## UNIDAD 1: Campo gravitatorio

### CUESTIONES INICIALES-PÁG. 7

**1. ¿Cuándo se dice que una fuerza es conservativa? ¿Para qué sirve saber si una fuerza es conservativa o no?**

Una fuerza se dice que es conservativa cuando el trabajo realizado por la fuerza depende únicamente de la posición inicial y final y no de la trayectoria seguida. Si la fuerza es conservativa se puede calcular el trabajo aplicando la ley de la energía potencial, por lo que ese trabajo es igual a la variación de la energía potencial cambiada de signo y no hay que recurrir a la definición de trabajo elemental.

**2. ¿A qué se denomina energía mecánica asociada a un objeto? ¿Cuándo se conserva la energía mecánica durante una transformación?**

La energía mecánica asociada a un objeto es iguala a la suma de su energía cinética y de su energía potencial. La energía mecánica se conserva durante una transformación cuando solamente actúan fuerzas conservativas sobre el objeto.

**3. ¿Cuánto pesa un objeto situado a una distancia igual a 3 · $R_{Tierra}$ de la superficie de la Tierra?**

El peso del objeto se divide por nueve: $P' = m \cdot g' = m \dfrac{GM_T}{(3 \cdot R_T)^2} = m \dfrac{G \cdot M_T}{9 \cdot R_T^2} = m \dfrac{P}{9}$

### ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 38

**1. ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra se reduce a la mitad el campo gravitatorio terrestre? $R_T$ = 6400 km**

La relación de los módulos de los campos gravitatorios en la superficie y en el punto en cuestión son:

$$\frac{g_{superficie}}{g_P} = \frac{\dfrac{G \cdot M}{R_T^2}}{\dfrac{G \cdot M}{r^2}}; \frac{g_{superficie}}{\dfrac{g_{superficie}}{2}} = \frac{r^2}{R_T^2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{r}{R_T}$$

Operando: $r = R_T + h = \sqrt{2} \cdot R_T$

Despejando: $h = \sqrt{2} \cdot R_T - R_T = 6\,400\text{ km} \cdot (\sqrt{2} - 1) = 2{,}65 \cdot 10^3\text{ km}$

**2. Se eleva un objeto de masa m = 20 kg desde la superficie de la Tierra hasta una altura h = 100 km. ¿Cuánto ha incrementado su energía potencial?**

La variación de la energía potencial asociada al objeto en la nueva posición es:

$$\Delta E_p = E_{p,\,altura} - E_{p,\,superficie} = -\frac{G M_T m}{r} - \left(-\frac{G M_T m}{R_T}\right) = G M_T m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r}\right)$$

Operando: $\Delta E_p = = \dfrac{G M_T m}{R_T^2} R_T^2 \dfrac{r - R_T}{R_T \cdot r} = g_0 m R_T^2 \dfrac{h}{R_T \cdot (R_T + h)}$

Como la distancia h es mucho menor que el radio de la Tierra se puede realizar la aproximación $R_T \cdot (R_T + h) \approx R_T^2$ y por tanto:

$\Delta E_p = m \cdot g_0 \cdot h = 20\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ N/kg} \cdot 100 \cdot 10^3\text{ m} = 1{,}96 \cdot 10^7\text{ J}$

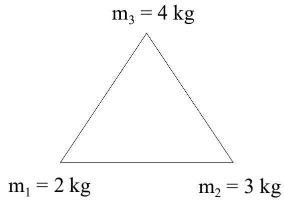
Si no se utiliza la aproximación anterior, se tiene que:

$$\Delta E_p = \frac{G M_T m}{R_T^2} R_T^2 \frac{r - R_T}{R_T \cdot r} = g_0 m R_T \frac{h}{(R_T + h)}$$

Sustituyendo: $\Delta E_p = 9{,}8\text{ m/s}^2 \cdot 20\text{ kg}\ \dfrac{(6370 \cdot 10^3\text{ m}) \cdot (100 \cdot 10^3\text{ m})}{6370 \cdot 10^3\text{ m} + 100 \cdot 10^3\text{ m}} = 1{,}93 \cdot 10^7\text{ J}$

**3. En los vértices de un triángulo equilátero de 1 m de lado se colocan tres masas de 2 kg, 3 kg y 4 kg. Calcula la energía transformada para separarlas infinitamente.**

La energía potencial gravitatoria del sistema representa el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria al separar las partículas a una distancia infinita.




En el caso de un conjunto de partículas, la energía potencial gravitatoria total es la suma de todas las parejas de partículas.

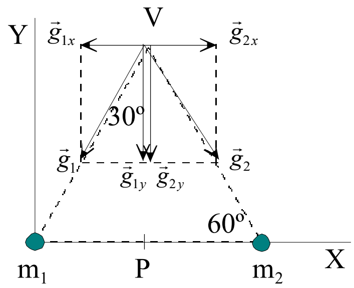
$$E_{p,total} = E_{p,12} + E_{p,13} + E_{p,23} = -G \cdot \left( \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 \cdot m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 \cdot m_3}{r_{23}} \right)$$

$$E_{p,total} = E_{p,12} + E_{p,13} + E_{p,23} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \left( \frac{2kg \cdot 3kg}{1m} + \frac{2kg \cdot 4kg}{1m} + \frac{3kg \cdot 4kg}{1m} \right) = -1{,}73 \cdot 10^{-9}\ J$$

Que lógicamente tiene signo negativo. Ya que un agente externo tiene que realizar un trabajo contra la fuerza gravitatoria que se almacena en forma de energía potencial gravitatoria.

**4. En los vértices de un triángulo equilátero de 1 m de lado hay colocadas sendas masas iguales de 3 kg cada una. Calcula el vector campo gravitatorio en el otro vértice. Determina el vector fuerza que actúa sobre una masa de 5 kg colocada en ese vértice. Indica el valor de la energía transformada al trasladar la masa de 5 kg desde el vértice hasta el punto medio del lado que une las masas de 3 kg.**

Se elige un sistema de referencia con el lado del triángulo que contiene las masas sobre el eje X y en el origen una de ellas. Se denominan $m_1$ y $m_2$ a los dos masas iguales y m a la masa que se traslada. Las dos masas generan un campo gravitatorio del mismo módulo en el otro vértice.




$$g_1 = g_2 = \frac{G \cdot m_1}{r_1^2} = \frac{G \cdot 3kg}{1m^2}$$

Las componentes en el eje X de los campos anteriores se anulan por simetría y las componentes en el eje Y se refuerzan. Como los ángulos de un triángulo equilátero son de 60º, resulta que:

$g_{1y} = g_{2y} = g_1 \cdot$ sen 60º $= \frac{G \cdot 3kg}{1m^2} \cdot \text{sen}\,60°$

El módulo del campo gravitatorio en el otro vértice es:

$$g_T = 2 \cdot g_1 = 2 \frac{G \cdot 3kg}{1m^2} \cdot \text{sen}\,60° = 2 \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2 \cdot 3kg}{1m^2} \cdot \text{sen}\,60° = 3{,}46 \cdot 10^{-10}\ N/kg$$

Vectorialmente: $\vec{g}_t = -3{,}46 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{j}\ N/kg$

El vector fuerza que actúa sobre la masa de 5kg colocada en el vértice libre es:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} = 5kg \cdot (-3{,}46 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{j}\ N/kg) = -1{,}72 \cdot 10^{-9} \cdot \vec{j}\ N$$

La energía involucrada en el proceso se resuelve a través del cálculo del potencial.

El potencial gravitatorio que generan las dos masas iguales $m_1$ y $m_2$ en el otro vértice es una magnitud escalar (siempre de signo negativo) y cuyo valor es:

$$V_v = V_1 + V_2 = 2 \cdot \left( -\frac{G \cdot m_1}{r_V} \right) = -2 \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2 \cdot 3kg}{1m} = -4{,}0 \cdot 10^{-10}\ J/kg$$

El potencial en el punto, P, medio del lado que contiene las masas iguales es:

$$V_P = V_1 + V_2 = 2 \cdot \left( -\frac{G \cdot m_1}{r_P} \right) = -2 \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2 \cdot 3kg}{0{,}5m} = -8{,}0 \cdot 10^{-10}\ J/kg$$

Aplicando las relaciones entre el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria y el potencial, resulta que:
$W_{F_{gravitatoria}\ V \to P} = -\Delta E_p = -m \cdot \Delta V = -m \cdot (V_P - V_V) =$
$= -5\ kg \cdot [-8{,}0 \cdot 10^{-10}\ J/kg - (-4{,}0 \cdot 10^{-10}\ J/kg)] = +2{,}00 \cdot 10^{-9}\ J$

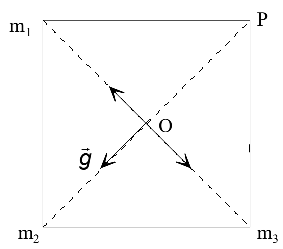
El proceso es espontáneo. La fuerza gravitatoria realiza un trabajo a costa de disminuir la energía potencial asociada al sistema.

**5. Tres masas iguales de 1 kg cada una están situadas en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Calcula el módulo del campo gravitatorio en el centro del cuadrado. Determina el potencial gravitatorio en el vértice libre y en el centro del cuadrado. Calcula el trabajo realizado al trasladar un objeto de 10 kg de masa desde el centro del cuadrado hasta el vértice libre.**

La geometría del ejercicio indica que los campos creados por las masas situadas en la misma diagonal se anulan. El campo gravitatorio total es igual al creado por la masa situada en el vértice opuesto al vértice libre P.

Este campo tiene la dirección de la diagonal que pasa por el punto P y sentido hacia la masa. Su módulo es:

$$g = \frac{G \cdot m}{r^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2 \cdot 1kg}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} m\right)^2} = 1{,}33 \cdot 10^{-10}\ \frac{N}{kg}$$




El potencial gravitatorio en un punto es igual a la suma de los potenciales generados por cada una de las masas en ese punto.

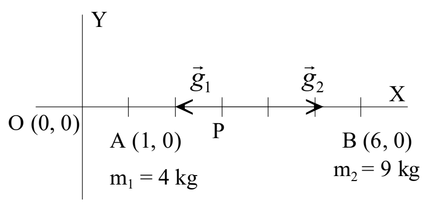
$$V_P = -2\frac{G \cdot m}{r_1} - \frac{G \cdot m}{r_2} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 1kg \left(\frac{2}{1m} + \frac{1}{\sqrt{2}\,m}\right) = -1{,}80 \cdot 10^{-10}\ \frac{J}{kg}$$

$$V_O = -3\frac{G \cdot m}{r_1} = -3 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 1kg \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} m} = -2{,}83 \cdot 10^{-10}\ \frac{J}{kg}$$

Aplicando la ley de la energía potencial:
$W_{O \to P} = -m \cdot \Delta V = -m \cdot (V_P - V_O) = -10\ kg \cdot (-1{,}80 \cdot 10^{-10}\ J/kg + 2{,}83 \cdot 10^{-10}\ J/kg) =$
$= -1{,}03 \cdot 10^{-9}\ J$

**6. Una partícula de 4 kg de masa se coloca en el punto de coordenadas A (1, 0) y otra de 9 kg de masa se coloca en el punto B (6, 0). ¿Hay algún punto en el que se anule el campo gravitatorio? Calcula sus coordenadas. Calcula la energía involucrada en el proceso de trasladar una masa de 5 kg desde el origen de coordenadas hasta el punto C (3,0).**

Una masa puntual genera un campo gravitatorio de dirección la radial y sentido hacia la masa considerada. El campo gravitatorio en un punto es la suma vectorial de los campos gravitatorios generados por cada una de las masas. Por tanto el campo se anula en un punto situado entre las dos masas. La distancia entre las dos masas es 5 m.




El punto P está situado sobre el eje X y dista x m del punto A y 5 – x m del B. Como en ese punto los módulos de los campos generados por cada masa son iguales, se tiene:

$$|\vec{g}_1| = |\vec{g}_2|; \frac{G\cdot m_1}{r_1^2} = \frac{G\cdot m_2}{r_2^2}; \frac{4\,kg}{x^2} = \frac{9\,kg}{(5-x)^2}$$

Operando: $2 \cdot (5 – x) = 3 \cdot x \Rightarrow x = 2$ m; por tanto, las coordenadas de P son: P (3, 0)

En primer lugar se calcula el potencial gravitatorio en los puntos considerados, teniendo en cuenta que el potencial en un punto es igual a la suma de los potenciales creados por cada una de las masas.

$$V_O = V_{O1} + V_{O2} = -\frac{G\cdot m_1}{r_1} - \frac{G\cdot m_2}{r_2} = -G\left(\frac{4\,kg}{1\,m} + \frac{9\,kg}{6\,m}\right) = -6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\,5{,}5\,\frac{kg}{m} = -3{,}67\cdot 10^{-10}\,\frac{J}{kg}$$

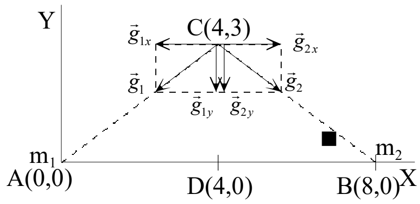
$$V_C = V_{C1} + V_{C2} = -\frac{G\cdot m_1}{r_1} - \frac{G\cdot m_2}{r_2} = -G\left(\frac{4\,kg}{2\,m} + \frac{9\,kg}{3\,m}\right) = -6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\,5\,\frac{kg}{m} = -3{,}34\cdot 10^{-10}\,\frac{J}{kg}$$

Aplicando la ley de la energía potencial:

$W_{O\to C} = - \Delta E_p = - m \cdot \Delta V = - m \cdot (V_C – V_O) = - 5\ kg\ (- 3{,}34 \cdot 10^{-10}\ J/kg + 3{,}67 \cdot 10^{-10}\ J/kg) =$
$= - 1{,}65 \cdot 10^{-10}$ J

**7. Dos masas puntuales $m_1 = m_2 = 10$ kg están colocadas en los puntos A (0 m, 0 m) y B (8 m, 0 m). Calcula el vector campo gravitatorio en el punto C (4 m, 3 m). ¿Qué fuerza actúa sobre una masa de $m_3 = 100$ g colocada en C? Calcula la energía transformada al trasladar la masa $m_3$ desde el punto C hasta el punto D (4 m, 0 m). Es espontáneo el proceso, interpreta el sigo obtenido.**

Cada una de las masas mayores genera en el punto C un campo gravitatorio cuyo módulo es:




$$g = G\frac{m}{r^2} = G\frac{m}{x^2+y^2}$$

En el diagrama de la figura se observa que las componentes en X del campo gravitatorio se anulan y que las componentes en Y se refuerzan. Este campo tiene la dirección la de la recta que une los puntos C y D y su sentido es hacia el punto D. Su módulo es:

$$g_{total} = 2 \cdot g_y = 2 \cdot g \cdot \text{sen}\,\phi = 2\cdot G\frac{m}{x^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Sustituyendo: $g_{total} = 2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\,\frac{10\,kg}{(4\,m)^2+(3\,m)^2}\,\frac{4\,m}{\sqrt{(4\,m)^2+(3\,m)^2}} = 4{,}27\cdot 10^{-11}\,N/kg$

Vectorialmente: $\vec{g}_{total} = -\,4{,}27\cdot 10^{-11}\cdot \vec{j}\ N/kg$

Aplicando la definición de intensidad del campo en un punto resulta que:

$\vec{F} = m\cdot \vec{g}_{total} = 0{,}1\,kg\cdot(-4{,}27\cdot 10^{-11}\cdot \vec{j}\ N/kg) = -4{,}27\cdot 10^{-12}\cdot \vec{j}\,N$

Aplicando la definición de potencial gravitatorio en un punto. El potencial generado en un punto es igual a la suma de los potenciales generados por cada una de las masas.

$$V_C = -2\cdot G\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2}} = -2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\,\frac{10\,kg}{\sqrt{(4\,m)^2+(3\,m)^2}} = -2{,}67\cdot 10^{-10}\ J/kg$$

$$V_D = -2\cdot G\frac{m}{x} = -2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\,\frac{10\,kg}{4\,m} = -3{,}34\cdot 10^{-10}\ J/kg$$

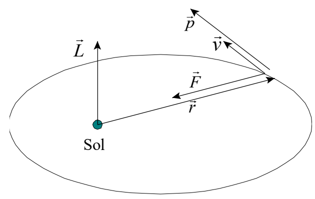
Aplicando la ley de la energía potencial:

$W_{Fcampo\ C\to D} = - \Delta E_p = - m \cdot \Delta V = - m \cdot (V_D - V_C) = - 0{,}1\ kg \cdot (- 3{,}34 \cdot 10^{-10}\ J/kg + 2{,}67\cdot 10^{-10}\ J/kg) = 6{,}7 \cdot 10^{-12}$ J

El proceso es espontáneo, ya que las masas están más cerca unas de otras en la posición final que en la inicial. Las fuerzas del campo realizan un trabajo a costa de disminuir la energía potencial asociada a la nueva distribución.

**8. El planeta Mercurio describe una órbita elíptica alrededor del Sol. En el afelio, su distancia al Sol es de $6{,}99 \cdot 10^{10}$ m, y su velocidad orbital es de $3{,}88 \cdot 10^{4}$ m/s, siendo su distancia al Sol en el perihelio de $4{,}60 \cdot 10^{10}$ m. En el perihelio de Mercurio calcula su velocidad orbital, su energía cinética, potencial y mecánica y los módulos de su momento lineal y angular. De las magnitudes indicadas anteriormente, ¿cuáles son iguales en el afelio?**
**Masa de Mercurio = $3{,}18 \cdot 10^{23}$ kg; Masa del Sol: $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg; G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m$^2$ · kg$^{-2}$.**

La interacción gravitatoria es una fuerza central, por lo que el momento angular de Mercurio respecto del Sol es una cantidad constante a lo largo de la órbita.




$\vec{L}_{afelio} = \vec{L}_{perihelio}$

Aplicando la definición de momento angular y como el vector de posición es perpendicular al vector velocidad, resulta que:

$r_{afelio} \cdot v_{afelio} = r_{perihelio} \cdot v_{perihelio} \Rightarrow v_{perihelio} = 5{,}90 \cdot 10^4$ m/s

La velocidad orbital es un vector tangente a la trayectoria, por lo que no se conserva ni en módulo, ni en dirección, ni en sentido.

Aplicando la definición de momento lineal: $\vec{p}_{perihelio} = m_{mercurio} \cdot \vec{v}_{perihelio}$

En módulo: $p_{perihelio} = m_{Mercurio} \cdot v_{perihelio} = 1{,}88 \cdot 10^{28}$ kg · m/s

El momento lineal es un vector tangente a la trayectoria, luego no se conserva ni en módulo, ni en dirección, ni en sentido.

Aplicando la definición de energía cinética: $E_c = \frac{1}{2} \cdot m_{mercurio} \cdot v^2_{perihelio} = 5{,}53 \cdot 10^{32}$ J

Que no se conserva a la largo de la trayectoria, ya que el módulo de la velocidad no permanece constante.

La energía potencial gravitatoria asociada a esa posición es: $E_p = -\frac{G \cdot m_{Sol} \cdot m_{mercurio}}{r_{perihelio}} = -9{,}2 \cdot 10^{32}$ J

Que tampoco es constante a lo largo de la trayectoria porque la distancia no lo es.

La energía mecánica es igual a la suma de las energías cinética y potencial gravitatoria.

$E = E_c + E_p = -3{,}66 \cdot 10^{32}$ J

Cantidad negativa, ya que Mercurio está ligado al Sol. Esta cantidad permanece constante a lo largo de la trayectoria porque la interacción gravitatoria es una fuerza conservativa.

Aplicando la definición de momento angular y como el vector de posición es perpendicular al vector velocidad, resulta que:

$\vec{L}_{perihelio} = \vec{r}_{perihelio} \wedge \vec{p}_{perihelio} \rightarrow L_{perihelio} = r_{perihelio} \cdot p_{perihelio} = 8{,}63 \cdot 10^{38}$ kg · m$^2$/s

Es un vector perpendicular al plano de la órbita y cuyo sentido es el indicado por la regla de Maxwell, que coincide con el del avance de un sacacorchos al voltear el vector de posición sobre el vector velocidad por el camino más corto.

Este vector permanece constante a lo largo de toda la trayectoria como corresponde a una fuerza central, ya que el momento de la fuerza que actúa sobre Mercurio respecto del Sol es igual a cero, el vector de posición y el vector fuerza son paralelos.

**9. Un meteorito de 60 kg de masa cae desde un punto situado a una altura igual al radio de la Tierra con una velocidad de 40 m/s. ¿Cuál será la velocidad del meteorito al caer en la superficie terrestre si despreciamos la fricción con la atmósfera? $M_{Tierra}$ = 5,98·10$^{24}$ kg, $R_{Tierra}$ = 6370 km**

Si se prescinde del rozamiento con el aire la única fuerza que actúa sobre el objeto es la atracción gravitatoria, por lo que la energía mecánica del objeto se conserva durante los desplazamientos.
$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$; $E_{\text{mecánica posición inicial}} = E_{\text{mecánica superficie}}$

$$\frac{1}{2}m\cdot v_{inicial}^2 - \frac{G\cdot M_T\cdot m}{2\cdot R_T} = \frac{1}{2}m\cdot v_{final}^2 - \frac{G\cdot M_T\cdot m}{R_T};\ v_{inicial}^2 - \frac{G\cdot M_T}{R_T} = v_{final}^2 - \frac{2\cdot G\cdot M_T}{R_T}$$

Despejando: $v_{final}^2 = v_{inicial}^2 + \dfrac{G\cdot M_T}{R_T}$

Sustituyendo: $v_{final} = \sqrt{v_{inicial}^2 + \dfrac{G\cdot M_T}{R_T}} = \sqrt{(40\,m/s)^2 + \dfrac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,kg}{6370\cdot 10^3\,m}} = 7{,}9\cdot 10^3\,m/s$

**10. Un objeto de masa m = 1000 kg se acerca en dirección radial a un planeta, de radio $R_P$ = 6000 km, que tiene una gravedad g =10 m/s$^2$ en su superficie. Cuando se observa este objeto por primera vez se encuentra a una distancia $r_0$ = 6 $R_P$ del centro del planeta. ¿Qué energía potencial tiene ese objeto cuando se encuentra a la distancia $r_0$? Determina la velocidad inicial del objeto $v_0$, o sea cuando está a la distancia $r_0$, sabiendo que llega a la superficie del planeta con una velocidad v = 12 km/s**

La energía potencial inicial asociada a la posición del meteorito es:

$$E_p = -\frac{G\cdot M_p\,m}{r} = -\frac{G\cdot M_p\,m}{6\cdot R_p} = -\frac{G\cdot M_p\,m\cdot R_P}{6\cdot R_P^2} = -\frac{g\cdot m\cdot R_P}{6} = -\frac{10\,m/s^2\cdot 1000\,kg\cdot 6000\cdot 10^3\,m}{6} = -1{,}0\cdot 10^{10}\,J$$

Si se prescinde del rozamiento con el aire la única fuerza que actúa sobre el objeto es la atracción gravitatoria, por lo que la energía mecánica del objeto se conserva durante los desplazamientos.
$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$; $E_{\text{mecánica posición inicial}} = E_{\text{mecánica superficie}}$

$$\frac{1}{2}m\cdot v_0^2 - \frac{G\cdot M_P\cdot m}{r_0} = \frac{1}{2}m\cdot v_{final}^2 - \frac{G\cdot M_P\cdot m}{R_p};\ v_0^2 - \frac{2\cdot G\cdot M_P}{6\cdot R_P} = v_{final}^2 - \frac{2\cdot G\cdot M_P}{R_P}$$

Despejando: $v_0^2 = v_{final}^2 - \dfrac{5}{3}\dfrac{G\cdot M_P}{R_P} = v_{final}^2 - \dfrac{5}{3}\dfrac{G\cdot M_P\cdot R_P}{R_P^2} = v_{final}^2 - \dfrac{5}{3}g\cdot R_P$

Sustituyendo: $v_0 = \sqrt{(12\cdot 10^3\,m/s)^2 - \dfrac{5}{3}10\,m/s^2\cdot 6000\cdot 10^3\,m} = 6633\,m/s$

**11. En la superficie de un planeta de 2 000 km de radio, la aceleración de la gravedad es de 3 m/s$^2$. Calcula la masa del planeta. ¿Hasta qué altura se elevará un objeto que se lance verticalmente desde la superficie del planeta con una velocidad de 2 km/s?**

Igualando las definiciones de peso según la ley de gravitación universal y la segunda ley de Newton, se tiene:

$$P = \frac{G\cdot M\cdot m}{R^2} = m\cdot g \Rightarrow M = \frac{g\cdot R^2}{G} = \frac{3\,m/s^2\cdot(2\cdot 10^6\,m)^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2} = 1{,}8\cdot 10^{23}\,kg$$

Si se prescinde del rozamiento con el aire la única fuerza que actúa sobre el objeto es la atracción gravitatoria, por lo que la energía mecánica del objeto se conserva durante los desplazamientos.

$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$; $E_{\text{mecánica superficie}} = E_{\text{mecánica posición final}}$

$$\tfrac{1}{2} \cdot m_O \cdot v^2_{\text{superficie}} - \frac{G \cdot M_P \cdot m_O}{R_P} = 0 - \frac{G \cdot M_P \cdot m_O}{r}$$

Operando: $$\frac{v^2_{\text{superficie}} \cdot R_P - 2 \cdot G \cdot M_P}{2 \cdot R_P} = -\frac{G \cdot M_P}{r} \Rightarrow r = \frac{-2 \cdot R_P \cdot G \cdot M_P}{v^2_{\text{superficie}} \cdot R_P - 2 \cdot G \cdot M_P}$$

Sustituyendo: $$r = \frac{-2 \cdot 2 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{23}\ \text{kg}}{(2 \cdot 10^3\ \text{m/s})^2 \cdot 2 \cdot 10^6\ \text{m} - 2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{23}\ \text{kg}} = 3 \cdot 10^6\ \text{m}$$

Con lo que la altura que alcanza es: $h = r - R = 3 \cdot 10^6\ \text{m} - 2 \cdot 10^6\ \text{m} = 1 \cdot 10^6\ \text{m}$

**12. Se lanza un proyectil verticalmente desde la superficie de la Tierra, con una velocidad inicial de 3 km/s. ¿Qué altura máxima alcanzará? Calcula la velocidad orbital que habrá que comunicarle a esa altura para que describa una órbita circular. $R_T$ = 6 370 km**

Si se prescinde del rozamiento con el aire, la única fuerza que actúa sobre el objeto es la atracción gravitatoria, por lo que la energía mecánica se conserva.

$\Delta E_c + \Delta E_p = 0\ \Psi\ E_{c,\ \text{superficie}} + E_{p,\ \text{superficie}} = E_{c,\ \text{final}} + E_{p,\ \text{final}}$

La energía cinética y potencial en la superficie de la Tierra se transforman en energía potencial gravitatoria asociada a su posición final.

$$\frac{1}{2} m_s \cdot v^2_{\text{superficie}} - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T} = 0 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T + h}\ 0$$

Operando: $$\frac{v^2_{\text{superficie}} \cdot R_T - 2 \cdot G \cdot M_T}{2 \cdot R_T} = - \frac{G \cdot M_T}{R_T + h}\ 0\ \Psi\ \frac{R_T + h}{G \cdot M_T} = \frac{2 \cdot R_T}{2 \cdot G \cdot M_T - v^2_{\text{superficie}} \cdot R_T}\ 0$$

Despejando: $$h = \frac{2 \cdot G \cdot M_T \cdot R_T}{2 \cdot G \cdot M_T - v^2_{\text{superficie}} \cdot R_T} - R_T = \frac{v^2_{\text{superficie}} - R_T^2}{2 \cdot G \cdot M_T - v^2_{\text{superficie}} \cdot R_T}\ 0$$

Como: $g_0 = \dfrac{G \cdot M_T}{R_T^2}$ 0, se tiene que: $$h = \frac{v^2_{\text{superficie}}}{2 \cdot g_0 - \dfrac{v^2_{\text{superficie}}}{R_T}} = \frac{v^2_{\text{superficie}} \cdot R_T}{2 \cdot g_0 \cdot R_T - v^2_{\text{superficie}}}\ 0$$

Sustituyendo: $$h = \frac{(3\ 000\ \text{m/s})^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}}{2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} - (3\ 000\ \text{m/s})^2}\ 0 = 4{,}95 \cdot 10^5\ \text{m}$$

La interacción gravitatoria entre la Tierra y el satélite es la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita. Aplicando al satélite la Segunda ley de Newton, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n;\ G \frac{M_{\text{planeta}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r^2} = m_{\text{satélite}} \cdot \frac{v^2}{r}$$

Despejando: $$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{planeta}}}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})^2}{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 4{,}95 \cdot 10^5\ \text{m}}} = 7{,}6 \cdot 10^3\ \text{m}$$

**13. Si la Tierra redujese su radio a la mitad conservando su masa, ) cuánto valdría la velocidad de escape desde su superficie?**
Un cuerpo queda desligado del campo gravitatorio creado por otro cuerpo cuando su energía mecánica asociada a una posición es como mínimo igual a cero. En este caso llega hasta el infinito, en el que la energía potencial es cero, con velocidad nula.

La energía mecánica asociada a un cuerpo en la superficie de un planeta es igual a la suma de la energía cinética y potencial. Llamando $v_e$ a la velocidad comunicada para que se escape del planeta, tenemos:

$$E_{mecánica} = E_{cinética} + E_{potencial} = 0;\ \frac{1}{2} m_S\, v_e^2 - \frac{G\, m_S\, m_{planeta}}{R_{planeta}} = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G\, m_{planeta}}{R_{planeta}}}$$

Y para la Tierra: $v_{e,Tierra} = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R_T}$

Si ahora se reduce el radio de la Tierra a la mitad conservado su masa, entonces la velocidad de escape desde su superficie se es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m_{planeta}}{R_{planeta}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m_T}{R_T/2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot G \cdot m_T}{R_T}} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot g_{0,T} \cdot R_T} = \sqrt{2} \cdot v_{e,T}$$

**14. Desde la superficie de la Tierra se lanza verticalmente una partícula con una velocidad igual al doble de su velocidad de escape. ¿Cuál será su velocidad cuando esté muy lejos de la Tierra?**
En primer lugar se determina la velocidad de escape en la superficie de la Tierra. En ese punto la energía mecánica asociada a la partícula es igual a cero.

$$\frac{1}{2} m \cdot v_{escape}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} = 0 \Rightarrow v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G M_T}{R_T}} = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R_T}$$

Por lo que la velocidad inicial de la partícula es: $v = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R_T}$

Una vez lanzada la partícula solamente actúa la interacción gravitatoria, por lo que la energía mecánica se conserva durante su desplazamiento. En puntos muy alejados de la Tierra, la energía potencial gravitatoria asociada a ella es igual a cero, por lo que aplicando la energía de conservación de la energía mecánica entre la superficie de la Tierra y un punto muy alejado, resulta:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0;\ \frac{1}{2} m \cdot v_{inicial}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} = \frac{1}{2} m \cdot v_{final}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_\infty}$$

Sustituyendo la velocidad inicial por su valor y operando, resulta que:

$$\frac{1}{2} 4 \cdot 2 g_0 \cdot R_T - g_0 \cdot R_T = \frac{1}{2} v_{final}^2 - 0 \Rightarrow v_{final} = \sqrt{6 \cdot g_0 \cdot R_T} = \sqrt{6 \cdot 9{,}8\,m/s^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\,m} = 19400\ km$$

**15. Desde la superficie de la Luna se lanza un objeto con una velocidad igual a su velocidad de escape, calcula a qué distancia del centro de la Luna se ha reducido su velocidad a la mitad. $R_{Luna}$ = 1 738 km; $g_{0,\,Luna}$ = 1,62 m/s$^2$.**
Para que un objeto se escape de la atracción lunar la energía mecánica en su superficie tiene que ser igual a cero.

$$E_{c,\,superficie} + E_{p,\,superficie} = 0;\ \frac{1}{2} m_{objeto} \cdot v_{escape}^2 - \frac{G \cdot M_{Luna} \cdot m_{objeto}}{R_{Luna}} = 0$$

Despejando: $v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{Luna}}{R_{Luna}}} = \sqrt{2 \cdot g_{0,Luna} \cdot R_{Luna}}$

En el movimiento del objeto desde la superficie de la Luna hasta el punto P que dista una distancia r del centro de la Luna en el que la velocidad del objeto se reduce a la mitad se conserva la energía mecánica asociada al objeto.

$E_{c,\ supercie} + E_{p,\ superficie} = E_{c,\ posición} + E_{p,\ posición}$

$$\frac{1}{2} m_{objeto} \cdot v^2_{superficie} - \frac{G \cdot M_{Luna} \cdot m_{objeto}}{R_{Luna}} = \frac{1}{2} m_{objeto} \cdot v^2_{posición} - \frac{G \cdot M_{Luna} \cdot m_{objeto}}{r}$$

La velocidad en la superficie es la de escape y la velocidad en la posición r es la mitad de la anterior, por tanto:

$$\frac{1}{2}\left(v^2_{escape} - \frac{v^2_{escape}}{4}\right) = G \cdot M_{Luna} \cdot \left(\frac{1}{R_{Luna}} - \frac{1}{r}\right);\ \frac{3}{8} v^2_{escape} = G \cdot M_{Luna} \cdot \left(\frac{1}{R_{Luna}} - \frac{1}{r}\right)$$

Sustituyendo la velocidad de escape por su valor:

$$\frac{3}{8}\frac{2 \cdot G \cdot M_{Luna}}{R_{Luna}} = G \cdot M_{Luna} \cdot \left(\frac{1}{R_{Luna}} - \frac{1}{r}\right);\ \frac{3}{4 \cdot R_{Luna}} = \frac{1}{R_{Luna}} - \frac{1}{r};\ \frac{1}{r} = \frac{1}{4 \cdot R_{Luna}}$$

Por tanto la distancia pedida es: $r = 4 \cdot R_{Luna}$

**16. Un satélite artificial está situado en una órbita circular en torno a un planeta. ¿Por qué valor hay que multiplicar su velocidad para que se escape de la atracción gravitatoria en esa posición?**

La interacción gravitatoria entre la Tierra y el satélite es la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita. Aplicando al satélite la Segunda ley de Newton, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n;\ G\frac{M_{planeta} \cdot m_{satélite}}{r^2} = m_{satélite} \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{planeta}}{r}}$$

Que es la velocidad del satélite cuando la órbita es estable.

Para que el satélite se escape desde esa posición se tiene que cumplir que su energía mecánica es igual a cero.

$$E_{mecánica} = E_{cinética} + E_{potencial} = \frac{1}{2} m \cdot v^2_{escape} - \frac{G \cdot M_{Planeta} \cdot m}{r} = 0 \Rightarrow v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{Planeta}}{r}}$$

Comparando los dos valores de la velocidad: $\dfrac{v_{escape}}{v} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{2 \cdot G \cdot M_{Planeta}}{r}}}{\sqrt{\dfrac{G \cdot M_{Planeta}}{r}}} = \sqrt{2} \Rightarrow v_{escape} = \sqrt{2} \cdot v$

Si se multiplica la velocidad orbitad por $\sqrt{2}$ el satélite se escapa desde su posición.

**17. El radio de un planeta es la tercera parte del radio terrestre y su masa la mitad. Calcule la gravedad en su superficie y la velocidad de escape del planeta, en función de sus correspondientes valores terrestres.**

La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta es:

$$g = \frac{G \cdot m}{R^2} = \frac{G \cdot \dfrac{M_{Tierra}}{2}}{\left(\dfrac{R_{Tierra}}{3}\right)^2} = \frac{9}{2}\frac{G \cdot M_{Tierra}}{R^2_{Tierra}} = \frac{9}{2} g_{0,\ Tierra}$$

Se denomina velocidad de escape a la que hace igual a cero a la energía mecánica de una partícula situada en la superficie del planeta.

$$E_{mecánica} = E_{cinética} + E_{potencial} = \frac{1}{2} m\cdot v^2 - \frac{G\cdot M_{Planeta}\cdot m}{R_{Planeta}} = 0 \Rightarrow v_{escape} = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_{Planeta}}{R_{Planeta}}}$$

La velocidad de escape en la superficie de la Tierra es:

$$v_{escape,Tierra} = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_{Tierra}}{R_{Tierra}}} = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_{Tierra}\cdot R_{Tierra}}{R^2_{Tierra}}} = \sqrt{2\cdot g_{0,\,Tierra}\cdot R_{Tierra}}$$

Y la velocidad de escape en el planeta es:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_{Planeta}}{R_{Planeta}}} = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot \frac{M_{Tierra}}{2}}{\frac{R_{Tierra}}{3}}} = \sqrt{\frac{3\cdot G\cdot M_{Tierra}}{R_{Tierra}}} = \sqrt{\frac{3\cdot G\cdot M_{Tierra}\cdot R_{Tierra}}{R^2_{Tierra}}} = \sqrt{3\cdot g_{0,\,Tierra}\cdot R_{Tierra}}$$

Y en función de la velocidad de escape de la Tierra: $v_{escape} = \sqrt{3\cdot\frac{2}{2}\cdot g_{0,\,Tierra}\cdot R_{Tierra}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot v_{escape,\,Tierra}$

**18. Un satélite de 350 kg de masa se encuentra en una órbita circular de 15000 km de radio alrededor de la Tierra. Calcula la energía del satélite en la órbita. $R_T$ = 6370 km**

La interacción gravitatoria entre la Tierra y el satélite es la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita. Aplicando al satélite la Segunda ley de Newton, se tiene:

$$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}_n;\ G\,\frac{M_{Tierra}\cdot m_{satélite}}{r^2} = m_{satélite}\cdot\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G\cdot M_{Tierra}}{r}}$$

El satélite en su órbita tiene energía cinética y energía potencial gravitatoria.

$$E_{órbita} = E_{p,\,órbita} + E_{c,\,órbita} = -\frac{G\cdot M_{Tierra}\cdot m_{satélite}}{r} + \frac{1}{2}\,m_{satélite}\cdot v^2_{órbita}$$

Sustituyendo la velocidad orbital por su valor:

$$E_{orbita} = -\frac{G\cdot M_{Tierra}\cdot m_{satélite}}{r} + \frac{1}{2}\cdot m_{satélite}\cdot\frac{G\cdot M_{Tierra}}{r} = -\frac{1}{2}\,\frac{G\cdot M_{Tierra}\cdot m_{satélite}}{r}$$

Operando y sustituyendo:

$$E_{órbita} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{g_0\cdot R^2_{tierra}\cdot m_{satélite}}{r} = -\frac{1}{2}\,9{,}8\,m/s^2\cdot(6{,}37\cdot10^6\,m)^2\,\frac{350\,kg}{15000\cdot 10^3\,m} = -4{,}64\cdot10^9\,J$$

**19. Una estación espacial se encuentra en órbita circular alrededor de la Tierra. Su masa es de 10000 kg y su velocidad de 4,2 km/s. Calcula el radio de la órbita y la energía potencial gravitatoria de la estación. $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg; $R_T$ = 6370 km**

La interacción gravitatoria entre la Tierra y el satélite es la fuerza centrípeta que mantiene a la estación en su órbita. Aplicando al satélite la Segunda ley de Newton, se tiene:

$$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}_n;\ G\,\frac{M_{Tierra}\cdot m_{satélite}}{r^2} = m_{satélite}\cdot\frac{v^2}{r}$$

Despejando: $r = \frac{G\cdot M_T}{v^2} = \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2\cdot 5{,}98\cdot10^{24}\,kg}{(4{,}2\cdot10^3\,m/s)^2} = 2{,}26\cdot10^7\,m$

La energía potencial gravitatoria asociada a la posición de la nave es:

$$E_p = -\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r} = -\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2\cdot5{,}98\cdot10^{24}\,kg\cdot10000\,kg}{2{,}26\cdot10^7\,m} = -1{,}76\cdot10^{11}\,J$$

**20. Para observar la Tierra, un satélite de 1000 kg de masa, que está inicialmente en una órbita circular a 630 km de la superficie, pasa a otra que está solo a 130 km. Calcula el cociente entre los períodos de revolución en cada órbita. El cambio en la energía potencial del satélite debido al campo gravitatorio terrestre. La energía potencial, ¿aumenta o disminuye? $R_T$ = 6370 km; $M_T$ = 6 · $10^{24}$ kg**

Aplicando la tercera ley de Kepler a las dos órbitas del satélite:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3}=\frac{T_2^2}{r_2^3};\ \frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{r_1^3}{r_2^3}}=\sqrt{\frac{(6370\cdot 10^3\ \text{m}+630\cdot 10^3)^3}{(6370\cdot 10^3\ \text{m}+130\cdot 10^3)^3}}=1{,}12$$

La energía potencial gravitatoria en las respectivas órbitas es:

$$E_{p1}=-\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r_1}=-\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2\cdot 6\cdot 10^{24}\ \text{kg}\cdot 1000\text{kg}}{6370\cdot 10^3\text{m}+630\cdot 10^3\ \text{m}}=-5{,}72\cdot 10^{10}\ \text{J}$$

$$E_{p2}=-\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r_2}=-\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2\cdot 6\cdot 10^{24}\ \text{kg}\cdot 1000\text{kg}}{6370\cdot 10^3\text{m}+130\cdot 10^3\ \text{m}}=-6{,}16\cdot 10^{10}\ \text{J}$$

La variación de la energía potencial gravitatoria es:
$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}$ = - 6,16 · $10^{10}$ J + 5,72 · $10^{10}$ J = - 4,4 · $10^{9}$ J

La variación es negativa ya que la energía potencial gravitatoria disminuye según se acerca el objeto a la superficie de la Tierra.

**21. ¿Qué relación existe entre las energías cinética y potencial gravitatoria de una satélite que gira en una órbita circular en torno a un planeta? ¿Cuál es la relación entre la energía potencial gravitatoria y la energía mecánica?**

La velocidad de un satélite que describe una órbita circular de radio r, alrededor de un planeta tal como la Tierra, se determina aplicando la segunda ley de Newton.

$$\Sigma\vec{F}=m_{satélite}\cdot\vec{a}_n;\ \frac{G\cdot M_{planeta}\cdot m_{satélite}}{r^2}=m_{satélite}\cdot\frac{v_{órbita}^2}{r}\ \Rightarrow\ v_{órbita}=\sqrt{\frac{G\cdot M_{planeta}}{r}}$$

La energía cinética del satélite es: $E_c=\frac{1}{2}\cdot m_{satélite}\cdot v^2=\frac{1}{2}m_{satélite}\frac{G\cdot M_{planeta}}{r}$

La energía potencial gravitatoria en la posición de la órbita es: $E_p=-\frac{G\cdot M_{planeta}\cdot m_{satélite}}{r}$

La energía cinética siempre tiene el signo positivo, mientras que la energía potencial gravitatoria tiene siempre signo negativo.

Dividiendo ambas expresiones, se tiene:

$$\frac{E_c}{E_p}=\frac{\frac{1}{2}m_{satélite}\frac{G\cdot M_{planeta}}{r}}{-\frac{G\cdot M_{planeta}\cdot m_{satélite}}{r}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow E_c=-\frac{1}{2}E_p$$

La energía mecánica es igual a la suma de la energía cinética y la potencial gravitatoria.

$$E_{Total}=E_c+E_p=-\frac{1}{2}E_p+E_p=\frac{1}{2}E_p$$

**22. Un pequeño satélite de 1500 kg de masa, gira alrededor de la Luna orbitando en una circunferencia de 3 veces el radio de la Luna. Si la masa de la Luna es de 7,35 · $10^{22}$ kg y su radio 1740 km, calcula la energía mecánica asociada al satélite en su órbita. ¿Cuánto vale la velocidad de escape desde la superficie de la Luna? La masa de la Luna es 7,35· $10^{22}$ kg y su radio 1740 km.**

a) Aplicando la ley de Gravitación Universal y la segunda ley de Newton al movimiento circular, se tiene, con M la masa de la Luna:

$$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}_n;\ \frac{G\cdot M\cdot m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{G\cdot M}{r} = v^2$$

Utilizando la relación entre la velocidad y el período: $v = \frac{2\cdot\pi\cdot r}{T}$,

$$T = 2\cdot\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\cdot M}} = 2\cdot\pi\sqrt{\frac{(3\cdot R_L)^3}{G\cdot M_{Luna}}} = 6\cdot\pi\sqrt{\frac{3\cdot R_{Luna}^3}{G\cdot M_{Luna}}}$$

La energía mecánica asociada al satélite en su posición, energía de enlace, es igual a la suma de su energía cinética y de su energía potencial gravitatoria.

$$E_{mecánica} = E_{cinética} + E_{potencial} = \frac{1}{2}m\cdot v^2 - \frac{G\cdot M\cdot m}{r} = \frac{1}{2}m\cdot\frac{G\cdot M}{r} - \frac{G\cdot M\cdot m}{r} = -\frac{1}{2}\frac{G\cdot M\cdot m}{r}$$

Sustituyendo: $E_{mecánica} = -\frac{1}{6}\frac{G\cdot M_{Luna}\cdot m_{satelite}}{R_{Luna}}$

Se denomina velocidad de escape a la que hace igual a cero a la energía mecánica de una partícula situada en la superficie de la Luna.

$$\frac{1}{2}m\cdot v_{escape}^2 - \frac{G\cdot M\cdot m}{r} = 0 \Rightarrow v_{escape} = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_{Luna}}{R_{Luna}}}$$

**23. Un satélite de masa 200 kg se encuentra en órbita circular de radio r alrededor del centro de la Tierra. Si la energía potencial a esa distancia es de –2 · $10^9$ J. Calcular la velocidad del satélite. Datos: $R_T$ = 6 400 km.**

La energía potencial gravitatoria de un satélite a una distancia r del centro de la Tierra es:

$$E_p = -\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r} = -\frac{G\cdot M_T\cdot m\cdot R_T^2}{r\cdot R_T^2} = -\frac{g\cdot m\cdot R_T^2}{r}$$

Despejando: $r = -\frac{g\cdot m\cdot R_T^2}{E_p} = -\frac{9{,}8\,m/s^2\cdot 200\,kg\cdot(6400\cdot 10^3\,m)^2}{-2\cdot 10^9\,J} = 4{,}0\cdot 10^7\,m$

La velocidad de un satélite que describe una órbita circular de radio r, alrededor de un planeta tal como la Tierra, se determina aplicando la segunda ley de Newton.

$$\Sigma\vec{F} = m_{satélite}\cdot\vec{a}_n;\ \frac{G\cdot M_T\cdot m_{satélite}}{r^2} = m_{satélite}\cdot\frac{v_{órbita}^2}{r} \Rightarrow v_{órbita} = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{r}}$$

Operando: $v_{órbita} = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G\cdot M_T\cdot R_T^2}{r\cdot R_T^2}} = \sqrt{\frac{g\cdot R_T^2}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}8\,m/s^2\cdot(6400\cdot 10^3\,m)^2}{4{,}0\cdot 10^7\,m}} = 3{,}17\cdot 10^3\,m/s$

**24. Se desea poner en órbita un satélite geoestacionario de 25 kg. Calcula el radio de la órbita y las energías cinética, potencial y mecánica del satélite en la órbita. $M_T$ = 5,98 · 10$^{24}$ kg**

Se denomina órbita geoestacionaria a la órbita en la que el período de traslación de un satélite es igual al período de rotación de la Tierra.
T = 24 h = 8,6 · 10$^4$ s
Estos satélites mantienen su posición relativa respecto de un punto de la Tierra, por lo que se utilizan como repetidores de las señales electromagnéticas en comunicación.
Aplicando la segunda ley de Newton a la órbita, de radio r, y como: $v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$ y $g_0=\frac{G\cdot m_{Tierra}}{R^2_{Tierra}}$, se tiene que:

$$\Sigma\vec{F}=m\cdot\vec{a}_n;\ G\frac{m_{Tierra}\cdot m}{r^2}=m\cdot\frac{v^2}{r}\Rightarrow G\frac{m_{Tierra}}{r}=\frac{4\pi^2\cdot r^2}{T^2}$$

Despejando: $r^3=\frac{G\cdot m_{Tierra}\cdot T^2}{4\cdot\pi^2}\Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{g_0\cdot R^2_{Tierra}\cdot T^2}{4\cdot\pi^2}}$

Sustituyendo se tiene que el radio de la órbita es:

$$r=\sqrt[3]{\frac{9{,}8\,m/s^2\cdot(6\ 370\cdot10^3\,m)^2\cdot(8{,}64\cdot10^4\,s)^2}{4\cdot\pi^2}}=4{,}22\ \text{A}\ 10^7\ m=42\ 200\ km$$

El valor de la energía cinética es:

$$E_c=\frac{1}{2}m\cdot v^2=\frac{1}{2}m\cdot\frac{G\cdot M_T}{r}=\frac{1}{2}50\,kg\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2\cdot5{,}98\cdot10^{24}\,kg}{42200\cdot10^3\,m}=1{,}18\cdot10^8\ J$$

Y el de la energía potencial gravitatoria es:

$$E_p=-\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r}=-\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2\cdot5{,}98\cdot10^{24}\,kg\cdot50\,kg}{42200\cdot10^3\,m}=-2{,}36\cdot10^8\ J$$

La energía mecánica es igual a la suma de la energía cinética y de la potencial gravitatoria.
$E_{total}=E_c+E_p$ = 1,18 · 10$^8$ J – 2,36 · 10$^8$ J = - 1,18 · 10$^8$ J
Que tiene signo negativo ya que el satélite está enlazado con la Tierra.

**25. Se desea poner en órbita circular un satélite meteorológico de 1000 kg de masa a una altura de 300 km sobre la superficie terrestre. Calcula la velocidad, el periodo y aceleración que debe tener en la órbita. ¿Qué trabajo hay que realiza para poner en órbita el satélite?**
La interacción gravitatoria entre la Tierra y el satélite es la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita. Aplicando al satélite la Segunda ley de Newton, se tiene:

$$\Sigma\vec{F}=m\cdot\vec{a}_n;\ G\frac{M_{Tierra}\cdot m_{satélite}}{r^2}=m_{satélite}\cdot\frac{v^2}{r}$$

Despejando y como $g_0=\frac{G\cdot M_{Tierra}}{R^2_{Tierra}}$, se tiene que la velocidad orbital es:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M_{Tierra}}{r}}=\sqrt{\frac{g_0\cdot R^2_{Tierra}}{r}}=\sqrt{\frac{9{,}8\,m/s^2\cdot(6{,}37\cdot10^6\,m)^2}{6{,}37\cdot10^6\,m+300\cdot10^3\,m}}=7{,}72\cdot10^3\,m/s$$

El período de revolución es: $T=\frac{2\cdot\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot\pi\cdot(6{,}37\cdot10^6\,m+300\cdot10^3\,m)}{7{,}72\cdot10^3\,m/s}=5\ 429\,s=1{,}51\,horas$

La aceleración normal en la órbita es: $a=\frac{v^2}{r}=\frac{(7{,}72\cdot10^3\,m/s)^2}{6{,}37\cdot10^6\,m+300\cdot10^3\,m}=8{,}94\,m/s^2$

Para calcular el trabajo: aplicando la ley de la conservación de la energía entre la superficie de la Tierra y la órbita del satélite, se tiene que el trabajo realizado por los motores es igual a la variación de la energía mecánica del satélite.

$W_{realizado} = \Delta E_c + \Delta E_p = E_{mecánica\ final} - E_{mecánica\ inicial} = E_{órbita} - E_{superficie}$

La energía asociada al satélite en órbita es:

$$E_{órbita} = E_{p,\,órbita} + E_{c,\,órbita} = -\frac{G \cdot M_{Tierra} \cdot m_{satélite}}{r} + \frac{1}{2} m_{satélite} \cdot v^2_{orbita}$$

Sustituyendo la velocidad orbital por su valor: $v^2_{orbital} = \frac{G \cdot M_{Tierra}}{r}$

$$E_{orbita} = -\frac{G \cdot M_{Tierra} \cdot m_{satélite}}{r} + \frac{1}{2} \cdot m_{satélite} \cdot \frac{G \cdot M_{Tierra}}{r} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M_{Tierra} \cdot m_{satélite}}{r}$$

Operando y sustituyendo:

$$E_{órbita} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_0 \cdot R^2_{tierra} \cdot m_{satélite}}{r} = -\frac{1}{2} 9{,}8\ m/s^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ m)^2 \frac{1000\ kg}{6{,}37 \cdot 10^6\ m + 300 \cdot 10^3\ m} = -2{,}98 \cdot 10^{10}\ J$$

Si se considera que el satélite se lanza siguiendo la vertical, sin aprovechar el movimiento de rotación de la Tierra, la velocidad inicial en la superficie de la Tierra es igual a cero y la energía asociada a la posición del satélite sobre la superficie de la Tierra es solamente potencial gravitatoria.

$$E_{superficie} = E_{p,superficie} = -\frac{G M_{Tierra} \cdot m_{satélite}}{R_{Tierra}} = -g_0 \cdot R_{Tierra} \cdot m_{satélite}$$

Sustituyendo: $E_{superficie} = -9{,}8\ m/s^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ m \cdot 1000\ kg = -6{,}24 \cdot 10^{10}\ J$

Por tanto, la energía transformada para poner al satélite en órbita es:

$$W_{realizado} = \Delta E = E_{órbita} - E_{superficie} = -2{,}98 \cdot 10^{10}\ J - (-6{,}24 \cdot 10^{10}\ J) = 3{,}26 \cdot 10^{10}\ J$$

**26. La Estación Espacial Internacional (ISS) describe alrededor de la Tierra una órbita prácticamente circular a una altura h = 390 km sobre la superficie terrestre, siendo su masa m = 415 toneladas. a) Calcule su período de rotación en minutos así como la velocidad con la que se desplaza. b) ¿Qué energía es necesitaría para llevarla desde su órbita actual a otra a una altura el doble? ¿Cuál sería el período de rotación en esa nueva órbita?**

a) El radio de la órbita es: $r = R_T + 390\ km = 6{,}37 \cdot 10^6\ m + 390 \cdot 10^3\ m = 6{,}76 \cdot 10^6\ m$

Aplicando la segunda ley de Newton y considerando a la órbita circular, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m_{ISS} \cdot \vec{a}_n ;\ G\frac{m_T \cdot m_{ISS}}{r^2} = m_{ISS} \frac{v^2}{r} \Rightarrow G\frac{m_T}{r} = v^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando y como $g_0 = \frac{G \cdot m_T}{R_T^2}$, resulta que la velocidad orbital es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}} = R_T \sqrt{\frac{g_0}{r}} = 6{,}37 \cdot 10^6\ m \sqrt{\frac{9{,}8\ m/s^2}{6{,}76 \cdot 10^6\ m}} = 7{,}67 \cdot 10^3\ m/s$$

De igual forma, se tiene que el período de rotación es:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_T}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{g_0 \cdot R_T^2}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{(6{,}76 \cdot 10^6\ m)^3}{9{,}8\ m/s^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ m)^2}} = 5{,}54 \cdot 10^3\ s = 92\ min$$

b) La energía asociada a un satélite en órbita es igual a su energía de enlace, es decir, a la suma de la energía cinética y potencial.

$$E_{órbita} = E_c + E_p = ½ \cdot m_{ISS} \cdot v^2 - \frac{G \cdot m_T \cdot m_{ISS}}{r}$$

Sustituyendo a la velocidad orbital por $v^2 = \frac{G \cdot m_T}{r}$, y como $g_0 = \frac{G \cdot m_T}{R_T^2}$ se tiene que:

$$E_{órbita} = \frac{1}{2} m_{ISS} \cdot \frac{G \cdot m_T}{r} - \frac{G \cdot m_T \cdot m_{ISS}}{r} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot m_T \cdot m_{ISS}}{r} = -\frac{1}{2} \cdot g_0 \cdot R_T^2 \frac{m_{ISS}}{r}$$

Al trasladar a un satélite desde una órbita de radio $r_1$ a otra de radio $r_2$, se cumple que:
$W_{\text{cambio de órbita}} = \Delta E = E_{\text{órbita 2}} - E_{\text{órbita 1}} =$

$$-\frac{1}{2}\cdot g_0\cdot R_T^2\,\frac{m_{ISS}}{r_2}-\left(-\frac{1}{2}\cdot g_0\cdot R_T^2\,\frac{m_{ISS}}{r_1}\right)=\frac{1}{2}\cdot g_0\cdot R_T^2\cdot m_{ISS}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

Los radios de las dos órbitas son:
$r_1 = R_T + 390$ km $= 6{,}37 \cdot 10^6$ m $+ 390 \cdot 10^3$ m $= 6{,}76 \cdot 10^6$ m
$r_2 = R_T + 2 \cdot 390$ km $= 6{,}37 \cdot 10^6$ m $+ 2 \cdot 390 \cdot 10^3$ m $= 7{,}15 \cdot 10^6$ m

Sustituyendo, la energía involucrada en el proceso es:

$$W_{cambioórbita}=\frac{1}{2}\cdot 9{,}8\,m/s^2\cdot\left(6{,}37\cdot 10^6\,m\right)^2\cdot 415\cdot 10^3\,kg\left(\frac{1}{6{,}76\cdot 10^6\,m}-\frac{1}{7{,}15\cdot 10^6\,m}\right) = 6{,}7 \cdot 10^{11}\ \text{J}$$

Lógicamente de signo positivo, la energía mecánica a asociada a una órbita es mayor cuanto más externa es.
El período es la nueva órbita es:

$$T = 2\cdot\pi\sqrt{\frac{r^3}{g_0\cdot R_T^2}} = 2\cdot\pi\sqrt{\frac{(7{,}15\cdot 10^6\ m)^3}{9{,}8\ m/s^2\cdot(6{,}37\cdot 10^6\ m)^2}} = 6{,}02 \cdot 10^3\ \text{s} = 100\ \text{min}$$

Cuanto más alejada está la órbita más tiempo se tarda en recorrerla, de acuerdo con la tercera ley de Kepler.

**27. La aceleración de la gravedad en la superficie de Marte es 3,7 m/s$^2$. El radio de la Tierra es 6370 km y la masa de Marte es un 11% la de la Tierra. Calcula el radio de Marte y la velocidad de escape desde su superficie.**

La aceleración de la gravedad (intensidad del campo gravitatorio) en la superficie terrestre es:

$$g_T = \frac{G\cdot M_T}{R_T^2} = 9{,}8\ m/s^2$$

Y en la superficie de Marte: $g_M = \dfrac{G\cdot M_M}{R_M^2}$

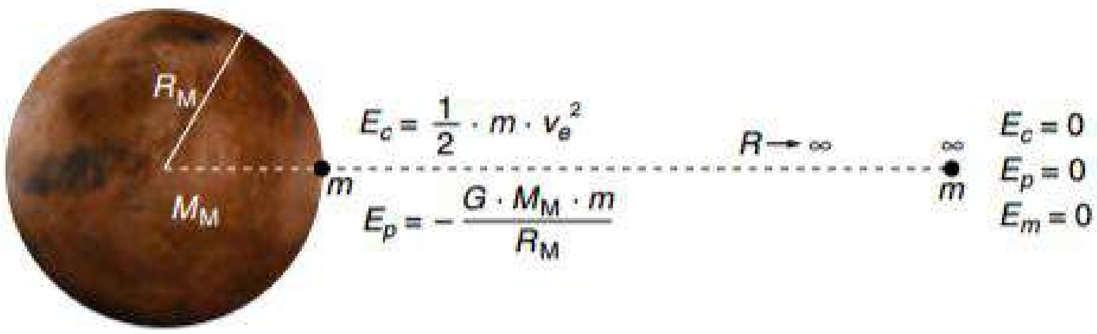
Si dividimos ambas expresiones entre sí, despejamos el radio de Marte y sustituimos los datos de que disponemos, se obtiene:

$$\frac{\dfrac{G\cdot M_T}{R_T^2}}{\dfrac{G\cdot 0{,}11 M_T}{R_M^2}} = \frac{9{,}8}{3{,}7}\quad \text{de donde: } R_M = \sqrt{\frac{9{,}8\cdot R_T^2\cdot 0{,}11}{3{,}7}}$$

Como $R_T = 6370 \cdot 10^3$ m, entonces $R_M = 3438{,}3 \cdot 10^3$ m

La velocidad de escape es la velocidad que hay que comunicar a un objeto para que pueda salir de la influencia gravitatoria de un planeta.

En la superficie del planeta, el objeto tiene energía potencial negativa. Para que escape, hay que transmitirle una energía cinética suficiente para que la energía mecánica en la superficie del planeta sea igual a la energía mecánica en el infinito:




Lo que se corresponde con la siguiente expresión: $(E_m)_{sup} = (E_m)_4$ . Por tanto:

$$-G\frac{M_M \cdot m}{R_M} + \frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0$$

De donde la expresión de la velocidad de escape resulta: $v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M_M}{R_M}}$

Teniendo en cuenta ahora que: $g_M = \frac{G \cdot M_M}{R_M^2} \Rightarrow G \cdot M_M = g_M\, R_M^2$

Al sustituir en la expresión de la velocidad de escape: $v_e = \sqrt{2\,g_M\,R_M}$ , con lo que:

$$v_e = \sqrt{2 \cdot 3{,}7\ m/s^2 \cdot 3438{,}3 \cdot 10^3\ m} = 5044{,}2\ m/s$$

## UNIDAD 2: Movimiento ondulatorio

### CUESTIONES INICIALES-PÁG. 41

**1. Al agitar una cuerda por un extremo se observa que una perturbación se propaga a lo largo de la misma. ¿De qué forma el extremo de la cuerda contagia su movimiento a toda ella?**
La cuerda es un medio continuo, por lo que al agitarla cada punto está sometido a una tensión y arrastra al que tiene al lado.

**2. ¿Crees que cuando levantamos la voz, nuestras palabras llegan antes a nuestros interlocutores que si hablamos más bajo?**
No, la velocidad de propagación del sonido no depende de lo intenso que éste sea.

**3. Al golpear un objeto se escucha un sonido si se está cerca de él. ¿Por qué no se oye nada a partir de una cierta distancia?**
Al vibrar un objeto transmite energía al medio que le rodea en las tres direcciones. Al avanzar la onda, deben ponerse más partículas en movimiento por lo que se atenúa y al cabo de una cierta distancia no tiene la suficiente amplitud como para ser escuchado.

### ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 70

**1. Una onda transversal, de 6 cm de amplitud, se propaga con una velocidad de 2 m/s y una frecuencia de 4 Hz, hacia la derecha del observador. En el instante inicial, el origen de coordenadas está situado a + 6 cm de la posición central de vibración. Deduce la ecuación general del movimiento y determina la posición de un punto situado a 1 m del origen en el instante t = 2 s. Deduce las expresiones generales de la velocidad y de la aceleración con que vibran las partículas del medio. Calcula la diferencia de fase para una partícula cualquiera entre dos instantes separados por un tiempo de 0,625 s.**
La expresión general de un movimiento ondulatorio es: $y_{x,t} = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$
Como en el instante inicial el origen del sistema de referencia está en la posición más alejada de la central, se tiene que:
$y_{x=0,t=0} = 6\text{ cm} = 6\text{ cm} \cdot \cos(\omega \cdot 0 - k \cdot 0 + \varphi_0)$; $1 = \cos\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$ rad
La frecuencia angular es: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 4 \cdot \pi \cdot 4\text{ Hz} = 8 \cdot \pi$ rad/s
El período es: $T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{4\,\text{Hz}} = 0{,}25\,\text{s}$
La longitud de onda es: $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2\,\text{m/s}}{4\,\text{Hz}} = 0{,}5\,\text{m}$
Y el número de ondas es: $k = \frac{\omega}{v} = \frac{8 \cdot \pi\,\text{rad/s}}{2\,\text{m/s}} = 4 \cdot \pi\,\text{m}^{-1}$
Sustituyendo en la expresión general, la ecuación general del movimiento es:
$y_{x,t} = 0{,}06 \cdot \cos(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x)$

Y la posición del punto considerado en el instante pedido es:
$y_{x=1,t=2} = 0{,}06 \cdot \cos(8 \cdot \pi \cdot 2 - 4 \cdot \pi \cdot 1) = 0{,}06 \cdot \cos(12 \cdot \pi) = 0{,}06$ m

Aplicando las definiciones de velocidad y aceleración, se tienen las expresiones pedidas.
$v = \frac{dy}{dt} = 0{,}06 \cdot 8 \cdot \pi \cdot [-\text{sen}(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x)] = -0{,}48 \cdot \pi \cdot \text{sen}(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x)$ SI
$a = \frac{dv}{dt} = -0{,}48 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \pi \cdot \cos(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x) = -3{,}84 \cdot \pi^2 \cdot \cos(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x)$ SI

Comparando el tiempo transcurrido con el período, encontramos que:

$$\Delta t = 0{,}625\,s = \frac{0{,}625\,s}{0{,}25\,s}T = 2{,}5T$$

Luego los instantes están en oposición de fase.
De otra forma, se llega a la misma conclusión:
$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 8 \cdot \pi \cdot t_2 - 4 \cdot \pi \cdot x - (8 \cdot \pi \cdot t_1 - 4 \cdot \pi \cdot x) = 8 \cdot \pi\,(t_2 - t_1) = 8 \cdot \pi$ rad/s $\cdot$ 0,625 s = 5 $\cdot\pi$ rad

**2. Una onda se propaga por una cuerda según la ecuación: y = 0,2 cos (2 t – 0,1 x), en unidades SI. Calcula la longitud de onda y la velocidad de propagación. Determina el estado de vibración, velocidad y aceleración de una partícula situada en x = 0,2 m en el instante t = 0,5 s.**

a) Comparando la expresión de la onda con la expresión general: $y_{x,\,t} = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$ se tiene para la longitud de onda que:

$$k = \frac{2\cdot\pi}{\lambda} = 0{,}1\,m^{-1} \Rightarrow \lambda = \frac{2\cdot\pi}{0{,}1\,m^{-1}} = 20\cdot\pi\,m$$

Y la velocidad de propagación es: $v = \lambda\cdot\nu = \frac{2\cdot\pi}{k}\frac{\omega}{2\cdot\pi} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\,rad/s}{0{,}1\,m^{-1}} = 20\,m/s$

b) Sustituyendo en la ecuación de la onda se tiene que la elongación de la partícula en ese instante es:
$y_{x,\,t} = 0{,}2 \cdot \cos(2 \cdot t - 0{,}1 \cdot x) \rightarrow y = 0{,}2 \cdot \cos(2 \cdot 0{,}5 - 0{,}1 \cdot 0{,}2) = 0{,}11$ m
Aplicando la definición de velocidad de vibración:

$$v_{x,\,t} = \frac{dy}{dt} = -0{,}2 \cdot 2 \cdot \text{sen}\,(2 \cdot t - 0{,}1 \cdot x) \rightarrow v = -0{,}4 \cdot \text{sen}\,(2 \cdot 0{,}5 - 0{,}1 \cdot 0{,}2) = -0{,}33\ m/s$$

Aplicando la definición de aceleración de vibración:

$$a_{x,\,t} = \frac{dv}{dt} = -0{,}4 \cdot 2 \cdot \cos(2 \cdot t - 0{,}1 \cdot x) \rightarrow a = -0{,}8 \cdot \cos(2 \cdot 0{,}5 - 0{,}1 \cdot 0{,}2) = -0{,}446\ m/s^2$$

**3. Una varilla sujeta por un extremo vibra con una frecuencia de 400 Hz y con una amplitud de $10^{-3}$ m. La vibración se propaga en el aire a 340 m/s. Escribe la ecuación de ese movimiento ondulatorio armónico. ¿Qué elongación tendrá un punto que diste del origen 0,85 m al cabo de 3 s de comenzar la vibración?**

La frecuencia angular ω es: $\omega = 2\,\pi\,\nu = 2\,\pi$ A 400 Hz = 800 π rad/s

El número de ondas k es: $k = \frac{2\,\pi}{\lambda} = \frac{2\,\pi}{v\cdot T} = \frac{\omega}{v} = \frac{800\,\pi\,rad/s}{340\,m/s} = \frac{40}{17}\pi\,m^{-1}$

a) La ecuación que describe el movimiento es:

$$y\,(x,t) = A\ \text{sen}\,(\omega \cdot t - k \cdot x) = 10^{-3}\ \text{sen}\,(800\,\pi\,t - \frac{40}{17}\pi\,x) = 10^{-3}\ \text{sen}\ 40\,\pi\,(20\,t - \frac{1}{17}\,x)\ \text{metros}$$

b) Sustituyendo en la ecuación general:

$$y\,(0{,}85\ m;\ 3\ s) = 10^{-3} \cdot \text{sen}\ 40\,\pi\,(20\ \text{A}\ 3 - \frac{1}{17}\,0{,}85) = 10^{-3} \cdot \text{sen}\ 40\,\pi\ \text{A}\ 59{,}95 = 0\ m$$

**4. Una onda armónica en un hilo tiene una amplitud de 0,015 m, una longitud de onda de 2,4 m y una velocidad de 3,5 m/s. Determina el período, la frecuencia y el número de onda. Escribe la función de onda, tomando como sentido positivo del eje X el sentido de propagación de la onda.**

a) El período es: $T = \frac{\lambda}{v} = \frac{2{,}4\,m}{3{,}5\,m/s} = \frac{24}{35}\,s$

La frecuencia es: $\nu = \frac{1}{T} = \frac{35}{24}\,Hz$

El número de onda k es: $k = \frac{2\,\pi}{\lambda} = \frac{2\,\pi}{2{,}4\,m} = \frac{5}{6}\pi\,m^{-1}$

b) La frecuencia angular es: $\omega = 2\,\pi\,\nu = \dfrac{35}{12}\,\pi$ rad/s

La ecuación pedida es: $y\,(x, t) = A$ sen $(\omega\, t - k\, x) = 0{,}015$ A sen $\left(\dfrac{35}{12}\,\pi\, t - \dfrac{5}{6}\,\pi\, x\right)$ m

Operando: $y\,(x, t) = 0{,}015$ A sen $\dfrac{5}{6}\,\pi\left(\dfrac{7}{2}\, t - x\right)$ m

**5. Escribe la ecuación de una onda que se propaga en una cuerda (en sentido negativo del eje X) y que tiene las siguientes características: 0,5 m de amplitud, 250 Hz de frecuencia, 200 m/s de velocidad de propagación y la elongación inicial en el origen es nula. Calcula la máxima velocidad transversal de un punto de la cuerda.**

Si la onda se propaga hacia la izquierda y en el instante inicial la elongación del origen es igual a cero, entonces la ecuación general es: $y_{x,t} = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t + k \cdot x)$

La amplitud es: $A = 0{,}5$ m

La frecuencia angular es: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 250\text{ Hz} = 500 \cdot \pi$ rad/s

El número de ondas es: $k = \dfrac{2\cdot\pi}{\lambda} = \dfrac{2\cdot\pi}{\frac{v}{\nu}} = \dfrac{2\cdot\pi\cdot 250\text{Hz}}{200\text{m/s}} = 2{,}5\cdot\pi\,\text{m}^{-1}$

La ecuación pedida es: $y_{x,t} = 0{,}5\text{ m} \cdot \text{sen}\,(500 \cdot \pi\text{ rad/s} \cdot t + 2{,}5 \cdot \pi\text{ m}^{-1} \cdot x)$

b) La expresión de la velocidad de vibración es: $v_{x,t} = \dfrac{dy_{x,t}}{dt} = A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t + k\cdot x)$

Y su valor máximo es: $v_{máxima} = A \cdot \omega = 0{,}5\text{ m} \cdot 500 \cdot \pi\text{ rad/s} = 250 \cdot \pi$ m/s

**6. Una onda transversal y sinusoidal de la forma: y = A A sen (kx + ωt), tiene una frecuencia de 50 Hz y se desplaza con una velocidad de 0,32 m/s. En el instante inicial la velocidad de la partícula situada en el origen tiene un valor de 4 m/s. Indica el sentido de propagación de la onda a lo largo del eje X. Calcule la amplitud, el número de onda y la frecuencia angular ω.**

a) La onda se propaga hacia el sentido de las X negativas.

b) La frecuencia angular es: $\omega = 2\,\pi$ A $\nu = 2$ A $\pi$ A $50\text{ Hz} = 100\,\pi$ rad/s

El número de ondas k es: $\left.\begin{array}{l} k = \dfrac{2\,\pi}{\lambda} \\ \lambda = \dfrac{v}{\nu} \end{array}\right] \Rightarrow k = \dfrac{2\,\pi\,\nu}{v} = \dfrac{2\,\pi\, 50\text{ Hz}}{0{,}32\text{ m/s}} = 312{,}5\,\pi\,\text{m}^{-1}$

La ecuación que describe la perturbación es: $y = A$ sen $(kx + \omega t) = A$ sen $(312{,}5\,\pi\, x - 100\,\pi\, t)$

La velocidad de vibración de las partículas del medio es:

$v = \dfrac{dy}{dt} = A$ A 100 A $\pi$ A cos $(312{,}5\, x - 100\,\pi\, t)$

A partir de las condiciones de contorno:

$v_{t = 0,\ x = 0} = A$ A 100 A $\pi$ cos $0 = 4$ Ψ $A = 0{,}0127\text{ m} = 12{,}7$ mm

**7. A una playa llegan 15 olas por minuto y se observa que tardan 5 minutos en llegar desde un barco anclado en el mar a 600 m de la playa. Tomando como origen de coordenadas un punto de la playa, escribe la ecuación de onda, en el SI, si la amplitud de las olas es de 50 cm y la fase inicial es nula. Si sobre el agua a una distancia 300 m de la playa existe una boya, que sube y baja según pasan las olas, calcule su velocidad en cualquier instante de tiempo ¿Cuál es su velocidad máxima?**

Se supondrá que las olas del mar se comportan como un movimiento ondulatorio

De los datos iniciales se deducen los valores de la frecuencia y de la velocidad de propagación.

$$\nu = \frac{15\,\text{olas}}{60\,\text{s}} = 0{,}25\,\text{Hz}\ ;\ \ v = \frac{600\,\text{m}}{5\,\text{min}\cdot 60\,\text{s}/\text{min}} = 2\,\text{m/s}$$

a) La frecuencia angular y el número de ondas son:

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}25$ Hz $= 0{,}5 \cdot \pi$ rad/s; $\quad k = \dfrac{2\cdot\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{0{,}5\cdot\pi\,\text{rad/s}}{2\,\text{m/s}} = 0{,}25\cdot\pi\,\text{m}^{-1}$

La expresión de la ecuación de ondas, suponiendo que se propagan hacia la derecha del observador, es:

$y_{x,t} = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) = 0{,}50\ \text{m} \cdot \cos(0{,}5 \cdot \pi\ \text{rad/s} \cdot t - 0{,}25 \cdot \pi\ \text{m}^{-1} \cdot x)$

b) La expresión general de la velocidad de vibración de las partículas del medio es:

$v_{x,t} = \dfrac{dy}{dt} = -\,0{,}25 \cdot \pi\ \text{m/s} \cdot \text{sen}\ (0{,}5 \cdot \pi\ \text{rad/s} \cdot t - 0{,}25 \cdot \pi\ \text{m}^{-1} \cdot x)\ \text{m/s}$

Y la velocidad del punto x = 300 m es:

$v_{x=300,\,t} = -\,0{,}25 \cdot \pi\ \text{m/s} \cdot \text{sen}\ (0{,}5 \cdot \pi\ \text{rad/s} \cdot t - 0{,}25 \cdot \pi\ \text{m}^{-1} \cdot 300\ \text{m})$

$v_{x=300,\,t} = -\,0{,}25 \cdot \pi\ \text{m/s} \cdot \text{sen}\ (0{,}5 \cdot \pi\ \text{rad/s} \cdot t - 75 \cdot \pi)$

Su valor máximo es: $v_{máximo} = 0{,}25 \cdot \pi$ m/s

**8. La ecuación de una onda que se propaga transversalmente por una cuerda expresada en unidades del SI es: $y_{x,\,t}$ = 0,06 A cos 2 A π (4 A t - 2 A x) m. Representa gráficamente los movimientos vibratorios de las partículas situadas en x = 0 m, x = 1 m y x = 1,25 m**

El período y la longitud de onda se determinan comparando la expresión dada con la general.

$y_{x,\,t}$ = A A cos (ω A t - k A x)

$\omega = 8 \cdot \pi\ \text{rad/s} \Rightarrow T = \dfrac{2\cdot\pi\,\text{rad}}{\omega} = \dfrac{2\cdot\pi\,\text{rad}}{8\cdot\pi\,\text{rad/s}} = 0{,}25\,\text{s}$

$k = 4 \cdot \pi\ \text{m}^{-1} \Rightarrow \lambda = \dfrac{2\cdot\pi\,\text{rad}}{4\cdot\pi\,\text{m}^{-1}} = 0{,}5\,\text{m}$

La diferencia de fase en un instante para las partículas situadas en x = 0 m y x = 1 m es:

$\Delta\varphi = \Delta x \dfrac{2\cdot\pi\,\text{rad}}{\lambda} = 1\,\text{m}\dfrac{2\cdot\pi\,\text{rad}}{0{,}5\,\text{m}} = 4\cdot\pi\,\text{rad}$, las dos partículas vibran en fase.

La diferencia de fase en un instante para las partículas situadas en x = 0 m y x = 1,25 m es:

$\Delta\varphi = \Delta x \dfrac{2\cdot\pi\,\text{rad}}{\lambda} = 1{,}25\,\text{m}\dfrac{2\cdot\pi\,\text{rad}}{0{,}5\,\text{m}} = 5\cdot\pi\,\text{rad} = 2\cdot 2\cdot\pi\,\text{rad} + \pi\,\text{rad}$, las dos partículas vibran en oposición de fase.

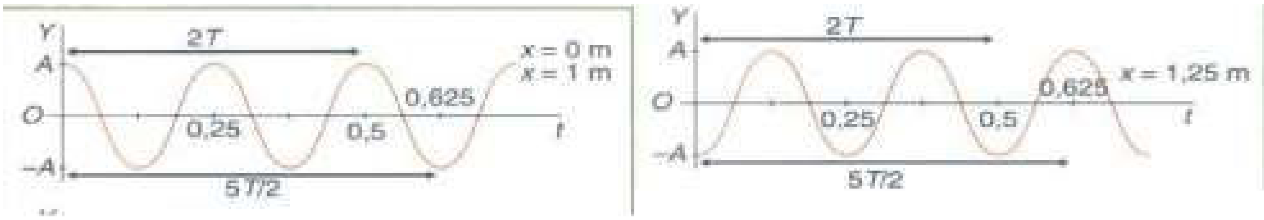
Para la representación gráfica, se determina la elongación en el instante inicial de las partículas y se tiene en cuenta que las vibraciones se repiten a lo largo del tiempo con un período T = 0,25 s.

$y_{x=0,\,t=0}$ = 0,06 A cos 2 A π (4 A 0 - 2 A 0) = 0,06 m

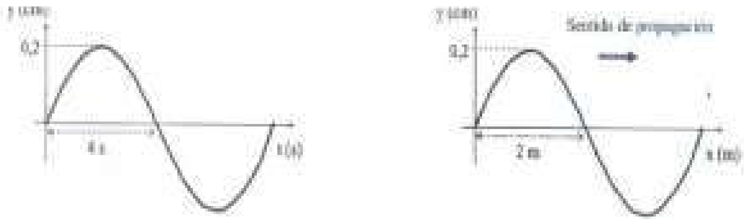
La elongación es máxima y positiva.

$y_{x=1;\ t=0}$ = 0,06 A cos 2 A π (4 A 0 - 2 A 1) = 0,06 m, pues está en fase con el anterior.

$y_{x=1,25;\,t=0}$ = 0,06 A cos 2 A π (4 A 0 - 2 A 1,25) = - 0,06 m, está en oposición de fase con los anteriores.




**9. En las figuras se representa la variación de la posición, y, de un punto de una cuerda vibrante en función del tiempo, t, y de su distancia, x, al origen, respectivamente. Deduce la ecuación de onda y determine la velocidad de propagación de la onda y la velocidad de vibración de un punto de la cuerda.**




a) De las representaciones gráficas se deduce que la onda se propaga hacia la derecha y que las constantes del movimiento son:

A = 0,2 cm; T = 8 s; λ = 4 m; $\omega = \frac{2\cdot\pi}{T} = \frac{2\cdot\pi}{8\,sT} = 0{,}25\cdot\pi\frac{rad}{s}$; $k = \frac{2\cdot\pi}{\lambda} = \frac{2\cdot\pi}{4m} = 0{,}5\cdot\pi m^{-1}$

$y_{x,t}$ = A · sen (ω · t – k · x) = 0,2 ·$10^{-2}$ m · sen (0,25 · π $s^{-1}$ · t – 0,5 · π $m^{-1}$ · x)

b) La velocidad de propagación de la onda es una cantidad que depende del medio de transmisión.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{0{,}25\cdot\pi\ s^{-1}}{0{,}5\cdot\pi\ m^{-1}} = 0{,}5\frac{m}{s}$$

La velocidad de vibración depende de la posición del punto a lo largo de la cuerda.

$$v_{vibración} = \frac{dy}{dt} = 5 \cdot 10^{-4} \cdot \pi\ \frac{m}{s} \cdot \cos((0{,}25 \cdot \pi\ s^{-1} \cdot t - 0{,}5 \cdot \pi\ m^{-1} \cdot x)$$

**10. Una onda se propaga por la parte negativa del eje X con una longitud de onda de 20 cm, una frecuencia de 25 Hz, una amplitud de 3 cm y fase inicial igual a cero. Escribe la ecuación de la onda e indica el instante en el que un punto que se encuentra a 2,5 cm del origen alcanza, por primera vez, una velocidad nula.**

La frecuencia angular es: ω = 2 · π · ν = 2 · π · 25 Hz = 50 π rd/s

El número de ondas es: $k = \frac{2\cdot\pi}{\lambda} = \frac{2\cdot\pi rad}{0{,}2m} = 10\cdot\pi m^{-1}$

La ecuación general de la onda, como se desplaza hacia la parte negativa del eje X, es:
y = A · sen (ω · t + k · x) = 0,03 · sen (50 · π · t + 10 · π · x) m

La ecuación general de la velocidad de vibración es:
$v_{x,\,t}$ = 1,5 · π · cos (50 · π · t + 10 · π · x)

Y la ecuación con la que vibra el punto x = 2,5 · $10^{-2}$ m es:
$v_{x=2,5\ cm\ ;\ t}$ = 1,5 · π · cos (50 · π · t + 10 · π · 2,5 · $10^{-2}$) = 1,5 · π · cos (50 · π · t + 0,25 · π)

La velocidad es igual a cero cuando:
cos (50 · π · t + 0,25 · π) = 0 ⇒ 50 · π · t + 0,25 · π = π/2

Despejando: t = 5 · $10^{-3}$ s

**11. En el centro de una piscina circular de 6 m de radio se produce una perturbación que origina un movimiento ondulatorio en la superficie del agua. La longitud de onda es de 0,50 m y tarda 12 s en llegar a la orilla. Calcula la frecuencia del movimiento ondulatorio. ¿Cuál es la amplitud del mismo si al cabo de 0,25 s la elongación en el origen es de 4 cm? Determina la elongación en el instante t = 12 s en un punto situado a 6 m del foco emisor.**

La velocidad de propagación es: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6m}{12s} = 0{,}5 m/s$

La frecuencia y período de la perturbación son: $\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{0{,}5 m/s}{0{,}5 m} = 1 Hz \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{1 Hz} = 1 s$

Si se supone que en el instante inicial el centro de la piscina está en reposo, entonces $\phi_0 = 0$ y se tiene que la expresión del movimiento vibratorio del origen es:
$y_{x=0;\,t} = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \phi_0) = A \cdot sen\,(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t + 0)$

Sustituyendo: $4\ cm = A \cdot sen\,(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 0{,}25) \Rightarrow A = 4\ cm$

La fase del movimiento es:
$\phi = \omega \cdot t - k \cdot x = 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} x = 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{0{,}5 m} x = 2 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x$

La diferencia de fase entre el origen en el instante inicial y la orilla en el instante 12 s es:
$\Delta\phi = \phi_0 - \phi_{orilla} = (2 \cdot \pi \cdot t_0 - 4 \cdot \pi \cdot x_0) - (2 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x) =$
$= 2 \cdot \pi\,(t_0 - t) - 4 \cdot \pi\,(x_0 - x) = 2 \cdot \pi \cdot 12\ s - 4 \cdot \pi \cdot 6\ m = 0\ rad$

Las dos estados de vibración están en fase, por lo que la elongación de la orilla en ese instante es:
$y_{x=6\ m;\ t = 12\ s} = 0\ m$

**12. Un foco sonoro emite una onda armónica de amplitud 10 pascales y frecuencia 250 Hz. La onda se propaga en la dirección positiva del eje Y con velocidad v = 340 m/s y en el instante inicial, t = 0, la presión es máxima en el foco emisor. Escribe la ecuación Ψ (y, t) de la onda sonora. ¿Cuál es la variación de la presión respecto del equilibrio de un punto situado a 1,5 m del foco en el instante t= 3 s?**
La expresión general de una onda armónica propagándose hacia la parte positiva del eje Y es:
$\Psi\,(t) = \Psi_0 \cdot \cos\,(\omega \cdot t - k \cdot y + \phi_0)$

La amplitud es: $\Psi_0 = 10\ Pa$
La frecuencia angular es: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu = 2 \cdot \pi \cdot 250\ Hz = 500\ \pi$ rad,s
El número de ondas es: $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \nu}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 250 Hz}{340 m/s} = 1{,}47 \cdot \pi m^{-1}$
Para calcular el desfase, se aplican las condiciones de máxima presión en el foco en el instante inicial:
$\Psi_{y=0;\,t=0} = 10\ Pa \cdot \cos\,(\omega \cdot 0 - k \cdot 0 + \phi_0) = 10\ Pa;\ \cos\phi_0 = 1 \rightarrow \phi_0 = 0\ rad$

La ecuación de la onda sonora es: $\Psi\,(t) = 10 \cdot \cos\,(500 \cdot \pi \cdot t - 1{,}47 \cdot \pi \cdot y)$

Y la variación respecto del equilibrio en el punto es instante pedidos es:
$\Psi_{y=1{,}5;\,t=3} = 10 \cdot \cos\,(500 \cdot \pi \cdot 3 - 1{,}47 \cdot \pi \cdot 1{,}5) = 8\ Pa$

**13. Dos corchos que flotan en la superficie del agua de un estanque son alcanzados por una onda que se produce en dicha superficie, tal que los sucesivos frentes de onda son rectas paralelas entre sí que avanzan perpendicularmente a la recta que une ambos corchos. Se observa que los corchos realizan 8 oscilaciones en 10 segundos, y que oscilan en oposición de fase. Sabiendo que la distancia entre los corchos es 80 cm y que ésta es la menor distancia entre puntos que oscilan en oposición de fase, calcular la velocidad de propagación de la onda en el agua.**

La frecuencia del movimiento es: $\nu = \dfrac{8\,\text{oscilaciones}}{10\,\text{s}} = 0{,}8\,\text{Hz}$

Los puntos más próximos que vibran es oposición de fase están separados por media longitud de onda.

Por tanto: $\dfrac{\lambda}{2} = 80\,\text{cm} \Rightarrow \lambda = 160\,\text{cm}$

La velocidad de propagación de la onda es:

$v = \lambda \cdot \nu = 160\text{ cm} \cdot 0{,}8\text{ Hz} = 128\text{ cm/s}$

**14. Cierta onda está descrita por la ecuación: ψ (x, t) = 0,002 A sen (t - x/4) , todo expresado en unidades del S.I. Determina la frecuencia de la onda, su velocidad de propagación y la distancia entre dos puntos consecutivos que vibran con una diferencia de fase de 1201.**

Comparando la expresión dada con la ecuación general del movimiento ondulatorio:

$\psi_{x,t} = A\text{ sen }(\omega \cdot t - k \cdot x)$

$\omega = 1\text{ rad/s} = 2 \cdot \pi \cdot \nu \Rightarrow \nu = 0{,}159\text{ Hz}$

$k = \dfrac{1}{4}\text{m}^{-1} = \dfrac{2\cdot\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 8 \cdot \pi\text{ m}$

La velocidad de propagación es: $v = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{1\,\text{rad/s}}{\dfrac{1}{4}\text{m}^{-1}} = 4\,\text{m/s}$

A una distancia de una longitud de onda le corresponde una diferencia de fase de 2 · π rad (360º).

$\Delta x = 120^{o}\dfrac{\lambda}{360^{o}} = \dfrac{\lambda}{3} = \dfrac{8\cdot\pi}{3}\text{m}$

**15. Una onda transversal se propaga según la ecuación: y = 4 A sen 2 A π A [(t/4) + (x/1,8)] (en unidades SI) Determine la velocidad de propagación de la onda y la velocidad de vibración máxima de un punto alcanzado por la onda. Calcula la diferencia de fase, en un instante dado, de dos puntos separados 1 m en la dirección de avance de la onda.**

a) Reescribiendo la ecuación de la onda dada y comparándola con la expresión general, se tiene:

$y_{x,t} = 4\cdot\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}t + \dfrac{\pi}{0{,}9}x\right)\text{unidades SI};\quad y_{x,t} = A \cdot \text{sen }(\omega \cdot t - k \cdot x)$

$\omega = \dfrac{\pi}{2}\text{rad/s};\quad k = \dfrac{\pi}{0{,}9}\text{m}^{-1}$

La velocidad de propagación es: $v = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\dfrac{\pi}{2}\text{s}^{-1}}{\dfrac{\pi}{0{,}9}\text{m}^{-1}} = 0{,}45\,\text{m/s}$

Aplicando la definición de velocidad de vibración:

$v = \dfrac{dy}{dt} = 4\cdot\dfrac{\pi}{2}\cdot\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}t + \dfrac{\pi}{0{,}9}x\right) = 2\cdot\pi\cdot\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}t + \dfrac{\pi}{0{,}9}x\right)\text{m/s}$

Su valor máximo es: $v_{\text{máximo}} = 2 \cdot \pi$ m/s

b) A una distancia de λ m le corresponde una diferencia de fase de 2 · π rad. La longitud de onda es:

$$k = \frac{2\cdot\pi}{\lambda};\lambda = \frac{2\cdot\pi}{\frac{\pi}{0{,}9}m^{-1}} = 1{,}8\,m$$

La diferencia de fase pedida es: Δϕ = $= \Delta x\frac{2\cdot\pi\,rad}{\lambda} = 1m\frac{2\cdot\pi\,rad}{1{,}8\,m} = \frac{\pi}{0{,}9}rad = \frac{10}{9}\pi\,rad$

**16. Una onda armónica se propaga por un medio unidimensional con una frecuencia de 500 Hz y una velocidad de 350 m/s. ¿Cuál es la distancia mínima entre dos puntos del medio para que un instante vibren con una diferencia de fase de 60º? ¿Para un cierto punto, cuál es la diferencia de fase, para un intervalo de tiempo de $10^{-3}$ s?**

La longitud de onda de la perturbación es: $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{350\,m/s}{500\,Hz} = 0{,}7\,m$

A una distancia igual a la longitud de onda le corresponde un desfase de 2 · π rad = 360º, por tanto:

$$\Delta x = \Delta\varphi\frac{\lambda}{360^o} = 60^o\frac{0{,}7\,m}{360^o} = 0{,}12\,m$$

De igual forma a un intervalo de tiempo igual al período le corresponde un desfase de 2 · π rad = 360º, por tanto:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{500\,Hz} = 2\cdot10^{-3}\,s$$

$$\Delta\varphi = \Delta T\frac{2\cdot\pi\,rad}{T} = 10^{-3}\,s\frac{2\cdot\pi\,rad}{2\cdot10^{-3}\,s} = \pi\,rad$$

Los instantes están en oposición de fase.

**17. Un foco sonoro emite una energía de 1,5 · $10^{-2}$ J cada minuto, observándose una amplitud de 2 mm a una distancia de 10 m del foco. Calcula la intensidad a 10 m y a 20 m del foco. ¿Cuál es la amplitud a 20 m del foco?**

La intensidad de onda esférica a una distancia R del foco es:

$$I_1 = \frac{E}{\Delta S\cdot\Delta t} = \frac{E}{4\cdot\pi\cdot R_1^2\cdot\Delta t} = \frac{1{,}5\cdot10^{-2}\,J}{4\cdot\pi\,(10\ m)^2\cdot60\,s} = 2\cdot10^{-7}\,\frac{W}{m^2};\quad I_2 = \frac{E}{\Delta S\cdot\Delta t} = \frac{1{,}5\cdot10^{-2}\,W}{4\cdot\pi\,(20\ m)^2\cdot60\,s} = 0{,}5\cdot10^{-7}\,\frac{W}{m^2}$$

Al duplicar la distancia al foco, la intensidad se divide por cuatro.

La relación entre las amplitudes es: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_2}{R_1};\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{20\,m}{10\,m} \Rightarrow A_2 = \frac{A_1}{2} = \frac{2\,cm}{2} = 1\ cm$

Al duplicarse la distancia al foco, la amplitud se divide por dos.

**18. Se desea aislar acústicamente una sala, cubriendo sus paredes con un material absorbente. Para ello, se utiliza un cierto material en el que la intensidad del sonido se reduce a la mitad cuando atraviesa 1 cm de material. La intensidad máxima que puede pasar al exterior es 1 pW/cm$^2$. ¿Cuál es el grosor del material aislante que debe emplearse si la intensidad interior puede alcanzar hasta 20 pW/cm$^2$?**

Aplicando la ley de la absorción se calcula el valor del coeficiente de absorción del material.

$I = I_0 \cdot e^{-\beta\cdot x}$; $\frac{I_0}{2} = I_0 \cdot e^{-\beta\cdot 1\,cm}$; - Ln 2 = - β · 1 cm → β = Ln 2 cm$^{-1}$

Aplicando otra vez la ley anterior, se calcula el espesor del material a utilizar.

$I = I_0 \cdot e^{-\beta\cdot x}$; 1 pW· cm$^{-2}$ = 20 pW · cm$^{-2}$ · $e^{-Ln\,2\,cm^{-1}\cdot x}$

Operando: Ln $\frac{1}{20}$ = - Ln 2 cm$^{-1}$ · x → x = 4,32 cm

**19. Un haz de ondas posee una intensidad de $10^{-2}$ W/m$^2$ al incidir sobre un medio absorbente de 1 m de espesor. Si a la salida del medio la intensidad se ha reducido a la cuarta parte calcula el coeficiente de absorción del medio. ¿Cuál es el espesor necesario para que la intensidad se reduzca en un 10 %?**

El coeficiente de absorción se calcula aplicando la ley de la absorción para ondas planas.

$I = I0 \cdot e^{-\beta} \cdot x$; $I0/4 = I0 \cdot e^{-\beta} \cdot 1$ m; Ln 1 - Ln 4 = - β · 1 m → β = 1,39 m-1

Si la intensidad se reduce en un 10 %, significa que la intensidad final es: $I = 0{,}9 \cdot I_0$, aplicando otra vez la ley anterior, resulta que:

$I = I0 \cdot e^{-\beta} \cdot x$; $0{,}9 \cdot I0 = I0 \cdot e^{-1{,}39\,\mathrm{m}^{-1}\cdot x}$; Ln 0,9 = - 1,39 m$^{-1}$ · x → x = 0,076 m

**20. Dos sonidos tienen niveles de intensidades sonoras de 50 dB y 70 dB respectivamente. Calcula la relación entre sus intensidades físicas.**

Aplicando la definición de nivel de intensidad sonora, $NS = 10 \cdot \log\frac{I}{I_0}$, se tiene que las intensidades físicas respectivas son:

$$50\,\mathrm{dB} = 10 \cdot \log\frac{I_1}{I_0};\ 70\,\mathrm{dB} = 10 \cdot \log\frac{I_2}{I_0};$$

Restando: $20\,\mathrm{dB} = 10 \cdot \left(\log\frac{I_2}{I_0} - \log\frac{I_1}{I_0}\right);\ 2 = \log I_2 - \log I_1$

Operando: $2 = \log\frac{I_2}{I_1};\ 10^2 = \frac{I_2}{I_1}$

Despejando: $I_2 = 100 \cdot I_1$

El segundo sonido es cien veces más intenso que el primero.

**21. En un partido de fútbol, un espectador canta gol con un nivel de intensidad sonora 40 dB. ¿Cuál sería el nivel de intensidad sonora si gritaran a la vez y con la misma intensidad sonora los 10 000 espectadores que se encuentran viendo el partido? Dato: $I_0 = 10^{-12}$ W · m$^{-2}$.**

La intensidad con la que emite un espectador se compara con la intensidad umbral mediante la ecuación del nivel de intensidad sonora.

$$NS = 10 \cdot \log\frac{I}{I_0} \Rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\frac{NS}{10}} = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2} \cdot 10^{\frac{40}{10}} = 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2}$$

La intensidad total es igual a la suma de las intensidades de todas las fuentes de sonido:

$I_t = 10\,000 \cdot I = 10\,000 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2} = 10^{-4}\ \mathrm{W/m^2}$

Aplicando a esta intensidad la ecuación del nivel de intensidad sonora, resulta que el nivel de intensidad sonora resultante es:

$$NS = 10 \cdot \log\frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log\frac{10^{-4}\ \mathrm{W/m^2}}{10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}} = 80\ \mathrm{dB}$$

**22. Una fuente sonora puntual emite con una potencia de $10^{-6}$ W. Calcula el nivel de intensidad sonora, expresado en dB, a 1 m del foco. ¿A qué distancia de la fuente sonora el nivel de intensidad sonora se ha reducido a la mitad del valor anterior?**
**Dato: $I_0 = 10^{-12}$ W·m$^{-2}$.**

La intensidad física a la distancia de 1 m es:

$$I_1 = \frac{E}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{P}{\Delta S} = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot R_1^2} = \frac{10^{-6}\ \text{J}}{4 \cdot \pi\,(1\ \text{m})^2} = 7{,}96 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

El nivel de intensidad sonora es: $NS = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{7{,}96 \cdot 10^{-8}\ \text{W/m}^2}{10^{-12}\ \text{W/m}^2} = 49\ \text{dB}$

Al alejarse de la fuente disminuye la intensidad y el nivel de intensidad sonora. Cuando este se ha reducido a la mitad, la intensidad física es:

$$NS = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0};\ \frac{49\ \text{dB}}{2} = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}\ \text{W/m}^2} \Rightarrow I = 2{,}82 \cdot 10^{-10}\ \text{W/m}^2$$

Y la distancia a la que está el punto de la fuente es:

$$I_2 = \frac{P}{\Delta S} = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2};\ 2{,}82 \cdot 10^{-10}\ \text{W/m}^2 = \frac{10^{-6}\ \text{J}}{4 \cdot \pi\, r^2} \Rightarrow r = 16{,}9\,\text{m}$$

## UNIDAD 3: Fenómenos ondulatorios mecánicos

### CUESTIONES INICIALES-PÁG. 73

**1. Seguro que alguna vez has escuchado el fenómeno del eco, ¿serías capaz de explicar cómo se produce?**
Las ondas sonoras que se forman al hablar si encuentran una superficie adecuada, y a la distancia conveniente, en la que se reflejan, vuelven por el mismo camino, lo que permite que nos escuchemos a nosotros mismos con un cierto retraso.

**2. ¿Por qué se escucha la voz de unas personas situadas al otro lado de una esquina, aunque no las veamos?**
La longitud de onda del sonido está comprendida entre unos cm y varios m, por lo que puede bordear obstáculos tales como las esquinas de los edificios. Sin embargo la longitud de onda de la luz es del orden del 6 A $10^{-7}$ m y por tanto no puede bordear esos obstáculos.

**3. Si observamos pasar los automóviles, cuando estamos parados en el arcén de una carretera, percibimos distinto sonido cuando se acercan que al alejarse. ¿A qué crees que es debido?**
La sensación sonora que nos transmite el oído depende de la frecuencia con la que fluctúa el aire que está en contacto con el tímpano. Esta frecuencia percibida depende del movimiento relativo entre el foco y el observador.

### ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 98

**1. Un sonido se propaga por el aire con una longitud de onda de 2 m y una velocidad de 340 m/s. ¿Cuál será la longitud de onda cuando se propague por el agua con una velocidad de 1 500 m/s?**
Cuando la onda pasa de un medio a otro su frecuencia permanece constante.

$$\nu_{aire} = \nu_{agua};\ \frac{v_{aire}}{\lambda_{aire}} = \frac{v_{agua}}{\lambda_{agua}};\ \frac{340\,m/s}{2\,m} = \frac{1500\,m/s}{\lambda_{agua}} \Rightarrow \lambda_{agua} = 8{,}8\,m$$

**2. Una onda de frecuencia 4 Hz se propaga por un medio con velocidad $v_1$ = 2 m/s e incide sobre la frontera con otro medio diferente con ángulo de incidencia i = 30º. En el segundo medio la velocidad de propagación de la onda es $v_2$ = 2,5 m/s. Calcula el ángulo de refracción y la longitud de onda en este segundo medio.**
Aplicando la ley de Snell, se tiene que el ángulo de refracción es:

$$\frac{\text{sen}\,i}{\text{sen}\,r} = \frac{v_1}{v_2};\ \frac{\text{sen}\,30^\circ}{\text{sen}\,r} = \frac{2\,m/s}{2{,}5\,m/s} \Rightarrow r = 39^\circ$$

Cuando la onda pasa de un medio a otro permanece constante su frecuencia.

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{\nu} = \frac{2{,}5\,m/s}{4\,Hz} = 0{,}625\,m$$

**3. Una perturbación de 2 cm de longitud de onda, que se desplaza por el agua con una velocidad de 0,5 m/s, accede a un medio más profundo con un ángulo de incidencia de 30º respecto de la norma a la superficie de separación de los dos medios. Si la longitud de de onda de dicha perturbación en el segundo medio es de 2,4 cm, calcula la velocidad de propagación en el segundo medio y la dirección de propagación.**
Cuando la onda pasa de un medio a otro su frecuencia permanece constante.

$$\nu_1 = \nu_2;\ \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2};\ \frac{0{,}5\,m/s}{2\,cm} = \frac{v_2}{2{,}4\,cm} \Rightarrow v_2 = 0{,}6\,m/s$$

Aplicando la ley de Snell, se tiene que el ángulo de refracción es:

$$\frac{\text{sen}\,i}{\text{sen}\,r} = \frac{v_1}{v_2};\ \frac{\text{sen}\,30^\circ}{\text{sen}\,r} = \frac{0{,}5\,m/s}{0{,}6\,m/s} \Rightarrow r = 36{,}87^\circ$$

**4. Una onda sonora tiene por elución y = 1,2 · cos [2 · π · (170 · t - 0,5 · x)] Pa. Si encuentra en su camino un automóvil, ¿sufrirá el fenómeno de la difracción?**

Para deducirlo hay que comparar las dimensiones del automóvil con la longitud de onda de las ondas.

$$k = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}5\ m^{-1} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 2\ m$$

Como ambas magnitudes son del mismo orden si que se manifiesta el fenómeno de la difracción.

**5. Dos ondas sonoras coherentes tienen una frecuencia de 2 000 Hz y se propagan con una velocidad de 340 m/s. Calcula la diferencia de fase en un punto del medio de propagación situado a 10 m de una fuente y a 27 m de la otra. Justifica si la interferencia en ese punto es constructiva o destructiva.**

La longitud de onda del sonido es: $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340\,m/s}{2000\,Hz} = 0{,}17\,m$

Aplicando la relación entre la diferencia de fase y las respectivas distancias a los focos:

$$\Delta\varphi = k \cdot (r_1 - r_2) = \frac{2 \cdot \pi\,rad}{\lambda}(r_1 - r_2) = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}17\,m}(27\,m - 10\,m) = 100 \cdot 2 \cdot \pi\ rad$$

Las dos perturbaciones llegan en fase, por lo que la interferencia es constructiva.

**6. Dos altavoces, considerados puntuales, reciben una señal del mismo amplificador y emiten ondas sonoras en fase. Si la velocidad del sonido es de 350 m/s, calcula la frecuencia más pequeña para que la interferencia en un punto que dista 2, 47 m de un altavoz y 2,12 m del otro sea constructiva. ¿Cuál será la frecuencia más pequeña para que la interferencia sea destructiva?**

a) La interferencia de dos ondas coherentes es constructiva en todos los puntos del medio para los cuales la diferencia de distancias a los focos es un múltiplo de la longitud de onda.

$r_1 - r_2 = n \cdot \lambda$ con n = 0, 1, 2, 3, …..

Como los caminos son distintos, la frecuencia más pequeña es cuando n = 1, y como $v = \lambda \cdot \nu$, resulta que:

$$r_1 - r_2 = \lambda = \frac{v}{\nu};\ 2{,}47\,m - 2{,}12\,m = \frac{350\,m/s}{\nu} \Rightarrow \nu = 1000\ Hz$$

b) La interferencia de dos ondas coherentes es destructiva en todos los puntos del medio para los cuales la diferencia de distancias a los focos es un múltiplo impar de la semilongitud de onda.

$r_1 - r_2 = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$ con n = 0, 1, 2, 3, …..

La frecuencia más pequeña es cuando n = 0, y como $v = \lambda \cdot \nu$, resulta que:

$$r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2 \cdot \nu};\ 2{,}47\,m - 2{,}12\,m = \frac{350\,m/s}{2 \cdot \nu} \Rightarrow \nu = 500\ Hz$$

**7. Dos ondas sonoras de ecuación y = 1,2 · cos [2 · π · (170 · t - 0,5 · x)] Pa, proceden de dos focos coherentes e interfieren en un punto P que dista 20 m de un foco y 25 m del otro foco. Calcula la diferencia de fase de las dos ondas al llegar al punto considerado. Determina la amplitud de la perturbación total en citado punto en cualquier instante.**

La diferencia de fase con la que llegan las ondas al punto considerado es:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1 = 2\cdot\pi(170\cdot t - 0{,}5\cdot 20)\\ \varphi_2 = 2\cdot\pi(170\cdot t - 0{,}5\cdot 25)\end{array}\right\} \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\cdot\pi\cdot 0{,}5\cdot 5 = 5\cdot\pi\,\text{rad}$$

Las ondas llegan al punto considerado en oposición de fase.
En ese punto la interferencia de las dos ondas es destructiva y por tanto está permanentemente en reposo, por lo que su amplitud siempre es igual a cero.

**8. De una onda estacionaria con los extremos fijos se sabe que los antinodos están separados por una distancia de 1,5 m. Calcula la longitud de onda de las ondas sinusoidales que interfieren para dar lugar a dicha onda estacionaria.**

La distancia entre dos antinodos o vientres es igual a la mitad de la longitud de onda.

$$1{,}5\,\text{m} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 3\,\text{m}$$

**9. Por una cuerda tensa se transmiten simultáneamente dos ondas transversales cuyas ecuaciones utilizando el sistema internacional son: $y_1$ = 0,04 · sen (10 · x – 600 t), $y_2$ = 0,04 · sen (10 · x + 600 · t). Escribe la expresión de la onda estacionaria formada y calcula la distancia entre dos nodos.**

a) Aplicando el principio de superposición:

$y = y_1 + y_2 = 0{,}04 \cdot \text{sen}\,(10 \cdot x - 600\,t) + 0{,}04 \cdot \text{sen}\,(10 \cdot x + 600 \cdot t)$

Aplicando la relación: sen a + sen b = 2 sen $\frac{a+b}{2}$ · cos $\frac{a-b}{2}$ y como: cos a = cos (-a), resulta que:

$y = 0{,}08 \cdot \text{sen}\,(10 \cdot x) \cdot \cos\,(600 \cdot t)$

b) La distancia entre dos nodos es igual a mitad de la longitud de onda.

$k = 10\ \text{m}^{-1}$; $\lambda = \frac{2\cdot\pi}{k} = \frac{2\cdot\pi}{10\,\text{m}^{-1}} = \frac{\pi}{5}\text{m} \Rightarrow \Delta x_{nodos} = \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi/5\,\text{m}}{2} = 0{,}314\,\text{m}$

**10. La ecuación $y_{x,t}$ = 0,02 · sen (4 · π · x) · cos (6 · π · t), donde x e y están expresados en m y t en s, representa a la función de onda de una onda estacionaria en una cuerda. Determina el máximo desplazamiento y la máxima velocidad de los puntos de la cuerda situados en las posiciones: $x_1$ = 1,10 m; $x_2$ = 0,25 m y $x_3$ = 0,5 m.**

El desplazamiento y la velocidad de vibración de los puntos de la cuerda dependen de su posición.

a) $x_1$ = 1,10 m

Sustituyendo esta posición en la ecuación general:

$y_{x=1,10m\,;\,t} = 0{,}02 \cdot \text{sen}\,(4 \cdot \pi \cdot 1{,}10) \cdot \cos\,(6 \cdot \pi \cdot t)\ \text{m} = 0{,}019 \cdot \cos\,(6 \cdot \pi \cdot t)\ \text{m} \Rightarrow y_{máximo} = 0{,}019\ \text{m}$

Y su velocidad es :

$v_{x=1,10\,m\,;\,t} = \frac{dy}{dt} = -\,0{,}019 \cdot 6 \cdot \pi \cdot \text{sen}\,(6 \cdot \pi \cdot t)\ \text{m/s} = -\,0{,}036 \cdot \text{sen}\,(6 \cdot \pi \cdot t)\ \text{m/s} \Rightarrow v_{máxima} = 0{,}36\ \text{m/s}$

b) $x_2$ = 0,25 m

Sustituyendo esta posición en la ecuación general:

$y_{x=0,25\,m\,;\,t} = 0{,}02 \cdot \text{sen}\,(4 \cdot \pi \cdot 0{,}25) \cdot \cos\,(6 \cdot \pi \cdot t)\ \text{m} = 0\ \text{m/s}$

Este punto es un nodo y por ello está permanentemente en reposo.

c) $x_2$ = 0,50 m

Sustituyendo esta posición en la ecuación general:

$y_{x=0,25\,m\,;\,t} = 0{,}02 \cdot \text{sen}\,(4 \cdot \pi \cdot 0{,}50) \cdot \cos\,(6 \cdot \pi \cdot t)\ \text{m} = 0\ \text{m/s}$

También es un nodo y por ello está permanentemente en reposo.

**11. Una onda estacionaria responde a la ecuación: y = 8 · sen (3 · x) · cos (2 · t), con x e y en cm y t en s. Calcula el desplazamiento máximo de la partícula situada en la posición x = 2,3 cm y determina las posiciones de los nodos y de los vientres o antinodos.**

La ecuación de la elongación del punto considerado es:

$y_{x = 2,3\ cm} = 8 \cdot \text{sen}\ (3 \cdot 2,3) \cdot \cos\ (2 \cdot t) = 4,6 \cdot \cos\ (2 \cdot t)\ cm \Rightarrow y_{x=2,3\ cm\ ;\ máximo} = 4,6\ cm$

Los nodos son los puntos del medio que están permanentemente en reposo, por lo que:

$y = 0;\ \text{sen}\ (3 \cdot x) = 0;\ 3 \cdot x = n \cdot \pi\ cm \Rightarrow\ x_{nodos} = n \cdot \frac{\pi}{3} cm$ con n = 0, 1, 2, 3, ....

Los vientres o antinodos son los puntos en los que el desplazamiento es máximo.

$y = \text{máximo};\ \text{sen}\ (3 \cdot x) = \pm 1;\ 3 \cdot x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\pi}{2} cm \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{vientres} = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\pi}{6} cm$ con n = 0, 1, 2, 3, ....

**12. La ecuación y = 0,10 · cos (0,5 · π · x) · sen (50 · π · t) representa la función de onda de una onda estacionaria que se propaga por una cuerda en unidades del SI. Calcula la amplitud y la velocidad de propagación de las ondas cuya superposición da lugar a la onda anterior. Determina la distancia entre dos vientres consecutivos.**

a) Comparando la ecuación general de una onda estacionaria: y = 2 · A · cos (k · x) · sen (ω · t), se tiene:

$2 \cdot A = 0,10\ m \Rightarrow A = 0,05\ m$

$k = 0,5 \cdot \pi\ m^{-1};\ \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{0,5 \cdot \pi m^{-1}} = 4 m;\ \omega = 50 \cdot \pi\ rad/s;\ \nu = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{50 \cdot \pi rad/s}{2 \cdot \pi} = 25 Hz$

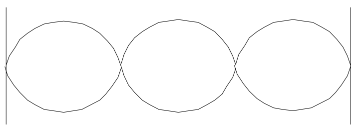
$v = \lambda \cdot \nu = 4\ m \cdot 25\ Hz = 100\ m/s$

b) La distancia entre dos vientres es igual a la mitad de la longitud de onda.

$\Delta x_{vientres} = \frac{\lambda}{2} = \frac{4 m}{2} = 2 m$

**13. Una onda se propaga con una velocidad de 660 m/s por una cuerda colocada en una guitarra. Si al agitar la cuerda se forma una onda estacionaria de 4 nodos y el sonido emitido tiene una frecuencia de 990 Hz. Determina la longitud de la cuerda.**

Si la onda forma cuatro nodos entonces la longitud de la cuerda contiene tres veces a media longitud de onda.



$$\left.\begin{array}{l} L = 3 \frac{\lambda}{2} \\ \lambda = \frac{v}{\nu} \end{array}\right\} L = 3 \frac{\frac{v}{\nu}}{2} = \frac{3 \cdot 660 m/s}{2 \cdot 990 Hz} = 1 m$$

**14. La ecuación: y = 0,02 · sen ((10 · π/3) · x) · cos (40 · π · t), unidades del SI, describe a una onda estacionaria que se propaga por una cuerda. Determina las magnitudes características: amplitud, longitud de onda, frecuencia y velocidad de propagación de las ondas que dan lugar a la onda estacionaria. Sitúa las posiciones de los nodos y calcula la distancia entre un nodo y un vientre consecutivos. Determina la expresión general de la velocidad de vibración de cualquier punto en cualquier instante y en particular la velocidad máxima con la que vibra el punto situado a 1,35 m del origen.**

a) Comparando la ecuación general de una onda estacionaria: $y = 2 \cdot A \cdot \text{sen}(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t)$, se tiene:

$2 \cdot A = 0{,}02\ \text{m} \Rightarrow A = 0{,}01\ \text{m}$

$k = 10 \cdot \pi/3\ \text{m}^{-1}$; $\lambda = \dfrac{2\cdot\pi}{k} = \dfrac{2\cdot\pi}{\dfrac{10\cdot\pi}{3}\text{m}^{-1}} = 0{,}6\,\text{m}$; $\omega = 40 \cdot \pi$ rad/s; $\nu = \dfrac{\omega}{2\cdot\pi} = \dfrac{40\cdot\pi\,\text{rad/s}}{2\cdot\pi} = 20\,\text{Hz}$

$v = \lambda \cdot \nu = 0{,}6\ \text{m} \cdot 20\ \text{Hz} = 12\ \text{m/s}$

b) Los nodos están permanentemente en reposo y = 0, es decir cuando: $\text{sen}((10 \cdot \pi/3) \cdot x) = 0$.

$\text{sen}((10 \cdot \pi/3) \cdot x) = 0$; $(10 \cdot \pi/3) \cdot x = n \cdot \pi \Rightarrow x = n\cdot\dfrac{3}{10}\text{m}$ con n = 0, 1, 2, ….

c) La distancia entre un nodo y un vientre es igual a la cuarta parte de la longitud de onda.

$$\Delta x_{\text{nodo-vientre}} = \frac{\lambda}{4} = \frac{0{,}6\,\text{m}}{4} = 0{,}15\,\text{m}$$

d) La expresión de la velocidad de vibración de las partículas es:

$$v_{x,\ t} = \frac{dy}{dt} = -\,0{,}8\cdot\pi\cdot\text{sen}\left(\frac{10\cdot\pi}{3}x\right)\cdot\text{sen}\,(40\cdot\pi\cdot t)\ \text{m/s}$$

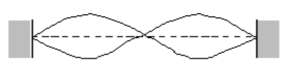
La velocidad con la que vibra el punto considerado es:

$$v_{x=1{,}35\,\text{m},\ t} = -\,0{,}8\cdot\pi\cdot\text{sen}\left(\frac{10\cdot\pi}{3}1{,}35\,\text{m}\right)\cdot\text{sen}\,(40\cdot\pi\cdot t)\,\text{m/s} = -\,0{,}8 \cdot \pi \cdot 1 \cdot \text{sen}\,(40 \cdot \pi \cdot t)\ \text{m/s}$$

Su valor máximo: $v_{\text{máximo}} = 0{,}8 \cdot \pi$ m/s, lógico ya que es un vientre.

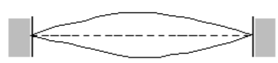
**15. Una cuerda tensa, fija por sus dos extremos, tiene una longitud *L* = 1,2 m. Cuando esta cuerda se excita transversalmente a una frecuencia de 80 Hz, se forma una onda estacionaria con dos vientres. Calcula la longitud de onda y la velocidad de propagación de las ondas en esta cuerda. ¿Para qué frecuencia inferior a la dada se formará otra onda estacionaria en la cuerda? Representa esta onda.**

a) La onda estacionaria que se propaga por una cuerda fija por los extremos tiene nodos en esos extremos. Como la cuerda presenta dos vientres, el número de nodos es igual a tres y la longitud de la cuerda es igual a la longitud de onda de la onda estacionaria formada.



$L = \lambda = 1{,}2$ m

La velocidad de propagación es: $v = \lambda \cdot \nu = 1{,}2\ \text{m} \cdot 80\ \text{Hz} = 96\ \text{m/s}$



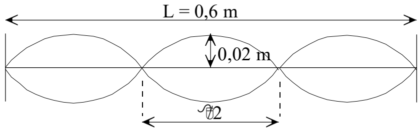
b) La onda de menor frecuencia es la que tiene dos nodos en los extremos y solamente un vientre. En este caso la longitud de la cuerda es igual a la mitad de la longitud de onda.

$L = \lambda/2$; $1{,}2\ \text{m} = \lambda/2 \Rightarrow \lambda = 2{,}4$ m

Y la frecuencia es: $\nu = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{96\,\text{m/s}}{2{,}4\,\text{m}} = 40\,\text{Hz}$

**16. Una cuerda de 60 cm de longitud tiene sus dos extremos fijos y oscila en un modo con dos nodos internos y una frecuencia de 200 Hz. El punto central de la cuerda oscila con una amplitud de 2 cm. Calcula la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda. ¿Cuál es la máxima velocidad del punto central de la cuerda. Determina la amplitud de oscilación de un punto de la cuerda situado a 5 cm de uno de sus extremos.**

En la cuerda fija por los extremos se forma la onda estacionaria de la figura adjunta, de donde se deduce que la longitud de la cuerda contiene 3 similongitudes de onda por lo que:




$L = 3\ \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}L = \frac{2}{3}0{,}60\,m = 0{,}40\,m$

La velocidad de propagación de la onda por la cuerda es:

$v = \lambda \cdot \nu = 0{,}4\ m \cdot 200\ Hz = 80\ m/s$

La ecuación general de una onda estacionaria es:

$y = 2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \text{sen}(k \cdot x)$

Y la velocidad de vibración de un elemento de la cuerda es:

$v = \frac{dy}{dt} = -\ 2 \cdot A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \text{sen}(k \cdot x)$

Siendo su valor máximo: $v_{máximo} = -\ 2 \cdot A \cdot \omega \cdot \text{sen}(k \cdot x) = -\ 2 \cdot A \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \text{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} x\right)$

Como el punto central es un vientre de coordenada x = 0,3 m, resulta que:

$v_{x = 0,3;\ máximo} = -\ 2 \cdot 0{,}02\ m \cdot 2 \cdot \pi \cdot 200\ Hz \cdot \text{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{0{,}4\,m} 0{,}3\,m\right) = 50{,}27\ m/s$

Aplicando la ecuación general de la onda estacionaria al punto considerado, resulta que:

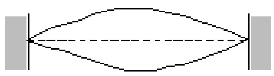
$y = 2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \text{sen}(k \cdot x)$

La amplitud resultante de un punto de la cuerda es: $A_r = 2 \cdot A \cdot \text{sen}(k \cdot x)$

Y para el punto considerado: $A_{r(x = 5\ cm)} = 2 \cdot 0{,}02\ m \cdot \text{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{0{,}4\,m} 0{,}05\,m\right) = 2{,}8 \cdot 10^{-2}\ m$

**17. Una cuerda de 3 m de longitud está sujeta por los extremos vibra con una frecuencia de 252 Hz. La siguiente frecuencia de vibración es de 336 Hz. Calcula la frecuencia fundamental de vibración.**

En una cuerda fija por los extremos se cumple que su longitud es igual a un múltiplo de la mitad de la longitud de onda:



$L = n\frac{\lambda}{2};\ \lambda = \frac{2 \cdot L}{n}$ con n = 1, 2, 3, .....

Que se corresponden con las siguientes frecuencias de vibración.

$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{2 \cdot L}{n}} = n \cdot \frac{v}{2 \cdot L}$ con n = 1, 2, 3, .....

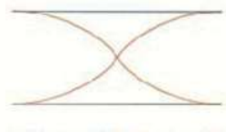
Si la frecuencia de 252 Hz es el armónico n, la de 336 Hz es la n + 1.

$$\left.\begin{array}{l} \nu_n = n \cdot \frac{v}{2 \cdot L} = 252\,Hz \\ \nu_{n+1} = (n+1) \cdot \frac{v}{2 \cdot L} = 336\,Hz \end{array}\right\} \frac{252\,Hz}{336\,Hz} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow n = 3$$

Y su relación con la fundamental: $\nu_3 = 3 \cdot \nu_1$; $252\ Hz = 3 \cdot \nu_1 \Rightarrow \nu_1 = 84\ Hz$

**18. Un tubo sonoro tiene una longitud de 0,68 m y se encuentra con sus extremos abiertos a la atmósfera. Calcula la menor frecuencia de excitación sonora para la que se formen ondas estacionarias en su interior. Cuál es el valor de la longitud de onda? Representa la onda estacionaria dentro del tubo.**

En un tubo sonoro se forman vientres en los extremos abiertos. La onda estacionara que se forma es tal que la longitud del tubo es igual a un múltiplo de la semilongitud de onda.



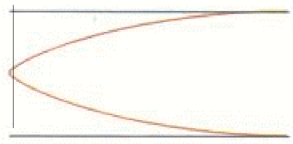
$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

Para la frecuencia fundamental n = 1, por tanto: $L = \frac{\lambda}{2};\ 0{,}68\,m = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 1{,}36\,m$

Y la frecuencia fundamental es: $v = \lambda \cdot \nu$; 340 m/s = 1,36 m $\cdot\ \nu \Rightarrow \nu$ = 250 Hz

**19. La frecuencia fundamental de un tubo de órgano cerrado por un extremo es de 220 Hz. Calcula la longitud del tubo.**

En un tubo sonoro se forma un vientre en el extremo abierto y un nodo en el cerrado. La onda estacionara que se forma es tal que la longitud del tubo es igual a un múltiplo impar de la cuarta parte de la longitud de onda.



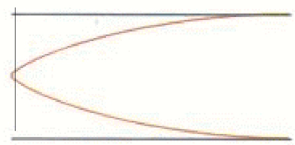
$$L = (2\cdot n + 1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{4\cdot L}{2\cdot n + 1}$$

Y la frecuencia fundamental, n = 0, es: $\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{4\cdot L}{2\cdot n+1}} = (2\cdot n + 1)\frac{v}{4\cdot L} \Rightarrow \nu_1 = \frac{v}{4\cdot L}$

Sustituyendo: $220 Hz_1 = \frac{340 m/s}{4\cdot L} \Rightarrow L = 0{,}39\,m$

**20. Un tubo sonoro tiene una longitud de 68 cm y está cerrado por un extremo. Calcula la menor frecuencia de excitación sonora para la que se formen ondas estacionarias en su interior. Cuál es el valor de la longitud de onda? Representa la onda estacionaria dentro del tubo.**

En un tubo sonoro se forma un vientre en el extremo abierto y un nodo en el cerrado. La onda estacionara que se forma es tal que la longitud del tubo es igual a un múltiplo impar de la cuarta parte de la longitud de onda.



$$L = (2\cdot n + 1)\frac{\lambda}{4}$$

Para la frecuencia fundamental n = 1, por tanto: $L = \frac{\lambda}{4};\ 0{,}68\,m = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 2{,}72\,m$

Y la frecuencia fundamental es: $v = \lambda \cdot \nu$; 340 m/s = 2,72 m $\cdot\ \nu \Rightarrow \nu$ = 125 Hz

**21. El silbato de un tren, que se desplaza con una velocidad de 108 km/h, emite con una frecuencia de 60 Hz. Calcula la frecuencia que percibirá un observador en reposo al acercarse y al alejarse el tren.**

La velocidad del vehículo es: v = 108 km/h = 30 m/s.

a) El observador percibe un sonido de una frecuencia mayor cuando se acerca el tren. Aplicando la ecuación general del efecto Doppler, se tiene que la velocidad del observador es igual a cero y la del vehículo + 30 m/s.

$$\nu' = \nu\ \frac{v\ +\ v_{observador}}{v\ -\ v_{foco}} = 60\ Hz\ \frac{340\ m/s\ +\ 0\ m/s}{340\ m/s\ -\ (+\ 30\ m/s)} = 65{,}8\ Hz$$

b) El observador percibe un sonido de una frecuencia menor cuando se aleja el tren. Aplicando la ecuación general del efecto Doppler, se tiene que la velocidad del observador es igual a cero y la del vehículo - 30 m/s.

$$\nu' = \nu \frac{v + v_{observador}}{v - v_{foco}} = 60 \text{ Hz} \frac{340 \text{ m/s} + 0 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - (-30 \text{ m/s})} = 55{,}1 \text{ Hz}$$

**22. Una sirena de una fábrica emite con una frecuencia de 500 Hz. Calcula la frecuencia que percibirá un observador cuando se acerque a la sirena con una velocidad de 10 m/s y cuando se aleja de ella.**

a) El observador percibe un sonido de una frecuencia mayor cuando se acerca a la sirena. Aplicando la ecuación general del efecto Doppler, se tiene que la velocidad del observador es igual + 10 m/s y la del foco 0 m/s.

$$\nu' = \nu \frac{v + v_{observador}}{v - v_{foco}} = 500 \text{ Hz} \frac{340 \text{ m/s} + (+10 \text{ m/s})}{340 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s})} = 514{,}7 \text{ Hz}$$

b) El observador percibe un sonido de una frecuencia menor cuando se aleja de la sirena. Aplicando la ecuación general del efecto Doppler, se tiene que la velocidad del observador es igual a – 10 m/s y la del foco 0 m/s.

$$\nu' = \nu \frac{v + v_{observador}}{v - v_{foco}} = 500 \text{ Hz} \frac{340 \text{ m/s} + (-10 \text{ m/s})}{340 \text{ m/s} - 00 \text{ m/s})} = 485{,}3 \text{ Hz}$$

**23. Una ambulancia que lleva una velocidad de 40 m/s, y su sirena emite un sonido con una frecuencia de 400 Hz, se cruza con un automóvil que transita en sentido contrario con una velocidad de 25 m/s. ¿Qué frecuencia percibirá el conductor del automóvil cuando se aproximan los vehículos y cuando se alejan?**

a) El observador percibe un sonido de una frecuencia mayor cuando se acercan los vehículos. Aplicando la ecuación general del efecto Doppler, se tiene que la velocidad del observador + 25 m/s y la de la ambulancia + 40 m/s.

$$\nu' = \nu \frac{v + v_{observador}}{v - v_{foco}} = 400 \text{ Hz} \frac{340 \text{ m/s} + 25 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - (+40 \text{ m/s})} = 487 \text{ Hz}$$

b) El observador percibe un sonido de una frecuencia menor cuando se alejan los vehículos. Aplicando la ecuación general del efecto Doppler, se tiene que la velocidad del observador - 25 m/s y la de la ambulancia - 40 m/s.

$$\nu' = \nu \frac{v + v_{observador}}{v - v_{foco}} = 400 \text{ Hz} \frac{340 \text{ m/s} + (-25 \text{ m/s})}{340 \text{ m/s} - (-40 \text{ m/s})} = 332 \text{ Hz}$$

**24. El conductor de un vehículo, que lleva una velocidad de 30 m/s, hace sonar el claxon que emite en una frecuencia de 300 Hz. Si frente al vehículo hay una montaña, calcula la frecuencia del eco que percibe el conductor.**

En este ejemplo se presenta un efecto Doppler doble. En primer lugar un foco móvil, el vehículo, emite ondas sonoras hacia un receptor fijo, la montaña. A continuación la pared reflectora hace de emisor fijo, y el conductor de receptor en movimiento.

a) En el primer efecto Doppler, el foco, que tiene una velocidad de + 30 m/s, se acerca al observador, en reposo, por lo que la frecuencia que recibe la montaña es mayor que la emitida.

$$\nu_1 = \nu \frac{v + v_{observador}}{v - v_{foco}} = 300 \text{ Hz} \frac{340 \text{ m/s} + 0 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - (+30 \text{ m/s})} = 329 \text{ Hz}$$

b) En el segundo efecto Doppler, el observador se acerca, con una velocidad de + 30 m/s, hacia un foco, en reposo, que emite ondas sonoras con una frecuencia de 329 Hz, por lo que vuelve a aumentar la frecuencia percibida..

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{v + v_{observador}}{v - v_{foco}} = 329 \text{ Hz} \frac{340 \text{ m/s} + (+30 \text{ m/s})}{340 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s}} = 358 \text{ Hz}$$

**25. Un observador situado en el andén de una estación percibe el sonido del silbato de un tren que se acerca con una frecuencia de 704 Hz y al alejarse aprecia que la frecuencia es de 619 Hz. Calcula la velocidad del tren y la frecuencia del silbato.**

Aplicando la ecuación general del efecto Doppler, se tiene que la velocidad del observador es igual a cero y que la velocidad del tren cuando se acerca es + $v_{foco}$ y cuando se aleja – $v_{foco}$.

Al acercarse: $\nu_{acercarse} = \nu \frac{v + v_{observador}}{v - v_{foco}}$; $704 \text{Hz} = \nu \frac{340 \text{ m/s} + 0 \text{m/s}}{340 \text{ m/s} - (+v_{foco})}$

Al alejarse: $\nu_{alejarse} = \nu \frac{v + v_{observador}}{v - v_{foco}}$; $619 \text{Hz} = \nu \frac{340 \text{ m/s} + 0 \text{m/s}}{340 \text{ m/s} - (-v_{foco})}$

Dividiendo miembro a miembro: $\frac{704 \text{Hz}}{619 \text{Hz}} = \frac{\frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - v_{foco}}}{\frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} + v_{foco})}}$; $\frac{704 \text{Hz}}{619 \text{Hz}} = \frac{340 \text{m/s} + v_{foco}}{340 \text{m/s} - v_{foco}}$

Despejando: $v_{foco}$ = 21,8 m/s

Y sustituyendo, se tiene que la frecuencia del silbato es:

$$704 \text{Hz} = \nu \frac{340 \text{ m/s} + 0 \text{m/s}}{340 \text{ m/s} - (+21{,}8 \text{m/s})} \Rightarrow \nu = 659 \text{ Hz}$$

**26. Un observador está en reposo, justifica si el sonido que percibe al acercarse un vehículo es más grave o más agudo.**

Cuando un foco sonoro se acerca a un observador en reposo, el foco intenta alcanzar a las ondas que emite y el observador recibe más ondas en la unidad de tiempo y percibe una frecuencia aparente mayor que la real de la fuente, tornándose el sonido más agudo.

## UNIDAD 4:Campo eléctrico

### CUESTIONES INICIALES-PÁG. 101

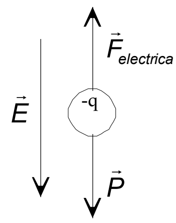
**¿Por qué razón unos trocitos de papel se adhieren a un bolígrafo previamente frotado en la manga de un jersey?**
La varilla electrizada crea un campo eléctrico que al actuar sobre las moléculas polares del papel, separa sus cargas y las alinea. Como la alineación se opone al campo externo, en la zona del papel próxima a la varilla aparece una carga inducida de signo contrario al de ésta. A continuación la atracción de cargas de distinto signo es la responsable de que los trozos de papel ligeros se acerquen a la varilla.

**2. La carga eléctrica es una propiedad de la materia. Sin embargo, cuando interaccionan dos objetos extensos no se tiene en cuenta la interacción eléctrica, ¿por qué?**
La materia considerada macroscópicamente es eléctricamente neutra. Por ello, la interacción eléctrica entre dos objetos es igual a cero.

**3. ¿Cuál es la primera diferencia que se encuentra entre la interacción entre cargas eléctricas y la interacción entre masas?**
La interacción entre masas es siempre atractiva. Sin embargo la interacción entre cargas eléctricas puede ser atractiva o repulsiva, dependiendo del signo de las mismas.

### ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 126

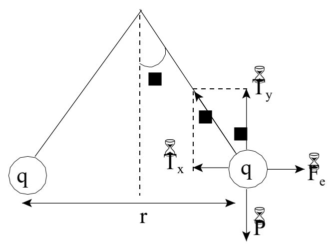
**1. Una partícula que tiene una masa de 1,5 g y una carga eléctrica de – 24 µC está en equilibrio en el seno de un campo eléctrico vertical. Calcula el módulo y el sentido del campo eléctrico.**
Sobre la partícula actúan su peso y la fuerza eléctrica. Como se encuentra en reposo, entonces la fuerza eléctrica tiene sentido contrario al peso. La fuerza eléctrica que actúa sobre las cargas negativas tiene sentido contrario al campo, por tanto el campo eléctrico tiene el mismo sentido que el peso.




$\Sigma\vec{F}_y = 0; \vec{F}_{eléctrica} + \vec{P} = 0;$ $F_{eléctrica} = P;$ $|q| \cdot E = m \cdot g$

Sustituyendo: $24 \cdot 10^{-6}$ C · E = $1,5 \cdot 10^{-3}$ kg · 9,8 m/s$^2$ $\Rightarrow$ E = 612,5 N/C

**2. En los extremos de dos hilos de masa despreciable y longitud L = 1 m están sujetas dos pequeñas esferas de masa m = 10 g y carga q. Los hilos forman un ángulo de 30º con la vertical. Dibuja el diagrama de las fuerzas que actúan sobre las esferas y determine el valor de la carga q. Si se duplica el valor de las cargas, pasando a valer 2q, ¿qué valor deben tener las masas para que no se modifique el ángulo de equilibrio de 30º?**
Sobre cada una de las bolas actúan su peso, la tensión del hilo y la fuerza eléctrica. Aplicando la condición de equilibrio de traslación se tiene que:




$$\Sigma\vec{F} = 0; \begin{cases} T_x = F_{eléctrica} \\ T_y = P \end{cases}; \begin{cases} T \cdot sen\varphi = \dfrac{K \cdot |q| \cdot |q|}{r^2} \\ T \cdot cos\varphi = m \cdot g \end{cases}$$

Dividiendo: $tag\,\varphi = \dfrac{K \cdot q^2}{m \cdot g \cdot r^2} \Rightarrow q = r \cdot \sqrt{\dfrac{m \cdot g \cdot tag\,\varphi}{K}}$

Si la longitud del hilo es L y como cada bola se separa de la vertical un ángulo ϕ, la distancia entre ellas es: r = 2 · L · sen ϕ. Sustituyendo:

$$q = 2 \cdot 1\ m \cdot sen\ 30º \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-3}\ kg \cdot 9,8\ m/s^2 \cdot tag\,30º}{9 \cdot 10^9\ N \cdot m^2/C^2}} = 2,5 \cdot 10^{-6}\ C$$

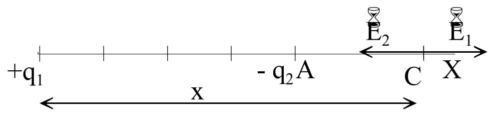
Las dos cargas tienen el mismo signo, positivo o negativo.
Utilizando la ecuación de la tangente del ángulo en la situación inicial y en la modificada que se denota como prima y como la distancia entre las cargas es la misma en los dos casos, resulta que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tag}\,\varphi = \dfrac{K\cdot q^2}{m\cdot g\cdot r^2} \\ \text{tag}\,\varphi = \dfrac{K\cdot q'^2}{m'\cdot g\cdot r^2} \end{array}\right\} 1 = \frac{q^2\cdot m'}{m\cdot q'^2} \Rightarrow m'\cdot q^2 = m\cdot q'^2$$

Por tanto: $m'\cdot q^2 = m\cdot(2\cdot q)^2$  $m' = 4\cdot m$
Las masas de las partículas se deben multiplicar por cuatro.

**3. En el origen de coordenadas hay una carga eléctrica $q_1$ = + 27 nC y en el punto A (4, 0) otra carga eléctrica $q_2$ = - 3 nC. a) ¿Hay algún punto del espacio en el que se anule el campo eléctrico? Determínalo.**

De la situación de las cargas se deduce que el campo eléctrico se anulará en algún punto de la recta que las une, es decir, en el eje X.

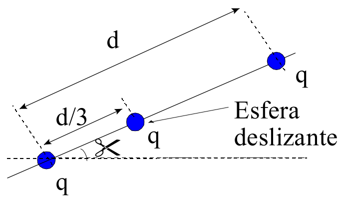



Sea x la coordenada la coordenada de un punto C en el que se anula el campo. Los módulos de los campos eléctricos creados por cada una de las cargas deben ser iguales.

$$E_1 = E_2;\ \frac{K\cdot q_1}{r_1^2} = \frac{K\cdot q_2}{r_2^2};\ \frac{27\,\text{nC}}{x^2} = \frac{3\,\text{nC}}{(x-4)^2};$$

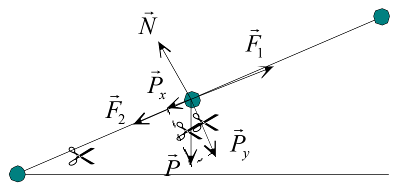
$9\,(x-4)^2 = x^2$; 3 Α x - 12 = x Ψ x = 6 m
El punto C en el que se anula el campo eléctrico tiene de coordenadas C (6, 0)

**4. Tres pequeñas esferas metálicas provistas de un orificio central se engarzan en un hilo de fibra aislante. Las dos esferas de los extremos se fijan a la fibra separadas una distancia d = 50 cm, mientras que la intermedia puede desplazarse libremente entre ambas a lo largo del hilo. La masa de dichas esferas es m = 30 g y se cargan con la misma carga q = 1 μC. Calcula la posición de equilibrio de la esfera intermedia en el caso de que la fibra se coloque horizontalmente. Si se coloca colocamos ahora el hilo de manera que forme un cierto ángulo α > 0 con la horizontal se observa que la esfera intermedia se coloca a una distancia d/3 de la inferior tal como indica la figura. Calcule el valor del ángulo α.**




Si la fibra está horizontal la esfera intermedia está en equilibrio cuando se coloque a la misma distancia de las otras dos, es decir, cuando está situada en el punto medio del segmento que une a las dos esferas de los extremos.

Como las bolitas tienen cargas del mismo signo, se repelen unas de las otras. Sobre la bolita intermedia actúa: su peso, la fuerza normal con que actúa la fibra, la fuerza con que le repele la carga inferior y la fuerza con que lo hace la bola superior. En estas condiciones la bolita está en equilibrio.




Se elige un sistema de referencia con el eje X paralelo a la dirección del hilo y el eje Y la perpendicular a dicho hilo. Descomponiendo el peso en componentes y aplicando las condiciones de equilibrio, resulta que:

$\Sigma\vec{F}_x = 0; \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P}_x = 0$ ; $F_1 = F_2 + P_x$;

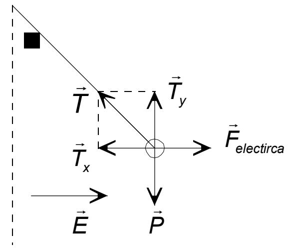
Aplicando la ley de Coulomb: $\dfrac{K\cdot|q|^2}{(d/3)^2} - \dfrac{K\cdot|q|^2}{(2d/3)^2} = m\cdot g\cdot \text{sen}\alpha$

Operando: $\dfrac{9\cdot K\cdot|q|^2}{d^2}\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=m\cdot g\cdot sen\alpha \Rightarrow sen\alpha=\dfrac{27\cdot K\cdot|q|^2}{4\cdot d^2\cdot m\cdot g}$

Sustituyendo: $\alpha = \text{arc sen}\,\dfrac{27\cdot 9\cdot 10^9\,N\cdot m^2/C^2\cdot(1\cdot 10^{-6}C)^2}{4\cdot(0{,}5m)^2\cdot 30\cdot 10^{-3}kg\cdot 9{,}8m/s^2}=55{,}74º$

**5. Una partícula, que tiene una masa de 0,5 g y una carga de 3,6 µC cuelga de un hilo en el seno de un campo eléctrico horizontal de módulo 800 N/C. Calcula el ángulo que forma el hilo con la vertical.**

Sobre la bolita actúan su peso, la fuerza eléctrica y la tensión del hilo. Eligiendo un sistema de referencia con el eje X la horizontal y el eje Y la vertical y aplicando la condición de equilibrio:




$\Sigma\vec{F}_x=0;\vec{T}_x + \vec{F}_{eléctrica} = 0; T_x = F_{eléctrica} \Rightarrow$ T A sen ν = |q| A E

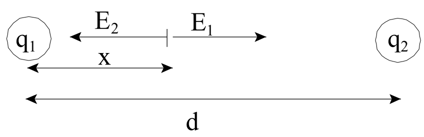
$\Sigma\vec{F}_y=0;\vec{T}_y + \vec{P} = 0; 0\ T_y = P \Rightarrow$ T A cos ν = m A g

Dividiendo: $tg\varphi=\dfrac{|q|\cdot E}{m\cdot g}=\dfrac{3{,}6\cdot 10^{-6}\,C\cdot 800\,N/C}{0{,}5\cdot 10^{-3}\,kg\cdot 9{,}8\,m/s^2}\Rightarrow \phi = 30{,}4º$

**6. Dos cargas de + 1 µC y + 4 µC están fijas en sendos puntos que distan 6 cm. ¿Dónde podría dejarse libremente una carga de + 3 µC para que permaneciera en reposo? Calcula la energía potencial de esa carga. Si se desplaza la carga de + 3 µC perpendicularmente a la línea que une a las otras dos, ) volverá a la posición de equilibrio? Dibuja las fuerzas que actúan.**

a) La carga de + 3 µC permanece en reposo en aquellos puntos en los que el campo sea nulo. Como las dos cargas fijas tienen el mismo signo, el campo eléctrico es nulo en algún punto situado en el segmento que une las cargas.

Supongamos que este punto P está situado a una distancia x de la carga $q_1$ = + 1 µC. En este punto los módulos de los campos eléctricos creados por cada una de las cargas fijas son iguales.




$E_1 = E_2;\ K\dfrac{q_1}{r_1^2}=K\dfrac{q_2}{r_2^2}\ ;\ \dfrac{1\,\mu C}{x^2}=\dfrac{4\,\mu C}{(6-x)^2}$

Operando: 6 - x = 2 x Ψ x = 2 m

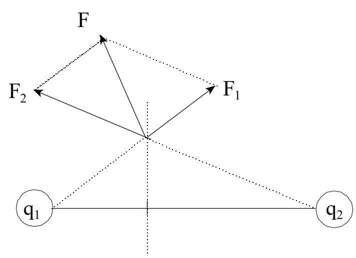
La carga permanece en reposo en el segmento que las une y a 2 m de la de 1 µC.

b) La energía potencial asociada a esa carga es, la suma de las energías potenciales asociadas a la presencia de cada una de las otras dos cargas.

$Ep = Ep_1 + Ep_2 = = K\dfrac{q_1 q_3}{r_1}+K\dfrac{q_2 q_3}{r_2}=$

$=9\cdot 10^9\dfrac{N\,m^2}{C^2}\cdot 3\cdot 10^{-6}\,C\left[\dfrac{1\cdot 10^{-6}\,C}{2\,m}+\dfrac{4\cdot 10^{-6}\,C}{4\,m}\right]=40{,}5\cdot 10^{-3}\,J$

c) Al desplazar la carga perpendicularmente a la posición de equilibrio, actúa una fuerza sobre la carga que tiende a alejarla de la posición de las otras dos.




Para conocer su módulo, dirección y sentido, habría que calcular las componentes de cada una de las fuerzas y sumarlas vectorialmente.

El dibujo es simplemente esquemático.

**7. Si el flujo de un campo eléctrico a través de una superficie cerrada es cero, ) pueden existir cargas eléctricas en el interior de dicha superficie? Razone la respuesta.**

Según la ley de Gauss el flujo de un campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica total encerrada en dicha superficie: $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{interior}}{\varepsilon}$

Por tanto, dentro de la superficie pueden existir cargas eléctricas, pero de suma de las positivas y de las negativas tiene que ser igual a cero.

**8. Aplicando el teorema de Gauss obtén razonadamente el flujo del campo eléctrico sobre la superficie de un cubo de lado a en los siguientes casos: a) Una carga *q* se coloca en el centro del cubo. b) La misma carga *q* se coloca en un punto diferente del centro pero dentro del cubo. c) La misma carga *q* se coloca en un punto fuera del cubo.**

La ley de Gauss dice que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada en dicha superficie.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{interior}}{\varepsilon}$$

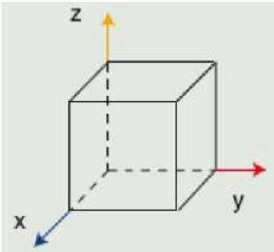
Un cubo es una superficie cerrada y el flujo del campo eléctrico a través de sus caras no depende del lugar en el que se sitúen las cargas en su interior. Por tanto, en los casos a y b el flujo del campo eléctrico que atraviesa la superficie del cubo es el mismo.

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon}$$

En el caso c el flujo del campo eléctrico que atraviesa la superficie del cubo es igual a cero, ya que la carga está situada en el exterior. Todas las mismas líneas de campo eléctrico que penetran en la superficie del cubo salen de ella.

$$\Phi_E = 0$$

**9. Un cubo de lado 0,3 m está colocado con un vértice en el origen de coordenadas, como se muestra la figura. Se encuentra en el seno de un campo eléctrico no uniforme, que viene dado por $\vec{E} = (-5x\,\vec{i} + 3z\,\vec{k})\,N/C$. Halla el flujo eléctrico a través de las seis caras del cubo. Determina la carga eléctrica total en el interior del cubo. Nota: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ C^2/N{\cdot}m^2$**




a) Se define flujo de un campo eléctrico a través de una superficie como:

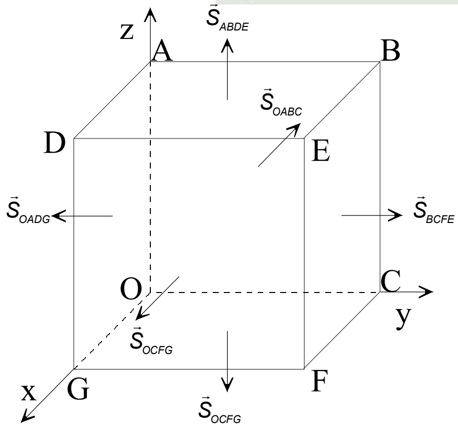
$$\phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E \cdot dS \cdot \cos\varphi$$

Las caras del cubo tienen de módulo S = 0,09 m² y sus expresiones vectoriales son:

$$\vec{S}_{ABDE} = S \cdot \vec{k};\ \ \vec{S}_{OCFG} = S \cdot (-\vec{k})$$

$$\vec{S}_{EBCF} = S \cdot \vec{j};\ \ \vec{S}_{OGDA} = S \cdot (-\vec{j})$$

$$\vec{S}_{DEFG} = S \cdot \vec{i};\ \ \vec{S}_{OABC} = S \cdot (-\vec{i})$$




A través de las caras OABC y DEFG solamente atraviesa el flujo del campo eléctrico debido a su componente x $(\vec{k} \cdot \vec{i} = 0)$.

$$\phi_{OABC} = (-5 \cdot 0 \cdot \vec{i})\frac{N}{C} \cdot 0{,}09 \cdot (-\vec{i})m^2 = 0\frac{N \cdot m^2}{C};$$

$$\phi_{DEFG} = (-5 \cdot 0{,}3 \cdot \vec{i})\frac{N}{C} \cdot 0{,}09 \cdot \vec{i}\,m^2 = -0{,}135\frac{N \cdot m^2}{C}$$

El flujo del campo eléctrico a través de las caras OADG y BCFE es igual a cero, y que el campo no tienen componente a lo largo del eje Y $(\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0)$

A través de las caras ABED y OCFG solamente atraviesa el flujo del campo eléctrico debido a su componente z $(\vec{i}\cdot\vec{k}=0)$.

$$\phi_{OCFG}=3\cdot 0\cdot\vec{k}\frac{N}{C}\cdot 0{,}09\cdot(-\vec{k})m^2=0\frac{N\cdot m^2}{C};\quad \phi_{BEDA}=3\cdot 0{,}3\cdot\vec{k}\frac{N}{C}\cdot 0{,}09\cdot\vec{k}\,m^2=0{,}081\frac{N\cdot m^2}{C}$$

El flujo total es igual a la suma de los flojos que pasan por todas las caras:

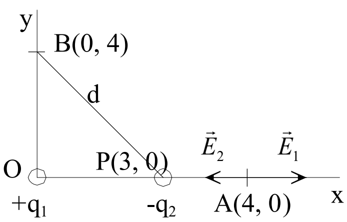
$$\phi=-0{,}135\frac{N\cdot m^2}{C}+0{,}081\frac{N\cdot m^2}{C}=-0{,}054\frac{N\cdot m^2}{C}$$

b) La ley de Gauss indica que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica total encerrada en dicha superficie.

$$\Phi_E=\frac{Q_{int\,erior}}{\varepsilon}\Rightarrow Q_{int\,erior}=\Phi_E\cdot\varepsilon=-0{,}054\frac{N\cdot m^2}{C}\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\frac{C^2}{N\cdot m^2}=-4{,}8\cdot 10^{-13}C$$

**10. Una carga positiva, $q_1$ = 8A10$^{-9}$ C, está fija en el origen de coordenadas, mientras que otra carga, $q_2$ = –10$^{-9}$ C, se halla, también fija, en el punto (3, 0), estando todas las coordenadas expresadas en m. Determina el campo eléctrico, debido a ambas cargas, en el punto A (4, 0) y el trabajo que las fuerzas del campo realizan para desplazar una carga puntual q = - 2A10$^{-9}$ C, desde A hasta el punto B (0, 4). Comente el resultado que obtenga.**

a) Una carga puntual genera un campo eléctrico en un punto del espacio de módulo $E=K\frac{|q|}{r^2}$, de dirección la recta que une la carga con el punto y de sentido alejándose de la carga si es positiva y hacia ella si es negativa.




La expresión vectorial de los campos que crean cada una de las cargas eléctricas en el punto A son:

$$\vec{E}_1=9\cdot 10^9\frac{N\cdot m^2}{C^2}\frac{8\cdot 10^{-9}C}{(4m)^2}\vec{i}=4{,}5\,\vec{i}\frac{N}{C};\ \vec{E}_2=9\cdot 10^9\frac{N\cdot m^2}{C^2}\frac{10^{-9}C}{(1m)^2}(-\vec{i})=-9\,\vec{i}\frac{N}{C}$$

Aplicando el principio de superposición, el campo total es la suma vectorial de los dos campos.

$$\vec{E}_{total}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=4{,}5\cdot\vec{i}\,N/C-9\cdot\vec{i}\,N/C=-4{,}5\cdot\vec{i}\,N/C$$

b) La fuerza eléctrica es una fuerza conservativa, el trabajo que realizan las fuerzas del campo para trasladar una carga es igual a la variación de la energía potencial eléctrica asociadas a las dos distribuciones de las cargas cambiada de signo. Para determinar ese trabajo se calcula el potencial eléctrico en los puntos A y B en ausencia de la carga que se traslada y posteriormente la variación de la energía potencial.

$W_{A\to B}$ = - $\Delta E_p$ = - q · ΔV = - q · ($V_B$ – $V_A$)

El potencial eléctrico en un punto es iguala a la suma de los potenciales eléctricos que crean cada una de las cargas.

$$V_A=V_{1A}+V_{2A}=\frac{K\cdot q_1}{r_{1A}}+\frac{K\cdot q_2}{r_{2A}}=9\cdot 10^9\frac{N\cdot m^2}{C^2}\left(\frac{8\cdot 10^{-9}C}{4\,m}+\frac{-10^{-9}\,C}{1m}\right)=9\,V$$

$$V_B=V_{1B}+V_{2B}=\frac{K\cdot q_1}{r_{1B}}+\frac{K\cdot q_2}{r_{2B}}=9\cdot 10^9\frac{N\cdot m^2}{C^2}\left(\frac{8\cdot 10^{-9}C}{4\,m}+\frac{-10^{-9}\,C}{\sqrt{(3\,m)^2+(4\,m)^2}}\right)=7{,}2\,V$$

El trabajo que se intercambia en el proceso es:

$W_{A\to B}$ = - q · ($V_B$ – $V_A$) = - (- 2 · $10^{-9}$ C) · (7,2 V – 9 V) = -3,6 · $10^{-9}$ J

El proceso no es espontáneo, un agente externo realiza un trabajo para trasladar a la carga de signo negativo desde el punto A hasta el B que se almacena en forma de energía potencial eléctrica.

**11. Una partícula que tiene una carga eléctrica de 1 µC está situada en el origen de coordenadas. Calcula el trabajo realizado al llevar otra partícula de carga eléctrica $10^{-8}$ C desde el infinito hasta un punto situado a 30 cm de la primera carga.**

La energía potencial eléctrica asociada a las cargas separadas es igual a cero: $E_{p,\infty} = 0$

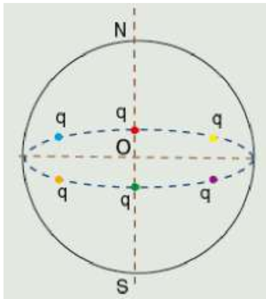
Y cuando está a 30 cm de distancia es:

$$E_{p\,final} = \frac{K q_1 \cdot q_2}{r} = 9 \cdot 10^9\ N \cdot m^2/C^2\ \frac{1 \cdot 10^{-6}\ C \cdot 10^{-8}\ C}{0{,}3\,m} = 3 \cdot 10^{-4}\ J$$

Aplicando la ley de la energía potencial:

$W_{Feléctrica} = -\Delta E_p = -(E_{p\,final} - E_{p\,inicial}) = -(3 \cdot 10^{4}\ J - 0\ J) = -3 \cdot 10^{-4}\ J$

El proceso no es espontáneo como corresponde a acercar cargas eléctricas del mismo signo.

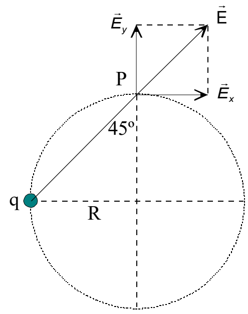



**12. Sobre la circunferencia máxima de una esfera de radio R = 10 m están colocadas equidistantes entre sí seis cargas positivas iguales y de valor q = 2 µC. Calcula el campo y el potencial debidos al sistema de cargas en uno cualquiera de los polos (puntos N y S) y en el centro O de la esfera.**

La distancia de cada carga a los polos es: $r = \sqrt{(10m)^2 + (10m)^2} = 10 \cdot \sqrt{2}\,m$

a) Todas las cargas generan en los polos un campo del mismo módulo.

$$E = \frac{K \cdot |q|}{r^2} = 9 \cdot 10^9\ \frac{N \cdot m^2}{C^2}\ \frac{2 \cdot 10^{-6}\ C}{\left(10 \cdot \sqrt{2}\,m\right)^2} = 90\ \frac{N}{C}$$



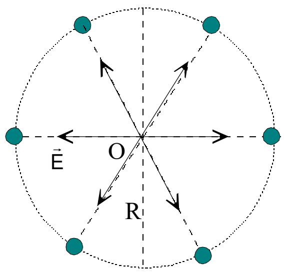

Se elige un sistema de referencia con el origen en el polo N, el eje Y la dirección de los polos y el eje X una perpendicular. Las componentes en el eje X se anulan por simetría y las componentes en Y se refuerzan.

El campo total tiene la dirección del eje que une los polos y su sentido es hacia el exterior de la esfera.

$$E_{polo} = 6 \cdot E \cdot \cos 45º = 6 \cdot 90\ \frac{N}{C} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 270 \cdot \sqrt{2}\ \frac{N}{C}$$

El potencial eléctrico en el polo es igual a la suma de los potenciales eléctricos generados por cada carga.

$$V_{polo} = 6 \cdot V = 6 \cdot \frac{K \cdot q}{r} = 6 \cdot 9 \cdot 10^9\ \frac{N \cdot m^2}{C^2}\ \frac{2 \cdot 10^{-6}\ C}{10 \cdot \sqrt{2}\,m} = 54 \cdot 10^2 \cdot \sqrt{2}\ V$$




b) El campo eléctrico en el centro de la esfera es igual a cero, ya que por simetría se anulan los de cada dos cargas eléctricas opuestas.

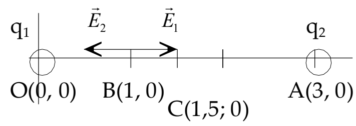
$\vec{E}_{centro} = 0$

El potencial eléctrico en el centro es igual a la suma de los potenciales generados por cada una de las cargas eléctricas.

$$V_{centro} = 6 \cdot V = 6 \cdot \frac{K \cdot q}{r} = 6 \cdot 9 \cdot 10^9\ \frac{N \cdot m^2}{C^2}\ \frac{2 \cdot 10^{-6}\ C}{10\ m} = 10800\ V$$

**13. Dos cargas positivas $q_1$ y $q_2$ se encuentran situadas en los puntos de coordenadas (0,0) y (3,0) respectivamente. Sabiendo que el campo eléctrico es nulo en el punto (1,0) y que el potencial electrostático en el punto intermedio entre ambas vale $9.10^4$ V, determina el valor de dichas cargas. Las coordenadas están expresadas en metros.**

a) Los módulos de los campos eléctricos son iguales en el punto en el que se anula el campo.




$$E_1 = E_2;\ \frac{K \cdot |q_1|}{r_1^2} = \frac{K \cdot |q_2|}{r_2^2};\ \frac{q_1}{(1\text{m})^2} = \frac{q_2}{(2\text{m})^2}$$

El potencial eléctrico en un punto es igual a la suma de los potenciales eléctricos generados por cada una de las cargas.

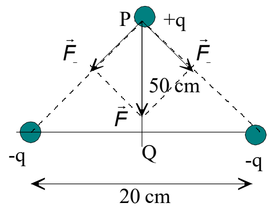
$$V_C = V_{1C} + V_{2C} = \frac{K \cdot q_1}{r_1} + \frac{K \cdot q_2}{r_2};\ 9 \cdot 10^4\ \text{V} = \frac{9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cdot q_1}{1{,}5\,\text{m}} + \frac{9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cdot q_2}{1{,}5\,\text{m}}$$

Operando en las dos ecuaciones se tiene el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 4 \cdot q_1 &= q_2 \\ q_1 + q_2 &= 1{,}5 \cdot 10^{-5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow q_1 = 0{,}3 \cdot 10^{-5}\ \text{C y } q_2 = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{C}$$

**14. Dos cargas puntuales de $-10^{-3}$ μC se encuentran sobre el eje de abscisas a una distancia de 20 cm. A una distancia de 50 cm de la vertical del punto medio que une las cargas anteriores se coloca una partícula de masa 1 g y con una carga de $10^{-3}$ μC. Calcula la velocidad de esta partícula cuando pasa por en punto medio del segmento que une las dos primeras cargas.**

Sea P el punto donde está inicialmente la carga positiva y Q el punto medio del segmento que une las cargas negativas.




La fuerza resultante que actúa sobre la carga positiva tiene la dirección de la mediatriz del segmento que une las cargas y sentido hacia el punto Q.

El potencial eléctrico en los puntos P y Q en ausencia de la carga positiva es:

$$V_P = 2 \cdot K \frac{q}{r_P} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \frac{-10^{-3} \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{\sqrt{(0{,}1\text{m})^2 + (0{,}5\text{m})^2}} = -35{,}3\,\text{V}$$

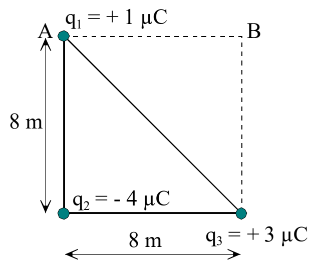
$$V_Q = 2 \cdot K \frac{q}{r_P} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \frac{-10^{-3} \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{0{,}1\text{m}} = -180\,\text{V}$$

Aplicando la ley de la conservación de la energía mecánica:

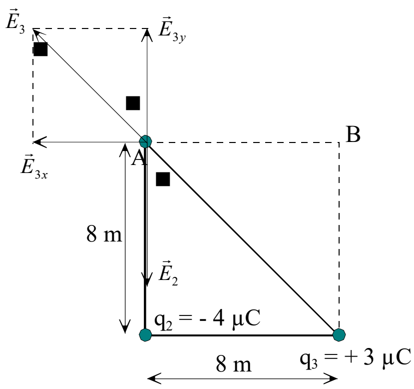
$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$; $\Delta E_c = -\Delta E_p$; $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = -q \cdot (\Delta V) = -q \cdot (V_{final} - V_{inicial})$

$\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot v^2 = -10^{-3} \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot (-180\ \text{V} - (-35{,}5\ \text{V})) \Rightarrow v = 0{,}017$ m/s

**15. Se tienen tres cargas situadas cada una de ellas en tres de los vértices de un cuadrado de 8 m de lado tal como indica la figura. Calcula la fuerza resultante (módulo, dirección y sentido) que actúa sobre la carga situada en el vértice A y el trabajo necesario para trasladar la carga situada en el vértice A hasta el punto B. Interpreta el signo obtenido.**




En primer lugar se calcula el campo eléctrico que crean en el punto A las cargas $q_2$ y $q_3$, para posteriormente calcular la fuerza que actúa sobre cualquier carga colocada en ese lugar.




Se elige un sistema de referencia con el eje X conteniendo al segmento que une las cargas $q_2$ y $q_3$ y el eje Y conteniendo al segmento que une la carga $q_2$ con el punto A.

Cálculo del módulo del campo eléctrico que genera la carga $q_2$ en el punto A.

$$E_2 = \frac{K\cdot|q_2|}{r_2^2} = \frac{9\cdot10^9\,N\cdot m^2/C^2\cdot4\cdot10^{-6}\,C}{(8\,m)^2} = 5{,}625\cdot10^2\,N/C$$

Vectorialmente: $\vec{E}_2 = -5{,}625\cdot10^2\cdot\vec{j}\,N/C$

Cálculo del módulo del campo eléctrico que genera la carga $q_3$ en el punto A.

$$E_3 = \frac{K\cdot|q_3|}{r_2^2} = \frac{9\cdot10^9\,N\cdot m^2/C^2\cdot3\cdot10^{-6}\,C}{\left(\sqrt{(8m)^2+(8m)^2}\right)^2} = 2{,}109\cdot10^2\,N/C$$

Las componentes de este campo eléctrico en el sistema de referencia elegido son:

$$E_{3x} = E_3\cdot\operatorname{sen}\phi = 2{,}109\cdot10^2\,N/C\cdot\frac{8m}{\sqrt{(8m)^2+(8m)^2}} = 1{,}491\cdot10^2\,N/C$$

$$E_{3y} = E_3\cdot\cos\phi = 2{,}109\cdot10^2\,N/C\cdot\frac{8m}{\sqrt{(8m)^2+(8m)^2}} = 1{,}491\cdot10^2\,N/C$$

Cuyas expresiones vectoriales son: $\vec{E}_3 = \left(-1{,}491\cdot10^2\cdot\vec{i} + 1{,}491\cdot10^2\cdot\vec{j}\right)N/C$

Aplicando el principio de superposición el campo total es la suma vectorial de todos los campos.

$$\vec{E}_A = \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = -5{,}625\cdot10^2\cdot\vec{j}\,N/C + \left(-1{,}491\cdot10^2\cdot\vec{i} + 1{,}491\cdot10^2\cdot\vec{j}\right)N/C =$$
$$= \left(-1{,}491\cdot10^2\cdot\vec{i} - 4{,}134\cdot10^2\cdot\vec{j}\right)N/C$$

La fuerza que actúa sobre la carga $q_1$ colocada en A es:

$$\vec{F}_A = q\cdot\vec{E}_A = 1\cdot10^{-6}\,C\cdot\left(-1{,}491\cdot10^2\cdot\vec{i} - 4{,}134\cdot10^2\cdot\vec{j}\right)N/C = \left(-1{,}491\cdot10^{-4}\cdot\vec{i} - 4{,}134\cdot10^{-4}\cdot\vec{j}\right)N$$

El trabajo para trasladar la carga $q_1$ desde el punto A hasta el B es igual a la variación de la energía potencial eléctrica asociada a las dos distribuciones cambiada de signo. Para determinar ese trabajo se calcula al potencial eléctrico en los puntos A y B en ausencia de la carga $q_1$ y posteriormente la variación de la energía potencial.

El potencial eléctrico en el punto es igual a la suma de los potenciales eléctricos que crean en ese punto cada una de las vargas. Los potenciales eléctricos en los puntos A y B debidos a las cargas eléctricas $q_2$ y $q_3$ son:

$$V_A = \frac{K\cdot q_2}{r_{A2}} + \frac{K\cdot q_3}{r_{A3}} = 9\cdot10^9 N\cdot m^2/C^2\left(\frac{(-4\cdot10^{-6}\,C)}{8m} + \frac{3\cdot10^{-6}C}{\sqrt{(8m)^2+(8m)^2}}\right) = -2{,}113\cdot10^3\,V$$

$$V_B = \frac{K\cdot q_2}{r_{B2}} + \frac{K\cdot q_3}{r_{B3}} = 9\cdot10^9 N\cdot m^2/C^2\left(\frac{(-4\cdot10^{-6}\,C)}{\sqrt{(8m)^2+(8m)^2}} + \frac{3\cdot10^{-6}C}{8m}\right) = 1{,}930\cdot10^2\,V$$

Aplicando la ley de la energía potencial:

$W_{A\to B} = -\Delta E_p = -q\cdot\Delta V = -q\cdot(V_B - V_A) = -1\cdot10^{-6}\,C\cdot(1{,}93\cdot10^2\,V - (-2{,}113\cdot10^3\,V)) = -2{,}306\cdot10^{-3}\,J$

El proceso no es espontáneo, un agente externo realiza un trabajo para trasladar la carga eléctrica $q_1$ desde el punto A hasta el B, que se emplea en aumentar la energía potencial de la distribución final respecto de la inicial.

**16. Calcula la velocidad que adquiere una partícula $\alpha$ después de ser acelerada por una diferencia de potencial de 100 000 V. Datos: $m_\alpha$ = 6,64 · $10^{-27}$ kg; $q_\alpha$ = 3,2 · $10^{-19}$ C**

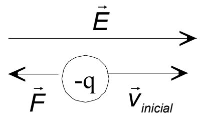
El campo eléctrico es conservativo, por lo que aplicando la ley de conservación de la energía mecánica:

$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$; $\Delta E_c = - \Delta E_p$; $½ \cdot m \cdot v^2 = - q \cdot \Delta V$

Como las partículas positivas se mueven de forma espontánea hacia potenciales decrecientes, resulta que:

$½ \cdot 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg $\cdot v^2 = - 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C $\cdot$ (- 100 000 V) $\Rightarrow v = 3{,}1 \cdot 10^6$ m/s

**17. Un electrón, que lleva una velocidad de 6 · $10^6$ m/s, penetra en un campo eléctrico uniforme y su velocidad se anula después de recorrer una distancia de 20 cm. Calcula el módulo, la dirección y el sentido del campo eléctrico.**




Como el electrón se frena, la fuerza eléctrica lleva la dirección de la velocidad inicial y sentido contrario. Por tanto, el campo eléctrico tiene la misma dirección y sentido que la velocidad inicial.

Como y se ha deducido la dirección y sentido del campo, se trabajará en valores absolutos. Aplicando la ley de la conservación de la energía mecánica: $\Delta E_c + \Delta E_p = 0$

$½ \cdot m \cdot v^2 = |q \cdot \Delta V|$; $½ \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg $\cdot (6 \cdot 10^6$ m/s$)^2 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C $\cdot |\Delta V| \Rightarrow |\Delta V| = 102{,}4$ V

$|\Delta V| = |E \cdot \Delta r|$; 102,4 V = E · 0,2 m $\Rightarrow$ E = 512 N/C

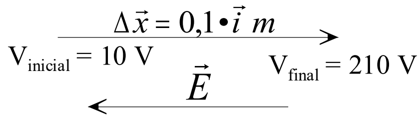
**18. En una región del espacio hay un campo eléctrico uniforme dirigido a lo largo de eje X. Si trasladamos una carga q = + 0,5 C desde un punto cuyo potencial es de 10 V a otro punto situado 10 cm a su derecha, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica es W = - 100 J. Calcula el potencial en el segundo punto y el valor del vector campo eléctrico en dicha región. ¿Qué significado físico tiene el que el trabajo que realiza la fuerza eléctrica tenga signo negativo?**

La fuerza eléctrica es conservativa, por lo que aplicando la ley de la energía potencial:

$W_{F\ eléctrica} = - \Delta E_p = - q \cdot \Delta V = - q \cdot (V_{final} - V_{inicial})$

Sustituyendo: - 100 J = - 0,5 C · ($V_{final}$ - 10 V) $\Rightarrow V_{final}$ = 210 V

El campo eléctrico tiene la dirección y sentido de los potenciales decrecientes. En efecto aplicando la relación entre el campo y el potencial y como el desplazamiento $\Delta\vec{x} = 0{,}1 \cdot \vec{i}\ \mathrm{m}$ tiene la misma dirección que el campo eléctrico y como éste es uniforme ya que la variación del potencial con la distancia es constante, se tiene que:

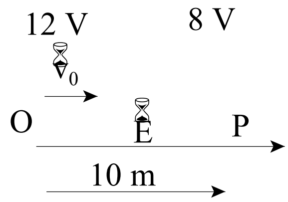



$$\vec{E} = -\frac{\Delta V}{\Delta \vec{x}} = -\frac{210\ \mathrm{V} - 10\ \mathrm{V}}{0{,}1 \cdot \vec{i}\ \mathrm{m}} = -2000 \cdot \vec{i}\ \mathrm{V/m}$$

Las cargas positivas se trasladan de forma espontánea en el sentido del campo, por ello para trasladar una carga positiva en sentido contrario al campo un agente externo tiene que realizar un trabajo, el trabajo de la fuerza eléctrica es negativo, contra las fuerzas del campo que se emplea en aumentar la energía potencial asociada a la carga eléctrica dentro del campo.

**19. En una región del espacio hay un campo eléctrico de dirección la del eje de las abscisas. Si al origen de coordenadas se le asigna un potencial de 12 V, entonces el punto P situado a 10 m del origen tiene un potencial de 8 V. Determina la expresión vectorial del campo eléctrico. Si en el origen de coordenadas se lanza un electrón con una velocidad inicial de 1,19 A $10^{6}$ m/s y de dirección y sentido los del citado eje, determina: la energía cinética del electrón, en el origen, expresada en eV y la velocidad con la que llega al punto P. Comenta el resultado obtenido. Datos: $m_e$ = 9,1 A $10^{-31}$ kg; $e^-$ = - 1,6 A $10^{-19}$ C.**

El campo tiene el sentido de potenciales decrecientes. Al avanzar según el je de las abscisas las líneas del campo y el desplazamiento tienen la misma dirección y sentido. Por tanto, el módulo del campo eléctrico es:




$E \cdot \cos\varphi = -\dfrac{\Delta V}{\Delta r}$ ; $E = -\dfrac{8\ V - 12\ V}{10\ m} = 0{,}4\ \dfrac{V}{m}$

La expresión vectorial del campo es: $\vec{E} = 0{,}4\ \vec{i}$ V/m

Recordando que: 1 eV = 1,6 A $10^{-19}$ C A 1 V = 1,6 A $10^{-19}$ J, se tiene la energía cinética del electrón en el origen de coordenadas es:

$E_c$ = 2 A m A $v^2$ = 2 A 9,1 A $10^{-31}$ kg A (1,19 A $10^6$ m/s)$^2$ = 6,44 A $10^{-19}$ J

Que expresada en eV: $E_c$ = 6,44 A $10^{-19}$ J A $\dfrac{1\,eV}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J}$ = 4 eV

El electrón se frena al entrar en la región dominada por el campo eléctrico. La fuerza eléctrica que actúa sobre el electrón es conservativa, por lo que se aplica la ley de la conservación de la energía mecánica.

$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$; $E_{c,P} - E_{c,O} = -\Delta E_p = -q_e$ A $\Delta V$

Operando: $E_{c,P}$ - 2 $m_e$ A $v_O^2$ = - $q_e$ A ($V_P$ - $V_O$)

La carga del electrón tiene signo negativo.

$E_{c,P}$ = 2 A 9,1 A $10^{-31}$ kg A (1,19 A $10^6$ m/s)$^2$ - (- 1,6 A $10^{-19}$ C) A (- 4 V) = 0

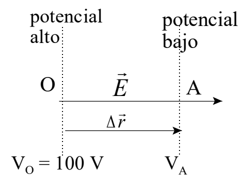
El electrón llega al punto considerado con velocidad igual a cero.

Comentario: Si el electrón sale del origen con una energía cinética de 4 eV y se frena con una diferencia de potencial de 4 V, lo lógico es que se detenga. La variación de su energía potencial ha sido de 4 eV, que se obtiene a costa de disminuir su energía cinética.

A continuación el electrón regresa por el mismo camino y pasa por el origen de coordenadas con una velocidad igual a la inicial, pero con sentido contrario. Se transforma la energía potencial en energía cinética.

**20. En una región del espacio hay un campo eléctrico constante de módulo 500 N/C, de dirección paralela al eje X y sentido hacia la derecha: $\vec{E} = 500\ \vec{i}$ N/C, si al origen de coordenadas O (0, 0) le asignamos un potencial de 100 V, determina el potencial en el punto A (4 m, 0). Calcula el módulo, dirección y sentido de la fuerza que actúa sobre un electrón colocado en el punto A (4 m, 0). Si se deja en libertad al electrón en el punto A (4 m, 0), calcula su velocidad cuando pase por el origen de coordenadas. Datos: $m_{electrón}$ = 9,1 A $10^{-31}$ kg**

a) Aplicando la relación entre el campo y el potencial, resulta que:

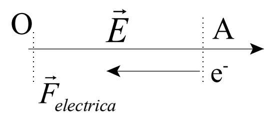



$\Delta V = V_A - V_O = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{r}$

Sustituyendo: $V_A - 100\ V = -500 \cdot \vec{i}\ N/C \cdot 4 \cdot \vec{i}\ m$

Despejando: $V_A$ = - 1 900 V

b) Aplicando la definición de campo eléctrico:




$\vec{E} = q \cdot \vec{E} = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 500 \cdot \vec{i}\ N/C = -8 \cdot 10^{-17} \cdot \vec{i}\ N$

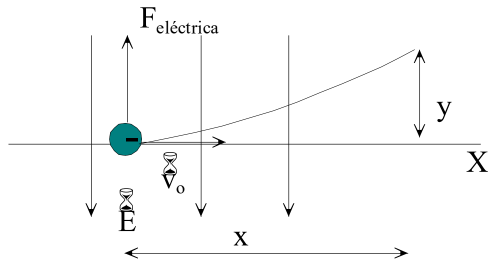
c) Aplicando la ley de conservación de la energía mecánica:

2 A m A $v^2$ = |q| A |ΔV| Ψ

$v = \sqrt{\dfrac{2 \cdot |q| \cdot |\Delta V|}{m}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 2\,000\ V}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg}} = 2{,}65 \cdot 10^7$ m/s

**21. Un electrón que lleva una velocidad de $1 \cdot 10^6$ m/s incide perpendicularmente en un campo eléctrico uniforme, $\vec{E} = -1000 \cdot \vec{j}$ N/C. Representa mediante un esquema la acción de este campo eléctrico sobre los electrones y dibuja su posible trayectoria indicando si se desvían por encima o por debajo de la dirección inicial del electrón. Deduce la ecuación de la trayectoria y calcula la desviación vertical del electrón después de recorrer 15 cm horizontalmente. $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg**

Sobre estos electrones actúa una fuerza perpendicular a su trayectoria y sentido opuesto al del campo eléctrico. Por tanto, los electrones están afectados de un movimiento horizontal con velocidad constante y un movimiento vertical uniformemente acelerado. La composición de estos movimientos hace que se desvíen por encima del eje X siguiendo una trayectoria parabólica.




Si se elige como origen del sistema de referencia el punto del eje X en el que comienza a actuar al campo eléctrico vertical, la posición horizontal y vertical del electrón en cualquier instante es:

$$\left.\begin{array}{l} x = v_0 \cdot t \\ y = \dfrac{1}{2} a \cdot t^2 \end{array}\right\} ; t = \frac{x}{v_0} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\frac{F}{m}\frac{x^2}{v_0^2} = \frac{q \cdot E}{2 \cdot m \cdot v_0^2}\, x^2;\ y = \text{constante} \cdot x^2 \text{; Ecuación de una parábola.}$$

Sustituyendo: $y = \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \cdot 10^3\,\text{N/C}}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot (1 \cdot 10^6\,\text{m/s})^2}\,(0{,}15\,\text{m})^2 = 2\,\text{m}$

## UNIDAD 5: Campo magnético

### CUESTIONES INICIALES-PÁG. 129

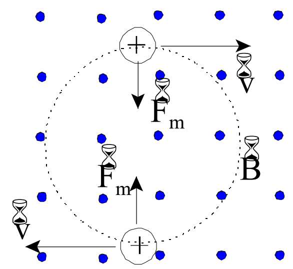
**1. Mediante los fenómenos de electrización se separan las cargas negativas de las positivas. ¿Crees que al cortar un imán por la mitad se separa el polo norte del polo sur?**
Es imposible separar los polos de una barra imán. Siempre que se corta una barra imán, cada trozo obtenido se comporta como un nuevo imán por muy pequeños que sean los pedazos.

**2. Describe el funcionamiento de una brújula.**
La brújula es un pequeño imán que puede girar libremente y por tanto alinearse con el campo magnético terrestre. Por la misma razón sirve para detectar la presencia de cualquier campo magnético.

**3. ¿Existe alguna diferencia entre un imán permanente y un electroimán?**
En los electroimanes el campo magnético es más intenso que en los imanes naturales.

### ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 154

**1. Un protón es acelerado, a lo largo del eje X, desde el reposo por una diferencia de potencial de 15000 V. A continuación accede perpendicularmente a un campo magnético de 0,4 T, perpendicular al plano del papel y dirigido hacia el observador. Dibuja en un esquema la trayectoria de la partícula y calcula el radio y el período de su órbita.**




El campo eléctrico que acelera al protón es conservativo, por lo que la velocidad de la partícula se determina aplicando la ley de la conservación de la energía mecánica.
$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$; $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = q \cdot \Delta V$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 15000\,V}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg}} = 1{,}7 \cdot 10^6\ m/s$$

Al penetrar la partícula en el campo magnético actúa la fuerza de Lorentz, perpendicular al vector velocidad y si ambos son perpendiculares inicialmente entonces el protón describe una trayectoria circular.
Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circular, resulta que:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n;\ F_{Lorentz} = m \cdot \frac{v^2}{R};\ |q| \cdot v \cdot B \cdot \operatorname{sen} 90° = m \frac{v^2}{R}$$

Despejando: $R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg \cdot 1{,}7 \cdot 10^6\,m/s}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 0{,}4\,T} = 4{,}44 \cdot 10^{-2}\,m$

Y el periodo del movimiento es:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{|q| \cdot B} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 0{,}4\,T} = 1{,}64 \cdot 10^{-7}\,s$$

**2. Un electrón y un protón acceden, con la misma velocidad, perpendicularmente a una zona en la que existe un campo magnético. Calcula la relación entre sus velocidades angulares.**
Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circular de una partícula:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n;\ F_{Lorentz} = m \cdot \frac{v^2}{R};\ |q| \cdot v \cdot B \cdot \operatorname{sen} 90° = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B}$$

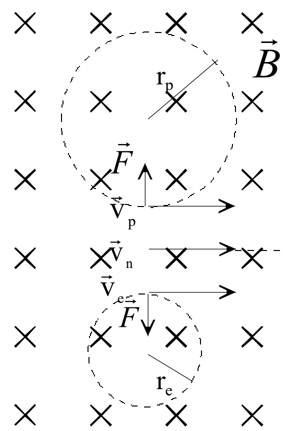
La velocidad angular de una partícula es: $\omega = \frac{v}{R} = \frac{|q| \cdot B}{m}$

Aplicándolo al protón y al electrón y como su carga eléctrica tiene el mismo valor:

$$\frac{\omega_e}{\omega_p}=\frac{\frac{|q|\cdot B}{m_e}}{\frac{|q|\cdot B}{m_p}}=\frac{m_p}{m_e}=\frac{1{,}67\cdot 10^{-27}\,\text{kg}}{9{,}11\cdot 10^{-31}\,\text{kg}}=1830$$

**3. Un protón, un electrón y un neutrón penetran con la misma velocidad y en el mismo punto en una zona en la que existe un campo magnético uniforme perpendicular a su trayectoria. Dibuje esquemáticamente la trayectoria descrita por cada una de esas partículas en la zona en la que existe campo. Indique cuál de estas trayectorias presenta el mayor radio de curvatura y cuál el mayor período de rotación. Razone sus respuestas.**

Cuando una partícula cargada penetra en un campo magnético actúa sobre ella la fuerza de Lorentz: $\vec{F}=q\cdot(\vec{v}\times\vec{B})$, de dirección la perpendicular al plano que determinan los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ y sentido el indicado por la regla del producto vectorial.




Si el campo magnético es uniforme y la dirección del vector velocidad es perpendicular a él, entonces la fuerza de Lorentz proporciona una aceleración normal que le obliga a la partícula a describir describe una trayectoria circular contenida en un plano perpendicular al campo magnético.

En el caso que concierne el neutrón no está afectado por el campo magnético ya que no tiene carga y el protón y el electrón describen trayectorias circulares recorridas en sentidos contrarios.

Aplicando la segunda ley de Newton a una partícula cargada y como el vector velocidad y el vector campo magnético son perpendiculares, se tiene:

$$\Sigma\vec{F}=m\cdot\vec{a}_n\,;\quad |q|\cdot v\cdot B\cdot \text{sen } 90º = m\frac{v^2}{R}\Rightarrow R=\frac{m\cdot v}{|q|\cdot B}$$

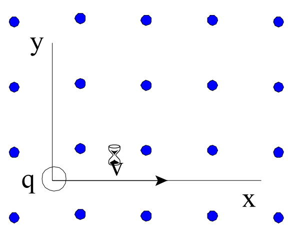
El protón y el electrón llevan la misma velocidad y tienen el mismo valor absoluto de su carga $R_P=\frac{m_p\cdot v}{|q|\cdot B};R_e=\frac{m_e\cdot v}{|q|\cdot B}$ y como el protón tiene una masa mayor que el electrón, el radio de la órbita del protón es mayor que el de la órbita del electrón.

De la ecuación anterior se deduce la velocidad angular y el período del movimiento.

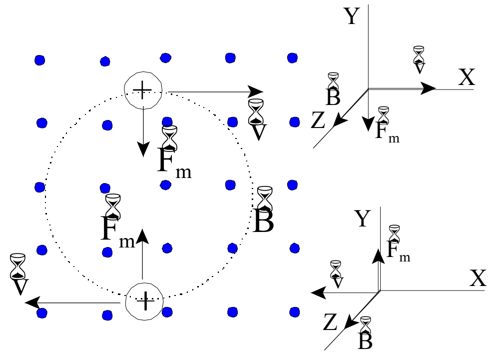
$$\omega=\frac{v}{R}=\frac{|q|\cdot B}{m}\Rightarrow T=\frac{2\cdot\pi}{\omega}=\frac{2\cdot\pi\cdot m}{|q|\cdot B}$$

Y para cada partícula los períodos del movimiento son: $T_p=\frac{2\cdot\pi\cdot m_p}{|q|\cdot B};\ T_e=\frac{2\cdot\pi\cdot m_e}{|q|\cdot B}$, por lo que el período del protón en su órbita es mayor que el del electrón.

**4. Un ion de carga $1{,}6\cdot 10^{-19}$ C y masa $9{,}62\cdot 10^{-26}$ kg se acelera desde del reposo mediante una diferencia de potencial de 3000 V y a continuación penetra perpendicularmente en un campo magnético uniforme de 0,12 T como el mostrado en la figura. Sabiendo que el ion describe un movimiento circular uniforme cuando está sumergido en el campo, se pide: a) Dibuje el sentido de la trayectoria del ion y represente, en dos puntos opuestos de esa trayectoria, un esquema con los vectores que intervienen en el problema. b) La velocidad con la que se mueve el ion dentro del campo magnético y el radio de curvatura de la trayectoria descrita por la partícula.**



a) Sobre la partícula actúa la fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$, de dirección la de la perpendicular al plano formado por los vectores campo magnético y velocidad y sentido el indicado por la regla del sacacorchos al voltear la velocidad sobre el campo magnético siguiendo el camino más corto.



b) El campo eléctrico que acelera al ion es conservativo, por lo que la velocidad de la partícula se determina aplicando la ley de la conservación de la energía mecánica.

$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$; $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = q \cdot \Delta V$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 3000\,V}{9{,}62 \cdot 10^{-26}\,kg}} = 9{,}9 \cdot 10^4\ m/s$$

Al penetrar la partícula en el campo magnético actúa la fuerza de Lorentz, perpendicular al vector velocidad y si ambos son perpendiculares inicialmente entonces el ion describe una trayectoria circular.
Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circular del ion, resulta que:

$$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}_n;\ F_{Lorentz} = m \cdot \frac{v^2}{R};\ |q| \cdot v \cdot B \cdot sen 90^\circ = m\frac{v^2}{R}$$

Despejando: $R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B} = \frac{9{,}62 \cdot 10^{-26}\,kg \cdot 9{,}9 \cdot 10^4\,m/s}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 0{,}12\,T} = 0{,}496\,m$

**5. Un chorro de partículas formadas por protones, deuterones y partículas alfa de la misma energía cinética penetran perpendicularmente en un campo magnético uniforme. La carga eléctrica del protón y del deuterón es igual a la del electrón y la de la partícula alfa es el doble de la del electrón. Si una partícula alfa tiene una masa doble que la del deuterón y cuatro veces la del protón, calcula la relación entre el radio de la órbita del deuterón y la del protón y entre el radio de la órbita de la partícula alfa y la del protón.**

Aplicando la segunda ley de Newton a una partícula cargada y como el vector velocidad y el vector campo magnético son perpendiculares, se tiene:

$$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}_n;\ |q| \cdot v \cdot B \cdot sen\ 90º = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B}$$

La energía cinética de una partícula es: $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}}$

Operando en las ecuaciones anteriores: $R = \frac{m \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}}}{|q| \cdot B} = \frac{\sqrt{2 \cdot m \cdot E_c}}{|q| \cdot B}$

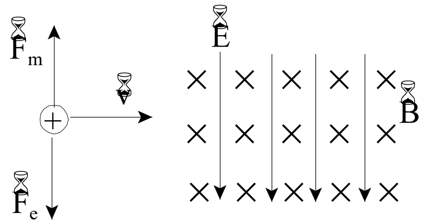
Como las partículas tienen la misma energía cinética, aplicando las relaciones entre las cargas eléctricas y las masas resulta que:

$$\frac{R_D}{R_p} = \frac{\frac{\sqrt{2 \cdot m_D \cdot E_c}}{|q_D| \cdot B}}{\frac{\sqrt{2 \cdot m_p \cdot E_c}}{|q_p| \cdot B}} = \frac{\sqrt{m_D} \cdot |q_p|}{\sqrt{m_p} \cdot |q_D|} = \frac{\sqrt{2 \cdot m_p}\,|q_p|}{\sqrt{m_p} \cdot |q_p|} = \sqrt{2}$$

De igual forma: $\frac{R_\alpha}{R_p} = \frac{\frac{\sqrt{2 \cdot m_\alpha \cdot E_c}}{|q_\alpha| \cdot B}}{\frac{\sqrt{2 \cdot m_p \cdot E_c}}{|q_p| \cdot B}} = \frac{\sqrt{m_\alpha} \cdot |q_p|}{\sqrt{m_p} \cdot |q_\alpha|} = \frac{\sqrt{4 \cdot m_p}\,|q_p|}{\sqrt{m_p} \cdot 2 \cdot |q_p|} = 1$

**6. Un conjunto de protones se desplaza horizontalmente sin desviarse por un selector de velocidades, en el que el campo eléctrico tiene de módulo 2 · 10$^3$ N/C de dirección la vertical y sentido hacia abajo. Si el módulo del campo magnético es igual a 0,5 T, calcula la velocidad de los protones. ¿Qué dirección y sentido tiene el campo magnético? Representa en un diagrama todos los vectores.**

La fuerza eléctrica tiene el mismo sentido que el campo eléctrico, ya que la carga del protón tiene signo positivo. Por tanto, la fuerza magnética tiene que tener la dirección de la vertical y sentido hacia arriba.



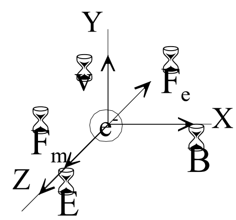

De las reglas del producto vectorial se deduce que el campo magnético es perpendicular al plano del papel y su sentido es hacia dentro.

$$\vec{F}_{magnética} + \vec{F}_{eléctrica} = 0$$

En módulo: $|q| \cdot v \cdot B = |q| \cdot E \Rightarrow v = \frac{E}{B} = \frac{2 \cdot 10^3\ N/C}{0,5\ T} = 4 \cdot 10^3\ m/s$

**7. Un electrón que lleva una velocidad de $\vec{v} = 10 \cdot \vec{j}\ m/s$ penetra en una región del espacio en la que actúa un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = 20 \cdot \vec{k}\ N/C$ y un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{i}\ T$. Despreciando los efectos del campo gravitatorio, dibuja las fuerzas que actúan sobre el electrón y calcula el módulo del campo magnético para que la partícula se mueva con movimiento rectilíneo uniforme**.

La figura adjunta representa las fuerzas que actúan sobre el electrón en el sistema de referencia elegido.




Las fuerzas eléctrica y magnética que actúan sobre el electrón, teniendo en cuenta que su carga eléctrica tiene signo negativo son:

$$\vec{F}_{eléctrica} = q \cdot \vec{E} = -|q_e| \cdot 20 \cdot \vec{k}\ N/C$$

$$\vec{F}_{magnética} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = -|q_e| \cdot \left((10 \cdot \vec{j}\ m/s) \times (B_0 \cdot \vec{i}\ T)\right) = -|q_e| \cdot 10 \cdot B_0 \cdot (\vec{j} \times \vec{i})T \cdot m/s$$

$$\vec{F}_{magnética} = -|q_e| \cdot 10 \cdot B_0 \cdot (-\vec{k})N/C = |q_e| \cdot 10 \cdot B_0 \cdot \vec{k}\ N/C$$

Para que el electrón no se desvíe de su trayectoria los módulos de las fuerzas magnética y eléctrica tienen que ser iguales.

$F_{eléctrica} = F_{magnética}$; $|q_e| \cdot 20\ N/C = |q_e| \cdot 10 \cdot B_0\ N/C$ $B_0 = 2\ T$

**8. Un chorro de iones es acelerado por una diferencia de potencial de 10 000 V, antes de penetrar en un campo magnético de 1 T. Si los iones describen una trayectoria circular de 5 cm de radio, determina su relación carga-masa.**

La variación de la energía cinética que experimentan los iones es: 2 A m A $v^2$ = |q| A ΔV

Aplicando la segunda ley de Newton a la zona donde actúa el campo magnético, resulta que:

$$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; |q| \cdot v \cdot B \cdot sen 90º = m\frac{v^2}{R}$$

Despejando la velocidad en las ecuaciones anteriores e igualando, se tiene:

$$\frac{2 \cdot |q| \cdot \Delta V}{m} = \frac{|q|^2 \cdot R^2 \cdot B^2}{m^2}$$

La relación carga masa es: $\frac{|q|}{m} = \frac{2 \cdot \Delta V}{R^2 \cdot B^2} = \frac{2 \cdot 10\ 000\ V}{(5 \cdot 10^{-2})^2\ m \cdot (1\ T)^2} = 8 \cdot 10^6\ \frac{C}{kg}$

**9. Las *Des* de un ciclotrón tienen un radio de 70 cm y están inmersas en un campo magnético de 0,3 T. Determina la frecuencia de la diferencia de potencial alterna que se aplica entre las *Des* para acelerar a un protón. Calcula la velocidad del protón a la salida del ciclotrón y su energía cinética expresada en eV.**

Dentro de las *Des* actúa un campo magnético perpendicularmente a la velocidad del protón que le obliga recorrer una semicircunferencia. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}_n;\; q\cdot v\cdot B\cdot \text{sen}\,90° = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m\cdot v}{q\cdot B}$$

El período del movimiento es: $T = \frac{2\cdot\pi\cdot R}{v} = \frac{2\cdot\pi\cdot m}{q\cdot B} = \frac{2\cdot\pi\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\cdot 0{,}3\,T} = 02{,}17A10^{-7}\,s$

El campo eléctrico en el espacio entre las *Des* cambia de sentido en un tiempo igual a la mitad del período, 2 T, que es igual a lo que tarda el protón en recorrer cada una de las *Des*. Por tanto, el período y la frecuencia de la diferencia de potencial alterna coinciden con los de la trayectoria del protón:

$$\text{frecuencia} = \frac{1}{T} = \frac{1}{2{,}17\cdot 10^{-7}\,s} = 4{,}6\cdot 10^{6}\ Hz$$

La velocidad con la sale expulsado depende del radio de la última órbita:

$$v_{máxima} = \frac{q\cdot R\cdot B}{m} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\cdot 0{,}70\,m\cdot 0{,}3\,T}{1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg} = 2{,}02\cdot 10^{7}\ m/s$$

La energía cinética de la partícula a la salida del aparato es:

$E_c$ = 2 A m A $v^2$ = 2 A 1,66 A $10^{-27}$ kg A (2,02 A $10^7$ m/s)$^2$ = 3,4 A $10^{-13}$ J

Y expresa en eV: $E_c$ = 3,4 A $10^{-13}$ J A $\frac{1\,eV}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,J}$ = 2,1 A $10^6$ eV = 2,1 MeV

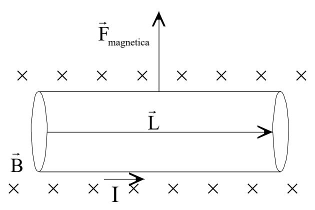
**10. Sobre un hilo de 5 cm de longitud que lleva una intensidad de la corriente eléctrica de 5 A actúa una fuerza de 0,1 N. Calcula el módulo del campo magnético que actuando perpendicularmente al hilo produce esa fuerza.**

El módulo de la fuerza que actúa sobre el hilo es: $F = I\cdot L\cdot B\cdot \text{sen}\,\phi$

Sustituyendo: 0,1 N = 5 A · 0,05 m · B · sen 90 ⇒ B = 0,4 T

**11. Un cable de 0,5 m de longitud transporta una intensidad de la corriente eléctrica de 2 A, según la dirección positiva del eje X. Si el cable está colocado perpendicularmente en un campo magnético de 0,25 T, que penetra en el plano del papel, calcula el módulo de la fuerza que actúa sobre el cable y representa en un diagrama todas las magnitudes vectoriales implicadas.**

Sobre el conductor actúa una fuerza que queda determinada por la ley de Laplace: $\vec{F} = I\cdot(\vec{L}\times\vec{B})$

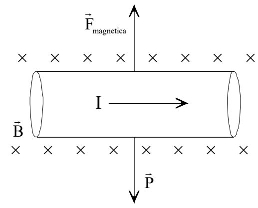



Su módulo es: F = I · L · B · sen ϕ = 2 A · 0,5 m · 0,25 T · sen 90 = 0,25 N

La dirección y sentido se determinan por las reglas del producto vectorial, su dirección es la vertical y su sentido hacia arriba.

**12. Un segmento horizontal de un conductor de 25 cm de longitud y 20 g de masa por el que pasa una intensidad de la corriente eléctrica de 10 A se encuentra en equilibrio en un campo magnético uniforme, también horizontal y perpendicular al conductor. Calcula el valor del campo magnético y representa gráficamente la corriente, el campo magnético y las fuerzas que actúan sobre el conductor.**

El peso tiene dirección la vertical y sentido hacia abajo, la fuerza magnética tiene sentido contrario al peso. Si el campo magnético penetra en el plano del papel, la intensidad de la corriente eléctrica se dirige hacia la derecha.



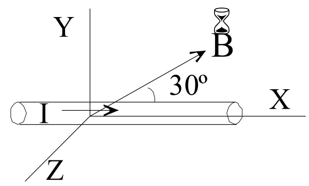

Como el conductor está en equilibrio: $P = F_{magnética}$; $m \cdot g = I \cdot L \cdot B \cdot \text{sen}\ \phi$

Sustituyendo:

$20 \cdot 10^{-3}$ kg $\cdot$ 9,8 m/s$^2$ = 10 A $\cdot$ 0,25 m $\cdot$ B $\cdot$ sen 90º $\Rightarrow$ B = 7,84 $\cdot$ 10$^{-2}$ T

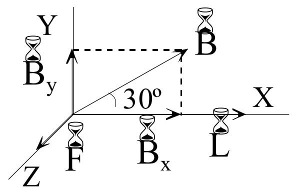
**13. Sobre el eje X está situado un alambre de 9 cm de longitud que transporta una intensidad de la corriente eléctrica de 1 A. Si el conductor se encuentre inmerso en un campo magnético de 0,02 T de intensidad situado en el plano XY y formando un ángulo de 30º con el eje X, ) qué fuerza actúa sobre el cable? Represéntala en un diagrama.**

Las expresiones de los diferentes vectores, en el sistema de referencia de la figura son:




$$\vec{L} = 0{,}09 \cdot \vec{i}\ \text{m};\ \ \vec{B} = (0{,}02 \cdot \cos 30º \cdot \vec{i} + 0{,}02 \cdot \text{sen}\, 30º \cdot \vec{j})\ \text{T}$$

La componente $B_x$ del campo es paralela al conductor y por ello no actúa con ninguna fuerza. Solamente actúa sobre el conductor la componente $B_y$ del campo.



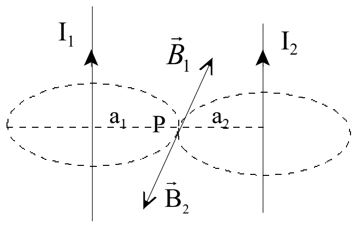

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{L} \times \vec{B}) = 1\ \text{A} \cdot (0{,}09 \cdot \vec{i}\ \text{m} \times 0{,}02 \cdot \text{sen}\, 30º \cdot \vec{j}\,)\ \text{T}$$

Aplicando las reglas del producto vectorial, resulta que la fuerza que actúa sobre el conductor es:

$$\vec{F} = 9 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{k}\ \text{N}$$

**14. Dos conductores rectos y paralelos están separados pon una distancia de 9 cm y están recorridos en el mismo sentido por sendas intensidades de la corriente eléctrica de 1 A y 2 A. ) A qué distancia de los conductores se anula el campo magnético?**

Cada conductor genera un campo magnético, cuyas líneas de campo son circunferencias concéntricas en ellos y cuyo sentido es el indicado por el giro de un sacacorchos que avanza según el sentido de la intensidad de la corriente eléctrica.




El campo magnético solamente se anula en un punto situado en el segmento que une a los conductores. Si ese punto está a una distancia $a_1$ del conductor $I_1$ y a una distancia $a_2$ del conductor $I_2$, entonces:

$a_1 + a_2 = 9$ cm

Aplicando la ley de Biot y Savart para un conductor rectilíneo, denominando $I_1 = 1$ A e $I_2 = 2$ A e igualando los módulos del campo magnético, resulta que:

$$B_1 = B_2;\ \frac{\mu \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot a_1} = \frac{\mu \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot a_2} \Rightarrow \frac{1\ \text{A}}{a_1} = \frac{2\ \text{A}}{a_2}$$

Operando y agrupando las ecuaciones, se tiene el sistema de ecuaciones:

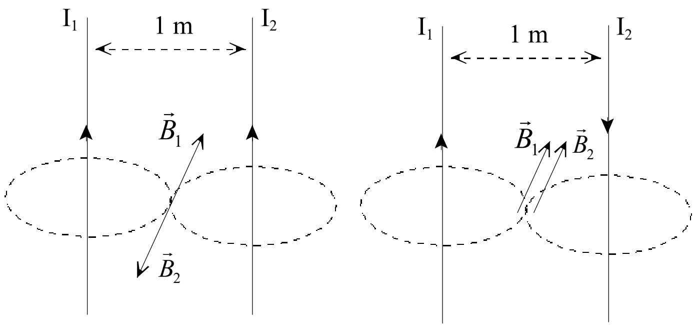
$$\left.\begin{array}{r} 1\,\text{A} \cdot a_2 = 2\ \text{A} \cdot a_1 \\ a_1 + a_2 = 9\ \text{cm} \end{array}\right\}\ \Psi a_1 = 30\ \text{cm}$$

El campo magnético se anula en el segmento que une a los conductores y a una distancia de 3 cm del conductor por el que pasa una intensidad de la corriente eléctrica $I_1 = 1$ A.

**15. Dos hilos rectilíneos infinitos paralelos separados una distancia de 1 m transportan corrientes de intensidad $I_1$ e $I_2$. a) Cuando las corrientes circulan en el mismo sentido el campo magnético en un punto medio vale *$2 \cdot 10^{-6}$ T,* mientras que cuando circulan en sentidos opuestos dicho campo vale *$6 \cdot 10^{6}$ T.* Calcule el valor de las intensidades *$I_1$* e *$I_2$*.**

Un hilo rectilíneo por el que pasa una intensidad de la corriente eléctrica, genera un campo magnético cuyas líneas de campo son circunferencias concéntricas en el hilo.

En la región del plano situada entre los dos conductores, los campos magnéticos son perpendiculares al plano del papel y su sentido es el indicado por la regla de Maxwell, que coincide con el del giro de un tornillo que avance según el sentido de la corriente eléctrica.




Cuando la intensidad de la corriente eléctrica tiene el mismo sentido, los dos campos tienen sentido contrario y si la intensidad de la corriente tiene distinto sentido, entonces los dos campos tienen el mismo sentido.

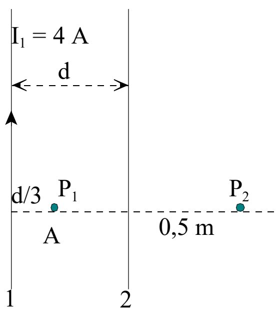
El módulo del campo magnético generado por un conductor a una distancia r de él es: $B = \dfrac{\mu \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r}$

Aplicando la ecuación anterior y como el punto considerado está a la misma distancia de los dos conductores, resulta que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{mismo sentido}: \dfrac{\mu \cdot I_1}{2\cdot\pi\cdot r} - \dfrac{\mu \cdot I_2}{2\cdot\pi\cdot r} = 2\cdot 10^{-6}\,\text{T} \\ \text{sentido opuesto}: \dfrac{\mu \cdot I_1}{2\cdot\pi\cdot r} + \dfrac{\mu \cdot I_2}{2\cdot\pi\cdot r} = 6\cdot 10^{-6}\,\text{T} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \mu\cdot(I_1 - I_2) = 2\cdot\pi\cdot r\cdot 2\cdot 10^{-6}\,\text{T} \\ \mu\cdot(I_1 + I_2) = 2\cdot\pi\cdot r\cdot 6\cdot 10^{-6}\,\text{T} \end{array}\right\}$$

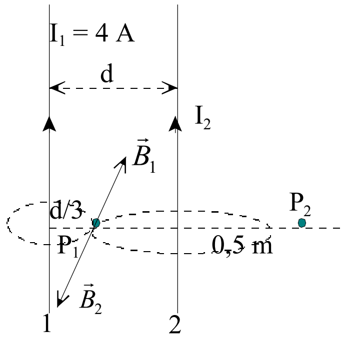
$$\left.\begin{array}{l} 4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\,\text{N/A}^2\cdot(I_1 - I_2) = 2\cdot\pi\cdot 0{,}5\,\text{m}\cdot 2\cdot 10^{-6}\,\text{T} \\ 4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\,\text{N/A}^2\cdot(I_1 + I_2) = 2\cdot\pi\cdot 0{,}5\,\text{m}\cdot 6\cdot 10^{-6}\,\text{T} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} I_1 - I_2 = 5\,\text{A} \\ I_1 + I_2 = 15\,\text{A} \end{array}\right\} \Rightarrow I_1 = 10\,\text{A};\, I_2 = 5\,\text{A}$$

**16. Se tienen dos conductores rectilíneos, paralelos e indefinidos, separados por una distancia *d*. Por el conductor 1 circula una intensidad de 4 A en el sentido mostrado en la figura. a) Determine el valor y sentido de la intensidad que debe circular por el conductor 2 de forma que el campo magnético resultante en el punto *$P_1$* se anule. b) Si la distancia que separa los dos conductores es *d* = 0,3 m, calcule el campo magnético *B* (módulo, dirección y sentido) producido por los dos conductores en el punto *$P_2$*, en la situación anterior. *Nota:* Los conductores y los puntos *$P_1$* y *$P_2$* están contenidos en el mismo plano.**




a) Cada conductor genera un campo magnético cuyas líneas de campo son circunferencias concéntricas en ellos y cuyo sentido es el indicado por el giro de un sacacorchos que avanza según la intensidad de la corriente eléctrica.

Los dos conductores generan en el punto $P_1$ campos magnéticos perpendiculares al plano del papel. El conductor 1 lo genera hacia dentro, por lo que el conductor 2 lo debe generar hacia afuera y por ello el sentido de la corriente eléctrica en él debe ser el mismo que en el conductor 1.

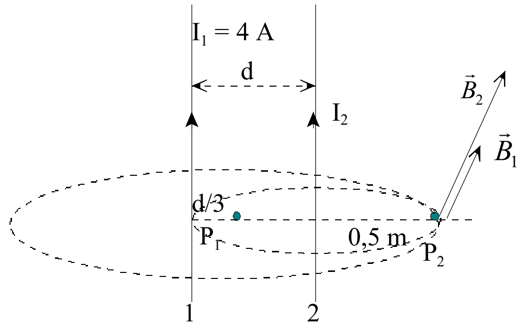



Aplicando la ley de Biot y Savart para un conductor rectilíneo e igualando los módulos del campo magnético, resulta que:

$$B_1 = B_2;\ \frac{\mu \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot r_1} = \frac{\mu \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot r_2} \Rightarrow \frac{4\,A}{d/3} = \frac{I_2}{2d/3}$$

Despejando el módulo de la intensidad es: $I_2 = 8$ A

b) Los dos conductores generan en el punto $P_2$ campos magnéticos perpendiculares al plano del papel y sentido hacia dentro, por lo que sus módulos se suman.




$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot r_1} + \frac{\mu \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot r_2}$$

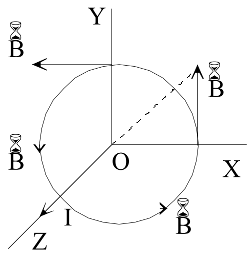
Operando y sustituyendo:

$$B = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}\,N/A^2}{2 \cdot \pi}\left(\frac{4\,A}{0{,}8\,m} + \frac{8\,A}{0{,}5\,m}\right) = 4{,}2 \cdot 10^{-6}\ T$$

**17. Un conductor rectilíneo transporta una corriente de 10 A en el sentido positivo del eje Z. Calcula la fuerza que actúa sobre un protón situado a 50 cm del conductor cuando se dirige hacia el conductor con una velocidad de $2 \cdot 10^5$ m/s. ¿Se modifica la energía cinética del protón?**

El campo magnético creado por un conductor rectilíneo indefinido en un punto P a una distancia a del conductor, se determina aplicando la ley de Biot y Savart:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot a} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}\,N/A^2 \cdot 10\,A}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}5\ m} = 4 \cdot 10^{-6}\ T$$

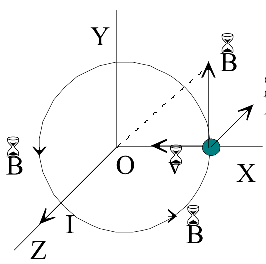



Las líneas de campo magnético son circunferencias concéntricas en el conductor y situadas en planos perpendiculares al mismo. El vector campo magnético es tangente a las líneas de campo y su sentido es el indicado por el giro de un sacacorchos que avanza según el sentido de la intensidad de la corriente eléctrica.

Si el conductor está situado en el eje Z y el sentido de la intensidad de la corriente eléctrica es el sentido positivo de dicho eje, $\vec{I} = 10 \cdot \vec{k}\ A$, las líneas de campo están situadas en el plano XY del sistema de referencia de la figura.

Si el punto en el que se localiza el protón tiene de coordenadas (0,5; 0, 0) m, entonces la expresión del vector campo magnético en ese punto es: $\vec{B} = 4 \cdot 10^{-6} \cdot \vec{j}\ T$

La fuerza que actúa sobre una partícula cargada en el seno de un campo magnético queda determinada por la ley Lorentz: $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$




La expresión del vector velocidad es: $\vec{v} = 2 \cdot 10^5 \cdot (-\vec{i})\,m/s$

Y la fuerza que actúa sobre la partícula es:

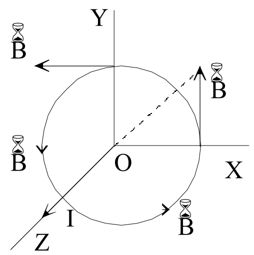
$$\vec{F} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot (-2 \cdot 10^5 \cdot \vec{i}\ m/s \times 4 \cdot 10^{-6} \cdot \vec{j}\ T) = 1{,}28 \cdot 10^{-19} \cdot (-\vec{k})\,N$$

La fuerza que actúa sobre el electrón tiene la dirección del conductor y sentido contrario a la intensidad de la corriente eléctrica.
La fuerza es perpendicular al vector velocidad, y por tanto no se modifica esta y por ello la fuerza magnética no realiza trabajo y no se modifica la energía cinética de la partícula.

**18. Por un conductor rectilíneo muy largo circula una intensidad de la corriente eléctrica de 20 A. Un electrón está situado a 1 cm de eje del conductor y se traslada con una velocidad de 5·10$^6$ m/s. Calcula la fuerza que actúa sobre el electrón cuando se mueve paralelamente al conductor y en el mismo sentido que la intensidad de la corriente eléctrica.**

El campo magnético creado por un conductor rectilíneo indefinido en un punto P a una distancia a del conductor, se determina aplicando la ley de Biot y Savart:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot a} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}\, N/A^2 \cdot 20\, A}{2 \cdot \pi \cdot 10^{-2}\, m} = 4 \cdot 10^{-4}\, T$$




Las líneas de campo magnético son circunferencias concéntricas en el conductor y situadas en planos perpendiculares al mismo. El vector campo magnético es tangente a las líneas de campo y su sentido es el indicado por el giro de un sacacorchos que avanza según el sentido de la intensidad de la corriente eléctrica.

Si el conductor está situado en el eje Z y el sentido de la intensidad de la corriente eléctrica es el sentido positivo de dicho eje, $\vec{I} = 20 \cdot \vec{k}\, A$, las líneas de campo están situadas en el plano XY del sistema de referencia de la figura.

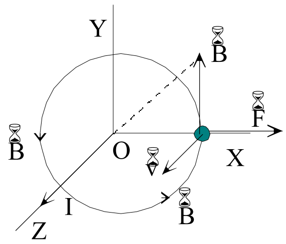
Si el punto en el que se localiza el electrón tiene de coordenadas (10$^{-2}$, 0, 0) m, entonces la expresión del vector campo magnético en ese punto es: $\vec{B} = 4 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{j}\, T$

La fuerza que actúa sobre una partícula cargada en el seno de un campo magnético queda determinada por la ley Lorentz: $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$

La expresión del vector velocidad es: $\vec{v} = 5 \cdot 10^6 \cdot \vec{k}\, m/s$

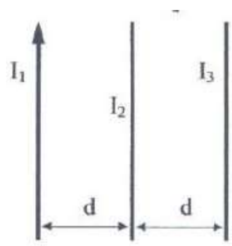
Y la fuerza que actúa sobre la partícula es:

$$\vec{F} = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\, C \cdot (5 \cdot 10^6 \cdot \vec{k}\, m/s \times 4 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{j}\, T) = 3{,}2 \cdot 10^{-16} \cdot \vec{i}\, N$$

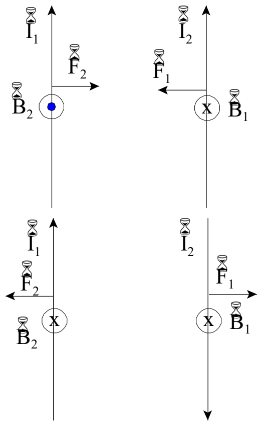



uerza que actúa sobre el electrón tiene el sentido perpendicular al conductor y alejándose de él.

**19. La figura muestra tres conductores paralelos y rectilíneos por los que circulan las corrientes $I_1$, $I_2$ e $I_3$ respectivamente. La corriente $I_1$ tiene el sentido indicado en la figura. Sabiendo que la fuerza neta por unidad de longitud sobre el conductor 2 (debida a los conductores 1 y 3) y sobre el conductor 3 (debida a los conductores 1 y 2) son ambas nulas, razone el sentido de las corrientes $I_2$ e $I_3$ y calcule sus valores en función de $I_1$ .**




Un hilo rectilíneo por el que pasa una intensidad de la corriente eléctrica, genera un campo magnético cuyas líneas de campo son circunferencias concéntricas en el hilo y situadas en un plano perpendicular a él. El sentido del campo magnético es el indicado por la regla de la mano derecha que coincide con el del giro de un sacacorchos que avanza según el sentido de la intensidad de la corriente eléctrica. Aplicando la ley de Biot y Savart, el módulo del campo magnético generado por un conductor a una distancia r de él es: $B_1 = \frac{\mu \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot r}$

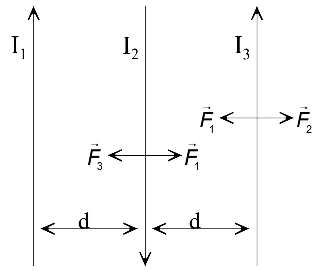



Al colocar otro conductor, por el que pasa una intensidad de la corriente eléctrica $I_2$, a una distancia r del primero, los conductores interaccionan con fuerzas del mismo módulo y dirección, pero de sentidos contrarios y que se calculan aplicando la segunda ley de Laplace: $\vec{F} = I \cdot (\vec{L} \times \vec{B})$.

Como los conductores están colocados paralelamente, se tiene que los módulos de estas fuerzas, que forman un par de acción y reacción, son:

$F_2 = F_1 = L \cdot I_2 \cdot B_1 = L \cdot I_2 \cdot \frac{\mu \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot I_1 \cdot I_2 \frac{L}{r}$, con L la longitud de los conductores

Estas fuerzas tienen por dirección la de la perpendicular a los hilos y sentido el indicado por la regla de Maxwell del producto vectorial, de forma que corrientes eléctricas del mismo sentido se atraen y si son de sentido contrario se repelen.

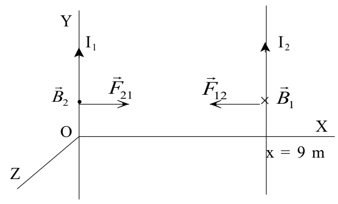



Con estas consideraciones se deduce que las intensidades de las corrientes eléctrica $I_1$ e $I_3$ tiene que tener el mismo sentido y que la intensidad $I_2$ tiene que tener sentido opuesto al de las anteriores.
Las intensidades $I_1$ e $I_3$ tienen que tener el mismo valor, ya que de otra forma los módulos de las fuerzas con las que actúan sobre la intensidad $I_2$ no serían iguales.

El valor de la intensidad de la corriente eléctrica $I_2$ tiene que ser igual a la mitad del valor de $I_1$, ya que está a una distancia de $I_3$ igual a la mitad de la distancia a la que está $I_1$.
En efecto: los módulos de las fuerzas que actúan sobre la intensidad $I_3$ tienen que ser iguales.

$$F_1 = F_2; \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot I_1 \cdot I_3 \frac{L}{2 \cdot d} = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot I_2 \cdot I_3 \cdot \frac{L}{d} \Rightarrow \frac{I_1}{2} = I_2$$

**20. Dos alambres paralelos e infinitamente largos están situados en el plano XY. Uno de los alambres coincide con la recta x = 0 (eje Y) por el que circula una intensidad de la corriente eléctrica $I_1$ = 2 A y por el otro alambre que coincide con la recta x = 9 m circula una intensidad de la corriente eléctrica de $I_2$ = 1 A. Calcula la fuerza que actúa sobre cada uno de los alambres y por unidad de longitud: módulo, dirección y sentido.**
Se elige como sistema de referencia el indicado en la figura adjunta.




El conductor $I_1$ crea un campo magnético $B_1$, cuyas líneas de campo son circunferencias concéntricas en el conductor y cuyo sentido está indicado por el giro de un tornillo que avanza con la corriente. En los puntos en los que se localiza el conductor $I_2$ tiene sentido hacia dentro del plano del papel y cuyo módulo es:

$$B_1 = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \frac{I_1}{r}$$

Este campo magnético actúa sobre el conductor $I_2$, mediante una fuerza magnética de dirección la de la perpendicular a los conductores y sentido hacia el conductor $I_1$, regla del producto vectorial.

El módulo es esta fuerza es: $F_{1 \to 2} = L_2$ A $I_2$ A $B_1$ A sen $\nu = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} I_1 \cdot I_2 \frac{L_2}{r}$

De igual forma y aplicando la ley de acción y reacción el conductor $I_2$ atrae al conductor $I_1$ con una fuerza $F_{2\to1}$ del mismo módulo, la misma dirección y sentido opuesto.
Sustituyendo, y si los conductores están situados en el vacío, el módulo de la fuerza de atracción es:

$$F_{1\to2} = F_{2\to1} = \frac{4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\,N/A^2}{2\cdot\pi}\,2\,A\cdot 1\,A\,\frac{L}{9\,m} = 0{,}44\cdot 10^{-7}\cdot L\,\frac{N}{m}$$

**21. Calcula el campo magnético en el interior de un solenoide de 400 espiras y 25 cm de longitud por el que pasa una intensidad de la corriente eléctrica de 2 A.**

El valor del campo magnético viene dado por: $B = \mu\frac{N}{L}I$, luego:

$$B = 4\,\pi\,10^{-7}\,N/A^2\,\frac{400\,\text{espiras}}{0{,}25\,m}\,2\,A = 4{,}02\,\cdot 10^{-3}\,T$$

## UNIDAD 6: Inducción electromagnética

### CUESTIONES INICIALES-PÁG. 157

**1. Describe las transformaciones energéticas que se realizan en una central hidroeléctrica.**
El agua del embalse almacena energía potencial gravitatoria que se transforma en energía cinética del agua. Al chocar el agua con los álabes de una turbina, parte de su energía cinética se transforma en energía cinética de rotación. A continuación, esta energía cinética de rotación se transforma en energía eléctrica.

**2. Sobre una carga que se mueve, con una velocidad que forma un determinado ángulo con un campo magnético, actúa una fuerza. ¿Crees que actuará alguna fuerza sobre los electrones de valencia de un conductor que se mueve en el seno de un campo magnético?**
Sobre los electrones libres de metal, al estar animados con la misma velocidad que el conductor, actúa la fuerza de Lorentz.

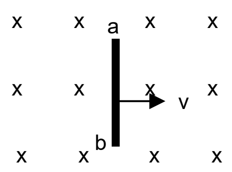
**3. ¿Por qué se realiza el suministro de energía eléctrica a nuestros hogares con corriente alterna y no con corriente continua?**
Las pérdidas de energía durante el transporte de la energía eléctrica son menores cuanto más elevada es la diferencia de potencial.
La diferencia de potencial de la corriente continua no se puede modificar; algo se realiza con suma facilidad en la corriente alterna con el uso de transformadores. Por tanto, se puede producir energía eléctrica a una diferencia de potencial bajo, transformarla a una diferencia de potencial alto para el transporte y volver a reducir la diferencia de potencial en el centro de consumo.

### ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 172

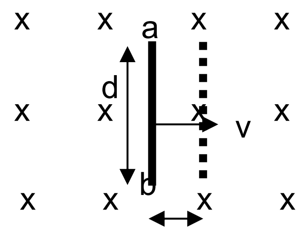
**1. Calcula el flujo del campo magnético que atraviesa una bobina de 100 espiras de 40 cm² de superficie cuyo eje forma un ángulo de 60º con la dirección de un campo magnético uniforme de 2 · 10⁻³ T de módulo.**
Aplicando la definición de flujo de un campo magnético:

$$\Phi_B = N\cdot\vec{B}\cdot\vec{S} = N \cdot B \cdot S \cdot \cos\varphi = 100 \cdot 2\cdot 10^{-3}\ 40\cdot 10^{-4}\ m^2 \cdot \cos 60º = 4\cdot 10^{-4}\ Wb$$

**2. Una barra conductora de longitud d = 1,5 m se mueve con una velocidad constate v = 4 m/s perpendicularmente a un campo magnético de módulo B = 0,5 T, tal y como se representa en la figura adjunta. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de la barra conductora? Justifica cuál de los extremos a o b de la barra conductora está a un potencial eléctrico más alto.**




En un tiempo igual a t la barra recorre una distancia x = v · t.



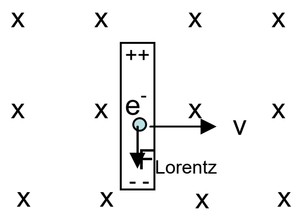

El flujo del campo magnético que atraviesa la superficie barrida por la barra en ese tiempo t, como el vector campo magnético es paralelo al vector superficie, es:

$$\Phi_B = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\cdot d\cdot x = B\cdot d\cdot v\cdot t$$

Aplicando la ley de Faraday, la fuerza electromotriz inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = - B \cdot d \cdot v = - 0{,}5\ T \cdot 1{,}5\ m \cdot 4\ m/s = - 3\ V$$

Al moverse la barra hacia la derecha, sobre los electrones de la barra actúa la fuerza de Lorentz, de dirección la de la barra y sentido hacia el extremo inferior, b. Lo que se traduce en un desequilibrio, con acumulación de cargas negativas en la parte inferior y positivas en la superior. Por tanto el extremo superior, a, está a un potencial eléctrico mayor que el inferior, b.




**3. Una bobina circular, formada por 100 espiras de 5 cm de radio, se encuentra situada perpendicularmente a un campo magnético de 0,24 T. Determina la fem inducida en la bobina en los casos siguientes referidos a un intervalo de tiempo igual a 0,05 s: se duplica el campo magnético; se anula el campo magnético; se invierte el sentido del campo magnético; se gira la bobina 90E en torno al eje paralelo al campo magnético; se gira la bobina 90E en torno al eje perpendicular al campo magnético.**

Inicialmente el ángulo ν que forman los vectores campo magnético y superficie es igual a cero.

$$\Phi_{B,1} = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N\ A\ B\ A\ S\ A \cos \nu = 100\ A\ 0{,}24\ T\ A\ \pi \cdot (0{,}05\ m)^2 \cos 0º = 0{,}06\ A\ \pi\ Wb$$

a) Si se duplica el campo magnético, se duplica el flujo que atraviesa la bobina.

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = -\frac{2 \cdot \Phi_{B,1} - \Phi_{B,1}}{\Delta t} = -\frac{\Phi_{B,1}}{\Delta t} = -\frac{0{,}06 \cdot \pi\ Wb}{0{,}05\ s} = -1{,}2 \cdot \pi\ V$$

b) Si se anula el campo magnético, el flujo final es igual a cero.

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = -\frac{0 - \Phi_{B,1}}{\Delta t} = \frac{\Phi_{B,1}}{\Delta t} = \frac{0{,}06 \cdot \pi\ Wb}{0{,}05\ s} = 1{,}2 \cdot \pi\ V$$

c) Al invertir el sentido del campo, el flujo final es igual al inicial cambiado de signo.

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = -\frac{(-\ \Phi_{B,1}) - \Phi_{B,1}}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \Phi_{B,1}}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 0{,}06 \cdot \pi\ Wb}{0{,}05\ s} = 2{,}4 \cdot \pi\ V$$

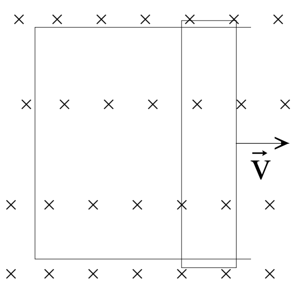
d) No cambia la orientación entre la bobina y el campo magnético.

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = 0$$

e) El flujo final es igual a cero, ya que los dos vectores son perpendiculares.

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = -\frac{0 - \Phi_{B,1}}{\Delta t} = \frac{\Phi_{B,1}}{\Delta t} = \frac{0{,}06 \cdot \pi\ Wb}{0{,}05\ s} = 1{,}2 \cdot \pi\ V$$

**4. La varilla conductora de la figura adjunta tiene una longitud de 40 cm y se desplaza paralelamente a sí misma y sin rozamiento, con una velocidad de 2,5 cm/s, sobre un conductor en forma de U, de 10 Ω de resistencia eléctrica, situado en el interior de un campo magnético de 0,2 T. Calcula la fuerza magnética que actúa sobre los electrones de la barra y el campo eléctrico en su interior. Halla la fuerza electromotriz que aparece entre los extremos de la varilla y la intensidad de la corriente eléctrica que recorre el circuito y su sentido. ) Qué fuerza externa hay que aplicar para mantener el movimiento de la varilla? Calcula la potencia necesaria para mantener ese movimiento y la potencia degradada en forma de calor en la resistencia eléctrica del circuito.**



Sobre cada electrón del conductor actúa la fuerza de Lorentz, de dirección la de la varilla y sentido, hacia abajo.

$\vec{F} = q\cdot(\vec{v}\times\vec{B})$

En módulo : F = |q| A v A B = 1,6 A $10^{-19}$ C A 0,025 m/s A 0,2 T = 8,0 A $10^{-22}$ N

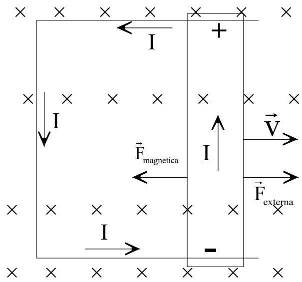
Como consecuencia de la separación de cargas se origina un campo eléctrico en el interior del conductor. Siempre que la velocidad del conductor sea constante los módulos de la fuerza magnética y de la fuerza eléctrica que actúan sobre los electrones son iguales.

$F_{Lorentz} = F_{eléctrica}$; |q| A v A B = |q| A E Ψ E = v A B = 0,025 m/s A 0,2 T = 5 A $10^{-3}$ N/C

El sentido del campo eléctrico dentro del conductor es desde las cargas positivas a las negativas, es decir, el contrario al de la fuerza eléctrica.

La fuerza electromotriz inducida se determina aplicando la relación entre el campo y el potencial eléctricos. Su valor absoluto es:

|ε| = E A L = 5 A $10^{-3}$ N/C A 0,4 m = 2,0 A $10^{-3}$ V




Siempre que el conductor se mueva con velocidad constante, la fuerza electromotriz es estable y se origina una corriente eléctrica, cuyo sentido convencional es el contrario al del movimiento de los electrones. Aplicando la ley de Ohm.

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{2\cdot10^{-3}\,V}{10\,\Omega} = 2\cdot10^{-4}\,A$$

Al moverse la varilla aumenta el flujo del campo magnético que penetra en la espira. Por la ley de Lenz, la intensidad de la corriente inducida gira en el sentido contrario al de las agujas del reloj, ya que de esta forma genera un campo magnético inducido que tiene sentido contrario al inductor y así se opone al variación del flujo magnético que la atraviesa.

Sobre la varilla, recorrida por la intensidad de la corriente eléctrica I, actúa una fuerza magnética de sentido opuesto al del vector velocidad. Para mantener su movimiento hay que aplicar una fuerza externa de sentido contrario al de la fuerza magnética, es decir, del mismo sentido que el del vector velocidad. Esta fuerza es la que realiza el trabajo necesario para mantener la corriente eléctrica por el circuito. Su módulo es:

$F_{externa}$ = I A L A B = 2 m A $10^{-4}$ A A 0,4 m · 0,2 T = 1,6 A $10^{-5}$ N

La potencia con la que actúa un agente externo para mantener el movimiento de varilla es:

$P_{mecánica} = \vec{F}_{externa}\cdot\vec{v}$ = 1,6 A $10^{-5}$ N A 0,025 m/s = 4,0 A $10^{-7}$ W

Esta potencia que suministra la varilla como generador, se transforma en forma de calor en la resistencia eléctrica del circuito.

$P_{eléctrica} = I^2$ A R = (2 · $10^{-4}$ A)$^2$ A 10 Ω = 4,0 A $10^{-7}$ W

**5. Un solenoide de 20 Ω de resistencia eléctrica, está formado por 500 espiras circulares de 2,5 cm de diámetro. El solenoide está situado en un campo magnético uniforme de valor 0,3 T, siendo el eje del solenoide paralelo a la dirección del campo. Si el campo magnético disminuye uniformemente hasta anularse en 0,1 s, determina: a) El flujo inicial que atraviesa el solenoide y la fuerza electromotriz inducida. b) La intensidad de la corriente eléctrica recorrida por el solenoide y la carga eléctrica transportada en ese intervalo de tiempo.**

El radio de las espiras es: 1,25 cm

Aplicando la definición de flujo del campo magnético a través de una superficie:

$\Phi_{B,inicial} = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N \cdot B \cdot S \cdot \cos \phi = 500 \cdot 0{,}3\ T \cdot \pi \cdot (1{,}25 \cdot 10^{-2})^2 \cdot \cos 0º = 7{,}4 \cdot 10^{-2}\ Wb$

Aplicando la ley de Fraday y como el flujo del campo magnético final es igual a cero:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Phi_{B,final} - \Phi_{B,inicial}}{\Delta t} = -\frac{0 - 7{,}4 \cdot 10^{-2}\ Wb}{0{,}1 s} = 0{,}74\ V$$

Aplicando la ley de Ohm: $\varepsilon = R \cdot I$; $0{,}74\ V = 20\ \Omega \cdot I \Rightarrow I = 3{,}7 \cdot 10^{-2}\ A$

Y la carga eléctrica transportada es: $Q = I \cdot t = 3{,}7 \cdot 10^{-2}\ A \cdot 0{,}1 = 3{,}7 \cdot 10^{-3}\ C$

**6. En una región del espacio hay un campo magnético cuyo módulo varía con el tiempo según la ecuación: B(t) = 1,5 · (1 – 0,9 · t) T. En esa misma región se sitúa una espira circular de cobre de radio a = 15 cm, colocada de forma que el campo magnético es perpendicular al plano de la espira. Calcula el flujo del campo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo y la fuerza electromotriz inducida en la espira.**

Aplicando la definición del flujo del campo magnético y como la superficie de la espira permanece constante y como el vector campo magnético y el vector superficie son paralelos en todo instante, se tiene:

$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos 0º = 1{,}5 \cdot (1 - 0{,}9 \cdot t)\ T \cdot \pi \cdot (0{,}15 m)^2 = 3{,}38 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \cdot (1 - 0{,}9 \cdot t)\ Wb$

La fuerza electromotriz inducida en la espira se calcula aplicando la ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -3{,}38 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \cdot (-0{,}9) = 9{,}6 \cdot 10^{-2}\ V$$

**7. El flujo magnético que atraviesa una espira varía con el tiempo, en unidades del SI, según la expresión $\Phi = 3 \cdot t^2 - 10\ t^4$. Calcula el valor de la fuerza electromotriz inducida en el instante t = 2 s.**

Aplicando la ley de Faraday: $\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -(6 \cdot t - 40 \cdot t^3)$ en unidades SI

Y en el instante pedido: $\varepsilon_{t=2} = -(6 \cdot 2 - 40 \cdot 2^3)\ V = -308\ V$

**8. Un campo magnético uniforme de 0,2 T forma un ángulo de 30º con el eje de una bobina circular de 300 espiras y 4 cm de radio. a) Calcula el flujo magnético que traviesa la bobina. b) Si el campo magnético desciende linealmente a cero en 2 s, ¿cuál es el valor de la fuerza electromotriz inducida?**

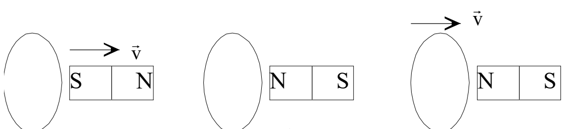
Aplicando la definición de flujo del campo magnético a través de una superficie:

$\Phi_{B,inicial} = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N \cdot B \cdot S \cdot \cos \phi = 300 \cdot 0{,}2\ T \cdot \pi \cdot (0{,}04\ m)^2 \cdot \cos 30º = 0{,}26\ Wb$

Aplicando la ley de Fraday y como el flujo del campo magnético final es igual a cero:

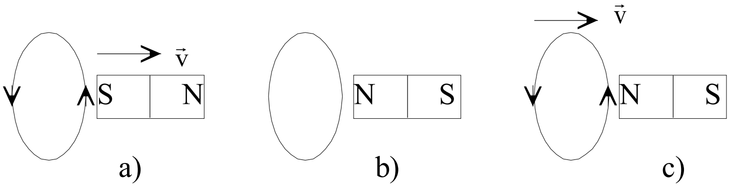
$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Phi_{B,final} - \Phi_{B,inicial}}{\Delta t} = -\frac{0 - 0{,}26\ Wb}{2 s} = 0{,}13\ V$$

**9. Se tiene una espira circular y una barra imán. Justifica el sentido de la intensidad de la corriente eléctrica inducida en la espira en los tres casos representados en la figura adjunta.**




a) b) c)

Al alejar el polo sur de la barra imán, disminuye el flujo magnético que la atraviesa y la corriente gira en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Así se genera un campo magnético inducido del mismo sentido que el inductor y se opone a la variación del flujo magnético.

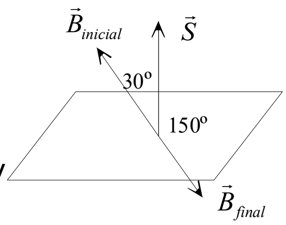



En la figura central no se genera corriente eléctrica, ya que no hay variación del flujo magnético.
Al acercar la espira al polo norte de la barra imán, aumenta el flujo magnético que la atraviesa y la corriente gira en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Así se genera un campo magnético inducido de sentido contrario que el inductor y se opone a la variación del flujo magnético.

**10. Considérese una espira conductora, cuadrada y horizontal, de 10 m de lado. Un campo magnético uniforme, de $10^{-7}$ T, atraviesa la espira de abajo hacia arriba formando un ángulo de 301 con la vertical ascendente. A continuación invertimos el sentido de ese campo, empleando 0,1 s en tal proceso. Calcula: a) el flujo magnético del campo inicial. b) La fuerza electromotriz inducida, generada por la inversión.**

Aplicando la definición de flujo del campo magnético a través de una superficie:

$$\Phi_{B,inicial} = \vec{B}\cdot\vec{S} = B \cdot S \cdot \cos\phi = 10^{-7}\ T \cdot (10\ m)^2 \cdot \cos 30º = 8{,}66 \cdot 10^{-6}\ Wb$$

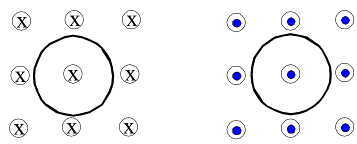



Aplicando la ley de Fraday y como el flujo del campo magnético final es igual al flujo inicial pero cambiado de signo, se tiene:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Phi_{B,final} - \Phi_{B,inicial}}{\Delta t} = -\frac{-2\cdot\Phi_{B,inicial}}{\Delta t} = \frac{2\cdot 8{,}66\cdot 10^{-6}\ Wb}{0{,}1 s} = 1{,}73\cdot 10^{-4}\ V$$

**11. Una bobina circular está inmersa en un campo magnético uniforme B, de valor 1 T. Este campo es paralelo al eje de la bobina y, por tanto, perpendicular al plano que contiene a cada espira. La bobina posee 100 espiras, tiene un diámetro de 2A10 $^{-2}$ m y una resistencia de 50 Ω. Supongamos que, repentinamente, se invierte el sentido del campo B. Calcular entonces el valor Q de la carga total que pasa a través de la bobina.**

El flujo que atraviesa la superficie de la expira pasa de su valor máximo a su valor mínimo. Si inicialmente el vector campo magnético y el vector superficie forman un ángulo de 01, en la situación final es de 1801. Por tanto:



$$\phi_{B,incial} = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\cdot S \quad y \quad \phi_{B,final} = \vec{B}\cdot\vec{S} = -B\cdot S$$

Aplicando la ley de Faraday, la ley de Ohm y la definición de intensidad de la corriente, se tiene:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} = I\cdot R = \frac{Q}{\Delta t}R$$

La carga transportada es: $Q = -\frac{\Delta\phi_B}{R}$

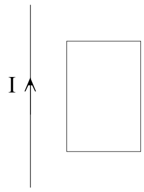
Para el caso que nos ocupa: $Q = -\frac{\Delta\phi_B}{R} = -\frac{-B\cdot S - B\cdot S}{R} = \frac{2\cdot B\cdot S}{R}$

Y para una bobina con N de espiras: $Q = \frac{2\cdot B\cdot N\cdot S}{R}$

Sustituyendo: $Q = \frac{2\cdot 1 T\cdot 100\cdot\pi\cdot(10^{-2}\ m)^2}{50\ \Omega} = 1{,}3\cdot 10^{-3}$ Culombios (C)

La carga es independiente del tiempo que tarde en producirse la variación del flujo. Si la variación es rápida la intensidad es elevada y si es lenta la intensidad es pequeña.

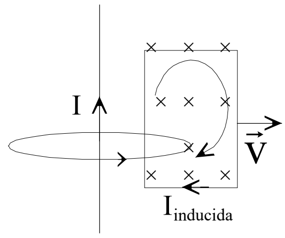
**12. La figura adjunta muestra un hilo conductor rectilíneo y una espira conductora. Por el hilo pasa una corriente continua. Justifica si se inducirá corriente en la espira en los casos siguientes: a) La espira se encuentra en reposo. b) La espira se mueve hacia arriba paralelamente al hilo. c) La espira se mueve hacia la derecha.**




El hilo por el que pasa corriente genera en su entorno un campo magnético, cuyas líneas de campo son circunferencias concéntricas en el hilo y cuyo sentido es el indicado por el giro de un sacacorchos que avanza según la intensidad de la corriente eléctrica. En el ejemplo penetran en el papel en la posición de la espira.

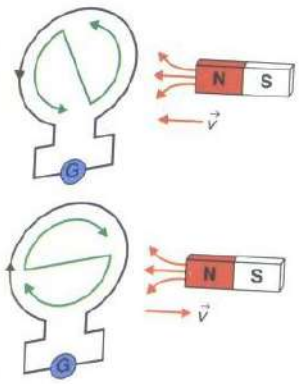
En los casos a y b no hay variación del flujo del campo magnético que atraviesa la espira y por ello no se induce ninguna corriente eléctrica.

En el caso c hay una disminución del flujo del campo magnético que atraviesa a la espira y se genera una corriente inducida que se opone a la causa que la produce reforzando el campo magnético en esa posición y por ello se induce una corriente eléctrica en el sentido de las agujas del reloj.



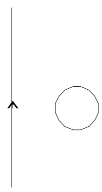

**13. Razona el sentido de la corriente inducida en una espira cuando se acerca el polo norte de una barra imán a una espira y cuando se aleja el plano de la espira del citado polo norte de la barra imán.**

Al acercar el polo norte de una barra imán a una espira aumenta el flujo del campo magnético que pasa a su través. Según la ley de Lenz, el campo magnético producido por la corriente inducida se opone al aumento del flujo magnético que la atraviesa, por lo que tiene sentido contrario al del campo magnético inductor. Ello se logra produciendo una corriente inducida, vista desde el imán, que circule en sentido contrario al de las agujas del reloj; es decir, aparece un polo norte en la cara de la espira enfrentada a la barra imán.



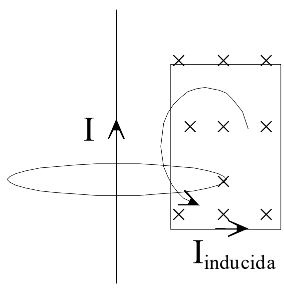

Si se aleja el polo norte de la barra imán disminuye el flujo del campo magnético que atraviesa la espira. La corriente inducida cambia de sentido y se opone a la disminución de flujo generando un campo magnético del mismo sentido que el inductor. El sentido de la, intensidad es el mismo que el de las agujas del reloj, así el campo magnético inducido en la espira presente su polo sur en la cara enfrentada a la barra imán.

**14. Por un hilo conductor rectilíneo muy largo circula una corriente de intensidad constante. ) Se induce alguna corriente en la espira conductora que aparece en la figura? Si dicha intensidad no fuera constante sino que aumentara con el tiempo ) se induciría corriente en la espira? Indique en su caso el sentido en el que circularía la corriente inducida. Nota El hilo y la espira están contenidos en el mismo plano, y ambos en reposo.**



El hilo por el que pasa corriente genera en su entorno un campo magnético, cuyas líneas de campo son circunferencias concéntricas en el hilo y cuyo sentido es el indicado por el giro de un sacacorchos que avanza según la intensidad de la corriente eléctrica. En el ejemplo penetran en el papel en la posición de la espira.

En el primer caso, no hay variación de la intensidad ni movimiento relativo entre el hilo y la espira. Por ello no hay variación del flujo del campo magnético que atraviesa a la espira y no se induce ninguna intensidad de la corriente eléctrica.




Al aumentar la intensidad de la corriente eléctrica aumenta el módulo del campo magnético en la zona de la espira y aumenta el flujo del campo magnético que la atraviesa. De acuerdo con la ley de Lenz se genera una intensidad de la corriente eléctrica que gira en sentido contrario al de las agujas del reloj. De esta forma genera un campo magnético que sale del plano del papel, hacia el observador, y así se opone al aumento de flujo del campo inductor.

**15. En el plano XY se tiene una espira circular de 2 cm de radio. Simultáneamente se tiene un campo magnético uniforme cuya dirección forma un ángulo de 30º con el semieje positivo y cuyo módulo es B = 3 · e$^{-t/2}$ T, donde t es el tiempo. Calcula el flujo del campo magnético y la fuerza electromotriz inducida en la espira en el instante t = 0 s. Indica mediante un dibujo, el sentido de la corriente inducida en la espira en ese instante.**

Aplicando la definición de flujo del campo magnético a través de una superficie:

$\Phi_{B,} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \phi = 3 \cdot e^{-t/2}\ T \cdot \pi \cdot (0{,}02\ m)^2 \cos 30º = 3{,}26 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-t/2}\ Wb$

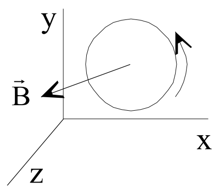
Y en el instante inicial: $\Phi_{B,0} = 3{,}26 \cdot 10^{-3}$ Wb

Aplicando la ley de Faraday y como el flujo del campo magnético final es igual a cero:

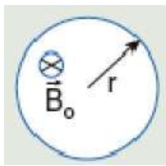
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -3{,}26 \cdot 10^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-\frac{t}{2}} = 1{,}63 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\frac{t}{2}}\ V$$

Y en el instante inicial: $\varepsilon_{t=0} = 1{,}63 \cdot 10^{-3}$ V

El flujo del campo magnético disminuye en el transcurso del tiempo. Aplicando la ley de Lenz la intensidad de la corriente inducida debe girar en el sentido contrario al de las agujas del reloj. De esta forma genera un campo magnético inducido del mismo sentido que el inductor y así se opone a la variación de flujo.




**16. Una espira circular se coloca en una zona de campo magnético uniforme Bo perpendicular al plano de la espira y dirigido hacia adentro tal como se muestra en la figura. Determine en qué sentido circulará la corriente inducida en la espira en los siguientes casos: a) aumentamos progresivamente el radio de la espira manteniendo el valor del campo. b) mantenemos el valor del radio de la espira pero vamos aumentando progresivamente el valor del campo. Razone su respuesta en ambos casos.**

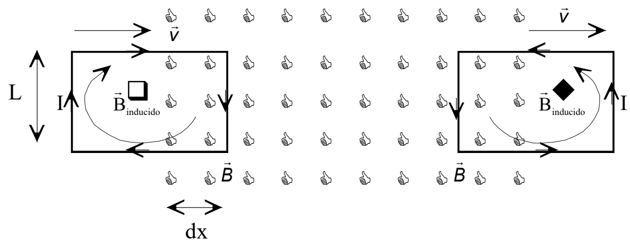



a) Si se aumenta al radio de la espira, aumentan las líneas de campo magnético que la atraviesan y según la ley de Lenz, la intensidad de la corriente eléctrica debe girar en el sentido contrario al de las agujas del reloj. De esa forma genera dentro de la espira un campo magnético dirigido hacia el observador que se opone a la variación del flujo del campo magnético.

b) Lo mismo que el apartado a). Si aumenta el valor del campo magnético, aumentan las líneas de campo magnético que la atraviesan y según la ley de Lenz, la intensidad de la corriente eléctrica debe girar en el sentido contrario al de las agujas del reloj. De esa forma genera dentro de la espira un campo magnético dirigido hacia el observador que se opone a la variación del flujo del campo magnético.

**17. Una espira cuadrada de 30 cm de lado, se mueve con velocidad constante de 10 m/s y penetra en un campo magnético de 0,5 T perpendicularmente al plano de la espira y dirigido hacia el observador. a) Explique, razonadamente, qué ocurre en la espira desde que comienza a entrar en la región del campo. ¿Qué ocurrirá si la espira, una vez en el interior del campo, saliera del mismo? b) Calcule la fuerza electromotriz inducida en la espira mientras está entrando en el campo?**

Al penetrar la espira dentro del campo magnético aumenta el flujo magnético que la atraviesa Por la ley de Lenz, el campo magnético inducido es de signo contrario al campo inductor y por ello la intensidad de la corriente tiene el sentido de las agujas del reloj.




Cuando la espira está completamente dentro del campo magnético desaparece la corriente inducida, pues no hay variación del flujo del campo magnético.

Al salir del campo magnético hay una disminución del flujo del campo magnético. La espira se opone a la variación del flujo, apareciendo una corriente inducida de sentido contrario al de las agujas del reloj. Así se genera un campo magnético del mismo sentido que el campo inductor.

El flujo elemental que atraviesa la espira al penetrar en el campo magnético es:

$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{S}$ = B A dS · cos 0º = B · dS

Si el conductor tiene una longitud L y se traslada una distancia dx con velocidad constante, entonces:
dS = L A dx; dx = v A dt

Como el flujo magnético que atraviesa la superficie que delimita el conductor disminuye al aumentar la distancia recorrida, resulta que:
$d\Phi_B$ = - B A L A dx = - B A L A v A dt

Aplicando la ley de Faraday: la fuerza electromotriz que se induce en la espira es:

$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ = - B A L A v = - 0,5 T · 0,3 m · 10 m/s = - 1,5 V

**18. Una espira cuadrada de 10 cm de lado, inicialmente horizontal, gira a 1200 rpm, en torno a uno de sus lados, en un campo magnético uniforme de 0,2 T, de dirección vertical. a) Calcula el valor máximo de la fuerza electromotriz inducida en la espira. b) Cómo se modifica la fuerza electromotriz inducida en la espira si se reduce la velocidad de rotación a la mitad?**

a) La frecuencia en unidades SI es: ν = 1200 rpm = 20 Hz
El flujo del campo magnético que atraviesa la espira es:
$\Phi_B$ = B A S A cos ν = N · B A S A cos (ω A t)

Aplicando la ley de Faraday: $\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = B \cdot S \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t)$

Su valor máximo es: $\varepsilon_0 = B \cdot S \cdot \omega = B \cdot S \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu = 0{,}2\ T \cdot (0{,}1\ m)^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 20\ Hz = 0{,}08 \cdot \pi\ V$

b) Si la velocidad de rotación se reduce a la mitad, la frecuencia lo hace en la misma proporción y la fuerza electromotriz inducida es también la mitad.
$\varepsilon'_0 = \varepsilon_0/2 = 0{,}04 \cdot \pi\ V$

**19. Un alternador está formado por un cuadro 200 espiras cuadradas de 5 cm de lado, situado en el seno de un campo magnético de 0,5 T de módulo. Calcula la velocidad angular con la que deben girar las espiras para generar una fuerza electromotriz inducida de 230 V de valor máximo. ¿Cuál es el valor de la frecuencia de dicha corriente?**

El flujo del campo magnético que atraviesa el cuadro del alternador es:
$\Phi_B = N \cdot B \text{ A } S \text{ A } \cos \nu = N \cdot B \text{ A } S \text{ A } \cos (\omega \text{ A } t)$

Aplicando la ley de Faraday: $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi_B}{dt} = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$

Su valor máximo es: $\varepsilon_0 = N \cdot B \cdot S \cdot \omega$

Sustituyendo: 230 V = 200 espiras · 0,5 T · $(0{,}05 \text{ m})^2 \cdot \omega \Rightarrow \omega = 920$ rad/s

La frecuencia de la corriente es la misma que la frecuencia de giro del alternador:
$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu$; 920 rad/s $= 2 \cdot \pi \cdot \nu \Rightarrow \nu = 146{,}4$ Hz

**20. Si se aumenta la velocidad de giro de un alternador, indica cómo se modifica la diferencia de potencial, intensidad, potencia y frecuencia de la corriente eléctrica producida.**

Aplicando la ley de Faraday, la fuerza electromotriz inducida en un generador es:
$\varepsilon = N \text{ A } B \text{ A } S \text{ A } \omega \text{ A } \text{sen}(\omega \text{ A } t) = N \text{ A } B \text{ A } S \text{ A } 2 \text{ A } \pi \text{ A } \nu \text{ A } \text{sen}(2 \text{ A } \pi \text{ A } \nu \text{ A } t)$

Con N el número de espiras del cuadro, B el campo magnético, S la superficie de cada espira, ω la velocidad angular de giro y ν la frecuencia de giro.

Por tanto, un aumento de la frecuencia de giro produce un aumento de la diferencia de potencial.

Si el circuito externo es el mismo, por la ley de Ohm, $I = \dfrac{V}{R}$, un aumento de la diferencia de potencial produce un aumento de la intensidad que recorre el circuito externo.

En el circuito externo, lo que se mantiene constante es su resistencia eléctrica y la característica del generador es su diferencia de potencial. Como $P = I \text{ A } V = \dfrac{V^2}{R}$, un aumento de la diferencia de potencial proporciona más potencia al circuito.

Como en cada vuelta del cuadro la fuerza electromotriz inducida y la intensidad cambian dos veces de sentido, en cada segundo las dos magnitudes cambian 2 A ν veces de sentido. Por tanto, un aumento de la frecuencia de giro produce un aumento mayor de la frecuencia de la corriente alterna.

## UNIDAD 7: La luz y sus propiedades

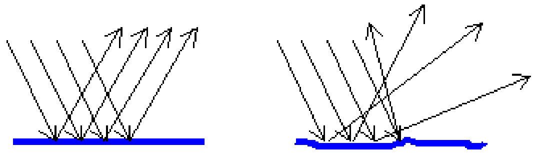
### CUESTIONES INICIALES-PÁG. 175

**1. ¿Qué diferencias hay entre las ondas luminosas y las ondas sonoras?**

Las ondas luminosas son ondas electromagnéticas transversales, que se propagan con diferente velocidad por los medios materiales transparentes y que, además, pueden propagarse por el vacío, donde lo hacen a la velocidad constante de 300 000 km/s.
Las ondas sonoras son ondas de naturaleza mecánica, son longitudinales, no se propagan por el vacío y su velocidad depende del medio y de otras variables, como, por ejemplo, la temperatura.

**2. ¿En qué consiste el fenómeno del arco iris?**
El arco iris se debe a la dispersión de la luz en las gotas de lluvia cuando el Sol está a nuestra espalda. Las gotas de lluvia separan la luz blanca incidente en las luces elementales de diferentes colores (rojo, naranja, amarillo, verde, azul, añil y violeta) caracterizados por su respectiva longitud de onda.

**3. La nieve refleja casi toda la luz que incide en su superficie. ¿Por qué no nos vemos reflejados en ella?**
La nieve no forma una superficie plana y pulida de modo que la reflexión que produce su superficie no es especular sino difusa.
Esto quiere decir que un haz de rayos incidentes paralelos se reflejan en todas las direcciones y el ojo no puede percibir una imagen reflejada.



Reflexión especular        Reflexión difusa

### ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 208

**1. Deduce que para un rato de luz que atraviesa dos medios materiales se cumple la relación $\lambda_1 \cdot n_1 = \lambda_2 \cdot n_2$.**
La relación entre la velocidad de propagación de la luz en un medio con su frecuencia es: $v = \lambda \cdot \nu$

Si la luz se propaga de un medio 1 a otro medio 2, y como la frecuencia es una característica del foco y no del medio, se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \lambda_1 \cdot \nu \\ v_2 = \lambda_2 \cdot \nu \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2}$$

Aplicando la definición de índice de refracción: $n = \frac{c}{v}$ y sustituyendo:

$$\frac{\frac{c}{n_1}}{\lambda_1} = \frac{\frac{c}{n_2}}{\lambda_2}; \frac{1}{n_1 \cdot \lambda_1} = \frac{1}{n_2 \cdot \lambda_2} \Rightarrow n_1 \cdot \lambda_1 = n_2 \cdot \lambda_2$$

**2. La longitud de onda de luz láser roja helio-neón en el aire es de 632,8 nm. Calcula la longitud de onda y la velocidad con la que se propaga por un vidrio de índice de refracción 1,5.**

La frecuencia de una radiación no depende del medio de propagación por ser una característica de la fuente emisora. La velocidad de propagación y la longitud de onda dependen del medio transmisor. Como la velocidad de propagación de la luz en el vacío es prácticamente iguala a la del aire, resulta:

$$\nu = \frac{c}{\lambda_{vacío}} = \frac{3 \cdot 10^8 \, m/s}{632{,}8 \cdot 10^{-9} \, m} = 4{,}73 \cdot 10^{14} \, Hz$$

Aplicando la definición de índice de refracción de un medio respecto del vacío, se tiene:

$$n_{vidrio} = \frac{c}{v_{vidrio}} \Rightarrow v_{vidrio} = \frac{c}{n_{vidrio}} = \frac{3 \cdot 10^8 \, m/s}{1{,}5} = 2 \cdot 10^8 \, m/s$$

$$n_{vidrio} = \frac{c}{v_{vidrio}} = \frac{\lambda_{vacío} \cdot \nu}{\lambda_{vidrio} \cdot \nu} = \frac{\lambda_{vacío}}{\lambda_{vidrio}} \Rightarrow \lambda_{vidrio} = \frac{\lambda_{vacío}}{n_{vidrio}} = \frac{632{,}8 \, nm}{1{,}5} = 421{,}9 \, nm$$

**3. Una luz monocromática tiene una longitud de onda de 633 nm en el aire y de 474 nm en el humor acuoso del interior del ojo humano. Calcula el índice de refracción del humor acuoso del ojo humano. Determina la frecuencia de la radiación y la velocidad de propagación de esa luz por el ojo.**

La relación entre la velocidad de propagación de la luz en un medio con su frecuencia es: $v = \lambda \cdot \nu$

$c = \lambda_{aire} \cdot \nu$; $v_{ojo} = \lambda_{humor\ acuoso} \cdot \nu$

Como la frecuencia es una característica del foco y no del medio, resulta que:

$c = \lambda_{aire} \cdot \nu$; $3 \cdot 10^8$ m/s = $633 \cdot 10^{-9}$ m $\cdot \nu \Rightarrow \nu = 4{,}74 \cdot 10^{14}$ Hz

$$\frac{c}{\lambda_{aire}} = \frac{v_{ojo}}{\lambda_{humor\,acuoso}}; \frac{3 \cdot 10^8 \, m/s}{633 \, nm} = \frac{v_{ojo}}{474 \, nm} \Rightarrow v_{ojo} = 2{,}246 \cdot 10^8 \, m/s$$

Y el índice de refracción es: $n_{humor\ acuoso} = \dfrac{c}{v} = \dfrac{3 \cdot 10^8 \, m/s}{2{,}246 \cdot 10^8 \, m/s} = 1{,}34$

**4. Determina la velocidad de la luz en el etanol teniendo en cuenta que su índice de refracción absoluto es n = 1,36. Un haz de luz roja cuya longitud de onda en el aire es de 695 nm penetra en dicho alcohol. Si el ángulo de incidencia es de 30°, ¿cuál es el ángulo de refracción? ¿Cuál es la longitud de onda y la frecuencia del haz de luz en el alcohol?**

Aplicando la definición de índice de refracción: $n = \dfrac{c}{v}; 1{,}36 = \dfrac{3 \cdot 10^8 \, m/s}{v} \Rightarrow v = 2{,}21 \cdot 10^8 \, m/s$

Aplicando la ley de Snell: $n_{aire} \cdot$ sen i = $n_{alcohol} \cdot$ sen r; 1 · sen 30º = 1,36 · sen r $\Rightarrow$ r = 21,57º

La frecuencia de la luz es la misma en el aire que en el alcohol: $\nu = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{3 \cdot 10^8 \, m/s}{695 \cdot 10^{-9} \, m} = 4{,}32 \cdot 10^{14} \, Hz$

Y la longitud de onda es: $\lambda = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{2{,}21 \cdot 10^8 \, m/s}{4{,}32 \cdot 10^{14} \, Hz} = 5{,}12 \cdot 10^{-7} \, m = 512 \, nm$

**5. Un rayo de luz que se propaga por el aire incide con un ángulo de 40º con la recta normal a la superficie de separación con un medio en el ángulo de refracción es de 26º con la citada recta normal. Calcula el índice de refracción del medio.**

Aplicando la ley de Snell:

$n_{aire} \cdot$ sen i = $n_{medio} \cdot$ sen r; 1 · sen 40º = $n_{medio} \cdot$ sen 26º $\Rightarrow n_{medio}$ = 1,47

**6. La ecuación $E_{x,t}$ = $10^{-3}$ A cos (5 A $10^{10}$ A t - 200 A x), en unidades del SI, representa la propagación del campo eléctrico de una onda electromagnética plana por un medio determinado. Este campo eléctrico está confinado en el plano XY. Calcula la frecuencia y la longitud de onda de esa onda electromagnética. Determina el índice de refracción del medio. Escribe la expresión del campo magnético de la onda e indica en que plano está confinado.**

La expresión general de un campo eléctrico es: $E_{x,t} = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$

Comparando ambas expresiones, resulta que:

ω = 5 A $10^{10}$ rad/s = 2 A π A ν Ψ ν = 8 A $10^9$ Hz; k = 200 $m^{-1}$ = $\frac{2\cdot\pi}{\lambda}$ Ψ λ = 3,1 A $10^{-2}$ m

La velocidad de propagación es: c = λ A ν = $\frac{\omega}{k} = \frac{5\cdot 10^{10}\ \text{rad/s}}{200\ m^{-1}} = 2{,}5\cdot 10^8\ \text{m/s}$

Y el índice de refracción del medio es: $n = \frac{c}{v} = \frac{3\cdot 10^8\ m/s}{2{,}5\cdot 10^8\ m/s} = 1{,}2$

Las ondas que describen los campos eléctrico y magnético están en fase y sus módulos están relacionados por:

$E_0 = v \cdot B_0$; $10^{-3}$ N/C = 2,5 · $10^8$ m/s · $B_0 \Rightarrow B_0 = 4 \cdot 10^{-12}$ T

La ecuación del campo magnético es: $B_{x,t}$ = 4 · $10^{-12}$ A cos (5 A $10^{10}$ A t - 200 A x)

Está confinado en el plano ZX los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí y perpendiculares a la dirección de propagación.

**7. Una onda electromagnética que tiene una longitud de onda de 10 nm está polarizada linealmente y se propaga en el vacío en el sentido positivo del eje OX. Si la amplitud del campo eléctrico es $E_0$ = 24 N/C y vibra en el plano XY, escribe las ecuaciones vectoriales del campo eléctrico y del campo magnético.**

Las constantes que permiten describir las ecuaciones de los campos son:

$$k = \frac{2\cdot\pi}{\lambda} = \frac{2\cdot\pi}{10\cdot 10^{-9}\ m} = 2\cdot 10^8 \cdot \pi\, m^{-1}$$

$c = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = c\cdot k$ = 3 · $10^8$ m/s · 2 · $10^8$ · π $m^{-1}$ = 6 · $10^{16}$ · π rad/s

La amplitud del campo magnético es: $E_0 = c \cdot B_0$; 24 N/C = 3 · $10^8$ m/s · $B_0 \Rightarrow B_0 = 8 \cdot 10^{-8}$ T

El campo eléctrico vibra en el plano XY y perpendicular al eje X, y su expresión vectorial es:

$\vec{E}_{x,t}$ = 24 N/C · cos (6 · $10^{16}$ · π · t – 2 · $10^8$ · π · x) $\vec{j}$ en unidades SI

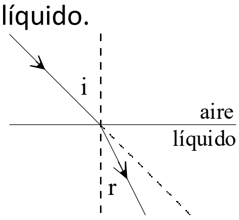
El campo magnético es perpendicular al campo eléctrico y a la dirección de propagación, luego vibra en el plano ZX y su expresión vectorial es:

$\vec{B}_{x,t}$ = 8 · $10^{-8}$ T · cos (6 · $10^{16}$ · π · t – 2 · $10^8$ · π · x) $\vec{k}$ en unidades SI

**8. Un rayo luminoso incide sobre una superficie plana de separación aire-líquido. Cuando el ángulo de incidencia es de 45° el de refracción vale 30° ¿Qué ángulo de refracción se produciría si el haz incidiera con un ángulo de 60º.**

a) Aplicando la ley de Snell a la primera refracción se calcula el índice de refracción del líquido.

$n_{aire} \cdot$ sen i = $n_{líquido} \cdot$ sen r; 1 · sen 45º = $n_{líquido}$ · sen 30º $\Rightarrow n_{líquido}$ = 1,4



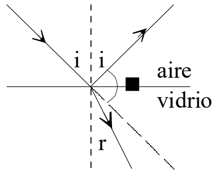

Aplicando nuevamente la ley de Snell a la segunda refracción se calcula el nuevo ángulo de refracción:

$n_{aire} \cdot$ sen i = $n_{líquido} \cdot$ sen r; 1 · sen 60º = 1,4 · sen r ⇒ r = 38,2º

**9. Un rayo de luz se propaga por el aire e incide con un ángulo de 30º con la dirección normal a la superficie de un vidrio. Si el índice de refracción en el vidrio es 1,5. Calcula el ángulo que forman el rayo reflejado y el rayo refractado.**

El ángulo de reflexión es de 30º y el de refracción se calcula aplicando la ley de Snell.

$n_{aire} \cdot \text{sen } i = n_{vidrio} \cdot \text{sen } r$; $1 \cdot \text{sen } 30 = 1{,}5 \cdot \text{sen } r \Rightarrow r = 19{,}47º$



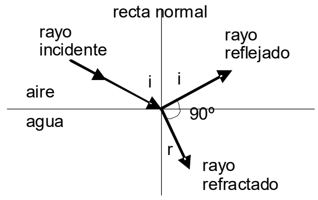

Si $\phi$ es el ángulo pedido, de la figura adjunta se deduce que:

$i + \phi + r = 180º \Rightarrow \phi = 180º - 30º - 19{,}47º = 130{,}53º$

**10. Un rayo de luz incide sobre una superficie plana de un vidrio con un índice de refracción n=1,5. Si el ángulo formado por el rayo reflejado y el refractado es de 90°, calcule los ángulos de incidencia y de refracción.**

Como el ángulo de reflexión, i, es igual al ángulo de incidencia, de la figura adjunta se deduce que:

$180º = i + 90º + r$; $90º = i + r \Rightarrow r = 90º - i$

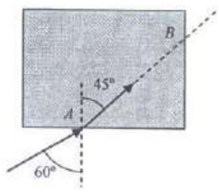



Aplicando la ley de Snell, resulta: $n_{aire} \cdot \text{sen } i = n_{vidrio} \cdot \text{sen } r$

Sustituyendo: $1 \cdot \text{sen } i = 1{,}5 \cdot \text{sen } (90º - i) \Rightarrow \text{sen } i = 1{,}5 \cdot \cos i$

Operando: $\text{tag } i = 1{,}5 \Rightarrow i = \text{arc tg } 1{,}5 = 56{,}31º$; $r = 90º - i = 33{,}69º$

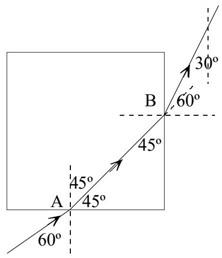
**11. Sobre un prisma cúbico de índice de refracción n situado en el aire incide un rayo luminoso con un ángulo de 60°. El ángulo que forma el rayo emergente con la normal es de 45°. Determina el índice de refracción n del prisma. ¿Qué ángulo forman entre sí la dirección del rayo incidente en A con la dirección del rayo emergente en B de la figura?**




a) Aplicando la ley de Snell a la refracción que se produce en el punto A, se tiene que:

$n_{aire} \cdot \text{sen } i = n_{prisma} \cdot \text{sen } r$; $1 \cdot \text{sen } 60º = n_{prisma} \cdot \text{sen } 45º \Rightarrow$

$n_{prisma} = 1{,}225$

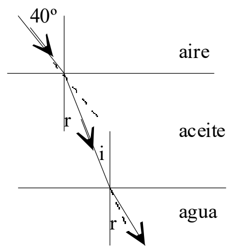



b) El ángulo de incidencia en el punto B es de 45º, aplicando la ley de la refracción a este punto:

$n_{prisma} \cdot \text{sen } i = n_{aire} \cdot \text{sen } r$; $1{,}225 \cdot \text{sen } 45º = 1 \cdot \text{sen } r \Rightarrow r = 60º$

El rayo incidente forma un ángulo de 60º con la vertical y el emergente lo forma de 30º. Por tanto, las direcciones de estos rayos forman entre sí un ángulo de 30º.

**12. Una capa de aceite, de índice de refracción $n_{aceite}$ = 1,45 flota sobre una capa de agua de índice de refracción $n_{agua}$ = 1,33. Un rayo de luz penetra desde al aire en el aceite con un ángulo de 40º respecto de la recta normal. Calcula el ángulo de refracción dentro del agua y presenta en un esquema la trayectoria de los rayos.**




Aplicando la ley de Snell a las dos refracciones que se producen, resulta que:

$n_{aire} \cdot \text{sen } i_{aire} = n_{aceite} \cdot \text{sen } r_{aceite}$; $1 \cdot \text{sen } 40º = 1{,}45 \cdot \text{sen } r_{aceite} \Rightarrow r_{aceite} = 26{,}3º$

El ángulo de incidencia en la superficie del agua es el mismo que el ángulo de refracción en el aceite. Por tanto:

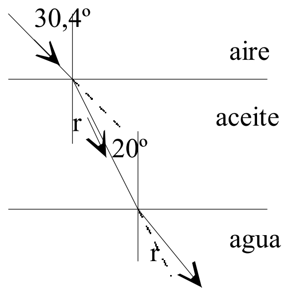
$n_{aceite} \cdot \text{sen } i_{aceite} = n_{agua} \cdot \text{sen } r_{agua}$; $1{,}45 \cdot \text{sen } 26{,}3º = 1{,}33 \cdot \text{sen } r_{agua}$

Despejando: $r_{agua} = 28{,}9º$

**13. Una capa de aceite flota sobre una capa de agua de índice de refracción $n_{agua}$ = 1,33. Un rayo de luz incide desde el aire formando un ángulo de 30,4º respecto de la recta normal en el punto de incidencia. El rayo se refracta en el aceite e incide en la superficie del agua formando un ángulo de 20º respecto de la recta normal. Calcula el índice de refracción del aceite y el ángulo de refracción en el agua.**

El ángulo de refracción en la superficie del aceite es el mismo que el incidencia en la superficie del agua.

$n_{aire} \cdot$ sen $i_{aire} = n_{aceite} \cdot$ sen $r_{aceite}$; 1 · sen 30,4º = $n_{aceite}$ · sen 20º




Despejando: $n_{aceite}$ = 1,48

Aplicando la ley de Snell a la segunda refracción:

$n_{aceite} \cdot$ sen $i_{aceite} = n_{agua} \cdot$ sen $r_{agua}$; 1,48 · sen 20º = 1,33 · sen $r_{agua}$

Despejando: $r_{agua}$ = 22,4º

**14. Un rayo de luz atraviesa una lámina, de 5 cm de espesor, de un material transparente de índice refracción n = 1,4. Deduce que el rayo que el rayo que emerge de la lámina es paralelo al rayo incidente. Calcula el desplazamiento que ha experimentado el rayo emergente respecto del rayo incidente cuando el ángulo de incidencia es de 30º.**

El rayo incide desde el aire en una cara con un ángulo $i_1$ y se refracta, acercándose a la normal, con un ángulo $r_1$, pasando al interior; atraviesa la lámina e incide en la parte interior de la otra cara con un ángulo $i_2$ refractándose, alejándose de la normal, saliendo al aire con un ángulo emergente $r_2$.

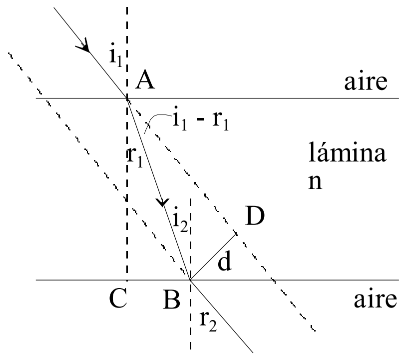
a) Aplicando la ley de Snell a las dos refracciones que se producen en las caras de la lámina, se tiene:

$n_{aire}$ A sen $i_1 = n_{lámina}$ A sen $r_1$; $n_{lámina}$ A sen $i_2 = n_{aire}$ A sen $r_2$

De la figura se deduce que: $r_1 = i_2$, y por tanto:

$n_{aire}$ A sen $i_1 = n_{aire}$ A sen $r_2 \Rightarrow i_1 = r_2$

Luego el rayo emergente sale de la lámina paralelo al incidente pero desplazado lateralmente una distancia igual a d.




b) Aplicando la ley de Snell a la primera cara se obtiene el valor del ángulo de refracción $r_1$.

$n_{aire} \cdot$ sen $i_1 = n_{lámina} \cdot$ sen $r_1$; 1 · sen 30º = 1,4 · sen $r_1 \Rightarrow r_1$ = 20,92º

Del triángulo rectángulo ACB de la figura se obtiene la distancia AB recorrida por el rayo dentro de la lámina:

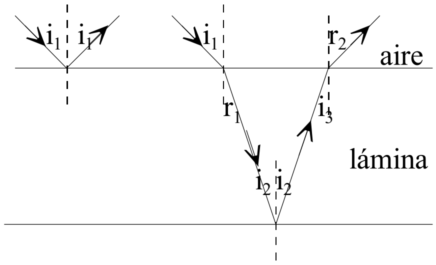
$$AB = \frac{AC}{\cos r_1} = \frac{5\,\text{cm}}{\cos 20{,}92^o} = 5{,}35\ \text{cm}$$

Del triángulo rectángulo ADB de la figura se obtiene el desplazamiento lateral BD.

d = BD = AB · sen ($i_1 - r_1$) = 5,35 cm · sen (30º – 20,92º) = 0,84 cm

**15. Demostrar que dos rayos paralelos que inciden sobre una lámina plana, reflejándose uno de ellos en la primera cara de la lámina y el otro en la segunda, después de haberse refractado en su paso por la primera, salen otra vez al medio de incidencia siendo paralelos.**

El rayo que se refleja en la primera lámina se refleja con un ángulo igual al de incidencia: $i_1$.




Para el segundo rayo que refracta en la primera cara se cumple la ley de Snell:
$n_{aire} \cdot \text{sen } i_1 = n_{lámina} \cdot \text{sen } r_1$

Al llegar a la segunda cara se refleja con un ángulo de incidencia $i_2$ y el ángulo de reflexión también es $i_2$.

De la figura se deduce que $r_1 = i_2$ y que $i_2 = r_3$
Por tanto el ángulo de incidencia, al pasar al aire del rayo que se refleja en la segunda cara es:
$i_3 = i_2 = r_1$

Aplicando la ley de Snell a esta refracción: $n_{lámina} \cdot \text{sen } i_3 = n_{aire} \cdot \text{sen } r_2$;

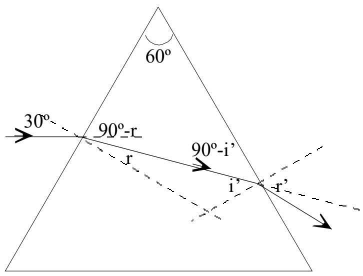
Operando: $n_{lámina} \cdot \text{sen } r_1 = n_{aire} \cdot \text{sen } r_2$

Comparando esta ecuación con la de la primera refracción se deduce que:
$n_{aire} \cdot \text{sen } i_1 = n_{aire} \cdot \text{sen } r_2 \Rightarrow i_1 = r_2$

Y por tanto los dos rayos son paralelos.

**16. Un rayo de luz monocromática incide sobre una cara lateral de un prisma de vidrio de índice de refracción $\sqrt{2}$ y cuya base es un triángulo equilátero. Calcula el ángulo con el que emerge el rayo del prisma si el ángulo de incidencia es de 30º. Dibuja un esquema gráfico con la trayectoria de los rayos.**

Como la base del prisma es un triángulo equilátero, el ángulo entre cualquiera de sus caras es de 60º.




El ángulo de refracción dentro del prisma se calcula aplicando la ley de Snell al rayo incidente a la cara del prisma.

$n_{aire}$ A sen 30º = $n_{prisma}$ A sen r; 1 A $\frac{1}{2} = \sqrt{2}$ A sen r $\Rightarrow$ r = 20,71

Es el ángulo de refracción en la primera cara del prisma.

Del triángulo formado por la trayectoria del rayo dentro del prisma y uno de sus vértices se deduce el valor del ángulo de incidencia en la segunda cara.
$180º = 90º – r + 60º + 90º - i'$; $r + i' = 60º \Rightarrow i' = 60º - 20,7º = 39,3º$

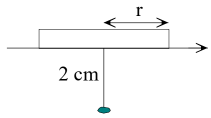
Volviendo a aplicar la ley de Snell a esta segunda reflexión resulta que el ángulo de emergencia es:
$n_{vidrio} \cdot \text{sen } i' = n_{aire} \cdot \text{sen } r'$; $\sqrt{2} \cdot \text{sen } 39,3º = 1 \cdot \text{sen } r' \Rightarrow r' = 63,6º$

**17. El ángulo límite de la luz amarilla de 589 nm en el diamante es de 24,4º. Calcula el índice de refracción del diamante y la velocidad de propagación de esa radiación en su interior.**

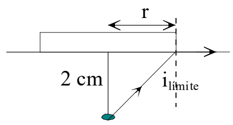
Aplicando la ley de Snell cuando la luz pasa del diamante al aire, resulta que:
$n_{diamante}$ A sen 24º = 1 A sen 90º Ψ $n_{diamante}$ = 2,42

Aplicando la definición de índice de refracción: $n = \frac{c}{v} \Rightarrow v = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2,42} = 1,24 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

**18. Perpendicularmente a un disco de corcho y en su centro se clava un alfiler que sobresale 2 cm. El dispositivo se coloca flotando en el agua de un recipiente con el alfiler hacia abajo. Si el agua tiene un índice de refracción n = 1,33, calcula el radio mínimo del disco par que no se pueda ver la cabeza del alfiler desde fuera del agua.**




La cabeza del alfiler no se ve desde el exterior si el corcho tapa a todos los rayos que se refractan en la superficie del agua. Es decir el disco debe ocultar aquellos rayos cuyo ángulo de incidencia sea menor que el ángulo límite. Para los demás rayos se produce el fenómeno de la reflexión total.



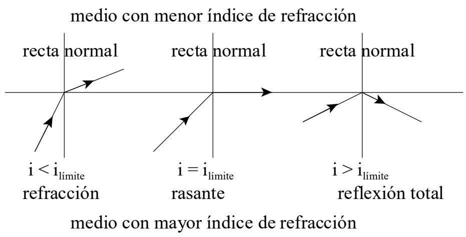

Aplicando la ley de Snell: $n_{agua} \cdot \text{sen } i_{límite} = n_{aire} \cdot \text{sen } 90$

Despejando: $i_{límite} = \text{arc sen } \dfrac{1}{1{,}33} = 48{,}75º$

De la figura se deduce que: $\text{tag } i_{límite} = \dfrac{r}{2\,\text{cm}} \Rightarrow r = 2\text{ cm} \cdot \text{tag } 48{,}75º = 2{,}28\text{ cm}$

**19. Un rayo de luz verde pasa de una placa de vidrio de índice de refracción *n* = 1,5 al aire. La longitud de onda de la luz en la placa es $333 \cdot 10^{-9}$ m. Calcula la longitud de onda de la luz verde en el aire y el ángulo crítico a partir del cual se produce la reflexión total.**

La frecuencia de una radiación es una cantidad constante ya que solo depende del foco emisor. La longitud de onda siempre aumenta al pasar de un medio transmisor al vacío. Aplicando la definición de índice de refracción de un medio, se tiene:




$n = \dfrac{c}{v} = \dfrac{\lambda_{aire} \cdot \nu}{\lambda_{vidrio} \cdot \nu} \Rightarrow \lambda_{aire} = n \cdot \lambda_{vidrio} = 1{,}5 \cdot 333\text{ nm} = 499{,}5\text{ nm}$
$= 499{,}5 \cdot 10^{-9}$ m

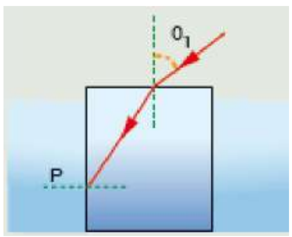
b) El ángulo crítico, $i_{límite}$, es aquel para el cual el rayo refractado sale rasante a la superficie de separación de ambos medios: r = 90E. A este fenómeno se llama **reflexión total** porque, para ángulos de incidencia mayores que el ángulo límite, la luz no se refracta, sino que se refleja totalmente en la superficie de separación de los dos medios.

Aplicando la ley de Snell, resulta que:

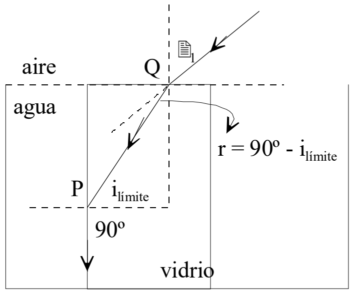
$n_{vidrio} \cdot \text{sen } i_{límite} = n_{aire}$ A sen 90º

Despejando: $\text{sen } i_{límite} = \dfrac{n_{aire}}{n_{vidrio}} = \dfrac{1}{1{,}5} \Rightarrow i_{límite} = 41{,}81º$

**20. Sobre una de las caras de un bloque rectangular de vidrio de índice de refracción $n_2$ = 1,5 incide un rayo de luz formando un ángulo $\theta_1$ con la normal al vidrio. Inicialmente, el bloque se encuentra casi totalmente inmerso en agua, cuyo índice de refracción es 1,33. Halle el valor del ángulo $\theta_1$ para que en un punto P de la cara normal a la de incidencia se produzca la reflexión total. Si se elimina el agua que rodea al vidrio, halle el nuevo valor del ángulo $\theta_1$ en estas condiciones y explique el resultado obtenido.**



a) Sea Q el punto en el que incide la luz en el bloque de vidrio.




Aplicando la ley de Snell en el punto P se calcula el ángulo límite del vidrio frente al agua.

$n_{vidrio} \cdot \text{sen } i_{límite} = n_{agua} \cdot \text{sen } 90º$;

$1,5 \cdot \text{sen } i_{límite} = 1,33 \cdot \text{sen } 90º \Rightarrow i_{límite} = 62,46º$

Para ángulos de incidencia, en el punto P, mayores que 62,46º se produce la reflexión total en esta cara

El ángulo de refracción, r, en la superficie aire-vidrio es:

$r = 90 - i_{límite} = 90 - 62,46º = 27,54º$

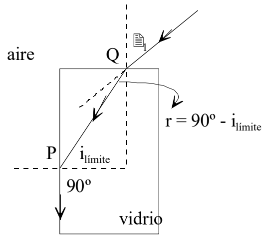
Luego el ángulo r debe ser menor que 27,54º.

Aplicando la ley de Snell en el punto Q, resulta que:

$n_{aire} \cdot \text{sen } \theta_1 = n_{vidrio} \cdot \text{sen } 27,54º$; $1 \cdot \text{sen } \theta_1 = 1,5 \cdot \text{sen } 27,54º \Rightarrow \theta_1 = 43,91º$

Por tanto el ángulo de incidencia en el punto Q debe ser menor que 43,91º, para que se produzca el fenómeno descrito.

b) Se elimina el agua.




Aplicando la ley de Snell en el punto P se calcula el ángulo límite del vidrio frente al aire.

$n_{vidrio} \cdot \text{sen } i_{límite} = n_{aire} \cdot \text{sen } 90º$;

$1,5 \cdot \text{sen } i_{límite} = 1 \cdot \text{sen } 90º \Rightarrow i_{límite} = 41,81º$

Para ángulos de incidencia, en el punto P, mayores que 41,81º se produce la reflexión total en esta cara

El ángulo de refracción, r, en la superficie aire-vidrio es:

$r = 90 - i_{límite} = 90 - 41,81º = 48,19º$

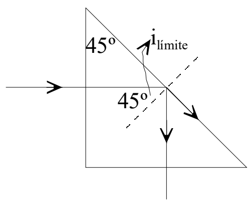
Luego el ángulo r debe ser menor que 48,19º.

Aplicando la ley de Snell en el punto Q, resulta que:

$n_{aire} \cdot \text{sen } \theta_1 = n_{vidrio} \cdot \text{sen } 48,19º$; $1 \cdot \text{sen } \theta_1 = 1,5 \cdot \text{sen } 48,19º \Rightarrow \text{sen } \theta_1 = 1,118$

Como el seno de un ángulo no puede ser nunca mayor que la unidad, se concluye que el rayo no puede salir por la cara lateral, perpendicular a la cara incidente, es decir para cualquier ángulo de incidencia, el rayo nunca sale del cubo, sufre reflexiones totales dentro de él.

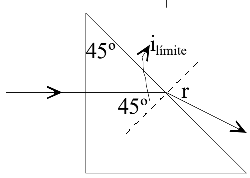
**21. Un prisma de vidrio tiene por base un triángulo isósceles, cuyas caras iguales forman entre si un ángulo de 90º. Un rayo láser incide perpendicularmente a una de las caras iguales, (cateto). Si el prisma se coloca en el aire, calcula el índice de refracción mínimo del vidrio para que el rayo salga por la otra cara del prisma, (el otro cateto) que es igual a la primera. Dibuja la trayectoria de los rayos. Dibuja la trayectoria del mismo rayo anterior cuando el prisma se sumerge en agua de índice de refracción 1,33.**




Para que el rayo salga por el otro cateto debe sufrir la reflexión total, para ello el ángulo límite debe ser 45º. Aplicando la ley de Snell:

$n_{vidrio} \cdot \text{sen } i_{límite} = n_{aire} \cdot \text{sen } 90º$; $n_{vidrio} \cdot \text{sen } 45º = 1$

$$n_{vidrio} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \Rightarrow n_{vidrio} = \sqrt{2}$$



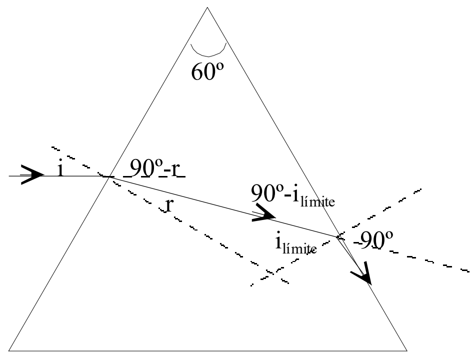

Al sumergir el prisma en el agua y aplicando la ley de Snell en el punto de incidencia de la hipotenusa y como i = 45º, se tiene:

$n_{vidrio} \cdot \text{sen } 45º = n_{agua} \cdot \text{sen } r$; $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}33 \cdot \text{sen} r \Rightarrow r = 48{,}75º$

**22. Se tiene un prisma de vidrio de índice de refracción $\sqrt{2}$ y cuya base es un triángulo equilátero. ¿Con qué ángulo incidirá un rayo de una en una de las caras para que al propagarse dentro el prisma sufra en otra de las caras el fenómeno de la reflexión total?**

Un rayo de luz incide con un ángulo i en una de las caras, se refracta con un ángulo r y se propaga dentro del prisma. Al llegar a la siguiente cara sufre el fenómeno de la reflexión total.

Por tanto aplicando la ley de Snella esta segunda cara, se tiene que:




$n_{vidrio} \cdot \text{sen } i_{límite} = n_{aire} \cdot \text{sen } 90$; $\sqrt{2} \cdot \text{sen } i_{límite} = 1 \cdot \text{sen } 90º$

Despejando: $i_{límite} = 45º$

Del triángulo formado por la trayectoria del rayo dentro del prisma y uno de sus vértices se deduce el valor del ángulo de refracción en la primera cara.

$180º = 90º – r + 60º + 90º - i_{límite}$; $r + i_{límite} = 60º \Rightarrow r = 60º - 45º = 15º$

Aplicando la ley de Snell a la primera refracción resulta que:

$n_{aire}$ A sen i = $n_{prisma}$ A sen r; 1 A sen i = $\sqrt{2}$ A sen 15º $\Rightarrow$ i = 21,5º

Para ángulos de incidencia menores que 21,5º se produce el fenómeno de la reflexión total en la otra cara.

**23. Dos focos luminosos emiten en el vacío luces monocromáticas y coherentes con una frecuencia de 5 · 10^14 Hz. ¿Qué tipo de interferencia se producirá en un punto cuya diferencia de distancia a las fuentes es 1,2 · 10^-6 m?**

La longitud de onda de la luz emitida es: $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^{8}\, m/s}{5 \cdot 10^{14}\, HZ} = 6 \cdot 10^{-7} m = 600 nm$

Para calcular el tipo de interferencia hay que relacionar la distancia con la longitud de onda.

$\Delta r = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ m = $1{,}2 \cdot 10^{-6}\, m \frac{\lambda}{600 \cdot 10^{-9}\, m} = 2 \cdot \lambda$

Las ondas llegan en fase y la interferencia es constructiva.

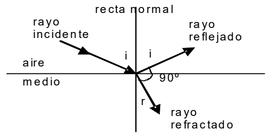
**24. Dos fuentes luminosas emiten en el vacío luces monocromáticas y coherentes con una frecuencia de 3,75 · 10^14 Hz. ¿Qué tipo de interferencia se producirá en un punto cuya diferencia de caminos a las fuentes es de 400 nm?**

La longitud de onda de la luz emitida es: $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^{8}\, m/s}{3{,}75 \cdot 10^{14}\, HZ} = 8 \cdot 10^{-7} m = 800 nm$

La diferencia de caminos es igual a la mitad de la longitud de onda, luego la interferencia es destructiva.

$\Delta r = 400$ nm = $400 nm \frac{\lambda}{800 nm} = \frac{\lambda}{2}$

**25. El rayo reflejado en una superficie transparente y pulimentada está polarizado linealmente cuando forma un ángulo de 90º con el rayo refractado. Deduce que esas condiciones se producen cuando el índice de refracción del medio es igual a la tangente del ángulo de incidencia.**




Como el ángulo de reflexión, i, es igual al ángulo de incidencia, de la figura adjunta se deduce que:
$180º = i + 90º + r$; $90º = i + r \Rightarrow r = 90º - i$

Aplicando la ley de Snell a la refracción, resulta que:
$n_{aire} \cdot \text{sen } i = n_{medio} \cdot \text{sen } r =$

Operando: $1 \cdot \text{sen } i = n_{medio} \cdot \text{sen } (90 - i) = n_{medio} \cdot \cos i$

Despejando: $n_{medio} = \dfrac{\text{sen} i}{\cos i} = \text{tg} i$

## UNIDAD 8: Óptica geométrica

### CUESTIONES INICIALES-PÁG. 211

**1. Una gran parte de la información que recibimos del mundo exterior la percibimos por medio del sentido de la vista. ¿Puedes dar una explicación del mecanismo que tiene lugar en el acto de ver un objeto iluminado?**
Un objeto iluminado refleja parte de la luz que le llega, dirigiéndola en todas direcciones. El ojo se comporta como una lente convergente, que concentra y dirige la luz que recibe del objeto hacia la retina. El nervio óptico envía las señales luminosas desde la retina hasta el cerebro, donde se interpreta la información recibida y se completa el mecanismo de la visión.

**2. ¿Por qué un lápiz sumergido parcialmente en un vaso con agua parece estar doblado?**
El lápiz parece quebrado debido al fenómeno de la refracción.

Los rayos luminosos que pasan del agua al aire se alejan de la recta normal y sus prolongaciones se cortan en un punto por encima de la posición del objeto. Así se forma una imagen que hace parecer que disminuye la sensación de profundidad y el lápiz está aparentemente quebrado.

**3. ¿Qué diferencias, aparte de su tamaño, hay entre el espejo colocados en los cuartos de baño de las viviendas y los que se sitúan a la salida de los garajes con poca visibilidad?**
En los cuartos de baño se colocan espejos planos y a la salida de los garajes se sitúan espejos convexos. Ello se debe a que los espejos convexos amplían el campo de visión.
Ambos proporcionan imágenes virtuales de los objetos, pero mientras que en los espejos planos, las imágenes son del mismo tamaño que el objeto en los espejos convexos son siempre más pequeñas que el objeto.

### ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 238

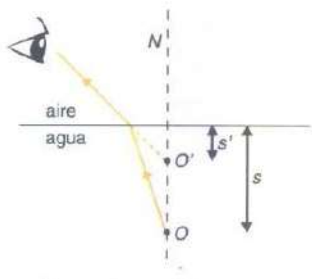
**1. Deduce si la profundidad aparente de un río es mayor, menor o igual a su profundidad real, sabiendo que el índice de refracción del agua es mayor que el del aire.**
Como el índice de refracción del agua es mayor que el del aire, los rayos que proceden de un objeto sumergido se alejan de la normal y el observador aprecia una imagen virtual situada a una profundidad aparente, s=, menor que la profundidad real, s.
En efecto, aplicando la ecuación del dioptrio plano :

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} \Rightarrow s' = s\,\frac{n'}{n}$$

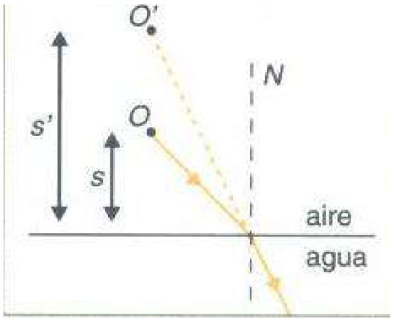
Para el caso de un objeto visto desde el aire: $n = n_{agua}$ y $n= = n_{aire}$, por tanto:

$$\text{profundidad aparente} = \text{profundidad real}\ \frac{n_{aire}}{n_{agua}}$$

Como $n_{aire} < n_{agua}$, entonces la profundidad aparente es menor que la real.




**2. Un buzo observa un avión que vuela a una altura de 400 m sobre la superficie del agua. Si el índice de refracción del agua es 4/3, justifica si la altura aparente a la persona ve al avión sobre la superficie del agua es mayor, menor o igual a los 400 m. Construye el correspondiente diagrama de rayos que justifique la conclusión.**




Los rayos luminosos que acceden desde el aire al agua se desvían de su trayectoria y se acercan a la recta normal. Como consecuencia de ello, un observador colocado dentro del agua aprecia una imagen virtual del objeto situada a una altura mayor que la altura real.
Al aplicar para el buzo la ecuación del dioptrio plano, resulta que los datos son:
s = 400 cm; n = $n_{aire}$ y n= = $n_{agua}$

El buzo percibe una imagen virtual del avión situada a una distancia por encima de la superficie del agua de:

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} \Rightarrow s' = 400\ \text{cm}\frac{4/3}{1} = 533\,\text{m}$$

**3. Las distancias focal objeto de un dioptrio esférico es f = – 20 cm y la distancia focal imagen f’ = 40 cm. Calcula el radio de curvatura del dioptrio es indica si es cóncavo o convexo. Determina la posición de un objeto que está situado a 10 cm del vértice del dioptrio.**
Aplicando la relación entre el radio y las distancias focales: r = f + f’ = - 20 cm + 40 cm = + 20 cm
Por lo que el dioptrio es cóncavo.
Aplicando la ecuación de Gauss para un dioptrio y como s = - 10 cm, resulta que:

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1;\ \frac{40\,\text{cm}}{s'} + \frac{-20\,\text{cm}}{-10\,\text{cm}} = 1 \Rightarrow s' = -40\ \text{cm}$$

La imagen se forma delante del dioptrio.

**4. Un dioptrio esférico cóncavo tiene un radio de curvatura de 10 cm y separa dos medios de índices de refracción $n_1$ = 1 y $n_2$ = 4/3. Calcula las distancias focales del dioptrio. ¿Qué relación hay entre las distancias focales del dioptrio y su radio de curvatura?**
Como el dioptrio es cóncavo: r = - 10 cm

La ecuación fundamental de un dioptrio es: $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$

Las distancias focales objeto, f, e imagen, f’, son:

$$f = -\frac{n\cdot r}{n'-n} = -\frac{1\cdot(-10\,\text{cm})}{\frac{4}{3}-1} = 30\,\text{cm};\ f' = \frac{n'\cdot r}{n'-n} = \frac{\frac{4}{3}\cdot(-10\,\text{cm})}{\frac{4}{3}-1} = -40\,\text{cm}$$

La suma de las distancias focales es igual al radio del dioptrio.
f + f’ = 30 cm + (- 40 cm) = - 10 cm = r

**5. Una varilla cilíndrica de vidrio, de índice de refracción 1,5, está limitada por una superficie convexa de 2 cm de radio. Un objeto de 3 mm de altura se coloca perpendicularmente al eje de la varilla y a una distancia de 10 cm, a la izquierda de ella. Calcula la posición y el tamaño de la imagen cuando la varilla se encuentra en el aire.**
En un dioptrio convexo r = + 2 cm y las distancias s = - 10 cm e y = 3 mm. Además los índices de refracción son: n = 1 y n’ = 1,5.
Aplicando la ecuación fundamental del dioptrio esférico:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r};\ \frac{1{,}5}{s'} - \frac{1}{-10\,\text{cm}} = \frac{1{,}5-1}{2\,\text{cm}} \Rightarrow s' = 10\ \text{cm}$$

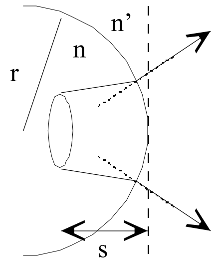
Imagen situada a la derecha del dioptrio y es una imagen es real.

Aplicando la relación del aumento lateral:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{n \cdot s'}{n' \cdot s}; \frac{y'}{3 \text{ mm}} = \frac{1 \cdot 10 \text{ cm}}{1{,}5 \cdot (-10 \text{ cm})} \Rightarrow y = = -2 \text{ cm}$$

El signo menos indica que la imagen está invertida respecto del objeto.

**6. Una moneda, de 2 cm de diámetro, está situada en el interior de una bola de cristal maciza de 15 cm de radio y cuyo índice de refracción es: $n_{vidrio}$ = 1,5. Si la moneda está situada a 10 cm de la superficie de bola, calcula la posición de la imagen. La imagen que se observa, ¿será más grande, más pequeña o de igual tamaño que el objeto?**




Como la luz se propaga de izquierda a derecha, de la figura se deduce que la superficie de la esfera en un dioptrio cóncavo, r = - 15 cm y que primer medio es el vidrio n = 1,5 y que el segundo medio es el aire n' = 1.

Los rayos luminosos al pasar del vidrio al aire se alejan de la recta normal, por lo que divergen y sus prolongaciones se cortan dentro de la esfera y por tanto la imagen es virtual y más pequeña que el objeto.

Aplicando la ecuación del dioptrio esférico, con s = - 10 cm, resulta que:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r}; \frac{1}{s'} - \frac{1{,}5}{-10 \text{ cm}} = \frac{1-1{,}5}{-15 \text{ cm}} \Rightarrow s' = -8{,}57 \text{ cm}$$

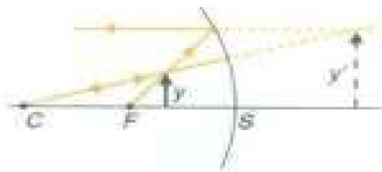
Imagen situada a la izquierda del dioptrio y es una imagen virtual.

Aplicando la relación del aumento lateral: $\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{n \cdot s'}{n' \cdot s}; \frac{y'}{2 \text{ cm}} = \frac{1{,}5 \cdot (-8{,}57 \text{ cm})}{1 \cdot (-10 \text{ cm})} \Rightarrow y = = 1{,}29 \text{ cm}$

La imagen es más pequeña y está directa.

**7. Si se desea observar la imagen ampliada de un objeto, ¿qué tipo de espejo hay que utilizar? Explica con un esquema las características de la imagen formada.**

El único espejo con el que se puede observar la imagen ampliada de un objeto es con un espejo cóncavo. Para ello hay que situar el objeto entre el foco y el espejo y la imagen formada es virtual, directa y de mayor tamaño que el objeto.



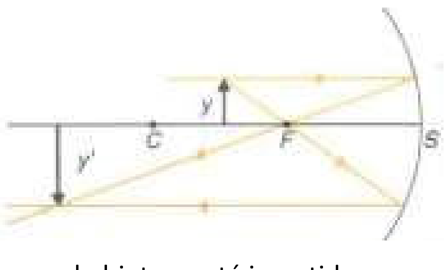

**8. Un objeto de 5 cm de altura está situado a 75 cm de un espejo cóncavo de 1 m de radio. Calcula la posición y el tamaño de la imagen. Dibuja la trayectoria de los rayos.**

Aplicando la ecuación fundamental de los espejos esféricos y como r = - 100 cm, s = - 75 cm, resulta que:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{-75 \text{ cm}} = \frac{2}{-100 \text{ cm}} \Rightarrow s' = -150 \text{ cm}$$

Aplicando la relación del aumento lateral:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}; \frac{y'}{5 \text{ cm}} = -\frac{-150 \text{ cm}}{-75 \text{ cm}} \Rightarrow y' = -10 \text{ cm}$$

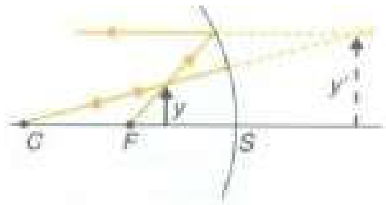



Como la distancia focal es $f = \frac{r}{2}$ = - 50 cm, el objeto está situado entre el centro de curvatura y el foco y la imagen es real, más grande que el objeto y está invertida.

**9. Un objeto de 5 cm de altura está situado a 25 cm de un espejo cóncavo de 1 m de radio. Calcula la posición y el tamaño de la imagen. Dibuja la trayectoria de los rayos.**

Aplicando la ecuación fundamental de los espejos esféricos y como r = - 100 cm, s = - 25 cm, resulta que:

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r}\Rightarrow\frac{1}{s'}+\frac{1}{-25\,\text{cm}}=\frac{2}{-100\,\text{cm}}\Rightarrow s'=+50\text{ cm}$$




Aplicando la relación del aumento lateral:

$$\beta'=\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s};\ \frac{y'}{5\,\text{cm}}=-\frac{50\,\text{cm}}{-25\,\text{cm}}\Rightarrow y'=+10\text{ cm}$$

Como la distancia focal es $f=\frac{r}{2}$ = - 50 cm, el objeto está situado entre el foco y el espejo y la imagen es virtual, directa y es más grande que el objeto.

**10. Un espejo esférico forma una imagen virtual, derecha y de tamaño doble que el del objeto cuando está situado verticalmente sobre el eje óptico y a 10 cm del espejo. Calcula la posición de la imagen y el radio de curvatura del espejo. Dibuja las trayectorias de los rayos.**

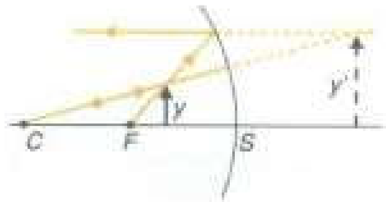
Aplicando la relación del aumento lateral y como s = - 10 cm e y' = 2 · y, resulta que:

$$\beta'=\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s};\ \frac{2\cdot y}{y}=-\frac{s'}{s}\Rightarrow s'=-2\cdot s=-2\cdot(-10\text{ cm})=20\text{ cm}$$

La imagen está situada a la derecha del espejo.

Aplicando la ecuación fundamental de los espejos esféricos se tiene que:

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r};\ \frac{1}{20\,\text{cm}}+\frac{1}{-10\,\text{cm}}=\frac{2}{r}\Rightarrow r=-40\text{ cm}$$



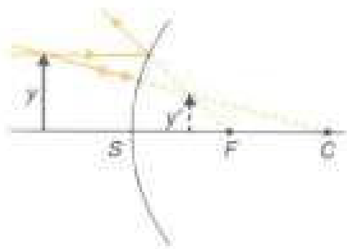

Es un espejo cóncavo.

La distancia focal es: r = 2 · f; - 40 cm = 2 · f ⇒ f = - 20 cm.

El objeto está situado entre el foco y el espejo y por ello proporciona una imagen virtual, directa y más grande que el objeto.

**11. En los almacenes utilizan espejos convexos, para conseguir un amplio margen de observación y vigilancia con un espejo de tamaño razonable. Uno de los espejos, que tiene un radio de curvatura de 1,2 m, permite al dependiente, situado a 5 m del mismo, inspeccionar el local entero. Si un cliente está a 10 m del espejo, ¿a qué distancia de la superficie del espejo está su imagen? ¿Está detrás o delante del espejo? Si el cliente mide 2 m, ¿qué altura tendrá su imagen?**

Para cualquier posición de un objeto los espejos convexos proporcionan imágenes virtuales, situadas detrás del espejo, directas y más pequeñas que el objeto.




Aplicando la ecuación fundamental de los espejos esféricos, como r = + 1,2 m y s = - 10 m, resulta que:

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r};\ \frac{1}{s'}+\frac{1}{-10\,\text{m}}=\frac{2}{1{,}2\,\text{m}}\ \Psi\ s==0{,}57\text{ cm}$$

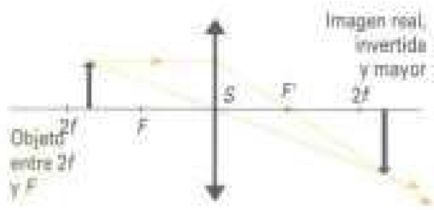
Es una imagen virtual, formada a la derecha del espejo convexo.

Aplicando la relación del aumento lateral: $\beta'=\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s};\ \frac{y'}{2\,\text{m}}=-\frac{0{,}57\,\text{m}}{-10\,\text{m}}\Rightarrow y'=0{,}114\text{ m}$

Imagen directa y más pequeña que el objeto.

**12. ¿Qué tipo de lente utiliza un proyector de diapositivas? ¿Dónde y cómo hay que colocar la diapositiva? Representa en un diagrama la trayectoria de los rayos luminosos.**

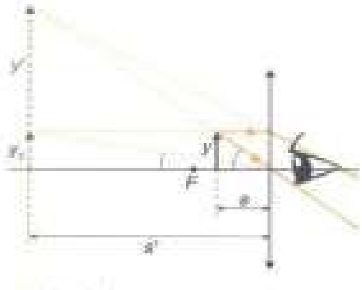
El proyector de diapositivas se construye con una lente convergente. La diapositiva hay que colocarla a una distancia de la lente entre dos veces la distancia focal y el foco objeto.
Cuanto más cerca esté el objeto de la lente, más grande es la imagen y más lejos hay que colocar la pantalla.
Como la imagen formada está invertida respecto del objeto, la diapositiva ha que colocarla invertida para que la imagen aparezca directa.




**13. Una lupa se emplea para observar con detalle objetos de pequeño tamaño. Explica su funcionamiento óptico indicando el tipo de lente, la colocación del objeto y el tipo de imagen que se forma. Dibuja un trazado de los rayos que explique el proceso de la formación de la imagen.**

La lupa es una lente convergente que permite observar a los objetos con un tamaño mayor que su tamaño natural.

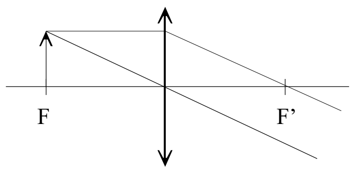
Al utilizar la lupa se sitúa el objeto entre el foco objeto y la lente, para que se forme una imagen virtual, más grande que el objeto y directa.




**14. Calcula la potencia de una lente convergente sabiendo que no se forma ninguna imagen cuando se coloca un objeto a 20 cm de la lente. Dibuja la trayectoria de los rayos.**

Al no observarse ninguna imagen significa que el objeto está colocado en el foco objeto de la lente. Como la lente es convergente, su distancia focal imagen es: f' = + 20 cm.

Aplicando la definición de potencia: $P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0{,}20\,m} = 5\,\text{dioptrías}$



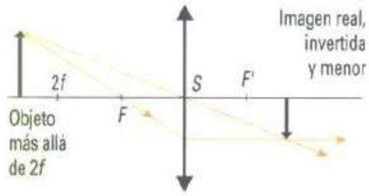

**15. Un objeto de 3 cm de alto se coloca a 75 cm de una lente convergente de 25 de distancia focal. Calcula la posición y el tamaño de la imagen. Construye un diagrama con la trayectoria de los rayos.**

Aplicando la ecuación fundamental de las lentes y como f' = + 25 cm, y = 3 cm y s = - 75 cm, resulta que:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'};\ \frac{1}{s'} - \frac{1}{-\ 75\ cm} = \frac{1}{25\ cm} \Rightarrow s' = +\ 37{,}5\ cm$$

Aplicando la ecuación del aumento lateral de una lente, se tiene que:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s};\ \frac{y'}{3\ cm} = \frac{37{,}5\ cm}{-\ 75\ cm}\ \Psi\ y = = -\ 1{,}5\ cm$$




El objeto está colocado más allá de dos veces la distancia focal y la imagen es real, se puede proyectar en una pantalla, está invertida, es de menor tamaño que el objeto.

**16. Un objeto se coloca a 10 cm de una lente convergente de 5 dioptrías. Calcula la posición de la imagen y el aumento lateral. Dibuja la trayectoria de los rayos luminosos.**

Como la lente es convergente, la distancia focal imagen es:

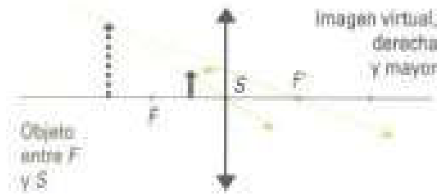
$$P = \frac{1}{f'};\ 5\,\text{dioptrías} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = 0{,}2\ m = 20\ cm$$

Aplicando la ecuación fundamental de las lentes y como f’ = + 20 cm y s = - 10 cm, resulta que:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'};\ \frac{1}{s'} - \frac{1}{-10\ \text{cm}} = \frac{1}{20\ \text{cm}} \Rightarrow s' = -20\ \text{cm}$$

Aplicando la ecuación del aumento lateral de una lente, se tiene que:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s};\ \frac{y'}{y} = \frac{-20\ \text{cm}}{-10\ \text{cm}} = 2$$

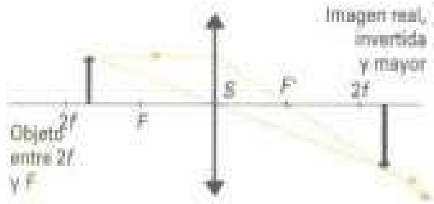



El objeto está colocado entre la distancia focal y la lente. La lente actúa como una lupa y la imagen es virtual, directa y más grande que el objeto.

**17. Mediante una lente delgada de distancia focal f’ = 10 cm se quiere obtener una imagen de tamaño doble que el objeto. Calcula la posición del objeto en el caso de que la imagen se pueda proyectar en una pantalla. Comprueba gráficamente los resultados mediante el trazado de rayos.**

Aplicando la ecuación del aumento lateral de una lente, y como las imágenes reales proporcionadas por las lentes convergentes siempre están invertidas respecto del objeto, se tiene que:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s};\ \frac{-2\cdot y}{y} = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' = -2\cdot s$$




Aplicando la ecuación fundamental de las lentes y como f’ = + 10 cm resulta que:

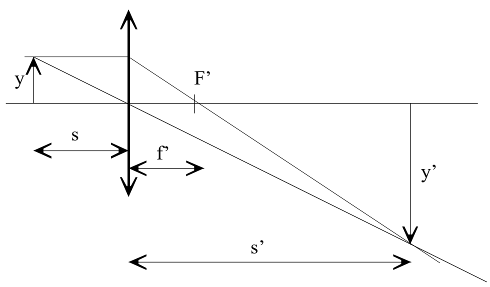
$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'};\ \frac{1}{-2\cdot s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{10\ \text{cm}} \Rightarrow s = -15\ \text{cm}$$

El objeto está colocado a 15 cm de la lente, a motad de camino entre la distancia focal y dos veces la distancia focal.

**18. Un objeto luminoso está situado a una distancia de 4 m de una pantalla. Entre el objeto y la pantalla se coloca una lente esférica delgada, de distancia focal desconocida, que proporciona una imagen nítida de tamaño tres veces mayor que el del objeto. Determina la naturaleza de la lente y su posición respecto del objeto y de la pantalla. Calcula la distancia focal de la lente, su potencia óptica y efectúa la construcción geométrica de la imagen.**

Si la imagen es real, se proyecta en una pantalla, la lente tiene que ser convergente con el objeto situado en entre dos veces la distancia focal y la distancia focal.

La distancia entre el objeto y la pantalla es igual a la suma de la distancia objeto, de signo negativo, y la distancia imagen. Además la imagen está invertida respecto del objeto.




$$\left.\begin{array}{l} -s + s' = 4\,\text{m} \\ \dfrac{y'}{y} = \dfrac{s'}{s} = -3 \end{array}\right\};\ \left.\begin{array}{l} -s + s' = 4\,\text{m} \\ s' = -3\cdot s \end{array}\right\};\ -4\cdot s = 4\ \text{m}$$

La posición del objeto es: s = - 1 m

Y la de la imagen es: s’ = 4 + s = 4 m + (- 1 m) = 3 m

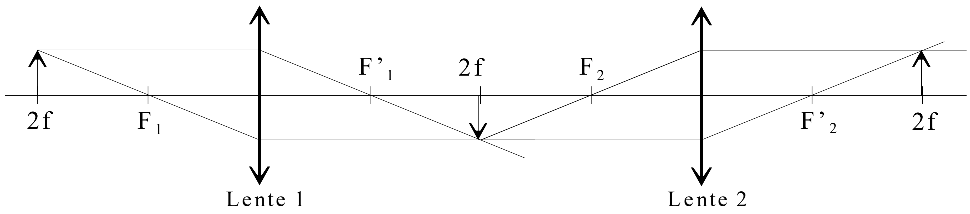
El objeto está a 1 m a la izquierda de la lente y la pantalla a 3 m a la derecha de la lente.

Aplicando la ecuación de las lentes delgadas, resulta que la distancia focal de la lente es:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'};\ \frac{1}{3\,\text{m}} - \frac{1}{-1\,\text{m}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = \frac{3}{4}\text{m} \quad \text{Y la potencia óptica: } P = \frac{1}{f'} = \frac{4}{3}\text{dioptrías}$$

**19. Un sistema óptico está formado por dos lentes convergentes idénticas, de distancia focal $f' = 10$ cm y separadas por una distancia de 40 cm. Si a 20 cm de la primera lente se coloca un objeto de 3 cm de altura, calcula la posición y el tamaño de la imagen formada por el sistema de lentes. Construye el correspondiente diagrama de rayos que justifique la respuesta.**

El objeto está situado a dos veces la distancia focal, 20 cm, de la primera lente, por lo que se forma una imagen real, invertida, del mismo tamaño que el objeto y situada a $2 \cdot f = 20$ cm de esta primera lente.

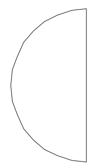



Esta imagen hace de objeto de la segunda lente, situado a una distancia de ella igual a dos veces su distancia focal, 20 cm, la imagen que se forma es real y situada a una distancia de $2 \cdot f = 20$ cm de esta segunda lente.

Por tanto, el efecto de las dos lentes es una imagen real, directa y del mismo tamaño que el objeto.

**20. Una lente de 5 dioptrías de potencia está construida con un vidrio de índice de refracción iguala 1,5. Si una de las caras tiene un radio de curvatura de 10 cm, calcula el radio de curvatura de la otra cara y dibuja la forma de la lente.**

La lente es una lente convergente ya que su potencia es positiva. Suponiendo que el radio de la primera cara es $r_1 = +0{,}10$ m y aplicando la ecuación del constructor de lentes, resulta que:

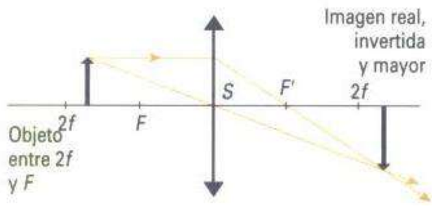


$$P = \frac{1}{f'} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right);\ 5\,\text{dioptrías} = (1{,}5 - 1) \cdot \left(\frac{1}{0{,}10\,\text{m}} - \frac{1}{r_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{r_2} = 0 \Rightarrow r_2 = \infty$$

Luego la lente es plano convexa.

**21. Una lente convergente está limitada por dos caras con radios de curvatura iguales y tiene una distancia focal de 50 cm. Con la lente se proyecta sobre una pantalla la imagen de un objeto de tamaño 5 cm. Calcula la distancia de la pantalla a la lente para que la imagen tenga un tamaño de 40 cm y determina el radio de curvatura de las caras.**

Para que una lente convergente produzca una imagen real y mayor que el objeto, este hay que colocarlo a una distancia entre dos veces la distancia focal y el foco objeto de la lente.




Aplicando la ecuación del aumento lateral y como la imagen está invertida, resulta que:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s};\ \frac{-40\,\text{cm}y'}{5\ \text{cm}} = \frac{s'}{s}\ \Psi\ s = = -8 \cdot s$$

Aplicando la ecuación fundamental de las lentes y como $f' = +50$ cm, resulta que:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'};\ \frac{1}{-8\,s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{50\ \text{cm}} \Rightarrow s = -56{,}25\ \text{m}$$

Aplicando la ecuación del fabricante de lentes, y como los radios son iguales y de signo contrario, se tiene:

$$P = \frac{1}{f'} == \frac{1}{0{,}5\,\text{m}} = +2\,\text{dioptrías}$$

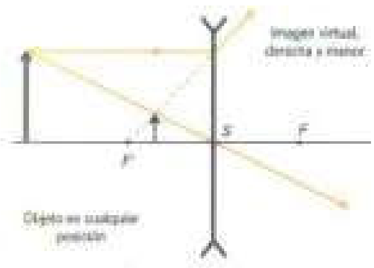
$$P = \frac{1}{f'} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right);\ 2\,\text{dioptrías} = (1{,}5 - 1) \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{-r}\right);\ 2\,\text{dioptría} = 0{,}5 \cdot \frac{2}{r} \Rightarrow r = 0{,}5\ \text{m} = 50\ \text{cm}$$

**22. Un objeto de 3 mm de altura se coloca a 50 cm de una lente de – 6 dioptrías de potencia óptica. Calcula la posición y el tamaño de la imagen. Construye un diagrama con la trayectoria de los rayos luminosos.**

La lente es divergente y su distancia focal imagen es: $P = \frac{1}{f'}; -6\,\text{dioptría} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = -\frac{1}{6}\,m$

La posición de la imagen se determina aplicando la ecuación fundamental de las lentes, teniendo en cuenta que s = - 0,5 m.

$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'};\ \frac{1}{s'} - \frac{1}{-0{,}5\,m} = -\frac{6}{m} \Rightarrow s' = -0{,}125\ m$



Aplicando la ecuación del aumento lateral de una lente, se tiene que:

$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s};\ \frac{y'}{3\ mm} = \frac{-0{,}125\ m}{-0{,}5\ m}$ $\Psi$ y= = 0,75 mm

La imagen es virtual, directa, de menor tamaño que el objeto y está situada a la izquierda de la lente.

**23. Un coleccionista de sellos desea utilizar una lupa de distancia focal 5 cm para observar un ejemplar. Calcula la distancia a la que debe colocar los sellos respecto de la lente para obtener una imagen virtual diez veces mayor que el original.**

Una lente convergente actúa como lupa cuando el objeto se coloca a una distancia de la lente menor que su distancia focal.

Aplicando la ecuación del aumento lateral de las lentes, se tiene la relación entre las distancias a las que están colocados el objeto y su imagen.

$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s};\ \frac{10 \cdot y}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow s' = 10 \cdot s$

Aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas resulta que:

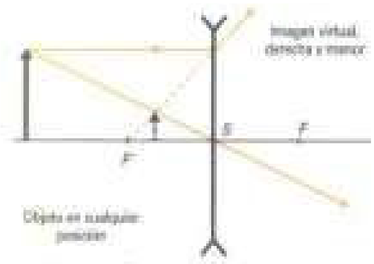
$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'};\ \frac{1}{10 \cdot s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{5\,cm}$

Despejando, el objeto hay que colocarlo a una distancia de: s = - 4,5 cm de la lente

**24. Un objeto de 3 cm de tamaño se coloca a 80 cm de una lente divergente. Si la imagen se forma a 40 cm de la lente, calcula su potencia y el tamaño del objeto. Construye con diagrama con la trayectoria de los rayos luminosos.**

Para cualquier posición del objeto una lente divergente forma una imagen virtual del mismo, luego está situada a la izquierda de la lente.

Aplicando la ecuación fundamental de las lentes y como: s = - 80 cm y s' = - 40 cm, resulta que



$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'};\ \frac{1}{-40\,cm} - \frac{1}{-80\,cm} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = -80\ cm = -0{,}8\ m$

Su potencia es: $P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{-0{,}8\ m} = -1{,}25\ \text{dioptrías}$

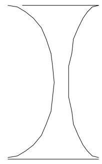
Aplicando la ecuación del aumento lateral de una lente, se tiene que:

$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s};\ \frac{y'}{3\ cm} = \frac{-40\ cm}{-80\ cm}$ $\Psi$ y= = 1,5 cm

La imagen es virtual, directa, de menor tamaño que el objeto.

**25. Una lente bicóncava, construida con un vidrio de índice de refracción igual a 1,8, está limitada por dos superficies esféricas de radios $r_1$ = 20 cm y $r_2$ = 40 cm. Si la lente está colocada en el aire calcula su potencia óptica.**

Aplicando la ecuación del constructor de lentes y como $r_1$ = - 20 cm y $r_2$ = +40 cm, se tiene que su potencia óptica es:



$$P = \frac{1}{f'} = (n - 1)\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right);\ P = (1{,}8 - 1)\cdot\left(\frac{1}{-0{,}2\,\text{m}} - \frac{1}{0{,}4\,\text{m}}\right) = -6\,\text{dioptrías}$$

La lente es divergente.

**26. Cuál es la potencia óptica y la distancia focal imagen del sistema óptico formado por una lente convergente, de 2 dioptrías de potencia optica, puesta en contacto con una lente divergente de – 6 dioptrías de potencia óptica.**

La potencia óptica de ópticas de varias lentes puestas en contacto unas con otras es igual a la suma de las respectivas potencias.

$P_{conjunto} = P_1 + P_2$ = 2 dioptrías + (- 6 dioptrías) = - 4 dioptrías

La distancia focal imagen es el inverso de la potencia óptica.

$$f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{-4\,\text{dioptrias}} = -0{,}25\,\text{m}$$

**27. El ojo normal se asemeja a un sistema óptico formado por una lente convergente, el cristalino, de + 15 mm de distancia focal. La imagen de un objeto lejano, situado en el infinito, se forma en la retina, que se considera como una pantalla perpendicular al eje óptico. Calcula la distancia entre la retina y el cristalino y la altura de la imagen de un árbol de 16 m de altura, que está a 100 m del ojo.**

Una lente convergente forma la imagen de un objeto lejano en el plano focal imagen, por lo que para objetos lejanos la distancia entre el cristalino y la retina es igual a la distancia focal imagen, es decir: 15 mm.

Para una lente convergente se tiene que su aumento lateral es:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \Rightarrow y' = y\frac{s'}{s} = 16\,\text{m}\frac{15\,\text{mm}}{-100\,\text{m}} = -2{,}4\,\text{mm}$$

La imagen está invertida.

**28. Uno de los defectos más comunes del ojo es la miopía. Explica en qué consiste este defecto e indica con qué tipo de lentes se corrige. Si un ojo miope es incapaz de ver nítidamente objetos situados a más de 0,5 m de distancia (punto remoto), ¿cuántas dioptrías tiene?**

El ojo de una persona miope tiene excesiva convergencia y enfoca la luz procedente de los objetos lejanos delante de la retina. Los objetos lejanos se ven borrosos y se corrige con lentes divergentes.

Para corregir el defecto, las lentes que utilizará esa persona deben ser tales que las imágenes de los objetos situados muy lejos, s = + ∞, se formen en el punto remoto del ojo, s' = - 0,5 m.

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'};\ \frac{1}{-0{,}5\,\text{m}} - \frac{1}{-\infty} = \frac{1}{f'}\ \Psi\ f= = -0{,}5\,\text{m}$$

La persona utilizará unas lentes divergentes con una potencia de: $P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{-0{,}5\,\text{m}} = -2\,\text{dioptrías}$

## UNIDAD 9: La Física del siglo XX

### CUESTIONES INICIALES-PÁG. 241

**1. ¿Hay alguna diferencia entre observaciones y postulados?**
Sí, pues son conceptos diferentes.
Una observación es una comprobación real o experimental de un hecho o un fenómeno físico que se trata de estudiar o analizar.
Un postulado es una suposición dentro de un marco teórico que se utiliza para explicar por qué sucede el hecho que se está observando.

**2. Una persona que está en un globo aerostático, ve que otro globo está subiendo, ¿puede estar segura de que realmente es el otro globo el que asciende?**
No, pues la misma sensación percibe el observador cuando su globo está en reposo y el otro asciende, que si su globo está bajando y el otro está en reposo.

**3. Comenta la siguiente frase de Werner Heisenberg, uno de los físicos más importantes de la Física cuántica: *"Cabe decir que el progreso de la ciencia sólo exige de los que en ella cooperan el admitir y el elaborar nuevos contenidos intelectuales. Cuando se pisa un terreno realmente nuevo, puede suceder que no solamente haya que aceptar nuevos contenidos, sino que sea preciso, además, cambiar la estructura de nuestro pensar, si se quiere comprender lo nuevo".***
La frase debe conducir a la reflexión que ante nuevos hechos no explicables por el modelo teórico imperante, hay que abrir el mundo del pensamiento a nuevas fronteras, que es lo que ocurrió durante la aparición de la Física cuántica.

### ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 268

**1. Un observador terrestre mide la longitud de una nave espacial que pasa próxima a la Tierra y que se mueve a una velocidad v < c, resultando ser L. Los astronautas que viajan en la nave le comunican por radio que la longitud de su nave es $L_0$. a) ¿Coinciden ambas longitudes? ¿Cuál es mayor? Razona la respuesta. b) Si la nave espacial se moviese a la velocidad de la luz, ¿cuál sería la longitud que mediría el observador terrestre?**
a) No, pues de las ecuaciones de transformación de Lorente y utilizando la terminología del enunciado se deduce que:

$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ y como v < c, entonces $L_0 > L$

b) Si v = c, resulta que: $L_0 = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}}} = \frac{L}{\sqrt{1-1}} \Rightarrow L = L_0 \cdot \sqrt{0} = 0$

Físicamente es un resultado imposible de darse, lo cual es una prueba de que c es la máxima velocidad que existe y que no se puede alcanzar en la práctica por cualquier sistema que no sea la luz propagándose en el vacío.

**2. En relación con una nave espacial: a) ¿Cuál debería ser la velocidad de esa nave espacial respecto a la Tierra para que un observador situado en la Tierra mida que su longitud es la mitad de lo que mide un observador situado en la nave espacial? b) ¿Cuál sería la energía cinética de la nave espacial si su masa en reposo es 5000 kg?**

a) $L' = \dfrac{L}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow L = L' \cdot \sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$

Como: $L = \dfrac{L'}{2}$, entonces: $\dfrac{L'}{2} = L' \cdot \sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$, luego: $\dfrac{1}{4} = 1 - \dfrac{v^2}{c^2}$

Por tanto: $v = \sqrt{\dfrac{3}{4}} \cdot c = 2{,}59 \cdot 10^8\ m/s$

b) $E_C = (m - m_0) \cdot c^2$ donde: $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, luego: $E_C = \left(\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - m_0\right) \cdot c^2$

Por tanto:

$$E_C = \left(\frac{5000\ kg}{\sqrt{1-\dfrac{(2{,}59 \cdot 10^8\ m/s)^2}{(3 \cdot 10^8\ m/s)^2}}} - 5000\ kg\right) \cdot (3 \cdot 10^8\ m/s)^2 = 4{,}4 \cdot 10^{20}\ J$$

**3. Un electrón tiene una energía en reposo de 0,51 MeV. Si el electrón se mueve con una velocidad de 0,8 · c, calcula su masa relativista, su momento lineal y su energía total. Datos: carga del electrón: e = 1,6 · $10^{-19}$ C; c = 3 · $10^8$ m/s.**

$E_R = m_0 \cdot c^2$. De esta forma:

$E_R = 0{,}51\ MeV = 0{,}51 \cdot 10^6\ eV = 0{,}51 \cdot 10^6\ eV \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J/eV = 8{,}16 \cdot 10^{-14}\ J$

De esta forma: $8{,}16 \cdot 10^{-14}\ J = m_0 \cdot (3 \cdot 10^8\ m/s)^2 \Rightarrow m_0 = 9{,}06 \cdot 10^{-31}\ kg$

Por tanto: $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{9{,}06 \cdot 10^{-31}\ kg}{\sqrt{1-\dfrac{(0{,}8 \cdot c)^2}{c^2}}} = 15{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg$

El valor numérico de su momento lineal $\vec{p}$ viene dado por la expresión:

$p = m \cdot v = 15{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot 0{,}8 \cdot 3 \cdot 10^8\ m/s = 3{,}62 \cdot 10^{-22}\ kg \cdot m/s$

$E = m \cdot c^2 = 15{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot (3 \cdot 10^8\ m/s)^2 = 1{,}36 \cdot 10^{-13}\ J$

**4. ¿Con qué rapidez debe convertirse masa en energía para producir 20 MW?**

$P = 20\ MW = 20 \cdot 10^6\ W$

A partir de la expresión de la potencia, se puede determinar la rapidez con que la masa se convierte en energía:

$$P = \frac{E}{t}$$

Ahora: $20 \cdot 10^6\ W = \dfrac{m \cdot (3 \cdot 10^8\ m/s)^2}{t} \Rightarrow \dfrac{m}{t} = \dfrac{20 \cdot 10^6\ W}{(3 \cdot 10^8\ m/s)^2} = 2{,}2 \cdot 10^{-10}\ kg/s$

Luego deben convertirse $2{,}2 \cdot 10^{-10}$ kg de masa en energía cada segundo para producir 20 MW de potencia.

**5. Según la teoría de la relatividad, ¿cuál debe ser la velocidad de una varilla para que su longitud sea la tercera parte de la que tiene en reposo?**

$$L = L' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{L^2}{L'^2}}$$, como: $L = \frac{L'}{3}$, entonces:

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{L^2}{L'^2}} = c\,\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = c\,\sqrt{\frac{8}{9}} = 0{,}94 \cdot c$$

**6. Se determina por métodos ópticos la longitud de una nave espacial que pasa por las proximidades de la Tierra, resultando ser de 100 m. En contacto radiofónico, los astronautas que viajan en la nave comunican que la longitud de su nave es 120 m. ¿A qué velocidad viaja la nave con respecto a la Tierra?**

$$L = L' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{L^2}{L'^2}} = 3 \cdot 10^8\ m/s\ \sqrt{1 - \frac{(100\ m)^2}{(120\ m)^2}} = 1{,}66 \cdot 10^8\ m/s$$

**7. En qué se parece la no simultaneidad de oír el trueno después de ver el rayo a la no simultaneidad relativista.**

No se parece en nada.

La duración entre ver el rayo y escuchar el trueno no tiene nada que ver con los observadores en movimiento ni con la relatividad. En este caso sólo se hacen correcciones al tiempo que tardan las señales (sonido y luz) en llegar a la persona que percibe el fenómeno.

La relatividad de la simultaneidad es una discrepancia genuina entre observaciones hechas por personas en movimiento relativo, y no sólo una disparidad entre distintos tiempos de recorrido para las distintas señales.

**8. ¿Se puede considerar la ecuación: E = m · c$^2$ desde otro ángulo y decir que la materia se transforma en energía pura cuando viaja con la rapidez de la luz elevada al cuadrado?**

No y es un gran error hacer ese razonamiento.

No se puede hacer que la materia se mueva con la rapidez de la luz y mucho menos a la rapidez de la luz elevada al cuadrado (¡que no es una rapidez!)

La ecuación: E = m · c$^2$ sólo indica que la energía y la masa son dos caras de la misma moneda.

**9. El período T de un péndulo situado sobre la Tierra se mide en un sistema de referencia que está en reposo con respecto a la Tierra, encontrándose que es igual a 3,0 s ¿Cuál será el período medido por un observador que esté en una nave espacial moviéndose a una velocidad de 0,95 · c con respecto al péndulo?**

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{3{,}0\ s}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}95 \cdot c)^2}{c^2}}} = 9{,}6\ s$$

Es decir, las medidas realizadas por el observador de la nave muestran que se tarda más en realizar una oscilación en comparación con un observador situado sobre la Tierra.

**10. Un astronauta realiza un viaje a la estrella Sirio, situada a 8 años-luz de la Tierra. El astronauta mide que el tiempo del viaje de ida es de 6 años-luz. Si la nave espacial se mueve a una velocidad constante de 0,8 · c, ¿cómo podemos reconciliar el hecho de que la distancia sea de 8 años-luz con la duración de 6 años medida por el astronauta?**

Los 8 años-luz representan la longitud propia (la distancia de la Tierra a Sirio), medida por un observador que viera tanto a la Tierra como a Sirio en reposo.
El astronauta ve que Sirio se está aproximando a él a la velocidad de 0,8 · c, pero también ve la distancia que le separa de la estrella está contraída hasta el valor:

$$L = L' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 8\ añosluz \cdot \sqrt{1 - \frac{(0{,}8 \cdot c)^2}{c^2}}$$

**11. Sea un protón que se mueve a una velocidad v donde se tienen en cuenta los efectos relativistas. Halla: a) Su energía en reposo en MeV. b) Si su energía total es tres veces la del reposo, ¿cuál es el valor de su velocidad v? c) Su energía cinética. d) El módulo del momento lineal del protón. Datos: masa del protón en reposo $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.**

a) $E_R = m_0 \cdot c^2 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg · $(3 \cdot 10^8$ m/s$)^2 = 1{,}50 \cdot 10^{-10}$ J

Luego: $E_R = 1{,}50 \cdot 10^{-10}\ J \cdot \dfrac{1\,eV}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J} = 937{,}5 \cdot 10^6\ eV \cdot \dfrac{1\,MeV}{10^6\ eV} = 937{,}5\ MeV$

b) $E = m \cdot c^2 = \dfrac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3 \cdot m_0 \cdot c^2$

Por tanto: $\dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3 \Rightarrow v = \dfrac{\sqrt{8}}{3} \cdot c = \dfrac{\sqrt{8}}{3} \cdot 3 \cdot 10^8\ m/s = 2{,}83 \cdot 10^8\ m/s$

c) $E_C = (m - m_0) \cdot c^2$ donde: $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, luego: $E_C = \left(\dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0\right) \cdot c^2$

Luego:

$$E_C = \left(\frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg}{\sqrt{1 - \frac{(2{,}83 \cdot 10^8\ m/s)^2}{(3 \cdot 10^8\ m/s)^2}}} - 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg\right) \cdot (3 \cdot 10^8\ m/s)^2 = 3{,}03 \cdot 10^{-10}\ J$$

E igualmente:

$$E_C = 3{,}03 \cdot 10^{-10}\ J \cdot \frac{1\,eV}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J} = 1{,}89 \cdot 10^9\ eV \cdot \frac{1\,GeV}{10^9\ eV} = 1{,}89\ GeV$$

d) El módulo de su momento lineal $\vec{p}$ viene dado por la expresión: p = m · v

Luego: $v = \dfrac{p}{m} = \dfrac{p \cdot c^2}{m \cdot c^2} = \dfrac{p \cdot c^2}{E}$

Sustituyendo ahora el valor de v en la ecuación: E = m · c², resulta:

$$E = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{p \cdot c^2}{E}\right)^2}{c^2}}}$$

Operando y despejando E², se obtiene: $E^2 = p^2 \cdot c^2 + (m_0 \cdot c^2)^2$

Como: $E = 3 \cdot m_0 \cdot c^2$ entonces: $(3 \cdot m_0 \cdot c^2)^2 = p^2 \cdot c^2 + (m_0 \cdot c^2)^2$
de donde: $p^2 \cdot c^2 = 8\,(m_0 \cdot c^2)^2$

Por tanto: $p = \sqrt{8} \cdot \dfrac{m_0 \cdot c^2}{c} = \sqrt{8} \cdot \dfrac{E_R}{c} = \sqrt{8} \cdot \dfrac{1{,}50 \cdot 10^{-10}\ J}{3 \cdot 10^8\ m/s} = 1{,}4 \cdot 10^{-18}\ kg \cdot m/s$

**12. ¿En qué consiste el efecto fotoeléctrico? Explica su origen y sus principales características y representa la variación de la energía cinética de los fotoelectrones emitidos en función de la frecuencia de la señal luminosa incidente.**

El efecto fotoeléctrico consiste en la liberación de electrones de un metal por la acción de la luz, especialmente si tiene una frecuencia elevada.

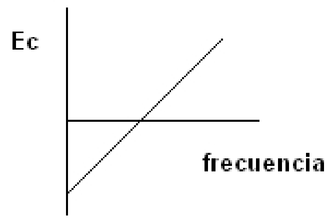
El origen del efecto fotoeléctrico está en los trabajos que estaba realizando el físico alemán Hertz para tratar de demostrar con experiencias la teoría electromagnética de la luz y de forma fortuita comprobó que la chispa entre dos esferas metálicas cargadas eléctricamente saltaba más fácilmente si éstas eran iluminadas con luz ultravioleta.

Sus principales características son:

1. La energía cinética de los electrones arrancados no depende de la intensidad de la luz incidente y sí es función de la frecuencia de la misma.
2. Para cada metal existe una frecuencia luminosa umbral, llamada $\nu_0$, por debajo de la cual no se produce la emisión fotoeléctrica.
3. Una radiación incidente de frecuencia superior a $\nu_0$, basta para arrancar electrones, aunque su intensidad luminosa sea muy pequeña.

La ecuación que rige el efecto fotoeléctrico es:
$E = W_0 + E_C \Rightarrow$ h A ν = h A $\nu_o$ + 2 A $m_e$ A $v^2$

Por tanto: $E_C = E - W_0 =$ h A ν – $W_0$
Y al representar $E_C$ frente a ν se obtiene la siguiente gráfica:




**13. Indica cuál es la respuesta correcta de las siguientes afirmaciones sobre el efecto fotoeléctrico:**
**a) La energía cinética de los electrones emitidos depende de la intensidad de la luz incidente.**
**b) La energía de extracción no depende del metal.**
**c) Hay una frecuencia mínima para la luz incidente.**
**d) Al aumentar la frecuencia de la radiación incidente disminuye la energía cinética de los electrones emitidos.**

La respuesta correcta es la c)

**14. En el contexto del efecto fotoeléctrico, ¿qué se entiende por trabajo de extracción del metal de la placa a iluminar? Supuesto conocido el valor del trabajo de extracción, ¿cómo se puede determinar la frecuencia umbral?**

Como el fotón es el cuanto de radiación que interacciona con los electrones del metal y el efecto fotoeléctrico se explica por la existencia de fotones de energía suficiente para arrancar los electrones del metal. Parte de la energía del fotón se emplea en arrancar el electrón del metal y el resto se convierte en energía cinética del electrón libre.

Se llama energía de extracción del metal, $W_0$ (también conocida como trabajo de extracción) a la energía que hay que transferir al metal para poder arrancar un electrón del mismo.

Si E es la energía del fotón que incide sobre el metal y que recibe el electrón, de acuerdo con el principio de conservación de la energía, E - $W_0$ es la energía cinética $E_C$ del electrón que escapa.

Como: E - $W_0$, = $E_C$ resulta que: h $\nu_0$ - $W_0$ = 0 $\Rightarrow$ $\nu_0 = \frac{W_0}{h}$ , donde $\nu_0$ es la frecuencia umbral.

Luego si incide una radiación de frecuencia mayor que la umbral, $\nu > \nu_0$, se arrancan electrones de cierta energía cinética, y dicha energía cinética será mayor cuanto mayor sea la frecuencia $\nu$ de la radiación incidente.

**15. Si el trabajo de extracción de la superficie de determinado material es $W_0$ = 2,07 eV: a) ) Qué rango de longitudes de onda del espectro visible puede utilizarse con este material en una célula fotoeléctrica, sabiendo que las longitudes de onda de la luz visible están comprendidas entre 380 nm y 775 nm. b) Calcula la velocidad de extracción de los electrones emitidos para una longitud de onda de 400 nm.**

a) La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico es: E = $W_0$ + $E_c$

La relación entre el trabajo de extracción y la longitud de onda umbral es:

$$W_0 = h \cdot \nu_0 = h \cdot \frac{c}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{h \cdot c}{W_0} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s\ \cdot\ 3 \cdot 10^{8}\ m/s}{2{,}07\ eV\ \cdot\ 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J/eV} = 600 \cdot 10^{-9}\ m = 600\ nm$$

El efecto fotoeléctrico se produce para las longitudes de onda menores que la umbral. Por tanto dentro del espectro visible, se arrancan electrones para las longitudes de onda comprendidas entre 380 nm y 600 nm.

b) Volviendo a aplicar la ecuación de Einstein, se tiene que:

$$h\ \frac{c}{\lambda} = h\ \frac{c}{\lambda_0} + \frac{1}{2} m \cdot v^2 \Rightarrow h\ c\ \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$ . Por tanto:

$$6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s\ \cdot\ 3 \cdot 10^{8}\ m/s \left( \frac{1}{400 \cdot 10^{-9}\ m} - \frac{1}{600 \cdot 10^{-9}\ m} \right) = \frac{1}{2}\ 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ kg\ \cdot\ v^2$$

De donde despejando v se obtiene: v = 6,03 · $10^5$ m/s

**16. Determina la frecuencia de la onda asociada a un fotón con 200 MeV de energía y calcula su longitud de onda y su momento lineal.**

Aplicando la ecuación de Planck, resulta que: E = h · $\nu$, luego:

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{200 \cdot 10^{6}\ eV\ \cdot\ 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J/ev}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s} = 4{,}8 \cdot 10^{22}\ s^{-1}$$

Utilizando la relación entre las diferentes magnitudes, se tiene que la longitud de onda asociada es:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{4{,}8 \cdot 10^{22}\ \text{s}^{-1}} = 6{,}25 \cdot 10^{-15}\ m$$

Según la hipótesis de De Broglie, el momento lineal del fotón como partícula es:

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s}{6{,}25 \cdot 10^{-15}\ m} = 1{,}06 \cdot 10^{-19}\ kg \cdot m/s$$

**17. Un equipo láser de 630 nm de longitud de onda, concentra 10 mW de potencia en un haz de 1 mm de diámetro. a) Deduce y determina el valor de la intensidad del haz en este caso. b) Halla el número de fotones que el equipo emite en cada segundo.**

a) Se denomina intensidad de una onda en un punto, *I*, a la energía que se propaga a través de la unidad de superficie perpendicularmente a la dirección de propagación en la unidad de tiempo. Como la energía propagada en la unidad de tiempo es la potencia con que emite el foco, se cumple que:

$$I = \frac{E}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{P}{\Delta S} = \frac{P}{\pi \cdot r^2} = \frac{10 \cdot 10^{-3}\ W}{\pi \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-3}\ m)^2} = 1{,}27 \cdot 10^4\ W/m^2$$

b) Utilizando la definición de potencia, la energía que concentra el haz en la unidad de tiempo es:

$$P = \frac{E}{\Delta t} \Rightarrow E = P \cdot \Delta t = 10 \cdot 10^{-3}\ W \cdot 1\,s = 10 \cdot 10^{-3}\ J$$

Aplicando la ecuación de Planck resulta que la energía de un fotón de esa longitud de onda es:

$$E_{fotón} = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ m/s}{630 \cdot 10^{-9}\ m} = 3{,}16 \cdot 10^{-19}\ J$$

Por lo que la cantidad de fotones emitidos en un segundo es:

$$n = \frac{E}{E_{fotón}} = \frac{10 \cdot 10^{-3}\ J}{3{,}16 \cdot 10^{-19}\ J/fotón} = 3{,}16 \cdot 10^{16}\ fotones$$

**18. Un láser de helio-neón de 3 mW de potencia emite luz monocromática de longitud de onda λ = 632,8 nm. Si se hace incidir un haz de este láser sobre la superficie de una placa metálica cuya energía de extracción es 1,8 eV: a) Calcula el número de fotones que inciden sobre el metal transcurridos 3 segundos. b) La velocidad de los fotoelectrones extraídos y el potencial que debe adquirir la placa (potencial de frenado) para que cese la emisión de electrones.**

a) Aplicando la definición de potencia y la ley de Planck:

$$n = \frac{Energía\ emitida}{Energía\ fotón} = \frac{P \cdot t}{h \cdot \nu} = \frac{P \cdot t}{h \cdot \frac{c}{\lambda}} = \frac{P \cdot t \cdot \lambda}{h \cdot c}$$, luego:

$$n = \frac{3 \cdot 10^{-3}\ J/s \cdot 3\,s \cdot 632{,}8 \cdot 10^{-9}\ m}{6{,}63 10^{-34}\ J \cdot s \cdot 3 \cdot 10^8\ m/s} = 2{,}86 \cdot 10^{16}\ fotones$$

b) La energía de la radiación incidente es: $E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$, luego:

$$E = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ m/s}{632{,}8 \cdot 10^{-9}\ m} = 3{,}14 \cdot 10^{-19}\ J = 3{,}14 \cdot 10^{-19}\ J\ \frac{1\ eV}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J} = 1{,}96\ eV$$

Aplicando la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico, se tiene:

$E = W_0 + E_C \Rightarrow 1{,}96\ eV = 1{,}8\ eV + E_C$

Por tanto la energía cinética de los electrones emitidos es: $E_C = 0{,}16\ eV$

Como: $E_C = V_0 \cdot e$, resulta que el potencial de detención o frenado que impide que lleguen los electrones al ánodo es:

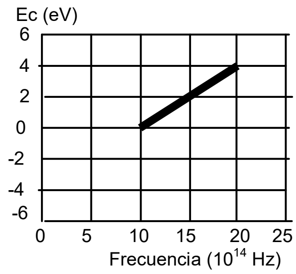
$$V_0 = 0{,}16\ V$$

Aplicando la definición de energía cinética, resulta que la velocidad de los electrones es:

$$E_C = ½ \cdot m \cdot v^2$$

luego: $0{,}16\ eV \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J}{eV} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot v^2 \Rightarrow v = 2{,}37 \cdot 10^5\ m/s$

**19. La gráfica adjunta representa la energía cinética de los electrones emitidos por un metal en función de la frecuencia de la luz incidente. Deduce el valor de la constante de Planck y de la energía de extracción del metal.**




La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico es:
$E = W_0 + E_C \Rightarrow h \cdot \nu = h \cdot \nu_0 + E_c$

Despejando la energía cinética de los electrones emitidos, resulta que:
$E_c = h\,(\nu - \nu_0)$

Al representar gráficamente la energía cinética de los electrones frente a la frecuencia de la radiación incidente, se tiene que la pendiente de la gráfica es la constante h de Plack:

$pendiente = \frac{\Delta E_C}{\Delta \nu} = h$, luego:

$$pendiente = \frac{\Delta E_C}{\Delta \nu} = \frac{4\ eV - 0\ eV}{20 \cdot 10^{14}\ Hz - 10 \cdot 10^{14}\ Hz} = \frac{4\,eV \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J/eV}{10 \cdot 10^{14}\ Hz} = 6{,}4 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$$

Por tanto, el valor de h hallado en la gráfica es: $h = 6{,}4 \cdot 10^{-34}$ J · s

La frecuencia umbral es aquella para la que la energía cinética de los electrones emitidos es igual a cero. De la representación gráfica se deduce que su valor es:

Frecuencia umbral: $\nu_0 = 10 \cdot 10^{14}$ Hz

Por lo que la energía de extracción del metal es: $W_0 = h \cdot \nu_0 = 6{,}4 \cdot 10^{-34}$ J · s · $10 \cdot 10^{14}$ Hz = $6{,}4 \cdot 10^{-19}$ J

**20. Al iluminar un metal con luz monocromática de frecuencia $1{,}2 \cdot 10^{15}$ Hz, es necesario aplicar un potencial de frenado de 2 V para anular la corriente que se produce. Calcula la frecuencia mínima que ha de tener la luz para extraer electrones de dicho metal. ¿Se produce efecto fotoeléctrico al iluminar el metal con una radiación de 500 nm?**

Que el potencial de frenado sea 2 V significa que la energía cinética de los electrones emitidos es igual a:
$E_C = 2$ eV.

Aplicando la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico, resulta que:
$E = W_0 + E_C \Rightarrow h \cdot \nu = h \cdot \nu_0 + E_C$, de esta forma:

$6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s · $1{,}2 \cdot 10^{15}$ Hz = $6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s · $\nu_0$ + 2 eV · $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J/eV

Despejando, se obtiene que la frecuencia umbral es: $\nu_0 = 7{,}2 \cdot 10^{14}$ Hz

A la radiación de 500 nm en el vacío le corresponde una frecuencia de:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ m/s}{500 \cdot 10^{-9}\ m} = 6 \cdot 10^{14}\ Hz$$

Como esta frecuencia es menor que la frecuencia umbral, no se produce efecto fotoeléctrico al iluminar el metal con esa radiación.

**21. Una antena de telefonía móvil emite una radiación de 900 MHz, con una potencia de 1500 W. Calcula la longitud de onda de la radiación emitida. ¿Cuál es el valor de la intensidad de la radiación a una distancia de 50 m de la antena. ¿Cuántos fotones emite la antena en 1 s?**

Utilizando la relación entre la longitud de onda y la frecuencia de la onda electromagnética resulta:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8\, m/s}{900 \cdot 10^6\, Hz} = 0{,}33\, m$$

Se denomina intensidad de una onda en un punto, *I*, a la energía que se propaga a través de la unidad de superficie perpendicularmente a la dirección de propagación en la unidad de tiempo. Como la energía propagada en la unidad de tiempo es la potencia con que emite el foco y aplicándolo para una esférica, resulta:

$$I = \frac{E}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{P}{\Delta S} = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{1500\ W}{4 \cdot \pi \cdot (50\, m)^2} = 0{,}048\ W/m^2$$

Aplicando la ecuación de Planck resulta que la energía de un fotón de esa longitud de onda es:

$E_{fotón} = h \cdot \nu = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s \cdot 900 \cdot 10^6\ Hz = 5{,}97 \cdot 10^{-25}\ J$

Por lo que la cantidad de fotones emitidos en un segundo es:

$$n = \frac{P}{E_{fotón}} = \frac{1500\ J/s}{5{,}97 \cdot 10^{-25}\ J/fotón} = 2{,}51 \cdot 10^{-27}\ fotones/s$$

**22. Admitiendo que el protón en reposo tiene una masa 1836 veces mayor que la del electrón en reposo, ¿qué relación existirá entre las longitudes de onda de De Broglie de las dos partículas si se mueven con la misma energía cinética y considerando despreciables los efectos relativistas?**

La longitud de onda asociada a una partícula es: $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} \Rightarrow m \cdot v = \frac{h}{\lambda}$

Y su energía cinética es: $E_C = ½ \cdot m \cdot v^2$

Operando en esta ecuación: $E_C = \frac{1}{2}\frac{m^2 \cdot v^2}{m} = \frac{1}{2}\frac{h^2/\lambda^2}{m} = \frac{1}{2}\frac{h^2}{m \cdot \lambda^2}$

Si la energía cinética de las dos partículas son iguales, resulta que: $E_{C,p} = E_{C,e}$, luego:

$$\frac{1}{2}\frac{h^2}{m_p \cdot \lambda_p{}^2} = \frac{1}{2}\frac{h^2}{m_e \cdot \lambda_e{}^2} \Rightarrow m_p \cdot \lambda_p{}^2 = m_e \cdot \lambda^2_e$$

Operando: $\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = \sqrt{\frac{1836 \cdot m_e}{m_e}} = 42{,}85$

La longitud de onda asociada al electrón es aproximadamente 43 veces mayor que la longitud de onda asociada al protón.

**23. ¿Qué velocidad ha de tener un electrón para que su longitud de onda de De Broglie sea 200 veces la correspondiente a un neutrón de energía cinética 6 eV? ¿Se puede considerar que el electrón a esa velocidad es no relativista? Datos: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_n = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.**

Utilizando la definición de energía cinética: $E_C = ½ \cdot m \cdot v^2$ se calcula la velocidad del neutrón:

$$v_n = \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6\ eV \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J/ev}{1{,}7 \cdot 10^{-27}\ kg}} = 3{,}4 \cdot 10^4\ m/s$$

Aplicando la hipótesis de De Broglie, la longitud de onda asociada es:

$$\lambda_n = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s}{1{,}7 \cdot 10^{-27}\ kg \cdot 3{,}4 \cdot 10^4\ m/s} = 1{,}2 \cdot 10^{-11}\ m$$

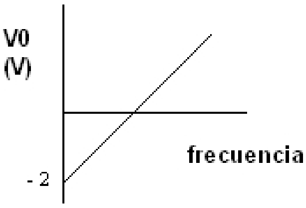
La longitud de onda asociada al electrón es:
$\lambda_e = 200 \cdot \lambda_n = 200 \cdot 1,2 \cdot 10^{-11}$ m = $2,3 \cdot 10^{-9}$ m

Y su velocidad es: $\lambda_e = \dfrac{h}{m \cdot v_e} \Rightarrow v_e = \dfrac{h}{m \cdot \lambda} = \dfrac{6,63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s}{9,1 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot 2,3 \cdot 10^{-9}\ m} = 3,1 \cdot 10^5\ m/s$

Que comparada con la velocidad de la luz resulta que es:

$\dfrac{3,1 \cdot 10^5\ m/s}{3 \cdot 10^8\ m/s} \cdot 100 = 0,1\%$ de la velocidad de la luz, por lo que sí se pueden despreciar los efectos relativistas.

**24. La gráfica de la figura representa el potencial de frenado, $V_0$, de una célula fotoeléctrica en función de la frecuencia de la luz incidente. La ordenada en el origen tiene el valor de – 2 V. a) Deduce la expresión teórica de $V_0$ en función de $\nu$. b) ¿Qué parámetro característico de la célula fotoeléctrica podemos determinar a partir de la ordenada en el origen y determina el valor. c) ¿Qué valor tendrá la pendiente de la recta de la figura.**




a) La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico se puede escribir como:

$E = W_0 + E_C$ e igualmente: $E = W_0 + e \cdot V_0 \Rightarrow h \cdot \nu = W_0 + e \cdot V_0$

Despejando: $V_0 = \dfrac{h \cdot \nu}{e} - \dfrac{W_0}{e}$

b) Del valor de la ordenada en el origen se calcula el trabajo de extracción y la frecuencia umbral de emisión de electrones: $-2V = -\dfrac{W_0}{e}$

Luego: $W_0 = 2\ V \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\ C = 3,2 \cdot 10^{-19}$ J

Y la frecuencia umbral: $\nu_0 = \dfrac{W_0}{h} = \dfrac{3,2 \cdot 10^{-19}\ J}{6,63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s} = 4,82 \cdot 10^{14}\ Hz$

c) La pendiente de la recta es: $pendiente = \dfrac{h}{e} = \dfrac{6,63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s}{1,6 \cdot 10^{-19}\ C} = 4,14 \cdot 10^{-15}\ V \cdot s$

**25. Halla la longitud de onda de las dos primeras líneas obtenidas por la ecuación de Balmer del espectro del átomo de hidrógeno, sabiendo que la constante de Rydberg R tiene el valor de 1,097 · 107 m$^{-1}$.**

Se cumple la siguiente ecuación: $\dfrac{1}{\lambda} = 1,097 \cdot 10^7\ m^{-1} (\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{n^2})$

Donde la primera línea del espectro es aquella en la que n = 3, de forma que:

$\dfrac{1}{\lambda_1} = 1,097 \cdot 10^7\ m^{-1} (\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^2}) \Rightarrow \lambda_1 = 656,3$ A$10^{-9}$ m = 656,3 nm.

Repitiendo los cálculos para n = 4 se obtiene la segunda línea, de forma que:

$\dfrac{1}{\lambda_2} = 1,097 \cdot 10^7\ m^{-1} (\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{4^2}) \Rightarrow \lambda_2 = 486,2$ A$10^{-9}$ m = 486,2 nm

**26. Determina la longitud de onda de un electrón que se ha puesto en movimiento mediante la aplicación de un campo eléctrico de 100 V.**

El electrón al ser puesto en movimiento adquiere una energía cinética y por tanto una velocidad que viene dada por la ecuación: $e \cdot V = 2 \cdot m \cdot v^2$, con lo que la velocidad del mismo es:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 100\ V}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg}} = 5{,}9 \cdot 10^{6}\ m/s$$

Comparando v con c podemos despreciar los efectos relativistas, luego la longitud de onda del electrón es:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot 5{,}9 \cdot 10^{6}\ m/s} = 1{,}2 \cdot 10^{-10}\ m$$

## UNIDAD 10: Física nuclear

### CUESTIONES INICIALES-PÁG. 271

**1. ¿Cuál es la razón de que en el primer cuarto del siglo XX se descubriesen tantos elementos químicos?**
Por la aplicación de las técnicas derivadas del descubrimiento de la radiactividad a la Química, pues los recientes elementos químicos son radiactivos.

**2. Calcula, mediante la ecuación de Einstein, la energía que se produce al transformarse 1 g de materia en energía.**
Aplicando la citada ecuación: $E_R = m_0$ A $c^2 = 10^{-3}$ kg A $(3$ A $10^8$ m/s$)^2 = 9$ A $10^{13}$ J

**3. La noche del 25 al 26 de abril de 1986 se produjo el mayor accidente ocurrido en una central nuclear. Tuvo lugar en la central ucraniana de Chernobil (antigua URSS). )Crees que una central nuclear, dedicada a la producción de energía eléctrica, puede explotar como una bomba atómica? Aunque en la actualidad la probabilidad del riesgo de un accidente nuclear es muy reducido, ¿por qué la sociedad acepta muy mal el riesgo nuclear, a pesar de ser muy inferior al de otros tipos de accidentes (automóvil, avión, etc)?**
En cuanto a la primera pregunta: nunca podría estallar una central nuclear como una bomba atómica, pues las condiciones de trabajo en el reactor nuclear nunca son las que se precisan para ocasionar la explosión nuclear de una bomba.
Con respecto a la segunda cuestión: la respuesta es por los efectos devastadores derivados del uso militar en la fabricación de bombas nucleares y el triste recuerdo y los efectos que aún perduran del desastre de la central nuclear de Chernobil de 1986. Por otro lado, el recuerdo y la visión de películas sobre los efectos de las bombas de Hiroshima y Nagasaki han producido una memoria colectiva de rechazo. Sin perder de vista los efectos fisiológicos, tales como la aparición de cáncer, que el contacto con productos radiactivos puede ocasionar. Todo ello se traduce en gran miedo a todo lo que se relacione con la radiactividad.

### ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 302

**1. Un protón incide sobre litio y produce partículas alfa. Escribe la reacción nuclear que tiene lugar y determina en número atómico del litio y de qué isótopo de trata.**
El litio tiene de número atómico Z = 3, por lo que en la reacción nuclear se producen dos partículas α.
La reacción nuclear es: ${}^{?}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \rightarrow 2\,{}^{4}_{2}He$
Por lo que el isótopo de litio es el de número másico: $A = 2 \cdot 4 - 1 = 7$

**2. Completa las siguientes ecuaciones:**
**a)** ${}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{17}_{8}O + ?$
**b)** ${}^{9}_{4}Be + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{12}_{6}C + ?$
a) ${}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}H$
b) ${}^{9}_{4}Be + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{12}_{6}C + {}^{1}_{0}n$

**3. Desde el punto de vista de la equivalencia masa-energía, ) la masa de los núcleos estables es mayor o menor que la suma de las masas de sus componentes? Razona la respuesta.**

La masa de los núcleos estables es menor que la suma de las masas de sus constituyentes.

**4. En una cámara de seguridad se encierra una muestra de $^{238}_{92}U$, de 0,15 kg de masa. El $^{238}$U se desintegra de modo natural, produciendo $^{206}_{82}Pb$, y para simplificar se supone que este proceso tiene lugar directamente sin etapas intermedias. Al cabo de cierto tiempo, se abre la cámara, comprobando que la muestra original contiene ahora 0,04 kg de $^{206}$Pb. Se sabe que el período de semidesintegración del $^{238}$U es de 4,5 A $10^9$ años. Calcula el tiempo transcurrido desde que se guardó la muestra hasta la apertura de la cámara.**

Hay que recordar que un mol de partículas (átomos, moléculas, iones o núcleos) contiene una cantidad igual a la constante de Avogadro ($N_A$ = 6,02 · $10^{23}$) de entidades elementales (átomos, moléculas, iones o núcleos).

Para el $^{238}$U su masa molar es igual a su número másico, expresado en $\frac{mol}{g}$, luego:

el número de núcleos de $^{238}$U que contiene la muestra inicialmente es:

$$N_{0,U} = \frac{0,15 \cdot 10^3\ g}{238\ \ g/mol} \cdot N_A = 0,630 \cdot N_A$$

El número de núcleos de $^{206}$Pb que tiene la muestra al final coincide con el número de núcleos de $^{238}$U desintegrados y como la masa molar del $^{206}$Pb es 206 $\frac{mol}{g}$, entonces:

$$N_{desintegrados,U} = N_{Pb} = \frac{0,04 \cdot 10^3\ g}{206\ \ g/mol} \cdot N_A = 0,194 \cdot N_A$$

Por tanto el número de núcleos de $^{238}$U que quedan sin desintegrar es:

N = $N_0$ - $N_{Pb}$ = 0,436 A $N_A$

Aplicando la ley de desintegración radiactiva: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_0 \cdot e^{-\frac{Ln\,2}{T} \cdot t}$

Y sustituyendo: $0,436 \cdot N_A = 0,630 \cdot N_A \cdot e^{-\frac{Ln\,2}{4,5 \cdot 10^9\ años} \cdot t}$

Operando y tomando logaritmos neperianos resulta:

$$Ln \frac{0,436}{0,630} = -\frac{Ln\,2}{4,5 \cdot 10^9\ años} \cdot t \Rightarrow t = 2,39\ A\ 10^9\ años$$

**5. Se dispone de 1 mol de un isótopo radiactivo, cuyo período de semidesintegración es 100 días. a) ¿Al cabo de cuánto tiempo quedará solo el 10 % del material inicial? b) ¿Qué velocidad de desintegración o actividad tiene la muestra en ese momento?**

a) Aplicando la ley de desintegración radiactiva y la relación entre el período de semidesintegración, T, y la constante de desintegración, λ, resulta que la cantidad de átomos presentes al cabo de un tiempo, t, es:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow \frac{N_0}{10} = N_0 \cdot e^{-\frac{Ln\,2}{T} t}$$

Tomado logaritmos neperianos y operando resulta:

$$Ln 10 = \frac{Ln 2}{T} t \Rightarrow t = \frac{Ln 10}{Ln 2} \cdot 100\, días = 332,19\ días$$

b) A = λ · N , por tanto:

$$A = \frac{Ln2}{T} \cdot \frac{1\ mol \cdot N_A}{10} = \frac{Ln2}{100\,día \cdot 24\ h/día \cdot 3600\ s/h} \cdot \frac{1\ mol \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\ núcleo/mol}{10}$$

de donde: A = 4,83 · $10^{15}$ $\frac{núcleo}{s}$ = 4,83 · $10^{15}$ Bq

**6. Se dispone de 10 mg de $^{210}$Po, cuyo período de semidesintegración es 138 días. Calcula: a) El tiempo que debe transcurrir para que se desintegren 6 mg. b) La cantidad de núcleos quedan sin desintegrar al cabo de 365 días.**

a) Aplicando la ley de desintegración radiactiva resulta que la cantidad de átomos presentes al cabo de un tiempo, t, es: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Los núcleos de los átomos de una muestra se pueden expresar en función de su masa (m), la constante de Avogadro ($N_A$) y la masa molar (M), por lo que:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow \frac{m}{M_{Po}} \cdot N_A = \frac{m_0}{M_{Po}} \cdot N_A \cdot e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Tomando logaritmos neperianos: $Ln \frac{m}{m_0} = -\lambda \cdot t$

La cantidad presente en un instante, m, es la diferencia entre la cantidad inicial $m_0$ y la cantidad desintegrada y como $\lambda = \frac{Ln2}{T}$, resulta que:

$Ln \frac{m_0 - m_{desintegrada}}{m_0} = -\frac{Ln2}{T} t$, despejando t resulta:

$$t = -\frac{T}{Ln2} \cdot Ln \frac{m_0 - m_{desintegrada}}{m_0} = -\frac{138\,días}{Ln2} \cdot Ln \frac{10\ mg - 6\ mg}{10\ mg} = 182{,}4\,días$$

b) La cantidad de núcleos de átomos iniciales que componen la muestra es:

$$N_0 = \frac{m_0}{M_{Po}} \cdot N_A = \frac{10 \cdot 10^{-3}\ g}{210\ g/mol} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\ núcleos/mol = 2{,}87 \cdot 10^{19}\ núcleos$$

Aplicando la ley de desintegración radiactiva:

$$N = N_0 \cdot e^{-\frac{Ln2}{T} \cdot t} = 2{,}87 \cdot 10^{19}\ núcleos \cdot e^{-\frac{Ln2}{138\,días} \cdot 365\,días} = 4{,}59 \cdot 10^{18}\ núcleos$$

**7. El período de semidesintegración del $^{234}$U es 2,33A$10^5$ años. Calcula: a) La constante de desintegración y la vida media. b) Si se parte de una muestra inicial de 5 A$10^7$ núcleos de átomos de dicho isótopo, ¿cuántos núcleos quedarán al cabo de 1000 años?**

a) Aplicando las relaciones entre el período de semidesintegración (T), la constante de desintegración (λ) y la vida media (τ), resulta que:

$$\lambda = \frac{Ln2}{T} = \frac{Ln2}{2{,}33 \cdot 10^5\ años} = 2{,}975 \cdot 10^{-6}\ años^{-1}$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2{,}975 \cdot 10^{-6}\ años^{-1}} = 3{,}36 \cdot 10^5\ años$$

b) Aplicando la ley de desintegración radiactiva resulta que la cantidad de núcleos de átomos presentes al cabo de un tiempo, t, es:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 5 \cdot 10^7\ núcleos \cdot e^{-2{,}975 \cdot 10^{-6}\ años^{-1} \cdot 1000\ años} = 4{,}985 \cdot 10^7\ núcleos$$

**8. Se dispone de 1 mol del isótopo radiactivo $^{51}_{24}Cr$, cuyo período de semidesintegración es 27 días. Calcula: a) La constante radiactiva. b) ) Cuántos gramos de Cr quedarán al cabo de 6 meses?**

a) La constante radiactiva λ es: $\lambda = \frac{Ln\,2}{T} = \frac{Ln\,2}{27\,días} = 25{,}7 \cdot 10^{-3}\ días^{-1}$

b) La misma relación hay entre la masa presente y la masa inicial que entre los núcleos presentes y los núcleos iniciales, ya que la constante de proporcionalidad es la constante de Avogadro dividida entre la masa molar.

$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ y también: $\frac{m}{M_{Cr}} \cdot N_A = \frac{m_0}{M_{Cr}} \cdot N_A \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, luego: $m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Como la masa molar del $^{51}Cr$ es: $M_{Cr}$ = 51 g/mol, se tiene que la masa al cabo de ese tiempo es:

$$m = 1\,mol \cdot 51\,g/mol \cdot e^{-25{,}7 \cdot 10^{-3}\ día^{-1} \cdot 6\ meses \cdot 30\ días/mes} = 0{,}50\,g$$

**9. Una muestra arqueológica contiene $^{14}C$ que tiene una actividad de 2,8 · $10^7$ Bq. Si el periodo de semidesintegración del $^{14}C$ es 5730 años, determina: a) La constante de desintegración del $^{14}C$ en $s^{-1}$ y la población de núcleos presentes en la muestra. b) La actividad de la muestra después de 1000 años.**

a) Aplicando las relaciones entre las magnitudes estadísticas, resulta que:

$$\lambda = \frac{Ln\,2}{T} = \frac{Ln\,2}{5730\ años} = 1{,}21 \cdot 10^{-4}\ año^{-1}$$

Y asimismo: $\lambda = \frac{Ln\,2}{T} = \frac{Ln\,2}{5730\ años \cdot 365\,días \cdot 24\,horas \cdot 3600\,s} = 3{,}8 \cdot 10^{-12}\ s^{-1}$

$A = \lambda \cdot N \Rightarrow N = \frac{A}{\lambda} = \frac{2{,}8 \cdot 10^7\ Bq}{3{,}8 \cdot 10^{-12}\ s^{-1}} = 7{,}4 \cdot 10^{18}\ núcleos$

b) Aplicando la ley de desintegración radiactiva:

$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = A_0 \cdot e^{-\lambda\, t} = 2{,}8 \cdot 10^7\ Bq \cdot e^{-1{,}21 \cdot 10^{-4}\ año^{-1} \cdot 1000\,años} = 2{,}48 \cdot 10^7\ Bq$

**10. El $^{210}_{83}Bi$ se desintegra espontáneamente por emisión de electrones con un período se semidesintegración de 5 días. Si se dispone de dicho isótopo de una cantidad de 16 A $10^{-3}$ kg, calcula: a) Los protones y neutrones que tiene el núcleo que resulta después de la emisión. b) La cantidad que quedará al cabo de 15 días.**

a) La ecuación del proceso que tiene lugar es: $^{210}_{83}Bi \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{210}_{84}Po$

El número atómico del núcleo Z = 84 indica el número de protones del núcleo. El número másico A expresa el número de nucleones (protones + neutrones) del núcleo. Por tanto:

- número de protones = 84
- número de neutrones = 210 - 84 = 126

b) El número de núcleos presentes en una muestra es:

$N = \frac{m}{M} \cdot N_A$, por tanto si no hay mezclas de sustancias radiactivas:

Aplicando la ley de desintegración radiactiva: $N = N_0\ A\ e^{-\lambda\, A\, t}$ y sustituyendo:

$\frac{m}{M} \cdot N_A = \frac{m_0}{M} \cdot N_A \cdot e^{-\frac{Ln\,2}{5\,días} \cdot 15\,días}$ y operando resulta: $m = m_0 \cdot e^{-3 \cdot Ln\,2}$

Tomando logaritmos neperianos: $Ln\frac{m}{m_0} = -Ln\,2^3 = Ln\frac{1}{8} \Rightarrow m = m_0/8$

Otra forma de hacer este apartado es la siguiente: Al cabo de 15 días han transcurrido 3 períodos de semidesintegración. De una cantidad de núcleos iniciales $N_0$, al cabo de 5 días (T) quedan $N_0/2$, al cabo de 10 días (2 T) quedan $N_0/4$ y al cabo de 15 días (3 T) tenemos $N_0/8$.
Y la cantidad de sustancia que queda por desintegrar es: $m = m_0/8 = 2 \text{ A } 10^{-3}$ kg

**11. El isótopo $^{214}U$ tiene un período de semidesintegración de 250000 años. Si se parte de una muestra de 10 gramos de dicho isótopo, determina: a) La constante de desintegración radiactiva. b) La masa que quedará sin desintegrar después de 50000 años.**

a) La constante radiactiva λ es: $\lambda = \dfrac{Ln\,2}{T} = \dfrac{Ln\,2}{250\,000\,años} = 2{,}77 \cdot 10^{-6}\ años^{-1}$

b) La misma relación hay entre la masa presente y la masa inicial que entre los átomos presentes y los átomos iniciales ya que la constante de proporcionalidad es la constante de Avogadro dividida entre la masa molar.

$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ y $\dfrac{m}{M_U} \cdot N_A = \dfrac{m_0}{M_U} \cdot N_A \cdot e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Sustituyendo: $m = 10\ g \cdot e^{-2{,}77 \cdot 10^{-6}\ años^{-1} \cdot 50000\,años} = 8{,}7\,g$

**12. En un instante inicial t = 0, se dispone de una muestra de estroncio radiactivo cuya período de semidesintegración es 28,8 años. Calcula: a) La constante λ de desintegración. b) El número de años transcurridos para que el número de núcleos inestables presentes en la muestra sea el 25 % de los existentes en t = 0.**

a) $\lambda = \dfrac{\text{Ln}\,2}{\text{T}} = \dfrac{0{,}693}{28{,}8\,\text{años}} = 2{,}41 \cdot 10^{-2}\ años^{-1}$

b) El que el número de núcleos presentes en la muestra sea el 25 %, significa: $N = \dfrac{25}{100} \cdot N_0 = \dfrac{N_0}{4}$

Aplicando la ley de desintegración radiactiva: $N = N_0 \text{ A } e^{-\lambda \text{ A } t}$
Sustituyendo: $N_0/4 = N_0 \text{ A } e^{-\lambda \text{ A } t}$
Tomando logaritmos neperianos: $\text{Ln } 1/4 = -\lambda \text{ A } t \Rightarrow \text{Ln } 4 = \lambda \text{ A } t$
Despejando: $t = \dfrac{\text{Ln}\,4}{\lambda} = \dfrac{\text{Ln}\,4}{2{,}41 \cdot 10^{-2}\ años^{-1}} = 57{,}6\ \text{años}$

resultado lógico ya que para que quede el 25 % de una muestra radiactiva deben transcurrir 2 · T de semidesintegración.
También se puede proceder de la siguiente forma que matemáticamente es más correcta:

$N = N_0 \text{ A } e^{-\lambda \text{ A } t} \Rightarrow \dfrac{N_0}{4} = N_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln}\,2}{T} \cdot t}$

Operando y tomando logaritmos neperianos: $\text{Ln}\,\dfrac{1}{2^2} = -\dfrac{\text{Ln}\,2}{T} \cdot t$

Operando: $-2 \cdot \text{Ln}\,2 = -\dfrac{\text{Ln}\,2}{T} \cdot t$ Por lo que el tiempo transcurrido es: $t = 2 \text{ A } T$

**13. Dada la reacción nuclear dada por la expresión: ${}^{14}_{7}N$ (n, p) X. a) Determina el producto X de la misma. b) Esta reacción libera 0,61 MeV, halla el incremento o disminución de masa que tiene lugar en la misma. c) El período de semidesintegración de X es de 5600 años, ) cuánto tiempo tarda en perder 1/3 de su masa?**

a) ${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{14}_{6}C$

b) Si se libera energía, entonces hay una disminución de masa en la reacción nuclear.

Aplicando la ecuación de Einstein: $\Delta E = \Delta m \text{ A } c^2$

$0{,}61 \text{ MeV} = \Delta m \text{ A } 931{,}5 \dfrac{\text{MeV}}{\text{u}\cdot c^2} \cdot c^2 \Rightarrow \Delta m = 6{,}5 \text{ A } 10^{-4} \text{ u}$

c) La constante de desintegración λ del elemento X es: $\lambda = \dfrac{\text{Ln } 2}{T}$

La cantidad de núcleos presentes al cabo de un tiempo es:

$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln } 2}{T}\cdot t}$

Si se pierde un tercio de su masa, significa que el número de núcleos presentes es:

$N = \dfrac{2}{3} \cdot N_0$

Sustituyendo en la ecuación exponencial, se tiene: $\dfrac{2}{3} N_0 = N_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln } 2}{T}\cdot t}$

Tomando logaritmos neperianos: $\text{Ln } \dfrac{2}{3} = -\dfrac{\text{Ln } 2}{T} \cdot t$

Despejando: $t = -\text{Ln } \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{T}{\text{Ln } 2} = -\text{ Ln } \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5\,600 \text{ años}}{\text{Ln } 2} = 3276{,}5$ años

**14. La masa del núcleo del isótopo ${}^{31}_{15}P$ es 30,970 u. Calcula: a) El defecto de masa. b) La energía media de enlace por nucleón en MeV. Datos: Masa del protón: 1,0073 u; masa del neutrón: 1,0087 u.**

a) El defecto de masa es igual a la masa de los constituyentes - menos la masa del isótopo.

Constituyentes: 15 protones y 31 – 15 = 16 neutrones.

$\Delta m$ = 15 protones · 1,0073 u + 16 neutrones · 1,0087 u – 30,970 u = 0,2787 u

En unidades del SI: $\Delta m = 0{,}2787 \text{ u} \cdot \dfrac{1{,}66 \cdot 10^{-27} \, kg}{u} = 4{,}63 \cdot 10^{-28} \, kg$

Aplicando la ecuación de Einstein la energía de la radiación es:

$\Delta E = m \cdot c^2 = 4{,}63 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 4{,}16 \cdot 10^{-11} \text{ J}$

Y expresado en MeV: $\Delta E = 4{,}16 \cdot 10^{-11} \, J \cdot \dfrac{1 eV}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \, J} \cdot \dfrac{1 MeV}{10^6 \, eV} = 260 \; MeV$

Al mismo resultado se llega aplicando la relación masa energía: $1u = 931{,}5 \; \dfrac{MeV}{c^2}$

$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 0{,}2787\, u \cdot 931{,}5 \; \dfrac{MeV}{u \cdot c^2} c^2 = 260 \; MeV$

b) Como el número de nucleones, protones y neutrones, es 31 nucleones, se tiene:

Energía media enlace por nucleón = $\dfrac{260 \; MeV}{31 \; nucleones} = 8{,}39 \; \dfrac{MeV}{nucleón}$

**15. El deuterio y el tritio son dos isótopos del hidrógeno. Al incidir un neutrón sobre un núcleo de deuterio se forma un núcleo de tritio, emitiéndose radiación gamma en el proceso. Si las masas atómicas del deuterio, del tritio y del neutrón son: 2,014740 u, 3,017005 u y 1,008986 u, respectivamente, a) Escriba y ajuste la reacción nuclear citada. b) Calcula la longitud de onda del fotón emitido, así como su momento lineal.**

a) ${}^{2}_{1}H + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{3}_{1}H + \gamma$

b) En primer lugar hay que calcular el defecto de masa y la energía de la radiación:

$\Delta m = m_{deuterio} + m_{neutrón} - m_{tritio}$ = 2,014740 u + 1,008986 u – 3,017005 u = $6{,}721 \cdot 10^{-3}$ u

En unidades del SI: $\Delta m = 6{,}721 \cdot 10^{-3}$ u · $\frac{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ kg}{u} = 1{,}1157 \cdot 10^{-29}\ kg$

Aplicando la ecuación de Einstein la energía de la radiación es:
$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 1{,}1157 \cdot 10^{-29}$ kg · $(3 \cdot 10^8\ m/s)^2 = 1{,}0041 \cdot 10^{-12}$ J

Aplicando la ecuación de Planck: $\Delta E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$, de donde:

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{\Delta E} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s \cdot 3 \cdot 10^8\ m/s}{1{,}0041 \cdot 10^{-12}\ J} = 1{,}98 \cdot 10^{-13}\ m$$

Según la ecuación de De Broglie, el momento lineal del fotón como partícula es:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s}{1{,}98 \cdot 10^{-13}\ m} = 3{,}35 \cdot 10^{-21}\ kg \cdot m/s$$

**16. Cuando se bombardea con un protón un núcleo de litio, $^{7}_{3}Li$, éste se descompone en dos partículas α. a) Escribe y ajusta la reacción nuclear del proceso. b) Calcula la energía liberada en dicha desintegración, siendo las masas atómicas del litio, el hidrógeno y el helio 7,0182 u, 1,0076 u y 4,0029 u, respectivamente. Expresa el resultado en eV.**

a) $^{7}_{3}Li + ^{1}_{1}H \rightarrow 2\ ^{4}_{2}He + \gamma$

b) La pérdida de masa que se genera en el proceso es:
$\Delta m = 7{,}0182$ u + 1,0076 u - 2 A 4,0029 u = 0,02 u
Y aplicando la ecuación de Einstein para hallar la energía liberada resulta:
$\Delta E = \Delta m$ A $c^2$ = 0,02 u A 931,5 $\frac{MeV}{u \cdot c^2}$ · $c^2$ = 18,63 MeV

**17. El deuterio y el tritio son isótopos de un cierto elemento químico; el primero posee un neutrón y dos el segundo, respectivamente. En un proceso de fusión nuclear, el deuterio y el tritio generan helio, y en esa reacción nuclear hay una pérdida de masa de una cuantía igual a: Δm = 0,01886 u. a) Escribe la ecuación de la reacción nuclear que tiene lugar, ajustándola adecuadamente. b) Calcula, en MeV, la energía liberada en la formación de un núcleo de helio, al producirse la reacción nuclear mencionada.**

a) $^{2}_{1}H + ^{3}_{1}H \rightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{0}n$

b) Aplicando la ecuación de Einstein:
$\Delta E = \Delta m$ A $c^2$ = 0,01886 u A 931,5 $\frac{MeV}{u \cdot c^2}$ A $c^2$ = 17,57 MeV

**18. La actividad del $^{14}C$ se puede usar para determinar la edad de algunos restos arqueológicos. Supón que una muestra contiene $^{14}C$ y presenta una actividad de 2,8 · 10$^7$ Bq. La vida media del $^{14}C$ es de 8270 años. Determina: a) La población de núcleos de *$^{14}C$* en dicha muestra. b) La actividad de esta muestra después de 1000 años.**

a) La actividad de una muestra viene dada por la ecuación: A = λ · N y además se cumple que: $\tau = \frac{1}{\lambda}$, por tanto:

$$N = \frac{A}{\lambda} = A \cdot \tau = 2{,}8 \cdot 10^7\ \frac{núcleos}{s} \cdot 8270\ año \cdot 365\ \frac{día}{año} \cdot 24\ \frac{hora}{día} \cdot 360\ \frac{s}{hora}$$

de donde N = 7,30 · 10$^{17}$ núcleos

b) Aplicando la ley de desintegración radiactiva: $A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ resulta:

$$A = 2{,}8 \cdot 10^7\ Bq \cdot e^{-\frac{1}{8270\ año} \cdot 1000\ año} = 2{,}48 \cdot 10^7\ Bq$$

**19. El $^{131}$I es un isótopo radiactivo que se utiliza en medicina para tratar el hipertiroidismo, ya que se concentra en la glándula tiroides. Su período de semidesintegración es de 8 días. a) Explica cómo cambia una muestra de 20 mg de $^{131}$I tras estar almacenada en un hospital durante 48 días. b) ¿Cuál es la actividad de un microgramo de $^{131}$I?**

a) Aplicando la ley de desintegración radiactiva en función de la masa, se tiene que:

$m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = m_o \cdot e^{-\frac{Ln\,2}{T} t} = 20\ mg \cdot e^{-\frac{Ln\,2}{8\,días} 48\,días} = 0{,}31$ mg

b) La actividad de una sustancia radiactiva es la cantidad de núcleos que se desintegran en la unidad de tiempo.

$A = \lambda \cdot N =$

$= \frac{Ln\,2}{T} \cdot \frac{m}{M} = \frac{Ln\,2}{8\,días \cdot 24\ h/día \cdot 3600\,s/h} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6}\,g}{131\,g/mol} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\ núcleos/mol =$

$= 4{,}6 \cdot 10^9$ núcleos desintegrados/s

**20. Se observa que la actividad radioactiva de una muestra de madera prehistórica es diez veces inferior a la de una muestra de igual masa de madera moderna. Sabiendo que el periodo de semidesintegración del $^{14}$C es 5730 años, calcula la antigüedad de la primera muestra.**

La actividad de una muestra en función de la actividad inicial es:

$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = A_0 \cdot e^{\frac{-Ln\,2}{T} t}$

Como la actividad actual es la décima parte de la inicial, se tiene que:

$\frac{A_0}{10} = A_0 \cdot e^{\frac{-Ln\,2}{T} t} \Rightarrow -\,Ln\,10 = -\,\frac{Ln\,2}{T} \cdot t$

Despejando: $t = T \cdot \frac{Ln\,10}{Ln\,2} = 5730\ años \cdot \frac{Ln\,10}{Ln\,2} = 19034{,}6\ años$

**21. El carbono-14 tiene un período de semidesintegración de 5730 años y una masa atómica de 14,0032 u. Se dispone de una muestra de carbono-14 con una actividad de $4{,}93 \cdot 10^9$ desintegraciones por minuto. Determina: a) La actividad. b) La masa al cabo de $10^{10}$ segundos.**

a) La actividad de una muestra en función de la actividad inicial es:

$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = A_0 \cdot e^{-\frac{Ln\,2}{T} t} =$

$= 4{,}93 \cdot 10^9\ \frac{desintegraciones}{min} \cdot \frac{min}{60\,s}\ e^{-\frac{Ln\,2}{5730\,años \cdot 3{,}15 \cdot 10^7\ s/año} \cdot 10^{10}\,s} = 7{,}91 \cdot 10^7$ Bq

b) La actividad de una muestra está relacionada con los átomos presentes con la relación:

$A = \lambda \cdot N$, luego:

$N = \frac{A}{\lambda} = \frac{A \cdot T}{Ln\,2} = \frac{7{,}91 \cdot 10^7\ Bq \cdot 5730\ años \cdot 3{,}15 \cdot 10^7\ s/año}{Ln\,2} = 2{,}06 \cdot 10^{19}$ átomos

Como la masa molar del carbono-14 es 14,0032 g/mol, la masa de esos átomos es:

$m = \frac{2{,}06 \cdot 10^{19}\ átomos}{6{,}02 \cdot 10^{23}\ átomos/mol} \cdot 14{,}0032\ \frac{g}{mol} = 4{,}79 \cdot 10^{-4}$ g

**22. Calcula la energía liberada, expresada en kW·h, durante la fisión de 1 g de $^{235}$U, sabiendo que la fisión de cada núcleo de uranio libera una energía de 200 MeV.**

Como en un mol de átomos de uranio hay una cantidad de núcleos igual a la constante de Avogadro, resulta que los núcleos de uranio contenidos en la muestra son:

$$N = \frac{1\ g}{235\, g/mol} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\ núcleos/mol = 2{,}56 \cdot 10^{21}\ núcleos$$

La energía liberada es: $E = 2{,}56 \cdot 10^{21}\ núcleos \cdot 200\ MeV/núcleo = 5{,}12 \cdot 10^{23}\ MeV$

Y expresada en kW·h es:

$$E = 5{,}12 \cdot 10^{23} \cdot 10^{6}\ eV \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J}{eV} \cdot \frac{1\ kW}{1000\ J/s} \cdot \frac{1\ h}{3600\ s} = 2{,}28 \cdot 10^{4}\ kW \cdot h$$

**23. El Sol irradia energía con una potencia de 4 · 10$^{26}$ W. Suponiendo que esto se deba a la conversión de cuatro protones en helio, lo cual libera 26,7 · 10$^{6}$ eV y que los protones constituyen la mitad de la masa del Sol, estima cuántos años faltan para que el Sol se extinga si continúa radiando energía al ritmo actual. Dato: $M_{Sol}$ = 2 · 10$^{30}$ kg.**

La cantidad de protones que contiene el Sol es:

$$n_p = \frac{M_{sol}/2}{m_p} = \frac{2 \cdot 10^{30}\ kg/2}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg} = 5{,}988 \cdot 10^{56}\ protones$$

Y la energía liberada por la conversión de estos protones en helio es:

$$E = 5{,}988 \cdot 10^{56}\ protones \cdot \frac{26{,}7 \cdot 10^{6}\ eV}{4\ protones} = 4{,}13 \cdot 10^{63}\ eV$$

Y expresada en julios: $E = 4{,}13 \cdot 10^{63}\ eV \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J}{eV} = 6{,}6 \cdot 10^{44}\ J$

Y aplicando la definición de potencia, resulta que el tiempo pedido es:

$$P = \frac{E}{t} \Rightarrow 4 \cdot 10^{26}\ W = \frac{6{,}6 \cdot 10^{44}\ J}{t} \Rightarrow t = 1{,}65 \cdot 10^{18}\ s = 5{,}2 \cdot 10^{10}\ años$$

**24. El núcleo $^{32}_{15}P$ se desintegra emitiendo un electrón que adquiere una energía cinética igual a 1,71 MeV. Escribe la reacción nuclear que tiene lugar, determinando A y Z del núcleo hijo y la masa de ese núcleo si la masa del $^{32}_{15}P$ es 31,973908 u.**

La reacción nuclear que tiene lugar es: $^{32}_{15}P \rightarrow {}^{32}_{16}X + {}^{0}_{-1}e$

La energía cinética del electrón expresada en julios es:

E = 1,71 MeV = 1,71 · 10$^{6}$ · eV · 1,6 · 10$^{-19}$ J/eV = 2,736 · 10$^{-13}$ J

Que corresponde a una disminución de masa igual a:

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} = \frac{2{,}736 \cdot 10^{-13}\ J}{(3 \cdot 10^{8}\ m/s)^2} = 3{,}04 \cdot 10^{-30}\ kg = 3{,}04 \cdot 10^{-27}\ g$$

Y expresada en unidades de masa atómica (u):

$$\Delta m = 3{,}04 \cdot 10^{-27}\ g = 3{,}04 \cdot 10^{-27}\ g \cdot \frac{1\ u}{1{,}6606 \cdot 10^{-24}\ g} = 1{,}83 \cdot 10^{-3}\ u$$

La masa del núcleo hijo es: 31,973908 u – 1,83·10$^{-3}$ u = 31,972077 u

**25. El isótopo de fósforo $^{32}_{15}P$, cuya masa es 31,9739 u, se transforma por emisión beta en un isótopo estable de azufre (Z = 16), de masa 31,9721 u. El proceso, cuyo período de semidesintegración es 14,28 días, está acompañado por la liberación de energía en forma de radiación electromagnética. Con estos datos: a) Escribe la reacción nuclear, el tipo de desintegración beta producido, la energía y la frecuencia de la radiación emitida. b) Calcula la fracción de núcleos de átomos de fósforo desintegrados al cabo de 48 horas para una muestra formada inicialmente sólo por núcleos de $^{32}_{15}P$.**

a) $^{32}_{15}P \rightarrow ^{32}_{16}S + ^{0}_{-1}e$, luego se trata de una emisión beta de un electrón y no de un positrón.

A continuación hay que calcular el defecto de masa para hallar la energía de la radiación emitida:

$\Delta m = m_{fósforo} - (m_{azufre} + m_{electrón}) = 31{,}9739\ u - (31{,}9721\ u + 5{,}49 \cdot 10^{-4}\ u) = 0{,}0013\ u$

En unidades del SI: $\Delta m = 0{,}0013\ u \cdot \dfrac{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ kg}{u} = 2{,}0767 \cdot 10^{-30}\ kg$

Aplicando la ecuación de Einstein la energía de la radiación es:

$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 2{,}0767 \cdot 10^{-30}\ kg \cdot (3 \cdot 10^8\ m/s)^2 = 1{,}8690 \cdot 10^{-13}\ J$

Aplicando la ecuación de Planck: $\Delta E = h \cdot \nu$, de donde:

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1{,}8690 \cdot 10^{-13}\ J}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s} = 2{,}82 \cdot 10^{20}\ s^{-1}$$

b) $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_0 \cdot e^{-\frac{Ln\,2}{T} \cdot t}$, luego: $\dfrac{N}{N_0} = e^{-\frac{Ln\,2}{T} \cdot t}$

Por tanto: $\dfrac{N}{N_0} = e^{-\frac{Ln\,2}{14{,}28\ día \cdot 24\ horas/día} \cdot 48\ horas} = 0{,}907$

Y expresado en % es: 0,907 · 100 = 90,7 %, que es el % de fósforo que hay al cabo de 48 horas, luego la fracción desintegrada es: 100 – 90,7 = 9,3 %.