - 1.

2. En cada uno de los casos descomponemos los polinomios en factores y calculamos el MCD y el mcm.

a) $$\begin{cases} A(x) = x(x-3)(x-2) \\ B(x) = (x+3)(x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MCD\left[A(x),\, B(x)\right] = (x-2) \\ mcm\left[A(x),\, B(x)\right] = x(x-3)\,(x-2)\,(x+3) \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} C(x) = (x+1)(x-2)^2 \\ D(x) = (x+1)(x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MCD\left[C(x),\, D(x)\right] = (x+1)(x-2) \\ mcm\left[C(x),\, D(x)\right] = (x+1)\,(x-2)^2 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} E(x) = (x-1)(x+3) \\ D(x) = 4(x-1)^2(x+3)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MCD\left[E(x),\, F(x)\right] = (x-1)(x+3) \\ mcm\left[E(x),\, F(x)\right] = 4(x-1)^2(x+3)^2 \end{cases}$$

3. Las soluciones de cada apartado son:

a) El resto de dividir P (x) por x - $\frac{1}{2}$ debe ser cero.

$$\text{Resto} = P\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 27.$$

b) Ha de ser divisible por (x – 2) y por (x + 2). Por tanto:

$$\begin{cases} A(2) = 0 \\ A(-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 + 24 + 2a + b = 0 \\ -8 + 24 - 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -32 \\ -2a + b = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -24 \end{cases}$$

c) Queda:

$$\text{Resto} = \left(-\sqrt{3}\right)^5 - 4\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^3 - m\cdot\left(-\sqrt{3}\right) = 5\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad m = 2.$$

d) Las condiciones del enunciado dan lugar a:
- Para que sea divisible por (x – 2), entonces B (2) = 0.
- Para que sea divisible por (x + 1), entonces B (- 1) = 0.
- Para que dé resto 4 al dividirlo por x, entonces B (0) = 4.

Obtenemos el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y su solución:

$$\begin{cases} 8 + 4a + 2b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ c = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

4. Los resultados de las operaciones que siguen son:

a) $\dfrac{5}{x-3} + \dfrac{3x}{x+2} = \dfrac{5x + 10 + 3x^2 - 9x}{(x-3)(x+2)} = \dfrac{3x^2 - 4x + 10}{x^2 - x - 6}$

b) $\dfrac{3x-1}{x^2-9} - \dfrac{3}{x+3} = \dfrac{3x-1}{x^2-9} - \dfrac{3x-9}{x^2-9} = \dfrac{8}{x^2-9}$

c) $\dfrac{4}{x-2} - \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{2x}{x^2-4} = \dfrac{3x+14}{x^2-4}$

d) $\dfrac{2x-6}{x^2-1}\cdot\dfrac{5x+5}{4x-12} = \dfrac{2(x-3)\cdot 5\cdot(x+1)}{(x-1)(x+1)\cdot 4\cdot(x-3)} = \dfrac{5}{2x-2}$

e) $\dfrac{2x+6}{x-1} : \dfrac{3x+9}{x^2-1} = \dfrac{2\,(x+3)\,(x+1)(x-1)}{3(x-1)(x+3)} = \dfrac{2x+2}{3}$

f) $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+5x+6}\cdot\dfrac{2x^2-8}{x^2-x} : \dfrac{2x-10}{x^2+3x} = \dfrac{(x-1)(x-5)\cdot 2\cdot(x+2)\cdot x\cdot(x+3)}{(x+2)\,(x+3)\cdot x\,(x-1)\cdot 2\cdot(x-5)} = x-2$

g) $\left(x - \dfrac{4}{x}\right)\cdot\dfrac{x^2}{x+2} = \dfrac{x^2-4}{x}\cdot\dfrac{x^2}{x+2} = x(x-2)$

h) $\left(x + \dfrac{x}{x-1}\right) : \left(x - \dfrac{x}{x-1}\right) = \dfrac{x^2}{x-1} : \dfrac{x^2-2x}{x-1} = \dfrac{x^2\,(x-1)}{(x-1)\cdot x\cdot(x-2)} = \dfrac{x}{x-2}$

5. Las descomposiciones en suma de fracciones simples son:

a) $\dfrac{x+1}{3x^2+x}=\dfrac{-2}{3x+1}+\dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{2x^2-x+1}{x^3-2x^2+3x-6}=\dfrac{x+1}{x^2+3}+\dfrac{1}{x-2}$

c) $\dfrac{2x-10}{x^2+2x-8}=\dfrac{3}{x+4}+\dfrac{-1}{x-2}$

d) $\dfrac{6x^2-5x-2}{x^3-2x^2-4x+8}=\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{(x-2)^2}+\dfrac{4}{x-2}\ \dfrac{2x^2+2x+4}{x^3-4x}=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}$

e) $\dfrac{2x^2+2x+4}{x^3-4x}=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}$

f) $\dfrac{-x^2-2}{x+1}=-x+1+\dfrac{-3}{x+1}$

6. Sea el polinomio P (x) = ax^2 + bx + c. Imponiendo las condiciones del enunciado, obtenemos:

- P (0) = - 6, entonces c = - 6
- Tiene como raíz x = - 2, es decir, P (- 2) = 0 y se tiene que 4a – 2b + c = 0
- Da resto 12 al dividirlo por x – 2, entonces, P (2) = 12 y 4a + 2b + c = 12

Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} c=-6 \\ 4a-2b+c=0 \\ 4a+2b+c=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a-2b=6 \\ 4a+2b=18 \\ c=-6 \end{cases}$$

La solución es a = 3, b = 3 y c = - 6 y el polinomio buscado es P (x) = $3x^2$ + 3x – 6.

ACTIVIDADES-PÁG. 57

7. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) x = 2

b) x = 0

c) x = 5

d) x = 5

8. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) x = - 1 y x = 0

b) No tiene soluciones reales

e) x = - 3; x = - 1; x = 1 y x = 3

f) x = - 3 y x = 3

c) x = 3 y x = 5

d) x = 0 y x = 3

g) x = 4 y x = $-\frac{1}{2}$

h) x = b – a y x = - a – b

9. Las soluciones quedan:

a) Si una de las soluciones es 1/3, ésta verificará la ecuación, es decir:

$$3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}k-1=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{3}k-\frac{2}{3}=0 \quad\Rightarrow\quad k=2$$

b) Si las soluciones de la ecuación son – 3 y 6, éstas deben verificar la ecuación, por tanto:

$$\begin{cases}(-3)^2-3b+c=0\\ 6^2+6b+c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3b+c=-9\\ 6b+c=-36\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=-3\\ c=-18\end{cases}$$

c) Las dos soluciones son iguales si el valor del discriminante es nulo, es decir:

$$b^2-4ac=0 \quad\Rightarrow\quad 20^2-4\cdot 2\cdot c=0 \quad\Rightarrow\quad 400-8c=0 \quad\Rightarrow\quad c=50$$

d) Sean x_1 y x_2 las soluciones de la ecuación. Se cumple:

$$\begin{cases}x_1+x_2=m+4\\ x_1\cdot x_2=18\\ x_1=2x_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=6;\quad x_2=3\ \ y\ \ m=5\\ x_1=-6;\ \ x_2=-3\ \ y\ \ m=-13\end{cases}$$

10. Las soluciones son:

a) Factorizamos el polinomio x^3-2x^2-x+2 y obtenemos $(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)$. Las soluciones de la ecuación son $x_1=-1$; $x_2=1$ y $x_3=2$.

b) Operando $x\cdot(x+1)^2-12=x\cdot(5-x)$, obtenemos $x^3+3x^2-4x-12=0$, que factorizada queda $(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x-2)=0$. Las soluciones son $x_1=-3$; $x_2=-2$ y $x_3=2$.

c) Operamos en la ecuación $\frac{x^2-6}{x^2+2}=\frac{21-x^2}{2x^2-23}$ y obtenemos $3x^4-54x^2+96=0$ cuyas soluciones son $x_1=-4$; $x_2=-\sqrt{2}$; $x_3=4$ y $x_4=\sqrt{2}$.

d) Las soluciones de la ecuación $9x^4-85x^2+36=0$ son $x_1=-3$; $x_2=-2/3$; $x_3=3$ y $x_4=2/3$.

e) Las soluciones reales de la ecuación $x^6+19x^3-216=0$ son $x_1=-3$; $x_2=2$.

f) Operando $x^2-3x+1=\frac{2}{x^2-3x}$ se obtiene $x^4-6x^3+10x^2-3x-2=0$.

Factorizando la ecuación obtenemos $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x^2-3x-1)=0$; cuyas soluciones son:

$$x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \text{ y } x_4 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}.$$

11. Las soluciones son:

a) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando, obtenemos:

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 = (x-1)^2 \Rightarrow 2x+1 = x^2-2x+1 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 4.$$

El valor $x_1 = 0$ no es solución, ya que se cumple: $\sqrt{2\cdot 0+1} = 1 \neq -1 = 0-1$.

El valor $x_2 = 4$ es solución, ya que se cumple: $\sqrt{2\cdot 4+1} = 3 = 4-1$.

b) Procediendo como en el caso anterior la ecuación $3\sqrt{3x+4}-2x=5$ tiene dos soluciones: $x_1 = -1$ y $x_2 = \frac{11}{4}$

c) La ecuación $\sqrt{x^2+9}+x^2=21$ tiene dos soluciones: $x_1 = -4$ y $x_2 = 4$.

d) La solución de la ecuación $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=3$ es $x_1 = \frac{13}{9}$.

e) La ecuación $\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x-4}=3$ no tiene soluciones.

f) Elevando al cuadrado y operando en la ecuación $\sqrt{x+10}-\frac{6}{\sqrt{x+10}}=5$ obtenemos como solución los valores $x_1 = -9$ y $x_2 = 26$; aunque sólo este último es la solución de la ecuación dada,

12. Llamando x al cociente, el resto será x y el divisor 2x. La relación entre los elementos de la división permite escribir $595 = 2x\cdot x + x$.

Las soluciones de la ecuación $2x^2 + x - 595 = 0$ son $x_1 = 17$ y $x_2 = -\frac{35}{2}$.

El divisor de esta división es 34 y se cumple $595 = 34\cdot 17 + 17$.

13. El triángulo tiene por catetos x y x – 42 y por hipotenusa 78. El teorema de Pitágoras nos permite escribir:

$$x^2 + (x-42)^2 = 78^2 \Rightarrow 2x^2 - 84x - 4320 = 0$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 72$ y $x_2 = -30$.

La segunda solución carece de sentido y uno de los catetos mide 72 cm y el otro 30 cm.

14. Llamando x al número e imponiendo las condiciones del enunciado, obtenemos:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{58}{21} \quad \Rightarrow \quad 21x^2 - 58x + 21 = 0$$

Las soluciones son $x_1 = \frac{7}{3}$ y $x_2 = \frac{3}{7}$.

15. Sean x – 1, x y x + 1 los tres números consecutivos. Podemos formular la ecuación:

$$(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = 365$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = -11$ y $x_2 = 11$.

La primera carece de sentido y los números son 10, 11 y 12.

Los números consecutivos a éstos son 13 y 14, y se cumple también que $13^2 + 14^2 = 365$.

ACTIVIDADES-PÁG. 58

16. Llamamos x al número de estudiantes del curso e y a la cantidad de dinero que paga cada uno. Imponiendo las condiciones del enunciad, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x \cdot y = 2160 \\ (x - 3) \cdot (y + 8) = 2160 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por sustitución, obtenemos x = 30 e y = 72. Por tanto, en el curso había 30 estudiantes y cada uno debía pagar, en principio, 72 euros.

17. Los sistemas resueltos quedan:

a) Resolvemos el sistema $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 7 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = \frac{25}{3} \end{cases}$ por reducción y obtenemos $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ y_1 = 3 \end{cases}$

b) Resolvemos el sistema $\begin{cases} y = x^2 - 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$ por sustitución y obtenemos $\begin{cases} x_1 = 3; \quad y_1 = 1 \\ x_2 = -4; \quad y_2 = 8 \end{cases}$

c) Resolvemos el sistema $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$ por sustitución y obtenemos $\begin{cases} x_1 = 3; \quad y_1 = 2 \\ x_2 = \frac{7}{3}; \quad y_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$

d) Resolvemos el sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ x \cdot y = 30 \end{cases}$ por sustitución y obtenemos $\begin{cases} x_1 = 6; \quad y_1 = 5 \\ x_2 = -6; \quad y_2 = -5 \end{cases}$

e) Resolvemos el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 89 \\ x \cdot y = -40 \end{cases}$ por sustitución y obtenemos $\begin{cases} x_1 = -8; \ \ y_1 = 5 \\ x_2 = -5; \ \ y_2 = 8 \\ x_3 = 5; \ \ y_3 = -8 \\ x_4 = 8; \ \ y_4 = -5 \end{cases}$

f) Resolvemos el sistema $\begin{cases} x + y = 52 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{cases}$ por sustitución y obtenemos $\begin{cases} x_1 = 36; \ \ y_1 = 16 \\ x_2 = 16; \ \ y_2 = 36 \end{cases}$

g) En el sistema $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 57 \\ x^2 - xy + y^2 = 43 \end{cases}$ sumamos ambas ecuaciones y restamos ambas ecuaciones, obteniendo el sistema equivalente $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50 \\ x \cdot y = 7 \end{cases}$. Resolviendo este último por sustitución obtenemos las soluciones $\begin{cases} x_1 = 7; \ \ y_1 = 1 \\ x_2 = -7; \ \ y_2 = -1 \\ x_3 = 1; \ \ y_3 = 7 \\ x_4 = -1; \ \ y_4 = -7 \end{cases}$

h) Resolviendo el sistema $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = 2 \end{cases}$ por sustitución y obtenemos $\begin{cases} x_1 = 1; \ \ y_1 = 0 \\ x_2 = 17; \ \ y_2 = 8 \end{cases}$.

De las dos soluciones anteriores sólo es válida $x_2 = 17$ e $y_2 = 8$.

18. Sean x y x + 100 la medida de sus lados. Se cumplirá $x \cdot (x + 100) = 120\,000$.

Operando y resolviendo, obtenemos:

$$x^2 + 100x - 120\,000 = 0 \ \ \Rightarrow \ \ x = \frac{-100 \pm \sqrt{100^2 + 4 \cdot 120\,000}}{2} = \frac{-100 \pm 700}{2} = \begin{cases} 300 \\ -400 \end{cases}$$

Las medidas de la finca son 300 y 400 metros.

19. Llamando x a la longitud de la base e y a la altura e imponiendo las condiciones del enunciado, obtenemos:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 20 \\ x \cdot y = 24 \end{cases} \ \ \Rightarrow \ \ \begin{cases} x_1 = 6; \ y_1 = 4 \\ x_2 = 4; \ y_2 = 6 \end{cases}$$

Los trozos deben ser de 4 dm y 6 dm.

20. Llamando x al área de un cuadrado e y al área de otro, podemos formular el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3060 \\ x - y = 468 \end{cases} \ \ \Rightarrow \ \ \begin{cases} x = 1764 \ cm^2 \\ y = 1296 \ cm^2 \end{cases}$$

El lado de un cuadrado mide $\sqrt{1764}\,cm = 42\ cm$ y el del otro $\sqrt{1296}\,cm = 36\ cm$.

21. Llamamos x al tiempo que tarda el segundo albañil solo en hacer la reparación. De la cantidad de trabajo que hacen los albañiles por separado y juntos podemos formular la ecuación:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{x}=\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad 4x+24=6x \quad\Rightarrow\quad 2x=24 \quad\Rightarrow\quad x=12$$

El segundo albañil tardaría en hacer sólo la reparación 12 horas.

22. Las soluciones son:

a) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:

$E_1 \to E_1$; $E_2 \to E_2 - E_1$ y $E_3 \to E_3$

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+y=3 \\ y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=6 \\ \quad -z=-3 \\ y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y su solución es x = 1; y = 2; z = 3.

b) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:

$E_1 \to E_1$; $E_2 \to E_2 - 2E_1$ y $E_3 \to E_3 - 3E_1$

$E_1 \to E_1$; $E_2 \to E_2$ y $E_3 \to 3E_3 - 4E_2$

$$\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 2x+y-5z=-4 \\ 3x+y-4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=4 \\ 3y-9z=-12 \\ 4y-10z=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=4 \\ 3y-9z=-12 \\ 6z=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y su solución es x = 2; y = 2; z = 2.

c) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:

$E_1 \to E_1$; $E_2 \to 2E_2 - E_1$ y $E_3 \to 2E_3 - 5E_1$

$E_1 \to E_1$; $E_2 \to E_2$ y $E_3 \to E_3 + E_2$

$$\begin{cases} 2x-3y+z=-7 \\ x+y=1 \\ 5x+2z=-15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y+z=-7 \\ 5y-z=9 \\ -15y+z=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y+z=-7 \\ 5y-z=9 \\ -10y=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=7/5 \\ y=-2/5 \\ z=-11 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y sus soluciones son x = 7/5, y = - 2/5, z = -11, con t $\in$ R.

d) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:
$E_1 \to E_1$; $E_2 \to E_2 - 2E_1$ y $E_3 \to E_3 - E_1$
$E_1 \to E_1$; $E_2 \to E_2$ y $E_3 \to E_3 - 6E_2$

$$\begin{cases} x+y+z=-2 \\ 2x+3y+5z=-11 \\ x-5y+6z=-29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=-2 \\ y+3z=-7 \\ 6y-5z=27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=-2 \\ y+3z=-7 \\ -23z=69 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-3 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y su solución es x = - 1; y = 2; z = - 3.

e) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:
$E_1 \to E_1$; $E_2 \to E_2 - 2E_1$ y $E_3 \to E_3 - 5E_1$
$E_1 \to E_1$; $E_2 \to E_2$ y $E_3 \to E_3 - 4E_2$

$$\begin{cases} x+4y-8z=6 \\ 2x+4y-z=8 \\ 5x+4y+20z=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4y-8z=6 \\ -4y+15z=-4 \\ -16y+60z=-20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4y-8z=6 \\ -4y+15z=-4 \\ 0z=-4 \end{cases}$$

El sistema es incompatible y carece de solución.

f) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:
$E_1 \to E_1$; $E_2 \to E_2 - 3E_1$ y $E_3 \to E_3 - E_1$
$E_1 \to E_1$; $E_2 \to E_2$ y $E_3 \to E_3 - 3E_2$

$$\begin{cases} x+3y-4z=6 \\ 3x-3y+z=-7 \\ x-y+2z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-4z=6 \\ -12y+13z=-25 \\ -4y+6z=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-4z=6 \\ -12y+13z=-25 \\ -5z=5 \end{cases} \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y su solución es x = - 1; y = 1; z = - 1.

g) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:
$E_1 \to E_1$; $E_2 \to E_2$; $E_3 \to E_3$ y $E_4 \to E_4 + E_3$
$E_1 \to E_1$; $E_2 \to E_2$; $E_3 \to E_3$ y $E_4 \to E_4 + E_2$
$E_1 \to E_1$; $E_2 \to E_2$; $E_3 \to E_3$ y $E_4 \to E_4 + E_3$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ y-z=1 \\ z-t=1 \\ t-x=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ y-z=1 \\ z-t=1 \\ -y+t=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ y-z=1 \\ z-t=1 \\ -z+t=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ y-z=1 \\ z-t=1 \\ 0t=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ y-z=1 \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3+t \\ y=2+t \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3+m \\ y=2+m \\ z=1+m \\ t=m \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son x = 3 + m, y = 2 + m, z = 1 + m; t = m, con m $\in$ R.

h) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:

$E_1 \rightarrow E_1$; $E_2 \rightarrow E_2 - E_1$; $E_3 \rightarrow E_3 - E_1$ y $E_4 \rightarrow E_4$

$E_1 \rightarrow E_1$; $E_2 \rightarrow E_2$; $E_3 \rightarrow 2E_3 - E_2$ y $E_4 \rightarrow 2E_4 + 3E_2$

$E_1 \rightarrow E_1$; $E_2 \rightarrow E_2$; $E_3 \rightarrow E_3$ y $E_4 \rightarrow E_4 - E_3$

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-y+t=1 \\ x+z-t=3 \\ 3y+2z+t=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z \qquad =1 \\ \quad -2y-z+t=0 \\ \quad -y \qquad -t=2 \\ \quad 3y+2z+t=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z \qquad =1 \\ \quad -2y-z+t=0 \\ \qquad\qquad z-3t=4 \\ \qquad\qquad z+5t=-4 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z \qquad =1 \\ \quad -2y-z+t=0 \\ \qquad\qquad z-3t=4 \\ \qquad\qquad\quad -8t=8 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \\ z=1 \\ t=-1 \end{array}\right.$$

El sistema es compatible determinado y su solución es x = 1; y = - 1; z = 1; t = - 1.

i) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:

$E_1 \rightarrow E_1$; $E_2 \rightarrow E_2 - 2E_1$; $E_3 \rightarrow E_3 - E_1$ y $E_4 \rightarrow 3E_4$

$E_1 \rightarrow E_1$; $E_2 \rightarrow E_2$; $E_3 \rightarrow 6E_3 - E_2$ y $E_4 \rightarrow 6E_4 - 4E_2$

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-3z=-3 \\ 2x-2y+z=2 \\ x+y-z=0 \\ 3x+2y-2z=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y-3z=-3 \\ \quad -6y+7z=8 \\ \quad -y+2z=3 \\ \quad -4y+7z=10 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y-3z=-3 \\ \quad -6y+7z=8 \\ \qquad\quad -5z=-10 \\ \qquad\quad 14z=28 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{array}\right.$$

El sistema es compatible determinado y su solución es x = 1; y = 1; z = 2.

23. Sea el número $\overline{xyz} = 100x + 10 + z$ el número buscado. De las condiciones del enunciado obtenemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+x=10 \\ x=y+z \\ \overline{xyz}-\overline{zyx}=297 \end{array}\right.$$

Operando y resolviendo, obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+x=10 \\ x-y+z=0 \\ 100x+10y+x-(100z+10y+x)=297 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ x-y-z=0 \\ x \qquad -z=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ y=3 \\ z=2 \end{array}\right.$$

El número buscado es 532.

ACTIVIDADES-PÁG. 59

24. Llamando x a la edad del padre e y a la edad del hijo obtenemos:

$$\begin{cases} y + \dfrac{x}{3} = \dfrac{x}{2} \\ x - 4 = 11\,(y - 4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 6y = 0 \\ x - 11y = -40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 48 \\ y = 8 \end{cases}$$

El padre tiene 48 años y el hijo 8 años.

25. Sea el número $\overline{xyz} = 100x + 10 + z$ el número buscado. De las condiciones del enunciado obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + x = 18 \\ \overline{xyz} - \overline{zyx} = 594 \\ y = \dfrac{x + z}{2} \end{cases}$$

Operando y resolviendo, obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + x = 18 \\ 100x + 10y + x - (100z + 10y + x) = 594 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x \quad - z = 6 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{cases}$$

El número buscado es 963.

26. Llamamos x a la edad del padre, y a la edad de la madre y z a la edad de la hija. Obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 86 \\ y = 3z \\ x - z = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 37{,}2 \\ y = 36{,}6 \\ z = 12{,}2 \end{cases}$$

El padre tiene 37,2 años, la madre 36,6 años y la hija 12,2 años.

27. Llamamos

x: al número de bricks de leche entera
y: al número de bricks de leche semidesnatada
z: al número de bricks de leche desnatada

Imponemos las condiciones del enunciado y obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 10\,400 \\ 0{,}6x + 0{,}55y + 0{,}5z = 5765 \\ x = 0{,}6 \cdot (y + z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3900 \\ y = 3500 \\ z = 3000 \end{cases}$$

La central lechera envasa:

3 900 bricks de leche entera
3 500 bricks de leche semidesnatada
3 000de bricks de leche desnatada.

28. En el equipo A hay x futbolistas y en el equipo B hay y futbolistas. Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x - 3 = y + 3 \\ x + 7 = (y-7)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 12 \end{cases}$$

Hay 18 futbolistas en el equipo A y 12 futbolistas en el equipo B.

29. En cada uno de los apartados queda:

a) Resolviendo la ecuación obtenemos:

$$x = \frac{(m+1) \pm \sqrt{(m+1)^2 - 4 \cdot 2\,(m+3)}}{4}$$

Imponiendo la condición del enunciado:

$$\frac{(m+1) + \sqrt{(m+1)^2 - 8\,(m+3)}}{4} - \frac{(m+1) - \sqrt{(m+1)^2 - 8\,(m+3)}}{4} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(m+1)^2 - 8\,(m+3)} = 2 \quad \Rightarrow \quad m^2 - 6m - 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 9 \text{ ó } m = -3$$

b) Llamamos y, z a las soluciones de la ecuación. Obtenemos:

$$\begin{cases} y + z = -\dfrac{14}{m} \\ y \cdot z = \dfrac{12}{m} \\ y = 6z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ z = -1 \\ y = -6 \end{cases}$$

c) Si una solución es $x_1 = -\frac{1}{4}$, ésta verifica la ecuación, por tanto:

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + m \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{17}{4}$$

La otra solución es $x_2 = -4$.

d) Resolviendo la ecuación $x^2 - mx + 4 = 0$ obtenemos:

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 16}}{2}$$

Las soluciones son iguales si $m^2 - 16 = 0$, lo que implica que $m = \pm\ 4$.

30. Las soluciones son:

a) $(x^2 - 2) \cdot (x^2 + 2) = 12 \quad \Rightarrow \quad x^4 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

b) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando obtenemos: $x^2 - 2 = 2\sqrt{x^2 - 3}$, y elevando de nuevo obtendríamos: $x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$ y ambas soluciones son válidas.

c) Factorizando obtenemos $x^2 (x - 1) (x + 1) (2x + 3) = 0$ y sus soluciones serían las siguientes: $x = 0$ doble; $x = -1$; $x = 1$ y $x = -\frac{3}{2}$.

d) Operando obtenemos $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ cuyas soluciones son: $x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$.

e) $x^2 - 8 = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3$ y $x = \pm\sqrt{7}$.

f) $2x - 3 = x + 9 \quad \Rightarrow \quad x = 12$; o bien $2x - 3 = (x + 9) \quad \Rightarrow \quad x = -2$

31. Las soluciones son:

a) $x = 3$ e $y = 1$ ó $x = -2$ e $y = -4$.

b) $x = 3$, $y = 1$, $z = 3$

c) Sumando ambas ecuaciones obtenemos: $(x + y)^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad x + y = 6$ o $x + y = -6$ y la solución provendrá de los dos sistemas siguientes:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + xy = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -6 \\ x^2 + xy = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases}$$

32. Llamando x e y a las dimensiones del jardín e imponiendo las condiciones del problema obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 36 \\ (x+2)(y+2) = xy + 40 \end{cases}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones, todos los valores de x e y que verifiquen la siguiente expresión: $x + y = 18$ con $x \in (0, 18)$ e $y \in (0, 18)$.

33. Llamamos x al número de kilómetros hacia arriba a la ida, y al número de kilómetros hechos en llano y z al número de kilómetros hacia abajo. Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 920 \\ \dfrac{x}{80} + \dfrac{y}{100} + \dfrac{z}{120} = 9 \\ \dfrac{x}{120} + \dfrac{y}{100} + \dfrac{z}{80} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 240\ km \\ y = 200\ km \\ z = 480\ km \end{cases}$$

ACTIVIDADES-PÁG. 60

34. Sean x, y, z el número de participaciones de 1, 2 y 5 euros, respectivamente. Las condiciones del enunciado nos permiten plantear el sistema que sigue. En la primera ecuación se describe el número total de participaciones, en la segunda el importe total y en la tercera la relación entre participaciones de 1 euros y de 5 euros.

$$\begin{cases} x + y + z = 260 \\ x + 2y + 5z = 600 \\ x \qquad - 2z = 0 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado, es decir, tiene una solución única ya que el determinante de la matriz de los coeficientes vale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Aplicando el método de Gauss, obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 260 \\ x + 2y + 5z = 600 \\ x \qquad - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 260 \\ -y - 4z = -340 \\ y + 3z = 260 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 260 \\ y + 4z = 340 \\ -z = -80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 160 \\ y = 20 \\ z = 80 \end{cases}$$

Se han vendido 160 participaciones de 1 euros, 20 participaciones de 2 euros y 80 participaciones de 5 euros.

Puede comprobarse, con facilidad, que la solución obtenida es la correcta:

$$\begin{cases} 160 + 20 + 80 = 260 \\ 160 + 2 \cdot 20 + 5 \cdot 80 = 600 \\ 160 \qquad - 2 \cdot 80 = 0 \end{cases}$$

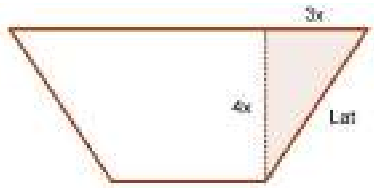
35. a) El área de la sección es el área de un trapecio de bases 4x y 10x y de altura 4x; por tanto, su área, A, será:

$$A = \frac{4x + 10x}{2} \cdot 4x \qquad \Rightarrow \qquad A = 7x \cdot 4x \qquad \Rightarrow \qquad A = 28x^2$$

El volumen, V, del canal será el área de la sección por su longitud:

$$V = 28x^2 \cdot 245x = 6860x^3$$

b) Para determinar el área total del canal tenemos que conocer la medida de los lados inclinados de la sección.



Llamando Lat al lado inclinado, calculamos su medida aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo del dibujo cuyos catetos miden 3x y 4x.

$$Lat^2 = (3x)^2 + (4x)^2 \quad \Rightarrow \quad Lat = \sqrt{9x^2 + 16x^2} \quad \Rightarrow \quad Lat = \sqrt{25x^2} = 5x$$

El área total del canal es:

$$A_T = (5x + 4x + 5x) \cdot 245x = 3430x^2$$

c) Si la longitud real del canal es 122,5 m, entonces:

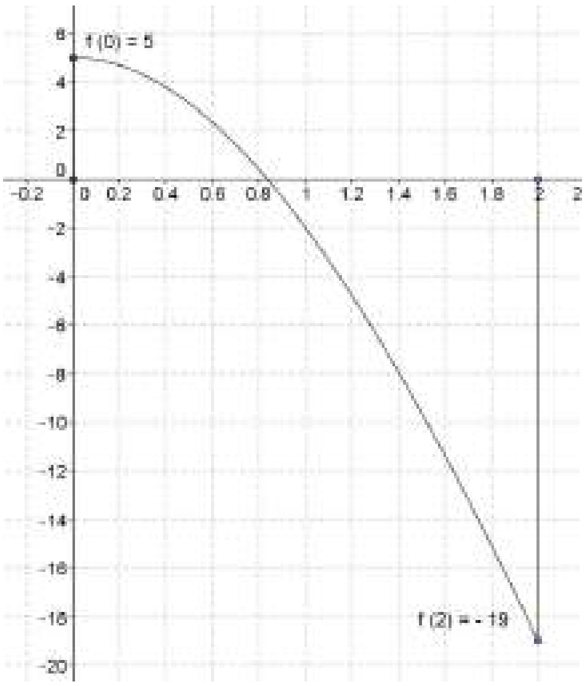
$$245x = 122{,}5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{122{,}5}{245} = 0{,}5$$

El valor del volumen del canal es $V = 6860 \cdot (0{,}5)^3 = 857{,}5$ m^3.

El área total del canal es $A_T = 3430 \cdot (0{,}5)^2 = 857{,}5$ m^2.

36. a) Aplicamos los pasos descritos al polinomio $P(x) = x^3 - 8x^2 + 5$,

Paso 1º. Observamos que P (0) = 5 > 0 y P (2) = 8 – 32 + 5 = -19 < 0, por tanto, hay una raíz entre 0 y 2.



Paso 2º. En el intervalo (0, 2) su punto medio es 1 y P (1) = -2. Este valor es de signo opuesto al de P (0), entonces la raíz está entre 0 y 1.

Paso 2º. En el intervalo (0, 1) su punto medio es 0,5 y P (0,5) = 3,125. Este valor es de signo opuesto al de P (1), luego la raíz está entre 0,5 y 1.

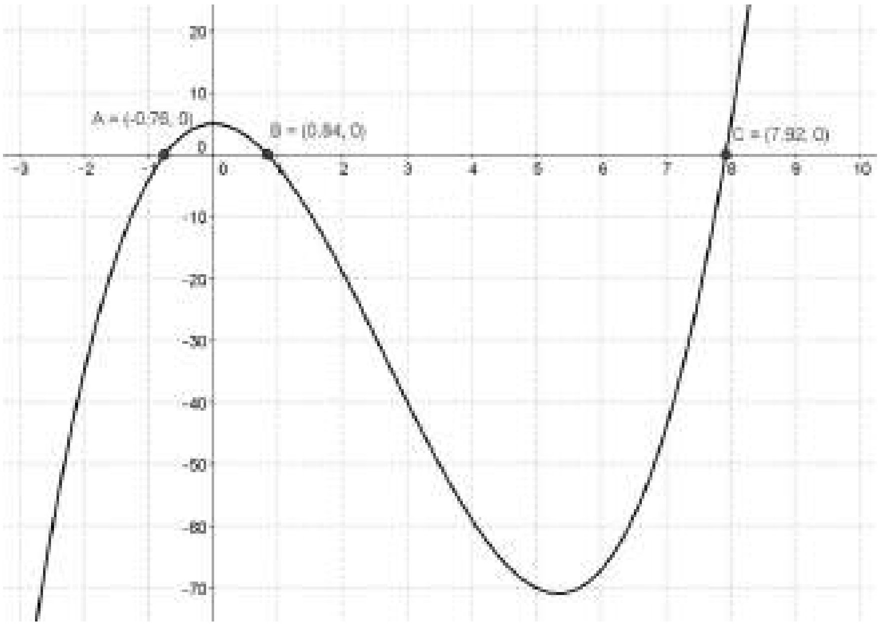
Paso 2º. En el intervalo (0,5; 1) su punto medio es 0,75 y P (0,75) = 0,92. Este valor es de signo opuesto al de P (1), luego la raíz está entre 0,75 y 1.

Paso 2º. En el intervalo (0,75; 1) su punto medio es 0,875 y P (0,875) = - 0,455. Este valor es de signo opuesto al de P (0,75), luego la raíz está entre 0,75 y 0,875.

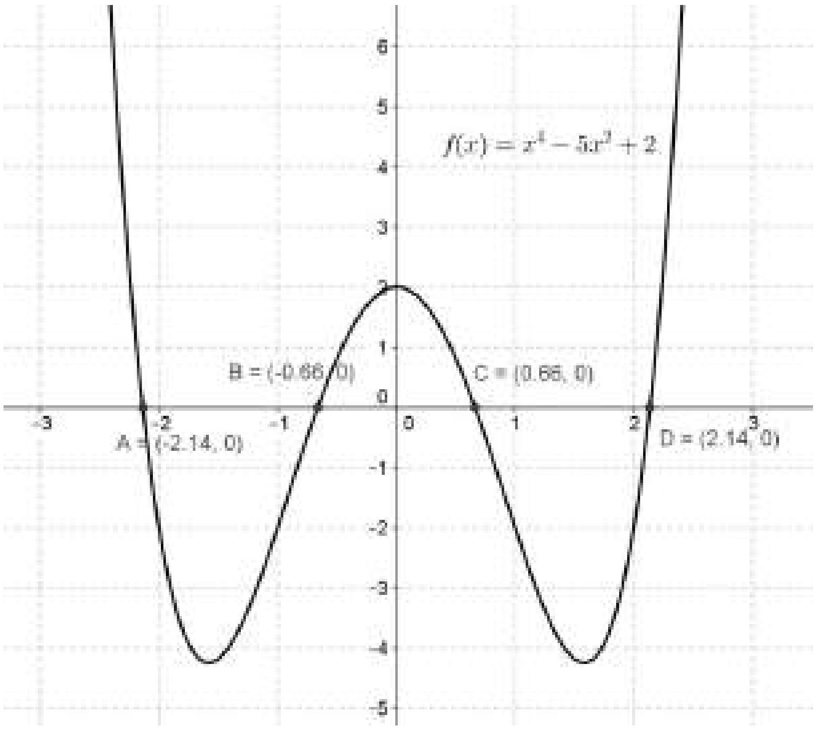
Una estimación razonable sería el punto medio de este intervalo, es decir: $\dfrac{0{,}75 + 0{,}875}{2} = 0{,}8125$.

En la imagen puede verse la raíz encontrada.

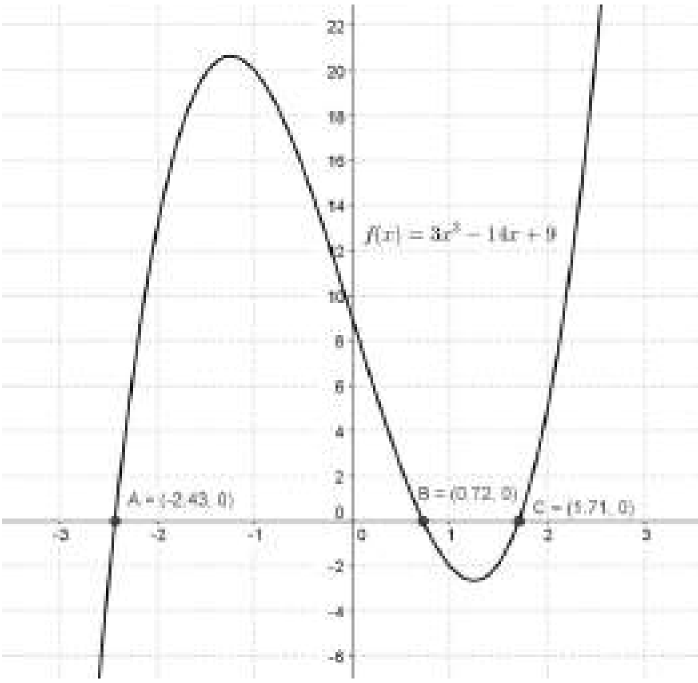
Si realizamos la gráfica de la función polinómica $f(x) = x^3 - 8x^2 + 5$ observamos que tiene tres raíces en los intervalos (- 1, 0), (0, 1) y (7, 8).



b) Procediendo como en el apartado anterior, encontramos las raíces del polinomio Q (x) = $x^4 - 5x^2 + 2$ en los intervalos (- 3, -2); (- 1, 0), (0, 1) y (2, 3). Pueden verse en la gráfica.



c) Las raíces del polinomio R (x) = $3x^3 - 14x + 9$ están en los intervalos (- 3, - 2); (0, 1) y (1, 2). Pueden verse en la gráfica.



37. a) Llamando b al número de coches blancos, **r** el número de coches rojos y **g** al número de coches grises podemos formular el siguiente sistema con las dos condiciones del enunciado:

$$\begin{cases} b + r + g = 24 \\ g = 2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + r + g = 24 \\ -2r + g = 0 \end{cases}$$

Con estas ecuaciones no podemos saber el número **b** de coches blancos que hay en el aparcamiento ya que si resolvemos el sistema anterior (es compatible indeterminado), obtenemos las soluciones:

$$\begin{cases} b = 24 - 3r \\ g = 2r \end{cases}$$

b) Si añadimos la ecuación r + g = 12, el sistema anterior queda:

$$\begin{cases} b + r + g = 24 \\ -2r + g = 0 \\ r + g = 12 \end{cases}$$

Eliminamos la incógnita **g** en la última ecuación haciendo la combinación $E_3 - E_2 \rightarrow E_3$ y resolviendo el sistema resultante, obtenemos:

$$\begin{cases} b + r + g = 24 \\ -2r + g = 0 \\ 3r = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 12 \\ g = 8 \\ r = 4 \end{cases}$$

Observamos que en el aparcamiento hay 12 coches blancos, 8 grises y 4 rojos.

38. Llamamos x a las personas que pagan la entrada a 9 euros, y a los jubilados y z a los niños.

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ y = 2x \\ 9x + 1{,}8y + 4{,}5z = 2115 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 150 \text{ pagan la entrada a 9 euros} \\ y = 300 \text{ son jubilados} \\ z = 50 \text{ son niños} \end{cases}$$

ACTIVIDADES-PÁG. 61

a) En la mesa de tamaño 8 x 6 la bola se mete en la esquina B, como puede verse en el dibujo.

b) La bola ha cruzado 24 cuadrados.

c) La bola ha rebotado 5 veces en los lados de la mesa.

Los mismo ocurriría en las mesas de medidas semejantes: 16 x 12, 24 x 18, etc. En particular en la mesa 4 x 3.

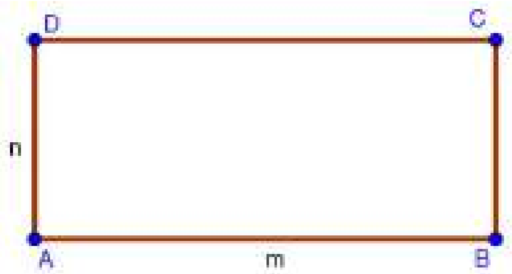
d) Los resultados para las mesas pedidas aparecen a continuación:

● En una mesa 2 x 6, la bola se mete en la esquina C opuesta a A, cruza 6 cuadrados y rebota 2 veces en los lados de la mesa. Lo mismo ocurre en una mesa 1 x 3.

● En una mesa 5 x 10, la bola se mete en la esquina B, cruza 10 cuadrados y rebota una vez en los lados de la mesa. Lo mismo ocurre en una mesa 1 x 2.

● En una mesa 6 x 6, la bola se mete en la esquina C, cruza 6 cuadrados y rebota 0 veces en los lados de la mesa. Lo mismo ocurre en una mesa 1 x 1.

e) En general, para una mesa de tamaño m x n, m y n números naturales, se busca la mesa semejante de dimensiones a x b, siendo a y b primos entre sí y obtenemos:



■ Si b es par, la bola se mete en la esquina B, contigua a la de partida A.

■ Si b es impar, la bola se mete en la esquina C, opuesta a la de partida A, si a es par; si x es par, la bola se mete en la esquina D.

Determinamos el número de rebotes en las bandas de la mesa de billar y para ello calculamos los rebotes que da la bola en las mesas de las dimensiones particulares que aparecen en el enunciado, obtenemos:

- En la mesa 8 x 6, o en su semejante 4 x 3, da 4 + 3 – 2 = 5 rebotes.

- En la mesa 2 x 6, o en su semejante 1 x 3, da 1 + 3 – 2 = 2 rebotes.

- En la mesa 5 x 10, o en su semejante 1 x 2, da 1 + 2 – 2 = 1 rebote.

- En la mesa 6 x 6, o en su semejante 1 x 1, da 1 + 1 – 2 = 0 rebotes.

En general, en la mesa a x b, da a + b - 2 rebotes; siendo a, b los primos entre sí determinados a partir de m x n, es decir, en una mesa de tamaño m x n, la bola da $\frac{m+n}{m.c.d.(m,n)} - 2$ rebotes.

Haciendo los mismo para determinar los cuadros que cruza la bola, se llega a que en una mesa de tamaño m x n, la bola cruza $\frac{m \cdot n}{m.c.d.(m,n)}$ cuadros.

UNIDAD 3: Álgebra II: Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

ACTIVIDADES-PÁG. 62

1. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) $\frac{7}{2}$ b) 0,5 c) 0,0625

2. Se cumplirá:

$$40 \cdot 10^6 = 22 \cdot 10^6 \cdot 1{,}018^t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\log\left(\frac{40 \cdot 10^6}{22 \cdot 10^6}\right)}{1{,}018} = 33{,}5112 \approx 33{,}5 \; años.$$

3. Los resultados son:

a) Las ordenadas son positivas en el intervalo (- 3, - 1).

b) Las ordenadas son negativas en $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$.

4. No podemos simplificar (dividir) por x – 5, ya que en este caso su valor es nulo.

ACTIVIDADES-PÁG. 79

1. Veamos si el producto de cuatro números enteros consecutivos (x – 1) · x · (x + 1) · (x + 2) es un cuadrado perfecto menos una unidad.

Tenemos:

$$\begin{cases} (x-1)\cdot x \cdot (x+1)\cdot(x+2) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x \\ (x^2 + x - 1)^2 = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; Luego,\; (x-1)\cdot x \cdot (x+1)\cdot(x+2) = (x^2 + x - 1)^2 - 1$$

2. Ambos cohetes tardan $\frac{3\,000\,000}{50\,000} = 60$ segundos en alcanzar Venus. Durante este tiempo láxenla, en sus idas y venidas ha recorrido:

$$300\,000 \cdot 60 = 18\,000\,000 \text{ km.}$$

3. Analizamos las terminaciones de las primeras potencias de 7:

$7^1 = 7$, termina en 7
$7^2 = 49$, termina en 9
$7^3 = 343$, termina en 3
$7^4 = 2\,401$, termina en 1
$7^5 = 16\,807$, termina en 7
$7^6 = 117\,649$, termina en 9

Observamos que hay cuatro terminaciones distintas que se repiten cíclicamente; de modo que dividimos 83578 entre 4 y obtenemos de cociente 20894 y de resto 2:

$$83578 = 4 \cdot 20894 + 2$$

Es decir, 7^{83578} termina en el mismo número que 7^2, es decir, termina en 9.

ACTIVIDADES-PÁG. 81

1. a) La resolución de la ecuación es:

$$6^{x-1} + 6^x = 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{6^x}{6} + 6^x = 7 \quad \Rightarrow \quad 6^x + 6 \cdot 6^x = 42 \quad \Rightarrow \quad 7 \cdot 6^x = 42 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

b) La resolución de la ecuación es:

$$\log\,(5x^2 + 2x - 15) - 2 \cdot \log\,(2x - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \log \frac{5x^2 + 2x - 15}{(2x - 1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5x^2 + 2x - 15}{4x^2 - 4x + 1} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 6x - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -8 \end{cases}$$

La única solución válida es x = 2

Las soluciones de las ecuaciones anteriores pueden verse en el gráfico realizado con Wiris.

Actividad 1

resolver_numéricamente$(6^{x-1}+6^x=7) \rightarrow \{x=1.\}$

resolver$(\log(5x^2+2x-15)-2\cdot\log(2x-1)=0) \rightarrow \{\{x=2.\}\}$

2. Las soluciones son:

a) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ b) [- 10, 2] c) (- 2, 0)

En el gráfico pueden verse la resolución de la actividad 2 con Wiris.

Actividad 2
apartado a)

resolver_inecuación$(-4x^2+12x-8<0)$ → $x>2 | x<1$

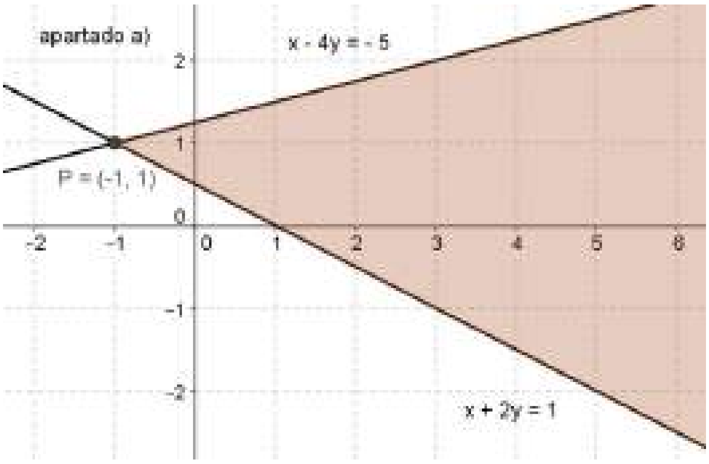
apartado b)

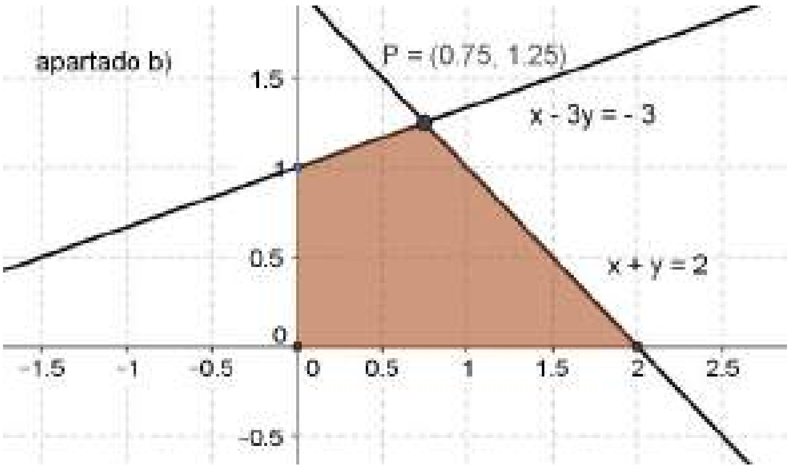
resolver_inecuación$\left(\frac{4x+3}{8}-x\geq\frac{x^2-14}{16}\right)$ → $x\geq-10 \& x\leq 2$

apartado c)

resolver_inecuación$\left(\frac{2x+4}{x}<0\right)$ → $x>-2 \& x<0$

3. Las soluciones de los sistemas de inecuaciones pueden verse en los dibujos:





ACTIVIDADES-PÁG. 82

1. Las soluciones quedan:

a) $27^{x+1} = 3^{x^2 - x - 2} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{3(x+1)} = 3^{x^2 - 2x - 2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5;\ x_2 = -1$

b) $3^x - 3^{x-1} - 3^{x-2} = 15 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x + \dfrac{3^x}{3} + \dfrac{3^x}{9} = 15 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \cdot 3^x = 135 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

c) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{2x} - 18 \cdot 3^x + 81 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

d) $2^{x+2} + 128 = \dfrac{1}{4^{1-x}} \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot 2^x + 128 = \dfrac{2^{2x}}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \left(2^x\right)^2 - 16 \cdot 2^x - 512 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$

e) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x + 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x = 7 \quad \Leftrightarrow \quad 7 \cdot 2^x = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

f) $2^{x+1} - 12 \cdot 2^{1-x} = 13 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot (2^x)^2 - 13 \cdot 26^x - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

g) $5^x \cdot 25^x = 5^6 \quad \Leftrightarrow \quad 5^{3x} = 5^6 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

h) $2^{-x} = 8^{3-x} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{-x} = 2^{9-3x} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{9}{2}$

i) $5^x = 10 + 3 \cdot 5^{2-x} \quad \Leftrightarrow \quad (5^x)^2 - 10 \cdot 5^x - 75 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = 15 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\log 15}{\log 5} = 1{,}6826$

j) $9^x = 45 + 4 \cdot 3^{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad (3^x)^2 - 12 \cdot 3^x - 45 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 15 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\log 15}{\log 3} = 2{,}4650$

k) $4^{x-1} - 3 \cdot 2^{x+1} + 32 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 24 \cdot 2^x + 128 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 \\ 2^x = 16 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4 \end{cases}$

l) $5 \cdot 4^{x-1} + 4 = 5 \cdot 2^{x+1} + 2^{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad 5 \cdot (2^x)^2 - 42 \cdot 2^x + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 \\ 2^x = \dfrac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \dfrac{\log \dfrac{2}{5}}{\log 2} = -1{,}3219 \end{cases}$$

2. Las soluciones son:

a) $\log_3 \sqrt{243} = x \quad \Rightarrow \quad 3^x = 3^{\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{5}{2}$

b) $\ln e^6 = 2x \quad \Rightarrow \quad e^{2x} = e^6 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

c) $5 = \log_x \frac{1}{32} \quad \Rightarrow \quad x^5 = \frac{1}{32} \quad \Rightarrow \quad x^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$

d) log x = - 2 $\quad \Rightarrow \quad x = 10^{-2} = 0{,}01$

e) $x = \log_{\sqrt{2}} 8 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{2}\right)^x = 8 \quad \Rightarrow \quad 2^{\frac{x}{2}} = 2^3 \quad \Rightarrow \quad x = 6$

f) $\log_x 0{,}000001 = 3 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 0{,}000\,001 \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}01$

g) $-2 = \ln x \quad \Rightarrow \quad x = e^{-2}$

h) $\log_{\frac{1}{3}} x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad x = 3$

3. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) log (5x² + 2x - 15) = 2 · log (2x - 1) $\Rightarrow \quad 5x^2 + 2x - 15 = (2x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x - 16 = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 16}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -8 \; (no\ es\ válida) \end{cases}$$

b) 2 · log (3x – 2) - 1 = log (x + 6) $\Rightarrow \quad \log \frac{(3x-2)^2}{x+6} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(3x-2)^2}{x+6} = 10 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 9x^2 - 22x - 56 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 + 4 \cdot 9 \cdot 56}}{18} = \frac{22 \pm 50}{18} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -\frac{14}{9} \; (no\ es\ válida) \end{cases}$$

c) log (x⁴ -4 x² - 12x) - 2 · log (2x - 3) = 0 $\Rightarrow \quad \log \frac{x^4 - 4x^2 - 12x}{(2x-3)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^4 - 4x^2 - 12}{4x^2 - 12x + 9} = 1 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} = \begin{cases} x_1^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{11} = 3 \\ x_{12} = -3 \; (no\ es\ válida) \end{cases} \\ x_2^2 = -1 \; (no\ es\ válida) \end{cases}$$

d) $\dfrac{\log(4x-3)}{\log(6x^2+1)}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{\log\,(4x-3)^2}{\log\,(6x^2+1)}=1 \quad\Rightarrow\quad (4x-3)^2=6x^2+1 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 5x^2-12x+4=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{12\pm\sqrt{144-80}}{10}=\frac{12\pm 8}{10}=\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=\dfrac{2}{5}\ (no\ es\ válida)\end{cases}$$

e) $(x^2-5x+9)\log 2+\log 125=3 \;\Rightarrow\; \log\,(125\cdot 2^{x^2-5x+9})=\log 1000 \;\Rightarrow\; 2^{x^2-5x+9}=8 \quad\Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \quad x^2-5x+6=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=2\end{cases}$$

f) $3\cdot\log_2 x-\log_2\left(x^2+x-4\right)=2 \;\Rightarrow\; \log_2\dfrac{x^3}{x^2+x-4}=2 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{x^3}{x^2+x-4}=4 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x^3-4x^2-4x+16=0 \;\Rightarrow\; (x-4)\cdot(x-2)\cdot(x+2)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=2 \\ x_3=-2\ (no\ es\ válida)\end{cases}$$

g) $\log\sqrt{2x^2-3x+10}-\log\,(14-x)=0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2x^2-3x+10}=14-x \;\Rightarrow\; 2x^2-3x+10=196-28x+x^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2+25x-186=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{-25\pm\sqrt{25^2+4\cdot 186}}{2}=\frac{-25\pm 37}{2}=\begin{cases} x_1=6 \\ x_2=-31\end{cases}$$

4. Las respuestas son:

a) Al cabo de 4 años habrá $6\cdot 1{,}05^4=7{,}29$ m^3 de madera.

Al cabo de 15 años habrá $6\cdot 1{,}05^{15}=12{,}47$ m^3 de madera.

b) Los años que han de pasar para que en el pinar haya $870\ \text{m}^3$ de madera son:

$$6\cdot 1{,}05^x=870 \;\Rightarrow\; 1{,}05^x=145 \;\Rightarrow\; x=\frac{\log 145}{\log 1{,}05}=102\ \text{años}$$

5. Las soluciones de los sistemas:

a) $\begin{cases} 3^x-2^y=23 \\ 3^{x-1}+2^{y-2}=10\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x-2^y=23 \\ 4\cdot 3^x+3\cdot 2^y=120\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x=27 \\ 2^y=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2\end{cases}$

b) $\begin{cases} 5^x - 5^y = 620 \\ 5^{x-y} = 125 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^x - 5^y = 620 \\ 5^x = 125 \cdot 5^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^y = 5 \\ 5^x = 625 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{\pi^8}{\pi^x} = \pi^y \\ \log\ (x + y) - \log\ (x - y) = \log\ 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 - x = y \\ \dfrac{x + y}{x - y} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ 3x - 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log\ x + 3 \log y = 5 \\ \log x - \log y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log\ x = \dfrac{7}{2} \\ \log\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10^{7/2} = 1000 \cdot \sqrt{10} \\ y = 10^{1/2} = \sqrt{10} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log_Y\ (x - 16) = 2 \\ \log_x\ (y + 2) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 16 = y^2 \\ y + 2 = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \log_2\ x + 3 \log_2\ y = 5 \\ \log_2 x^2 - \log_2 y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2\ x + 3 \log_2\ y = 5 \\ 2 \log_2\ x - \log_2\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2\ x = 2 \\ \log_2\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

ACTIVIDADES-PÁG. 83

6. Las soluciones de las inecuaciones son:

a) $(-4, +\infty)$ d) $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ g) $(-\infty, 2) \cup [4, +\infty)$

b) $[-6, 0]$ e) $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ h) $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

c) $(-\infty, -4] \cup (4, +\infty)$ f) $\left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$ i) (0, 1)

7. Las soluciones de los sistemas de inecuaciones son:

a) (- 8, 3] b) (0, 7]

8. Las asociaciones de los sistemas con las soluciones de las inecuaciones son:

a) con iii) b) con ii) c) con i)

9. Sea x la cantidad que debe vender, se cumplirá:

$$1200 < 600 + 0{,}05 \cdot x < 1500 \Rightarrow 600 < 0{,}05x < 900 \Rightarrow 12000 < x < 18000$$

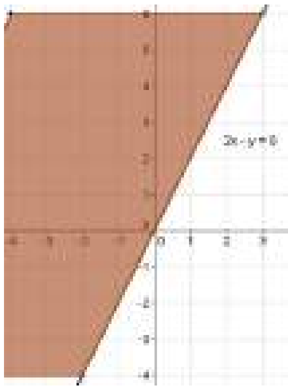
Deberá vender una cantidad entre 12000 y 18000 euros.

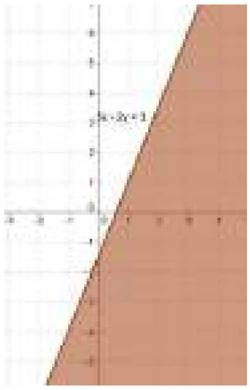
10. Sea x el número de caras y 20 – x el número de cruces. Se cumplirá:

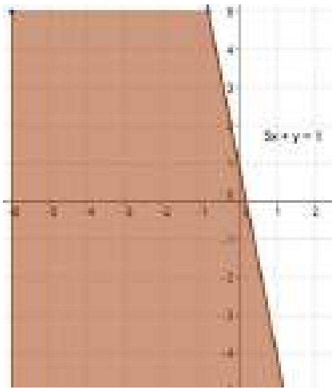
$$10\,000x + 6\,000\,(20 - x) < 176\,000 \;\Rightarrow\; 4\,000x < 56\,000 \;\Rightarrow\; x < 14$$

Han salido menos de 14 caras.

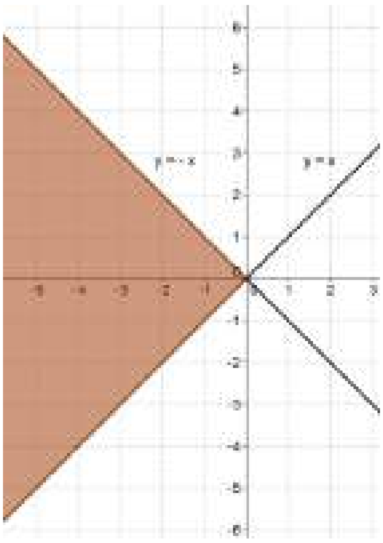
11. Las soluciones de las inecuaciones son los conjuntos de puntos que aparecen en los dibujos.

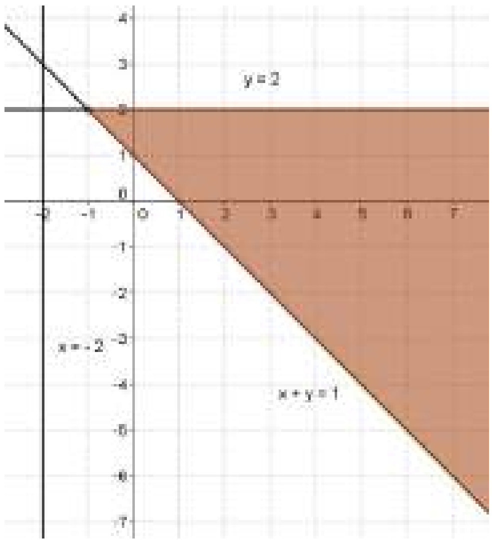
a) 

b) 

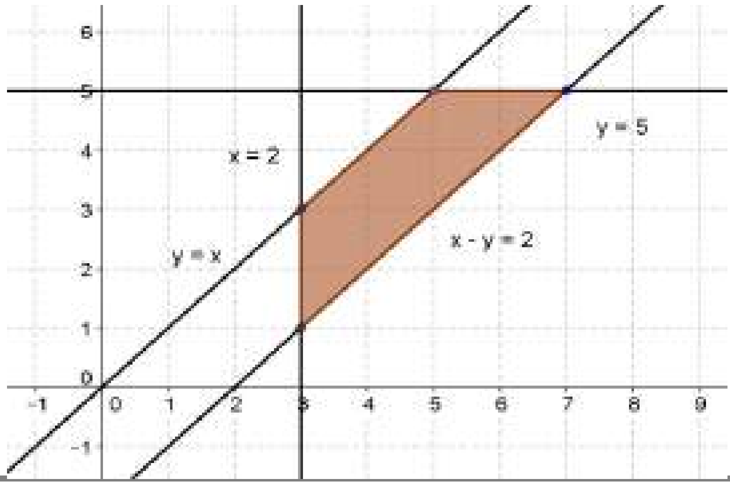
c) 

12. Las soluciones de los sistemas son los conjuntos de puntos que aparecen en los dibujos.

a) 

b) 

b)

c) 

13. Los sistemas de inecuaciones son:

a) $\begin{cases} x > -1 \\ x < 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x > 0 \\ x < 3 \\ y > -3 \\ y < -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x < -1 \\ y > 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x > 0 \\ y > -3 \\ y < -1 \\ x + 2y < 2 \end{cases}$

ACTIVIDADES-PÁG. 84

14. Las soluciones son:

a) x = 2

b) Haciendo $3^x = z$ obtenemos la ecuación $9z^2 - 8z - 55 = 0$ cuyas soluciones son z = 2,96 y z = - 2,07; por tanto:

$$3^x = 2{,}96 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\log 2{,}96}{\log 3} \approx 0{,}99$$

c) Obtenemos la ecuación $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ cuyas soluciones no verifican la ecuación original. Diremos, por tanto, que carece de soluciones.

15. Resolviendo cada una:

a) Operando obtenemos la inecuación $\frac{3x-1}{x-1} < 0$ cuya solución es el intervalo $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

b) Operando la inecuación $x^3 - 11x^2 + 10x \leq 0$ cuya solución son los números reales del conjunto $(-\infty, 0] \cup [1, 10]$.

c) La solución es [- 5, 2).

16. El valor de la expresión es $\log_{\frac{1}{x}} x + \log_y \frac{1}{y}. = -1 + (-1) = -2$.

17. La diferencia entre la cuantía de dinero obtenido de la venta de las camisetas y el dinero del coste de la producción es el beneficio. Llamando x al precio de venta de cada camiseta se puede plantear la siguiente inecuación:

$$2500x - 2500 \cdot 1{,}75 > 3600$$

Resolviendo, obtenemos:

$$2500x - 4375 > 3600 \quad \Rightarrow \quad 2500x > 7975 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{7975}{3600} \quad \Rightarrow \quad x > 3{,}19$$

Para obtener el beneficio deseado tendrá que vender cada camiseta a un precio superior a 3,19 euros.

18. El sistema de inecuaciones es:

$$\begin{cases} x + y < 4 \\ 5x - 2y > -15 \\ 5x - 9y < 20 \end{cases}$$

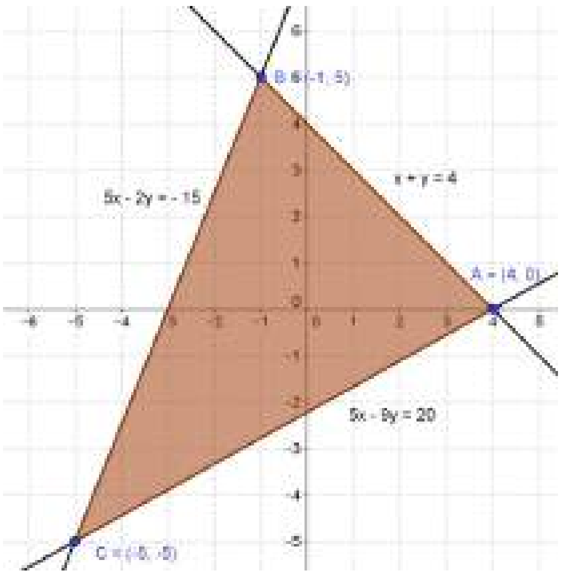
Los vértices de la región son:

$$A: \begin{cases} 5x - 9y = 20 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (4, 0)$$

$$B: \begin{cases} 5x - 2y = -15 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B = (-1, 5)$$

$$C: \begin{cases} 5x - 9y = 20 \\ 5x - 2y = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow C = (-5, -5)$$

Todo lo anterior puede verse en el dibujo.



19. Sea x, con x $\in$ [0, 60], el número de kilogramos de azúcar de 3 euros/kg y 60 – x el número de kilogramos de azúcar de 3 euros/kg. Se cumplirá:

$$2x + 3 \cdot (60 - x) \leq 60 \cdot 2,6$$

Operando, obtenemos x $\geq$ 24.

Por tanto, para conseguir la mezcla pedida en el enunciado habrá que poner 24 o más de la azúcar de 2 euros/kg con 36 o menos de la azúcar de 3 euros/kg.

20. Sean x, y, z el número de herramientas de los tipos A, B y C, respectivamente. Las condiciones del enunciado nos permiten plantear el sistema que sigue. En la primera ecuación se describe el número total de herramientas, en la segunda el tiempo empleado por los tres obreros y en la tercera el tiempo empleado por el revisor.

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + 4y + z = 24 \\ 6x + 4y + 4z = 60 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado, es decir, tiene una solución única ya que el determinante de la matriz de los coeficientes vale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

Aplicando el método de Gauss, obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + 4y + z = 24 \\ 6x + 4y + 4z = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + 4y + z = 24 \\ 3x + 2y + 2z = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ x + 3 \quad = 12 \\ x \quad = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

La fábrica elabora 6 herramientas del tipo A, 12 herramientas del tipo B y 4 herramientas del tipo C.

21. Teniendo en cuenta la expresión que da el montante (M) que produce un capital inicial (C) colocado al r % durante t años, que es: $M = C\,(1 + r)^t$, obtenemos:

$$23988 = 12000 \cdot (1 + 0{,}08)^t$$

Operando: $t = \dfrac{\log 1{,}999}{\log 1{,}08} = 9$ *años*.

22. La expresión que nos da el número total de individuos (P) en función de la población inicial (P_0) y del tiempo t, en días, es: $P\,(t) = P_0 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$

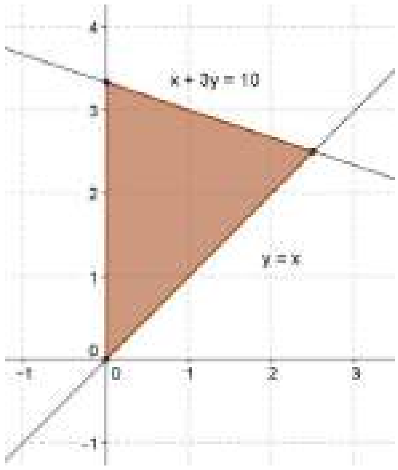
Al cabo de un mes habrá $P\,(30) = 100 \cdot 2^{\frac{30}{4}} = 18101{,}93 \approx 18100$ insectos.

Para que haya 204800 insectos tendrán que pasar:

$$204800 = 100 \cdot 2^{\frac{t}{4}} \Rightarrow 2^{\frac{t}{4}} = 2048 \Rightarrow t = 4 \cdot \frac{\log 2048}{\log 2} = 44 \text{ días.}$$

23. Sean x e y el número de bolígrafos y cuadernos, respectivamente, que podemos comprar. Se debe cumplir:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x \leq y \\ 0{,}2x + 0{,}6y \leq 2 \end{cases}$$



Las soluciones son el conjunto de puntos con coordenadas enteras dentro del recinto sombreado. Es decir:

(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1,1), (1, 2), (1, 3) y (2, 2).

24. La expresión que nos da el precio final (P) en función del precio inicial (P_0) y del tiempo t, en años, es: $P(t) = P_0 \cdot 1{,}05^t$

a) Dentro de 8 años costará $P(8) = 1{,}8 \cdot 1{,}05^8 \approx 2{,}66$ euros.

b) Hace de 8 años costaba $P(-8) = 1{,}8 \cdot 1{,}05^{-8} \approx 1{,}22$ euros.

c) El tiempo que tiene que pasar para que el precio se duplique es:

$$2 \cdot 1{,}8 = 1{,}8 \cdot 1.05^t \quad \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} = 14{,}21 \approx 14 \text{ años.}$$

ACTIVIDADES-PÁG. 85

a) La tabla completa con los polígonos inscritos y circunscritos a la circunferencia de 2^{n+1} lados, es decir, 4, 8, 16, 32, 64,… lados, nos proporciona las siguientes aproximaciones numéricas de π.

Lados	Ángulo	Seno	Tangente	Semiperímetro inscrito	Semiperímetro circunscrito
4	45º	0,707106781	1	2,82842712475	4
8	22,5º	0,382683432	0,41421356237	3,06146745892	3,31370849898
16	11,25º	0,195090322	0,19891236738	3,12144515226	3,18259787807
32	5,625º	0.0980171403	0,09849140336	3,13654849055	3,15172490743
64	2,8125º	0,0490676743	0,04912684977	3,14033115695	3,14411838525
128	1,4063º	0,0245412285	0,02454862211	3,14127725093	3,14222362994
256	0,7031º	0.0122715383	0,01227246238	3,14151380114	3,14175036917
512	0,3516º	0,0061358846	0,00613600016	3,14157294037	3,1416320807
1024	0,1758º	0,0030679568	0,0030679712	3,14158772528	3,14160251026
2048	0,0879º	0,0015339802	0,0015339819	3,1415914215	3,14159511774
4096	0,0440º	0,0007669903	0,0007699054	3,1415923461	3,14159326967

b) La tabla completa con los polígonos inscritos y circunscritos a la circunferencia de $3 \cdot 2^n$ lados, es decir, 6, 12, 24 48, 96,… lados, nos proporciona las siguientes aproximaciones numéricas de π.

Lados	Ángulo	Seno	Tangente	Semiperímetro inscrito	Semiperímetro circunscrito
6	30º	0,5	0,577350269	3	3,464101615
12	15º	0,258819045	0,267949192	3,105828541	3,215390309
24	7,5º	0,130526193	0,131652497	3,132628613	3,159659942
48	3,75º	0,065403129	0,065543462	3,139350203	3,146086215
96	1,875º	0,032719082	0,03273661	3,141031951	3,1427146
192	0,9375º	0,016361731	0,016363922	3,141452472	3,14187305
384	0,4688º	0,00818139604	0,0081814134	3,141557608	3,141662747
768	0,2344º	0,00409060402	0,0040906382	3,141583892	3,141610177
1536	0,1172º	0,00204530629	0,00204531056	3,141590463	3,141597034
3072	0,0586º	0,00102265421	0,00102265421	3,141592106	3,141593749
6144	0,0293º	0,00051132691	0,00051132697	3,141592517	3,141592927

c) Para construir las dos tablas anteriores con una hoja de cálculo, en este caso Excel, seguimos las instrucciones:

Abres la Hoja de Cálculo y escribes:

1. Las cabeceras de columna (Fila 1): n, Lados, Ángulo, etc.
2. Escribes la serie de la columna A: 1, 2, 3, …., 11
3. En la celda B2 escribes: =POTENCIA(2;A2+1)
4. En la celda C2 escribes: =180/B2
5. En la celda D2 escribes: =SENO(C2*PI()/180)
6. En la celda E2 escribes: =TAN(C2*PI()/180)
7. En la celda F2 escribes: =B2*D2
8. En la celda G2 escribes: =B2*E2
9. Seleccionas con el ratón el Rango B2:G12 y pulsas Control+J
10. Seleccionas el Rango C2:G12 y Formato/Celdas/Número/11 posiciones decimales

Se obtiene la tabla que sigue.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**n**	**Lados**	**Ángulo (grados)**	**Seno**	**Tangente**	**Semiperímetro inscrito**	**Semiperímetro circunscrito**
2	1	4	45,00000000000	0,70710678119	1,00000000000	2,82842712475	4,00000000000
3	2	8	22,50000000000	0,38268343237	0,41421356237	3,06146745892	3,31370849898
4	3	16	11,25000000000	0,19509032202	0,19891236738	3,12144515226	3,18259787807
5	4	32	5,62500000000	0,09801714033	0,09849140336	3,13654849055	3,15172490743
6	5	64	2,81250000000	0,04906767433	0,04912684977	3,14033115695	3,14411838525
7	6	128	1,40625000000	0,02454122852	0,02454862211	3,14127725093	3,14222362994
8	7	256	0,70312500000	0,01227153829	0,01227246238	3,14151380114	3,14175036917
9	8	512	0,35156250000	0,00613588465	0,00613600016	3,14157294037	3,14163208070
10	9	1024	0,17578125000	0,00306795676	0,00306797120	3,14158772528	3,14160251026
11	10	2048	0,08789062500	0,00153398019	0,00153398199	3,14159142151	3,14159511775
12	11	4096	0,04394531250	0,00076699032	0,00076699054	3,14159234557	3,14159326963
13							

Para la segunda tabla procedemos de manera análoga:

Abres la Hoja de Cálculo y escribes:

1. Las cabeceras de columna (Fila 1): n, Lados, Ángulo, etc.
2. Escribes la serie de la columna A: 1, 2, 3, …., 11
3. En la celda B2 escribes: =3*POTENCIA(2;A2)
4. En la celda C2 escribes: =180/B2
5. En la celda D2 escribes: =SENO(C2*PI()/180)
6. En la celda E2 escribes: =TAN(C2*PI()/180)
7. En la celda F2 escribes: =B2*D2
8. En la celda G2 escribes: =B2*E2
9. Seleccionas con el ratón el rango B2:G12 y pulsas Control+J
10. Seleccionas el Rango C2:G12 y Formato/Celdas/Número/11 posiciones decimales

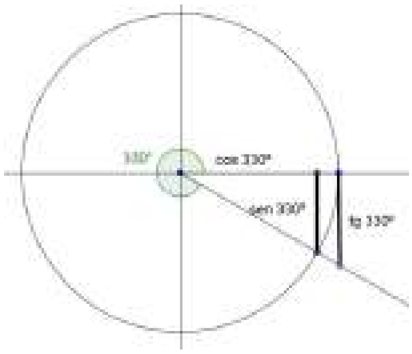
	A	B	C	D	E	F	G
1	**n**	**Lados**	**Ángulo (grados)**	**Seno**	**Tangente**	**Semiperímetro inscrito**	**Semiperímetro circunscrito**
2	1	6	30,00000000000	0,50000000000	0,57735026919	3,00000000000	3,46410161514
3	2	12	15,00000000000	0,25881904510	0,26794919243	3,10582854123	3,21539030917
4	3	24	7,50000000000	0,13052619222	0,13165249759	3,13262861328	3,15965994210
5	4	48	3,75000000000	0,06540312923	0,06554346282	3,13935020305	3,14608621513
6	5	96	1,87500000000	0,03271908282	0,03273661041	3,14103195089	3,14271459965
7	6	192	0,93750000000	0,01636173163	0,01636392214	3,14145247229	3,14187304998
8	7	384	0,46875000000	0,00818113960	0,00818141340	3,14155760791	3,14166274706
9	8	768	0,23437500000	0,00409060403	0,00409063825	3,14158389215	3,14161017660
10	9	1536	0,11718750000	0,00204530629	0,00204531057	3,14159046323	3,14159703432
11	10	3072	0,05859375000	0,00102265368	0,00102265422	3,14159210600	3,14159374877
12	11	6144	0,02929687500	0,00051132691	0,00051132697	3,14159251669	3,14159292739
13							

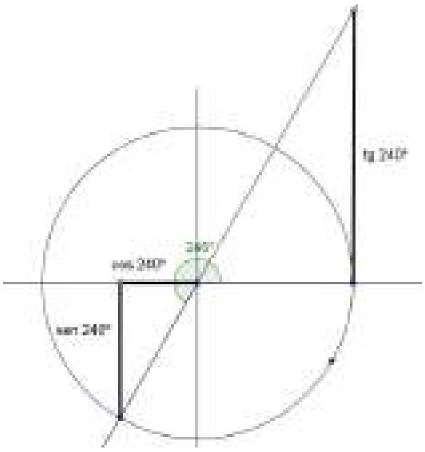
UNIDAD 4: Trigonometría I

ACTIVIDADES-PÁG. 88

1. El ángulo de 330º está situado en el 4º cuadrante y como observamos en el dibujo los signos de las razones trigonométricas son:

sen 330º < 0 cos 330º > 0 tg 330º < 0





Como 960º es mayor que 360º, comenzamos por determinar a qué ángulo equivale en la circunferencia goniométrica. Dividimos 960º entre 360º y obtenemos:

$$960º = 2 \cdot 360º + 240º$$

es decir, dos vueltas de circunferencia, más 240º.
Las razones trigonométricas de 960º tendrán los signos:

sen 960º = sen 240º < 0

cos 960º = cos 240º < 0

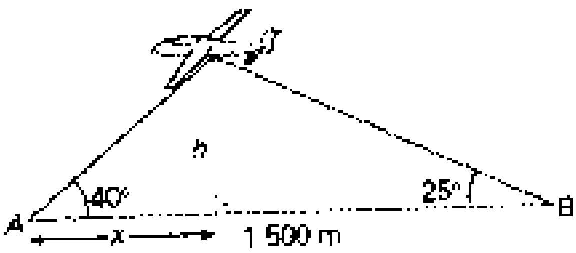
tg 960º = tg 240º > 0

2. a) Basta dividir la relación fundamental por cos ^{2} α.

b) Basta dividir la relación fundamental por sen ^{2} α.

Nota: Es conocido que la división no siempre puede realizarse. Siempre deberán tenerse en cuenta los casos en los que el divisor sea distinto de cero.

3. Según el esquema:

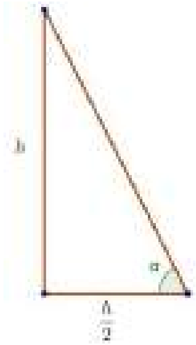


De los dos triángulos rectángulos de la figura, obtenemos:

$$\begin{cases} tg\ 40^{\circ} = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 25^{\circ}\ \dfrac{h}{1500 - x} \end{cases} \Rightarrow \quad h = \frac{1500 \cdot tg\ 40^{\circ} \cdot tg\ 25^{\circ}}{tg\ 40^{\circ} + tg\ 25^{\circ}} \quad \Rightarrow \quad h = 449{,}61\ m$$

4. Llamando α al ángulo que forman los rayos solares con el suelo y teniendo en cuenta el triángulo rectángulo del dibujo:

$$tg\ \alpha = \frac{h}{h/2} \quad \Rightarrow \quad tg\ \alpha = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 63^{\circ}\ 26'\ 6''$$



ACTIVIDADES-PÁG. 105

1. Hay que buscar un número que sea a la vez triangular y cuadrado.

Los números triangulares son: 1, 3, 6, 10, 15, 21,…, $\dfrac{n^2 + n}{2}$

Los números cuadrados son: 1, 4, 9, 16, 25,…, x^2.

Deba cumplirse la igualdad $\dfrac{n^2 + n}{2} = x^2$.

El valor de n más pequeño que cumple la igualdad es n = 8, ya que $\dfrac{8^2 + 8}{2} = x^2 \quad \Rightarrow 36 = x^2$.

El enunciado dice que hay más de 36 cajas, por tanto hay que buscar otra solución, y ésta es:

n = 49, pues $\dfrac{49^2 + 49}{2} = 1225 = 35^2$.

Tiene 1225 cajas.

2. Observamos que:

$$\frac{1}{(n-1)\cdot n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad \text{con n} \geq 2$$

Dando valores, obtenemos:

$$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\ldots = \ldots$$

$$\frac{1}{998\cdot 999}=\frac{1}{998}-\frac{1}{999}$$

$$\frac{1}{999\cdot 100}=\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}$$

Sumando y simplificando:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{998\cdot 999}+\frac{1}{999\cdot 1000}=\frac{1}{1}-\frac{1}{1000}=1-0{,}001=0{,}999$$

3. Sean A, B y C las tres rebanadas. Con A_1 indicamos que se tuesta la cara 1 y con A_2 indicamos que se tuesta la cara 2.

1º A_1B_1 tarda:
30 s en tostar cara A_1 y B_1
5 s en colocar A_1
5 s en colocar B_1
5 s en sacar B_1

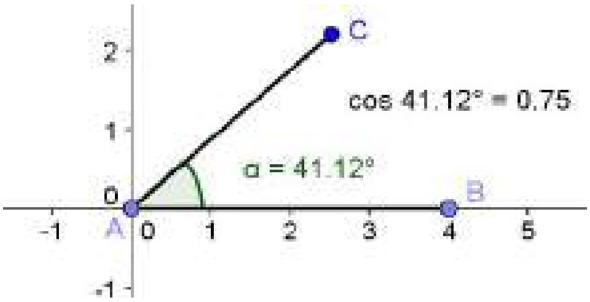
2º A_2C_1 tarda:
3 s en dar vuelta A_1
5 s en meter C_1
30 s en tostar cara A_2 y C_1
3 s en dar la vuelta C_2

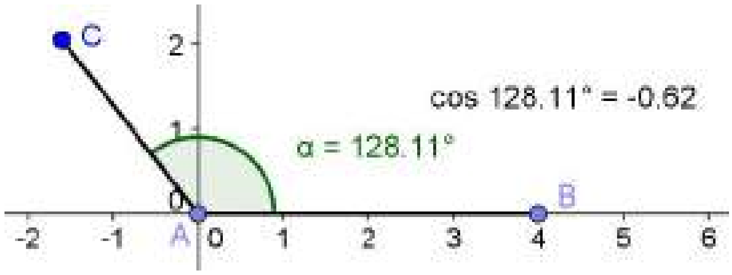
3º B_2C_2 tarda:
5 s en sacar A_2
30 s en tostar cara B_2 y C_2
5 s en sacar B_2
5 s en sacar C_2

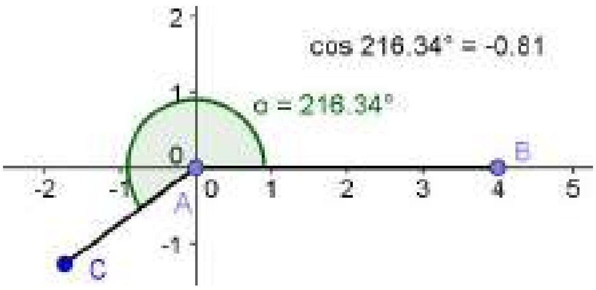
En total se necesitan 136 s en tostar 3 rebanadas.

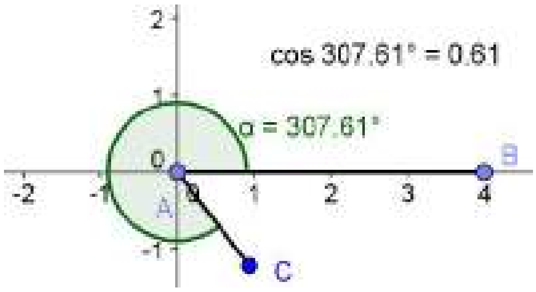
ACTIVIDADES-PÁG. 107

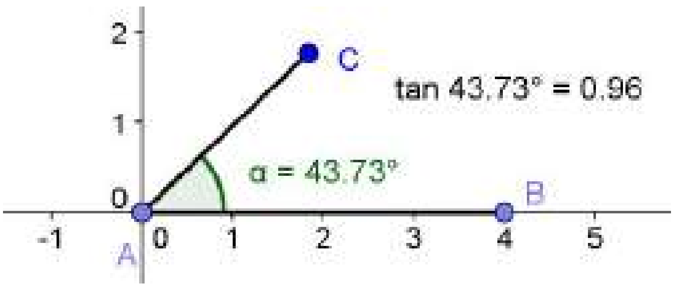
1. Procedemos como en el caso del seno y obtenemos para el coseno y la tangente los resultados que aparecen en los dibujos.

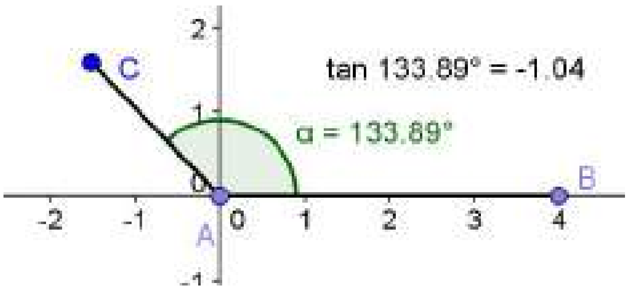


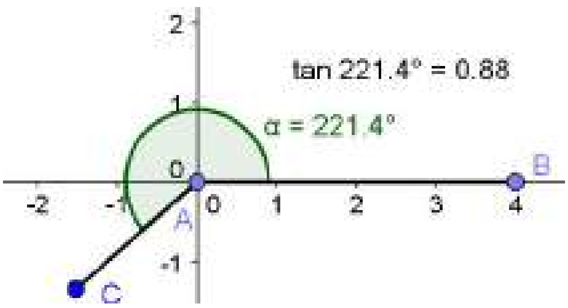


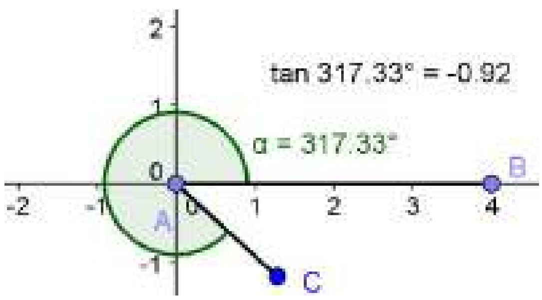












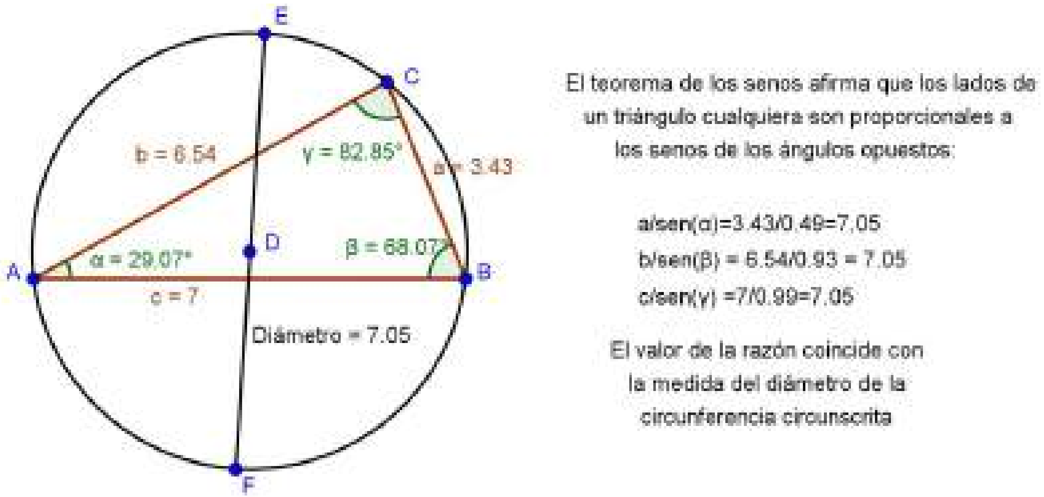
2. Dibujamos un triángulo cualquiera y mostramos la medida de sus lados y sus ángulos, como hemos hecho en el apartado **Teorema de los senos** de las páginas de **Nuevas tecnologías**.

Posteriormente dibujamos un diámetro de la circunferencia circunscrita, siguiendo los pasos:

a) Elige **Mediatriz** y traza las mediatrices de los tres lados y marca el circuncentro. Dibuja la circunferencia circunscrita.

b) Dibuja un diámetro y muestra su valor. Oculta las mediatrices.

c) *Arrastra* cualquiera de los vértices del triángulo y observa como cambia este: la medida de sus lados, la amplitud de sus ángulo pero se mantienen constantes la razones entre sus lados y el seno de los ángulos opuesto, además de coincidir el valor de estas razones con la medida del diámetro trazado.



3. **Seguimos los pasos que se describen a continuación:**

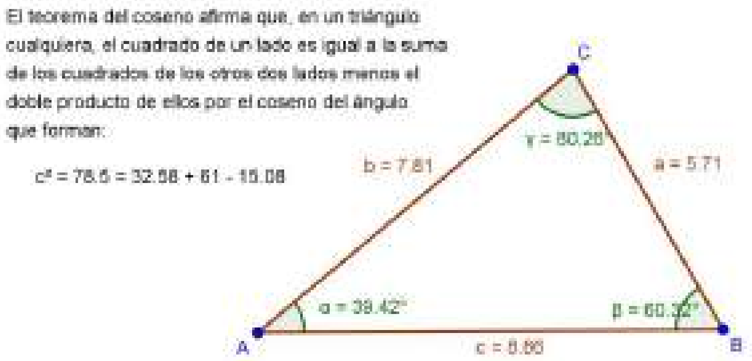
a) Mediante la herramienta Polígono dibuja un triángulo cualquiera y en el menú contextual de los lados y ángulos elige **Propiedades** y en la ficha **Básico** escoge **Muestra rótulo**: **Nombre & valor**.

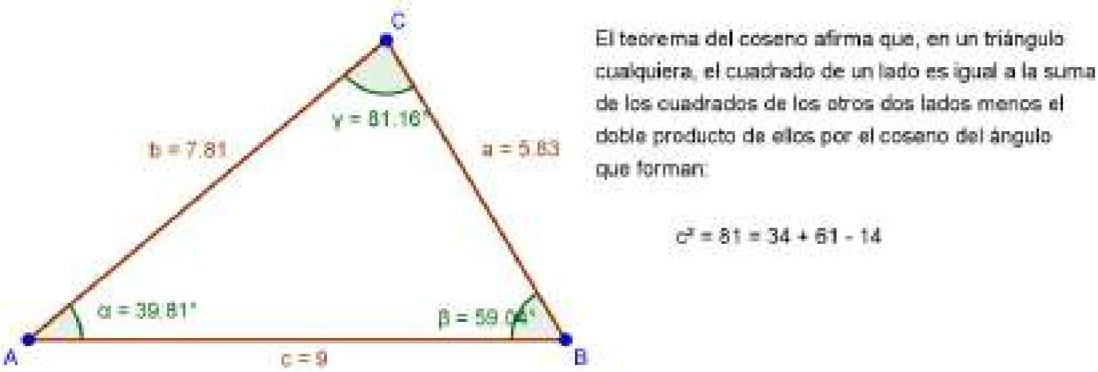
b) Con **Inserta texto** introduce el texto estático del enunciado del teorema.

c) Con **Inserta texto** y para cada uno de los tres lados introduce el texto:

“c^2 = “ + c^2 + “ = “ + a^2 + b^2 – 2 * a * b * cos(γ).

d) *Arrastra* cualquiera de los vértices del triángulo y observa como cambia este: la medida de sus lados, la amplitud de sus ángulo pero se sigue cumpliendo la relación del enunciado.





4. a) Construimos y resolvemos el triángulo a = 3 cm, b = 8 cm y α = 25º.

Los pasos a seguir son:

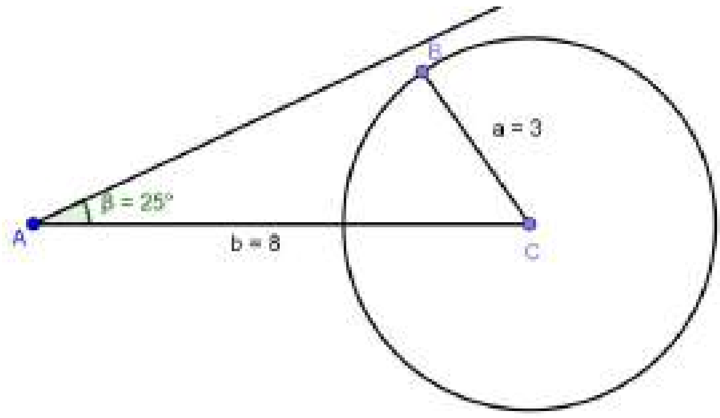
a) En el **Campo de Entrada** introduce los valores **a = 3**, **b = 8** y **α = 25º**.

b) Dibuja un segmento de longitud **b = 8**. Renombra el vértice B por C.

c) Dibuja un ángulo con un lado el segmento anterior y de amplitud **α = 25º**. Traza la semirrecta de origen A.

d) Dibuja una circunferencia de centro el punto C y radio **a = 3 cm**.

e) Con Intersección de dos objetos halla la intersección de la semirrecta y de la circunferencia. (Observa que no hay puntos de intersección)



Concluimos que no existe un triángulo con los datos del enunciado.

b) Construimos y resolvemos el triángulo a = 3,7 cm, b = 4,2 cm y c = 6,8 cm.

Los pasos a seguir son:

a) En el **Campo de Entrada** introduce los valores **a = 3.7, b = 4.2** y **c = 6.8**.

b) Dibuja un segmento AB de longitud **a**.

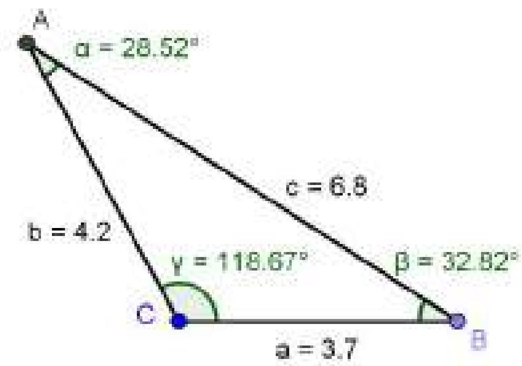
c) En el *Menú Contextual* de la letra A, elige **Renombra** y cambia la letra A por C.

d) Elige **Circunferencia dados su centro y su radio**, dibuja una circunferencia de centro C y radio **b**. Dibuja otra circunferencia de centro B y radio **c.**

e) Elige **Intersección entre dos objetos** y halla la intersección de las dos circunferencias.

f) Oculta las dos circunferencias, el segmento BC y el punto D.

g) Dibuja el triángulo ABC. Mide sus lados y determina la amplitud de sus ángulos.



h) Edita la medida de los lados (para ello, en la *Campo de entradas* introduce las nuevas medidas de los lados, es decir **a = 12.5** y de igual forma para los lados b y c; y conseguirás el triángulo que quieras:

a = 12.5 cm, **b = 10.5 cm**, y **c = 8.2 cm**.

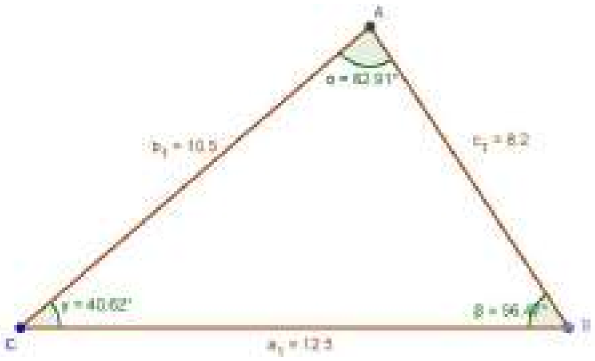
Observa lo que sucede en la *Ventana Gráfica*.

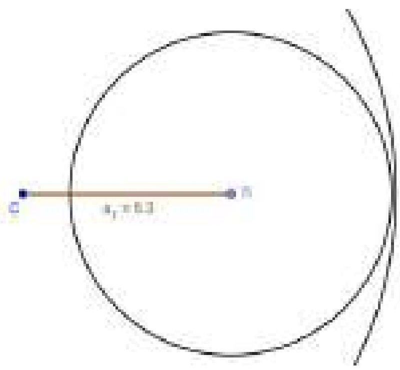
i) Edita los valores de los lados siguientes:

a = 5.3 cm, **b = 9.5 cm**, y **c = 4.1 cm.**

Muestra, con la **Ventana Algebraica**, las dos circunferencias para comprobar lo que sucede.

Nota: Conocidos los tres lados puede existir una o ninguna solución, ya que la medida de cada lado debe ser menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia





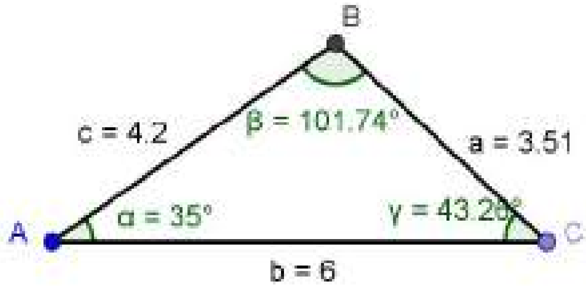
c) Construimos y resolvemos el triángulo b = 6 cm, c = 4.2 cm y α = 3º.

Los pasos a seguir son:

a) En el **Campo de Entrada** introduce los valores **b = 6**, **c = 4.2** y **α = 35º**.

b) Dibuja un ángulo α de amplitud 35º.

c) Dibuja un segmento de longitud **b = 6.**



d) Elige **Circunferencia dados su centro y su radio**, dibuja una circunferencia de centro A y radio **c = 4.2**.

e) Elige **Intersección entre dos objetos** y halla la intersección de la semirrecta con la circunferencia.

f) Oculta los elementos sobrantes, dibuja el triángulo con todos sus elementos y renombra los elementos necesarios, de forma que queda el resultado como aparece en el dibujo.

d) Construimos y resolvemos el triángulo a = 7,5 cm, α = 55º y β = 68º.

Los pasos a seguir son:

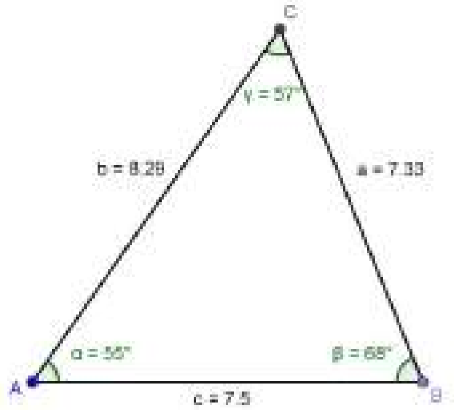
a) En el **Campo de Entrada** introduce los valores **a = 7.5**, **α = 55º** y **β = 68º.**

b) Dibuja un segmento AB de longitud **a = 7.5**.

c) Dibuja en el vértice A el ángulo **α = 55º**. Dibuja el lado del ángulo.

d) Dibuja en el vértice B el ángulo **β = 68º**. Dibuja el lado del ángulo.

e) Elige **Intersección entre dos objetos** y halla la intersección de las semirrectas.



ACTIVIDADES-PÁG. 108

1. Las respuestas son:

a) Las medidas en radianes de los ángulos dados son:

i) $\alpha = 120^\circ \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ rad$ ii) $\beta = 210^\circ \equiv \dfrac{7\pi}{6}\ rad$ iii) $\gamma = 405^\circ \equiv \dfrac{9\pi}{4}\ rad$

b) Las medidas en grados sexagesimales de los ángulos dados son:

i) $\alpha = \dfrac{5\pi}{3}\ rad \equiv 300^\circ$ ii) $\beta = \dfrac{9\pi}{4}\ rad \equiv 405^\circ$ iii) $\gamma = \dfrac{11\pi}{5}\ rad = 396^\circ$

c) Los ángulos que resultan de las operaciones son.

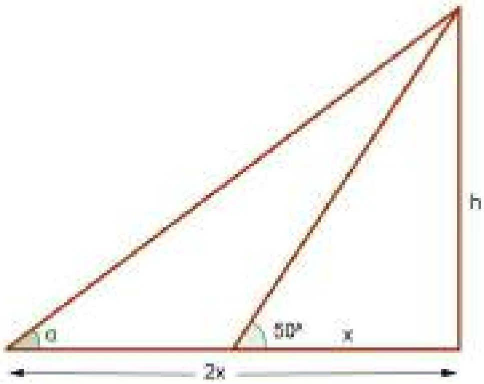
i) α + β = 268º 26´ ii) 2α + 3β = 761º 52´ iii) 6α – β = 35º 36´

2. La resolución de los triángulos queda:

a) C = 28º	a = 11,33m	c = 5,32 m
b) C = 40º	b = 11,49 m	c = 9,64 m
c) B = 41º 45´ 37´´	C = 48º 14´ 23´´	a = 18,77 m

3. Los ángulos agudos miden 26º 33´ 54´´ y 63º 26´ 6´´. Los catetos miden 1,34 y 2,68 m.

4. Teniendo en cuenta el dibujo obtenemos:



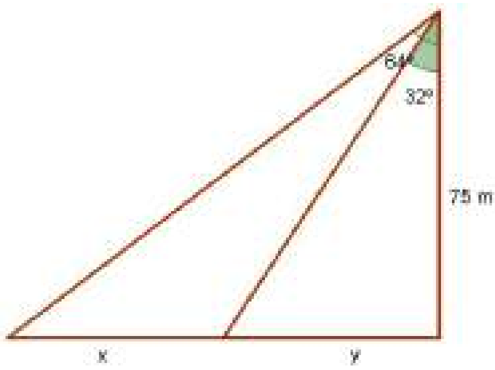
Si nos colocamos a distancia doble, el ángulo de visión será:

$$\begin{cases} tg\ 50^{\circ} = \dfrac{h}{x} \\ tg\ \alpha = \dfrac{h}{2x} \end{cases} \Rightarrow\ tg\ \alpha = \frac{1}{2}\ tg\ 50^{\circ} = 0{,}5959\ \Rightarrow\ \alpha = 30^{\circ}\ 47'\ 23''$$

Si nos colocamos a distancia triple, el ángulo de visión será:

$$\begin{cases} tg\ 50^{\circ} = \dfrac{h}{x} \\ tg\ \alpha = \dfrac{h}{3x} \end{cases} \Rightarrow\ tg\ \alpha = \frac{1}{3}\ tg\ 50^{\circ} = 0{,}3973\ \Rightarrow\ \alpha = 21^{\circ}\ 39'\ 56''$$

5. Teniendo en cuenta el dibujo, el caminante recorre entre las dos observaciones x metros. Calculamos el valor de x resolviendo el sistema:



$$\begin{cases} tg\ 64^{\circ} = \dfrac{x+y}{75} \\ tg\ 32 = \dfrac{y}{75} \end{cases} \Rightarrow\ x = 106{,}91\ m$$

La velocidad del caminante es:

$$\frac{101{,}91\ m}{1\ \text{min}} = 1{,}78\ m/s = 6{,}41\ km/h.$$

6. La distancia del centro a la cuerda es 0,57 metros.

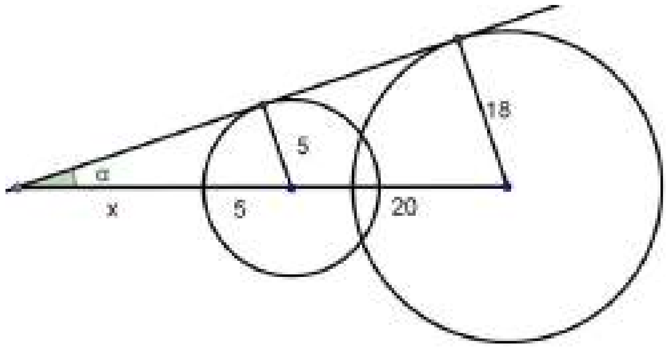
7. Los lados del rectángulo miden 5,26 y 10,79 m, respectivamente. La superficie del rectángulo es:

$$5{,}26 \text{ x } 10{,}79 = 56{,}76\ m^2.$$

8. El lado del pentágono mide 5,88 cm y su apotema 4,05 cm. El área será 59,54 cm^2.

9. Teniendo en cuenta los triángulos rectángulos del dibujo podemos formular el sistema que sigue.

$$\begin{cases} sen\ \alpha = \dfrac{5}{x+5} \\ sen\ \alpha = \dfrac{18}{x+25} \end{cases}$$



Resolviendo el sistema obtenemos el ángulo α = 40º 32´ 30´´.

10. Las razones son: $\cos\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{95}}{12} = -\ 0{,}8122$ y $tg\ \alpha = \dfrac{7\sqrt{95}}{95} = 0{,}7182$

11. Las razones valen: $\cos\ \beta = -\dfrac{3}{5} = -\ 0{,}6$ y $sen\ \beta = -\dfrac{4}{5} = -\ 0{,}8$

12. Si tg γ > 0, el ángulo γ está en el primer o tercer cuadrante. Al ser el valor del coseno negativo, el ángulo pertenece al tercer cuadrante.

Las razones son: $sen\ \gamma = -\dfrac{3}{5} = -\ 0{,}6$ y $tg\ \gamma = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

ACTIVIDADES-PÁG. 109

13. Las simplificaciones quedan:

a) $\dfrac{tg\ \alpha \cdot \cos\ \alpha + tg^3\ \alpha \cdot \cos\ \alpha}{\sec^2\ \alpha} = sen\ \alpha$

b) $\dfrac{1 + \cot g^2\ \alpha}{1 + tg^2\ \alpha} = ctg^2\ \alpha$

c) $\dfrac{\cos^2 \alpha \cdot (1 + tg^2\ \alpha)}{\cot g\ \alpha} = tg\ \alpha$

d) cotg^2 α + sec^2 α – cosec^2 α = tg^2 α

e) $\dfrac{sen^2\ \alpha}{tg^2\ \alpha - tg^2 \alpha \cdot sen^2\ \alpha} = 1$

f) $\dfrac{1+\cos\alpha}{sen^2\ \alpha}=\dfrac{1}{1-\cos\alpha}$

g) $\dfrac{1+tg^2\ \alpha}{\sec\alpha}=\dfrac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha$

h) $\cos^3\alpha+\cos\alpha\cdot sen^2\alpha=\cos\alpha$

14. Los valores de las razones son:

$sen\ 330^\circ=-sen\ 30^\circ=-\dfrac{1}{2}$

$\cos\ 330^\circ=\cos\ 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 330^\circ=-\ tg\ 30^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$sen\ 1320^\circ=sen\ 240^\circ=-\ sen\ 60^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\ 1320^\circ=\cos\ 240^\circ=-\cos\ 60^\circ=-\dfrac{1}{2}$

$tg\ 1320^\circ=tg\ 240^\circ=tg\ 60^\circ=\sqrt{3}$

$sen\ \dfrac{3\pi}{4}=sen\ \dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\ \dfrac{3\pi}{4}=-\cos\ \dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ \dfrac{3\pi}{4}=-\ tg\ \dfrac{\pi}{4}=-1$

$sen\ -\dfrac{\pi}{3}=-\ sen\ \dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\ -\dfrac{\pi}{3}=\cos\ \dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$

$tg\ -\dfrac{\pi}{3}=-\ tg\ \dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

15. Determina, sin hacer uso de la calculadora, las siguientes razones trigonométricas:

a) sen 210º = - sen 30º = $-\dfrac{1}{2}$

b) cos 120º = - cos 60º = $-\dfrac{1}{2}$

c) tg 330º = - tg 30º = $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) cotg (- 60º) = - cotg (60º) = $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

16. Los valores de las razones son:

a) sen (180º - α) = sen α = 0,6

b) cos (180º + α) = - cos α = - 0,8

c) tg (90º - α) = $\dfrac{sen\ (90^\circ-\alpha)}{\cos\ (90^\circ-\alpha)}=\dfrac{\cos\alpha}{sen\ \alpha}=1{,}33$

d) cotg (360º - α) = $\dfrac{\cos\ (360^\circ-\alpha)}{sen\ (360^\circ-\alpha)}=\dfrac{\cos\alpha}{-\ sen\ \alpha}=-1{,}33$

17. Se comprueba del siguiente modo:

a) $$(\sec\alpha - tg\,\alpha)^2 = \left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{(1 - sen\,\alpha)^2}{\cos^2\alpha} = \frac{(1 - sen\,\alpha)^2}{(1 - sen\,\alpha)\,(1 + sen\,\alpha)} = \frac{1 - sen\,\alpha}{1 + sen\,\alpha}$$

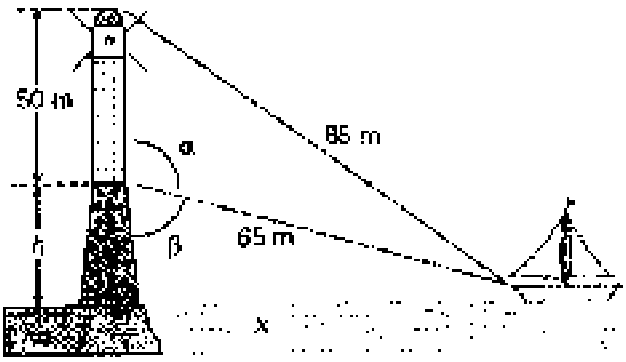
b) $$\frac{tg\,\alpha + \cos\alpha}{sen\,\alpha} = \frac{\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} + \cos\alpha}{sen\,\alpha} = \frac{sen\,\alpha + \cos^2\alpha}{sen\,\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha} = \sec\alpha + ctg\,\alpha$$

c) $$\frac{sen\,\alpha}{\cos ec\,\alpha - \cot g\,\alpha} = \frac{sen\,\alpha}{\frac{1}{sen\,\alpha} - \frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha}} = \frac{sen^2\,\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{1 - \cos^2\alpha}{1 - \cos\alpha} = 1 + \cos\alpha$$

d) $$\frac{(sen\,\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{2} = \frac{sen^2\,\alpha + \cos^2\alpha + 2\,sen\,\alpha\cdot\cos\alpha - 1}{2} =$$

$$= \frac{2\,sen\,\alpha\cdot\cos\beta}{2} = sen\,\alpha\cdot\cos\alpha$$

18. Sea la representación del problema:



Por el teorema de Pitágoras obtenemos:

$$\begin{cases} 85^2 = x^2 + (50 + h)^2 \\ 65^2 = h^2 + x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad h = 5\ m$$

También podemos calcular el ángulo α por el teorema del coseno:

$$85^2 = 50^2 + 65^2 - 2\cdot 65\cdot 50\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \alpha = 94^{\circ}\ 24'\ 42''$$

Por tanto,

$$\beta = 180^{\circ} - \alpha = 85^{\circ}\ 35'\ 18'' \quad\Rightarrow\quad \cos\beta = \frac{h}{65} \quad\Rightarrow\quad h = 65\cdot\cos\beta = 5\ m$$

19. Teniendo en cuenta el teorema del coseno, obtenemos que la anchura, a, de la portería es:

$$a^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot \cos 65º = 220{,}7622, \text{ es decir, } a = 14{,}86 \text{ metros.}$$

20. Los elementos que faltan en cada uno de los triángulos son:

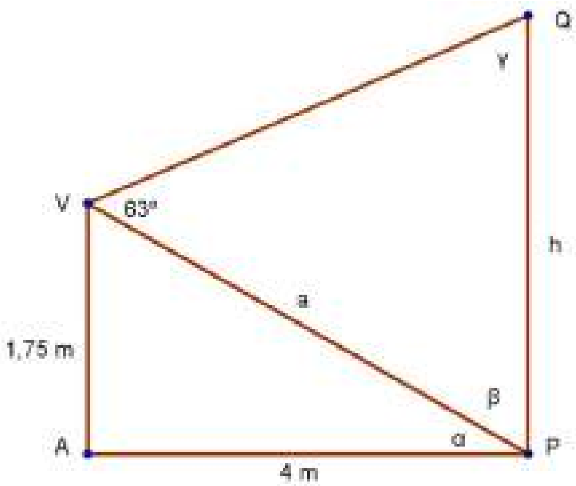
a) A = 40º	a = 7,42 m	c = 3,95 m
b) A = 42º 33´ 20´´	B = 59º 47´ 16´´	C = 77º 39´ 24´´
c) B = 27º 21´ 47´´	C = 102º 38´ 13´´ ´	c = 63,69 m
d) A = 86º 42´ 20´´	B = 45º 17´ 40´´	c = 23,82 m

e) No existe ningún triángulo con los datos del enunciado.

f) Existen dos soluciones:
Si A = 69º 26´ 7´´, entonces C = 60º 33´ 53´´ y c = 20,46 m

Si A = 110º 33´ 53´´, entonces C = 19º 26´ 7´´ y c = 7,82 m

21. Teniendo en cuenta el dibujo obtenemos:



La hipotenusa del triángulo rectángulo PAV mide:

$$a = \sqrt{1{,}75^2 + 4^2} = 4{,}37\ m$$

La amplitud del ángulo α es:

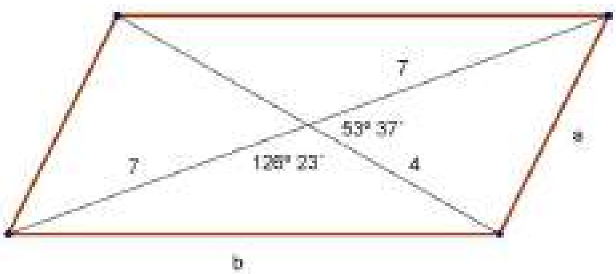
$$tg\ \alpha = \frac{1{,}75}{4} = 0{,}4375 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 23º\ 27´\ 46´´$$

El ángulo β mide: β = 90º - α = 50º 22´ 14´´.

El ángulo γ mide: γ = 180º - α – β = 50º 37´ 46´´.

Utilizando el teorema de los senos en el triángulo PQV se obtiene h = 5,04 m.

22. Teniendo en cuenta el dibujo, la medida de los lados a y b es:



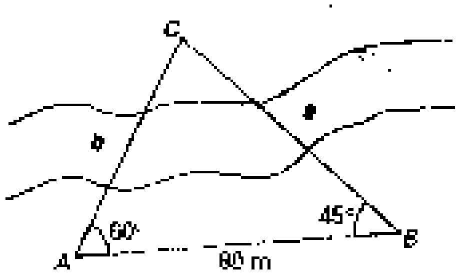
$a^2 = 7^2 + 4^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \cos 53º\ 37´ \Rightarrow a = 5{,}64$ cm.

$b^2 = 7^2 + 4^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \cos 126º\ 23´ \Rightarrow b = 9{,}91$ cm.

23. Su contorno mide 141,54 metros y su superficie 175 metros cuadrados.

ACTIVIDADES-PÁG. 110

24. Un esquema del problema sería:



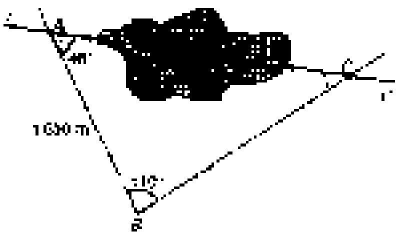
El ángulo C = 75º. Utilizando el teorema de los senos obtenemos:

$$\frac{a}{sen\ 60^{\circ}} = \frac{80}{sen\ 75^{\circ}} \quad \Rightarrow \quad a = 71{,}73\ m$$

$$\frac{b}{sen\ 45^{\circ}} = \frac{80}{sen\ 75^{\circ}} \quad \Rightarrow \quad b = 58{,}56\ m$$

Las distancias pedidas son 71,73 m y 58,56 m.

25. Un esquema del problema es el siguiente:

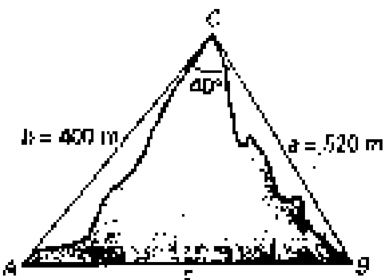


El ángulo C = 24º.

Determinamos la distancia BC (lado a) mediante el teorema de lo senos:

$$\frac{1500}{sen\ 24^{\circ}} = \frac{BC}{sen\ 46^{\circ}} \quad \Rightarrow \quad BC = 2652{,}85\ m$$

26. La figura queda:

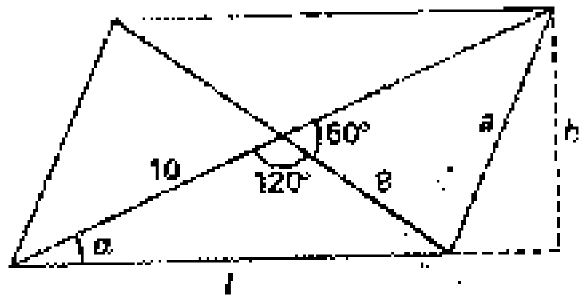


Mediante el teorema del coseno:

$$c^2 = 400^2 + 520^2 - 2 \cdot 400 \cdot 520 \cdot \cos 40^{\circ} \quad \Rightarrow$$

$$c = AB = 334{,}25 \text{ m.}$$

27. La figura queda:



Los cálculos son:

$l^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 120º \quad \Rightarrow \quad l = 15{,}62$ cm.

$a^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 60º \quad \Rightarrow \quad a = 9{,}17$ cm.

El perímetro mide $2 \cdot 15{,}62 + 2 \cdot 9{,}17 = 49{,}58$ cm.

$a^2 = 20^2 + l^2 - 2 \cdot 20 \cdot l \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow$

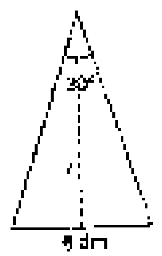
$\Rightarrow 9{,}17^2 = 20^2 + 15{,}62^2 - 2 \cdot 20 \cdot 15{,}62 \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 26º\ 20'\ 50''.$

$$sen\ \alpha = \frac{h}{20} \quad \Rightarrow \quad sen\ 26º\ 20'\ 50'' = \frac{h}{20} \quad \Rightarrow \quad h = 8{,}88\ cm.$$

El área mide:

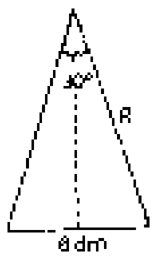
Área = base · altura = $l \cdot h = 15{,}62 \cdot 8{,}88 \quad \Rightarrow \quad$ Área = 138,71 cm^2.

28. Las soluciones de cada uno de los casos:



El radio de la circunferencia inscrita es la apotema del dodecágono, por tanto:

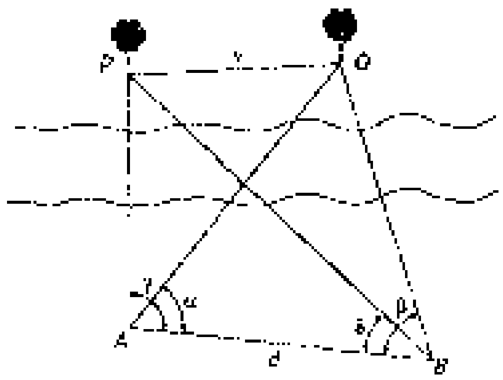
$$tg\ 15º = \frac{3}{r} \quad \Rightarrow \quad r = 11{,}20\ dm.$$



El radio de la circunferencia circunscrita lo calculamos en el triángulo:

$$sen\ 15º = \frac{3}{R} \quad \Rightarrow \quad R = 11{,}59\ dm.$$

29. Según la figura:



Los cálculos quedan:

Sean P y Q los árboles. En el triángulo ABP hallamos PB:

$$\frac{PB}{sen\ 110^{\circ}} = \frac{120}{sen\ 130^{\circ}} \Rightarrow PB = 25{,}53\ m.$$

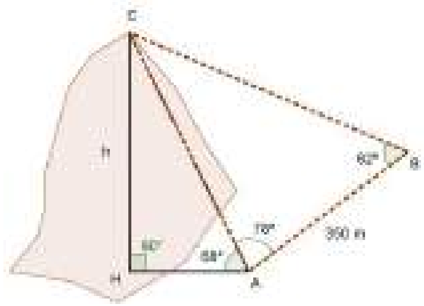
En el triángulo ABQ hallamos BQ:

$$\frac{BQ}{sen\ 50^{\circ}} = \frac{120}{sen\ 55^{\circ}} \Rightarrow BQ = 112{,}22\ m.$$

En el triángulo PBQ hallamos x:

$$x^2 = PB^2 + BQ^2 - 2 \cdot PB \cdot BQ \cdot \cos 35^{\circ} \quad \Rightarrow \quad x = 148{,}30 \text{ m.}$$

30. Tenemos en cuenta el dibujo adjunto.



En el triángulo ABC hallamos el ángulo en la cima C: C = 180º - (78º + 62) $\Rightarrow$ C = 40º.

Aplicamos el teorema de los senos en el triángulo ABC:

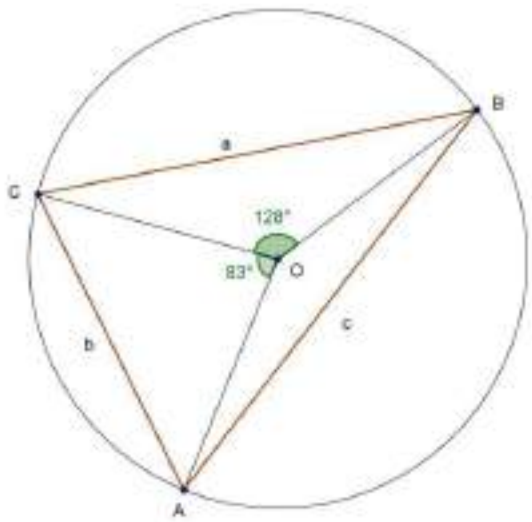
$$\frac{AC}{sen\ 62^{\circ}} = \frac{350}{sen\ 40^{\circ}} \Rightarrow AC = 350 \cdot \frac{sen\ 62^{\circ}}{sen\ 40^{\circ}} \Rightarrow AC = 480{,}77\ m.$$

Para calcular la altura h, en el triángulo AHC aplicamos la definición de seno:

$$sen\ 68^o = \frac{h}{480{,}77} \quad \Rightarrow \quad h = 480{,}77 \cdot sen\ 68^o \quad \Rightarrow \quad h = 445{,}76\ m.$$

La altura de la colina es 445,76 metros.

31. a) Dibujamos una circunferencia de radio 4 cm. En ella elegimos uno de sus puntos y con el como referencia dibujamos un ángulo central de 128º. Dibujamos otro ángulo central de 83º adyacente al anterior. Los ángulos anteriores proporcionan tres puntos sobre la circunferencia que permiten dibujar el triángulo ABC.



Como los tres arcos deben medir 360º, el otro arco medirá:
360º - (128º + 83º) = 149º

b) Para calcular la medida de los ángulos del triángulo tenemos en cuenta que los triángulos OBC, OCA y OAB son isósceles.

Los ángulos en el vértice A miden 48,5º y 15,5º; es decir, el ángulo A tiene una amplitud de 64º.

Los ángulos en el vértice B miden 26º y 15,5º; es decir, el ángulo B tiene una amplitud de 41,5º.

Los ángulos en el vértice C miden 48,5º y 26º; es decir, el ángulo C tiene una amplitud de 74,5º.

Para determinar la medida de los lados del triángulo utilizamos el teorema del coseno:

$a^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 128^o \quad \Rightarrow \quad a^2 = 51{,}70 \quad \Rightarrow \quad a = 7{,}19$ cm.

$b^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 83^o \quad \Rightarrow \quad b^2 = 28{,}10 \quad \Rightarrow \quad b = 5{,}30$ cm.

$c^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 149^o \quad \Rightarrow \quad c^2 = 59{,}43 \quad \Rightarrow \quad c = 7{,}71$ cm.

c) Para hallar el área del triángulo utilizamos la fórmula de Herón, siendo el semiperímetro:

$$p = \frac{7{,}19 + 5{,}30 + 7{,}71}{2} = 10{,}1$$

El área vale:

$$Área = \sqrt{10{,}1 \cdot (10{,}1 - 7{,}19) \cdot (10{,}1 - 5{,}30) \cdot (10{,}1 - 7{,}71)} \quad \Rightarrow \quad Área = 18{,}36\ cm^2.$$

Obtenemos el mismo resultado con la expresión:

$$Área = \frac{1}{2} \cdot 5{,}30 \cdot 7{,}71 \cdot sen\ 64^o \quad \Rightarrow \quad Área = 18{,}36\ cm^2.$$

ACTIVIDADES-PÁG. 111

En esta actividad no damos la solución al uso ya que sobre el número π existe muchísima información tanto bibliográfica como en Internet. Existen monografías dedicadas a este número como las que aparecen en la bibliografía que sigue.

ESTEBAN, M.; IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (1998) *Trigonometría.* Editorial Síntesis. Madrid.

NAVARRO, Joaquín. (2010) *Los secretos del número π.* RBA. Barcelona

POSAMENTIER, Alfred. (2006) *La proporción trascendental*. *La historia de π, el número más misterioso del mundo.* Ariel. Barcelona.

TORIJA, R. (1999). Arquímedes. Alrededor del círculo. Nivela. Madrid.

La página web dedicada a π es http://webs.adam.es/rllorens/pihome.htm

La página web realizada por los amigos de π puedes encontrarla en http://webs.adam.es/rllorens/pifriend.htm

UNIDAD 5: Trigonometría II

ACTIVIDADES-PÁG. 112

1. La primera igualdad es verdadera y las otras dos son falsas. Para probarlo basta con utilizar la calculadora.

2. El área del círculo es $\pi \cdot 20^2 = 1256{,}64$ cm^2.

El lado y la apotema del heptágono regular de radio 20 cm miden 17,36 y 18,02 cm, respectivamente. Su área mide $\frac{7 \cdot 17{,}36 \cdot 18{,}02}{2} = 1094{,}90\ cm^2$.

El área entre el círculo y el hexágono será 1256,64 – 1094,90 = 161,74 cm^2.

3. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) $tg\ 2x = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k_1;\ \ k_1 \in Z \\ 2x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k_2;\ \ k_2 \in Z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 22{,}5^\circ + 180^\circ \cdot k_1;\ k_1 \in Z \\ x = 112{,}5^\circ + 180^\circ \cdot k_2;\ k_2 \in Z \end{cases}$

b) $\cos(x + \pi) = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k_1\pi;\ \ k_1 \in Z \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k_2\pi;\ \ k_2 \in Z \end{cases}$

c) $2\ sen\ x = -1 \quad \Rightarrow \quad sen\ x = -\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 210^\circ + 360^\circ \cdot k_1;\ \ k_1 \in Z \\ x = 330^\circ + 360^\circ \cdot k_2;\ \ k_2 \in Z \end{cases}$

4. El valor de la expresión es:

$$\frac{sen\ 210^\circ - sen\ 150^\circ}{\cos 210^\circ + \cos 150^\circ} = \frac{2\cos 180^\circ \cdot sen\ 30^\circ}{2\cos 180^\circ \cdot \cos 30^\circ} = tg\ 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ACTIVIDADES-PÁG. 125

1. Llamamos B a las vacas blancas y N a las vacas negras:

5 · (4B + 3N) = 4 · (3B + 5N) $\Rightarrow$ 20B + 15N = 12B + 20N $\Rightarrow$ 8B = 5N

Dan más leche las vacas negras.

2. El número de naranjas de la pirámide es:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 14^2 + 15^2 = 1240$ naranjas.

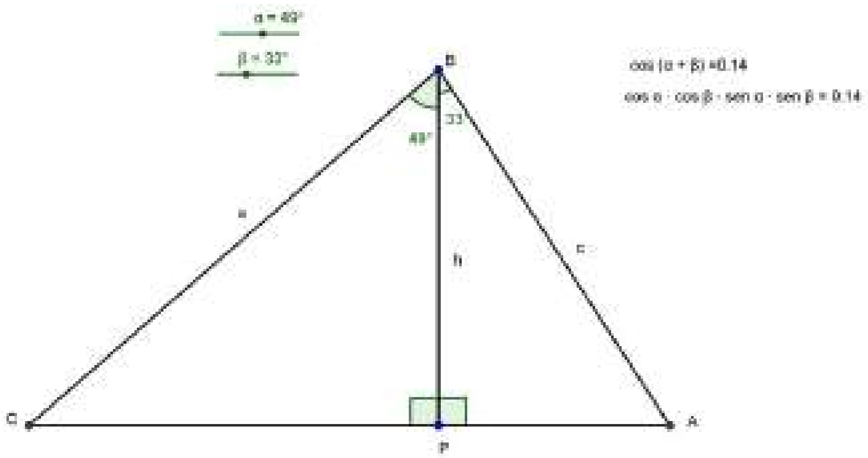
ACTIVIDADES-PÁG. 127

1. a) Procedemos como se explica en el texto y tecleamos los siguientes textos:

“cos (α + β) = “+cos(α + β)

“cos α · cos β – sen α · sen β = “+(cos(α)*cos(β)- sin(α)*sin(β))

y obtenemos un dibujo como el siguiente:

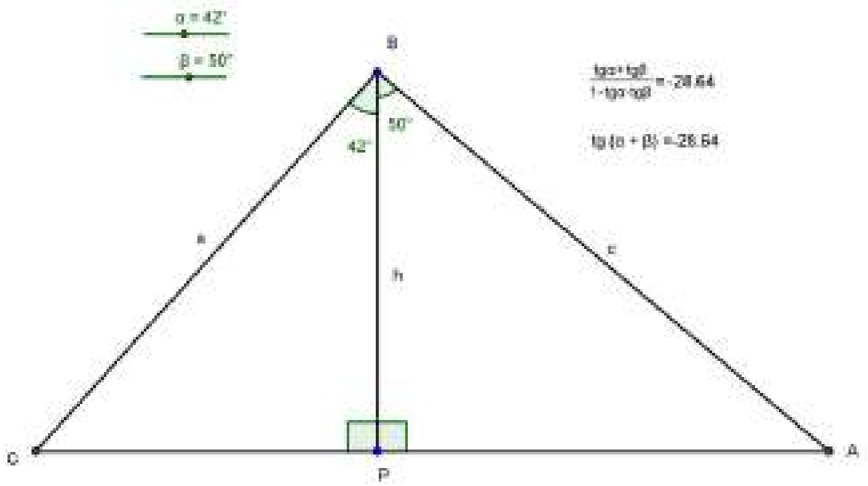


b) Procedemos como se explica en el texto y tecleamos los siguientes textos:

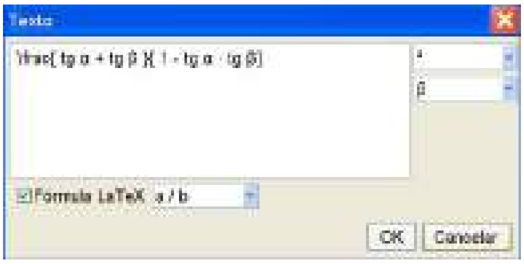
“tg (α + β) = “+tan(α + β)

“$\dfrac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}$ = “+((tan(α)+tan(β))/(1-tan(α)*tan(β)))

y obtenemos un dibujo como el siguiente:



Nota: Para escribir la expresión $\dfrac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}$ utilizamos **Inserta Texto** y escribimos lo que muestra la imagen seleccionando en **Fórmula LaTex** la facción a/b.



2. Para la resolución de la ecuación propuesta seguimos las etapas.

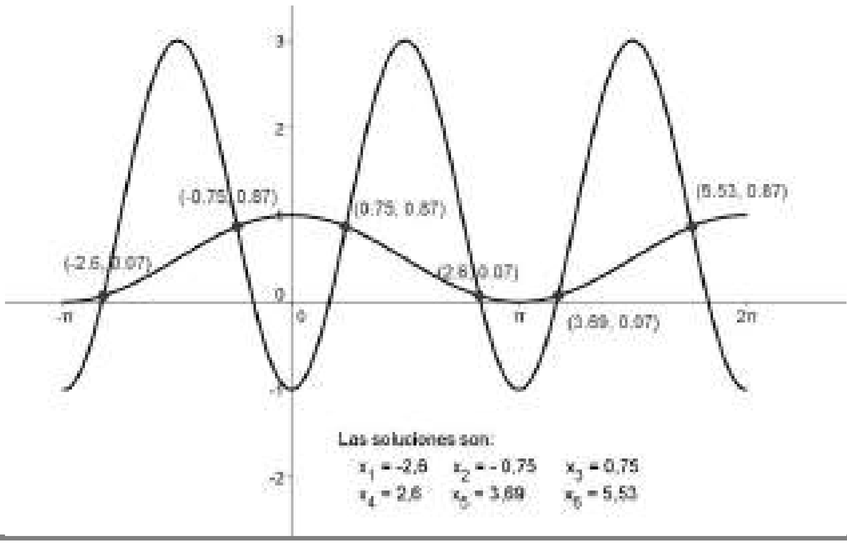
a) En el Menú contextual de los ejes coordenados cambiamos las unidades así como el valor de la distancia entre las marcas de graduación.

b) En el Campo de Entrada introducimos las funciones f(x) = $3 \cdot sen^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + 2 \cdot \cos x - 2$ y g(x) = $2 \cdot \cos(2x - \pi) + 1$ con el comando **Función** [$3 \cdot sen^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + 2 \cdot \cos x - 2$**, -π, π]** y **Función** [$2 \cdot \cos(2x - \pi) + 1$**, -π, π] y** observamos sus gráficas.

c) Para hallar las soluciones, con la herramienta **Intersección de dos objetos**, hacemos clic sucesivamente sobre ambas gráficas en las proximidades de los puntos de corte.

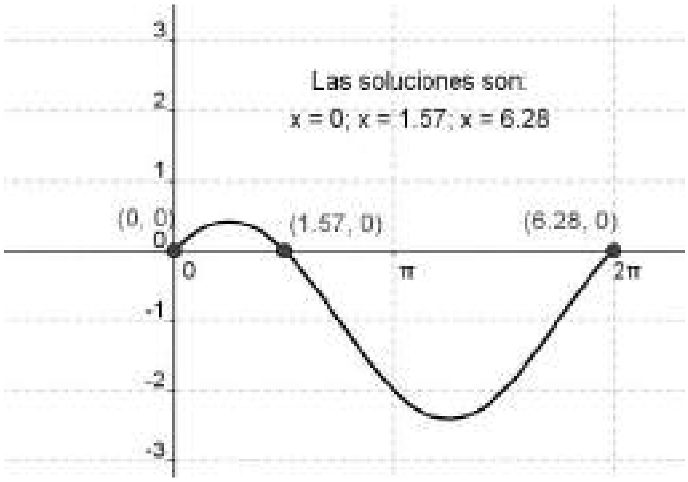
d) En el Menú contextual de los puntos hallados podemos visualizar sus coordenadas, de forma que las abscisas de estos son las soluciones buscadas.

e) Introducimos el texto que aparece en el dibujo.

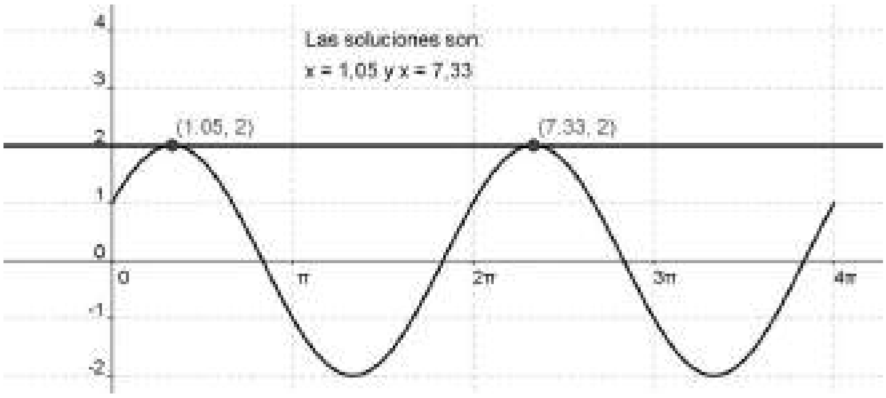


3. Procediendo como en el ejercicio anterior, obtenemos:

a) sen x + cos x = 1 en [0, 2π]



b) cos x + $\sqrt{3}$ sen x = 2 en [0, 4π]



ACTIVIDADES-PÁG. 128

1. Si $sen\ a = \frac{3}{5}$ y el ángulo a está en el segundo cuadrante, entonces $\cos\ a = -\frac{4}{5}\ y\ tg\ a = -\frac{3}{4}$.

Si $\cos\ b = \frac{4}{5}$ y el ángulo b pertenece al cuarto cuadrante, entonces $sen\ b = -\frac{3}{5}\ y\ tg\ b = -\frac{3}{4}$

Teniendo en cuenta los teoremas de adición, obtenemos:

a) sen (a + b) = $\frac{24}{25}$ b) cos (a - b) = - 1 c) tg (a + b) = $-\frac{24}{7}$

2. Teniendo en cuenta las formulas del ángulo doble y los teoremas de adición, obtenemos:

a) sen 90º = sen (2 · 45º) = 2 · sen 45º · cos 45º = 1

b) cos 90º = cos (2 · 45º) = $\cos^2$ 45º - sen^2 45º = 0

c) sen 120º = sen (2 · 60º) = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) cos 120º = cos (2 · 60º) = $-\dfrac{1}{2}$

e) tg 120º = tg (2 · 60º) = $-\sqrt{3}$

f) sen 105º = sen (45º + 60) = $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

g) cos 105º = $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

h) tg 105º = $-\left(2+\sqrt{3}\right)$

3. Teniendo en cuenta que tg a = 1,5 y tg b = - 2,5 y los teoremas de adición, obtenemos:

a) tg (a + b) = - 0,2105

b) tg (a – b) = - 1,4545

c) tg (2a + b) = 0,98

En este último apartado hay que tener en cuenta que tg 2a = - 2,4.

4. Para ello es suficiente con utilizar los teoremas de adición para el seno, coseno y tangente estudiados en esta unidad.

5. Desarrollando y operando, obtenemos:
sen a · sen (b – c) – sen b · sen (a – c) + sen c · sen (a – b) =

= sen a · sen b · cos c – sen a · sen c · cos b - sen b · sen a · cos c + sen b · sen c · cos a + sen c · sen a ·

· cos b – sen c · sen b · cos a = 0

6. Tenemos en cuenta la relación:

cos (a + b) · cos (a – b) = (cos a · cos b – sen a · sen b) · (cos a · cos b + sen a · sen b) =
= $\cos^2$ a · $\cos^2$ b – sen^2 a · sen^2 b

A partir de esta expresión obtenemos las dos igualdades:

$\cos^2 a \cdot \cos^2 b - \text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 b = \cos^2 a \cdot (1 - \text{sen}^2 b) - (1 - \cos^2 a) \cdot \text{sen}^2 b = \cos^2 a - \text{sen}^2 b$

$\cos^2 a \cdot \cos^2 b - \text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 b = \cos^2 b \cdot (1 - \text{sen}^2 a) - (1 - \cos^2 b) \cdot \text{sen}^2 a = \cos^2 b - \text{sen}^2 a$

7. Queda:

a) $\cos 3a = \cos (2a + a) = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$

b) $\text{sen } 4a = \text{sen } (2 \cdot 2a) = (4 \text{ sen } a - 8 \text{ sen}^3 a) \cdot \sqrt{1 - sen^2\ a}$

8. Si cos 80º = 0,17, entonces sen 80º = 0,98 y tg 80º = 5,76. Los valores pedidos, teniendo en cuenta las fórmulas del ángulo doble, son:

a) sen 160º = sen (2 · 80º) = 0,34

b) cos 160º = cos (2 · 80º) = - 0,94

c) tg 160º = tg (2 · 80º) = - 0,36

9. Si cos 80º = 0,17, entonces sen 80º = 0,98 y tg 80º = 5,76. Los valores pedidos, teniendo en cuenta las fórmulas del ángulo mitad, son:

a) $\text{sen } 40º = \text{sen}\left(\frac{80º}{2}\right) = 0,64$; $\cos 40º = \cos\left(\frac{80º}{2}\right) = 0,76$; $\text{tg } 40º = \text{tg}\left(\frac{80º}{2}\right) = 0,84$

b) $\text{sen } 20º = \text{sen}\left(\frac{40º}{2}\right) = 0,34$; $\cos 20º = \cos\left(\frac{40º}{2}\right) = 0,94$; $\text{tg } 20º = \text{tg}\left(\frac{40º}{2}\right) = 0,36$

c) $\text{sen } 10º = \text{sen}\left(\frac{20º}{2}\right) = 0,17$; $\cos 10º = \cos\left(\frac{20º}{2}\right) = 0,98$; $\text{tg } 10º = \text{tg}\left(\frac{20º}{2}\right) = 0,18$

10. Si $\cot g\ 2a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, entonces $tg\ 2a = \sqrt{3}$. El valor de tangente es:

$$tg\ 2a = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2 \cdot tg\ a}{1 - tg^2\ a} = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}\ tg^2\ a + 2\ tg\ a - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} tg\ a = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ o \\ tg = -\sqrt{3} \end{cases}$$

11. Expresamos todas las razones en función de sen a y cos a y operamos:

$$\text{a) } \frac{1-tg\ a}{1+tg\ a}-\frac{1-sen\ 2a}{\cos\ 2a}=\frac{1-\dfrac{sen\ a}{\cos\ a}}{1+\dfrac{sen\ a}{\cos\ a}}-\frac{1-2\ sen\ a\cos\ a}{\cos^2\ a-sen^2\ a}=$$

$$=\frac{\cos\ a-sen\ a}{\cos\ a+sen\ a}-\frac{1-2\ sen\ a\cos a}{\cos^2\ a-sen^2\ a}=\frac{(\cos\ a-sen\ a)^2-1+2\ sen\ a\cos a}{\cos^2\ a-sen^2\ a}=0$$

$$\text{b) } \frac{sen^2\ a}{\cos\ a}+\frac{2\,sen\ a}{tg\ 2a}=\frac{sen^2\ a}{\cos\ a}+\frac{2\ sen\ a\cos\ 2a}{sen\ 2a}=\frac{sen^2\ a}{\cos a}+\frac{2\ sen\ a\ (\cos^2\ a-sen^2\ a)}{2\ sen\ a\cos\ a}=$$

$$=\frac{\cos^2\ a}{\cos\ a}=\cos\ a$$

12. La comprobación puede hacerse de la siguiente manera:

$$\text{a) } \frac{2\ tg\ a}{1+tg^2\ a}=\frac{2\dfrac{sen\ a}{\cos\ a}}{1+\dfrac{sen^2\ a}{\cos^2\ a}}=\frac{\dfrac{2\,sen\,a}{\cos\ a}}{\dfrac{\cos^2 a+sen^2 a}{\cos^2\ a}}=\frac{2\ sen\ a\cos^2 a}{\cos\ a}=2\ sen\ a\cos\ a=sen\,2a$$

$$\text{b) } \text{cotg a}-2\ \text{cotg 2a}=\frac{\cos\ a}{sen\ a}-\frac{2\cos\ 2a}{sen\ 2a}=\frac{\cos^2 a-\cos^2 a+sen^2 a}{sen\ a\cos a}=\frac{sen^2\ a}{sen\,a\cos a}=\frac{sen\ a}{\cos\ a}=tg\ a$$

$$\text{c) } \frac{tg\ a+sen\ a}{2\ tg\ a}=\frac{\dfrac{sen\,a}{\cos a}+sen\,a}{2\dfrac{sen\ a}{\cos\ a}}=\frac{sen\ a+sen\,a\cos a}{2\,sen\ a}=\frac{1+\cos a}{2}=\cos^2\ \frac{a}{2}$$

$$\text{d) } \frac{tg\ a}{tg\ 2a-tg\ a}=\frac{tg\ a}{\dfrac{2\ tg\ a}{1-tg^2\ a}-tg\ a}=\frac{(1-tg^2\ a)\ tg\ a}{tg\ a\ (1+tg^2\ a)}=\cos\ 2a$$

ACTIVIDADES-PÁG. 129

13. Los valores pedidos son:

$$sen\ \frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{7}}{2}}=\sqrt{\frac{3}{7}}=0{,}6547 \qquad \cos s\ \frac{a}{2}=-\sqrt{\frac{1+\frac{1}{7}}{2}}=-\sqrt{\frac{4}{7}}=-\,0{,}7559$$

14. Si $sen\,a = -\frac{1}{3}$ y el ángulo es del cuarto cuadrante, el valor del coseno es $\cos\,a = \frac{\sqrt{8}}{3}$.

El valor de tg a/2 es:

$$tg\,\frac{a}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{8}}{3}}{1+\frac{\sqrt{8}}{3}}} = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}}} = -\left(3-\sqrt{8}\right)$$

15. Los valores de las razones pedidas son: $\cos\,a = -\frac{1}{9}$ y $sen\,a = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$.

16. Queda expresado del siguiente modo:

a) $$\frac{1-\cos\,a}{sen\,a} = \frac{1-\cos^2\frac{a}{2}+sen^2\frac{a}{2}}{2\,sen\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}} = \frac{2\,sen^2\,\frac{a}{2}}{2\,sen\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}} = tg\,\frac{a}{2}$$

b) $$\frac{sen\,2a}{1+\cos\,2a}\cdot\frac{\cos\,a}{1+\cos\,a} = \frac{2\,sen\,a\cdot\cos\,a}{1+\cos^2 a - sen^2 a}\cdot\frac{\cos\,a}{1+\cos^2\frac{a}{2}-sen^2\frac{a}{2}} =$$

$$= \frac{2\cdot 2\,sen\,\frac{a}{2}\cdot\cos\,\frac{a}{2}\cdot\cos^2\,a}{(2\,\cos^2\,a)\cdot\left(2\,\cos^2\,\frac{a}{2}\right)} = tg\,\frac{a}{2}$$

17. Los resultados son:

a) $$\frac{sen150º - sen\,50º}{\cos\,150º + \cos\,50º} = \frac{2\,\cos\,100\cdot sen\,50}{2\,\cos\,100\cdot\cos\,50} = tg\,\,50$$

b) $$\frac{sen195º - sen\,75º}{sen\,195º + sen\,75º} = \frac{2\,\cos\,135\cdot sen\,60}{2\,sen\,135\cdot\cos\,60} = \cot g\,135\cdot tg\,\,60 = -\,\text{tg}\,60 = -\,\sqrt{3}$$

c) $$\frac{\cos160º - \cos\,100º}{sen\,160º + sen\,100º} = \frac{-\,2\,sen\,130\cdot sen30}{2\,sen\,130\cdot\cos\,30} = -\,tg\,\,30 = -\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

18. a) Desarrollamos el numerador de la fracción teniendo en cuenta los teoremas de adición, operamos y vemos que coincide con el numerador, por tanto, el resultado de la fracción se 1.

b) Se demuestra del siguiente modo:

$$\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{sen(a+b)+sen(a-b)}=\frac{-2\cdot sen\ a\cdot sen\ (-b)}{2\cdot sen\ a\cos b}=tg\ b\,.$$

19. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) $sen\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{24}+k_1\pi\ o\ x=\frac{5\pi}{24}+k_2\pi\ con\ k_1,k_2\in Z$

b) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{11\pi}{36}+2k_1\frac{\pi}{3}\ o\ x=\frac{19\pi}{36}+2k_2\frac{\pi}{3}\ con\ k_1,k_2\in Z$

c) $tg\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{6}+k_1\frac{\pi}{2}\ con\ k_1\in Z$

d) $\cos\left(\frac{1}{2}(x+\pi)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{2\pi}{3}+4k_1\pi\ o\ x=\frac{8\pi}{3}+4k_2\pi\ con\ k_1,k_2\in Z$

e) sen 3x – sen 30º = 0 $\quad\Rightarrow\quad x=10^\circ+120^\circ k_1\ o\ x=50^\circ+120^\circ k_2\ con\ k_1,k_2\in Z$

f) $\cot g\left(\frac{x+45^\circ}{2}\right)=\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad x=15^\circ+360^\circ k_1\ con\ k_1\in Z$

20. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) sen 2x = 2 cos x $\Rightarrow$ 2 sen x · cos x = 2 cos x $\Rightarrow$ 2 sen x · cos x – 2cos x = 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ cos x = 0; sen x = 1 $\Rightarrow$ **$x_1 = 90^\circ + 180^\circ \cdot k_1$ con $k_1 \in Z$.**

b) sen x + sen 3x = cos x $\Rightarrow$ 2 sen 2x · cos x = cos x $\Rightarrow$ 2 sen 2x · cos x – cos x = 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ cos x = 0; sen 2x = $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ **$x_1 = 90^\circ + 180^\circ \cdot k_1$ con $k_1 \in Z$; $x_2 = 15^\circ + 180^\circ \cdot k_2$ con $k_2 \in Z$ y $x_3 = 75^\circ + 180^\circ \cdot k_3$ con $k_3 \in Z$.**

c) sen 4x = sen 2x $\Rightarrow$ 2 sen 2x · cos 2x = sen 2x $\Rightarrow$ 2 sen 2x · cos 2x – sen 2x = 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sen 2x · (2 cos 2x – 1) = 0 $\Rightarrow$ cos 2x = $\frac{1}{2}$; sen 2x = 0 $\Rightarrow$ **$x_1 = 0^\circ + 90^\circ \cdot k_1$ con $k_1 \in Z$; $x_2 = 30^\circ + 180^\circ \cdot k_2$ con $k_2 \in Z$ y $x_3 = 150^\circ + 180^\circ \cdot k_3$ con $k_3 \in Z$.**

d) cos 2x – cos 6x = sen 5x + sen 3x $\Rightarrow$ - 2 sen 4x · sen (- 2x) = 2 sen 4x · cos x $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2 sen 4x · (sen 2x – cos x) = 0 $\Rightarrow$

- sen 4x = 0 $\Rightarrow$ **$x_1 = 45^\circ \cdot k_1$ con $k_1 \in Z$**

● sen 2x – cos x = 0 $\Rightarrow$ cos x (2 sen x – 1)= 0 $\Rightarrow$ cos x = 0; sen x = $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ **x_2 = 90º + 180º · k_2 con $k_2 \in$ Z; x_3 = 30º + 360º · k_3 con $k_3 \in$ Z y x_4 = 150º + 360º · k_4 con $k_4 \in$ Z.**

e) sen 2x · cos x = 6 sen^3 x $\Rightarrow$ 2 sen x cos^2 x – 6 sen^3 x = 0 $\Rightarrow$ 2 sen x (cos^2 x – 3 sen^2 x) = 0 $\Rightarrow$

● sen x = 0 $\Rightarrow$ **x_1 = 0º + 180º · k_1 con $k_1 \in$ Z**

● cos^2 x – 3 sen^2 x = 0 $\Rightarrow$ cos^2 x – 3 (1 – cos^2 x) = 0 $\Rightarrow$ cos x = $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ **x_2 = 30º + 180º · k_2 con $k_2 \in$ Z y x_3 = 150º + 180º · k_3 con $k_3 \in$ Z.**

f) 2 sen x = tg x $\Rightarrow$ sen x (2 cos x – 1) = 0 $\Rightarrow$ sen x = 0; cos x = $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ **x_1 = 0º + 180º · k_1 con $k_1 \in$ Z; x_2 = 60º + 360º · k_2 con $k_2 \in$ Z y x_3 = 300º + 360º · k_3 con $k_3 \in$ Z.**

21. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) sen x = 1 + 2 cos^2 x $\Rightarrow$ sen x = 1 + 2 – 2 sen^2 x $\Rightarrow$ 2 sen^2 x + sen x – 3 = 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sen x = 1 $\Rightarrow$ **x_1 = 90º + 360º · k_1 con $k_1 \in$ Z**

b) sec x + tg x = cos x $\Rightarrow$ $\frac{1}{\cos x} + \frac{sen\ x}{\cos x} = \cos x$ $\Rightarrow \begin{cases} senx = 0 \Rightarrow x = \pi \cdot k_1 \\ sen\ x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k_2\pi \end{cases}$

con k_1 , $k_2 \in$ Z

c) 6 cos^2 $\frac{x}{2}$ + cos x = 1 $\Rightarrow$ $6\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)^2 + \cos x = 1$ $\Rightarrow$ $3 + 3\cos x + \cos x = 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ cos x = - $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ **x_1 = 120º + 360º · k_1 con $k_1 \in$ Z; x_2 = 240º + 360º · k_2 con $k_2 \in$ Z**

d) 6 cos^2 x + 6 sen^2 x = 5 + sen x $\Rightarrow$ 6 = 5 + sen x $\Rightarrow$ sen x = 1 $\Rightarrow$ **x_1 = 90º + 360º · k_1 con $k_1 \in$ Z**

e) tg 2x · tg x = 1 $\Rightarrow$ $\frac{2\,tg^2\ x}{1 - tg^2\ x} = 1$ $\Rightarrow$ $tg = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ **x_1 = 30º + 180º · k_1 con $k_1 \in$ Z y x_2 = 150º + 180º · k_2 con $k_2 \in$ Z**

f) cos^2 x = 3 sen^2 x $\Rightarrow$ 1 = 4 sen^2 x $\Rightarrow$ sen x = $\pm\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ **x_1 = 30º + 180º · k_1 con $k_1 \in$ Z y x_2 = 150º + 180º · k_2 con $k_2 \in$ Z**

22. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) sen x + $\sqrt{3}$ cos x= 2 $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}sen\ x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\ x = 1$ $\Rightarrow$ sen (x + 60º) = 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **x_1 = 30º + 360º · k_1 con $k_1 \in$ Z**

b) sen x + cos x = $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{2}}sen\ x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\ x = 1$ $\Rightarrow$ sen (x + 45º) = 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **x_1 = 45º + 360º · k_1 con $k_1 \in$ Z**

c) sen x + cos x = $\frac{5}{2}$ $\Rightarrow$ Imposible ya que sen x + cos x $\leq$ 2.**23.** Las soluciones de los sistemas, en el primer giro, son:

a) Sumamos ambas ecuaciones y obtenemos: 2x + 1 = 3, entonces x = 1.

Sustituyendo el valor anterior en la primera ecuación y operando, obtenemos:

$\text{sen}^2\ y = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\ y = \pm\ 1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{\pi}{2}\ e\ y_2 = \frac{3\pi}{2}.$

Las soluciones del sistema son: $\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)\ y\ \left(1,\ \frac{3\pi}{2}\right)$

b) Sumamos ambas ecuaciones y obtenemos: sen (x + y) = 1, entonces (x + y) = 90º o x = 90º - y.

Sustituyendo la expresión anterior en la primera ecuación y operando, obtenemos:

$\text{sen}\ (90º - y) \cdot \cos\ y = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 y = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Las soluciones del sistema son: (60º, 30º); (300º, 150º); (240º, 210º) y (120º, 330º).

c) De la segunda ecuación obtenemos: x + y = 0º, entonces x = - y

Sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos:

$\cos\ (-\ y) + \cos\ y = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\cos\ y = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\ y = \frac{1}{2}.$

Las soluciones del sistema son: (300º, 60º) y (60º, 300º).

d) Despejamos y = 90º - x en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

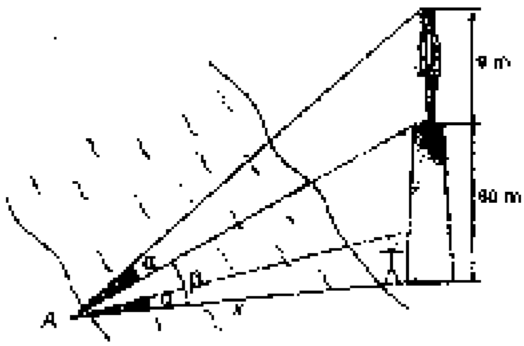
$$sen\ x + sen\ (90º - x) = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot sen\ 45º \cdot \cos(x - 45º) = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos(x - 45º) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x - 45º = 30º\ \text{ó}\ \ x - 45º = 330º$$

Las soluciones del sistema son: (15º, 75º) y (75º, 15º).

ACTIVIDADES-PÁG. 130

24. Según la siguiente figura:



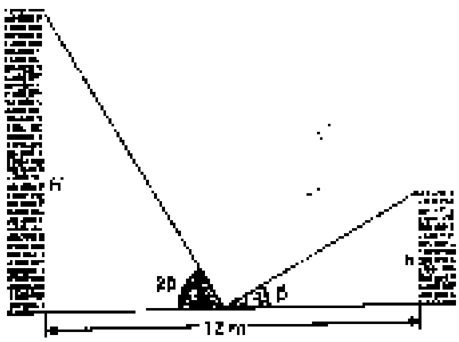
Llamando β al ángulo bajo el cual se ve el pedestal, tenemos:

$$tg\ (\beta + \alpha) = \frac{tg\ \beta + tg\ \alpha}{1 - tg\ \beta \cdot tg\ \alpha}; \quad \frac{60+9}{x} = \frac{\frac{60}{x} + \frac{1{,}8}{x}}{1 - \frac{60}{x} \cdot \frac{1{,}8}{x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{69}{x} = \frac{61{,}8\ x}{x^2 - 108} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 7{,}2x^2 = 7452 \quad \Rightarrow \quad x = 32{,}17\ m.$$

La anchura del río es de 32,17 metros.

25. Sea el esquema:



Los cálculos quedan:

$$tg\ \ 60^\circ = \frac{H}{6} \quad \Rightarrow \quad H = 6 \cdot \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad H = 10{,}39\ m.$$

$$tg\ \ 30^\circ = \frac{h}{6} \quad \Rightarrow \quad h = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad h = 3{,}46\ m.$$

En la expresión $tg\ (2\beta) = \dfrac{2\ tg\ \beta}{1 - tg^2\ \beta}$, sustituimos $tg\ \ 2\beta = \dfrac{H}{6}\ \ y\ tg\ \ \beta = \dfrac{h}{6}$, y obtenemos:

$$\frac{H}{6}=\frac{2\cdot\frac{h}{6}}{1-\frac{h^2}{36}} \Rightarrow H\cdot h^2+72h-36H=0 \Rightarrow h=\frac{6\sqrt{36+H^2}-36}{H}$$

Esta es relación que liga ambas alturas. Relación que se verifica para los valores obtenidos anteriormente.

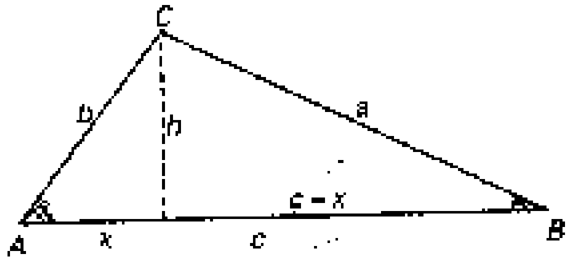
26. A partir del desarrollo de tg (A + B + C) y de sustituir A + B + C = 180º, obtenemos la expresión buscada:

$$tg\ (A+B+C)=tg\ [A+(B+C)]=\frac{tg\ A+tg\ (B+C)}{1-tg\ A\cdot tg\ (B+C)}=$$

$$=\frac{tg\ A+tg\ B+tg\ C-tg\ A\cdot tg\ B\cdot tg\ C}{1-tg\ B\cdot tg\ C-tg\ A\cdot tg\ B-tg\ A\cdot tg\ C}$$

Como A + B + C = 0, entonces tg (A + B + C) = 0 y queda tg A + tg B + tg C = tg A · tg B · tg C

27. Sea el triángulo:



El área del triángulo es:

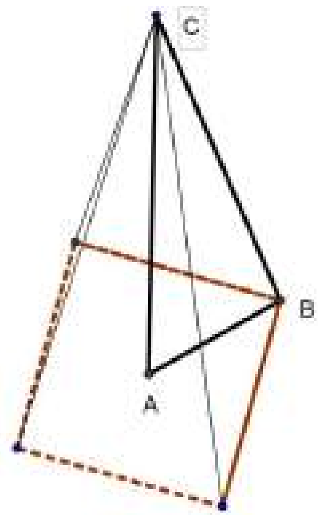
$$S=\frac{1}{2}\,base\cdot altura=\frac{1}{2}c\cdot h$$

Vamos a calcular h:

$$\left.\begin{array}{l} tg\ A=\dfrac{h}{x} \\ tg\ B=\dfrac{h}{c-x}\end{array}\right\} \Rightarrow h=c\cdot\frac{tg\ A\cdot tg\ B}{tg\ A+tg\ B}$$

De modo que sustituyendo en el área obtenemos la fórmula buscada.

$$S=\frac{1}{2}c\cdot c\cdot\frac{tg\ A\cdot tg\ B}{tg\ A+tg\ B}=\frac{1}{2}\cdot c^2\cdot\frac{tg\ A\cdot tg\ B}{tg\ A+tg\ B}$$



28. En el dibujo adjunto aparece la antena, AC, y los cables, uno de ellos BC.

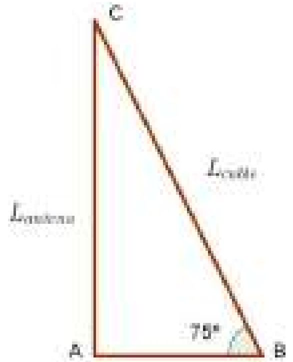
En el dibujo puede apreciarse el triángulo ABC, rectángulo en A, con el ángulo en B de 75º y sus lados son:

- AC la longitud de la antena,
- AB la mitad de la diagonal de la base,
- BC la longitud de uno de los cables.

La medida de AB es la mitad de la diagonal del cuadrado de lado 80 m, por tanto:

$$AB = \frac{1}{2} \cdot D = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{80^2 + 80^2} \quad \Rightarrow \quad AB = 56{,}57\ m$$

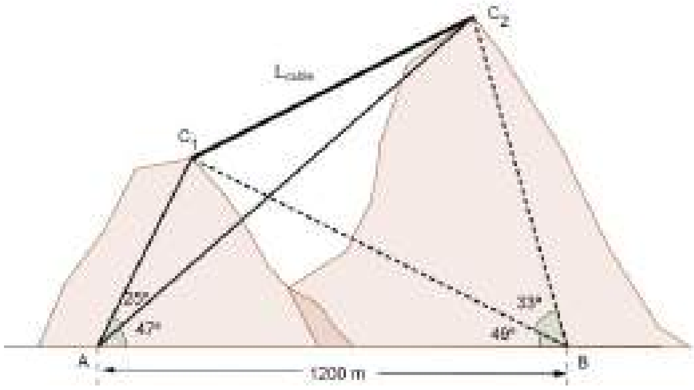
Calculamos la longitud de cada cable y la longitud de la antena en el triángulo ABC:

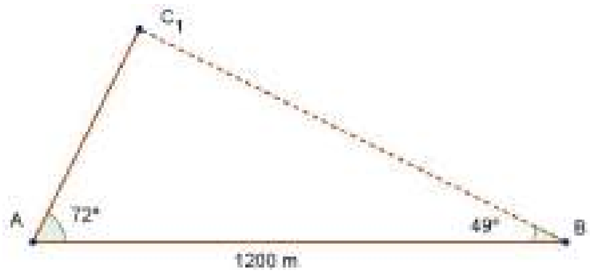


$$\cos\ 75^\circ = \frac{56{,}57}{L_{cable}} \quad \Rightarrow \quad L_{cable} = \frac{56{,}57}{\cos\ 75^\circ} \quad \Rightarrow \quad L_{cable} = 218{,}57\,m.$$

$$tg\ 75^\circ = \frac{L_{antena}}{56{,}57} \quad \Rightarrow \quad L_{antena} = 56{,}57 \cdot tg\ 75^\circ \quad \Rightarrow \quad L_{antena} = 211{,}12\ m.$$

29. Sea el dibujo del enunciado:





En el triángulo ABC_1:

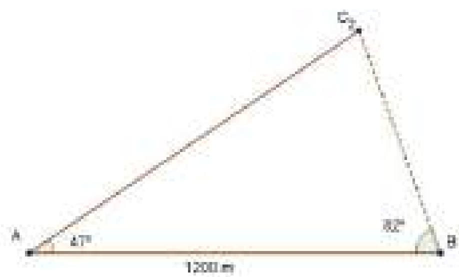
El ángulo C_1 vale $C_1 = 180^\circ - 72^\circ - 49^\circ = 59^\circ$.

Utilizando el teorema de los senos:

$$\frac{1200}{sen\ 59^\circ} = \frac{AC_1}{sen\ 49^\circ} = \frac{BC_1}{sen\ 72^\circ} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} AC_1 = 1200 \cdot \dfrac{sen\ 49^\circ}{sen\ 59^\circ} = 1056{,}56 \\ BC_1 = 1200 \cdot \dfrac{sen\ 72^\circ}{sen\ 59^\circ} = 1331{,}44 \end{cases}$$

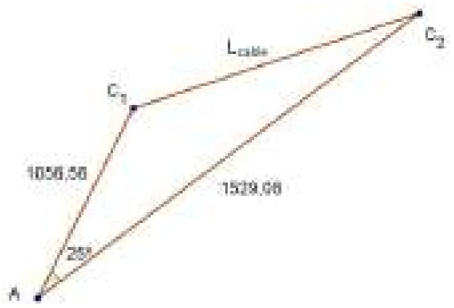
En el triángulo ABC_2:

El ángulo C_2 vale $C_2 = 180^\circ - 47^\circ - 82^\circ = 51^\circ$.



Utilizando el teorema de los senos:

$$\frac{1200}{sen\ 51^\circ} = \frac{AC_2}{sen\ 82^\circ} = \frac{BC_2}{sen\ 47^\circ} \Rightarrow \begin{cases} AC_2 = 1200 \cdot \dfrac{sen\ 82^\circ}{sen\ 51^\circ} = 1529{,}08 \\ BC_2 = 1200 \cdot \dfrac{sen\ 47^\circ}{sen\ 51^\circ} = 1129{,}29 \end{cases}$$



Determinamos la longitud del cable, L_{cable}, en el triángulo AC_1C_2 aplicando el teorema del coseno:

$$L_{acble}^2 = 1056{,}56^2 + 1529{,}08^2 - 2 \cdot 1056{,}56 \cdot 1529{,}08 \cdot \cos 25^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad L_{cable} = 725{,}26\ m.$$

ACTIVIDADES-PÁG. 131

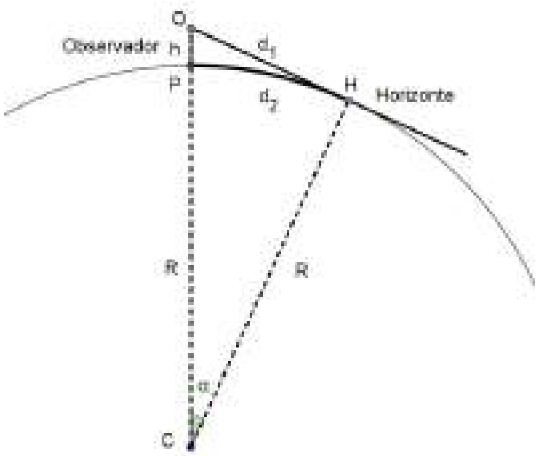
a) La distancia que buscamos es d_1 = OH, como puede verse en la figura.

El triángulo OHC es rectángulo en H ya que el radio y la tangente en H son perpendiculares.

Aplicando el teorema de Pitágoras y operando, obtenemos:

$$(R + h)^2 = R^2 + d_1^2 \Rightarrow R^2 + h^2 + 2Rh = R^2 + d_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h^2 + 2Rh = d_1^2 \Rightarrow d_1 = \sqrt{h^2 + 2Rh} \Rightarrow d_1 \approx \sqrt{2Rh}$$



En la expresión final no se ha tenido en cuenta h^2, ya que su valor será prácticamente nulo comparado con el valor de 2Rh.

Para el caso de una persona que tenga los ojos a h = 1,8 m = 0,0018 km del suelo y dado que el radio de la Tierra es R = 6371 km, tenemos:

$$d \approx \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0{,}0018} \approx 4{,}789\ km.$$

b) En este caso hay que calcular la distancia d_2, correspondiente al arco de círculo PH.

En el triángulo OHC podemos calcular:

$$\cos \alpha = \frac{R}{R + h} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{R}{R + h}$$

En el triángulo curvilíneo PHC tenemos en cuenta la relación "arco = radio · ángulo" y obtenemos:

$$d_2 = R \cdot \arccos \frac{R}{R+h}$$

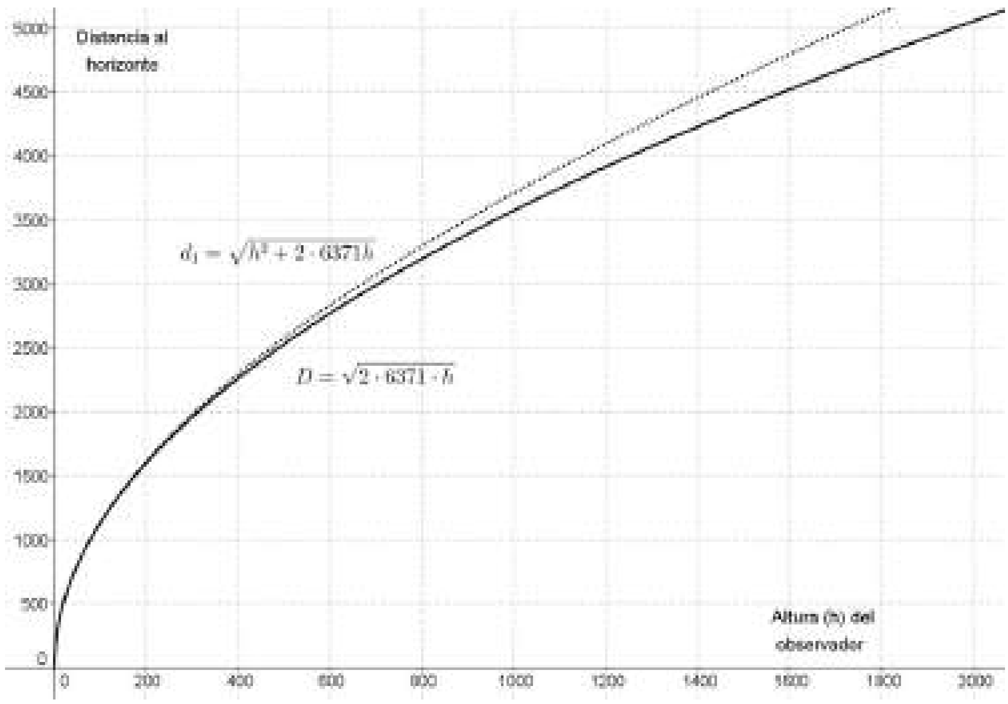
Para h = 1,8 m = 0,0018 km, obtenemos:

$$d_2 = 6371 \cdot \arccos \frac{6371}{6371 + 0{,}0018} \approx 4{,}789\ km.$$

El resultado es prácticamente igual al obtenido con anterioridad. Esto es debido a que R y R + h tienen valores muy próximos y, por tanto, el ángulo es muy pequeño.

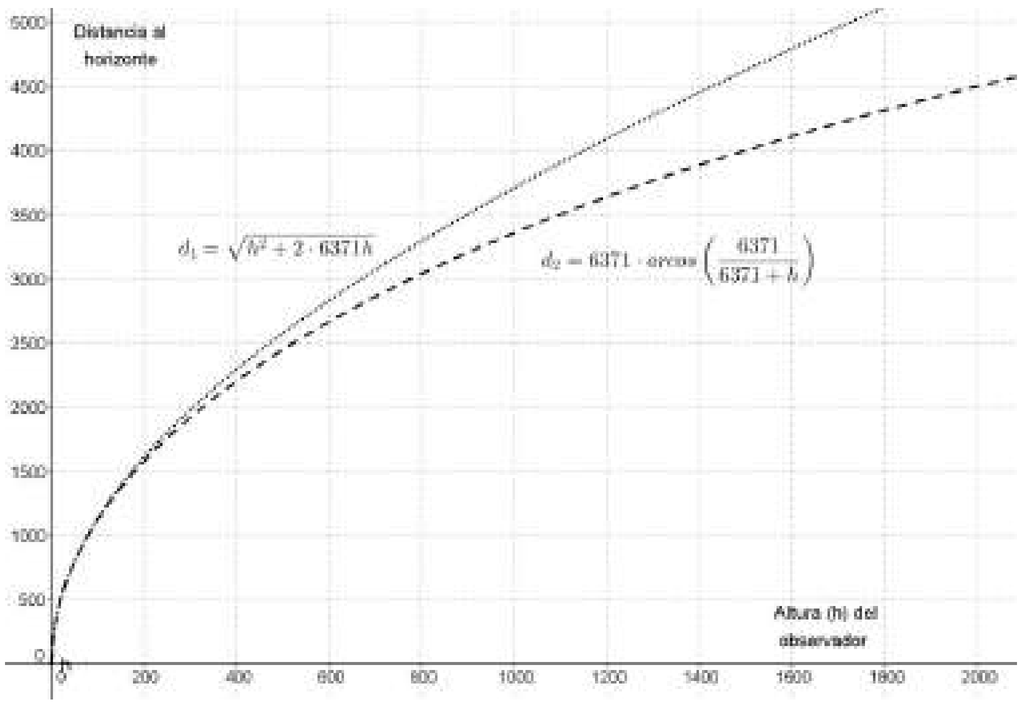
c) En la gráfica pueden verse las gráficas de las funciones que relacionan la distancia al horizonte, tomando o no el término h^2. Estas funciones son:

$$d_1 = \sqrt{h^2 + 2 \cdot 6371 \cdot h} \quad \text{y} \quad D = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot h}$$



En la gráfica pueden verse las gráficas de las funciones de las distancias al horizonte:

$$d_1 = \sqrt{h^2 + 2 \cdot 6371h} \quad \text{y} \quad d_2 = 6371 \cdot \arccos\left(\frac{6371}{6371 + h}\right)$$



d) Debemos resolver la siguiente ecuación:

$$50 = \sqrt{2 \cdot R \cdot h} \quad \Rightarrow \quad 50^2 = 2 \cdot 6371 \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2500}{2 \cdot 6371} \approx 0{,}1962\, km.$$

Tendríamos que subir a unos 200 m de altura.

e) Desde una altura h se puede ver un casquete esférico de altura R · (1 – cos α), donde $\alpha = \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)$

Teniendo en cuenta que el área de un casquete esférico viene dada por la fórmula A = 2πRh, tenemos:

$$A = 2\pi R \cdot R \cdot \left[1 - \cos\left(\arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)\right)\right] \quad \Rightarrow \quad A = 2\pi R^2 \cdot \left[1 - \frac{R}{R+h}\right]$$

Tomando la altura del Everest h = 8848 m = 8,848 km, tenemos:

$$A = 2\pi 6371^2 \cdot \left[1 - \frac{6371}{6371 + 8{,}848}\right] \approx 353\,696 km^2.$$

UNIDAD 6: Números complejos

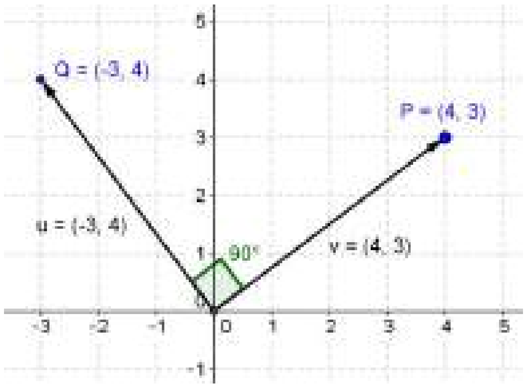
ACTIVIDADES-PÁG. 132

1. Las soluciones de las ecuaciones dadas son:

a) $x^2 - 4x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 + i \ y \ x_2 = 2 - i$

b) $2x^3 + 32x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \ x_2 = 4i \ y \ x_3 = -4i$

2. El vector resultante de girar 90º el vector $\vec{v}\,(4,\ 3)$ es el vector $\vec{u}\,(-3,\ 4)$. Puede verse en el dibujo.



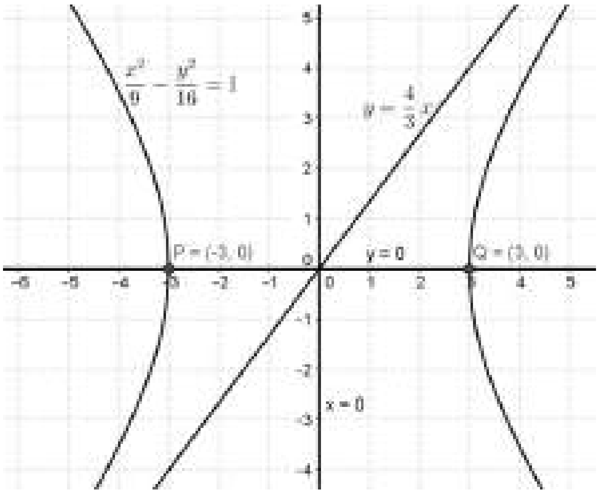
3. Los puntos de intersección de la hipérbola con las rectas vienen dados por los sistemas que siguen:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \textit{No tiene soluciones}.$$ Por tanto, no hay puntos de corte.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -3;\ y_1 = 0 \\ x_2 = 3;\ y_2 = 0 \end{cases}$$. Los puntos de corte son P (- 3, 0) y Q (3, 0).

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1 \\ y = \dfrac{4}{3}x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \textit{No tiene soluciones}.$$ Por tanto, no hay puntos de corte.

Todo lo anterior pude verse en el dibujo.

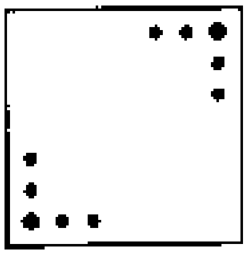


4. El radio del hexágono mide $2\sqrt{2}$, su apotema mide $\sqrt{6}$ y el área será:

$$\frac{6 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{2} = 12\sqrt{3}\ u^2.$$

ACTIVIDADES-PÁG. 147

1. Si cada punto representa una lámpara, la solución quedaría del siguiente modo:



2. Si hay n calles, el número máximo de cruces es $C_{n,\,2} = \frac{n^2 - n}{2}$.

Luego si hay 66 farolas habrá 66 cruces y se cumplirá:

$$\frac{n^2 - n}{2} = 66 \;\Rightarrow\; n^2 - n - 132 = 0 \;\Rightarrow\; n = 12$$

El pueblo tenía 12 calles como mínimo.

3. Ésta es una de las disposiciones en que quedó la cava.

Cómo máximo pudo robar:

$60 - 42 = 18$ botellas.

La disposición de 42 botellas admite muchas formas diferentes,

1		20
20		1

ACTIVIDADES-PÁG. 148

1. Los resultados en cada uno de los apartados son:

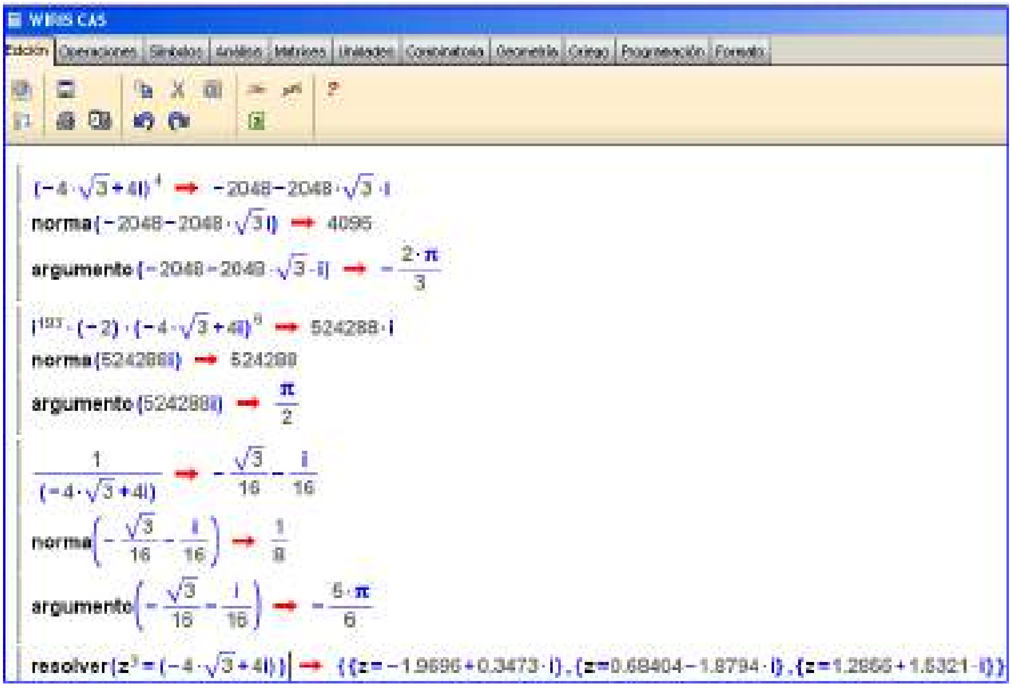
a) $z^4 = (-4\sqrt{3} + 4i)^4 = -2048 - 2048\sqrt{3}\ i = 4096_{\frac{-2\pi}{3}}$

b) $i^{193} \cdot (-2)\ (-4\sqrt{3} + 4i\ )^6 = 524288\ i = 524288_{\frac{\pi}{2}}$

c) inverso de z = $\dfrac{1}{\left(-4\cdot\sqrt{3} + 4i\right)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{16} - \dfrac{i}{16} = \left(\dfrac{1}{8}\right)_{\frac{-5\pi}{6}}$

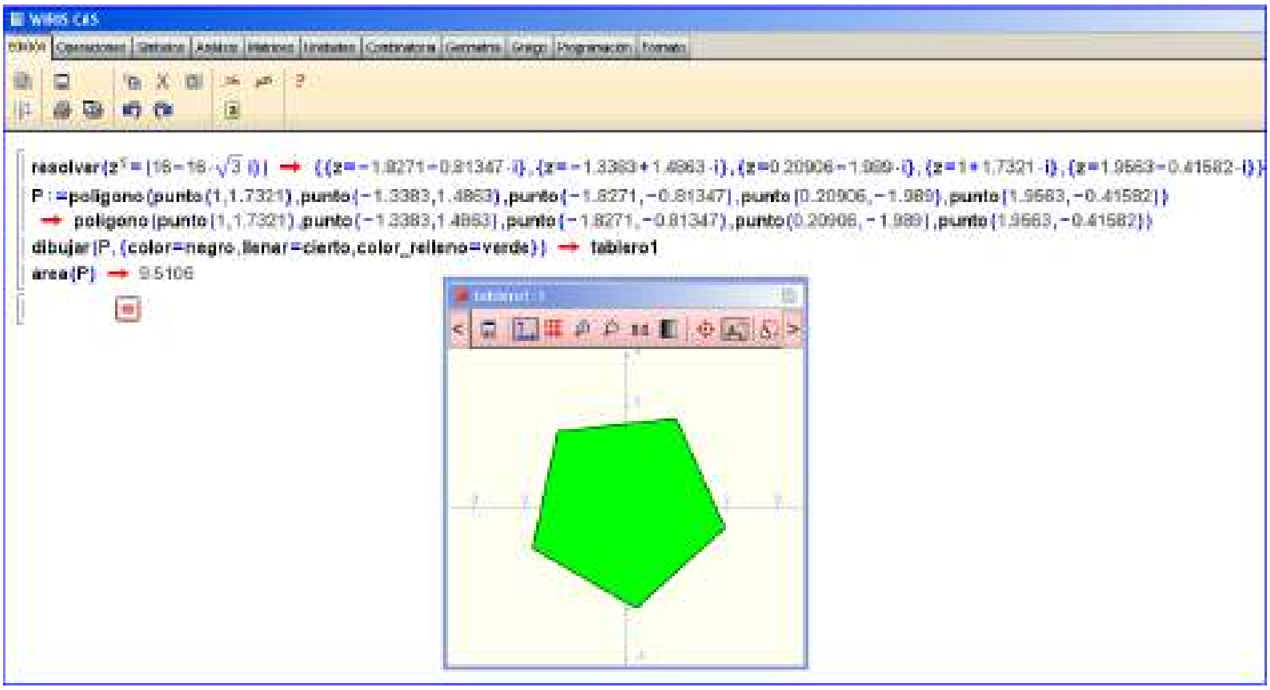
d) Para hallar $\sqrt[3]{z}$ resolvemos la ecuación $z^3 = -4\sqrt{3} + 4i$ y obtenemos las tres soluciones de esta ecuación como vemos en la imagen.

En la imagen tenemos la resolución, con Wiris, de esta actividad.



2. Con Wiris resolvemos la ecuación y como vemos en la imagen obtenemos las cinco soluciones de la misma.

Sus afijos son los vértices de un pentágono regular cuyo dibujo tenemos en la misma imagen y cuya área se calcula con el comando **área(polígono)** y en este caso vale 9,5106 unidades cuadradas.



ACTIVIDADES-PÁG. 149

1. Los resultados de las operaciones son:

a) $5z_1 - \sqrt{3}\, z_2 = -5{,}20 - 4i$

b) $z_1^3 \cdot z_2^4 = -997.66 - 3384i$

c) el inverso de $(z_1 \cdot z_2) = -0{,}08 + 0.07i$

2. El complejo $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ en forma polar es $4_{-\frac{\pi}{4}}$ y el complejo $5_{\frac{4\pi}{3}}$ en forma binómica es $\dfrac{-5}{2} - \dfrac{5\sqrt{3}}{2}i$

ACTIVIDADES-PÁG. 150

1. Las soluciones de las operaciones son:

a) (- 3 + 2i) + (4 - 3i) = 1 - i

c) (- 2 +3 i) – (3 - 4i) = - 5 + 7i

e) 3i – (- 6 + 2i) = 6 + i

b) (1 + 5i) + (2 – 2i) = 3 + 3i d) (3 - 7i) – (- 2 + 2i) = 5 – 9i f) 5 + (- 2 + i) = 3 + i

2. Las soluciones de las operaciones son:

a) (3 + 2i) · (- 2 + 4i) = - 14 + 8i c) (2 + i) · (- 2 - i) = – 3 – 4i e) (1 – 3i) · (1 + 3i) = 10

b) $\frac{2+5i}{3-4i} = -\frac{14}{25} + \frac{23}{25}i$ d) $\frac{1-3i}{1+3i} = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ f) $\frac{-1+5i}{-3+i} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$

3. La tabla completa:

Complejo	Opuesto	Conjugado	Inverso
5 + i	- 5 – i	5 – i	$\frac{5}{26} - \frac{1}{26}i$
- 1 + i	1 – i	- 1 – i	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
2 + 2i	- 2 – 2i	2 – 2i	$\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$
1 – 3i	- 1 + 3i	1 – 3i	$\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$

4. Las soluciones de las operaciones son:

a) $u^2 = -7 - 24i$ c) $(u - v)^2 = 8 - 6i$

b) $w^3 = -2 - 2i$ d) $\frac{(u+v)^3}{w^2} = -77 - 207i$

5. El valor de las expresiones es:

a) $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{20} = 0$ d) $\frac{(3+2i)\cdot i^{17}}{i^{243}\cdot(1-i^7)} = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$

b) $\frac{i^{298}}{i^{481} - i^{275}} = \frac{1}{2}i$ e) $i^{-1} + i^{-2} + i^{-3} \ldots + i^{-40} = 0$

c) $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2000} = 1$ f) $\frac{(2-i)\cdot(3+2i)^2}{(1+i^{12})\cdot i^{120}} = 11 + \frac{19}{2}i$

6. Las respuestas a las cuestiones son:

a) Operamos $(2 + bi)^2 = (4 - b^2) + 4bi$. Como tiene que ser real se cumplirá:

$$4b = 0, \text{ entonces } b = 0.$$

b) Operamos $(3 + 2i) \cdot (-5 + bi) = (-15 - 2b) + (3b - 10)i$. Como el afijo tiene que estar en la bisectriz del primero y tercer cuadrante se cumplirá:

$$-15 - 2b = 3b - 10 \quad \Rightarrow \quad b = -1$$

c) Operamos y obtenemos:

$$(a + 3i) \cdot (2 - bi) = 23 - 14i \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2a + 3b = 23 \\ 6 - ab = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 23 \\ ab = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 4,\ b_1 = 5 \\ a_2 = \dfrac{15}{2},\ b_2 = \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Hay dos soluciones, los complejos $4 + 5\,i \ \ y \ \ \dfrac{15}{2} + \dfrac{8}{3}i$.

d) Operamos $\dfrac{4 + 2ai}{3a + i} = \dfrac{(4 + 2ai)\,(3a - i)}{(3a + i)\,(3a - i)} = \dfrac{14a}{9a^2 + 1} + \dfrac{6a^2 - 4}{9a^2 + 1}i$. Como tiene que ser un número imaginario puro se cumplirá:

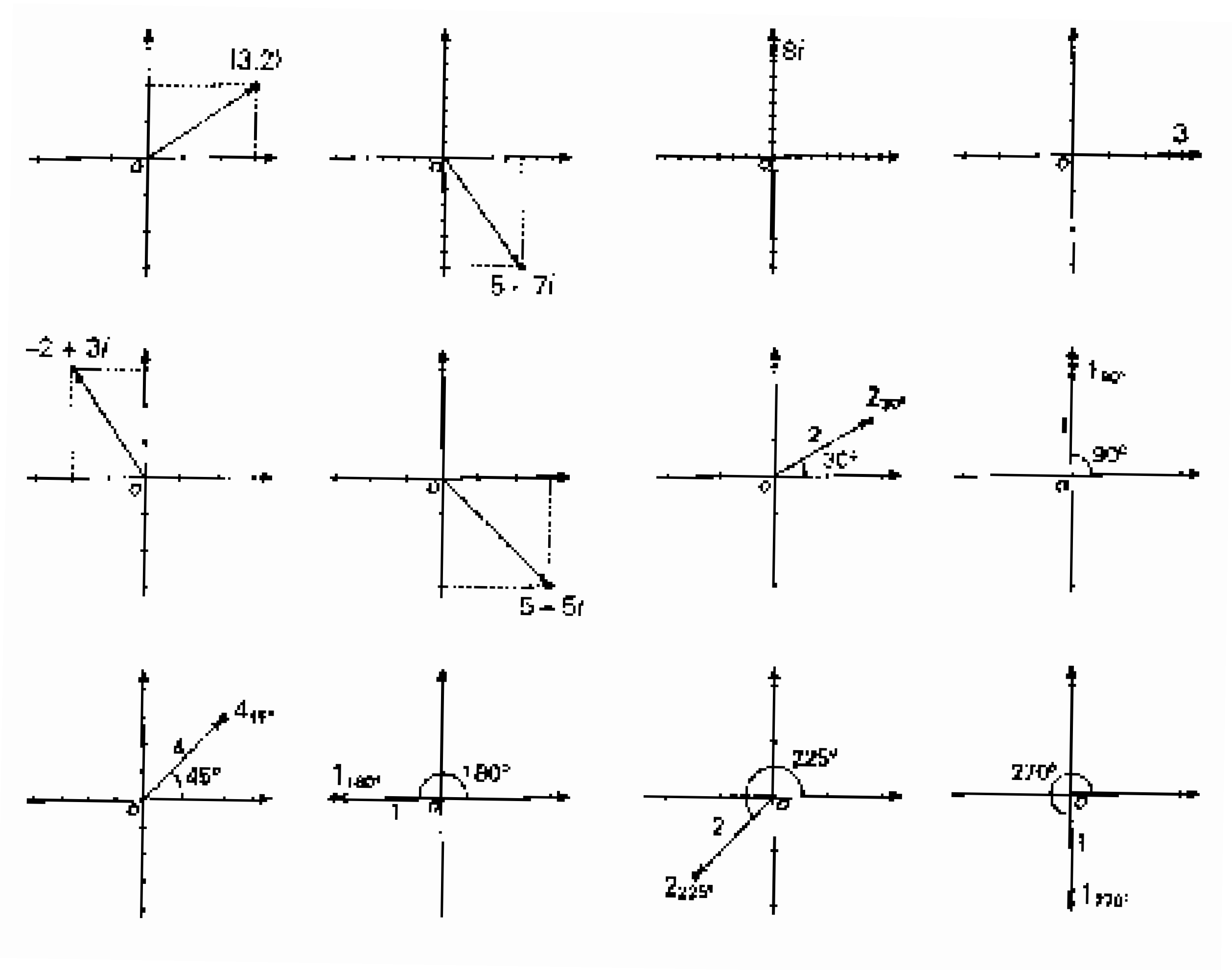
$$\frac{14a}{9a^2 + 1} = 0, \text{ entonces } a = 0.$$

7. La tabla queda del siguiente modo:

Afijo	Forma binómica	Forma polar	Forma trigonométrica
(2, 2)	2 + 2i	$\left(2\sqrt{2}\right)_{45^\circ}$	$2\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i\ sen\ 45^\circ)$
(1, - 1)	1 – i	$\sqrt{2}_{315^\circ}$	$\sqrt{2}\,(\cos 315^\circ + i\ sen\ 315^\circ)$
$\left(2\sqrt{3},\ 2\right)$	$2\sqrt{3} + 2i$	4_{30°	4 (cos 30º + i sen 30º)
$\left(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)$	$-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$	2_{225°	2 (cos 225º + i sen 225º)

ACTIVIDADES-PÁG. 151

8. Las representaciones gráficas pueden verse a continuación:



9. Las soluciones son:

a) $2_{25^\circ} \cdot 3_{20^\circ} = 6_{45^\circ} = 6 \cdot (\cos 45^\circ + i\ sen\ 45^\circ) = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2} + 3\ \sqrt{2}\, i$

b) $16_{76^\circ} : 4_{46^\circ} = 4_{30^\circ} = 4 \cdot (\cos 30^\circ + i\ sen\ 30^\circ) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\ \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$

c) $12_{93^\circ} : 3_{33^\circ} = 4_{60^\circ} = 4 \cdot (\cos 60^\circ + i\ sen\ 60^\circ) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\ + 2\sqrt{3}\, i$

d) $\left(1_{30^\circ}\right)^3 = 1_{90^\circ} = 1 \cdot (\cos 90^\circ + i\ sen\ 90^\circ) = 1 \cdot (0 + i) = i$

e) $\left(4_{225^\circ}\right)^2 = 16_{90^\circ} = 16 \cdot (\cos 90^\circ + i\ sen\ 90^\circ) = 16 \cdot (0 + i) = 16i$

f) [6(cos 130º + i sen 130º)] · [3 (cos 80º + i sen 80º)] = $18 \cdot (\cos 210^{\circ} + i\ sen\ 210^{\circ}) =$

$$= 18 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2} \right) = -9\sqrt{3} - 9i$$

g) [4 (cos 20º + i sen 20º)]³ = $4^3 \cdot (\cos 60^{\circ} + i\ sen\ 60^{\circ}) = 64 \cdot \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 32 + 32\sqrt{3}\,i$

h) $\dfrac{4\ (\cos 330^{\circ} + i\ sen\ 330^{\circ})}{2\ (\cos 30^{\circ} + i\ sen\ 30^{\circ})} = 2 \cdot (\cos 300^{\circ} + i\ sen\ 300^{\circ}) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - \sqrt{3}\,i$

10. Expresando los complejos a forma polar y operando, obtenemos:

a) $(-1-i)^7 \cdot (-2+2i)^5 = \left(\sqrt{2}_{225^{\circ}}\right)^7 \cdot \left(\sqrt{8}_{135^{\circ}}\right)^5 = 2^{11}_{7 \cdot 225^{\circ} + 5 \cdot 135^{\circ}} = 2^{11}_{2250^{\circ}} = 2048_{90^{\circ}}$

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{20} = \left(1_{330^{\circ}}\right)^{20} = 1_{20 \cdot 330^{\circ}} = 1_{6600^{\circ}} = 1_{120^{\circ}}$

c) $\left(i^8 + i^5\right) : \sqrt{2}\,i = \dfrac{i^8 + i^5}{\sqrt{2}\,i} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}\,i} = \dfrac{\sqrt{2}_{45^{\circ}}}{\sqrt{2}_{90^{\circ}}} = 1_{315^{\circ}}$

d) $\left(\dfrac{4 - 4\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3} + i} \right)^6 = \left(\dfrac{8_{300^{\circ}}}{2_{30^{\circ}}} \right)^6 = \left(4_{270^{\circ}}\right)^6 = 4^6_{6 \cdot 270^{\circ}} = 4096_{180^{\circ}}$

e) $i^{39} \cdot \left(-4 - 4\sqrt{3}i\right)^7 = 1_{270^{\circ}} \cdot \left(8_{240^{\circ}}\right)^7 = 8^7_{1950^{\circ}} = 8^7_{150^{\circ}}$

f) $i^{-73} \cdot \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i \right) = 1_{270^{\circ}} \cdot 3_{330^{\circ}} = 3_{600^{\circ}} = 3_{240^{\circ}}$

11. En el cálculo de las raíces obtenemos:

a) $\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1_{90^{\circ}}} = 1_{\frac{90^{\circ} + 360^{\circ} \cdot k}{3}} = 1_{30^{\circ} + 120^{\circ} \cdot k}$; $con\ k = 0;\ 1\ y\ 2$. Las raíces son: $1_{30^{\circ}}$; $1_{150^{\circ}}$ y $1_{270^{\circ}}$.

b) $\sqrt{\dfrac{9}{2} + \dfrac{9\sqrt{3}}{2}i} = \sqrt{9_{60^{\circ}}} = 3_{\frac{60^{\circ} + 360^{\circ} \cdot k}{2}} = 3_{30^{\circ} + 180^{\circ} \cdot k}$; con k = 0 y 1. Las raíces son $3_{30^{\circ}}$ y $3_{210^{\circ}}$.

c) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^{\circ}}} = 3_{\frac{180^{\circ} + 360^{\circ} \cdot k}{3}} = 3_{60^{\circ} + 120^{\circ} \cdot k}$; con k = 0; 1 y 2. Las raíces son $3_{60^{\circ}}$; $3_{180^{\circ}}$ y $3_{300^{\circ}}$

d) $\sqrt[5]{\dfrac{-32}{i}} = \sqrt[5]{32i} = \sqrt[5]{32_{90^\circ}} = 2_{\frac{90^\circ + 360^\circ \cdot k}{5}} = 2_{18^\circ + 72^\circ \cdot k}$; $con\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3\ y\ 4.$

Las raíces son: 2_{18°; 2_{90°; 2_{162°; 2_{234° y 3_{306°

e) $\sqrt[3]{1-i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{315^\circ}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{315^\circ + 360^\circ \cdot k}{3}} = \sqrt[6]{2}_{105^\circ + 120^\circ \cdot k}$; $con\ k = 0;\ 1\ y\ 2$

Las raíces son: $\sqrt[6]{2}_{105^\circ}$; $\sqrt[6]{2}_{225^\circ}$ y $\sqrt[6]{2}_{345^\circ}$.

f) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i}} = \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270^\circ}} = 1_{\frac{270^\circ + 360^\circ \cdot k}{3}} = 1_{90^\circ + 120^\circ \cdot k}$; $con\ k = 0;1\ y\ 2$

Las raíces son: 1_{90°; 1_{210° y 1_{330°

g) $\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[4]{\sqrt{2}_{45^\circ}} = \sqrt[8]{2}_{\frac{45^\circ + 360^\circ \cdot k}{4}} = \sqrt[8]{2}_{11^\circ 15' + 90^\circ \cdot k}$; $con\ k = 0;\ 1;\ 2\ y\ 3.$

Las raíces son: $\sqrt[8]{2}_{11^\circ 15'}$; $\sqrt[8]{2}_{101^\circ 15'}$; $\sqrt[8]{2}_{191^\circ 15'}$ y $\sqrt[8]{2}_{281^\circ 15'}$.

h) $\sqrt[4]{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i} = \sqrt[4]{1_{150^\circ}} = 1_{\frac{150^\circ + 360^\circ \cdot k}{4}}$ $;con k = 0;1;2\,y\,3.$

Las raíces son: $1_{37,5^\circ}$; $1_{127,5^\circ}$; $1_{217,5^\circ}$; y $1_{307,5^\circ}$

i) $\sqrt[6]{i} = \sqrt[6]{1_{90^\circ}} = 1_{\frac{90^\circ + 360^\circ \cdot k}{6}} = 1_{15^\circ + 60^\circ \cdot k}$; $con\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\ y\ 5.$

Las raíces son: 1_{15°; 1_{75°; 1_{135°; 1_{195°; 1_{255° y 1_{315°

j) $\sqrt[3]{\dfrac{i^5 - i^{-5}}{2i}} = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1_{0^\circ}} = 1_{\frac{0^\circ + 360^\circ \cdot k}{3}} = 1_{120^\circ \cdot k}$; $con\ k = 0;\ 1\ y\ 2.$

Las raíces son: 1_{0°; 1_{120° y 1_{240°.

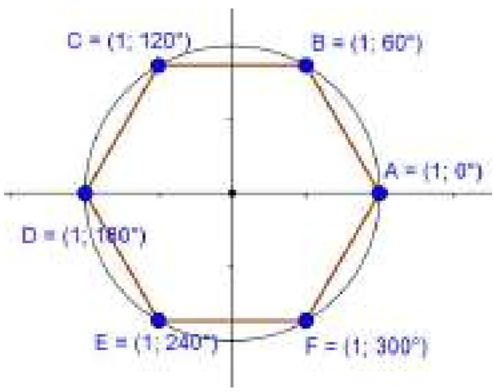
12. El cálculo de las raíces se describe a continuación y la representación gráfica puede verse en los dibujos.

a)

$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1_{0^\circ}} = 1_{\frac{0^\circ + 360^\circ \cdot k}{6}} = 1_{60^\circ \cdot k}$; $con\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\ y\ 5.$

Las soluciones son: 1_{0°; 1_{60°; 1_{120°; 1_{180°; 1_{240° y 1_{300°

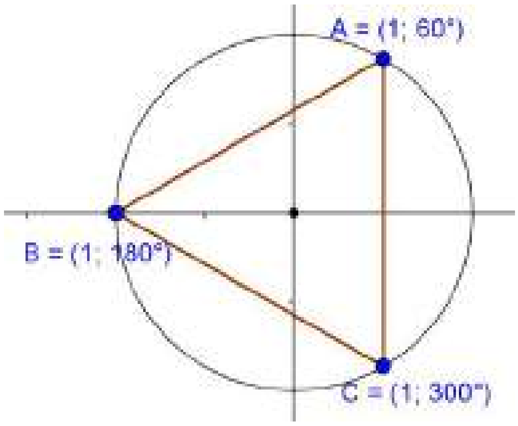
Gráficamente obtenemos los vértices de un hexágono regular centrado en el origen de coordenadas.



b) $\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1_{180º}} = 1_{\frac{180º + 360º \cdot k}{3}} = 1_{60º + 120º \cdot k}$; $con\ k = 0; 1\ y\ 2$.

Las soluciones son: $1_{60º}$; $1_{180º}$ y $1_{300º}$.

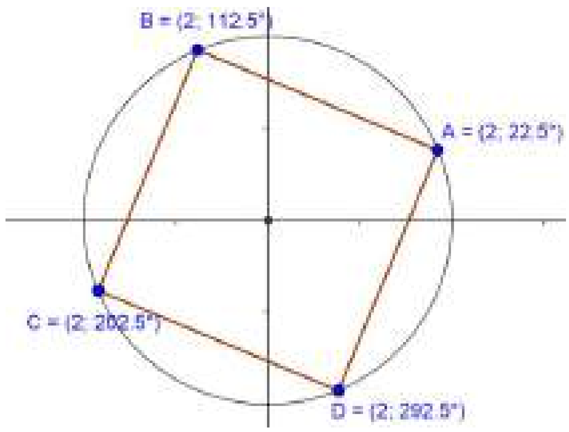
Gráficamente obtenemos los vértices de un triángulo equilátero centrado en el origen de coordenadas.



c) $\sqrt[4]{16i} = \sqrt[4]{16_{90º}} = 2_{\frac{90º + 360º \cdot k}{4}} = 2_{22,5º + 90º \cdot k}$; $con\ k = 0; 1; 2\ y\ 3$.

Las soluciones son: $2_{22,5º}$; $2_{112,5º}$; $2_{202,5º}$ y $2_{292,5º}$

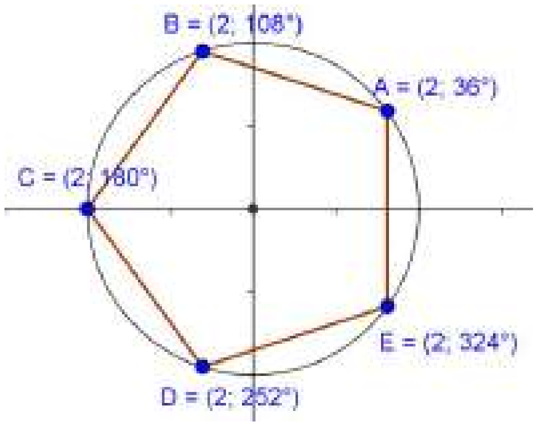
Gráficamente obtenemos los vértices de un cuadrado centrado en el origen de coordenadas.



d) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32_{180º}} = 2_{\frac{180º + 360º \cdot k}{5}} = 2_{22,5º + 90º \cdot k}$; $con\ k = 0; 1; 2; 3\ y\ 4$.

Las soluciones son: $2_{36º}$; $2_{108º}$; $2_{180º}$; $2_{252º}$ y $2_{324º}$

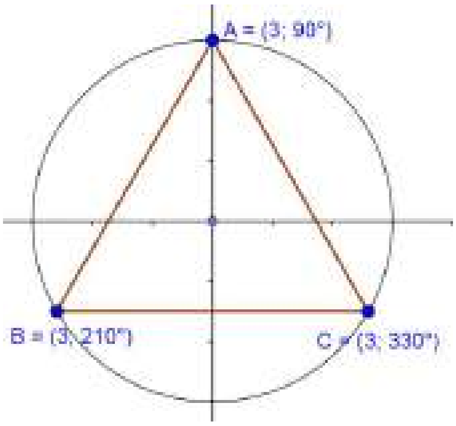
Gráficamente obtenemos los vértices de un pentágono regular centrado en el origen de coordenadas.



e) $\sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270^\circ}} = 3_{\frac{270^\circ + 360^\circ \cdot k}{3}} = 1_{90^\circ + 120^\circ \cdot k}$; *con* $k = 0; 1\ y\ 2$.

Las soluciones son: 3_{90°; 3_{210° y 3_{330°.

Gráficamente obtenemos los vértices de un triángulo equilátero centrado en el origen de coordenadas.



13. Sustituyendo en la ecuación original cada una de las raíces, operamos y obtenemos:

a) $(2 + 3i)^2 - 8 \cdot (2 + 3i) + 13 = (-5 + 12i) - (8 + 12i) + 13 = (-5 - 8 + 13) + (12 - 12)i = 0$

$(2 - 3i)^2 - 8 \cdot (2 - 3i) + 13 = (-5 - 12i) - (8 - 12i) + 13 = (-5 - 8 + 13) + (-12 + 12)i = 0$

b) $(2 + 3i)^3 - 3 \cdot (2 + 3i)^2 + 9 \cdot (2 + 3i) + 13 = (-46 + 9i) - (-15 + 36i) + (18 + 27i) + 13 =$

$= (-46 + 15 + 18 + 13) + (9 - 36 + 27)i = 0$

$(2 - 3i)^3 - 3 \cdot (2 +-3i)^2 + 9 \cdot (2 - 3i) + 13 = (-46 - 9i) - (-15 - 36i) + (18 - 27i) + 13 =$

$= (-46 + 15 + 18 + 13) + (-9 + 36 - 27)i = 0$

14. Toda ecuación de segundo grado se puede construir del siguiente modo a partir de sus soluciones:

$$z^2 - S \cdot z + P = 0$$

siendo S la suma de sus soluciones y P el producto.

a) $\begin{cases} S = i + (-i) = 0 \\ P = i \cdot (-i) = -i^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow z^2 + 1 = 0$

b) $\begin{cases} S = (2 + 2i) + (2 - 2i) = 4 \\ P = (2 + 2i) \cdot (2 - 2i) = 8 \end{cases} \Rightarrow z^2 - 4z + 8 = 0$

c) $\begin{cases} S = (2 + 3i) + (2 - 3i) = 4 \\ P = (2 + 3i) \cdot (2 - 3i) = 13 \end{cases} \Rightarrow z^2 - 4z + 13 = 0$

d) $\begin{cases} 2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ 2_{315^\circ} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) + (\sqrt{2} - \sqrt{2}i) = 2\sqrt{2} \\ P = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{2}i) = 4 \end{cases} \Rightarrow z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

15. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) $z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_0 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

b) $z^3 - 6z^2 + 10z - 8 = 0 \Rightarrow (z-4)\cdot(z^2 - 2z + 2) = 0 \Rightarrow z_0 = 4;\ z_1 = 1 + i \ y\ z_2 = 1 - i$

c) $z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1_{180^\circ}} = 1_{\frac{180^\circ + 360^\circ \cdot k}{4}} = 1_{45^\circ + 90^\circ \cdot k}$ $con\ k = 0; 1; 2\ y\ 3.$

Dando valores a k, obtenemos: $z_0 = 1_{45^\circ}$; $z_1 = 1_{135^\circ}$; $z_2 = 1_{225^\circ}$ y $z_3 = 1_{315^\circ}$.

d) $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (z+1)\cdot(z^4 + z^2 + 1) = 0 \Rightarrow z = -1;\ z^2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \equiv 1_{120^\circ};\ z^2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \equiv 1_{240^\circ}$

Resolviendo las ecuaciones de segundo grado, obtenemos:

$z_0 = 1_{180^\circ}$; $z_1 = 1_{60^\circ}$; $z_2 = 1_{240^\circ}$; $z_3 = 1_{120^\circ}$ y $z_4 = 1_{300^\circ}$.

e) $z^6 - 64 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64_{0^\circ}} = 2_{\frac{0^\circ + 360^\circ \cdot k}{6}} = 2_{60^\circ \cdot k}$ $con\ k = 0; 1; 2; 3; 4\ y\ 5.$

Dando valores a k, obtenemos: $z_0 = 2_{0^\circ}$; $z_1 = 2_{60^\circ}$; $z_2 = 2_{120^\circ}$; $z_3 = 2_{240^\circ}$ y $z_5 = 2_{300^\circ}$.

f) $z^4 + 81 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81_{180^\circ}} = 3_{\frac{180^\circ + 360^\circ \cdot k}{4}} = 3_{45^\circ + 90^\circ \cdot k}$ $con\ k = 0; 1; 2\ y\ 3.$

Dando valores a k, obtenemos: $z_0 = 3_{45^\circ}$; $z_1 = 3_{135^\circ}$; $z_2 = 3_{225^\circ}$ y $z_3 = 3_{315^\circ}$.

16. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) $z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{120^\circ} \\ z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{240^\circ} \end{cases}$

b) $z^2 - \sqrt{12}\, z + 4 = 0 \;\Rightarrow z = \dfrac{\sqrt{12} \pm \sqrt{12-16}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2} = \sqrt{3} \pm i \;\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt{3} + i = 2_{30^\circ} \\ z_2 = \sqrt{3} - i = 2_{330^\circ} \end{cases}$

c) $z^2 + iz + 2 = 0 \;\Rightarrow z = \dfrac{-i \pm \sqrt{i^2 - 8}}{2} = \dfrac{-i \pm \sqrt{-9}}{2} = \dfrac{-i \pm 3i}{2} \;\Rightarrow \begin{cases} z_1 = i = 1_{90^\circ} \\ z_2 = -2i = 2_{270^\circ} \end{cases}$

d) $z^6 - 28z^3 + 27 = 0 \;\Rightarrow z^3 = \dfrac{28 \pm \sqrt{784-108}}{2} = \dfrac{28 \pm 26}{2} = \begin{cases} z_1^3 = 27 \\ z_2^3 = 1 \end{cases}$

Para cada una de las soluciones anteriores:

- $z^3 = 27 \;\Rightarrow\; z = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{27_{0^\circ}} = 3_{120^\circ \cdot k} \;\Rightarrow\; z_0 = 3_{0^\circ};\; z_1 = 3_{120^\circ} \;\; y \;\; z_2 = 3_{240^\circ}$
- $z^3 = 1 \;\Rightarrow\; z = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1_{0^\circ}} = 1_{120^\circ \cdot k} \;\Rightarrow\; z_0 = 1_{0^\circ};\; z_1 = 1_{120^\circ} \;\; y \;\; z_2 = 1_{240^\circ}$

e) $z^3 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1_{180^\circ}} = 3_{\frac{180^\circ + 360^\circ \cdot k}{3}} = 1_{60^\circ + 120^\circ \cdot k} \;\Rightarrow\; z_0 = 1_{60^\circ};\; z_1 = 1_{180^\circ} \;\; y \;\; z_2 = 1_{300^\circ}$

f) $z^3 - 64i = 0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[3]{64i} = \sqrt[3]{64_{90^\circ}} = 4_{\frac{90^\circ + 360^\circ \cdot k}{3}} = 4_{30^\circ + 120^\circ \cdot k} \;\Rightarrow\; z_0 = 4_{30^\circ};\; z_1 = 4_{150^\circ} \;\; y \;\; z_2 = 4_{270^\circ}$

17. Las demostraciones quedan:

- $(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^2 = (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) + (2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha)\, i = \cos 2\alpha + i \operatorname{sen} 2\alpha \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha \\ sen\, 2\alpha = 2\, sen\,\alpha \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

- $(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^4 = (\cos^4\alpha + \operatorname{sen}^4\alpha - 6\cos^2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2\alpha) + (4 \operatorname{sen}\alpha \cos^3\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha \cdot \cos\alpha)\, i =$

$$= \cos 4\alpha + i\, sen\, 4\alpha \;\Rightarrow \begin{cases} \cos 4\alpha = \cos^4\alpha + sen^4\alpha - 6\cos^2\alpha \cdot sen^2\alpha \\ sen\, 4\alpha = 4\, sen\,\alpha \cdot \cos^3\alpha - 4\, sen^3\alpha \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

18. Las soluciones de las cuestiones son:

a) $\begin{cases} (a+bi) + (c+di) = 5 - 3i \\ \dfrac{a+bi}{c-di}\ imaginario\ puro \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 5 \\ b + d = -3 \\ bd + 4c = 0 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases} \; o \; \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = -4 \end{cases}$

Los números complejos son: 4 – 4i y 1 + i o bien 4 + i y 1 – 4i.

b) Sea z el número complejo buscado. Se cumple: $\dfrac{1}{z} = -z$

De aquí obtenemos que $z^2 = -1$; $z = \pm i$.

c) Sea z = a + b i $\neq 0$. Se cumple: $z^2 = \bar{z}$.

De aquí obtenemos:

$$(a+bi)^2 = a - bi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos los números complejos:

$$z_1 = 1;\ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i;\ z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

ACTIVIDADES-PÁG. 152

19. Queda:

$$\sqrt[3]{z} = 5i \quad \Rightarrow \quad z = 125 i^3 \quad \Rightarrow \quad z = -125 i$$

Las otras raíces son:

$$\sqrt[3]{-125 i} = \sqrt[3]{125_{270^\circ}} = 5_{90^\circ + 120^\circ k} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z_0 = 5_{90^\circ} = 5i; \quad z_1 = 5_{210^\circ} = \frac{-5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} i: \ z_2 = 5_{330^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} i$$

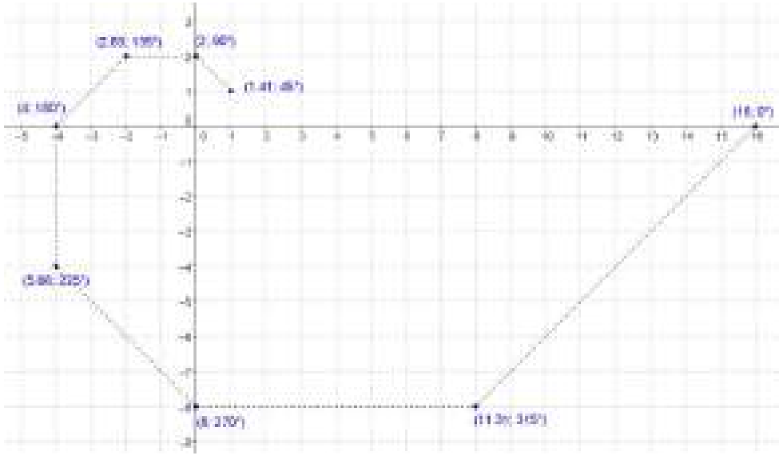
20. a) Las potencias sucesivas son:

$z = 1 + i = (\sqrt{2})_{45^\circ}$ $\quad z^2 = (1+i)^2 = 2i = 2_{90^\circ}$ $\quad z^3 = (1+i)^3 = (2\sqrt{2})_{135^\circ}$

$z^4 = (1+i)^4 = 4_{180^\circ}$ $\quad z^5 = (1+i)^5 = (4\sqrt{2})_{225^\circ}$ $\quad z^6 = (1+i)^6 = 8_{270^\circ}$

$z^7 = (1+i)^7 = (8\sqrt{2})_{315^\circ}$ $\quad z^8 = (1+i)^8 = 16_{360^\circ}$

Los afijos se encuentran en una espiral que se aleja del origen de coordenadas.



b) Las primeras potencias del complejo $u = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i$ son:

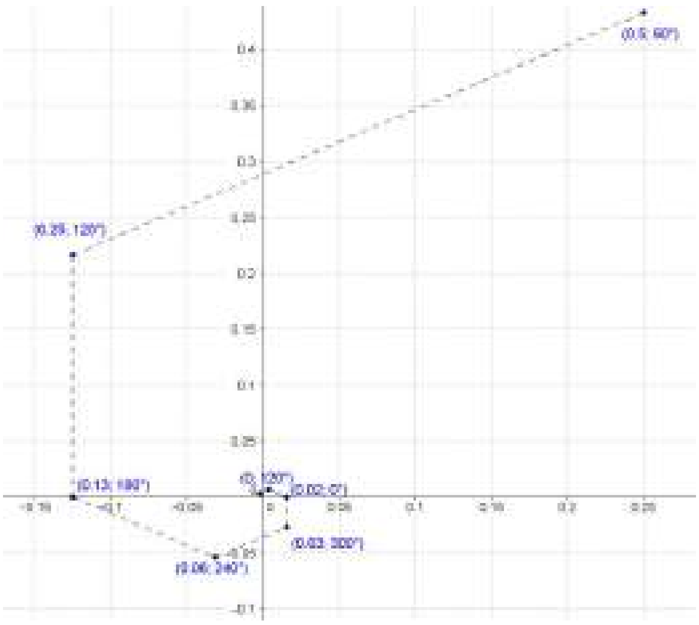
$$u = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i = \left(\frac{1}{2}\right)_{60º} \qquad u^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)_{120º}$$

$$u^3 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right)^3 = \left(\frac{1}{8}\right)_{180º} \qquad u^4 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right)^4 = \left(\frac{1}{16}\right)_{240º}$$

$$u^5 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right)^5 = \left(\frac{1}{32}\right)_{300º} \qquad u^6 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right)^6 = \left(\frac{1}{64}\right)_{360º}$$

$$u^7 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right)^7 = \left(\frac{1}{128}\right)_{420º} \qquad u^8 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right)^{68} = \left(\frac{1}{256}\right)_{480º}$$

Los afijos se encuentran en una espiral que se acerca del origen de coordenadas.



c) Las primeras potencias del complejo $w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ son:

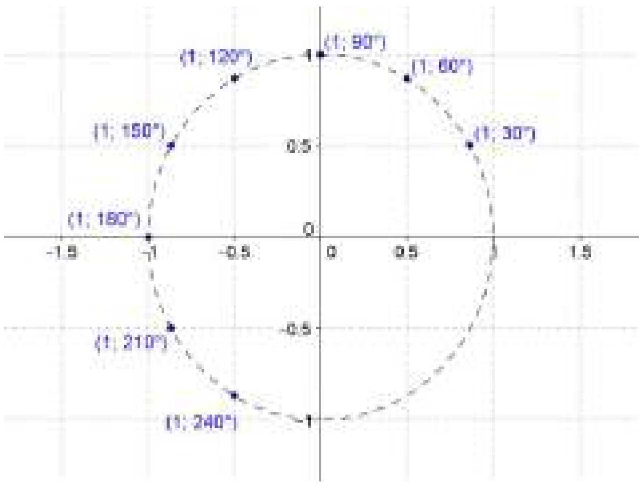
$$w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1_{30^\circ} \qquad w^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 = 1_{60^\circ}$$

$$w^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3 = 1_{90^\circ} \qquad w^4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^4 = 1_{120^\circ}$$

$$w^5 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^5 = 1_{150^\circ} \qquad w^6 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^6 = 1_{180^\circ}$$

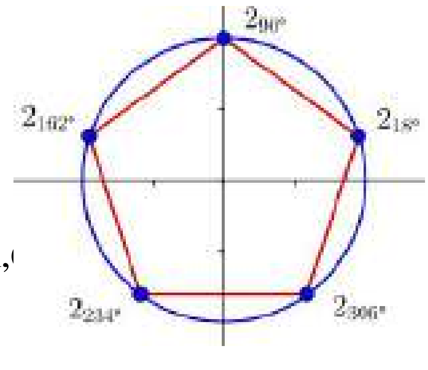
$$w^7 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^7 = 1_{210^\circ} \qquad w^8 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^8 = 1_{240^\circ}$$

Los afijos se encuentran sobre una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio 1.



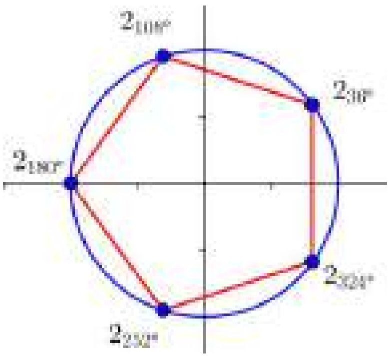
21. Los vértices del primer pentágono regular son:

$$2_{18^\circ};\ 2_{90^\circ};\ 2_{162^\circ};\ 2_{234^\circ};\ 2_{306^\circ}$$



Las coordenadas cartesianas de los vértices son:

$$(1{,}90;\ 0{,}62);\ (0,\ 2);\ (-1{,}90;\ 0{,}62);\ (-1{,}18;\ -1{,}62);\ (1{,}18;\ -1{,}$$



Los vértices del segundo pentágono regular son:

$$2_{36^\circ};\ 2_{108^\circ};\ 2_{180^\circ};\ 2_{252^\circ};\ 2_{324^\circ}$$

Las coordenadas cartesianas de los vértices son:

$$(1{,}62;\ 1{,}18);\ (-0{,}62;\ 1{,}90);\ (-2,\ 0);\ (-0{,}62;\ -1{,}90);\ (1{,}62;\ -1{,}18).$$

22. Los vértices del cuadrado son:

$$2_{90^\circ};\ 2_{180^\circ};\ 2_{270^\circ};\ 2_{0^\circ}.$$

Las coordenadas de los vértices son;

$$(0,\ 2);\ (-\ 2,\ 0);\ (0,\ -\ 2);\ (2,\ 0).$$

23. La solución queda:

● Se obtiene el número complejo girado 90º, es decir, si el número complejo tiene como afijo (a, b) obtenemos, al multiplicar por i, el número complejo de afijo (- b, a).

● Al dividir por el número complejo i, se obtiene el mismo número complejo girado 270º.

$$\frac{a + bi}{i} = b - ai$$. Su afijo es (b, a).

24. Los vértices del cuadrado son: (3, 4); (- 4, 3); (- 3, - 4) y (4, - 3).

25. Quedaría del siguiente modo:

Sea el complejo z = a + b i.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Su\ módulo\ es\ \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{1}{|z|} \\ Su\ \arg umento\ tg\ \alpha = \dfrac{-b}{a}\ (es\ el\ opuesto\ del\ \arg umento\ de\ z) \end{cases}$$

Gráficamente el inverso de z se obtiene por una homotecia de razón $k = \dfrac{1}{|z|}$ y ángulo (- arg z).

26. Los vértices de la figura se obtienen de la siguiente expresión:

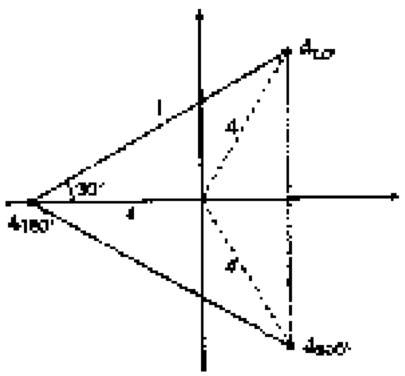
$$\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{64_{180^\circ}} = 4_{\frac{180^\circ + 360^\circ K}{3}} = 4_{60^\circ + 120^\circ K} \quad \Rightarrow \quad 4_{60^\circ};\ 4_{180^\circ};\ 4_{300^\circ}$$

Calculamos el lado L mediante el teorema del coseno:

$L^2 = 4^2 ` + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ \quad \Rightarrow \quad L = 6{,}93$ u.

El perímetro mide $3 \cdot L = 20{,}78$ u.

El área es $A = \dfrac{L \cdot \dfrac{L \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} L^2 = 20{,}78$ u².

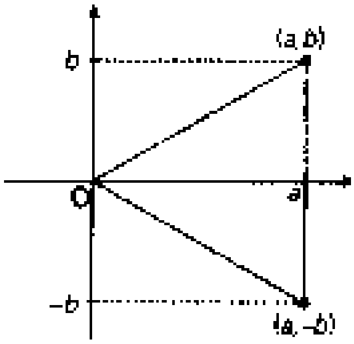


27. La solución queda:

$$z^4 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4_{180^\circ}} = \sqrt{2}_{\frac{180^\circ + 360^\circ K}{4}} = \sqrt{2}_{45^\circ + 90^\circ K}$$

Los vértices son: $\sqrt{2}_{45^\circ} = 1 + i$; $\quad \sqrt{2}_{135^\circ} = -1 + i$; $\quad \sqrt{2}_{225^\circ} = -1 - i$; $\quad \sqrt{2}_{315^\circ} = 1 - i$

28. Sean los complejo (a + b i) y (a – b i). El triángulo que se forma es el de la figura.



Para que sea equilátero se debe cumplir que $\sqrt{a^2 + b^2} = 2b$.

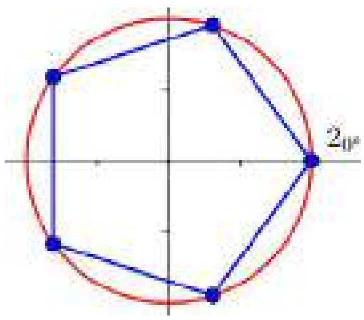
Para que su área sea $2\sqrt{3}$ se debe cumplir $\frac{2b \cdot a}{2} = 2\sqrt{3}$.

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 2b \\ ab = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 3b^2 \\ ab = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{6} \\ b = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Los complejos son: $\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\,i\right)\ y\ \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\,i\right)\quad o\quad \left(-\sqrt{6} - \sqrt{2}\,i\right)\ y\ \left(-\sqrt{6} + \sqrt{2}\,i\right)$.

29. a) Calculamos el lado L del pentágono mediante el teorema del coseno:



$L^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 72^\circ \quad \Rightarrow \quad L = 2{,}35$ u.

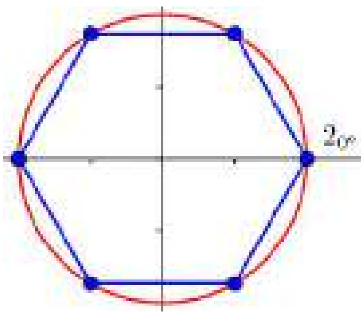
El perímetro mide 5 · L = 11,76 u.

Calculamos la apotema:

$$\cos 36^\circ = \frac{ap}{2} \quad \Rightarrow \quad ap = 2 \cdot \cos 36^\circ = 1{,}62\ u.$$

El área es $A = \dfrac{11{,}76 \cdot 1{,}62}{2} = 9{,}53\ u^2$

b) Calculamos el lado L del hexágono mediante el teorema del coseno:



$L^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ \quad \Rightarrow \quad L = 2$ u.

El perímetro mide 6 · L = 12 u.

Calculamos la apotema:

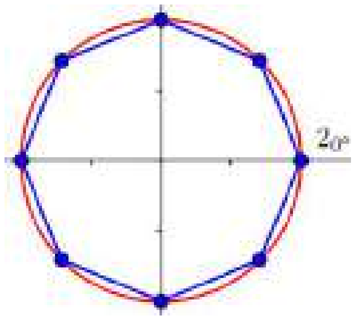
$$\cos 30º = \frac{ap}{2} \quad \Rightarrow \quad ap = 2 \cdot \cos 30º = 1{,}73\ u.$$

El área es $A = \dfrac{12 \cdot 1{,}73}{2} = 10{,}38\ u^2$

c) Calculamos el lado L del octógono mediante el teorema del coseno:

$$L^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 45º \quad \Rightarrow \quad L = 1{,}53 \text{ u.}$$

El perímetro mide 8 · L = 12,25 u.



Calculamos la apotema:

$$\cos 22{,}5º = \frac{ap}{2} \quad \Rightarrow \quad ap = 2 \cdot \cos 22{,}5º = 1{,}85\ u.$$

El área es $A = \dfrac{12{,}24 \cdot 1{,}85}{2} = 11{,}32\ u^2$

ACTIVIDADES-PÁG. 153

a) Las soluciones de la ecuación $z^7 = 1$ son:

$$z^7 = 1 \Rightarrow z = \sqrt[7]{1_0} \Rightarrow z = 1_{\frac{0+2k\pi}{7}} \ \ con\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\ y\ 6$$

Las siete soluciones son: $z_0 = 1_0,\ z_1 = 1_{\frac{2\pi}{7}},\ z_2 = 1_{\frac{4\pi}{7}},\ z_3 = 1_{\frac{6\pi}{7}},\ z_4 = 1_{\frac{8\pi}{7}},\ z_5 = 1_{\frac{10\pi}{7}},\ z_6 = 1_{\frac{12\pi}{7}}$.

b) Hallamos las raíces del polinomio $z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 1$, es decir, las soluciones de la ecuación $z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 1 = 0$.

Las soluciones son:

$$z = \frac{2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \pm \sqrt{4\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) - 4}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \pm i\,sen\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\ sen\left(\frac{2\pi}{7}\right) = 1_{\frac{2\pi}{7}} = z_1 \\ \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - i\ sen\left(\frac{2\pi}{7}\right) = 1_{\frac{12\pi}{7}} = z_6 \end{cases}$$

Observamos que coinciden con las soluciones z_1 y z_6 de la ecuación $z^7 = 1$.

Los otros factores cuadráticos con coeficientes reales son:

$(z - z_2) \cdot (z - z_5) = z^2 - (z_2 + z_5)\, z + z_2 \cdot z_5 = z^2 - 2z\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + 1$

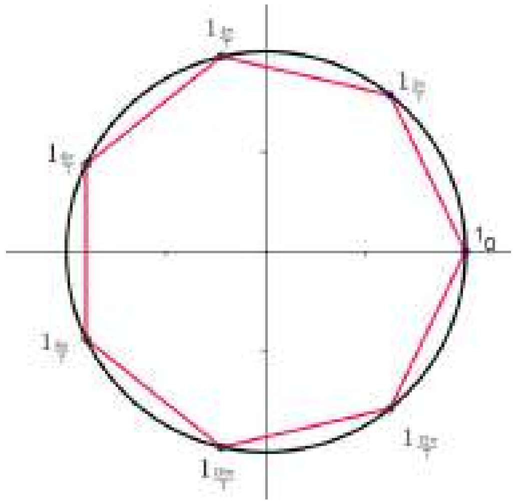
$(z - z_3) \cdot (z - z_4) = z^2 - (z_3 + z_3)\, z + z_3 \cdot z_4 = z^2 - 2z\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + 1$

c) La factorización buscada es:

$$P_7(z) = z^7 - 1 = (z-1)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 1\right)\cdot \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + 1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + 1\right)$$

Las siete raíces del polinomio $P_7(z) = z^7 - 1$ están situadas sobre la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio unidad, y son los vértices de un heptágono regular.

Todo lo anterior puede verse en el dibujo.



d) Las factorizaciones de los polinomios $P_n(z) = z^n - 1$ con n impar son:

$P_3(z) = z^3 - 1 = (z-1)\cdot(z^2 + z + 1)$

$$P_5(z) = z^5 - 1 = (z-1)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1\right)$$

$$P_7(z) = z^7 - 1 = (z-1)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + 1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + 1\right)$$

…

$$P_n(z) = z^n - 1 = (z-1)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + 1\right)\cdot \ldots \cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) + 1\right)$$

Las factorizaciones de los polinomios $P_n(z) = z^n - 1$ con n par son:

$P_2(z) = z^2 - 1 = (z-1)\cdot(z+1)$

$P_4(z) = z^4 - 1 = (z-1)\cdot(z+1)\cdot(z^2+1)$

$$P_6(z) = z^6 - 1 = (z-1)\cdot(z+1)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 1\right)$$

$$P_8(z) = z^8 - 1 = (z-1)\cdot(z+1)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1\right)\cdot(z^2+1)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 1\right)$$

…

$$P_n(z) = z^n - 1 = (z-1)\cdot(z+1)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{(n-2)\pi}{n}\right)+1\right)$$

e) Las factorizaciones de los polinomios $Q_n(z) = z^n + 1$ con n impar son:

$$Q_3(z) = z^3 + 1 = (z+1)\cdot(z^2 - z + 1)$$

$$Q_5(z) = z^5 + 1 = (z+1)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)+1\right)$$

$$Q_7(z) = z^7 + 1 = (z+1)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)+1\right)$$

…

$$Q_n(z) = z^n + 1 = (z+1)\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+1\right)\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+1\right)\ldots\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{(n-2)\pi}{n}\right)+1\right)$$

Las factorizaciones de los polinomios $Q_n(z) = z^n + 1$ con n par son:

$$Q_2(z) = z^2 + 1$$

$$Q_4(z) = z^4 + 1 = \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+1\right)$$

$$Q_6(z) = z^6 + 1 = \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right)+1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+1\right)$$

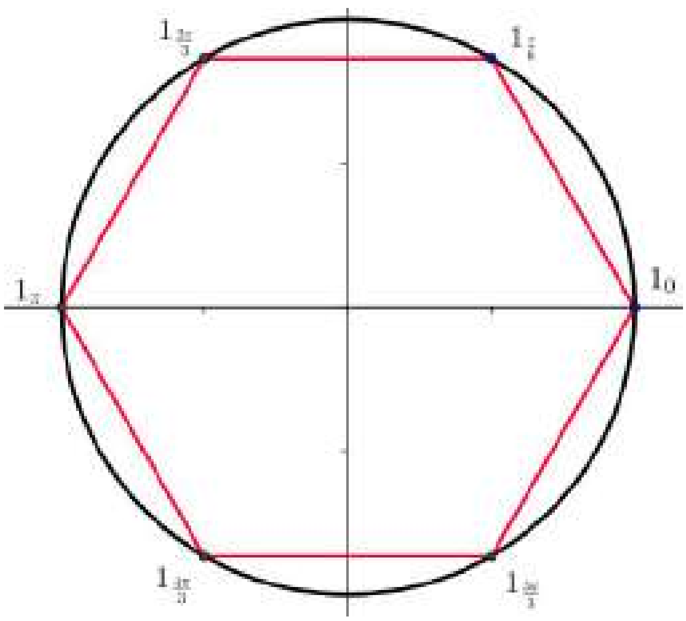
$$Q_8(z) = z^8 + 1 = \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)+1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)+1\right)\cdot$$
$$\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)+1\right)$$

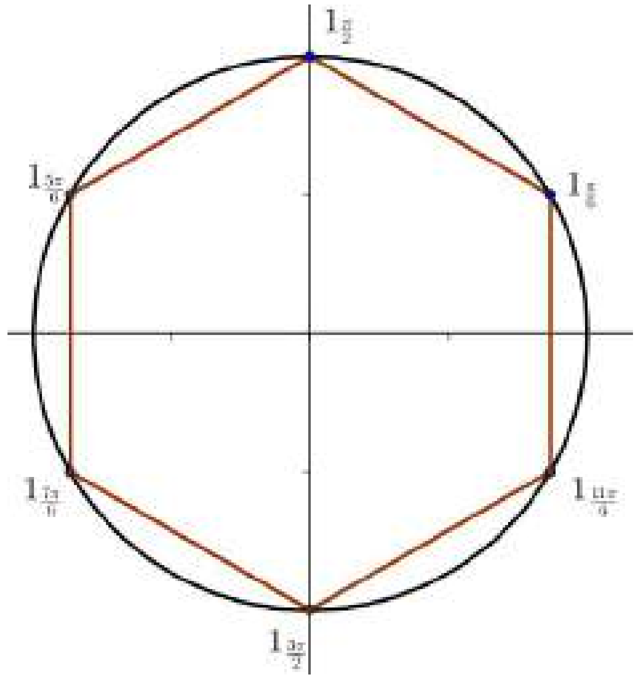
…

$$Q_n(z) = z^n + 1 = \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{3\pi}{n}\right)+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)+1\right)$$

f) Las raíces de los polinomios $P_n(z) = z^n - 1$ y $Q_n = z^n + 1$ están situadas sobre la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio unidad, y son los vértices de polígonos regulares.

En los dibujos pueden verse las raíces de los polinomios $P_6 = z^6 - 1$ y $Q_6 = z^6 + 1$, respectivamente.





UNIDAD 7: Geometría analítica en el plano

ACTIVIDADES-PÁG. 154

1. El valor de a es $a = -\frac{1}{5}$.

2. Las ecuaciones de las rectas son:

a) x + y – 7 = 0

b) x – y + 3 = 0

3. El baricentro de un triángulo de vértices A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) y C (x_3, y_3) tiene de coordenadas:

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

En nuestro caso queda $G = \left(-\frac{2}{3}, \frac{13}{3} \right)$.

4. Calculemos las longitudes de los lados del triángulo:

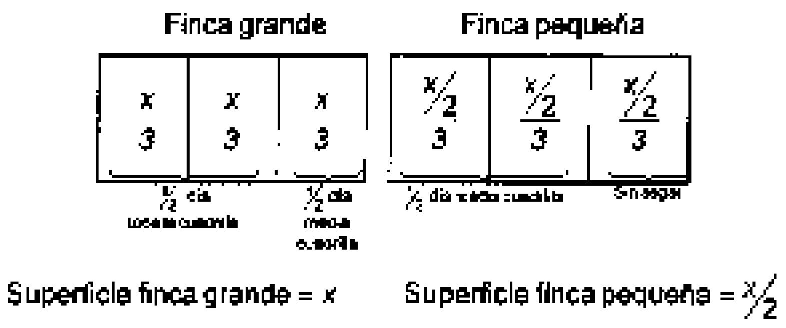
$$d\,(P,\,Q) = \sqrt{32} = 4\,\sqrt{2} \qquad d\,(P,\,R) = 6 \qquad d\,(Q,\,R) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

El perímetro mide:

$$Perímetro = 4\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{5} \approx 16{,}13\ u.\ l.$$

ACTIVIDADES-PÁG. 169

1. Podemos resolver el problema mediante ecuaciones, pero es un camino muy complicado. Intentaremos representar la situación:



Las condiciones del problema nos muestran que si toda la cuadrilla trabajó durante la mitad del día en la finca grande y sólo la mitad de la cuadrilla el otro medio día. Entonces la mitad de la cuadrilla vendimió la tercera parte de la finca grande en medio día, es decir, $x/3$. Luego en la finca pequeña durante media día vendimiaron el equivalente a la finca grande, es decir, $x/3 = 2x/6$, luego quedó sin vendimiar $x/6$ de la finca pequeña que la vendimió un trabajador al día siguiente.

Si un trabajador vendimia $x/6$ en un día y se vendimiaron el campo grande $3x/3$ más el pequeño $(3x/6 - x/6)$ todos los trabajadores en 1 día, entonces el primer día se hicieron:

$$\frac{3x}{3} + \left(\frac{3x}{6} - \frac{x}{6}\right) = \frac{6x}{6} + \frac{2x}{6} = \frac{8x}{6} = 8 \cdot \left(\frac{x}{6}\right)$$

Es decir, en la cuadrilla había 8 vendimiadores.

2. Hay que ver que $x^2 - 1 = \dot{12}$.

$$x^2 = (x-1)\cdot(x+1) \quad \Rightarrow \quad Al\ ser\ x\ primo > 3 \quad \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \dot{3}\ y\ x+1 = \dot{4} \\ \qquad o \\ x-1 = \dot{4}\ y\ x+1 = \dot{3} \end{cases}$$

En ambos casos, $x^2 - 1 = \dot{3} \cdot \dot{4} = \dot{12}$.

3. Hacemos el siguiente diagrama:

Páginas numeradas	1 - 9	10 - 99	100 - 999	1000 - 1025
Dígitos usados	9	180	2700	100
Total dígitos	9	180 + 9	180 + 9 + 2700 = 2889	2889 + 100

En total hacen falta: 2889 + 100 = 2989 dígitos.

100 dígitos son 25 páginas, entonces hacen falta 999 + 25 = 1024 páginas.

El libro tiene 1024 páginas.

4. Por medio de ensayo y error dirigido se obtiene:

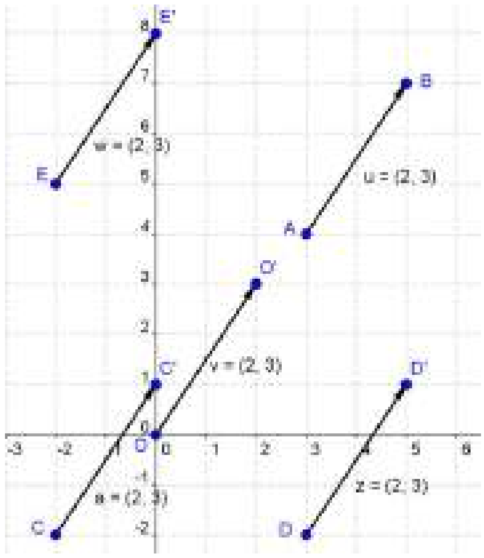
- Con la información referida a los Reyes (R) y las Damas (D) llegamos a que puede ser RDD o DRD.

- Con la información referida a los Corazones (C) y las Picas (P) llegamos a que puede ser PCP o PPC.

Juntamos los resultados obtenidos y llegamos a que la solución es: Rey de Picas – Dama de Picas – Dama de Corazones.

ACTIVIDADES-PÁG. 171

1. Procedemos como en el apartado de vectores en el plano y operaciones entre ellos y obtenemos:

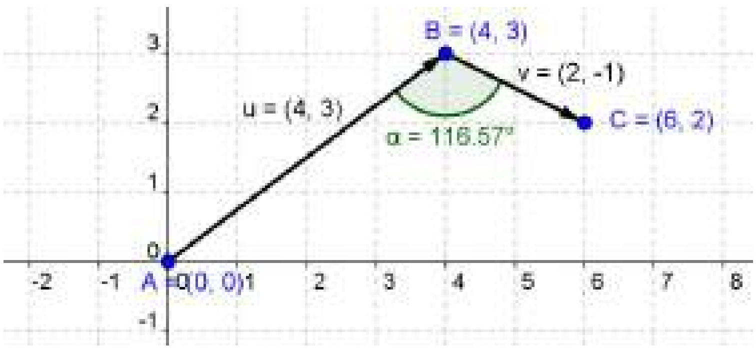


2. Seguimos los pasos:

a) Repite los primeros apartados de la construcción de vectores.

b) Con la herramienta Ángulo, dibuja el ángulo entre los dos vectores.

c) Arrastra el punto B o el punto C y observa cómo varía el valor del ángulo.

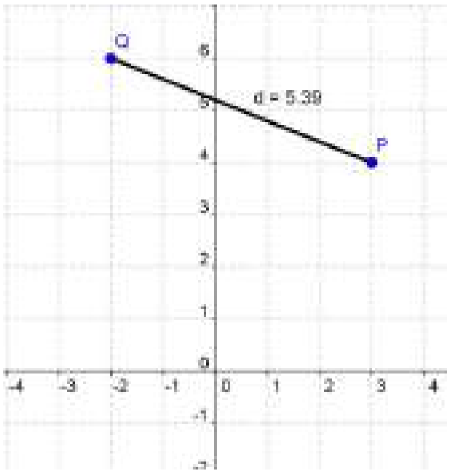


3. i) Los pasos a seguir son:

a) En el Campo de Entrada introduce los puntos P = (3, 4) y Q = (-2, 6).

b) Dibuja el segmento PQ y muestra su valor. También puede dibujarse el vector de extremos P y Q y determinar su longitud.

c) Arrastra el punto P o el punto Q y observa cómo cambia el valor de la distancia.



ii) Seguimos los pasos indicados:

a) En el Campo de Entrada introduce la recta r ≡ 3x + 4y = 12.

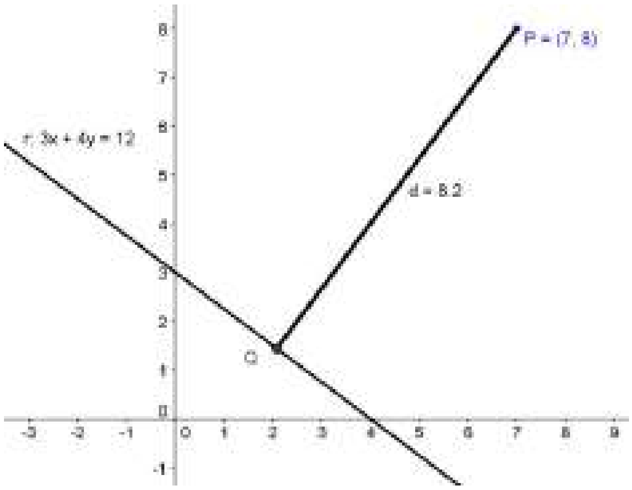
b) Arrastra el origen de coordenadas para dejarlo como aparece en el dibujo.

c) En el Campo de Entrada, introduce el punto P = (7, 8) y muestra su valor.

d) Dibuja una recta perpendicular desde P a r. Halla el punto Q, intersección de las dos rectas.

e) Oculta la recta perpendicular. Dibuja el segmento PQ y muestra su valor.

f) Arrastra el punto P o haz doble-clic en la Ventana Algebraica sobre la recta, y modifícala y observa cómo cambia el valor de la distancia.



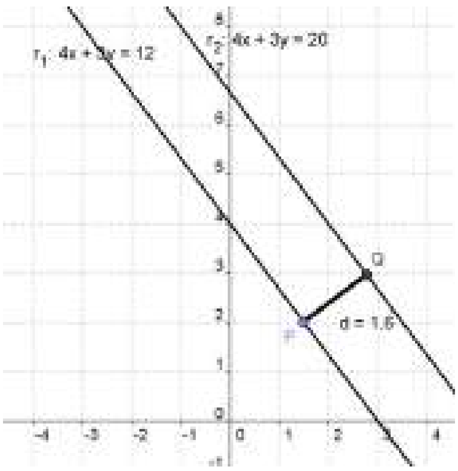
iii) Realizamos las etapas que siguen:

a) En el Campo de Entrada introduce las rectas r1: 4x + 3y = 12 y
r2: 4x + 3y = 20.

b) Dibuja un punto P sobre la recta r1. Traza la perpendicular por P a la recta r2. Halla el punto Q, intersección de las dos rectas.

c) Oculta la recta perpendicular. Dibuja el segmento PQ y muestra su valor.

d) Arrastra cualquiera de la rectas, el punto P o haz doble-clic en la Ventana Algebraica sobre la rectas, y modifícalas y observa cómo cambia el valor de la distancia.



ACTIVIDADES-PÁG. 172

1. a) El extremo del vector es el punto de coordenadas (8, 4).

b) El origen del vector es el punto de coordenadas (4, - 8).

2. Las soluciones de los diferentes apartados son:

a) $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{26}$; $\left|\vec{w}\right|=5$; $\left|\vec{u}\right|=13$

b) $\cos\left(\vec{v},\vec{w}\right)=\dfrac{17}{5\sqrt{26}}$; $\cos\left(\vec{v},\vec{u}\right)=\dfrac{65}{13\sqrt{26}}=\dfrac{5}{\sqrt{26}}$; $\cos\left(\vec{w},\vec{u}\right)=\dfrac{33}{65}$

c) $\left(\vec{v},\vec{w}\right)=48^{\circ}\ 10'\ 47''$ $\left(\vec{v},\vec{u}\right)=11^{\circ}\ 18'\ 36''$ $\left(\vec{w},\vec{u}\right)=59^{\circ}\ 29'\ 23''$

d) $\vec{v}+\vec{w}+\vec{u}=(3,\ 21)$

e) $3\ \vec{v}=3\cdot(1,5)=(3,15)$.

f) Un vector normal a $\vec{w}=(-3,\ 4)$ *es* $\vec{n}\ (\ 4,\ 3)$.

3. La solución de cada apartado es:

a) $\vec{v}\cdot\vec{w}=\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|\cdot\cos\left(\vec{v},\vec{w}\right)=4\cdot 6\cdot\cos 45^{\circ}=12\sqrt{2}=16{,}97$

b) $\vec{v}\cdot\vec{w}=\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|\cdot\cos\left(\vec{v},\vec{w}\right)=3\cdot 3\cdot\cos 60^{\circ}=\dfrac{9}{2}=4{,}5$

c) $\vec{v}\cdot\vec{w}=(3,-4)\cdot(-12,-5)=-16$

d) $\vec{v}\cdot\vec{w}=(-3,\ 4)\cdot(15,-20)=-125$

4. Existen tres soluciones que son los puntos D_1 (2, 4); D_2 (- 4, - 2) y D_3 (4, 0).

5. Hay dos valores posibles: $x_1 = -3$ con $y_1 = 9$ y $x_2 = -3$ con $y_2 = -9$.

6. Las soluciones son los vectores unitarios $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

7. La demostración aparece a continuación:

Como $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son unitarios, entonces $\left|\vec{v}\right| = \left|\vec{w}\right| = 1$.

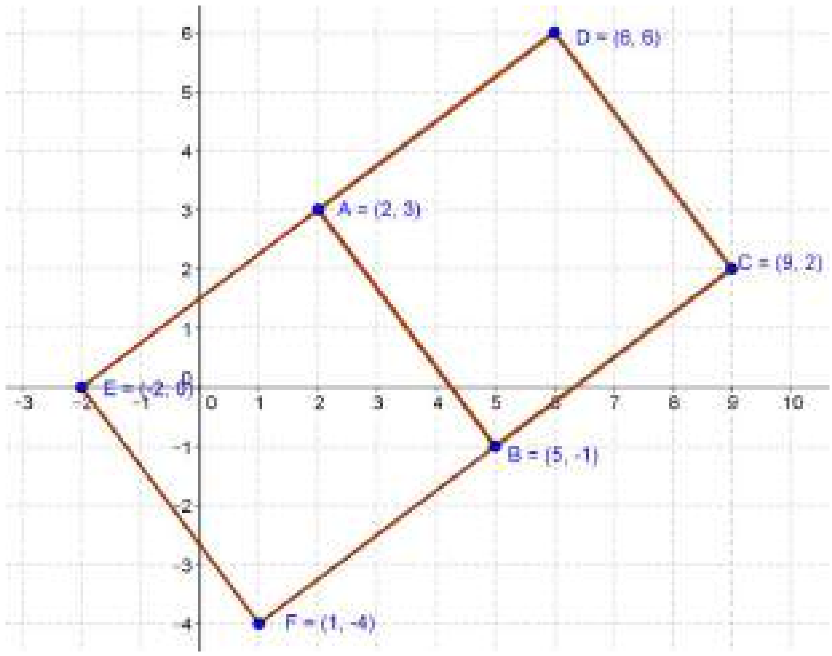
Calculemos el producto escalar de $(\vec{v} + \vec{w})$ por $(\vec{v} - \vec{w})$:

$$(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \left(\vec{v} - \vec{w}\right) = \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{w} \cdot \vec{w} = \left|\vec{v}\right|^2 - \left|w\right|^2 = 0.$$

Al ser su producto escalar nulo, podemos decir que son ortogonales.

8. El vector que une los vértices A y B es $\overrightarrow{v_{AB}} = (3, -4)$.

Mediante los vectores perpendiculares y paralelos al vector $\overrightarrow{v_{AB}} = (3, -4)$ obtenemos las dos soluciones del problema como se observa en el dibujo.



Cualquiera de los dos cuadrados tiene de lado 5 unidades y de área 25 uc

9. Las ecuaciones de las rectas aparecen en la tabla:

	Ecuación Vectorial	Ecuaciones paramétricas	Ecuación continua	Ecuación general	Ecuación explícita
a)	(x, y) = (4, - 2) + t (- 1, 3)	$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$	$\frac{x-4}{-1} = \frac{y+2}{3}$	3x + y - 10= 0	y = - 3x + 10
b)	$\vec{u} = (4, 6)$ (x, y) = (- 2, - 5) + t (4, 6)	$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -5 + 6t \end{cases}$	$\frac{x+2}{4} = \frac{y+5}{6}$	3x - 2y – 4 = 0	$y = \frac{3}{2}x - 2$
c)	$\vec{u} = (1, 3)$ (x, y) = (- 3, 4) + t (1, 3)	$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$	$\frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{3}$	3x - y + 13 = 0	y = 3x + 13
d)	(x, y) = (0, 0) + t (1, 1)	$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$	$\frac{x}{1} = \frac{y}{1}$	x -+ y = 0	y = x
e)	$\vec{u} = (2, 0)$ (x, y) = (1, - 3) + t (2, 0)	$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 \end{cases}$	$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0}$	y + 3 = 0	y = - 3

10. Dos puntos de esa recta son P (0, 4) y Q (4, -2). Un vector director pude ser $\vec{v_1} = (4, -6)$ o $\vec{v_2} = (2, -3)$.

Con estos datos obtenemos las ecuaciones:

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 4) + t \cdot (2, -3)$ Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x}{2} = \frac{y-4}{-3}$ Ecuación explícita: $y = -\frac{3}{2}x + 4$

11. Las ecuaciones de las rectas pedidas son:

- Eje OX: Pasa por el punto (0, 0) y uno de sus vectores directores es $\vec{v} = (1, 0)$.
  La ecuación será: y = 0.

- Eje OY: Pasa por el punto (0, 0) y uno de sus vectores directores es $\vec{v} = (0, 1)$.
  La ecuación será: x = 0.

● Bisectriz 1er y 3er cuadrante: Pasa por el punto (0, 0) y forma un ángulo de 45º con el eje OX, es decir: m = tg 45º = 1.

La ecuación será: y = x.

● Bisectriz 2º y 3º cuadrante: Pasa por el punto (0, 0) y forma un ángulo de 135º con el eje OX, es decir: m = tg 135º = - 1.

La ecuación será: y = - x.

12. La posición relativa de los pares de rectas es:

a) Secantes b) Coincidentes c) Paralelas

ACTIVIDADES-PÁG. 173

13. Los vectores directores y normales son, respectivamente:

a) $\vec{u} = (-3,\ 4)\ \ y\ \ \vec{n} = (4,\ 3)$

b) $\vec{u} = (1,\ 4)\ \ y\ \ \vec{n} = (4,\ -1)$

c) $\vec{u} = (-1,\ 3)\ \ y\ \ \vec{n} = (3,\ 1)$

d) $\vec{u} = (1,\ -1)\ \ y\ \ \vec{n} = (1,\ 1)$

14. Los ángulos de las rectas son:

a) 0º b) 81º 52´ 12´´ c) 90º

15. Los valores del parámetro a en cada caso son:

a) a = 4 b) $a = \frac{2}{3}$ c) $a = -\frac{3}{2}$

16. El perímetro del rectángulo mide 30 unidades lineales.

17. La distancia del punto A (3, 2) a la recta r : 5x - 12y - 4 = 0 es:

$$d\ (A,\ r) = \frac{|5 \cdot 3 - 12 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{13}{13} = 1\ unidad\ \ lineal.$$

18. La longitud del lado del cuadrado es la distancia que separa a las rectas paralelas r: 4x + 3y - 5 = 0 y s: 8x + 6y + 7 = 0.

Esta longitud es la distancia entre el punto P (2, - 1) perteneciente a la recta r, y la recta s:

$$d\left(P,\ s\right)=\frac{\left|8\cdot 2+6\cdot(-1)+7\right|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{17}{10}=1{,}7\,.$$

El área del cuadrado es $1{,}7^2 = 2{,}89$ unidades cuadradas.

19. Las rectas pedidas son:

a) Paralela: $7x - 2y = 0$ Perpendicular: $2x + 7y = 0$

b) Paralela: $3x + y + 1 = 0$ Perpendicular: $x - 3y + 7 = 0$

c) Paralela: $5x + 2y - 23 = 0$ Perpendicular: $2x - 5y + 14 = 0$

20. El punto de intersección es (-2, 3). La recta es $x - y + 5 = 0$.

21. El valor de m en cada uno de los apartados es:

a) El valor de las pendientes de las rectas es $m_1=\frac{-3}{-5}$ y $m_2=\frac{-6}{m}$. Si son paralelas las pendientes deben coincidir:

$$m_1=m_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{-3}{-5}=\frac{-6}{m} \quad\Rightarrow\quad m=-10.$$

b) El valor de las pendientes de las rectas es $m_1=\frac{-3}{-5}$ y $m_2=\frac{-6}{m}$. Si son perpendiculares sus pendientes cumplen $m_1 \cdot m_2 = -1$:

$$m_1\cdot m_2=-1 \quad\Rightarrow\quad \frac{-3}{-5}\cdot\frac{-6}{m}=-1 \quad\Rightarrow\quad m=\frac{18}{5}.$$

c) No existe ningún valor de m para que sean coincidentes.

d) Si el punto P (6, 5) pertenece a la recta $6x + my = 1$, se cumplirá: $36 + 5m = 1$, es decir, $m = -7$.

22. La recta mediatriz es $5x - 4y + 9 = 0$.

23. El punto es P (3, -4).

24. El punto de la recta que equidista de los dos del enunciado es (0, 4).

25. El punto proyección es (0, - 2).

26. El punto de la recta $2x + 3y - 13 = 0$ más cercano al origen de coordenadas es (2, 3).

ACTIVIDADES-PÁG. 174

27. a) La ecuación de la recta que pasa por los vértices A (- 3, 2) y B (1, 6) es:

$$\frac{y-2}{6-2}=\frac{x+3}{1+3} \Rightarrow y-2=x+3 \Rightarrow y=x+5 \Rightarrow x-y+5=0$$

La mediatriz del lado AB pasa por su punto medio M (- 1, 4) y es perpendicular al lado AB. Su ecuación es:

$$y-4=-(x+1) \Rightarrow y=-x+3 \Rightarrow x+y-3=0.$$

b) La mediana desde C es la recta que pasa por C (4, - 3) y M (- 1, 4). Su ecuación es:

$$\frac{y+3}{4+3}=\frac{x-4}{-1-4} \Rightarrow y+3=-\frac{7}{5}(x-4) \Rightarrow 7x+5y-13=0.$$

c) La altura desde el vértice C (4, - 3) pasa por este punto y es perpendicular a la recta AB. Su ecuación es:

$$y+3=-(x-4) \Rightarrow y=-x+1 \Rightarrow x+y-1=0.$$

El punto, P, de corte de la altura con el lado AB es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x-y=-5 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow P\,(-2,\ 3).$$

28. La solución queda:

a) El simétrico del punto B (2, 5) respecto del origen de coordenadas es B´ (- 2, - 5).

b) El simétrico del punto A (4, - 1) respecto de la recta x + 2y – 7 = 0 es A´ (6, 3).

29. Las respuestas son:

a) Todas las rectas paralelas a la dada tiene por ecuación 3x + 4y + K = 0. Basándonos en esto, calcularemos el valor de K que cumpla las condiciones dadas.

Tomamos un punto de la recta 3x + 4y – 1 = 0, por ejemplo P (- 1, 1), entonces:

$$\frac{|3\cdot(-1)+4\cdot 1+K|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3 \Rightarrow \frac{|K+1|}{5}=3 \Rightarrow |K+1|=15 \Rightarrow \begin{cases} K=14 \\ K=16 \end{cases}$$

Hay dos rectas paralelas que disten 3 unidades de la dada y son las rectas de ecuaciones:

$$3x+4y+14=0 \qquad\qquad 3x+4y-16=0$$

b) Todas las rectas perpendiculares a la dada tiene por ecuación 4x - 3y + K = 0. Si distan 6 unidades del origen de coordenadas, se cumplirá:

$$\frac{|4\cdot(0)-3\cdot 0+K|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=6 \quad\Rightarrow\quad \frac{|K|}{5}=6 \quad\Rightarrow\quad |K|=30 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} K=30 \\ K=-30 \end{cases}$$

Hay dos rectas perpendiculares que disten 36unidades del origen de coordenadas y son las rectas de ecuaciones:

4x - 3y + 30 = 0 4x - 3y – 30 = 0

30. El vértice C es el punto C (4, 8) y el área del triángulo isósceles es 13 unidades cuadradas.

31. Las coordenadas de los puntos notables son: ortocentro $\left(-2, -\frac{10}{3}\right)$, circuncentro $\left(4, \frac{14}{3}\right)$ y baricentro (2, 2).

Puede comprobarse que los puntos anteriores están sobre la recta de Euler, de ecuación 4x – 3y – 2 = 0.

32. Los vértices A y C son los puntos A (0, 7) y C (8, - 1).

33. El vértice C por pertenecer a la recta es C (a, - 3 – a).

$$Área=\frac{base\cdot altura}{2} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} base=d\ (A.,\ B)=\sqrt{5} \\ altura=d\ (C,\ r_{AB})=\left|\frac{a-8}{\sqrt{5}}\right| \end{cases}$$

Operando:

$$6=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\left|\frac{a-8}{\sqrt{5}}\right| \quad\Rightarrow\quad |a-8|=12 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a=20 \ \Rightarrow\ C\ (20,-23) \\ a=-4 \ \Rightarrow\ C\ (-4,1) \end{cases}$$

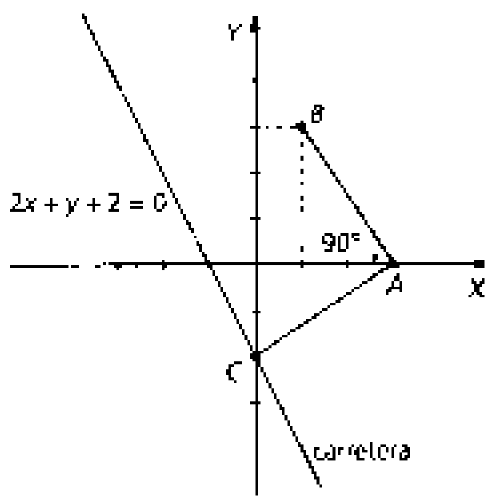
34. La solución queda:

El punto C, por pertenecer a la recta, será de la forma C (a, - 2a – 2).

A la vista del dibujo se debe cumplir:

$$\overrightarrow{V_{AB}}\cdot\overrightarrow{V_{AC}}=0 \quad\Rightarrow\quad (a-3,\,-2a-2)\cdot(-2,\,3)=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad a=0 \quad\Rightarrow\quad C\ (0,-2).$$



35. Los vértices del paralelogramo buscado son: A (4, 6); el punto B es el punto en el cual se corta la recta y = 5x + 2 y la paralela a x + 3y + 10 = 0, pasando por A (4, 6).

Es decir:

$$\begin{cases} y = 5x + 2 \\ x + 3y - 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow B\ (1,\ 7)$$

$$\begin{cases} y = 5x + 2 \\ x + 3y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\ (-1,\ -3)$$

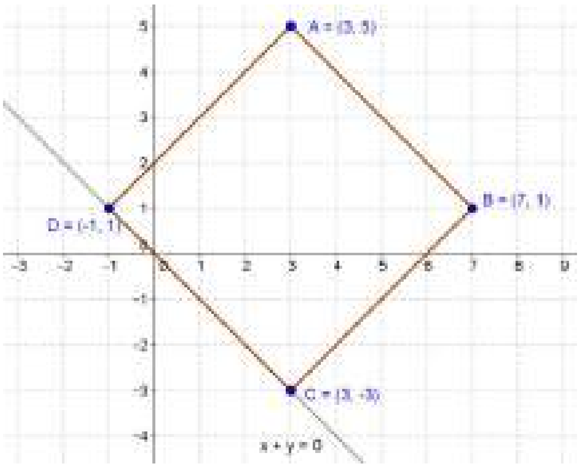
$$\begin{cases} y = 5x - 14 \\ x + 3y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(2,\ 4)$$

El área vale 32 unidades cuadradas.

36. El vértice C está en la intersección de la recta perpendicular a AB por B y la bisectriz del 4º cuadrante.

$\overrightarrow{V_{AB}} = (4,\ -4) \quad \Rightarrow$ la recta perpendicular tiene por vector $\vec{w} = (4, 4)$ y pasa por B (7, 1) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x-7}{4} = \frac{y-1}{4} \quad \Rightarrow \quad x - y - 6 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\ (3,\ -3).$$



El vector $\overrightarrow{V_{BC}} = (-4,\ -4)$ es paralelo e igual a $\overrightarrow{V_{AD}}$, luego D (- 1, 1)

Área del rectángulo = base · altura = d (B, C) · d (A, B) =

$$= \sqrt{4^2 + 4^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 32\ u^2.$$

37. La ecuación de la recta que pasa por los puntos M (0, 4) y N (3, 0) es:

$$\frac{y-0}{4-0} = \frac{x-3}{0-3} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{4}{3}(x-3) \quad \Rightarrow \quad 4x + 3y - 12 = 0$$

Como el lugar de la estación, punto P, está a la misma distancia de M y de N, este punto estará en la mediatriz del segmento de extremos M y N. La ecuación de la mediatriz es la recta perpendicular a la recta que pasa por A y por B, que pasa por el punto medio del segmento de extremos M y N, $Q\left(\frac{3}{2},\ 2\right)$:

$$y-2=\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{8}$$

Sea $P\left(a, \frac{3}{4}a-\frac{7}{8}\right)$ un punto cualquiera de la mediatriz, su distancia al punto Q será 10 km. Imponiendo esta condición obtenemos:

$$d\ (P, Q)=10 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}a-\frac{7}{8}-2\right)^2}=10$$

Elevamos al cuadrado y operando, obtenemos la ecuación $100a^2 - 468a - 5727 = 0$. Las soluciones son:

a = 10,26 y a = - 5,58.

Con las soluciones anteriores obtenemos dos posibles ubicaciones de la estación de distribución:

P_1 (10,26; 6,82) y P_2 (- 5,58; - 5,06).

ACTIVIDADES-PÁG. 175

Existe una amplísima bibliografía sobre la relación entre matemáticas y arte. Ofrecemos algunos textos significativos.

CORBALÁN, Fernando. (2010) *La proporción áurea. El lenguaje matemático de la belleza.* RBA. Barcelona.

FERNÁNDEZ, I. y REYES, M. A. (2006) *Geometría con el hexágono y el octógono.* Proyecto Sur. Granada.

LIVIO, Mario. (2006) *La proporción áurea. La historia de phi, el número más sorprendente del mundo.* Ariel. Barcelona.

MARTÍN CASALDERREY, F. (2010) *La burla de los sentidos. El arte visto con ojos matemáticos.* RBA. Barcelona.

MEAVILLA SEGUÍ, V. (2007) *Las matemáticas del arte. Inspiración ma(r)temática.* Almuzara. Córdoba.

VV. AA. (2005) *Geometría en los Reales Alcázares de Sevilla.* Junta de Andalucía. Sevilla.

VV. AA. (2009) *La proporción: arte y matemáticas.* Graó. Barcelona.

VV. AA. (2009) *Matemáticas en la catedral de Burgos.* Caja Círculo. Burgos.

UNIDAD 8: Lugares geométricos. Cónicas

ACTIVIDADES-PÁG. 176

1. El lugar geométrico es la mediatriz de ecuación x – 5y + 3 = 0.

2. El circuncentro es el punto de corte de las mediatrices.

Hallamos dos mediatrices:

Mediatriz del lado BC: x – 2y + 2 = 0
Mediatriz del lado AB: x - 2 = 0

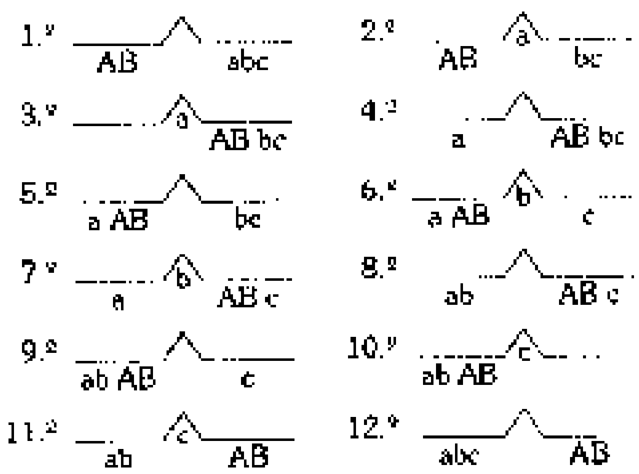
El circuncentro es el punto (2, 2).

3. Si se corta por un plano paralelo a la base se obtiene una circunferencia. Si el corte es por un plano oblicuo se obtiene una elipse. La orbita de la Tierra en torno al Sol es elíptica.

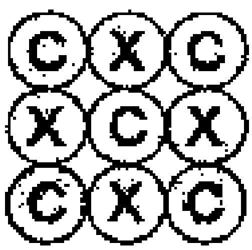
4. El vértice de la parábola es el punto (- 3, 1).

ACTIVIDADES-PÁG. 193

1. Los pasos a seguir son los siguientes, llamando AB a los montañeros que suben y abc a los que bajan.



2. Señalamos las monedas con C y X.



Consideramos el caso que sólo tengamos 9 monedas. En este caso hay 5 caras, C, y 4 cruces, X.

Si la abeja parte de una moneda marcada con C, puede hacer el recorrido: CXCXCXCXC

Pero si parte de una moneda marcada con X, no puede: XCXCXC…falta una C.

En nuestro caso hay 13 caras C y 13 cruces X. Si la abeja parte de una moneda marcada con C, es posible el recorrido, pero si la abeja parte de una moneda marcada con X no es posible.

3. La solución queda:

Sea el número $\overline{xyz}$ el número inicial. Se cumplirá:

$$(100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 100(x - z) + (z - x)$$

Si $x > z$, entonces $z - x < 0$ y hay que escribir la expresión anterior de la forma:

$$(x - z - 1) \cdot 100 + 100 + (z - x) = (x - z - 1) \cdot 100 + 9 \cdot 10 + (10 + z - x)$$

La primera cifra de este número es: $x - z - 1$.

La segunda cifra de este número es: 9.

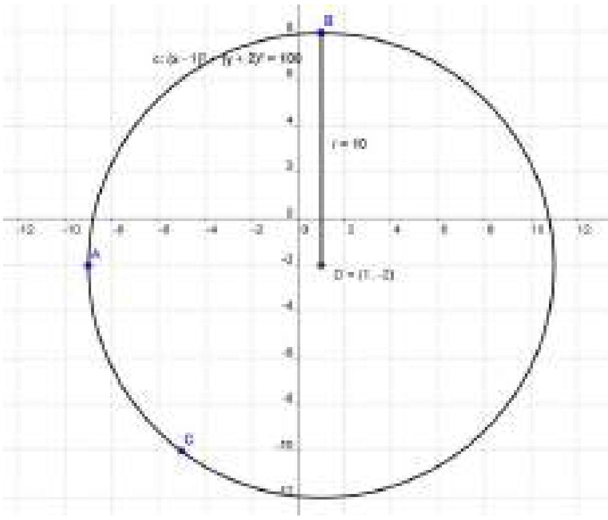
La tercera cifra de este número es: $10 + z - x$.

Observamos que $(x - z + 1) + (10 + z - x) = 0$, es decir, la primera cifra más la tercera siempre da 9 y la segunda también da 9. Luego siempre se cumple el resultado del problema.

ACTIVIDADES-PÁG. 195

1. a) Sigue los pasos:

a) En el Campo de Entrada introduce los puntos A= (- 9, - 2); B= (1, 8) y C = (- 5, - 10)



b) Con Circunferencia dados Tres de sus Puntos, dibuja la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C.

c) Con la herramienta Mediatriz determina el centro como intersección de la mediatriz de los segmentos de extremos AB y AC.

d) Dibuja el radio DB con Segmento entre Dos Puntos y llámalo r.

e) En el Menú Contextual de los objetos, elige Propiedades; en la ficha Básico escoge Muestra Rótulo:Nombre & valor.

f) Arrastra el punto A, B o C y observa cómo va cambiando la circunferencia y sus elementos. Todo ello queda reflejado en la Ventana Algebraica.

b) Sigue los pasos:

a) Introduce el punto C (3, 2) y la recta a: $x - 2y = 5$.

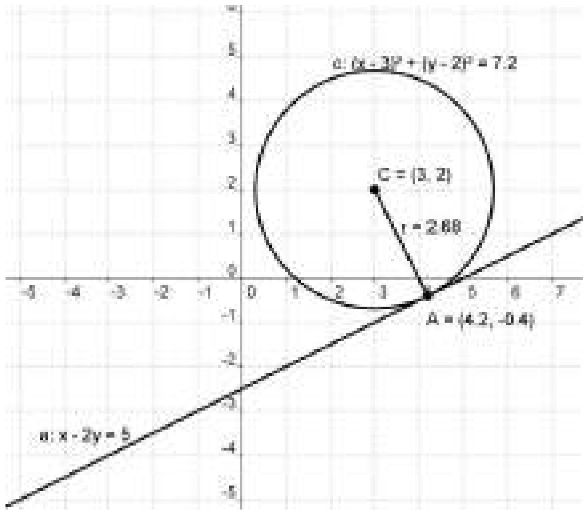
b) Traza la perpendicular a la recta a que pasa por C y determinamos el punto A como intersección de la recta dada y la perpendicular anterior.

c) Con Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos, dibuja la circunferencia de centro el punto C y que pasa por el punto A.

d) Dibuja el radio CA con Segmento entre Dos Puntos y llámalo r.

e) En el Menú Contextual de los objetos, elige Propiedades; en la ficha Básico escoge Muestra Rótulo:Nombre & valor.

f) Arrastra el punto C y observa cómo va cambiando la circunferencia y sus elementos. Todo ello queda reflejado en la Ventana Algebraica.

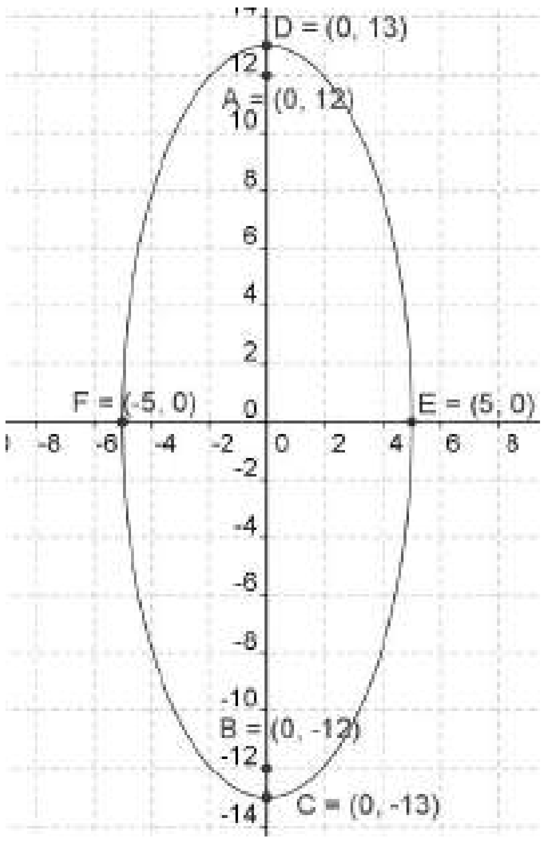


2. a) Sigue los pasos:

a) En el Campo de Entrada introduce la ecuación de la elipse, tecleando x^2/25+y^2/169=1.

b) Con los comandos Foco[c] y Vértice[c], dibuja los elementos correspondientes. Obtendrás como focos los puntos A (0, 12) y B (0, -12) y como vértices los puntos C (0, -13); D (0, 13); E (5 , 0) y F (-5, 0).

c) En el Menú Contextual de todos los objetos, elige Propiedades; en la ficha Básico escoge Muestra Rótulo:Nombre & valor.

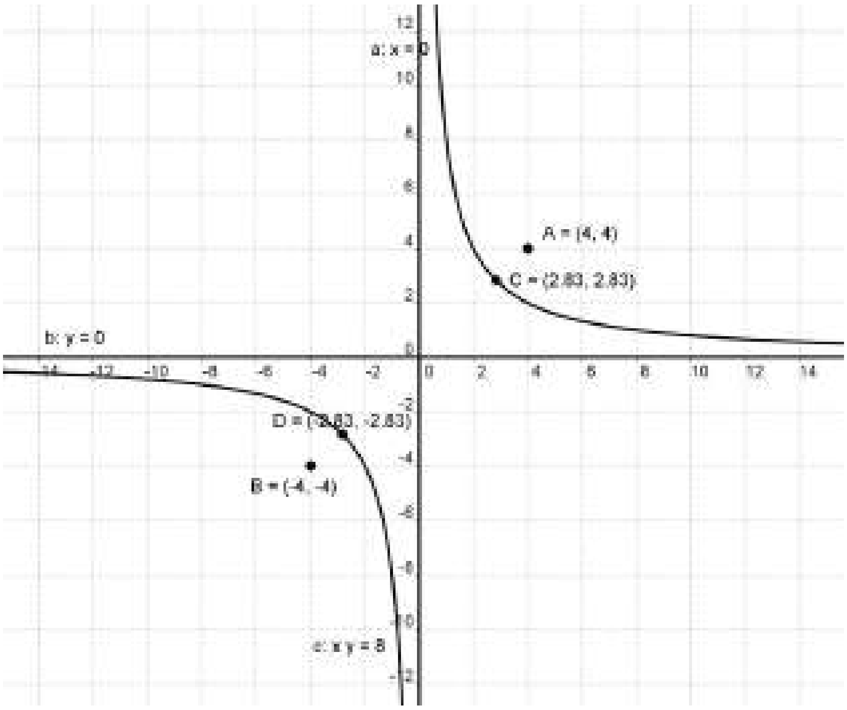


b) Sigue los pasos:

a) En el Campo de Entrada introduce la ecuación de la hipérbola, tecleando x*y=8.

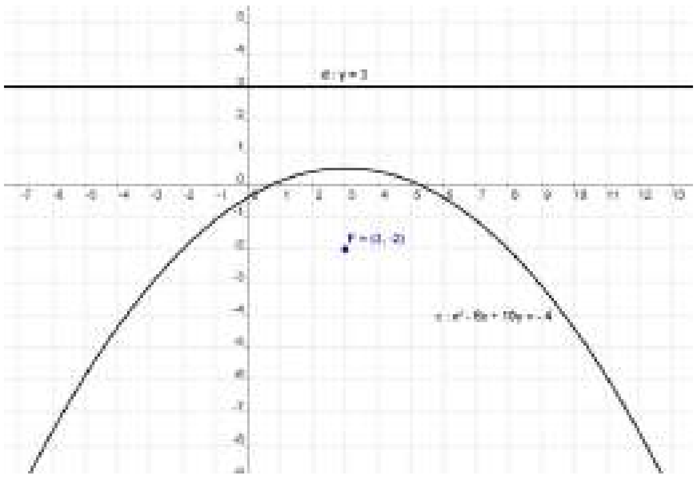
b) Con los comandos Foco[c], Vértice[c] y Asíntota[c], dibuja los elementos correspondientes. Obtendrás como focos los puntos A (4, 4) y B (- 4, - 4); como vértices los puntos C (2,83; 2,83) y D (- 2,83; - 2,83) y como asíntotas las rectas a : x = 0 y b : y = 0.

c) En el Menú Contextual de todos los objetos, elige Propiedades; en la ficha Básico escoge Muestra Rótulo:Nombre & valor.



3. a) Sigue los pasos:

a) Introduce el punto F (3, - 2) y la recta d: y = 3.



b) Con Parábola, dibuja la parábola de foco F (3, - 2) y directriz y = 3.

c) En el *Menú Contextual* de los objetos, elige Propiedades; en la ficha Básico escoge Muestra Rótulo:Nombre & valor.

d) *Arrastra* el punto F y observa cómo va cambiando la gráfica y la ecuación de la parábola. También puedes mover la recta directriz. Todo ello queda reflejado en la Ventana Algebraica.

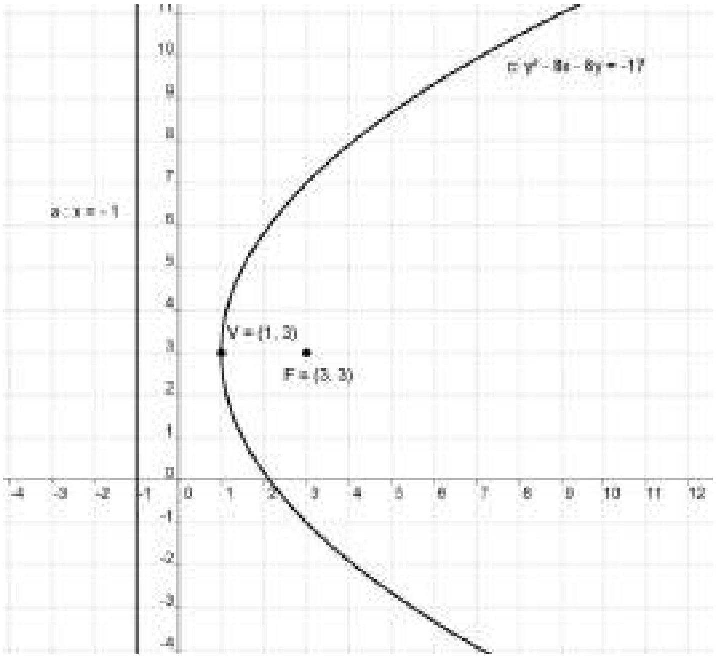
b) Sigue los pasos:

a) Introduce los puntos F=(3,3) y A=(-1,3), siendo V (1, 3) el punto medio de FA. Dibuja el punto V con la herramienta Punto Medio.

b) Dibuja una recta que pase por A y F. Traza la recta perpendicular a la recta anterior pasando por A. Ésta es la directriz de la parábola. Con Parábola, dibuja la parábola de foco F (3, 3) y directriz la recta perpendicular.

c) En el *Menú Contextual* de los objetos, elige Propiedades; en la ficha Básico escoge Muestra Rótulo:Nombre & valor.

d) *Arrastra* el punto F y observa cómo va cambiando la gráfica y la ecuación de la parábola. También puedes mover el punto V. Todo ello queda reflejado en la Ventana Algebraica.



ACTIVIDADES-PÁG. 196

1. Sea P (x, y) un punto genérico del lugar geométrico buscado. Dicho punto debe cumplir que la suma de los cuadrados de sus distancias a A y a B deben ser 12 unidades: d^2 (P, A) + d^2 (P, B) = 12.

Expresando las distancias: $(x-4)^2 + y^2 + x^2 + (y+3)^2 = 12$.

Operando, obtenemos la expresión $2x^2 + 2y^2 - 8x + 6y + 13 = 0$.

2. Sea P (x, y) un punto genérico del lugar geométrico buscado. Dicho punto debe cumplir que sus distancias a A y a B deben coincidir: d (P, A) = d (P, B).

Expresando las distancias: $\sqrt{(x-6)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}$.

Elevando ambos miembros al cuadrado y operando obtenemos: x – 2y – 2 = 0, que es la ecuación del lugar geométrico buscado.

Podíamos haber hecho el problema viendo que esta definición de lugar geométrico se ajusta a la mediatriz del segmento AB

3. En este caso el lugar geométrico son las bisectrices de las rectas dadas:

$$x - \left(1 + \sqrt{2}\right)y - 2\sqrt{2} = 0 \text{ y } x - \left(1 - \sqrt{2}\right)y + 2\sqrt{2} = 0.$$

4. La ecuación del lugar geométrico es $(x + 2)^2 + (y – 2)^2 = 8^2$ o $x^2 + y^2 + 4x – 4y – 56 = 0$.

5. En la tabla aparecen los resultados pedidos.

Apartado	Centro	Radio	Ecuación
a)	(4, 5)	6	$(x – 4)^2 + (y – 5)^2 = 6^2$
b)	(7, 1)	5	$(x – 7)^2 + (y – 1)^2 = 5^2$
c)	(1, - 4)	13	$(x – 1)^2 + (y + 4)^2 = 13^2$
d)	(1, 4)	2	$(x – 1)^2 + (y – 4)^2 = 2^2$
e)	(- 2, 4)	8	$(x + 2)^2 + (y – 4)^2 = 64$
f)	(5, 2)	$\sqrt{68}$	$(x – 5)^2 + (y – 2)^2 = 68$

6. Las respuestas son:

a) El centro es el punto C (- 3, 4) y el radio vale 4.

b) La ecuación es $(x + 3)^2 + (y – 4)^2 = 1$

7. La tangente en el punto P (4, 0) es la recta 4x + 3y = 16.

La tangente en el punto Q (- 4, - 6), diametralmente opuesto al punto A, es la recta 4x + 3y = - 34.

8. La ecuación de la circunferencia es $(x – 3)^2 + (y – 5)^2 = 4^2$.

La ecuación de la recta tangente es 5x – 12y + 97 = 0.

9. La circunferencia tangente a los ejes coordenados tendrá por centro C (a, - a) y su radio valdrá $|a|$ unidades. Como ha de pasar por el punto P dado, podemos escribir:

$$d(C,\ P) = radio = \sqrt{(a + 6)^2 + (-a - 4)^2} = a$$

Operando obtenemos dos circunferencias:

$C_1 \equiv$ centro (-3,07; 3,07) y radio 3,07 cuya ecuación es: $(x + 3{,}07)^2 + (y - 3{,}07)^2 = 3{,}07^2$.

$C_2 \equiv$ centro (- 16,93; 16,93) y radio 16,93, cuya ecuación es: $(x + 16{,}93)^2 + (y - 16{,}93)^2 = 16{,}93^2$.

10. Las soluciones son:

a) El eje radical es la recta x = 0.

b) La potencia pedida es 52.

11. Los resultados son:

a) La distancia del centro C (- 3, 1) a la recta 8x + 6y + 19 = 0 es:

$$d = \frac{|8 \cdot (-3) + 6 \cdot 1 + 19|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{1}{10} < 2 = radio$$

Por tanto, la recta r es secante.

b) La distancia del centro C (- 3, 1) a la recta 4x - 3y + 15 = 0 es:

$$d = \frac{|4 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 + 15|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{0}{5} = 0 < 2 = radio$$

Por tanto, la recta s es secante.

12. Los resultados aparecen en la tabla:

Apartado	Focos	Semiejes	Excentricidad
a)	F ´ (- 6, 0) F (6, 0)	a= 10, b = 8	e = 0,6
b)	F ´ (- 18,76; 0) F (18,76; 0)	a= 20, b = 6,93	e = 0,94
c)	F ´ (- 24, 0) F (24, 0)	a= 25, b = 7	e = 0,96
d)	F ´ (- 2,83; 0) F (2,83; 0)	a= 3, b = 1	e = 0,94

13. Los puntos de corte de la elipse de abscisa x = 2 son P (2; 4,33) y Q (2; - 4,33).

La tangente en P es la recta 0,72x + y = 5,77 y la normal tiene por ecuación 1,39x – y = - 1,55.

La tangente en Q es la recta 0,72x - y = 5,77 y la normal tiene por ecuación 1,39x + y = - 1,55.

ACTIVIDADES-PÁG. 197

14. Las ecuaciones pedidas son:

a) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ c) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

b) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$ d) $\frac{x^2}{676}+\frac{y^2}{576}=1$

15. Se obtiene la elipse de ecuación reducida $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$.

Tiene los focos en los puntos F ´ (- 12, 0) y F (12, 0). Sus semiejes son a = 13 y b = 5; y su excentricidad vale e = 0,92.

16. La ecuación reducida de la elipse es: $\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{256}=1$.

La recta tangente a la elipse en el punto P (10, 8 $\sqrt{3}$) es $4\sqrt{3}\,x+15y=160\sqrt{3}$.

La recta tangente en el punto Q $(10\sqrt{2},8\sqrt{2})$ es $4x+5y=80\sqrt{2}$

17. Los resultados aparecen en la tabla:

Apartado	Focos	Semiejes	Excentricidad	Asíntotas
a)	F ´ (- 10, 0) F (10, 0)	a = 8, b = 6	e = 1,25	$y=\pm\,0{,}75x$
b)	F ´ (- 13, 0) F (13, 0)	a = 5, b = 12	e = 2,6	$y=\pm\,2{,}4x$
c)	F ´ (- 15, 0) F (15, 0)	a = 12, b = 9	e = 1,25	$y=\pm\,0{,}75x$
d)	F ´ (- 10, 0) F (10, 0)	a = 6, b = 8	e = 1,67	$y=\pm\,1{,}33x$

18. La ecuación de esta hipérbola corresponde a una hipérbola equilátera referida a sus asíntotas.

Su asíntotas son: y = 0 y x = 0. Sus ejes son: y = x e y = - x.

Para determinar sus focos:

$\frac{a^2}{2}=25 \;\Rightarrow\; a^2=50 \;\Rightarrow a=5\sqrt{2} \;\Rightarrow c=10$ sus focos son: $(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$ y $(-5\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$.

19. La ecuación reducida es $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

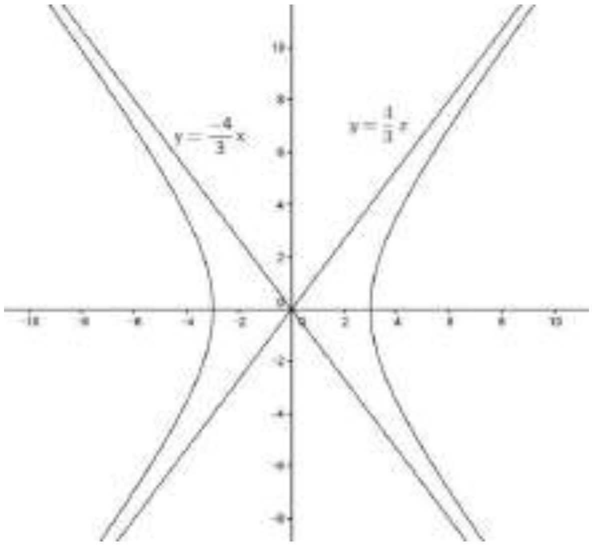
Sus vértices son los puntos A ´ (- 3, 0) y A (3, 0).

Los focos son los puntos F ´ (- 5, 0) y F (5, 0).

Las asíntotas son las rectas: $y = \frac{4}{3}x$ e $y = -\frac{4}{3}x$.

La ecuación de la recta tangente en el punto $P\left(-\frac{3\sqrt{5}}{2},\ 2\right)$ es $4\sqrt{5}x + 3y = -24$.

La gráfica es:



20. Las ecuaciones reducidas son:

a) $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{49} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{81}{16}} = 1$

c) $\frac{x^2}{10{,}97} - \frac{y^2}{14{,}03} = 1$ d) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$

21. Es la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = 1$.

22. Las ecuaciones de las parábolas son:

a) $(y - 5)^2 = 8\,(x - 1)$ c) $(y + 3)^2 = -20\,(x + 2)$

b) $(x + 2)^2 = 16\,(y - 1)$ d) $(x + 3)^2 = -4\,(y + 2)$

23. No existe ninguna parábola de eje paralelo a OY que verifique esas condiciones.
Si fuera la ecuación de una parábola de eje paralelo a OX sería: $x = ay^2 + by + c$.

Imponiendo que pasa por los puntos (6, 0), (12, -1) y (6, 2), obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} c = 6 \\ a - b + c = 12 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 6 \end{cases}$$

La ecuación es $x = 2y^2 - 4y + 6$.

24. Los elementos de la parábola son:

Eje: x = - 2. Directriz: y = 5,25

Foco: F (-2; 4,75) Vértice: V (- 2, 5).

25. Los puntos de corte son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 4 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P\ (4, -4) \\ Q\ (1, -1) \end{cases}$$

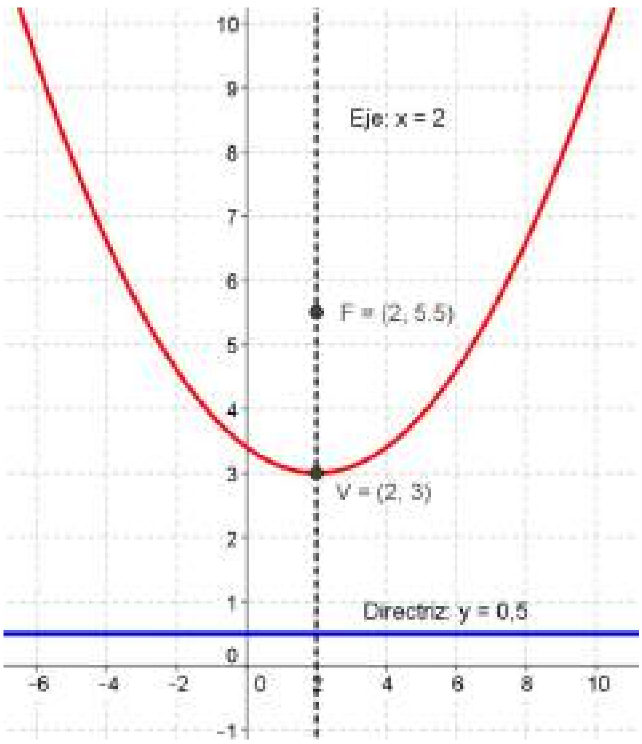
La tangente en el punto P (4, - 4) es la recta 2x – y = 12.

La tangente en el punto Q (1, - 1) es la recta 4x + y = 3.

ACTIVIDADES-PÁG. 198

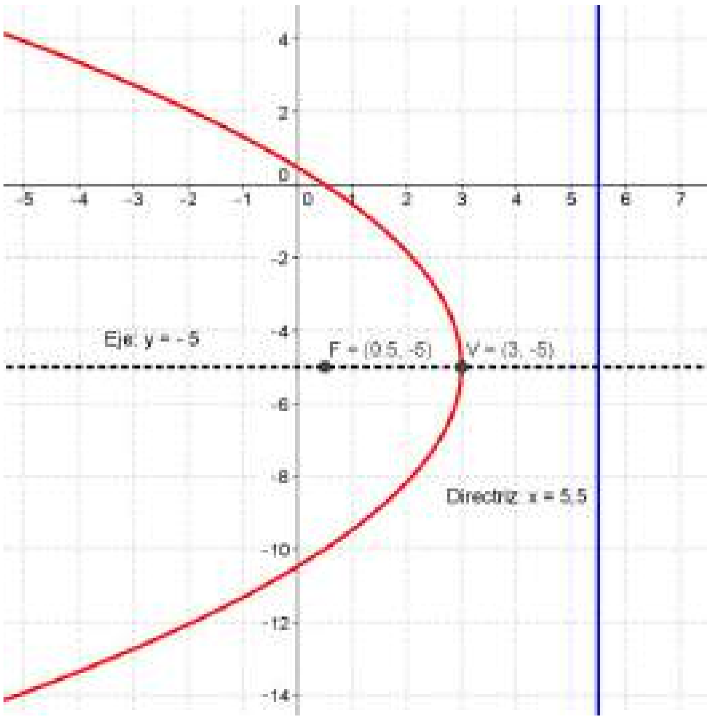
26. a) Los elementos son:

Eje: x = 2 Directriz: y = 0,5 Vértice: V (2, 3) Foco: F (2; 5,5)



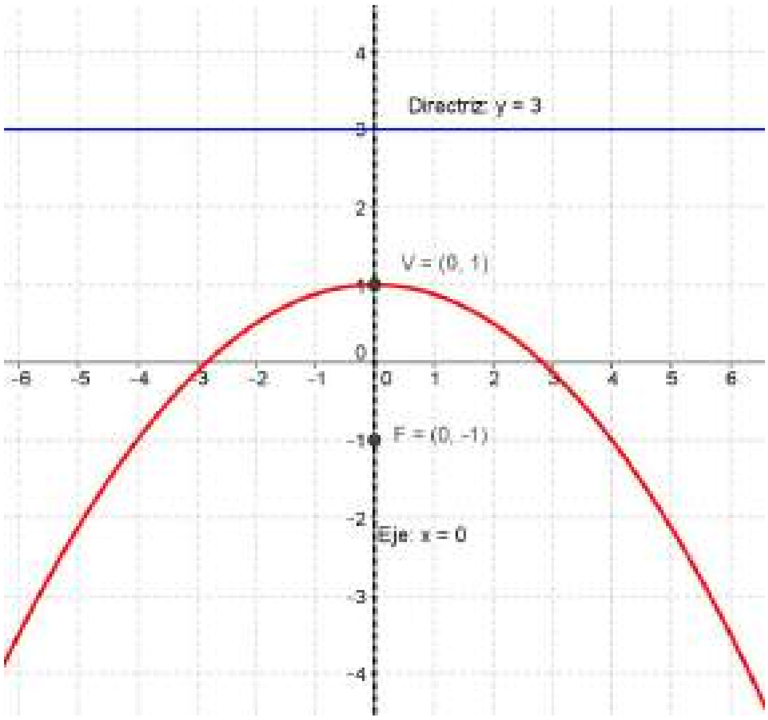
b) Los elementos son:

Eje: y = - 5 Directriz: x = 5,5 Vértice: V (3, - 5) Foco: F (0,5; - 5)



c) Los elementos son:

Eje: x = 0 Directriz: y = 3 Vértice: V (0, 1) Foco: F (0, - 1)



27. a) Los puntos de corte de la circunferencia con la bisectriz del primer y tercer cuadrante son:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,\ y = 0 \\ x = 4,\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0,\ 0) \\ (4, 4) \end{cases}$$

Los puntos de corte de la circunferencia con la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante son:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,\ y = 0 \\ x = -2,\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0,\ 0) \\ (-2, 2) \end{cases}$$

El área del triángulo de vértices (0, 0); (4, 4) y (- 2, 2) es 8 unidades cuadradas.

b) Los puntos de corte de la elipse con la bisectriz del primer y tercer cuadrante son:

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 - 20y = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,\ y = 0 \\ x = \dfrac{10}{3},\ y = \dfrac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0,\ 0) \\ \left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{10}{3}\right) \end{cases}$$

Los puntos de corte de la circunferencia con la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante son:

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 - 20y = 0 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,\ y = 0 \\ x = -\dfrac{10}{3},\ y = \dfrac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0,\ 0) \\ \left(-\dfrac{10}{3}, \dfrac{10}{3}\right) \end{cases}$$

El área del triángulo de vértices $(0,\ 0); \left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$ y $\left(-\dfrac{10}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$ es $\dfrac{100}{9} = 11{,}11$ unidades cuadradas.

c) Los puntos de corte de la parábola con la bisectriz del primer y tercer cuadrante son:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,\ y = 0 \\ x = 5,\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0,\ 0) \\ (5, 5) \end{cases}$$

Los puntos de corte de la parábola con la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante son:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,\ y = 0 \\ x = 3,\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0,\ 0) \\ (3, -3) \end{cases}$$

El área del triángulo de vértices (0, 0); (5, 5) y (3, - 3) es 15 unidades cuadradas.

28. Sea P (x, y) un punto del lugar geométrico buscado. Se cumplirá $2 \cdot d(P, B) = d(P, A)$.

Expresando las distancias y operando obtenemos la ecuación:

$$2 \cdot \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 14y + 42 = 0$$

La cónica obtenida es la circunferencia de centro el punto $C(1, 7)$ y radio $r = \sqrt{8}$.

29. La circunferencia buscada tiene su centro en el punto C (4, 6) y su radio es r = 2. Su ecuación es:

$$(x-4)^2 + (y-6)^2 = 2^2$$

La recta tangente a la circunferencia y paralela a x = 2 es x = 6.

30. Las circunferencias dadas son tangentes. El punto de intersección de ambas circunferencias es $\left(\frac{42}{5}, \frac{16}{5}\right)$. La ecuación de la recta tangente será la recta que pasa por el punto de intersección y es perpendicular a la recta que contiene a los centros de ambas circunferencias. La ecuación es 4x – 3y = 24.

31. Se trata de la hipérbola equilátera que vemos en el dibujo.

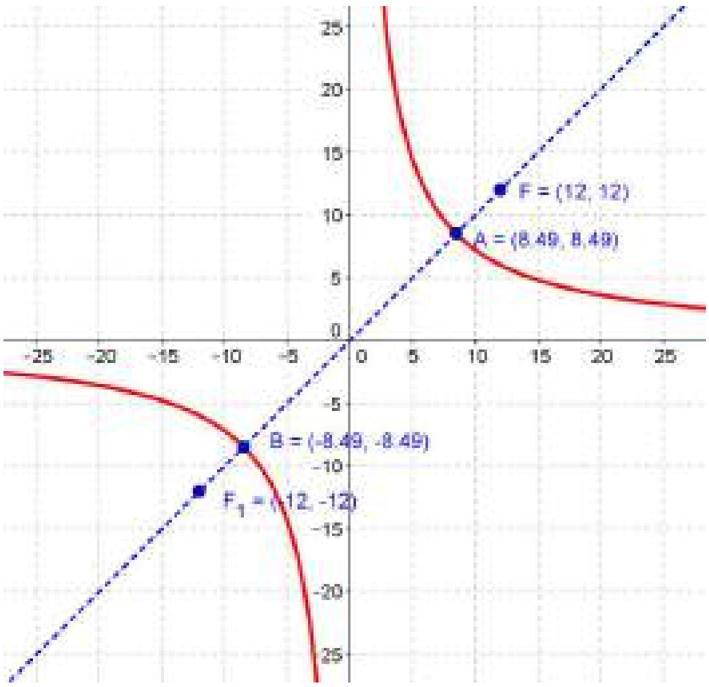
Sus elementos son:

Vértices: A (8,49; 8,49) y B (- 8,49; - 8,49)

Focos: F (12, 12) y F ´ (- 12, - 12)

Ejes: y = x e y = - x

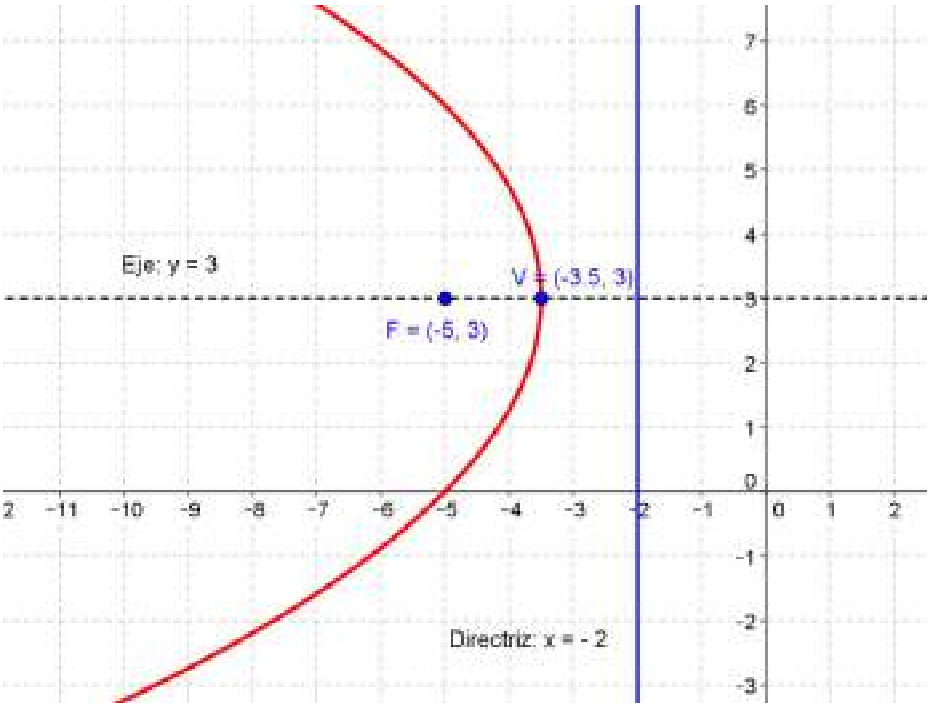
Asíntotas: y = 0 y x = 0



32. El lugar geométrico tiene por ecuación $6x + y^2 – 6y + 30 = 0$. Se trata de una parábola de eje paralelo a OX.

Sus elementos son:

Vértice V (-3,5; 3)
Foco: F (- 5, 3)
Directriz: x = - 2
Eje: y = 3



33. El foco de la parábola es el punto F (0, 20) y la directriz es la recta de ecuación y + 20 = 0

La ecuación de la parábola es $x^2 = 80y$. Determinamos los puntos de la parábola que están a una distancia b del eje OX, resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x^2 = 80y \\ y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{80b} \\ y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{80b};\ y = b \\ x = \sqrt{80b};\ y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1\left(-\sqrt{80b},\ b\right) \\ P_2\left(\sqrt{80b},\ b\right) \end{cases}$$

Como el diámetro de la antena mide 106 cm se tendrá:

$$2\sqrt{80b} = 106 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{80b} = 53 \quad \Rightarrow \quad 80b = 2809 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2809}{80} = 35{,}11\,cm.$$

34. Los puntos de corte de la parábola y la recta son: P (4, 4) y $Q\left(-1,\ \frac{1}{4}\right)$.

La ecuación de la recta tangente en el punto P es y = 2x – 4.

La ecuación de la recta tangente en el punto Q es $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

Ambas rectas son perpendiculares.

35. a) Aplicando la definición de excentricidad de una elipse y operando:

$$e = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad c = e \cdot a = 0{,}017 \cdot 149{,}60 \cdot 10^6 = 2{,}54 \cdot 10^6$$

A partir de la relación $a^2 = b^2 + c^2$ obtenemos:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{(149{,}60 \cdot 10^6)^2 - (2{,}54 \cdot 10^6)^2} = 149{,}58 \cdot 10^6.$$

La longitud del semieje menor de la órbita es $149{,}58 \cdot 10^6$ km.

b) Como el Sol está situado en uno de los focos de la elipse, la distancia máxima (afelio) y la mínima (perhielio) que separan a la Tierra del Sol son, respectivamente, a + c y a – c.

Tenemos los valores de las distancias:

$d_{máx} = 149{,}60 \cdot 10^6 + 2{,}54 \cdot 10^6 = 154{,}14 \cdot 10^6$ km.

$d_{mín} = 149{,}60 \cdot 10^6 - 2{,}54 \cdot 10^6 = 147{,}06 \cdot 10^6$ km.

UNIDAD 9: Sucesiones. Límites

ACTIVIDADES-PÁG. 202

1. Los términos pedidos son:

a) $a_n = \dfrac{n^2 + n}{2}$: 1, 3, 6, 10 y 15.

b) $b_n = 3 \cdot 2^{n-2}$: $\dfrac{3}{2}$, 3, 6, 12 y 24.

c) $c_n = (-1)^{n+1} \cdot n$: 1, - 2, 3, - 4 y 5.

d) $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$: 1, 1, 2, 3 y 5

2. a) Las sumas parciales y la suma total son:

$1 = 1$, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, … , $1 + 2 + 3 + 4 + … + n = \dfrac{n^2 + n}{2}$

b) Las sumas parciales y la suma total son:

$1^2 = 1$, $1^2 + 2^2 = 5$, $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$, … , $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + … + n^2 = \dfrac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$

3. Obtenemos:

1er clavo = 0,01 euros.
2º clavo = 0,02 euros.
3er clavo = 0,04 euros.
4º calvo = 0,08 euros.
………………………..
32º clavo = $0{,}01 \cdot 2^{31}$ euros.

Por el caballo pedía la suma de todos los términos anteriores:

$$S = \frac{0{,}01 \cdot 2^{31} \cdot 2 - 0{,}01}{2 - 1} = 0{,}01 \cdot (2^{32} - 1) \text{ euros.}$$

La sucesión es una progresión geométrica de razón r = 2. En total pedía 42 949 672, 95 euros.

ACTIVIDADES-PÁG. 219

1. Veamos que para n = 1 se cumple: $2 = 1^2 + 1$.

Supongamos que se cumple para n = p: $2 + 4 + 6 + … + 2p = p^2 + p$.

Veamos qué ocurre para n = p + 1:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2p + 2(p + 1) = (p^2 + p) + 2(p + 1) = p^2 + 3p + 2 = (p + 1)^2 + (p + 1)$$

Queda probado que la igualdad es cierta para todo número natural.

2. Veamos que para n = 1 se cumple: $3^0 + 3^1 = \dfrac{3^2 - 1}{2} = 4$.

Supongamos que se cumple para n = p: $3^0 + 3^1 + \ldots + 3^p = \dfrac{3^{p+1} - 1}{2}$.

Veamos qué ocurre para n = p + 1:

$$3^0 + 3^1 + \ldots + 3^p + 3^{p+1} = \frac{3^{p+1} - 1}{2} + 3^{p+1} = \frac{3^{p+2} - 1}{2}$$

Queda probado que la igualdad es cierta para todo número natural.

3. Veamos que para n = 1 se cumple: $(2 - 1)^2 - 1 = 0 = \dot{8}$

Veamos que para n = 2 se cumple: $(4 - 1)^2 - 1 = 8 = \dot{8}$

Supongamos que se cumple para n = p: $(2p - 1)^2 - 1 = \dot{8}$

Veamos qué ocurre para n = p + 1:

$$\left[(2p + 1)^2 - 1\right] - 1 = (2p + 1) - 1 = [(2p - 1) + 2]^2 - 1 =$$

$$= (2p - 1)^2 + 4(2p - 1) + 4 - 1 = [(2p - 1) - 1] + 8p = \dot{8} + \dot{8} = \dot{8}$$

Queda probado que la igualdad es cierta para todo número natural.

4. Veamos que para n = 1 se cumple: $S_1 = a_1 = (1 + 1)! - 1! = 2! - 1! = 2 \cdot 1! - 1! = 1! \cdot (2 - 1) = 1! \cdot 1 = a_1$

Supongamos que se cumple para n = p: $S_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_p = (p + 1)! - 1!$.

Veamos qué ocurre para n = p + 1:

$$S_{p+1} = [a_1 + a_2 + \ldots + a_p] + a_p + 1 = (p + 1)! - 1! + (p + 1) \cdot (p + 1)! =$$

$$= (1 + p + 1) \cdot (p + 1)! - 1! = (p + 2)! - 1!$$

Queda probado que la igualdad es cierta para todo número natural.

ACTIVIDADES-PÁG. 221

1. a) Introducimos las sucesiones tecleando (sin espacios intermedios):

a(n) : = (1 - 4n) / (1 + 4n)   b(n) : = (4n + 1) / (4n)   c(n) : = (- 2)

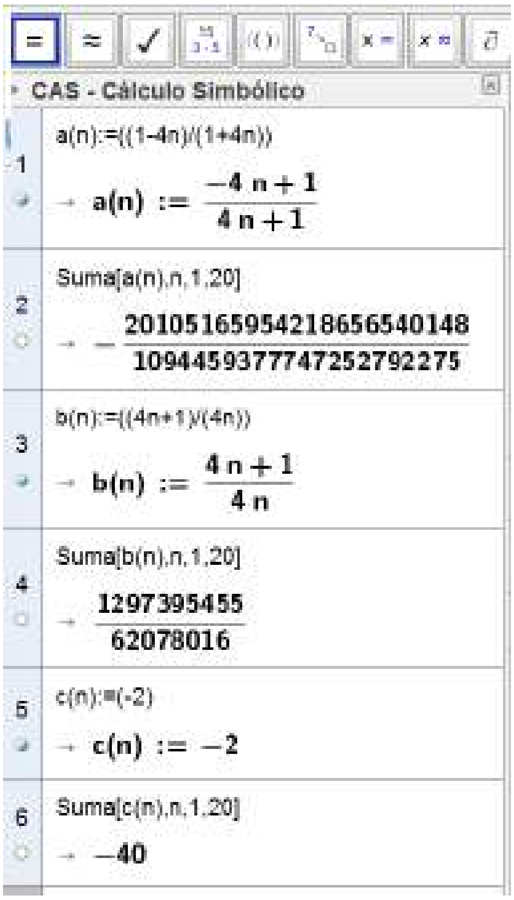
y después con las expresiones:

Suma [a(n), n, 1, 20]

Suma [b(n), n, 1, 20]

Suma [c(n), n, 1, 20]

Obtenemos los resultados que pueden verse en el gráfico.



b) Los límites de las soluciones del enunciado son:

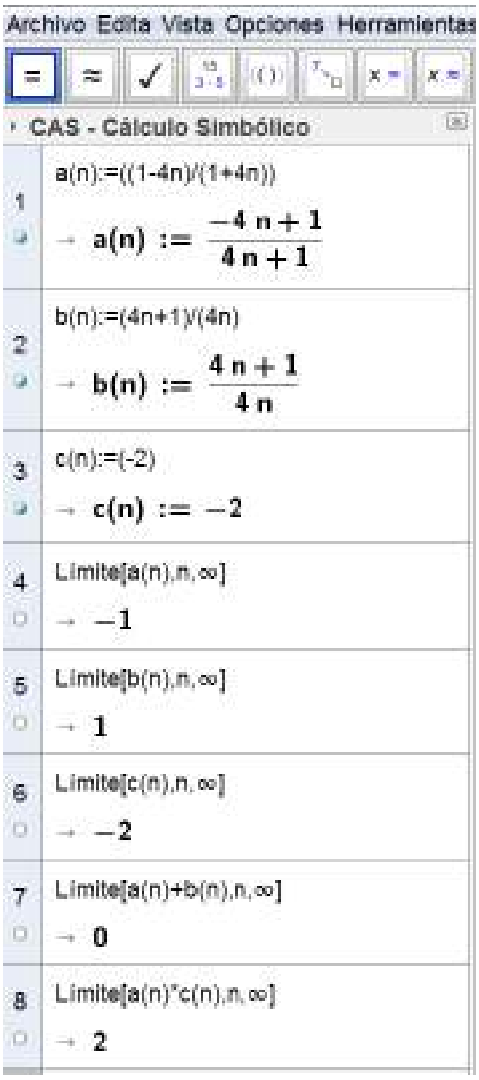
$$lím\ (a_n) = lím\ \left(\frac{1-4n}{1+4n}\right) = -1;\ lím(b_n) = lím\ \left(\frac{4n+1}{4n}\right) = 1 \text{ y lím } (c_n) = \text{lím } (-2) = -2$$

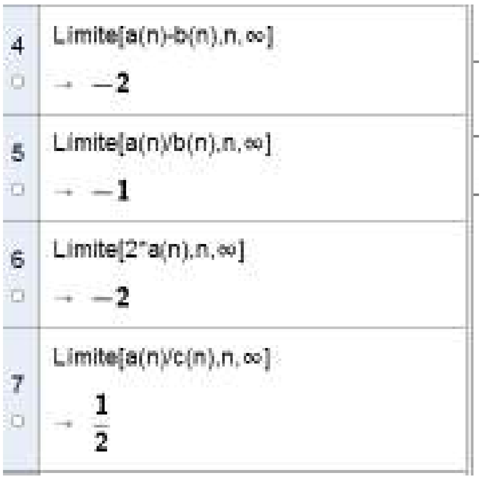
Como las sucesiones son convergentes, los límites pedidos son:

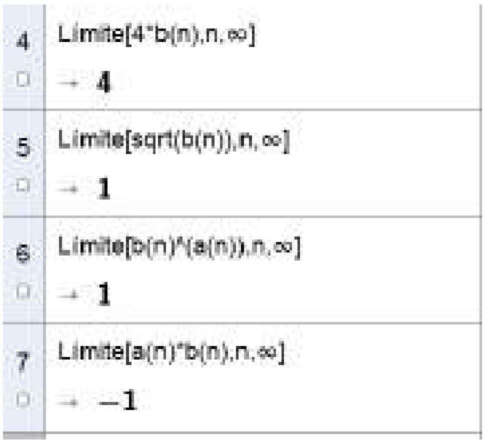
lím $(a_n + b_n) = 0$ lím $(a_n - b_n) = -2$ lím $(2 \cdot a_n) = -2$ lím $(4 \cdot b_n) = 4$ lím $(a_n \cdot b_n) = -1$

lím $(a_n \cdot c_n) = 2$ lím $(a_n : b_n) = -1$ lím $(a_n : c_n) = 1/2$ lím $\sqrt{b_n} = 1$ lím $\left(b_n^{a_n}\right) = 1$

Los resultados anteriores pueden verse en las imágenes:







ACTIVIDADES-PÁG. 222

1. Las sucesiones son:

a) 1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, 4…

b) 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, … , 5n – 3.

c) 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, … , 2^{n+1}

d) $2, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \frac{17}{16}, \frac{26}{25}, \frac{37}{36}, \frac{50}{49}, \frac{65}{64}, \ldots, \frac{n^2+1}{n^2}$

e) 0, 7, 26, 63, 124, 215, 342, 511, … , $(n^3 – 1)$.

f) 1, 2, 3, 5, 8,13, 21, 34, ……..

g) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, …, $3 \cdot 2^{n-1}$

h) 0,8; 0,88; 0,888, 0,8888, 0,88888, …

i) 1, 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, …, $(n^2 + n + 1)$.

2. Los términos de las sucesiones son:

a) 0, 5, 14, 27, 44 y 65.

b) $\frac{-1}{3}, \frac{-3}{5}, \frac{-5}{7}, \frac{-7}{9}, \frac{-9}{11}$ y $\frac{-11}{13}$

c) – 2, 4, - 8, 16, - 32 y 64

d) 6, 18, 54, 162, 486 y 1458

e) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}$ y $\frac{11}{729}$

f) $\frac{5}{2}, \frac{6}{4}, \frac{7}{8}, \frac{8}{16}, \frac{9}{32}$ y $\frac{10}{64}$

g) 2, 9, 28, 65, 126 y 217

h) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}$ y $\frac{63}{64}$

3. Los términos de las sucesiones son:

a) 2, 1, - 1, - 4, - 8 y - 13

b) 2, 3, $\frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{21}{8}$ y $\frac{43}{16}$

4. Las sucesiones son:

a) $(a_n) = (2, 1, 0, - 1, \dots , 3 – n)$

b) $(b_n) = (- 1, 0, 1, 2, \dots, n – 2)$

c) $(c_n) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots, \frac{2n+1}{n+1}\right)$

d) $(d_n) = (2, - 2, 2, - 2, \dots , (-1)^{n+1} \cdot 2)$

e) $(e_n) = (- 1, - 2, - 2, - 3, - 4, - 4\ldots)$

f) $(f_n) = (- 1, - 3, - 5, - 7, \ldots , - 2n + 1)$

5. La acotación de las sucesiones queda:

a) (a_n) acotada superiormente por $\frac{3}{2}$ e inferiormente por 0.

b) (b_n) acotada superiormente por -1 e inferiormente por $-\frac{3}{2}$.

c) (c_n) acotada superiormente por 3 e inferiormente por $\frac{1}{2}$.

6. Las respuestas son:

a) (a_n) está acotada entre 1 y 2: $1 \le \frac{2n}{n+1} \le 2.$

Demostración:

$$1 \le \frac{2n}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad n+1 \le 2n \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le n \quad \textit{cierto}$$

$$\frac{2n}{n+1} \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2n \le 2n+2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le 2 \quad \textit{cierto}$$

b) (b_n) está acotada entre $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3}$: $\frac{-1}{3} \le \frac{2-n}{3n} \le \frac{1}{3}.$

Demostración:

$$-\frac{1}{3} \le \frac{2-n}{3n} \quad \Leftrightarrow \quad -3n \le 6-3n \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le 6 \quad \Leftrightarrow \quad \textit{cierto}$$

$$\frac{2-n}{3n} \le \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 6-3n \le 3n \quad \Leftrightarrow \quad -6n \le -6 \quad \Leftrightarrow 6n \ge 6 \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 1 \quad \textit{cierto}$$

c) (c_n) está acotada entre -3 y 0: $-3 \le -\frac{3}{n} \le 0.$

Demostración:

$$-3 \le -\frac{3}{n} \quad \Leftrightarrow \quad -3n \le -3 \quad \Leftrightarrow \quad 3n \ge 3 \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 1 \quad \textit{cierto}$$

$$-\frac{3}{n} \le 0, \textit{ como } n > 0, \textit{ entonces } -\frac{3}{n} \le 0.$$

7. Las sucesiones son:

a) $(a_n) = \left(-\frac{n}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -\frac{4}{2}, \ldots\right)$. Estrictamente decreciente.

b) $(b_n) = 2; 2,1; 2,1 ; 2,11; 2,2; 2,2; 2,22\ldots)$. Creciente.

c) $(c_n) = (+ 1; + 1,2; + 1,22; + 1,222\ldots)$. Estrictamente creciente.

d) $(d_n) = \left(\dfrac{2}{n+1}\right) = \left(1, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{6}, \ldots\right)$. Estrictamente decreciente.

e) $(e_n) = \left(n^2 - 2\right) = (-1, 2, 7, \ldots)$. Estrictamente creciente.

f) $(f_n) = (-1, -1, -1\ldots)$. No es monótona, es constante.

8. Las soluciones son:

a) $(a_n) = \left(\dfrac{1-3n}{4}\right)$. Estrictamente decreciente.

Vamos a probar que $a_n > a_{n+1}$:

$$\frac{1-3n}{4} > \frac{1-3(n+1)}{4} \Leftrightarrow 1-3n > 1-3n-3 \Leftrightarrow 0 > -3$$

Con lo que, como esta desigualdad es siempre cierta, queda probado que $a_n > a_{n+1}$.

b) $(b_n) = \left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)$. Estrictamente creciente.

Vamos a probar que $b_n < b_{n+1}$:

$$\frac{n^2}{n^2+1} < \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} \Leftrightarrow \frac{n^2}{n^2+1} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-2n-1}{(n^2+1)\cdot(n^2+2n+2)} < 0$$

La última desigualdad es siempre cierta.

c) $(c_n) = \left[(-1)^n + n^2\right]$. Estrictamente creciente.

Vamos a probar que $c_n < c_{n+1}$:

$$(-1)^n + n^2 < (-1)^{n+1} + (n+1)^2 \Leftrightarrow (-1)^n + n^2 < (-1)^n \cdot (-1) + n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow 0 < 2n$$

Esta desigualdad es siempre cierta, puesto que $n \geq 1$.

ACTIVIDADES-PÁG. 223

9. Las sucesiones buscadas son:

$$(a_n) + (b_n) = \left(\frac{2n-3}{n} + \frac{3n}{n+2}\right) = \left(\frac{5n^2+n-6}{n^2+2n}\right)$$

$$(a_n) - (b_n) = \left(\frac{2n-3}{n} - \frac{3n}{n+2}\right) = \left(\frac{-n^2+n-6}{n^2+2n}\right)$$

$$(b_n) - (a_n) = \left(\frac{3n}{n+2} - \frac{2n-3}{n}\right) = \left(\frac{n^2-n+6}{n^2+2n}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot(a_n) = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2n-3}{n}\right) = \left(\frac{2n-3}{2n}\right)$$

$$(a_n)\cdot(b_n) = \left(\frac{2n-3}{n}\cdot\frac{3n}{n+2}\right) = \left(\frac{6n^2-9n}{n^2+2n}\right)$$

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{\frac{2n-3}{n}}{\frac{3n}{n+2}}\right) = \left(\frac{2n^2+n-6}{3n^2}\right)$$

$$\frac{(b_n)}{(a_n)} = \left(\frac{\frac{3n}{n+2}}{\frac{2n-3}{n}}\right) = \left(\frac{3n^2}{2n^2+n-6}\right)$$

10. Las respuestas son:

(a_n) está acotada entre 1 y 6: $1 \le \frac{n+5}{n} \le 6.$

(a_n) es monótona estrictamente decreciente. Veamos que $a_n > a_{n+1}$:

$$\frac{n+5}{n} > \frac{n+6}{n+1} \iff \frac{n+5}{n} - \frac{n+6}{n+1} = \frac{5}{n^2+n} > 0$$

A partir del tercer término: $\frac{n+5}{n} < 3 \iff n \ge 3.$

11. Los límites son:

a) lím (3n – 2) = $+\infty$

b) $lím \left(4n^2 - \dfrac{6n+7}{2n+1}\right) = +\infty$

c) $lím \left(-\dfrac{7}{n}\right) = 0$

d) $lím \left(4n + 2 + \dfrac{7}{n}\right) = +\infty$

e) lím (- n^3 – n) = $-\infty$

f) $lím \left(\sqrt{n^3} - \sqrt{8}\right) = +\infty$

g) $lím \left(\dfrac{-3}{n+2} \cdot n^2\right) [0 \cdot +\infty] = lím \left(\dfrac{-3n^2}{n+2}\right) = -\infty$

h) $lím \left(7 + \dfrac{1}{n^2}\right) = 7$

i) $lím \left(\dfrac{4}{n+2} \cdot (-n)\right) [0 \cdot +\infty] = lím \left(\dfrac{-4n}{n+2}\right) = -4$

j) $lím \left(\dfrac{2}{n^2}\right)^{\frac{3n}{2n+1}} = 0$

k) $lím (2n-5)^{\frac{-2n+1}{n}} = 0$

l) $lím \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n} = 0$

m) $lím \ 2^{-3n} = 0$

n) $lím \left(\dfrac{n+1}{3n+2}\right)^{-n} = +\infty$

o) $lím \left(n^2 + \dfrac{1}{3n}\right)^{42} = +\infty$

p) $lím \left(\frac{n^3 + 2}{n^2 + 7}\right)^{\frac{1 - 5n^2}{n^2 + 3}} = 0$

q) $lím \frac{(n + 2)^2}{n^2 + 2} = 1$

r) $lím \left(\frac{1}{n^2 + 6n}\right)^{\sqrt{\frac{4n^3 + 5}{n^3 + n}}} = 0$

12. Los límites son:

a) $lím \frac{3n^2 - 4n}{6n^3 + 5} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0$

b) $lím \frac{7 - 4n^2}{n^2 + 6n - 2} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -4$

c) $lím \frac{5n^5 + 6n^4 - 3}{2n^2 + 5n + 1} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = +\infty$

d) $lím \left(\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n\right) [\infty - \infty] = lím \frac{4n^2 + 3n - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 3n} + 2n} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{3}{4}$

e) $lím \left(\frac{n^3 - 2}{n^2} - \frac{n^3}{n^2 + 1}\right) [\infty - \infty] = lím \frac{(n^3 - 2)(n^2 + 1) - n^3 \cdot n^2}{n^2 \cdot (n^2 + 1)} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = lím \frac{n^3 - 2n^2 - 2}{n^4 + n^2} = 0$

f) $lím \left[(n + 2)^2 - (n - 2)^3\right] [\infty - \infty] = lím (-n^3 + 7n^2 - 8n + 12) = -\infty$

g) $lím \left(\sqrt{n - 3} - \sqrt{n - 6}\right) [\infty - \infty] = lím \frac{3}{\sqrt{n - 3} + \sqrt{n - 6}} = 0$

h) $lím \left[\sqrt{9n^2 + 7} - (3n + 2)\right] [\infty - \infty] = lím \frac{-12n + 3}{\sqrt{9n^2 + 7} + (3n + 2)} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{-12}{6} = -2$

i) $lím \frac{1}{\sqrt{2n + 5} - \sqrt{2n - 3}} [\infty - \infty] = lím \frac{\sqrt{2n + 5} + \sqrt{2n - 3}}{8} = +\infty$

j) $lím \sqrt{\frac{n^5 - 7n}{4n^5 + n^4 + 2}} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

k) $lím \left(\frac{n^3 - 2n^2 + 3}{n^3 - 3}\right)^{\frac{2n^2+5}{n}} = e^{lím \frac{2n^2+5}{n} \cdot \left[\frac{n^3-2n^2+3}{n^3-3} - 1\right]} = e^{lím \frac{-4n^4+2n^2+30}{n^4-3n}} = e^{-4}$

l) $lím \left(\frac{4n^2 - 6}{5 + n^2}\right)^{\frac{n^3}{7+2n^3}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

m) $lím \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}\right) [\infty - \infty] = lím \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$

n) $lím \left[\sqrt{n+3} \cdot \left(\sqrt{n-5} - \sqrt{n-1}\right)\right] = lím \left(\sqrt{n^2 - 2n - 15} - \sqrt{n^2 + 2n - 3}\right)[\infty - \infty] =$

$$= lím \frac{-4n - 12}{\sqrt{n^2 - 2n - 15} + \sqrt{n^2 + 2n - 3}} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -2$$

o) $lím \left(\frac{1 + 2 + ... + n}{n^2}\right) = lím \frac{\frac{n^2+n}{2}}{n^2} = lím \frac{n^2 + n}{2n^2}\left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{2}$

p) $lím \left(\frac{2n^2 + 5}{n^2 + 8}\right)^{\frac{5+n^3}{n^2+2n}} = 2^{+\infty} = +\infty$

q) $lím \left(\frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^2} + ... + \frac{2n}{n^2}\right) = lím \left(\frac{2 + 4 + ... + 2n}{n^2}\right) = lím \frac{n^2 + n}{n^2}\left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$

r) $lím \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}} = e^{lím\left((\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}) \cdot \left(\frac{n+1}{n} - 1\right)\right)} = e^{+\infty} = +\infty$

ACTIVIDADES-PÁG. 224

13. Los metros de perforación del túnel siguen una progresión geométrica de razón 1,05 ya que los primeros días se perfora:

$a_1 = 3$ m, $a_2 = 3 \cdot 1{,}05$ m, $a_3 = 3 \cdot 1{,}05^2$ m, $a_4 = 3 \cdot 1{,}05^3$ m…

Teniendo en cuenta la suma de n términos de una progresión geométrica, $S = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1}$, obtenemos:

$$6000 = \frac{3 \cdot 1{,}05^n - 3}{1{,}05 - 1} \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 1{,}05^n = 303 \quad \Rightarrow \quad 1{,}05^n = 101 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 101}{\log 1{,}05} = 94{,}59 \approx 95 \text{ días}$$

14. Los límites son:

a) $lím \left(\frac{3n^2 - 4n + 5}{3n^2 + 2}\right)^{\frac{n^2 - 5}{3n + 2}} \left[1^\infty\right] = e^{-\frac{4}{9}}$

b) $lím \left(\frac{3^n + 2^n}{3^n - 2^n}\right)\left[\frac{\infty}{\infty}\right] = lím \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}\left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$

c) $lím \left(\frac{\sqrt{n^2 + 2} - n}{\sqrt{4n^2 - 5} - 2n}\right)\left[\infty - \infty\right] = lím \frac{2 \cdot \left(\sqrt{4n^2 - 5} + 2n\right)}{-5 \cdot \left(\sqrt{n^2 + 2} + n\right)}\left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{-4}{5}$

d) $lím \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = lím \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\,!} : \frac{n^n}{n\,!} = lím \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n\,!}{n^n \cdot (n+1)\,!} = lím \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n\,!}{(n+1) \cdot n\,! \cdot n^n} = lím \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$

15. Las sucesiones asociadas a los cuadrados son:

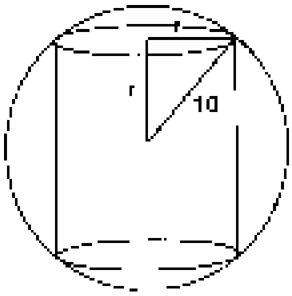
Lados	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4}$	…	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$
Perímetros	4	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	1	…	$4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$
Áreas	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Las sucesiones asociadas a los cuadrados son:

Lados	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
Perímetros	3	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	…	$3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
Áreas	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{\sqrt{3}}{64}$	$\frac{\sqrt{3}}{256}$	$\frac{\sqrt{3}}{1024}$	…	$\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

16. Las respuestas a los distintos apartados son:

a) El primer cilindro ha de tener la altura de longitud doble que el radio de la base. La segunda esfera tendrá por radio el radio de al base del cilindro en el que se encaja.



Primer cilindro: $r_1^2 + r_1^2 = 10^2 \Rightarrow r_1 = \dfrac{10}{\sqrt{2}}\ m.$

Segundo cilindro: $r_2^2 + r_2^2 = \left(\dfrac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow r_2 = 5\ m.$

Tercer cilindro: $r_3^2 + r_3^2 = 5^2 \Rightarrow r_3 = \dfrac{5}{\sqrt{2}}\ m.$

La sucesión de los radios de los cilindros es: $(r_c) = \left(\dfrac{10}{\sqrt{2}},\ 5,\ \dfrac{5}{\sqrt{2}},\ \dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2\sqrt{2}} \ldots\right).$

b) La sucesión del radio de las esferas es: $(R_e) = \left(10,\ \dfrac{10}{\sqrt{2}},\ 5,\ \dfrac{5}{\sqrt{2}},\ \dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2\sqrt{2}} \ldots\right).$

La sucesión de los volúmenos de las esferas es: $(V_e) = \left(\dfrac{4000\pi}{3},\ \dfrac{2000\pi}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{500\pi}{3},\ \dfrac{250\pi}{3\sqrt{2}}, \ldots\right)$, es una sucesión geométrica de razón $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

La sucesión de los volúmenes de los cilindros es: $(V_c) = \left(\dfrac{1000\pi}{\sqrt{2}},\ 250\pi,\ \dfrac{125\pi}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1250\pi}{4}, \ldots\right)$, es una sucesión geométrica de razón $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

17. Operando, obtenemos, en cada caso:

a) El valor del límite es:

$$lím \left[\left(n^2 + a \cdot n\right)^{1/2} - \left(n^2 - a \cdot n\right)^{1/2}\right] [\infty - \infty] = lím \frac{2an}{\sqrt{n^2 + an} + \sqrt{n^2 - an}} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = a$$

Por tanto, con a ≠ 0 obtenemos $a = \dfrac{1}{2}$.

b) El valor del límite es: $lím \left[\dfrac{n^2 + n}{n^2 + 1}\right]^{a \cdot n} \left[1^\infty\right] = e^a$.

Tenemos que si con a ≠ 0 obtenemos a = - 1.

18. La respuesta a las cuestiones es:

a) Para realizar la tabla pedida, en **Vista** hacemos aparecer **Hoja de Cálculo**.

Escribimos en ella lo que aparece en la tabla adjunta.

	A	**B**
1	**Profundidad**	**Luminosidad**
2	**0**	**100**
3	=A2+1 (Enter)	=B2-(20/100)*B2 (Enter)

Aparecen los valores 1 y 80, respectivamente.

	A	B
1	**Profundidad**	**Luminosidad**
2	**0**	**100**
3	1	80
4		

Seleccionamos cada una de estas dos celdas y desde el vértice inferior derecho, y con el botón derecho de ratón presionado, arrastramos hacia abajo hasta el valor que deseemos.

En la tabla que sigue aparecen los diez primeros valores.

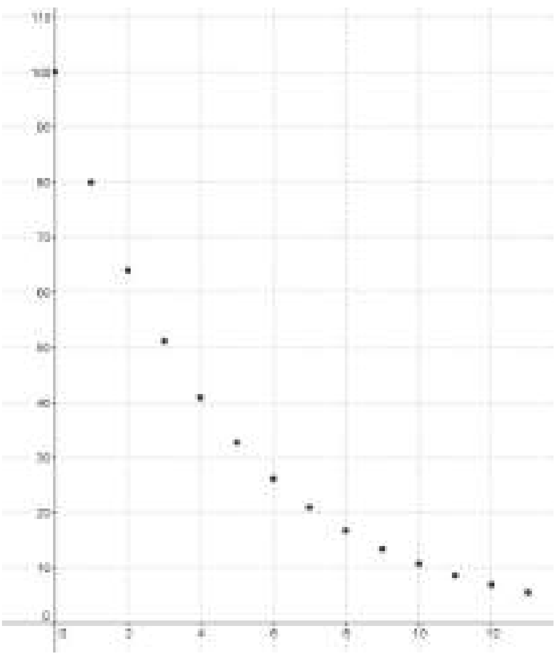
Una vez realizada la tabla, seleccionamos ambas columnas y con el botón derecho del ratón desplegamos el menú y elegimos **Crea lista de puntos**.

Aparecen los puntos dibujados en la **Vista Gráfica** (será necesario ajustar los ejes para poder ver los puntos).

También podemos ver en la **Ventana algebraica** la lista de dichos puntos.

Hoja de Cálculo

	A	B
1	**Profundidad**	**Luminosidad**
2	**0**	**100**
3	1	80
4	2	64
5	3	51.2
6	4	40.96
7	5	32.77
8	6	26.21
9	7	20.97
10	8	16.78
11	9	13.42
12	10	10.74
13		



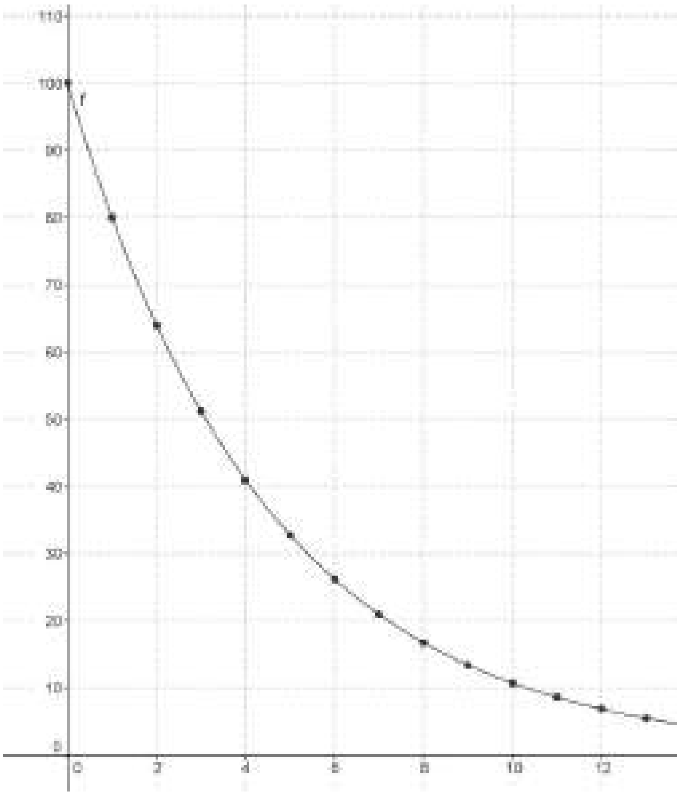
Podemos encontrar la curva que se ajuste a los puntos dibujados y su ecuación, tecleando en la **Ventana de entrada**:

Si[x>0,AjusteExp[lista1]]

Obtenemos la función de expresión:

$$f(x) = 100 \cdot e^{-0,22x}$$

La curva puede verse en el dibujo de abajo.

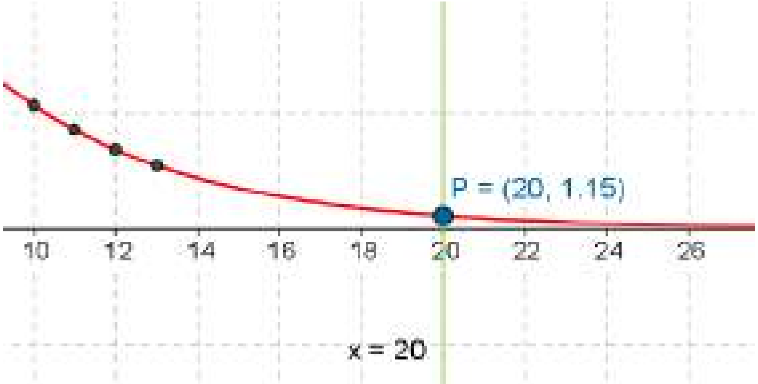


b) La intensidad de luz que tiene el buzo al bajar 0,5 metros será: $100 \cdot (0,80)^{0,50} = 89,44$.

También la podemos calcular con la función anterior, es decir, $f(0,50) = 100 \cdot e^{(-0,22 \cdot 0,50)} = 89,58$.

c) Si baja a 20 metros la luz que detectará será: $100 \cdot (0{,}80)^{20} = 1{,}15$

También, $f(20) = 100 \cdot e^{(-0{,}22 \cdot 20)} = 1{,}22$



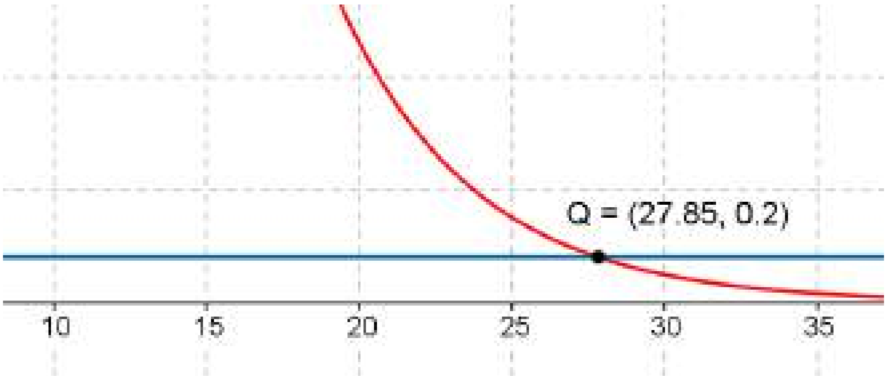
Gráficamente podemos hallarlo cortando la curva con la recta x = 20 y determinando el punto de corte que es P (20; 1,15).

d) Para determinar la profundidad a la que puede bajar y aún detectar cierta luminosidad la podemos calcular de la forma que sigue:

$$100 \cdot (0{,}80)^x = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad (0{,}80)^x = \frac{0{,}2}{100} = 0{,}002 \quad \Rightarrow \quad x \cdot \ln 0{,}80 = \ln 0{,}002 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\ln 0{,}002}{\ln 0{,}80} = 27{,}85$$

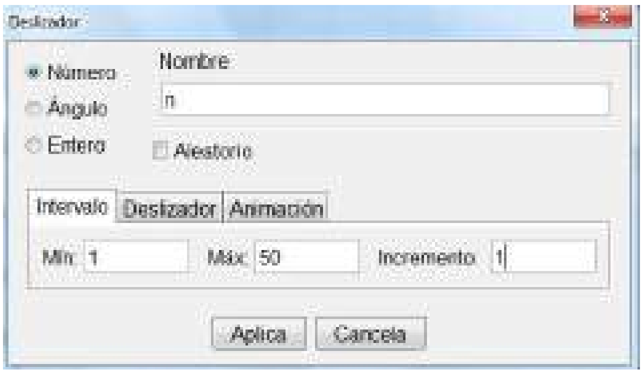
$$100 \cdot e^{-0{,}22x} = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad e^{-0{,}22\,x} = \frac{0{,}2}{100} = 0{,}002 \quad \Rightarrow \quad -0{,}22\,x \cdot \ln e = \ln 0{,}002 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\ln 0{,}002}{-0{,}22} = 28{,}25$$

Gráficamente podemos hallarlo cortando la curva con la recta y = 0,2 y determinando el punto de corte que es Q (27,85; 0,2).



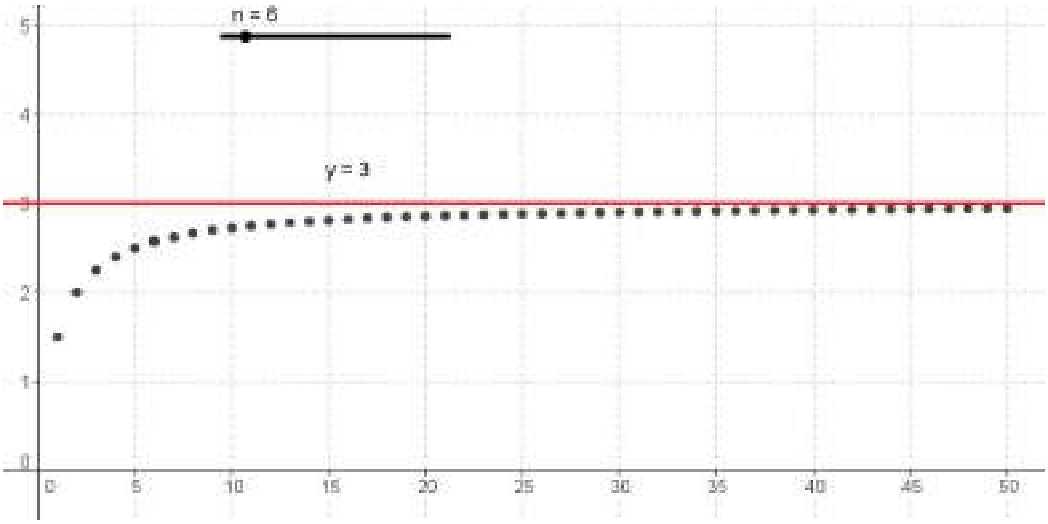
Para representar gráficamente una sucesión, por ejemplo $a_n = \frac{3n^2}{n^2 + n}$, creamos un deslizador con las condiciones que aparecen en el gráfico.

Nombre: n
Mínimo 1; Máximo 50 e Incremento 1.



En el campo de entrada introducimos: (n,(3n^2)/(n^2+n)) y aparece un punto. En el Menú contextual del punto activamos Propiedades del objeto, Básico y Muestra rastro.

Movemos el deslizador y van apareciendo los puntos de la sucesión que tienden al límite 3.



ACTIVIDADES-PÁG. 225

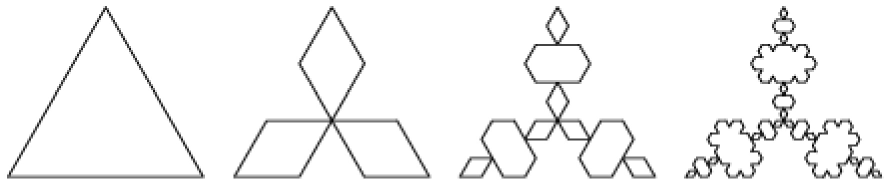
Explica la formación del copo de nieve: Dibujamos un triángulo equilátero, dividimos cada lado en tres partes y sobre la parte central, dibujamos otro triángulo equilátero, en el siguiente paso sobre cada uno de los 6 triángulos equiláteros repetimos el proceso e iterando obtenemos esta curva.
Consideramos que el triángulo equilátero inicial tiene de lado a unidades.

NÚMERO DE CURVA	PERÍMETRO	ÁREA
1	3a	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$
2	12a/3	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4} + 3\,\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{36}$
3	48a/9	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4} + 3\,\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{36} + 12\,\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{81\cdot 4}$
4	192a/27	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4} + 3\,\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{36} + 12\,\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{81\cdot 4} + 48\,\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4} + 3\,\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{36} + 12\,\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{729\cdot 4}$
enésima	$\frac{4^{n-1}}{3^{n-2}}a$	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$

Como vemos en la tabla la sucesión de los perímetros es una sucesión geométrica de razón 4/3. Por lo que su longitud es infinita pues $\lim_{n\to+\infty} \frac{4^{n-1}}{3^{n-2}}a = +\infty$ .La sucesión de las áreas es una sucesión geométrica de razón 4/9. Su superficie es finita pues: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] = \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$

La propiedad que tienen estas curvas es que siendo su longitud infinita encierran una superficie finita.

La curva "Anticopo de nieve" es la que vemos en el dibujo:



Es la configuración opuesta al copo de nieve. Se forma del mismo modo pero metiendo los triángulos hacia adentro.

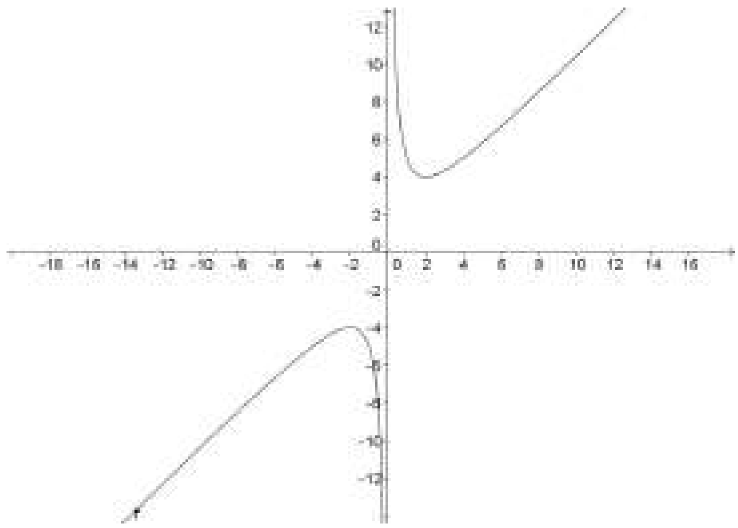
Se obtienen los mismos resultados que en la anterior y tienen la misma propiedad.

UNIDAD 10: Propiedades globales de las funciones

ACTIVIDADES-PÁG. 226

1. El día 31 de julio ocupará una superficie de $1\cdot 1{,}08^{31} = 10{,}87$ cm^2

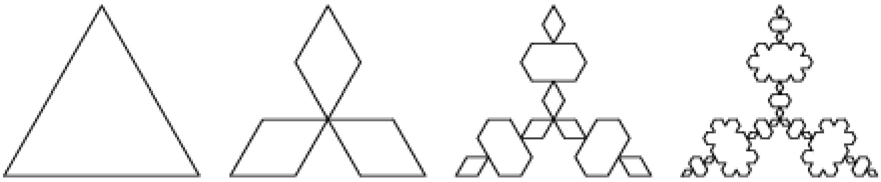
2. La gráfica buscada podría ser la siguiente:



Como vemos en la tabla la sucesión de los perímetros es una sucesión geométrica de razón 4/3. Por lo que su longitud es infinita pues $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4^{n-1}}{3^{n-2}}a = +\infty$. La sucesión de las áreas es una sucesión geométrica de razón 4/9. Su superficie es finita pues: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] = \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$

La propiedad que tienen estas curvas es que siendo su longitud infinita encierran una superficie finita.

La curva "Anticopo de nieve" es la que vemos en el dibujo:



Es la configuración opuesta al copo de nieve. Se forma del mismo modo pero metiendo los triángulos hacia adentro.

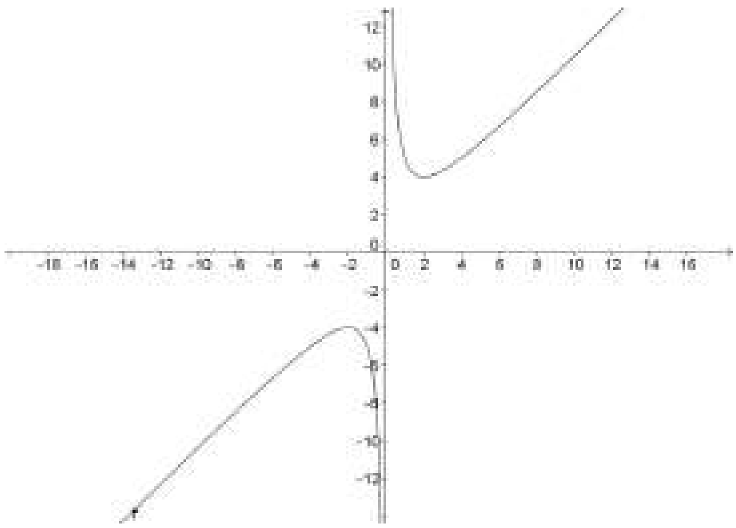
Se obtienen los mismos resultados que en la anterior y tienen la misma propiedad.

UNIDAD 10: Propiedades globales de las funciones

ACTIVIDADES-PÁG. 226

1. El día 31 de julio ocupará una superficie de $1\cdot 1{,}08^{31} = 10{,}87$ cm^2

2. La gráfica buscada podría ser la siguiente:



3. Las características de las funciones aparecen en la tabla.

Características	a)	b)	c)
Dominio	R	R	R
Recorrido	$[0, +\infty)$	[- 1, 1]	R
Simetría	Eje OY	Origen de coordenadas	No tiene
Acotación	Acotada inferiormente	Acotada	No acotada
Extremos relativos	Mínimos en (- 2, 0) y (2, 0) Máximo en (0, 4)	Máximos en $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, 1\right)$ con k $\in$ Z Mínimos en $\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi, -1\right)$ con k $\in$ Z	Mínimo en (0, - 1) Máximo en (2, 3)
Periodicidad	No tiene	Periodo T = π	No tiene
Tendencias	$Si\ x \to -\infty \Rightarrow f\ (x) \to +\infty$ $Si\ x \to +\infty \Rightarrow f\ (x) \to +\infty$	No tiene	$Si\ x \to -\infty \Rightarrow f\ (x) \to +\infty$ $Si\ x \to +\infty \Rightarrow f\ (x) \to -\infty$

ACTIVIDADES-PÁG. 241

1. Designamos los colores por: rojo (*R*), verde (*V*), azul (*Z*) y amarillo (*A*); y las cuatro formas por: cuadrada (*C*), circular (*O*), triangular (*T*) y pentagonal (*P*).

Por ensayo y error las colocamos en un tablero 4 x 4, cumpliendo las condiciones que marca el enunciado.

Una solución es:

RC	*VO*	*ZT*	*AP*
ZP	*AT*	*RO*	*VC*
AO	*ZC*	*VP*	*RT*
VT	*RP*	*AC*	*ZO*

Podemos encontrar hasta 72 soluciones distintas.

2. El número total de amanitas ha de ser múltiplo de 9 menos 1, es decir, 8 amanitas. Haciendo el problema mediante ecuaciones:

$$\frac{8}{9}x + \frac{8}{9} = x \quad \Rightarrow \quad x = 8 \text{ amanitas}$$

3. El enunciado del problema nos muestra que el número de cajitas de zumo debe ser un número impar. Por ensayo y error dirigido obtenemos:

Hay 7 cajitas de zumo.

El 1º amigo se bebe 7/2 + 0,5 = 4 cajitas. Quedan 3 cajitas.

El 2º amigo se bebe 3/2 + 0,5 = 2 cajitas. Queda 1 cajita.

El dueño de la casa se bebe 1/2 + 0,5 = 1 cajita.

Luego, efectivamente, había inicialmente 7 cajitas de zumo.

Este problema se puede resolver también por medio de ecuaciones.

4. Sea *n* un número real.

Veamos si $n^2 (n^2 - 1) = \dot{12}$

$n^2 (n^2 - 1) = n \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1)$

Si $n = \dot{3}$, entonces $n - 1 = \dot{2}$ y también $n + 1$; por lo que $n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1)$ es múltiplo de 12.

Si $n - 1 = \dot{3}$, entonces $n = \dot{2}$; por lo que $n \cdot (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ es múltiplo de 12.

Si $n + 1 = \dot{3}$, entonces $n = \dot{2}$; por lo que $n \cdot (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ es múltiplo de 12.

Por tanto en todos los casos se cumple $n^2 (n^2 - 1)$ = múltiplo de 12.

ACTIVIDADES-PÁG. 243

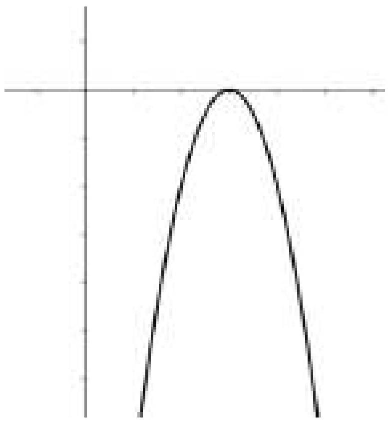
1. a) Introducimos en la pantalla que aparece, después de pulsar la tecla, la expresión:

-X^2 + 12 * X - 36

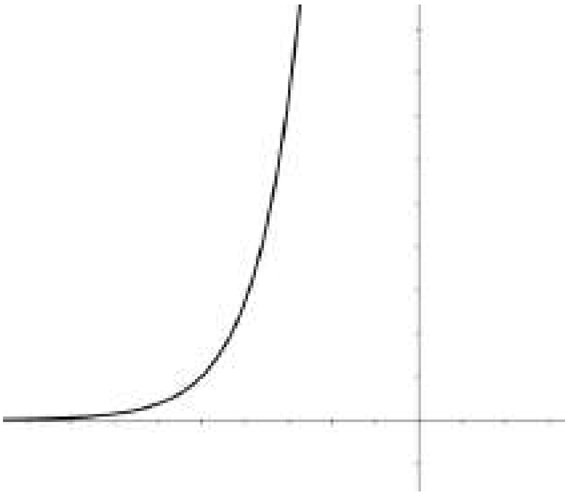
Pulsamos la tecla 

para representar la función, y modificamos las opciones de la pantalla con la 

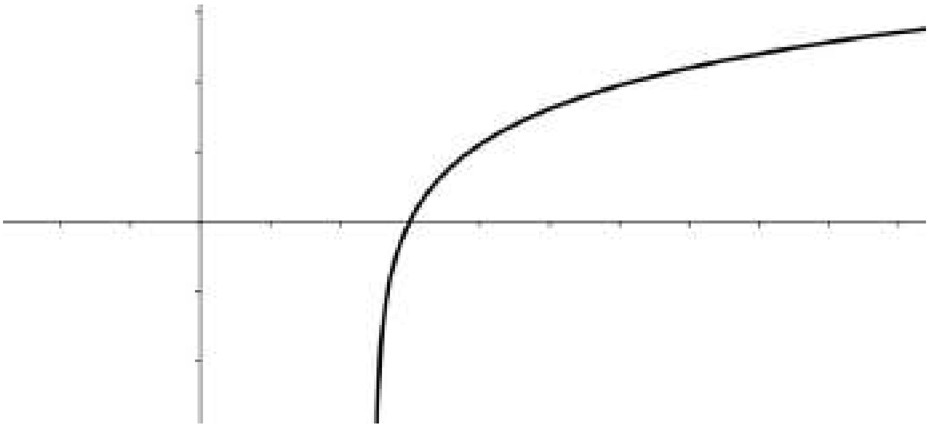
tecla . Obtenemos la gráfica del dibujo.



b) Procediendo como en el apartado anterior y tecleando **e^(X+5)**, obtenemos:



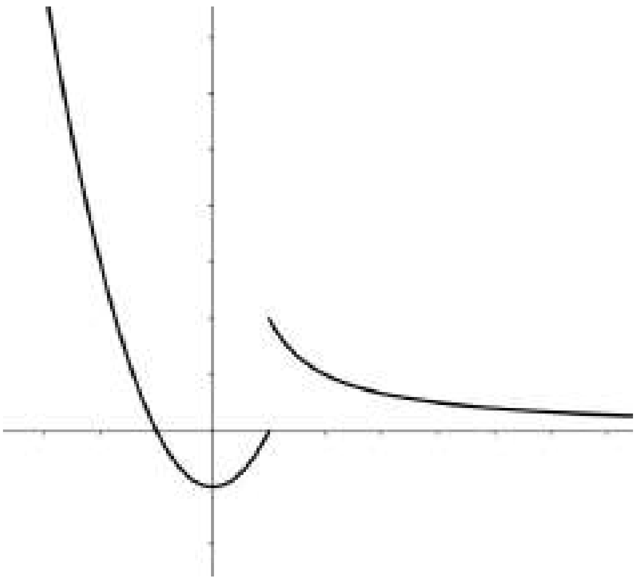
c) Procediendo como en los apartados anteriores y tecleando **ln(2*X-5)**, obtenemos:



2. a) Escribimos en **Y1=** la expresión:

(X^2 – 1) * (X < 1) + (2/X) * (X ≥ 1)

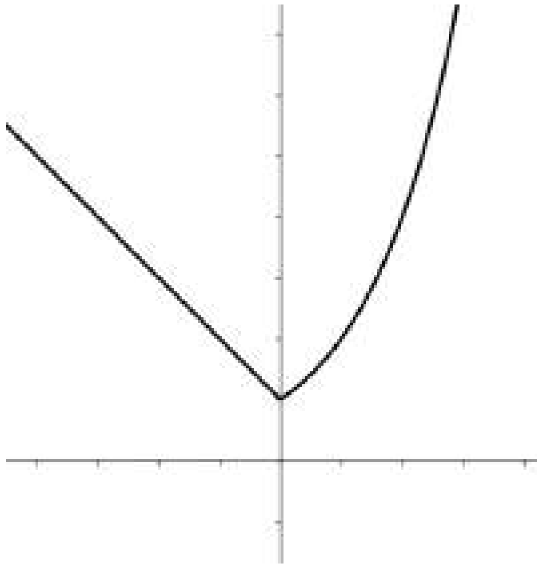
y obtenemos la gráfica:



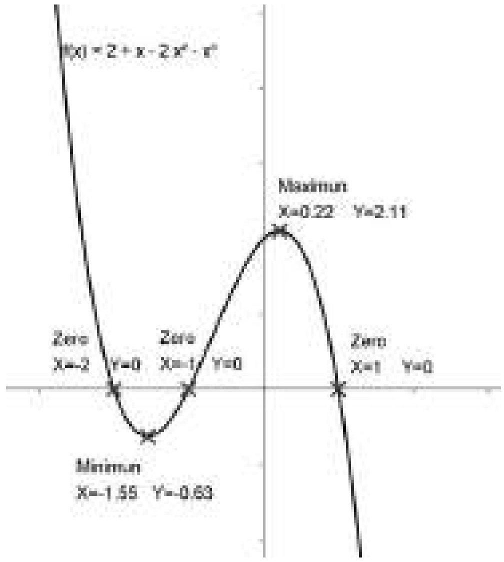
b) Escribimos en **Y1=** la expresión:

(-X + 1) * (X ≤ 0) + (2^X) * (X > 0)

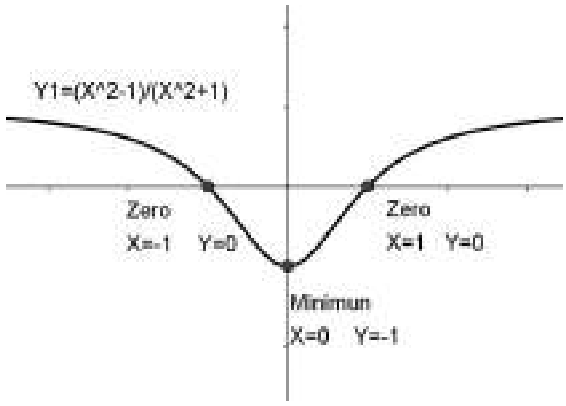
y obtenemos la gráfica:



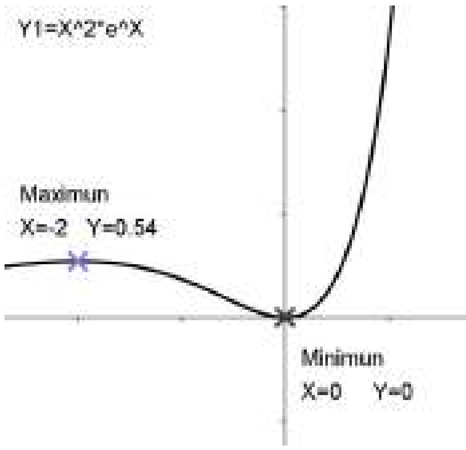
3. a) Representamos la función f (x) = 2 + x - 2x^2 – x^3 y con las opciones del menú que ofrece la 2nd CALC tecla obtenemos, como vemos en la imagen, que la función tiene tres cortes con OX en los puntos (- 2, 0); (- 1, 0) y (1, 0); un máximo relativo en (0,22; 2,11) y un mínimo relativo en (- 1,55; - 0,63).



b) Para la función g (x) = $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ procedemos como en el apartado anterior y obtenemos, como vemos en la imagen, que la función tiene dos cortes con OX en los puntos (- 1, 0) y (1, 0) y un mínimo relativo en (0, - 1).



c) Para la función h (x) = $x^2 \cdot e^x$ procedemos como en los apartados anteriores y obtenemos, como vemos en la imagen, que la función tiene un corte con OX en el punto (0, 0); un máximo relativo en (-2; 0,54) y un mínimo relativo en (0, 0).



ACTIVIDADES-PÁG. 244

1. En la tabla aparecen los resultados.

Valores	a) $f\ (x) = \dfrac{3x-1}{2x}$	b) $g\ (x) = \sqrt{x+1}$	c) $h\ (x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x}}$
- 2	Si	No	Si
- 1/2	Si	Si	Si
0	No	Si	Si
1/3	Si	Si	Si
1	Si	Si	No
$\sqrt{3}$	Si	Si	No
2	Si	Si	No

2. Las respuestas son:

a) Dom f = R; Im f = $(-\infty, 0]$

b) Dom f = [- 2,5; 2,5] Im f = {- 2, - 1, 0, 1, 2}

c) Dom f = $(-\infty,\ 0) \cup (2,\ +\infty)$ Im f = $(0, +\infty)$

3. Los dominios de las funciones son:

a) Dom f = R

b) Dom f = R – {0, - 2}

c) Dom f = [- 2, 2]

d) Dom f = R

e) Dom f = $(-2,\ +\infty)$

f) Dom f = R

g) Dom f = R

h) Dom f = $(-\infty,\ 0) \cup (3,\ +\infty)$

i) Dom f = R – { k · π; k ∈ Z}

4. a) Siempre se verifica que $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ por tanto si sumamos 2 en todos los miembros se mantiene la desigualdad $-1 + 2 \leq 2 + \cos 2x \leq 1 + 2$, de donde, $1 \leq 2 + \cos 2x \leq 3$, por lo que la función dada esta acotada entre 1 y 3

b) Por un lado $\frac{6}{x^2+3} > 0$ siempre, pues esta función racional siempre es positiva.

Por otro lado vamos a ver que $\frac{6}{x^2+3} \leq 2$; $\frac{6}{x^2+3} - 2 = \frac{-2x^2}{x^2+3} \leq 0$ siempre.

Por tanto $0 < \frac{6}{x^2+3} \leq 2$ es decir esta acotada por 0 y 2.

5. a) Dom f = R – {- 2, 2}; Im f = R.

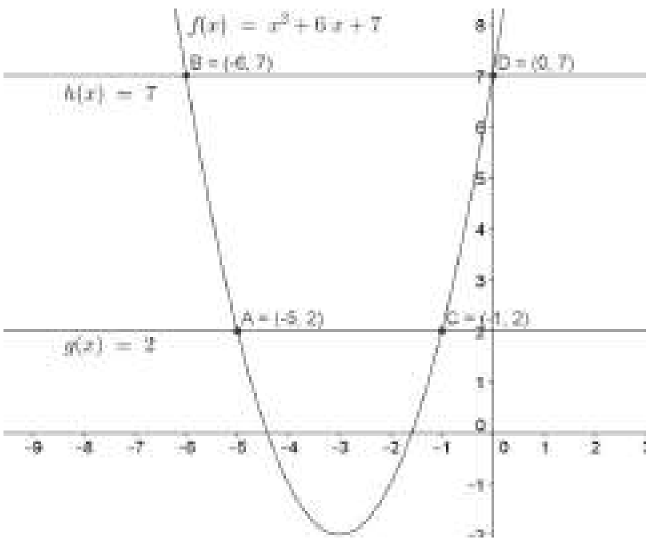
Estrictamente creciente en $(-\infty, -3{,}46) \cup (3{,}46\,;+\infty)$.
Estrictamente decreciente en $(-3{,}46\,;3{,}46) - \{-2\,,2\}$.
Tiene un máximo relativo en (- 3,46; - 5,2) y mínimo relativo en (3,46; 5,2).

b) Dom f = R; Im f = $(-\infty\,,0]$
Estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$.
Estrictamente decreciente en $(0\,,+\infty)$.
Máximo relativo (0, 0).

6. a) Se han de verificar las siguientes inecuaciones: $2 \leq x^2 + 6x + 7 \leq 7$.

Las soluciones son todos los valores de x pertenecientes a $[-6, -5] \cup [-1\,,0]$.

En el dibujo vemos también la solución:



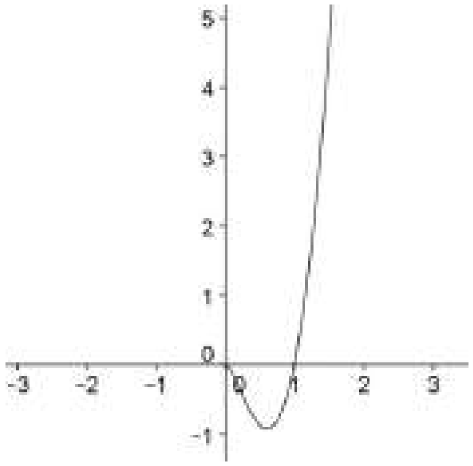
b) Se ha de verificar que $(x + 2)^2 + 6(x + 2) + 7 > x^2 + 6x + 7$.

De donde obtenemos $x > -4$.

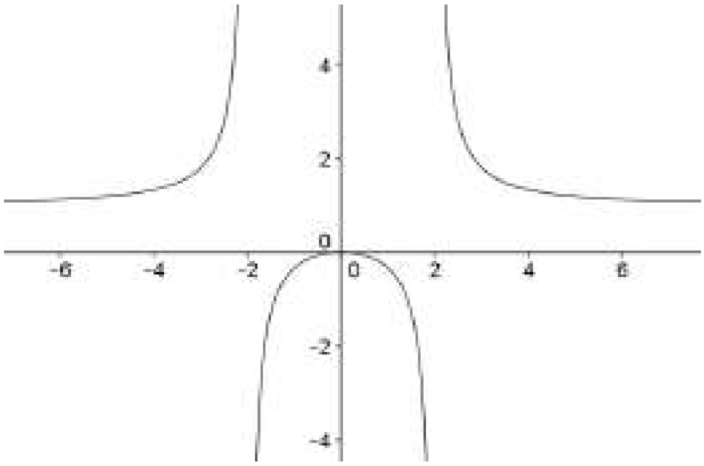
ACTIVIDADES-PÁG. 245

7. Las gráficas pueden ser como las que aparecen el los gráficos que sigue.

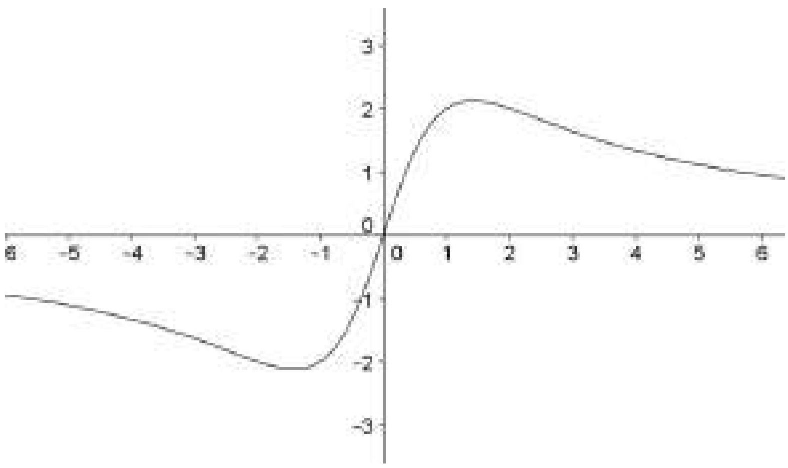
a)



b)



c)



8. Las características de las funciones aparecen en la tabla.

Características	a) y = f (x)	b) y = g (x)
Dominio	R	R
Recorrido	$[0, +\infty)$	[- 1, 1]
Acotación	Acotada inferiormente	Acotada
Monotonía	Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ Creciente en (0, 2)	Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ Creciente en (-1,1)
Extremos relativos	Mínimo en (0, 0) Máximo en (2; 0,54)	Mínimo en (- 1, - 1) Máximo en (1, 1)
Simetría	No tiene	Respecto del origen de coordenadas

9. Las respuestas son:

a) Simétrica respecto al origen de coordenadas.

b) Simétrica respecto al eje de ordenadas.

c) Simétrica respecto al eje de ordenadas.

d) Simétrica respecto al eje de ordenadas.

e) Simétrica respecto al origen de coordenadas.

f) Carece de simetría.

10. Ambas funciones son periódicas, entendiendo que continúan de igual forma a izquierda y derecha. La función y = f (x) tiene de periodo T = 2 y la función y = g (x) tiene de periodo T = 5.

11. Las respuestas aparecen a continuación.

a) $(f + h)(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x^2 - 4}$ Dom (f + g) = R - $\{+2, -2\}$

b) $(f \cdot h)(x) = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$ Dom (f · h) = R - $\{+2\}$

c) $(f : g)(x) = \dfrac{x + 2}{(x-2) \cdot e^{2x}}$ Dom (f · g) = R - $\{+2\}$

d) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x + 2}{x - 1}$ Dom (f^{-1}) = R - $\{+1\}$

e) $((f - h) \cdot g)(x) = \dfrac{(x^2 + 4x + 8)e^{2x}}{x^2 - 4}$ Dom ((f - h) · g) = R - $\{+2, -2\}$

f) $(g + h)(x) = e^{2x} - \dfrac{4}{x^2 - 4}$ Dom (g + h) = R - $\{+2, -2\}$

g) $g^{-1}(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right)$ Dom $g^{-1} = (0,+\infty)$

12. Las funciones y valores pedidos son.

a) $(f \circ g)(x) = \dfrac{2x+11}{(x+4)^2}$ c) $(h \circ h \circ h)(x) = x$

b) $(g \circ g)(-4) = 2$ d) $(h \circ f)(1) = 4/5$

ACTIVIDADES-PÁG. 246

13. a) El parámetro vale a = - 3.

b) El parámetro vale a = - 3

14. Las funciones inversas pedidas son:

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{2}x - 6$

b) $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{1-2x}$

c) $f^{-1}(x) = \log_2(x-3)$

d) $f^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{3}$

e) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - 2}{3}$

f) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^3 + 3}{2}$

15. Resolvemos la ecuación $\left|\dfrac{2-x}{x}\right| = \dfrac{2}{x+1}$ y obtenemos x = 1; x = - 2; $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

16. a) Llamando x a la longitud de la base, la función que nos permite hallar el área es A(x) = x (20 – x).

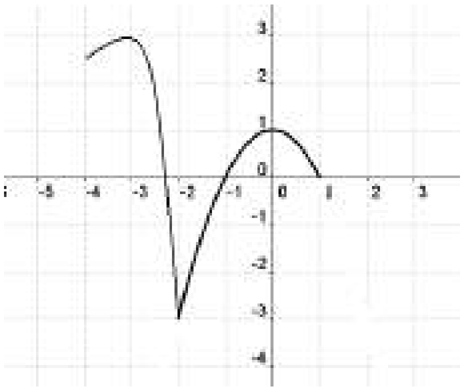
El dominio de esta función es (0, 20) y el recorrido (0, 100]

b) Llamando x al número de estudiantes que van al museo la función que da el precio a pagar por cada uno de ellos es: P(x) = 600 / x.

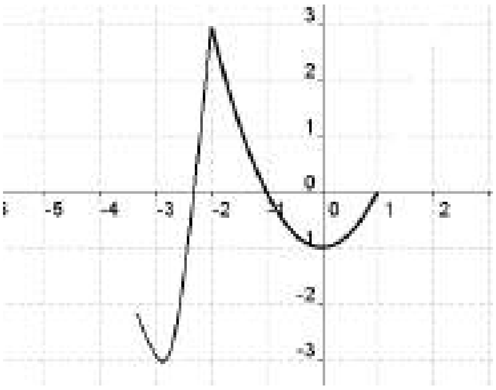
El dominio de esta función es [1, 50] y el recorrido es [12, 600]

17. La función buscada es $f(r) = 450r - (\pi + 4)r^2$

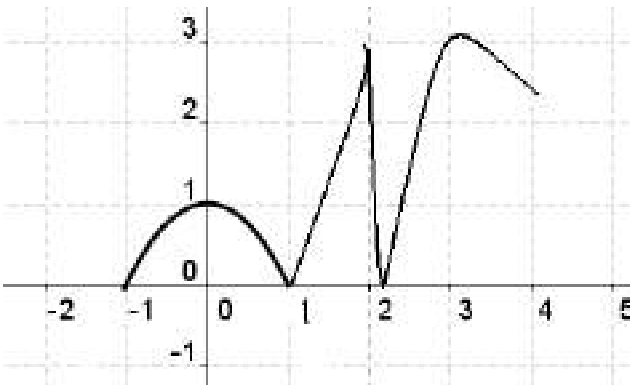
18. a) La simétrica respecto a OY quedaría:



b) La simétrica respecto del origen sería:



c) La gráfica de la función y $= \left| f\left(x\right) \right|$ sería:



19. La función buscada es $f(x) = \begin{cases} 400 & si \quad 0 < x < 30 \\ 12x & si \quad 30 \le x \le 60 \\ 50 + 8x & si \quad x > 60 \end{cases}$

20. Las respuestas a los apartados son:

a) El beneficio es de 338,56 €.

b) La función beneficio es B(x) = $\frac{104}{9}x - \frac{7}{100}x^2 - \frac{35}{3}$

c) El beneficio es nulo si vende aproximadamente 1 kg o 164 kg.

ACTIVIDADES-PÁG. 247

Ofrecemos bibliografía sobre la relación entre matemáticas y deporte.

BOLT, B. y HOBBS, D. (1991). *101 proyectos matemáticos.* Labor. Barcelona.

CORBALÁN, Fernando. (2007) *Matemáticas en la vida misma.* Graó. Barcelona.

CORBALÁN, Fernando. (201) *Matemáticas de cerca.* Graó. Barcelona.

ORTEGA, Tomás. (2005). *Conexiones matemáticas.* Graó. Barcelona.

SORANDO MUZÁS, J. M. (2012) *Matemáticas y deporte. Sugerencias para el aula.* Revista Números. Volumen 80.

SORANDO MUZÁS, J. M. http://catedu.es/matematicas_mundo/

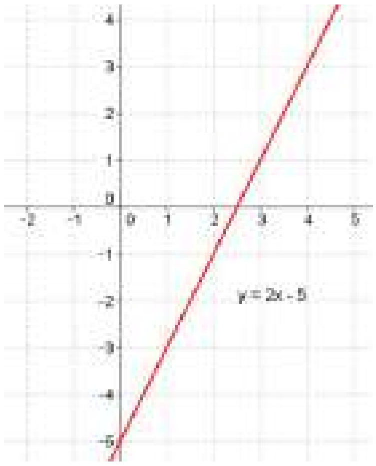
VV. AA. (2013). *Matemáticas y deporte.* Revista UNO. Graó. Barcelona.

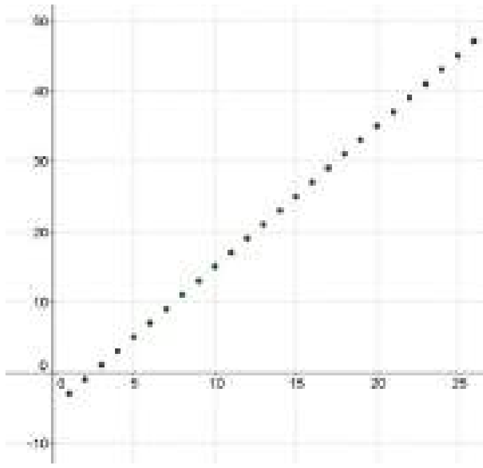
UNIDAD 11: Funciones elementales

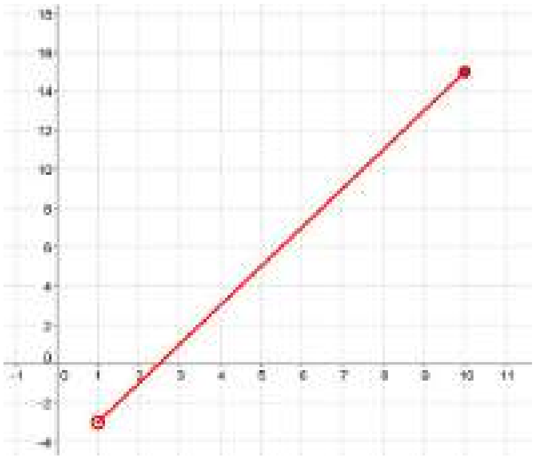
ACTIVIDADES-PÁG. 248

1. Las representaciones gráficas aparecen a continuación:

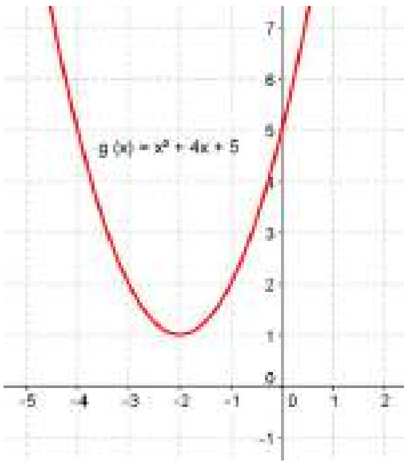
● $f(x) = 2x - 5$

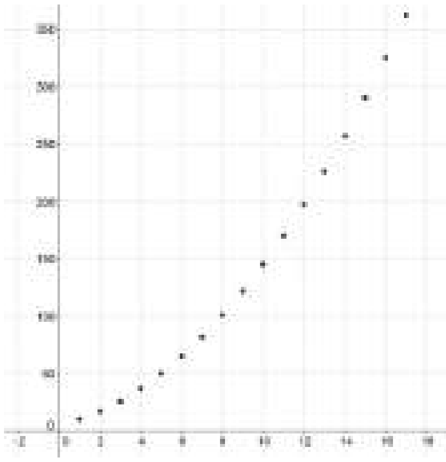


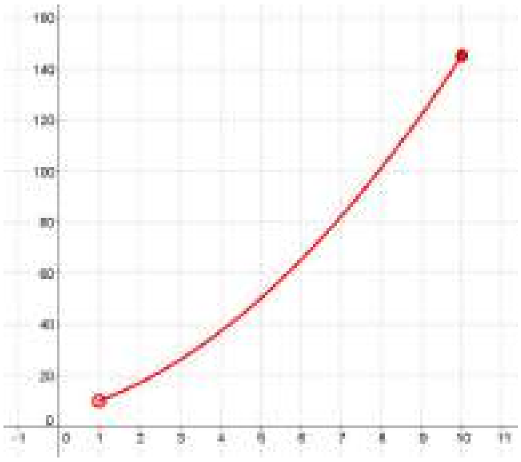




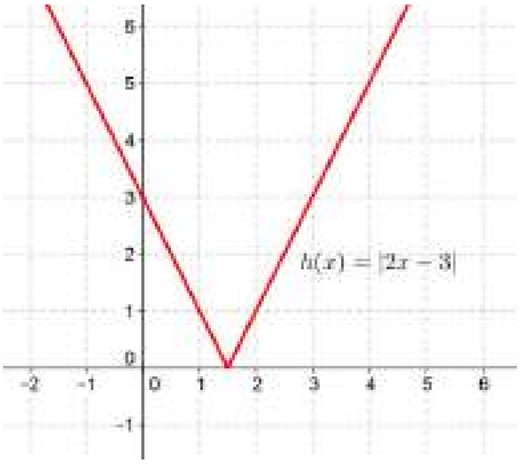
● $g(x) = x^2 + 4x + 5$

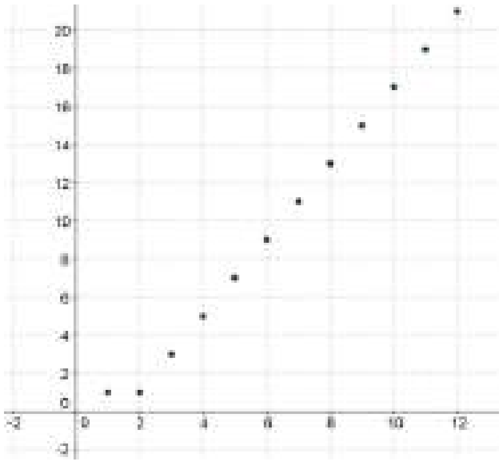


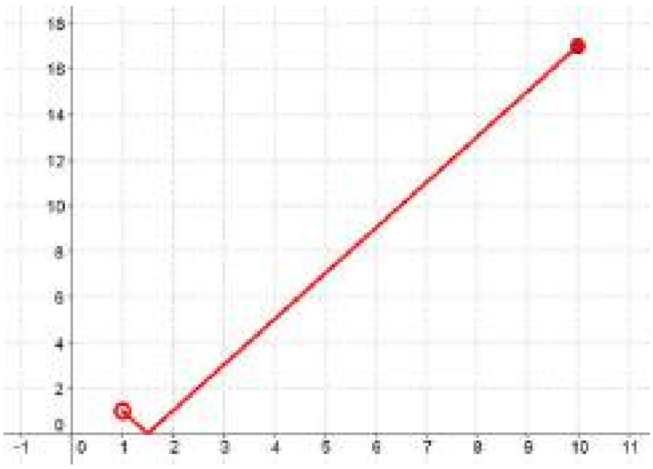




- $h(x) = |2x - 3|$







2. Los resultados aparecen en la tabla.

Función cuadrática	**Vértice**	**Eje**
a) $y = x^2$	(0, 0)	x = 0
b) $y = 4x^2$	(0, 0)	x = 0
c) $y = x^2 + 4$	(0, 4)	x = 0
d) $y = (x - 4)^2$	(4, 0)	x = 4

3. La correspondencia es:

a) con (II) b) con (IV) c) con (III) d) con (I)

Las características pueden verse en la tabla.

Características	**a) $y = 2^{x-2}$**	**b) $y = 2^x - 2$**	**c) $y = \log_2 (x + 2)$**	**d) $y = \log_2 (x) + 2$**
Dominio	R	R	$(-2, +\infty)$	$(0, +\infty)$
Recorrido	$(0, +\infty)$	$[-1, +\infty)$	R	R
Monotonía	Creciente en R	Creciente en R	Creciente en $(-2, +\infty)$	Creciente en $(0, +\infty)$
Extremos relativos	No tiene	No tiene	No tiene	No tiene
Acotación	Acotada inferiormente	Acotada inferiormente	No acotada	No acotada
Simetría	No tiene	No tiene	No tiene	No tiene
Asíntotas	y = 0	y = - 2	x = - 2	x = 0

ACTIVIDADES-PÁG. 267

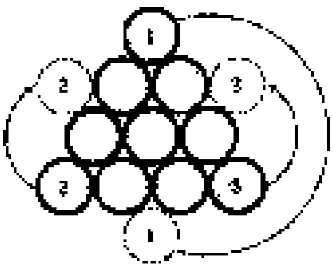
1. Cada día asciende 30 m y resbala 20 m, en realidad asciende 10 m.

Luego al cabo de 27 días ha ascendido 270 m, y ya el día 28 asciende a la superficie, pues asciende 30 m y 270 + 30 = 300 m.

El caracol tarda 28 días en salir.

2. La solución puede verse en el esquema:

Simplemente cambiando tres monedas, las señaladas con los números 1, 2 y 3, el triángulo se invierte.



3. Llamamos $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}$ y elevamos al cuadrado: $x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}$

Operamos y obtenemos:

$$x^2 = 1 + x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{5}$$

La solución con sentido es $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{5}$, que es el número de oro.

4. Comenzando el problema desde el final:

Ave 8ª le da 1 + 1 = 2
Ave 7ª (tiene 6), le da 3 + 1 = 4 y le quedan 2.
Ave 6ª (tiene 14), le da 7 + 1 = 8 y le quedan 6.
Ave 5ª (tiene 30), le da 15 + 1 = 16 y le quedan 14.
Ave 4ª (tiene 62), le da 31 + 1 = 32 y le quedan 30.
Ave 3ª (tiene 126), le da 63 + 1 = 64 y le quedan 62.
Ave 2ª (tiene 254), le da 127 + 1 = 128 y le quedan 126.
Ave 1ª (tiene 510), le da 255 + 1 = 256 y le quedan 254.

Al principio tenía 510 granos de maíz.

5. Las pesas que necesitamos ha de ser de 1, 3, 9 y 27 kg.

Las pesadas son:

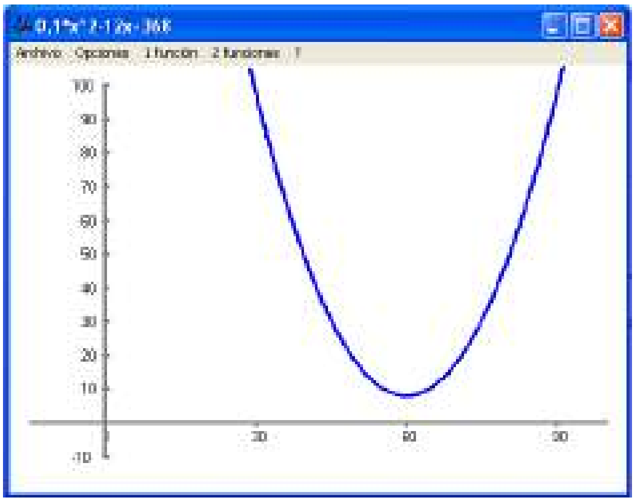
1 kg = 1
2 kg = 3 – 1
3 kg = 3
4 kg = 3 + 1
5 kg = 9 – 3 – 1
6 kg = 9 – 3
7 kg = 9 – 3 + 1
8 kg = 9 – 1
9 kg = 9
10 kg = 9 + 1

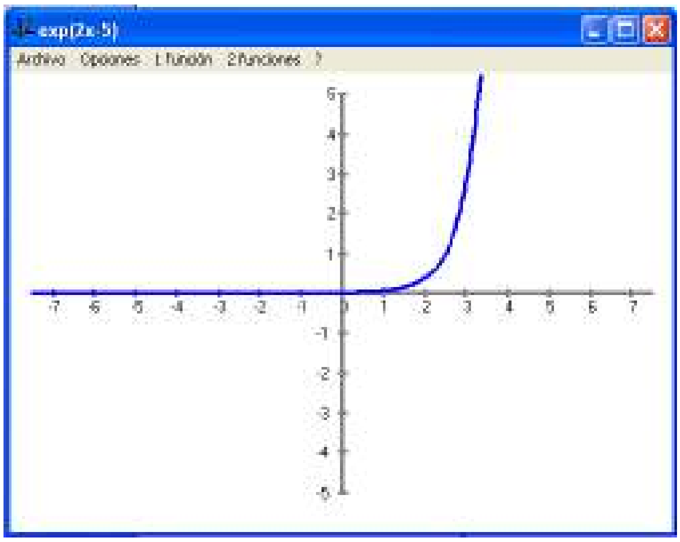
Y así sucesivamente.

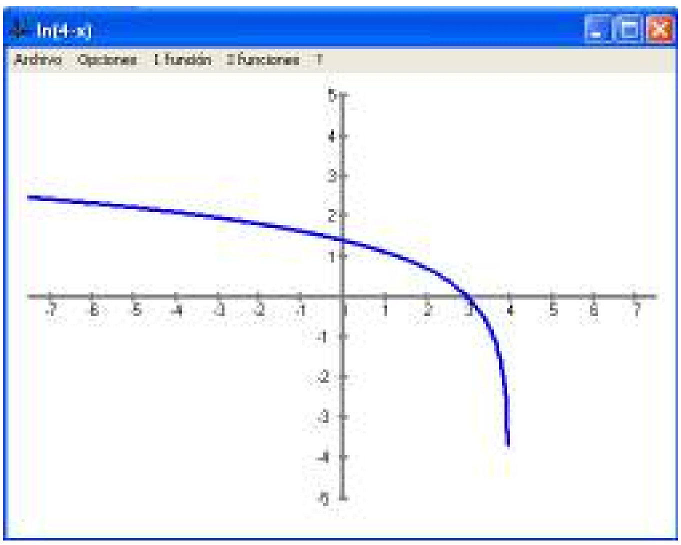
La suma de los números significa que las pesas se colocan en el mismo plato de la balanza, y la diferencia, que se colocan en platos diferentes.

ACTIVIDADES-PÁG. 269

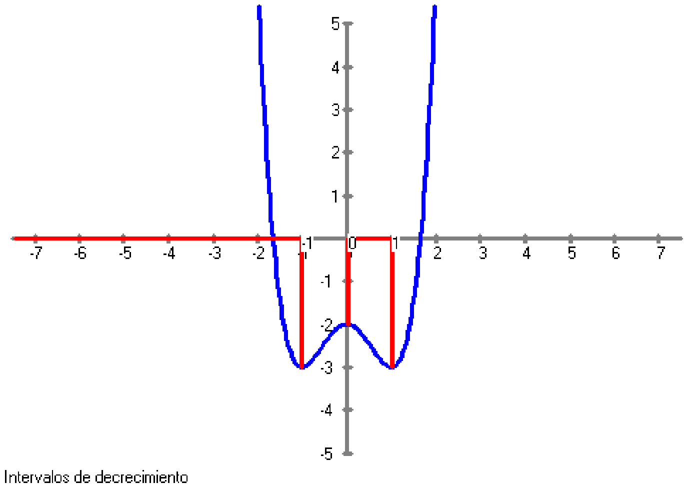
1. En las siguientes imágenes podemos ver las gráficas de estas funciones:



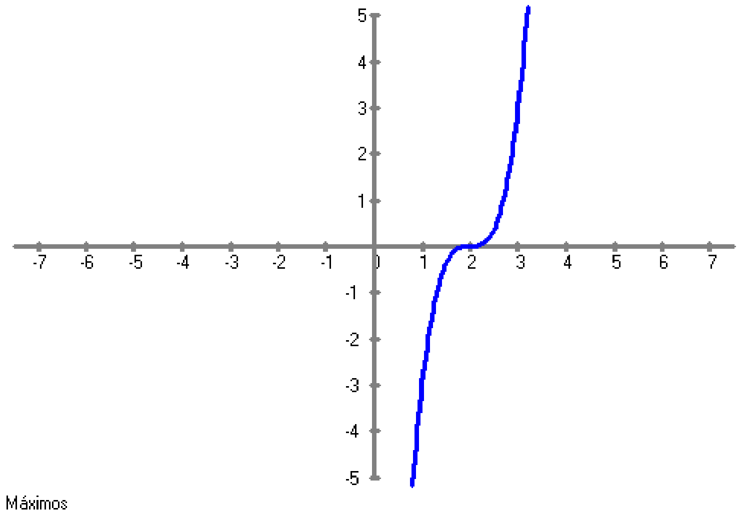




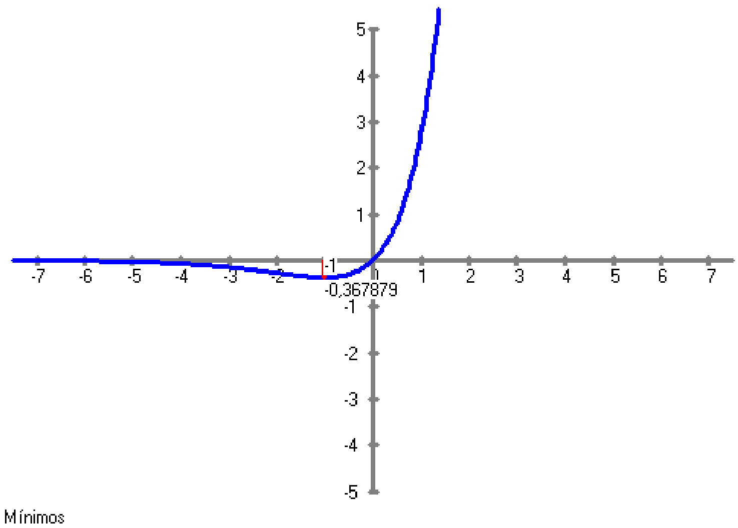
2. La función $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$ es creciente en $(-1, 0) \cup (1,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$. Tiene un máximo relativo en (0, -2) y dos mínimos relativos en los puntos (-1, -3) y (1, -3) como podemos ver en su gráfica.



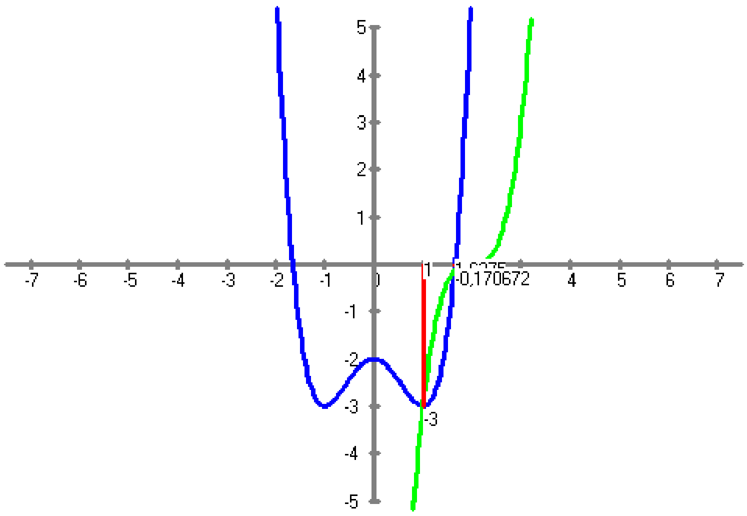
b) La función $g(x) = 3\ (x - 2)^3$ es creciente en R. Carece de extremos relativos como podemos ver en su gráfica.



c) La función $f(x) = x \cdot e^x$ es creciente en $(-1,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,-1)$. Tiene un mínimo relativo en el punto (-1, -0,37) y carece de máximos relativos como podemos ver en su gráfica.

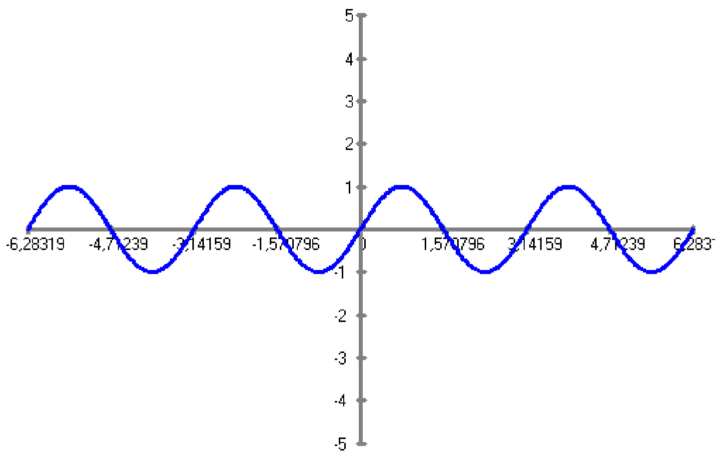


Los puntos de corte de las funciones f(x) y g(x) son (1,-3) y (1,64; -0,18) como podemos ver en la imagen.

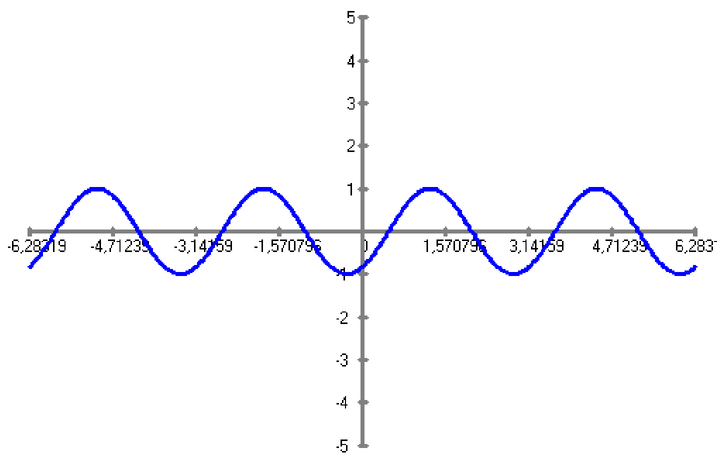


Puntos de corte

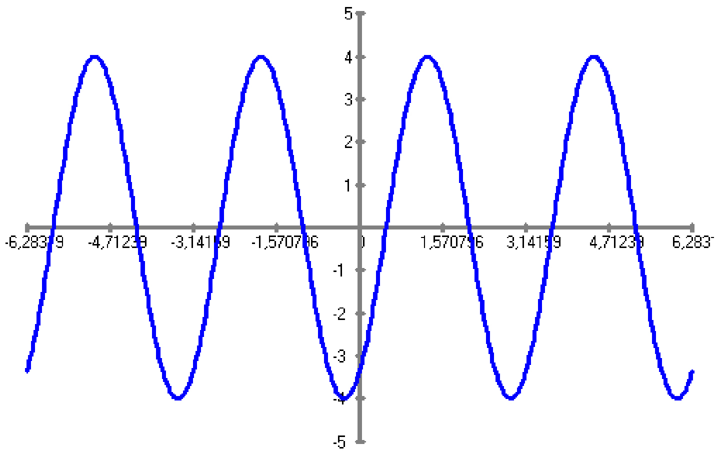
3. a) La gráfica puede verse en el dibujo.



b) La gráfica de la función g(x) se obtiene a partir de la gráfica de f(x) mediante una traslación de vector (0,5; 0).



c) La gráfica de la función h(x) se obtiene a partir de la gráfica de f(x) mediante una dilatación multiplicando sus ordenadas por 4.



ACTIVIDADES-PÁG. 270

1. En cada caso queda:

a) La función es $y = \frac{3}{5}x$.

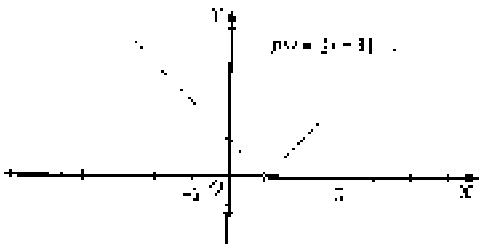
b) Es la función lineal y = 2x.

c) Su ecuación es y = - 3x.

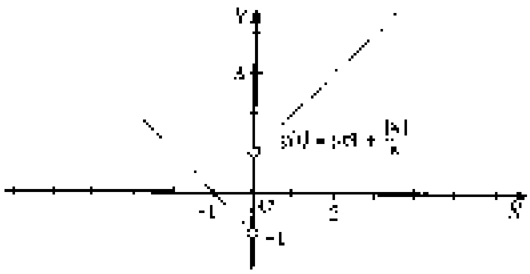
d) No están alineados.

2. Las gráficas quedan:

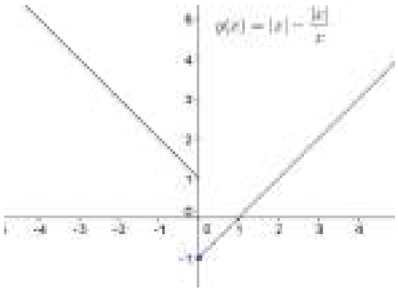
a) $f\ (x) = |\,x - 1\,|$



b) $g\ (x) = |\,x\,| + \frac{|\,x\,|}{x}$

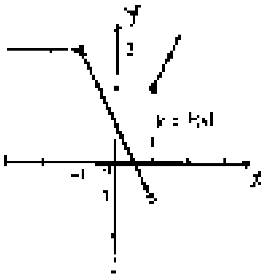


c) $h\,(x) = |\,x\,| - \dfrac{|\,x\,|}{x}$



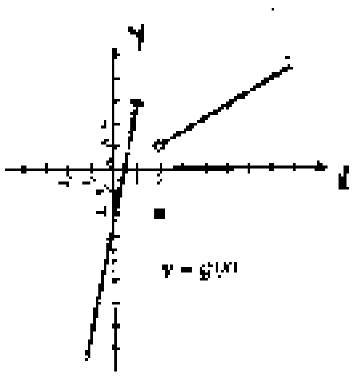
3. Las gráficas y sus características quedan:

a) y = f (x)



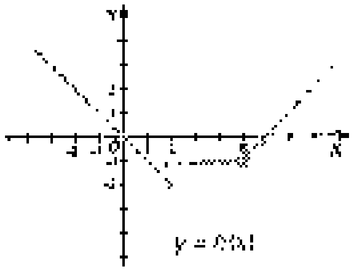
Dom f = R
Im f = $(-\,1, +\,\infty)$
Estrictamente decreciente en (- 1, 1).
Estrictamente creciente en $(1, +\,\infty)$
No tiene extremos relativos.
Está acotada inferiormente por – 1.
No es simétrica ni respecto al eje de ordenadas ni respecto al origen.

b) y = g (x)



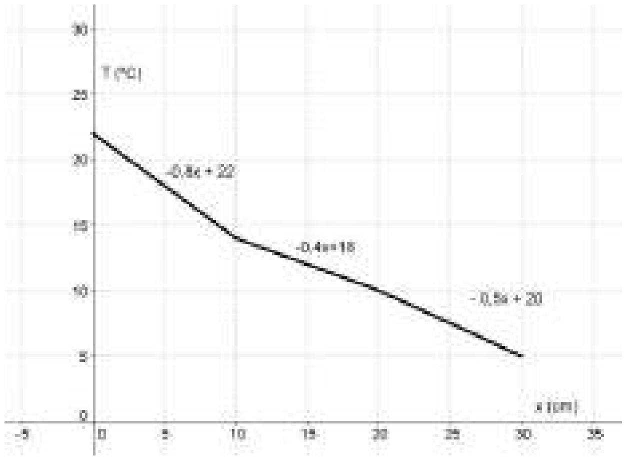
Dom g = $(-\,\infty, 1] \cup [2, +\,\infty)$
Im g = R
Estrictamente creciente en $(-\,\infty, 1) \cup (2, +\,\infty)$.
No tiene extremos relativos.
No está acotada.
No es simétrica ni respecto al eje de ordenadas ni respecto al origen.

c) $y = h(x)$



Dom h = R
Im h = $[-\,2, +\,\infty)$
Estrictamente decreciente en $(-\,\infty, 2))$.
Estrictamente creciente en $(5, +\,\infty)$
No tiene extremos relativos.
Está acotada inferiormente por 2 y no está acotada superiormente, luego no está acotada.
No es simétrica ni respecto al eje de ordenadas ni respecto al origen.

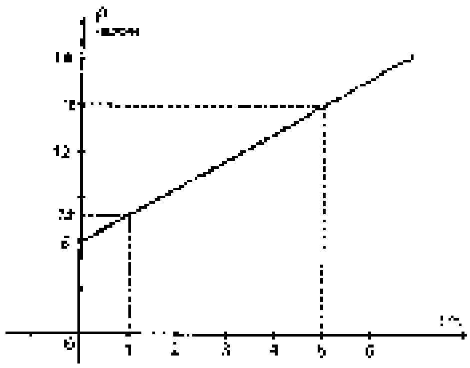
4. La representación gráfica es:



5. La solución queda:

a) La función es P = 6 + 1,8 · t, donde P es el precio a pagar en euros y t el tiempo en horas.

b) La gráfica aparece adjunta.



c) La función será:

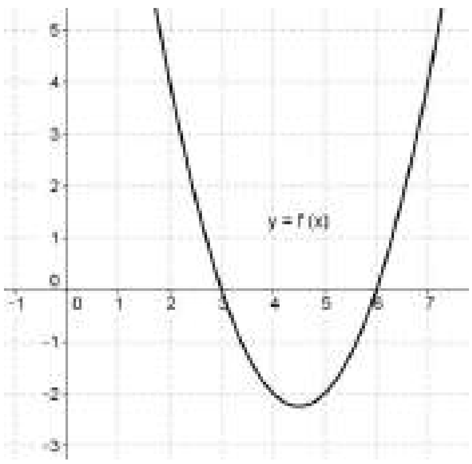
$$f\ (x) = \frac{116}{100}\ P = \frac{116}{100}\ (6 + 1{,}8 \cdot t)$$

Todas las ordenadas de la función P = 6 + 1,8 · t quedan multiplicadas por 1,16.

ACTIVIDADES-PÁG. 271

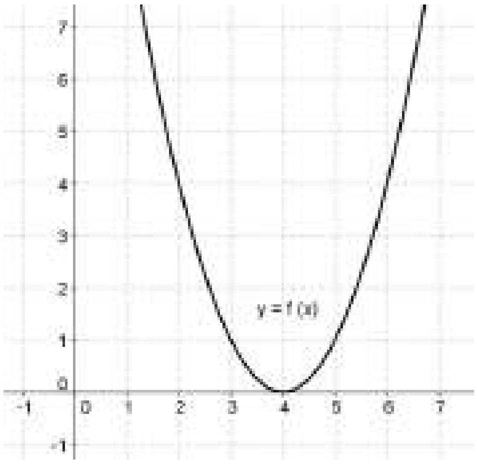
6. La respuesta aparece a continuación.

a) $f(x) = x^2 - 9x + 18$



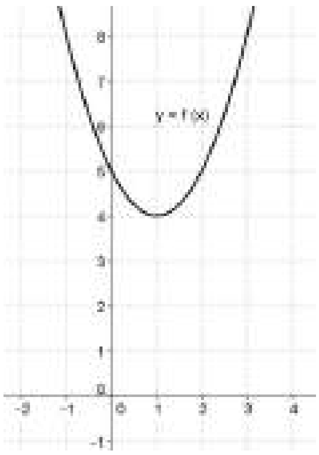
Dom f = R
Im f = $(-\ 2{,}25,\ +\infty]$
Estrictamente decreciente en $(-\infty,\ 4{,}5)$.
Estrictamente creciente en $(4{,}5,\ +\infty)$
Mínimo relativo en (4,5; -2,25).
Está acotada inferiormente por – 2,25.
Mínimo absoluto es – 2,25.
Es simétrica respecto de su eje x = 4,5.

b) $f(x) = x^2 - 8x + 16$



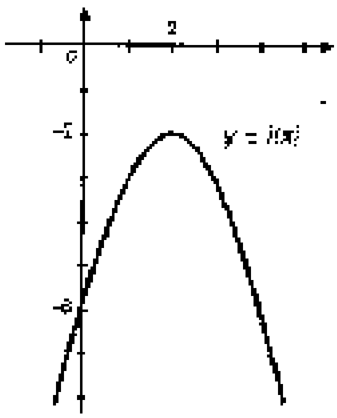
Dom f = R
Im f = $[0, +\infty)$
Estrictamente decreciente en $(-\infty, 4)$.
Estrictamente creciente en $(4, +\infty)$
Mínimo relativo en (4, 0).
Está acotada inferiormente por 0. Mínimo absoluto es 0.
Es simétrica respecto de su eje x = 4.

c) $f(x) = x^2 - 2x + 5$



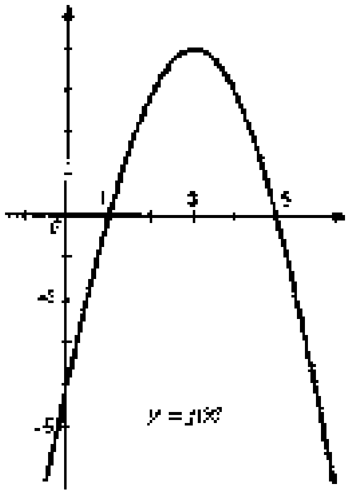
Dom f = R
Im f = $[4, +\infty)$
Estrictamente decreciente en $(-\infty, 1)$.
Estrictamente creciente en $(1, +\infty)$
Mínimo relativo en (1, 4).
Está acotada inferiormente por 4. Mínimo absoluto es 4.
Es simétrica respecto de su eje x = 1.

d) $f(x) = -x^2 + 4x - 6$



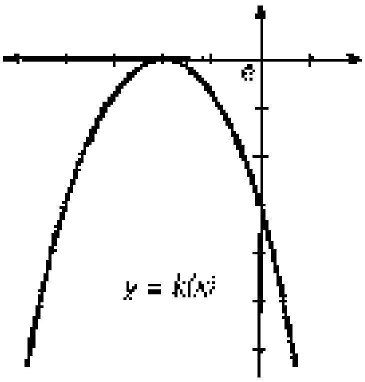
Dom f = R
Im f = $(-\infty, -2]$
Estrictamente creciente en $(-\infty, 2)$.
Estrictamente decreciente en $(2, +\infty)$
Máximo relativo en (2, - 2).
Está acotada superiormente por - 2. Máximo absoluto es - 2.
Es simétrica respecto de su eje x = 2.

e) f (x) = - x^2 + 6x - 5



Dom f = R
Im f = $(-\infty, 4]$
Estrictamente creciente en $(-\infty, 3)$.
Estrictamente decreciente en $(3, +\infty)$
Máximo relativo en (3, 4).
Está acotada superiormente por 4. Máximo absoluto es 4.
Es simétrica respecto de su eje x = 3.

f) f (x) = - x^2 – 4x - 4



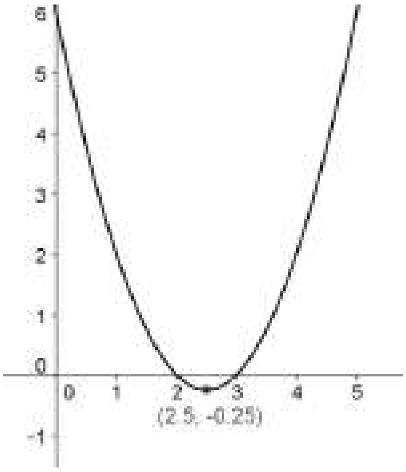
Dom f = R
Im f = $(-\infty, 0]$
Estrictamente creciente en $(-\infty, -2)$.
Estrictamente decreciente en $(-2, +\infty)$
Máximo relativo en (- 2, 0).
Está acotada superiormente por 0. Máximo absoluto es 0.
Es simétrica respecto de su eje x = - 2.

7. a) Imponiendo que pase por los puntos (- 1, 0) y (0, - 3) y tiene su vértice en (- 2, 1), obtenemos la función g (x) = - x^2 – 4x – 3.

b) Imponiendo que pase por los puntos (0, 6) y (2, 2) y tiene en este último su vértice, obtenemos la función f (x) = x^2 – 4x + 6.

8. a). Hay infinitas soluciones. Todas las funciones cuadráticas de la forma $y = k \cdot (x^2 - 4)$ con $k \in \mathbb{R}$.

b) La representación gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$ queda:



A la vista de la gráfica tenemos:

$f(x) > 0$ en $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

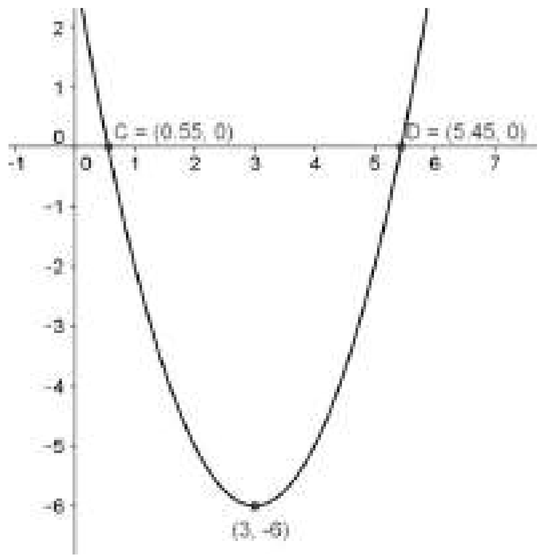
$f(x) < 0$ en $(2, 3)$

$f(x) = 0$ en $x = 2$ y $x = 3$.

c) Buscamos los valores que hacen $f(x) = x^2 - 6x + 5 \geq 2$, es decir, $g(x) = x^2 - 6x + 3 \geq 0$.

Para calcular los intervalos observamos la representación gráfica de dicha función:

Veamos los intervalos para los cuales la función $g(x) = x^2 - 6x + 3 \geq 0$.



En la gráfica se observa que:

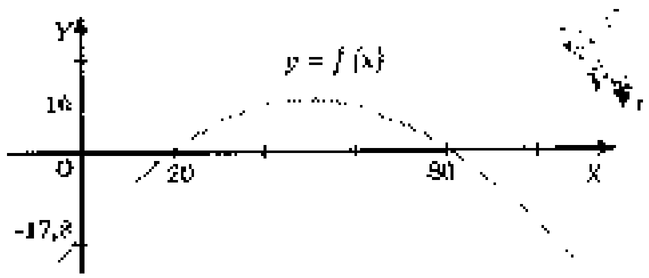
$g(x) > 0$ en $(-\infty; 0{,}55) \cup (5{,}45; +\infty)$

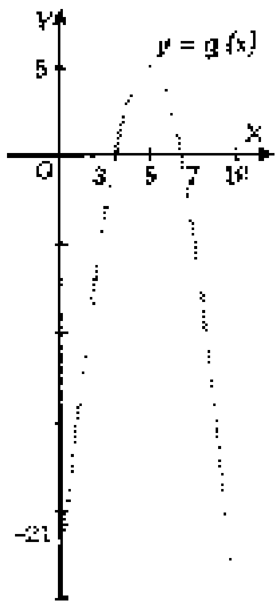
$g(x) = 0$ en $x = 0{,}55$ y $x = 5{,}45$.

Luego $f(x) \geq 2$ en $(-\infty; 0{,}55] \cup [5{,}45; +\infty)$

9. En cada caso:

a) Las representaciones quedan:





b) En el primer caso hay que fabricar entre 20 y 80 unidades y en el segundo caso entre 3 y 7 unidades.

c) En la función f (x) el mayor beneficio se produce al fabricar 50 unidades y este beneficio es de 10 000 euros.

En la función g (x) el mayor beneficio se produce al fabricar 5 unidades y este beneficio es de 4 000 euros.

10. El precio de equilibrio se consigue cuando coinciden ambas funciones:

$$\frac{19}{50}p + 100 = -\frac{2}{3}p + \frac{16\,000}{3} \quad \Rightarrow \quad p = 5\,000$$

El precio de equilibrio es de 5 000 €, y la cantidad de equilibrio es de 2 000 unidades.

11. En cada caso:

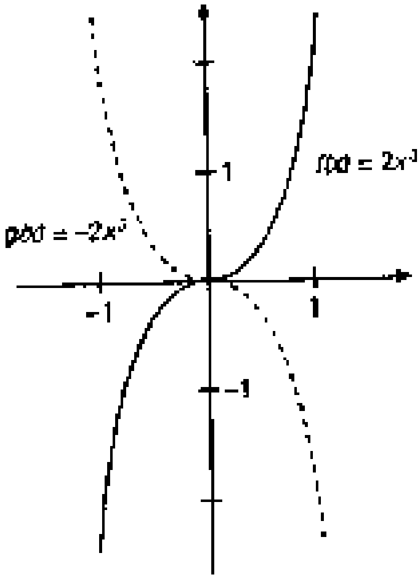
a) El precio de equilibrio es p = 30 euros y la cantidad de equilibrio es 240 unidades.

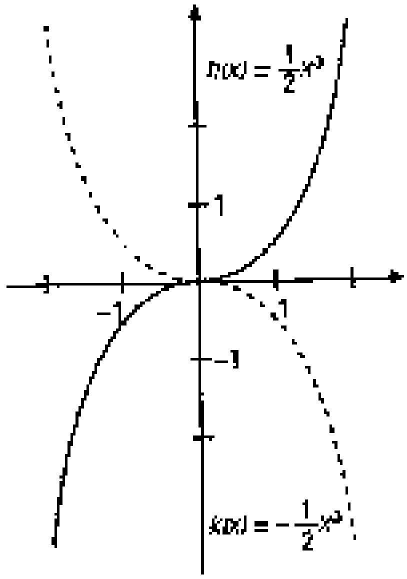
b) Si se pone un precio de 40 euros/unidad, él oferta 270 unidades y se demandan solo 220 unidades, es decir se produce un exceso.

Si se pone un precio de 15 euros/unidad, la oferta es de 195 unidades y se demandan 270 unidades, es decir, hay escasez de producto.

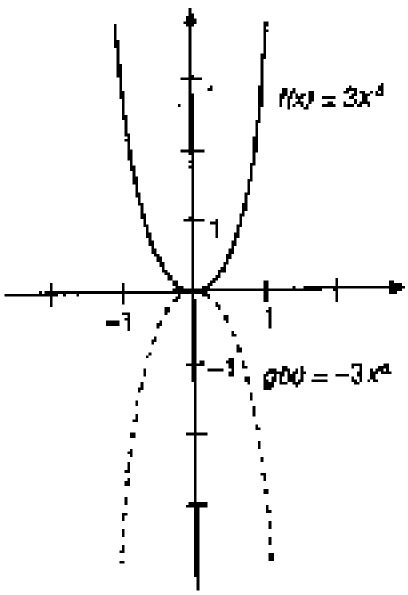
ACTIVIDADES-PÁG. 272

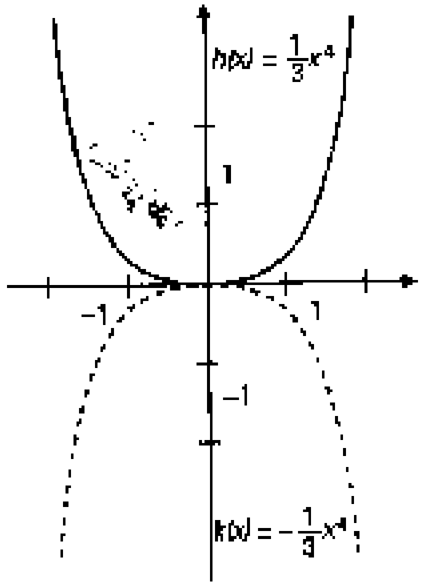
12. Las representaciones gráficas son:





13. Las representaciones gráficas son:





14. Resolvemos los sistemas y obtenemos:

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^6 \end{cases} \Rightarrow x^6 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$. Los puntos de corte son: (0, 0); (1, 1) y (- 1, 1).

b) $\begin{cases} y = x^5 \\ y = x^7 \end{cases} \Rightarrow x^7 - x^5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$. Los puntos de corte son: (0, 0); (1, 1) y (- 1, - 1).

c) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^3 \end{cases} \Rightarrow x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$. Los puntos de corte son: (0, 0) y (1, 1).

15. La correspondencia queda:

$y = f(x) = x^4 - 1$ con d)

$y = g(x) = (x + 1)^7$ con e)

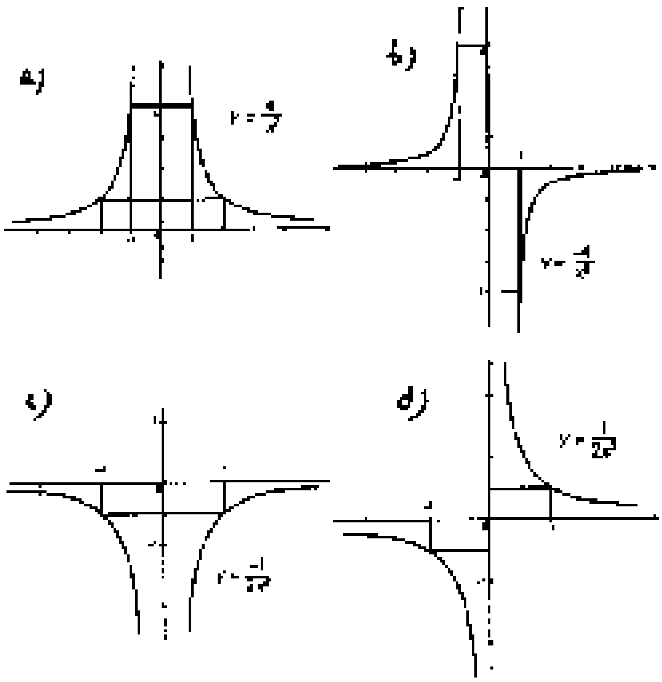
$y = h(x) = -\frac{1}{8}x^3$ con a)

$y = i(x) = -x^5 + 1$ con f)

$y = j(x) = 2(x - 1)^2$ con c)

$y = h(x) = -2x^4$ con b)

16. Las representaciones quedan:



17. Las soluciones son:

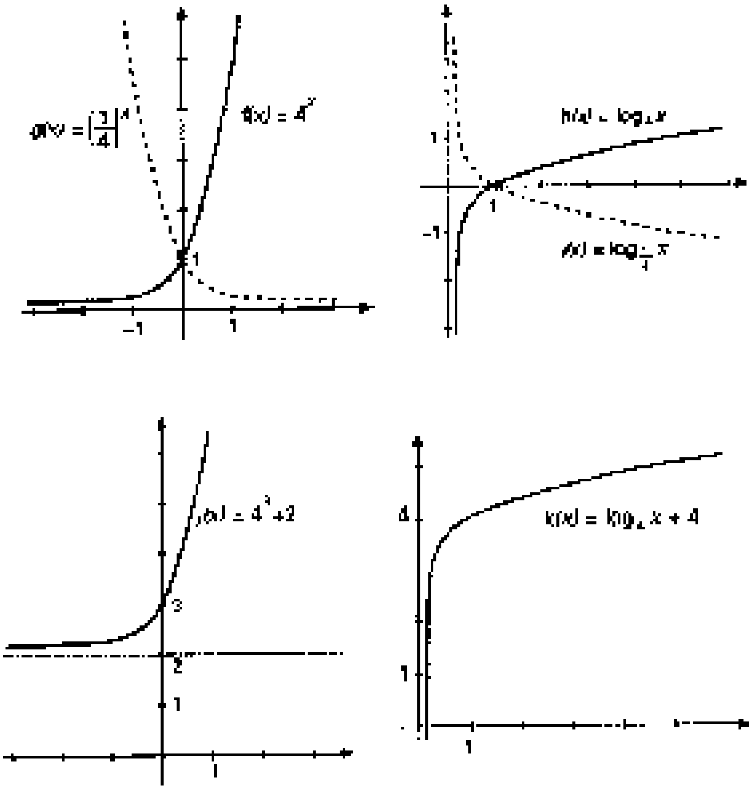
a) Se verifica $x^4 \leq 1$ en $[-1, 1]$

b) Se verifica $x^5 \leq 32$ en $(-\infty, 2]$

c) Se verifica $\frac{1}{x^2} \geq 4$ en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] - \{0\}$

ACTIVIDADES-PÁG. 273

18. Las gráficas son:



19. Las desigualdades son:

a) $\log_4 2{,}5 < \log_4 3$

b) $2^3 > 2^{-2}$

c) $\log_{\frac{1}{5}} 6 < \log_{\frac{1}{5}} 4$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} > \left(\frac{1}{5}\right)^{2}$

e) $0{,}5^3 < 0{,}5^{-3}$

f) $\log_2 \frac{1}{4} > \log_2 \frac{1}{8}$

20. Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\begin{cases} 100 = A \cdot e^0 \\ 2010 = A \cdot e^{B \cdot 6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 100 \\ B = \dfrac{\ln\ (20{,}10)}{6} = 0{,}5 \end{cases}$$

La función buscada es: $N = 100 \cdot e^{0,5 \cdot t}$

Para que haya 14 850 ejemplares han de pasar t años, y se debe verificar:

$$14\,850 = 100 \cdot e^{0,5 \cdot t} \quad \Rightarrow \quad t = 10 \text{ años.}$$

21. El sueldo de este empleado al cabo de t años será y = $1{,}12^t \cdot x$, siendo x el sueldo inicial.

● Si $2x = 1{,}12^t \cdot x$, entonces $t = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}12} = 6{,}12$ años tardará en duplicar su salario.

● Si $4x = 1{,}12^t \cdot x$, entonces $t = \dfrac{\log 4}{\log 1{,}12} = 12{,}23$ años tardará en cuadruplicar su salario.

● Si $6x = 1{,}12^t \cdot x$, entonces $t = \dfrac{\log 6}{\log 1{,}12} = 15{,}8$ años tardará en sextuplicar su salario.

22. Con un crecimiento anual del 2% al cabo de t años, habrá en la Tierra una población de:

$P = 1{,}02^t \cdot 4$ mil millones de habitantes.

De este modo: $10 = 1{,}02^t \cdot 4$, entonces $t = \dfrac{\log \frac{10}{4}}{\log 1{,}02} = 46{,}27$ *años*.

Al cabo de 46,27 años la población será de 10 mil millones.

23. Las soluciones son:

a) En el año 1600 hay una unidad de madera.

En el año 1800 había $(1 + 50\% \text{ de } 1)^2 = 1{,}5^2$ unidades de madera.

En el año 1900 había $1{,}5^3$ unidades de madera.

En el año 2005 había $1{,}5^{4{,}05}$ unidades de madera.

b) La función es $y = 1{,}5^t$, siendo t el tiempo en siglos a partir de 1600.

c) En el año 1500 había $1{,}5^{-1} = 0{,}667$ unidades de madera (u. m.)

En el año 1400 había $1{,}5^{-2} = 0{,}444$ u. m.
En el año 1450 había $1{,}5^{-1{,}5} = 0{,}544$ u. m.

En el año 1000 había $1{,}5^{-6} = 0{,}087$ u. m.

d) Para que haya el doble de madera que en 1600 se ha de verificar:

$$2 = 1{,}5^t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\log 2}{\log 1{,}5} = 1{,}710 \ siglos$$, es decir, en el año 1600 + 171 = 1771.

Para que haya la mitad de madera que en 1600 se ha de verificar:

$$\frac{1}{2} = 1{,}5^t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\log 0{,}5}{\log 1{,}5} = -1{,}710 \ siglos$$, es decir, en el año 1600 - 171 = 1429.

e) Si consideramos la madera en un tiempo t como $1{,}5^t$ y queremos saber cuánto tiempo t´ ha de pasar para que la madera se triplique, $3 \cdot 1{,}5^t$, obtenemos:

$$1{,}5^{t' + t} = 3 \cdot 1{,}5^t \quad \Rightarrow \quad 1{,}5^{t'} = 3 \quad \Rightarrow \quad t' = 2{,}710 \ siglos.$$

Es decir, cada 2,710 siglos o 271 años, la madera se triplica.

24. Para ver en qué momento vende el mismo número de ruedas de cada tipo resolvemos la ecuación:

$$4^{t-1} = 2^t \quad \Rightarrow \quad 2^{2t-2} = 2^t \quad \Rightarrow \quad 2t - 2 = t \quad \Rightarrow \quad t = 2 \ años$$

Al cabo de dos años.

Vender más ruedas S que N para los valores de t que verifiquen la inecuación:

$$4^{t-1} > 2^t \quad \Rightarrow \quad 2^{2t-2} > 2^t \quad \Rightarrow \quad 2t - 2 > t \quad \Rightarrow \quad t > 2 \ años$$

A partir del 2º año se vende más ruedas de calidad S que de calidad N.

ACTIVIDADES-PÁG. 274

25. a) $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$

b) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$

c) En todo el intervalo $[0, 2\pi]$

d) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$

26. a) sen y = - 1/2;   y = 210º + 360º k; y = 330º + 360º k

b) cos y = $\frac{\sqrt{3}}{2}$;   y = 30º + 360º k; y = 330º + 360º k

c) tg y = -1; y = 135º + 180º k

27. El vector traslación es $\vec{v} = (4, 3)$ por lo que la función g(x) es: $g(x) = (x - 2)^2 + 2$.

28. a) Se obtiene al trasladar la gráfica de la función $y = x^4$ mediante el vector $\vec{v} = (0, - 2)$.

b) Se obtiene al trasladar la gráfica de la función $y = \log_2 x$ mediante el vector $\vec{v} = (- 1/2, 0)$.

c) Se obtiene al trasladar la gráfica de la función $y = x^2$ mediante el vector $\vec{v} = (5 , 3)$.

d) Se obtiene al trasladar la gráfica de la función y = cos x mediante el vector $\vec{v} = (\pi/2 \ ,0)$.

e) Se obtiene al trasladar la gráfica de la función y = 1 / x mediante el vector $\vec{v}(- 4, 6)$.

f) Se obtiene a partir de la gráfica de la función y = cos x con periodo 8π.

g) Esta función es $y = (x + 3)^2 – 2$ y se obtiene al trasladar la gráfica de la función $y = x^2$ mediante el vector $\vec{v} = (- 3, - 2)$.

h) Se obtiene al trasladar la gráfica de la función $y = e^x$ mediante el vector $\vec{v} = (-2 , 4)$.

i) Se obtiene de dilatar la gráfica de la función y = sen x al multiplicar sus ordenadas por 2.

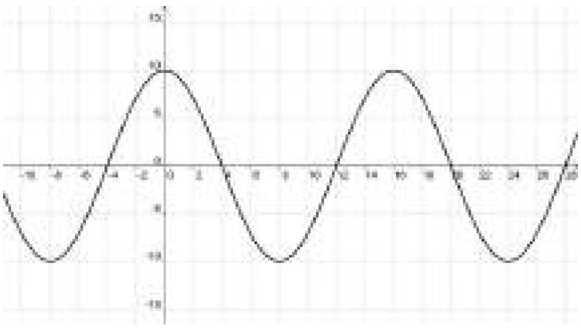
29. a) El precio de equilibrio se da cuando ambas funciones coinciden, es decir:

$$f_0 (p) = f_d (p);\ \ 6 p + 222,5 = 240 – 0,4 p^2;\ \ p = 2,5 €$$

y la cantidad de equilibrio es $f_0 (2,5) = f_d (2,5) = 237,5$ €

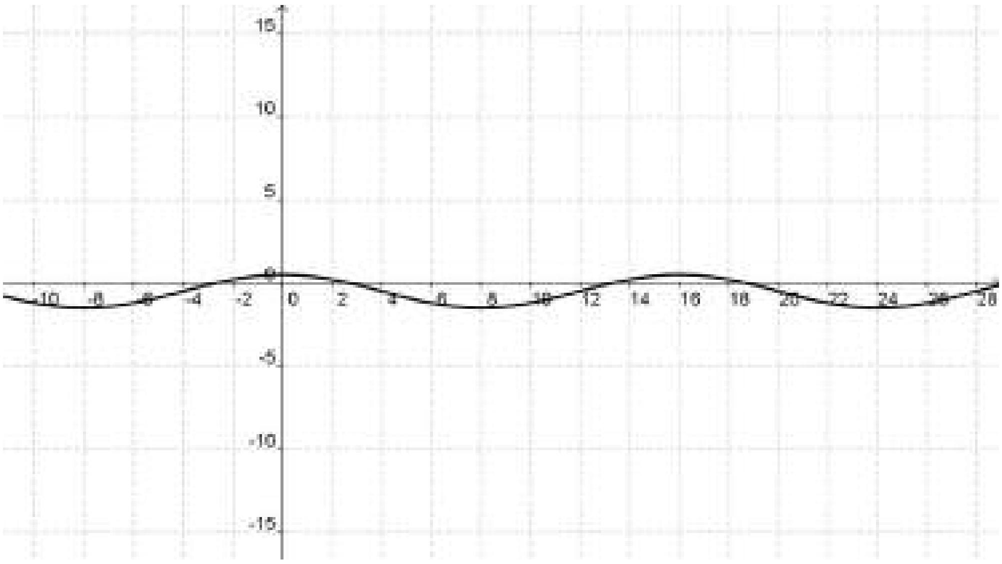
b) $f_0 (p) > f_d (p) + 120$; se cumple la desigualdad para $p > 12,5$ €

30. La gráfica de esta función es:



a) La longitud máxima es de 10 m y se produce a las 0 horas y a las 16 horas. La mínima es -10 m y se produce a las 8 horas y a las 24 horas.

b) Resolviendo la inecuación $10 \cos\left(\frac{\pi\ t}{8}\right) \geq 5$ o a partir de la gráfica de la función $\cos\left(\frac{\pi\ t}{8}\right) - \frac{1}{2} \geq 0$ que esta representada en el dibujo:



obtenemos la solución:

$$t \in \left[0\,,\,\frac{8}{3}\right] \cup \left[\frac{40}{3}\,,\,\frac{56}{3}\right]$$

31. a) M = $\frac{2}{3}\log\left(\frac{7{,}9\cdot 10^{17}}{2{,}5\cdot 10^{4}}\right) = 9.$

b) $8{,}7 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{2{,}5\cdot 10^{4}}\right)$; entonces E = $2{,}81 \cdot 10^{17}$ J.

c) Hallamos el cociente

$$\frac{7{,}9{\cdot}10^{17}}{2{,}81{\cdot}10^{17}} = 2{,}8$$

El terremoto de Japón fue 2,8 veces más potente que el de Lisboa

d) Resolvemos las inecuaciones: $5 \le \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{2{,}5\cdot 10^{4}}\right) < 7$ y obtenemos

$7{,}91 \cdot 10^{11} \le E < 7{,}91 \cdot 10^{14}$.

ACTIVIDADES-PÁG. 275

Las propiedades de esta gráfica son:

No está definida en el origen.

No tiene simetrías ni es periódica.

No tiene cortes con los ejes coordenadas.

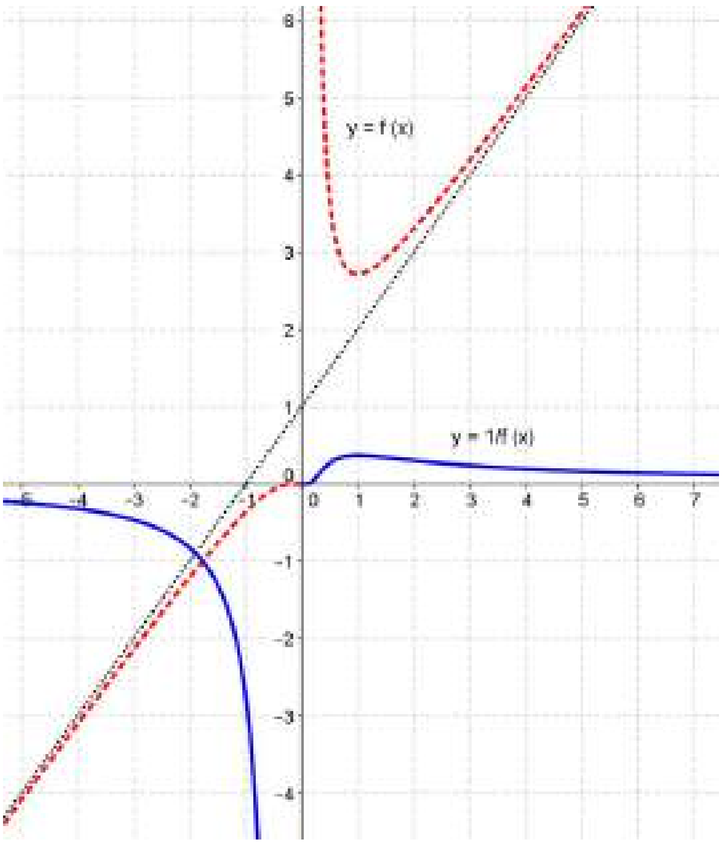
Las asíntotas son las rectas x = 0 (eje OY) e y = x + 1.

Tiene un mínimo relativo y no tiene máximos relativos ni puntos de inflexión.

Las gráficas de las funciones pedidas son las que están dibujadas en trazo continuo de color azul. Van acompañadas de la gráfica de la función y = f (x) en trazo discontinuo de color rojo

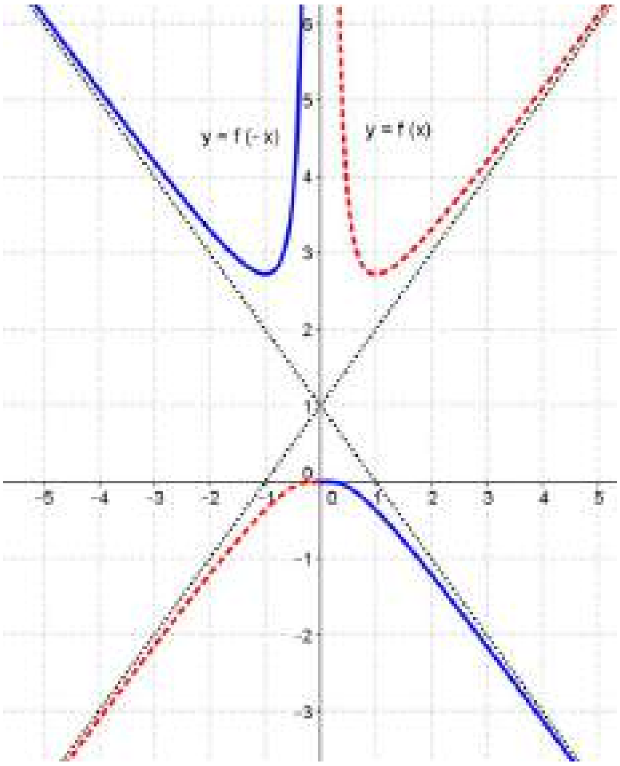
a) y = 1/f (x)

Se dibuja teniendo en cuenta que donde la f(x) crece esta decrece y donde decrece esta crece. Además los cortes con OX de f(x) son asíntotas verticales de esta otra.



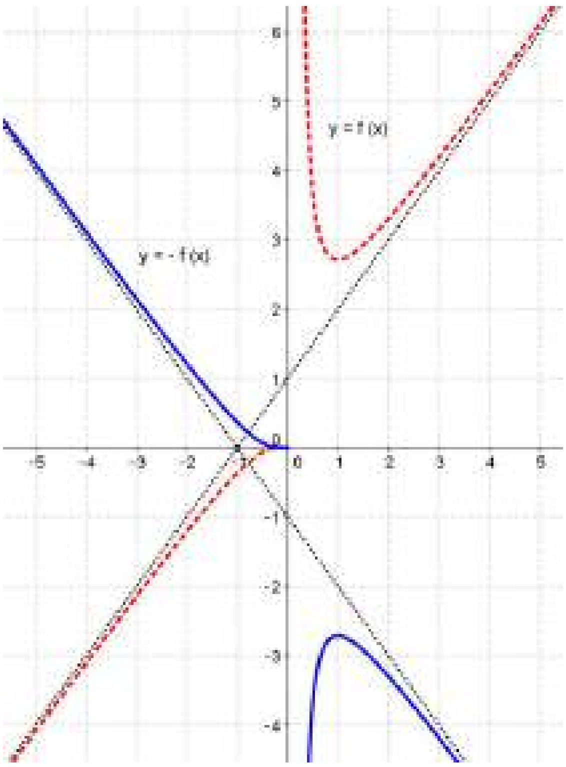
b) y = f (- x)

Se dibuja teniendo en cuenta que esta gráfica es la simétrica de f(x) respecto al eje de ordenadas.



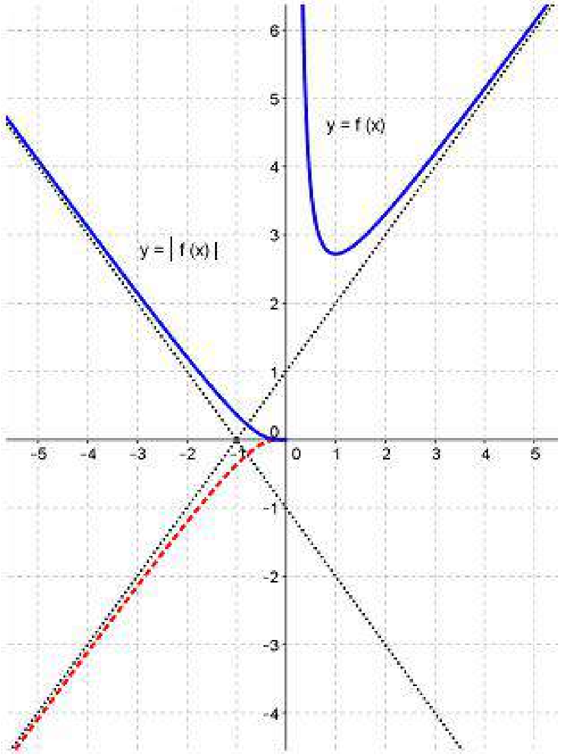
c) y = - f (x)

Se dibuja teniendo en cuenta que esta gráfica es la simétrica de f(x) respecto al eje de abscisas.



d) y = | f(x) |

Se dibuja teniendo en cuenta que esta gráfica se obtiene de f(x) mintiendo la parte de ordenadas positivas y las ramas de ordenadas negativas se hace su simétrica respecto al eje de abscisas.



e) La gráfica de y = f $^{-1}$ (x) es la simétrica de la gráfica de y = f (x) respecto de la recta bisectriz del primer y tercer cuadrante, es decir, de la recta y = x.

En este caso la función dada, y = f (x), no tiene inversa ya que dicha función no es inyectiva.

UNIDAD 12: Límites de funciones. Continuidad

ACTIVIDADES-PÁG. 276

1. Podemos decir lo siguiente:

a) Para la gráfica del apartado (I):

f (x) tiende a 1 cuando x tiende a $-\infty$

f (x) tiende a + ∞ cuando x tiende a – 2 por la izquierda

f (x) tiende a - ∞ cuando x tiende a – 2 por la derecha

f (x) tiende a - ∞ cuando x tiende a 2 por la izquierda

f (x) tiende a + ∞ cuando x tiende a 2 por la derecha

f (x) tiende a 1 cuando x tiende a $+\infty$.

b) Para la gráfica del apartado (II):

f (x) tiende a 1 cuando x tiende a $-\infty$

f(x) tiende a 1 cuando x tiende a $+\infty$.

c) Para la gráfica del apartado (III)

f (x) tiende a 0 cuando x tiende a $-\infty$

f(x) tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.

d) Para la gráfica del apartado (IV):

f (x) tiende a $-\infty$ cuando x tiende a $-\infty$

f (x) tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.

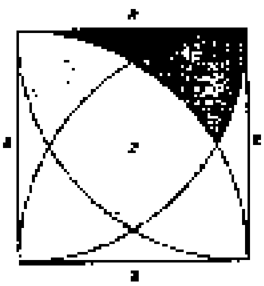
ACTIVIDADES-PÁG. 293

1. Basta con mover el cuadrado para ver que el área de la región limitada es la cuarta parte del cuadrado.

2. Basta conocer el lado del cuadrado que se forma dentro de la figura. La resolución nos recuerda al problema de los *perros guardianes*.

El área de la rosa de 4 pétalos es igual al área del cuadrado rayado más 4 veces el área del pétalo. El área de un pétalo lo puedes encontrar en el problema de los perros guardianes.

3. La representación geométrica del problema así como su resolución quedan:

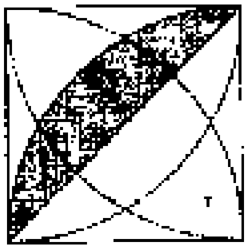


Los cálculos quedan:

$$\text{Área (x)} = \text{Área cuadrado} - \text{Área triángulo} - 2 \cdot \text{Área sector} =$$

$$= a^2 - \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} - 2 \cdot \frac{\pi \cdot a^2}{12} = a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

Área (rayada) = $\frac{1}{4}$ Área círculo – Área triángulo rectángulo =



$$= \frac{\pi \cdot a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Área (y) = Área triángulo rectángulo – Área (rayada) – 2 · Área (x) =

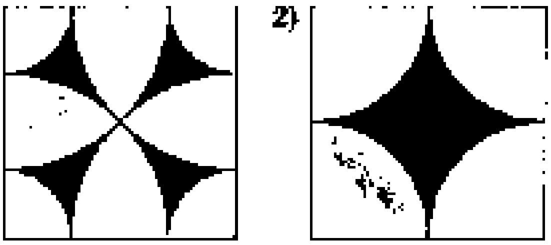
$$= \frac{a^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right) - 2 \cdot a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = - a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi \cdot a^2}{12}$$

Área (z) = 2 · Área (rayada) – 2 · Área (y) = $= 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right) - 2 \cdot a^2 \left(- a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi \cdot a^2}{12}\right) =$

$$= \frac{\pi \cdot a^2}{2} - a^2 + 2a^2 - a^2\sqrt{3} - \frac{\pi \cdot a^2}{6} = a^2 - a^2\sqrt{3} + \frac{\pi \cdot a^2}{3}$$

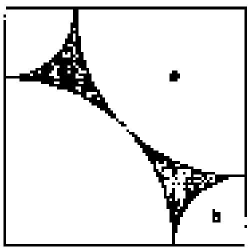
4. Sean las figuras:

1) 2)



● En la figura (1) el área pedida es 2 veces el área de una de las aspas rayada en el dibujo adjunto.

Área aspa = Área cuadrado – 2 · Área (a) – 2 · Área (b)



Vamos a hallar el área de la zona (a).

El radio de esta zona es la mitad de la diagonal del cuadrado.

$$D = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2},\ es\ decir,\ r = 5\sqrt{2}$$

$$Área\ (a) = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot \left(5\sqrt{2}\right)^2 = \frac{50\pi}{4} = \frac{25\pi}{2}\ m^2$$

Ahora hallamos el área de la zona (b). El radio de esta zona es el lado del cuadrado menos el radio de la zona (a), es decir, $r = 10 - 5\sqrt{2}$.

$$\acute{A}rea\ (b) = \frac{1}{4}\pi \cdot \left(10 - 5\sqrt{2}\right)^2 = \frac{(75 - 50\sqrt{2})\pi}{4}\ m^2$$

El área del aspa queda:

$$\acute{A}rea\ aspa = 10^2 - 25\pi - (75 - 50\sqrt{2})\pi = 100 - 100\pi + 50\sqrt{2}\,\pi$$

El área pedida queda:

$$\acute{A}rea\ pedida = 2 \cdot \acute{A}rea\ aspa = 2 \cdot (100 - 100\pi + 50\sqrt{2}\,\pi) = 15{,}97\ m^2$$

● En la figura (2) el área pedida es igual al área del cuadrado de lado 10 m menos el área del círculo de radio 5 m.

Área figura (2) = $10^2 - \pi \cdot 5^2 = 100 - 25\pi = 21{,}46$ m^2

ACTIVIDADES-PÁG. 295

1. En la imagen tenemos la resolución, con Wiris, de estos límites.

$$\lim_{x \to 0^+} (1+4x)^{\frac{3}{2x^2}} \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{9x^2-2x} - 3x\right) \rightarrow -\frac{1}{3}$$

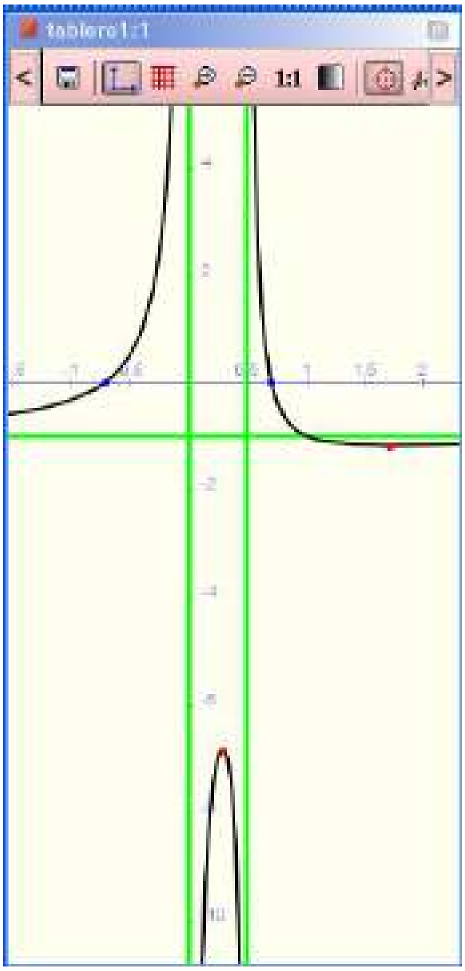
$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2-6x+5}{2\sqrt{x-1}-4} \rightarrow 8$$

2. Con Wiris representamos la función y vemos en la gráfica que tiene dos asíntotas verticales de ecuaciones $x = 0$; $x = 0{,}5$ y una asíntota horizontal de ecuación $y = -1$.

En la misma gráfica estudiamos la continuidad y esta función es continua en $R - \{0; 0{,}5\}$

$$f(x) := \frac{1-2\cdot x^2}{2\cdot x^2 - x} \rightarrow x \mapsto \frac{1-2\cdot x^2}{2\cdot x^2 - x}$$

representar(f(x),{asíntota={color=verde,anchura_línea=3}})

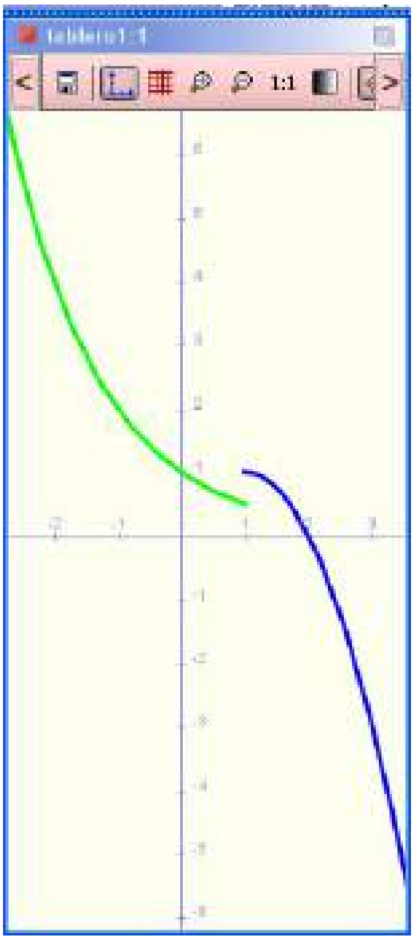


3. Representamos con Wiris estas dos funciones:

a) Esta es una función a trozos y hay que dibujar cada trozo en su intervalo, los dos dibujos dentro del mismo bloque.

dibujar$(2\cdot x-x^2$, 1..+∞,{color=azul,anchura_línea=3}) → tablero1
dibujar$(2^{-x}$, -∞..1,{color=verde,anchura_línea=3}) → tablero1

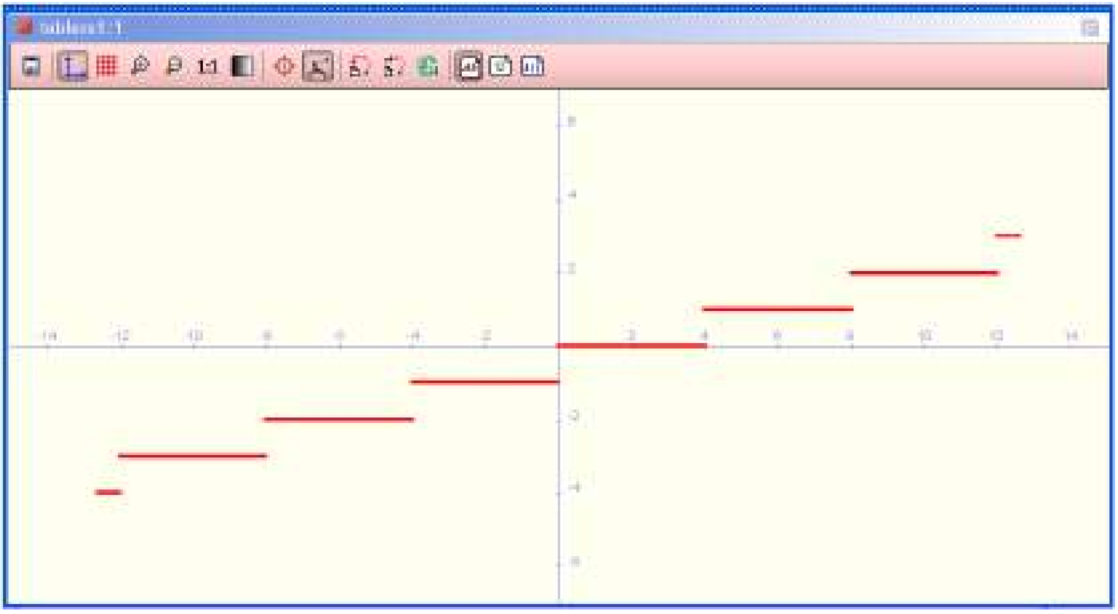
A partir de la gráfica vemos que esta función es continua en R – {1}



b) Para representar la parte entera se escribe **dibujar(suelo(x/4))**

La representamos y a partir de la gráfica vemos que es una función es continua en $R - \{x = 4 \cdot k \ / \ k \in Z\}$.

$\text{dibujar}\left(\text{suelo}\left(\frac{x}{4}\right), \{\text{color}=\text{rojo}, \text{anchura\_línea}=3\}\right) \rightarrow \text{tablero1}$



ACTIVIDADES-PÁG. 296

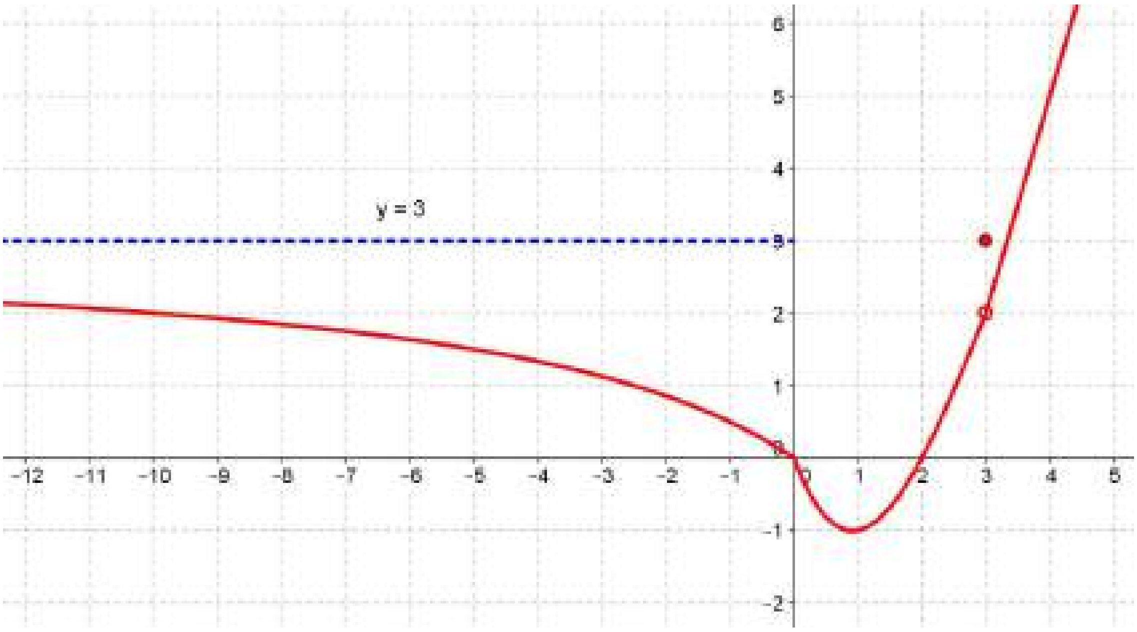
1. Las soluciones pueden verse en la tabla.

Apartados	Gráfica a)	Gráfica b)	Gráfica c)
a) Dom f	R	R	R
b) Im f	[0, 1)	R	[0, + ∞)
c) f (0)	0	2	1
d) f (1)	0	2	0
e) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$	1	1	1
f) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$	0	1	1
g) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$	No existe	1	1
h) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$	1	2	1
i) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$	0	2	2
j) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$	No existe	2	No existe
k) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	No existe	- ∞	+ ∞

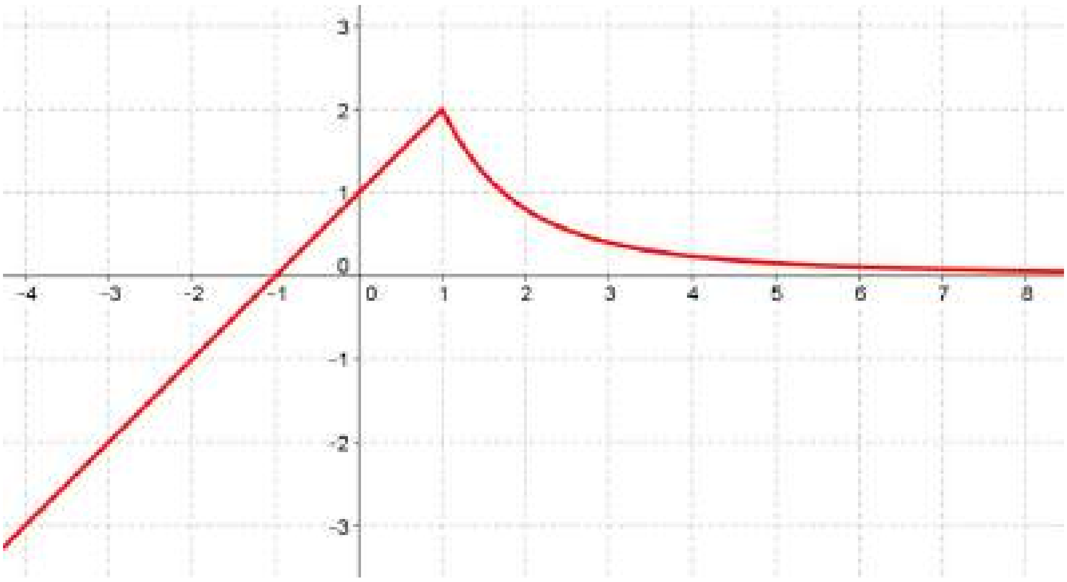
l) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	No existe	$+\infty$	$+\infty$

■ 2. Representa gráficamente funciones que satisfagan las siguientes condiciones:

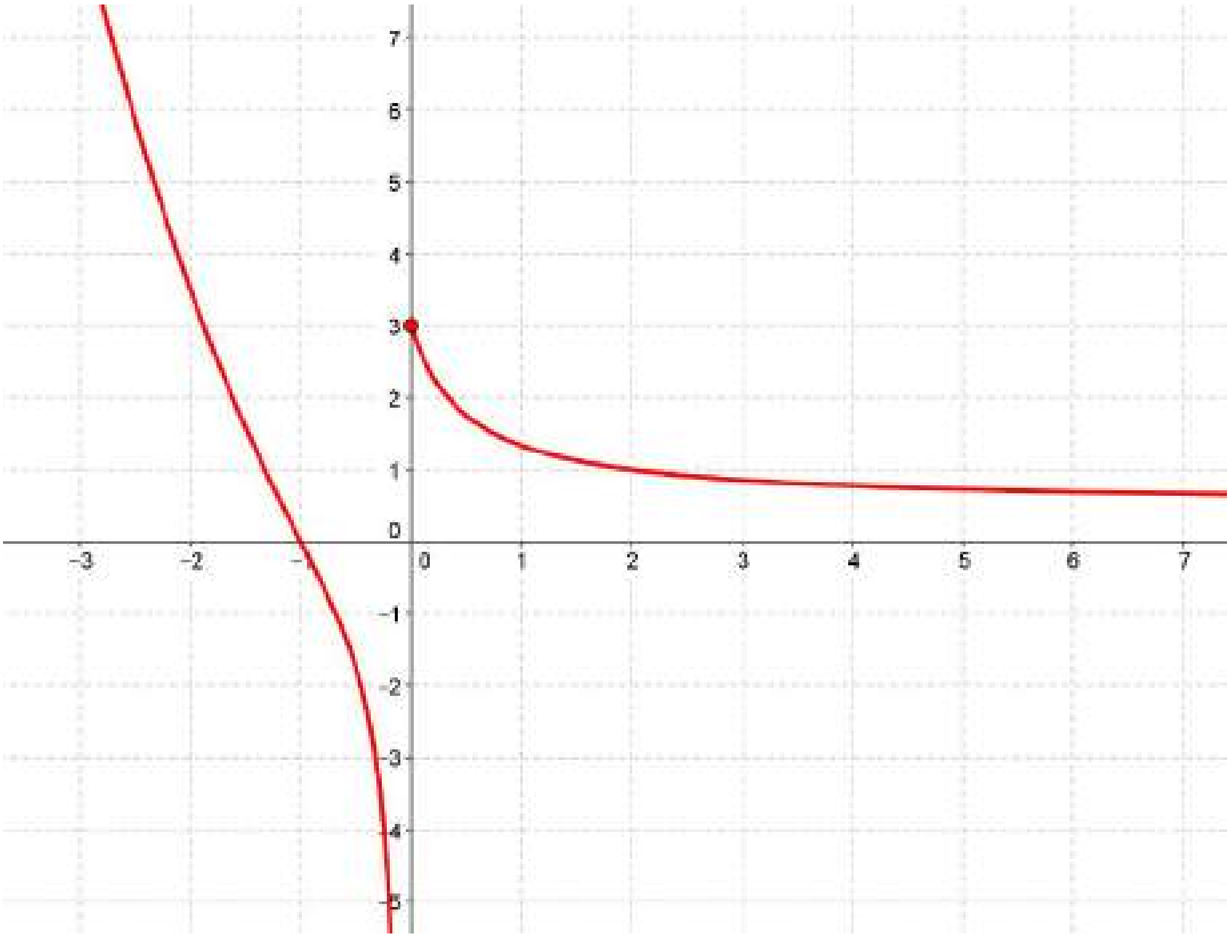
a) Dom f = R; Im f = $[-1, +\infty)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$; f (3) = 3; f (0) = 0 y f (2) = 0



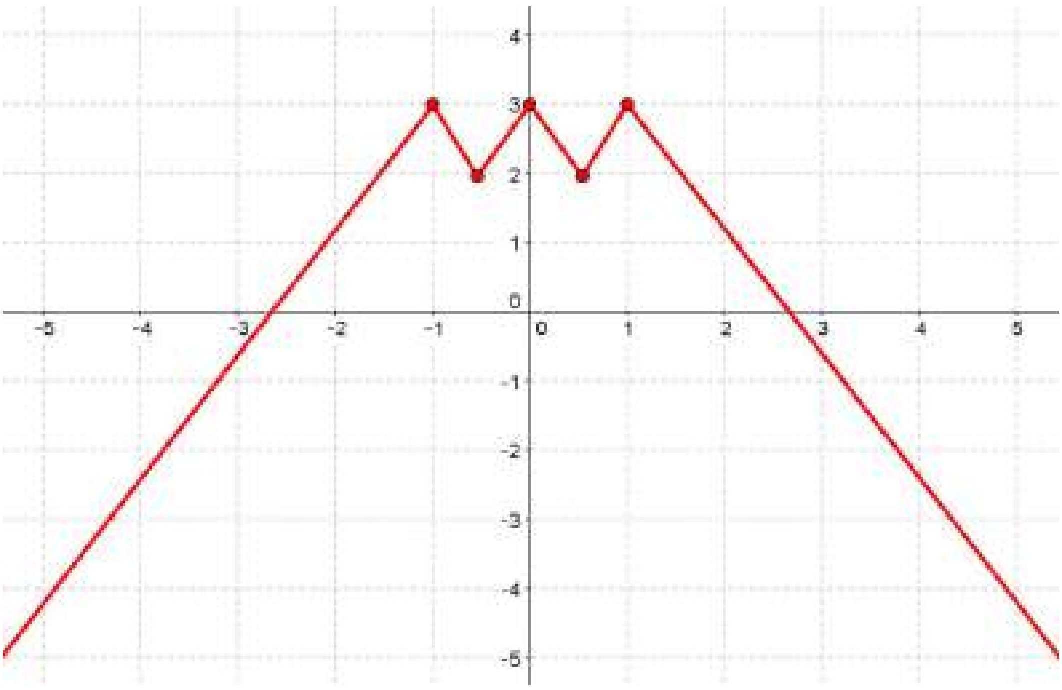
b) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$; g (x) estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$; Im g = $(-\infty, 2]$.



c) Dom h = R; Im h = R; $\lim_{x \to 0^-} h(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 0^+} h(x) = 3$; $\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$



d) $\lim_{x \to -1} j(x) = \lim_{x \to 0} j(x) = \lim_{x \to 1} j(x) = 3$



e) Dom k = R; Im k = $(-\infty, 2]$; $\lim\limits_{x \to 2} k(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = -1$

En esta actividad son incompatibles las condiciones: Im k = $(-\infty, 2]$ y $\lim\limits_{x \to 2} k(x) = +\infty$

Por lo que no existe una función cuya gráfica verifique esas condiciones.

3. La asociación es:

a) con (II) b) con (III) c) con (I)

ACTIVIDADES-PÁG. 297

4. Las soluciones son:

a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ no existe

d) Asíntotas horizontales: y = 0
Asíntotas verticales: x = - 1

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

g) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

h) $\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = 1$

i) $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x)$ no existe

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

k) Asíntotas horizontales: y = 0
Asíntotas verticales: x = - 1

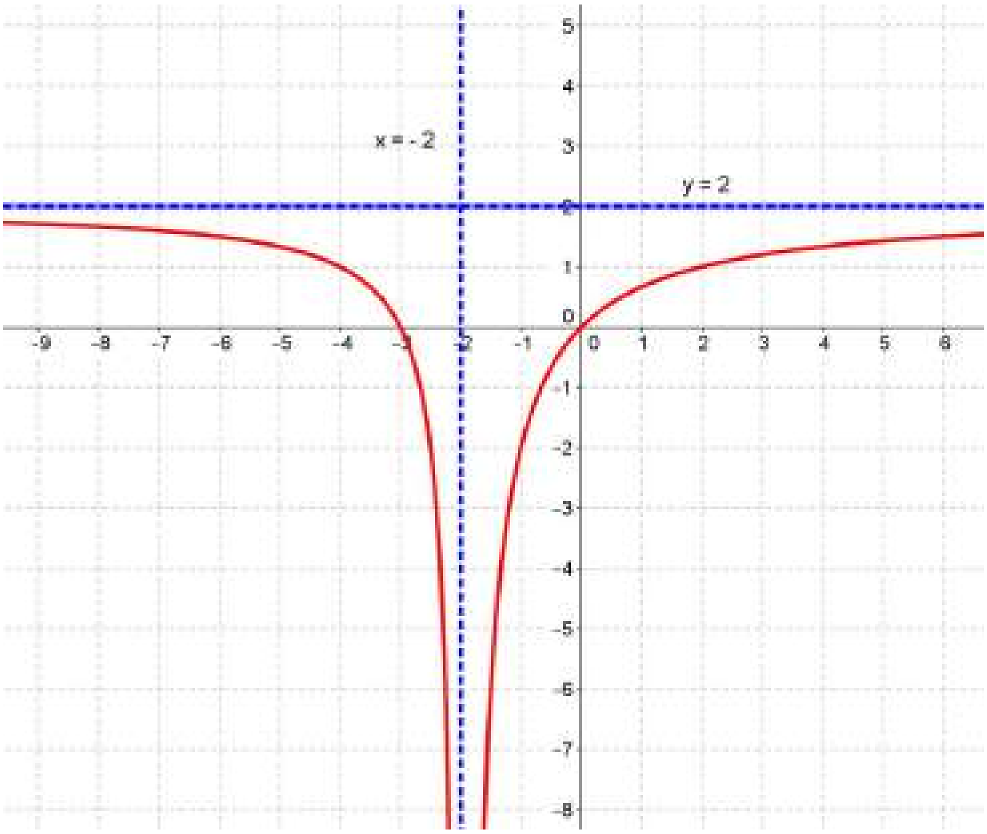
l) $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$ no existe

m) $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = -1$

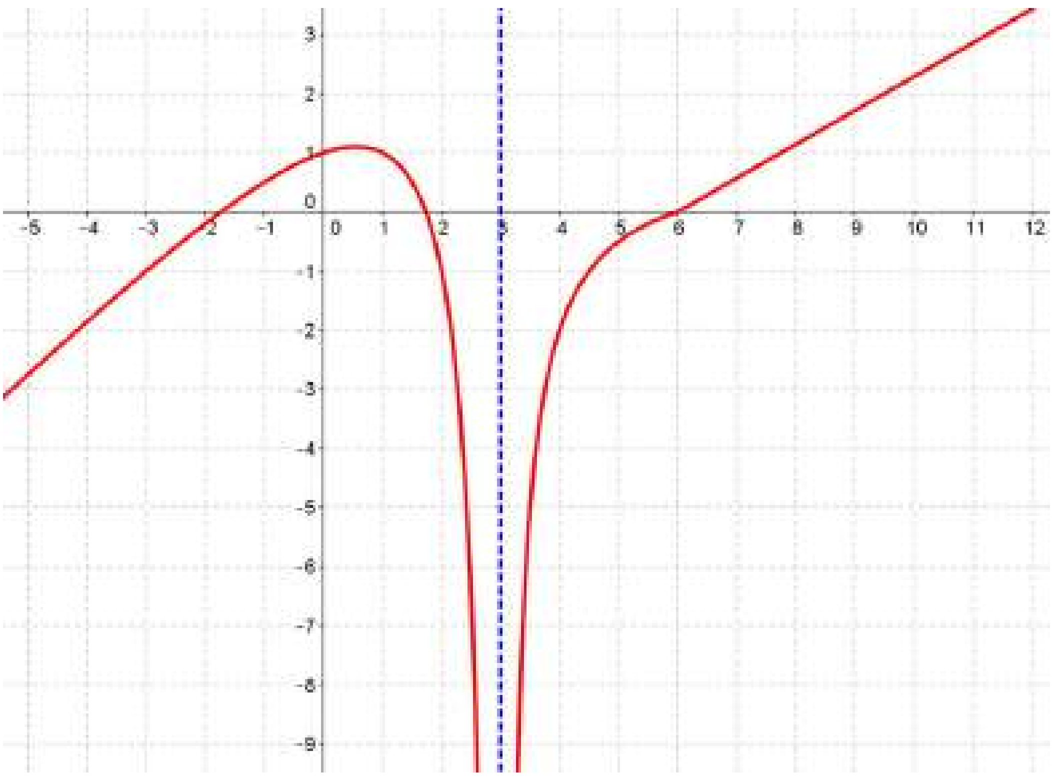
n) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

■ 5. Representa gráficamente funciones que satisfagan las siguientes condiciones:

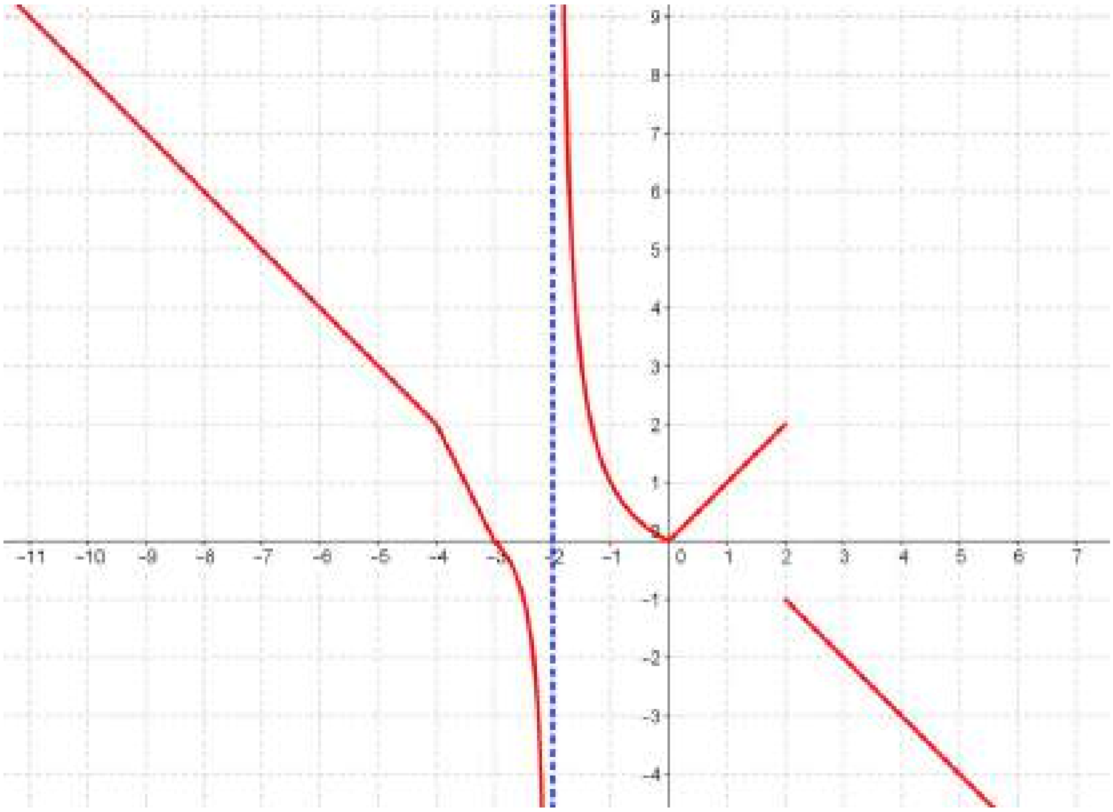
a) Asíntota vertical en x = - 2; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$



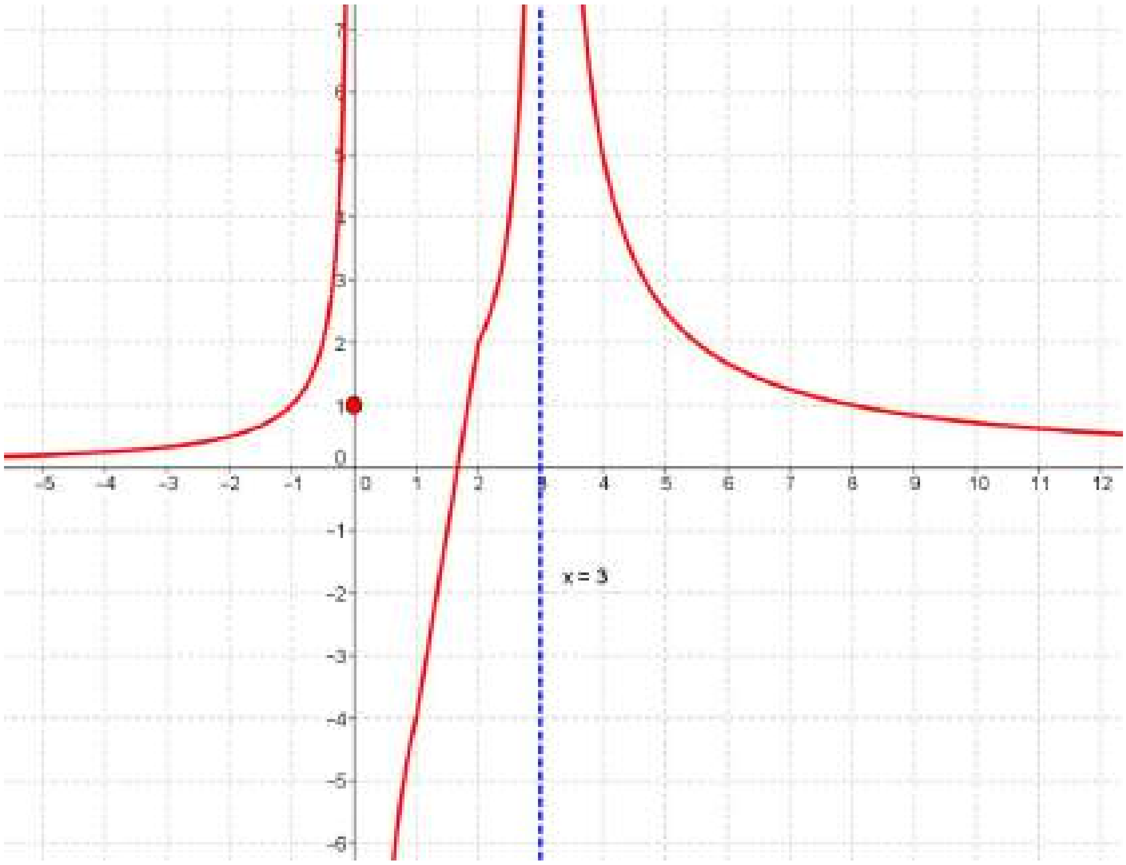
b) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$



c) h (- 4) = 2; $\lim\limits_{x \to -2^-} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = -1$



d) t (0) = 1; $\lim\limits_{x \to 0^+} ht(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2} t(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 3^-} t(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} t(x) = +\infty$



6. Los valores de los límites son:

a) $\lim\limits_{x \to 0} 5 = 5$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-3} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{1}{x^4} = \frac{1}{81}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^7 = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-5) = -5$

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^8} = +\infty$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^8} = 0$

h) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^{11}} = -\infty$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{11}} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to -1} x^8 = 1$

k) $\lim\limits_{x \to 0^-} x^{-5} = -\infty$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$

m) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty$

n) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^5} = -\infty$

o) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$

p) $\lim\limits_{x \to 2} x = 2$

ACTIVIDADES-PÁG. 298

7. El valor de los límites es:

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe

d) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 1$

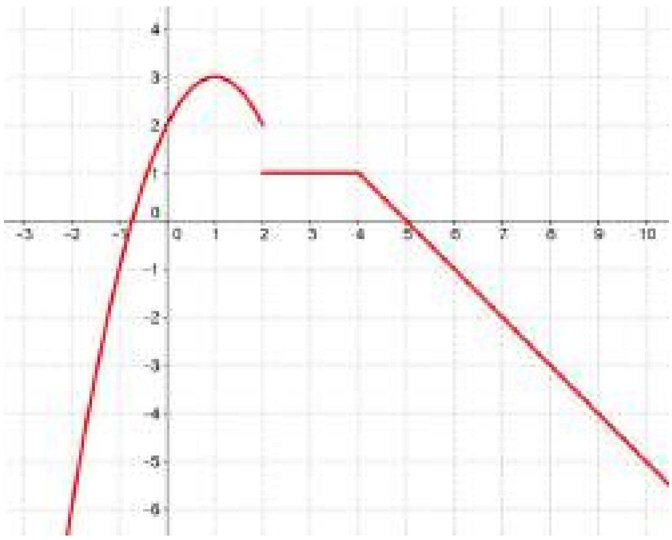
e) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 1$

f) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 1$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Todo lo anterior puede verse en la gráfica que sigue.



8. Los límites valen:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 + 5x - 2) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + 5x - 4) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 - 6x^2 - 5) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{2x^3 - 4x + 6} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 5x - 7}{-3x^2 - 3x + 4} = -1$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 - 2x + 1}{6x^2 + 2x} = -\infty$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{2x} - 5} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 4x^2 - 2}}{\sqrt[3]{8x^2 - 5x + 3}} = -\infty$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 - 7}}{4x} = \dfrac{1}{2}$

9. Los límites valen:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 3x} = -1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 2x}{2x^3 + 3x^2 + 2x} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{5x^2 - 7x - 6} = \dfrac{4}{13}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - x} - 1}{x} = -\dfrac{1}{2}$

h) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} = 4$

i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4} = \dfrac{\sqrt{2}}{16}$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^4 - 1}{x^3 + 1} = -\dfrac{4}{3}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^5 - 3x^3}{x^3 + x^2} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 9}$ no existe (los límites laterales son diferentes)

j) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2 - \sqrt{8 - x}}{3 - \sqrt{5 + x}} = -\dfrac{3}{2}$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}} = 1$

l) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x + 2} - 2} = 2$

10. Los límites son:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ no existe, ya que: $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^{+-}} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 + x}{x^2} = +\infty$ ya que: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2 + x}{x^2} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2 + x}{x^2} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 5}{|x - 3|} = 7$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{x^3} \cdot \dfrac{x^2 + 2x}{3} \right) [\infty \cdot 0] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(x^2 + 2x)}{3x^3} \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x\,(x + 2)}{3x^3} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{x + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \right) [\infty \cdot 0] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 2$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{x^2} \left(\dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{1}{x^2 + 2} \right) \right] [\infty \cdot 0] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x}{x^2\,(x + 2)(x^2 + 2)} \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\,(x - 1)}{x^2\,(x + 2)\,(x^2 + 2)}$ no existe, al ser los límites laterales:

$$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x - 1}{x\,(x + 2)\,(x^2 + 2)} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - 1}{x\,(x + 2)\,(x^2 + 2)} = -\infty$$

11. Los límites valen:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 2x + 3} - 2x \right) = -\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x} \left(\sqrt{x + 3} - \sqrt{x} \right) \right] = \dfrac{3}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2+2}{x+1} - \dfrac{x^2+1}{x} \right) = -1$

ACTIVIDADES-PÁG. 299

12. Los límites son:

a) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x+2}{4x-3} \right)^{2x} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} 2x \cdot \left(\frac{4x+2}{4x-3} - 1 \right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{10x}{4x-3}} = e^{\frac{5}{2}}$$

b) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x-7}{3x} \right)^{\frac{2x^2+1}{3x}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2+1}{3x} \cdot \left(\frac{3x-7}{3x} - 1 \right)} = e^{-\frac{14}{9}}$$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x}{x+5} \right)^{3x} = 2^{+\infty} = +\infty$

d) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{5x} \right)^{x^2} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{5x} - 1 \right)} = e^{+\infty} = +\infty$$

e) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5} \right)^{\frac{x^2}{2}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5} - 1 \right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-5x^3+5x^2}{4x^2-2x-10}} = e^{-\infty} = 0$$

f) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5-3x}{4-3x} \right)^{x-3} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} (x-3) \cdot \left(\frac{5-3x}{4-3x} - 1 \right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-3}{-3x+4}} = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

g) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to 0} (1+3x)^{\frac{2}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{x} \cdot (1+3x-1)} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{6x}{x}} = e^{6}$$

h) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2+1}{x+1} \right)^{\frac{x^2+3}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+3}{x+1} \cdot \left(\frac{x^2+1}{x+1} - 1 \right)} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x^2+3) \cdot x \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+1)}} = e^{2}$$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{4x^2 - 2}{2x^2 + 1} \right)^{x+3} = 2^{-\infty} = 0.$

13. El valor del parámetro, en cada caso, es:

a) a = 1 b) a = 4 c) a = 1

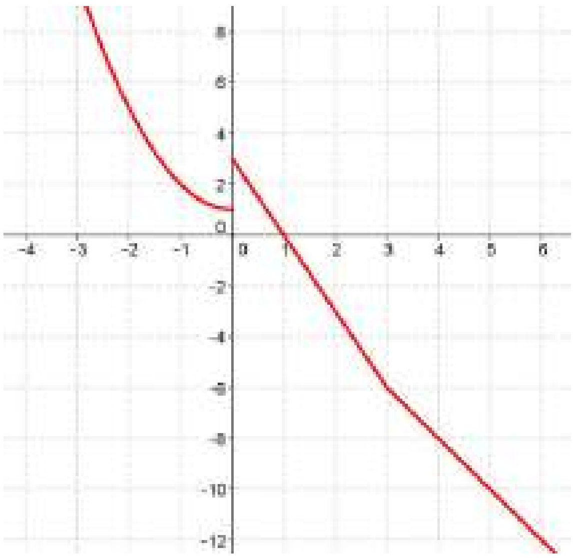
14. A la vista de la gráfica podemos asegurar que:

a) La gráfica es continua para cualquier número real excepto para x = 0.

b) La gráfica es continua para cualquier número real excepto para x = 0.

c) La gráfica es continua para cualquier número real.

15. Los resultados son:



(I) a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ e) f (0) = 3

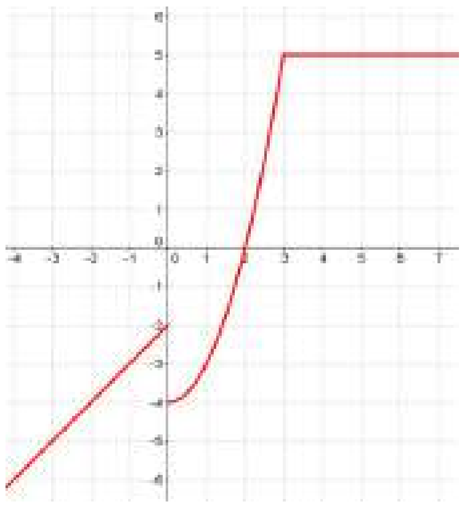
b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3$ f) f (1) = 0

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$ g) f (3) = - 6

d) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -6$

La función es continua para cualquier número real excepto para x = 0.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica adjunta.



(II) a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -2$ e) f (0) = - 4

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -4$ f) f (1) = - 3

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -3$ g) f (3) = 5

d) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$

La función es continua para cualquier número real excepto para x = 0.

16. Los valores del parámetro a para que las funciones sean continuas es:

a) a = 6 b) a = 1

ACTIVIDADES-PÁG. 300

17. a) La función f (x) es continua en R – {- 3, 3}.

b) La función f (x) es continua en [- 2, 2].

c) La función f (x) no es continua en x = 4.

d) La función f (x) es continua en $\left(-3\,,+\,\infty\right)$.

e) La función f (x) es continua en R.

f) La función f (x) no es continua en x = 2 pues no esta definida.

g) La función f (x) es continua en R.

h) La función f (x) es continua en R - $\left\{\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$

18. La función dada es discontinua evitable en x = 3. La redefinimos y queda:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2-45}{2x-6} & si \quad x\neq 3 \\ 15 & si \quad x=3 \end{cases}$$

19. a) En este momento hay 4000 águilas. Al cabo de 8 años habrá 7368 águilas y al cabo de 12 años habrá 7556 águilas, es decir, habrá aumentado el número.

b) Calculamos $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{16t+12}{2t+3}\right)=8$, es decir se estabilizará en 8 000 animales.

20. I. La función exponencial es N (t) = 70 · $1{,}1^t$

II. La función logística es $N(t)=\dfrac{700}{1+9\cdot e^{-\frac{15t}{100}}}$

a) Resolviendo las ecuaciones 140 = 70 · $1{,}1^t$ y 140 = $\dfrac{700}{1+9\cdot e^{-\frac{15t}{100}}}$ obtenemos que con el modelo exponencial han de pasar 7,28 horas y con el modelo logístico han de pasar 5,4 horas.

b) La tabla pedida es:

t	Exponencial	Logística
0	70	70
1	77	80,03990464
2	84,7	91,31109437
3	93,17	103,903478
4	102,487	117,8960781
5	112,7357	133,3515017
6	124,00927	150,3098548
7	136,410197	168,7824405
8	150,0512167	188,7457263
9	165,0563384	210,1361945
10	181,5619722	232,8467645
15	292,4073719	359,4821809
20	470,9249965	483,6809455
25	758,429416	577,9589089

En las tablas anteriores observamos como el crecimiento con la función exponencial es al principio más lento que con la función logística y al pasar las horas es al contrario.

c) Calculamos $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(70 \cdot 1{,}1^t\right) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{700}{1 + 9 \cdot e^{-\frac{15t}{100}}} = 700$

Al pasar las horas el crecimiento exponencial es infinito y en cambio el logístico tiende a 700 que es el número total de individuos. El modelo logístico se ajusta más a este tipo de fenómenos.

ACTIVIDADES-PÁG. 301

a) Las funciones $y = \dfrac{2}{x^n}$ con n par son: $y = \dfrac{2}{x^2}$, $y = \dfrac{2}{x^4}$, $y = \dfrac{2}{x^6}$ …

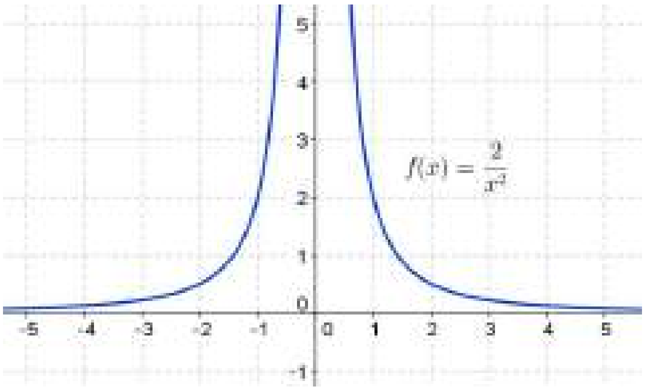
Sus principales características son:

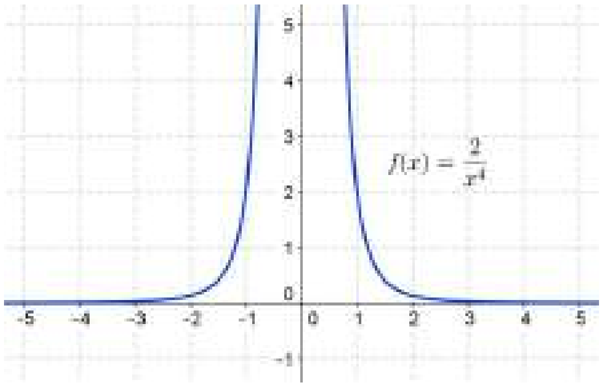
- Dominio: R – {0}.
- Recorrido: $(0, +\infty)$
- Simetría respecto eje OY, ya que $f(-x) = \dfrac{2}{(-x)^n} = \dfrac{2}{x^n} = f(x)$
- Asíntotas: x = 0 e y = 0, al cumplirse:

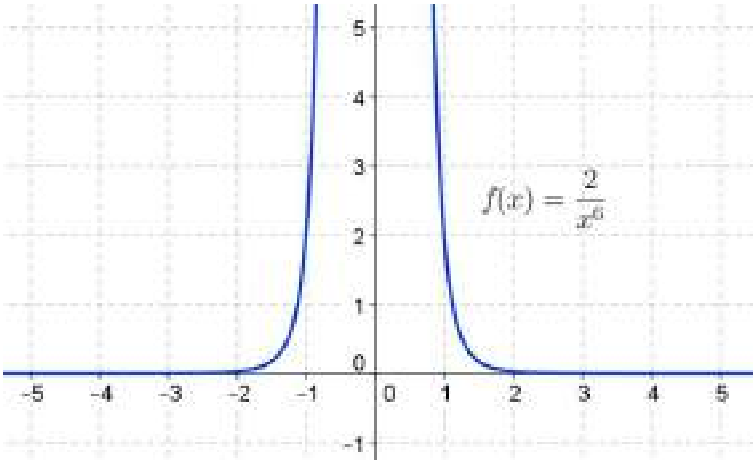
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^n} = 0$$

- Creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$. La primera derivada es $y' = \dfrac{-2n}{x^{n+1}}$
- Convexa (cóncava hacia las Y positivas) en R – {0}. La segunda derivada es $y'' = \dfrac{2n(n+1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:







Las funciones $y = \frac{2}{x^n}$ con n impar son: $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{2}{x^3}$, $y = \frac{2}{x^5}\ldots$

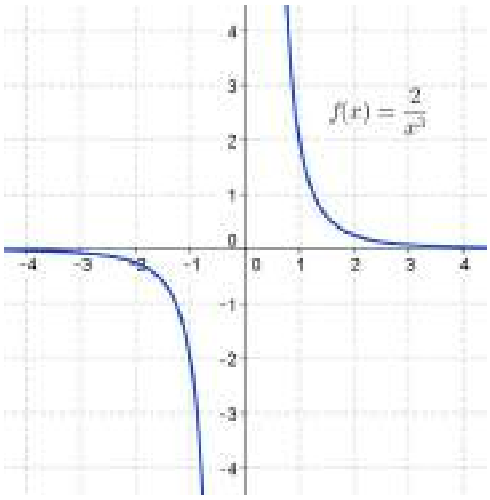
Sus principales características son:

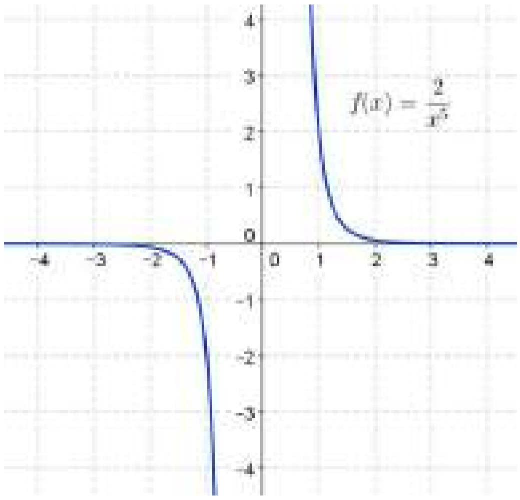
- Dominio: R – {0}.
- Recorrido: R – {0}
- Simetría respecto del origen de coordenadas, ya que $f\,(-x) = \frac{2}{(-x)^n} = -\frac{2}{x^n} = -f\,(x)$
- Asíntotas: x = 0 e y = 0, al cumplirse:

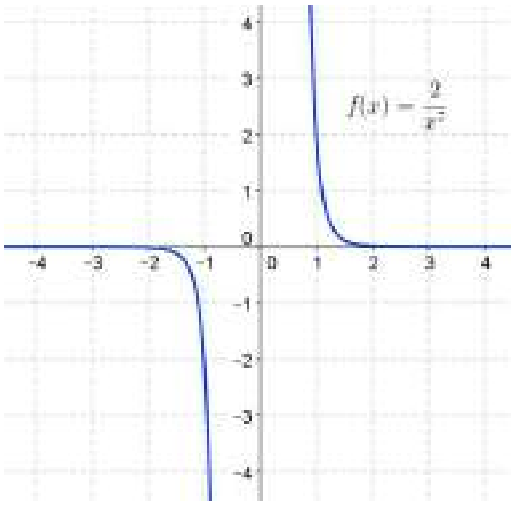
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2}{x^n} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^n} = 0$$

- Decreciente en R – {0}. La primera derivada es $y' = \frac{-2n}{x^{n+1}}$
- Cóncava (cóncava hacia las Y negativas) en $(-\infty, 0)$ Convexa (cóncava hacia las Y positivas) en $(0, +\infty)$. La segunda derivada es $y'' = \frac{2n(n+1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:







b) Estudiamos las principales características de las funciones $y = \dfrac{k}{x^n}$, siendo k un valor cualquiera.

b$_1$) En el caso k = 0, la función $y = \dfrac{0}{x^n} = 0$ es una función constante y no comparte las características de la familia de funciones.

b$_2$) En el caso k > 0 las características de las funciones coinciden con las descritas en el apartado anterior.

b$_3$) En el caso k < 0, por ejemplo k = - 3, tenemos dos opciones distintas:

(I) Las funciones $y = \dfrac{-3}{x^n}$ con n par son: $y = \dfrac{-3}{x^2}$, $y = \dfrac{-3}{x^4}$, $y = \dfrac{-3}{x^6}$ …

Sus principales características son:

- Dominio: R – {0}.
- Recorrido: $(-\infty, 0)$

- Simetría respecto eje OY, ya que $f\ (-\ x) = \dfrac{-\ 3}{(-\ x)^n} = \dfrac{-\ 3}{x^n} = f\ (x)$

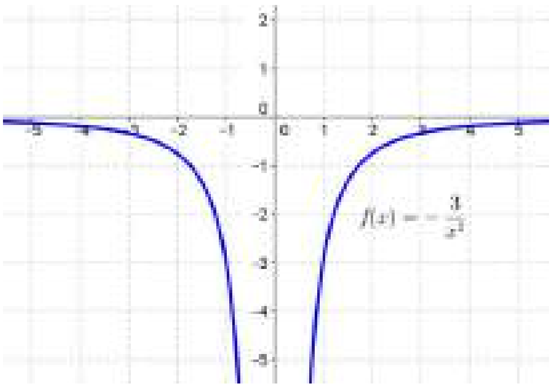
- Asíntotas: x = 0 e y = 0, al cumplirse:

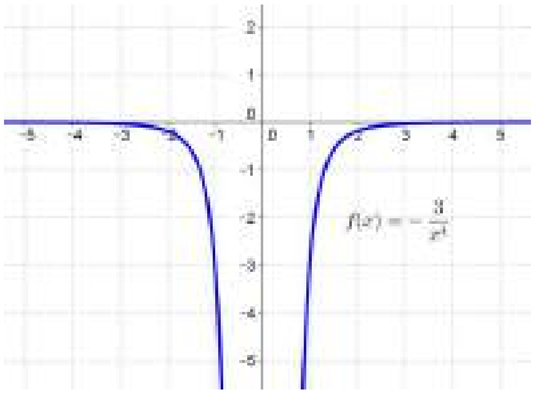
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-\ 3}{x^n} = -\ \infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{-\ 3}{x^n} = -\ \infty \qquad \lim_{x \to -\ \infty} \frac{-\ 3}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\ \infty} \frac{-\ 3}{x^n} = 0$$

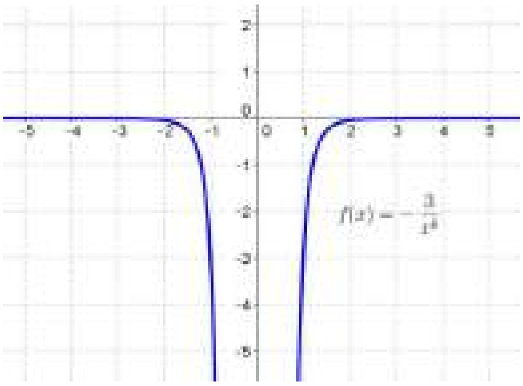
- Decreciente en $(-\ \infty,\ 0)$ y creciente en $(0,\ +\ \infty)$. La primera derivada es $y' = \dfrac{3n}{x^{n+1}}$

- Cóncava (cóncava hacia las Y negativas) en R – {0}. La segunda derivada es $y'' = -\dfrac{3n(n+1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:







(II) Las funciones $y = \dfrac{-\ 3}{x^n}$ con n impar son: $y = \dfrac{-\ 3}{x},\ y = \dfrac{-\ 3}{x^3},\ y = \dfrac{-\ 3}{x^5} \ldots$

Sus principales características son:

- Dominio: R – {0}.

- Recorrido: R – {0}

- Simetría respecto del origen de coordenadas, ya que $f\ (-\ x) = \dfrac{-3}{(-\ x)^n} = \dfrac{3}{x^n} = -\ f\ (x)$

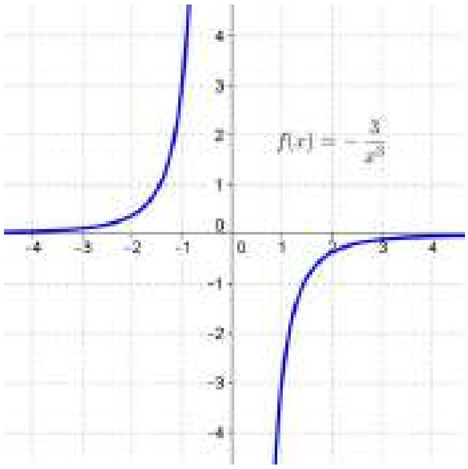
- Asíntotas: x = 0 e y = 0, al cumplirse:

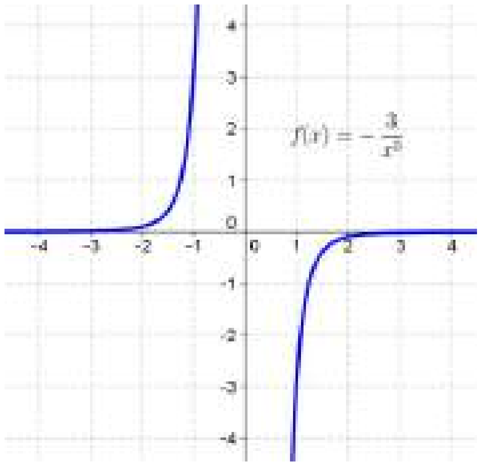
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-3}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{-3}{x^n} = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{-3}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{-3}{x^n} = 0$$

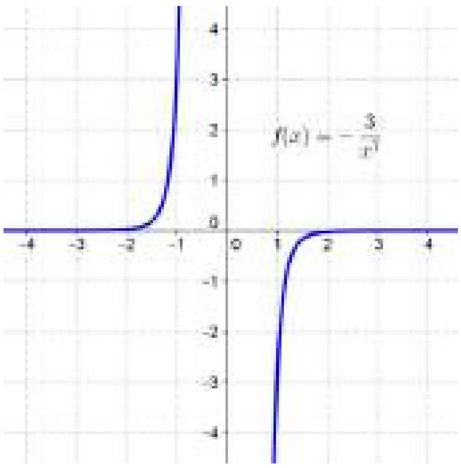
- Creciente en R – {0}. La primera derivada es $y' = \dfrac{3n}{x^{n+1}}$

- Convexa (cóncava hacia las Y positivas) en $(-\infty, 0)$. Cóncava (cóncava hacia las Y negativas) en $(0, +\infty)$. La segunda derivada es $y'' = \dfrac{-3n(n+1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:







c) Las respuestas a los aparatados aparecen a continuación:

c_1) La derivada de la función $y = \dfrac{k}{x^n}$ es $y' = -\dfrac{kn}{x^{n+1}}$. Sea $P\left(a, \dfrac{k}{a^n}\right)$ un punto de la función.

La ecuación de la recta tangente a la curva en P es:

$$y - \frac{k}{a^n} = -\frac{kn}{a^{n+1}}(x - a) \qquad \Rightarrow \qquad knx + a^{n+1}y = k(n+1)a$$

Los puntos de corte A (con OX) y B (con OY) con los ejes coordenados son:

$$A:\begin{cases} knx + a^{n+1}y = k(n+1)a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{n+1}{n}a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\dfrac{n+1}{n}a,\, 0\right)$$

$$B:\begin{cases} x = 0 \\ knx + a^{n+1}y = k(n+1)a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{k(n+1)}{a^n} \end{cases} \Rightarrow B = \left(0,\, \dfrac{k(n+1)}{a^n}\right)$$

Sea M el punto medio del segmento de extremos A y B; sus coordenadas son:

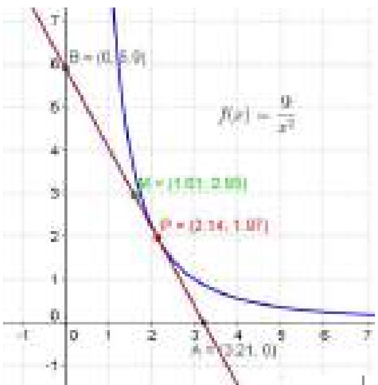
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{n+1}{n}a + 0}{2} = \frac{n+1}{2n}a \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + \frac{k(n+1)}{a^n}}{2} = \frac{k(n+1)}{2a^n}$$

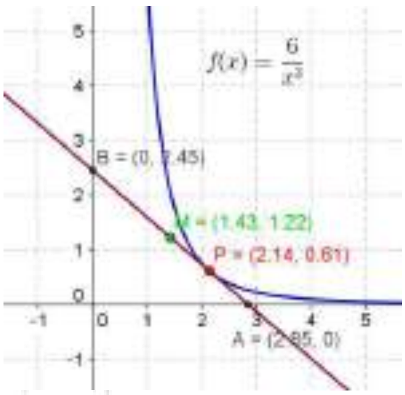
Para que el punto M coincida con el punto P debe cumplirse:

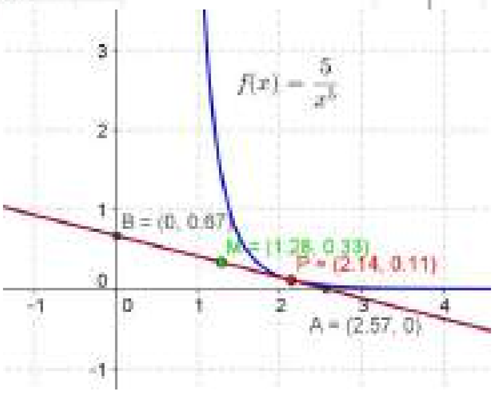
$$x_M = x_P \Rightarrow \frac{n+1}{2n}a = a \Rightarrow \frac{n+1}{2n} = 1 \Rightarrow n+1 = 2n \Rightarrow n = 1$$

$$y_M = y_P \Rightarrow \frac{k(n+1)}{2a^n} = \frac{k}{a^n} \Rightarrow \frac{n+1}{2} = 1 \Rightarrow n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$$

Como n debe ser mayor o igual que 2, el punto medio, M (en color verde), del segmento de extremos A y B no es el punto P (en color rojo). Esto puede observarse en los dibujos que siguen.







c_2) El área del triángulo OAB es:

$$Área = \frac{OA \cdot OB}{2} \quad \Rightarrow \quad Área = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \, a \right) \cdot \frac{k \, (n+1)}{a^n} \quad \Rightarrow \quad Área = \frac{k \, (n+1)^2}{2na^{n-1}}$$

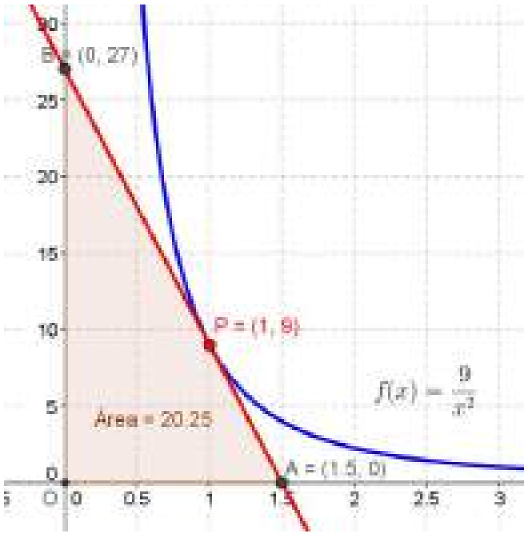
Observamos que el área del triángulo depende de los parámetros k y n que definen la función y de la variable a que nos da la posición del punto P sobre la gráfica de la función.

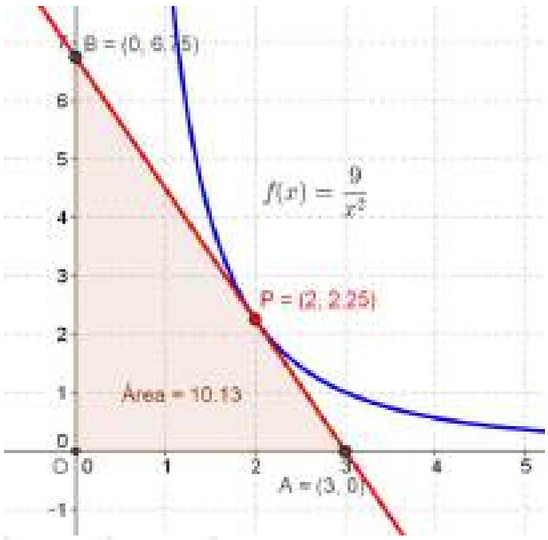
En las imágenes pueden verse las áreas de los triángulos OAB para la función $f\,(x) = \frac{9}{x^2}$ en los puntos de abscisas a = 1, a = 2 y a = 3.

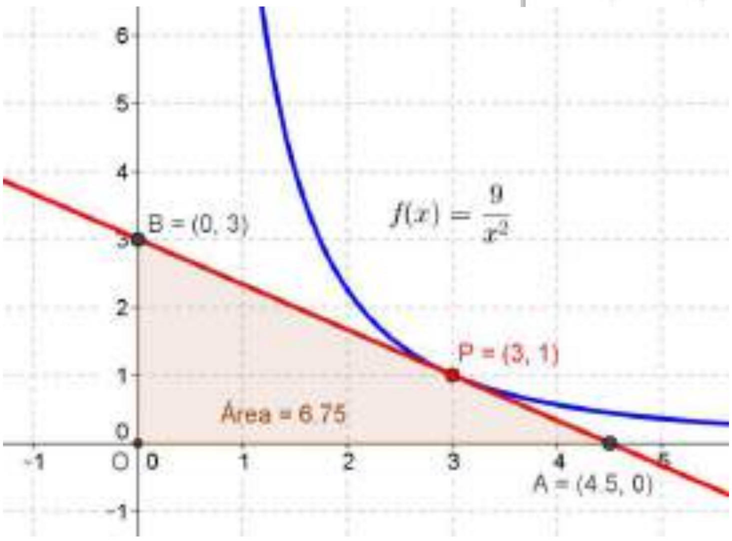
Si k = 9, n = 2 y a = 1, obtenemos: $Área = \frac{9\,(2+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 1^{2-1}} = \frac{81}{4} = 20{,}25 \; u^2$.

Si k = 9, n = 2 y a = 2, obtenemos: $Área = \frac{9\,(2+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 2^{2-1}} = \frac{81}{8} = 10{,}125 \; u^2$.

Si k = 9, n = 2 y a = 3, obtenemos: $Área = \frac{9\,(2+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 3^{2-1}} = \frac{81}{12} = 6{,}75 \; u^2$.







d) Las respuestas a los apartados aparecen a continuación:

d_1) La derivada de la función $y = \dfrac{k}{nx^n}$ es $y\,' = -\dfrac{k}{x^{n+1}}$. Sea $P\left(a, \dfrac{k}{na^n}\right)$ un punto de la función.

La ecuación de la recta tangente a la curva en P es:

$$y - \frac{k}{na^n} = -\frac{k}{a^{n+1}}(x-a) \quad \Rightarrow \quad knx + na^{n+1}y = k(n+1)a$$

Los puntos de corte A (con OX) y B (con OY) con los ejes coordenados son:

$$A: \begin{cases} knx + na^{n+1}y = k(n+1)a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{n+1}{n}a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{n+1}{n}a, 0\right)$$

$$B: \begin{cases} x = 0 \\ knx + na^{n+1}y = k(n+1)a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{k(n+1)}{na^n} \end{cases} \Rightarrow B = \left(0, \frac{k(n+1)}{na^n}\right)$$

Sea M el punto medio del segmento de extremos A y B; sus coordenadas son:

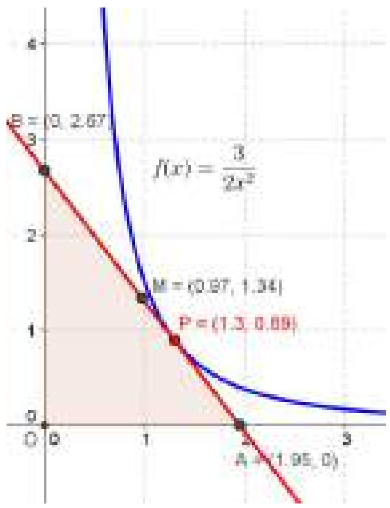
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{n+1}{n}a + 0}{2} = \frac{n+1}{2n}a \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + \frac{k(n+1)}{na^n}}{2} = \frac{k(n+1)}{2na^n}$$

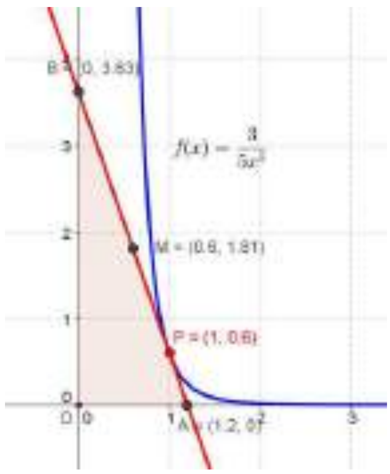
Para que el punto M coincida con el punto P debe cumplirse:

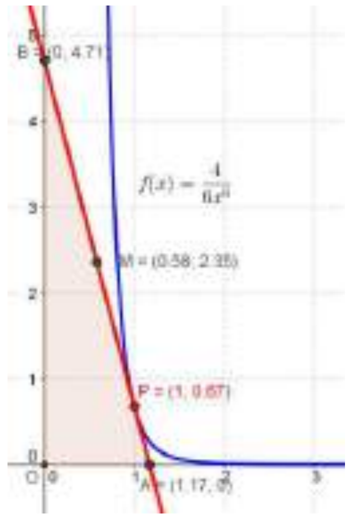
$$x_M = x_P \Rightarrow \frac{n+1}{2n}a = a \Rightarrow \frac{n+1}{2n} = 1 \Rightarrow n+1 = 2n \Rightarrow n = 1$$

$$y_M = y_P \Rightarrow \frac{k(n+1)}{2na^n} = \frac{k}{na^n} \Rightarrow \frac{n+1}{2} = 1 \Rightarrow n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$$

Como n debe ser mayor o igual que 2, el punto medio, M, del segmento de extremos A y B nunca coincide con el punto P. Esto puede observarse en los dibujos que siguen.







d$_2$) El área del triángulo OAB es:

$$Área = \frac{OA \cdot OB}{2} \quad \Rightarrow \quad Área = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\, a \right) \cdot \frac{k\ (n+1)}{na^n} \quad \Rightarrow \quad Área = \frac{k\ (n+1)^2}{2n^2 a^{n-1}}$$

Observamos que el área del triángulo depende de los parámetros k y n que definen la función y de la variable a que nos da la posición del punto P sobre la gráfica de la función.

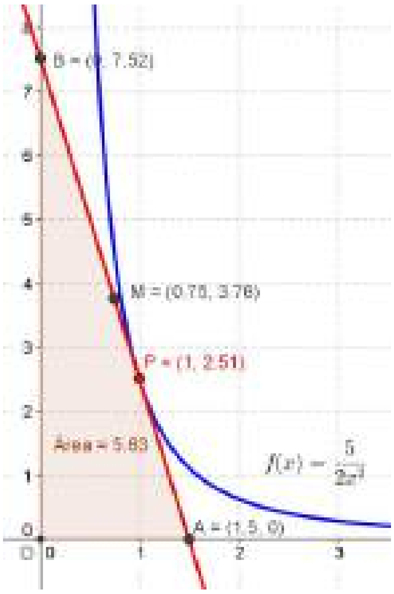
En las imágenes pueden verse las áreas de los triángulos OAB para la función $f\ (x) = \frac{5}{2x^2}$ en los puntos de abscisas a = 1, a = 2 y a = 3.

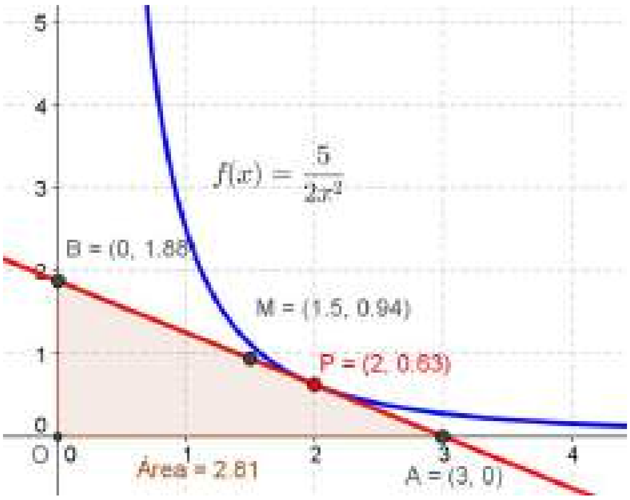
Si k = 5, n = 2 y a = 1, obtenemos: $Área = \frac{5\ (2+1)^2}{2 \cdot 2^2 \cdot 1^{2-1}} = \frac{45}{8} = 5{,}625\ u^2$.

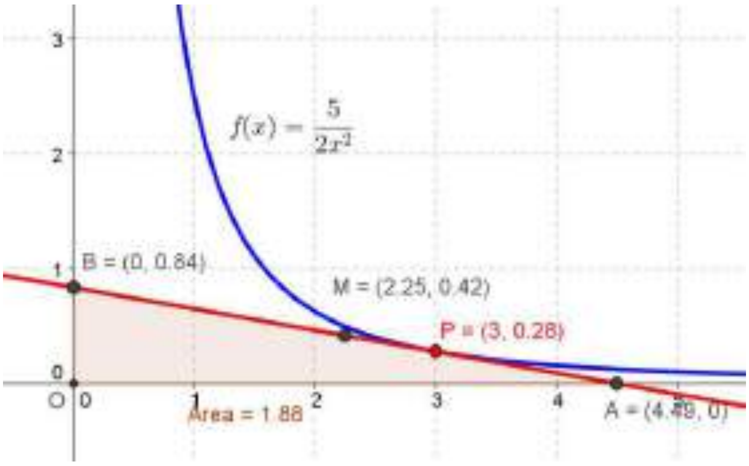
Si k = 5, n = 2 y a = 2, obtenemos: $Área = \frac{5\ (2+1)^2}{2 \cdot 2^2 \cdot 2^{2-1}} = \frac{45}{16} = 2{,}81\ u^2$.

ZXZxZXZX

Si k = 5, n = 2 y a = 3, obtenemos: $Área = \frac{5\ (2+1)^2}{2 \cdot 2^2 \cdot 3^{2-1}} = \frac{45}{24} = 1{,}875\ u^2$.







UNIDAD 13: Introducción a las derivadas

ACTIVIDADES-PÁG. 302

1. Las soluciones aparecen en la tabla.

	[0, 3]	[3, 6]
a) $f_1(x) = 2x$	2	2
b) $f_2(x) = 2x + 3$	2	2
c) $f_3(x) = x^2$	3	9
d) $f_4(x) = 2^x$	$\frac{7}{3} = 2{,}33$	$\frac{56}{3} = 18{,}67$

2. El valor de los límites es:

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 6$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = -\dfrac{4}{(x-2)^2}$

3. La ecuación de la recta que pasa por P (- 2, 3) y con pendiente $-\frac{1}{3}$ es x +3y = 7.

La ecuación de la recta perpendicular a la anterior en P (- 2, 3) es 3x – y = - 9.

4. La ecuación de la recta tangente a $y = 2x^2 - 4x + 6$ en el punto P (0, 6) es 4x + y = 6.

ACTIVIDADES-PÁG. 319

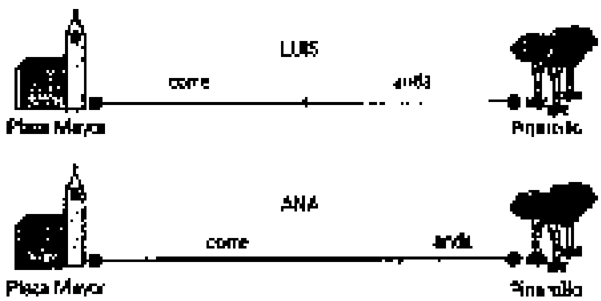
1. Podemos representar el problema en un gráfico.

En el gráfico está muy clara la situación del problema y la solución del mismo.

Efectivamente, hay un punto por el que pasa a la misma hora, y es el punto (*) en el que se encuentran los dos trayectos, el de ida y el de vuelta.

2. Cuando Luis está en la mitad del camino, comienza a andar, luego la otra mitad va a velocidad más lenta.

En cambio, Ana, al correr la mitad del tiempo, corre más de la mitad del camino, por lo que menos de la mitad lo hace andando, así llega antes Ana.



3. El primer cirujano se pone el guante (A) dentro del otro (B), es decir, se pone (A) y encima se pone (B).

El segundo cirujano se pone el guante (B) por la cara que no ha tocado al herido.

El tercer cirujano se pone el guante (A) dándole la vuelta y encima de éste (B) con que han operado los otros dos cirujanos.

ACTIVIDADES-PÁG. 321

1. En la imagen vemos la resolución de esta actividad

$$f(x) := (e)^{(\cos(2\cdot x))^2}\cdot \mathrm{sen}(2\cdot x) \rightarrow x \mapsto e^{(\cos(2\cdot x)^2)}\cdot \mathrm{sen}(2\cdot x)$$

$$f' \rightarrow x \mapsto -4\cdot\left(\cos(2\cdot x)\cdot e^{\cos(2\cdot x)^2}\cdot \mathrm{sen}(2\cdot x)^2\right)+2\cdot\left(\cos(2\cdot x)\cdot e^{\cos(2\cdot x)^2}\right)$$

$$g(x) := \left(\frac{2\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right) \rightarrow x \mapsto \frac{2\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

$$g' \rightarrow x \mapsto \frac{2}{(x+4)\cdot\sqrt{x}+4\cdot x}$$

2. En la imagen vemos la resolución de esta actividad.

a) Para la función y = f(x) obtenemos su derivada en x = - 1 y la ecuación de las recta tangente en x = -1 que es $y = \frac{-1}{3}x + \frac{1}{6}$, y la de la recta normal $y = 3x + \frac{7}{2}$.

b) Para la función y = g(x) obtenemos su derivada en x = 0 y la ecuación de la recta tangente en x = 0 que es y = π; la de la recta normal no la determina al ser x = 0.

$$f(x) := \frac{3\cdot x}{2\cdot x-4} \rightarrow x \mapsto \frac{3\cdot x}{2\cdot x-4}$$

$$f' \rightarrow x \mapsto \frac{3}{-x^2+4\cdot x-4}$$

$$f'(-1) \rightarrow -\frac{1}{3}$$

$$t(x)=f'(-1)\cdot(x+1)+f(-1) \rightarrow x \mapsto -\frac{1}{3}\cdot x+\frac{1}{6}$$

$$n(x)=\frac{-1}{f'(-1)}\cdot(x+1)+f(-1) \rightarrow x \mapsto 3\cdot x+\frac{7}{2}$$

$$g(x) := 4\cdot \mathrm{atan}\left(\sqrt{2\cdot x^4+1}\right) \rightarrow x \mapsto 4\cdot \mathrm{atan}\left(\sqrt{2\cdot x^4+1}\right)$$

$$g' \rightarrow x \mapsto \frac{8\cdot x^3}{(x^4+1)\cdot\sqrt{2\cdot x^4+1}}$$

$$g'(0) \rightarrow 0$$

$$t(x)=g'(0)\cdot(x-0)+g(0) \rightarrow x \mapsto \pi$$

$$n(x)=\frac{-1}{g'(0)}\cdot(x-0)+g(0)$$

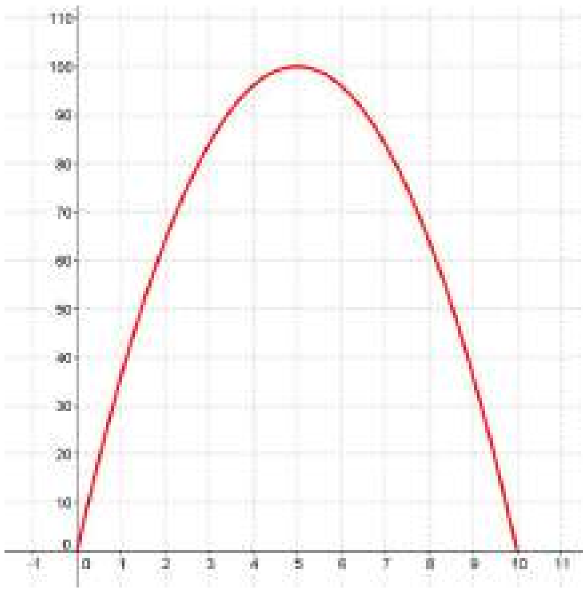
ACTIVIDADES-PÁG. 322

1. Las soluciones pueden verse en la tabla.

	[- 2, 3]	[0, 4]	[2, 5]
a) f (x) = 2x + 4	2	2	2
b) $g(x) = 7x - x^3$	0	- 9	- 32
c) $h(x) = \sqrt{x+6}$	$\frac{1}{5} = 0{,}2$	$\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{4} = 0{,}18$	$\frac{\sqrt{11}-\sqrt{8}}{3} = 0{,}16$
d) $t(x) = \frac{2}{x^2-1}$	$-\frac{1}{12} = -0{,}083$	$\frac{8}{15} = 0{,}53$	$-\frac{7}{36} = -0{,}19$

2. Las soluciones son:

a) La gráfica la podemos ver en el dibujo.



b) Las tasas de variación medias son:

TVM [1; 1,5] = 30 m/s

TVM [1; 3] = 24 m/s

TVM [1; 5] = 16 m/s

c) Los valores anteriores son las velocidades medias que alcanza el balón en cada uno de los intervalos citados.

3. Las tasas pedidas son:

$$TVM\ [1, e] = \frac{\ln e - \ln 1}{e-1} = \frac{1}{e-1} = 2{,}7183\,;\quad TVM\ [e, e^2] = \frac{\ln e^2 - \ln e}{e^2 - e} = \frac{1}{e^2-e} = 0{,}2141$$

4. La velocidad media entre los instantes 2,5 y 6 vale 13 m/s.

La velocidad instantánea en el instante 2,5 vale 6 m/s.

La velocidad instantánea en el instante 6 vale 20 m/s.

5. a) Las tasas de variación media del efecto son: TVM [0,2] = 0,1768 y TVM [0, 4] = 0,125.

b) En la gráfica podemos ver que en las cuatro primeras horas aumenta el efecto del fármaco, no así en las siguientes.

a) f(x) = 8 + x b) g (x) = 2 – x^2 c) t (x) = $\dfrac{1}{x+1}$

6. El valor de las derivadas es:

a) f ´ (1) = - 6 b) f ´ (2) = $\dfrac{1}{4}$ c) f ´ (7) = $\dfrac{2}{5}$

7. Los resultados pueden verse en la tabla.

Función	**Tangente**	**Pendiente**	**Ángulo con OX**
a) f(x) = 8 + x	y = x + 8	1	45º
b) g (x) = 2 – x^2	y = 2	0	0º
c) t (x) = $\dfrac{1}{x+1}$	y = - x + 1	- 1	135º

8. La recta tangente en el punto P (0, 5) es 2x + y = 5.

9. Los puntos de ordenada 5 son P (1, 5) y Q (5, 5).

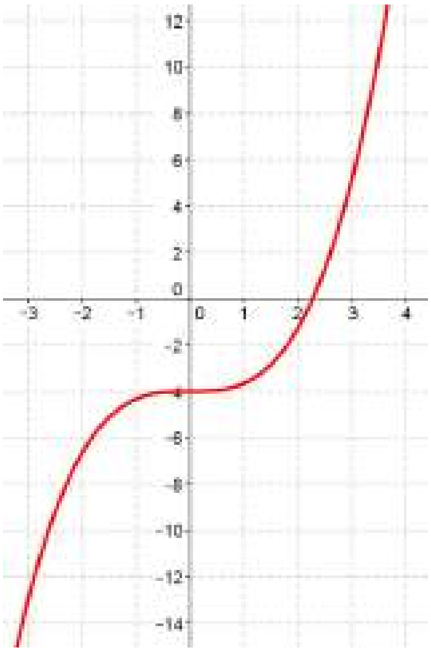
Las rectas tangente y normal en el punto P (1, 5) son, respectivamente: 8x + y = 13 y x – 8y = - 39.

Las rectas tangente y normal en el punto Q (5, 5) son, respectivamente: 8x - y = 35 y x + 8y = 45.

10. No hay ningún punto de la curva $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4$ cuya tangente sea paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante (en esta curva todas las pendientes de las tangentes son positivas o nulas).

En el punto (0, - 4) la recta tangente será paralela al eje de abscisas.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica.



ACTIVIDADES-PÁG. 323

11. Los valores que se piden son: f ´(2) = 0 y $f\,'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3{,}75} = -0{,}27$

12. La función buscada es f (x) = 2x – 3.

13. Se corresponde con la gráfica del apartado b).

La gráfica de f ´(x) tiene por ecuación f ´(x) = - 4x + 4, entonces f (x) = - 2x^2 + 4x.

14. Las funciones derivadas son:

a) f ´(x) = 5

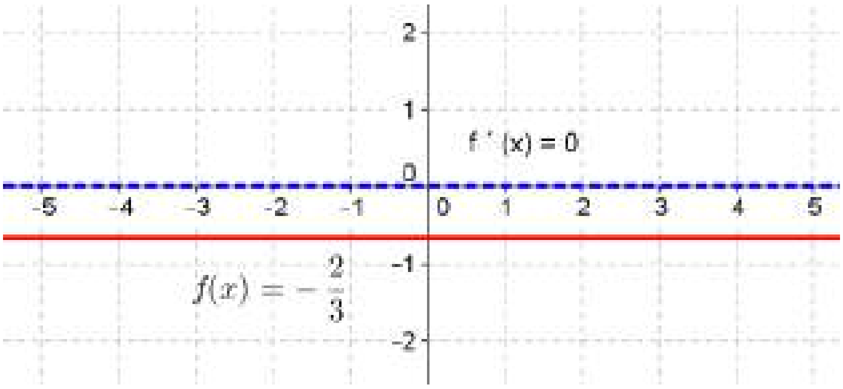
b) f ´ (x) = 32x – 24

c) f ´ (x) = - 3x^2 + 2

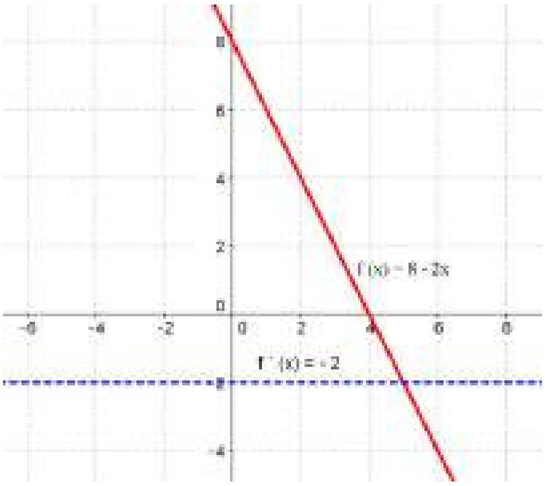
d) $f\,'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

15. Las funciones y sus derivadas aparecen a continuación. En las representaciones las gráficas de las funciones son las líneas continuas y rojas y las gráficas de las funciones derivadas son las azules y discontinuas.

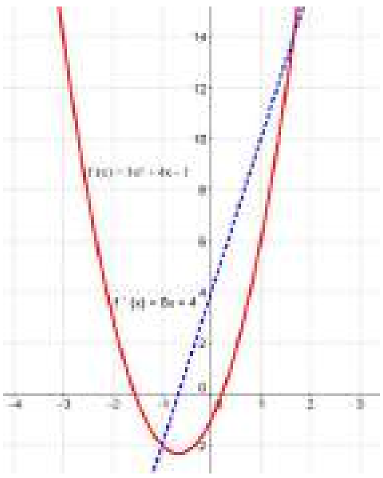
a) f (x) = $-\dfrac{2}{3}$ f ´ (x) = 0



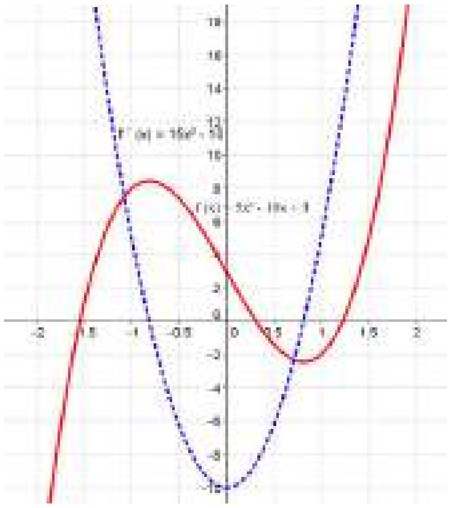
b) f (x) = 8 -2x f ´ (x) = - 2



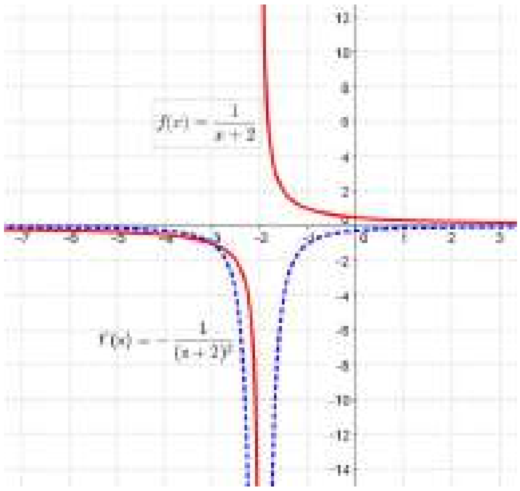
c) f (x) = $3x^2 + 4x - 1$ f ´ (x) = 6x + 4



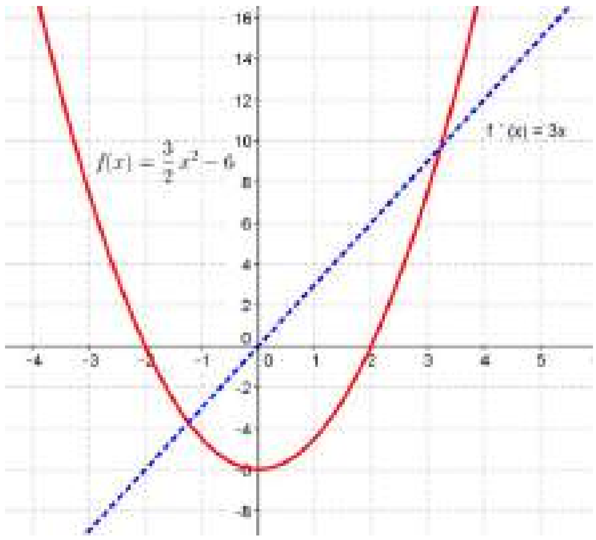
d) $f(x) = 5x^3 - 10x + 3$ $f'(x) = 15x^2 - 10$



e) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$



f) $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 6$ $f'(x) = 3x$



16. Se debe verificar que: f´(x) = g´(x); es decir la ecuación $3x^2 – 6x = 9 – 12x$; de donde obtenemos las soluciones 1 y -3.

Para la función y = f (x) los puntos son A_1 (1, 2) y A_2 (- 3, - 50), en ambos las pendientes de las rectas tangentes valen – 3 y 45, respectivamente.

Para la función y = g (x) los puntos son B_1 (1, 3) y B_2 (- 3, - 81), en ambos las pendientes de las rectas tangentes valen – 3 y 45, respectivamente.

ACTIVIDADES-PÁG. 324

17. Las derivadas son:

a) $D[x^8] = 7x^8$

b) $D\left[\dfrac{2}{x^3}\right] = -\dfrac{6}{x^4}$

c) $D\left[3\sqrt[5]{x}\right] = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^4}}$

d) $D[5x^2 + 4x - 1] = 10x + 4$

e) $D\left[\dfrac{x^2 - 1}{4}\right] = \dfrac{x}{2}$

f) $D\left[\dfrac{3}{2x-5}\right] = -\dfrac{6}{(2x-5)^2}$

g) $D\left[\dfrac{4}{\left(x^4 + 3x^2 - 2\right)^3}\right] = \dfrac{-48x^3 - 72x}{(x^4 + 3x^2 - 2)^4}$

h) $D[(x - 2x^2)^3] = 3 \cdot (1 - 4x) \cdot (x - 2x^2)^2$

i) $D\left[\dfrac{-1}{\sqrt{3 + 2x^2}}\right] = \dfrac{2x}{(3 + 2x^2)\sqrt{3 + 2x^2}}$

18. Las derivadas son:

a) $D\left[5^{\frac{x}{4}}\right] = \dfrac{\ln 5}{4} \cdot 5^{\frac{x}{4}}$

b) $D[2 \cdot 3^{2x}] = 4 \cdot \ln 3 \cdot 3^{2x}$

c) $D\left[e^x - e^{-x}\right] = e^x + e^{-x}$

d) $D\left[5^{3x} \cdot 3^{5x}\right] = (3 \ln 5 + 5 \ln 3) \cdot 5^{3x} \cdot 3^{5x}$

e) $D\left[\dfrac{e^{-2x}}{4}\right] = -\dfrac{1}{2}\, e^{-2x}$

f) $D[(e^{2x} + 1)^4] = 8 \cdot e^{2x} \cdot (e^{2x} + 1)^3$

19. Las derivadas son:

a) $D[\ln (7x^2 - 1)] = \dfrac{14x}{7x^2 - 1}$

b) $D[\ln (2 - x^3)^2] = -\dfrac{6x^2}{2 - x^3}$

c) $D[\ln (e^x \cdot 2x)] = \dfrac{x+1}{x}$

d) $D\left[\ln \sqrt{4x^3 - 9}\right] = \dfrac{6x^2}{4x^3 - 9}$

e) $D[\log_3 (x^2 - 1)] = \dfrac{2x}{\ln 3 \cdot (x^2 - 1)}$

f) $D\left[\ln\left(\dfrac{2 - 5x}{2 + 5x}\right)\right] = \dfrac{20}{25x^2 - 4}$

g) $D[\ln (\ln x)] = \dfrac{1}{x \cdot \ln x}$

h) $D\left[\ln\left(x^2 \cdot \sqrt{9 - x^2}\right)\right] = \dfrac{18 - 3x^2}{9x - x^3}$

i) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}\right)\right] = \dfrac{1}{\sqrt{x} \cdot (x - 1)}$

20. Las derivadas son:

a) $D[\text{sen } 3x] = 3 \cdot \cos (3x)$

b) $D[3 \text{ sen } x] = 3 \cdot \cos x$

c) $D\left[sen\left(\frac{x}{3}\right)\right] = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

d) $D\left[sen\left(\frac{3}{x}\right)\right] = -\frac{3}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{3}{x}\right)$

e) $D[\text{sen } x^3] = 3x^2 \cdot \cos x^3$

f) $D[\text{sen}^3 x] = 3 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos x$

g) $D[\cos x^{-4}] = 4 \cdot x^{-5} \cdot \text{sen } x^{-4}$

h) $D[\cos(x + \pi)] = -\text{ sen }(x + \pi)$

i) $D[\cos^2(2x^3 + 1)] = -12x^2 \cdot \cos(2x^3 + 1) \cdot \text{sen}(2x^3 + 1)$

j) $D\left[\sqrt[3]{sen\ 3x}\right] = sen^{-2/3}(3x)\cdot\cos(3x)$

k) $D[\text{tg}(x^2 + 2)] = 2x + 2x \cdot \text{tg}^2(x^2 + 2)$

l) $D\left[\sqrt{tg\ x}\right] = \frac{1 + tg^2\ x}{2\sqrt{tg\ x}}$

m) $D[\text{tg } 3^x] = \ln 3 \cdot 3^x \cdot [1 + \text{tg}^2(3^x)]$

n) $D\left[tg\ \sqrt{x}\right] = \frac{1 + tg^2\ \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

ñ) $D[\text{tg}^3(x + 1)] = 3 \cdot \text{tg}^2(x + 1) \cdot 3 \cdot \text{tg}^4(x + 1)$

o) $D[\text{arcos}(\ln x)] = -\frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$

p) $D[\text{arcsen}(x - 3)^2] = \frac{2(x-3)}{\sqrt{1 - (x-3)^4}}$

q) $D\left[arc\,tg\ \sqrt{4x}\right] = \frac{1}{\sqrt{x}(1 + 4x)}$

21. Los valores de las derivadas son:

a) $f'(x) = \frac{4x^4 - 1}{2x^2\sqrt{1 + 4x^4}}$ $D f(1) = \frac{3\sqrt{5}}{10}$

b) $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8 + x^2}}$ D g (0) = $\dfrac{\sqrt{8}}{8}$

c) h ´ (x) = 12 · cos 3x · sen 3x D h (π) = 0

d) $j'(x) = -\dfrac{e^x}{(e^x - 1)^2}$ D j (0) no existe (la función j (x) no está definida en el 0.

ACTIVIDADES-PÁG. 325

22. a) $D\left[(1 - x)\sqrt{1 + x}\right] = \dfrac{-1 - 3x}{2\sqrt{1 + x}}$

b) $D\left[\sqrt[3]{3x^5 + 4}\right] = \dfrac{5x^4}{\sqrt[3]{(3x^5 + 4)^2}}$

c) $D\left[\dfrac{2x^2 + 1}{2x^2 - 1}\right] = -\dfrac{8x}{(2x^2 - 1)^2}$

d) $D[(7x^2 - 3).(5x - 4)^5] = (245x^2 - 56x - 75) \cdot (5x - 4)^4$

e) $D[\ln 6 \cdot 6^x] = (\ln 6)^2 \cdot 6^x$

f) $D\left[5^x \cdot \sqrt{3 + 5^x}\right] = \ln 5 \cdot 5^x \cdot \sqrt{3 + 5^x} + \dfrac{\ln 5 \cdot 5^{2x}}{2\sqrt{3 + 5^x}}$

g) $D\left[\dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 4}\right] = \dfrac{8}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 4\right)^2}$

h) $D\left[\dfrac{e^{x^2}}{x}\right] = \dfrac{e^{x^2} \cdot (2x^2 - 1)}{x^2}$

i) $D\left[\dfrac{x^2}{3^{2x}}\right] = \dfrac{2x - 2 \cdot \ln 3 \cdot x^2}{3^{2x}}$

j) $D[(x^2 + 1)^2 \cdot e^{2x}] = 2(x^2 + 1) \cdot e^x \cdot (x + 1)^2$

k) $D\left[\ln\sqrt{x^2(4x - 1)}\right] = \dfrac{6x - 1}{4x^2 - x}$

l)

$$D\left[2^{\sqrt{x}}\cdot\ln\sqrt{x}\cdot(2\sqrt{x})^8\right]=\frac{2^{\sqrt{x}}\cdot\ln 2}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\sqrt{x}\,"\cdot\left(2\sqrt{x}\right)^8+\frac{2^{\sqrt{x}}}{2x}\cdot\left(2\sqrt{x}\right)^8+2^{\sqrt{x}}\cdot\ln\sqrt{x}\cdot 1024x^3$$

m) $D[x^2 \ln x + x \ln x^2] = (2x + 2)\cdot \ln x + (x + 2)$

n) $D[\ln (e^{-x} - 2x^6] = \dfrac{e^{-x}+12x^5}{2x^6-e^{-x}}$

ñ) $D\left[\dfrac{1}{1+x}+\ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)\right]=-\dfrac{2+x}{(1+x)^2}$

o) $D[\text{sen } 7x \cdot 7^{2x}] = 7^{2x}\cdot [7\cdot\cos (7x) + 2\cdot \ln 7 \cdot \text{ sen } (7x)]$

p) $D[\ln (\ln \text{sen } x)] = \dfrac{\cot g\ x}{\ln\ (sen\ x)}$

q) $D\left[\dfrac{2.sen2x}{\cos 2x-2}\right]=\dfrac{4\ -8\cdot\cos(2x)}{(\cos(2x)-2)^2}$

r) $D[x^a\cdot a^x\cdot e^{ax}] = x^{a-1}\cdot a^x\cdot e^{ax}\cdot[a + x\cdot \ln a + ax]$

s) $D[\text{sen}^4 x^3\cdot \cos^3 x^4] = 12x^2\cdot \text{sen}^3 (x^3)\cdot \cos (x^3)\cdot \cos^3 (x^4) - 12x^3\cdot \text{sen}^4 (x^3)\cdot \cos^2 (x^4)\cdot \text{sen } (x^4)$

t) $D\left[\ln\left(\dfrac{1-\cos\ x}{1+\cos\ x}\right)\right]=\dfrac{2}{sen\,x}$

u) $D\left[tg^2\,(2x-\pi)\right]=4\ tg\,(2x-\pi)\cdot\ [1+tg^2\ (2x-\pi)]$

v) $D\left[arctg\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]=\dfrac{1}{1+x^2}$

w) $D\left[\sqrt{\dfrac{1+sen\ x}{1-sen\ x}}\right]=\sqrt{\dfrac{1-sen\ x}{1+sen\,x}}\cdot\dfrac{\cos x}{(1-sen\ x)^2}\ =\dfrac{1}{1-sen\,x}$

x) $D\left[\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)\right]=\dfrac{9}{x^3+9x}$

y) $D\left[arcsen\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x^2}\ (1-x^2)}$

z) $D\left[\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\right] = -\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$

23. a) La velocidad media en el intervalo [2, 4] fue de 6 m/s.

b) La velocidad de la pelota fue de 12 m/s en el instante t = 2; esto sucedió a la altura de 12 m.

24. La derivada pedida es $f^{(10)}(x) = 3^{10} \cdot e^{-3x}$

25. La derivada es positiva para los valores de x pertenecientes a $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

26. La derivada enésima es $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(x-1)^n}$.

Por tanto, $f^{(2016)}(x) = -\frac{2015\,!}{(x-1)^{2016}}$

27. La recta tangente en el punto (8, 6) es 4x – y = 26.

28. La recta tangente es $\sqrt{5}\,x - y = 1$.

ACTIVIDADES-PÁG. 326

29. Hay dos puntos de coordenadas P (1, 2) y Q (1, - 10).

Hallamos la pendiente de todas las rectas tangentes a esta circunferencia:

$2x + 2yy' + 6 + 6y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x+3}{y+4}$

● La recta tangente en P es: $y - 2 = -\frac{2}{3}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$.

● La recta tangente en Q es: $y + 10 = \frac{2}{3}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x - \frac{32}{3}$.

30. Los valores son m = - 3 y n = 4 y la función será $y = -3x^2 + 4x + 3$.

31. La demostración queda:

Sea la función $y = e^{ax} \cdot \text{sen } bx$, derivamos e introducimos en la expresión a demostrar.

$y' = a \cdot e^{ax} \cdot \text{sen } bx + b \cdot e^{ax} \cdot \cos bx \quad \Rightarrow \quad y'' = a^2 \cdot e^{ax} \cdot \text{sen } bx + 2ab \cdot e^{ax} \cdot \cos bx - b^2 \cdot e^{ax} \cdot \text{sen } bx$

Introducimos las derivadas en la expresión a demostrar:

$$2a\, y' - y'' = a^2 \cdot e^{ax} \cdot \text{sen } bx + b^2 \cdot e^{ax} \cdot \text{sen } bx = (a^2 + b^2) \cdot e^{ax} \cdot \text{sen } bx = (a^2 + b^2) \cdot y$$

32. Llamamos h a la altura del cono y r al radio de la base. El volumen vendrá dado por $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$.

Hemos de calcular dh/dt cuando h = 1,75 m y dV/dt = 0,3.

Como h = r obtenemos $V = \frac{1}{3}\pi \cdot h^3$. Derivando obtenemos: $\frac{dV}{dt} = \pi \cdot h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$.

De donde $\frac{dh}{dt} = \frac{0{,}3}{\pi \cdot 1{,}75^2} = 0{,}031$ m/min.

33. La recta tiene por ecuación $y = -2x + 9$ y la parábola $y = 0{,}2\,x^2 - 2{,}8\,x + 9{,}8$.

34. a) El radio inicial es R (0) = 0,5 cm. Para que el radio sea de 2,5 cm han de pasar 2,13 minutos.

b) La tasa de variación del radio respecto al tiempo viene dada por $\frac{dR}{dt} = \frac{162 \cdot t^2}{(t^3 + 12)^2}$.

c) El área de la mancha es $A(t) = \pi \cdot R^2$ y $\frac{dA}{dt} = 2\pi \cdot \frac{6 + 5t^3}{t^3 + 12} \cdot \frac{162 \cdot t^2}{(t^3 + 12)^2}$ y para R = 4; t = 3,48 minutos y la tasa de variación del área de la mancha es 16,83 m^2/min.

35. a) N (0) = 600 avispas.

b) Hallamos N´(5); $N'(t) = 60 \cdot e^{0{,}3t}$; N´(5) = 268,9 avispas/día.

c) Hallamos t para que N´(t) = 13284,38 y obtenemos t = 18 días.

36. a) Estas funciones se cortan en el punto P (2, 6).

b) La recta tangente a la primera curva en el punto P tiene por pendiente $m_1 = 4$ y por ecuación $y = 4x - 2$.

La recta tangente a la segunda curva en el punto P tiene por pendiente $m_2 = 9$ y por ecuación $y = 9x - 12$.

Hallamos el ángulo que forman estas rectas con la fórmula:

$$tg\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \text{ y obtenemos } \alpha = 7,70^\circ$$

ACTIVIDADES-PÁG. 327

Ofrecemos bibliografía sobre la relación entre matemáticas y ciclismo.

CORBALÁN, Fernando. (201) *Matemáticas de cerca.* Graó. Barcelona.

ORTEGA, Tomás. (2005). *Conexiones matemáticas.* Graó. Barcelona.

SORANDO MUZÁS, J. M. (2012) *Matemáticas y deporte. Sugerencias para el aula.* Revista Números. Volumen 80.

SORANDO MUZÁS, J. M. http://catedu.es/matematicas_mundo/

http://plataformarecorridosciclistas.org/2009/11/22/rampas-maximas-superadas-en-competicion/

UNIDAD 14: Aplicaciones de las derivadas

ACTIVIDADES-PÁG. 328

1. La función y = f (x) es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en (1, 3). Tiene un máximo relativo en el punto (1, 4) y un mínimo relativo en (0, 3).

La función y = g (x) es creciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en (0, 1). Tiene un mínimo relativo en el punto (0, 3).

2. Dos números cualesquiera que sumen 16 son x y 16 – x.

Su producto, P (x) = (16 – x) · x = 16x – x^2, es una función cuadrática cuya gráfica es una parábola con un máximo relativo en su vértice (8, 64).

Es decir, los números pedidos son 8 y 8.

Dos números cualesquiera cuyo producto es 16 son x y $\frac{16}{x}$.

Su suma, $S(x) = x + \frac{16}{x}$, es una función cuya gráfica tiene un mínimo relativo en el punto (4, 8).

Por tanto, los números pedidos son 4 y 4.

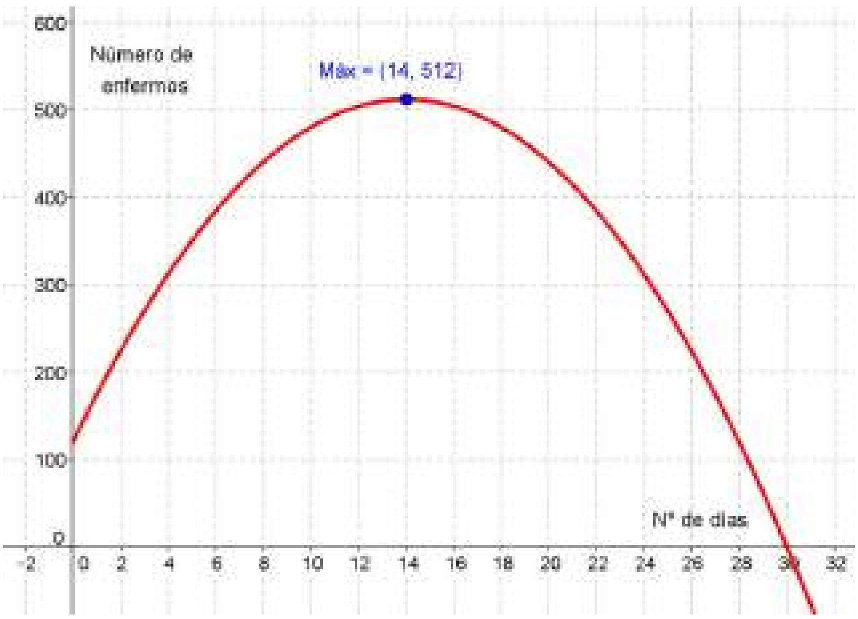
3. a) La función $f\ (x) = \frac{3}{x}$ es siempre decreciente y no tiene extremos relativos.

b) La función g (x) = 12x – $3x^2$ es creciente en $(-\infty, 2)$ y decreciente en $(2, +\infty)$. Tiene un máximo relativo en el punto (2, 12).

4. El número de enfermos aumento entre el día que comenzó la epidemia y el día 14.

El número máximo de enfermos se alcanzó el día 14 y fue de 512.

Lo anterior puede verse en la gráfica.



ACTIVIDADES-PÁG. 343

1. Organizamos los datos en una tabla:

	Recibe	Marca
Lunes	X	M
Martes	X – M	12
Miércoles	X + 14	2 M
Jueves	4M	10
Viernes	4	X + 14 – 14
Sábado		20

Los discos que recibe menos los que marca son los 20 discos que le quedaron para el sábado:

$$X + X - M + X + 14 + 4\,M + 4 - (M + 12 + 2M + 10 + X) = 20 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 3X + 3M + 18 - 3M - X - 22 = 20 \quad \Rightarrow \quad 2X = 24 \quad \Rightarrow X = 12$$

El lunes recibió 12 discos.

2. Sea v la velocidad del camión y w la velocidad del tractor.

La expresión queda: $v + w = 2\,(v - w)$, es decir, $v = 3w$.

La velocidad del camión es el triple que la velocidad del tractor.

3. Llamamos R_4 al reloj que mide 4 minutos y R_9 al que mide 9 minutos.

● *Para medir 1 minuto*: ponemos ambos relojes a cero. Cuando pasan 4 minutos, damos la vuelta a R_4 y al pasar otros 4 minutos, lo que queda de R_9 es 1 minuto.

● *Para medir 2 minutos*: conseguimos 1 minuto por el procedimiento anterior. A la vez que logramos 1 minuto, el reloj R_4 lo ponemos y quedan en él 3 minutos. En este momento ponemos a funcionar R_9y al terminar, quedan en éste 6 minutos; ponemos a funcionar R_4 y al terminar éste último, quedan en el anterior 2 minutos.

● *Para medir 3 minutos*: está explicado en el procedimiento anterior.

● *Para medir 4 minutos*: con el reloj R_4.

● *Para medir 5 minutos*: ponemos R_4 y R_9; al terminar R_4, quedan en R_9 5 minutos.

● *Para medir 6 minutos*: esta situación se explica en el procedimiento para medir 2 minutos.

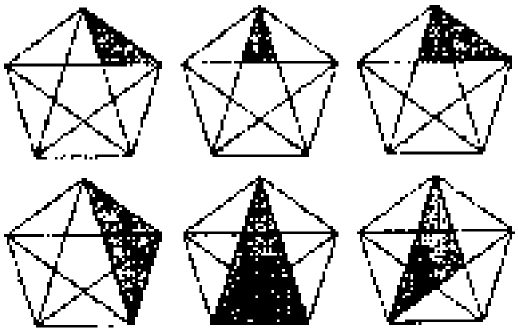
● *Para medir 7 minutos*: conseguimos 2 minutos por el procedimiento dado anteriormente. Los 2 minutos los tenemos en R_9. Ponemos a funcionar R_4 y al pasar 2 minutos en R_9 quedan otros 2 minutos en R_4. Ponemos a funcionar R_9 y, al pasar los dos minutos en R_4 quedarán 7 minutos en R_9.

● *Para medir 8 minutos*: ponemos dos veces R_4.

● *Para medir 9 minutos*: ponemos a funcionar R_9.

● *Para medir 2 minutos*: conseguimos que queden 6 minutos en R_9 por los procedimientos descritos ya vistos anteriormente y, cuando pasan esos 6 minutos, ponemos a funcionar R_4 obteniendo así los 10 minutos.

4. En esta figura podemos encontrar los siguientes tipos de triángulos:

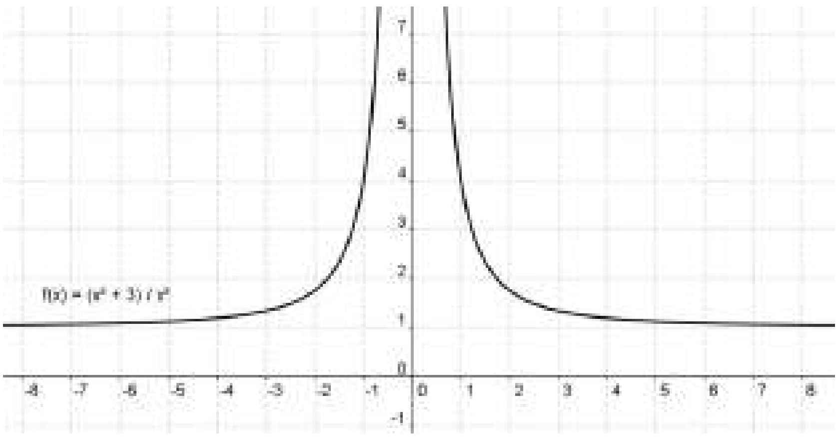


En cada figura podemos encontrar 5 triángulos iguales al rayado en la misma; por tanto, en total hay 5 x 6 = 30 triángulos.

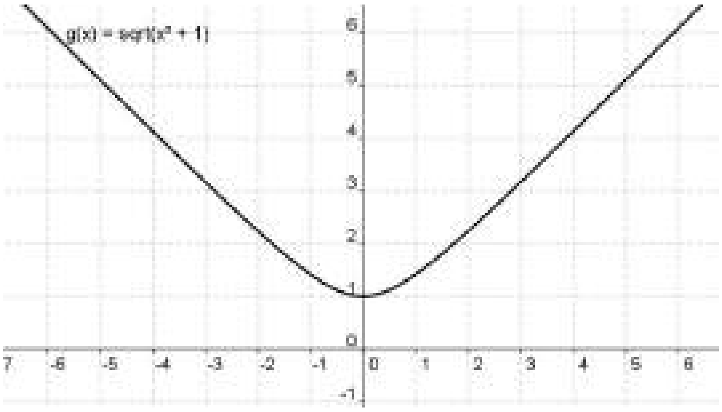
ACTIVIDADES-PÁG. 345

1. Procedemos como se indica en el apartado representación gráfica de funciones y obtenemos las gráficas que pueden verse a continuación:

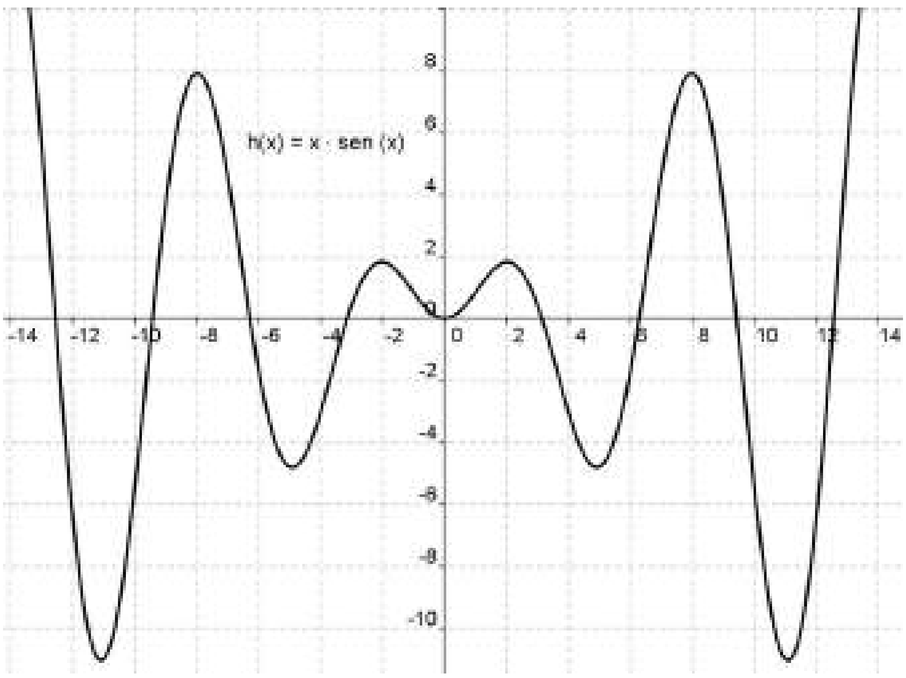
a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2}$



b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

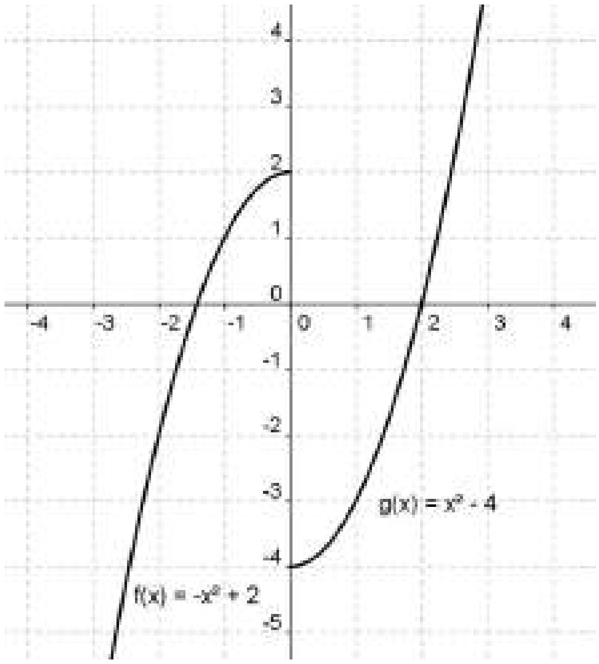


c) h(x) = x · sen (x)

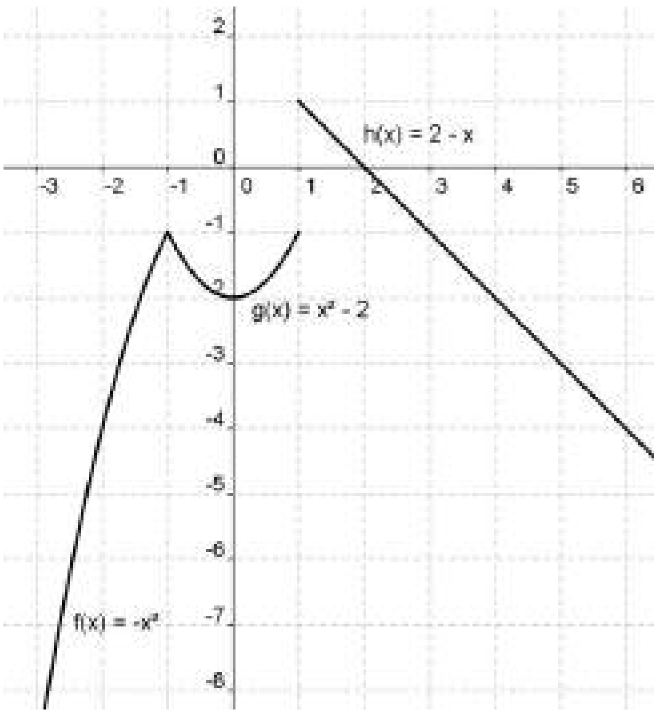


2. Procedemos como se indica en el apartado representación gráfica de funciones y obtenemos las gráficas que pueden verse a continuación:

a) $f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & si\ x\leq 0 \\ x^2-4 & si\ x>0 \end{cases}$



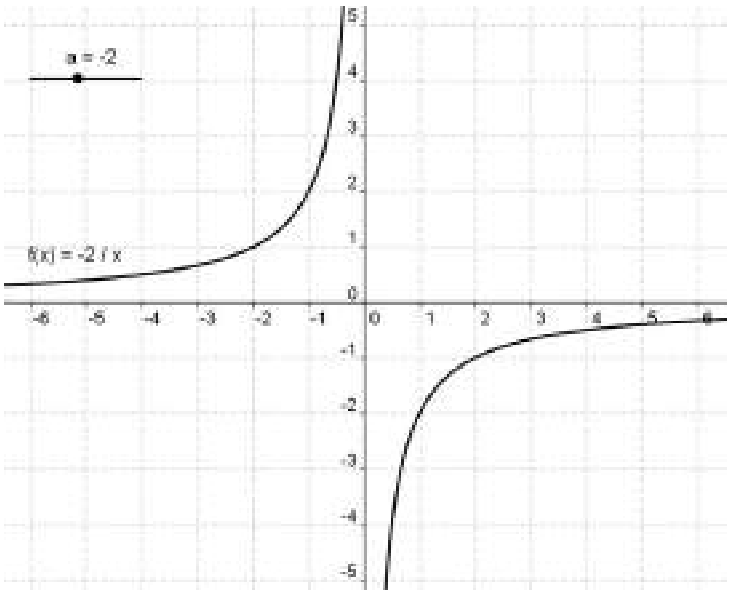
b) $g(x)=\begin{cases} -x^2 & si\ x<-1 \\ x^2-2 & si\ -1\leq x<1 \\ 2-x & si\ x\geq 1 \end{cases}$

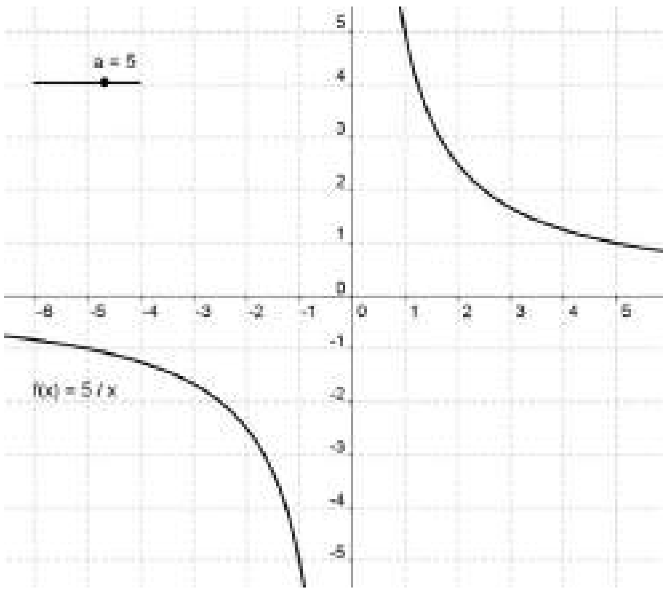


3. a) f (x) = $\dfrac{a}{x}$

1) Con la herramienta **Deslizador** y haciendo clic sobre la Zona o Vista Gráfica colocamos un deslizador, y lo llamamos a. En el *Menú Contextual* del deslizador elige **Intervalo** entre – 15 y 15, **Incremento** 1.

2) En el Campo de Entrada introduce una función genérica f(x) = $\dfrac{a}{x}$, tecleando f(x) = a/x. Varía los valores del deslizador y observa las variaciones de la gráfica.

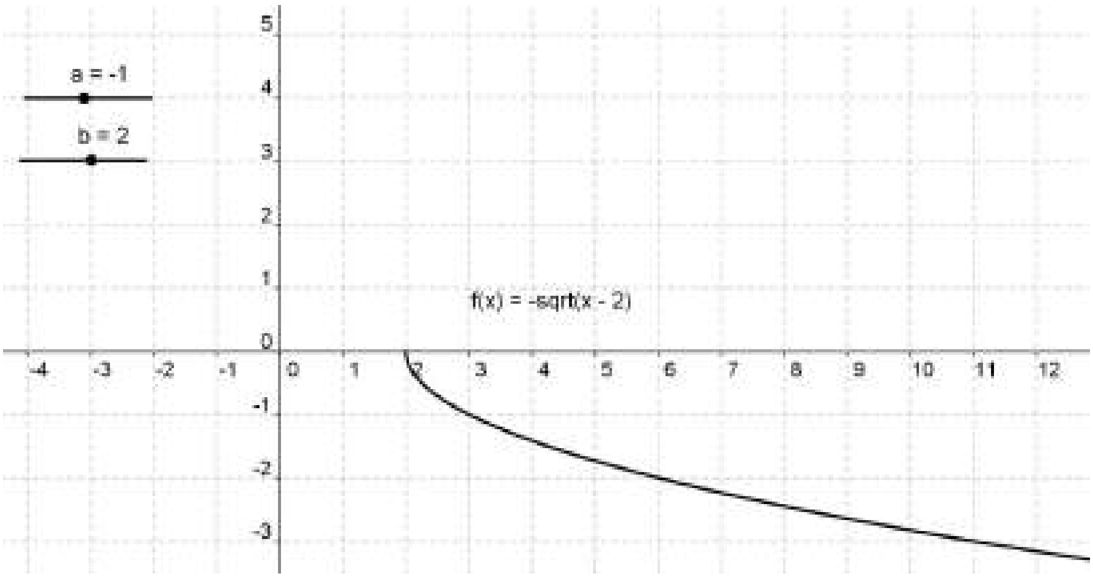


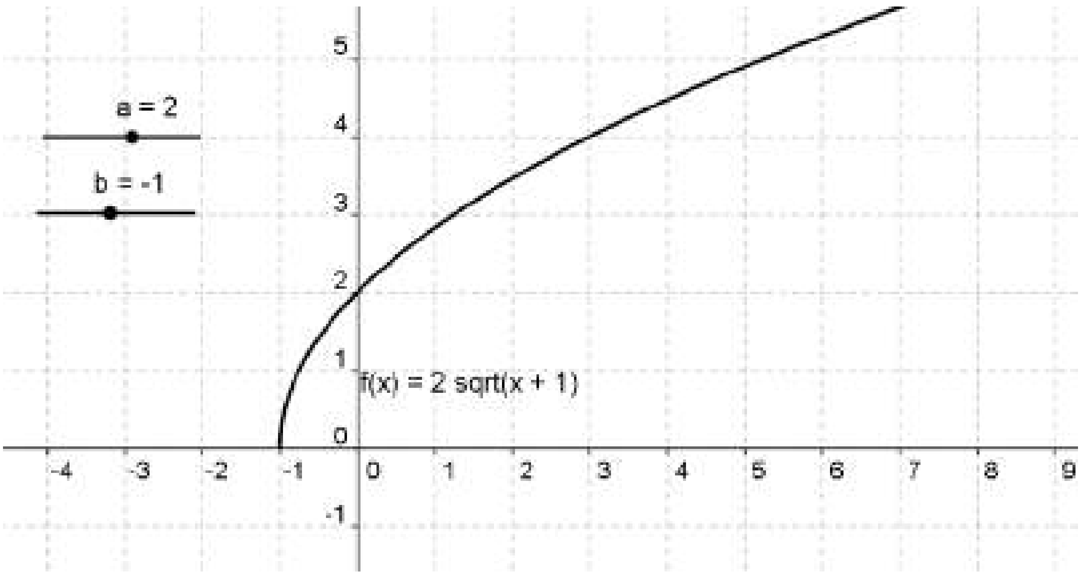


b) f (x) = $a\ \sqrt{x-b}$

1) Con la herramienta **Deslizador** y haciendo clic sobre la Zona o Vista Gráfica colocamos dos deslizadores, uno detrás de otro, y los llamamos a y b elige **Intervalo** entre – 15 y 15, **Incremento** 1.

2) En el Campo de Entrada introduce una función genérica f(x) = $a \cdot \sqrt{x-b}$ tecleando la expresión f(x) = a * sqrt (x-b).

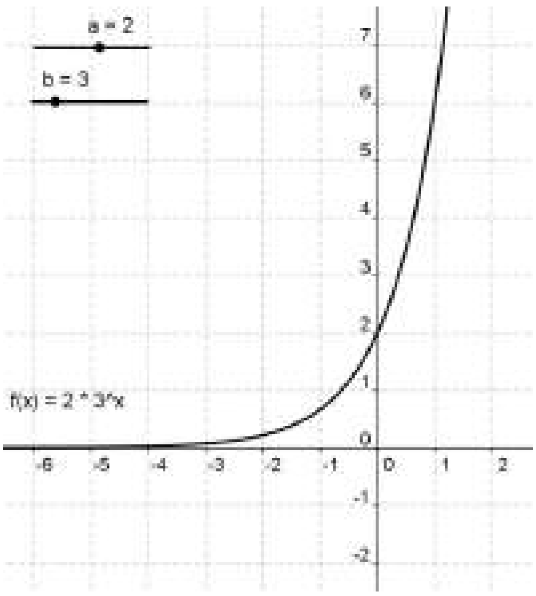


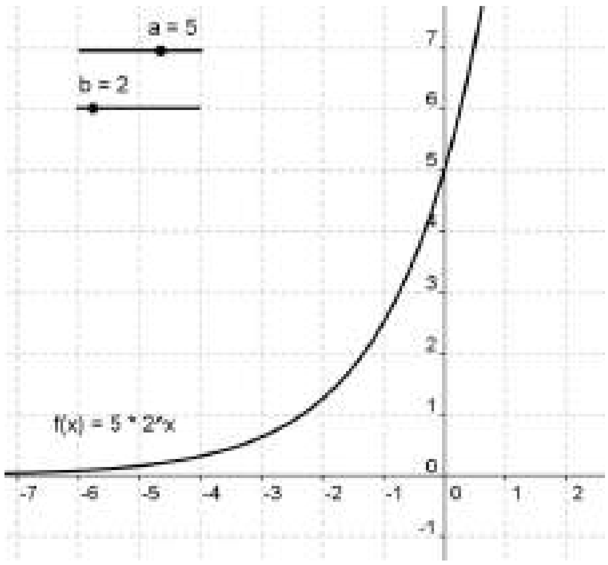


c) f (x) = a · b^x

1) Con la herramienta **Deslizador** y haciendo clic sobre la Zona o Vista Gráfica colocamos dos deslizadores, uno detrás de otro, y los llamamos a y b escoge **Intervalo** entre – 15 y 15, **Incremento** 1 y en el del segundo escoge **Intervalo** entre 0 y 15, **Incremento** 1.

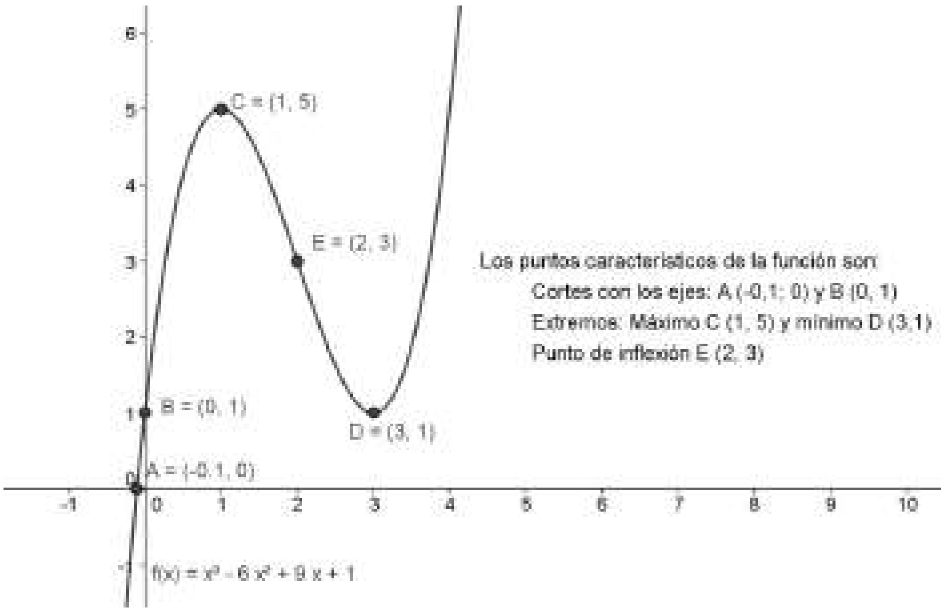
2) En el Campo de Entrada introduce una función genérica f(x) = a · b^x tecleando f(x) = a * b^^{x}. Varía los valores de los deslizadores y observa las variaciones de la gráfica.





4. Representamos las funciones y con la herramienta Intersección de dos objetos o con los comandos correspondientes encontramos los puntos de corte con los ejes coordenados, los extremos relativos y los puntos de inflexión de las funciones:

a) f (x) = x^3 – 6x^2 + 9x + 1

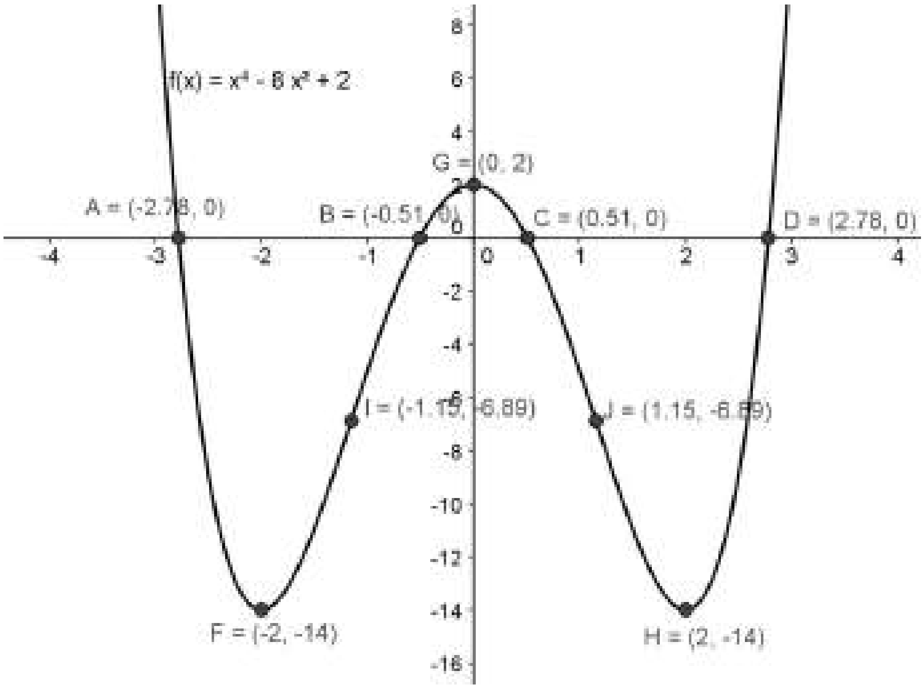


b) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son:
OX: A (-2,78; 0); B (- 0,51; 0); C (0,51; 0) y D (2,78; 0).
OY: G (0, 2)

Los puntos extremos son:
Máximo: G (0, 2)
Mínimos: F (- 2, -14) y H (2, - 14)

Los puntos de inflexión son: I (- 1,15; - 6,89) y J (1,15; - 6,89)

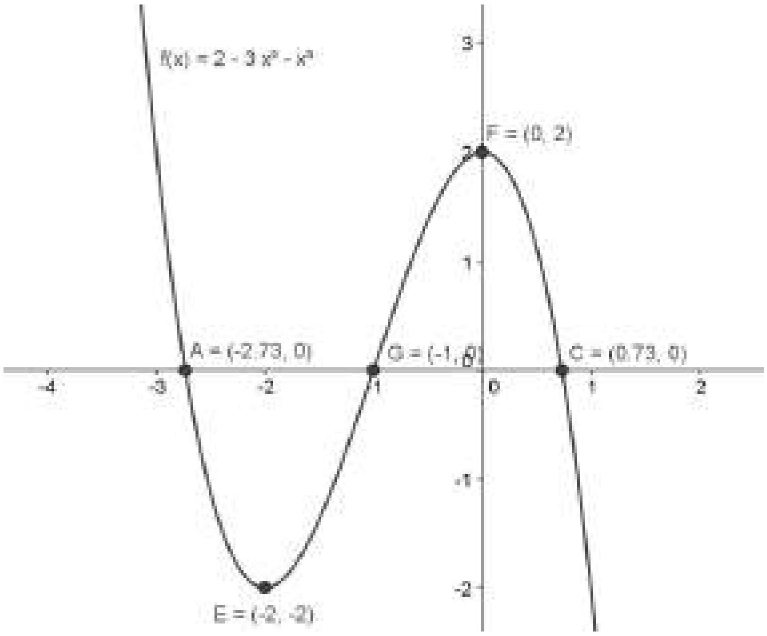


c) $f(x) = 2 - 3x^2 - x^3$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son:
OX: A (-2,73; 0); G(- 1; 0) y C (0,73; 0).
OY: F (0, 2)

Los puntos extremos son:
Máximo: F (0, 2)
Mínimos: E (- 2, 2)

El punto de inflexión es: G (- 1, 0)



ACTIVIDADES-PÁG. 346

1. Las respuestas son:

a) La derivada es positiva en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.

b) La derivada nunca es negativa.

c) La derivada es positiva en $(-1, +\infty)$.

d) La derivada es negativa en $(-\infty, 0)$.

2. Al estudiar la monotonía de las funciones, obtenemos:

a) La función es creciente en $(-\infty, -2)$ y decreciente en $(-2, +\infty)$.

b) La función es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en (1, 3).

c) La función es decreciente en R – {0}.

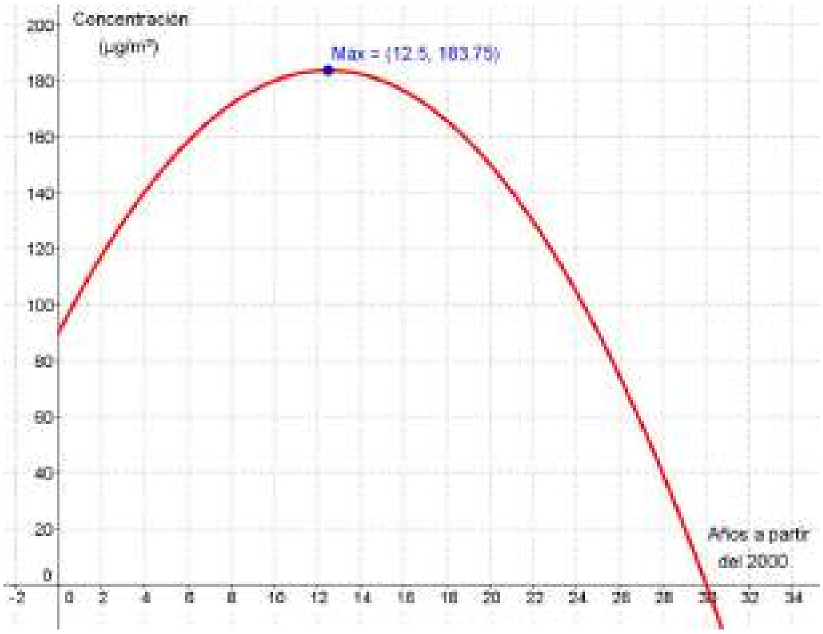
d) La función es creciente en (- 1, 1) y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

e) La función es decreciente en todo R.

f) La función es creciente en su dominio $(-3, +\infty)$.

3. La concentración aumenta para t ∈ (0; 12,5), es decir, entre el año 2000 y la mitad del año 2013. A partir de entonces la contaminación disminuye.

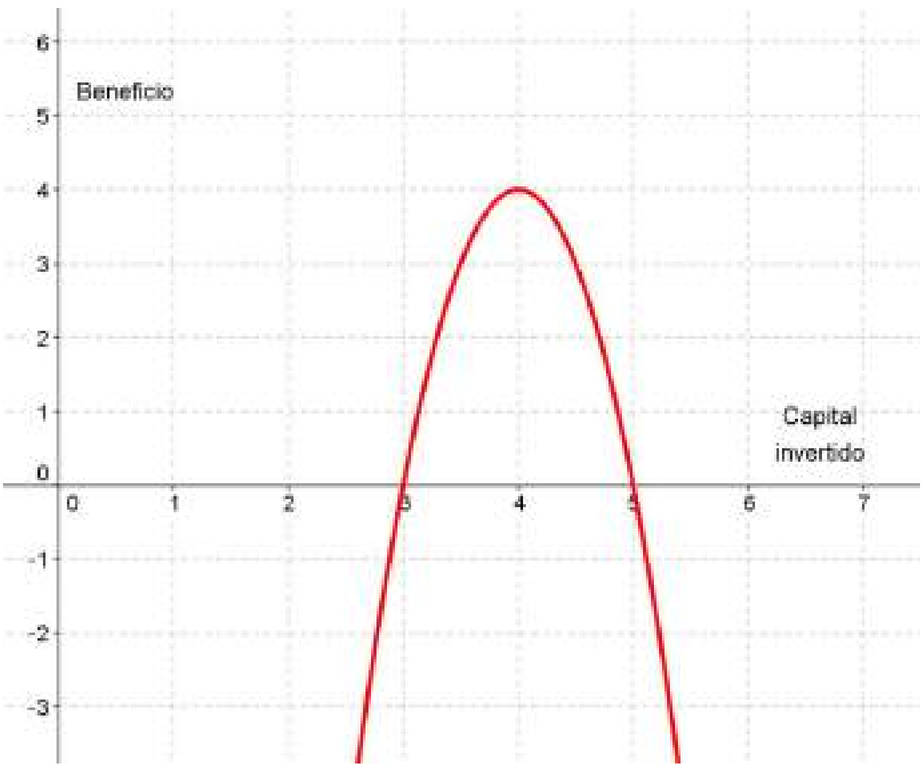
Puede verse en la gráfica.



4. En la gráfica puede verse que el beneficio es nulo para una inversión de 3 ó 5 millones de euros.

La empresa tiene pérdidas siempre que invierta menos de 3 millones a más de 5 millones.

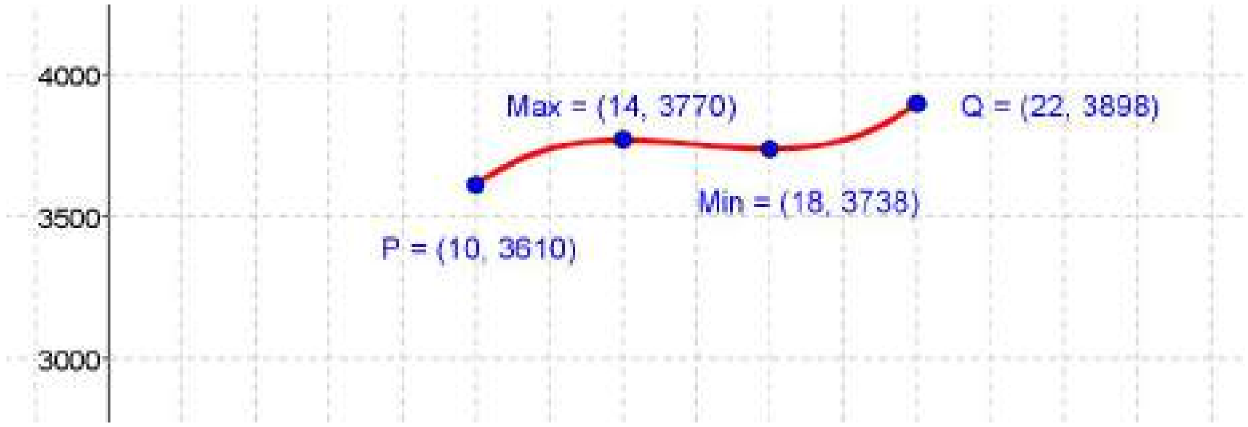
El beneficio (considerado positivo) aumenta con una inversión comprendida entre 3 y 4 millones de euros.



5. El número de visitantes disminuye ente las 14 y las 18 horas.

El número de visitantes aumenta entre la 10 y las 14 horas, así como entre las 18 y las 22 horas.

Todo ello puede verse en la gráfica.



6. Los extremos de las funciones son:

a) No tiene máximo ni mínimos, es siempre decreciente.

b) Tiene un máximo en el punto (- 2, 32).

c) Tiene un máximo en (- 1, 11) y un mínimo en (3, - 53).

d) Tiene un máximo en (0, 3) y mínimos en (- 1, - 2) y (1, - 2).

e) Tiene máximo en (0, 2).

f) Tiene un máximo en (0, 0) y un mínimo en (4, 8).

g) Tiene un mínimo en (0, ln 4).

h) No tiene máximo ni mínimos, es siempre creciente

i) Tiene un máximo en $\left(\frac{5\pi}{3},\ 6{,}97\right)$ y un mínimo en $\left(\frac{\pi}{3},\ -0{,}68\right)$.

7. Se debe verificar que f ´(3) = 0. El valor de K es – 4.

8. Se debe verificar que f ´(2) = 0 y que f(2) = 7. Los valores pedidos son a = 4 y b = 3.

ACTIVIDADES-PÁG. 347

9. Los números son 2 y 4.

10. La solución queda:

a) Función beneficio: B (t) = I (t) - G (t), es decir:

$$B(t) = (42t - 3t^2) - (2t^2 - 8t + 105) \quad \Rightarrow \quad B(t) = -5t^2 + 50t - 105$$

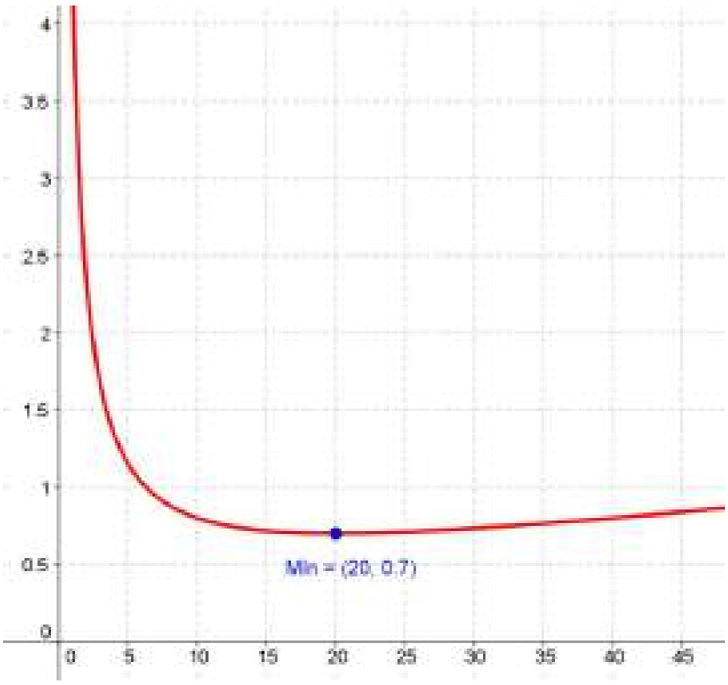
b) La derivada es $B'(t) = -10t + 50$, que se anula para $t = 5$.

La derivada segunda es $B''(t) = -10$ y como $B''(5) = -10 < 0$, el beneficio es máximo, 20 000 euros, después de transcurridos 5 años.

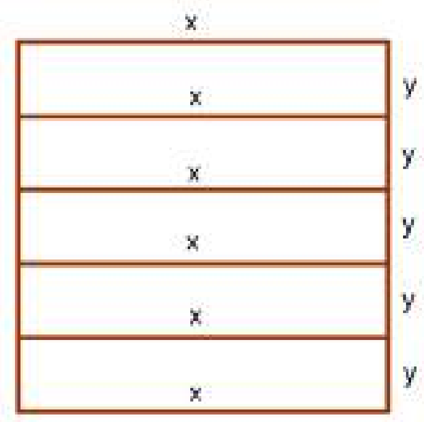
11. Las dimensiones de la finca son 30 metros por 30 metros y su superficie será de 900 metros cuadrados.

12. El valor que hace mínimo el coste de contratación es x = 20 trabajadores eventuales. El coste asciende a 700 euros.

Puede verse en la gráfica.



13. Observando el dibujo adjunto tenemos:



6x + 10 y = 3660 $\Rightarrow$ $y = 366 - \frac{3}{5}x$

El área será $A(x) = x \cdot \left(366 - \frac{3}{5}x\right)$.

Esta función alcanza un mínimo para x = 305 m.

Las dimensiones de las pistas serán 305 metros por 183 metros.

14. Las dimensiones serán $\frac{40}{3}$ cm y $\frac{20}{3}$ cm.

15. Llamamos r al radio de la base y h a la altura del cilindro. Según el enunciado, ocurre que:

$$h^2 + (2r)^2 = 160^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{25600 - h^2}{4}.$$

El volumen, V, del cilindro es:

$$V(r, h) = \pi r^2 \cdot h \quad \Rightarrow \quad V(h) = \pi h \cdot \frac{25600 - h^2}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot (25600h - h^3)$$

La derivada $V'(h) = \frac{\pi}{4} \cdot (25600h - 3h^2)$ se anula para h = $\pm$ 92,38 cm..

Tenemos que V ´´ (92,38) < 0, por tanto, el volumen es máximo para h = 92,38 cm y r = 65,32 cm.

16. Llamaos x e y a las dimensiones del cartel. La función a minimizar es A (x, y) = x · y.

La relación entre las variables x e y es:

$$(x-8) \cdot (y - 5) = 100 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5x + 60}{x - 8}$$

Sustituyendo en la función anterior, obtenemos: $A(x) = \frac{5x^2 + 60x}{x - 8}$.

La primera derivada, $A'(x) = \frac{5x^2 - 80x - 480}{(x - 8)^2}$, se anula para x = 20,65.

Por tanto las dimensiones del cartel serán x = 20,65 cm e y = 12,91 cm.

17. Las soluciones son:

a) Cóncava hacia las y positivas en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y hacia las y negativas en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}. +\infty\right)$; puntos de inflexión en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{32}{9}\right)$ y en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{32}{9}\right)$.

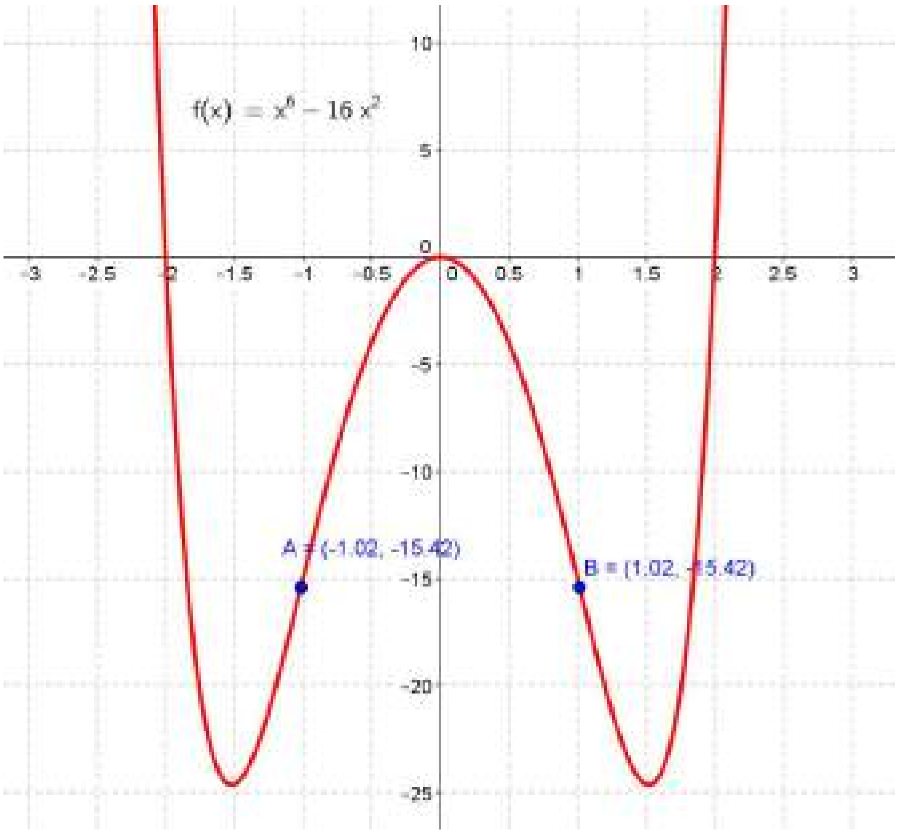
b) Cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 2)$ y hacia las y negativas en $(2, +\infty)$; punto de inflexión en (2, 0).

c) Cóncava hacia las y positivas en $(4, +\infty)$ y hacia las y negativas en $(-\infty, 4)$; punto de inflexión en (4, 16).

d) Cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 1)$ y hacia las y negativas en $(1, +\infty)$; no tiene puntos de inflexión.

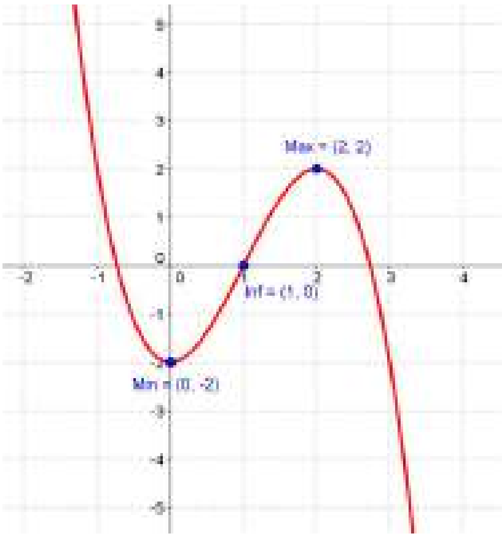
e) Cóncava hacia las y positivas en $(-2, 2)$ y hacia las y negativas en $(-\infty, -2) \cup (2. +\infty)$; puntos de inflexión en $(-2, \ln 16)$ y en $(2, \ln 16)$.

f) Cóncava hacia las y positivas en $(-\infty; -1{,}02) \cup (1{,}02; +\infty)$ y hacia las y negativas en $(-1{,}02; 1{,}02)$; puntos de inflexión en (- 1,02; - 15,42) y en (1,02; - 15,42). Esto lo observamos en la imagen siguiente:

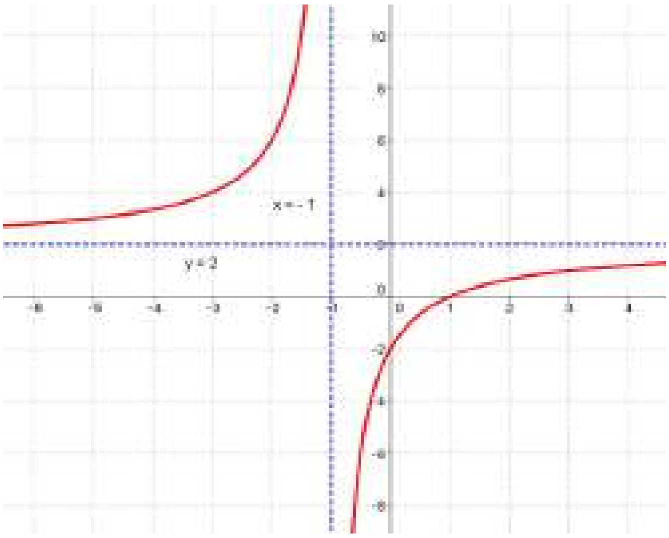


18. Las representaciones gráficas son:

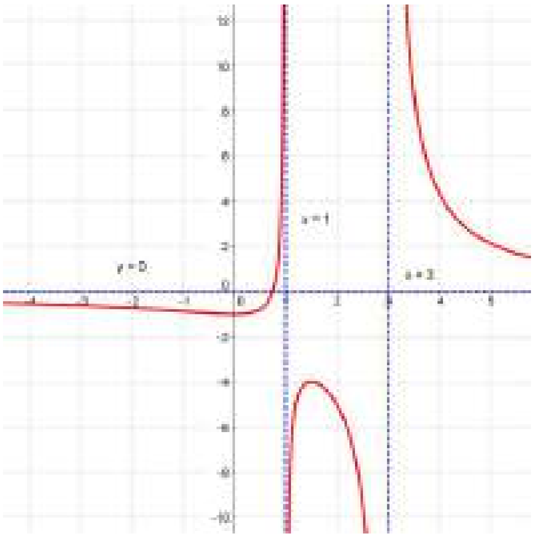
a)



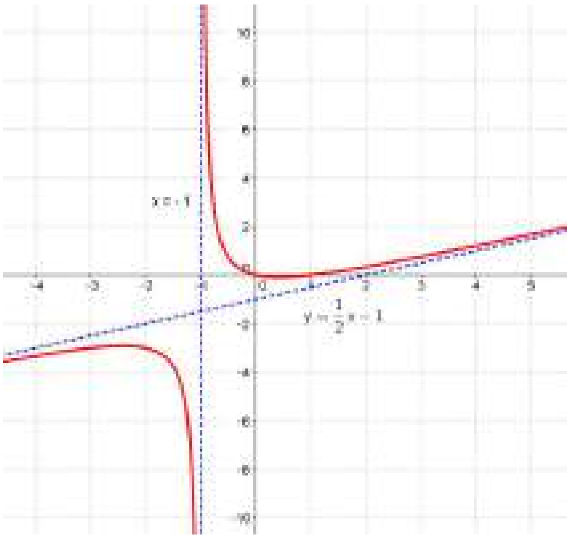
b)



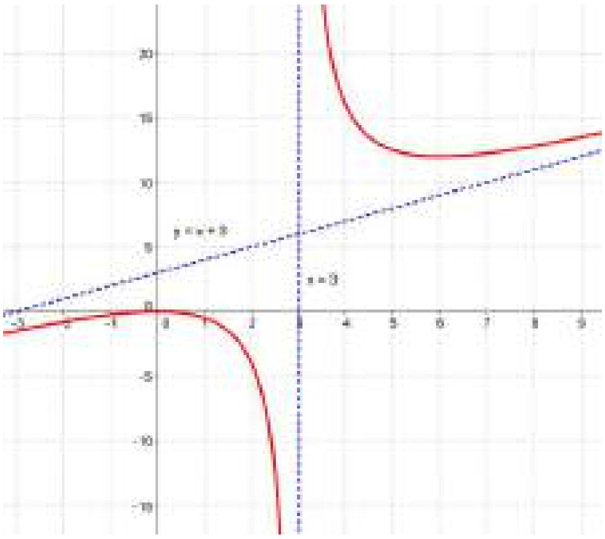
c)



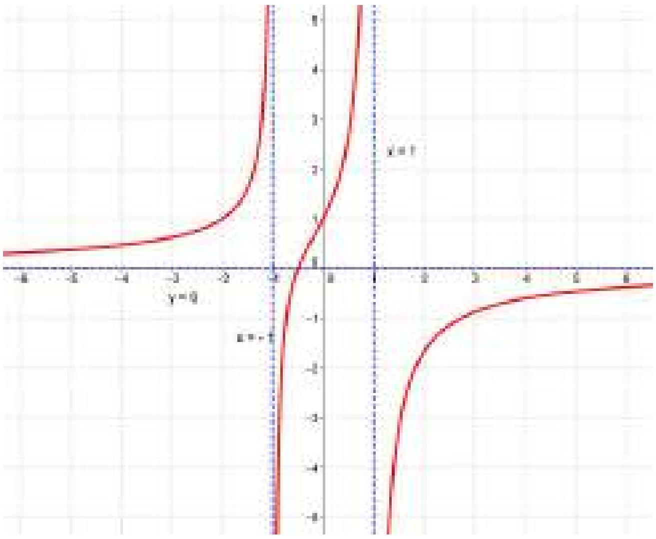
d)



e)



f)



ACTIVIDADES-PÁG. 348

19. Sea f(x) = $x^3 + ax^2 + bx + c$. Se debe verificar:
f ´(-1) = 0 ; f ´(-3) = 0 ; f(-1) = 0. De estas igualdades obtenemos el sistema siguiente y su solución:

$$\begin{cases} a - b + c = 1 \\ 3 - 2a + b = 0 \\ 27 - 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 9 \\ c = 4 \end{cases}$$

De modo que la función es y = $x^3 + 6x^2 + 9x + 4$.

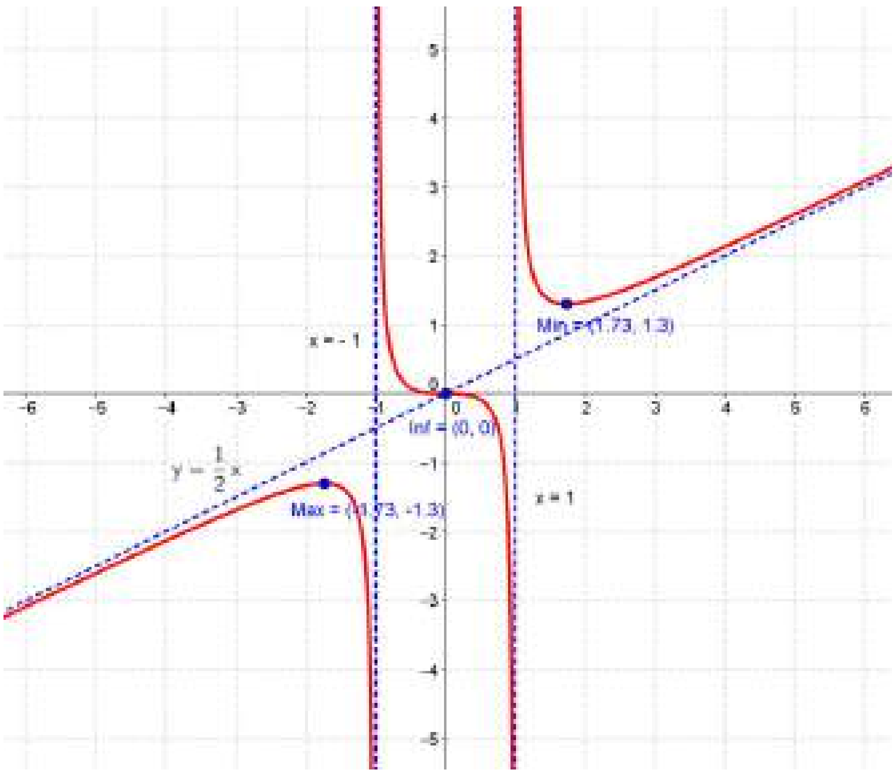
20. Las asíntotas de la función son las rectas x = - 1, x = 1 e $y = \frac{1}{2}x$.

La función es creciente en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$.

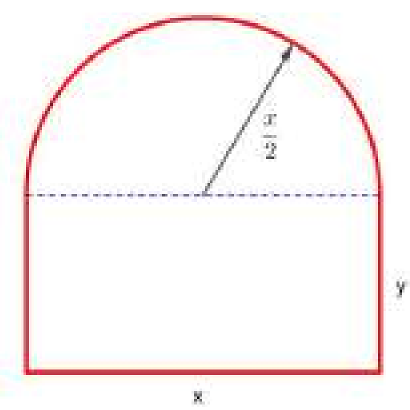
Tiene un máximo relativo en el punto $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ y un mínimo relativo en el punto $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.

Es cóncava hacia las y positivas en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Tiene un punto de inflexión en (0, 0).

Todo lo anterior puede verse en la gráfica.



21. Llamamos x e y a las dimensiones del rectángulo y $\frac{x}{2}$ al radio de la semicircunferencia como puede verse en la imagen.



El perímetro de la ventana mide:

$$x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 8 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{16 - 2x - \pi x}{4}$$

La superficie de la ventana, en función de la variable x, es:

$$A\ (x) = \frac{-4x^2 - \pi x^2 + 32x}{8} \qquad \Rightarrow \quad A\ (x) = -\frac{(4+\pi)x^2}{8} + 4x$$

El valor que hace máxima a la función anterior es $x = \frac{16}{4+\pi} = 2{,}24$.

Por tanto, las dimensiones de la ventana serán x = 2,24 m e y = 1,12 m.

22. La función, I (x), que muestra el ingreso anual es:

I (x) = (60 000 – 6x) · x; es decir, I (x) = 60 000x – 6x^2.

Esta función alcanza su máximo para x = 5000. Por tanto debe vender la pieza a 5000 euros para obtener un ingreso anual máximo.

23. Sea la función f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

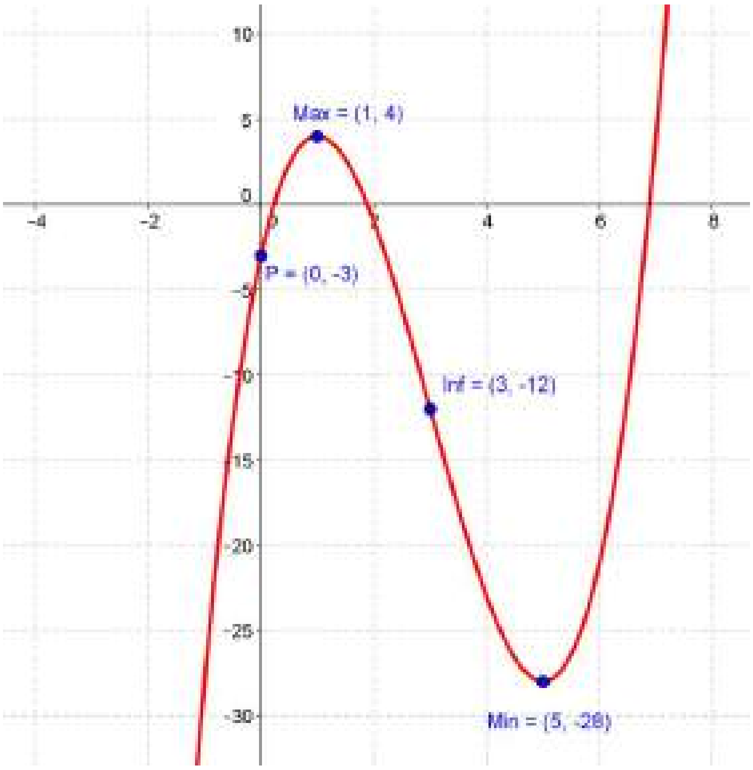
Imponiendo las condiciones del enunciado, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} d = -3 \\ a + b + c + d = 4 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 18a + 2b = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es: a = 1, b = - 9, c = 15 y d = - 3. Por tanto la función buscada es:

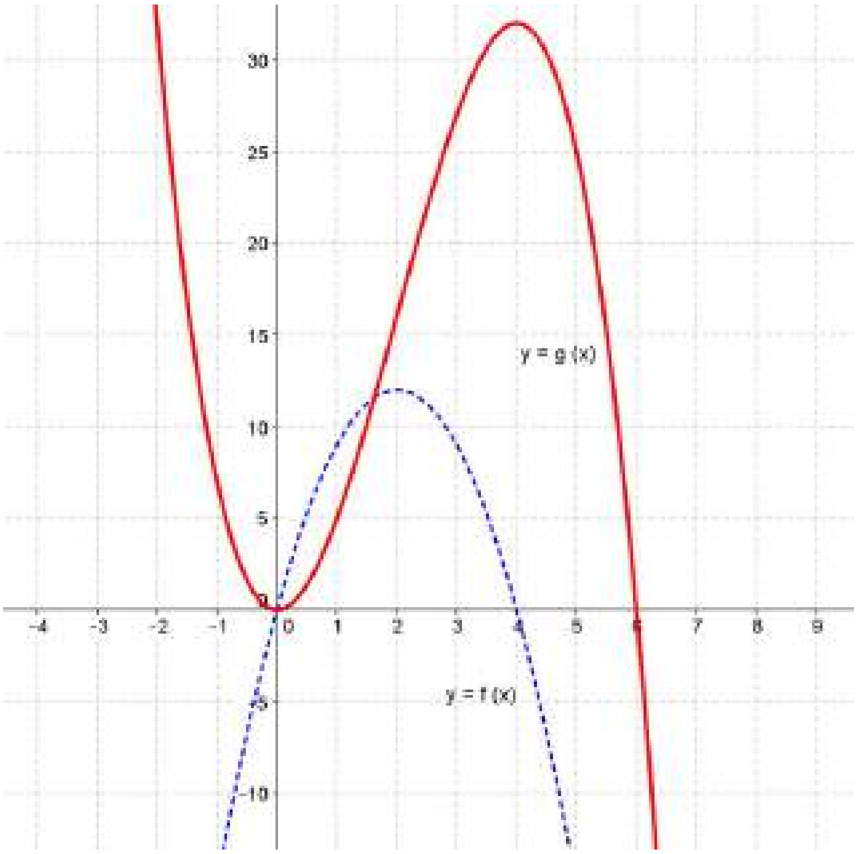
f (x) = $x^3 - 9x^2 + 15x - 3$.

En la imagen podemos ver la representación gráfica de la función cumpliendo todas las propiedades del enunciado.



24. En el dibujo podemos ver la gráfica de la función y = g (x), en trazo continua y en color rojo) y la gráfica de su función derivada, en trazo discontinuo y en color azul.

Hay que tener en cuenta que los puntos de máximo o mínimo de y = f(x) su función derivada tiene cortes en el eje OX y en los intervalos de crecimiento de y = f(x) la función derivada es positiva y en los intervalos de decrecimiento de y = f(x) la función derivada es negativa.



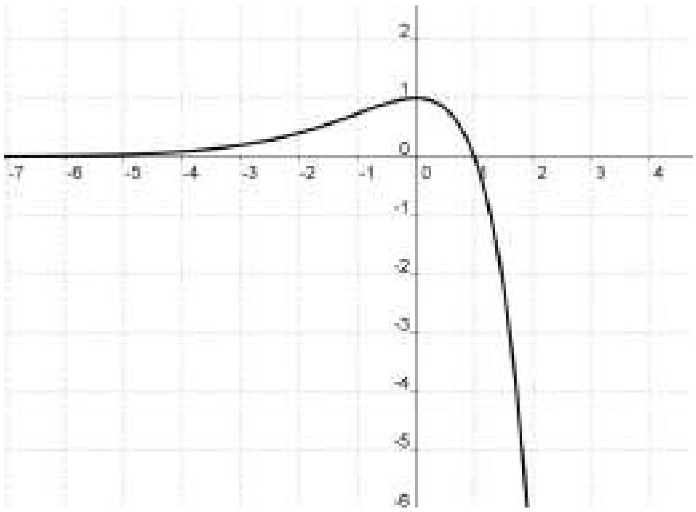
25. Sea f(x) = $x^4 + mx^2 + p$. Se debe verificar:

f ´´(2) = 0 ; f(2) = -75. De estas igualdades obtenemos el sistema siguiente y su solución:

$$\begin{cases} 48+2m=0 \\ 16+4m+p=-75 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-24 \\ p=5 \end{cases}$$

La función es y = $x^4 - 24x^2 + 5$.

26. a) La gráfica de la función y = f (-x) es la simétrica de la función dada y = f (x) respecto al eje OY. Su gráfica será la del dibujo. Sus cortes son (1, 0) y (0, 1) y su asíntota la recta y = 0

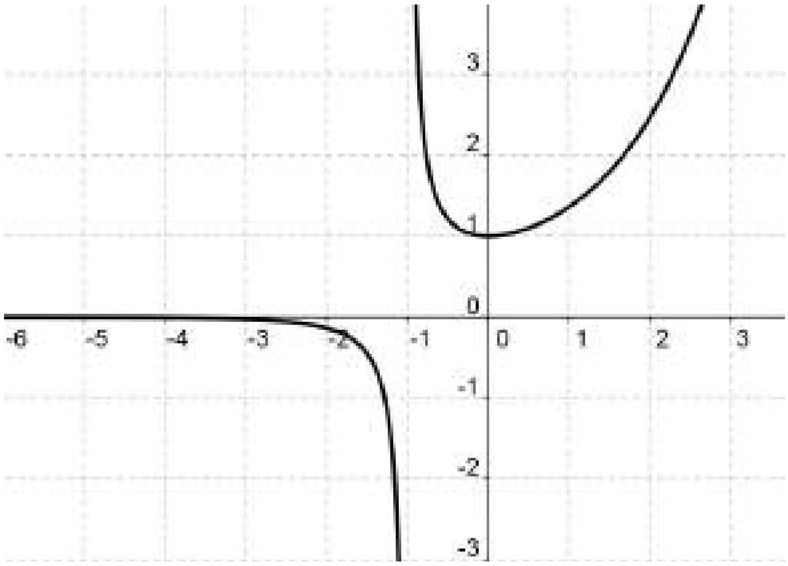


b) Como f (x) crece hasta x = 0, la función y = 1/f (x) decrece de (- ∞, -1) ∪ (-1, 0).

Como f(x) decrece a partir de x = 0, la función y = 1/f (x) crece de (0, +∞).

Como f(x) tiene un corte en (- 1, 0), la función y = 1/f (x) tiene una asíntota vertical en x = - 1.

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ entonces $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)}=+\infty$ y además como $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ entonces $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)}=0$. Su gráfica será como la del dibujo.



ACTIVIDADES-PÁG. 349

a) Sea y = mx + n la ecuación de la tangente a la elipse. La ecuación resultante del sistema $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ y = mn + n \end{cases}$,

es decir, $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(mx+n)^2}{9} = 1$ debe tener una raíz doble.

Operamos en la ecuación y la escribimos en la forma:

$$9x^2 + 16m^2x^2 + 32mn + 16n^2 - 144 = 0 \quad \Rightarrow \quad (9 + 16m^2)x^2 + 32mnx + 16n^2 - 144 = 0.$$

Como esta ecuación tiene una raíz doble su discriminante debe ser cero:

$$(32mn)^2 - 4 \cdot (9 + 16m^2)\,(16n^2 - 144) = 0$$

Operando y simplificando la ecuación anterior, obtenemos: $16m^2 - n^2 + 9 = 0$.

Supongamos que P tiene de coordenadas (x_0, y_0). Como la recta tangente pasa por P se cumplirá $n = y_0 - mx_0$ y entonces:

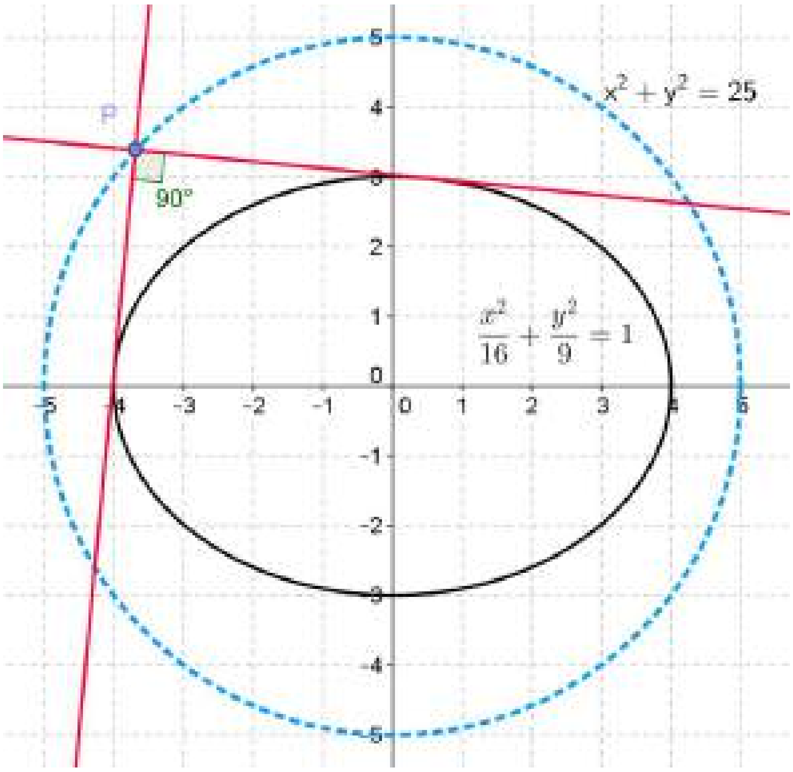
$$16m^2 - (y_0 - mx_0)^2 + 9 = 0.$$

Operando y simplificando, obtenemos: $\left(16 - x_0^2\right)m^2 + 2x_0y_0m + 9 - y_0^2 = 0$.

Como las tangentes a la elipse desde P son perpendiculares, las dos soluciones, m_1 y m_2, de esta última ecuación cumplen $m_1 \cdot m_2 = -1$ y teniendo en cuenta las relaciones de Cardano obtenemos:

$$\frac{9 - y_0^2}{16 - x_0^2} = -1 \quad \Rightarrow \quad 9 - y_0^2 = -16 + y_0^2 \quad \Rightarrow \quad x_0^2 + y_0^2 = 25$$

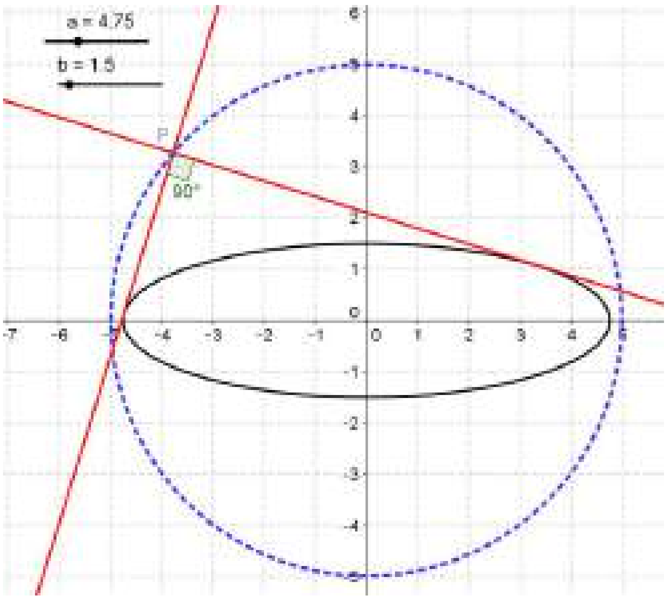
El lugar geométrico es una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio 5.

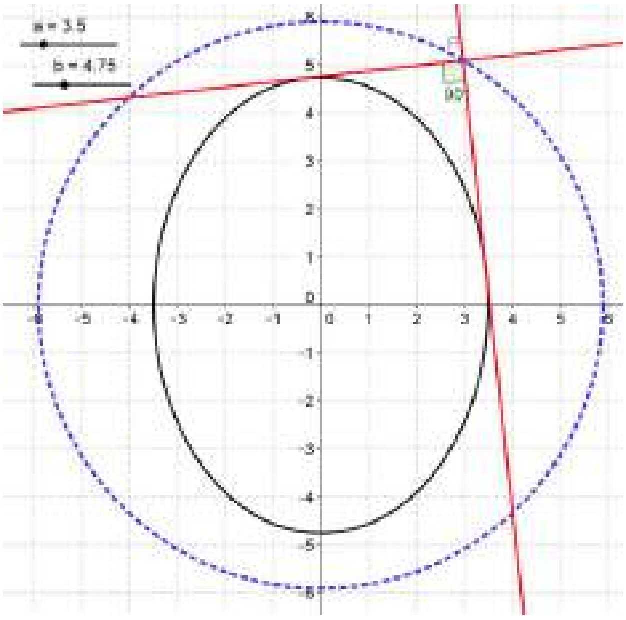


Para las elipses de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, el lugar geométrico que se obtiene son las circunferencias centradas en el origen y de radio $\sqrt{a^2+b^2}$, es decir, las circunferencias de ecuación $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

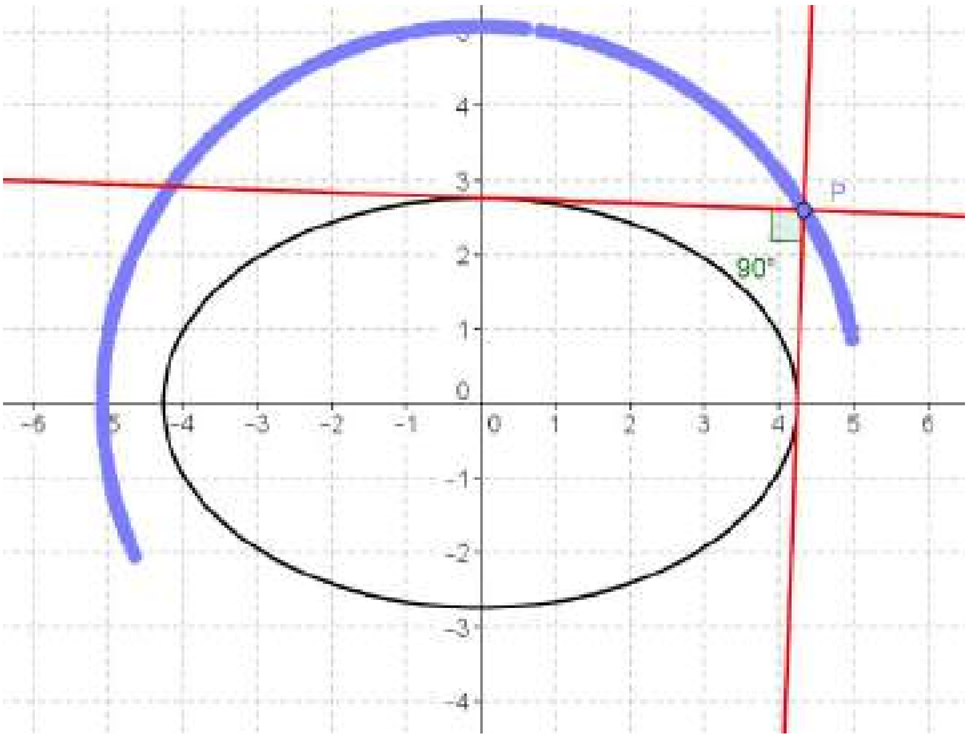
En los dibujos pueden verse algunas de las anteriores. Para dibujarlas con GeoGebra se crean dos deslizadores para los semiejes de la elipse a y b y posteriormente se introducen las ecuaciones tanto de las elipses como de las circunferencias.

Moviendo los deslizadores obtenemos distintos resultados:





También podemos obtener el lugar geométrico activando el rastro en las propiedades del objeto del punto P.



b) Procedemos como en el caso anterior y obtenemos:

Sea y = mx + n la ecuación de la tangente a la hipérbola. La ecuación resultante del sistema $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ y = mn + n \end{cases}$,

es decir, $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{(mx+n)^2}{9} = 1$ debe tener una raíz doble.

Operamos en la ecuación y la escribimos en la forma:

$$9x^2 - 16m^2x^2 - 32mn - 16n^2 - 144 = 0 \quad \Rightarrow \quad (9 - 16m^2)x^2 - 32mnx - 16n^2 - 144 = 0.$$

Como esta ecuación tiene una raíz doble su discriminante debe ser cero:

$$(32mn)^2 + 4 \cdot (9 - 16m^2)(16n^2 + 144) = 0$$

Operando y simplificando la ecuación anterior, obtenemos: $16m^2 - n^2 - 9 = 0$.

Supongamos que P tiene de coordenadas (x_0, y_0). Como la recta tangente pasa por P se cumplirá $n = y_0 - mx_0$ y entonces:

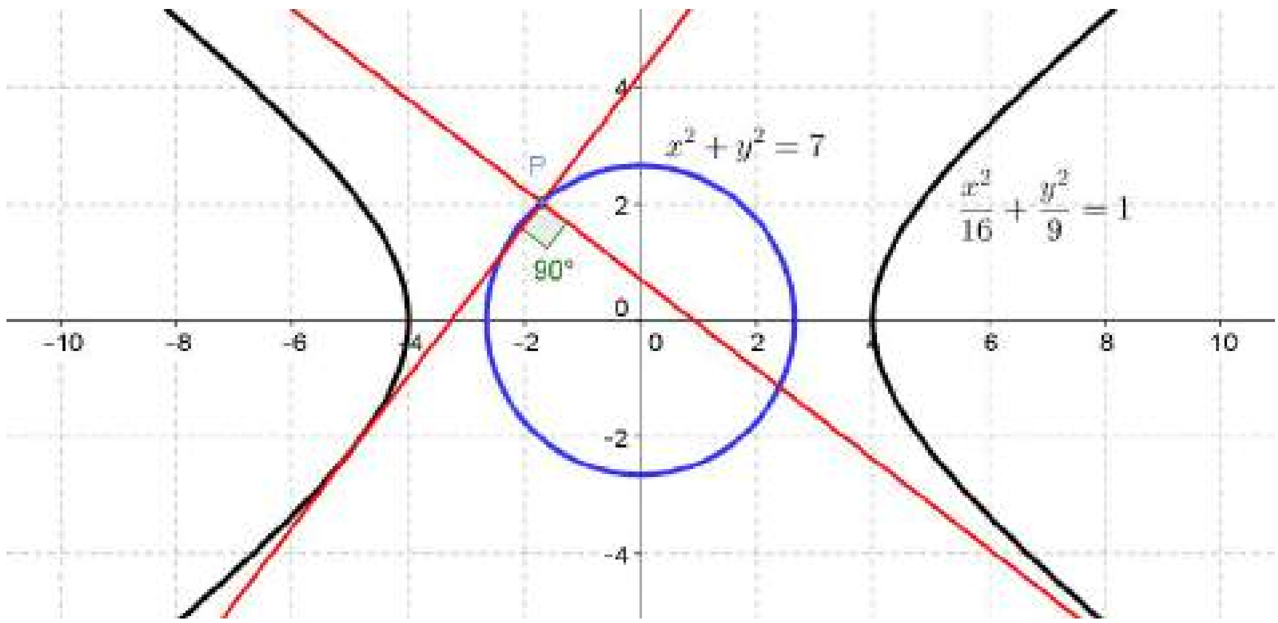
$$16m^2 - (y_0 - mx_0)^2 - 9 = 0.$$

Operando y simplificando, obtenemos: $\left(16 - x_0^2\right)m^2 + 2x_0y_0m - (9 + y_0^2) = 0$.

Como las tangentes a la hipérbola desde P son perpendiculares, las dos soluciones, m_1 y m_2, de esta última ecuación cumplen $m_1 \cdot m_2 = -1$ y teniendo en cuenta las relaciones de Cardano obtenemos:

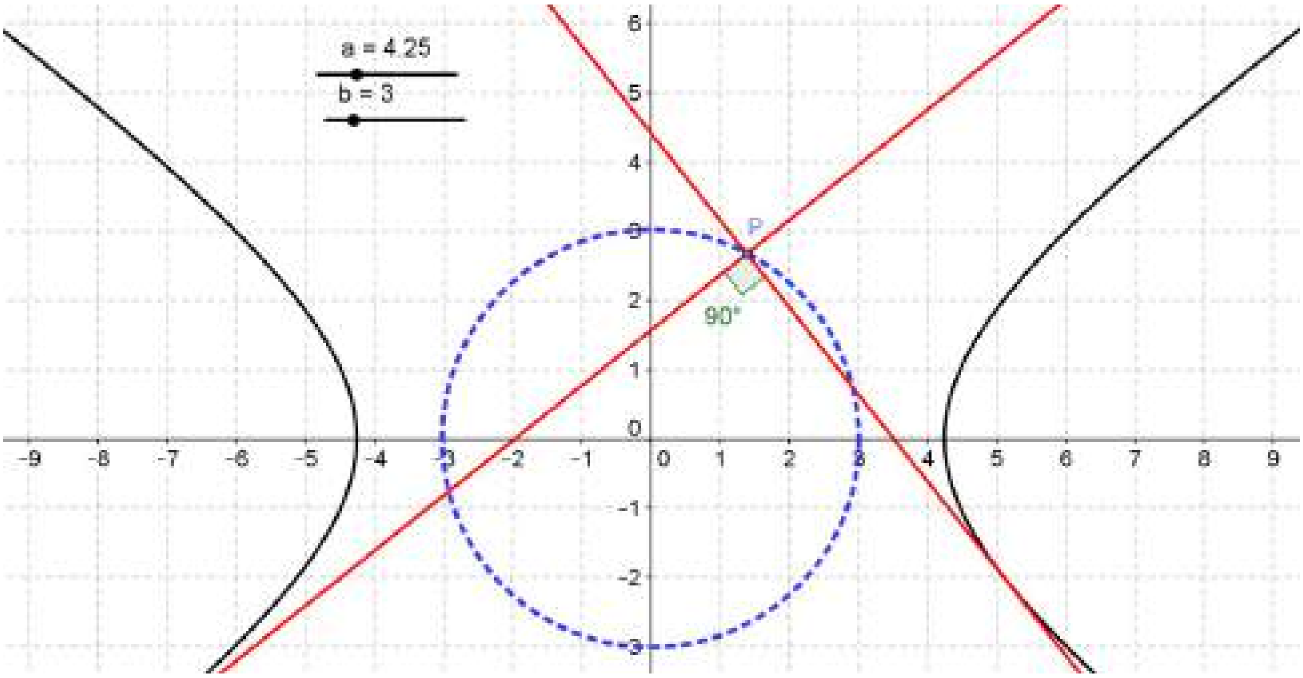
$$\frac{-(9 + y_0^2)}{16 - x_0^2} = -1 \quad \Rightarrow \quad 9 + y_0^2 = 16 - y_0^2 \quad \Rightarrow \quad x_0^2 + y_0^2 = 7$$

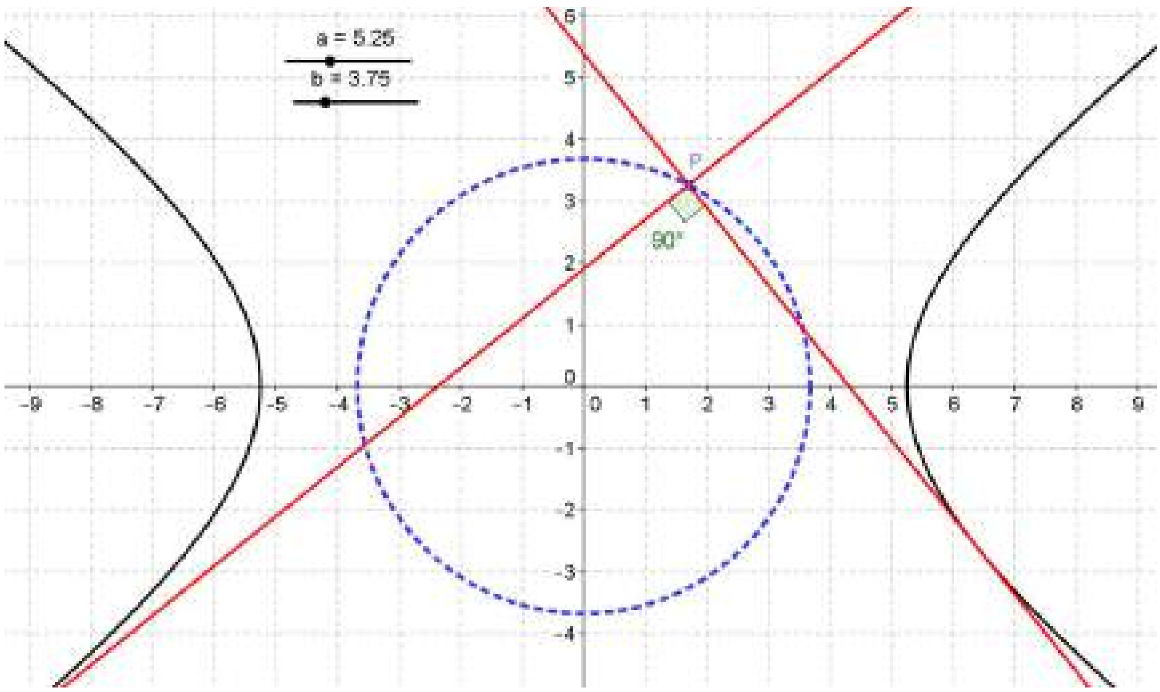
El lugar geométrico es una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio $\sqrt{7}$.



Para las hipérbolas de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, con a > b, el lugar geométrico que se obtiene son las circunferencias centradas en el origen y de radio $\sqrt{a^2 - b^2}$, es decir, las circunferencias de ecuación $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$.

En los dibujos pueden verse algunas de las anteriores. Para dibujarlas con GeoGebra se crean dos deslizadores para los semiejes de la elipse a y b y posteriormente se introducen las ecuaciones tanto de las hipérbolas como de las circunferencias.





c) Para la parábola y = ax^2 procedemos como en los casos anteriores y obtenemos:

Sea y = mx + n la ecuación de la tangente a la parábola. La ecuación resultante del sistema $\begin{cases} y = a\,x^2 \\ y = mn + n \end{cases}$, es decir, $x^2 = mx + n$ debe tener una raíz doble.

Operamos en la ecuación y la escribimos en la forma:

$$x^2 - mx - n = 0.$$

Como esta ecuación tiene una raíz doble su discriminante debe ser cero:

$$m^2 + 4n = 0$$

Supongamos que P tiene de coordenadas (x_0, y_0). Como la recta tangente pasa por P se cumplirá n = $y_0 - mx_0$ y entonces:

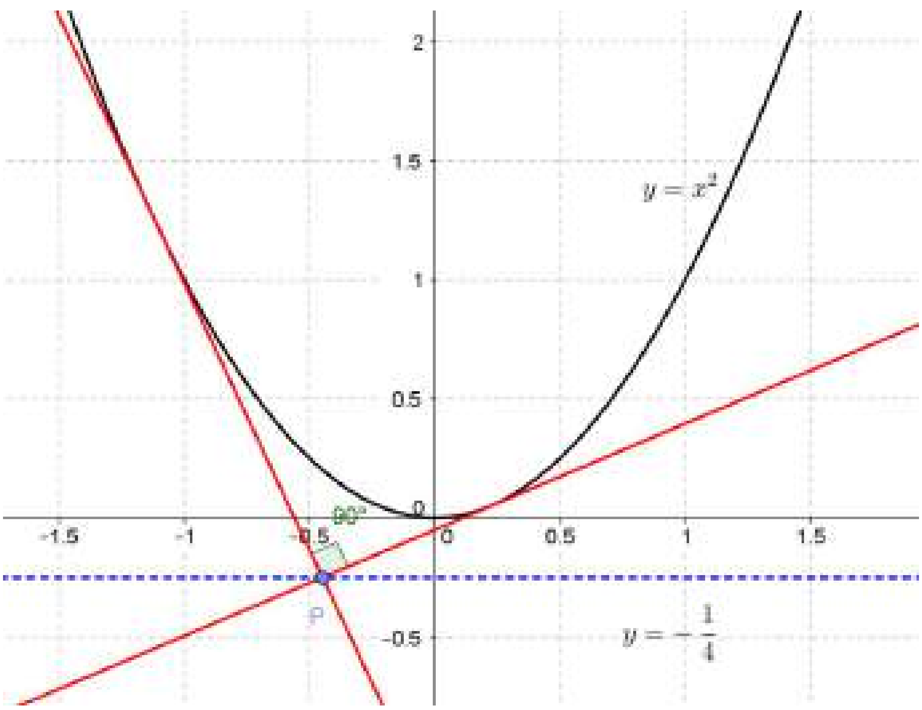
$$m^2 - 4(y_0 - mx_0) = 0.$$

Operando y simplificando, obtenemos: $m^2 \ -4mx_0 \ 4y_0 = 0$.

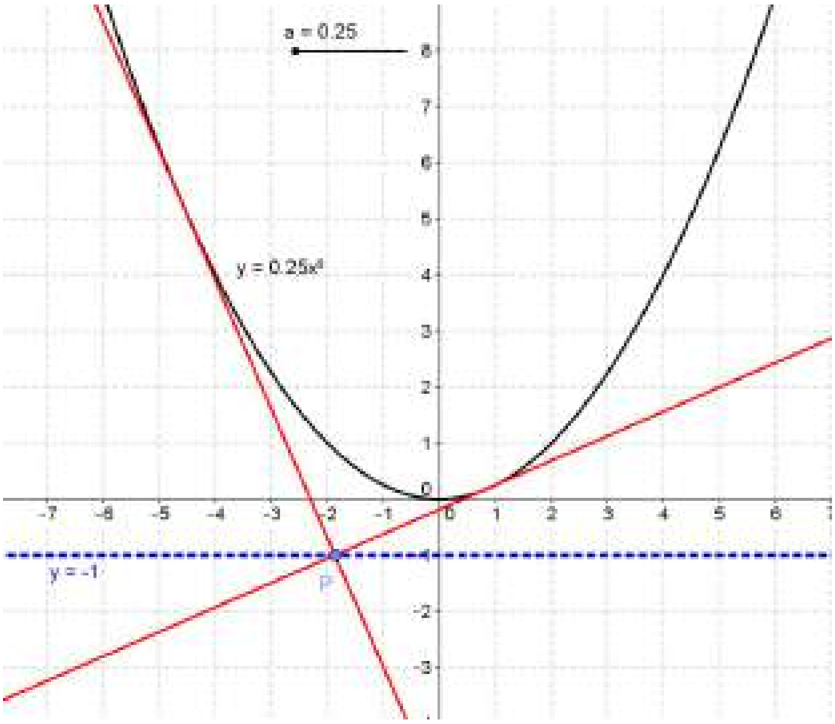
Como las tangentes a la hipérbola desde P son perpendiculares, las dos soluciones, m_1 y m_2, de esta última ecuación cumplen $m_1 \cdot m_2 = -1$ y teniendo en cuenta las relaciones de Cardano obtenemos:

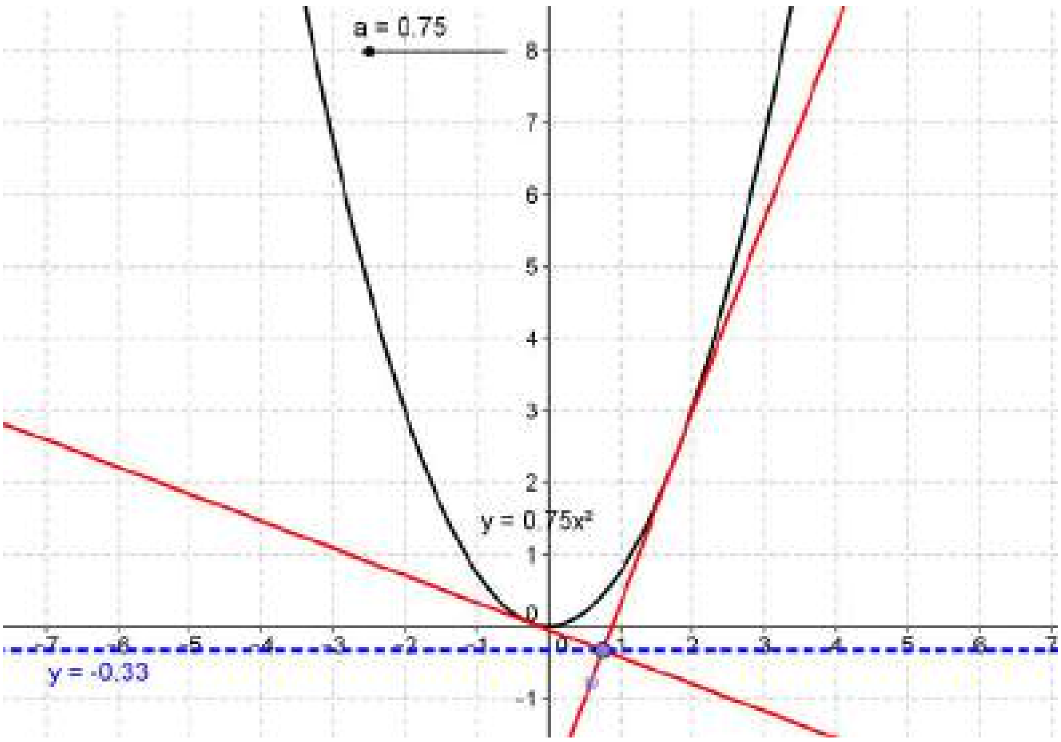
$$\frac{4y_0}{1} = -1 \quad \Rightarrow \quad 4y_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = -\frac{1}{4}.$$

El lugar geométrico es una recta horizontal, que coincide con la directriz de la parábola.



Para las parábolas de ecuación y = ax^2 el lugar geométrico que se obtiene son las rectas horizontales de ecuación $y = -\dfrac{1}{4a}$, que coinciden con la directriz de la parábola.





UNIDAD 15: Introducción a las integrales y sus aplicaciones

ACTIVIDADES-PÁG. 350

1. Las primitivas son:

a) Primitivas de f (x) = 3x son: $F_1(x) = \dfrac{3x^2}{2} + 5$ y $F_2(x) = \dfrac{3x^2}{2} - 10$.

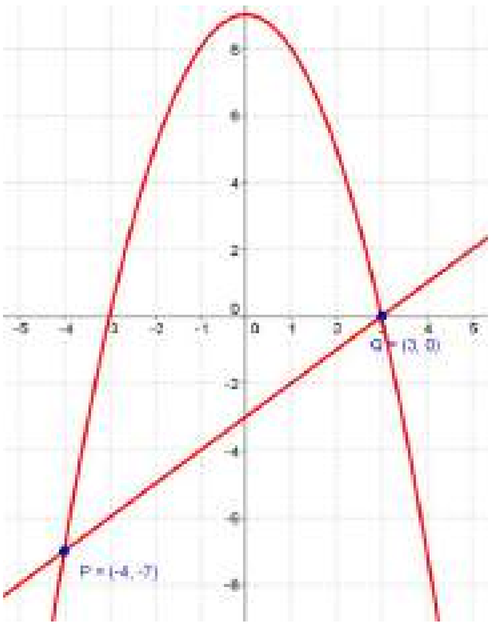
b) Primitivas de f (x) = $4x^2$ son: $F_1(x) = \dfrac{4x^3}{3} + 3$ y $F_2(x) = \dfrac{4x^3}{3} - 7$.

c) Primitivas de f (x) = sen x son: F_1 (x) = - cos x + π y F_2 (x) = - cos x – 2.

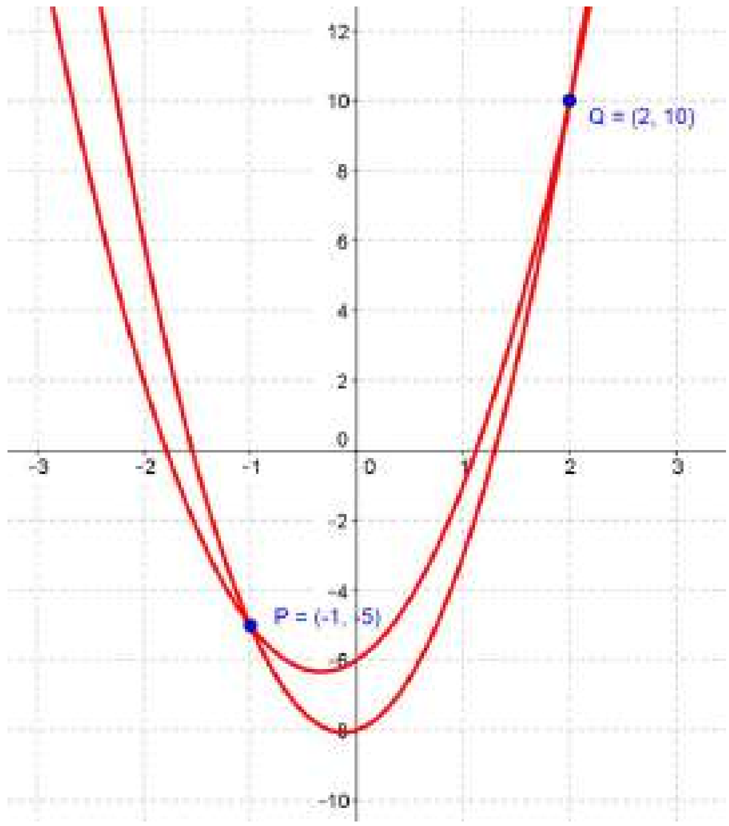
d) Primitivas de f (x) = e^x son F_1 (x) = e^x – 1 y F_2 (x) = e^x + 4.

2. El área del recinto es de 17 uc.

3. a) Los puntos de intersección de la parábola y la recta son P (- 4, - 7) y Q (3, 0). El recinto puede verse en el dibujo.



b) Los puntos de intersección de la parábola y la recta son P (- 1, - 5). Y Q (2, 10). El recinto puede verse en el dibujo.



ACTIVIDADES-PÁG. 365

1. La estrategia consiste en establecer una analogía con el cuadrado mágico 3 x 3 que contiene los nueve primero números naturales 1, 2…, 8 y 9 y la constante mágica 15.

Hay que utilizarlo como si se jugase al tres en raya.

2. En total el nabab tenía 36 gemas y 6 hijos.

Al mayor le da $1+\dfrac{35}{7}=6$ gemas. Quedan 30.

Al 2º le da $2+\dfrac{28}{7}=6$ gemas. Quedan 24.

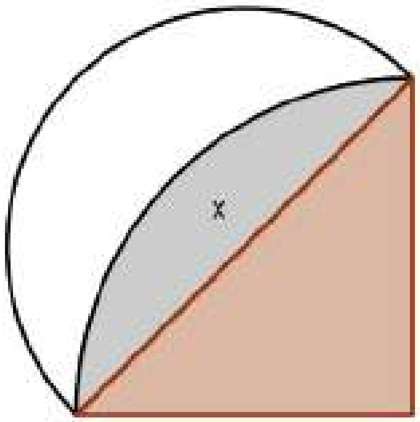
Al 3º le da $31+\dfrac{21}{7}=6$ gemas. Quedan 18.

Al 4º le da $1+\dfrac{14}{7}=6$ gemas. Quedan 12.

Al 5º le da $1+\dfrac{7}{7}=6$ gemas. Quedan 6.

Al 6º le da 6 gemas.

3. La solución queda:



Área del triángulo = $\frac{r^2}{2}$.

Área lúnula = $\frac{1}{2}$ · Área semicírculo – Área (x).

Área (x) = $\frac{1}{4}$ · Área círculo – Área triángulo = $\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$.

$$\text{Área lúnula} = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\right) = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi r^2}{4} + \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2}.$$

Ambas áreas son iguales.

4. Cortó la cadena en 4 trozos de 1, 2, 4 y 8 cm cada uno.

- El primer día le dio 1 cm.
- El segundo día le dio el trozo de 2 cm y le devolvió la patrona el de 1 cm.
- El tercer día le dio el trozo de 1 cm, luego la patrona tiene 1 cm y 2 cm.
- El cuarto día le dio el trozo de 4 cm y la patrona le devolvió los dos trozos que tenía.
- Así sucesivamente.

ACTIVIDADES-PÁG. 366

1. En la imagen vemos la resolución de esta actividad.

$$\int \frac{(3\cdot x+2)^3}{x} \rightarrow 8\cdot\ln(|x|) + (9\cdot x^3 + 27\cdot x^2) + 36\cdot x$$

$$\int \frac{8\cdot x}{\sqrt{5\cdot x^2+7}} \rightarrow \frac{40\cdot x^2+56}{5\cdot\sqrt{5\cdot x^2+7}}$$

$$\int \frac{\frac{2}{3}\cdot x-5}{\sqrt{12-7\cdot x^2}} \rightarrow \frac{-15\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{-7\cdot x^2+12}\cdot \operatorname{asen}\left(\frac{\sqrt{21}\cdot x}{6}\right) + (14\cdot x^2-24)}{21\cdot\sqrt{-7\cdot x^2+12}}$$

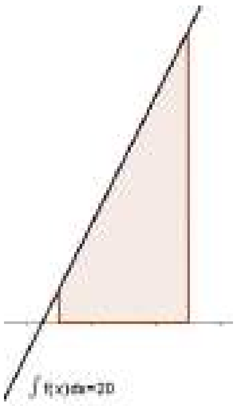
2. En la imagen tenemos las soluciones de estas integrales definidas.

$$\int_0^2 \left(6+\frac{3}{2}\cdot x^3\right)^5 \cdot 4\cdot x^2 \rightarrow 5031936$$

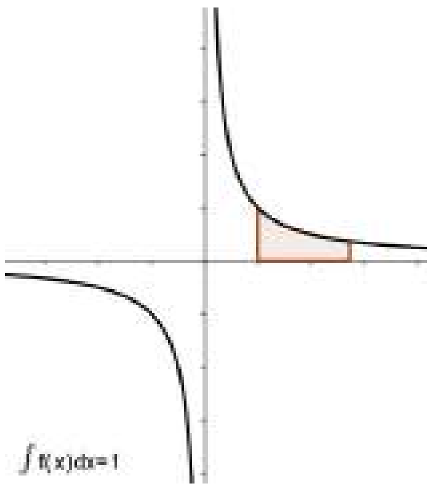
$$\int_{-1}^1 \frac{6\cdot x\cdot \cos(x^2)}{2+3\cdot \operatorname{sen}(x^2)} \rightarrow 0.$$

ACTIVIDADES-PÁG. 367

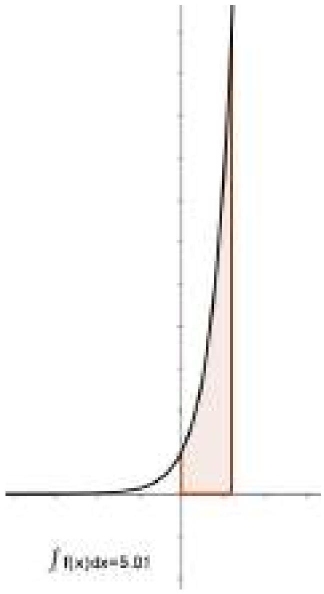
1. Procediendo como se indica en el texto obtenemos un área de 20 unidades cuadradas.



2. En este caso obtenemos un área de 1 unidad cuadrada.



3. En este caso obtenemos un área de 5,01 unidades cuadradas.



ACTIVIDADES-PÁG. 368

1. Las primitivas son:

a) Primitivas de f (x) = $3x^2$ son: F_1 (x) = $x^3 + 3$; F_2 (x) = x^3 - 5 y F_3 (x) = $x^3 - \pi$.

b) Primitivas de f (x) = 2x – 5 son: F_1 (x) = $x^2 - 5x + 1$; F_2 (x) = $x^2 - 5x - \sqrt{2}$ y F_3 (x) = $x^2 - 5x + 3$

c) Primitivas de f (x) = 3 cos (3x) son: F_1 (x) = sen 3x; F_2 (x) = sen (3x) + 1 y F_3 (x) = sen (3x) – 2.

2. La primitiva es f (x) = ln $|x - 2|$.

3. Las funciones buscadas son:

a) f (x) = $x^4 - x^2 + 3$

b) $f\ (x) = -\dfrac{1}{2}\cos\ 2x + \dfrac{3}{2}$

4. Derivando F (x) = $3\,x\,e^{3x} - e^{3x} + 3$ obtenemos:

$$F'(x) = 3e^{3x} + 3x \cdot e^{3x} \cdot 3 - e^{3x} \cdot 3 = 9x \cdot e^{3x} = f(x)$$

5. Las integrales quedan:

a) $\int 7x^6\ dx = x^7 + C$

b) $\int \frac{3}{5x^4}\ dx = -\frac{1}{5x^3} + C$

c) $\int 2\sqrt[4]{x^3}\ dx = \frac{8}{7}\sqrt[4]{x^7} + C$

d) $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2}\ dx = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$

e) $\int \frac{3x^4 - 5\sqrt{x}}{x}\ dx = \frac{3}{4}x^4 - 10\sqrt{x} + C$

f) $\int x^3\ (4x^4 - x)\ dx = \frac{x^8}{2} - \frac{x^5}{5} + C$

g) $\int (2-3x)^{10}\ dx = -\frac{1}{33}(2-3x)^{11} + C$

h) $\int (7x^2+3)^6 \cdot 3x\, dx = \frac{3}{98}(7x^2+3)^7 + C$

i) $\int \frac{1}{(5x-1)^3}\ dx = -\frac{1}{10\ (5x-1)^2} + C$

j) $\int \frac{tg\ x}{\cos^2\ x}\ dx = \frac{tg^2\ x}{2} + C$

k) $\int 9\ sen\ x\ \cos\ x\ dx = \frac{9}{2}\ sen^2\ x + C$

l) $\int \frac{\ln\ x}{2x} dx = \frac{1}{4}\ln^2\ x + C$

6. Las funciones primitivas son:

a) $\int e^{2x}\ dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

b) $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{\ln 2} 2^{\sqrt{x}+C}$

c) $\int 3^{x^3+2} \cdot x^2\, dx = \frac{1}{3 \ln 3}\, 3^{x^3+2} + C$

d) $\int \sqrt{5^x}\, dx = \frac{2}{\ln 5} \sqrt{5^x + C}$

e) $\int e^{sen 2x} \cdot \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} e^{sen\, 2x} + C$

f) $\int \frac{e^{\ln x}}{3x}\, dx = \frac{1}{3} e^{\ln x} + C$

7. Las funciones primitivas son:

a) $\int \frac{2x}{5x^2+1}\, dx = \frac{1}{5} \ln (5x^2+1) + C$

b) $\int \cot g\ x\, dx = \ln |sen\ x| + C$

c) $\int \frac{2x^2}{3x^3-7}\, dx = \frac{2}{9} \ln |3x^3 - 7| + C$

d) $\int \frac{6x-9}{x^2-3x+2}\, dx = 3 \ln |x^2 - 3x + 2| * C$

e) $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}-2}\, dx = -\ln |e^{-x} - 2| + C$

f) $\int \frac{4}{x \cdot \ln x}\, dx = 4 \ln |\ln x| + C$

8. Las funciones primitivas son:

a) $\int sen\ 2x\, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$

b) $\int 3x \cdot \cos (x^2+1)\, dx = \frac{3}{2} sen\ (x^2+1) + C$

c) $\int [1 + tg^2 (7x)]\, dx = \frac{1}{7} tg\ (7x) + C$

d) $\int \frac{2\,e^x}{\cos^2\, e^x}\, dx = 2\ tg\ x + C$

e) $\int \sec^2\ x\ dx = tg\ x + C$

f) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{3}\ sen\ \sqrt{x} + C$

ACTIVIDADES-PÁG. 369

9. Las integrales son:

a) $\int \frac{2}{9x^2+1}\, dx = \frac{2}{3}\ arctg\ (3x) + C$

b) $\int \frac{5}{\sqrt{1-16x^2}}\, dx = \frac{5}{4} arcsen\ (4x) + C$

c) $\int \frac{6x}{9+16x^4}\, dx = \frac{1}{4}\ arctg\left(\frac{4}{3}x^2\right) + C$

d) $\int \frac{2}{\sqrt{9-4x^2}}\, dx = arcsen\left(\frac{2}{3}x\right) + C$

e) $\int \frac{5\ e^{2x}}{2e^{4x}+1}\, dx = \frac{5\sqrt{2}}{4}\ arctg\left(\sqrt{2}\ e^{2x}\right) + C$

f) $\int \frac{8}{-9x^2-18}\, dx = -\frac{4\sqrt{2}}{9}\ arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C$

10. Las integrales son:

a) $\int \left(\frac{3}{x^4} - \frac{5}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x}} + \frac{4}{x} - 8\right)dx = -\frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x^5} + 4\ln|x| - 8x + C$

b) $\int \frac{4x^4}{3-2x^5}\, dx = -\frac{2}{5}\ln\left|3-2x^5\right| + C$

c) $\int \frac{3}{5x^2+16}\, dx = \frac{\sqrt{15}}{20}\ arctg\left(\frac{\sqrt{5}}{4}x\right) + C$

d) $\int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x}\, dx = \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{x} + C$

e) $\int \sqrt{4x^3 - 12} \cdot 5x^2\; dx = \frac{10}{36}\sqrt{(4x^3 - 12)^3} + C$

f) $\int \frac{3 - 2x}{4x^2 + 9}\, dx = \frac{1}{2} arctg \left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{4} \ln \left|4x^2 + 9\right| + C$

g) $\int sen^3\; 5x \cdot \cos\; 5x\; dx = \frac{1}{20} sen^4\; (5x) + C$

h) $\int \frac{2e^{tg\, x}}{\cos^2 x}\, dx = 2\, e^{tg\, x} + C$

i) $\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1 + e^{-x}}}\, dx = -\, 2\sqrt{1 + e^{-x}} + C$

j) $\int 6x \cdot e^{4x^2}\; dx = \frac{3}{4}\, e^{4x^2} + C$

k) $\int \frac{2x^2 + 4}{x^3 + 6x}\, dx = \frac{2}{3} \ln \left|x^3 + 6x\right| + C$

l) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}\, dx = -\frac{1}{\ln\; x} + C$

m) $\int \frac{x + 2}{\sqrt{1 - 4x^2}}\, dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1 - 4x^2} + arcsen\; (2x) + C$

n) $\int \frac{sen\; 4x}{2 + \cos\; 4x}\, dx = -\frac{1}{4} \ln\; |\, 2 + \cos\; 4x\,| + C$

p) $\int \frac{(2x - 3)^2}{x} dx = 2x^2 - 12x + 9 \ln\,|\,x\,| + C$

11. Los valores de las integrales definidas son:

a) $\int_0^2 (x^2 - 3x)\; dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^2 = -\frac{10}{3} = -\, 3{,}33$

b) $\int_2^3 \frac{1}{x - 1}\, dx = [\ln\; (x - 1)]_2^3 = \ln\; 2 = 0{,}69$

c) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^2 = \frac{3}{8} = 0{,}375$

d) $\int_{-1}^0 x\cdot e^{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_{-1}^0 = \frac{1-e}{2} = -\,0{,}86$

e) $\int_0^1 3^{-x}\,dx = \left[-\frac{3^{-x}}{\ln 3}\right]_0^1 = \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 27} = 0{,}61$

f) $\int_{-1}^1 \frac{4x}{x^2+3}\,dx = \left[2\ln(x^2+3)\right]_{-1}^1 = 0$

g) $\int_3^9 \sqrt{2x-2}\,dx = \left[\frac{1}{3}\sqrt{(2x-2)^3}\right]_3^9 = 18{,}67$

h) $\int_0^1 (3x+1)^4\,dx = \left[\frac{1}{15}(3x+1)^5\right]_0^1 = 68{,}2$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\,dx = \left[\frac{1}{3}sen\,(3x)\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} = -\,0{,}33$

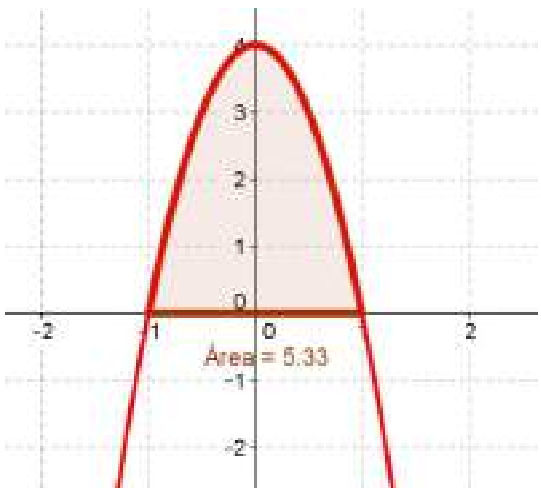
j) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[3\cdot arcsen x\right]_0^{1/2} = \frac{\pi}{2}$

k) $\int_0^2 \frac{3+x}{x^2+4}\,dx = \left[\frac{3}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\right]_0^2 = 1{,}52$

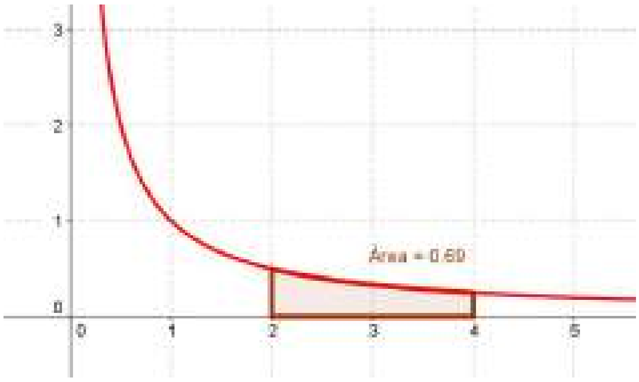
l) $\int_0^{3\pi/4} 2\cdot tg\;x\,dx = \left[-2\ln|\cos x|\right]_0^{3\pi/4} = 0{,}69$

12. El valor de las áreas, en cada caso, es:

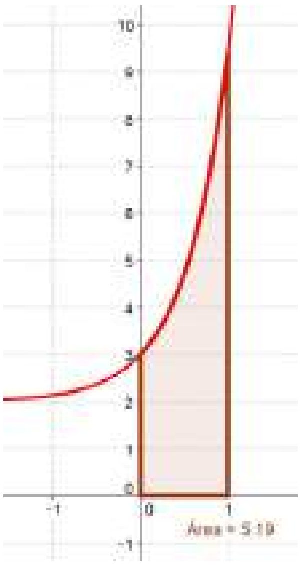
a) $\int_{-1}^1 (4-4x^2)\,dx = \left[4x - \frac{4}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \frac{16}{3} = 5{,}33$



b) $\int_2^4 \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_2^4 = \ln 2 = 0{,}69$



c) $\int_0^1 (e^{2x}+2)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}+2x\right]_0^1 = \frac{e^2+3}{2} = 5{,}19$



ACTIVIDADES-PÁG. 370

13. Las integrales son:

a) $\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$

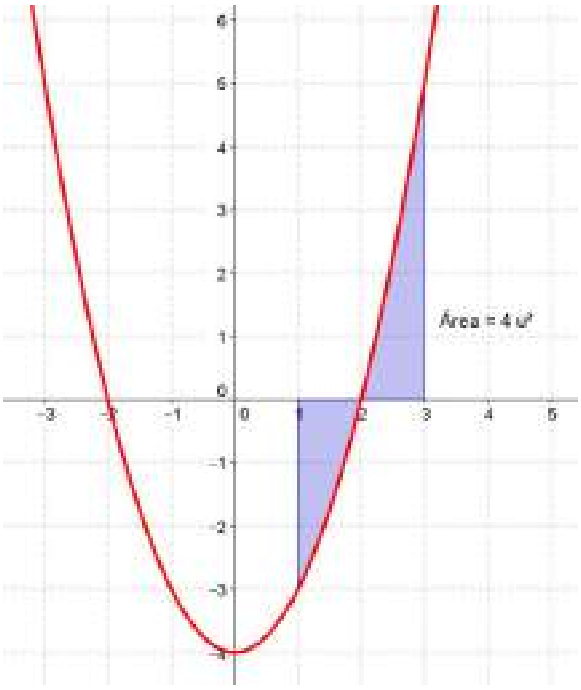
b) $\int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx$

c) $\int_a^c \left[f(x) - g(x)\right] dx + \int_c^b \left[g(x) - f(x)\right] dx$

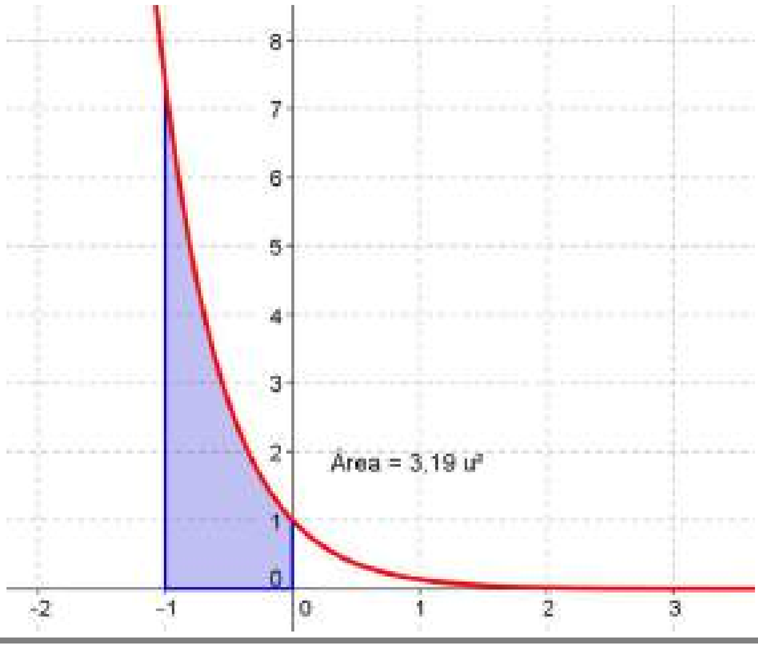
14. Las regiones pueden verse en los dibujos, así como el valor de las áreas de las mismas.

a) Área $= \int_1^3 (x^2 - 4)\, dx = -\int_1^2 (x^2 - 4)\, dx + \int_2^3 (x^2 - 4)\, dx = -\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^3 =$

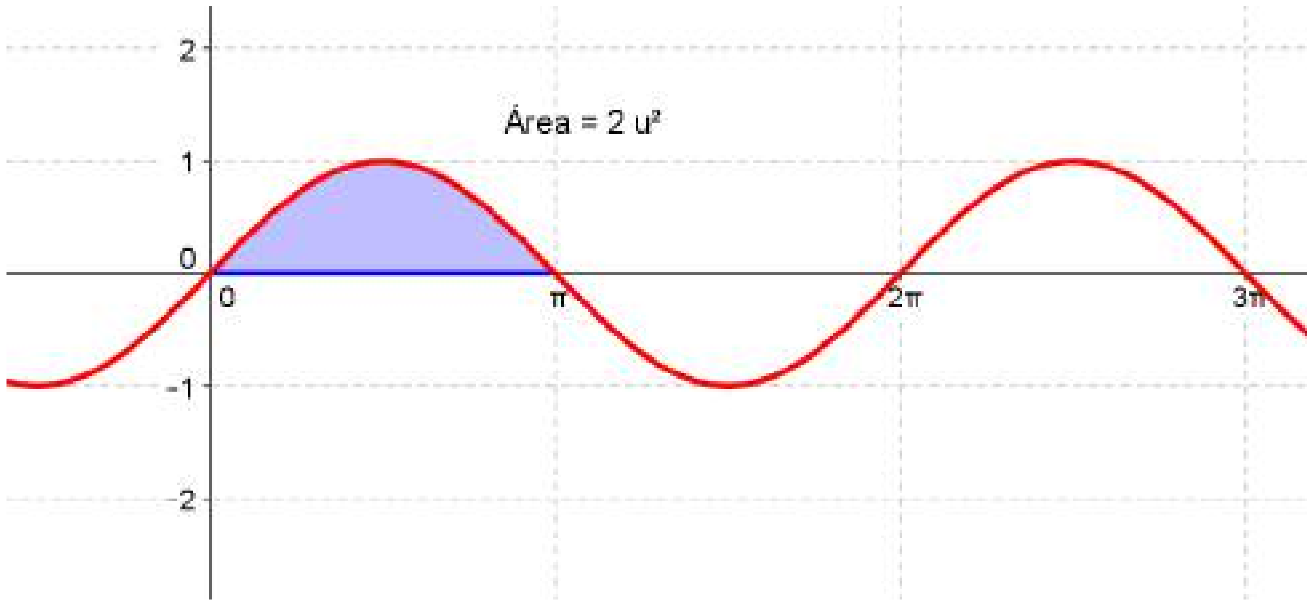
$$= -\left(-\frac{16}{3} - \left(-\frac{11}{3}\right)\right) + \left(-3 - \left(-\frac{16}{3}\right)\right) = \frac{5}{3} + \frac{7}{3} = 4\ u^2.$$



b) Área $= \int_{-1}^0 e^{-2x}\, dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^0 = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{e^2}{2}\right) = \frac{e^2 - 1}{2} = 3{,}19\ u^2.$



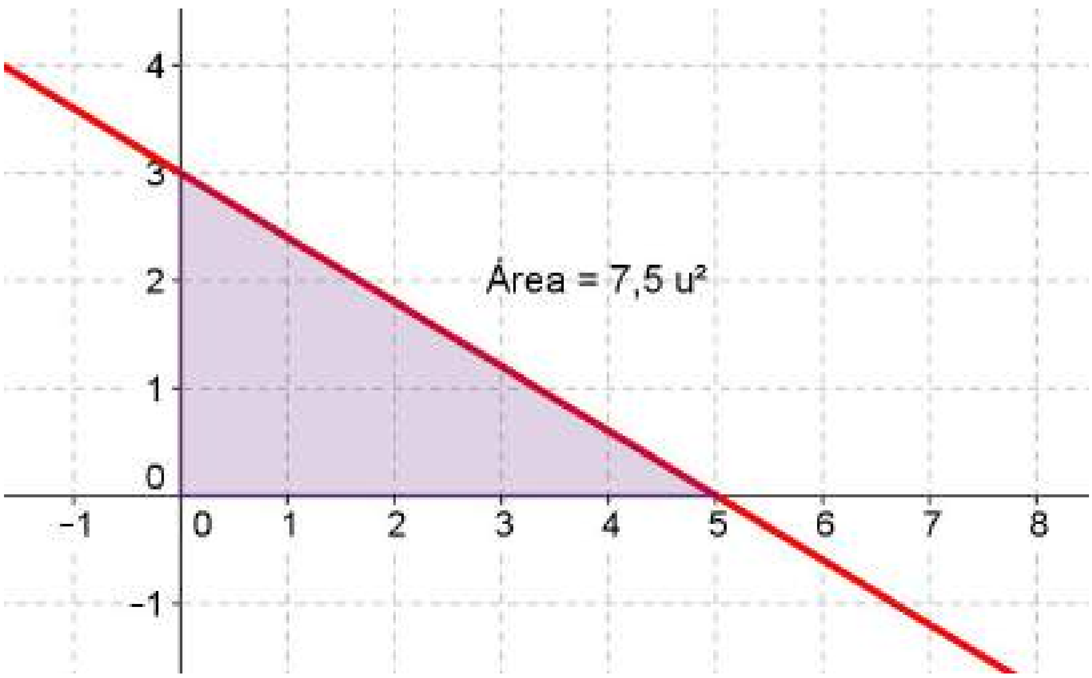
c) Área $= \int_0^{\pi} sen\ x\ dx = [-\cos\ x]_0^{\pi} = (-\cos\ \pi) - (-\cos\ 0) = 2\ u^2$.



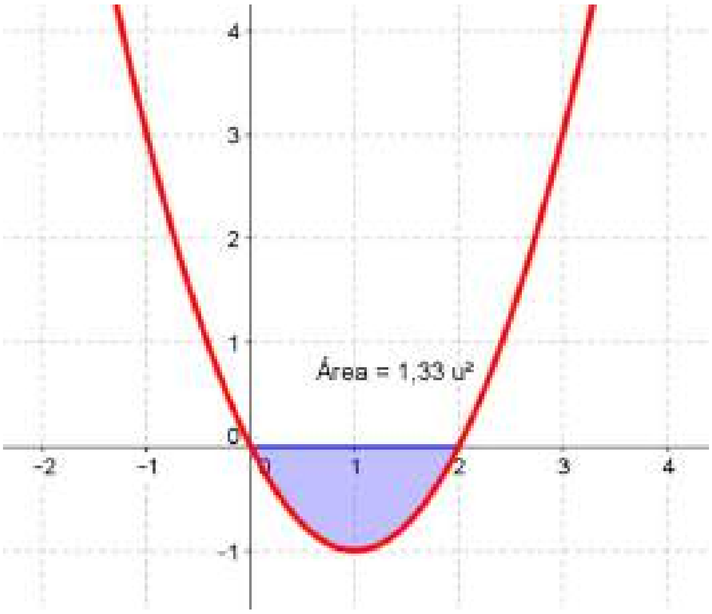
15. Los recintos pueden verse en los dibujos, así como las áreas de los mismos:

a) 3x + 5y = 15; eje OX; eje OY

a) Área $= \int_0^5 \left(-\frac{3}{5}x + 3\right) dx = \left[-\frac{3}{10}x^2 + 3x\right]_0^5 = \left(-\frac{75}{10} + 15\right) = 7{,}5\ u^2$.

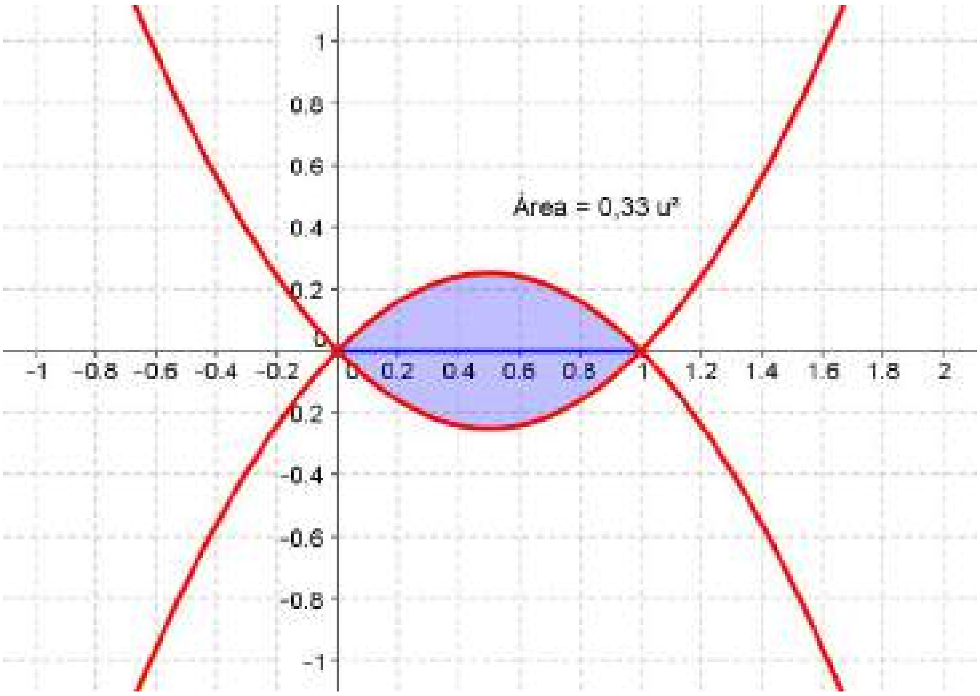


b) $\text{Área} = -\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = -\left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{4}{3} = 1{,}33\ u^2.$



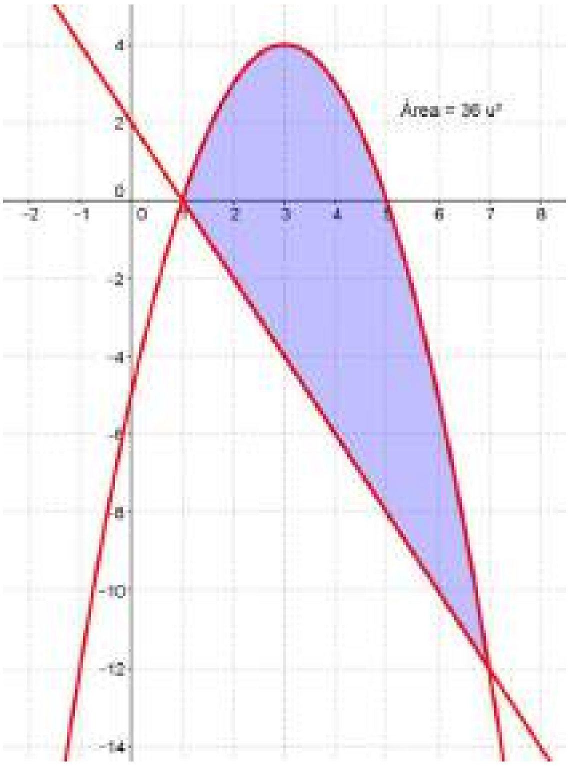
c) $\text{Área} = \int_0^1 \left(-x^2 + x\right) dx = -\int_0^1 (x^2 - x)\ dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$

$= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} = 0{,}33\ u^2.$

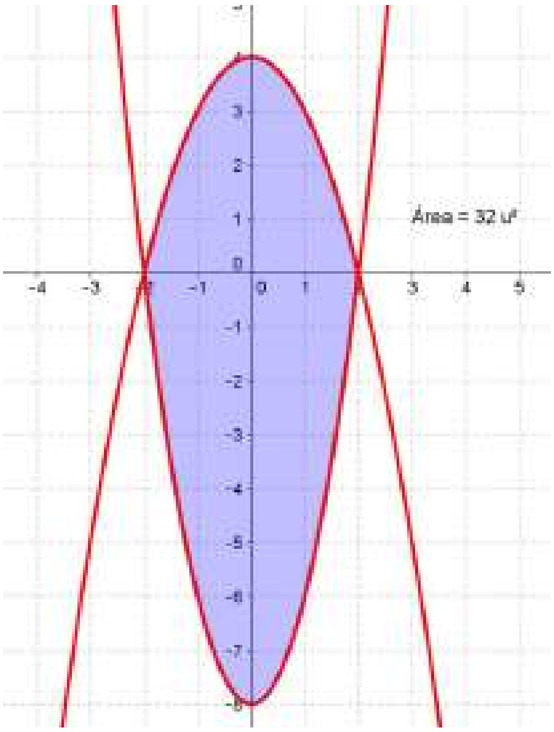


d) Área = $\int_1^5 \left(-x^2+6x-5\right) dx + \int_5^7 (-x^2+6x-5)\, dx - \int_1^7 (2-2x)\, dx =$

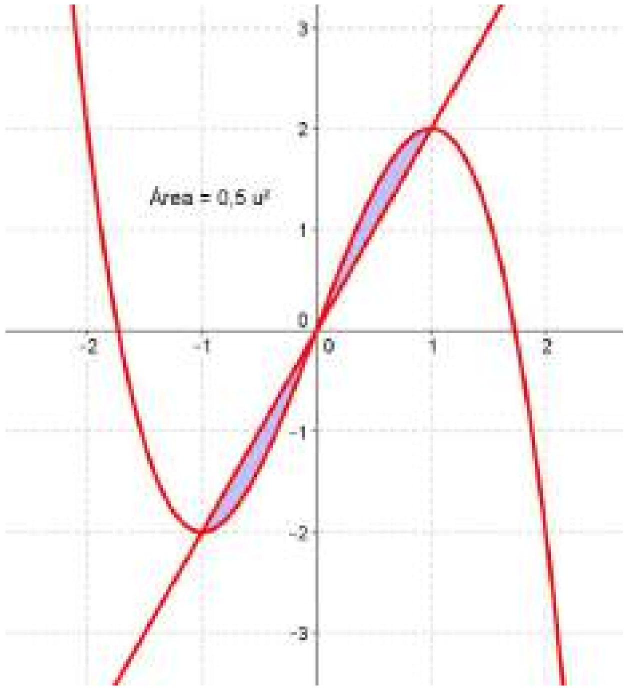
$=10{,}66-10{,}66-(-36)=36\ u^2.$



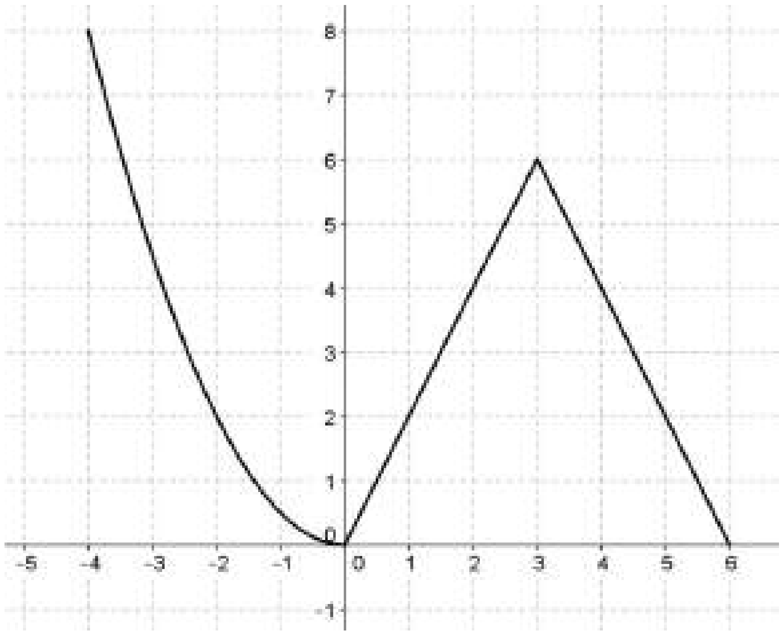
e) Área = $\int_{-2}^{2} \left(4-x^2\right) dx - \int_{-2}^{2} (2x^2-8)\, dx = 10{,}67-(-21{,}33)=32\ u^2$



f) Área = $2\cdot\left[\int_0^1 (3x - x^3)\,dx - \int_0^1 2x\,dx\right] = 2\cdot\left[\frac{5}{4} - 1\right] = \frac{1}{2} = 0{,}5\ u^2$

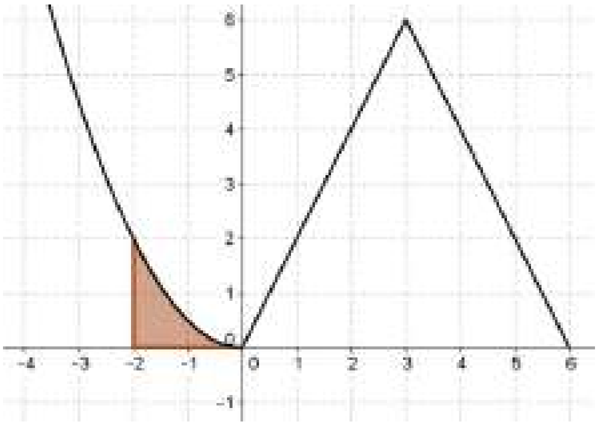


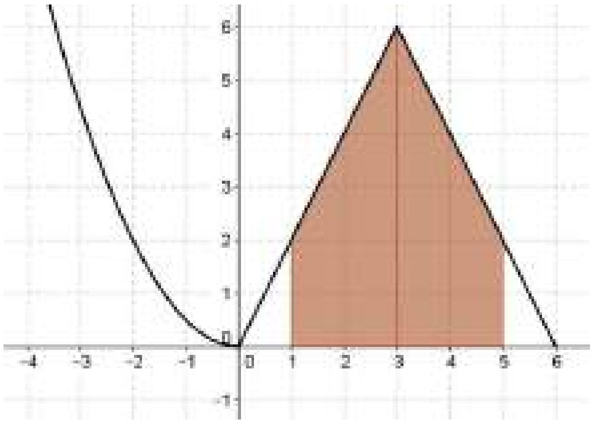
16. La gráfica de la función f (x) puede verse en el dibujo:



El valor de las integrales es:

$\int_{-2}^{0} f\ (x)\ dx = \int_{-2}^{0} f\ (x)\ dx = \frac{4}{3}\ u^2$ $\int_{1}^{5} f\ (x)\ dx = \int_{1}^{3} 2x\ dx + \int_{3}^{5} (12-2x)\ dx = 16\ u^2$





17. Las funciones que verifican f ´´ (x) = 6x – 6 son: f ´ (x) = $\int (6x-6)\,dx = 3x^2 - 6x + C$.

Como f ´ (-2) = 0 entonces C = -24 y f ´ (x) = $3x^2 - 6x - 24$.

Hallamos f(x) = $\int (3x^2 - 6x - 24)\ dx = x^3 - 3x^2 - 24x + K$.

Como f (0) = -2, entonces K = -2.

Por tanto, la función es f (x) = $x^3 - 3x^2 - 24x - 2$

18. Sea P el punto de coordenadas $\left(a, \frac{1}{2}a^2\right)$. La ecuación de la recta tangente a la curva dada en P es:

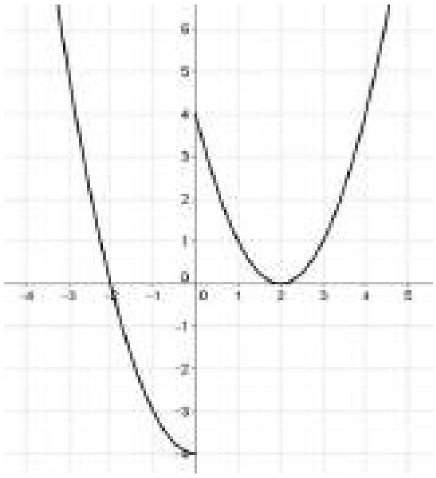
$$y = ax - \frac{1}{2}a^2$$

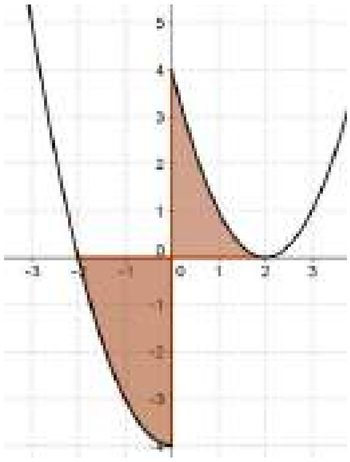
Imponiendo las condiciones del problema obtenemos que:

$$\int_0^a \frac{1}{2}x^2\ dx - \int_{a/2}^{a} \left(ax - \frac{1}{2}a^2\right) dx = 9 \ \Rightarrow\ \frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{8} = 9 \ \Rightarrow\ a = 6.$$

El punto es P (6, 18).

19. a) Las gráficas de la función y de la cenefa aparecen en los dibujos:





b) El área de la región sombreada es:

$$Área = \int_0^{-2} (x^2 - 4)\ dx + \int_0^{2} (x-2)^2\ dx = 8\ u^2$$

c) El precio de este trozo de cenefa es $8 \cdot 120 = 960$ €

20. a) Para conseguir el ahorro durante los primeros seis años calculamos:

$$\int_0^{10} (5000 + 12000x)\ dx = 650\ 000\ €$$

Durante los 10 primeros años esta empresa ahorra 650 000 €

b) Como el precio de compra es 116 000 €, el número t de años que tardará en amortizarla viene dado por:

$$\int_0^{t} (5000 + 12000x)\ dx = 100\ 000 \ \Rightarrow\ 5000t + 6000t^2 = 100\ 000 \ \Rightarrow\ t = 3{,}94\ años.$$

ACTIVIDADES-PÁG. 371

a) Expresamos la hipérbola x · y = 1 como la función $y = \frac{1}{x}$. La derivada de la función es $y' = -\frac{1}{x^2}$. Sea $P\left(t, \frac{1}{t}\right)$ un punto de la función.

La ecuación de la recta tangente a la curva en P es:

$$y - \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}(x - t) \qquad \Rightarrow \qquad x + t^2 y = 2t$$

Los puntos de corte A (con OX) y B (con OY) con los ejes coordenados son:

$$A:\begin{cases} x + t^2 y = 2t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (2t,\ 0)$$

$$B:\begin{cases} x = 0 \\ x + t^2 y = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{2}{t} \end{cases} \Rightarrow B = \left(0,\ \frac{2}{t}\right)$$

Comprobamos que $P\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$ es el punto medio del segmento de extremos A = (2t, 0) y $B = \left(0,\ \frac{2}{t}\right)$:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2t + 0}{2} = t = x_P \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + \frac{2}{t}}{2} = \frac{1}{t} = y_P$$

El área del triángulo OAB es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \quad \Rightarrow \quad \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot \frac{2}{t} \quad \Rightarrow \quad \text{Área} = 2\ u^2$$

b) Visualizamos esta situación con GeoGebra:

b_1) Dibujamos la función introduciendo en el Campo de entradas f (x) = 1/x.

b_2) Con *Desplaza Vista Gráfica* ampliamos la zona del dibujo.

b_3) Con *Punto en Objeto* dibujamos el punto P sobre la gráfica de la función.

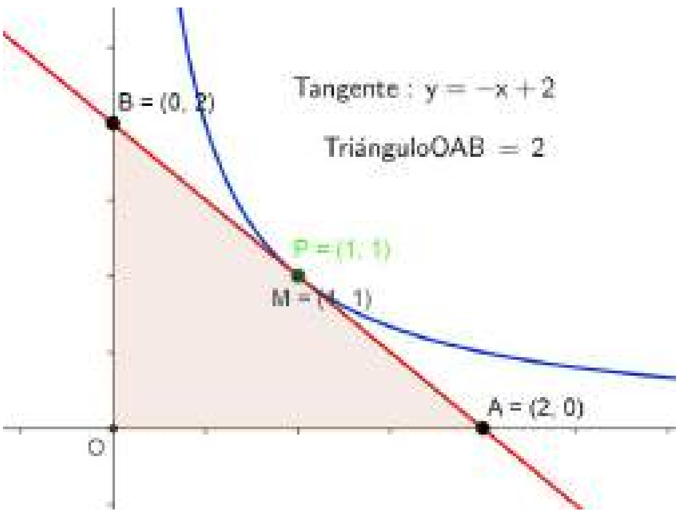
b_4) Con la herramienta *Tangentes* dibujamos la tangente a la curva en el punto P.

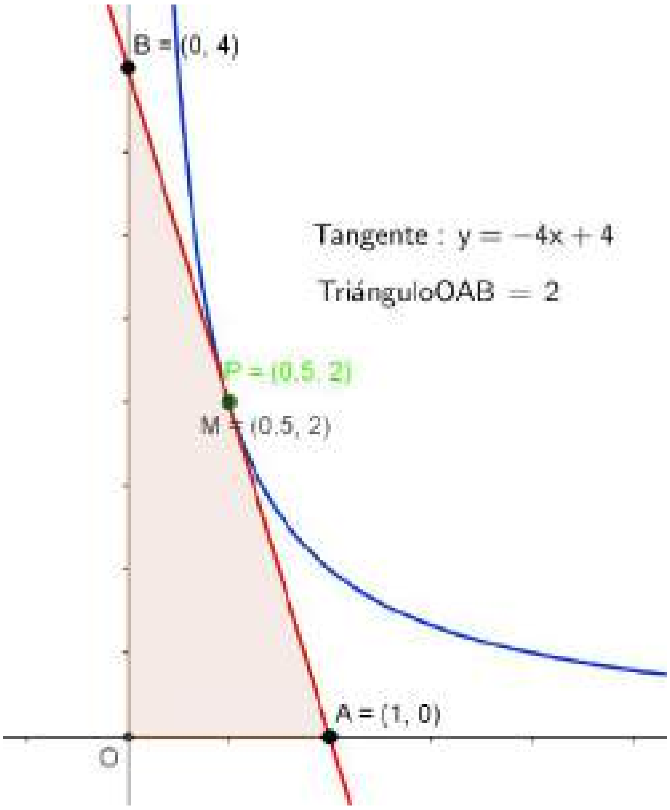
b_5) Con *Intersección de Dos Objetos* hallamos los puntos A, sobre OX, y B, sobre OY.

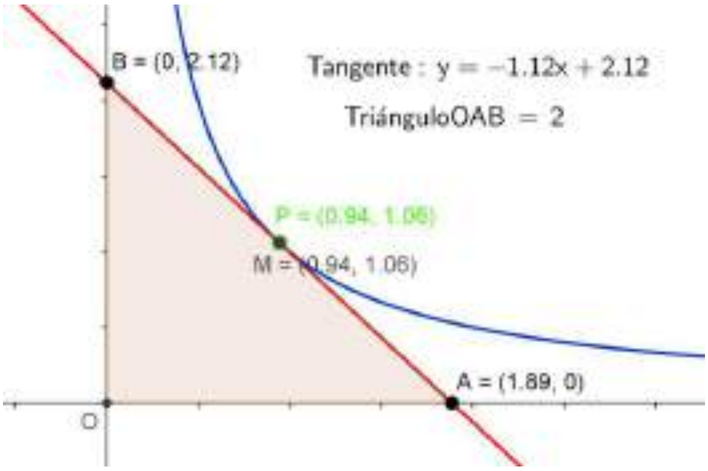
b_6) Con *Punto Medio o Centro* hallamos el punto medio, M, del segmento de extremos A y B.

b_7) Con la herramienta *Polígono* dibujamos el triángulo OAB.

b_8) Con *Elige y Mueve* desplazamos el punto P sobre curva y observamos que los puntos A y B se desplazan sobre los ejes coordenados, pero el punto M y el punto P coinciden, además el triángulo OAB cambia de forma y su área no varía y vale siempre 2 unidades cuadradas.







c) La derivada de la función $y = \frac{k}{x}$ es $y' = -\frac{k}{x^2}$. Sea $P\left(t, \frac{k}{t}\right)$ un punto de la función.

La ecuación de la recta tangente a la curva en P es:

$$y - \frac{k}{t} = -\frac{k}{t^2}(x - t) \quad \Rightarrow \quad kx + t^2 y = 2kt$$

Los puntos de corte A (con OX) y B (con OY) con los ejes coordenados son:

$$A:\begin{cases} kx + t^2 y = 2kt \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (2t,\ 0)$$

$$B:\begin{cases} x = 0 \\ kx + t^2 y = 2kt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{2k}{t} \end{cases} \Rightarrow B = \left(0,\ \frac{2k}{t}\right)$$

Comprobamos que $P\left(t,\ \frac{k}{t}\right)$ es el punto medio del segmento de extremos A = (2t, 0) y $B = \left(0,\ \frac{2k}{t}\right)$:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2t + 0}{2} = t = x_P \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + \frac{2k}{t}}{2} = \frac{k}{t} = y_P$$

El área del triángulo OAB es:

$$Área = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \quad \Rightarrow \quad Área = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot \frac{2k}{t} \quad \Rightarrow \quad Área = 2k\ u^2$$

Notas:

1. El área del triángulo, que depende del valor del parámetro k, no depende de la situación del punto de tangencia P.

2. Las características del triángulo sí dependen de la situación del punto P.

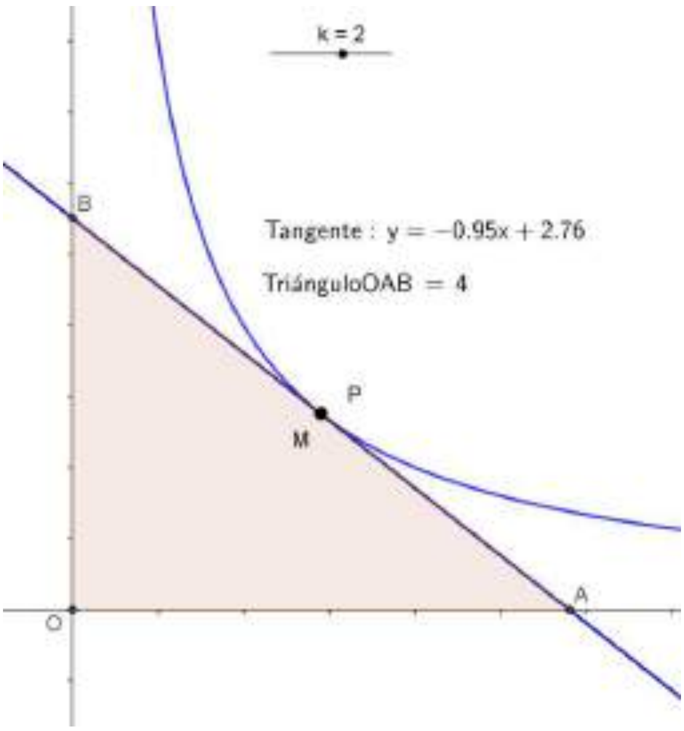
Visualizamos esta situación con GeoGebra:

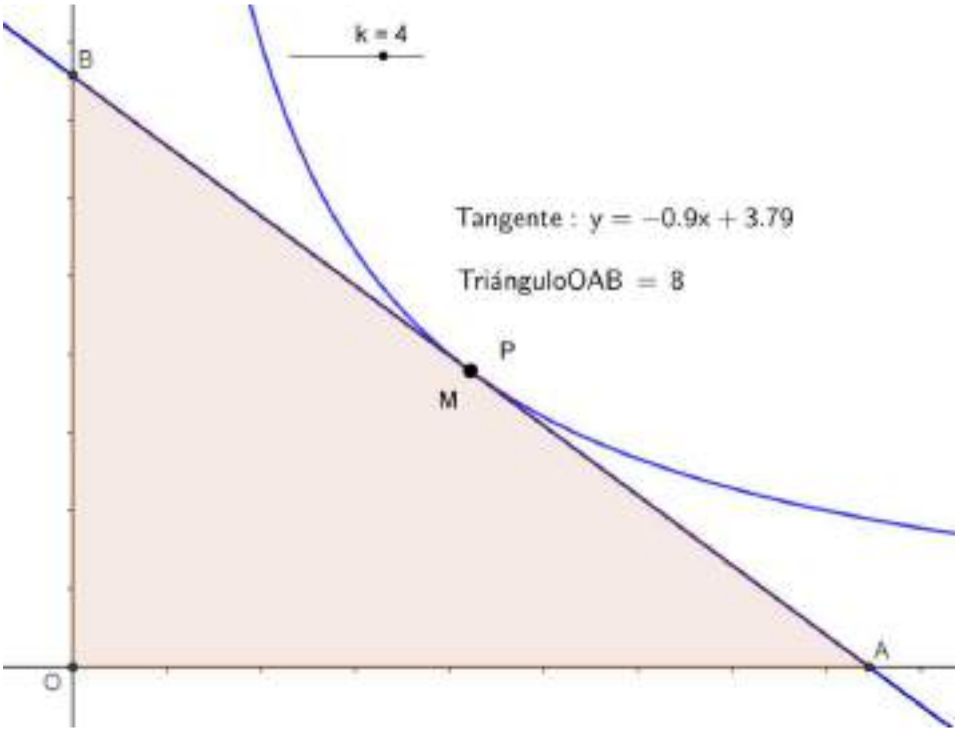
a) Insertamos un deslizador al que denominamos k.

b) Dibujamos la función introduciendo en el Campo de entradas f (x) = k/x.

c) Repetimos los mismos pasos que en la construcción anterior

d) Con *Elige y Mueve* desplazamos el deslizador y el punto P sobre curva y observamos lo que





c_1) Si el triángulo de vértices O (0, 0), A = (2t, 0) y $B = \left(0, \frac{2k}{t}\right)$ es isósceles se cumplirá:

$$OA = OB \quad \Rightarrow \quad 2t = \frac{2k}{t} \quad \Rightarrow \quad 2t^2 = 2k \quad \Rightarrow \quad t^2 = k \quad \Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{k}$$

Las coordenadas de $P\left(t, \frac{k}{t}\right)$ serán $P\left(\pm\sqrt{k}, \pm\sqrt{k}\right)$.

c_2) La longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices O (0, 0), A = (2t, 0) y $B = \left(0, \frac{2k}{t}\right)$ es:

$$L_{hip}(t) = L_{AB}(t) = \sqrt{(2t)^2 + \left(\frac{2k}{t}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{t^4 + k^2}{t^2}}$$

Derivamos y anulamos la derivada para obtener: $L'(t) = \frac{2t^2}{\sqrt{t^2 + k^2}} \cdot \frac{t^4 - k^2}{t^3}$

$$L'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t^4 - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^4 = k^2 \quad \Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{k}$$

Las coordenadas de $P\left(t, \frac{k}{t}\right)$ serán $P\left(\pm\sqrt{k}, \pm\sqrt{k}\right)$.

UNIDAD 16: Distribuciones bidimensionales. Correlación y regresión

ACTIVIDADES-PÁG. 374

1. La media y la desviación típica son: $\bar{x} = 1{,}866 \quad y \quad \sigma = 0{,}065.$

Los jugadores que se encuentran por encima de $\bar{x} + \sigma$ = 1,866 + 0,065 = 1,931 son 5 del intervalo [1,90; 1,95) y 2 del intervalo [1,95; 2,00); en total 7.

2. La media y la desviación típica son $\bar{x} = 105 \quad y \quad \sigma = 23{,}95$.

El intervalo buscado es:

$$\left(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma\right) = (105 - 23{,}95;\, 105 + 23{,}95) = (81{,}05;\, 128{,}95).$$

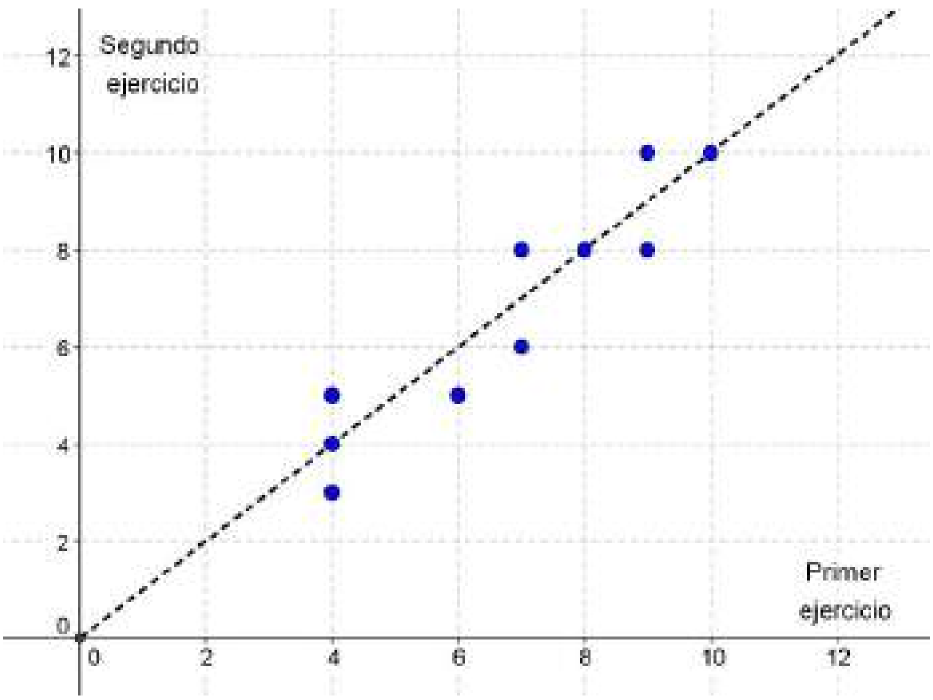
En el intervalo anterior se encuentran 9 + 18 + 19 + 8 = 54 valores del total, que representan el $\frac{54}{80} \cdot 100 = 67{,}5\%$ del total.

3. La nube de puntos parece en el gráfico.

La recta ajustada a ojo puede ser al bisectriz del primer cuadrante, y = x.

La correlación será positiva y fuerte, próxima a 1.

Si calculamos el coeficiente de correlación lineal obtenemos r = 0,927.



ACTIVIDADES-PÁG. 393

1. Veamos los dos casos límite:

1º: Si r = 0, entonces, $V = \pi \cdot h \cdot R^2$, que coincide con el volumen del cilindro.

2º: Si r = R, entonces, $V = \pi \cdot h \cdot (R^2 + R^2) = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$, pero si r = R el volumen es cero.

Luego la fórmula es falsa.

2. Los números felices de una cifra son 1 y 7.

Los números felices de dos cifras son: 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94 y 97.

Los primeros números felices de tres cifras son: 100, 103, 109, 129, 130, 133, 139, 167…

3. Después de varios intentos vemos que la situación final, para lograr el objetivo buscado, que debe quedar en la vía muerta superior es: W_1 W_2 L.

Llamamos A al lugar en que inicialmente está el vagón W_1 y B al lugar donde está inicuamente el vagón W_2.

Los pasos a seguir son:

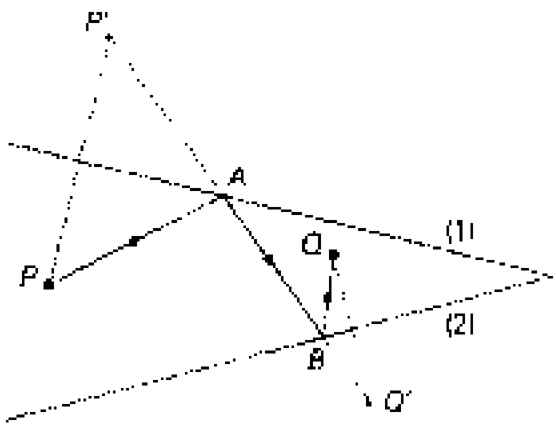
1º L coge W_1 y lo lleva a la vía muerta de abajo.
2º L da la vuelta al circuito pasando por el túnel y empuja a W_2 hasta el punto A.
3º L coge W_1 y lo lleva junto a W_2.
4º L da la vuelta al circuito y empuja a ambos vagones a la vía muerta de arriba, quedando la situación que buscábamos, W_1 W_2 L.
5º L remolca a W_2 hasta el punto A.
6º L da la vuelta al circuito y engancha a W_1 llevándolo a la posición B.
7º L vuelve a la vía muerta de arriba y los vagones han cambiado de posición.

4. Este problema es una doble simetría.

Construimos P ´, simétrico de P respecto a la banda (1), y Q ´ simétrico de Q respecto a la banda (2).

Unimos P ´ y Q ´ y llamamos A y B a los puntos en que la recta P ´Q ´ corta a las bandas.

La trayectoria pedida es PABQ.



ACTIVIDADES-PÁG. 395

1. a) Utilizando la tecla STAT y procediendo como se explica en el texto, obtenemos los siguientes parámetros:

2 – Var Stat
$\bar{x}$ = 181.00
$\sum x$ = 1448.00
$\sum x^2$ = 262264.00
Sx = 5.01
σx = 4.69
↓ n = 8.00

2 – Var Stat
↑ $\bar{y}$ = 78.50
$\sum y$ = 628.00
$\sum y^2$ = 49444.00
Sy = 4.57
σy = 4.27
↓ $\sum xy$ = 113805.00

2 – Var Stat
σy = 4.27
$\sum xy$ = 113805.00
mínX = 175.00
máxX = 190.00
mínY = 70.00
máxY = 85.00

Para calcular el coeficiente de correlación de Pearson $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$, calculamos previamente la covarianza:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum f_{ij}\, x_i\, y_j}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{113805}{8} - 181 \cdot 78{,}50 = 17{,}125$$

Con este valor obtenemos: $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \dfrac{17{,}125}{4{,}69 \cdot 4{,}27} = 0{,}86$

b) La recta de regresión del peso (Y) sobre la estatura (X) es:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}) \quad \Rightarrow \quad y - 78{,}50 = \frac{17{,}125}{4{,}69^2}(x - 181) \quad \Rightarrow \quad y = 0{,}78x - 62{,}39$$

La recta de regresión de la estatura (X) sobre el peso (Y) es:

$$x - \bar{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \bar{y}) \quad \Rightarrow \quad x - 181 = \frac{17{,}125}{4{,}27^2}(y - 78{,}50) \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}94y + 107{,}34$$

Con la calculadora se determinan así:

- Para la recta de regresión del peso (Y) sobre la estatura (X), en el menú de tecla **STAT**, elegimos **CALC** seguido de la opción **4:LinReg(ax+b),** tecleando posteriormente **L1, L2** (teclas 2nd 1; tecla , teclas 2nd 2) y obtenemos, como vemos en la imagen, la recta de ecuación y = 0,78 x – 62,39

LinReg
y = ax + b
a = .78
b = -62.39

● Para la recta de regresión de la estatura (X) sobre el peso (Y), en el menú de tecla **STAT**, elegimos **CALC** seguido de la opción **4:LinReg(ax+b),** tecleando posteriormente **L2, L1** (teclas 2nd 2; tecla , teclas 2nd 1) y obtenemos, como vemos en la imagen, la recta de ecuación x = 0,94 y + 107,34

LinReg
y = ax + b
a = .94
b = 107.34

2. a) Utilizando la tecla STAT y procediendo como se explica en el texto, obtenemos los siguientes parámetros para los datos de la tabla del enunciado:

2 – Var Stat
$\bar{x}$ = 21.25
$\sum x$ = 170.00
$\sum x^2$ = 3950.00
Sx = 6.94
σx = 6.50
↓ n = 8.00

2 – Var Stat
↑ $\bar{y}$ = 337.50
$\sum y$ = 2700.00
$\sum y^2$ = 992600.00
Sy = 107.80
σy = 100.84
↓ $\sum xy$ = 62600.00

2 – Var Stat
σy = 100.84
$\sum xy$ = 62600.00
mínX = 14.00
máxX = 32.00
mínY = 210.00
máxY = 500.00

Para calcular el coeficiente de correlación de Pearson $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$, calculamos previamente la covarianza:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum f_{ij}\, x_i\, y_j}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{62600}{8} - 21{,}25 \cdot 337{,}50 = 653{,}125$$

17

Con este valor obtenemos: $$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{653{,}125}{6{,}50 \cdot 100{,}84} = 0{,}996$$

La recta de regresión del número de conejos (Y) sobre el número de zorros (X) es:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}) \quad \Rightarrow \quad y - 337{,}50 = \frac{635{,}125}{6{,}50^2}(x - 21{,}25) \quad \Rightarrow \quad y = 15{,}48x + 8{,}52$$

La recta de regresión del número de zorros (X) sobre el número de conejos (Y) es:

$$x - \bar{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \bar{y}) \quad \Rightarrow \quad x - 21{,}25 = \frac{635{,}125}{100{,}84^2}(y - 337{,}50) \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}06y - 0{,}43$$

Con la calculadora se determinan así:

● Para la recta de regresión del número de conejos (Y) sobre el número de zorros (X), en el menú de tecla **STAT**, elegimos **CALC** seguido de la opción **4:LinReg(ax+b),** tecleando posteriormente **L1, L2** (teclas 2nd 1; tecla , teclas 2nd 2) y obtenemos, como vemos en la imagen, la recta de ecuación $y = 15{,}48\,x + 8{,}52$

```
LinReg
  y = ax + b
  a = 15.48
  b = 8.52
```

● Para la recta de regresión del número de zorros (X) sobre el número de conejos (Y), en el menú de tecla **STAT**, elegimos **CALC** seguido de la opción **4:LinReg(ax+b),** tecleando posteriormente **L2, L1** (teclas 2nd 2; tecla , teclas 2nd 1) y obtenemos, como vemos en la imagen, la recta de ecuación $x = 0{,}06\,y - 0{,}43$

```
LinReg
  y = ax + b
  a = .06
  b = -.43
```

b) Estimamos la cantidad de conejos que habría si hubiera 10 zorros, calculando en la recta de regresión de Y sobre X, de ecuación $y = 15{,}48x + 8{,}52$, el valor que se obtiene al hacer $x = 10$.

Operando, obtenemos:

$$\text{Si } x = 10 \quad \Rightarrow \quad y = 15{,}48 \cdot 10 + 8{,}52 \quad \Rightarrow \quad y = 163{,}32.$$

Por tanto, si hubiera 10 zorros, la cantidad de conejos estimada sería 163.

c) Estimamos la cantidad de zorros que habría si hubiéramos contado 350 conejos, calculando en la recta de regresión de X sobre Y, de ecuación $x = 0{,}06y - 0{,}43$, el valor que se obtiene al hacer $y = 350$.

Operando, obtenemos:

$$\text{Si } y = 350 \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}06 \cdot 350 - 0{,}43 \quad \Rightarrow \quad x = 20{,}57.$$

Por tanto, si hubiera 350 conejos, la cantidad de zorros estimada sería 21.

ACTIVIDADES-PÁG. 396

1. Las soluciones son:

La media: $\overline{x} = 172{,}5$.

La desviación típica: $\sigma = 12{,}91$

El número de países en:

$\left(\overline{x} - \sigma,\ \overline{x} + \sigma\right) = (159{,}59;\ 185{,}41)$ es 161.

$\left(\overline{x} - 2\sigma,\ \overline{x} + 2\sigma\right) = (146{,}68;\ 198{,}32)$ es 200.

$\left(\overline{x} - 3\sigma,\ \overline{x} + 3\sigma\right) = (133{,}77;\ 211{,}23)$ es 200.

2. Los valores pedidos son:

Las medias aritméticas son: $\overline{x_A} = \dfrac{276}{10} = 26{,}7$ y $\overline{x_B} = \dfrac{285}{10} = 28{,}5$.

Las desviaciones típicas son: $\sigma_A = \sqrt{\dfrac{7243}{10} - (26{,}7)^2} = 3{,}38$ y $\sigma_B = \sqrt{\dfrac{8209}{10} - (28{,}5)^2} = 2{,}94$

Será aconsejable optar por la marca B, ya que tiene mayor media y, a su vez, menos desviación típica.

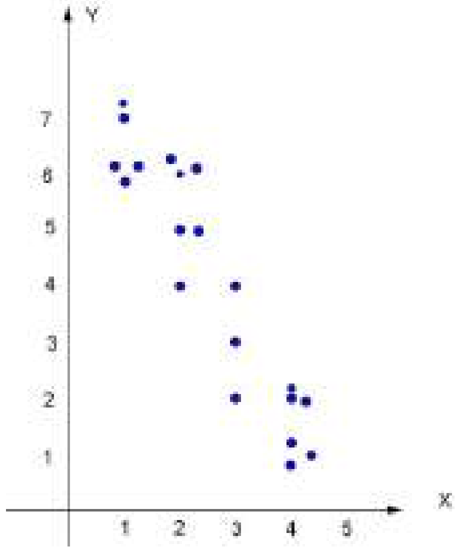
3. En cada caso queda:

a) No existe correlación.
b) Existe correlación negativa y fuerte.
c) Existe correlación positiva y fuerte.
d) No existe correlación.

4. a) La tabla de doble entrada es:

Y Viajes hijos / X Viajes padres	**1**	**2**	**3**	**4**	**TOTALES**
1				3	3
2			1	3	4
3			1		1
4		1	1		2
5		2			2
6	3	3			6
7	2				1
TOTALES	5	6	3	6	20

b) El diagrama de dispersión es:



Se observa una correlación negativa fuerte (puede calcularse el coeficiente de correlación r = - 0,944).

ACTIVIDADES-PÁG. 397

5. a) La tabla bidimensional de doble entrada es:

X / Y	3	4	5	6	7	8	9	10	Totales
3		2							2
4	1	2	2						5
5		3	3	2	5				13
6			3						3
7									0
8				5		6			11
9									0
10						5	7	4	16
Totales	1	7	8	7	5	11	7	4	50

b) La tabla bidimensional simple es:

x_i	3	4	4	4	5	5	5	6	6	7	8	8	9	10
y_i	4	3	4	5	4	5	6	5	8	5	8	10	10	10
f_i	1	2	2	3	2	3	3	2	5	5	6	5	7	4

c) Las tablas de las distribuciones marginales son:

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
f_i	1	7	8	7	5	11	7	4	50

y_i	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
f_i	2	5	13	3	0	11	0	16	50

d) La distribución correspondiente a la variable X condicionada a que Y tome el valor 5 es:

$x_i / _{Y=5}$	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
f_i	0	3	3	2	5	0	0	0	13

e) La distribución correspondiente a la variable Y condicionada a que X tome el valor 5 es:

$y_i / _{X=5}$	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
f_i	0	2	3	3	0	0	0	0	8

6. a) La tabla bidimensional simple es:

x_i	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7
y_i	1	2	2	3	3	4	4	5	4	5
f_i	1	2	4	6	10	12	15	5	1	4

b) Los parámetros buscados son:

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
3	3	9	27
4	10	40	160
5	22	110	550
6	20	120	720
7	5	35	245
Sumas	60	314	1702

$$\bar{x} = \frac{314}{60} = 5{,}23 \qquad \sigma_x = \sqrt{\frac{1702}{60} - (5{,}23)^2} = 1{,}01$$

y_i	f_i	$f_i \cdot y_i$	$f_i \cdot yx_i^2$
1	1	1	1
2	6	12	24
3	16	48	144
4	28	112	448
5	9	345	225
Sumas	60	218	8402

$$\bar{y} = \frac{218}{60} = 3{,}63 \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{842}{60} - (3{,}63)^2} = 0{,}93$$

c) La media aritmética y la desviación típica de la distribución de la variable X condicionada a que Y valga 4 es:

$x_i / _{y=4}$	f_i	$f_i \cdot x_i / _{y=4}$	$f_i \cdot (x_i / _{y=4})^2$
3	0	0	0
4	0	0	0
5	12	60	300
6	15	90	540
7	1	7	49
Sumas	28	157	889

$$\bar{x} /_{Y=4} = \frac{157}{28} = 5{,}607 \qquad \sigma_{x/y=4} = \sqrt{\frac{889}{28} - (5{,}607)^2} = 0{,}56$$

d) Calcula los parámetros anteriores para la distribución de la variable Y condicionada a que X valga 5.

$y_i / _{x=54}$	f_i	$f_i \cdot y_i / _{x=5}$	$f_i \cdot (y_i / _{x=5})^2$
1	0	0	0
2	0	0	0
3	10	30	90
4	12	48	192
5	0	0	0
Sumas	22	78	182

$$\bar{y} /_{x=5} = \frac{282}{22} = 3{,}55 \qquad \sigma_{y/x=5} = \sqrt{\frac{282}{22} - (3{,}55)^2} = 0{,}50$$

7. Las respuestas a los apartados son:

a)

X/Y	**1**	**2**	**3**	**Total**
1	9	0	0	9
2	14	7	0	21
3	16	9	5	30
4	20	12	8	40
Total	59	28	13	**100**

x_i	f_i
1	9
2	21
3	30
4	40

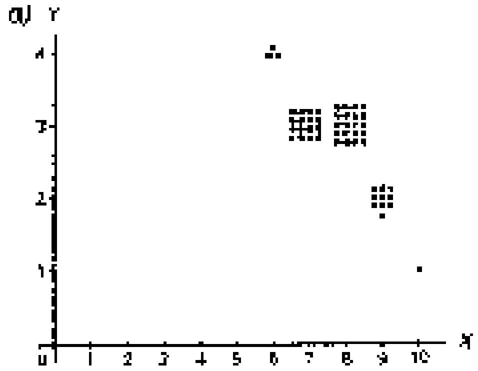
y_i	f_i
1	59
2	28
3	13

b) $\bar{x} = 3{,}01 \qquad \sigma_X = 0{,}98$

$\bar{y} = 1{,}54 \qquad \sigma_Y = 0{,}71$

8. Las soluciones son:

a)



b) Para amabas variables queda:

$$\bar{x} = \frac{390}{50} = 7{,}8 \; horas \; dormidas \; y \;\; \sigma_X = 0{,}89$$

$$\bar{y} = \frac{141}{50} = 2{,}82 \; horas \; televisión \; y \;\; \sigma_Y = 0{,}55$$

c) El porcentaje de individuos por encima de al media es $\frac{20 + 10 + 1}{50} = 0{,}62$, es decir, el 62%.

d) Para el cálculo de $r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$, calculamos la covarianza: $\sigma_{XY} = \frac{1078}{50} - 7{,}8 \cdot 2{,}82 = -0{,}436.$

El coeficiente de correlación es: $r = \frac{-0{,}436}{0{,}89 \cdot 0{,}55} = -0{,}89$.

La correlación es muy fuerte y negativa.

ACTIVIDADES-PÁG. 398

9. La covarianza es $\sigma_{AB} = \frac{1619}{10} - 11{,}5 \cdot 14{,}3 = -2{,}55.$

El coeficiente de correlación es: $r = \frac{-2{,}55}{3{,}67 \cdot 2{,}72} = -0{,}255$.

La correlación es negativa y débil.

10. La correspondencia de cada gráfico con su coeficiente de correlación es:

a) r = 0,05 b) r = 0,71 c) r = - 0,98 d) r = 0,93 e) r = - 0,62

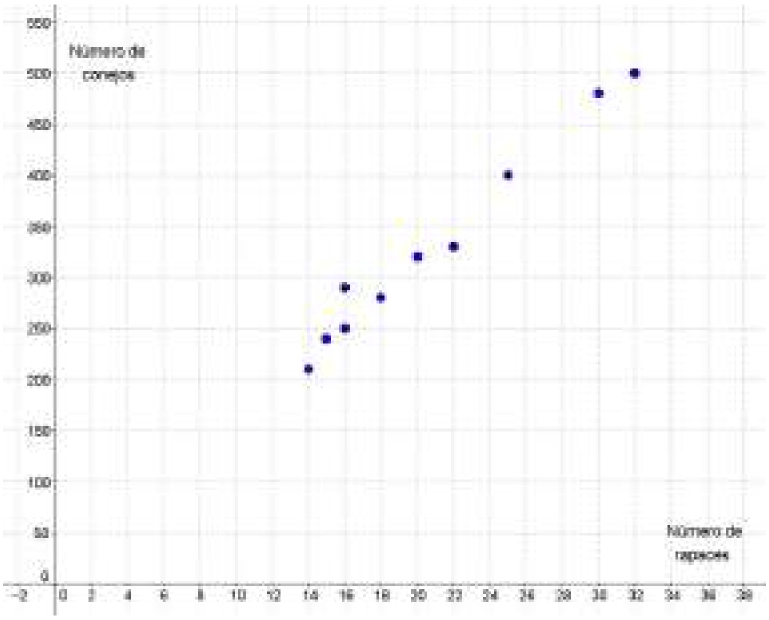
11. Los parámetros estadísticos son:

$$\overline{x} = 2{,}68;\ \ \overline{y} = 15{,}4;\ \ \sigma_X = 1{,}82;\ \sigma_Y = 7{,}97;\ \sigma_{XY} = 8{,}47$$

a) El coeficiente de correlación es: $r = \dfrac{8{,}47}{1{,}82 \cdot 7{,}96} = 0{,}58$.

b) La recta de regresión es: $y - 15{,}4 = \dfrac{8{,}47}{3{,}31}(x - 2{,}68)$, es decir, y = 2,56x + 8,54.

12. a) El diagrama de dispersión puede verse en el dibujo.



Los parámetros que se obtienen en el cálculo del coeficiente de correlación lineal son:

$$\overline{x} = 20{,}8 \qquad \sigma_X = 6{,}03 \qquad \overline{y} = 330 \qquad \sigma_Y = 94{,}55 \qquad \sigma_{XY} = 564$$

El valor del coeficiente es:

$$r = \frac{564}{6{,}03 \cdot 94{,}55} = 0{,}9892$$

Observamos que el valor obtenido nos permite afirmar que existe un excelente grado de dependencia positiva, es decir, que a mayor número de conejos, existe mayor número de rapaces.

b) Las rectas de regresión son:

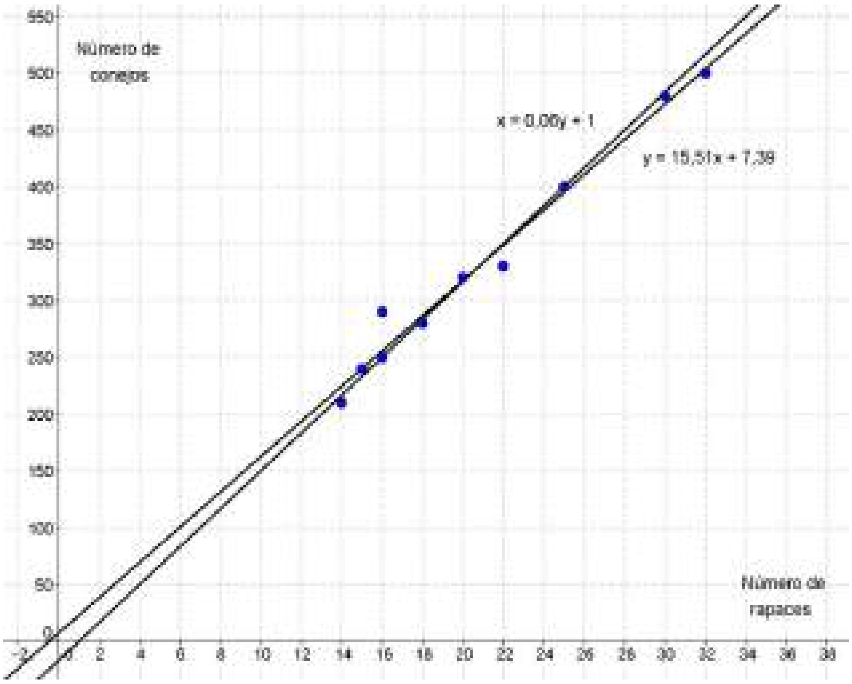
De Y sobre X es:

$$y - 330 = \frac{564}{6{,}03^2}(x - 20{,}8) \qquad \Rightarrow \qquad y = 15{,}51x + 7{,}39$$

De X sobre Y:

$$x - 20{,}8 = \frac{564}{94{,}55^2}\,(y - 330) \qquad \Rightarrow \qquad x = 0{,}06y + 1$$

Sus gráficas pueden verse en el dibujo.



c) Estimamos la cantidad de conejos que habría si hubiera 10 rapaces:

En la recta de regresión de Y sobre X: si x = 10, entonces y = 15,51 · 10 + 7,39 = 162,49 ≈ 162 conejos.

En la recta de regresión de X sobre Y: si x = 10, entonces 10 = 0,06y + 1 $\Rightarrow$ y = 150 conejos.

d) Estimamos la cantidad de rapaces que habría si hubiera 350 conejos:

En la recta de regresión de Y sobre X: si y = 350, entonces 350 = 15,51 · y + 7,39 $\Rightarrow$22,09 ≈ 22 rapaces.

En la recta de regresión de X sobre Y: si y = 350, entonces x = 350y + 1 = 22 rapaces.

Es más fiable la segunda estimación, ya que el valor inicial de la primera se aleja bastante de la media de rapaces.

13. Al ser el coeficiente de correlación r = 0,7; obtenemos:

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \qquad \Rightarrow \qquad 0{,}7 = \frac{\sigma_{XY}}{5 \cdot 7{,}5} = \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{XY} = 26{,}25.$$

La recta de regresión de Y (estatura de los hijos) sobre X (estatura de los padres) es:

$$y - 170 = \frac{26{,}25}{5^2}\,(x - 168) \qquad \Rightarrow \qquad y = 1{,}05x - 6{,}4$$

Si un padre mide 180 cm, se estima que su hijo tendrá y = 1,05 · 180 – 6,4 = 182, 6 cm.

Nota: Todos los datos se han convertido en centímetros.

ACTIVIDADES-PÁG. 399

14. Calculamos previamente los parámetros correspondientes a las distribuciones marginales y la covarianza, obteniendo:

$$\bar{x} = \frac{108}{9} = 12 \qquad \sigma_x = \sqrt{\frac{1836}{9} - 12^2} = 7,75$$

$$\bar{y} = \frac{84,40}{9} = 9,38 \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{863,52}{9} - (9,38)^2} = 2,83$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1201,20}{9} - 12 \cdot 9,38 = 20,93$$

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
0	3,50	0	12,25	0,00
3	6,25	9	39,06	18,75
6	8,00	36	64,00	48,00
9	9,20	81	84,64	82,80
12	10,20	144	104,04	122,40
15	11,00	225	121,00	165,00
18	11,60	324	134,56	208,80
21	12,05	441	145,20	253,05
24	12,60	576	158,76	302,40
108	**84,40**	**1836**	**836,52**	**1201,20**

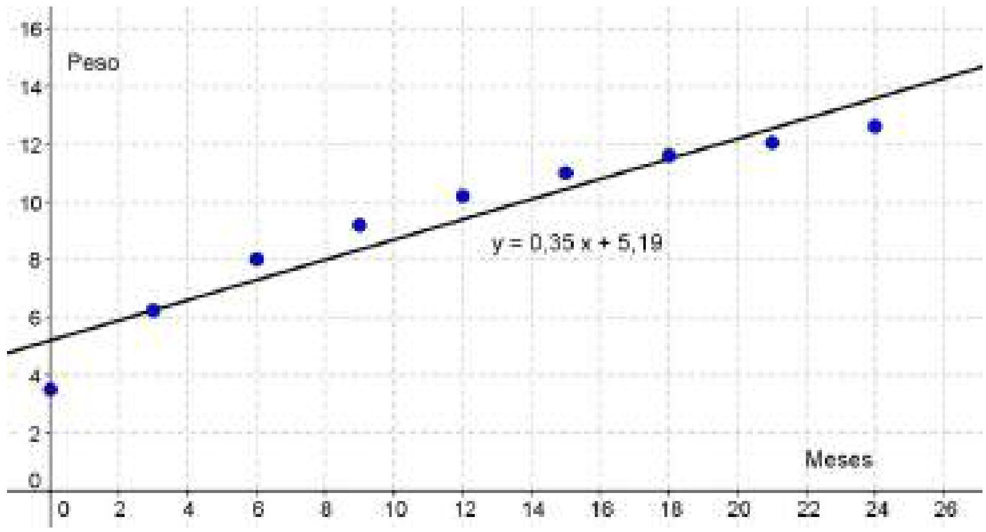
a) El coeficiente de correlación lineal vale:

$$r = \frac{20,93}{7,75 \cdot 2,83} = 0,96$$

La recta de regresión del peso (Y) en función de la edad (X) es:

$$y - 9,38 = \frac{20,93}{7,75^2}(x - 12) \qquad \Rightarrow \qquad y = 0,35x + 5,19$$

En el dibujo puede verse la nube de puntos y la gráfica de la recta de regresión.



b) Los valores de la varianza residual y el coeficiente de determinación son:

La varianza residual vale:

$$\sigma_e^2 = \frac{6{,}30}{9} = 0{,}70$$

El coeficiente de determinación es:

$$R^2 = 1 - \frac{0{,}70}{8{,}00} = 0{,}91$$

x_i	y_i	$\hat{y}_i = 0{,}35x_i + 5{,}19$	$e_i = \hat{y}_i - y_i$	e_i^2
0	3,50	5,19	- 1,69	2,86
3	6,25	6,24	0,01	0,00
6	8,00	7,29	0,71	0,50
9	9,20	8,34	0,86	0,74
12	10,20	9,39	0,81	0,66
15	11,00	10,44	0,56	0,31
18	11,60	11,49	0,11	0,01
21	12,05	12,54	- 0,49	0,24
24	12,60	13,59	- 0,99	0,98
				6,30

c) El incremento del peso esperado en un mes, podemos calcularlo como la diferencia de los pesos esperados para dos meses consecutivos, por ejemplo para x = 1 y x = 2:

Si x = 1, entonces $\hat{y}(1) = 0{,}35 \cdot 1 + 5{,}19 = 5{,}54\ kg.$

Si x = 2, entonces $\hat{y}(2) = 0{,}35 \cdot 2 + 5{,}19 = 5{,}89\ kg.$

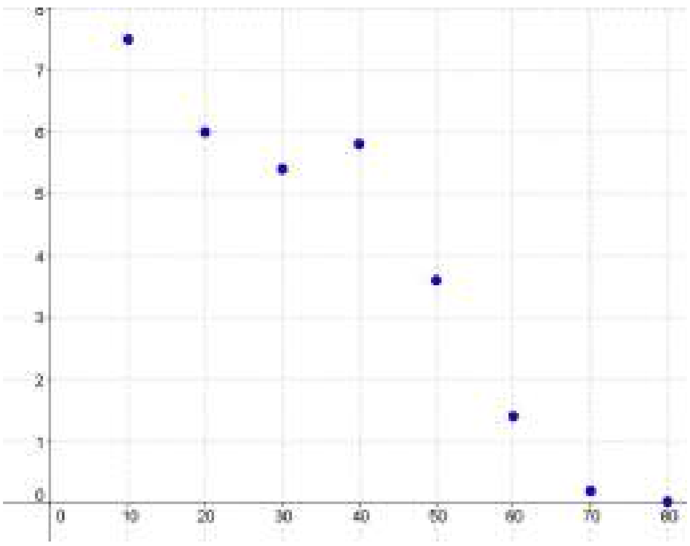
La diferencia es $\hat{y}(2) - \hat{y}(1) = 5{,}89 - 5{,}54 = 0{,}35\ kg.$

Puede observarse que el peso esperado en un mes coincide con el coeficiente de regresión $m = \dfrac{20{,}93}{7{,}75^2} = 0{,}35$.

d) El peso esperado para un niño de 14 meses es: $\hat{y}(14) = 0{,}35 \cdot 14 + 5{,}19 = 10{,}08\ kg.$

El peso esperado para un niño de dos años y medio (30 meses) es: $\hat{y}(30) = 0{,}35 \cdot 30 + 5{,}19 = 15{,}66\ kg.$

15. a) El diagrama de dispersión puede verse en el dibujo.



b) Los parámetros que se obtienen en el cálculo del coeficiente de correlación lineal son:

$$\bar{x} = 45 \qquad \sigma_X = 22{,}91 \qquad \bar{y} = 3{,}75 \qquad \sigma_Y = 2{,}68 \qquad \sigma_{XY} = -59{,}41$$

El valor del coeficiente es:

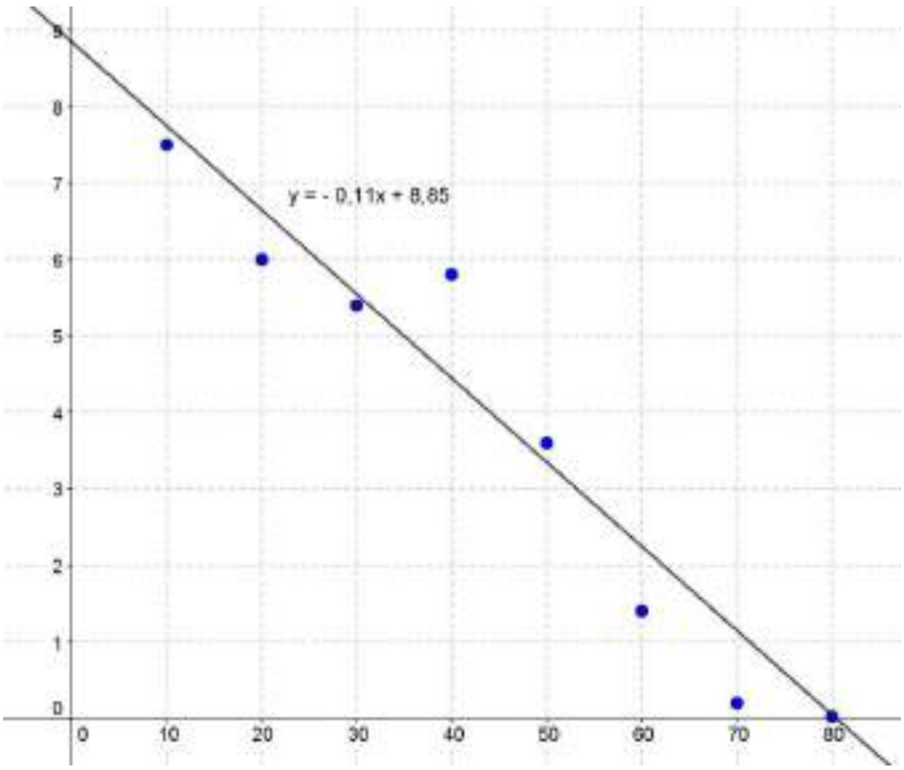
$$r = \frac{-59{,}41}{22{,}91 \cdot 2{,}68} = -0{,}968$$

Observamos que el valor obtenido nos permite afirmar que existe un excelente grado de dependencia negativa, es decir, que a mayor profundidad, existe menos oxígeno en el agua del embalse.

c) La recta de regresión de Y sobre X es:

$$y - 3{,}75 = \frac{-59{,}41}{22{,}91^2}(x - 45) \qquad \Rightarrow \qquad y = -0{,}11x + 8{,}85$$

Su gráfica puede verse en el dibujo.



d) Calculamos las estimaciones de la cantidad de oxígeno en el agua a las distintas profundidades que se piden:

Para x = 25 m, tenemos que y = - 0,11 · 25 + 8,85 = 6,1 mg/L.

Para x = 55 m, tenemos que y = - 0,11 · 55 + 8,85 = 2,8 mg/L.

Para x = 85 m, tenemos que y = - 0,11 · 85 + 8,85 = - 0,5 mg/L.

Puede observarse que los dos primeros valores son razonables, pero el último carece de sentido.

e) Nos ayudamos de los cálculos que aparecen en la tabla.

x_i	y_i	$\hat{y}_i = -0{,}11x_i + 8{,}85$	$e_i = \hat{y}_i - y_i$	e_i^2
10	7,50	7,75	- 0,25	0,0625
20	6,00	6,65	- 0,65	0,4225
30	5,40	5,55	- 0,15	0,0225
40	5,80	4,45	1,35	1,8225
50	3,60	3,35	0,25	0,0625
60	1,40	2,25	- 0,85	0,7225
70	0,30	1,15	- 0,85	0,7225
80	0,02	0,05	- 0,03	0,0009
				3,8384

La varianza residual vale: $\sigma_e^2 = \frac{3{,}84}{8} = 0{,}48$

El coeficiente de determinación es: $R^2 = 1 - \frac{0{,}48}{7{,}18} = 0{,}93$

16. a) Como la recta de regresión de Y sobre X es 4x – 3y = 0, su pendiente es el coeficiente de regresión y vale:

$$m = \frac{4}{3} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

La pendiente de la recta de regresión de X sobre Y, 3x – 2y = 1, es:

$$m' = \frac{3}{2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$$

La relación entre el coeficiente de correlación lineal y los coeficientes de regresión nos permite calcular:

$$r = \sqrt{m \cdot m'} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}} = \sqrt{2} = 1{,}41$$

El coeficiente de correlación es muy alto y nos permite afirmar que las variables están muy relacionadas.

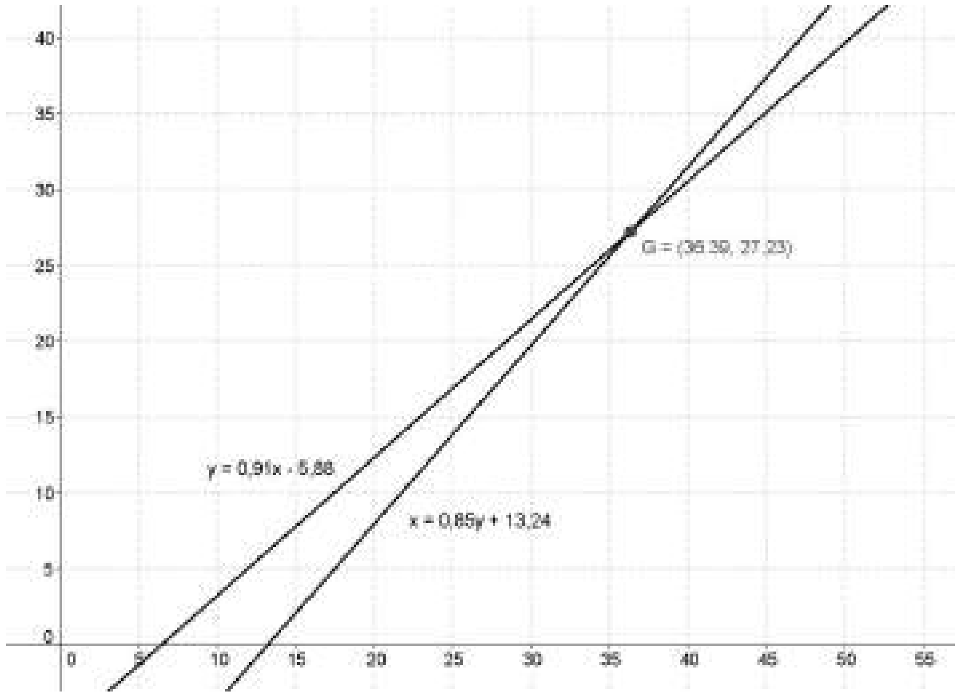
b) Sabemos que las dos rectas de regresión pasan por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, centro de gravedad de la nube de puntos.

Para calcular las medias de las variables, calculamos el punto de corte de las dos rectas. Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

La nota media en teoría es $\bar{x} = 3$ y la nota media en práctica es $\bar{y} = 4$.

17. La representación gráfica puede verse en el dibujo.



El centro de gravedad de la distribución es el punto de corte de las rectas de regresión. Por tanto:

$$\begin{cases} y = 0{,}91x - 5{,}88 \\ x = 0{,}85\,y + 13{,}24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 36{,}39 \\ y = 27{,}23 \end{cases}$$

El centro de gravedad es el punto $G\left(\bar{x} = 36{,}39;\ \bar{y} = 27{,}23\right)$.

El cuadrado del coeficiente de correlación lineal es igual al producto de los coeficientes de regresión. Sustituyendo, obtenemos:

$$r^2 = m \cdot m´ \quad \Rightarrow \quad r^2 = 0{,}91 \cdot 0{,}85 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{0{,}7735} = 0{,}8795.$$

18. Observando los gráficos vemos que el ángulo formado por las rectas es más pequeño en las distribuciones II) y IV). Por tanto, en estos casos es más significativo.

Analizando las ecuaciones de las rectas obtenemos los resultados que siguen.

I) El coeficiente de regresión de la recta y = x + 2 vale m = 1, lo que significa que la covarianza σ_{xy} es no nula. Por lo tanto, no puede ser el coeficiente de regresión de la otra recta m´ = 0, como ocurre con la recta x = 4. Es decir, esta situación carece de sentido, ya que no es posible que haya una distribución con estas dos rectas de regresión.

II) En este caso, $m = \frac{4}{5}$, $m´ = \frac{5}{6}$ y $r = \sqrt{\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}82$.

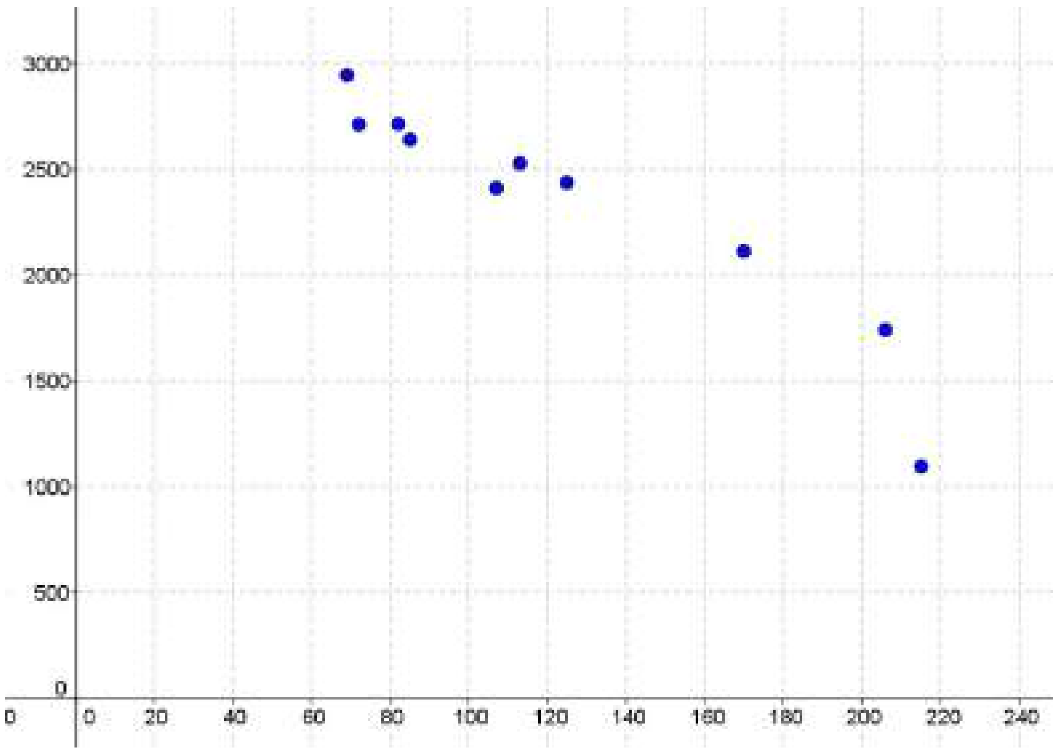
III) Para esta distribución $m = 0$, $m´ = 0$ y r = 0.

IV) En esta distribución, $m = 1$, $m' = \frac{4}{5}$ y $r = \sqrt{\frac{4}{5}} = 0{,}89$.

De nueve podemos ver que la correlación es significativa en los apartados II) y IV).

ACTIVIDADES-PÁG. 400

19. El diagrama de dispersión puede verse en el dibujo.



Los parámetros que se obtienen en el cálculo del coeficiente de correlación lineal son:

$$\bar{x} = 124{,}4 \qquad \sigma_X = 51{,}52 \qquad \bar{y} = 2333{,}7 \qquad \sigma_Y = 523{,}61 \qquad \sigma_{XY} = -25593{,}18$$

El valor del coeficiente es:

$$r = \frac{-25593{,}18}{51{,}52 \cdot 523{,}61} = -0{,}9487$$

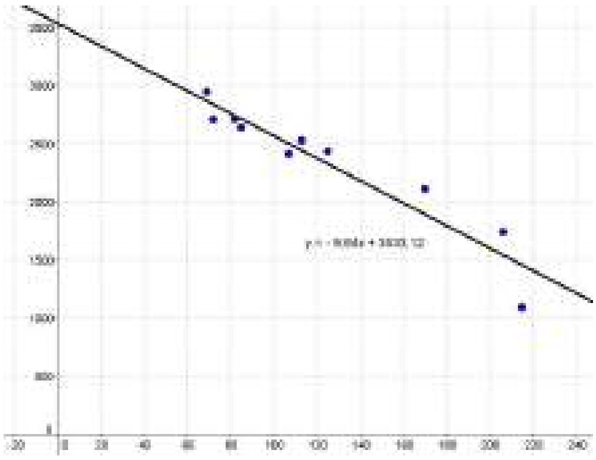
Se trata de una correlación negativa, en los lugares con más días de lluvia hay menos horas de sol y recíprocamente.

La recta de regresión de Y sobre X es:

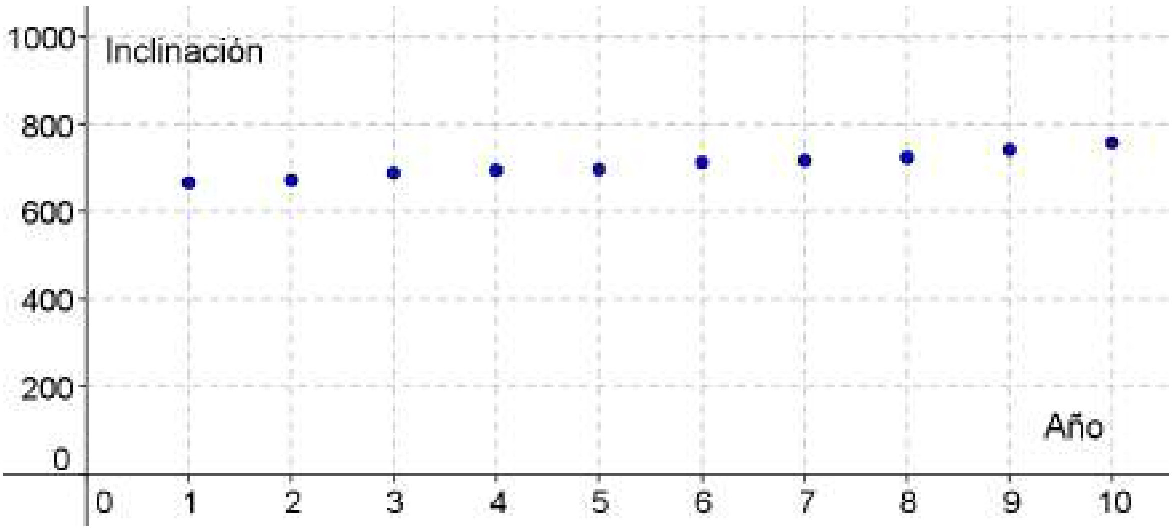
$$y - 2333{,}7 = \frac{-25593{,}18}{51{,}52^2}(x - 124{,}4) \qquad \Rightarrow \qquad y = -9{,}64x + 3533{,}12$$

Si se han registrado x = 100 días de lluvia se predicen:

$$y = -9{,}64 \cdot 100 + 3533{,}12 \approx 2568 \text{ horas de sol.}$$



20. a) Tomando el año 1978 como año 1, la representación gráfica puede verse en el dibujo.



A la vista de la nube de puntos parece que tiene una tendencia lineal que crece con el tiempo.

Para poder confirmarlo hallamos el coeficiente de correlación lineal.

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	667	1	444889	667
2	673	4	452929	1346
3	688	9	473344	2064
4	696	16	484416	2784
5	698	25	487204	3490
6	713	36	508369	4278
7	717	49	514089	5019
8	725	64	525625	5800
9	742	81	550564	6678
10	757	100	573049	7570
55	**7076**	**385**	**5014478**	**39696**

$$\bar{x} = \frac{55}{10} = 5,5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{385}{10} - 5,5^2} = 2,87$$

$$\bar{y} = \frac{7076}{10} = 707,6$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{5014478}{10} - (707,6)^2} = 27,39$$

$$\sigma_{xy} = \frac{39696}{10} - 5,5 \cdot 707,6 = 77,8$$

El coeficiente de correlación lineal vale $r = \dfrac{77,8}{2,87 \cdot 27,39} = 0,99$.

b) La ecuación de la recta de regresión de la inclinación (Y) en función del tiempo (X) es:

$$y - 707,6 = \frac{77,8}{8,24}(x - 5,5) \quad \Rightarrow \quad y = 9,44x + 655,68$$

c) Calculamos el coeficiente de determinación.

x_i	y_i	$\hat{y}_i = 9,44x_i + 655,68$	$e_i = \hat{y}_i - y_i$	e_i^2
1	667	665,12	-1,88	3,5344
2	673	674,56	1,56	2,4336
3	688	684	-4	16
4	696	693,44	-2,56	6,5536
5	698	702,88	4,88	23,8144
6	713	712,32	-0,68	0,4624
7	717	721,76	4,76	22,6576
8	725	731,2	6,20	38,44
9	742	740,64	1,36	1,8496
10	757	750,08	-6,92	47,8864
				163,6322

La varianza residual vale: $\sigma_e^2 = \dfrac{163,6322}{10} = 16,37$

El coeficiente de determinación es: $R^2 = 1 - \dfrac{16,37}{750,21} = 0,98$

d) El valor ajustado para 1918 en la recta de regresión es:

$$\hat{y}\,(-59) = 9{,}47 \cdot (-59) + 655{,}68 = 96{,}95$$

El valor obtenido es muy diferente de 71, esto es debido a que el año 1918 está muy alejado del intervalo de años que estamos considerando.

21. Calculamos los parámetros de la distribución bidimensional considerando el número de horas como variable X y el número de gérmenes como la variable Y.

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
0	20	0	400	0
1	26	1	676	26
2	33	4	1089	66
3	41	9	1681	123
4	47	16	2209	188
5	53	25	2809	265
15	**220**	**55**	**8864**	**668**

$$\bar{x} = \frac{15}{6} = 2{,}5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{55}{6} - 2{,}5^2} = 1{,}71$$

$$\bar{y} = \frac{220}{5} = 36{,}67$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{8864}{6} - (36{,}67)^2} = 11{,}53$$

$$\sigma_{xy} = \frac{668}{6} - 2{,}5 \cdot 36{,}67 = 19{,}67$$

a) La ecuación de la recta de regresión del número de gérmenes (Y), por centímetro cúbico, en función del tiempo (X) es:

$$y - 36{,}67 = \frac{19{,}67}{1{,}71^2}(x - 2{,}5) \qquad \Rightarrow \qquad y = 6{,}73x + 19{,}85$$

b) Calculamos el coeficiente de determinación.

x_i	y_i	$\hat{y}_i = 6{,}73x_i + 19{,}85$	$e_i = \hat{y}_i - y_i$	e_i^2
0	20	19,85	0,15	0,0225
1	267	26,58	- 0,58	0,3364
2	33	33,31	- 0,31	0,0961
3	41	40,04	0,96	0,9216
4	47	46,77	0,23	0,0529
5	53	53,50	- 0,50	0,2500
				1,6795

La varianza residual vale: $\sigma_e^2 = \dfrac{1{,}6795}{6} = 0{,}2799$

El coeficiente de determinación vale $R^2 = 1 - \dfrac{0{,}2799}{11{,}53^2} = 0{,}9979$

El coeficiente de correlación es $r = \sqrt{0{,}9979} = 0{,}9989$.

c) Estimamos el número de gérmenes a las 6 horas:

$$\hat{y}\,(6) = 6{,}73 \cdot 6 + 19{,}85 = 60{,}26$$

Al cabo de 6 horas habrá uno 60 miles de gérmenes por centímetro cúbico. Esta estimación tiene una gran probabilidad de ser válida ya que el coeficiente de determinación es muy alto.

22. De las rectas de regresión no podemos asegurar cuál es la de regresión de Y sobre X y cuál la de X sobre Y.

Supongamos que la primera de ellas es la de regresión de Y sobre X, se tiene:

$$y = -2x - 1$$

y su coeficiente de regresión es m = - 2.

La segunda corresponderá a la de regresión de X sobre Y, se tiene:

$$x = -\frac{3}{5}y - \frac{4}{5}$$

y su coeficiente de regresión es $m\,' = -\dfrac{3}{5}$.

Con los datos anteriores se obtiene el coeficiente de determinación es:

$$R^2 = m \cdot m' = (-2) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{6}{5} > 1$$

lo cual carece de sentido.

En consecuencia, es necesario elegir las rectas de la otra forma posible.

La recta de regresión de Y sobre X es 5x + 3y + 4 = 0, se tiene:

$$y = -\frac{5}{3}y - \frac{4}{3}$$

y su coeficiente de regresión es $m = -\dfrac{5}{3}$.

La recta de regresión de X sobre Y es 2x + y + 1 = 0, se tiene:

$$x = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

y su coeficiente de regresión es $m\,' = -\dfrac{1}{2}$.

El sigo negativo de m y m ´ nos indica que la dependencia lineal entre las variables es de tipo inverso, y el coeficiente de determinación es:

$$R^2 = m \cdot m´ = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \quad = \frac{5}{6} = 0{,}83$$

Como el coeficiente de correlación es $r = \pm\sqrt{R^2}$ y estamos ante una dependencia de tipo inverso, este coeficiente vale:

$$r = -\sqrt{0{,}83} = -\,0{,}91.$$