EL MÉTODO CIENTÍFICO

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

1 EL MÉTODO CIENTÍFICO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.-1.1.4.)

Página 11

1 **En el siguiente relato, identifica las etapas del método científico:**

En el último tercio del siglo XVIII se sabía que cuando los metales se calentaban (se calcinaban), en el proceso se ganaba peso. ¿Por qué ocurría esto? En 1774, Lavoisier abordó el fenómeno suponiendo que en la calcinación de los metales estos reaccionaban con algún componente del aire, y a ello atribuyó el aumento de peso. Para comprobarlo, calentó mercurio en un recipiente cerrado y comprobó que el peso total no cambió durante el proceso. Surgió así la «ley de conservación de la masa».

En el apartado dedicado al «Plan Lingüístico» de los recursos relacionados con las claves del proyecto, dentro del banco de recursos de **anayaeducacion.es,** el alumnado puede consultar diversa información acerca de los tipos de textos y estrategias para leer mejor.

Problema: ¿Por qué los metales ganan peso durante la calcinación al aire?

Hipótesis: Los metales deben reaccionar con algún componente del aire.

Experimento: Se realiza la calcinación del mercurio en un recipiente cerrado.

Confirmación: El mercurio no cambia de peso durante su calcinación en un espacio cerrado. Queda confirmada la hipótesis.

2 **Plantea dos problemas, uno que se pueda investigar científicamente y otro que no pueda serlo. Para el primero de ellos, enuncia algunas hipótesis científicas.**

Respuesta abierta. Para contestar a la pregunta debemos tener en cuenta que para la investigación científica hay que prestar atención a que el problema permita la emisión de hipótesis científicas, esto es, contrastables con la realidad.

3 **Diseña un experimento, diferente al de Galileo, para comprobar que la rapidez de caída de los cuerpos no depende de su peso.**

Cualquier experimento de caída libre es una comprobación de que su velocidad no depende de la masa. Si disponemos de una bomba de vacío, podemos realizar el experimento de lanzar una pluma y una moneda, observando que en ausencia de rozamiento ambos cuerpos llegan a la vez. Se pueden encontrar fácilmente vídeos que reproducen la experiencia introduciendo en cualquier buscador de Internet las palabras «pluma moneda vacío». Si viajamos a la Luna, podríamos hacer el mismo experimento que hizo Armstrong de lanzar una pluma y un martillo.

4 **Realiza una búsqueda en Internet titulada «Experimento pluma martillo Luna»; una vez que encuentres el vídeo del experimento que se realizó en la superficie de la Luna, explica qué se podría concluir de él. ¿Qué hipótesis se quería comprobar?**

Con el fin de promover en su alumnado un uso seguro y responsable de las TIC, le sugerimos que recomiende la consulta de las fichas sobre «Ciudadanía digital» disponibles en **anayaeducacion.es**.

Respuesta abierta.

2 MAGNITUDES FÍSICAS. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.-1.1.3.-1.1.4.)

Página 13

5 El espejo. **Pon dos ejemplos de propiedades que sean magnitudes físicas, y otros dos que no lo sean. Para cada una de las primeras, enumera al menos tres unidades, una de ellas la del SI.**

En **anayaeducacion.es**, su alumnado dispone de un documento que le explica cómo aplicar la técnica «El espejo», perteneciente a la clave de desarrollo del pensamiento. Además, en los recursos de esta unidad encontrará la presentación «Magnitudes fundamentales del SI».

Magnitud física:

– Presión. Unidad: atmósfera, bar, pascal.

– Temperatura. Unidad: grado Celsius (°C), grado Fahrenheit (°F), kelvin (K).

Magnitudes no físicas:

– Alegría.

– Miedo.

6 **En el último párrafo del apartado 2.4 se han incluido algunos ejemplos de unidades que no pertenecen al Sistema Internacional de Unidades. ¿Con qué magnitudes están relacionadas? Busca la equivalencia entre estas unidades y las correspondientes del SI.**

El minuto está relacionado con la magnitud tiempo. Equivale a 60 segundos, unidad de tiempo en el Sistema Internacional.

La caloría se relaciona con la magnitud energía. Equivale a 4,18 julios en el Sistema Internacional.

El kilopondio es una unidad de fuerza, y equivale a 9,81 newtons en el Sistema Internacional.

El milibar se refiere a la magnitud presión. Su equivalencia en el Sistema Internacional de Unidades es de 100 pascales.

7 **Expresa tu edad en años, días, minutos, y en la unidad de tiempo del SI.**

En el SI debemos expresar nuestra edad en segundos, por lo que los años los pasamos a días (× 365 días/año) y los sumamos a los días que no completaban el año. Estos días, los pasamos a horas (× 24 h/1 día) y le sumamos las horas que no completaban un día. Para pasar todas las horas a minutos, multiplicamos por 60 minutos que tiene una hora. Finalmente, para obtener el resultado en el Sistema Internacional, se multiplica por 60 segundos que tiene un minuto:

$$t\,(\text{s}) = \text{años} \cdot \left(\frac{365\ \text{días} + n\ \text{días}}{1\ \text{año}}\right) \cdot \left(\frac{24\ \text{h} + m\ \text{horas}}{1\ \text{día}}\right) \cdot \left(\frac{60\ \text{min}}{1\ \text{h}}\right) \cdot \left(\frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}}\right)$$

8 **Inventa una unidad de longitud, y expresa en ella tu altura.**

Por ejemplo, la distancia índice-codo. Mi altura es *n* veces la distancia índice-codo.

9 **El 11 de diciembre de 1998, desde Cabo Cañaveral, la NASA lanzaba la sonda *Mars Climate Orbiter* para estudiar el clima de Marte. El 23 de septiembre de 1999, debido a un error de cálculo, la sonda quedaba destruida por la fricción con la atmósfera del planeta rojo. Indaga en Internet cuál fue, exactamente, el error cometido. En tu indagación, sigue el esquema simplificado del método científico mostrado en el epígrafe anterior.**

Respuesta abierta.

3 ANÁLISIS DIMENSIONAL

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.-1.1.3.-1.1.4.)

Página 14

10 **La ley de la gravitación universal de Newton establece que la fuerza con la que dos cuerpos se atraen es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa:**

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m'}{r^2}$$

donde *G* es la constante universal de la gravitación. Determina la ecuación dimensional de esta constante y, a partir de ella, su unidad del SI.

Para determinar la ecuación dimensional de la constante universal de la gravitación, la despejamos de la ecuación:

$$G = \frac{F \cdot r^2}{m \cdot m'}$$

La ecuación dimensional es:

$$[G] = \frac{L \cdot M \cdot T^{-2} \cdot L^2}{M \cdot M} = L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2}$$

Por tanto, su unidad en el SI será $\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$, aunque lo normal es verla como $\frac{N \cdot m^2}{kg^2}$.

11 **Un péndulo simple es un dispositivo formado por un cuerpo que oscila sujeto en el extremo inferior de un hilo inextensible de longitud *l* y masa despreciable. Se puede utilizar para medir la aceleración de la gravedad (*g*) en un lugar determinado, calculándola a partir de la medida del tiempo que tarda en dar una oscilación completa (período, *T*). Justifica qué ecuación le corresponde:**

a) $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ **b)** $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$

Para comprobar cuál es la ecuación correspondiente a la determinación del período, comprobamos que su ecuación dimensional coincida con unidades de tiempo, ya que el período (*T*) es el tiempo que tarda el péndulo en dar una oscilación completa.

a) La ecuación dimensional en este caso es:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow [T] = \sqrt{\frac{L}{L \cdot T^{-2}}} = T$$

b) Para este apartado, su ecuación dimensional es:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow [T] = \sqrt{\frac{L \cdot T^{-2}}{L}} = T^{-1}$$

Por tanto, la ecuación utilizada para la medida de la gravedad es la del apartado *a*, puesto que su unidad es la de tiempo.

4 MEDIDA DE MAGNITUDES

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.-1.1.4.)

Página 15

12 Cabezas pensantes. **No siempre las magnitudes fundamentales se miden de forma directa, y las derivadas, de forma indirecta. Piensa en un ejemplo de cada tipo en el que esto no ocurra.**

En anayaeducacion.es dispone de un documento que le explica cómo aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo «Cabezas pensantes» para resolver esta actividad.

La temperatura es una magnitud fundamental, y su medida no es directa. Dependiento del tipo de termómetro, el cambio de temperatura se relaciona con una propiedad física medible, como puede ser: un cambio en la dilatación, una propiedad eléctrica o la radiación infrarroja.

Una magnitud derivada que se mida directamente puede ser el volumen, que en el laboratorio se mide con probetas.

13 Se realizan medidas con una balanza de cota máxima 100 g y umbral de resolución 0,1 g. Indica razonadamente qué valores no pueden haber sido obtenidos con ella:

a) 32,4 g. b) 0,43 g. c) 110,8 g.

Los valores que medirá esta balanza estarán comprendidos entre 0,1 y 100,0 g, y tendrán una cifra decimal. Por tanto, el valor que se ha obtenido con la balanza de los tres aportados será el a) 32,4 g.

14 Indica con qué instrumentos podemos medir la longitud, la intensidad de corriente, la velocidad y la fuerza.

Algunos de los instrumentos utilizados para medir la longitud son una regla graduada, una cinta métrica, un calibre, un micrómetro, un interferómetro…

La intensidad de corriente se mide con un amperímetro.

La velocidad se puede medir con varios instrumentos. Dependiendo de qué tipo de velocidad queramos medir, podemos utilizar un velocímetro, un anemómetro (si medimos la velocidad del aire) o un tacómetro (si lo que se mide es la velocidad de giro de un eje).

La fuerza se mide con un dinamómetro.

15 En anayaeducacion.es encontrarás una animación interactiva que te ayudará a utilizar correctamente el calibre. ¿Qué magnitud mide este instrumento? Explica cómo medirías el grosor de una hoja de papel, de forma directa y de forma indirecta.

Respuesta abierta.

5 ERRORES EN LA MEDIDA

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.-1.1.4.)

Página 16

16 ¿Puede ser una medida precisa pero inexacta? ¿Y lo contrario? Propón algún ejemplo para apoyar tu razonamiento.

Una medida sí puede ser precisa e inexacta a la vez. Esto suele ocurrir cuando se cometen errores sistemáticos en la medida. Por ejemplo, cuando queremos medir la masa de diferentes sustancias y la balanza analítica está mal calibrada.

Por el contrario, una medida no puede ser exacta si no es precisa, pues la exactitud implica acercamiento de todas las medidas al valor real, y, en caso de existir errores aleatorios, las medidas no serán próximas entre ellas y, por tanto, no lo serán, en conjunto, al valor real.

17 Cuando se mira la hora en un reloj que retrasa, ¿se está cometiendo un error sistemático o aleatorio?

Al ver la hora en un reloj que se retrasa, el error que se comete es sistemático, ya que irá atrasando una cierta cantidad de tiempo, pero siempre el mismo. El resultado se modifica en el mismo sentido siempre: retrasando la hora el mismo intervalo de tiempo.

18 Si mides tu altura con una cinta métrica, y el error absoluto de la medida es de 1 cm, ¿cuál es el error relativo? Exprésalo mediante valor numérico y porcentual.

El error relativo resulta de dividir el error absoluto entre el valor de medida. El valor porcentual resultará de multiplicar por 100 este resultado. Suponiendo una altura de 160 cm:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{v} = \frac{1\ \text{cm}}{160\ \text{cm}} = 0{,}00625 \;\rightarrow\; \varepsilon_r = 0{,}00625 \cdot 100 = 0{,}625\ \%$$

19 Explica la diferencia entre exactitud y precisión. ¿Qué errores reducen la exactitud manteniendo la precisión?

Exactitud se refiere a lo próximas que están las medidas realizadas al valor real de la magnitud medida.

Precisión se refiere a la similitud de las medidas realizadas.

Los errores sistemáticos mantienen la precisión, pero reducen la exactitud.

Página 17

20 Se realizan cinco medidas de la longitud de la mesa del laboratorio con una cinta métrica, obteniendo estos valores, en cm: 120,6; 120,4; 120,5; 120,4; 120,3. ¿Cuál sería el valor de la medida? ¿Y los errores, absoluto y relativo?

El valor de la medida es la media aritmética de los valores tomados:

$$\bar{x} = \frac{120{,}6 + 120{,}4 + 120{,}5 + 120{,}4 + 120{,}3}{5} = 120{,}44\ \text{cm}$$

El error absoluto, cuando se realizan varias medidas, viene dado por la expresión:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}}$$

Por tanto, el error absoluto será:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{(120{,}6 - 120{,}44)^2 + (120{,}4 - 120{,}44)^2 + (120{,}5 - 120{,}44)^2 + (120{,}4 - 120{,}44)^2 + (120{,}3 - 120{,}44)^2}{5 \cdot (5-1)}}$$

$$\Delta x = 0{,}05\ \text{cm}$$

Como la dispersión estadística es menor que el umbral de resolución, se toma este último, 0,1 cm, como error absoluto de la medida. Así, el valor de la medida, con su error, es:

$$L = 120{,}4 \pm 0{,}1\ \text{cm}$$

El error relativo se obtiene de dividir el error absoluto entre el valor real (en este caso entre el valor medio):

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{v} = \frac{0{,}1\ \text{cm}}{120{,}4\ \text{cm}} = 8{,}31 \cdot 10^{-4}$$

21 Expresa estas cantidades en notación científica:

a) 75 600 000 g.

b) 0,000 000 025 V.

c) 149 800 000 km.

a) 75 600 000 g en notación científica se expresa $7{,}56 \cdot 10^7$ g.

b) 0,000 000 025 V en notación científica es $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ V.

c) 149 800 000 km se expresa como $1{,}498 \cdot 10^8$ km.

22 **Cuando se miden las dimensiones de un objeto plano rectangular se obtiene: a = 40,05 ± 0,01 cm y b = 120,1 ± 0,1 cm. Determina la superficie y el error absoluto de la medida.**

Para medidas indirectas, el error se calcula a partir de los errores de las medidas directas. Al ser la medida indirecta una multiplicación, se determina el valor relativo sumando los errores relativos de cada una de las medidas. Obtenemos, en primer lugar, el error relativo de las dos medidas:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{v} \rightarrow \varepsilon_r(a) = \frac{0{,}01\text{ cm}}{40{,}05\text{ cm}} = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \;;\; \varepsilon_r(b) = \frac{0{,}1\text{ cm}}{120{,}1\text{ cm}} = 8{,}3 \cdot 10^{-4}$$

El error relativo de la medida de la superficie será:

$$\varepsilon_r(S) = 2{,}5 \cdot 10^{-4} + 8{,}3 \cdot 10^{-4} = 1{,}08 \cdot 10^{-3}$$

La superficie tiene por valor:

$$S = a \cdot b = 40{,}05\text{ cm} \cdot 120{,}1\text{ cm} = 4810\text{ cm}^2$$

El error absoluto del cálculo de la superficie se obtendrá de multiplicar el error relativo por el valor de la superficie:

$$\varepsilon_a(S) = \varepsilon_r(S) \cdot v = 1{,}08 \cdot 10^{-3} \cdot 4810\text{ cm}^2 = 5\text{ cm}^2$$

Por tanto, la medida de la superficie, con su error de medida, es:

$$S = 4810 \pm 5\text{ cm}^2$$

23 **Selecciona en cada pareja la cantidad superior:**

a) 0,0055 m³ y 5,5 mL. **b) 612 cg y 0,0612 kg.**

a) 0,0055 m^3 y 5,5 mL.

Para comparar las dos cantidades, las expresamos en las mismas unidades. Pasamos cm^3 a mL, sabiendo que 1 cm^3 equivale a 1 mL:

$$0{,}0055\text{ m}^3 \cdot \frac{10^6\text{ cm}^3}{1\text{ m}^3} = 5500\text{ cm}^3 = 5500\text{ mL}$$

Por tanto, 0,055 m^3 es mayor que 5,5 mL.

b) 612 cg y 0,0612 kg.

Para comparar las medidas, pasamos kg a cg:

$$0{,}0612\text{ kg} \cdot \frac{10^6\text{ cg}}{1\text{ kg}} = 61\,200\text{ cg}$$

Por tanto, 0,0612 kg es mayor que 612 cg.

Página 18

24 **Expresa correctamente las medidas de las actividades 17 y 18 de la página anterior.**

Los ejercicios se han realizado correctamente, ya que se ha expresado el error absoluto con una cifra significativa en cada uno de los ejercicios.

25 **Para medir la celeridad de un móvil se procede a medir el espacio que recorre y el tiempo que tarda en hacerlo. Se realizan tres medidas de cada magnitud, obteniendo los siguientes valores:**

e_1 = 49,9 cm	e_2 = 49,9 cm	e_3 = 50,0 cm
t_1 = 1,47 s	t_2 = 1,51 s	t_3 = 1,50 s

a) Determina el umbral de resolución de los instrumentos de medida utilizados.

b) ¿Cuál es la celeridad?

c) ¿Y el error relativo?

a) La resolución de un instrumento es la mínima división de la escala del aparato.

Para la medida del espacio, la mínima división es 0,1 cm. Para el tiempo, es 0,01 s.

b) y c) El valor de la celeridad resulta de la división del espacio entre el tiempo. Para dar su medida correcta, la expresaremos con el error indirecto de la medida. En primer lugar, hallamos los valores medios del espacio y del tiempo, mediante la expresión:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{n}$$

Y el error absoluto de las medidas lo calculamos mediante la expresión:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}}$$

Los valores obtenidos se muestran en la siguiente tabla:

	1	2	3	$\bar{x}$	Δx
Espacio (cm)	49,9	49,9	50,0	49,93	0,03
Tiempo (s)	1,47	1,51	1,50	1,49	0,01

Al ser la celeridad una medida indirecta (una división: espacio entre el tiempo), se determina su error relativo sumando los errores relativos de cada una de las medidas.

Obtenemos, primero, el error relativo de las dos medidas:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{v}$$

$$\varepsilon_r(\Delta S) = \frac{0{,}03}{49{,}93} = 6 \cdot 10^{-4} \qquad \varepsilon_r(t) = \frac{0{,}01}{1{,}49} = 6{,}7 \cdot 10^{-3}$$

El error relativo de la medida de la celeridad será:

$$\varepsilon_r(c) = 6 \cdot 10^{-4} + 6{,}7 \cdot 10^{-3} = 7{,}3 \cdot 10^{-3}$$

El valor de la celeridad es, por tanto:

$$c = \frac{49{,}93\ \text{cm}}{1{,}49\ \text{s}} = 33{,}51\ \text{cm/s}$$

El error absoluto del cálculo de la celeridad surge de multiplicar el error relativo por el valor propio de la celeridad:

$$\varepsilon_a(c) = \varepsilon_r(c) \cdot v = 7{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 33{,}51\ \text{cm/s} = 0{,}2446\ \text{cm/s}$$

Finalmente, la medida correcta de la celeridad es:

$$c = 33{,}5 \pm 0{,}2\ \text{cm/s}$$

26 ¿Qué puedes concluir de las diferencias entre las cantidades numéricas 2,0; 2,00; 2,000, procedentes de la medida experimental de una magnitud física?

Se deduce que la sensibilidad de los aparatos que realizan la medida es mayor para la medida de 2,000, después la de 2,00 y por último la de 2,0. De esta forma, las medidas realizadas con una mayor sensibilidad serán más precisas, ya que el error aleatorio será menor.

27 ¿Sería correcto decir que una medida de tiempo da como resultado t = 1,35 ± 0,15 s? ¿Por qué?

El error absoluto solo debe tener una cifra significativa. Si, como en este caso, la segunda cifra es un 5 la primera aumenta una unidad. Por tanto, la medida correcta sería:

$$t = 1{,}4 \pm 0{,}2\ \text{s}$$

6 SIGNIFICADO DE LAS ECUACIONES EN FÍSICA Y QUÍMICA

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.-1.1.4.)

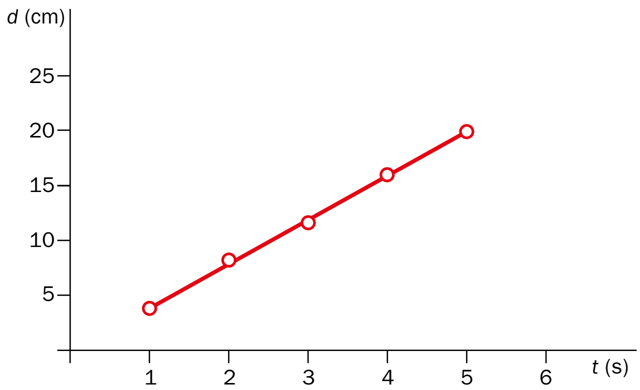
Página 19

28 Se muestran a continuación parejas de datos tiempo (s) - distancia (cm) medidos en un movimiento: (1, 3,9); (2, 8,2); (3, 11,7); (4, 16,0); (5, 19,9). Preséntalos en una tabla de datos y, a partir de su representación gráfica, determina la relación entre las dos magnitudes físicas.

Los datos que nos dan en forma de puntos los distribuimos en una tabla de la siguiente forma:

Tiempo (s)	1	2	3	4	5
Distancia (cm)	3,9	8,2	11,7	16	19,9

Al representar los valores de distancia frente al tiempo, se observa que la relación entre estos es lineal:



29 Estudia las relaciones de proporcionalidad en la ecuación *d* = *m*/*V*, donde *d* es la densidad; *m*, la masa, y *V*, el volumen.

Según la ecuación $d = m/V$, la densidad es directamente proporcional a la masa e inversamente proporcional al volumen. A su vez, la masa es inversamente proporcional al volumen.

30 Propón dos ejemplos de pares de magnitudes independientes.

Don magnitudes son independientes cuando al variar una de ellas, la otra permanece constante (no se altera su valor). Como ejemplo podemos citar:

– La temperatura y la masa.

– La temperatura de fusión y el volumen.

TRABAJA CON LO APRENDIDO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.-1.1.3.-1.1.4.-1.1.5.-1.1.6.) CE.1.2. (EA.1.2.1.-1.2.2.)

Página 28

El método científico

1 **A principios del siglo XIX, Avogadro sugirió que «volúmenes iguales de gases, en las mismas condiciones de presión y temperatura, contienen el mismo número de moléculas». En los libros antiguos, a este enunciado se le llamaba hipótesis de Avogadro, y en los modernos se habla de la ley de Avogadro. ¿A qué crees que se debe el cambio de denominación?**

Avogadro, en 1811, lo enunció como hipótesis. Por costumbre, se ha seguido denominando como tal, a pesar de haber sido comprobado. Es por esto por lo que en los libros más modernos se ha corregido y hoy en día se habla de ley de Avogadro.

2 **En el siguiente relato, ¿qué etapas del método científico reconoces? ¿En qué visiones inadecuadas de la ciencia se incide? ¿Cuáles se combaten?**

En el siglo XVII, el funcionamiento de las bombas de succión (extraer el aire del interior de un tubo cuyo extremo está sumergido en un líquido) se explicaba, siguiendo la tradición aristotélica, argumentando que la naturaleza siente *«horror al vacío»*. Por ello, cuando se sacaba el aire del tubo, el agua ocupaba rápidamente su lugar. Galileo cuestionó esta explicación cuando los jardineros de Florencia no pudieron elevar agua de un pozo, mediante una bomba, a más de 32 pies (unos 10 m). ¿Es que el horror al vacío tenía un límite? Fue Torricelli quien, mediante el conocido experimento de la cubeta y el tubo de mercurio, resolvió la situación. Sus conclusiones se pueden resumir en la siguiente frase: *«vivimos en el fondo de un océano de aire que intenta llenar cada espacio, y que pesa y empuja»*.

En el texto se destaca el primer paso del método científico: detectar el problema. Galileo observó que no se podía elevar el agua de un pozo a más de 10 m de altura. Se preguntó si el «horror al vacío» que afirmaba Aristóteles tendría un límite.

Se defendía la explicación dada por Aristóteles de que la naturaleza tiene «horror al vacío».

El conocimiento científico avanza mediante la propuesta de nuevas hipótesis, y su comprobación mediante la experimentación, para posteriormente enunciar leyes y teorías. En este caso, mediante los experimentos de Torricelli, se demostró la existencia del vacío y de la presión atmosférica, responsable de que en su experimento el mercurio subiera hasta 76 cm Hg.

3 **Piensa y critica alguna situación de tu vida cotidiana en la que la ciencia se utilice como fuente de autoridad.**

En muchos productos se añade «científicamente demostrado» para darles prestigio, como en las cremas antiedad, los productos anticaída del pelo, las pastillas adelgazantes, etc. Así, pueden incrementar su precio, o incrementar las ventas, frente a otros cuyo fin es el mismo pero no llevan ese apelativo.

4 **¿Por qué crees que se habla de la *Ley de la Gravitación Universal* en lugar de hacerlo de la *Teoría de la Gravitación Universal*?**

Se llama «ley» porque describe la interacción gravitatoria entre dos cuerpos, pero no la explica (las leyes describen, y las teorías explican). La explicación de la atracción gravitatoria se recoge en la teoría general de la relatividad.

5 **Demuestra que la ecuación $P = F \cdot v$ es homogénea (P, potencia; F, fuerza; v, velocidad). Cada una de estas magnitudes, ¿es escalar o vectorial?**

Para comprobar si la ecuación es homogénea, demostramos que las dimensiones de ambos miembros de la ecuación coinciden. La ecuación dimensional de la potencia es:

$$[P] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot T^{-1} = M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$$

$$[F \cdot v] = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L \cdot T^{-1} = M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$$

Como coinciden, podemos decir que la ecuación es homogénea.

La potencia es una magnitud escalar. La fuerza y la velocidad son magnitudes vectoriales, pues vienen determinadas además de por su módulo, por su dirección y sentido.

6 **La fuerza, *F*, que origina un movimiento circular depende de la masa del cuerpo que lo describe *m*, la velocidad con la que lo hace, *v*, y el radio de la circunferencia, *r*. Determina, por análisis dimensional, la ecuación matemática que relaciona estas magnitudes.**

Según las directrices del problema, podemos expresar la fuerza que origina un movimiento circular de esta forma:

$$F = m^{\alpha} \cdot v^{\beta} \cdot r^{\gamma} \quad \rightarrow \quad [F] = [m^{\alpha} \cdot v^{\beta} \cdot r^{\gamma}] = M^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot T^{-\beta} \cdot L^{\gamma} \qquad [1]$$

Las dimensiones de la fuerza de forma general son:

$$[F] = [m \cdot a] = M \cdot L \cdot T^{-2} \qquad [2]$$

Así, igualando [1] y [2]:

$$M^{\alpha} \cdot L^{\beta+\gamma} \cdot T^{-\beta} = M \cdot L \cdot T^{-2}$$

$$\alpha = 1$$

$$-\beta = -2 \rightarrow \beta = 2$$

$$\beta + \gamma = 1 \rightarrow +2 + \gamma = 1 \rightarrow \gamma = -1$$

Si escribimos la ecuación [1] ya con los índices correctos, obtenemos la ecuación matemática que relaciona estas magnitudes:

$$F = m^1 \cdot v^2 \cdot r^{-1} \rightarrow F = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

7 **Utilizando las ecuaciones dimensionales de las magnitudes físicas derivadas de la tabla del epígrafe 3, encuentra ecuaciones matemáticas que relacionen estas magnitudes, que sean posibles por ser homogéneas.**

Teniendo en cuenta las dimensiones de cada una de las magnitudes, deducimos las fórmulas:

Magnitud	Dimensiones	Fórmulas
Superficie	L^2	$S = d \cdot d$
Volumen	L^3	$V = S \cdot d$
Velocidad	$L \cdot T^{-1}$	$v = \frac{d}{t}$
Aceleración	$L \cdot T^{-2}$	$a = \frac{v}{t}$; $a = \frac{d}{t^2}$
Fuerza	$L \cdot M \cdot T^{-2}$	$F = m \cdot a$; $F = m \cdot \frac{d}{t^2}$
Energía	$L^2 \cdot M \cdot T^{-2}$	$E = F \cdot d$; $E = m \cdot v^2$
Potencia	$L^2 \cdot M \cdot T^{-3}$	$P = \frac{E}{t}$; $P = F \cdot v$

8 **Propón tres ejemplos de magnitudes físicas intensivas y otros tres de magnitudes extensivas, distintos a los ya propuestos en esta unidad. Explica en cada caso por qué son de ese tipo.**

Magnitudes intensivas son las que su valor numérico no depende de la cantidad de sistema que se estudia. Ejemplos son: la presión, la concentración o la viscosidad. Magnitudes extensivas son las que sí dependen de la cantidad de sistema que se está estudiando. Ejemplos son: la longitud, el peso y la cantidad de sustancia.

Sistema Internacional de Unidades

9 **El período de oscilación de un muelle es:**

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Determina las unidades de *k* en el SI.

Si despejamos *k* de la ecuación tenemos:

$$k = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m}{T^2}$$

Las unidades de *k* serán, por tanto, las de la masa (kg) entre las del período al cuadrado (s^2):

$$[k] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}^2}\right]$$

10 **La unidad de presión en el SI es el pascal (Pa). Encuentra la relación de equivalencia entre esta unidad y las unidades SI de las magnitudes fundamentales.**

Se define presión como fuerza por unidad de superficie.

$$p = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot a}{S}$$

Las unidades de la presión en pascales tienen una relación de equivalencia con:

$$\text{Pa} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

11 **Expresa, en las unidades adecuadas del Sistema Internacional, los siguientes datos:**

a) $\boldsymbol{v = 100}$ **km/h.**

b) $\boldsymbol{d = 750}$ **g/L.**

c) $\boldsymbol{S = 320}$ **cm²**.

d) $\boldsymbol{V = 300}$ **hm³**.

a) $v = 100 \dfrac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \dfrac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} \cdot \dfrac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} = 27{,}78\ \text{m/s}$

b) $d = 750 \dfrac{\text{g}}{\text{L}} \cdot \dfrac{1\ \text{kg}}{1000\ \text{g}} \cdot \dfrac{1000\ \text{L}}{1\ \text{m}^3} = 750\ \text{kg/m}^3$

c) $S = 320\ \text{cm}^3 \cdot \dfrac{1\ \text{m}^3}{10^6\ \text{cm}^3} = 3{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3$

d) $V = 300\ \text{hm}^3 \cdot \dfrac{10^6\ \text{m}^3}{1\ \text{hm}^3} = 3 \cdot 10^8\ \text{m}^3$

La medida

12 **Indica qué instrumentos te parecen más adecuados para medir las siguientes magnitudes, así como los rangos de medida y los umbrales de resolución:**

a) Las dimensiones de un campo de fútbol.

b) Las dimensiones de un microprocesador.

c) La temperatura de un bebé.

d) El tiempo que tarda un coche de Fórmula 1 en completar una vuelta a un circuito.

e) El volumen de una disolución preparada en el laboratorio de química.

a) Para la medida de un campo de fútbol (100 m × 74 m, aproximadamente), algunos de los aparatos utilizados pueden ser:

a. Cinta métrica: su rango de medida depende de la longitud de esta. Las puede haber muy largas, pero las normales son de 5 m. Su umbral de resolución es de mm.

b. Medidor de longitud láser: su rango de medida es mayor; aproximadamente, de 50 m. La resolución es de mm.

c. Medidor de distancia ligero con rueda: es el más indicado para este caso, pues su rango de medida es infinito, solo depende de las vueltas que dé su rueda, que es de un metro. Su umbral de resolución es de 1 cm.

b) Las dimensiones de un microprocesador son muy pequeñas, del orden de los mm. Se utiliza un micrómetro, con un rango de medida de 25 mm y una resolución de 0,001 mm.

c) La temperatura de un bebé: se utilizan termómetros digitales, pero también se pueden utilizar analógicos. Su rango de medida es de 35 a 42 °C, con una resolución de 0,1 °C. También se puede utilizar un termómetro infrarrojo para fiebre, con el mismo rango de medida y resolución.

d) El tiempo que tarda un coche de Fórmula 1 en completar una vuelta al circuito se mide con un cronómetro. Su rango de medida es de 0 a infinito. La precisión es de centésimas de segundo.

e) El volumen de las disoluciones en el laboratorio se mide con probetas. Las hay de diferentes volúmenes, que dependiendo del que se quiera medir se escogerá una u otra. Si, por ejemplo, se quieren medir 76 mL, se escogerá una probeta de 100 mL (rango 0 - 100 mL) y su resolución es de 0,1 mL.

13 **Se quiere determinar con un error de ±0,02 s el período de oscilación del péndulo de un reloj que, aproximadamente, es T = 1,4 s. Pero el cronómetro digital disponible tiene una resolución de solo 0,1 s. Diseña un experimento que permita obtener el resultado con el error deseado.**

Supondremos que el error absoluto que se comete al medir con el cronómetro viene dado por su resolución, $\varepsilon_a = 0{,}1$ s; es decir, aceptamos que el cronómetro y su usuario son fiables y que el error aleatorio o estadístico de un conjunto amplio de medidas no será mayor.

Como el error absoluto es el mismo si se mide un tiempo corto o largo, debemos efectuar una medida larga (tiempo grande) para que el error relativo sea el menor posible. Si llamamos T al período del péndulo y t al tiempo total medido, el experimento consistirá en medir el tiempo correspondiente no a una oscilación, sino a n oscilaciones consecutivas.

El problema consiste en determinar cuántas oscilaciones son necesarias para obtener la precisión deseada.

Como el número de oscilaciones n no tiene error, se cumplirá que:

$$t = T \cdot n$$

$$\varepsilon_r(t) = \varepsilon_r(T) + \varepsilon_r(n) = \varepsilon_r(T)$$

Por tanto, para el error absoluto del período tenemos que:

$$\varepsilon_r\,(T) = \varepsilon_r\,(t)$$

$$\frac{\varepsilon_a\,(T)}{T} = \frac{\varepsilon_a\,(t)}{t} = \frac{\varepsilon_a\,(t)}{T \cdot n} \;\rightarrow\; \varepsilon_a\,(T) = \frac{\varepsilon_a\,(t)}{n}$$

En consecuencia, como $\varepsilon_a\,(t) = 0{,}1$ s y queremos $\varepsilon_a\,(T) = 0{,}02$ s, necesitamos como mínimo:

$$n = \frac{0{,}1}{0{,}02} = 5 \text{ oscilaciones}$$

Para que este procedimiento sea válido resulta imprescindible que todas las oscilaciones tengan igual duración. Como los péndulos van amortiguando lentamente sus oscilaciones, no conviene alargar en exceso el experimento; por eso, un buen diseño experimental consistiría en medir el tiempo que corresponde a un número de oscilaciones comprendido entre 5 y 10.

Una estrategia aún más rigurosa sería efectuar varias sesiones independientes de medida con el péndulo, cada una de entre 5 a 10 oscilaciones, y después efectuar una comparación estadística de todas ellas para confirmar que el error se mantiene dentro del margen establecido de ±0,02 s.

14 Para calibrar una balanza se ha medido la masa de un patrón de 1 kg ocho veces, obteniendo las siguientes lecturas: 1,0015 kg; 0,9999 kg; 0,9998 kg; 1,0012 kg; 1,0003 kg; 0,9999 kg; 1,0001 kg; 0,9997 kg. ¿Cuál es el valor más probable de la masa del objeto? ¿Cuál es el error estadístico?

Se considera el valor más probable a la media aritmética de las medidas, se calcula mediante la expresión:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{1{,}0015 + 0{,}9999 + 0{,}9998 + 1{,}0012 + 1{,}0003 + 0{,}9999 + 1{,}0001 + 0{,}9997}{8}$$

$$\bar{x} = 1{,}0003 \text{ kg}$$

El error absoluto de las medidas lo calculamos mediante la expresión:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}}$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{(1{,}0015 - 1{,}0003)^2 + (1{,}0015 - 0{,}9999)^2 + \ldots + (1{,}0015 - 0{,}9997)^2}{8 \cdot (8-1)}}$$

$$\Delta x = 0{,}0002 \text{ kg}$$

Por tanto, el valor de la masa es:

$$m = 1{,}0003 \pm 0{,}0002 \text{ kg}$$

Página 29

Relaciones entre magnitudes y representaciones gráficas

15 Estudia las relaciones de proporcionalidad en las siguientes ecuaciones:

a) $I = V/R$ (ley de Ohm, donde I es la intensidad de corriente; V, el voltaje, y R, la resistencia).

b) $e = c_m \cdot t$, donde e es el espacio recorrido; c_m, la celeridad, y t, el tiempo empleado.

c) La expresión matemática que corresponde a la ley de la gravitación universal:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m'}{r^2}$$

donde F representa la fuerza de atracción entre dos masas, m y m', separadas una distancia r.

a) En la ley de Ohm, la intensidad es directamente proporcional al voltaje e inversamente proporcional a la resistencia. Voltaje y resistencia son directamente proporcionales.

b) El espacio recorrido es directamente proporcional a la celeridad y al tiempo. Celeridad y tiempo son inversamente proporcionales.

c) La fuerza es directamente proporcional a las masas e inversamente proporcional a la distancia entre ellas al cuadrado. Las masas y el cuadrado de la distancia son directamente proporcionales.

16 Se estudia la relación entre la altura y el tiempo de vuelo para un objeto en caída libre realizando diversas experiencias, cuyos resultados son:

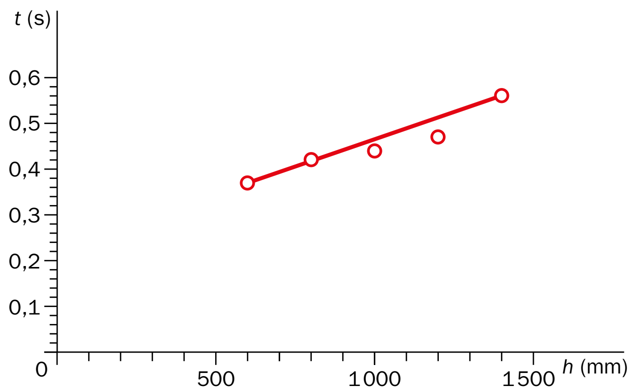
h (mm)	600	800	1 000	1 200	1 400
t (s)	0,37	0,42	0,44	0,47	0,56

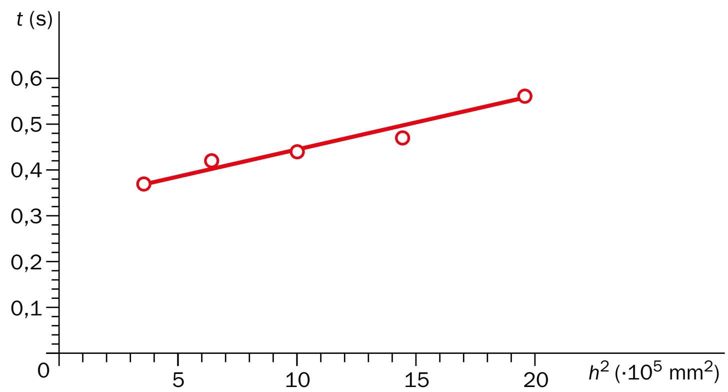
Representa t (ordenada) frente a h, frente a h^2 y frente a $h^{1/2}$ y comprueba cuál de las gráficas se puede ajustar con una recta.

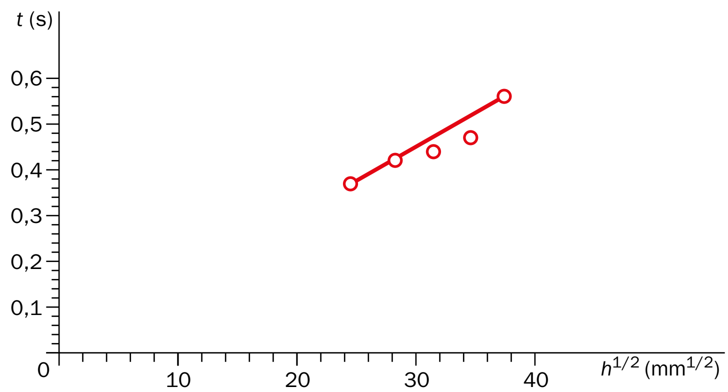
Los datos con los que vamos a trabajar son:

h (mm)	600	800	1 000	1 200	1 400
h^2	$3,60 \cdot 10^5$	$6,40 \cdot 10^5$	$1,00 \cdot 10^6$	$1,44 \cdot 10^6$	$1,96 \cdot 10^6$
$h^{1/2}$	24,49	28,28	31,62	34,64	37,42
t (s)	0,37	0,42	0,44	0,47	0,56

Se representa el tiempo en ordenadas frente a h, altura, $h^{1/2}$ y h^2.





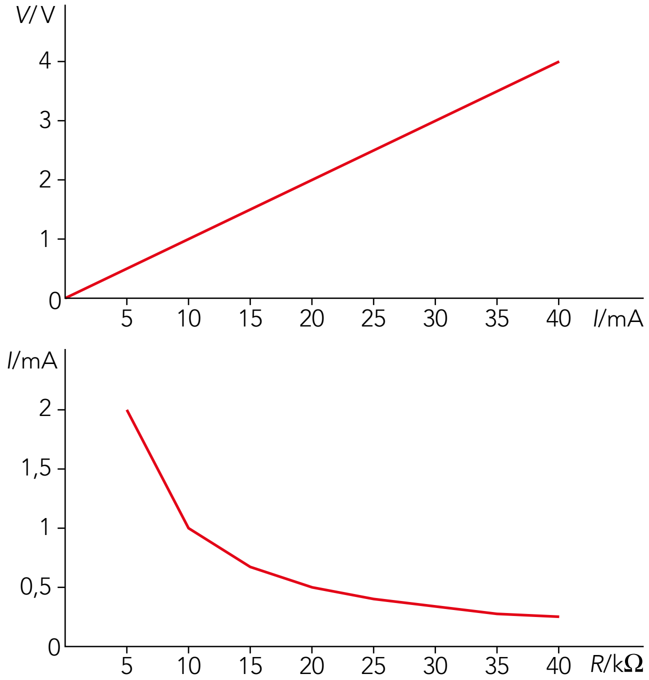


Teniendo en cuenta que en caída libre la ecuación matemática que relaciona el tiempo con la altura es:

$$h = h_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Observamos que t es directamente proporcional a la raíz cuadrada de h. Por tanto, en principio, sería la tercera representación la que más debería ajustarse a una recta. Si comparamos las tres gráficas, la última es la única que tiene tres puntos alineados. Luego, será esta la que se ajustará mejor a una recta.

17 **La ley de Ohm establece que la intensidad de corriente, *I*, que circula por un elemento de un circuito eléctrico es directamente proporcional al voltaje, *V*, aplicado entre sus extremos e inversamente proporcional a su resistencia eléctrica, *R*. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a esta ley?**



Ambas gráficas se corresponden con la ley de Ohm.

En la primera, al representar el voltaje frente a la intensidad, obtenemos una recta, porque su relación es directamente proporcional.

Sin embargo, en la segunda gráfica, representamos la intensidad frente a la resistencia, y puesto que su relación es inversamente proporcional, se obtiene una curva o hipérbola.

1 LA MATERIA: PROPIEDADES Y TRANSFORMACIONES

Para consultar los **criterios de evaluación** y los **estándares de aprendizaje evaluables**, véase la Programación.

1 LA MATERIA

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.2.1. (EA.2.1.1.)

Página 33

1 Esquema. **Dibuja un esquema donde clasifiques los siguientes materiales según lo estudiado en este epígrafe. En caso de que puedan descomponerse en sustancias más simples, di qué tipo de método elegirías, físico o químico.**

a) Cable de cobre.

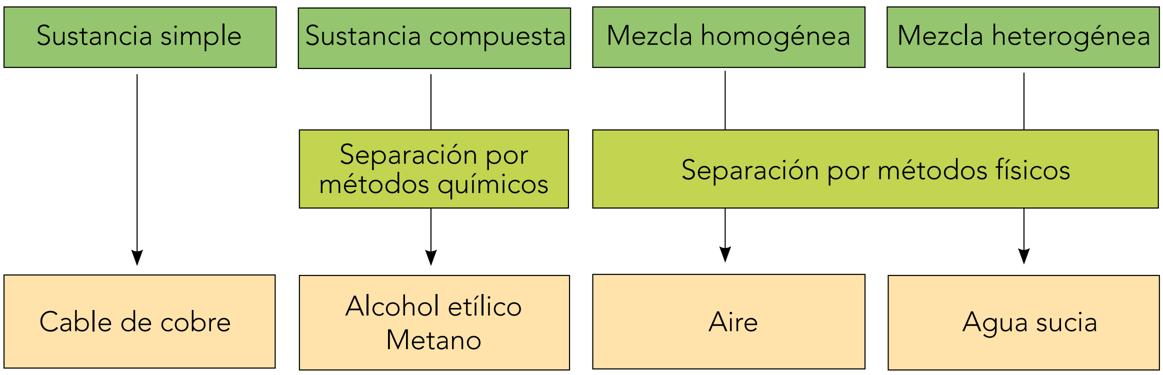
b) Alcohol etílico (C_2H_5OH).

c) Metano (CH_4).

d) Agua sucia.

e) Aire.

Le sugerimos que recomiende a su alumnado la consulta del apartado referido a la clave de desarrollo del pensamiento, en el banco de recursos de **anayaeducacion.es**, para obtener información acerca de los diferentes tipos de organizadores gráficos.



2 LA TEORÍA ATÓMICA DE DALTON

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.2.1. (EA.2.1.1.)

Página 35

2 **El oxígeno (O) y el carbono (C) se combinan en una proporción 4:3. Si la masa relativa del carbono es 12, calcula la del oxígeno utilizando los postulados de la teoría de Dalton. ¿Qué compuesto hemos supuesto que se ha formado en esta reacción?**

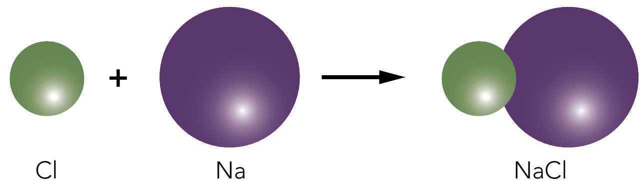
Para determinar la masa relativa del átomo de oxígeno, hay que suponer que se cumple el cuarto postulado, es decir, que se combinan en la proporción más sencilla posible, lo que nos lleva a asignar al compuesto formado la fórmula CO. Por tanto, tenemos por cada átomo de O, uno de C. Como la proporción es 4:3, se verificará:

$$\frac{m_r\ (O)}{m_r\ (C)} = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{m_r\ (O)}{12} = \frac{4}{3}$$

$$m_r\ (O) = \frac{4}{3} \cdot 12 = 16$$

Es decir, la masa relativa del oxígeno es 16.

3 **La proporción en la que se combinan el cloro (Cl) y el sodio (Na) para dar cloruro sódico (NaCl) es 35,5:23. Sabiendo que la masa relativa del átomo de Cl es 35,5, calcula la del Na utilizando los postulados de la teoría de Dalton.**



Para determinar la masa relativa del átomo de sodio, hay que suponer que se cumple el cuarto postulado, es decir, que se combinan en la proporción más sencilla posible, lo que nos lleva a asignar al cloruro sódico la fórmula química NaCl. Es decir, por cada átomo de cloro, tenemos uno de sodio. En ese caso, vemos que la masa relativa del Na es 23. Si la fórmula fuera diferente, por ejemplo $ClNa_2$, entonces este resultado *no sería correcto*.

4 **El oxígeno (O) se combina con el hidrógeno (H) en una proporción 8:1. Calcula la masa relativa del oxígeno, aplicando estrictamente el 4.° postulado de Dalton. ¿Es correcto este resultado? Explica por qué, indicando qué compuesto se ha supuesto para esta reacción, y cuál es el que se forma en realidad.**

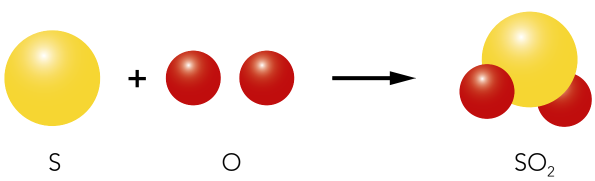
Si los átomos de oxígeno e hidrógeno se combinan en la proporción más sencilla posible, entonces la molécula formada es HO. En este caso, la masa relativa del oxígeno sería:

$$\frac{m_r\ (\mathrm{O})}{m_r\ (\mathrm{H})} = \frac{8}{1} \rightarrow \frac{m_r\ (\mathrm{O})}{1} = \frac{8}{1} \rightarrow m_r\ (\mathrm{O}) = 8$$

Pero esto no es correcto, ya que la masa relativa del oxígeno es 16. El problema está en que se ha supuesto que el compuesto formado es HO, cuando en realidad se trata de H_2O. Ese fue uno de los errores que cometió Dalton al proponer su teoría. Considerando la fórmula correcta, tenemos:

$$\frac{m_r\ (O)}{2 \cdot m_r\ (H)} = \frac{8}{1} \rightarrow \frac{m_r\ (O)}{2} = \frac{8}{1} \rightarrow m_r\ (O) = 16$$

5 **En una cierta reacción química, se combina azufre (S) con oxígeno (O) en una proporción 1:1. Calcula la masa relativa del S, aplicando estrictamente el 4.° postulado de Dalton. ¿Es correcto este resultado? ¿Por qué?**



Se sabe que la masa relativa del oxígeno es 16. Si se combina 1 átomo de azufre con otro de oxígeno para tener la proporción 1:1, la masa relativa del azufre también tendría que ser 16. Esto no es correcto, ya que en este caso no se cumple que la relación entre el número de átomos de cada tipo es la más sencilla posible; es decir, no se trata de SO, sino de SO_2. Por lo tanto, la masa relativa del azufre debe ser 32, no 16.

Si el enunciado se refiriera al SO, la proporción habría tenido que ser 2:1, lo que nos lleva a la misma masa relativa del azufre.

Otro compuesto que pueden formar el S y el O es el SO_3. En este caso, la proporción en masa es 32:48, o lo que es lo mismo: 2:3.

Página 36

6 **En este epígrafe hemos visto que la teoría atómica de Dalton tiene numerosos aciertos, mientras que algunas de las hipótesis tuvieron que ser revisadas posteriormente. ¿Con qué aspectos de la unidad 1 relacionarías este hecho?**

En primer lugar, existía un problema a resolver: explicar y unificar de alguna manera todos los hechos experimentales conocidos hasta esa fecha, especialmente las leyes ponderales. La teoría de Dalton se basaba en una serie de hipótesis muy simples, y con ella se conseguían explicar muchos de esos hechos experimentales. Además, permitía hacer predicciones, que en numerosas ocasiones fueron confirmadas posteriormente. Aquellas hipótesis que, con el tiempo, resultaron no ser correctas se fueron modificando, lo que permitió ir mejorando la teoría.

Por otra parte, es importante insistir en que las leyes ponderales recogían hechos experimentales, mientras que la teoría atómica las explicaba, de ahí sus denominaciones respectivas.

Por tanto, vemos que lo que se ha estudiado en este epígrafe se corresponde con lo aprendido sobre el método científico y la forma en la que se desarrolla la ciencia de la unidad 1.

7 **La composición química de una sustancia compuesta siempre es constante. Justifica este hecho a partir de la teoría atómica de Dalton.**

Según esta teoría, los compuestos están formados por átomos indivisibles. Así pues, la proporción entre ellos ha de ser constante, fija, y siguiendo una proporción en números enteros sencillos, ya que no es posible dividir un átomo en partes más pequeñas. Por lo tanto, cada compuesto tiene una relación característica entre las masas de los elementos que lo forman.

Página 37

8 **Dos muestras de metano (CH_4) se descomponen en carbono e hidrógeno, obteniéndose los siguientes resultados:**

Muestra	1	2
Masa de metano (CH_4)/g	16	11,2
Masa de carbono (C)/g	12	8,4
Masa de hidrógeno (H)/g	4	2,8

Comprueba si la proporción de C y H es la misma en ambos casos.

Según el tercer postulado de la teoría atómica de Dalton, los átomos de las sustancias simples se combinan para dar lugar a los compuestos. La proporción en la que lo hacen caracteriza a cada uno de ellos. Veamos si la relación entre la masa de carbono y la de hidrógeno es la misma en ambos casos:

Compuesto 1:

$$\frac{m_C}{m_H} = \frac{12}{4} = 3$$

Compuesto 2:

$$\frac{m_C}{m_H} = \frac{8{,}4}{2{,}8} = 3$$

Vemos que la relación es la misma.

9 **Se tiene una masa de 20 g de una de las sustancias del ejercicio resuelto 1. Si contiene 5,4 g de carbono. ¿A cuál de las dos corresponderá?**

En primer lugar, calculamos la masa de oxígeno presente en la sustancia compuesta:

$$m_O = 20 - 5,4 = 14,6 \text{ g}$$

La proporción entre las masas de oxígeno y carbono es:

$$\frac{m_O}{m_C} = \frac{14,6}{5,4} = 2,7$$

Por tanto, vemos que se trata del primero de los compuestos (CO_2).

10 Después de reaccionar hidrógeno (H) y azufre (S), se obtienen los siguientes datos:

Experimento	1	2
Masa de hidrógeno (H)/g	1,92	49,30
Masa de azufre (S)/g	0,12	3,08

Comprueba si se trata o no del mismo compuesto.

Calculemos la proporción entre las masas de azufre e hidrógeno:

Compuesto 1:

$$\frac{m_S}{m_H} = \frac{1,92}{0,12} = 16$$

Compuesto 2:

$$\frac{m_S}{m_H} = \frac{49,30}{3,08} = 16$$

Vemos, por tanto, que se trata del mismo compuesto.

3 LEYES PONDERALES

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.2.1. (EA.2.1.1.)

Página 41

11 Cuando reacciona carbono con oxígeno, se pueden formar dos compuestos diferentes. Se han llevado a cabo dos experiencias en el laboratorio, y se han obtenido los siguientes resultados:

Experiencia	1	2
Masa de carbono (C)/g	12	5
Masa de compuesto/g	28	18,3

¿Se trata del mismo compuesto? Si no es así, comprueba que se verifica la ley de las proporciones múltiples. ¿Qué dos sustancias se han formado?

Ya sabes que el azufre se combina con el oxígeno para dar tres compuestos diferentes. Se ha analizado la composición de cada uno de ellos, y se han obtenido los siguientes resultados:

Compuesto	Masa de azufre (S)/g	Masa de oxígeno (O)/g
A	1,20	1,80
B	1,73	0,87
C	0,20	0,20

Comprueba si se cumple la ley de las proporciones múltiples, e identifica cada compuesto.

Veamos las cantidades de oxígeno en cada uno de estos compuestos, y verifiquemos que son diferentes.

Compuesto 1:

$$m_O = 28 - 12 = 16\,\text{g}$$

Por tanto, la proporción entre las masas de C y O es:

$$\frac{m_C}{m_O} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Compuesto 2:

$$m_O = 18{,}3 - 5 = 13{,}3\ \text{g}$$

Por tanto, la proporción entre las masas de C y O es:

$$\frac{m_C}{m_O} = \frac{5}{13{,}3} \approx 0{,}376 = \frac{3}{8}$$

Como las proporciones son distintas, han de ser compuestos diferentes.

Consideremos la misma cantidad de carbono en ambos casos, por simplicidad, 3 g. Entonces, la proporción entre la masa de oxígeno de ambos compuestos será:

$$\frac{m_O \text{ en compuesto 2}}{m_O \text{ en compuesto 1}} = 8 : 4 = 2 : 1$$

Vemos que, en efecto, se verifica la ley de las proporciones múltiples. Además:

$$m_O \text{ en compuesto } 2 = 2 \cdot m_O \text{ en compuesto } 1$$

Por tanto, si suponemos para el primero de ellos la relación C:O más sencilla posible, 1:1, se trataría del CO. Entonces el segundo debe ser CO_2.

Vamos ahora a la segunda parte del ejercicio. Veamos las proporciones entre la masa de azufre y de oxígeno en cada caso:

Compuesto A:

$$\frac{m_S}{m_O} = \frac{1{,}20}{1{,}80} \approx 0{,}667 = \frac{2}{3}$$

Compuesto B:

$$\frac{m_S}{m_O} = \frac{1{,}73}{0{,}87} = 1{,}989 \approx 2 = \frac{2}{1}$$

Compuesto C:

$$\frac{m_S}{m_O} = \frac{0{,}20}{0{,}20} = 1 = \frac{1}{1}$$

Como las proporciones son distintas, han de ser compuestos diferentes. Vamos a comprobar si se cumple la ley de las proporciones múltiples. Para ello, tomamos una cantidad fija de azufre, por ejemplo, 2 g. Entonces la masa de oxígeno presente en cada compuesto será:

Compuesto	A	B	C
Masa de oxígeno (O)	3 g	1 g	2 g

Las proporciones entre las masas de oxígeno son:

$$\frac{m_O \text{ en compuesto A}}{m_O \text{ en compuesto B}} = \frac{3}{1}; \quad \frac{m_O \text{ en compuesto A}}{m_O \text{ en compuesto C}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{m_O \text{ en compuesto B}}{m_O \text{ en compuesto C}} = \frac{1}{2}$$

Vemos que, en efecto, se verifica la ley de las proporciones múltiples.

Si suponemos para el compuesto **B** la relación más sencilla posible (dado que es el que tiene menor cantidad de oxígeno), se trataría del SO, y por tanto el **C** sería SO_2, y el **A**, SO_3.

4 LEYES VOLUMÉTRICAS. HIPÓTESIS DE AVOGADRO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.2.1. (EA.2.1.1.)

Página 43

12 **Sabemos que un volumen de nitrógeno reacciona con tres volúmenes de hidrógeno para dar dos volúmenes de amoníaco, medidos todos en las mismas condiciones de presión y temperatura. Con estos datos, determina la fórmula química del amoníaco.**

Como todos están en las mismas condiciones, la relación entre los volúmenes es igual a la que hay entre el número de moléculas que reaccionan:

Moléculas:	1 molécula de N_2	+	3 moléculas de H_2	→	2 moléculas de amoníaco
Átomos:	2 N		6 H		???

Como el número de átomos se conserva, tiene que haber 2 átomos de nitrógeno y 6 átomos de hidrógeno a la derecha, que corresponderán a dos moléculas de amoníaco, puesto que se tienen 2 volúmenes de dicho gas. La fórmula química ha de ser, por tanto: NH_3.

13 **Un litro de cloro se mezcla con medio litro de hidrógeno, ambos en las mismas condiciones de presión y temperatura, y se obtiene cloruro de hidrógeno. Calcula los volúmenes de los gases resultantes.**

Sabemos que la proporción entre los volúmenes son las siguientes:

$$\frac{V_{Cl}}{V_H} = 1; \quad \frac{V_{HCl}}{V_H} = 2; \quad \frac{V_{HCl}}{V_{Cl}} = 2$$

Por lo tanto, si tenemos 0,5 L de hidrógeno, ha de reaccionar un volumen igual de cloro, esto es, 0,5 L, sobrando otros 0,5 L.

Por cada volumen de H que reacciona, se forman 2 volúmenes de HCl, por lo que tendremos $2 \cdot 0,5 = 1$ L de HCl. En la tabla siguiente se muestra un resumen de todos estos resultados:

Sustancia	Volumen inicial	Volumen que reacciona	Volumen final	Explicación
Cl	1 L	0,5 L	0,5 L	Reacciona un volumen de cloro igual al de hidrógeno; esto es, 0,5 L.
H	0,5 L	0,5 L	0	Reacciona todo el hidrógeno, puesto que es el reactivo que está presente en menor cantidad.
HCl	0	–	1 L	El volumen de HCl que se forma es el doble que el volumen de H que reacciona.

Así pues, al final tendremos 1 L de HCl y 0,5 L de Cl.

14 ODS **Se sabe que 2 L de butano reaccionan con 13 L de oxígeno para dar 8 L de dióxido de carbono y 10 L de vapor de agua.**

Determina la fórmula química del butano e investiga por qué el uso de este combustible en las grandes ciudades se ha reducido y qué relación existe con el objetivo 7 para el desarrollo sostenible.

Expón tus conclusiones en una presentación a tus compañeros y compañeras.

Como todos están en las mismas condiciones, la relación entre los volúmenes es igual a la que hay entre el número de moléculas que reaccionan:

2 moléculas de butano	+	13 moléculas de O_2	$\rightarrow$	8 moléculas de CO_2	+	10 moléculas de H_2O
???		26 O		8 C + 16 O		20 H + 10 O

Como el número de átomos se conserva, tiene que haber 8 átomos de carbono y 20 átomos de hidrógeno a la izquierda (como el número de átomos de oxígeno a ambos lados ya es 26, el butano no puede contener ninguno de O). Ahora bien, dado que 8 C + 20 H corresponden a 2 moléculas de butano, cada una ha de tener 4 C y 10 H. La fórmula química ha de ser, por tanto: C_4H_{10}.

Su alumnado puede consultar en **anayaeducacion.es** los vídeos explicativos sobre las metas que se desea alcanzar para dar cumplimieto al objetivo 17 de los ODS.

6 CANTIDAD DE SUSTANCIA

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.2.3. (EA.2.3.1.)

Página 47

15 **La fórmula de la sacarosa o azúcar común es: $C_{12}H_{22}O_{11}$. Si un sobre de azúcar contiene una masa de 5,00 g de sacarosa, calcula qué cantidad de sustancia habrá, y cuántas moléculas contendrá.**

Vamos a calcular, en primer lugar, la masa molecular de la sacarosa a partir de las masas atómicas de carbono, oxígeno e hidrógeno:

$$m\ (C) = 12{,}01\ u$$
$$m\ (O) = 16{,}00\ u$$
$$m\ (H) = 1{,}01\ u$$

$$m\ (C_{12}O_{22}H_{11}) = 12 \cdot 12{,}01 + 22 \cdot 1{,}01 + 11 \cdot 16{,}00 = 342{,}34\ u$$

Y la masa molar es:

$$m\ (C_{12}O_{22}H_{11}) = 342{,}34\ g/mol$$

Por lo tanto, la cantidad de sustancia que contiene el sobre de azúcar será:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{5{,}00\ g}{342{,}34\ g \cdot mol^{-1}} = 0{,}015\ mol$$

A partir de este resultado obtenemos el número de moléculas:

$$N = n \cdot N_A = 0{,}015 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 9{,}033 \cdot 10^{21}\ \text{moléculas}$$

16 **Se tiene un recipiente con 1,5 · 10^3 mol de agua.**

Dato: *d* (agua) = 1 g/L.

Calcula:

a) La masa de agua que contiene.

b) Cuántas moléculas contendrá.

c) Responde a las preguntas anteriores si se tratara de agua oxigenada (peróxido de hidrógeno, H_2O_2).

d) ODS Según el último informe de la ONU, más de 2000 millones de personas en el mundo carecen de acceso a los servicios básicos de agua y saneamiento. Si tuvieras que diseñar un sistema de abastecimiento y almacenamiento de agua respondiendo a las metas 6.1 y 6.4 de desarrollo sostenible, ¿cómo lo harías? Sabiendo que dispones de bidones de 10 L para almacenar el agua, ¿cuántos bidones necesitarías?

Para responder al último apartado de este ejercicio, su alumnado puede consultar en anayaeducacion.es los vídeos sobre las metas 6.1 y 6.4 de los ODS.

Calculemos, en primer lugar, la masa molecular del agua (H_2O):

$$m\ (\text{O}) = 16{,}00\ \text{u}; \quad A\ (\text{H}) = 1{,}01\ \text{u}$$

$$m\ (\text{H}_2\text{O}) = 2 \cdot 1{,}01 + 16{,}00 = 18{,}02\ \text{u}$$

Y la masa molar es:

$$M\ (\text{H}_2\text{O}) = 18{,}02\ \text{g/mol}$$

a) La masa en gramos será entonces:

$$m = n \cdot M = 1{,}5\ \text{mol} \cdot 18{,}02\ \text{g/mol} = 27{,}03\ \text{g}$$

b) Por otra parte, el número de moléculas de agua será:

$$N = n \cdot N_A = 1{,}5 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 9{,}033 \cdot 10^{23}\ \text{moléculas}$$

c) Si se tratara de agua oxigenada pura, la masa molecular sería:

$$m\ (\text{H}_2\text{O}_2) = 2 \cdot 1{,}01 + 2 \cdot 16{,}00 = 34{,}02\ \text{u}$$

Y por lo tanto la masa molar: $M\ (\text{H}_2\text{O}_2) = 34{,}02\ \text{g/mol}$

Entonces, la masa tendría que ser diferente:

$$m = n \cdot M = 1{,}5\ \text{mol} \cdot 34{,}02\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1} = 51{,}03\ \text{g}$$

Sin embargo, el número de moléculas es la misma, puesto que en la fórmula que hemos utilizado anteriormente no interviene la masa molecular.

17 **Completa la siguiente tabla referida a tres cantidades de trifluoruro de nitrógeno (NF_3) en c. e.**

	Vol./L	Cantidad de sustancia/mol	Cantidad de moléculas	Masa de NF_3/g	Masa de N/g
A	6				
B					15
C		2,6			

En primer lugar, calculamos la masa molecular del trifluoruro de nitrógeno (NF_3):

$$m\ (\mathrm{N}) = 14{,}01\ \mathrm{u};\quad m\ (\mathrm{F}) = 19{,}00\ \mathrm{u}$$

$$m\ (\mathrm{NF_3}) = 14{,}01 + 3 \cdot 19{,}00 = 71{,}01\ \mathrm{u}$$

Y la masa molar es:

$$M\ (\mathrm{NF_3}) = 71{,}01\ \mathrm{g/mol}$$

Vamos a realizar los cálculos, en primer lugar, para la **muestra A.**

Para calcular la cantidad de sustancia, utilizamos la fórmula:

$$n = \frac{V}{V_\mathrm{m}}$$

donde V_m = 22,7 L. Por tanto:

$$n = \frac{6{,}0}{22{,}7} = 0{,}264\ \mathrm{mol}$$

El número de moléculas será:

$$N = n \cdot N_\mathrm{A} = 0{,}264 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 1{,}590 \cdot 10^{23}$$

Y la masa:

$$m = n \cdot M = 0{,}264\ \mathrm{mol} \cdot 71{,}01\mathrm{g} \cdot \mathrm{mol}^{-1} = 18{,}75\ \mathrm{g}$$

La masa de nitrógeno se puede calcular de varias formas. Indicamos dos:

1.ª forma:

Por cada molécula de NF_3 tenemos un átomo de nitrógeno. Por lo tanto, por cada mol de trifluoruro de nitrógeno, tenemos un mol de N. Como hay 0,264 moles de trifluoruro, debe haber 0,264 mol de N. Sabiendo que su masa molar es 14,01 g/mol, la masa de nitrógeno presente en la muestra será:

$$m = n \cdot M = 0{,}264\ \mathrm{mol} \cdot 14{,}01\ \mathrm{g} \cdot \mathrm{mol}^{-1} = 3{,}70\ \mathrm{g}$$

2.ª forma:

La relación, en masa, entre la molécula de NF_3 y el átomo de N es: 71,01:14,01. Por lo tanto, la masa de nitrógeno vendrá dada por:

$$\frac{71{,}01\ \mathrm{g\ NF_3}}{14{,}01\ \mathrm{g\ N}} = \frac{18{,}75\ \mathrm{g\ NF_3}}{x\ \mathrm{g\ N}} \quad \rightarrow \quad x = \frac{14{,}01 \cdot 18{,}75}{71{,}01} = 3{,}70\ \mathrm{g\ N}$$

Como vemos, ambos resultados coinciden.

Así pues, ya podemos rellenar la primera fila de la tabla:

	Vol./L	Cantidad de sustancia/mol	N° de moléculas	Masa de NF_3/g	Masa de N/g
A	6	0,264	$1{,}590 \cdot 10^{23}$	18,75	3,70

En el caso de la **muestra B,** el dato que nos dan es el de la masa de nitrógeno. Así que hemos de calcular la masa de NF_3 que tenemos. Podemos hacerlo de varias maneras:

1.ª forma:

Calculamos la cantidad de sustancia de átomos de nitrógeno que hay en la muestra:

$$n = \frac{15{,}00\ \mathrm{g}}{14{,}01\ \mathrm{g} \cdot \mathrm{mol}^{-1}} = 1{,}07\ \mathrm{mol}$$

Como vimos antes, también hemos de tener 1,07 moles de NF_3. Por lo tanto, la masa de NF_3 será:

$$m = n \cdot M = 1{,}07 \text{ mol} \cdot 71{,}01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 75{,}98 \text{ g}$$

2.ª forma:

Utilizando la relación entre las masas que vimos anteriormente:

$$\frac{71{,}01 \text{ g } NF_3}{14{,}01 \text{ g N}} = \frac{x \text{ g } NF_3}{15{,}00 \text{ g N}} \rightarrow x = \frac{15{,}00 \cdot 71{,}01}{14{,}01} = 76{,}03 \text{ g } NF_3$$

Vemos que la diferencia es muy pequeña, y se debe a errores de redondeo. El número de moléculas se calcula como antes:

$$N = n \cdot N_A = 1{,}07 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 6{,}44 \cdot 10^{23} \text{ moléculas}$$

Y el volumen que ocupa:

$$V = n \cdot V_m = 1{,}07 \cdot 22{,}7 = 24{,}29 \text{ L}$$

La segunda fila queda, pues, de la siguiente manera:

	Vol./L	Cantidad de sustancia/mol	N° de moléculas	Masa de NF_3/g	Masa de N/g
B	24,29	1,07	$6{,}44 \cdot 10^{23}$	76,03	15

Por último, en el caso de la **muestra C,** el dato proporcionado es la cantidad de sustancia, por lo que procedemos a la obtención de todo lo que se pide de forma directa:

$$n = 2{,}6 \text{ mol} \rightarrow V = n \cdot V_m = 2{,}6 \cdot 22{,}7 = 59{,}02 \text{ L}$$

$$N = n \cdot N_A = 2{,}6 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 1{,}57 \cdot 10^{24} \text{ moléculas}$$

$$m = n \cdot M = 2{,}6 \text{ mol} \cdot 71{,}01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 184{,}63 \text{ g}$$

$$\frac{71{,}01 \text{ g } NF_3}{14{,}01 \text{ g N}} = \frac{184{,}63 \text{ g } NF_3}{x \text{ g N}} \rightarrow x = \frac{14{,}01 \cdot 184{,}63}{71{,}01} = 36{,}43 \text{ g N}$$

Y la tercera fila queda:

	Vol./L	Cantidad de sustancia/mol	N° de moléculas	Masa de NF_3/g	Masa de N/g
C	59,02	2,6	$1{,}57 \cdot 10^{24}$	184,63	36,43

7 FÓRMULAS QUÍMICAS. COMPOSICIÓN CENTESIMAL

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.2.3. (EA.2.3.1.)

Página 48

18 **Cuando se queman completamente 2 g de un compuesto orgánico, formado por C, H y O, se obtienen 4,541 8 g de CO_2 y 1,858 6 g de H_2O. Calcula su fórmula empírica y su composición centesimal.**

En primer lugar, determinamos la masa de cada uno de los elementos presentes en los 2 g de compuesto. Como es orgánico, todo el carbono que contiene pasa a formar parte del CO_2, y todo el hidrógeno pasa al H_2O.

La masa molecular del CO_2 es 44,01 u, de la cual 12,01 u corresponden al C. Por tanto:

$$\frac{44{,}01 \text{ g de } CO_2}{12{,}01 \text{ g de C}} = \frac{4{,}5418 \text{ g de } CO_2}{m_C} \rightarrow m_C = 1{,}2394 \text{ g de C}$$

Por otro lado, la masa molecular del H_2O es 18,02 u, de los cuales 2,02 u corresponden al H. Por tanto:

$$\frac{18{,}02 \text{ g de } H_2O}{2{,}02 \text{ g de H}} = \frac{1{,}8586 \text{ g de } H_2O}{m_H} \rightarrow m_H = 0{,}2084 \text{ g de H}$$

El resto de la masa corresponde al oxígeno:

$$m_O = 2 - 1{,}2394 - 0{,}2084 = 0{,}5522 \text{ g de O}$$

A continuación, calculamos la cantidad de sustancia de C, H y O que había en los 2 g de compuesto:

$$n_C = \frac{1{,}2394}{12{,}01} = 0{,}1032 \text{ mol de C}$$

$$n_H = \frac{0{,}2084}{1{,}01} = 0{,}2063 \text{ mol de H}$$

$$n_O = \frac{0{,}5522}{16{,}00} = 0{,}0345 \text{ mol de O}$$

Dividiendo entre la menor de estas cantidades, obtenemos la abundancia relativa de los átomos que forman el compuesto:

$$C \rightarrow \frac{0{,}1032}{0{,}0345} \approx 3; \quad H \rightarrow \frac{0{,}2063}{0{,}0345} \approx 6; \quad O \rightarrow \frac{0{,}0345}{0{,}0345} = 1$$

Por tanto, su fórmula empírica será:

$$C_3H_6O$$

La composición centesimal no depende de si tenemos la fórmula empírica o la molecular, ya que lo que cuenta es la proporción entre cada uno de los elementos. Aprovechando este hecho, podemos obtener, a partir de la fórmula empírica, la composición centesimal.

En primer lugar, obtenemos la masa fórmula:

$$m\,(C_3H_6O) = 3 \cdot 12{,}01 + 6 \cdot 1{,}01 + 1 \cdot 16{,}00 = 58{,}09 \text{ u}$$

Y ahora, usando las masas atómicas, calculamos la proporción en masa de cada elemento:

$$\frac{58{,}09 \text{ u de } C_3H_6O}{3 \cdot 12{,}01 \text{ u de C}} = \frac{100}{x} \rightarrow x = 62{,}03\ \% \text{ de C}$$

$$\frac{58{,}09 \text{ u de } C_3H_6O}{6 \cdot 1{,}01 \text{ u de H}} = \frac{100}{y} \rightarrow y = 10{,}43\ \% \text{ de H}$$

$$\frac{58{,}09 \text{ u de } C_3H_6O}{16{,}00 \text{ u de O}} = \frac{100}{z} \rightarrow z = 27{,}54\ \% \text{ de O}$$

19 La vitamina C está compuesta por C, H y O, y tiene una masa molar de 176,14 g/mol. La combustión total de 0,5 g de este compuesto produce 0,750 g de CO_2 y 0,205 g de H_2O. Determina su fórmula molecular y su composición centesimal.

La vitamina C es un compuesto orgánico, luego su combustión da lugar a CO_2 y agua. Es más, todo su carbono termina formando parte del CO_2 y todo su hidrógeno acaba en el H_2O. Así pues, calculamos, en primer lugar, qué masa de C y H hay después de la combustión, y de esta forma sabremos la masa de carbono e hidrógeno que contenía la muestra de vitamina C.

Usando las masas moleculares: $m\ (CO_2) = 44{,}01$ u, $m\ (H_2O) = 18{,}02$ u, tenemos que:

- de 44,01 g de CO_2, 12,01 g son de C, y
- de 18,02 g de H_2O, 2,02 g son de H.

Entonces:

$$\frac{44{,}01 \text{ g de } CO_2}{12{,}01 \text{ g de C}} = \frac{0{,}750 \text{ g de } CO_2}{m_C} \rightarrow m_C = 0{,}205 \text{ g de C}$$

$$\frac{18{,}02 \text{ g de } H_2O}{2 \cdot 1{,}01 \text{ g de H}} = \frac{0{,}205 \text{ g de } H_2O}{m_H} \rightarrow m_H = 0{,}023 \text{ g de H}$$

Por tanto, la muestra original de 0,500 g de vitamina C tenía 0,205 g de C y 0,023 g de H. El resto tiene que corresponder al oxígeno:

$$m_O = 0{,}500 - 0{,}205 - 0{,}023 = 0{,}272 \text{ g de O}$$

A partir de estos valores, calculamos la cantidad de sustancia de cada uno de sus elementos:

$$n_C = \frac{0{,}205 \text{ g}}{12{,}01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}017 \text{ mol de C}$$

$$n_H = \frac{0{,}023 \text{ g}}{1{,}01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}023 \text{ mol de H}$$

$$n_O = \frac{0{,}272 \text{ g}}{16{,}00 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}017 \text{ mol de O}$$

Dividiendo entre el valor menor, obtenemos la proporción entre el número de átomos:

$$\text{C} \rightarrow \frac{0{,}017}{0{,}017} = 1$$

$$\text{H} \rightarrow \frac{0{,}023}{0{,}017} = 1{,}35$$

$$\text{O} \rightarrow \frac{0{,}017}{0{,}017} = 1$$

Vemos que, para el H, hemos obtenido un número no entero. Pero si lo multiplicamos por 6, obtenemos: $6 \cdot 1{,}35 \approx 8$. Por lo tanto, la fórmula empírica será: $C_6H_8O_6$ (recuerda: hay que multiplicarlo todo por la misma cantidad). Entonces la masa fórmula es:

$$m\ (C_6H_8O_6) = 6 \cdot 12{,}01 + 8 \cdot 1{,}01 + 6 \cdot 16{,}00 = 176{,}14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Vemos que coincide exactamente con el valor de la masa molar que proporciona el enunciado, por lo que esta debe ser también su fórmula molecular.

Por último, vamos a calcular su composición centesimal:

$$\frac{176{,}14 \text{ u de } C_6H_8O_6}{6 \cdot 12{,}01 \text{ u de C}} = \frac{100}{x} \rightarrow x = 40{,}91 \text{ \% de C}$$

$$\frac{176{,}14 \text{ u de } C_6H_8O_6}{8 \cdot 1{,}01 \text{ u de H}} = \frac{100}{y} \rightarrow y = 4{,}59 \text{ \% de H}$$

$$\frac{176{,}14 \text{ u de } C_6H_8O_6}{6 \cdot 16{,}00 \text{ u de O}} = \frac{100}{z} \rightarrow z = 54{,}50 \text{ \% de O}$$

8 ESPECTROMETRÍA Y ESPESTROSCOPÍA APLICADAS AL ANÁLISIS QUÍMICO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.2.6. (EA.2.6.1.) CE.2.7. (EA.2.7.1.)

Página 50

20 La espectrometría de masas es tan precisa que resulta muy útil para realizar análisis isotópicos. Busca información sobre esta técnica y redacta un texto para explicar algunas de sus aplicaciones.

En el apartado dedicado al «Plan Lingüístico» de los recursos relacionados con las claves del proyecto, dentro del banco de recursos de **anayaeducacion.es**, el alumnado puede consultar diversa información acerca de los tipos de textos y diversas estrategias que le ayudarán a redactar mejor.

Sabemos que todos los compuestos están formados por sustancias simples y que los átomos de estas pueden presentarse en forma de distintos isótopos. Pues bien, un análisis isotópico consiste en tomar una muestra de una sustancia compuesta y analizar cuáles son los isótopos de los elementos que se hallan presentes y su abundancia relativa. A esto se le denomina **firma isotópica** de la sustancia. En numerosas ocasiones, los compuestos que provienen de una zona o una cierta época tienen una firma isotópica característica, lo que permite hacer un seguimiento de la sustancia, o datarla.

Por ejemplo, en arqueología, los restos de tejidos orgánicos recuperados se pueden analizar isotópicamente. La distribución de los isótopos del carbono y del nitrógeno permiten reconstruir la dieta, los del oxígeno determinan el origen geográfico de la muestra, y los del estroncio y el plomo permiten analizar los movimientos de las poblaciones.

Los isótopos estables se utilizan para estudiar las redes tróficas marinas y, en menor medida, las terrestres.

Otro ejemplo lo constituye la proporción entre los isótopos ^{18}O y ^{16}O, que proporciona información sobre los cambios en el clima, ya que las moléculas de agua con los átomos más ligeros de oxígeno, el ^{16}O, se evaporan con más facilidad, mientras que las que contienen ^{18}O presentan mayor tendencia a permanecer en estado líquido y a mantenerse en los fluidos de los cuerpos de las plantas y los animales.

21 Busca los datos de las masas atómicas de los tres isótopos estables del neón y, a partir del espectro mostrado más arriba, determina su masa atómica promedio.

Este análisis espectrométrico del neón muestra la presencia de los siguientes isótopos (fíjate que hemos tomado cuatro cifras decimales para las masas atómicas, redondeando adecuadamente):

Isótopo	Masa atómica/u	Abundancia relativa
^{20}Ne	19,9924	90,48 %
^{21}Ne	20,9938	0,27 %
^{22}Ne	21,9914	9,25 %

Por lo tanto, la masa atómica promedio será:

$$m\ (\text{Ne}) = \frac{19{,}9924 \cdot 90{,}48 + 20{,}9938 \cdot 0{,}27 + 21{,}9914 \cdot 9{,}25}{100} = 20{,}1800\ \text{u}$$

Página 51

22 La luz visible tiene una longitud de onda entre 380 y 780 nm. Calcula las frecuencias asociadas a estos límites.

La relación entre la longitud de onda, la frecuencia y la velocidad de la luz, para la radiación electromagnética, viene dada por:

$$c = \lambda \cdot f \rightarrow f = \frac{c}{\lambda}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío:

$$c = 300\,000\ \text{km/s} = 3 \cdot 10^8\ \text{m/s}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que 1 nm = 10^{-9} m, las frecuencias asociadas a las longitudes de ondas que se han proporcionado son:

$$380\ \text{nm} \rightarrow f = \frac{3 \cdot 10^8}{380 \cdot 10^{-9}} = 7{,}90 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

$$780\ \text{nm} \rightarrow f = \frac{3 \cdot 10^8}{780 \cdot 10^{-9}} = 3{,}85 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

23 Comprueba las dimensiones del producto $\lambda \cdot f$.

La frecuencia tiene dimensiones de inverso de tiempo, por lo que:

$$[\lambda \cdot f] = \text{L} \cdot \text{T}^{-1}$$

Como vemos, tiene dimensiones de velocidad.

24 Sabiendo que los hornos de microondas trabajan con ondas de una frecuencia de unos 2,45 GHz (1 GHz = 10^9 Hz), calcula la longitud de onda de esta radiación electromagnética.

La longitud de onda asociada a esta frecuencia será:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2{,}45 \cdot 10^9} \approx 0{,}123\ \text{m}$$

Es decir, unos 123 mm.

Página 53

25 Sumamos**. Observa los espectros de absorción del vapor de agua y del CO_2. ¿A qué longitudes de onda se produce la mayor absorción? ¿A qué zona del espectro electromagnético corresponde? En grupos, y a partir de estos espectros, explicad cómo se produce el efecto invernadero en la atmósfera terrestre y cómo afecta al cambio climático. ¿Qué podríamos hacer cada uno de nosotros para sensibilizar a la población y reducir la emisión de gases contaminantes según la** meta 13.3 **de desarrollo sostenible?**

En **anayaeducacion.es** dispone de un documento que explica cómo aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo «Sumamos», si desea utilizarla para resolver esta actividad. Además, su alumnado puede consultar en su banco de recursos el vídeo explicativo de la meta 13.3 de los ODS.

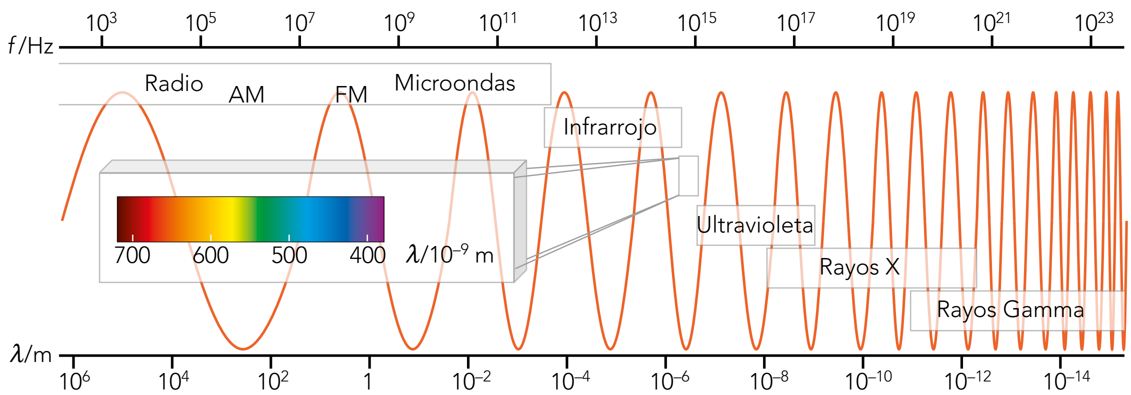
Con respecto al agua, vemos que existe un pico en el coeficiente de absorción, correspondiente a unos 1 600 cm^{-1}, lo que equivale a una longitud de onda:

$$\lambda = \frac{1}{1600\ \text{cm}^{-1}} = 0{,}000\,625\ \text{cm} = 6\,250\ \text{nm}$$

Por otra parte, el CO_2 tiene un máximo correspondiente a un número de onda de unos 2400 cm^{-1}, lo que equivale a una longitud de onda:

$$\lambda = \frac{1}{2\,400\ \text{cm}^{-1}} = 0{,}000\,417\ \text{cm} = 4\,170\ \text{nm}$$

Como podemos apreciar a partir de la siguiente figura del espectro electromagnético:



Ambas longitudes de onda se encuentran en la zona de los infrarrojos (λ entre 1 μm = 10^{-3} mm y 1 mm).

Cuando la radiación electromagnética procedente del Sol llega a la superficie de la Tierra, esta absorbe energía. Todos los cuerpos, por el hecho de encontrarse a una cierta temperatura, emiten radiación electromagnética, conocida como **radiación térmica.** El máximo de emisión depende de la temperatura del objeto. La superficie terrestre se encuentra a una temperatura media de unos 14 °C (es decir, unos 287 K), lo que corresponde a un máximo precisamente en la zona del infrarrojo.

Esto quiere decir que parte de la radiación emitida por la superficie terrestre será absorbida por las moléculas de agua y de CO_2 presentes en la atmósfera, provocando un aumento de su temperatura. De hecho, si la Tierra no tuviera atmósfera, su superficie sería mucho más fría y el agua estaría congelada, lo que no permitiría la presencia de vida. A este fenómeno se lo conoce como **efecto invernadero,** y es totalmente natural.

Sin embargo, el aumento de las emisiones de gases como el CO_2, que absorben radiación infrarroja, provoca un aumento del efecto invernadero y también, por tanto, de la temperatura media de la Tierra. A esto se lo denomina **calentamiento global,** y está producido por un **efecto invernadero *antropogénico*** (es decir, originado por el ser humano).

TRABAJA CON LO APRENDIDO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.1.2. (EA.1.2.2.) CE.2.1. (EA.2.1.1.) CE.2.3. (EA.2.3.1.) CE.2.6. (EA.2.6.1.) CE.2.7. (EA.2.7.1.)

Página 58

La teoría atómica de Dalton

1 **Se han analizado tres muestras de cloro y cobre, obteniéndose los siguientes resultados:**

Muestra	Masa de cobre/g	Masa de cloro/g
A	2,30	1,28
B	4,00	2,22
C	1,56	1,74

Comprueba si la proporción de Cu y Cl es la misma en todos los compuestos.

Según el cuarto postulado de la teoría atómica de Dalton, los átomos de las sustancias simples se combinan para dar lugar a los compuestos. La proporción en la que lo hacen caracteriza a cada uno de ellos. Veamos si la relación entre la masa de cobre y la de cloro es la misma en los tres casos:

Compuesto A:

$$\frac{m_{Cu}}{m_{Cl}} = \frac{2,30}{1,28} = 1,80$$

Compuesto B:

$$\frac{m_{Cu}}{m_{Cl}} = \frac{4,00}{2,22} = 1,80$$

Compuesto C:

$$\frac{m_{Cu}}{m_{Cl}} = \frac{1,56}{1,74} = 0,90$$

Vemos, por tanto, que la proporción no es la misma en los tres casos. Los compuestos A y B sí serían iguales, pero el C es diferente.

Es importante notar que hemos tomado dos cifras decimales, que es la precisión proporcionada por el enunciado, para lo que es necesario redondear adecuadamente.

2 **Se hacen reaccionar hidrógeno y oxígeno, y se obtienen 2,45 g y 1,53 g de lo que parecen ser dos sustancias distintas. Un análisis químico revela que contienen 2,18 g y 1,44 g de oxígeno, respectivamente. ¿Se trata del mismo compuesto?**

La masa de hidrógeno presente en cada una de las muestras es:

$$m_H \text{ en comp. } 1 = 2,45 - 2,18 = 0,27 \text{ g de H}$$

$$m_H \text{ en comp. } 2 = 1,53 - 1,44 = 0,09 \text{ g de H}$$

Según el cuarto postulado de la teoría de Dalton, los compuestos se forman por la unión de átomos de elementos distintos. Además, se combinan siguiendo una relación numérica sencilla y fija para cada sustancia compuesta. Por lo tanto, cada una ha de estar caracterizada por una cierta proporción entre las masas de oxígeno e hidrógeno, que será la misma si los compuestos son idénticos. Comprobamos que la relación viene dada en cada caso por:

$$\frac{m_O \text{ en comp. } 1}{m_H \text{ en comp. } 1} = \frac{2,18}{0,27} \approx 8$$

$$\frac{m_O \text{ en comp. } 2}{m_H \text{ en comp. } 2} = \frac{1,44}{0,09} = 16$$

No se trata del mismo compuesto. El que tiene mayor proporción de oxígeno es el segundo. El primero es agua, H_2O, y el segundo es peróxido de hidrógeno (agua oxigenada): H_2O_2.

3 **Se tienen tres muestras de sulfuro de hierro. A partir de los datos de la primera fila de la tabla, completa las restantes:**

Muestra	Masa de hierro/g	Masa de azufre/g	Masa de sulfuro/g
A	6,00	3,43	
B	2,21		
C			5,12

Muestra A:

A partir de los datos de la primera fila, podemos calcular la proporción en la que reaccionan el azufre y el hierro:

$$\frac{m_{Fe}}{m_S} = \frac{6{,}00}{3{,}43} = 1{,}75 = \frac{7}{4}$$

Además, dan lugar a 6 + 3,43 = 9,43 g de sulfuro. La proporción en masa de cada uno de los elementos con respecto al compuesto final es:

$$\frac{m_{sulfuro}}{m_{Fe}} = \frac{9{,}43}{6{,}00} = 1{,}57$$

$$\frac{m_{sulfuro}}{m_S} = \frac{9{,}43}{3{,}43} = 2{,}75$$

Muestra B:

A partir de los datos ya conocidos de la muestra A, sabemos que la proporción en masa entre Fe y S es 7/4, puesto que reaccionaban 6 g de Fe con 3,43 g de S. Por tanto:

$$\frac{6 \text{ g de Fe}}{3{,}43 \text{ g de S}} = \frac{2{,}21 \text{ g de Fe}}{x \text{ g de S}} \rightarrow x = 1{,}26 \text{ g de S}$$

Entonces se formarán:

$$2{,}21 + 1{,}26 = 3{,}47 \text{ g de sulfuro}$$

Se puede comprobar que las proporciones en masa coinciden con las de la muestra A:

$$\frac{m_{sulfuro}}{m_{Fe}} = \frac{3{,}47}{2{,}21} = 1{,}57$$

$$\frac{m_{sulfuro}}{m_S} = \frac{3{,}47}{1{,}26} = 2{,}75$$

Muestra C:

En este caso, como nos proporcionan la masa de sulfuro, usamos la proporción entre la masa de este y la de hierro:

$$\frac{9{,}43 \text{ g de sulfuro}}{6 \text{ g de Fe}} = \frac{5{,}12 \text{ g de sulfuro}}{x \text{ g de Fe}} \rightarrow x = 3{,}26 \text{ g de Fe}$$

Por la ley de conservación de la masa, sabemos que la masa restante ha de corresponder al azufre:

$$m_S = 5{,}12 - 3{,}26 = 1{,}86 \text{ g de S}$$

Comprobamos que están en la misma proporción que en los compuestos anteriores:

$$\frac{m_{Fe}}{m_S} = \frac{3{,}26\ \text{g}}{1{,}86\ \text{g}} = 1{,}75$$

Esto nos sirve para comprobar que el resultado es correcto.

La tabla quedaría entonces de la siguiente manera:

	Masa de hierro/g	Masa de azufre/g	Masa de sulfuro/g
A	6,00	3,43	9,43
B	2,21	1,26	3,47
C	3,26	1,86	5,12

Las leyes ponderales

4 Se deja un clavo de hierro al aire. Pasado un tiempo, se observa que se ha oxidado, y se comprueba que pesa más que al principio. ¿Se viola la ley de conservación de la masa?

Al oxidarse el clavo, el hierro se combina con el oxígeno del aire para dar lugar a óxido de hierro. Inicialmente teníamos una sustancia pura (Fe), y al final, tenemos una compuesta (generalmente, Fe_2O_3). Por tanto, el O que ha perdido el aire lo ha incorporado el clavo y en ningún momento se viola la ley de la conservación de la masa.

5 Experimentalmente se encuentra que 10,85 g de cromo reaccionan con 5,00 g de oxígeno para dar óxido de cromo (III).

a) ¿Cuánto oxígeno reaccionará con 17,32 g de cromo? ¿Cuánto óxido se obtendrá?

b) ¿Qué cantidad de óxido se obtiene si se combinan 2,00 g de oxígeno y 1,50 g de cromo?

a) La proporción entre las masas de cromo y oxígeno es:

$$\frac{m_{Cr}}{m_O} = \frac{10{,}85}{5{,}00} = 2{,}17$$

Por tanto, si tenemos 17,32 g de Cr, harán falta:

$$\frac{10{,}85\ \text{g de Cr}}{5{,}00\ \text{g de O}} = \frac{17{,}32\ \text{g de Cr}}{x\ \text{g de O}} \rightarrow x = 7{,}98\ \text{g de O}$$

La cantidad de óxido formado será la suma de las masas de Cr y O:

$$m_{Cr} + m_O = 17{,}32 + 7{,}98 = 25{,}30\ \text{g}$$

b) Veamos la proporción en la que se encuentran los reactivos:

$$R = \frac{m_{Cr}}{m_O} = \frac{1{,}50\ \text{g}}{2{,}00\ \text{g}} = 0{,}75 < 2{,}17$$

Como esta proporción es menor que 2,17, se consumirá todo el cromo y sobrará oxígeno. La masa de O que reacciona será:

$$\frac{10{,}85\ \text{g de Cr}}{5{,}00\ \text{g de O}} = \frac{1{,}5\ \text{g de Cr}}{x\ \text{g de O}} \rightarrow x = 0{,}69\ \text{g de O}$$

Así pues, se formarán:

$$m_{Cr_2O_3} = m_{Cr} + m_O = 1{,}5 + 0{,}69 = 2{,}19\ \text{g de CrO}$$

Y, sin reaccionar, sobrarán:

$$2{,}00 - 0{,}69 = 1{,}31 \text{ g de O}$$

6 **Experimentalmente se encuentra que 2,98 g de litio reaccionan con 2,00 g de nitrógeno para dar nitruro de litio.**

a) ¿Cuánto litio reaccionará con 8,05 g de nitrógeno? ¿Cuánto nitruro se obtendrá?

b) ¿Qué cantidad de óxido se obtiene si se combinan 3,07 g de litio y 1,85 g de nitrógeno?

a) La proporción entre las masas de litio y nitrógeno es:

$$\frac{m_{Li}}{m_N} = \frac{2{,}98}{2{,}00} = 1{,}49$$

Por lo tanto, si tenemos 8,05 g de N, harán falta:

$$\frac{2{,}98 \text{ g de Li}}{2{,}00 \text{ g de N}} = \frac{x \text{ g de Li}}{8{,}05 \text{ g de N}} \rightarrow x = 12{,}00 \text{ g de Li}$$

La cantidad de nitruro formado será la suma de las masas de Li y N:

$$m_{Li} + m_N = 12{,}00 + 8{,}05 = 20{,}05 \text{ g}$$

b) Veamos la proporción en la que se encuentran los reactivos:

$$R = \frac{m_{Li}}{m_N} = \frac{3{,}07 \text{ g}}{1{,}85 \text{ g}} = 1{,}66 > 1{,}49$$

Como es mayor que 1,49, se consumirá todo el nitrógeno y sobrará litio. La masa de Li que reacciona es:

$$\frac{2{,}98 \text{ g de Li}}{2{,}00 \text{ g de N}} = \frac{x \text{ g de Li}}{1{,}85 \text{ g de N}} \rightarrow x = 2{,}76 \text{ g de Li}$$

Así pues, se formarán:

$$m_{nitruro} = m_{Li} + m_N = 2{,}76 + 1{,}85 = 4{,}61 \text{ g de nitruro}$$

Y, sin reaccionar, sobrarán:

$$3{,}07 - 1{,}85 = 1{,}22 \text{ g de Li}$$

7 **Si se hacen reaccionar 2,50 g de cinc con 2,50 g de oxígeno, queda un exceso de 1,89 g de oxígeno. Si ahora se hacen reaccionar 1,80 g de cinc con 0,32 g de oxígeno, ¿quedará alguna sustancia en exceso? ¿Qué masa de óxido se formará?**

Veamos, en primer lugar, la proporción en la que se combinan el Zn y el O. Como se dice que queda un exceso de 1,89 g de oxígeno, entonces se habrán consumido:

$$2{,}50 - 1{,}89 = 0{,}61 \text{ g de O}$$

por lo que la proporción entre las masas que han reaccionado será:

$$\frac{m_{Zn}}{m_O} = \frac{2{,}50}{0{,}61} = 4{,}10$$

Si se combinan 1,80 g de Zn con 0,32 g de O, es posible que alguno de ellos sobre. Veamos la proporción en la que se encuentran:

$$R = \frac{m_{Zn}}{m_O} = \frac{1{,}80 \text{ g}}{0{,}32 \text{ g}} = 5{,}63 > 4{,}10$$

Como esta proporción es mayor que 4,10, hay un exceso de zinc. Veamos cuánto ha reaccionado:

$$\frac{2{,}50 \text{ g de Zn}}{0{,}61 \text{ g de O}} = \frac{x \text{ g de Zn}}{0{,}32 \text{ g de O}} \rightarrow x = 1{,}31 \text{ g de Zn}$$

Así pues, se formarán:

$$m_{\text{óxido}} = m_{Zn} + m_O = 1{,}31 + 0{,}32 = 1{,}63 \text{ g de óxido}$$

Y, sin reaccionar, sobrarán:

$$1{,}80 - 1{,}31 = 0{,}49 \text{ g de Zn}$$

8 El oxígeno puede combinarse con el cromo para dar varios compuestos. Tenemos cuatro de ellos, con las siguientes proporciones en masa de oxígeno:

Muestra	Proporción de oxígeno
A	23,53 %
B	31,58 %
C	38,10 %
D	48,00 %

Comprueba que se cumple la ley de las proporciones múltiples.

Si se toman 100 g de los cuatro compuestos, cada uno de ellos tendrá las siguientes cantidades de Cr y O:

	Masa de óxido/g	Masa de oxígeno/g	Masa de cromo/g
A	100	23,53	76,47
B	100	31,58	68,42
C	100	38,10	61,90
D	100	48,00	52,00

Las proporciones entre las masas de ambos, para cada uno de los compuestos, serán:

	$R = \frac{m_{Cr}}{m_O}$
A	3,25
B	2,17
C	1,63
D	1,08

Con estos datos ya tenemos información suficiente para comprobar la ley de las proporciones múltiples. Consideremos una cantidad fija de cromo, por ejemplo, 10 g (recuerda que esta ley exige que la masa de una de las sustancias sea constante). La cantidad de oxígeno que contendrá cada tipo de óxido vendrá dado por:

$$m_O = \frac{m_{Cr}}{R}$$

donde R es el valor de cada una de las proporciones calculadas anteriormente.

Entonces:

	Masa de cromo (g)	Masa de oxígeno (g)
A	10	$m_O = \dfrac{m_{Cr}}{R_A} = \dfrac{10}{3,25} = 3,08$ g
B	10	$m_O = \dfrac{m_{Cr}}{R_B} = \dfrac{10}{2,17} = 4,61$ g
C	10	$m_O = \dfrac{m_{Cr}}{R_C} = \dfrac{10}{1,63} = 6,14$ g
D	10	$m_O = \dfrac{m_{Cr}}{R_D} = \dfrac{10}{1,08} = 9,26$ g

Veamos las proporciones en masa de oxígeno de los compuestos B, C y D respecto al A:

$$\frac{m_O \text{ en comp. B}}{m_O \text{ en comp. A}} = \frac{4,61}{3,08} = 1,5 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{m_O \text{ en comp. C}}{m_O \text{ en comp. A}} = \frac{6,14}{3,08} = 2$$

$$\frac{m_O \text{ en comp. D}}{m_O \text{ en comp. A}} = \frac{9,26}{3,08} = 3$$

Por lo tanto, vemos que efectivamente están en proporciones de números enteros sencillos. Puedes comprobar que se sigue cumpliendo la ley de las proporciones múltiples al fijar cualquiera de los otros compuestos: B, C o D.

9 **En una experiencia de laboratorio se combinan 1,54 g de azufre con 2,70 g de hierro para dar un cierto sulfuro de hierro, sin que sobre ninguno de los reactivos.**

a) Si se combinan 5 g de S con 6 g de Fe, ¿cuánto sulfuro se formará?

b) En otra experiencia se comprueba que 4,20 g de S han reaccionado totalmente con 3,68 g de Fe. ¿Se obtiene el mismo compuesto que en la experiencia anterior? Comprueba que se cumple la ley de las proporciones múltiples.

a) Puesto que 1,54 g de S reaccionan completamente con 2,70 g de Fe, la proporción entre sus masas será:

$$\frac{m_{Fe}}{m_S} = \frac{2,70}{1,54} = 1,75$$

Por lo tanto, si reaccionan 5 g de S con 6 g de Fe, es posible que alguno sobre. Para saber cuál, calculamos la proporción entre las masas:

$$R = \frac{m_{Fe}}{m_S} = \frac{6,00 \text{ g}}{5,00 \text{ g}} = 1,2 < 1,75$$

Como la proporción es menor que 1,75, ha de sobrar azufre y se consumirá todo el hierro. La cantidad de S que reacciona será:

$$\frac{2,70 \text{ g de Fe}}{1,54 \text{ g de S}} = \frac{6 \text{ g de Fe}}{x \text{ g de S}} \rightarrow x = 3,42 \text{ g de S}$$

Por lo tanto, se formarán:

$$6{,}00 + 3{,}42 = 9{,}42 \text{ g de sulfuro de hierro}$$

b) Para comprobar si se trata del mismo compuesto, calculamos la proporción entre las masas que han reaccionado:

$$\frac{m_{Fe}}{m_S} = \frac{3{,}68}{4{,}20} = 0{,}88$$

Vemos, por tanto, que se trata de otro compuesto. Para comprobar la ley de las proporciones múltiples, tomamos para ambos casos la misma cantidad de hierro (por ejemplo, 2,70 g, como en el apartado a), y calculamos las cantidades de azufre.

Compuesto A:

$$m_S = 1{,}54 \text{ g}$$

Compuesto B:

$$\frac{3{,}68 \text{ g de Fe}}{4{,}20 \text{ g de S}} = \frac{2{,}70 \text{ g de Fe}}{x \text{ g de S}} \rightarrow x = 3{,}08 \text{ g de S}$$

La proporción entre las masas de azufre de ambos compuestos es:

$$\frac{m_S \text{ en comp. A}}{m_S \text{ en comp. B}} = \frac{1{,}54}{3{,}08} = 0{,}50 = \frac{1}{2}$$

Vemos que, efectivamente, se encuentran en una proporción de números enteros sencillos.

Leyes volumétricas. Hipótesis de Avogadro

10 **Experimentalmente se encuentra que 1 L de propano reacciona con 5 L de oxígeno para dar 3 L de CO_2 y 4 L de vapor de agua (todos medidos en las mismas condiciones de presión y temperatura). Determina la fórmula química del propano.**

Como todos están en las mismas condiciones de presión y temperatura, la relación entre los volúmenes es igual a la que hay entre el número de moléculas que reaccionan:

1 molécula de propano	+	5 moléculas de O_2		3 moléculas de CO_2	+	4 moléculas de H_2O
???		10 O		3 C + 6 O		8 H + 4 O

Como el número de átomos se conserva, tiene que haber 3 átomos de carbono y 8 átomos de hidrógeno a la izquierda (como el número de átomos de oxígeno a ambos lados ya coincide, el propano no puede contener ningún átomo de O). La fórmula química ha de ser, por tanto:

$$C_3H_8$$

11 **Tenemos un recipiente con 2 kg de metano y otro, en las mismas condiciones de presión y temperatura, de volumen doble, que contiene 7,98 kg de oxígeno. Calcula la relación que hay entre las masas de una molécula de metano y otra de oxígeno.**

Según la hipótesis de Avogadro, volúmenes iguales de gases distintos, en las mismas condiciones de presión y temperatura, han de tener el mismo número de moléculas. Como el recipiente que contiene oxígeno tiene volumen doble que el de metano, ha de haber el doble de moléculas de oxígeno que de metano. Es decir, si N es el número de moléculas de metano, tendremos $2 \cdot N$ moléculas de O_2. Como conocemos la masa total de cada una de estas sustancias, podemos plantear las dos ecuaciones siguientes:

$$N \cdot M(\text{metano}) = 2 \text{ kg}$$

$$2 \cdot N \cdot M(O_2) = 7{,}98 \text{ kg}$$

Dividiendo ambas ecuaciones nos queda:

$$\frac{N \cdot M\text{ (metano)}}{2 \cdot N \cdot M\text{ (O}_2\text{)}} = \frac{2}{7{,}98} \rightarrow \frac{M\text{ (metano)}}{M\text{ (O}_2\text{)}} = 2 \cdot \frac{2}{7{,}98} \approx 0{,}50$$

12 **Un recipiente de volumen *V* contiene 10 g de dióxido de nitrógeno, y otro, de volumen *V*/2, contiene 8,26 g de anhídrido nitroso (medidos ambos en las mismas condiciones). Calcula la relación entre las masas de una molécula de anhídrido nitroso y otra de dióxido de nitrógeno.**

Según la hipótesis de Avogadro, volúmenes iguales de gases distintos, en las mismas condiciones de presión y temperatura, han de tener el mismo número de moléculas. El recipiente que contiene anhídrido nitroso tiene la mitad de volumen que el de dióxido de nitrógeno, por lo que si N es el número de moléculas de anhídrido nitroso, tendremos $2 \cdot N$ moléculas de dióxido de nitrógeno. Como conocemos la masa total de cada una de estas sustancias, podemos plantear las dos ecuaciones siguientes:

$$2 \cdot N \cdot M\text{ (dióxido de nitrógeno)} = 10\text{ g}$$

$$N \cdot M\text{ (anhídrido nitroso)} = 8{,}26\text{ g}$$

Dividiendo ambas ecuaciones, nos queda:

$$\frac{2 \cdot N \cdot M\text{ (anhídrido nitroso)}}{N \cdot M\text{ (dióxido de nitrógeno)}} = \frac{8{,}26}{10} \rightarrow \frac{M\text{ (anhídrido nitroso)}}{M\text{ (dióxido de nitrógeno)}} = \frac{8{,}26}{2 \cdot 10} = 0{,}41$$

Página 59

13 **Reaccionan 0,5 L de nitrógeno con 2 L de hidrógeno. ¿Cuáles son los productos que quedarán al final de la reacción? Calcula sus volúmenes. ¿Cuántas moléculas de amoníaco se han obtenido, si los volúmenes anteriores estaban calculados en c. n.?**

Sabemos que 1 volumen de N_2 reacciona con 3 volúmenes de H_2 para dar 2 volúmenes de NH_3. Por lo tanto, las proporciones entre los volúmenes son las siguientes:

$$\frac{V_{N_2}}{V_{H_2}} = \frac{1}{3}, \quad \frac{V_{N_2}}{V_{NH_3}} = \frac{1}{2}$$

Si tenemos 0,5 L de N_2, reaccionarán $3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$ L de H_2, y sobrarán 0,5 L de H_2. Además, se formarán $2 \cdot 0{,}5 = 1$ L de NH_3. Así pues, al final se tendrán 0,5 L de H_2 sobrante, y 1 L de NH_3.

Como 22,4 L de un gas ideal en c. n. contiene $6{,}022 \cdot 10^{23}$ moléculas, en 1 L tendremos:

$$\frac{22{,}4\text{ L}}{6{,}022 \cdot 10^{23}\text{ moléculas}} = \frac{1\text{ L}}{N\text{ moléculas}} \rightarrow N = \frac{6{,}022 \cdot 10^{23}}{22{,}4} = 2{,}688 \cdot 10^{22}\text{ moléculas}$$

14 **Experimentalmente se encuentra que 0,25 L de N_2 reaccionan con 0,25 L de O_2, para dar 0,5 L de óxido nítrico, medidos en las mismas condiciones de presión y temperatura. Calcula la fórmula molecular del óxido.**

Como todos los volúmenes están medidos en las mismas condiciones, la relación entre estos y el número de moléculas será la misma:

0,25 moléculas de N_2	+	0,25 moléculas de O_2	→	0,5 moléculas de óxido
0,5 N		0,5 O		???

Fíjate que no podemos tener 0,5 átomos de ninguno de los elementos, por lo que multiplicamos por 2, y ya tenemos 1 N + 1 O. Por tanto, la fórmula del óxido nítrico será NO.

15 **Se tienen dos volúmenes iguales en las mismas condiciones de presión y temperatura, uno con 15,46 g de metano y otro con 56,04 g de butano. Si la masa molecular del metano es de 16 u, calcula la del butano.**

Según la hipótesis de Avogadro, volúmenes iguales de gases distintos, en las mismas condiciones de presión y temperatura, han de tener el mismo número de moléculas. Como los dos recipientes tienen el mismo volumen, el número de moléculas, *N*, en ambos casos, será el mismo. Entonces:

$$N \cdot M\ (\text{metano}) = 15{,}46\ \text{g}$$

$$N \cdot M\ (\text{butano}) = 56{,}04\ \text{g}$$

Dividiendo estas dos ecuaciones, nos queda:

$$\frac{N \cdot M\ (\text{butano})}{N \cdot M\ (\text{metano})} = \frac{56{,}04}{15{,}46} \rightarrow \frac{M\ (\text{butano})}{M\ (\text{metano})} = \frac{56{,}04}{15{,}46} = 3{,}63$$

Por lo tanto, la masa de la molécula de butano será:

$$M\ (\text{butano}) = 3{,}63 \cdot M\ (\text{metano}) = 3{,}63 \cdot 16 = 58\ \text{u}$$

En este caso, hemos calculado la masa molecular del butano sin cifras decimales, ya que así es como se nos da la del metano en el enunciado.

16 **Se tienen dos recipientes en las mismas condiciones de presión y temperatura: uno de 2 L, con 3,929 g de propano, y otro con 6,473 g de butano. Sabiendo que la masa molecular del propano es de 44 u y la del butano de 58 u, calcula el volumen del segundo recipiente.**

Tenemos 2 L de propano, y nos dicen que su masa es de 3,929 g. Por lo tanto, el número de moléculas que contendrá ese recipiente verificará:

$$N_{propano} \cdot M\ (\text{propano}) = 3{,}929\ \text{g}$$

De igual forma, el segundo recipiente tiene 6,473 g de butano, por lo que:

$$N_{butano} \cdot M\ (\text{butano}) = 6{,}473\ \text{g}$$

Dividiendo ambas ecuaciones tendremos:

$$\frac{N_{butano} \cdot M\ (\text{butano})}{N_{propano} \cdot M\ (\text{propano})} = \frac{6{,}473}{3{,}929} = 1{,}648$$

Las masas molares de los dos compuestos son:

$$M\ (\text{propano}) = 44\ \text{g/mol}$$

$$M\ (\text{butano}) = 58\ \text{g/mol}$$

Conocidas las masas molares, podemos obtener la relación entre el número de moléculas:

$$\frac{N_{butano}}{N_{propano}} = 1{,}648 \cdot \frac{M\ (\text{propano})}{M\ (\text{butano})} = 1{,}645 \cdot \frac{44}{58} = 1{,}25$$

Como la proporción que hay entre el número de moléculas es el mismo que el que existe entre los volúmenes (siempre que se midan en las mismas condiciones de presión y temperatura, como es el caso), entonces el volumen del recipiente de butano será:

$$\frac{V_{butano}}{V_{propano}} = 1{,}25 \rightarrow V_{butano} = 1{,}25 \cdot V_{propano} = 1{,}25 \cdot 2 = 2{,}5\ \text{L}$$

Masa atómica, masa molecular y masa fórmula

17 Calcula cuántos átomos hay en un lingote de oro de 1 kg. Si su precio es de 35441,96 euros, calcula la masa y el precio de $2 \cdot 10^{17}$ átomos de oro. Toma un valor para la masa atómica del oro: *m* (Au) = 196,97 u.

Como la masa atómica del oro es 196,97 u, sabemos que en 196,97 g de Au habrá N_A átomos. Por lo tanto:

$$\frac{196{,}97 \text{ g de Au}}{N_A \text{ átomos de Au}} = \frac{1\,000 \text{ g de Au}}{N \text{ átomos de Au}} \rightarrow N = N_A \cdot \frac{1\,000}{196{,}97} = 3{,}057 \cdot 10^{24} \text{ átomos de Au}$$

La masa de $2 \cdot 10^{17}$ átomos de oro será:

$$\frac{196{,}97 \text{ g de Au}}{N_A \text{ átomos de Au}} = \frac{m}{2 \cdot 10^{17} \text{ átomos de Au}} \rightarrow$$

$$m = 196{,}97 \cdot \frac{2 \cdot 10^{17}}{6{,}022 \cdot 10^{23}} = 6{,}54 \cdot 10^{-5} \text{ g} = 0{,}065\,4 \text{ mg}$$

Su precio será:

$$\frac{1\,000 \text{ g}}{35\,441{,}96 \text{ euros}} = \frac{6{,}54 \cdot 10^{-5} \text{ g}}{x} \rightarrow x = 35\,441{,}96 \cdot \frac{6{,}54 \cdot 10^{-5}}{1\,000} = 0{,}002\,32 \text{ euros}$$

18 Di dónde habrá más moléculas, en 3 g de flúor (F_2) o en 2 g de amoníaco (NH_3). Utiliza los siguientes valores de masa atómica: *m* (H) = 1,01 u; *m* (N) = 14,01 u; *m* (F) = 19,00 u

Calculamos, en primer lugar, las masas de ambas moléculas:

$$m\,(NH_3) = 14{,}01 + 3 \cdot 1{,}01 = 17{,}04 \text{ u}$$

$$m\,(F_2) = 2 \cdot 19{,}00 = 38{,}00 \text{ u}$$

Por tanto, sus masas molares son:

$$M\,(NH_3) = 17{,}04 \text{ g/mol}$$

$$M\,(F_2) = 38{,}00 \text{ g/moll}$$

El número de moléculas de ambas sustancias se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{17{,}04 \text{ g de } NH_3}{N_A \text{ moléculas de } NH_3} = \frac{3{,}00 \text{ g de } NH_3}{N \text{ moléculas de } NH_3} \rightarrow N = 1{,}060 \cdot 10^{23} \text{ moléculas de } NH_3$$

$$\frac{38{,}00 \text{ g de } F_2}{N_A \text{ moléculas de } F_2} = \frac{2{,}00 \text{ g de } F_2}{N \text{ moléculas de } F_2} \rightarrow N = 3{,}170 \cdot 10^{22} \text{ moléculas de } F_2$$

Por lo tanto, hay más moléculas de amoníaco que de flúor.

19 Calcula cuántas moléculas hay en 25 g de metano (CH_4). Utiliza los siguientes valores de la masa atómica: *m* (C) = 12,01 u; *m* (H) = 1,01 u.

En primer lugar, calculamos la masa molecular:

$$m\,(CH_4) = 1 \cdot 12{,}01 + 4 \cdot 1{,}01 = 16{,}05 \text{ u}$$

Por tanto, su masa molar es 16,05 g/mol y el número de moléculas:

$$\frac{16{,}05 \text{ g de } CH_4}{6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ moléculas de } CH_4} = \frac{25 \text{ g de } CH_4}{N \text{ moléculas de } CH_4} \rightarrow N = 9{,}380 \cdot 10^{23}$$

20 **Calcula cuántas moléculas hay en 30 g de propanol (C_3H_8O). Halla también el número de átomos de C, H y O que contendrá.**

Datos: *m* (H) = 1,01 u; *m* (O) = 16,00 u; *m* (C) = 12,01 u

Calculamos, en primer lugar, la masa molecular:

$$m\ (C_3H_8O) = 3 \cdot 12{,}01 + 8 \cdot 1{,}01 + 1 \cdot 16{,}00 = 60{,}11 \text{ u}$$

Por tanto, su masa molar es 60,11 g/mol y el número de moléculas será:

$$\frac{60{,}11 \text{ g de } C_3H_8O}{6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ moléculas de } CH_4} = \frac{30 \text{ g de } CH_4}{N \text{ moléculas de } CH_4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \; N = 3{,}006 \cdot 10^{23}$$

Cada molécula de propanol tiene 3 átomos de C, 8 de H y 1 de O. Por tanto:

$$N_C = 3 \cdot 3{,}006 \cdot 10^{23} = 9{,}018 \cdot 10^{23}$$

$$N_H = 8 \cdot 3{,}006 \cdot 10^{23} = 2{,}405 \cdot 10^{24}$$

$$N_O = 1 \cdot 3{,}006 \cdot 10^{23} = 3{,}006 \cdot 10^{23}$$

Cantidad de sustancia

21 **Si bebes 200 mL de agua, ¿cuántas moléculas has ingerido? Toma una densidad para el agua: *d* (agua) = 1 g/cm³.**

Como 1 cm³ = 1 mL, la densidad del agua será d = 1 g/mL. Por tanto, la masa de agua ingerida es de 200 g. Su masa molecular es:

$$m\ (H_2O) = 2 \cdot 1{,}01 + 1 \cdot 16{,}00 = 18{,}02 \text{ u}$$

Y la masa molar: $M\ (H_2O) = 18{,}02$ g/mol. Con esta información ya podemos resolver el problema. Vamos a hacerlo de dos formas equivalentes:

1.ª forma:

En primer lugar, calculamos la cantidad de sustancia:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{200 \text{ g}}{18{,}02 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 11{,}10 \text{ mol}$$

Y ahora obtenemos el número de moléculas utilizando la ecuación (1) de la sección 6:

$$N = n \cdot N_A = 11{,}10 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 6{,}684 \cdot 10^{24}$$

2.ª forma:

Como la masa molecular es m = 18,02 u, en 18,02 g de H_2O hay $6{,}022 \cdot 10^{23}$ moléculas. Por tanto:

$$\frac{18{,}02 \text{ g de } H_2O}{6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ moléculas de } H_2O} = \frac{200 \text{ g de } H_2O}{N \text{ moléculas de } H_2O} \rightarrow$$

$$\rightarrow \; N = 6{,}684 \cdot 10^{24}$$

Como vemos, ambos resultados coinciden.

22 **El valor medio de CO_2 expirado es de 450 mL por minuto. Calcula la cantidad de sustancia y la masa de CO_2 emitido en condiciones normales.**

La masa molecular del CO_2 es:

$$m\ (CO_2) = 1 \cdot 12{,}01 + 2 \cdot 16{,}00 = 44{,}01\ \text{u}$$

Por tanto, su masa molar es $M\ (CO_2) = 44{,}01$ g/mol. Si se miden los 450 mL en c. n., la cantidad de sustancia será:

$$n = \frac{V}{V_m} = \frac{0{,}450}{22{,}4} = 0{,}020\ \text{mol}$$

y la masa:

$$m = n \cdot M = 0{,}020 \cdot 44{,}01 = 0{,}880\ \text{g}$$

23 **Calcula la masa, la cantidad de sustancia y la cantidad de átomos que hay en un globo de 3 L de volumen lleno de hidrógeno (medidos en c. e.).**

Veamos primero la cantidad de sustancia de hidrógeno molecular (H_2) que hay en el globo. Como nos dicen que el volumen se mide en condiciones estándar ($V_m = 22{,}7$ L):

$$n = \frac{V}{V_m} = \frac{3\ \text{L}}{22{,}7\ \text{L/mol}} = 0{,}132\ \text{mol}$$

La masa de hidrógeno que contiene será, por tanto:

$$m = n \cdot \underbrace{M\ (H_2) =}_{= 2 \cdot 1{,}01 = 2{,}02\ \text{g/mol}} 0{,}132 \cdot 2{,}02 = 0{,}267\ \text{g}$$

Ahora hay que tener precaución, puesto que nos piden el número de átomos, no el de moléculas. En primer lugar:

$$N_{H_2} = n \cdot N_A = 0{,}132 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 7{,}949 \cdot 10^{22}\ \text{moléculas de}\ H_2$$

El número de átomos, entonces, será el doble:

$$N_H = 2 \cdot 8{,}07 \cdot 10^{22} = 1{,}590 \cdot 10^{23}\ \text{átomos de H}$$

24 **La fructosa es un tipo de azúcar presente en la fruta, y su fórmula es $C_6H_{12}O_6$. Calcula qué cantidad de sustancia habrá en 2 g de fructosa y cuántos átomos de hidrógeno contendrá.**

Calculamos, en primer lugar, la masa molecular y la masa molar de la fructosa:

$$m\ (\text{fructosa}) = 6 \cdot 12{,}01 + 12 \cdot 1{,}01 + 6 \cdot 16{,}00 = 180{,}18\ \text{u}$$

$$M\ (\text{fructosa}) = 180{,}18\ \text{g/mol}$$

Luego la cantidad de sustancia será:

$$n = \frac{2{,}00\ \text{g}}{180{,}18\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}011\ \text{mol}$$

Nos piden el número de átomos de H. Calculamos, primero, el número de moléculas de fructosa:

$$N_{\text{fructosa}} = n \cdot N_A = 0{,}011 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 6{,}624 \cdot 10^{21}\ \text{moléculas de fructosa}$$

Ahora, como cada una de ellas contiene 12 átomos de hidrógeno:

$$N_H = 12 \cdot N_{\text{fructosa}} = 7{,}949 \cdot 10^{22}\ \text{átomos de H}$$

25 **Completa la siguiente tabla con información sobre cuatro cantidades de sulfuro de hidrógeno (H_2S). Todas ellas están referidas a condiciones normales. Toma un valor para la masa atómica del azufre: *m* (S) = 32,06 u.**

	Vol./L	Cantidad de sustancia/mol	Número de moléculas	Masa de H_2S/g	Masa de azufre/g
A	4				
B					25
C				3	
D		0,23			

En primer lugar, calculamos la masa molecular del H_2S:

$$m\ (H_2S) = 32{,}06 + 2 \cdot 1{,}01 = 34{,}08\ \text{u}$$

Por tanto, la masa molar será:

$$M\ (H_2S) = 34{,}08\ \text{g/mol}$$

Muestra A:

Veamos la cantidad de sustancia:

$$n = \frac{V}{V_m} = \frac{4{,}0\ \text{L}}{22{,}4\ \text{L/mol}} = 0{,}179\ \text{mol}$$

A partir de aquí, ya podemos obtener el resto de la información. Por ejemplo, el número de moléculas viene dado por:

$$N = n \cdot N_A = 0{,}179 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 1{,}078 \cdot 10^{23}\ \text{moléculas}$$

Y la masa:

$$m = n \cdot M\ (H_2S) = 0{,}179 \cdot 34{,}08 = 6{,}10\ \text{g}$$

Por último, sabemos que, de 34,08 g que tiene un mol de H_2S, 32,06 g corresponden al azufre; luego:

$$\frac{34{,}08\ \text{g de } H_2S}{32{,}06\ \text{g de S}} = \frac{6{,}10\ \text{g de } H_2S}{m_S} \rightarrow m_S = 6{,}10 \cdot \frac{32{,}06}{34{,}08} = 5{,}74\ \text{g de S}$$

La fila A quedará de la siguiente manera:

	Vol./L	Cantidad de sustancia/mol	N° de moléculas	Masa/g	Masa de azufre/g
A	4	0,179	$1{,}078 \cdot 10^{23}$	6,10	5,74

Muestra B:

En este caso, conocemos la masa de azufre. Hallemos la cantidad de sustancia:

$$n = \frac{m}{M\ (S)} = \frac{25\ \text{g}}{32{,}06\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}780\ \text{mol de S}$$

Si nos fijamos en la fórmula química, vemos que por cada mol de H_2S tenemos un mol de S. Por tanto, hemos de tener 0,780 mol de H_2S. Lo calculamos de la misma forma que en el apartado anterior:

$$\frac{34{,}08\ \text{g de } H_2S}{32{,}06\ \text{g de S}} = \frac{m_{H_2S}}{25\ \text{g de S}} \rightarrow m_{H_2S} = 25 \cdot \frac{34{,}08}{32{,}06} = 26{,}58\ \text{g de } H_2S$$

Y a partir de aquí calculamos el número de moles:

$$n = \frac{m}{M\ (H_2S)} = \frac{26{,}58}{34{,}08\ g \cdot mol^{-1}} = 0{,}780 \text{ mol de } H_2S$$

Como vemos, ambos resultados coinciden. Ahora ya es fácil calcular el volumen y el número de moléculas:

$$N = n \cdot N_A = 0{,}780 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 4{,}697 \cdot 10^{23} \text{ moléculas}$$

$$V = n \cdot V_m = 0{,}780 \cdot 22{,}4 = 17{,}47 \text{ L}$$

La fila B quedará, por tanto, de la siguiente manera:

	Vol./L	Cantidad de sustancia/mol	Nº de moléculas	Masa/g	Masa de azufre/g
B	17,47	0,780	$4{,}697 \cdot 10^{23}$	26,58	25

Muestra C:

En este caso, conocemos la masa de H_2S. Calculamos la cantidad de sustancia de H_2S:

$$n = \frac{m}{M\ (H_2S)} = \frac{3\ g}{34{,}08\ g \cdot mol^{-1}} = 0{,}088 \text{ mol de } H_2S$$

A partir de aquí, ya podemos obtener el resto de la información:

$$N = n \cdot N_A = 0{,}088 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 5{,}299 \cdot 10^{22} \text{ moléculas}$$

$$\frac{34{,}08 \text{ g de } H_2S}{32{,}06 \text{ g de S}} = \frac{3 \text{ g de } H_2S}{m_S} \rightarrow m_S = 3 \cdot \frac{32{,}06}{34{,}08} = 2{,}82 \text{ g de S}$$

$$V = n \cdot V_m = 0{,}088 \cdot 22{,}4 = 1{,}97 \text{ L}$$

Por tanto, la fila C quedará de la siguiente manera:

	Vol./L	Cantidad de sustancia/mol	Nº de moléculas	Masa/g	Masa de azufre/g
C	1,97	0,088	$5{,}299 \cdot 10^{22}$	3,00	2,82

Muestra D:

En este caso, conocemos directamente la cantidad de sustancia de H_2S, por lo que podemos calcular todo lo demás de forma directa:

$$m = n \cdot M\ (H_2S) = 0{,}23 \cdot 34{,}08 = 7{,}84 \text{ g de } H_2S$$

$$N = n \cdot N_A = 0{,}23 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 1{,}385 \cdot 10^{23} \text{ moléculas}$$

$$V = n \cdot V_m = 0{,}23 \cdot 22{,}4 = 5{,}15 \text{ L}$$

Como tenemos 0,23 moles de H_2S, también tendremos 0,23 moles de S, por lo que:

$$m_S = n \cdot M\ (S) = 0{,}23 \text{ mol} \cdot 32{,}06 \text{ g/mol} = 7{,}37 \text{ g de S}$$

La fila D quedará, por tanto, de la siguiente manera:

	Vol./L	Cantidad de sustancia/mol	Nº de moléculas	Masa/g	Masa de azufre/g
D	5,15	0,23	$1{,}385 \cdot 10^{23}$	7,84	7,37

26 **Indica la cantidad de sustancia que hay en un clavo de hierro de 1,5 g de masa. Calcula el número de átomos que contendrá. Utiliza el siguiente valor para la masa atómica del hierro: *m* (Fe) = 55,86 u.**

La cantidad de sustancia que habrá en 1 g de hierro vendrá dada por:

$$n = \frac{m}{M\ (\text{Fe})} = \frac{1\ \text{g}}{55{,}86\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}0179\ \text{mol de Fe}$$

Y el número de átomos:

$$N = n \cdot N_A = 0{,}0179 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 1{,}078 \cdot 10^{22}\ \text{átomos de Fe}$$

27 **Tenemos un recipiente con 25 g de agua. Calcula:**

a) La cantidad de sustancia.

b) Cuántas moléculas habrá.

c) Contesta a las preguntas anteriores si, en vez de agua, tuviéramos «agua pesada», D_2O, donde D hace referencia al deuterio, isótopo del hidrógeno.

Dato: *m* (D) = 2,0141 u.

Calculamos, en primer lugar, la masa molecular del H_2O:

$$m\ (H_2O) = 2 \cdot 1{,}01 + 16{,}00 = 18{,}02\ \text{u}$$

Por tanto, la masa molar será:

$$M\ (H_2O) = 18{,}02\ \text{g/mol}$$

a) La cantidad de sustancia que habrá en 25 g de agua será:

$$n = \frac{m}{M\ (H_2O)} = \frac{25{,}00\ \text{g}}{18{,}02\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 1{,}387\ \text{mol de } H_2O$$

b) El número de moléculas será, por tanto:

$$N = n \cdot N_A = 1{,}387 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 8{,}353 \cdot 10^{23}\ \text{moléculas}$$

c) La masa molecular del D_2O es:

$$m\ (D_2O) = 2 \cdot 2{,}0141 + 16{,}00 = 20{,}0282\ \text{u}$$

Y su masa molar:

$$M\ (D_2O) = 20{,}0282\ \text{g/mol}$$

Por tanto, la cantidad de sustancia es:

$$n = \frac{m}{M\ (D_2O)} = \frac{25{,}0000\ \text{g}}{20{,}0282\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 1{,}248\ \text{mol de } D_2O$$

Y el número de moléculas:

$$N = n \cdot N_A = 1{,}248 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 7{,}516 \cdot 10^{23}\ \text{moléculas}$$

28 **En un recipiente de 27,66 L de capacidad hay 87,55 g de un gas desconocido, a 0 °C y 1 atm de presión. De entre las siguientes posibilidades, di cuál es el gas: O_2, H_2, Cl_2, N_2, CH_4.**

Datos: *m* (H) = 1,01 u; *m* (O) = 16,00 u; *m* (Cl) = 35,45 u; *m* (N) = 14,01 u;

***m* (C) = 12,01 u.**

Como el gas está en condiciones normales y sabemos el volumen que ocupa, podemos calcular la cantidad de sustancia que tenemos:

$$n = \frac{V}{V_m} = \frac{27{,}66\ L}{22{,}40\ L \cdot mol^{-1}} = 1{,}235\ mol$$

Puesto que conocemos la masa y la cantidad de sustancia, podemos calcular la masa molar:

$$n = \frac{m}{M} \rightarrow M = \frac{m}{n} = \frac{87{,}550\ g}{1{,}235\ mol} = 70{,}89\ g/mol$$

De todas las posibilidades que nos dan, el único gas que tiene esta masa molar es el Cl_2.

29 **Un recipiente contiene 24,08 g de un cierto gas, con 9,033 · 10^{23} moléculas. De entre las siguientes posibilidades, di cuál es dicho gas: a) O_2, b) H_2, c) Cl2, d) N_2, e) CH_4. Calcula el volumen del recipiente en condiciones estándar.**

Datos: *m* (H) = 1,01 u; *m* (O) = 16,00 u; *m* (Cl) = 35,45 u; *m* (N) = 14,01 u;

_m_ (C) = 12,01 u.

A partir del número de moléculas, podemos calcular la cantidad de sustancia, puesto que sabemos que 1 mol de cualquier sustancia contiene un número de Avogadro de moléculas:

$$N = n \cdot N_A \rightarrow n = \frac{N}{N_A} = \frac{9{,}033 \cdot 10^{23}}{6{,}022 \cdot 10^{23}} = 1{,}5\ mol$$

Conocida la masa, ya podemos obtener la masa molar:

$$n = \frac{m}{M} \rightarrow M = \frac{m}{n} = \frac{24{,}08\ g}{1{,}5\ mol} = 16{,}05\ g/mol$$

Por lo tanto, tiene que ser e) metano (comprueba que su masa molar es, efectivamente, 16,05 g/mol).

El volumen del recipiente, si el gas está en c. e., será:

$$V = n \cdot V_m = 1{,}5 \cdot 22{,}7 = 34{,}1\ L$$

30 **Un recipiente contiene 2 L de oxígeno en c. n. Calcula la cantidad de sustancia y la masa de dicho gas. Contesta a la pregunta anterior si, en vez de oxígeno, se tratara de ozono (O_3). ¿Cuál de los dos es más denso?**

La masa molecular del O_2 (teniendo en cuenta que el oxígeno gaseoso está formado por una molécula con dos átomos de oxígeno) es 32,00 u. Por tanto, su masa molar es 32 g/mol.

Sabiendo que contiene 2 L de gas en c. n., la cantidad de sustancia será:

$$n = \frac{V}{V_m} = \frac{2\ L}{22{,}4\ L \cdot mol^{-1}} = 0{,}089\ mol$$

Y la masa contenida en el recipiente:

$$n = \frac{m}{M} \rightarrow m = n \cdot M = 0{,}089 \cdot 32{,}00 = 2{,}848\ g$$

En el caso de que se trate de ozono, la masa molecular es: 3 · 16,00 = 48,00 u. La cantidad de sustancia es la misma, puesto que, a igualdad de presión y temperatura, cantidades iguales de gases diferentes ocupan el mismo volumen. Sin embargo, la masa cambia:

$$m = n \cdot M = 0{,}089 \cdot 48 = 4{,}272\ g$$

Así pues, en el mismo volumen tenemos una masa mayor de ozono, por lo que este será el más denso de los dos. Comprobémoslo (ten cuidado con el cambio de unidades: 1 L = 1 000 mL = = 1 000 cm^3).

$$d_{O_2} = \frac{m}{V} = \frac{2{,}848 \text{ g}}{2\,000 \text{ cm}^3} = 1{,}424 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

$$d_{O_3} = \frac{m}{V} = \frac{4{,}272 \text{ g}}{2\,000 \text{ cm}^3} = 2{,}136 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

Página 60

31 En un recipiente hay 2 mol de ácido sulfúrico (H_2SO_4). Calcula:

a) Su masa en gramos.

b) Su volumen en condiciones estándar.

c) La cantidad de sustancia y la masa de S, O y H que hay en el recipiente.

Utiliza un valor para la masa atómica del azufre: *m* (S) = 32,06 u.

Calculamos, en primer lugar, la masa molecular del ácido sulfúrico:

$$m\,(H_2SO_4) = 1 \cdot 32{,}06 + 4 \cdot 16{,}00 + 2 \cdot 1{,}01 = 98{,}08 \text{ u}$$

Por tanto, su masa molar es:

$$M\,(H_2SO_4) = 98{,}08 \text{ g/mol}$$

a) La masa de 2 moles será:

$$n = \frac{m}{M\,(SO_4H_2)} \rightarrow m = n \cdot M\,(SO_4H_2) = 2 \cdot 98{,}08 = 196{,}16 \text{ g}$$

b) El volumen, en c. e., será:

$$V = n \cdot V_m = 2 \cdot 22{,}7 = 45{,}4 \text{ L}$$

c) A partir de la fórmula molecular de ácido sulfúrico, H_2SO_4, vemos que por cada mol de H_2SO_4, hay 1 mol de S, 4 moles de O y 2 moles de H. Por lo tanto, habrá:

- 2 moles de S
- 8 moles de O
- 4 moles de H

Con esta información y con las masas molares, ya podemos obtener la masa de cada una de estas sustancias:

$$m_S = n_S \cdot M\,(S) = 2 \cdot 32{,}06 = 64{,}12 \text{ g}$$

$$m_O = n_O \cdot M\,(O) = 8 \cdot 16{,}00 = 128{,}00 \text{ g}$$

$$m_H = n_H \cdot M\,(H) = 4 \cdot 1{,}01 = 4{,}04 \text{ g}$$

32 En un recipiente de 125 mL hay oxígeno en condiciones estándar. Calcula la masa de oxígeno y el número de moléculas. Calcula la masa de hidrógeno que reaccionará con esta cantidad de oxígeno y la masa de agua que se formará.

Como el gas se encuentra en condiciones estándar, podemos calcular la cantidad de sustancia:

$$n = \frac{V}{V_m} = \frac{0{,}125 \text{ L}}{22{,}7 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}} = 5{,}51 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

El número de moléculas vendrá dado por:

$$N = n \cdot N_A = 5{,}51 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 3{,}318 \cdot 10^{21}$$

A partir de la reacción de combustión del hidrógeno para dar agua:

$$2 \cdot H_2 + O_2 \rightarrow 2 \cdot H_2O$$

vemos que por cada mol de oxígeno necesitamos 2 moles de hidrógeno. Luego harán falta: $2 \cdot 5{,}58 \cdot 10^{-3} = 1{,}12 \cdot 10^{-2}$ moles de H_2. Como:

$$M\ (H_2) = 2{,}02 \text{ g/mol}$$

la masa necesaria será:

$$m_{H_2} = 1{,}12 \cdot 10^{-2} \cdot 2{,}02 = 2{,}26 \cdot 10^{-2} \text{ g de } H_2$$

Además, se forma la misma cantidad de sustancia de H_2O que la que se consume de H_2. Por tanto, al final habrá $1{,}12 \cdot 10^{-2}$ moles de H_2O. Como su masa molar es:

$$M\ (H_2O) = 18{,}02 \text{ g/mol}$$

tendremos:

$$m_{H_2O} = 1{,}12 \cdot 10^{-2} \cdot 18{,}02 = 20{,}18 \cdot 10^{-2} \text{ g de } H_2O$$

Fórmulas químicas. Composición

33 **Para que la extracción de un cierto metal sea rentable, es necesario calcular previamente la composición centesimal del mineral en el que se encuentra. Tenemos tres minerales que contienen cobre: calcopirita ($CuFeS_2$), calcocita (Cu_2S) y cuprita (Cu_2O_2). Si se quiere extraer cobre, ¿cuál de ellos sería más rentable? ¿Y si lo que se quiere es azufre?**

Datos: *m* (Cu) = 63,55 u; *m* (Fe) = 55,85 u; *m* (S) = 32,06 u; *m* (O) = 16,00 u.

Vamos a calcular la composición centesimal de los tres minerales para conocer cuáles son los porcentajes en masa de cobre y de azufre.

Calcopirita:

Calculamos su masa fórmula:

$$m \text{ (calcopirita)} = 1 \cdot 63{,}55 + 1 \cdot 55{,}85 + 2 \cdot 3\ 2{,}06 = 183{,}52 \text{ u}$$

Composición centesimal:

$$\frac{183{,}52 \text{ u de } CuFeS_2}{63{,}55 \text{ u de Cu}} = \frac{100}{x} \rightarrow x = 34{,}63 \text{ \% de Cu}$$

$$\frac{183{,}52 \text{ u de } CuFeS_2}{55{,}85 \text{ u de Fe}} = \frac{100}{y} \rightarrow y = 30{,}43 \text{ \% de Fe}$$

$$\frac{183{,}52 \text{ u de } CuFeS_2}{2 \cdot 32{,}06 \text{ u de O}} = \frac{100}{z} \rightarrow z = 34{,}94 \text{ \% de S}$$

Calcocita:

Calculamos su masa fórmula:

$$m \text{ (calcocita)} = 2 \cdot 63{,}55 + 32{,}06 = 159{,}16 \text{ u}$$

Composición centesimal:

$$\frac{159{,}16 \text{ u de } Cu_2S}{2 \cdot 63{,}55 \text{ u de Cu}} = \frac{100}{x} \rightarrow x = 79{,}86 \text{ \% de Cu}$$

$$\frac{159{,}16 \text{ u de } Cu_2S}{32{,}06 \text{ u de S}} = \frac{100}{y} \rightarrow y = 20{,}14 \text{ \% de S}$$

Cuprita:

Calculamos su masa fórmula:

$$m \text{ (cuprita)} = 2 \cdot 63{,}55 + 2 \cdot 16{,}00 = 159{,}10 \text{ u}$$

Composición centesimal:

$$\frac{159{,}10 \text{ u de } Cu_2O_2}{2 \cdot 63{,}55 \text{ u de Cu}} = \frac{100}{x} \rightarrow x = 79{,}89 \text{ \% de Cu}$$

$$\frac{159{,}10 \text{ u de } Cu_2O_2}{2 \cdot 16{,}00 \text{ u de O}} = \frac{100}{y} \rightarrow y = 20{,}11\text{\% de O}$$

Por lo tanto, vemos que el que tiene mayor porcentaje en masa de cobre es la cuprita, seguida por la calcocita. Por otra parte, de los dos minerales que contienen azufre, el que tiene mayor porcentaje en masa es la calcopirita.

34 **La cromita ($FeCr_2O_4$), la cincocromita ($ZnCr_2O_4$) y el zafiro (Al_2O_3CrTi) son tres minerales de interés para el ser humano. Ordénalos en orden creciente de porcentaje en masa de cromo.**

Datos: *m* (Fe) = 55,85 u; *m* (Cr) = 52,00 u; *m* (O) = 16,00 u; *m* (Zn) = 65,38 u;

_m_ (Al) = 26,98 u; *m* (Ti) = 47,87 u.

Vamos a calcular el porcentaje de cromo presente en los tres minerales.

Cromita:

Calculamos su masa fórmula:

$$m \text{ (cromita)} = 1 \cdot 55{,}85 + 2 \cdot 52{,}00 + 4 \cdot 16{,}00 = 223{,}85 \text{ u}$$

Porcentaje en masa de cromo:

$$\frac{223{,}85 \text{ u de cromita}}{2 \cdot 52{,}00 \text{ u de Cr}} = \frac{100}{x} \rightarrow x = 46{,}46 \text{\% de Cr}$$

Cincocromita:

Calculamos su masa fórmula:

$$m \text{ (cincocromita)} = 1 \cdot 65{,}38 + 2 \cdot 52{,}00 + 4 \cdot 16{,}00 = 233{,}38 \text{ u}$$

Porcentaje en masa de cromo:

$$\frac{233{,}38 \text{ u de cincocromita}}{2 \cdot 52{,}00 \text{ u de Cr}} = \frac{100}{x} \rightarrow x = 44{,}56 \text{\% de Cr}$$

Zafiro:

Calculamos su masa fórmula:

$$m \text{ (zafiro)} = 2 \cdot 26{,}98 + 3 \cdot 16{,}00 + 1 \cdot 52{,}00 + 1 \cdot 47{,}87 = 201{,}83 \text{ u}$$

Porcentaje en masa de cromo:

$$\frac{201{,}83 \text{ u de zafiro}}{52{,}00 \text{ u de Cr}} = \frac{100}{x} \rightarrow x = 25{,}76\,\% \text{ de Cr}$$

Por lo tanto, el orden creciente de porcentaje en masa de cromo será:

Zafiro < Cincocromita < Cromita

35 **La composición centesimal de un tipo de acero es la siguiente: 98 % de hierro y 2 % de carbono. Calcula cuántos átomos de hierro hay por cada uno de carbono. Toma un valor para la masa atómica del hierro: *m* (Fe) = 55,85 u.**

Tomemos 100 g de este tipo de acero. Hay que tener en cuenta que se trata de una mezcla homogénea, y no, como hasta ahora, de una sustancia compuesta. Sin embargo, podemos realizar los cálculos de la misma forma que en los problemas anteriores, en los que sí que trabajábamos con sustancias, y aun así llegaremos a un resultado correcto.

Como tenemos 98 g de hierro y 2 g de carbono, podemos calcular la cantidad de sustancia de cada uno de ellos:

$$n_{Fe} = \frac{98{,}00 \text{ g}}{55{,}85 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 1{,}76 \text{ mol}$$

$$n_{C} = \frac{2{,}00 \text{ g}}{12{,}01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}17 \text{ mol}$$

Dividimos la cantidad de sustancia de hierro entre la del carbono:

$$\frac{\text{Fe}}{\text{C}} \rightarrow \frac{1{,}75}{0{,}17} = 10{,}29$$

Es decir, por cada átomo de carbono hay 10,29 de hierro. Si queremos obtener una relación en números enteros sencillos, tendríamos 1029 átomos de Fe por cada 100 de C (esta proporción no se puede simplificar más).

36 **La composición centesimal del bronce es 88 % de cobre y 12 % de estaño. Calcula la proporción en la que se encuentran estos dos átomos.**

Datos: *m* (Cu) = 63,55 u; *m* (Sn) = 118,71 u.

Tomemos 100 g de bronce. Igual que en el ejercicio anterior, se trata de una mezcla homogénea, no de una sustancia compuesta. Sin embargo, podemos llevar a cabo los cálculos igual que antes.

Como tenemos 88 g de cobre y 12 g de estaño:

$$n_{Cu} = \frac{88{,}00 \text{ g}}{63{,}55 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 1{,}39 \text{ mol}$$

$$n_{Sn} = \frac{12{,}00 \text{ g}}{118{,}71 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}10 \text{ mol}$$

Dividimos entre el menor de los valores:

$$\frac{\text{Cu}}{\text{Sn}} \rightarrow \frac{1{,}39}{0{,}10} = 13{,}9$$

Por lo tanto, hay aproximadamente 14 átomos de cobre por cada átomo de estaño.

37 Un hidrocarburo contiene un 80,0% de carbono, siendo el resto hidrógeno. Calcula su fórmula empírica. Si su masa molar es 30,08 g/mol, deduce su fórmula molecular.

Puesto que el 80,0 % corresponde al carbono, el 20,0 % restante será del hidrógeno. Tomamos entonces 100 g de este compuesto, y calculamos las cantidades de sustancia de C y de H.

$$n_C = \frac{80{,}00 \text{ g}}{12{,}01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 6{,}66 \text{ mol}$$

$$n_H = \frac{20{,}00 \text{ g}}{1{,}01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 19{,}80 \text{ mol}$$

Dividimos entre el menor de los valores:

$$C \rightarrow \frac{6{,}66}{6{,}66} = 1$$

$$H \rightarrow \frac{19{,}80}{6{,}66} = 2{,}97 \approx 3$$

Su fórmula empírica será, por tanto: CH_3. Puesto que la fórmula molecular ha de contener un número entero de veces a la unidad, será de la forma: $(CH_3)_n$. Veamos cuánto vale la masa fórmula, a fin de calcular el valor de *n*:

$$m\,(CH_3) = 1 \cdot 12{,}01 + 3 \cdot 1{,}01 = 15{,}04 \text{ u} \rightarrow M\,(CH_3) = 15{,}04 \text{ g/mol}$$

Como la masa molar de la sustancia vale 30,08 g/mol, *n* ha de ser:

$$n = \frac{30{,}08}{15{,}04} = 2$$

Luego la fórmula empírica será:

$$C_2H_6$$

38 El ácido acetilsalicílico es el componente principal de la aspirina. Se trata de un compuesto orgánico que contiene carbono (60%), hidrógeno (4,48%) y oxígeno. Deduce su fórmula empírica. Sabiendo que su masa molecular es de 180,17 u, obtén su fórmula molecular.

Puesto que el 60,00 % corresponde al carbono y el 4,48 % al hidrógeno, el 35,52 % restante ha de ser de oxígeno. Ahora tomemos 100 g de este compuesto y calculamos las cantidades de sustancia de C, H y O:

$$n_C = \frac{60{,}00 \text{ g}}{12{,}01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 5{,}00 \text{ mol}$$

$$n_H = \frac{4{,}48 \text{ g}}{1{,}01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 4{,}44 \text{ mol}$$

$$n_O = \frac{35{,}52 \text{ g}}{16{,}00 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 2{,}22 \text{ mol}$$

Dividimos entre el menor de los valores:

$$C \rightarrow \frac{5}{2{,}22} = 2{,}25$$

$$H \rightarrow \frac{4{,}44}{2{,}22} = 2$$

$$O \rightarrow \frac{2{,}22}{2{,}22} = 1$$

Vemos que no sale exactamente una proporción en números enteros sencillos, pero si multiplicamos por 4, obtenemos C: 9, H: 8, O: 4. Por lo tanto, la fórmula empírica será: $C_9H_8O_4$. Puesto que la fórmula molecular ha de contener un número entero de veces a la unidad, será de la forma: $(C_9H_8O_4)_n$. Veamos cuánto vale la masa fórmula, a fin de calcular el valor de *n*:

$$m\ (C_9H_8O_4) = 9 \cdot 12{,}01 + 8 \cdot 1{,}01 + 4 \cdot 16{,}00 = 180{,}17\ \text{u}$$

Como coincide con la masa molecular, vemos que *n* ha de valer 1, y la fórmula molecular será:

$$C_9H_8O_4$$

39 **El butano tiene un 82,76 % de carbono, siendo el resto hidrógeno. Determina su fórmula química, sabiendo que su masa molar es 58,14 g/mol.**

Puesto que el 82,76 % corresponde al carbono, el 17,24 % restante será del hidrógeno. Tomemos entonces 100 g de este compuesto, y calculamos la cantidad de sustancia de C y de H.

$$n_C = \frac{82{,}76\ \text{g}}{12{,}01\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 6{,}89\ \text{mol}$$

$$n_H = \frac{17{,}24\ \text{g}}{1{,}01\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 17{,}07\ \text{mol}$$

Dividimos entre el menor de los valores:

$$C \ \rightarrow\ \frac{6{,}89}{6{,}89} = 1$$

$$C \ \rightarrow\ \frac{17{,}07}{6{,}89} = 2{,}48 \approx 2{,}5$$

Vemos que no sale una proporción en números enteros sencillos, pero si multiplicamos por 2, obtenemos C: 2; H: 5. Su fórmula empírica será, por tanto: C_2H_5. Puesto que su fórmula molecular contiene un número entero de veces a la empírica, ha de ser de la forma: $(C_2H_5)_n$.

Veamos cuánto vale la masa fórmula:

$$m\ (C_2H_5) = 2 \cdot 12{,}01 + 5 \cdot 1{,}01 = 29{,}07\ \text{u}$$

Como la masa molecular vale 58,14 u, vemos que *n* ha de ser:

$$n = \frac{58{,}14}{29{,}07} = 2$$

Y la fórmula empírica:

$$C_4H_{10}$$

40 **La glucosa es un compuesto orgánico que tiene C, O y H. Cuando se queman completamente 0,2 g de glucosa, se obtienen 0,2931 g de CO_2 y 0,1200 g de vapor de agua. Si su masa molecular es 180,18 u, determina su fórmula molecular y su composición centesimal.**

Como se trata de un compuesto orgánico, todo el carbono y el hidrógeno de la glucosa pasan a formar parte del CO_2 y el H_2O, respectivamente. Veamos entonces las masas de C y de H que hay después de la combustión:

- El CO_2 tiene una masa molecular de 44,01 u, y el carbono, de 12,01 u. Esto quiere decir que, de 44,01 g de CO_2, 12,01 g corresponden al carbono. Por tanto:

$$\frac{44{,}01\ \text{g de } CO_2}{12{,}01\ \text{g de C}} = \frac{0{,}2931\ \text{g de } CO_2}{m_C} \ \rightarrow\ m_C = 0{,}0800\ \text{g de C}$$

- El H_2O tiene una masa molecular de 18,02 u, y el hidrógeno, de 1,01 u. Esto quiere decir que, de 18,02 g de H_2O, 2,02 g corresponden al hidrógeno. Por tanto:

$$\frac{18{,}02 \text{ g de } H_2O}{2{,}02 \text{ g de H}} = \frac{0{,}1200 \text{ g de } H_2O}{m_H} \rightarrow m_H = 0{,}0135 \text{ g de H}$$

Estas masas de C y de H provienen exclusivamente de la glucosa. El resto ha de corresponder al oxígeno:

$$m_O = 0{,}2 - 0{,}0800 - 0{,}0135 = 0{,}1065 \text{ g de O}$$

A continuación, calculamos qué cantidades de sustancia de cada uno de estos elementos teníamos en la muestra de glucosa:

$$n_C = \frac{0{,}0800 \text{ g}}{12{,}01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}00666 \text{ mol de C}$$

$$n_H = \frac{0{,}0135 \text{ g}}{1{,}01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}01337 \text{ mol de H}$$

$$n_O = \frac{0{,}1065 \text{ g}}{16{,}00 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}00666 \text{ mol de O}$$

A fin de obtener la proporción entre ellos, dividimos entre el menor, 0,00666, y obtenemos:

$$C \rightarrow \frac{0{,}00666}{0{,}00666} = 1; \quad H \rightarrow \frac{0{,}01337}{0{,}00666} = 2{,}01; \quad O \rightarrow \frac{0{,}00666}{0{,}00666} = 1$$

Por tanto, la fórmula empírica será: CH_2O. Calculamos la masa de esta unidad, es decir, su masa fórmula:

$$m\,(CH_2O) = 12{,}01 + 2 \cdot 1{,}01 + 16{,}00 = 30{,}03 \text{ u}$$

Puesto que nos dicen que su masa molecular es 180,18 u, tenemos:

$$n = \frac{180{,}18}{30{,}03} = 6$$

Y finalmente, ya tenemos que la fórmula molecular es:

$$C_6H_{12}O_6$$

Calculamos ahora su composición centesimal:

$$\frac{180{,}18 \text{ g de } C_6H_{12}O_2}{6 \cdot 12{,}01 \text{ g de C}} = \frac{100}{x} \rightarrow x = 39{,}99\,\% \text{ de C}$$

$$\frac{180{,}18 \text{ g de } C_6H_{12}O_2}{12 \cdot 1{,}01 \text{ g de H}} = \frac{100}{y} \rightarrow y = 6{,}73\,\% \text{ de H}$$

$$\frac{180{,}18 \text{ g de } C_6H_{12}O_2}{6 \cdot 16{,}00 \text{ g de O}} = \frac{100}{z} \rightarrow z = 53{,}28\,\% \text{ de O}$$

41 El benceno es un compuesto orgánico que contiene solamente carbono e hidrógeno. Al quemar 2,5 g de benceno se obtienen 8,4499 g de CO_2 y 1,7299 g de H. Se sabe que un 1 g de benceno, en condiciones estándar, ocupa un volumen de 0,291 L. Calcula su fórmula molecular.

Como se trata de un compuesto orgánico, todo el carbono y el hidrógeno de la glucosa pasan a formar parte del CO_2 y el H_2O, respectivamente. Veamos entonces las masas de C y de H que hay después de la combustión:

- El CO_2 tiene una masa molecular de 44,01 u, y el carbono, de 12,01 u. Esto quiere decir que, de 44,01 g de CO_2, 12,01 g corresponden al carbono. Por tanto:

$$\frac{44{,}01 \text{ g de } CO_2}{12{,}01 \text{ g de C}} = \frac{8{,}4499 \text{ g de } CO_2}{m_C} \rightarrow m_C = 2{,}3059 \text{ g de C}$$

- El H_2O tiene una masa molecular de 18,02 u, y el hidrógeno, de 1,01 u. Esto quiere decir que, de 18,02 g de H_2O, 2,02 g corresponden al hidrógeno. Por tanto:

$$\frac{18{,}02 \text{ g de } H_2O}{2{,}02 \text{ g de H}} = \frac{1{,}7799 \text{ g de } H_2O}{m_H} \rightarrow m_H = 0{,}1995 \text{ g de H}$$

Estas masas de C y de H provienen exclusivamente del benceno. Por tanto, las cantidades de sustancia de ambos elementos en la muestra original de benceno serán:

$$n_C = \frac{2{,}3059 \text{ g de C}}{12{,}01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}1920 \text{ mol de C}$$

$$n_H = \frac{0{,}1995 \text{ g de H}}{1{,}01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}1975 \text{ mol de H}$$

A fin de obtener la proporción entre ellos, dividimos entre el menor de los valores, y obtenemos:

$$C \rightarrow \frac{0{,}1920}{0{,}1920} = 1; \quad H \rightarrow \frac{0{,}1975}{0{,}1920} = 1{,}03 \approx 1$$

Por tanto, la fórmula empírica será: CH. Calculamos la masa de esta unidad; es decir, su masa fórmula:

$$m\text{ (CH)} = 12{,}01 + 1{,}01 + 16{,}00 = 13{,}02 \text{ u}$$

Por otro lado, sabemos que en condiciones estándar, un mol de gas ocupa 22,7 L. Por tanto:

$$n = \frac{V}{V_m} = \frac{0{,}291}{22{,}7} = 0{,}0128 \text{ mol de benceno}$$

Así pues, 1 g de benceno corresponden a 0,0128 mol. Entonces su masa molar será:

$$M = \frac{m}{n} = \frac{1}{0{,}0128} = 78{,}13 \text{ g/mol}$$

Ya solo tenemos que dividir dicha masa molar entre la masa molar de la fórmula empírica:

$$\frac{78{,}13}{13{,}02} = 6$$

Entonces la fórmula molecular del benceno será: C_6H_6.

42 El cloroformo tiene la siguiente composición centesimal: C: 10,06 %, H: 0,85 %, Cl: el resto. Sabiendo que su densidad en condiciones normales es de 5,33 g/L, determina su fórmula molecular. Utiliza un valor para la masa atómica del cloro: *m* (Cl) = 35,45 u.

El porcentaje de cloro será: 89,09 %. Tomemos, pues, 100 g de compuesto, y veamos cuánta cantidad de sustancia de C, H y Cl contiene.

$$n_C = \frac{10{,}06 \text{ g de C}}{12{,}01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}84 \text{ mol de C}$$

$$n_H = \frac{0{,}85 \text{ g de H}}{1{,}01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}84 \text{ mol de H}$$

$$n_{Cl} = \frac{89{,}09 \text{ g de Cl}}{35{,}45 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 2{,}51 \text{ mol de Cl}$$

Dividimos entre el menor de los valores, a fin de encontrar la proporción entre el número de átomos de cada uno:

$$C \rightarrow \frac{0{,}84}{0{,}84} = 1; \quad H \rightarrow \frac{0{,}84}{0{,}84} = 1; \quad Cl \rightarrow \frac{2{,}51}{0{,}84} = 3$$

Por lo tanto, la fórmula empírica es $CHCl_3$, y su masa fórmula es 119,37 u. En condiciones normales, 1 mol (es decir, 119,37 g) de este compuesto ocupará 22,4 L, por lo que su densidad molar será:

$$d_m = \frac{119{,}37}{22{,}4} = 5{,}33 \text{ g/L}$$

Este valor coincide con el que nos proporciona el enunciado, por lo que la fórmula empírica es igual a la molecular:

$$CHCl_3$$

43 Un óxido de nitrógeno tiene un porcentaje en masa de nitrógeno del 30,43 %. Determina su fórmula empírica.

El óxido de nitrógeno ha de tener una fórmula empírica de la siguiente forma: N_xO_y. Como se dice que el porcentaje en masa de nitrógeno es del 30,43 %, si tomamos 100 g de óxido, 30,43 g corresponderán al N y los 69,57 g restantes, al O. Calculamos la cantidad de sustancia de cada uno de ellos:

$$n_N = \frac{30{,}43 \text{ g}}{14{,}01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 2{,}17 \text{ mol}$$

$$n_O = \frac{69{,}57 \text{ g}}{16{,}00 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 4{,}35 \text{ mol}$$

Ahora dividimos entre el menor de estos valores para obtener la proporción entre ellos:

$$N \rightarrow \frac{2{,}17}{2{,}17} = 1; \quad O \rightarrow \frac{4{,}35}{2{,}17} = 2{,}01 \approx 2$$

Luego se tratará del NO_2.

Espectroscopía y espectrometría aplicadas al análisis químico

44 Se ha analizado, mediante espectrometría de masas, la abundancia isotópica de una muestra de xenón, y se han obtenido los siguientes resultados:

Isótopo	Abundancia relativa (%)
^{126}Xe	0,09
^{128}Xe	1,91
^{129}Xe	26,4
^{130}Xe	4,1
^{131}Xe	21,29
^{132}Xe	26,9
^{134}Xe	10,4
^{136}Xe	8,9

Con estos datos, determina su masa atómica promedio. Representa el espectro de masas que se obtendría.

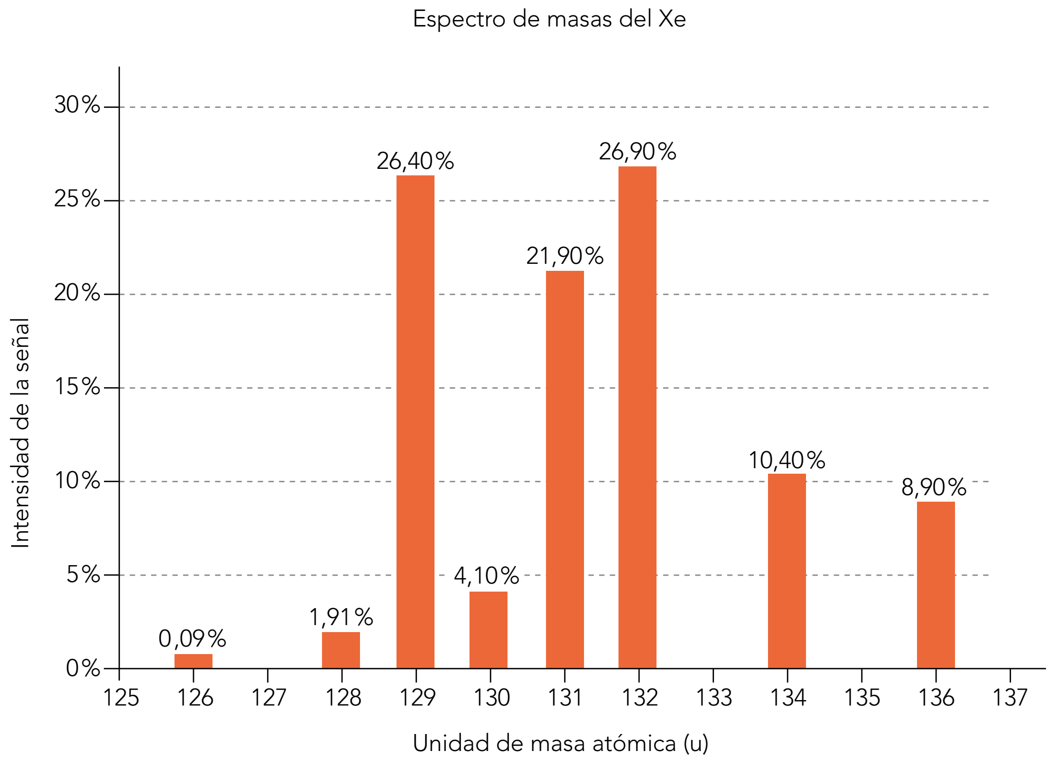
La masa atómica promedio se obtiene calculando la media ponderada de las masas de todos los isótopos. Para simplificar los cálculos, tomamos como masa atómica de cada isótopo su número másico:

$$m\ (\text{Xe}) =$$

$$= \frac{0{,}09 \cdot 126 + 1{,}91 \cdot 128 + 26{,}4 \cdot 129 + 4{,}1 \cdot 130 + 21{,}29 \cdot 131 + 26{,}9 \cdot 132 + 10{,}4 \cdot 134 + 8{,}9 \cdot 136}{100} =$$

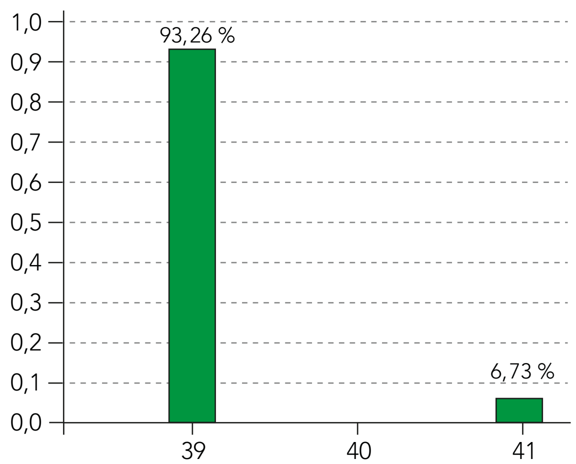
$$= 131{,}38\ \text{u}$$

El espectro de masas tendría la siguiente forma:



Página 61

45 **La siguiente figura muestra el espectro de masas de un cierto elemento. Calcula su masa atómica promedio. ¿Podrías identificar de qué elemento se trata?**



Dado el espectro de masas del enunciado, vemos que hay dos isótopos. La masa atómica promedio será:

$$m = \frac{39 \cdot 93{,}26 + 41 \cdot 6{,}73}{100} = 39{,}13 \text{ u}$$

Buscando en una tabla periódica, vemos que el elemento que más se acerca a este valor es el potasio.

46 **Se ha analizado, mediante espectrometría de masas, la abundancia isotópica de una muestra de hierro, y se han obtenido los siguientes resultados:**

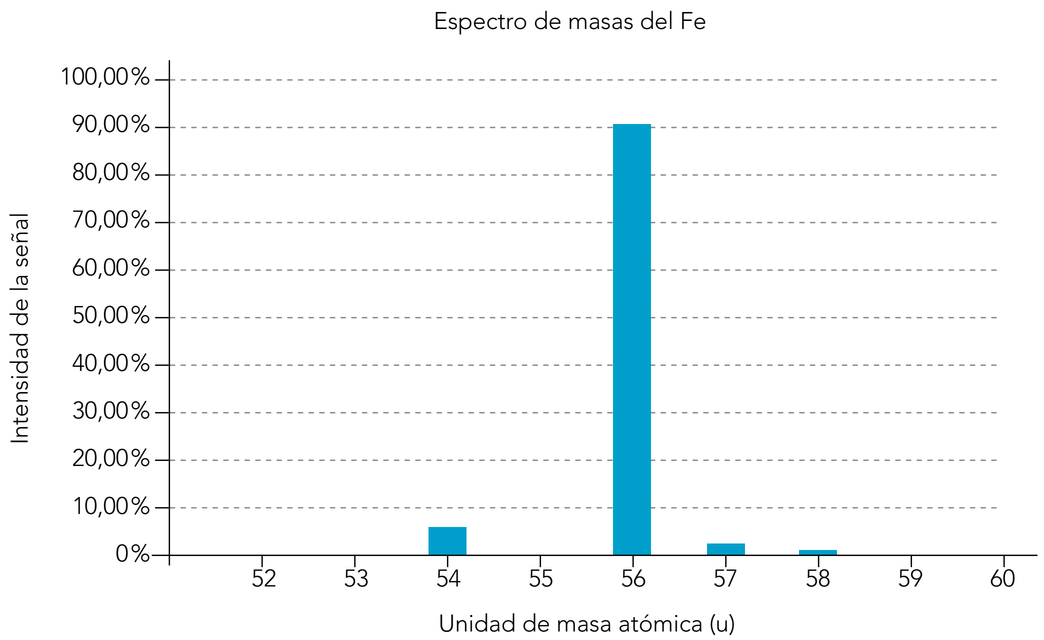
Isótopo	Abundancia relativa (%)
^{54}Fe	5,845
^{56}Fe	91,720
^{57}Fe	2,119
^{58}Fe	0,282

Con estos datos, determina su masa atómica promedio. Representa el espectro de masas que se obtendría.

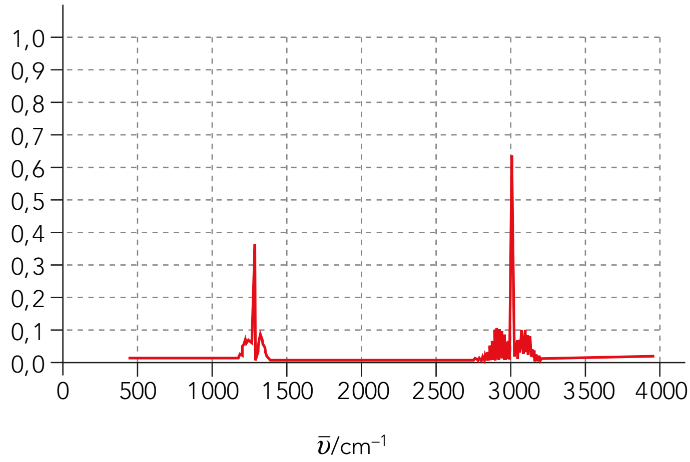
La masa atómica promedio se obtiene calculando la media ponderada de las masas de todos los isótopos. Para simplificar los cálculos, tomamos como masa atómica de cada isótopo su número másico:

$$m\ (\text{Fe}) = \frac{5{,}845 \cdot 54 + 91{,}720 \cdot 56 + 2{,}119 \cdot 57 + 0{,}282 \cdot 58}{100} = 55{,}89 \text{ u}$$

El espectro de masas tendría la siguiente forma:



47 **En la siguiente figura se muestra el espectro infrarrojo del metano. Discute su papel como gas de efecto invernadero.**



Dado el espectro de masas del enunciado, observamos que presenta dos picos que se corresponden, aproximadamente, a los números de ondas: 1300 cm^{-1} y 3000 cm^{-1}. Las longitudes asociadas son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{1\,300} = 7{,}69 \cdot 10^{-4}\ \text{cm} = 7{,}69 \cdot 10^{-3}\ \text{mm}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3\,000} = 3{,}33 \cdot 10^{-4}\ \text{cm} = 3{,}33 \cdot 10^{-3}\ \text{mm}$$

Vemos que ambos corresponden a la radiación infrarroja (λ entre 1 μm = 10^{-3} mm y 1 mm).

Como ya sabemos, la superficie terrestre emite radiación infrarroja (como se ha dicho a lo largo de la unidad, *no se trata de radiación reflejada, sino que es la que emite simplemente por el hecho de encontrarse a cierta temperatura*). Parte de esta radiación será absorbida por las moléculas metano presentes en la atmósfera, aumentando el efecto invernadero. El incremento de su concentración, debido a la actividad humana, favorece el fenómeno del calentamiento global.

2 ESTADOS DE AGREGACIÓN DE LA MATERIA

Para consultar los **criterios de evaluación** y los **estándares de aprendizaje evaluables**, véase la Programación.

2 LA ECUACIÓN DE ESTADO DE LOS GASES IDEALES

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.-1.1.5.) **CE.2.2.** (EA.2.2.1.-2.2.2.-2.2.3.)

Página 69

1 Deduce las leyes de Boyle y las dos de Gay-Lussac a partir de la ley combinada de los gases.

Partimos de la ley combinada de los gases ideales:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

Ley de Boyle:

Si la temperatura permanece constante, entonces: $T_1 = T_2$, y por tanto:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_1} \rightarrow p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

Ley de Charles y Gay-Lussac:

Ahora es la presión la que permanece constante, por lo que: $p_1 = p_2$.

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_1 \cdot V_2}{T_2} \rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Segunda Ley de Charles y Gay-Lussac:

Cuando el volumen permanece constante: $V_1 = V_2$.

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_1}{T_2} \rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

2 Comprueba que los productos *p* · *V* y *n* · *R* · *T* tienen las mismas dimensiones.

Comenzamos obteniendo las dimensiones de cada una de las magnitudes que intervienen en la ecuación de estado:

Como la presión es una magnitud derivada que depende de la fuerza:

$$[F] = [m \cdot a] = \mathrm{M \cdot L \cdot T^{-2}}$$

$$[p] = \left[\frac{F}{S}\right] = \mathrm{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^{-2} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}}$$

Por otro lado:

$$[V] = \mathrm{L^3}$$

$$[n] = \mathrm{N}$$

$$[T] = \theta$$

$$[R] = \frac{[p] \cdot [V]}{[T] \cdot [n]} = \mathrm{M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} \cdot L^3 \cdot \theta^{-1} \cdot N^{-1} = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot N^{-1}}$$

(Observa que T es tiempo y θ es temperatura).

Las unidades de ambos miembros de la ecuación de estado son, por tanto:

$$[p \cdot V] = \mathrm{M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} \cdot L^3 = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}}$$

$$[n \cdot R \cdot T] = \mathrm{N \cdot M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot N^{-1} \cdot \theta = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}}$$

Como vemos, ambas dimensiones coinciden.

3 **La densidad de un gas en c.n. es de 1,09 g/L. Si su temperatura asciende a 23 °C y se mantiene constante la presión, ¿qué densidad tendrá ahora?**

La densidad viene dada por: $d = \dfrac{p \cdot M}{R \cdot T}$

Así pues, tenemos: $d_1 = \dfrac{p_1 \cdot M}{R \cdot T_1}$; $d_2 = \dfrac{p_2 \cdot M}{R \cdot T_2}$

Dividiendo ambas expresiones y simplificando obtenemos:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{T_2}{T_1}$$

Como la presión es constante: $p_1 = p_2$, tendremos:

$$d_1 = d_2 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 1{,}09 \text{ g/L} \cdot \frac{23 + 273}{273} = 1{,}18 \text{ g/L}$$

4 **Si las paredes de la botella del ejercicio resuelto 2 pudieran dilatarse de modo que el volumen fuera un 10 % mayor que el inicial, ¿cuál sería ahora la temperatura que alcanzaría el gas sin explotar?**

Si el volumen del recipiente pudiera aumentarse un 10 %, podría llegar hasta 10,0 · 1,1 = 11,0 L de capacidad. Entonces, utilizando la ley combinada de los gases ideales:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \rightarrow T_2 = T_1 \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{V_2}{V_1} = 283 \cdot \frac{15}{5} \cdot \frac{11}{10} = 933{,}9 \text{ K} = 660{,}9 \text{ °C}$$

Como podemos comprobar, en este caso, admite una temperatura mayor.

5 **Calcula la masa de amoníaco que habrá en un recipiente de 3 L a 22 °C y 713 mmHg. ¿Y si es CO?**

En primer lugar, calculamos la cantidad de sustancia de amoníaco, teniendo en cuenta que:

$$713 \text{ mmHg} = 713 \text{ mmHg} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{760 \text{ mmHg}} = 0{,}938 \text{ atm}$$

$$n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{0{,}938 \text{ atm} \cdot 3 \text{ L}}{0{,}082 \text{ atm} \cdot \text{L} \cdot \text{mol} \cdot \text{K}^{-1} \cdot (22 + 273) \text{ K}} = 0{,}116 \text{ mol}$$

Como la masa molar del amoníaco es de 17,031 g/mol, tendremos:

$$m = n \cdot M = 0{,}116 \cdot 17{,}031 = 1{,}976 \text{ g}$$

Si se tratase de CO, tendríamos la misma cantidad de sustancia, puesto que esta se obtiene a partir de la ecuación de estado, que no depende de la sustancia considerada. Lo que cambia es la masa molar, que en este caso es de 28,010 g/mol, por lo que:

$$m = n \cdot M = 0{,}116 \cdot 28{,}010 = 3{,}249 \text{ g}$$

6 **La composición en volumen del aire es: N_2: 78,08 %; O_2: 20,95 %; Ar: 0,93 %; CO_2: 0,04 %. Calcula las fracciones molares y las presiones parciales de cada gas, así como la presión total ejercida sobre un recipiente de 5 m³ de volumen que contiene 150 mol de aire a una temperatura de 60 °C.**

Vamos a calcular la presión total como si el aire fuera una sustancia simple de la que tenemos 150 mol que ocupan 50 m³. Para ello, usamos la ecuación de estado de los gases ideales. Hay que tener en cuenta que la constante de los gases suele estar en litros, mientras que nosotros tenemos el volumen en metros cúbicos. Realizamos, pues, la conversión:

$$5 \text{ m}^3 \cdot \frac{1\,000 \text{ L}}{1 \text{ m}^3} = 5\,000 \text{ L}$$

La presión será entonces:

$$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{150 \cdot 0{,}082 \cdot (60 + 273)}{5\,000} = 0{,}819\,2 \text{ atm}$$

Considerando que el porcentaje en volumen es la fracción molar expresada en tanto por ciento, las fracciones molares serán:

$$X_{N_2} = 0{,}780\,8; \quad X_{O_2} = 0{,}209\,5; \quad X_{CO_2} = 0{,}000\,4; \quad X_{Ar} = 0{,}009\,3$$

Y ya podemos calcular la presión parcial de cada uno de ellos:

$$p_{N_2} = X_{N_2} \cdot p = 0{,}780\,8 \cdot 0{,}819\,2 = 0{,}639\,6 \text{ atm}$$

$$p_{O_2} = X_{O_2} \cdot p = 0{,}209\,5 \cdot 0{,}819\,2 = 0{,}171\,6 \text{ atm}$$

$$p_{CO_2} = X_{CO_2} \cdot p = 0{,}000\,4 \cdot 0{,}819\,2 = 3{,}28 \cdot 10^{-4} \text{ atm}$$

$$p_{Ar} = X_{Ar} \cdot p = 0{,}009\,3 \cdot 0{,}819\,2 = 0{,}007\,6 \text{ atm}$$

Si realizamos la suma de las presiones parciales, veremos que obtenemos nuevamente la presión total.

Vamos a calcularlo todo ahora de otra forma, considerando cada gas por separado para después sumar las presiones parciales. En primer lugar, necesitamos las cantidades de sustancia:

$$n_{N_2} = X_{N_2} \cdot n = 0{,}780\,8 \cdot 150 = 117{,}120 \text{ mol de } N_2$$

$$n_{O_2} = X_{O_2} \cdot n = 0{,}209\,5 \cdot 150 = 31{,}430 \text{ mol de } O_2$$

$$n_{CO_2} = X_{CO_2} \cdot n = 0{,}000\,4 \cdot 150 = 0{,}060 \text{ mol de } CO_2$$

$$n_{Ar} = X_{Ar} \cdot n = 0{,}009\,3 \cdot 150 = 1{,}395 \text{ mol de Ar}$$

A partir de aquí, usamos la ecuación de los gases ideales para cada uno de ellos:

$$p_{N_2} = \frac{n_{N_2} \cdot R \cdot T}{V} = \frac{117{,}120 \cdot 0{,}082 \cdot 333}{5\,000} = 0{,}639\,6 \text{ atm}$$

$$p_{O_2} = \frac{n_{O_2} \cdot R \cdot T}{V} = \frac{31{,}430 \cdot 0{,}082 \cdot 333}{5\,000} = 0{,}171\,6 \text{ atm}$$

$$p_{CO_2} = \frac{n_{CO_2} \cdot R \cdot T}{V} = \frac{0{,}060 \cdot 0{,}082 \cdot 333}{5\,000} = 3{,}28 \cdot 10^{-4} \text{ atm}$$

$$p_{Ar} = \frac{n_{Ar} \cdot R \cdot T}{V} = \frac{1{,}395 \cdot 0{,}082 \cdot 333}{5\,000} = 7{,}62 \cdot 10^{-3} \text{ atm}$$

Vemos que estos resultados coinciden con los obtenidos anteriormente y, de hecho, su suma es 0,819 2 atm. Sin embargo, como puede comprobarse, la primera forma de resolver el problema es mucho más corta que la segunda.

7 **Como has visto, el porcentaje de CO_2 en la atmósfera es muy pequeño. De hecho, suele expresarse como 400 ppm, es decir, 400 moléculas de CO_2 por millón de partículas en el aire. Si buscas noticias sobre la contaminación atmosférica, encontrarás cuál es el máximo permitido en la actualidad y cuál era antes de la Revolución Industrial. ¿A qué crees que es debida esta diferencia? En grupos, elaborad una infografía donde se expliquen qué medidas, a nivel individual y social, se pueden tomar para no superar el máximo permitido de emisiones de CO_2. Utilizad los datos recogidos en la meta 13.3 de los objetivos para el desarrollo sostenible y la técnica de Folio giratorio.**

En **anayaeducacion.es**, su alumnado puede visualizar la información relativa a la meta 13.3 de los ODS, así como un documento explicativo de cómo aplicar la técnica «Folio giratorio».

5 CONCENTRACIÓN Y SOLUBILIDAD

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.-1.1.5.) CE.2.4. (EA.2.4.1.)

Página 75

8 Se han preparado 0,40 L de disolución de ácido clorhídrico de densidad 1,18 g/mL, que contiene 4,62 g de HCl. Calcula:

a) La molaridad.

b) La molalidad.

c) El tanto por ciento en masa.

d) Las fracciones molares del soluto y del disolvente.

a) Para calcular la molaridad necesitamos conocer la cantidad de sustancia de soluto y el volumen de la disolución. Este último dato lo tenemos.

Para obtener la cantidad de sustancia de HCl utilizamos la masa molecular:

$$M\ (\text{HCl}) = 1{,}008 + 35{,}450 = 36{,}458\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$n_{\text{HCl}} = \frac{4{,}62}{36{,}458} = 0{,}127\ \text{mol}$$

La concentración molar será entonces:

$$M = \frac{n_{\text{soluto}}\ (\text{mol})}{V_{\text{disolución}}\ (\text{L})} = \frac{0{,}127}{0{,}40} = 0{,}318\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

b) Para calcular la molalidad necesitamos ahora la masa de disolvente. Si tenemos 0,40 L de disolución, de densidad 1,18 g/mL, la masa total será:

$$m_{\text{disolución}} = d \cdot V = 1{,}18 \cdot 400 = 472\ \text{g}$$

De ellos, 4,62 g son de HCl. Por tanto, la masa de agua ha de ser:

$$m_{\text{disolvente}} = 472 - 4{,}62 = 467{,}38\ \text{g} \approx 0{,}467\ \text{kg}$$

La molalidad será entonces:

$$m = \frac{n_{\text{HCl}}\ (\text{mol})}{m_{\text{disolvente}}\ (\text{kg})} = \frac{0{,}127}{0{,}467} = 0{,}272\ \text{mol} \cdot \text{kg}^{-1}$$

c) El tanto por ciento en masa será:

$$\%\ (\text{masa}) = \frac{m_{\text{HCl}}}{m_{\text{disolución}}} \cdot 100 = \frac{4{,}62}{472} \cdot 100 = 0{,}98\ \%$$

d) Calculamos la cantidad de sustancia de agua:

$$M\ (H_2O) = 2 \cdot 1{,}008 + 15{,}999 = 18{,}015\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$n_{H_2O} = \frac{467{,}38}{18{,}015} = 25{,}944\ \text{mol}$$

La cantidad de sustancia total será:

$$n = n_{\text{HCl}} + n_{H_2O} = 0{,}127 + 25{,}944 = 26{,}071\ \text{mol}$$

Y las fracciones molares:

$$X_{HCl} = \frac{0{,}127}{26{,}071} = 4{,}87 \cdot 10^{-3} \quad ; \quad X_{H_2O} = \frac{25{,}944}{26{,}071} = 0{,}995\,13$$

9 **Una disolución acuosa de ácido nítrico tiene una concentración del 40 % en masa en un volumen de 0,5 L. Si la densidad de la disolución es de 1 513 g/L, calcula:**

a) La masa de ácido nítrico puro.

b) La molaridad.

c) La molalidad.

a) Para calcular la masa de ácido nítrico puro, como la concentración de la disolución nos la dan en porcentaje en masa, lo primero que deberemos hacer es calcular la masa de disolución. Como la densidad de la disolución es de 1,513 g/mL, tendremos:

$$m = d \cdot V = 1{,}513 \cdot 500 = 756{,}5 \text{ g}$$

Una vez calculada la masa de la disolución, podemos hallar la masa de ácido nítrico puro directamente conociendo la concentración en porcentaje en masa. Al ser la concentración del 40 % en masa, la masa de ácido nítrico puro será:

$$m_{HNO_3} = 0{,}4 \cdot 756{,}5 = 302{,}6 \text{ g}$$

b) Para calcular la molaridad, debemos hallar primero el número de moles que hay en 302,6 g de ácido nítrico. Como la masa molar del HNO_3 es:

$$M(HNO_3) = 1{,}008 + 14{,}007 + 3 \cdot 15{,}999 = 63{,}012 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

tendremos que la cantidad de sustancia de HNO_3 en la disolución será:

$$n_{HNO_3} = \frac{302{,}6}{63{,}012} = 4{,}802 \text{ mol}$$

y la molaridad, por tanto:

$$M = \frac{n_{soluto}\ (\text{mol})}{V_{disolución}\ (\text{L})} = \frac{4{,}802}{0{,}500} = 9{,}60 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

c) Por último, la molalidad vendrá dada por:

$$m = \frac{n_{soluto}\ (\text{mol})}{m_{disolvente}\ (\text{kg})}$$

Como m_{HNO_3} = 302,6 g, la masa de agua será:

$$m_{agua} = 756{,}5 - 302{,}6 = 453{,}9 \text{ g} \approx 0{,}454 \text{ kg}$$

Por tanto:

$$m = \frac{4{,}802}{0{,}454} = 10{,}58 \text{ mol} \cdot \text{kg}^{-1}$$

10 **A partir de lo que has aprendido sobre solubilidad de sólidos en líquidos, diseña una práctica de laboratorio en la que el objetivo sea dibujar las gráficas de solubilidad de, al menos, tres compuestos distintos. Para ello, haz un guion de laboratorio en el que se incluyan el título, la introducción, los objetivos, el material, el procedimiento, los resultados y su discusión, y las conclusiones.**

Respuesta abierta.

6 PREPARACIÓN DE DISOLUCIONES

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.-1.1.5.) CE.2.4. (EA.2.4.1.)

Página 77

11 Una disolución comercial de ácido nítrico tiene una concentración del 65 % en masa y una densidad de 1,45 g/mL. Calcula el volumen necesario para preparar 125 mL de disolución 0,5 M.

Seguimos el procedimiento del texto. En primer lugar, calculamos la cantidad de sustancia de soluto que hace falta:

$$M_{HNO_3} = \frac{n}{V} \rightarrow n = M \cdot V = 0{,}5 \cdot 0{,}125 = 0{,}0625 \text{ mol}$$

$$m_{HNO_3} = n \cdot M\,(HNO_3) = 0{,}0625 \cdot 63{,}012 = 3{,}938 \text{ g}$$

donde hemos tenido en cuenta que:

$$M\,(HNO_3) = 63{,}012 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Como la disolución comercial tiene una concentración del 65 % en masa, tomamos:

$$\frac{100 \text{ g de disolución}}{65 \text{ g de } HNO_3} = \frac{m_{\text{disolución}}}{3{,}938 \text{ g de } HNO_3} \rightarrow m_{\text{disolución}} = 6{,}06 \text{ g de } HNO_3$$

Puesto que conocemos la densidad de la disolución comercial, ya podemos calcular el volumen que necesitamos:

$$V_{\text{disolución}} = \frac{m_{\text{disolución}}}{d} = \frac{6{,}06}{1{,}45} = 4{,}18 \text{ mL}$$

12 Indica el procedimiento para preparar 100 mL de una disolución 0,8 M de glucosa ($C_6H_{12}O_6$). Si se quieren disolver 1,5 g de esta sustancia, ¿qué volumen de disolución se ha de tomar?

El que la concentración sea 0,8 M indica que cada litro de disolución contiene 0,8 mol de soluto. Por lo tanto:

$$n = M \cdot V = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08 \text{ mol}$$

Como la masa molar de la glucosa es 180,156 g/mol, necesitaremos:

$$m = n \cdot M\,(\text{glucosa}) = 0{,}08 \cdot 180{,}156 = 14{,}41 \text{ g}$$

El procedimiento es el de las fotografías que acompañan al texto de la unidad, pesando 14,41 g de soluto y usando un matraz aforado de 100 mL.

Se necesitan 1,5 g de glucosa, esto es:

$$n = \frac{m}{M\,(\text{glucosa})} = \frac{1{,}5}{180{,}156} = 8{,}33 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

Por lo tanto, habrá que tomar un volumen de disolución:

$$V = \frac{n}{M} = \frac{8{,}33 \cdot 10^{-3} \text{ mol}}{0{,}8 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}} \approx 0{,}01 \text{ L} = 10 \text{ mL}$$

13 **Las bebidas carbonatadas (refrescos) o el oxígeno disuelto en el agua del mar son ejemplos de disoluciones de un gas en un líquido. Busca información sobre cómo preparar una disolución de este tipo en el laboratorio y comparte tu propuesta con el resto de la clase. ¿Qué ocurriría si en vez de disolverse O_2 en agua fuera CO_2 el que lo hiciera? Utiliza la técnica de** Sumamos.

En **anayaeducacion.es**, su alumnado puede consultar el documento que explica cómo aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo «Sumamos».

Respuesta abierta.

7 PROPIEDADES COLIGATIVAS

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.-1.1.5.) CE.2.5. (EA.2.5.1.-2.5.2.)

Página 79

14 **Calcula la masa de urea que hay en 250 g de agua si la presión de vapor del agua pura es de 24,00 mmHg, y la de una disolución acuosa de urea es de 22,87 mmHg.**

Dato: *M* (urea) = 60,07 g/mol

La disminución de la presión de vapor es:

$$\Delta p = 24{,}00 - 22{,}87 = 1{,}13 \text{ mmHg}$$

Por tanto, la fracción molar será:

$$\Delta p = p^{\circ} \cdot X_s \rightarrow X_s = \frac{\Delta p}{p^{\circ}} = \frac{1{,}13}{24{,}00} = 0{,}0471$$

250 g de agua corresponden a una cantidad de sustancia:

$$\frac{250{,}000}{18{,}015} = 13{,}88 \text{ mol de agua}$$

A partir de aquí, ya podemos calcular la cantidad de sustancia de urea:

$$0{,}0471 = \frac{n_{urea}}{n_{urea} + 13{,}88} \rightarrow 0{,}0471 \cdot n_{urea} + 0{,}6538 = n_{urea}$$

$$0{,}9529 \cdot n_{urea} = 0{,}6538 \rightarrow n_{urea} = 0{,}6861 \text{ mol}$$

Y la masa será:

$$m = n \cdot M = 0{,}6861 \cdot 60{,}07 = 41{,}21 \text{ g}$$

15 **La presión de vapor de una disolución, de 100 g de sacarosa en 200 g de agua a una temperatura de 25 °C, es de 23,17 mmHg. Determina la masa molecular de la sacarosa. Si se disuelven 200 g de sacarosa en 100 g agua, ¿cuál será la presión de vapor de esta disolución a 40 °C?**

Dato: *p*° (agua a 40 °C) = 55,32 mmHg

La presión de vapor del agua pura a 25 °C es de 23,78 mmHg. Como la presión de vapor de la disolución a esa misma temperatura es de 23,17 mmHg, la variación habrá sido de:

$$\Delta p = 23{,}78 - 23{,}17 = 0{,}61 \text{ mmHg}$$

A partir de este dato, podemos calcular la fracción molar de sacarosa:

$$\Delta p = p^{\circ} \cdot X_{s} \rightarrow X_{s} = \frac{\Delta p}{p^{\circ}} = \frac{0,61}{23,78} = 0,0257$$

Como tenemos 200 g de agua:

$$n_{H_2O} = \frac{200,00}{18,015} = 11,10 \text{ mol}$$

Con esta información, ya podemos obtener la cantidad de sustancia de sacarosa:

$$0,0257 = \frac{n_{\text{sacarosa}}}{n_{\text{sacarosa}} + 11,10} \rightarrow n_{\text{sacarosa}} = 0,2928 \text{ mol}$$

Dado que el enunciado dice que teníamos 100 g de sacarosa, la masa molar será:

$$n_{\text{sacarosa}} = \frac{m}{M\ (\text{sacarosa})}$$

$$M\ (\text{sacarosa}) = \frac{m}{n_{\text{sacarosa}}} = \frac{100}{0,2928} = 341,53 \text{ g/moll}$$

y la masa molecular:

$$m\ (\text{sacarosa}) = 341,53\ m_{u}$$

que, como vemos, es muy cercano al valor real: 342,34 m_u.

Si disolvemos 200 g de sacarosa en 100 g de agua, tendremos (usando el valor real de la masa molar):

$$n_{\text{sacarosa}} = \frac{m}{M\ (\text{sacarosa})} = \frac{200,00}{342,34} = 0,5842 \text{ mol}$$

$$n_{\text{agua}} = \frac{m}{M\ (\text{agua})} = \frac{100,00}{18,015} = 5,5509 \text{ mol}$$

$$X_{s} = \frac{0,5842}{0,5482 + 5,5509} = 0,0958$$

Por tanto:

$$\Delta p = p^{\circ} \cdot X_{s} = 55,32 \cdot 0,0958 = 5,30 \text{ mmHg}$$

Y la presión de vapor será:

$$p = 55,32 - 5,30 = 50,02 \text{ mmHg}$$

16 **La volatilidad de una sustancia es una medida de su tendencia a abandonar la fase líquida para pasar a la fase gaseosa. La volatilización es el principal tipo de emisión atmosférica en la mayoría de los terrenos en los que existen vertidos tóxicos y estaciones de servicio. Infórmate sobre este hecho y propón alguna solución para paliarlo. Utiliza la técnica Solución a cuatro.**

Le sugerimos que recuerde a su alumnado que en **anayaeducacion.es** dispone de un documento que explica cómo aplicar la técnica de desarrollo del pensamiento «Solución a cuatro», sugerida para resolver esta actividad.

Respuesta abierta.

Página 80

17 **Cuando se disuelven 20 g de glucosa en 60 mL de agua, se observa que la disolución congela a una temperatura de –3,44 °C. Calcula la masa molecular del soluto y la temperatura de ebullición de la disolución.**

La temperatura de congelación del agua pura es de 0 °C. Por tanto, el descenso crioscópico es: ΔT_c = 3,44 °C. Dado que la constante crioscópica del agua es: K_c = 1,86 °C · mol^{-1} · kg, tendremos:

$$\Delta T_c = K_c \cdot m \rightarrow m = \frac{\Delta T_c}{K_c} = \frac{3,44}{1,86} = 1,85 \text{ mol/kg}$$

Por otro lado, se dice que se utilizan 60 mL de agua. Suponiendo una densidad d_{agua} = 1 g/cm^3, tendremos una masa m = 60 g = 0,060 kg, con lo que ya podemos obtener la cantidad de sustancia de glucosa:

$$m = \frac{n_{glucosa}}{m_{H_2O}} \rightarrow n_{glucosa} = m \cdot m_{H_2O} = 1,85 \cdot 0,060 = 0,111 \text{ mol}$$

Como se utilizan 20 g de glucosa, la masa molar será:

$$n_{glucosa} = \frac{m_{glucosa}}{M \text{ (glucosa)}} \rightarrow M \text{ (glucosa)} = \frac{m_{glucosa}}{n_{glucosa}} = \frac{20}{0,111} = 180,18 \text{ g/mol}$$

Valor que coincide con el que se puede calcular a partir de la fórmula molecular $C_6H_{12}O_6$. Por tanto, la masa molar será 180,18 m_u. Como se puede comprobar, este método sirve para determinar masas moleculares de sustancias desconocidas con bastante precisión.

Por otra parte, el aumento ebulloscópico vendrá dado por:

$$\Delta T_e = K_e \cdot m = 0,512 \cdot 0,111 \approx 0,06 \text{ °C}$$

Así que, la temperatura de ebullición de la disolución será: T_e = 100,06 °C.

18 **Para prevenir los riesgos que provocan las heladas en la circulación, se añade sal en las carreteras. ¿Cuánta sal habrá que mezclar con medio kilogramo de agua para que disminuya la temperatura de congelación a –12 °C?**

La temperatura de congelación del agua pura es de 0 °C. El descenso crioscópico es: ΔT_c = 12 °C. Sabiendo que la constante crioscópica del agua es: K_c = 1,86 °C · mol^{-1} · kg, tendremos:

$$\Delta T_c = K_c \cdot m \rightarrow m = \frac{\Delta T_c}{K_c} = \frac{12}{1,86} = 6,45 \text{ mol/kg}$$

Así pues, la cantidad de sustancia de cloruro sódico que será necesaria vendrá dada por:

$$m = \frac{n_{sal}}{m_{H_2O}} \rightarrow n_{sal} = m \cdot m_{H_2O} = 6,45 \cdot 0,5 = 3,23 \text{ mol}$$

Sabiendo que la masa fórmula del cloruro sódico es:

$$M \text{ (NaCl)} = 58,439 \text{ g/mol}$$

Finalmente, tendremos la masa de sal necesaria:

$$m_{sal} = n_{sal} \cdot M \text{ (NaCl)} = 3,23 \cdot 58,439 = 188,76 \text{ g}$$

19 **Busca qué es un anticongelante y su composición. ¿Para qué se utiliza en los coches? Utiliza la técnica de** Las 6 W.

Recuerde a su alumnado que en el banco de recursos de **anayaeducacion.es** podrá consultar un documento que explica cómo aplicar la técnica «Las 6 W».

Respuesta abierta.

Página 81

20 **Calcula la presión osmótica que ejercerá medio litro de una disolución que contiene 25 g de glucosa, $C_6H_{12}O_6$, a 40 °C. ¿Cuál es la altura de una columna de mercurio que ejerciera esa misma presión? Dato: d_{Hg} = 13,69 g/cm³.**

La masa molar de la glucosa es:

$$M\ (C_6H_{12}O_6) = 6 \cdot 12{,}011 + 12 \cdot 1{,}008 + 6 \cdot 15{,}999 = 180{,}156 \text{ g/mol}$$

Por tanto, la molaridad será:

$$n = \frac{25{,}00}{180{,}156} = 0{,}139 \text{ mol} \rightarrow M = \frac{0{,}139}{0{,}500} = 0{,}278 \text{ mol/L}$$

Sustituyendo estos datos en la ecuación de Van't Hoff, obtenemos:

$$\pi = M \cdot R \cdot T = 0{,}278 \cdot 0{,}082 \cdot (40 + 273) = 7{,}14 \text{ atm}$$

Recordemos la equivalencia entre atmósferas y milímetros de mercurio:

$$760 \text{ mmHg} = 1 \text{ atm}$$

Por lo tanto:

$$\pi = 7{,}14 \text{ atm} \cdot \frac{760 \text{ mmHg}}{1 \text{ atm}} \approx 5\,426 \text{ mmHg}$$

Así pues, haría falta una columna de mercurio de unos 5,43 metros de altura para obtener esa misma presión.

21 **Se sabe que 0,50 L de una cierta disolución, que contiene 10 g de un soluto desconocido, ejerce una presión osmótica capaz de contrarrestar la presión de una columna de mercurio de 1 079 mm de altura. ¿De qué soluto se trata: de glucosa ($C_6H_{12}O_6$) o de sacarosa ($C_{12}H_{22}O_{12}$)?**

Dado que la disolución es capaz de contrarrestar la presión ejercida por una columna de 1 079 mm de mercurio, tendremos que la presión osmótica es:

$$\pi = 1079 \text{ mmH} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{760 \text{ mmHg}} \approx 1{,}420 \text{ atm}$$

A partir de este dato podemos obtener la concentración de la disolución:

$$\pi = M \cdot R \cdot T \rightarrow M = \frac{\pi}{R \cdot T} = \frac{1{,}420}{0{,}082 \cdot (25 + 273)} = 0{,}058 \text{ mol/L}$$

Por tanto, la cantidad de sustancia de soluto presente en la disolución será:

$$M = \frac{n}{V} \rightarrow n = M \cdot V = 0{,}058 \cdot 0{,}500 = 0{,}029 \text{ mol}$$

Y como se dice que esta contiene 10 g de dicha sustancia, su masa molar será:

$$n = \frac{m}{M} \rightarrow M = \frac{m}{n} = \frac{10{,}000}{0{,}029} = 344{,}83 \text{ g/mol}$$

Valor mucho más cercano al de la sacarosa, 342,34 g/mol, que al de la glucosa, 180,17 g/mol. Luego se trata de la primera de ellas.

TRABAJA CON LO APRENDIDO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.-1.1.5.-1.1.6.) CE.1.2. (EA.1.2.1.-1.2.2.) CE.2.2. (EA.2.2.1.-2.2.2.-2.2.3.) CE.2.4. (EA.2.4.1.) CE.2.5. (EA.2.5.1.-2.5.2.)

Página 86

Estados de agregación. Leyes de los gases

1 Calcula la masa de amoníaco que hay en un recipiente de 2,55 L a 30 °C y 725 mmHg. Si se añaden 25 g de amoníaco, sin modificar la presión ni la temperatura, ¿qué volumen ocupará ahora el gas?

En primer lugar, calculamos el número de moles de amoníaco que hay en el recipiente utilizando la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p = 725 \text{ mmHg} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{760 \text{ mmHg}} = 0{,}954\,0 \text{ atm}$$

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \rightarrow n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{0{,}954\,0 \cdot 2{,}55}{0{,}082 \cdot (30 + 273)} = 0{,}098 \text{ mol}$$

Como la masa molar del amoníaco es de 17,031 g/mol, la masa de dicha sustancia que habrá en el recipiente será:

$$m = n \cdot M = 0{,}098 \cdot 17{,}031 = 1{,}669 \text{ g}$$

Si se añaden 25 g, la masa será ahora de 26,669 g, y la cantidad de sustancia:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{26{,}669}{17{,}031} = 1{,}566 \text{ mol}$$

Como no cambian ni p ni T, podemos utilizar la ley de Avogadro para calcular el volumen:

$$\frac{V_1}{n_1} = \frac{V_2}{n_2} \rightarrow V_2 = V_1 \cdot \frac{n_2}{n_1} = 2{,}55 \cdot \frac{1{,}566}{0{,}098} = 40{,}75 \text{ L}$$

2 Un recipiente de 5 L contiene oxígeno a 0 °C. La presión en su interior es de 1 000 mmHg. Calcula la masa de oxígeno y el volumen que ocuparía en condiciones normales.

Como la presión es:

$$p = 1000 \text{ mmHg} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{760 \text{ mmHg}} = 1{,}316 \text{ atm}$$

Utilizando la ecuación de estado de los gases ideales, obtenemos:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \rightarrow n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{1{,}316 \cdot 5}{0{,}082 \cdot 273} = 0{,}294 \text{ mol}$$

Dado que la masa molar del oxígeno es 31,998 g/mol, la masa de dicha sustancia contenida en el recipiente será:

$$m = n \cdot M = 0{,}294 \cdot 31{,}988 = 9{,}405 \text{ g}$$

En condiciones normales, 1 mol de sustancia ocupa 22,4 L. Por tanto:

$$V = n \cdot V_m = 0{,}294 \cdot 22{,}4 = 6{,}586 \text{ L}$$

3 Se tiene un gas, inicialmente en condiciones normales.

a) Si se aumenta su temperatura hasta los 100 °C, manteniendo constante el volumen, ¿qué presión tendrá entonces?

b) Posteriormente, se disminuyen tanto la presión como el volumen a la mitad. Calcula la temperatura que ha de tener el gas al final del proceso.

a) Inicialmente, el gas se encuentra en condiciones normales, p = 1 atm, T = 0 °C. Como aumenta la temperatura manteniendo constante el volumen, podemos usar la 2.ª ley de Charles-Gay Lussac:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \rightarrow p_2 = \frac{T_2}{T_1} \cdot p_1 = \frac{373}{273} \cdot 1 = 1{,}366 \text{ atm}$$

b) Ahora disminuyen tanto la presión como el volumen a la mitad. Usando la ley combinada de los gases y teniendo en cuenta que $p_2/p_1 = 1/2$ y $V_2/V_1 = 1/2$:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \rightarrow T_2 = T_1 \cdot \underbrace{\frac{p_2}{p_1}}_{=1/2} \cdot \underbrace{\frac{V_2}{V_1}}_{=1/2} = \frac{373}{4} = 93{,}25 \text{ K} = -179{,}75 \text{ °C}$$

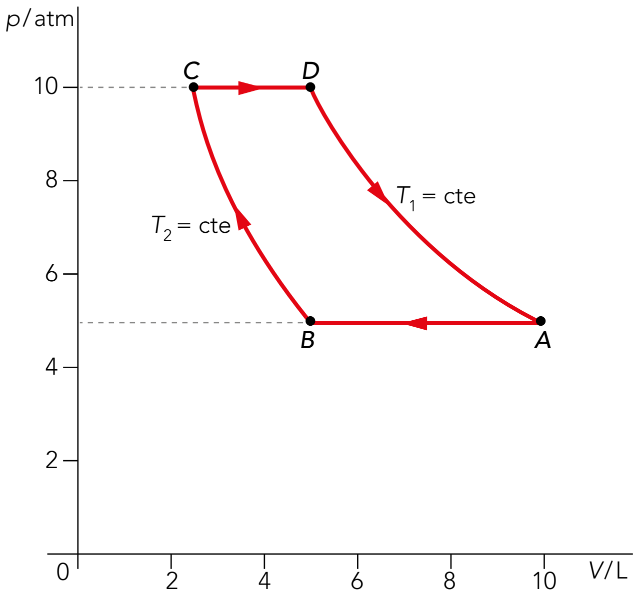
4 **Inicialmente, un neumático se encuentra a una temperatura de 15 °C y a 2,2 atm de presión. Después de estar conduciendo un tiempo, su temperatura aumenta hasta los 55 °C. Si el volumen no se ha modificado, ¿cuál será su presión? ¿Por qué es conveniente comprobar la presión de los neumáticos en frío?**

Como el volumen del neumático permanece constante, usamos la 2.ª ley de Carles-Gay-Lussac:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \rightarrow p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 2{,}2 \text{ atm} \cdot \frac{(55 + 273) \text{ K}}{(15 + 273) \text{ K}} = 2{,}51 \text{ atm}$$

Se recomienda medir la presión de los neumáticos cuando están aún fríos porque si lo hiciéramos después de un tiempo de conducción, veríamos que es superior a la recomendada. Entonces, si sacamos aire en caliente y dejamos la presión en la recomendada por el fabricante (por ejemplo, a 2,2 atm), al parar el coche y enfriarse, esta disminuirá por debajo del nivel que debería tener, causando daños en los neumáticos. Por ejemplo, si a 55 °C queremos dejar la presión a 2,2 atm, cuando se enfríen, digamos, a 15 °C, esta habrá descendido hasta 1,9 atm.

5 **Un cierto gas ideal describe el ciclo *ABCD* que se muestra en la figura siguiente.**



Calcula los valores de presión, temperatura y volumen correspondientes a esos cuatro puntos a partir de los datos mostrados en la gráfica y de los siguientes valores: *p*(*A*) = 5 atm, *T*(*A*) = 60 C *V*(*B*) = 5 L.

Observamos la gráfica, donde el gas recorre el ciclo *ABCD*.

Los datos en el **punto *A*** son los siguientes: $V(A)$ = 10 L; $p(A)$ = 5 atm; $T(A)$ = 60 °C = 333 K

Punto *B*:

Como la presión en el tramo *AB* es constante y el volumen es 5 L, tenemos:

$$V(B) = 5 \text{ L}; \quad p(B) = 5 \text{ atm}$$

Para determinar la temperatura, aplicamos la 1.ª ley de Charles – Gay Lussac:

$$\frac{V(A)}{T(A)} = \frac{V(B)}{T(B)} \rightarrow T(B) = T(A) \cdot \frac{V(B)}{V(A)} = 333 \cdot \frac{5}{10} = 166{,}5\ \text{K} = -106{,}5\ °\text{C}$$

Punto *C*:

La temperatura a lo largo del tramo *BC* es constante, por lo que ya tenemos:

$$p(C) = 10\ \text{atm}; \quad T(C) = 166{,}5\ \text{K}$$

Para calcular el volumen en C, usamos la ley de Boyle:

$$p(C) \cdot V(C) = p(B) \cdot V(B) \rightarrow V(C) = V(B) \cdot \frac{p(B)}{p(C)} = 5 \cdot \frac{5}{10} = 2{,}5\ \text{L}$$

Punto *D*:

Como el tramo *CD* es a presión constante, ya sabemos que:

$$p(D) = 10\ \text{atm}$$

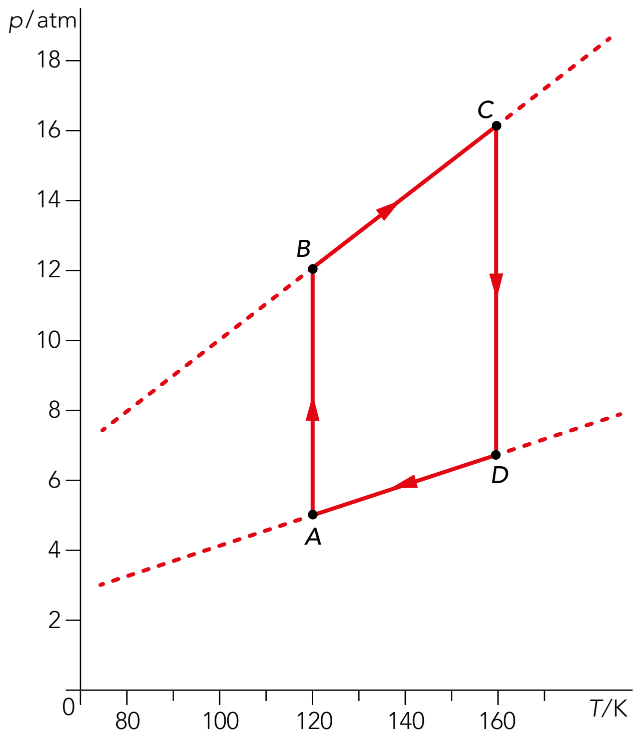
Por otra parte, como $T(D) = T(A)$, tenemos:

$$T(D) = 60\ °\text{C} = 333\ \text{K}$$

Para calcular el volumen utilizamos la 1.ª ley de Charles – Gay Lussac:

$$\frac{V(C)}{T(C)} = \frac{V(D)}{T(D)} \rightarrow V(D) = V(C) \cdot \frac{T(D)}{T(C)} = 2{,}5 \cdot \frac{333}{166{,}5} = 5\ \text{L}$$

6 **Un mol de un gas ideal describe el ciclo *ABCD* que se muestra en la figura siguiente:**



Calcula los valores de presión, temperatura y volumen correspondientes a esos cuatro puntos a partir de los datos mostrados en la gráfica, sabiendo que $p(A) = 5$ atm.

Observando la gráfica:

Punto *A*:

Los datos en el punto *A* son los siguientes:

$$p(A) = 5\ \text{atm}; \quad T(A) = 120\ \text{K}$$

Como nos dicen que tenemos 1 mol de sustancia, podemos calcular el volumen:

$$V(A) = \frac{n \cdot R \cdot T(A)}{p(A)} = \frac{1 \cdot 0{,}082 \cdot 120}{5} = 1{,}968\ \text{L}$$

Punto *B*:

Como la temperatura en el tramo *AB* es constante, y la presión es de 12 atm, tenemos:

$$p(B) = 12\ \text{atm}; \quad T(B) = 120\ \text{K}$$

Para determinar el volumen aplicamos la ley de Boyle:

$$p(A) \cdot V(A) = p(B) \cdot V(B) \rightarrow V(B) = V(A) \cdot \frac{p(A)}{p(B)} = 1{,}968 \cdot \frac{5}{12} = 0{,}820\ \text{L}$$

O bien utilizamos la ecuación de estado de los gases ideales:

$$V(B) = \frac{n \cdot R \cdot T(B)}{p(B)} = \frac{1 \cdot 0{,}082 \cdot 120}{12} = 0{,}820\ \text{L}$$

Punto *C*:

En este punto tenemos:

$$p(C) = 16\ \text{atm}; \quad T(C) = 160\ \text{K}$$

Para calcular el valor de $V(C)$, vamos a utilizar la ley combinada de los gases ideales:

$$\frac{p(B) \cdot V(B)}{T(B)} = \frac{p(C) \cdot V(C)}{T(C)} \rightarrow V(C) = V(B) \cdot \frac{T(C)}{T(B)} \cdot \frac{p(B)}{p(C)} =$$

$$= 0{,}820 \cdot \frac{160}{120} \cdot \frac{12}{16} = 0{,}820\ \text{L}$$

También podríamos haber empleado la ecuación de estado de los gases ideales, ya que sabemos que hay 1 mol de gas:

$$V(C) = \frac{n \cdot R \cdot T(C)}{p(C)} = \frac{1 \cdot 0{,}082 \cdot 160}{16} = 0{,}820\ \text{L}$$

E incluso, más fácilmente, basta con tener en cuenta que la recta que pasa por los puntos *B* y *C* viene dada por la 2.ª ley de Charles-Gay Lussac, por lo que el proceso *BC* es a volumen constate:

$$V(C) = V(B) = 0{,}820\ \text{L}$$

Punto *D*:

En este punto tenemos:

$$T(D) = 160\ \text{K}$$

Observa que está conectado con el punto *A* mediante una recta, por lo que la relación entre *A* y *D* viene dada por la 2.ª ley de Charles-Gay Lussac:

$$V(D) = V(A) = 1{,}968\ \text{L}$$

$$\frac{p(A)}{T(A)} = \frac{p(D)}{T(D)} \rightarrow p(D) = p(A) \cdot \frac{T(D)}{T(A)} = 5\ \text{atm} \cdot \frac{160\ \text{K}}{120\ \text{K}} = 6{,}667\ \text{atm}$$

Podemos comprobar que este valor es correcto empleando la ley de Boyle entre los puntos *C* y *D*:

$$p(D) \cdot V(D) = p(C) \cdot V(C) \rightarrow V(D) = V(C) \cdot \frac{p(C)}{p(D)} = 0{,}820 \text{ L} \cdot \frac{16 \text{ atm}}{6{,}667 \text{ atm}} = 1{,}968 \text{ L}$$

7 **Comprueba que el cociente (*p* · *M*)/(*R* · *T*) tiene dimensión de densidad.**

Partimos de las dimensiones de cada una de las magnitudes:

$$[p] = \left[\frac{F}{S}\right] = \frac{\text{M} \cdot \text{L}}{\text{T}^2} \cdot \frac{1}{\text{L}^2} = \frac{\text{M}}{\text{L} \cdot \text{T}^2}$$

$$[M] = \left[\frac{m}{n}\right] = \frac{\text{M}}{\text{N}}$$

Observa que *M*, en cursiva, es la masa molar del gas, mientras que M, sin cursiva, es la dimensión de la masa.

$$[R] = \frac{[p] \cdot [V]}{[T] \cdot [n]} = \frac{\text{M}}{\text{L} \cdot \text{T}^2} \cdot \text{L}^3 \cdot \frac{1}{\theta \cdot \text{N}} = \frac{\text{M} \cdot \text{L}^2}{\text{T}^2 \cdot \theta \cdot \text{N}}$$

$$[T] = \theta$$

Por tanto:

$$\left[\frac{p \cdot M}{R \cdot T}\right] = \frac{\text{M}}{\text{L} \cdot \text{T}^2} \cdot \frac{\text{M}}{\text{N}} \cdot \frac{\text{T}^2 \cdot \theta \cdot \text{N}}{\text{M} \cdot \text{L}^2} \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{\text{M}}{\text{L}^3}$$

Como vemos, efectivamente, el cociente tiene dimensión de densidad.

8 **Al quemar una cierta cantidad de etileno se obtienen 4,4626 g de CO_2 y 0,9136 g de H_2O. Sabiendo que su densidad a 50 °C y 2 atm es de 0,00197 g/cm³, determina su fórmula molecular.**

En primer lugar, determinamos la masa de cada uno de los elementos presentes en la muestra. Como se trata de un compuesto orgánico, todo su carbono termina formando parte del CO_2, y todo su hidrógeno pasa al H_2O.

La masa molecular del CO_2 es 44,009 g/mol, de los que 12,011 g/mol corresponden al C. Por tanto:

$$\frac{44{,}009 \text{ g de } CO_2}{12{,}011 \text{ g de C}} = \frac{4{,}4626 \text{ g de } CO_2}{m_C} \rightarrow m_C = 1{,}2179 \text{ g de C}$$

Por otro lado, la masa molar del H_2O es 18,015 g/mol, de los que 2,016 g/mol corresponden al H. Por tanto:

$$\frac{18{,}015 \text{ g de } H_2O}{2{,}016 \text{ g de H}} = \frac{0{,}9136 \text{ g de } H_2O}{m_H} \rightarrow m_H = 0{,}1022 \text{ g de H}$$

A continuación, calculamos el número de moles que había de C y de H en la muestra original de etileno:

$$n_C = \frac{1{,}2179 \text{ g de C}}{12{,}011 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}1014 \text{ mol de C}$$

$$n_H = \frac{0{,}1022 \text{ g de H}}{1{,}008 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}1014 \text{ mol de H}$$

Por tanto, la fórmula empírica es CH, y su masa fórmula es 13,019 u. Para determinar su masa molar, vamos a utilizar el dato de la densidad:

$$d = 0{,}00197 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{1000 \text{ cm}^3}{1 \text{ L}} = 1{,}97 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$d = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} \rightarrow M = \frac{d \cdot R \cdot T}{p} = \frac{1{,}97 \cdot 0{,}082 \cdot (50 + 273)}{2} = 26{,}089 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Por tanto, el número de veces que la fórmula molecular contiene a la fórmula empírica será:

$$\frac{26,089}{13,019} \approx 2$$

Así que, la fórmula del etileno será: C_2H_2.

9 **Al quemar una cierta cantidad de una sustancia que contiene únicamente C, H y N, se obtienen 2,400 0 g de CO_2, 1,473 1 g de H_2O y 0,823 6 g de NO_2. Sabiendo que, a 350 °C y 1,5 atm, 10 g de este gas ocupan un volumen de 5,76 L, determina su fórmula molecular.**

En primer lugar, determinamos la masa de cada uno de los elementos presentes en la muestra. Como se trata de un compuesto orgánico, todo su carbono termina formando parte del CO_2, todo su hidrógeno pasa al H_2O, y todo el nitrógeno termina en forma de NO_2.

La masa molar del CO_2 es 44,009 g/mol, de los que 12,011 g/mol corresponden al C. Por tanto:

$$\frac{44,009 \text{ g de } CO_2}{12,011 \text{ g de C}} = \frac{2,400\,0 \text{ g de } CO_2}{m_C} \rightarrow m_C = 0,655\,0 \text{ g de C}$$

Por otro lado, la masa molar del H_2O es 18,015 g/mol, de los que 2,016 g/mol corresponden al H. Por tanto:

$$\frac{18,015 \text{ g de } H_2O}{2,016 \text{ g de M}} = \frac{1,473\,1 \text{ g de } H_2O}{m_H} \rightarrow m_H = 0,164\,8 \text{ g de H}$$

Por último, la masa molecular del NO_2 es 46,005 g/mol, de los que 14,007 g/mol corresponden al N. Por tanto:

$$\frac{46,005 \text{ g de } H_2O}{14,007 \text{ g de H}} = \frac{0,835\,9 \text{ g de } NO_2}{m_N} \rightarrow m_N = 0,254\,5 \text{ g de N}$$

A continuación, calculamos la cantidad de sustancia de C, H y N que había en la muestra original:

$$n_C = \frac{0,655\,0 \text{ g de C}}{12,011 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0,054\,5 \text{ mol de C}$$

$$n_H = \frac{0,164\,8 \text{ g de H}}{1,008 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0,163\,5 \text{ mol de H}$$

$$n_N = \frac{0,254\,5 \text{ g de N}}{14,007 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0,018\,2 \text{ mol de N}$$

Dividiendo entre el menor, obtenemos:

$$C \rightarrow \frac{0,054\,5}{0,018\,2} \approx 3; \quad H \rightarrow \frac{0,163\,5}{0,018\,2} \approx 9; \quad N \rightarrow \frac{0,018\,2}{0,018\,2} = 1$$

Por tanto, la fórmula empírica es C_3H_9N, y su masa fórmula 59,112 u. Para determinar su masa molar, vamos a utilizar el dato proporcionado sobre la densidad. En primer lugar, a 350 °C y 1,5 atm será:

$$d = \frac{10 \text{ g}}{5,76 \text{ L}} = 1,736 \text{ g/L}$$

A partir de ese valor, determinamos la masa molar:

$$d = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} \rightarrow M = \frac{d \cdot R \cdot T}{p} = \frac{1,736 \cdot 0,082 \cdot (350 + 273)}{1,5} = 59,124 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Por tanto, la fórmula empírica coincide con la molecular: se trata del C_3H_9N.

10 **Al quemar 1,1 g de propanol, se obtienen 1,270 L de CO_2 y 1,690 L de H_2O, ambos gaseosos y medidos a 1,5 atm y 150 °C. Sabiendo que 2,0 g de propanol ocupan, a 0,98 atm y 127 °C, un volumen de 1,114 L, determina su fórmula molecular.**

En primer lugar, determinamos la cantidad de carbono e hidrógeno que tenía la muestra original. En este caso, no se nos proporciona la cantidad en gramos de CO_2 y H_2O, sino que se nos dan otros datos para obtener las cantidades de sustancia de C y de H. Veamos cómo proceder para extraer esa información. Usaremos la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \rightarrow n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T}$$

$$n_{CO_2} = \frac{1{,}5 \cdot 1{,}270}{0{,}082 \cdot (150 + 273)} = 0{,}0549 \text{ mol de } CO_2$$

$$n_{H_2O} = \frac{1{,}5 \cdot 1{,}690}{0{,}082 \cdot (150 + 273)} = 0{,}0731 \text{ mol de } H_2O$$

Como 1 mol de CO_2 contiene 1 mol de C y 1 mol de H_2O contiene 2 moles de H, ya tenemos las cantidades de C y H que había en la muestra original de propanol:

$$n_C = 0{,}0549 \text{ mol} \rightarrow m_C = 0{,}0549 \cdot 12{,}011 = 0{,}6594 \text{ g de C}$$

$$n_H = 2 \cdot 0{,}0731 = 0{,}1462 \text{ mol} \rightarrow m_H = 0{,}1462 \cdot 1{,}008 = 0{,}1474 \text{ g de H}$$

Y, finalmente, podemos calcular la masa de oxígeno:

$$m_O = 1{,}1000 - 0{,}6594 - 0{,}1474 = 0{,}2932 \text{ g de O}$$

De donde obtenemos su cantidad de sustancia:

$$n_O = \frac{0{,}2932}{15{,}999} = 0{,}0183$$

Ahora que ya tenemos la cantidad de sustancia de C, H, y O, dividimos entre la menor de ellas para calcular la proporción entre el número de átomos que forman parte de la molécula:

$$C \rightarrow \frac{0{,}0549}{0{,}0183} = 3; \quad H \rightarrow \frac{0{,}1474}{0{,}0183} \approx 8; \quad O \rightarrow \frac{0{,}0183}{0{,}0183} = 1$$

Luego la fórmula empírica de la sustancia será: C_3H_8O. Su masa fórmula es:

$$M\,(C_3H_8O) = 3 \cdot 12{,}011 + 8 \cdot 1{,}008 + 1 \cdot 15{,}999 = 60{,}096 \text{ g/mol}$$

Vamos a determinar ahora la fórmula molecular. Se dice que 2 g de propanol a 0,98 atm de presión y a una temperatura de 127 °C ocupan 1,114 L. Luego la densidad será:

$$d = \frac{m}{V} = \frac{2{,}000}{1{,}114} = 1{,}795 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$$

Y ahora, a partir de la ecuación de estado de los gases ideales:

$$d = \frac{M \cdot p}{R \cdot T} \rightarrow M = \frac{d \cdot R \cdot T}{p} = \frac{1{,}795 \cdot 0{,}082 \cdot (127 + 273)}{0{,}98} = 60{,}078 \text{ g/mol}$$

Como podemos comprobar, la masa molar coincide, dentro de los errores de redondeo, con la masa fórmula. Así pues, la fórmula molecular del propanol será C_3H_8O.

11 **Un gas tiene la siguiente composición centesimal: 81,68 % de C y 18,32 % de H. Si su densidad molar a 1,25 atm y 25 °C es de 2,26 g/L, determina su fórmula molecular.**

Parte de este ejercicio ya se resolvió en la unidad anterior. Repasémoslo.

De la composición centesimal se calcula la masa de C y H presente en 100 g de compuesto. Dividiendo entre las masas molares respectivas, obtenemos la cantidad de sustancia de cada uno de ellos:

$$n_C = \frac{81{,}68 \text{ g de C}}{12{,}011 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 6{,}800 \text{ mol de C}$$

$$n_H = \frac{18{,}32 \text{ g de H}}{1{,}008 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 18{,}175 \text{ mol de H}$$

Dividiendo entre el menor valor, podemos obtener la relación entre el número de átomos, lo que nos da la fórmula empírica:

$$C \rightarrow \frac{6{,}800}{6{,}800} = 1; \quad H \rightarrow \frac{18{,}175}{6{,}800} = 2{,}67$$

Como podemos ver, no obtenemos dos números enteros. Pero si multiplicamos ambos por 3, ya tendríamos:

$$C{:}\,3, H{:} \approx 8 \rightarrow C_3H_8$$

Su masa fórmula es:

$$M\ (C_3H_8) = 3 \cdot 12{,}011 + 8 \cdot 1{,}008 = 44{,}097 \text{ g/mol}$$

Hasta aquí todo ha sido igual que antes. Ahora, aunque no conocemos la densidad molar en condiciones normales, podemos extraer la masa molar mediante la relación:

$$d = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} \rightarrow M = \frac{d \cdot R \cdot T}{p} = \frac{2{,}26 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1} \cdot 0{,}082 \text{ atm} \cdot \text{L} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot (25 + 273) \text{ K}}{1{,}25 \text{ atm}}$$

$$M = 44{,}180 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Como este valor coincide aproximadamente con el de la masa fórmula, ya tenemos que la fórmula empírica es la misma que la molecular.

Página 87

12 La combustión de una muestra de 2,23 g de etanol produce 4,2602 g de CO_2 y 2,6165 g de H_2O. Calcula su fórmula molecular sabiendo que 7,533 g de etanol gaseoso, a 100 °C y 2 atm ocupan 2,5 L.

En primer lugar, determinamos la masa de cada uno de los elementos presentes en la muestra. Como se trata de un compuesto orgánico, todo su carbono termina formando parte del CO_2 y todo su hidrógeno pasa al H_2O.

La masa molar del CO_2 es 44,009 g/mol, de los cuales 12,011 g/mol corresponden al C. Por lo tanto:

$$\frac{44{,}009 \text{ g de } CO_2}{12{,}011 \text{ g de C}} = \frac{4{,}2602 \text{ g de } CO_2}{m_C} \rightarrow m_C = 1{,}1627 \text{ g de C}$$

Por otro lado, la masa molar del H_2O es 18,015 g/mol, de los cuales 2,016 g/mol corresponden al H. Por tanto:

$$\frac{18{,}015 \text{ g de } H_2O}{2{,}016 \text{ g de H}} = \frac{2{,}6165 \text{ g de } H_2O}{m_H} \rightarrow m_H = 0{,}2928 \text{ g de H}$$

El resto de la masa de etanol que teníamos al principio debe corresponder al oxígeno:

$$m_O = 2{,}2300 - 1{,}1627 - 0{,}2928 = 0{,}7745 \text{ g de O}$$

A continuación, calculamos la cantidad de sustancia que había de C, H y O en la muestra original de etanol:

$$n_C = \frac{1{,}1627\ \text{g de C}}{12{,}011\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}0968\ \text{mol de C}$$

$$n_H = \frac{0{,}2928\ \text{g de H}}{1{,}008\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}2905\ \text{mol de H}$$

$$n_O = \frac{0{,}7745\ \text{g de O}}{15{,}999\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}0484\ \text{mol de O}$$

Dividiendo entre el menor de los valores, obtenemos la proporción entre el número de átomos:

$$\text{C} \rightarrow \frac{0{,}0968}{0{,}0484} = 2; \quad \text{H} \rightarrow \frac{0{,}2905}{0{,}0484} = 6; \quad \text{O} \rightarrow \frac{0{,}0484}{0{,}0484} = 1$$

Por tanto, la fórmula empírica es C_2H_6O, y su masa fórmula es 46,069 g/mol. Ahora, para determinar su masa molar, empleamos el dato de la densidad:

$$d = \frac{m}{V} = \frac{7{,}533\ \text{g}}{2{,}5\ \text{L}} = 3{,}013\ \text{g/L}$$

Y a partir de aquí obtenemos:

$$d = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} \rightarrow M = \frac{d \cdot R \cdot T}{p} = \frac{3{,}013 \cdot 0{,}082 \cdot 373}{2}$$

$$= 46{,}078\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Vemos que coincide con la masa fórmula, luego la fórmula empírica es la misma que la molecular. Se trata del C_2H_6O.

13 **Un recipiente de 10 L a 25 °C contiene 10 g de O_2 y 10 g de N_2. Calcula la presión parcial de cada gas, así como la presión total que ejerce la mezcla.**

En primer lugar, vamos a calcular la cantidad de sustancia de cada gas:

$$n_{O_2} = \frac{10{,}00}{2 \cdot 15{,}999} = 0{,}3125\ \text{mol}$$

$$n_{N_2} = \frac{10{,}00}{2 \cdot 14{,}007} = 0{,}3570\ \text{mol}$$

Por tanto, la cantidad de sustancia total será:

$$n = n_{O_2} + n_{N_2} = 0{,}6695\ \text{mol}$$

y las fracciones molares:

$$X_{O_2} = \frac{0{,}3125}{0{,}6695} = 0{,}4668$$

$$X_{N_2} = \frac{0{,}3570}{0{,}6695} = 0{,}5332$$

La presión total puede obtenerse a partir de la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{0{,}6695 \cdot 0{,}082 \cdot (25 + 273)}{10} = 1{,}6360\ \text{atm}$$

Como conocemos la presión total, podemos calcular las presiones parciales:

$$p_{O_2} = X_{O_2} \cdot p = 0{,}466\,8 \cdot 1{,}636\,0 \approx 0{,}764 \text{ atm}$$

$$p_{N_2} = X_{N_2} \cdot p = 0{,}533\,2 \cdot 1{,}636\,0 \approx 0{,}872 \text{ atm}$$

También podríamos haber calculado primero las presiones parciales con la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p_{O_2} = \frac{n_{O_2} \cdot R \cdot T}{V} = \frac{0{,}312\,5 \cdot 0{,}082 \cdot (25 + 273)}{10} \approx 0{,}764 \text{ atm}$$

$$p_{N_2} = \frac{n_{N_2} \cdot R \cdot T}{V} = \frac{0{,}357\,0 \cdot 0{,}082 \cdot (25 + 273)}{10} \approx 0{,}872 \text{ atm}$$

Y a partir de ellas, la presión total:

$$p = p_{O_2} + p_{N_2} \approx 1{,}636 \text{ atm}$$

Como vemos, ambos resultados coinciden.

14 **En un recipiente hay 45 g de CO_2 y 60 g de N_2. La presión total es de 500 mmHg. Calcula la presión parcial y la fracción molar de cada gas.**

En primer lugar, vamos a calcular la cantidad de sustancia de cada gas:

$$M\ (CO_2) = 44{,}009 \text{ g/mol} \rightarrow n_{CO_2} = \frac{45{,}00}{44{,}009} = 1{,}022\,5 \text{ mol}$$

$$M\ (N_2) = 28{,}014 \text{ g/mol} \rightarrow n_{N_2} = \frac{60{,}00}{28{,}014} = 2{,}141\,8 \text{ mol}$$

Por lo tanto, la cantidad de sustancia total será:

$$n = n_{CO_2} + n_{N_2} = 3{,}164\,3 \text{ mol}$$

y las fracciones molares:

$$X_{CO_2} = \frac{1{,}022\,5}{3{,}164\,2} = 0{,}323\,2$$

$$X_{N_2} = \frac{2{,}141\,8}{3{,}164\,2} = 0{,}676\,9$$

Y ahora, como conocemos la presión total, podemos calcular las presiones parciales:

$$p_{CO_2} = X_{CO_2} \cdot p = 0{,}323\,2 \cdot 500 = 161{,}60 \text{ mmHg} \approx 21\,540 \text{ Pa}$$

$$p_{N_2} = X_{N_2} \cdot p = 0{,}676\,9 \cdot 500 = 338{,}45 \text{ mmHg} \approx 45\,112 \text{ Pa}$$

La teoría cinético-molecular. Gases ideales y gases reales

15 **La ecuación de estado de los gases ideales constituye una buena aproximación cuando las temperaturas son elevadas y las presiones relativamente bajas. Una de las principales correcciones a dicha ecuación se debe al físico Van der Waals, quien en 1 873 propuso la siguiente expresión:**

$$\left(p + \frac{a \cdot n^2}{V^2}\right) \cdot (V - n \cdot b) = n \cdot R \cdot T$$

donde *V* es el volumen que ocupan *n* moles de sustancia, y *a* y *b* son constantes características de cada gas.

Rellena una tabla con las presiones, obtenidas mediante la ecuación de los gases ideales y la de Van der Waals, que ejercerían 1,5 mol de aire que ocuparan un volumen de 7,5 L, para las siguientes temperaturas: –150 °C, –100 °C, –50 °C, 0 °C, 25 °C, 50 °C. Calcula los errores relativos, en tantos por ciento, entre ambos valores de la presión y discute los resultados. Puedes utilizar una hoja de cálculo para automatizar las operaciones.

Vamos a utilizar, en primer lugar, la ecuación de estado de los gases ideales para determinar las presiones a esas temperaturas:

$$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$$

Aire – V = 7,5 L; n = 1,5 mol	
***T*/°C**	***p*/atm**
–150	$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{1{,}5 \cdot 0{,}082 \cdot (-150 + 273)}{7{,}5} = 2{,}02 \text{ atm}$
–100	$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{1{,}5 \cdot 0{,}082 \cdot (-100 + 273)}{7{,}5} = 2{,}84 \text{ atm}$
–50	$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{1{,}5 \cdot 0{,}082 \cdot (-50 + 273)}{7{,}5} = 3{,}66 \text{ atm}$
0	$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{1{,}5 \cdot 0{,}082 \cdot (0 + 273)}{7{,}5} = 4{,}48 \text{ atm}$
25	$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{1{,}5 \cdot 0{,}082 \cdot (25 + 273)}{7{,}5} = 4{,}89 \text{ atm}$
50	$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{1{,}5 \cdot 0{,}082 \cdot (50 + 273)}{7{,}5} = 5{,}30 \text{ atm}$

Ahora, empleando la ecuación de Van der Waals (hay que tener cuidado y comprobar que todo está en las mismas unidades), tenemos, para una temperatura T = –150 °C:

$$\left(p + \frac{a \cdot n^2}{V^2}\right) \cdot (V - n \cdot b) = n \cdot R \cdot T;$$

$$\left(p + 1{,}4 \cdot \frac{1{,}5^2}{7{,}5^2}\right) \cdot (7{,}5 - 1{,}5 \cdot 0{,}039) = 1{,}5 \cdot 0{,}082 \cdot (-150 + 273);$$

$$(p + 0{,}056) \cdot 7{,}442 = 15{,}129$$

$$p = \frac{15{,}129}{7{,}442} - 0{,}056 = 1{,}98 \text{ atm}$$

Repitiendo este procedimiento para el resto de temperaturas, obtenemos la siguiente tabla:

Aire – V = 7,5 L; n = 1,5 mol		
T/°C	p_{ideal}/atm	$p_{Van\ der\ Waals}$/atm
–150	2,02	1,98
–100	2,84	2,80
–50	3,66	3,63
0	4,48	4,46
25	4,89	4,87
50	5,30	5,28

La diferencia es mayor cuando disminuye la temperatura, como se aprecia si calculamos los errores relativos. Para ello, tenemos en cuenta las siguientes definiciones:

$$\varepsilon_{absoluto} = |p_{real} - p_{ideal}|$$

$$\varepsilon_{relativo} = \frac{\varepsilon_{absoluto}}{p_{real}} = \frac{|p_{real} - p_{ideal}|}{p_{real}} \rightarrow \varepsilon_{relativo}\ (\%) = \frac{|p_{real} - p_{ideal}|}{p_{real}} \cdot 100$$

Aire – V = 7,5 L; n = 1,5 mol			
T/°C	p_{ideal}/atm	$p_{Van\ der\ Waals}$/atm	$\varepsilon_{relativo}$ (%)
–150	2,02	1,98	2,03
–100	2,84	2,80	1,20
–50	3,66	3,63	0,75
0	4,48	4,46	0,47
25	4,89	4,87	0,36
50	5,30	5,28	0,27

Vemos que al disminuir la temperatura aumenta la discrepancia entre el comportamiento ideal y el real. Esto se debe a que, para presiones elevadas o temperaturas bajas, fallan las hipótesis sobre las que se basa la TCM para derivar la ecuación de estado de los gases ideales. En particular, esta supone que las partículas están muy alejadas entre sí, por lo que pueden despreciarse las interacciones intermoleculares de corto alcance. Sin embargo, cuando aumenta p o disminuye T, la materia está más concentrada, las partículas se encuentran más cercas unas de otras, y las fuerzas atractivas entre ellas empiezan a manifestarse.

Por otro lado, vemos que la presión real es menor que la ideal, debido al término correctivo $a \cdot n^2 / V^2$.

El factor $-n \cdot b$ tiene en cuenta que el volumen de las partículas no es despreciable realmente, por lo que a $V - n \cdot b$ se lo denomina **volumen efectivo del gas.**

Concentración

16 **Una disolución está formada por 12 g de hidróxido de calcio y 100 g de agua. Sabiendo que la densidad de esta disolución es de 1 050 kg/m³, calcula la molaridad, la molalidad y la fracción molar del soluto.**

Calculemos, en primer lugar, la masa molar del hidróxido de calcio:

$$M\,(Ca\,(OH)_2) = 40{,}078 + 2 \cdot (15{,}999 + 1{,}008) = 74{,}092 \text{ g/mol}$$

Por tanto, la cantidad de sustancia será:

$$n_{Ca(OH)_2} = \frac{12{,}000}{74{,}092} = 0{,}162\,0 \text{ mol}$$

Para calcular la molaridad, tenemos en cuenta que la masa de la disolución es:

$$m_{disolución} = 12{,}000 + 100{,}000 = 112{,}000 \text{ g}$$

y que la densidad es 1 050 kg/m³ = 1,050 g/cm³:

$$V_{disolución} = \frac{m_{disolución}}{d} = \frac{112{,}000}{1{,}050} = 106{,}667 \text{ cm}^3 \approx 0{,}106\,7 \text{ L}$$

Por tanto:

$$M = \frac{n_{Ca(OH)_2}}{V_{disolución}} = \frac{0{,}162\,0}{0{,}106\,7} \approx 1{,}52 \text{ M}$$

La molalidad será:

$$m = \frac{n_{Ca(OH)_2}\text{ (mol)}}{m_{disolvente}\text{ (kg)}} = \frac{0{,}162\,0}{0{,}100\,0} = 1{,}62 \text{ m}$$

Para calcular la fracción molar de soluto, vamos a determinar primero la cantidad de sustancia de agua:

$$M\,(H_2O) = 18{,}015 \text{ g/mol} \rightarrow n_{H_2O} = \frac{100{,}000}{18{,}015} = 5{,}550\,9 \text{ mol}$$

Por tanto:

$$X_{Ca(OH)_2} = \frac{n_{Ca(OH)_2}}{n_{H_2O} + n_{Ca(OH)_2}} = \frac{0{,}162\,0}{0{,}162\,0 + 5{,}550\,9} = 0{,}028\,4$$

17 **Una disolución acuosa de $Ca(OH)_2$ tiene una concentración del 6 % en masa. Sabiendo que su densidad es de 1,050 g/cm³, calcula la molaridad, la molalidad y la fracción molar del soluto.**

Supongamos que tenemos 1 L de disolución. La masa de disolución será:

$$m = d \cdot V = 1{,}050 \cdot 1\,000 = 1\,050 \text{ g}$$

Como sabemos cuál es la concentración, podemos obtener la masa de soluto:

$$m_{Ca(OH)_2} = \frac{\%\text{ (masa)} \cdot m_{disolución}}{100} = \frac{6 \cdot 1\,050}{100} = 63 \text{ g}$$

La masa molar del $Ca(OH)_2$ es:

$$M\,(Ca\,(OH)_2) = 40{,}078 + 2 \cdot (15{,}999 + 1{,}008) = 74{,}092 \text{ g/mol}$$

Por tanto, la cantidad de sustancia de $Ca(OH)_2$ será:

$$n_{Ca(OH)_2} = \frac{63}{74{,}092} = 0{,}850 \text{ mol}$$

y la molaridad:

$$M = \frac{n_{soluto}(\text{mol})}{V_{disolución}(\text{L})} = \frac{0{,}850}{1} = 0{,}850 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Para calcular la molalidad, suponemos que tenemos 1 L de disolución. Su masa, calculada anteriormente, es de 1 050 g, de los cuales 63 g corresponden al $Ca(OH)_2$.

Por tanto: 1 050 – 63 = 987 g corresponden al agua, y la molalidad será:

$$m = \frac{n_{Ca(OH)_2}(\text{mol})}{m_{disolvente}(\text{kg})} = \frac{0{,}850}{0{,}987} = 0{,}861 \text{ mol} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Para calcular la fracción molar de soluto, vamos a determinar primero la cantidad de sustancia de agua:

$$M\,(H_2O) = 18{,}015 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$n_{H_2O} = \frac{987}{18{,}015} = 54{,}788 \text{ mol}$$

La cantidad de sustancia total será:

$$n = n_{Ca(OH)_2} + n_{H_2O} = 0{,}850 + 54{,}788 = 55{,}638 \text{ mol}$$

Y la fracción molar de soluto:

$$X_{Ca(OH)_2} = \frac{0{,}850}{55{,}638} = 0{,}015\,3$$

18 Se disuelven 500 mg de bicarbonato de sodio, $NaHCO_3$, 500 mg de cloruro de sodio, $NaCl$, y 50 g de glucosa, $C_6H_{12}O_6$, en 750 mL de agua. Calcula:

a) La fracción molar de cada soluto.

b) La concentración de cloruro de sodio, en g/L, si se añade agua hasta completar un litro de disolución.

a) Vamos a calcular la cantidad de sustancia en cada caso:

$$M\,(NaHCO_3) = 84{,}005 \text{ g/mol} \rightarrow n_{NaHCO_3} = \frac{0{,}500}{84{,}005} = 5{,}95 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

$$M\,(NaCl) = 58{,}439 \text{ g/mol} \rightarrow n_{NaCl} = \frac{0{,}500}{58{,}439} = 8{,}56 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

$$M\,(C_6H_{12}O_6) = 180{,}156 \text{ g/mol} \rightarrow n_{C_6H_{12}O_6} = \frac{50}{180{,}156} = 0{,}277\,54 \text{ mol}$$

$$M\,(H_2O) = 18{,}015 \text{ g/mol} \rightarrow n_{H_2O} = \frac{750}{18{,}015} = 41{,}631\,97 \text{ mol}$$

donde hemos tomado una densidad para el agua: d = 1 g/cm^3 (recuerda 1 cm^3 = 1 mL).

La cantidad de sustancia total será:

$$n = 41{,}924\,02 \text{ mol}$$

Por tanto, las fracciones molares serán:

$$X_{NaHCO_3} = \frac{5{,}95 \cdot 10^{-3}}{41{,}924\,02} = 1{,}42 \cdot 10^{-4}$$

$$X_{NaCl} = \frac{8{,}56 \cdot 10^{-3}}{41{,}924\,02} = 2{,}04 \cdot 10^{-4}$$

$$\chi_{C_6H_{12}O_6} = \frac{0{,}277\,54}{41{,}924\,02} = 6{,}620 \cdot 10^{-3}$$

Observa que hemos tomado el mismo número de decimales para las fracciones molares de todos los solutos.

b) Ahora se añade agua hasta completar 1 L de disolución. Entonces, teniendo en cuenta que la masa de NaCl no cambia, su concentración será:

$$C = 0{,}5 \text{ g/L}$$

19 Se disuelven 18,2 g de NaCl en 0,5 kg de agua, obteniéndose una disolución con una densidad de 1,025 g/mL.

a) Calcula la concentración en masa, la molaridad, la molalidad y la fracción molar de NaCl.

b) ¿Cuántos gramos de NaCl habrá en 225 mL de disolución?

a) La masa de disolución es:

$$m_{\text{disolución}} = 18{,}2 + 500 = 518{,}2 \text{ g}$$

Por tanto, la concentración en masa será:

$$\% \text{ (masa)} = \frac{m_{NaCl}}{m_{\text{disolución}}} \cdot 100 = \frac{18{,}2}{518{,}2} \cdot 100 = 3{,}51\,\%$$

Para calcular la molaridad, vamos a hallar primero el volumen de disolución. Como conocemos la masa, tendremos:

$$V = \frac{m}{d} = \frac{518{,}2 \text{ g}}{1{,}025 \text{ g/mL}} = 505{,}6 \text{ L} \approx 0{,}505\,6 \text{ L}$$

La masa molar del NaCl es:

$$M \text{ (NaCl)} = 22{,}989 + 35{,}450 = 58{,}438 \text{ g/mol}$$

y la cantidad de sustancia:

$$n_{NaCl} = \frac{18{,}200}{58{,}438} = 0{,}311 \text{ mol}$$

Con esta información, ya podemos obtener la molaridad:

$$M = \frac{m_{NaCl}}{V_{\text{disolución}}} = \frac{0{,}311}{0{,}506} = 0{,}615 \text{ M}$$

La molalidad se calcula fácilmente a partir de la cantidad de sustancia de NaCl y de la masa de agua, para la que suponemos una densidad de 1 kg/L:

$$m = \frac{n_{NaCl} \text{ (mol)}}{m_{\text{disolvente}} \text{ (kg)}} = \frac{0{,}311}{0{,}5} = 0{,}622 \text{ m}$$

Por último, para obtener la fracción molar del NaCl, hallamos la cantidad de sustancia de agua:

$$M \text{ (H}_2\text{O)} = 18{,}015 \text{ g/mol} \quad \rightarrow \quad n_{H_2O} = \frac{500}{18{,}015} = 27{,}055 \text{ mol}$$

Por tanto:

$$X_{NaCl} = \frac{0,311}{0,311 + 27,055} = 0,0114$$

b) Como la disolución tiene una densidad de 1,025 g/mL, la masa de 225 mL será:

$$m = d \cdot V = 1,025 \cdot 225 = 230,63 \text{ g}$$

Ahora podemos calcular la masa de NaCl a partir del porcentaje en masa:

$$m_{NaCl} = \frac{\% \text{ (masa)} \cdot m_{disolución}}{100} = \frac{3,51 \cdot 230,63}{100} = 8,10 \text{ g}$$

20 **El alcohol sanitario tiene una concentración de 96°, lo que equivale a decir que es del 96 % en volumen. Calcula, para una botella de 250 mL:**

a) El volumen de alcohol puro que contendrá.

b) Si se añade agua destilada hasta completar 1 L de disolución, calcula el nuevo % en volumen para el alcohol.

a) Como conocemos el volumen total, podemos obtener el de etanol:

$$V_{etanol} = 0,96 \cdot 250 = 240 \text{ mL}$$

b) Como el volumen total es de 1000 mL, la nueva concentración será:

$$\% \text{ (volumen)} = \frac{240}{1000} \cdot 100 = 24 \text{ \%}$$

Recuerda que la suma de los volúmenes de cada componente por separado no es igual al volumen total de la disolución: no se suman. Sin embargo, en todos los cálculos que hagamos, supondremos la aproximación de disolución ideal; esto es, que los volúmenes se comportan aditivamente.

21 **Tenemos 300 mL de una disolución de HCl al 25 % en masa y con una densidad de 1,05 g/cm^3. Calcula:**

a) La concentración en masa.

b) La molaridad y la molalidad.

c) La fracción molar de soluto.

d) ¿Qué masa de HCl habrá en 25 mL de disolución?

a) Como la densidad es de 1,05 g/mL, 300 mL de disolución tendrán una masa:

$$m = d \cdot V = 1,05 \cdot 300 = 315 \text{ g}$$

Por otro lado, puesto que la concentración es del 25 % en masa, habrá:

$$m_{HCl} = 0,25 \cdot 315 = 78,75 \text{ g de HCl}$$

Así pues, la concentración en masa será:

$$C = \frac{m_{HCl} \text{ (g)}}{V_{disolución} \text{ (L)}} = \frac{78,75}{0,30} = 262,5 \text{ g/L}$$

b) Para calcular la molaridad, primero vamos a obtener la cantidad de sustancia de HCl:

$$M \text{ (HCl)} = 36,458 \text{ g/mol} \rightarrow n_{HCl} = \frac{78,75}{36,458} = 2,160 \text{ mol}$$

Y ahora, ya tenemos:

$$M = \frac{n_{HCl}}{V_{disolución}} = \frac{2{,}160}{0{,}300} = 7{,}20 \text{ M}$$

Para conocer la molalidad tenemos que calcular previamente la masa de disolvente. Teniendo en cuenta que la disolución es del 25 % en masa:

$$m_{agua} = 0{,}75 \cdot 315 = 236{,}25 \text{ g}$$

Por tanto:

$$m = \frac{n_{HCl}}{m_{disolvente}} = \frac{2{,}160}{0{,}236\,25} = 9{,}14 \text{ m}$$

c) Para obtener la fracción molar de soluto, calculamos primero la cantidad de sustancia de agua:

$$n_{agua} = \frac{236{,}25}{18{,}015} = 13{,}114 \text{ mol}$$

Entonces:

$$X_s = \frac{2{,}160}{2{,}160 + 13{,}114} = 0{,}141$$

d) Si tomamos 25 mL de esta disolución, estos contendrán:

$$m_{HCl} = C \cdot V_{disolución} = 262{,}5 \cdot 0{,}025 = 6{,}563 \text{ g de HCl}$$

22 La tintura de yodo es una disolución de yodo molecular y yoduro de potasio en etanol, que se ha usado desde hace muchos años como antiséptico para el tratamiento de heridas menores. También, se emplea como desinfectante de la piel o para limpiar heridas. Se prepara tintura de yodo añadiendo 2 g de I_2 sólido y 2 g de yoduro de potasio a 100 mL de etanol (C_2H_6O). Se sabe, además, que la densidad del etanol puro es de 0,790 g/mL. Calcula:

a) La molaridad, la molalidad y la fracción molar de ambos solutos.

b) El porcentaje en masa de todas las sustancias de la disolución.

a) Vamos a calcular, en primer lugar, la cantidad de sustancia de I_2 y KI:

$$M\,(I_2) = 253{,}80 \text{ g/mol} \rightarrow n_{I_2} = \frac{2{,}00}{253{,}80} = 7{,}88 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

$$M\,(KI) = 166{,}00 \text{ g/mol} \rightarrow n_{KI} = \frac{2{,}00}{166{,}00} = 0{,}0121 \text{ mol}$$

Suponemos que la adición de ambos productos no afecta al volumen total, que sigue siendo de 100 mL. Entonces la molaridad será:

$$M_{I_2} = \frac{7{,}88 \cdot 10^{-3}}{0{,}1} = 0{,}0788 \text{ mol/L}$$

$$M_{KI} = \frac{0{,}0121}{0{,}1} = 0{,}1210 \text{ mol/L}$$

Como conocemos la densidad del etanol puro, podemos calcular su masa a partir de su volumen:

$$m = d \cdot V = 0{,}790 \cdot 100 = 79{,}0 \text{ g}$$

Por tanto, la molalidad de ambos solutos será:

$$m_{I_2} = \frac{7{,}88 \cdot 10^{-3}}{0{,}079} = 0{,}100 \text{ mol/kg}$$

$$m_{KI} = \frac{0{,}0121}{0{,}079} = 0{,}153 \text{ mol/kg}$$

Para calcular la fracción molar de ambos solutos, determinamos primero la cantidad de sustancia de etanol:

$$M\ (C_2H_6O) = 46{,}069 \text{ g/mol} \rightarrow n_{C_2H_6O} = \frac{79{,}0}{46{,}069} = 1{,}715 \text{ mol}$$

La cantidad de sustancia total será:

$$n = 7{,}88 \cdot 10^{-3} + 0{,}0121 + 1{,}715 \approx 1{,}735 \text{ mol}$$

Y ya tenemos las fracciones molares:

$$X_{I_2} = \frac{7{,}88 \cdot 10^{-3}}{1{,}734} = 4{,}54 \cdot 10^{-3}$$

$$X_{KI} = \frac{0{,}0121}{1{,}734} = 6{,}98 \cdot 10^{-3}$$

b) La masa total de la disolución es $m = 79 + 2 + 2 = 83$ g. Por tanto, los porcentajes en masa serán:

$$\%\ (\text{masa de } I_2) = \%\ (\text{masa de KI}) = \frac{2}{83} \cdot 100 = 2{,}41\ \%$$

$$\%\ (\text{masa de } C_2H_6O) = \frac{79}{83} \cdot 100 = 95{,}18\ \%$$

23 Se prepara un producto de limpieza consistente en medio litro de una disolución 0,5 M de ácido clorhídrico.

a) Calcula qué masa de HCl contendrá la disolución.

b) Si se mezcla con medio litro de otra disolución 2 M de HCl, ¿qué molaridad tendrá la disolución resultante?

a) En primer lugar, a partir del valor de la concentración molar calculamos la cantidad de sustancia de HCl:

$$n_{HCl} = M \cdot V_{HCl} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}250 \text{ mol}$$

Y ahora, a partir de la masa molar del ácido clorhídrico, obtenemos la masa de HCl que hay en la disolución:

$$M\ (HCl) = 36{,}458 \text{ g/mol} \rightarrow m = n \cdot M = 0{,}250 \cdot 36{,}458 = 9{,}115 \text{ g}$$

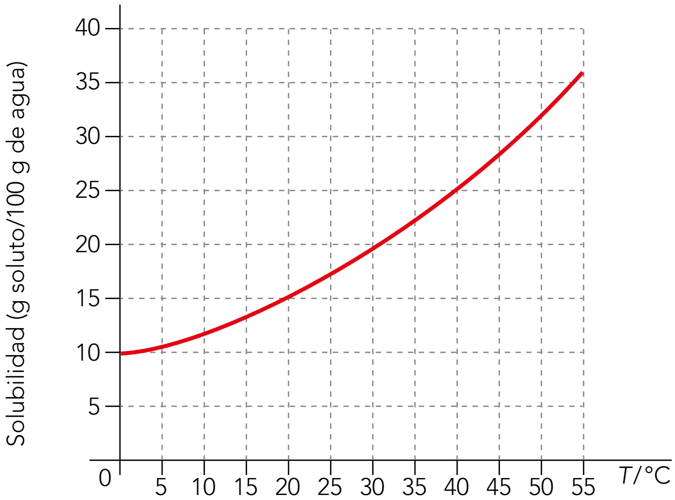
b) Veamos la cantidad de sustancia de HCl de la segunda disolución:

$$n_{HCl} = M \cdot V_{HCl} = 2{,}0 \cdot 0{,}5 = 1{,}0 \text{ mol}$$

Entonces tendremos un total de 1,25 moles de HCl en un volumen de, aproximadamente, 1 L. Esto es una aproximación, recuerda que los volúmenes no se suman. Sin embargo, estamos considerando que las disoluciones son ideales. Por tanto, la concentración final será: $M = 1{,}25$ M.

Página 88

24 **En la gráfica siguiente se muestra cómo varía la solubilidad de cierto soluto en agua con la temperatura:**



a) Si se mezclan 40 g de soluto con 250 g de agua a 30 °C, ¿se disolverá todo el soluto? ¿Y si la temperatura es de 0 °C?

b) Explica qué ocurre si se disuelven 50 g de soluto en 200 g de agua a 40 °C y, después, se deja enfriar la mezcla hasta los 20 °C.

a) La solubilidad de ese soluto en agua, a 30 °C es de unos 20 g por cada 100 g de agua. Por tanto, la cantidad máxima que se puede disolver será:

$$\frac{20 \text{ g de soluto}}{100 \text{ g de } H_2O} = \frac{x}{250 \text{ g de } H_2O} \rightarrow x = 50 \text{ g de soluto}$$

Dado que se utilizan únicamente 40 g, sí que se disolverá todo. Sin embargo, si se realiza la mezcla a 0 °C, la solubilidad es de 10 g por cada 100 g de agua. Por tanto, la cantidad máxima de soluto será:

$$\frac{10 \text{ g de soluto}}{100 \text{ g de } H_2O} = \frac{x}{250 \text{ g de } H_2O} \rightarrow x = 25 \text{ g de soluto}$$

Como vemos, al tener 40 g no puede disolverse todo, y precipitan 40 – 25 = 15 g.

b) La solubilidad a 40 °C es de 25 g por cada 100 g de agua. La cantidad de soluto que puede contener la mezcla será:

$$\frac{25 \text{ g de soluto}}{100 \text{ g de } H_2O} = \frac{x}{200 \text{ g de } H_2O} \rightarrow x = 50 \text{ g de soluto}$$

Por tanto, la mezcla estará saturada. Si ahora disminuye la temperatura hasta los 20 °C, la nueva solubilidad es de 15 g por cada 100 g de agua. Así pues, la cantidad máxima de soluto que se puede disolver es:

$$\frac{15 \text{ g de soluto}}{100 \text{ g de } H_2O} = \frac{x}{200 \text{ g de } H_2O} \rightarrow x = 30 \text{ g de soluto}$$

por lo que sobran 20 g, que precipitarán hasta el fondo del recipiente.

25 **Utilizando las gráficas de solubilidad vistas en el epígrafe 5, calcula el volumen de agua, en litros, que serán necesarios para disolver 3 kg de bromuro de potasio a 30 °C. Suponiendo que tenemos una disolución saturada, si ahora la temperatura disminuye hasta los 10 °C, ¿qué masa de soluto precipitará?**

El bromuro de potasio tiene, a 30 °C, una solubilidad de 70 g por cada 100 g de agua. Por lo tanto, para disolver 3 kg de soluto necesitaremos:

$$\frac{70 \text{ g de KBr}}{100 \text{ g de } H_2O} = \frac{3\,000 \text{ g de KBr}}{x} \rightarrow x \approx 4\,286 \text{ g de } H_2O$$

Si suponemos una densidad para el agua de 1 000 g/L, el volumen necesario será 4,286 L.

Supongamos que tenemos 3 kg de KBr disueltos en 4,286 L de agua, a 30 °C. Si disminuye la temperatura hasta los 10 °C, mirando la gráfica, vemos que la solubilidad será ahora de 60 g de KBr por cada 100 g de agua. La cantidad de bromuro de potasio que puede estar disuelto, como máximo, será:

$$\frac{60 \text{ g de KBr}}{100 \text{ g de } H_2O} = \frac{x}{4\,286 \text{ g de } H_2O} \rightarrow x \approx 2\,572 \text{ g de KBr}$$

Por tanto, precipitarán 3000 – 2572 = 428 g de bromuro de potasio.

Preparación de disoluciones

26 **Explica cómo prepararías 250 mL de una disolución 0,4 M de sulfato de sodio (este soluto es sólido). Si para una reacción química se necesitan 5 g de esta sustancia, ¿qué volumen de disolución se debe tomar?**

Vamos a calcular la masa de sulfato de sodio que necesitamos. Como conocemos el volumen y la molaridad de la disolución que queremos preparar, podemos obtener la cantidad de sustancia de soluto:

$$n_{soluto} = M \cdot V_{disolución} = 0{,}4 \cdot 0{,}250 = 0{,}1 \text{ mol}$$

Y ahora, a partir de la masa molar del sulfato de sodio, calculamos la masa necesaria:

$$M\ (Na_2SO_4) = 2 \cdot 22{,}989 + 32{,}064 + 4 \cdot 15{,}999 = 142{,}038 \text{ g/mol}$$

$$m_{soluto} = n \cdot M\ (Na_2SO_4) = 0{,}1 \cdot 142{,}038 \approx 14{,}20 \text{ g}$$

En el laboratorio, pesamos en la balanza 14,20 gramos de sulfato de sodio. Se echa en un vaso de precipitados de 200 mL y se vierte agua, agitando la mezcla. Una vez disuelto, se lleva a un matraz aforado y se enrasa con agua destilada hasta tener 250 mL de disolución.

Se necesitan 5 g de sulfato de sodio. Veamos a qué cantidad de sustancia corresponde:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{5}{142{,}038} = 0{,}035\,2 \text{ mol}$$

Y ahora, utilizando la molaridad, obtenemos el volumen:

$$V_{disolución} = \frac{n}{M} = \frac{0{,}035\,2}{0{,}4} = 0{,}088 \text{ L} = 88 \text{ mL}$$

27 **Se tienen 350 mL de salfumán (ácido clorhídrico en agua), al 37 % en masa, con una densidad de 1,19 g/cm³. ¿Qué volumen de esta disolución será necesario para preparar 250 mL de disolución 0,18 M? Calcula la masa de HCl que hay en 1 mL de disolución concentrada y en 1 mL de disolución diluida.**

Calculemos, en primer lugar, la cantidad de sustancia de soluto (HCl) que necesitamos:

$$n_{soluto} = M \cdot V_{disolución} = 0{,}18 \cdot 0{,}250 = 0{,}045 \text{ mol}$$

Sabiendo que la masa molar es:

$$M \text{ (HCl)} = 1{,}008 + 35{,}450 = 36{,}458 \text{ g/mol}$$

tendremos:

$$m_{soluto} = n_{soluto} \cdot M \text{ (HCl)} = 0{,}045 \cdot 36{,}458 = 1{,}641 \text{ g}$$

Como el salfumán tiene una concentración del 37 % en masa, necesitaremos:

$$m_{disolución} = \frac{1{,}641}{0{,}37} = 4{,}44 \text{ g de disolución concentrada}$$

Finalmente, empleando el valor de la densidad, podemos obtener el volumen que hay que tomar:

$$V_{disolución} = \frac{m_{disolución}}{d_{disolución}} = \frac{4{,}44}{1{,}19} = 3{,}73 \text{ mL}$$

Veamos qué masa de HCl hay en 1 mL de disolución concentrada. Hay varias formas de proceder. Podemos, por ejemplo, utilizar la concentración en masa. Para ello, en primer lugar, determinamos la masa de disolución:

$$m_{disolución} = d_{disolución} \cdot V_{disolución} = 1{,}19 \cdot 1{,}00 = 1{,}19 \text{ g}$$

Como su concentración es del 37 % en masa, ya tenemos que:

$$m_{HCl} = 0{,}37 \cdot 1{,}19 = 0{,}44 \text{ g}$$

Por otro lado, como la concentración de la disolución diluida es 0,18 M, tenemos que 1 mL de esta contendrá:

$$n_{HCl} = M \cdot V_{disolución} = 0{,}18 \cdot 0{,}001 = 1{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$$

Esta cantidad de sustancia corresponde a una masa de:

$$m_{HCl} = n_{HCl} \cdot M = 1{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 36{,}458 = 6{,}56 \cdot 10^{-3} \text{ g}$$

28 Se disuelven 5,00 mL de ácido clorhídrico concentrado del 38 % en masa y densidad 1,181 g/cm³ en agua, hasta obtener una masa final de 120,00 g. Calcula, de forma aproximada, la molaridad y la molalidad de la disolución diluida.

En primer lugar, vamos a obtener la cantidad de soluto (HCl) que necesitamos. Como conocemos la concentración en masa, vamos a calcular la masa de la disolución concentrada que hay en 5,00 mL:

$$m_{disolución} = d_{disolución} \cdot V_{disolución} = 1{,}181 \cdot 5{,}00 = 5{,}905 \text{ g}$$

Como esta tiene una concentración del 38 % en masa, tendremos:

$$m_{soluto} = 0{,}380 \cdot 5{,}905 = 2{,}244 \text{ g}$$

A partir de la masa molar del HCl:

$$M \text{ (HCl)} = 1{,}008 + 35{,}450 = 36{,}458 \text{ g/mol}$$

Ya podemos determinar la cantidad de sustancia de HCl que hay en los 5,00 mL de la disolución concentrada:

$$n_{soluto} = \frac{2,244}{36,458} = 0,062 \text{ mol de HCl}$$

Se añade agua hasta tener 120,00 g de disolución. Como ya teníamos aproximadamente 5,91 g, se han tenido que añadir 120,00 – 5,91 = 114,09 g de agua. Considerando la densidad del agua 1 g/mL, quiere decir que hemos añadido 114,09 mL de agua. Usando la aproximación de disolución ideal, sumamos este volumen con los 5,00 mL iniciales que teníamos, y el volumen total será, aproximadamente, de 119 mL (recordemos que los volúmenes, en general, no se suman, de ahí que digamos que este es el volumen total *aproximado*).

Ahora ya podemos calcular la molaridad:

$$M = \frac{n_{soluto}}{V_{disolución}} = \frac{0,062}{0,119} \approx 0,52 \text{ M}$$

La disolución concentrada tenía, aproximadamente, 5,91 – 2,24 = 3,67 g de agua, que sumados a los 114,09 g que se han añadido dan un total (observa que, en este caso, las masas sí que se suman):

$$m_{disolvente} = 117,76 \text{ g de agua} \approx 0,118 \text{ kg de agua}$$

Por tanto, la molalidad de la disolución diluida será:

$$m = \frac{n_{soluto}}{m_{disolvente}} = \frac{0,062}{0,118} = 0,53 \text{ mol/kg}$$

Así, vemos que debido a la no adición de los volúmenes, el resultado de la molaridad ha de ser, necesariamente, aproximado. Sin embargo, como las masas sí que se suman, la molalidad final obtenida es exacta.

29 Tenemos una botella de 1 L de ácido nítrico comercial, del 96 % de pureza en masa y una densidad de 1,50 g/cm³.

a) Calcula la cantidad de sustancia de HNO_3 que habrá en una botella de ácido nítrico comercial.

b) Calcula el volumen que es necesario tomar para preparar 125 mL de una disolución 1,25 M de ácido nítrico.

a) Puesto que el volumen es de 1 L y la densidad de 1,50 g/mL, la masa de la disolución concentrada será:

$$m = d \cdot V = 1,50 \cdot 1000 = 1500 \text{ g}$$

Al ser la concentración del 96 % en masa, tendremos:

$$m_{soluto} = 0,96 \cdot 1500 = 1440 \text{ g}$$

La masa molar del HNO_3 es:

$$M\ (HNO_3) = 1,008 + 14,007 + 3 \cdot 15,999 = 63,012 \text{ g/mol}$$

Y, por tanto, la cantidad de sustancia de HNO_3 será:

$$n_{soluto} = \frac{m}{M} = \frac{1440}{63,012} = 22,85 \text{ mol}$$

b) Necesitamos

$$n_{HNO_3} = M \cdot V_{disolución} = 1{,}25 \cdot 0{,}125 = 0{,}1563 \text{ moles de } HNO_3$$

que corresponden a una masa de:

$$m_{HNO_3} = n_{HNO_3} \cdot M\ (HNO_3) = 0{,}1563 \cdot 63{,}012 = 9{,}849 \text{ g}$$

Puesto que la disolución concentrada tiene una pureza del 96 % en masa, necesitaremos:

$$m_{disolución} = \frac{9{,}849}{0{,}96} = 10{,}259 \text{ g}$$

Conocida la densidad, calculamos finalmente el volumen de disolución comercial requerida:

$$V_{disolución} = \frac{m_{disolución}}{d_{disolución}} = \frac{10{,}259}{1{,}50} = 6{,}84 \text{ mL}$$

30 **Se mezclan 22 g de etanol (C_2H_6O, d = 0,791 g/cm³) con 110 g de agua, obteniendo 135 mL de disolución.**

a) Determina la molaridad, la molalidad, la concentración en masa, la concentración en volumen y la fracción molar del soluto.

b) ¿Cuál es la densidad de la disolución?

c) Se quieren conseguir 125 mL de una disolución diluida, de concentración 1,2 M, a partir de la anterior. ¿Qué volumen de la concentrada habrá que tomar?

d) Se necesitan 3,00 g de etanol para cierta reacción química. ¿Qué volumen de la disolución diluida habrá que tomar? ¿Y de la concentrada?

a) En primer lugar, vamos a determinar las masas, volúmenes y cantidades de ambas sustancias:

$$d_{etanol} = 0{,}791 \text{ g/mL} \rightarrow V_{etanol} = \frac{m_{etanol}}{d_{etanol}} = \frac{22{,}0}{0{,}791} = 27{,}81 \text{ mL}$$

$$d_{agua} = 1{,}000 \text{ g/mL} \rightarrow V_{agua} = 110 \text{ mL}$$

$$m_{disolución} = 22 + 110 = 132{,}0 \text{ g}$$

Vemos que $V_{agua} + V_{etanol} = 137{,}81 \text{ mL} \neq 135 \text{ mL} = V_{disolución}$; esto es, los volúmenes no tienen por qué comportarse aditivamente, mientras que la masa sí que lo hace. Las cantidades de ambas sustancias son:

$$M\ (\text{etanol}) = 46{,}069 \text{ g/mol} \rightarrow n_{etanol} = \frac{m_{etanol}}{M\ (\text{etanol})} = \frac{22{,}0}{46{,}069} = 0{,}478 \text{ mol}$$

$$M\ (\text{agua}) = 18{,}015 \text{ g/mol} \rightarrow n_{agua} = \frac{m_{agua}}{M\ (\text{agua})} = \frac{110{,}0}{18{,}015} = 6{,}106 \text{ mol}$$

Por tanto, las concentraciones en masa y en volumen serán:

$$\%\ (\text{masa}) = \frac{m_{etanol}}{m_{disolución}} \cdot 100 = \frac{22{,}0}{132{,}0} \cdot 100 = 16{,}67\ \%$$

$$\%\ (\text{volumen}) = \frac{V_{etanol}}{V_{disolución}} \cdot 100 = \frac{27{,}81}{135} \cdot 100 = 20{,}60\ \%$$

La molaridad es:

$$M = \frac{n_{etanol}}{V_{disolución}} = \frac{0{,}478}{0{,}135} \approx 3{,}54 \text{ mol/L}$$

Y la molalidad:

$$m = \frac{n_{etanol}}{m_{disolvente}} = \frac{0{,}478}{0{,}110} = 4{,}35 \text{ mol/kg}$$

Por último, la fracción molar de soluto será:

$$X_s = \frac{n_{etanol}}{n_{totales}} = \frac{0{,}478}{0{,}478 + 6{,}106} = 0{,}0726$$

b) La densidad de la mezcla es:

$$d = \frac{m}{V} = \frac{m_{etanol} + m_{agua}}{V_{total}} = \frac{22 + 110}{135} = 0{,}978 \text{ g/mL}$$

c) Como queremos conseguir 125 mL de disolución 1,2 M, necesitaremos una cantidad de sustancia de etanol:

$$n_{etanol} = M \cdot V_{disolución\ diluida} = 1{,}2 \cdot 0{,}125 = 0{,}150 \text{ mol}$$

Como la disolución concentrada tiene una concentración 3,53 M, hemos de tomar un volumen:

$$V_{disolución\ concentrada} = \frac{n_{etanol}}{m_{disolución\ concentrada}} = \frac{0{,}150 \text{ mol}}{3{,}54 \text{ mol/L}} = 0{,}0424 \text{ L} =$$

$$= 42{,}4 \text{ mL}$$

d) Necesitamos 3,00 g de etanol, lo que corresponde a una cantidad de sustancia:

$$n_{etanol} = \frac{m_{etanol}}{M \text{ (etanol)}} = \frac{3{,}00}{46{,}069} = 0{,}065 \text{ mol}$$

Por tanto, hemos de tomar:

$$V_{disolución\ concentrada} = \frac{n_{etanol}}{M_{disolución\ concentrada}} = \frac{0{,}065 \text{ mol}}{3{,}54 \text{ mol/L}} = 0{,}0184 \text{ L} = 18{,}4 \text{ mL}$$

$$V_{disolución\ diluida} = \frac{n_{etanol}}{M_{disolución\ diluida}} = \frac{0{,}065 \text{ mol}}{1{,}20 \text{ mol/L}} = 0{,}0542 \text{ L} = 54{,}2 \text{ mL}$$

Propiedades coligativas

31 Calcula las temperaturas de ebullición y congelación de una disolución que contiene 50 g de sal en 1 L de agua (toma una densidad para el agua de1 g/mL). Utiliza los valores de K_c y K_e proporcionados en la unidad.

La masa molar del cloruro de sodio es:

$$M \text{ (NaCl)} = 22{,}989 + 35{,}450 = 58{,}439 \text{ g/mol}$$

Por tanto, la cantidad de sustancia será:

$$n_{NaCl} = \frac{m_{NaCl}}{M \text{ (NaCl)}} = \frac{50{,}00}{58{,}44} = 0{,}856 \text{ mol}$$

Como se indica que tomemos una densidad para el agua de 1 g/mL, la masa será de 1000 g. Con esta información ya podemos calcular la molalidad:

$$m = \frac{n_{NaCl} \text{ (mol)}}{m_{disolvente} \text{ (kg)}} = \frac{0{,}856}{1{,}000} = 0{,}856 \text{ mol/kg}$$

Ahora ya podemos obtener las temperaturas pedidas:

$$\Delta T_c = K_c \cdot m = 1{,}86 \cdot 0{,}856 = 1{,}59\ °C \rightarrow T_c = -1{,}59\ °C$$

$$\Delta T_e = K_e \cdot m = 0{,}512 \cdot 0{,}856 = 0{,}44\,°C \rightarrow T_e = 100{,}44\ °C$$

32 Se añaden 20 g de un soluto no volátil a 500 g de agua, de manera que la temperatura de congelación disminuye 0,41 °C. Determina si se trata de glucosa ($C_6H_{12}O_6$), cloruro de sodio (NaCl) o etilenglicol ($C_2H_6O_2$).

Vamos a calcular la masa molar del soluto. Para ello, en primer lugar, obtenemos la molalidad:

$$m = \frac{\Delta T_c}{K_c} = \frac{0{,}41}{1{,}86} = 0{,}220\ \text{mol/kg}$$

Como la masa de disolvente es 0,5 kg, podemos calcular la cantidad de sustancia de soluto a partir del valor de la molalidad:

$$n_s = m \cdot m_{disolvente} = 0{,}220 \cdot 0{,}50 = 0{,}110\ \text{mol}$$

Y por último, como se dice que se han utilizado 20 g:

$$M = \frac{m_s}{n_s} = \frac{20}{0{,}110} = 181{,}82\ \text{g/mol}$$

Las masas molares de las tres posibles sustancias son:

$$M\ (C_6H_{12}O_6) = 180{,}156\ \text{g/mol}$$

$$M\ (\text{NaCl}) = 58{,}439\ \text{g/mol}$$

$$M\ (C_2H_6O_2) = 62{,}068\ \text{g/mol}$$

Vemos, por tanto, que se trata de glucosa.

33 Se añade una cierta cantidad de glicerina ($C_3H_8O_3$) a 250 mL de agua, de manera que el punto de congelación desciende 7 °C. Calcula la masa de soluto disuelta.

La masa molar de la glicerina es:

$$M\ (C_3H_8O_3) = 92{,}094\ \text{g/mol}$$

Ahora, utilizamos el hecho de que la temperatura de congelación de la mezcla es –7 °C para determinar la concentración molal:

$$m = \frac{\Delta T_c}{K_c} = \frac{7{,}00}{1{,}86} = 3{,}763\ \text{mol/kg}$$

A partir de este dato obtendremos la masa de soluto. Para ello, tenemos en cuenta que:

$$n_s = \frac{m_s}{M\ (C_3H_8O_3)}$$

donde m_s vendrá dada en gramos. Además, tomando una densidad para el agua de 1 g/cm^3, sabemos que m_{agua} = 250 g. Por tanto:

$$m = \frac{n_s\ (\text{mol})}{m_{agua}\ (\text{kg})} = \frac{m_s\ (\text{g})}{M(C_3H_8O_3) \cdot m_{agua}\ (\text{kg})} \rightarrow$$

$$\rightarrow m_s\ (\text{g}) = m \cdot M\ (C_3H_8O_3) \cdot m_{agua}\ (\text{kg}) = 3{,}763 \cdot 92{,}094 \cdot 0{,}250 = 86{,}64\ \text{g}$$

34 **Se añaden 500 g de una sustancia anticongelante a 2 L de agua, de manera que el punto de congelación de la disolución es –7,5 °C.**

a) Calcula la masa molar de esa sustancia.

b) ¿Qué masa de soluto habría que añadir al agua si queremos que no congele a –20 °C?

c) Calcula la temperatura de ebullición de la disolución con ambas concentraciones.

a) El descenso de la temperatura de congelación de una disolución está relacionado con la concentración mediante la expresión:

$$\Delta T_c = K_c \cdot m$$

De donde podemos obtener la molalidad:

$$m = \frac{\Delta T_c}{K_c} = \frac{7{,}50}{1{,}86} = 4{,}032 \text{ mol/kg}$$

A partir de este valor y teniendo en cuenta que la masa de disolvente es de 2000 g (tomando una densidad para el agua de 1 g/cm^3), podemos obtener la cantidad de sustancia de soluto:

$$m = \frac{n_s}{m_{disolución}} \rightarrow n_s = m \cdot m_{disolución} = 4{,}032 \cdot 2{,}000 = 8{,}064 \text{ mol}$$

Como se dice que tenemos 500 g de sustancia, ya podemos calcular la masa molar del soluto:

$$n_s = \frac{m_s}{M} \rightarrow M = \frac{m_s}{n_s} = \frac{500}{8{,}064} = 62{,}00 \text{ g/mol}$$

b) Ahora podemos utilizar el valor de la masa molar obtenida en el apartado anterior. Se desea que la temperatura de congelación descienda hasta los –20 °C, por lo que la concentración molar debe ser:

$$m = \frac{\Delta T_c}{K_c} = \frac{20{,}00}{1{,}86} = 10{,}753 \text{ mol/kg}$$

Por tanto:

$$m = \frac{n_s \text{ (mol)}}{m_{disolvente} \text{ (kg)}} = \frac{m_s \text{ (g)}}{M \text{ (soluto)} \cdot m_{disolvente} \text{ (kg)}} \rightarrow$$

$$\rightarrow m_s \text{(g)} = m \cdot M \text{ (soluto)} \cdot m_{disolvente} \text{ (kg)} = 10{,}753 \cdot 62{,}00 \cdot 2 \approx 1333 \text{ g}$$

c) Conociendo la molalidad en ambos casos, se puede obtener fácilmente el ascenso ebulloscópico:

$$\Delta T_{e,1} = K_e \cdot m = 0{,}512 \cdot 4{,}032 = 2{,}06 \text{ °C}$$

$$\Delta T_{e,2} = K_e \cdot m = 0{,}512 \cdot 10{,}753 = 5{,}51 \text{ °C}$$

Luego las temperaturas de ebullición serán:

$$T_{e,1} = 102{,}06 \text{ °C}$$

$$T_{e,2} = 105{,}51 \text{ °C}$$

Página 89

35 **Se prepara una disolución acuosa con un soluto no volátil, de concentración 2,50 m a 40 °C. Calcula la presión de vapor de la disolución a esta temperatura, y las temperaturas de ebullición y congelación.**

Dato: *p*°(agua a 40 °C) = 55,32 mmHg.

Vamos a utilizar la ley de Raoult:

$$\Delta p = p° \cdot X_s$$

Para lo cual, necesitaremos la fracción molar de soluto. Tenemos la molalidad: 2,50 mol/kg. Esto quiere decir que, por cada 1 000 g de disolución hay 2,50 moles de soluto. Por tanto, vamos a considerar que tenemos 1 kg de agua y 2,50 moles de soluto. La cantidad de sustancia de H_2O será:

$$n_{agua} = \frac{1\,000}{18,015} = 55,51 \text{ mol}$$

Y la cantidad de sustancia total:

$$n = n_{agua} + n_{soluto} = 55,51 + 2,50 = 58,01 \text{ mol}$$

Así pues, la fracción molar de soluto es:

$$X_s = \frac{n_{soluto}}{n} = \frac{2,50}{58,01} = 0,0431$$

Y la disminución de la presión de vapor:

$$\Delta p = 55,32 \cdot 0,0431 = 2,38 \text{ mmHg}$$

La presión de vapor a esta temperatura será:

$$p = p° - \Delta p = 55,32 - 2,38 = 52,94 \text{ mmHg}$$

El aumento ebulloscópico viene dado por:

$$\Delta T_e = K_e \cdot m = 0,512 \cdot 2,50 = 1,28 \text{ °C}$$

Así pues, la temperatura de ebullición será:

$$T_e = 101,28 \text{ °C}$$

Por otro lado, el descenso crioscópico viene dado por:

$$\Delta T_c = K_c \cdot m = 1,86 \cdot 2,50 = 4,65 \text{ °C}$$

Y la temperatura de congelación será:

$$T_c = -4,65 \text{ °C}$$

36 Una disolución a 5 °C contiene 0,75 mol de un soluto en medio litro de volumen.

a) Calcula la presión osmótica de la disolución.

b) ¿Qué volumen debería tener la disolución para que la presión osmótica fuese la mitad?

c) Calcula la presión osmótica de esta nueva disolución a 30 °C.

a) Recordemos que la presión osmótica viene dada por la expresión:

$$\pi = M \cdot R \cdot T$$

La concentración de la disolución es:

$$M = \frac{0,75}{0,50} = 1,50 \text{ mol/L}$$

Y, por tanto:

$$\pi = 1,50 \cdot 0,082 \cdot (5 + 273) = 34,19 \text{ atm}$$

b) Si la presión osmótica es la mitad (y no cambia la temperatura), la concentración también se ha de reducir a la mitad, esto es, M = 0,75 mol /L, por lo que el volumen ha de ser el doble, 1 L.

c) Para esta nueva concentración, a 30 °C:

$$\pi = 0{,}75 \cdot 0{,}082 \cdot (30 + 273) = 18{,}64 \text{ atm}$$

37 La presión de vapor del metanol (CH_4O) es 159,76 mmHg. Calcula la masa de glicerol ($C_3H_8O_3$) necesaria para disminuir la presión de vapor de 500 g de metanol hasta 129,76 mmHg.

Vamos a utilizar la ley de Raoult:

$$\Delta p = p° \cdot X_s$$

donde $\Delta p = p° - p$ = 159,76 – 129,76 = 30 mmHg. Por tanto, la fracción molar del glicerol ha de ser:

$$X_s = \frac{\Delta p}{p°} = \frac{30}{159{,}76} = 0{,}1878$$

La cantidad de sustancia de disolvente (metanol) que se ha utilizado es:

$$M\ (CH_4O) = 32{,}042 \text{ g/mol} \rightarrow n_{\text{metanol}} = \frac{500}{32{,}042} = 15{,}61 \text{ mol}$$

Con esta información, ya podemos obtener la cantidad de sustancia de glicerol:

$$X_s = \frac{n_{\text{glicerol}}}{n_{\text{glicerol}} + n_{\text{metanol}}} \rightarrow 0{,}1878 = \frac{n_{\text{glicerol}}}{n_{\text{glicerol}} + 15{,}61}$$

$$0{,}1878 \cdot n_{\text{glicerol}} + 2{,}9316 = n_{\text{glicerol}}$$

$$0{,}8122 \cdot n_{\text{glicerol}} = 2{,}9316 \rightarrow n_{\text{glicerol}} = 3{,}61 \text{ mol}$$

Sabiendo que:

$$M\ (C_3H_8O_3) = 92{,}094 \text{ g/mol}$$

ya tenemos:

$$n_{\text{glicerol}} = \frac{m_{\text{glicerol}}}{M\ (C_3H_8O_3)} \rightarrow m_{\text{glicerol}} = n_{\text{glicerol}} \cdot M\ (C_3H_8O_3) = 3{,}61 \cdot 92{,}094 = 332{,}46 \text{ g}$$

38 Se disuelven 100 g de proteína de albúmina de huevo en 2 L de agua. Se observa que a una temperatura de 30 °C, esta disolución ejerce una presión osmótica de 27,46 atm. Calcula la masa molar de la proteína.

En primer lugar, tenemos que pasar la presión osmótica a atmósferas:

$$\pi = 27{,}46 \text{ mmHg} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{760 \text{ mmHg}} = 0{,}0361 \text{ atm}$$

Y ahora, podemos usar este dato para calcular la concentración de la disolución:

$$\pi = M \cdot R \cdot T \rightarrow M = \frac{\pi}{R \cdot T} = \frac{0{,}0361}{0{,}082 \cdot 303} = 1{,}453 \cdot 10^{-3} \text{ M}$$

Al tener dos litros de disolución, la cantidad de sustancia de soluto será:

$$n = M \cdot V = 2{,}906 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

Y por último, sabiendo que esta corresponde a 100 g de proteína, obtenemos la masa molar:

$$n = \frac{m}{M} \rightarrow M = \frac{m}{n} = \frac{100}{2{,}906 \cdot 10^{-3}} \approx 34\,412 \text{ g/mol}$$

En realidad, aunque su masa molecular es de 34 388 g/mol, vemos que con este método se puede alcanzar una precisión bastante buena.

39 **Un recipiente contiene una disolución formada por 25 g de benceno (C_6H_6) y 30 g de tolueno (C_7H_8) 50 °C. Calcula:**

a) La presión de vapor de cada componente (aunque sean compuestos volátiles, utiliza la ley de Raoult).

b) La presión total de la mezcla gaseosa.

c) La fracción molar de cada componente en la fase de vapor.

Datos: $p°$ (C_6H_6) = 271 mmHg; p° (C_7H_8) = 92,6 mmHg

a) Al tratarse de compuestos volátiles, se establecerá un equilibrio entre la fase líquida y la gaseosa de cada uno de ellos. Estas se relacionan con las presiones de vapor cuando están puros mediante la ley de Raoult:

$$\Delta p_b = p_b^{\circ} \cdot X_b^{l}; \quad \Delta p_t = p_t^{\circ} \cdot X_t^{l}$$

donde el superíndice l denota la fase líquida. En primer lugar, hallamos las fracciones molares de cada componente. Para ello, calculamos sus cantidades de sustancia:

$$M\ (C_6H_6) = 78{,}114 \text{ g/mol} \rightarrow n_{\text{benceno}} = \frac{25}{78{,}114} = 0{,}320 \text{ mol}$$

$$M\ (C_7H_8) = 92{,}141 \text{ g/mol} \rightarrow n_{\text{tolueno}} = \frac{30}{92{,}141} = 0{,}326 \text{ mol}$$

Por tanto, las fracciones molares (en la fase líquida) serán:

$$X_{\text{benceno}}^{l} = \frac{0{,}320}{0{,}320 + 0{,}326} = 0{,}495$$

$$X_{\text{tolueno}}^{l} = \frac{0{,}326}{0{,}320 + 0{,}326} = 0{,}505$$

Y así, finalmente, obtenemos las presiones de vapor:

$$\Delta p_b = p_b^{\circ} \cdot X_b^{l} = 271{,}00 \cdot 0{,}495 = 134{,}15 \text{ mmHg} \rightarrow$$

$$p_b = p_b^{\circ} - \Delta p_b = 271{,}00 - 134{,}15 = 136{,}85 \text{ mmHg}$$

$$\Delta p_t = p_t^{\circ} \cdot X_t \rightarrow 92{,}60 \cdot 0{,}505 = 46{,}76 \text{ mmHg} \rightarrow$$

$$p_t = p_t^{\circ} - \Delta p_t = 92{,}60 - 46{,}76 = 45{,}84 \text{ mmHg}$$

b) La presión total de la fase gaseosa será igual a la suma de las presiones parciales:

$$p = p_b + p_t = 136{,}58 + 45{,}84 = 182{,}42 \text{ mmHg}$$

c) Ahora tenemos en cuenta que la presión parcial de cada componente está relacionada con su fracción molar en la fase gaseosa, según la ley de Dalton:

$$p_b = p \cdot X_b^{g} \rightarrow X_b^{g} = \frac{p_b}{p} = \frac{136{,}58}{182{,}42} = 0{,}749$$

$$p_t = p \cdot X_t^{g} \rightarrow X_t^{g} = \frac{p_t}{p} = \frac{45{,}84}{182{,}42} = 0{,}251$$

3 REACCIONES QUÍMICAS

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

1 REACCIONES Y ECUACIONES QUÍMICAS

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.3.1. (EA.3.1.1.)

Página 94

1 **Ajusta estas reacciones químicas de combustión:**

a) $C_4H_9OH + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

b) $CH_3NO_2 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O + N_2$

Las ecuaciones químicas ajustadas son:

a) $C_4H_9OH + 6\ O_2 \rightarrow 4\ CO_2 + 5\ H_2O$

b) $4CH_3NO_2 + 3\ O_2 \rightarrow 4\ CO_2 + 6\ H_2O + 2\ N_2$

2 **Ajusta las reacciones químicas de síntesis:**

a) $Fe\ (s) + S_8\ (s) \rightarrow Fe_2S_3\ (s)$

b) $Ni\ (s) + I_2\ (s) \rightarrow NiI_3\ (s)$

Las ecuaciones químicas ajustadas son:

a) $16\ Fe\ (s) + 3\ S_8\ (s) \rightarrow 8\ Fe_2S_3\ (s)$

b) $2\ Ni\ (s) + 3\ I_2\ (s) \rightarrow 2\ NiI_3\ (s)$

Página 95

3 **Dentro de las reacciones ácido-base, encontramos las reacciones de neutralización, que pueden considerarse como reacciones de doble desplazamiento. Teniendo esto en cuenta, ajusta las siguientes reacciones en las que intervienen oxoácidos:**

a) $H_2SO_4 + NaOH \rightarrow Na_2SO_4 + H_2O$

b) $H_3PO_4 + Ca(OH)_2 \rightarrow Ca_3(PO_4)_2 + H_2O$

Las 6 W. **Busca información sobre las reacciones de neutralización y explica por qué son importantes como técnica de análisis.**

Las ecuaciones químicas ajustadas son:

a) $H_2SO_4 + 2\ NaOH \rightarrow Na_2SO_4 + 2\ H_2O$

b) $2\ H_3PO_4 + 3\ Ca(OH)_2 \rightarrow Ca_3(PO_4)_2 + 6\ H_2O$

Recuerde a su alumnado que en el banco de recursos de anayaeducacion.es podrá consultar un documento que explica cómo aplicar la técnica «Las 6 W».

Las reacciones de neutralización, al ser reacciones muy rápidas, se utilizan para analizar la concentración de disoluciones ácidas o básicas, mediante volumetría de reacción con una base o un ácido, respectivamente.

4 **Clasifica las siguientes reacciones químicas en función de la reordenación de sus unidades elementales:**

a) $NH_3 + HCl \rightarrow NH_4Cl$

b) $BaCl_2 + K_2CO_3 \rightarrow 2\ KCl + BaCO_3$

a) Se trata de una reacción de adición, pues sigue un esquema A + B $\rightarrow$ AB, donde A es NH_3 y B es HCl.

b) Se trata de una reacción de doble desplazamiento, pues sigue un esquema:
AB + CD $\rightarrow$ CB + AB, donde A es Ba^{2+}; B es Cl^-; C es K^+ y D es CO_3^{2-}

5 **El curso que viene estudiarás más detalladamente las reacciones que se producen en disolución acuosa. Busca información sobre los tres tipos de reacciones que se nombran en la teoría de esta página y pon ejemplos de cada una de ellas.**

Los tres tipos de reacciones aludidos son las reacciones ácido-base, las reacciones de precipitación y las reacciones de reducción-oxidación. Las reacciones ácido-base se dan entre sustancias tipo ácido (capaces de liberar H^+ en disoluciones acuosas, según la teoría de Browsted-Lorry) y bases (capaces de liberar OH^-, según la misma teoría); como productos de este tipo de reacciones se obtienen sales y agua. Las reacciones de precipitación son reacciones entre electrolitos que dan como resultado la formación de una sal poco soluble, que precipita. Las reacciones de oxidación-reducción son aquellas en las que se produce una transferencia de electrones, alterándose el número de oxidación de las especies químicas implicadas.

2 CÁLCULOS ESTEQUIOMÉTRICOS

CE.1.1. **(EA.1.1.1.-1.1.2.)** **CE.3.2.** **(EA.3.2.1.-3.2.2.)**

Página 96

6 **Indica el nombre del compuesto desconocido del ejemplo de la ilustración. ¿Cuál es la relación entre la cantidad de sustancia dato (CO_2 o H_2O) y la cantidad de sustancia incógnita (compuesto desconocido, hidrocarburo) en este caso?**

Datos: M(C) = 12,01 g/mol; M(O) = 15,99 g/mol; M(H) = 1,01 g/mol.

Observando el número de unidades fundamentales en el esquema, podemos concluir que la reacción que tiene lugar corresponde con:

$C_xH_yO_z + 3\ O_2 \rightarrow 2\ CO_2 + 3\ H_2O$, de lo que deducimos la relación entre las cantidades de sustancia dato (CO_2 o H_2O) y la cantidad de sustancia incógnita ($C_xH_yO_z$)

$$\frac{n_{CO_2}}{n_{C_xH_yO_z}} = \frac{2}{1} \qquad \frac{n_{H_2O}}{n_{C_xH_yO_z}} = \frac{3}{1}$$

Asimismo, observando la ecuación química ajustada, se puede deducir que $x = 2$, $y = 6$ y $z = 1$.

7 **Calcula la cantidad de sustancia de:**

a) Una masa de 400 g de NaOH.

b) Carbonato de calcio presente en 100 g de piedra caliza con una riqueza del 74 %.

c) Ácido sulfúrico en 490 mL de una disolución 2 M.

d) Dioxígeno, O_2, en un volumen de 250 L medidos a 298 K y 704 mmHg.

e) Ácido nítrico en 1 litro de una disolución de riqueza, 36,7 %, y densidad, 1225 g/L.

Datos: M(Na) = 22,99 g/mol; M(O) = 15,99 g/mol; M(H) = 1,01 g/mol;
M(S) = 32,06 g/mol; M(N) = 14,01 g/mol.

a) Para calcular la cantidad de sustancia, es preciso calcular previamente la masa molar de NaOH; para ello utilizamos estos valores de las masas atómicas: M(Na) = 23 g/mol, M(O) = 16 g/mol y M(H) = 1 g/mol. La masa molar resulta: M(NaOH) = 23 + 16 + 1 = 40 g/mol, por lo que:

$$n = \frac{m(\text{g})}{M(\text{g/mol})} = \frac{400\ \text{g}}{40\ \text{g/mol}} = 10\ \text{mol}$$

b) Para calcular la cantidad de sustancia, es preciso calcular previamente la masa molar de $CaCO_3$; para ello utilizamos estos valores de las masas atómicas: M(Ca) = 40 g/mol, M(C) = 12 g/mol y M(O) = 16 g/mol.

La masa molar resulta: $M(CaCO_3)$ = 40 + 12 + 3 · 16 = 100 g/mol, por lo que:

$$n = 100\text{g} \cdot \frac{74\ \text{g}\ CaCO_3}{100\ \text{g}} \cdot \frac{1\ \text{mol}\ CaCO_3}{100\ \text{g}\ CaCO_3} = 0{,}74\ \text{mol}$$

c) Aplicamos la definición de molaridad: $M = \dfrac{n\,(\text{mol})}{V\,(\text{L})} \rightarrow n(\text{mol}) = M(\text{g/mol}) \cdot V(\text{L})$; sustituimos los valores, expresando el volumen en litros $V = 0{,}490$ L y obtenemos:

$$n\,(\text{mol}) = 2 \text{ mol/L} \cdot 0{,}49 \text{ L} = 0{,}98 \text{ mol}$$

d) Utilizamos la ecuación de estado de los gases ideales: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$

El valor de la constante que utilizamos es $R = 0{,}082$ atm · L · K · mol^{-1}, por lo que habrá que expresar la presión en atmósferas; para ello:

$$p = \frac{704 \text{ mm Hg}}{760 \text{ mm Hg/atm}} \approx 0{,}93 \text{ atm}$$

Despejamos la cantidad de sustancia de la ecuación de los gases:

$$n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{0{,}93 \text{ atm} \cdot 250 \text{ L}}{0{,}082 \dfrac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot 298 \text{ K}} \approx 9{,}15 \text{ mol}$$

e) Calculamos en primer lugar la masa molar de ácido nítrico, a partir de su fórmula y las masas atómicas de N, O y H. $M(HNO_3) = 63$ g/mol.

Aplicando la definición de densidad y riqueza y la relación entre la masa molar, la masa y la cantidad de sustancia, el cálculo de la cantidad de ácido nítrico (de subíndice A) es:

$$1 \text{ L} \cdot \frac{1225 \text{ g}}{1 \text{ L}} \cdot \frac{36{,}7 \text{ g}_A}{100 \text{ g}} \cdot \frac{1 \text{ mol}_A}{63 \text{ g}_A} \approx 7{,}14 \text{ mol}$$

3 CÁLCULOS ESTEQUIOMÉTRICOS EN MASA

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.3.2. (EA.3.2.1.-3.2.2.)

Página 97

8 Calcula la masa de flúor, F_2, necesaria para que reaccione completamente la masa de azufre calculada en el ejemplo resuelto 2. Comprueba tu resultado aplicando la ley de conservación de la masa.

La reacción química del ejemplo resuelto 2 es:

$$S_8 + 24\, F_2 \rightarrow 8\, SF_6$$

Los datos del problema son:

$m_{SF_6} = 1{,}752$ kg $\rightarrow$ 1752 g

$m_{S_8} = 384$ g

Cualquiera de las dos sustancias puede ser la sustancia dato, tomaremos la masa del S_8 como dato del problema; siguiendo el esquema de cálculo:

1. Cálculo de la cantidad de sustancia dato.

   Para ello, calculamos previamente la masa molar a partir de la masa atómica del azufre, $M(S_8) = 256$ g/mol:

$$n_{dato} = \frac{m_{dato}}{M_{dato}} = \frac{384 \text{ g}}{256 \text{ g/mol}} = 1{,}5 \text{ mol}$$

2. Cálculo de la cantidad de sustancia incógnita.

   Para ello, utilizamos los coeficientes estequiométricos: para la sustancia dato, $a = 1$, y para la sustancia incógnita, $b = 24$.

$$n_{incógnita} = n_{dato} \cdot \frac{b}{a} = 1{,}5 \text{ mol} \cdot \frac{24}{1} = 36 \text{ mol}$$

3. Por último, calculamos la magnitud incógnita, en este caso la masa.

   Para ello, calculamos previamente la masa molar de la sustancia incógnita, en este caso F_2, a partir de la masa atómica promedio del flúor; $M(F_2)$ = 38 g/mol.

$$m_{incógnita} = n_{incógnita} \cdot M = 36 \text{ mol} \cdot 38 \text{ g/mol} = 1\,368 \text{ g}$$

Comprobamos el resultado aplicando la ley de conservación de la masa:

1 368 g + 384 g = 1 752 g, que es la masa de producto obtenida.

9 **El nitrato de plata se utiliza como antiséptico y desinfectante por vía tópica. La síntesis de esta sustancia se lleva a cabo entre nitrato de aluminio y plata, donde también se obtiene aluminio como producto. Escribe la ecuación química y calcula la cantidad de cada producto (expresada en mol) que se obtiene al reaccionar 16,305 g de plata.**

Datos: M(Ag) = 107,87 g/mol; M(N) = 14,01 g/mol; M(O) = 15,99 g/mol;
M(Al) = 26,98 g/mol.

La ecuación química es:

$$Al(NO_3)_3 + 3\,Ag \rightarrow Al + 3\,AgNO_3$$

El dato del problema es la masa de la sustancia dato; en este caso, la plata:

$$m_{Ag} = 16{,}305 \text{ g.}$$

Las sustancias incógnita son Al y $AgNO_3$

Seguimos el esquema de cálculo hasta el paso 2, pues nos piden la cantidad de sustancia y no la masa de las sustancias incógnita:

1. Cálculo de la cantidad de sustancia dato.

   Para ello, calculamos previamente la masa molar a partir de la masa atómica de la plata, M(Ag) = 107,9 g/mol:

$$n_{dato} = \frac{m_{dato}}{M_{dato}} = \frac{16{,}305 \text{ g}}{107{,}9 \text{ g/mol}} \approx 0{,}15 \text{ mol}$$

2. Cálculo de la cantidad de sustancia incógnita.

   Para ello, utilizamos los coeficientes estequiométricos. El coeficiente de la sustancia dato es a = 3 y para las sustancias incógnita, b = 1 (en el caso del aluminio) y b' = 3 (en el caso del nitrato de plata):

$$n_{Al} = n_{dato} \cdot \frac{b}{a} = 1{,}5 \text{ mol} \cdot \frac{1}{3} = 0{,}05 \text{ mol de Al}$$

$$n_{AgNO_3} = n_{dato} \cdot \frac{b}{a} = 0{,}15 \text{ mol} \cdot \frac{3}{3} = 0{,}15 \text{ mol de } AgNO_3$$

4 REACTIVOS Y PRODUCTOS EN ESTADO GASEOSO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.3.2. (EA.3.2.1.-3.2.2.)

Página 98

10 **Partiendo de la reacción de síntesis del amoníaco:**

$$N_2\,(g) + H_2\,(g) \rightarrow NH_3\,(g)$$

a) En condiciones normales, ¿qué volúmenes de los reactivos son necesarios para obtener 16,8 L de amoníaco?

b) Calcula los volúmenes de los reactivos si la presión del apartado anterior se reduce a la mitad.

Datos: M(N) = 14,01 g/mol; M(H) = 1,01 g/mol.

La ecuación química es: $N_2\,(g) + 3\,H_2\,(g) \rightarrow 2\,NH_3\,(g)$

La sustancia dato es NH_3; la magnitud observable es el volumen, $V_{NH_3} = 16{,}8$ L.

La relación entre los volúmenes de la reacción y la relación entre las cantidades de sustancia son las mismas, pues se miden estos volúmenes en idénticas condiciones de presión y temperatura, en este caso condiciones normales, de lo que deducimos, a la vista de la ecuación química:

$$\frac{V_{N_2}}{V_{NH_3}} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{V_{H_2}}{V_{NH_3}} = \frac{3}{2}$$

Por tanto:

$$V_{N_2} = \frac{1}{2} \cdot 16{,}8 \text{ L} = 8{,}4 \text{ L}$$

$$V_{H_2} = \frac{3}{2} \cdot 16{,}8 \text{ L} = 25{,}2 \text{ L}$$

11 El hierro metálico reacciona con el ácido nítrico dando nitrato de hierro(II) e hidrógeno gaseoso.

a) Escribe la ecuación química del proceso y calcula el volumen de hidrógeno que se desprende, a 25 °C y 730 mm Hg, si reaccionan 726 g de hierro.

b) Busca información sobre el HNO_3 y justifica su uso en la industria por sus propiedades físicas y químicas.

Datos: *M*(Fe) = 55,85 g/mol; *M*(H) = 1,01 g/mol; *M*(N) = 14,01 g/mol; *M*(O) = 15,99 g/mol.

a) La ecuación química es:

$$Fe + 2\,HNO_3 \rightarrow Fe(NO_3)_2 + H_2$$

La sustancia dato es el hierro, Fe, sustancia cuya masa conocemos, $m_{Fe} = 726$ g.

La sustancia incógnita es el hidrógeno, H_2, su volumen medido a 730 mmHg (0,96 atm) y 25 °C (298 K).

Aplicando el esquema de cálculo:

1. Cálculo de la cantidad de sustancia dato.

   Para ello, calculamos previamente la masa molar a partir de la masa atómica del hierro, M(Fe) = 55,85 g/mol:

$$n_{dato} = \frac{m_{dato}}{M_{dato}} = \frac{726 \text{ g}}{55{,}85 \text{ g/mol}} \approx 13 \text{ mol}$$

2. Cálculo de la cantidad de sustancia incógnita.

   Para ello, utilizamos los coeficientes estequiométricos. El coeficiente de la sustancia dato es $a = 1$ y el de la sustancia incógnita, $b = 1$, por tanto:

$$n_{H_2} = n_{dato} \cdot \frac{b}{a} = 13 \text{ mol} \cdot \frac{1}{13} = 13 \text{ mol de} H_2$$

3. Cálculo de la magnitud observable de sustancia incógnita, en este caso el volumen; para ello, utilizamos la ecuación de los gases ideales, despejando el volumen y sustituyendo los datos del enunciado, en las unidades adecuadas:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

$$V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{13 \text{ mol} \cdot 0{,}082 \dfrac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{K} \cdot \text{mol}}\, 298 \text{ K}}{0{,}96 \text{ atm}} \approx 331 \text{ L}$$

b) Respuesta abierta.

Página 99

12 **El ozono gaseoso reacciona con agua dando H_2 y O_2, ambos en estado gaseoso. Si el volumen de todas las sustancias gaseosas se mide a 299 K y 704 mmHg:**

a) Calcula cuántos litros de ozono han reaccionado si se obtienen 10 L de oxígeno.

b) Razona si el volumen de H_2 será mayor o menor que el de O_2 obtenido.

c) Calcula la cantidad de ozono que ha reaccionado y la masa de agua consumida.

La ecuación química es:

$$O_3 + H_2O \rightarrow H_2 + 2\,O_2$$

a) La sustancia dato es el oxígeno, O_2, cuyo volumen es conocido, $V_{O_2} = 10$ L.

La sustancia incógnita es el ozono, O_3, cuyo volumen es la magnitud observable pedida en el enunciado.

La relación entre los volúmenes de la reacción y la relación entre las cantidades de sustancia son las mismas, pues se miden estos volúmenes en idénticas condiciones de presión y temperatura, de lo que deducimos, a la vista de la ecuación química:

$$\frac{V_{O_3}}{V_{O_2}} = \frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$V_{O_3} = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ L} = 5 \text{ L}$$

b) El volumen de hidrógeno será la mitad que el de oxígeno, pues la relación entre los coeficientes estequiométricos es 1 : 2.

c) La sustancia dato es el oxígeno, O_2, cuyo volumen, medido a 299 K y 704 mmHg (0,93 atm), es conocido, $V_{O_2} = 10$ L.

Las sustancias incógnitas son el ozono, O_3, del que nos piden calcular la cantidad de sustancia, y el agua, H_2O, cuya masa es la magnitud observable pedida en el enunciado.

Seguimos el esquema de cálculo:

1. Cálculo de la cantidad de sustancia dato.

Utilizamos la ecuación de estado del gas ideal: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$

Despejando la cantidad de sustancia y sustituyendo los valores del enunciado:

$$n_{O_2} = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{0{,}93 \text{ atm} \cdot 10 \text{ L}}{0{,}082 \dfrac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot 299 \text{ K}} \approx 0{,}38 \text{ mol}$$

2. Cálculo de la cantidad de sustancia incógnita.

Para ello, utilizamos los coeficientes estequiométricos. El coeficiente de la sustancia dato es $a = 2$ y para ambas sustancias incógnita, $b = 1$.

$$n_{O_3} = n_{H_2O} = n_{\text{dato}} \cdot \frac{b}{a} = 0{,}38 \text{ mol} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}19 \text{ mol}$$

3. Por último, calculamos la magnitud incógnita; en este caso, la masa de agua.

Para ello, calculamos previamente la masa molar de la sustancia incógnita; en este caso, H_2O:

$$M(H_2O) = 18 \text{ g/mol}$$

$$m_{\text{incógnita}} = n_{\text{incógnita}} \cdot M = 0{,}19 \text{ mol} \cdot 18 \text{ g/mol} = 3{,}42 \text{ g}$$

Por tanto, han reaccionado 0,19 moles de ozono y se han consumido 3,42 g de agua.

13 **El clorato de potasio se descompone en cloruro de potasio y dioxígeno.**

a) Calcula el volumen de oxígeno, medido en c. n., que se produce si se descomponen completamente 4,09 g de clorato de potasio.

b) Calcula la masa de cloruro de potasio obtenida.

c) Si esta reacción ocurre en un recipiente cerrado no deformable de un litro de capacidad, ¿qué presión soporta el recipiente?

La ecuación química es: $2\ KClO_3 \rightarrow 2\ KCl + 3\ O_2$

a) La sustancia dato es el clorato de potasio, $KClO_3$, cuya masa es conocida, $m_{KClO_3} = 4{,}09$ g.

La sustancia incógnita es el oxígeno, O_2, cuyo volumen, medido en c. n., es la magnitud observable pedida en el enunciado. Aplicamos el esquema de cálculo:

1. Cálculo de la cantidad de sustancia dato.

Para ello, calculamos previamente la masa molar a partir de la masa atómica del hierro, $M(KClO_3) = 122{,}55$ g/mol:

$$n_{dato} = \frac{m_{dato}}{M_{dato}} = \frac{4{,}09\ \text{g}}{122{,}55\ \text{g/mol}} \approx 3{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{mol}$$

2. Cálculo de la cantidad de sustancia incógnita.

Para ello, utilizamos los coeficientes estequiométricos. El coeficiente de la sustancia dato es $a = 2$ y el de la sustancia incógnita, $b = 3$; por tanto:

$$n_{O_2} = n_{dato} \cdot \frac{b}{a} = 3{,}33 \cdot 10^{-2}\ \text{mol} \cdot \frac{3}{2} = 0{,}05\ \text{mol de } O_2$$

3. Cálculo del volumen de la sustancia incógnita.

Aplicando la relación 1 mol <> 22,4 L de gas medidos en c. n., tenemos:

$$0{,}05\ \text{mol} \cdot \frac{22{,}4\ \text{L}}{1\text{mol}} \approx 1{,}12\ \text{L}$$

b) La sustancia dato es el clorato de potasio, $KClO_3$, cuya masa es conocida, $m_{KClO_3} = 4{,}09$ g.

La sustancia incógnita es el cloruro de potasio, KCl, cuya masa es la magnitud observable pedida en el enunciado. Aplicamos el esquema de cálculo:

1. Cálculo de la cantidad de sustancia dato.

Para ello, calculamos previamente la masa molar a partir de la masa atómica del hierro, $M(KClO_3) = 122{,}55$ g/mol:

$$n_{dato} = \frac{m_{dato}}{M_{dato}} = \frac{4{,}09\ \text{g}}{122{,}55\ \text{g/mol}} \approx 3{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{mol}$$

2. Cálculo de la cantidad de sustancia incógnita.

Para ello, utilizamos los coeficientes estequiométricos. El coeficiente de la sustancia dato es $a = 2$, y el de la sustancia incógnita, $b = 2$; por tanto:

$$n_{O_2} = n_{dato} \cdot \frac{b}{a} = 3{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{mol} \cdot \frac{2}{2} = 3{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{mol de KCl}$$

3. Por último, calculamos la magnitud incógnita; en este caso, la masa.

Para ello calculamos previamente la masa molar de la sustancia incógnita; en este caso KCl, $M(KCl) = 74{,}55$ g/mol.

$$m_{incógnita} = n_{incógnita} \cdot M = 3{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{mol} \cdot 74{,}55\ \text{g/mol} \approx 2{,}5\ \text{g}$$

c) Para responder a este apartado consideramos que la presión que tiene el recipiente (V = 1 L) antes de que ocurra la reacción química es la presión atmosférica y que soportará una sobre presión debida a la aparición del producto gaseoso; en este caso, el oxígeno. Calculamos esta sobrepresión a partir de la ecuación de los gases ideales, sustituyendo los valores de volumen y cantidad de sustancia calculados previamente y suponemos una temperatura ambiente de 298 K:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T;$$

$$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{0{,}05 \text{ mol} \cdot 0{,}082 \dfrac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{K} \cdot \text{mol}} 298 \text{ K}}{1 \text{ L}} = 1{,}22 \text{ atm añadida a la presión atmosférica}$$

5 REACTIVOS Y PRODUCTOS EN DISOLUCIÓN

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.3.2. (EA.3.2.2.)

Página 101

14 **Calcula la masa de fosfato de calcio que se obtiene a partir de 125 mL de una disolución de cloruro de calcio 0,100 M y 125 mL de una disolución 0,100 M de fosfato de sodio. Escribe la reacción química que tiene lugar entre ambas disoluciones.**

La ecuación química es $3\ CaCl_2 + 2\ Na_3PO_4 \rightarrow Ca_3(PO_4)_2 + 6\ NaCl$

Aparentemente, el problema tiene dos sustancias dato (los dos reactivos de la reacción):

Cloruro de calcio, $CaCl_2$, para la cual el enunciado da estos datos V_A = 125 mL, M_A = 0,100 M.

Fosfato de sodio, Na_3PO_4, para la cual el enunciado da estos datos $V_{A'}$ = 125 mL, $M_{A'}$ = 0,100 M.

Observando los datos, concluimos que se tiene la misma cantidad de sustancia en ambas disoluciones. Observando la estequiometría de la reacción, concluimos que por cada 3 mol de $CaCl_2$ reaccionan solo 2 mol de Na_3PO_4; por tanto, reaccionará completamente el $CaCl_2$ y sobrará parte de la sustancia de la otra disolución, es decir, sobrará Na_3PO_4. La sustancia dato es, por tanto, el cloruro de calcio.

Aplicamos el esquema de resolución de problemas con el que hemos estado trabajando en la unidad:

1. Cálculo de la cantidad de sustancia dato a partir de la definición de molaridad de la disolución y del volumen de la misma:

$$M = \frac{n\,(\text{mol})}{V\,(\text{L})}$$

$$n\,(\text{mol}) = M\left(\frac{\text{mol}}{\text{L}}\right) \cdot V\,(\text{L}) = 0{,}100\ \frac{\text{mol}}{\text{L}} \cdot 0{,}125 \text{ L} = 0{,}0125 \text{ mol}$$

2. Cálculo de la cantidad de sustancia incógnita. Utilizamos los coeficientes estequiométricos. El coeficiente de la sustancia dato es a = 3 y el de la sustancia incógnita, b = 1; por tanto:

$$n_B = n_A \cdot \frac{b}{a} = 0{,}0125 \text{ mol} \cdot \frac{1}{3} \approx 0{,}0042 \text{ mol}$$

3. Por último, calculamos la magnitud incógnita; en este caso, la masa.

   Para ello, calculamos previamente la masa molar de la sustancia incógnita; en este caso $Ca_3(PO_4)_2$, $M(Ca_3(PO_4)_2)$ = 215,21 g/mol.

$$m_B = n_B \cdot M = 0{,}0042 \text{ mol} \cdot 215{,}21 \text{ g/mol} \approx 0{,}900 \text{ g}$$

15 **Calcula la concentración de una disolución de $Ca(OH)_2$ sabiendo que una muestra de 20 mL de es-ta disolución reacciona completamente con 40 mL de una disolución de HCl 0,1 M, y se obtienen como productos cloruro de calcio y agua.**

La ecuación química es: $Ca(OH)_2 + 2\ HCl \rightarrow CaCl_2 + 2\ H_2O$

La sustancia dato es el cloruro de hidrógeno, que se encuentra en disolución M_A = 0,1 M de la que se disponen V_A = 40 mL = 0,040 L.

La sustancia incógnita es $Ca(OH)_2$, de la que preguntan la concentración molar de su disolución, M_B, y dan su volumen, V_B = 20 mL = 0,02 L.

Aplicamos el esquema de cálculo:

1. Cálculo de la cantidad de sustancia dato a partir de la molaridad y volumen de la disolución:

$$n_A\,(\text{mol}) = M_A\left(\frac{\text{mol}}{\text{L}}\right) \cdot V_A\,(\text{L}) = 0{,}1\,\frac{\text{mol}}{\text{L}} \cdot 0{,}040\ \text{L} = 4 \cdot 10^{-3}\ \text{mol}$$

2. Cálculo de la cantidad de sustancia incógnita. Para ello, utilizamos los coeficientes estequiométricos. El coeficiente de la sustancia dato es *a* = 2, y el de la sustancia incógnita, *b* = 1; por tanto:

$$n_B = n_A \cdot \frac{b}{a} = 4 \cdot 10^{-3}\ \text{mol} \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{mol}$$

3. Por último, calculamos la molaridad de la disolución que contiene la sustancia incógnita, utilizando el volumen de la muestra, V_B, y la cantidad de sustancia calculada, n_B:

$$M_B = \frac{n_B\,(\text{mol})}{V_B\,(\text{L})} = \frac{2 \cdot 10^{-3}\ \text{mol}}{2 \cdot 10^{-2}\ \text{L}} = 0{,}1\ \text{M}$$

6 REACTIVO LIMITANTE Y RENDIMIENTO DE REACCIÓN

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.3.2. (EA.3.2.3.-3.2.4.)

Página 103

16 **En la siguiente reacción:**

$$3\ H_2\,(g) + N_2\,(g) \rightarrow 2\ NH_3\,(g)$$

Indica cuál es el reactivo limitante en estos casos:

a) Reaccionan 44,8 L de H_2, en condiciones normales, con 2 mol de N_2.

b) Reaccionan 42 g de N_2 con 1 dm^3 de H_2 a 298 K y 0,98 atm.

c) Reaccionan 2 L de cada reactivo, medidos en las mismas condiciones de presión y temperatura.

La ecuación química es: $3\ H_2\,(g) + N_2\,(g) \rightarrow 2\ NH_3\,(g)$

En este caso $\left(\dfrac{n_{H_2}}{n_{N_2}}\right)_{\text{Estequiométrico}} = 3$.

a) Calculamos la cantidad de sustancia de ambos reactivos:

H_2, teniendo en cuenta que 1 mol ocupa 22,4 L en c. n.:

$$44{,}8\ \text{L} \cdot \frac{1\ \text{mol}}{22{,}4\ \text{L}} = 2\ \text{mol}$$

N_2, 2 mol.

A la vista de la ecuación química, 2 mol de N_2 requieren de 6 mol de H_2; por tanto, el reactivo limitante es el H_2.

b) Calculamos la cantidad de sustancia de ambos reactivos:

H_2, aplicando la ecuación de estado del gas ideal para $V = 1$ L, $T = 298$ K y $p = 0{,}98$ atm.

$$n_{H_2} = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{0{,}98 \text{ atm} \cdot 1 \text{ L}}{0{,}082 \dfrac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{K} \cdot \text{mol}} 298 \text{ K}} \approx 0{,}040 \text{ mol}$$

N_2, a partir de la masa, $m = 42$ g la masa molar $M(N_2) = 28$ g/mol

$$n_{N_2} = \frac{m_{N_2}}{M_{N_2}} = \frac{42 \text{ g}}{28 \text{ g/mol}} = 1{,}5 \text{ mol}$$

$\left(\dfrac{n_{H_2}}{n_{N_2}}\right)_{\text{Real}} = \dfrac{0{,}040}{1{,}5} < \left(\dfrac{n_{H_2}}{n_{N_2}}\right)_{\text{Estequiométrico}}$; por tanto, el reactivo limitante es H_2.

c) En este caso $\left(\dfrac{n_{H_2}}{n_{N_2}}\right)_{\text{Real}} = 1 < \left(\dfrac{n_{H_2}}{n_{N_2}}\right)_{\text{Estequiométrico}}$; por tanto, el reactivo limitante es H_2.

17 **En una campana de vacío, hermética, de $V = 3$ dm^3, se introduce oxígeno hasta una presión de 1 atm para quemar completamente 12 g de carbono. Si la temperatura es constante durante todo el proceso y su valor es de 31 °C, calcula la cantidad de CO_2 formada.**

Datos: M(O) = 15,99 g/mol; M(C) = 12,01 g/mol.

La ecuación química es C (*s*) + O_2 (*g*) $\rightarrow$ CO_2 (*g*)

La sustancia dato es el reactivo limitante, para identificarlo comparamos $\left(\dfrac{n_C}{n_{O_2}}\right)_{\text{Real}}$ con $\left(\dfrac{n_C}{n_{O_2}}\right)_{\text{Estequiométrico}}$.

Calculamos n_{O_2}, aplicando la ecuación de estado del gas ideal para $V = 3$ L, $T = 31$ °C $= 304$ K y $p = 1$ atm.

$$n_{O_2} = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 3 \text{ L}}{0{,}082 \dfrac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{K} \cdot \text{mol}} 304 \text{ K}} \approx 0{,}12 \text{ mol}$$

Calculamos n_C, a partir de la masa, $m = 12$ g la masa molar M(C) = 12,01 g/mol

$$n_C = \frac{m_C}{M_C} = \frac{12 \text{ g}}{12{,}01 \text{ g/mol}} \approx 1 \text{ mol}$$

$\left(\dfrac{n_C}{n_{O_2}}\right)_{\text{Real}} = \dfrac{1 \text{ mol}}{0{,}12 \text{ mol}} = 8{,}33 > \left(\dfrac{n_C}{n_{O_2}}\right)_{\text{Estequiométrico}}$; por tanto, el reactivo limitante es O_2 y, por lo tanto, la sustancia dato.

Calculamos la cantidad de dióxido de carbono obtenida, observando que el coeficiente estequiométrico del producto y de la sustancia dato es el mismo; por tanto se formarán 0,12 mol de CO_2.

18 **Calcula la molaridad de una disolución de NaOH sabiendo que 250 mL de esta disolución reaccionan completamente con 58 mL de una disolución de ácido clorhídrico 0,02 M.**

Lluvia de ideas. Si ahora utilizas una disolución de $Ba(OH)_2$, ¿qué molaridad obtienes para esta base? ¿Es la misma que para la de NaOH? Explica tu razonamiento a partir de la comparación de las ecuaciones químicas de las dos reacciones de neutralización.

Datos: M(Na) = 22,99 g/mol; M(O) = 15,99 g/mol; M(H) = 1,01 g/mol;
M(Cl) = 35,45 g/mol; M(Ba) = 137,34 g/mol.

En **anayaeducacion.es**, su alumnado puede consultar un documento que explica cómo aplicar la tecnica «Lluvia de ideas», que sugerimos para resolver esta actividad.

La ecuación química es: $NaOH + HCl \rightarrow NaCl + H_2O$

La sustancia dato es el cloruro de hidrógeno, que se encuentra en disolución M_A = 0,02 M de la que se disponen V_A = 58 mL = 0,058 L.

La sustancia incógnita es NaOH, de la que preguntan la concentración molar de su disolución, M_B, y dan su volumen, V_B = 250 mL = 0,250 L.

Aplicamos el esquema de cálculo:

1. Cálculo de la cantidad de sustancia dato a partir de la molaridad y volumen de la disolución:

$$n_A\,(\text{mol}) = M_A\,(\frac{\text{mol}}{\text{L}}) \cdot V_A\,(\text{L}) = 0{,}02\ \frac{\text{mol}}{\text{L}} \cdot 0{,}058\ \text{L} = 1{,}16 \cdot 10^{-3}\ \text{mol}$$

2. Cálculo de la cantidad de sustancia incógnita. Para ello, utilizamos los coeficientes estequiométricos. El coeficiente de la sustancia dato es a = 1, y el de la sustancia incógnita, b = 1; por tanto:

$$n_B = n_A \cdot \frac{b}{a} = 1{,}16 \cdot 10^{-3}\ \text{mol} \cdot \frac{1}{1} = 1{,}16 \cdot 10^{-3}\ \text{mol}$$

3. Por último, calculamos la molaridad de la disolución que contiene la sustancia incógnita, utilizando el volumen de la muestra, V_B, y la cantidad de sustancia calculada, n_B:

$$M_B = \frac{n_B\,(\text{mol})}{V_B\,(\text{L})} = \frac{1{,}16 \cdot 10^{-3}\ \text{mol}}{2{,}5 \cdot 10^{-1}\ \text{L}} = 4{,}64 \cdot 10^{-3}\ \text{M}$$

Si se utiliza $Ba(OH)_2$, la reacción química es: $Ba(OH)_2 + 2\ HCl \rightarrow BaCl_2 + 2\ H_2O$. Lo único que cambia es el coeficiente estequiométrico de la sustancia dato, que ahora es a = 2. Por tanto, la cantidad de sustancia de $Ba(OH)_2$ es ahora la mitad, y también la molaridad de la disolución.

19 **El dióxido de nitrógeno gaseoso reacciona con agua líquida y se obtienen como productos, ácido nítrico y monóxido de nitrógeno.**

a) Escribe la ecuación química ajustada.

b) Si disponemos de 377 g de NO_2 y 102,6 g de agua, ¿cuál es el reactivo limitante? ¿Qué masa del reactivo en exceso queda sin reaccionar?

c) Calcula el volumen de ácido nítrico obtenido.

Datos: M(N) = 14,01 g/mol; M(O) = 15,99 g/mol; M(H) = 1,01 g/mol.

La ecuación química es: $3\ NO_2\ (g) + H_2O\ (l) \rightarrow 2\ HNO_3\ (aq) + NO\ (g)$

La sustancia dato es el reactivo limitante, para identificarlo comparamos $\left(\frac{n_{NO_2}}{n_{H_2O}}\right)_{Real}$ con $\left(\frac{n_{NO_2}}{n_{H_2O}}\right)_{Estequiométrico} = \frac{3}{1}$.

Calculamos n_{NO_2}, a partir de la masa, m = 377 g, y la masa molar $M(NO_2)$ = 45,99 g/mol.

$$n_{NO_2} = \frac{m_{NO_2}}{M_{NO_2}} = \frac{377\ \text{g}}{45{,}99\ \text{g/mol}} \approx 8{,}20\ \text{mol}$$

Calculamos n_{H_2O}, a partir de la masa, m = 102,6 g, y la masa molar $M(H_2O)$ = 18,01 g/mol.

$$n_{H_2O} = \frac{m_{H_2O}}{M_{H_2O}} = \frac{102{,}6\ \text{g}}{18{,}01\ \text{g/mol}} \approx 5{,}70\ \text{mol}$$

$\left(\frac{n_{NO_2}}{n_{H_2O}}\right)_{Real} = \frac{8{,}20\ \text{mol}}{5{,}70\ \text{mol}} = 1{,}44 < \left(\frac{n_{NO_2}}{n_{H_2O}}\right)_{Esteq} = 3$; por tanto el reactivo limitante es NO_2, y por tanto la sustancia dato.

Para calcular la masa de agua que queda sin reaccionar, hallamos previamente la cantidad de sustancia que reacciona. Para ello, utilizamos los coeficientes estequiométricos. El coeficiente de la sustancia dato es a = 1, y el de la sustancia incógnita, b = 1; por tanto:

$$n_B = n_A \cdot \frac{b}{a} = 8{,}20 \text{ mol} \cdot \frac{1}{3} \approx 2{,}73 \text{ mol}$$

Por tanto, la cantidad de agua que queda sin reaccionar, n'_{H_2O}, es: n'_{H_2O} = 5,70 mol – 2,73 mol = = 2,97 mol, que corresponde a una masa de agua de:

$$m_{H_2O} = n_{H_2O} \cdot M_{H_2O} = 2{,}97 \text{ mol} \cdot 18{,}01 \text{ g/mol} = 53{,}49 \text{ g}$$

Respecto del ácido nítrico, podemos calcular la masa que se forma. El volumen de la disolución en la que se encuentra el ácido corresponderá al volumen de agua que queda sin reaccionar (asumiendo que el volumen del disolvente coincide con el de la disolución). En una primera aproximación será de unos 53,5 mL (considerando que la densidad de la disolución es aproximadamente la del agua).

20 El fósforo blanco, P_4, reacciona con hidróxido de sodio y agua según la reacción:

$$\mathbf{P_4 + NaOH + H_2O \rightarrow Na_2HPO_4 + PH_3}$$

a) Si partimos de 438,7 g de P_4, 12,7 g de NaOH y 10,33 g de agua, indica los reactivos en exceso.

b) Calcula la masa de fosfano que se formará.

c) ¿Qué cantidad de Na_2HPO_4 (en mol) se obtiene?

Datos: M(P) = 30,97 g/mol; M(Na) = 22,99 g/mol; M(O) = 15,99 g/mol; M(H) = 1,01 g/mol.

La ecuación química es: $P_4 + 3\ NaOH + 3\ H_2O \rightarrow 3\ NaH_2PO_2 + PH_3$

a) La sustancia dato es el reactivo limitante. Para identificarlo, comparamos la relación entre la cantidad de los tres reactivos de que disponemos con la relación estequiométrica, que en este caso es:

$$(n_{P_4}: n_{NaOH}: n_{H_2O})_{Esteq} = 1:3:3$$

Calculamos n_{P_4}, a partir de la masa, m_{P_4} = 438,7 g, y la masa molar $M(P_4)$ = 123,88 g/mol:

$$n_{P_4} = \frac{m_{P_4}}{M_{P_4}} = \frac{438{,}7 \text{ g}}{123{,}88 \text{ g/mol}} \approx 3{,}54 \text{ mol}$$

Calculamos n_{NaOH}, a partir de la masa, m_{NaOH} = 12,7 g, y M(NaOH) = 39,99 g/mol:

$$n_{NaOH} = \frac{m_{NaOH}}{M_{NaOH}} = \frac{12{,}7 \text{ g}}{39{,}99 \text{ g/mol}} \approx 0{,}32 \text{ mol}$$

Calculamos n_{H_2O}, a partir de la masa, m = 10,33 g, y la masa molar $M(H_2O)$ = 18,01 g/mol.

$$n_{H_2O} = \frac{n_{H_2O}}{M_{H_2O}} = \frac{10{,}33 \text{ g}}{18{,}01 \text{ g/mol}} \approx 0{,}57 \text{ mol}$$

$$(n_{P_4} : n_{NaOH} : n_{H_2O})_{Real} = 3{,}54 : 0{,}32 : 0{,}57$$

Comparando con la relación estequiométrica, obtenemos que el reactivo limitante es NaOH y, por tanto, la sustancia dato. Los reactivos en exceso son P_4 y H_2O.

b) Para calcular la masa de fosfano (b), utilizamos la cantidad de sustancia dato, NaOH, sustancia a, y aplicamos el esquema de cálculo, sabiendo que los coeficientes estequiométricos son a = 3, b = 1 y que la masa molar del fosfano es $M(PH_3)$ = 34,00 g/mol:

$$m_b = 0{,}32 \text{ mol}_a \cdot \frac{1 \text{ mol}_b}{3 \text{ mol}_a} \cdot \frac{34{,}00 \text{ g}_b}{1 \text{ mol}_b} \approx 3{,}63 \text{ g}$$

c) Observando la ecuación química concluimos que la cantidad de fosfato obtenida es la misma que la cantidad de hidróxido de sodio que ha reaccionado; es decir, 0,32 mol.

7 PROCESOS QUÍMICOS EN UN ALTO HORNO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.3.3. (EA.3.3.1.) CE.3.4. (EA.3.4.1.-3.4.2.)

Página 105

21 **Busca qué otros elementos pueden estar presentes en la aleación de carbono y hierro. ¿Qué porcentaje de la mezcla representan? ¿Qué aplicaciones tienen estos nuevos compuestos?**

Le sugerimos que recomiende a su alumnado la consulta de las fichas de ciudadanía digital, disponibles en el apartado «Recursos relacionados con las claves del proyecto» del banco de recursos de **anayaeducacion.es**, para abordar de forma segura y responsable cualquier búsqueda de información en Internet.

Respuesta abierta.

22 **¿Qué es el acero inoxidable? ¿En qué se diferencia del acero? Haz una lista de las ventajas y diferencias de cada uno de ellos y ponla en común con el resto de compañeros y compañeras.**

Respuesta abierta.

23 ODS **¿Qué impacto ambiental tiene la producción de acero? ¿En qué países se produce una mayor producción de acero a nivel mundial? ¿Cómo crees que pueden paliarse estos efectos? Consulta la meta 13.a y elabora un decálogo de ideas. Busca información sobre las medidas medioambientales que se están tomando en la industria siderúrgica y piensa si son viables económicamente en nuestro país.**

Su alumnado puede visualizar en **anayaeducacion.es** el vídeo con información relativa a la meta 13.a de los ODS antes de responder a esta cuestión.

Respuesta abierta.

TRABAJA CON LO APRENDIDO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.1.2. (EA.1.2.1.-1.2.2.) CE.3.1. (EA.3.1.1.) CE.3.2. (EA.3.2.1.-3.2.2.-3.2.3.-3.2.4.) CE.3.3. (EA.3.3.1.) CE.3.4. (EA.3.4.1.-3.4.2.-3.4.3.) CE.3.5. (EA.3.5.1.)

Página 110

Reacciones y ecuaciones químicas

1 Indica si las siguientes ecuaciones químicas son correctas o no. En caso de que no lo sean, corrígelas:

a) $KClO_3 \rightarrow KCl + 3\ O_2$

b) $2\ HgO \rightarrow Hg + O_2$

c) $Cl_2 + 2\ KBr \rightarrow KCl + Br_2$

d) $C_2H_6 + O_2 \rightarrow 2\ CO_2 + H_2O$

Mostramos las correcciones en rojo:

a) $KClO_3 \rightarrow KCl + 3/2\ O_2$

b) $2\ HgO \rightarrow 2\ Hg + O_2$

c) $Cl_2 + 2\ KBr \rightarrow 2\ KCl + Br_2$

d) $C_2H_6 + 7/2\ O_2 \rightarrow 2\ CO_2 + 3\ H_2O$

2 Clasifica las siguientes reacciones químicas en función de la reordenación de sus entidades elementales:

a) $2\ Li + Cl_2 \rightarrow 2\ LiCl$

b) $CaCO_3 \rightarrow CaO + CO_2$

c) $H_2SO_4 + Zn \rightarrow ZnSO_4 + H_2$

d) $2\ NaBr + Cl_2 \rightarrow 2\ NaCl + Br_2$

a) $2\ Li + Cl_2 \rightarrow 2\ LiCl$ Adición

b) $CaCO_3 \rightarrow CaO + CO_2$ Descomposición

c) $H_2SO_4 + Zn \rightarrow ZnSO_4 + H_2$ Desplazamiento

d) $2\ NaBr + Cl_2 \rightarrow 2\ NaCl + Br_2$ Desplazamiento

3 Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa y explica por qué:

«En una reacción química se cumple la ley de conservación de la cantidad de sustancia; esto explica que el número de átomos de cada elemento químico presentes sea el mismo en los reactivos y en los productos de la reacción».

La afirmación es falsa. Lo correcto sería:

«En una reacción química se cumple la ley de conservación de la masa cantidad de sustancia, esto explica que el número de átomos de cada elemento químico presente en la misma sea el mismo en los reactivos y en los productos de la reacción».

4 Completa los productos de las siguientes reacciones químicas de doble desplazamiento:

a) $FeS + 2\ HCl \rightarrow$

b) $BaCl_2 + Na_2SO_4 \rightarrow$

c) $HCl + NaOH \rightarrow$

d) $Al(OH)_3 + HNO_3 \rightarrow$

a) $FeS + 2\,HCl \rightarrow FeCl_2 + H_2S$

b) $BaCl_2 + Na_2SO_4 \rightarrow BaSO_4 + 2\,NaCl$

c) $HCl + NaOH \rightarrow NaCl + H_2O$

d) $Al(OH)_3 + 3\,HNO_3 \rightarrow Al(NO_3)_3 + 3\,H_2O$

5 **Las dos últimas reacciones químicas de la actividad anterior son reacciones de neutralización, que has estudiado en cursos anteriores.**

a) Indica en cada una de ellas cuál es el ácido y cuál es la base.

b) Indica qué tipo de sustancias son los productos de este tipo de reacciones químicas.

c) ¿Qué es la escala de pH?

a) En la reacción del apartado (c), el ácido es HCl y la base NaOH; en la del apartado (d), el ácido es HNO_3 y la base $Al(OH)_3$.

b) Los productos en ambos casos son una sal y agua.

c) La escala de pH mide la concentración de iones H^+ en una disolución, se define como $pH = -\log[H^+]$. Un $pH < 7$ indica carácter ácido de la disolución, por el contrario si el $pH > 7$, la disolución es básica.

6 **A partir de la información dada, completa la ecuación química:**

a) Doble desplazamiento, $Sn(OH)_2 + FeBr_3 \rightarrow$

b) Desplazamiento, $Mg + HCl \rightarrow$

c) Desplazamiento, $Zn + Fe(NO_3)_2 \rightarrow$

d) Síntesis, $4\,Al + 3\,O_2 \rightarrow$

e) Descomposición, $2\,NaClO_3 \rightarrow$

Las reacciones pedidas son:

a) Doble desplazamiento, $3\,Sn(OH)_2 + 2\,FeBr_3 \rightarrow 2\,Fe(OH)_3 + 3\,SnBr_2$

b) Desplazamiento, $Mg + 2\,HCl \rightarrow MgCl_2 + H_2$

c) Desplazamiento, $Zn + Fe(NO_3)_2 \rightarrow Fe + Zn(NO_3)_2$

d) Síntesis, $4\,Al + 3\,O_2 \rightarrow 2\,Al_2O_3$

e) Descomposición, $2\,NaClO_3 \rightarrow 2\,NaCl + 3\,O_2$

7 **Calcula la cantidad de sustancia presente en cada uno de los apartados. Utiliza para ello, las masas atómicas promedio del sistema periódico.**

a) Masa de 100 g de $CaCO_3$.

b) Muestra de 115 g de pirita (mineral de sulfuro de hierro, FeS_2), con una riqueza del 60 %.

c) Un volumen de 250 mL de una disolución de ácido sulfúrico de densidad 1840 g/L y una riqueza del 96,4 %.

d) Un volumen de 50 L de O_2 medidos a una presión de 704 mmHg y temperatura de 25 °C.

a) Para calcular la cantidad de sustancia, es preciso calcular previamente la masa molar de $CaCO_3$; para ello utilizamos estos valores de las masas atómicas: $M(Ca) = 40{,}08$ g/mol, $M(O) = 15{,}99$ g/mol y $M(C) = 12{,}01$ g/mol. La masa molar resulta: $M(Ca\,CO_3) \approx 100$ g/mol, por lo que:

$$n = \frac{m\,(g)}{M\left(\frac{g}{mol}\right)} = \frac{100\ g}{100\ g/mol} = 1\ mol$$

b) Para calcular la cantidad de sustancia, es preciso calcular previamente la masa molar de FeS_2; para ello utilizamos estos valores de las masas atómicas: M(Fe) = 55,85 g/mol y M(S) = 32,07 g/mol. La masa molar resulta: $M(FeS_2)$ = 119,99 g/mol ≈ 120 g/mol, por lo que:

$$115\text{ g}\ \frac{60\text{ g CaCO3}}{100\text{ g}} \cdot \frac{1\text{ mol CaCO3}}{120\text{ g CaCO3}} \approx 0{,}58\text{ mol}$$

c) Para calcular la cantidad de sustancia, es preciso calcular previamente la masa molar de H_2SO_4; para ello utilizamos estos valores de las masas atómicas: M(O) = 15,99 g/mol, M(H) = 1,01 g/mol y M(S) = 32,07 g/mol. La masa molar resulta: $M(H_2SO_4)$ = 98,05 g/mol. Utilizando factores de conversión, denominando T a la disolución y A a la sustancia, al tratarse de relaciones de proporcionalidad:

$$0{,}250\text{ L}_T \cdot \frac{1840\text{ g}_T}{1\text{ L}_T} \cdot \frac{96\text{ g}_A}{100\text{ g}_T} \cdot \frac{1\text{ mol}_A}{98\text{ g}_A} \approx 4{,}50\text{ mol}$$

d) Aplicamos la ecuación de estado del gas ideal para las condiciones del enunciado, V = 50 L, p = 704 mmHg = 0,96 atm y T = 25 °C = 298 K:

$$n_{O_2} = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{0{,}96\text{ atm} \cdot 50\text{ L}}{0{,}082\ \dfrac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot 298\text{K}} \approx 1{,}90\text{ mol}$$

8 El aluminio es un elemento químico muy abundante en la corteza terrestre, alrededor del 8 % en masa. La forma más frecuente de encontrar este metal en la corteza es combinado con oxígeno, aunque existen otros compuestos conocidos desde la Antigüedad, como el sulfato de aluminio (empleado para fijar el color en los tejidos). Ordena de menor a mayor las siguientes muestras en función de la cantidad de átomos de aluminio que contengan:

a) Muestra 1: 156 g de hidróxido de aluminio.

b) Muestra 2: 153 g de óxido de aluminio.

c) Muestra 3: 100 g de fosfato de aluminio.

d) Muestra 4: 200 g de sulfato de aluminio.

Dato: *M*(Al) = 26,98 g/mol.

Para ordenar de menor a mayor número de átomos de aluminio, es necesario calcular previamente la cantidad de sustancia y, para ello, a su vez, la masa molar de cada sustancia, donde i se refiere a cada sustancia:

$$n_i = \frac{m_i}{M_i}$$

La cantidad de átomos de cada muestra, expresada en mol, la obtenemos multiplicando la cantidad de sustancia por el número de átomos de aluminio en cada unidad fórmula, i, $N°_{Al} = i \cdot n_i$

- Muestra 1: 156 g de hidróxido de aluminio, $M(Al(OH)_3)$ = 77,98 g/mol, n ≈ 2,00 mol,

$$N°_{Al} = 1 \cdot 2{,}00 = 2{,}00\text{ mol de Al}$$

- Muestra 2: 153 g de óxido de aluminio, $M(Al_2O_3)$ = 101,93 g/mol, n ≈ 1,50 mol,

$$N°_{Al} = 2 \cdot 1{,}50 = 3{,}00\text{ mol de Al}$$

- Muestra 3: 100 g de fosfato de aluminio, $M(AlPO_3)$ = 121,91 g/mol, n ≈ 0,82 mol,

$$N°_{Al} = 1 \cdot 0{,}82 = 0{,}82\text{ mol de Al}$$

- Muestra 4: 200 g de sulfato de aluminio, $M(Al_2(SO_4)_3$ = 341,84 g/mol, n ≈ 0,59 mol.

$$N°_{Al} = 2 \cdot 0{,}59 \approx 1{,}20\text{ mol de Al}$$

En orden creciente de número de átomos de Al: muestra 2, muestra 1, muestra 4 y muestra 3.

9 **El hexafluoruro de azufre es un compuesto que se utiliza como gas aislante en equipos para distribución de electricidad. Es un gas más denso que el aire por lo que se usa en «espectáculos científicos» para, aparentemente, hacer flotar «mágicamente» barquitos de papel en aire.**

a) Busca información sobre los problemas ambientales del hexafluoruro de azufre y valora lo adecuado de su uso en estos espectáculos.

b) Calcula cuántas moléculas de este gas se liberan al llenar una pecera de 5 dm^3 en condiciones de presión atmosférica y 20 °C.

Datos: M(S) = 32,06 g/mol; M(F) = 18,99 g/mol.

a) El hexafluoruro de azufre, SF_6, pertenece al grupo de gases fluorados que presentan un importante efecto invernadero. Se utiliza en refrigeración, extinción de incendios, aerosoles y en aislamiento térmico y eléctrico. Su uso en las últimas décadas se ha incrementado, pues es sustituto en algunas aplicaciones de los CFC que afectan negativamente a la capa de ozono. Se puede consultar información en la página del Ministerio para la Transición Ecológica:

https://www.miteco.gob.es/es/cambio-climatico/temas/mitigacion-politicas-y-medidas/fluorados.aspx

b) Calculamos el número de moléculas a partir de la cantidad de sustancia gaseosa, aplicando para ello la ecuación de estado del gas ideal para las siguientes condiciones: T = 20 °C = 293 K, p = 1 atm y V = 5 L.

$$n_{SF_6} = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 5 \text{ L}}{0{,}082 \dfrac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot 296\text{K}} \approx 0{,}21 \text{ mol}$$

El número de moléculas se obtiene multiplicando la cantidad de sustancia en mol por la constante de Avogadro:

$$N_{SF_6} = n_{SF_6} \cdot N_{Av} = 0{,}21 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 1{,}23 \cdot 10^{23} \text{ moléculas}$$

10 Folio giratorio. **El número de Avogadro ha sido siempre sujeto de muchas curiosidades y comparativas por su valor y su historia. Por ejemplo, la altura que alcanzaría una torre de un mol de folios apilados o cómo hacer billonarios a todos los habitantes de la zona euro. Incluso, similitudes entre su nombre y el de alguna fruta (mejor pensarlo en inglés). En equipo, buscad más ejemplos y cread una presentación para mostrarla al resto del aula.**

Recomiende a su alumnado la consulta del documento disponible en **anayaeducacion.es**, en el que se explica cómo aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo «Folio giratorio», sugerida en el enunciado.

Respuesta abierta.

Página 111

Cálculos estequiométricos

11 **Los usos del dióxido de titanio son variados. Entre ellos, podemos destacar su aplicación como absorbente de radiación UV en protectores solares.**

Una reacción de síntesis de dióxido de titanio parte del tetracloruro de titanio como reactivo:

$$TiCl_4 + O_2 \rightarrow TiO_2 + Cl_2$$

a) Ajusta la ecuación química.

b) Calcula las masas molares de los compuestos de titanio de la reacción.

c) **Calcula la cantidad de tetracloruro de titanio (en mol) a la que corresponden 237,5 g.**

d) **¿Podemos afirmar que se formarán 237,5 g de óxido de titanio si reacciona esa misma masa de tetracloruro de titanio? Explica tu respuesta.**

e) **Busca información sobre los efectos en la salud y el medioambiente del óxido de titanio.**

f) **ODS Estudios científicos indican que el dióxido de titanio liberado en los ambientes marinos puede ser perjudicial para ciertas especies. ¿De qué manera? Busca información sobre el objetivo 14 y di cómo podría reducirse la producción de este compuesto para conseguirlo.**

Datos: M(Ti) = 47,90 g/mol; M(Cl) = 35,45 g/mol; M(O) = 15,99 g/mol.

a) La ecuación química ajustada es:

$$TiCl_4 + O_2 \rightarrow TiO_2 + 2\ Cl_2$$

b) Para ello, utilizamos las masas molares siguientes: M(Ti) = 47,87 g/mol; M(O) = 15,99 g/mol y M(Cl) = 35,45 g/mol. Obtenemos, $M(TiCl_4)$ = 47,87 + 4 · 35,45 = 189,67 g/mol y $M(TiO_2)$ = 47,87 + 2 · 15,99 = 79,85 g/mol.

c) Utilizamos la definición de masa molar:

$$n_A = \frac{m_A}{M_A} = \frac{237{,}5\ \text{g}}{189{,}67\ \text{g/mol}} \approx 1{,}25\ \text{mol}$$

d) A la vista del apartado anterior, la masa de tetracloruro de titanio corresponde a 1,25 mol. Según la relación estequiométrica se obtienen, a su vez, 1,25 mol de dióxido de titanio, pero no corresponden a la misma masa de tetracloruro de titanio, pues la masa molar de estas dos sustancias es diferente.

e) y f) La liberación de nanopartículas de óxido de titanio a los ecosistemas acuáticos, procedentes de las cremas de protección solar está afectando, entre otros, a los corales marinos. Hay abundante información al respecto.

Su alumnado puede visualizar en **anayaeducacion.es** los vídeos en los que se ofrece información relativa al objetivo 14 de los ODS antes de responder a esta cuestión.

12 **El ácido nítrico se utiliza en la fabricación de fertilizantes como el nitrato de amonio. La síntesis del ácido nítrico tiene lugar al reaccionar óxido de nitrógeno(IV) con agua obteniéndose como productos el ácido nítrico y el monóxido de nitrógeno.**

a) **Escribe y ajusta la ecuación química que representa esta reacción.**

b) **Calcula la cantidad de agua que reacciona con un mol de óxido de nitrógeno(IV).**

c) **Indica cuáles de las sustancias que intervienen en la reacción anterior son gases.**

d) **Además de tener usos imprescindibles en la industria, el ácido nítrico en disolución acuosa es uno de los contaminantes más potentes que forman parte de la atmósfera. De hecho, es uno de los principales componentes de la lluvia ácida. Elabora un informe de investigación en el que recojas las fuentes de emisión de este ácido, cómo ataca a nuestro planeta y las consecuencias que tiene a corto, medio y largo plazo.**

Datos: M(H) = 1,01 g/mol; M(N) = 14,01 g/mol; M(O) = 15,99 g/mol.

a) La ecuación química ajustada es: $3\ NO_2 + H_2O \rightarrow 2\ HNO_3 + NO$

b) La sustancia dato es NO_2, de la que se conoce la cantidad de sustancia, n_{NO_2} = 1 mol. A partir de este dato, calculamos la cantidad de sustancia incógnita, H_2O; para ello, utilizamos los coeficientes estequiométricos. El coeficiente de la sustancia dato es a = 3, y el de la sustancia incógnita, b = 1; por tanto:

$$n_B = n_A \cdot \frac{b}{a} = 1\ \text{mol} \cdot \frac{1}{3} \approx 0{,}33\ \text{mol}$$

c) Las sustancias gaseosas son los óxidos de nitrógeno, NO_2 y NO.

d) En **anayaeducacion.es**, su alumnado puede consultar información sobre cómo escribir un informe de investigación, dentro del apartado dedicado a la clave Plan Lingüístico en la sección de recursos relacionados con las claves del proyecto.

Se puede consultar información en https://www.investigacionyciencia.es/blogs/fisica-y-quimica/39/posts/la-lluvia-cida-hoy-13261.

Cálculos estequiométricos en masa

13 La reacción entre el hidróxido de calcio y el carbonato de sodio es una reacción de doble desplazamiento.

a) Escribe y ajusta la ecuación química.

b) Calcula la masa de carbonato de sodio que es necesaria para que se produzcan 2,5 kg de hidróxido de sodio.

c) Calcula la masa de carbonato de calcio que se ha formado.

d) Calcula la masa de hidróxido de calcio que ha reaccionado. ¿Qué ley ponderal has aplicado?

Datos: M(Ca) = 40,08 g/mol; M(Na) = 22,99 g/mol; M(C) = 12,01 g/mol; M(O) = 15,99 g/mol; M(H) = 1,01 g/mol.

a) La ecuación química ajustada es:

$$Ca(OH)_2 + Na_2CO_3 \rightarrow CaCO_3 + 2\ NaOH.$$

b) La sustancia dato es NaOH, cuya masa es m_a = 2,5 kg = 2500 g. La sustancia incógnita, b, es Na_2CO_3. Aplicamos el esquema de cálculo

1. Cálculo de la cantidad de sustancia dato.

Para ello, calculamos previamente la masa molar, M(NaOH) = 39,99 g/mol:

$$n_a = \frac{m_a}{M_a} = \frac{2\,500\ \text{g}}{39{,}99\ \text{g/mol}} \approx 62{,}5\ \text{mol}$$

2. Cálculo de la cantidad de sustancia incógnita, n_b.

Para ello, utilizamos los coeficientes estequiométricos: para la sustancia dato, a = 2, y para la sustancia incógnita, b = 1.

$$n_b = n_a \cdot \frac{b}{a} = 62{,}5\ \text{mol} \cdot \frac{1}{2} \approx 31{,}3\ \text{mol}$$

3. Por último, calculamos la magnitud incógnita; en este caso, la masa, m_b.

Para ello, calculamos previamente la masa molar de la sustancia incógnita:

$$M(Na_2CO_3) = 105{,}96\ \text{g/mol}$$

$$m_b = n_b \cdot M = 31{,}3\ \text{mol} \cdot 105{,}96\ \text{g/mol} \approx 3300\ \text{g} = 3{,}3\ \text{kg}$$

c) La sustancia dato es NaOH, cuya masa es m_a = 2,5 kg = 2500 g. La sustancia incógnita, b, es $CaCO_3$. Aplicamos el esquema de cálculo:

1. Cálculo de la cantidad de sustancia dato.

Para ello, calculamos previamente la masa molar, M(NaOH) = 39,99 g/mol:

$$n_a = \frac{m_a}{M_a} = \frac{2\,500\ \text{g}}{39{,}99\ \text{g/mol}} \approx 62{,}5\ \text{mol}$$

2. Cálculo de la cantidad de sustancia incógnita, n_b.

Para ello, utilizamos los coeficientes estequiométricos: para la sustancia dato, a = 1, y para la sustancia incógnita, b = 1.

$$n_b = n_a \cdot \frac{b}{a} = 62{,}5\ \text{mol} \cdot \frac{1}{1} = 62{,}5\ \text{mol}$$

3. Por último, calculamos la magnitud incógnita; en este caso, la masa, m_b.

   Para ello, calculamos previamente la masa molar de la sustancia incógnita:

$$M(CaCO_3) = 100{,}06 \text{ g/mol.}$$

$$m_b = n_b \cdot M = 62{,}5 \text{ mol} \cdot 100{,}06 \text{ g/mol} \approx 6\,300 \text{ g} = 6{,}3 \text{ kg}$$

d) Aplicando la ley de conservación de la masa, obtenemos:

$$m_{Ca(OH)_2} + 3\,300 \text{ g} = 6\,300 \text{ g} + 2\,500 \text{ g ,por tanto, } m_{Ca(OH)_2} = 5\,500 \text{ g}$$

14 **La fermentación de la glucosa para producir etanol puede expresarse de acuerdo con la siguiente ecuación química:**

$$C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2\ CH_3CH_2OH + 2\ CO_2$$

a) Calcula la masa de etanol que se produce a partir de 1 000 kg de glucosa.

b) Calcula la masa de etanol que se produce a partir de la fermentación de 1 000 kg de una materia prima que contiene un 60 % de riqueza de glucosa.

Datos: M(C) = 12,01 g/mol; M(O) = 15,99 g/mol; M(H) = 1,01 g/mol.

a) La ecuación química ajustada es $C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2\ CH_3CH_2OH + 2\ CO_2$

b) La sustancia dato es $C_6H_{12}O_6$, cuya masa es m_a = 1000 kg = 106 g. La sustancia incógnita, b, es CH_3CH_2OH. Aplicamos el esquema de cálculo:

1. Cálculo de la cantidad de sustancia dato.

   Para ello, calculamos previamente la masa molar, $M(C_6H_{12}O_6)$ = 180,12 g/mol:

$$n_a = \frac{m_a}{M_a} = \frac{10^6 \text{ g}}{180{,}12 \text{ g/mol}} \approx 5{,}552 \cdot 10^3 \text{ mol}$$

2. Cálculo de la cantidad de sustancia incógnita, n_b.

   Para ello, utilizamos los coeficientes estequiométricos: para la sustancia dato, a = 1, y para la sustancia incógnita, b = 2.

$$n_b = n_a \cdot \frac{b}{a} = 5{,}552 \cdot 10^3 \text{ mol} \cdot \frac{2}{1} \approx 1{,}1104 \cdot 10^4 \text{ mol}$$

3. Por último, calculamos la magnitud incógnita, en este caso la masa, m_b.

   Para ello, calculamos previamente la masa molar de la sustancia incógnita:

$$M(CH_3CH_2OH) = 46{,}07 \text{ g/mol.}$$

$$m_b = n_b \cdot M = 1{,}1104 \cdot 10^4 \text{ mol} \cdot 46{,}07 \text{ g/mol} \approx 5{,}115 \cdot 10^5 \text{ g} = 511{,}5 \text{ kg}$$

c) Aplicamos el 60 % a la masa de la muestra para obtener la masa de la sustancia dato y repetimos el mismo esquema; por tanto, la masa de etanol obtenida será el 60 % de la masa obtenida en el apartado anterior, que corresponde a 306,9 kg.

15 **Tomar y revelar una fotografía en blanco y negro conlleva realizar varias reacciones químicas:**

- **Activación del ion plata, presente en la película fotográfica, por acción de la luz:**

$$AgBr + \text{luz} \rightarrow AgBr^* \text{ (imagen latente)}$$

- **Reducción del ion plata por acción de hidroquinona ($C_6H_6O_2$):**

$$2\ AgBr^* + C_6H_6O_2 \rightarrow 2\ Ag \text{ (negro)} + 2\ HBr + C_6H_4O_2$$

- **Eliminación del bromuro de plata sobrante mediante reacción con un fijador (también llamado «hypo»):**

$$AgBr + 2\ Na_2S_2O_3 \rightarrow Na_3Ag(S_2O_3)_3 + NaBr$$

a) ¿Qué masa de fijador es necesaria para eliminar de la fotografía 0,15 g de bromuro de plata?

b) Investiga sobre la evolución del revelado fotográfico a lo largo de la historia. Piensa en cómo ha cambiado la fotografía en los últimos años, desde el papel al digital y a la impresión instantánea desde el teléfono móvil. ¿Crees que los productos químicos que se utilizaban para revelar en papel eran tóxicos? ¿Cuál era la importancia de la luz en este proceso?

a) La ecuación química ajustada es:

$$AgBr + 2\ Na_2S_2O_3 \rightarrow Na_3Ag(S_2O_3)_3 + NaBr$$

La sustancia dato es AgBr, cuya masa es $m_a = 0{,}15$ g. La sustancia incógnita, b, es $Na_2S_2O_3$. Aplicamos el esquema de cálculo:

1. Cálculo de la cantidad de sustancia dato; para ello, calculamos previamente la masa molar, $M(AgBr) = 187{,}77$ g/mol:

$$n_a = \frac{m_a}{M_a} = \frac{0{,}15\ \text{g}}{187{,}77\ \text{g/mol}} \approx 8{,}00 \cdot 10^{-4}\ \text{mol}$$

2. Cálculo de la cantidad de sustancia incógnita, n_b.

   Para ello, utilizamos los coeficientes estequiométricos: para la sustancia dato, $a = 1$, y para la sustancia incógnita, $b = 2$.

$$n_b = n_a \cdot \frac{b}{a} = 8{,}00 \cdot 10^{-4}\ \text{mol} \cdot \frac{2}{1} \approx 1{,}60 \cdot 10^{-3}\ \text{mol}$$

3. Por último, calculamos la magnitud incógnita; en este caso, la masa, m_b.

   Para ello, calculamos previamente la masa molar de la sustancia incógnita:

$$M(Na_2S_2O_3) = 158{,}08\ \text{g/mol}.$$

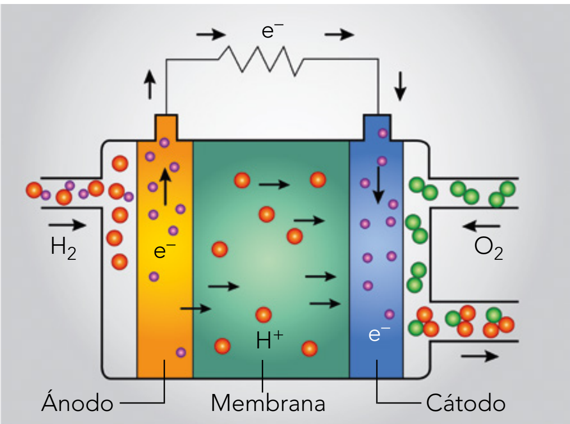
$$m_b = n_b \cdot M = 1{,}60 \cdot 10^{-3}\ \cdot \text{mol} \frac{158{,}08\ \text{g}}{\text{mol}} = 2{,}53 \cdot 10^{-1}\ \text{g}$$

b) Se pueden consultar estas páginas: https://photo-museum.org/es/historia-fotografia/

Página 112

Reactivos y productos gaseosos

16 **El hidrógeno se considera un mejor vector energético frente a derivados del petróleo (combustibles fósiles), ya que no genera dióxido de carbono al producir energía, sino tan solo vapor de agua. Esta transformación se da en una celda de combustible como la que ves a continuación:**



Las celdas de combustible se utilizan para hacer funcionar motores eléctricos.

Su principal desventaja es la pureza que requiere el hidrógeno para poder ser utilizado. Una de las formas de obtenerlo es el reformado del metano, cuya ecuación química es:

$$CH_4 + H_2O \rightarrow CO + 3\,H_2$$

a) Calcula el volumen de metano necesario para producir 150 m^3 de hidrógeno medido a 100 °C y 2 atm.

b) ¿Qué cantidad de CO se produce?

c) Investiga sobre otras alternativas para producir hidrógeno a partir de otras materias primas.

d) Indica si es acertado afirmar que el hidrógeno es un combustible.

a) La ecuación química ajustada es $CH_4 + H_2O \rightarrow CO + 3\,H_2$

La sustancia incógnita es el metano, CH_4, del que nos piden calcular el volumen, V_b. La sustancia dato es el hidrógeno, H_2, cuyo volumen (V_a = 150 m^3 = $1{,}5 \cdot 10^5$ L), medido a T = 100 °C = 373 K y p= 2 atm, conocemos. A falta de datos de condiciones de presión y temperatura a las que se mide el volumen de metano, establecemos que son las mismas a las que se mide el volumen de hidrógeno; por tanto, la relación entre las cantidades de ambas sustancias será la misma que entre sus volúmenes.

A partir de la ecuación química ajustada obtenemos:

$$\frac{n_b}{n_a} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, la relación entre los volúmenes será 1/3:

$$\frac{V_b}{V_a} = \frac{1}{3}, \text{ despejando, obtenemos: } V_b = \frac{V_a}{3} = \frac{1{,}5 \cdot 10^5 \text{ L}}{3} = 5{,}0 \cdot 10^4 \text{ L}$$

b) La sustancia dato es el hidrógeno, H_2, cuyo volumen (V_a = 150 m^3 = $1{,}5 \cdot 10^5$ L), medido a T = 100 °C = 373 K y p= 2 atm, conocemos. La sustancia incógnita es el monóxido de carbono, CO; el cálculo pedido es la cantidad de esta sustancia, n_{CO}.

Seguimos el esquema de cálculo:

1. Cálculo de la cantidad de sustancia dato.

   Utilizamos la ecuación de estado del gas ideal: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$; despejando la cantidad de sustancia y sustituyendo los valores del enunciado:

$$n_{CH_4} = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{2 \text{ atm} \cdot 1{,}5 \cdot 10^5 \text{ L}}{0{,}082 \dfrac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot 373 \text{ K}} \approx 9{,}81 \cdot 10^4 \text{ mol}$$

2. Cálculo de la cantidad de sustancia incógnita; observamos que los coeficientes de ambas sustancias son iguales; por tanto: $a = b \Rightarrow n_a = n_b = 9{,}81 \cdot 10^4$ mol.

c) La producción de hidrógeno con fines energéticos está descrita por ejemplo en: www.fundacionenergia.es.

d) Realmente la reacción que tiene lugar en una célula de combustible no es una combustión, sino una reacción de síntesis de agua.

17 **Una de las reacciones en la cual todas las sustancias que intervienen están en estado gaseoso es la síntesis de amoníaco a partir de hidrógeno y nitrógeno. Esta síntesis es una reacción lenta, por lo que es necesaria la presencia de un catalizador:**

$$N_2\,(g) + 3\,H_2\,(g) \rightarrow 2\,NH_3\,(g)$$

a) Define qué es un *catalizador* y su función en una reacción química.

b) Busca información sobre el proceso Haber-Bosch y la importancia de fijar el nitrógeno atmosférico para su uso como fertilizante.

c) Calcula el volumen, medido en las condiciones del proceso Haber-Bosch, 400 °C y 200 atm, que se obtiene a partir de 60 mol de hidrógeno.

a) Un catalizador es una sustancia que rebaja la energía de activación de una reacción química permitiendo así que esta tenga lugar en condiciones más moderadas de temperatura y/o presión.

b) El proceso Haber-Bosch es un procedimiento industrial de síntesis de amoníaco que utiliza un catalizador de hierro. La fijación del nitrógeno del aire es relevante, pues así se cierra el ciclo de este elemento incorporándolo al suelo. El amoníaco es materia prima en la fabricación de fertilizantes.

c) La ecuación química ajustada es: $N_2\,(g) + 3\,H_2\,(g) \rightarrow 2\,NH_3\,(g)$

La sustancia dato es el hidrógeno, H_2, $n_a = 60$ mol; la sustancia incógnita es el amoníaco, NH_3. La magnitud observable pedida es el volumen, V_b, medido a $T = 400\,°C = 673$ K y $p = 200$ atm.

Calculamos la cantidad de sustancia incógnita, n_b, utilizando los coeficientes estequiométricos: para la sustancia dato, $a = 3$, y para la sustancia incógnita, $b = 2$.

$$n_b = n_a \cdot \frac{b}{a} = 60\ \text{mol} \cdot \frac{2}{3} = 40\ \text{mol}$$

Para calcular la magnitud observable, el volumen, haremos una aproximación, pues utilizaremos la ecuación de estado del gas ideal para una situación que excede las condiciones de aplicabilidad de esta ecuación de estado, ya que la presión es mucho mayor que 1 atm.

$$V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{40\ \text{mol} \cdot 0{,}082\ \dfrac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot 673\ \text{K}}{200\ \text{atm}} \approx 11\ \text{L}$$

Reactivos y productos en disolución

18 **Una reacción de precipitación consiste en la formación de un sólido poco soluble. Una de las más vistosas es la precipitación del yoduro de plomo(II) a partir de nitrato de plomo(II) y yoduro de potasio.**

a) Escribe la ecuación química del proceso y clasifícala atendiendo a la reordenación de entidades elementales.

b) Calcula la masa de yoduro de plomo(II) que se obtiene si reaccionan completamente 100 mL de una disolución 0,8 M de nitrato de plomo(II).

c) Calcula la masa de yoduro de potasio necesario para preparar 100 mL de disolución de tal modo que reaccionaran completamente los 100 mL de la disolución del apartado anterior.

d) ¿Qué técnica de separación utilizarías para recuperar el yoduro de plomo formado?

Datos: M**(I) = 126,90 g/mol;** M**(Pb) = 207,19 g/mol;** M**(N) = 14,01 g/mol;** M**(O) = 15,99 g/mol;** M**(K) = 39,10 g/mol.**

a) La ecuación química es: $Pb(NO_3)_2 + 2\ KI \rightarrow PbI_2 + 2\ KNO_3$.

b) La sustancia dato es el nitrato de plomo(II), $Pb(NO_3)_2$, que se encuentra en disolución acuosa, V_A = 100 mL = 0,100 L con una concentración M_A = 0,8 mol/L. La sustancia incógnita es el yoduro de plomo(II), PbI_2; la magnitud observable pedida es la masa, m_B. Aplicamos el esquema de cálculo:

1. Cálculo de la cantidad de sustancia dato:

$$n_A\,(\text{mol}) = M_A\left(\frac{\text{mol}}{\text{L}}\right) \cdot V_A\,(\text{L}) = 0{,}8\ \frac{\text{mol}}{\text{L}} \cdot 0{,}1\ \text{L} = 8 \cdot 10^{-2}\ \text{mol}$$

2. Calculamos la cantidad de sustancia incógnita, n_B, utilizando los coeficientes estequiométricos: para la sustancia dato, $a = 3$, y para la sustancia incógnita, $b = 1$.

$$n_B = n_A \cdot \frac{b}{a} = 8 \cdot 10^{-2}\ \text{mol} \cdot 1 = 8 \cdot 10^{-2}\ \text{mol}$$

3. Por último, calculamos la magnitud incógnita; en este caso, la masa, m_B. Para ello, calculamos previamente la masa molar de la sustancia incógnita, $M(PbI_2)$ = 460,99 g/mol.

$$m_B = n_B \cdot M = 8 \cdot 10^{-2}\ \text{mol} \cdot \frac{460{,}99\ \text{g}}{\text{mol}} \approx 37\ \text{g}$$

c) La sustancia dato es el nitrato de plomo(II), $Pb(NO_3)_2$, que se encuentra en disolución acuosa, V_A = 100 mL = 0,100 L con una concentración M_A = 0,8 mol/L. La sustancia incógnita es el yoduro de potasio, KI; la magnitud observable pedida es la masa, m_B. Aplicamos el esquema de cálculo:

1. Cálculo de la cantidad de sustancia dato:

$$n_A\,(\text{mol}) = M_A\left(\frac{\text{mol}}{\text{L}}\right) \cdot V_A\,(\text{L}) = 0{,}8\ \frac{\text{mol}}{\text{L}} \cdot 0{,}1\ \text{L} = 8 \cdot 10^{-2}\ \text{mol}$$

2. Calculamos la cantidad de sustancia incógnita, n_B, utilizando los coeficientes estequiométricos: para la sustancia dato, $a = 3$, y para la sustancia incógnita, $b = 2$.

$$n_B = n_A \cdot \frac{b}{a} = 8 \cdot 10^{-2}\ \text{mol} \cdot \frac{2}{1} = 1{,}6 \cdot 10^{-1}\ \text{mol}$$

3. Por último, calculamos la magnitud incógnita; en este caso, la masa, m_B.

   Para ello, calculamos previamente la masa molar de la sustancia incógnita, $M(KI)$ = = 157,00 g/mol.

$$m_B = n_B \cdot M = 1{,}6 \cdot 10^{-1}\ \text{mol} \cdot \frac{157{,}00\ \text{g}}{\text{mol}} \approx 25\ \text{g}$$

   La molaridad de la disolución de KI será:

$$M = \frac{n\,(\text{mol})}{V\,(\text{L})} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-1}\ \text{mol}}{0{,}1\ \text{L}} = 1{,}6\ \text{mol/L}$$

d) Para separar el precipitado formado, utilizaría una centrifugación y posterior decantación.

19 Se desea determinar la concentración de una disolución de ácido clorhídrico a partir de una volumetría ácido-base, utilizando para ello una disolución de hidróxido de sodio de concentración 0,25 M.

a) Escribe la ecuación química de la neutralización.

b) Sin hacer cálculos, determina la concentración de la disolución de ácido clorhídrico si 100 mL de la misma reaccionan completamente con 50 mL de la disolución de hidróxido de sodio.

c) Piensa y comparte en pareja. Comprueba tu respuesta del apartado anterior. ¿Cómo cambiaría el resultado si la estequiometría de la reacción fuera 2 : 1 para el ácido frente a la base?

En **anayaeducacion.es**, su alumnado puede consultar un documento que explica cómo aplicar la tecnica «Piensa y comparte en pareja», que sugerimos para resolver el tercer apartado de esta actividad.

a) La ecuación química es: $HCl + NaOH \rightarrow NaCl + H_2O$.

b) La sustancia dato es NaOH, cuya disolución acuosa tiene estos datos: $M_A = 0{,}25$ mol/L; $V_A = 50$ mL Observando la estequiometría de la reacción concluimos que la cantidad de sustancia de ambos reactivos es la misma; por otra parte, observamos que $V_B = 100$ mL, por tanto $V_B = 2\ V_A$; en resumen:

$$a = b$$

$$n_A = n_B$$

$$V_A \cdot M_A = V_B \cdot M_B$$

$$V_A \cdot M_A = 2\ V_A \cdot M_B$$

Por tanto:

$$M_A = 2 \cdot M_B = 0{,}50 \text{ mol/L}$$

c) Si la estequiometría fuera 2 : 1, es decir $b : a = 2 : 1$, dado que el ácido es la sustancia incógnita, resultaría:

$$a = 1; \quad b = 2$$

$$n_B = n_A \cdot \frac{b}{a} = 2 \cdot n_A$$

$$n_B = V_B \cdot M_B = 2 \cdot V_A \cdot M_A$$

Si el volumen de la disolución de ácido (V_B) es doble que el de la base (V_A):

$$V_B = 2 \cdot V_A$$

Combinando las dos últimas expresiones:

$$2 \cdot V_A \cdot M_B = 2 \cdot V_A \cdot M_A$$

$$M_A = M_B = 0{,}25 \text{ mol/L}$$

20 Calcula el volumen de disolución de ácido sulfúrico 3 M necesario para neutralizar 225 mL de una disolución 2 M de hidróxido de sodio.

La ecuación química es: $H_2SO_4 + 2\ NaOH \rightarrow Na_2SO_4 + 2\ H_2O$.

La sustancia dato es NaOH, cuya disolución acuosa tiene estos datos: $M_A = 2$ mol/L; $V_A = 225$ mL.

La sustancia incógnita es H_2SO_4, $M_B = 3$ mol/L. Aplicamos la secuencia de cálculos:

1. Cálculo de la cantidad de sustancia dato:

$$n_A\,(\text{mol}) = M_A\,(\frac{\text{mol}}{\text{L}}) \cdot V_A\,(\text{L}) = 2\ \frac{\text{mol}}{\text{L}} \cdot 0{,}225 \text{ L} = 0{,}450 \text{ mol}$$

2. Calculamos la cantidad de sustancia incógnita, n_B, utilizando los coeficientes estequiométricos: para la sustancia dato, $a = 2$, y para la sustancia incógnita, $b = 1$:

$$n_B = n_A \cdot \frac{b}{a} = 0{,}450 \text{ mol} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}225 \text{ mol}$$

3. Calculamos la magnitud observable de la sustancia incógnita; en este caso, el volumen de la disolución que lo contiene:

$$V\,(\text{L}) = \frac{n\,(\text{mol})}{M} = \frac{0{,}225 \text{ mol}}{3\ \dfrac{\text{mol}}{\text{L}}} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ L} = 0{,}8 \text{ mL}$$

Página 113

21 **La reacción de cloruro de níquel(II) con hidróxido de sodio es una reacción de doble desplazamiento.**

a) Escribe la ecuación química ajustada.

b) Calcula la cantidad de hidróxido de níquel(II) que se forma a partir de la reacción de 200 mL de una disolución 0,100 M de cloruro de níquel(II) con suficiente hidróxido de sodio.

Datos: *M*(Cl) = 35,45 g/mol; *M*(Ni) = 58,71 g/mol; *M*(Na) = 22,99 g/mol;
***M*(O) = 15,99 g/mol; *M*(H) = 1,01 g/mol.**

a) La ecuación química es: $NiCl_2 + 2\ NaOH \rightarrow 2\ NaCl + Ni(OH)_2$.

b) La sustancia dato es $NiCl_2$, cuya disolución acuosa tiene estos datos: M_A = 0,100 mol/L; V_A = 200 mL.

La sustancia incógnita es $Ni(OH)_2$, de la que se pide la cantidad de sustancia. Aplicamos la secuencia de cálculos:

1. Cálculo de la cantidad de sustancia dato:

$$n_A\,(\text{mol}) = M_A\left(\frac{\text{mol}}{\text{L}}\right) \cdot V_A\,(\text{L}) = 0{,}100\ \frac{\text{mol}}{\text{L}} \cdot 0{,}200\ \text{L} = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{mol}$$

2. Calculamos la cantidad de sustancia incógnita, n_B, utilizando los coeficientes estequiométricos: para la sustancia dato, a = 1, y para la sustancia incógnita, b = 1.

$$n_B = n_A \cdot \frac{b}{a} = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{mol} \cdot \frac{1}{1} = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{mol}$$

Reactivo limitante

22 **En un vaso de precipitados se han dispuesto 2 g de aluminio en virutas. Una vez tapado, mediante un orificio acanalado se echan 100 mL de una disolución 1,0 M de HCl. El gas formado se recoge mediante burbujeo en otro recipiente. Sabiendo que la reacción es un desplazamiento de hidrógeno por el metal:**

a) Escribe y ajusta la reacción química.

b) Calcula la masa de tricloruro de aluminio que se ha formado.

c) Calcula el volumen de H_2 recogido sabiendo que la temperatura es de 20 °C y la presión de 1 atm.

d) ¿Qué sustancia química ha quedado en el vaso de precipitados sin reaccionar?

e) Haz un dibujo del montaje que tendrías que hacer en el laboratorio para poder recoger los dos productos de reacción.

Datos: *M*(Al) = 26,98 g/mol; *M*(H) = 1,01 g/mol; *M*(Cl) = 35,45 g/mol.

a) La ecuación química es: $2\ Al\,(s) + 6\ HCl\,(aq) \rightarrow 3\ H_2\,(g) + 2\ AlCl_3\,(aq)$

b) La sustancia dato es el reactivo limitante, para identificarlo comparamos $\left(\frac{n_{HCl}}{n_{Al}}\right)_{Real}$ con $\left(\frac{n_{HCl}}{n_{Al}}\right)_{Esteq} = \frac{6}{2} = 3$.

Calculamos n_{HCl}, a partir del volumen y la molaridad de la disolución que contiene esta sustancia:

$$n_{HCl}\,(\text{mol}) = M_{HCl}\left(\frac{\text{mol}}{\text{L}}\right) \cdot V_{HCl}\,(\text{L}) = 1{,}0\ \frac{\text{mol}}{\text{L}} \cdot 0{,}100\ \text{L} = 0{,}1\ \text{mol}$$

Calculamos n_{Al}, a partir de la masa, m = 2 g, y la masa molar, M(Al) = 26,98 g/mol.

$$n_{Al} = \frac{m_{Al}}{M_{Al}} = \frac{2\ \text{g}}{26{,}98\ \text{g/mol}} \approx 0{,}07\ \text{mol}$$

$$\left(\frac{n_{HCl}}{n_{Al}}\right)_{Real} = \frac{0{,}1\ \text{mol}}{0{,}07\ \text{mol}} = 1{,}4 < \left(\frac{n_{HCl}}{n_{Al}}\right)_{Esteq} = 3$$

Por tanto, el reactivo limitante es HCl, y, por tanto, la sustancia dato. Aplicamos el esquema de cálculo a partir de la cantidad de sustancia dato.

La sustancia incógnita es el tricloruro de aluminio, $AlCl_3$, cuya magnitud observable pedida es la masa, m_B.

1. Cantidad de sustancia dato, n_A = 0,1 mol.
2. Cálculo de cantidad de sustancia incógnita, n_B, utilizando los coeficientes estequiométricos: para la sustancia dato, a = 6, y para la sustancia incógnita, b = 2.

$$n_B = n_A \cdot \frac{b}{a} = 0{,}1\ \text{mol} \cdot \frac{2}{6} \approx 0{,}03\ \text{mol}$$

3. Cálculo de la magnitud observable de la sustancia incógnita, m_B; para ello es necesario calcular previamente la masa molar de la sustancia, $M(AlCl_3)$ = 133,3 g/mol.

$$m_B = n_B \cdot M = 0{,}03\ \text{mol} \cdot 133{,}3\ \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 4\ \text{g}$$

c) La sustancia incógnita es el hidrógeno, H_2, cuya magnitud observable pedida es el volumen, V_B, medido a T = 20 °C = 293 K y p = 1 atm.

1. Cantidad de sustancia dato, n_A = 0,1 mol.
2. Cálculo de cantidad de sustancia incógnita, n_B, utilizando los coeficientes estequiométricos: para la sustancia dato, a = 6, y para la sustancia incógnita, b = 3.

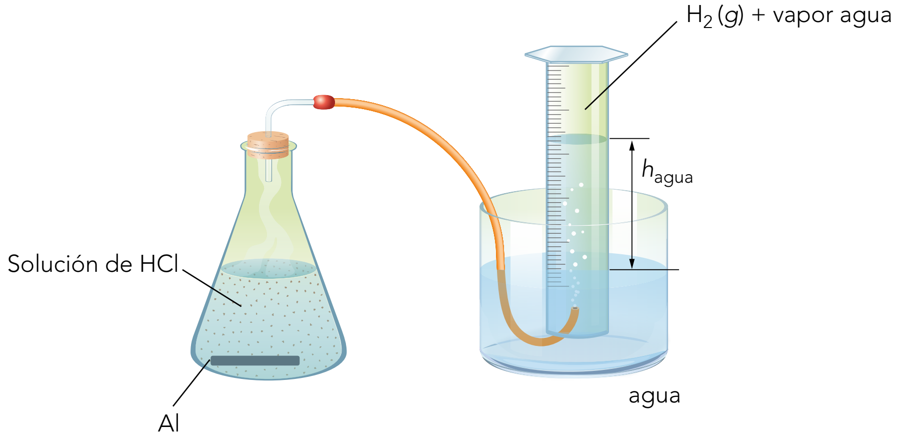
$$n_B = n_A \cdot \frac{b}{a} = 0{,}1\ \text{mol} \cdot \frac{3}{6} = 0{,}05\ \text{mol}$$

3. Cálculo de la magnitud observable de la sustancia incógnita, V_B:

$$V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{0{,}05\ \text{mol} \cdot 0{,}082\ \dfrac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot 293\ \text{K}}{1\ \text{atm}} \approx 1{,}2\ \text{L}$$

d) La sustancia que queda sin reaccionar es la que está en exceso, el aluminio, de la que sobran 0,07 mol – 0,03 mol = 0,04 mol.

e) El montaje podría ser así:



23 **Establece cuál es el reactivo limitante en la reacción de aluminio con diyodo para dar yoduro de aluminio en los siguientes casos:**

a) Caso 1: 2,40 mol de Al y 4,80 mol de I_2.

b) Caso 2: 2,40 mol de I_2 y 4,80 mol de Al.

Calcula la masa de yoduro de aluminio formada en cada caso.

Datos: *M*(I) = 126,90 g/mol; *M*(Al) = 26,98 g/mol.

La ecuación química es: $2\ Al + 3\ I_2 \rightarrow 2\ AlI_3$

a) Caso 1: comparamos $\left(\frac{n_{I_2}}{n_{Al}}\right)_{Real} = \frac{4,80}{2,40} > \left(\frac{n_{I_2}}{n_{Al}}\right)_{Esteq} = \frac{3}{2}$; por tanto, el reactivo limitante es el aluminio.

b) Caso 1: comparamos $\left(\frac{n_{I_2}}{n_{Al}}\right)_{Real} = \frac{2,40}{4,80} < \left(\frac{n_{I_2}}{n_{Al}}\right)_{Esteq} = \frac{3}{2}$; por tanto, el reactivo limitante es el yodo.

Caso 1.

La sustancia dato es el aluminio. Aplicamos la secuencia de cálculos desde la cantidad de sustancia de aluminio:

1. Cantidad de sustancia dato, n_A = 2,40 mol.
2. Cálculo de la cantidad de sustancia incógnita, n_B, utilizando los coeficientes estequiométricos: para la sustancia dato, a = 2, y para la sustancia incógnita, b = 2.

$$n_B = n_A \cdot \frac{b}{a} = 2,40\ \text{mol} \cdot \frac{2}{2} = 2,40\ \text{mol}$$

3. Cálculo de la magnitud observable de la sustancia incógnita, m_B; para ello, es necesario calcular previamente la masa molar de la sustancia, $M(AlI_3)$ = 407,7 g/mol.

$$m_B = n_B \cdot M = 2,40\ \text{mol} \cdot 407,7\ \frac{\text{g}}{\text{mol}} \approx 980\ \text{g}$$

Caso 2.

La sustancia dato es el yodo. Aplicamos la secuencia de cálculos desde la cantidad de sustancia de aluminio:

1. Cantidad de sustancia dato, n_A = 2,40 mol.
2. Cálculo de la cantidad de sustancia incógnita, n_B, utilizando los coeficientes estequiométricos: para la sustancia dato, a = 3, y para la sustancia incógnita, b = 2.

$$n_B = n_A \cdot \frac{b}{a} = 2,40\ \text{mol} \cdot \frac{2}{3} = 1,60\ \text{mol}$$

3. Cálculo de la magnitud observable de la sustancia incógnita, m_B; para ello, es necesario calcular previamente la masa molar de la sustancia, $M(AlI_3)$ = 407,7 g/mol.

$$m_B = n_B \cdot M = 1,60\ \text{mol} \cdot 407,7\ \frac{\text{g}}{\text{mol}} \approx 650\ \text{g}$$

24 **Para sintetizar hidruro de sodio a partir de hidrógeno y sodio metálico, se mezclan 6,75 g de sodio y 3,03 g de hidrógeno.**

a) Escribe la ecuación química ajustada.

b) Establece cuál es el reactivo limitante

c) Calcula la cantidad de NaH formado.

d) Si se obtienen 4,00 g de NaH, ¿cuál ha sido el rendimiento de la reacción?

Datos: *M*(Na) = 22,99 g/mol; *M*(H) = 1,01 g/mol.

a) La ecuación química es 2 Na + H_2 $\rightarrow$ 2 NaH.

b) Para establecer cuál es el reactivo limitante, comparamos $\left(\dfrac{n_{Na}}{n_{H_2}}\right)_{Real}$ con $\left(\dfrac{n_{Na}}{n_{H_2}}\right)_{Esteq} = \dfrac{2}{1} = 2$

Calculamos n_{Na}, a partir de la masa, m = 6,75 g, y la masa molar M(Na) = 22,99 g/mol

$$n_{Na} = \frac{m_{Na}}{M_{Na}} = \frac{6{,}75\ \text{g}}{22{,}99\ \text{g/mol}} \approx 0{,}294\ \text{mol}$$

Calculamos n_{H_2}, a partir de la masa, m = 3,03 g y la masa molar $M(H_2)$ = 2,02 g/mol

$$n_{H_2} = \frac{m_{H_2}}{M_{H_2}} = \frac{3{,}03\ \text{g}}{2{,}02\ \text{g/mol}} \approx 1{,}50\ \text{mol}$$

$$\left(\frac{n_{Na}}{n_{H_2}}\right)_{Real} = \frac{0{,}294\ \text{mol}}{1{,}50\ \text{mol}} = 0{,}196 < \left(\frac{n_{Na}}{n_{H_2}}\right)_{Esteq} = 2$$

por tanto, el reactivo limitante es Na.

c) Aplicamos la secuencia de cálculos desde la cantidad de sustancia de sodio:

1. Cantidad de sustancia dato, n_A = 0,294 mol.
2. Cálculo de la cantidad de sustancia incógnita, n_B, utilizando los coeficientes estequiométricos: para la sustancia dato, a = 2, y para la sustancia incógnita, b = 2.

$$n_B = n_A \cdot \frac{b}{a} = 0{,}294\ \text{mol} \cdot \frac{2}{2} = 0{,}294\ \text{mol}$$

3. Cálculo de la magnitud observable de la sustancia incógnita, m_B; para ello, es necesario calcular previamente la masa molar de la sustancia, M(NaH) = 24,00 g/mol.

$$m_B = n_B \cdot M = 0{,}294\ \text{mol} \cdot 24{,}00\ \frac{\text{g}}{\text{mol}} \approx 7{,}05\ \text{g}$$

d) Para calcular el rendimiento de la reacción, comparamos la masa obtenida con la que teóricamente se hubiera obtenido:

$$\text{Rendimiento} = \frac{4{,}00\ \text{g}}{7{,}05\ \text{g}} \cdot 100 = 56{,}8\,\%$$

4 TERMODINÁMICA

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

1 LEY CERO DE LA TERMODINÁMICA. EQUILIBRIO TÉRMICO

CE.1.1. (EA.1.1.1.) CE.4.1. (EA.4.1.1.)

Página 117

1 Justifica qué tipos de sistemas son un huevo, el ser humano y un termo con café a 50 °C. ¿Cómo son sus paredes?

Huevo: Sistema abierto.

a) Permeable: Permite el intercambio de gases entre el interior y el exterior.

b) Diatérmana: Permite el intercambio de energía (los huevos necesitan ser empollados, esto es, hay que suministrarles calor, para que las crías se desarrollen).

c) Rígida: No se deforman (siempre que no se ejerza una fuerza demasiado elevada sobre ellos).

Ser humano: Sistema abierto.

a) Permeable: Permite el intercambio de gases entre el interior y el exterior (tomamos oxígeno que va a parar a nuestras células, y expulsamos dióxido de carbono, por ejemplo).

b) Diatérmana: Permite el intercambio de energía en forma de calor.

c) Móvil: Excluyendo el esqueleto, la mayor parte de nuestro cuerpo es fácilmente deformable.

Termo con café a 50 °C: Sistema aislado.

a) Impermeable: Si el termo no está roto, no se sale el café ni entra aire del exterior.

b) Adiabática: Puesto que la función del termo es mantener la temperatura del café constante, no permite el intercambio de energía en forma de calor.

c) Rígida: Suelen estar hechos de un material no deformable.

2 ¿Crees que es correcto decir: «hoy hace mucho calor»? Explica por qué, analizando la frase según las definiciones de este epígrafe. Haz lo mismo con la expresión: «me cuesta mucho trabajo mantener levantada esta pesa» (supón que la mantenemos levantada, pero en reposo). ¿Crees que es fácil utilizar en la vida cotidiana un lenguaje que sea científicamente correcto? Argumenta tu respuesta con ejemplos concretos que conozcas relacionados con esta asignatura y otras.

Le sugerimos que recomiende a su alumnado en este momento la consulta de la documentación ofrecida en anayaeducacion.es sobre la clave de Plan Lingüístico.

No, no es correcto decir «hoy hace mucho calor», ya que el calor es un mecanismo de transferencia de energía. Por lo tanto, no es algo que contengan los cuerpos. Lo correcto sería decir: «hoy la temperatura es bastante elevada».

Cuando decimos que nos cuesta trabajo, estamos indicando que tenemos que hacer un esfuerzo grande para mantenerla levantada. Pero al estar en reposo no se realiza trabajo sobre la pesa, por lo que tampoco sería correcta esta expresión.

3 Por grupos, utilizando la técnica de folio giratorio, proponed ejemplos de procesos adiabáticos y no adiabáticos en nuestra vida cotidiana.

Respuesta abierta.

En anayaeducacion.es, su alumnado encontrará un documento que explica cómo utilizar la técnica «Folio giratorio».

2 TRANSFERENCIA DE ENERGÍA

CE.1.1. (EA.1.1.1.) CE 4.1. (EA.4.1.1.) CE.4.2. (EA.4.2.1.)

Página 118

4 **Calcula el trabajo realizado por un sistema que disminuye su volumen desde 1 m³ hasta 500 L a una presión constante de 2 atm. Interpreta el significado del signo que has obtenido.**

Vamos a pasar todos los datos al Sistema Internacional:

$$p = 2 \text{ atm} \cdot \frac{101\,300 \text{ Pa}}{1 \text{ atm}} = 202\,600 \text{ Pa}$$

$$V_2 = 500 \text{ L} \cdot \frac{1 \text{ m}^3}{1\,000 \text{ L}} = 0{,}5 \text{ L}$$

Por lo tanto:

$$W = p \cdot \Delta V = p \cdot (V_2 - V_1) = 202\,600 \cdot (0{,}5 - 1{,}0) = -101\,300 \text{ J}$$

Según la definición que hemos dado, W es el trabajo realizado por el sistema sobre el entorno. El signo negativo indica que es el entorno el que realiza un trabajo de 101 300 J sobre el sistema.

5 **Comprueba que el producto $p \cdot V$ tiene dimensiones de energía.**

Las dimensiones de la presión y el volumen son:

$$[p] = \left[\frac{F}{S}\right] = \text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2} \cdot \text{L}^{-2} = \text{M} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{T}^{-2}$$

$$[V] = \text{L}^3$$

Por tanto:

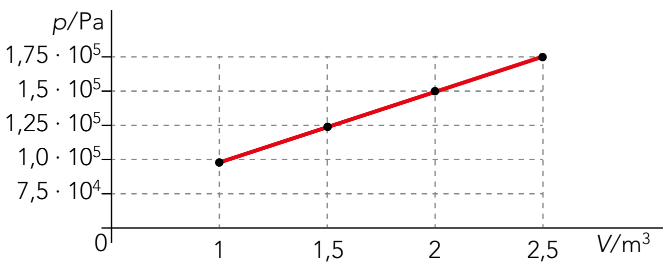
$$[p \cdot V] = \text{M} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{T}^{-2} \cdot \text{L}^3 = \text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}$$

Por otro lado, las dimensiones de la energía son:

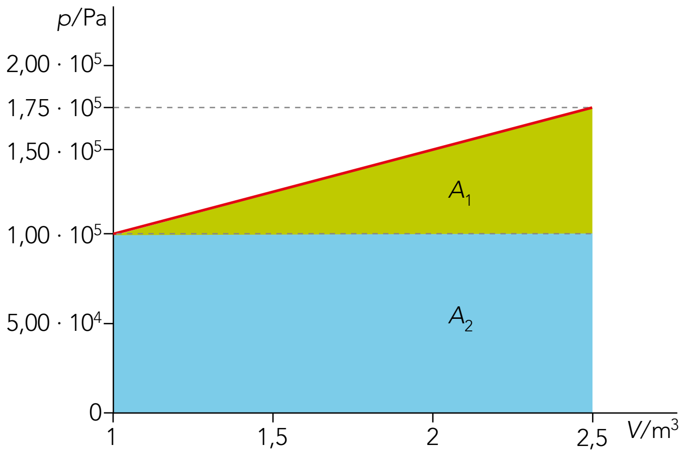
$$[E] = [F \cdot d] = \text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2} \cdot \text{L} = \text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}$$

Como vemos, ambas coinciden.

6 **En la gráfica se muestra un proceso en el que la presión aumenta linealmente con el volumen. ¿Qué trabajo realiza el sistema?**



El trabajo realizado por el sistema viene dado por el área comprendida entre la gráfica de la presión y el eje de abscisas de un diagrama *p-V*. Esta se puede descomponer en un triángulo y un rectángulo:



Área del triángulo:

$$\text{Base: } \Delta V = 2{,}5 - 1{,}0 = 1{,}5 \text{ m}^3$$

$$\text{Altura: } 175\,000 - 100\,000 = 75\,000 \text{ Pa}$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 75\,000 = 56\,250 \text{ J}$$

Área del rectángulo:

$$\text{Base: } \Delta V = 2{,}5 - 1{,}0 = 1{,}5 \text{ m}^3$$

$$\text{Altura: } 100\,000 \text{ Pa}$$

$$W_2 = 100\,000 \cdot 1{,}5 = 150\,000 \text{ J}$$

El trabajo total será:

$$W = W_1 + W_2 = 206\,250 \text{ J}$$

Página 119

7 Comprueba que el producto *n* · *R* · *T* tiene dimensiones de energía.

Usando la ecuación de los gases ideales, tenemos:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Luego, las dimensiones de ambos miembros han de ser las mismas y, utilizando el resultado del ejercicio 6, podemos concluir que $n \cdot R \cdot T$ tiene dimensiones de energía. Sin embargo, vamos a comprobarlo directamente:

$$[n] = \text{N}$$

$$[R] = \left[\frac{p \cdot V}{n \cdot T}\right]$$

Usando las dimensiones de la presión que se calcularon en el ejercicio 6, tenemos:

$$[R] = \frac{M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} \cdot L^3}{N \cdot \theta} = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot N^{-1} \cdot \theta^{-1}$$

Y:

$$[T] = \theta$$

Luego:

$$[n \cdot R \cdot T] = N \cdot M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot N^{-1} \cdot \theta^{-1} \cdot \theta = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

que, como sabemos, corresponde a las dimensiones de la energía.

8 **Un gas ideal experimenta un proceso en el que aumenta su volumen desde 1 m³ a 200 °C hasta los 673 °C, con una presión constante de 3 atm. Calcula el trabajo realizado por el gas.**

Veamos las condiciones inicial y final del gas.

Al principio, este tiene un volumen $V_1 = 1\ m^3$ a una temperatura $T_1 = 273 + 200 = 473$ K.

Al final su temperatura es: $T_2 = 273 + 673 = 946\ K = 2 \cdot T_1$.

Por tanto, su temperatura se ha duplicado mientras que la presión ha permanecido constante. Usando la ley de Charles y Gay-Lussac, tendremos:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \rightarrow V_2 = V_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 2 \cdot V_1 = 2\ m^3$$

Por otra parte, la presión, en el SI, tendrá un valor:

$$p = 3\ atm \cdot \frac{101\,300\ Pa}{1\ atm} = 303\,900\ Pa$$

El trabajo realizado por el sistema será entonces:

$$W = p \cdot \Delta V = p \cdot (V_2 - V_1) = 303\,900 \cdot (2{,}0 - 1{,}0) = 303\,900\ J$$

Al ser positivo, vemos que es el gas el que ha realizado trabajo sobre el entorno.

9 **Un gas ideal realiza el ciclo mostrado en la figura. Si en el punto *A* tiene una presión de 8 atm y un volumen de 7 L, calcula el trabajo realizado por el gas en cada tramo y en el ciclo completo.**

Veamos cuál es el trabajo realizado por el gas a lo largo de cada uno de los tramos:

AB: Este proceso se realiza a presión constante. Por tanto:

$$p_A = p_B = 8\ atm = 810\,400\ Pa$$

$$V_A = 0{,}007\ m^3 \qquad ; \qquad V_B = 2 \cdot V_A = 0{,}014\ m^3$$

$$W_{AB} = p_A \cdot (V_B - V_A) = 810\,400 \cdot 0{,}007 = 5\,673\ J$$

BC: Este proceso se realiza a volumen constante. Por tanto:

$$W_{BC} = 0\ J$$

CA: Este proceso es isotermo. Desconocemos el valor de la presión en el estado ***C;*** sin embargo se puede calcular de forma directa:

$$p_A \cdot V_A = p_C \cdot V_C \rightarrow p_C = p_A \cdot \frac{V_A}{V_C} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4\ atm$$

$$W_{CA} = p_C \cdot V_C \cdot \ln\frac{V_A}{V_C} = p_A \cdot V_A \cdot \ln\underbrace{\left(\frac{V_A}{V_C}\right)}_{=1/2} = \underbrace{810\,400}_{=p_A} \cdot \underbrace{0{,}007}_{=V_A} \cdot \ln\frac{1}{2} = -3\,932\ J$$

El trabajo total será:

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 1\,741 \text{ J}$$

Vemos, por tanto, que el gas realiza un trabajo sobre el entorno.

10 **Tenemos 0,5 mol de un gas ideal que experimentan una compresión isotérmica a 25 °C mientras su entorno efectúa un trabajo de 1 200 J sobre él. Si la presión final es de 2 atm, ¿cuál era el valor de la presión inicial?**

Como se dice que la compresión es isotérmica, el trabajo viene dado por:

$$W = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Además, W ha de ser negativo, ya que el entorno realiza un trabajo sobre el gas. Por tanto: $W = -1\,200$ J. Como el trabajo está en el SI, habrá que utilizar el valor de R en dicho sistema ($R = 8{,}314$ J · mol^{-1} · K^{-1}):

$$n \cdot R \cdot T = 0{,}5 \cdot 8{,}314 \cdot (25 + 273) = 1\,239 \text{ J}$$

Y ya tenemos:

$$1\,239 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} = -1\,200 \rightarrow \ln \frac{p_1}{p_2} = -0{,}969 \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = e^{-0{,}969} = 0{,}38$$

Finalmente:

$$p_1 = 0{,}38 \cdot 2 = 0{,}76 \text{ atm} = 76\,988 \text{ Pa}$$

11 **Se hierven 90 g de agua a 100 °C y 1 atm de presión. Posteriormente, el vapor se expande, a temperatura constante, hasta ocupar un volumen de 300 L. Calcula el trabajo realizado por el vapor sobre el entorno durante dicha expansión.**

Vamos a calcular, en primer lugar, el volumen del vapor de agua a 100 °C. Utilizando la ecuación de los gases ideales:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \rightarrow V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p}$$

Calculamos la cantidad de sustancia:

$$M = 18{,}02 \text{ g/mol} \rightarrow n = \frac{m}{M} = \frac{90}{18{,}02} = 4{,}99 \text{ mol}$$

Y ya tenemos:

$$V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{4{,}99 \cdot 0{,}082 \cdot 373}{1} = 152{,}6 \text{ L}$$

Así pues, $V_1 = 152{,}6$ L. Se dice que el volumen final es: $V_2 = 300$ L. Como el proceso es isotermo, tenemos:

$$W = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = 4{,}99 \cdot 8{,}314 \cdot 373 \cdot \ln \frac{300}{152{,}6} = 10\,460 \text{ J}$$

Fíjate en las unidades que hemos utilizado en cada caso. Al emplear la ecuación de los gases nos convenía tomar $R = 0{,}082$ atm · L/(K · mol) para obtener el resultado en litros. Sin embargo, en la expresión del trabajo hemos usado: $R = 8{,}314$ J/(K · mol).

12 **Los gases se estudian como ideales por facilidad de cálculos suponiendo que sus partículas no ocupan volumen y despreciando las fuerzas intermoleculares. Pero, como viste en la unidad 2, hay una ecuación que se utiliza en el caso de los gases reales, la ley de Van der Waals. Busca el significado de los coeficientes *a* y *b*, y explica cómo afectan al factor de compresibilidad de un gas. ¿Se cumplen las leyes de la termodinámica también en los gases reales? Utiliza la técnica el espejo.**

Su alumnado puede consultar en **anayaeducacion.es** el documento que explica cómo utilizar la técnica «El espejo», si desea utilizarla para responder a esta actividad.

Respuesta abierta.

Página 120

13 **Calcula el calor, en calorías, necesario para calentar 270 g de hierro desde 50 °C hasta 1 100 °C.**

Dato: c_{Fe} = 440 J/(kg · K).

Utilizamos la expresión:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T = 0{,}270 \cdot 440 \cdot (1100 - 50) = 124\,740 \text{ J}$$

Entonces:

$$Q = 124\,740 \text{ J} \cdot \frac{0{,}24 \text{ cal}}{1 \text{ J}} = 29\,938 \text{ cal}$$

14 **Una masa de 40 g de oxígeno se calienta a presión constante desde 100 °C hasta 250 °C. Calcula el calor necesario. ¿Y si fuera a volumen constante?**

Datos: c_P = 29,4 J/(mol · K); c_V = 21,1 J/(mol · K).

Como el primer proceso tiene lugar a presión constante:

$$Q = n \cdot c_P \cdot \Delta T$$

Calculamos primero la cantidad de sustancia:

$$M\left(O_2\right) = 32{,}0 \text{ g/mol} \rightarrow n = \frac{40{,}0}{32{,}0} = 1{,}25 \text{ mol}$$

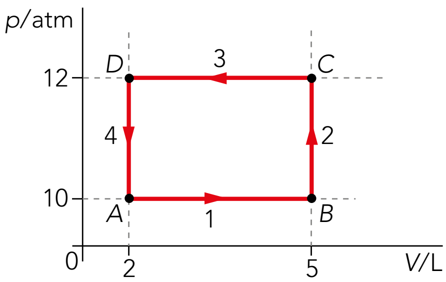
Entonces:

$$Q = 1{,}25 \cdot 29{,}4 \cdot (250 - 100) = 5\,513 \text{ J}$$

Si el proceso es a volumen constante:

$$Q = 1{,}25 \cdot 21{,}1 \cdot (250 - 100) = 3\,956 \text{ J}$$

15 **Calcula el calor absorbido por 3 mol de un gas ideal que realiza el siguiente ciclo:**



Datos: c_P = 29,1 J/(mol · K); c_V = 20,8 J/(mol · K).

Vamos a analizar cada uno de los tramos:

AB: este proceso se realiza a presión constante. Por tanto:

$$p_A = p_B = 10 \text{ atm}$$

$$V_A = 2 \text{ L} \quad ; \quad V_B = 5 \text{ L}$$

Las temperaturas inicial y final serán (como la presión está en atmósferas y el volumen en litros, usaremos el valor R = 0,082 atm · L/(K · mol):

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \rightarrow$$

$$T_A = \frac{p_A \cdot V_A}{n \cdot R} = \frac{10 \cdot 2}{3 \cdot 0{,}082} = 81{,}3 \text{ K}$$

$$T_B = \frac{p_B \cdot V_B}{n \cdot R} = \frac{10 \cdot 5}{3 \cdot 0{,}082} = 203{,}3 \text{ K}$$

Y el calor absorbido será:

$$Q_{AB} = n \cdot c_P \cdot \Delta T = 3 \cdot 29{,}1 \cdot (203{,}3 - 81{,}3) = 10651 \text{ J}$$

BC: este proceso se realiza a volumen constante. Por tanto:

$$p_B = 10 \text{ atm} \quad ; \quad p_C = 12 \text{ atm}$$

$$V_B = V_C = 5 \text{ L}$$

La temperatura en el estado *C* será:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \rightarrow$$

$$T_C = \frac{p_C \cdot V_C}{n \cdot R} = \frac{12 \cdot 5}{3 \cdot 0{,}082} = 243{,}9 \text{ K}$$

Y el calor absorbido:

$$Q_{BC} = n \cdot c_V \cdot \Delta T = 3 \cdot 20{,}8 \cdot (243{,}9 - 203{,}3) = 2533 \text{ J}$$

CD: este proceso se realiza, de nuevo, a presión constante. Por tanto:

$$p_C = p_D = 12 \text{ atm}$$

$$V_C = 5 \text{ L} \quad ; \quad V_D = 2 \text{ L}$$

La temperatura en el estado *D* será:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \rightarrow$$

$$T_D = \frac{p_D \cdot V_D}{n \cdot R} = \frac{12 \cdot 2}{3 \cdot 0{,}082} = 97{,}6 \text{ K}$$

Y el trabajo absorbido:

$$Q_{CD} = n \cdot c_P \cdot \Delta T = 3 \cdot 29{,}1 \cdot (97{,}6 - 243{,}9) = -12772 \text{ J}$$

DA: este proceso se realiza a volumen constante. Por tanto:

$$p_D = 12 \text{ atm} \quad ; \quad p_A = 10 \text{ atm}$$

$$V_D = V_A = 2 \text{ L}$$

El trabajo absorbido será:

$$Q_{DA} = n \cdot c_V \cdot \Delta T = 3 \cdot 20{,}8 \cdot (81{,}3 - 97{,}6) = -1017 \text{ J}$$

Finalmente, con los datos de todos los procesos, el calor total es:

$$Q = 10651 + 2533 - 12772 - 1017 = -605 \text{ J}$$

Como vemos, el calor total absorbido por el sistema no es nulo. El signo menos indica que emite calor hacia el entorno.

Página 121

16 **Compara los valores de los calores específicos del agua en sus tres estados de agregación y razona por qué varían de esa forma. ¿Crees que ocurrirá con cualquier sustancia? Pon ejemplos para justificar tu opinión utilizando la técnica de organizo y defiendo la postura.**

Datos: c_{agua} = 4186 J/(kg · K); c_{gas} = 1840 J/(kg · K); c_{hielo} = 2100 J/(kg · K).

En **anayaeducacion.es**, su alumnado encontrará un documento que explica en qué consiste la técnica «Organizo y defiendo la postura».

Respuesta abierta.

17 **Se calientan 400 g de agua desde 10 °C hasta que se evapora completamente y se obtiene vapor de agua a 150 °C. Calcula el calor necesario para completar todo el proceso.**

Dato: $L_v = 2{,}256 \cdot 10^6$ J/kg.

El proceso consta de 3 partes:

El agua aumenta su temperatura desde 10 °C hasta 100 °C. Hay que utilizar el calor específico del agua: $c_{agua} = 4\,186$ J/(kg · K).

El agua hierve completamente a temperatura constante. Emplearemos el calor latente de vaporización: $L_v = 2{,}256 \cdot 106$ J/kg.

El vapor de agua aumenta su temperatura desde 100 °C hasta 150 °C. En este caso, hay que utilizar el calor específico del vapor de agua (que es diferente al del agua líquida):

$$c_{vapor} = 1\,840 \text{ J/(kg} \cdot \text{K).}$$

Por tanto, tenemos:

$$Q_1 = m \cdot c_{agua} \cdot (T_{f,agua} - T_{i,agua}) = 0{,}4 \cdot 4\,186 \cdot (100 - 10) = 150\,696 \text{ J}$$

$$Q_2 = m \cdot L_v = 0{,}4 \cdot 2{,}256 \cdot 10^6 = 902\,400 \text{ J}$$

$$Q_3 = m \cdot c_{vapor} \cdot (T_{f,vapor} - T_{i,vapor}) = 0{,}4 \cdot 1\,840 \cdot (150 - 100) = 36\,800 \text{ J}$$

La cantidad de energía total que se necesita será, entonces:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \approx 1\,090\,000 \text{ J}$$

Observa que el proceso que necesita mayor cantidad de calor, con diferencia, es el del cambio de fase.

18 **Se mezclan 450 g de agua a 25 °C con 750 g de etanol a 56 °C. Calcula la temperatura de equilibrio de la mezcla.**

Dato: $c_{etanol} = 2\,428$ J/(kg · K).

Denotaremos T_F a la temperatura final de equilibrio, $T_{0,a}$ a la inicial del agua y $T_{0,e}$ a la inicial del etanol. Como este se encuentra a más temperatura, cederá una cierta cantidad de calor:

$$Q_e = m_e \cdot c_e \cdot (T_F - T_{0,e})$$

que será absorbido por el agua:

$$Q_a = m_a \cdot c_a \cdot (T_F - T_{0,a})$$

Por tanto:

$$Q_e + Q_a = 0$$

$$m_e \cdot c_e \cdot (T_F - T_{0,e}) + m_a \cdot c_a \cdot (T_F - T_{0,a}) = 0$$

$$0{,}750 \cdot 2\,428 \cdot (T_F - 56) = -0{,}450 \cdot 4\,186 \cdot (T_F - 25) = 0$$

$$1\,821{,}0 \cdot (T_F - 56) = -1\,883{,}7 \cdot (T_F - 25)$$

$$1\,821{,}0 \cdot T_F - 101\,976 = -1\,883{,}7 \cdot T_F + 47\,092{,}5$$

$$3\,704{,}7 \cdot T_F = 149\,068{,}5 \rightarrow T_F = 40{,}2 \text{ °C}$$

19 **Tenemos inicialmente 250 g de agua a 25 °C, y 100 g de hielo a –20 °C. Pasado un tiempo, la mezcla se compone de agua y una cierta cantidad de hielo, ambos a 0 °C. Si no se escapa calor al entorno, calcula cuánto hielo quedará sin derretir.**

Dato: L_f = 3,34 · 10^5 J/kg.

Tenemos una cierta cantidad de agua a 25 °C. Cuando se ponga en contacto térmico con el hielo, su temperatura disminuirá, cediéndole energía en forma de calor. Este aporte de energía al hielo se empleará, por una parte, en aumentar su temperatura desde –20 °C hasta 0 °C, y en fundir una cierta masa del mismo, *x*.

El calor cedido por el agua líquida será (hay que tener en cuenta que $T_{F,agua} = T_{F,hielo} = 0$ °C):

$$Q_1 = m_{agua} \cdot c_{agua} \cdot (T_{F,agua} - T_{0,agua}) = 0{,}250 \cdot 4\,186 \cdot (0 - 25) = -26\,162{,}5 \text{ J}$$

El calor absorbido por el hielo contribuirá a dos procesos diferentes. Una parte se invertirá en aumentar su temperatura hasta 0 °C:

$$Q_2 = m_{hielo} \cdot c_{hielo} \cdot (T_{F,hielo} - T_{0,hielo}) = 0{,}1 \cdot 2\,100 \cdot (0 + 20) = 4\,200 \text{ J}$$

La otra se invierte en fundir una cierta cantidad de hielo, que hemos llamado *x*:

$$Q_3 = x \cdot L_f = x \cdot 334\,000 \text{ J}$$

Por tanto:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$-26\,162{,}5 + 4\,200 + x \cdot 334\,000 = 0$$

$$x = \frac{21\,962{,}5}{334\,000} = 0{,}066 \text{ kg} = 66 \text{ g}$$

Así pues, quedarán 100 – 66 = 34 g de hielo sin fundir.

20 **En una olla de cobre de 2 kg de masa a una temperatura de 150 °C, se vierten 100 g de agua a 25 °C. Calcula la temperatura de equilibrio.**

Dato: c_{Cu} = 390 J/(kg · K).

En principio, vamos a suponer que el agua en el estado final se encuentra en fase líquida, y calcularemos la temperatura que alcanzará. Denominaremos T_F a la temperatura final de equilibrio, igual para el agua y la olla, $T_{0,a}$ = 25 °C y $T_{0,Cu}$ = 150 °C. Utilizamos el principio de conservación de la energía: el calor cedido por la olla ha de ser igual al absorbido por el agua.

Calor cedido por el cobre:

$$Q_{Cu} = m_C \cdot c_{Cu} \cdot (T_F - T_{0,Cu})$$

Calor absorbido por el agua:

$$Q_a = m_a \cdot c_{agua} \cdot (T_F - T_{0,a})$$

Por tanto:

$$Q_{Cu} + Q_a = 0$$

$$m_{Cu} \cdot c_{Cu} \cdot (T_F - T_{0,Cu}) + m_a \cdot c_a \cdot (T_F - T_{0,a}) = 0$$

$$2 \cdot 390 \cdot (T_F - 150) = -0{,}1 \cdot 4\,186 \cdot (T_F - 25) = 0$$

$$780 \cdot T_F - 117\,000 = -418{,}6 \cdot T_F + 10\,465$$

$$1\,198{,}6 \cdot T_F = 127\,465 \rightarrow T_F = 106{,}3 \text{ °C}$$

Por lo tanto, llegamos a una contradicción. Vemos que, con la hipótesis de partida, tenemos que concluir que la temperatura del agua ha de superar los 100 °C, por lo que ya no podría estar en estado líquido. Hay que tener en cuenta, por tanto, el cambio de fase.

Debemos suponer que el agua aumenta su temperatura desde 25 °C hasta 100 °C, momento en el que hierve, de manera que una cierta cantidad de agua, x, pasa al estado de vapor. Quedará algo de líquido y algo de gas, ambos a 100 °C (T_F = 100 °C). Por lo tanto, habrá que considerar el calor de vaporización:

$$Q_V = x \cdot L_V = 2{,}256 \cdot 10^6 \cdot x$$

Además, ahora tenemos:

$$Q_{Cu} = m_{Cu} \cdot c_{Cu} \cdot (T_F - T_{0,Cu}) = 2 \cdot 390 \cdot (100 - 150) = -39\,000 \text{ J}$$

$$Q_a = m_a \cdot c_a \cdot (T_F - T_{0,a}) = 0{,}1 \cdot 4\,186 \cdot (100 - 25) = 31\,395 \text{ J}$$

Toda el agua ha de subir la temperatura desde los 25 °C hasta los 100 °C, de ahí que en la última expresión hayamos puesto m_a; por otra parte, solamente una cierta cantidad de la misma, x, pasará al estado gaseoso.

Aplicando la conservación de la energía a este nuevo caso:

$$Q_{Cu} + Q_a + Q_v = 0$$

$$-39\,000 + 31\,395 + 2{,}256 \cdot 10^6 \cdot x = 0$$

Despejando:

$$x = 3{,}37 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 3{,}37 \text{ g}$$

La respuesta es que la temperatura final es de 100 °C, y se han evaporado 3,37 g de agua.

Si hubiera salido un valor de x mayor que 0,1 kg, volveríamos a tener una contradicción, pues querría decir que ha hervido más agua de la que había. En ese caso, tendríamos que tener en cuenta que toda el agua pasa a estado de vapor, y que además este aumenta su temperatura hasta un valor mayor que 100 °C.

3 ENERGÍA INTERNA. PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

CE.1.1. (EA.1.1.1.) CE 4.1. (EA.4.1.1.) CE.4.2. (EA.4.2.1.)

Página 125

21 Calcula la variación de energía interna de un bloque de hielo de 10 kg de masa que se funde completamente. Desprecia el cambio de volumen experimentado durante el cambio de fase.

Dato: L_f = 333 kJ/kg.

Si una cierta cantidad de hielo se funde, es porque está recibiendo calor desde el entorno. Por lo tanto, $Q > 0$. El calor latente de fusión, por definición, es la cantidad de calor absorbida o cedida por un kilogramo de sustancia durante el cambio de fase. Como se dice que tenemos 10 kg de hielo:

$$Q = m \cdot L_f = 10 \text{ kg} \cdot 333 \text{ kJ/kg} = 3\,330 \text{ kJ} = 3{,}33 \cdot 10^6 \text{ J}$$

con signo, como hemos comentado antes, positivo.

Como se dice que despreciemos el cambio de volumen a lo largo del proceso: $W = 0$ J, y por tanto:

$$\Delta U = Q - W = 3{,}33 \cdot 10^6 \text{ J}$$

22 **Supongamos que en el sistema del ejercicio anterior se absorbe durante el proceso solamente una cantidad de calor de 10^5 J. Calcula ahora su variación de energía interna.**

Ahora no se nos dice que haya fundido todo el hielo, sino que solamente ha absorbido 100000 J de energía en forma de calor, menor que los $3,33 \cdot 10^6$ J necesarios para que se funda completamente. Por tanto, quedará una mezcla de cierta cantidad de hielo y agua a 0 °C. Como estamos despreciando las variaciones de volumen durante el cambio de fase, tenemos que, durante el proceso: $W = 0$ J.

Por tanto:

$$\Delta U = Q - W = 10^5 \text{ J}$$

En el siguiente ejercicio se verá un ejemplo de un sistema en el que, aparte de producirse un cambio de fase, cambia el volumen del sistema y, por lo tanto, se ejerce un trabajo sobre el entorno.

23 **Un gramo de agua ocupa 1 670 cm³ como vapor cuando hierve a una presión constante de 1 atm. Calcula el trabajo efectuado por el agua al hervir y su variación de energía interna.**

Dato: $L_v = 2,256 \cdot 10^6$ J/kg.

Tenemos 1 g de agua líquida a una presión de 1 atm. Se dice que hierve completamente; es decir, se transforma por entero en vapor de agua, que en el SI ocupa un volumen:

$$V_2 = 1\,670 \text{ cm}^3 \frac{1 \text{ m}^3}{10^6 \text{ cm}^3} = 1,67 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

El volumen inicial es de 1 cm³, que es despreciable frente al volumen final. Por lo tanto, el trabajo ejercido por el agua sobre el entorno será:

$$W = p \cdot (V_2 - V_1) = 101\,300 \cdot (1,67 \cdot 10^{-3} - 0) \text{ m}^3 = 169 \text{ J}$$

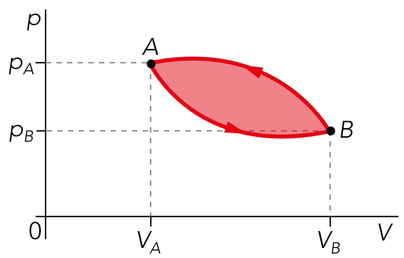
El calor necesario para evaporar ese gramo de agua es:

$$Q = m \cdot L_v = 10^{-3} \text{ kg} \cdot 2,256 \cdot 10^6 \text{ J/kg} = 2256 \text{ J}$$

Por lo tanto, la variación de energía interna será:

$$\Delta U = Q - W = 2256 - 169 = 2087 \text{ J}$$

24 **Un sistema termodinámico experimenta el proceso de la figura. Si el trabajo total es *W* = –250 J, calcula la energía interna y el calor absorbido por el sistema. Interpreta el signo de cada una de estas tres magnitudes.**



En este proceso, los estados inicial y final son el mismo (el ***A***), por lo que:

$$\Delta U = 0$$

Como se dice que durante el proceso: $W = -250$ J, tendremos:

$$Q = \Delta U + W = 0 - 250 = -250 \text{ J}$$

El hecho de que $\Delta U = 0$ se debe, como hemos dicho, a que los estados inicial y final coinciden.

$W < 0$. Esto quiere decir que se realiza un trabajo sobre el sistema. Comprobémoslo a partir de la gráfica. En el proceso ***AB*** tiene lugar una expansión, por lo que: $W_{AB} > 0$, esto es, el sistema realiza trabajo sobre el entorno. La magnitud de dicho trabajo viene dada por el área comprendida entre la curva y el eje de abscisas. En el proceso ***BA,*** el volumen del sistema disminuye, por lo que $W_{BA} < 0$, es decir, el entorno realiza trabajo sobre el sistema. La magnitud de dicho trabajo viene dada por el área comprendida entre la curva ***BA*** y el eje de abscisas. Como podemos comprobar, esta área es mayor que la anterior, siendo su diferencia la porción sombreada de la figura. Al restar:

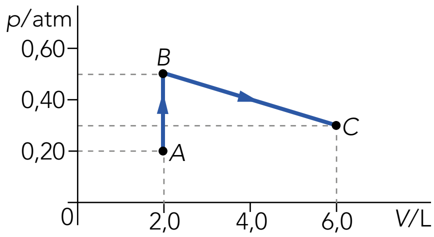
$$W = |W_{AB}| - |W_{BA}| < 0$$

$Q < 0$. Lo que quiere decir que el sistema cede calor al entorno.

Vemos, por tanto, que globalmente el sistema absorbe una cierta cantidad de trabajo y cede calor, siendo ambas magnitudes iguales, por lo que la variación de la energía interna es nula.

25 En la figura se muestra el diagrama *p*-*V* de un proceso seguido por 0,25 mol de un gas ideal. El calor absorbido por el gas a lo largo del proceso *BC* es de 368 J. Calcula, para cada tramo, y para el proceso completo: el trabajo ejercido por el sistema, el calor absorbido y la variación de energía interna.

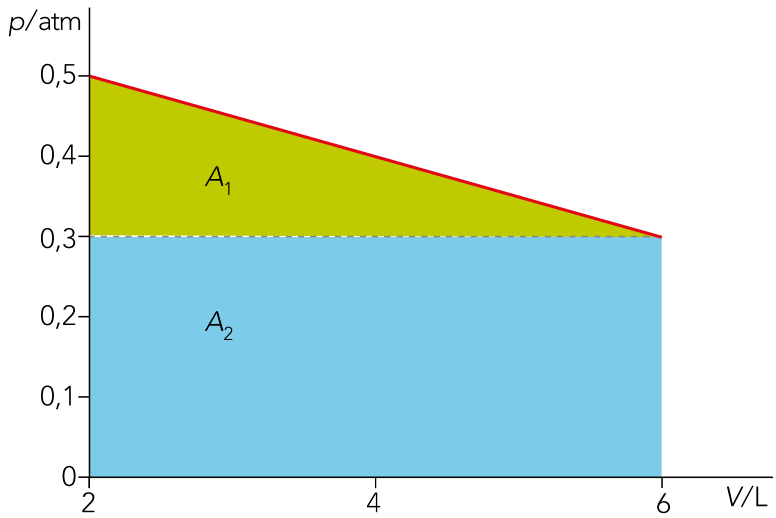
Dato: c_V = 21,1 J/(mol · K).



En primer lugar, vamos a calcular el trabajo realizado por el sistema a lo largo de cada uno de los tramos:

AB: en este caso, el volumen es constante, $\Delta V = 0$, por lo que $W_{AB} = p \cdot \Delta V = 0$ J.

BC: vamos a calcular el área comprendida entre la curva y el eje de abscisas. Para ello, descomponemos la superficie en dos partes como hemos hecho otras veces:



El área A_1 es la de un triángulo de base:

$$\Delta V = 6 - 2 = 4 \text{ L} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

y altura:

$$\Delta p = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2 \text{ atm} \cdot \frac{101\,300 \text{ Pa}}{1 \text{ atm}} = 20\,260 \text{ Pa}$$

Por lo tanto:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 20\,260 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 40{,}5 \text{ J}$$

El área A_2 corresponde a un rectángulo con la misma base que antes y altura:

$$\Delta p = 0{,}3 \text{ atm} \cdot \frac{101\,300 \text{ Pa}}{1 \text{ atm}} = 30\,390 \text{ Pa}$$

Por lo tanto:

$$A_2 = 30\,390 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 121{,}6 \text{ J}$$

Así pues, el trabajo a lo largo del tramo ***BC*** es:

$$W_{BC} = 40{,}5 + 121{,}6 = 162{,}1 \text{ J}$$

Finalmente, el trabajo realizado por el sistema a lo largo de todo el proceso será:

$$W = W_{AB} + W_{BC} = 0 + 162{,}1 = 162{,}1 \text{ J}$$

Calculamos ahora el calor absorbido por el sistema en cada uno de los tramos:

AB: Como esta parte del proceso tiene lugar a volumen constante, podemos utilizar:

$$Q_{AB} = n \cdot c_V \cdot \Delta T$$

Tenemos que calcular las temperaturas en los estados ***A*** y ***B***. Para ello, emplearemos la ecuación de estado de los gases:

$$p_A \cdot V_A = n \cdot R \cdot T_A \rightarrow$$

$$T_A = \frac{p_A \cdot V_A}{n \cdot R} = \frac{0{,}2 \cdot 2}{0{,}25 \cdot 0{,}082} = 19{,}1 \text{ K}$$

$$T_B = \frac{p_B \cdot V_B}{n \cdot R} = \frac{0{,}5 \cdot 2}{0{,}25 \cdot 0{,}082} = 48{,}8 \text{ K}$$

Por tanto, ya tenemos:

$$Q_{AB} = 0{,}25 \cdot 21{,}1 \cdot (48{,}8 - 19{,}5) = 154{,}6 \text{ J}$$

BC: Se sabe que el calor absorbido en este tramo es: $Q_{BC} = 368{,}0$ J.

Y el calor total será, entonces:

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} = 154{,}6 + 368{,}0 = 522{,}6 \text{ J}$$

Con esta información podemos calcular la variación de energía en cada uno de los tramos y en el proceso global:

AB:

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} = 154{,}6 - 0 = 154{,}6 \text{ J}$$

BC:

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} - W_{BC} = 368{,}0 - 162{,}1 = 205{,}9 \text{ J}$$

Para el proceso total:

$$\Delta U = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} = 154{,}6 + 205{,}9 = 360{,}5 \text{ J}$$

Resumimos todos los resultados en la tabla siguiente:

Proceso	Q	W	ΔU
AB	154,6 J	0 J	154,6 J
BC	368,0 J	162,1 J	205,9 J
Total	522,6 J	162,1 J	360,5 J

Podemos comprobar que para el proceso global se sigue verificando la primera ley:

$$Q - W = 522{,}6 - 162{,}1 = 360{,}5 \text{ J} = \Delta U$$

26 Sabemos que 0,5 mol de gas ideal experimentan un ciclo de Carnot siendo las temperaturas de los focos caliente y frío: 227 °C y 27 °C, respectivamente. La presión en el punto *A* es de 100 000 Pa. A lo largo del proceso:

– El volumen se duplica durante la expansión isoterma *AB*.

– La presión en el punto *C* es: p_C = 8 260 Pa.

– En el proceso *CD*, el volumen se reduce a la mitad.

Calcula el trabajo realizado por el sistema y el calor absorbido en cada tramo y en el ciclo completo.

Dato: c_V = 20,8 J · mol^{-1} · K^{-1}.

Vamos a calcular los valores de las variables termodinámicas en los estados *A, B, C* y *D.*

Estado *A*:

$$p_A = 100\,000 \text{ Pa} \quad ; \quad T_A = 227 + 273 = 500 \text{ K}$$

Para calcular el volumen, utilizamos la ecuación de estado de los gases ideales (recuerda que en el SI, el valor de la constante de los gases es: R = 8,314 J·mol^{-1} · K^{-1}):

$$p_A \cdot V_A = n \cdot R \cdot T_A \;\rightarrow\; V_A = \frac{n \cdot R \cdot T_A}{p_A} = \frac{0{,}5 \cdot 8{,}314 \cdot 500}{100\,000} = 0{,}021 \text{ m}^3$$

Estado *B*:

Como el proceso ***AB*** es isotermo:

$$T_B = T_A = 500 \text{ K}$$

Además, se dice que el volumen se duplica, por lo que:

$$V_B = 0{,}042 \text{ m}^3$$

Calculemos la presión del gas en ese estado. Usando la ley de Boyle:

$$p_A \cdot V_A = p_B \cdot V_B \;\rightarrow\; p_B = \frac{p_A \cdot V_A}{V_B} = \frac{p_A}{2} = 50\,000 \text{ Pa}$$

Estado *C*:

En este caso disponemos de información tanto de la presión como de la temperatura:

$$p_C = 8\,260 \text{ Pa} \quad ; \quad T_C = 27 + 273 = 300 \text{ K}$$

El volumen será entonces:

$$p_C \cdot V_C = n \cdot R \cdot T_C \;\rightarrow\; V_C = \frac{n \cdot R \cdot T_C}{p_C} = \frac{0{,}5 \cdot 8{,}314 \cdot 300}{8\,260} = 0{,}151 \text{ m}^3$$

Estado *D*:

Como el proceso ***CD*** es isotermo, la temperatura en este estado es:

$$T_D = T_C = 300 \text{ K}$$

Como se dice que el volumen se reduce a la mitad:

$$V_D = 0{,}076 \text{ m}^3$$

La presión vendrá dada por:

$$p_C \cdot V_C = p_D \cdot V_D \;\;\rightarrow\;\; p_D = \frac{p_C \cdot V_C}{V_D} = 2 \cdot p_C = 16\,520 \text{ Pa}$$

A continuación, calculamos los valores de W y Q en cada uno de los procesos:

Proceso *AB*:

Se trata de una expansión isoterma, por lo que, por la ley de Joule, $\Delta U_{AB} = 0$ J. Entonces:

$$Q_{AB} = W_{AB}$$

Calculamos el trabajo sabiendo que se trata de un proceso isotermo:

$$W_{AB} = n \cdot R \cdot T_A \ln \frac{V_B}{V_A} = 0{,}5 \cdot 8{,}314 \cdot 500 \cdot \ln 2 = 1\,441 \text{ J}$$

Luego también:

$$Q_{AB} = 1\,441 \text{ J}$$

Observa que si hubiéramos empleado la expresión:

$$Q = n \cdot c_V \cdot \Delta T$$

habríamos obtenido $Q = 0$, ya que $\Delta T = 0$. ¿Por qué, pues, no podemos usar esta fórmula para calcular el calor? (Pista: piensa en el comportamiento de la presión y el volumen a lo largo de este proceso).

Proceso *BC*:

Como en este caso se produce una expansión adiabática: $Q_{BC} = 0$ J. Así pues:

$$\Delta U_{BC} = -W_{BC}$$

Calculamos la variación de energía interna:

$$\Delta U_{BC} = n \cdot c_V \cdot \Delta T = 0{,}5 \cdot 20{,}8 \cdot (300 - 500) = -2\,080 \text{ J}$$

Por lo tanto:

$$W_{BC} = 2\,080 \text{ J}$$

Proceso *CD*:

De nuevo se trata de un proceso isotermo, por lo que $\Delta U_{CD} = 0$ J, y:

$$Q_{CD} = W_{CD}$$

Siguiendo el mismo procedimiento que antes:

$$W_{CD} = n \cdot R \cdot T_C \cdot \ln \frac{V_D}{V_C} = 0{,}5 \cdot 8{,}314 \cdot 300 \cdot \ln 0{,}5 = -864 \text{ J}$$

$$Q_{CD} = -864 \text{ J}$$

Proceso *DA*:

En este caso, tenemos una contracción adiabática, por lo que $Q_{DA} = 0$ J. Entonces:

$$\Delta U_{DA} = -W_{DA}$$

Calculamos la variación de energía interna igual que antes:

$$\Delta U_{BC} = \text{n} \cdot c_V \cdot \Delta T = 0{,}5 \cdot 20{,}8 \cdot (500 - 300) = 2\,080 \text{ J}$$

Vemos que, en efecto, tiene que ser así, ya que la variación de energía interna a lo largo de un ciclo completo ha de ser cero:

$$\Delta U = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CD} + \Delta U_{DA} = 0 - 2\,080 + 0 + 2\,080 = 0 \text{ J}$$

Así pues:

$$W_{DA} = -2080 \text{ J}$$

Vamos a resumir todos los resultados en una tabla:

Proceso	Q	W	ΔU
AB	1441 J	1441 J	0
BC	0	2080 J	–2080 J
CD	–864 J	–864 J	0
DA	0	–2080 J	2080 J
Total	577 J	577 J	0

4 MÁQUINAS TÉRMICAS Y REFRIGERADORES

CE.1.1. (EA.1.1.1.) CE 4.1. (EA.4.1.1.) CE.4.2. (EA.4.2.1.)

Página 127

27 Un motor térmico funciona entre un foco caliente a 350 °C y otro frío a 25 °C. Calcula el rendimiento máximo que puede alcanzar.

El rendimiento máximo de un motor térmico viene dado por:

$$\eta_{máx} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

donde ambas temperaturas han de estar en kelvin. Por tanto:

$$\eta_{máx} = 1 - \frac{25 + 273}{350 + 273} = 0{,}52$$

Es decir, sería del 52 %.

28 Un motor térmico tiene un rendimiento del 35 %. En cada ciclo extrae 20 000 J del foco caliente. Calcula cuánto calor cede al foco frío, y cuánto trabajo realiza en cada ciclo.

Se dice que el rendimiento es del 35 %, es decir: $\eta = 0{,}35$. Teniendo en cuenta que:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_f|}{|Q_c|}$$

podremos calcular el calor que cede al foco frío:

$$0{,}35 = 1 - \frac{|Q_f|}{20\,000} \rightarrow \frac{|Q_f|}{20\,000} = 0{,}65$$

$$|Q_f| = 20\,000 \cdot 0{,}65 = 13\,000 \text{ J}$$

Es decir: $Q_f = -13\,000$ J.

Para calcular el trabajo que realiza, empleamos:

$$\Delta U = 0 \rightarrow W = |Q_c| - |Q_f| = 20\,000 - 13\,000 = 7\,000 \text{ J}$$

29 Un motor ideal absorbe 1 500 J de calor de un foco caliente a 450 K, y cede calor a un foco frío a 125 K. Calcula el trabajo que realiza, el calor que cede al foco frío y su rendimiento.

Como se dice que se trata de un motor ideal, podemos utilizar la expresión:

$$\eta_{máx} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

Por tanto:

$$\eta_{máx} = 1 - \frac{125}{450} = 0{,}722 = 72{,}2\ \%$$

Por otra parte, siempre se verifica:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_f|}{|Q_c|}$$

Como conocemos el valor de Q_c, ya tenemos:

$$0{,}722 = 1 - \frac{|Q_f|}{1\,500} \rightarrow \frac{|Q_f|}{1\,500} = 0{,}278$$

$$|Q_f| = 1\,500 \cdot 0{,}278 = 417 \text{ J}$$

Finalmente, usando la primera ley:

$$W = |Q_c| - |Q_f| = 1\,500 - 417 = 1\,083 \text{ J}$$

30 **Se utiliza el gas ideal del ejercicio 26 como máquina ideal para realizar cierto trabajo sobre el entorno. Calcula su rendimiento. ¿Es el máximo posible?**

Calculamos el rendimiento de la máquina del ejercicio 26. Para ello utilizamos:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_f|}{|Q_c|}$$

Observa que el contacto con el foco caliente se produce a lo largo del proceso *AB*, y con el foco frío, a lo largo del proceso *CD*. Por tanto:

$$Q_c = Q_{AB} = 1\,441 \text{ J}$$

$$Q_f = Q_{CD} = -864 \text{ J}$$

Así pues:

$$\eta = 1 - \frac{864}{1\,441} = 0{,}40 = 40\ \%$$

El rendimiento máximo posible será:

$$\eta_{máx} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{27 + 273}{227 + 273} = 0{,}4$$

Por lo tanto, vemos que sí, el rendimiento de la máquina es el máximo teórico posible.

5 SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA. ENTROPÍA

CE.1.1. (EA.1.1.1.) CE 4.5. (EA.4.5.1.) CE.4.7. (EA.4.7.1.-4.7.2.)

Página 132

31 **Calcula la variación de entropía en cada uno de los tramos reversibles del ciclo de Carnot del ejercicio 26.**

Los procesos *BC* y *DA* son adiabáticos (y reversibles), por lo que $\Delta S_{BC} = \Delta S_{DA} = 0$. Durante la expansión isoterma *AB*, el sistema absorbe un calor $Q_{AB} = 1\,441$ J, siendo $T_c = 500$ K, por lo que:

$$\Delta S_{AB} = \frac{Q_{AB}}{T_c} = \frac{1\,441}{500} = 2{,}88 \text{ J/K}$$

Durante la compresión isoterma *CD*, el sistema absorbe un calor *QCD* = –864 J, es decir, cede calor al entorno, y $T_f = 300$ K, por lo que:

$$\Delta S_{CD} = \frac{Q_{CD}}{T_f} = \frac{-864}{300} = -2{,}88 \text{ J/K}$$

La variación de entropía total será $\Delta S = 0$, como debe ser, pues se trata de una función de estado de un sistema que recorre un ciclo.

32 Considera que el gas del ejercicio resuelto 5 se hubiera expandido de forma reversible. Por ejemplo, la pared podría consistir en un pistón que esté sujeto de modo que se desplace muy lentamente hasta que el gas ocupe todo el volumen del recipiente. ¿Cuál sería la variación de entropía en este caso? Explica si existe contradicción con el resultado que se encontró anteriormente.

Si el gas de expande de forma reversible, por ejemplo, mediante un pistón móvil que se desplaza lentamente, de modo que el sistema siempre está en equilibrio, entonces, al tratarse de un proceso adiabático reversible: $\Delta S = 0$.

Podríamos pensar que hay una contradicción con el resultado del ejercicio resuelto 5, ya que, al tratarse de una función de estado que depende de los estados inicial y final y no del proceso seguido, parece que ΔS ha de valer, como en aquel caso, 17,3 J/K. Sin embargo esto no es correcto, ya que ese valor se calculó teniendo en cuenta que el proceso era isotermo, pero el que ahora nos ocupa, no lo es.

En efecto, si la expansión es muy lenta, para que sea reversible, hay que estar continuamente ejerciendo una fuerza sobre el pistón, de modo que la presión del gas sea en todo momento igual a la ejercida desde fuera. Es decir, el gas está ejerciendo un trabajo (en el caso de la expansión libre no había nada sobre lo que realizar trabajo) sobre el pistón. Dado que no hay intercambio de calor, tendremos que $Q = 0$ y:

$$\Delta U = W \neq 0$$

Teniendo en cuenta que para un gas ideal:

$$\Delta U = n \cdot c_V \cdot \Delta T$$

concluimos que ΔT no puede ser cero. Así pues, el gas termina en un estado diferente a cuando la expansión era libre (y por tanto irreversible), y la variación de entropía es distinta en ambos casos.

No hay, por tanto, contradicción entre ambos resultados.

33 Deduce la expresión para la variación de la entropía de un gas ideal que experimenta un proceso isotermo.

Como ya sabemos, la entropía es una función de estado. Por lo tanto, dados el estado inicial, 1, y el estado final, 2, podemos considerar un proceso reversible isotermo que lleve al sistema de uno a otro.

Como la variación de la energía interna viene dada por:

$$\Delta U = n \cdot c_V \cdot \Delta T$$

y $\Delta T = 0$, hemos de tener: $\Delta U = 0$. Por tanto, usando la primera ley de la termodinámica:

$$Q = W$$

Ahora bien, sabemos que el trabajo realizado por un gas ideal a lo largo de un proceso isotermo es:

$$W = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Así pues:

$$Q = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Usando que la variación de la entropía en un proceso isotermo reversible es:

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

deducimos finalmente:

$$\Delta S = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Esta expresión es la que apareció en el apartado 5.4. Si el proceso entre los estados 1 y 2 es irreversible, la variación de la entropía será la misma ya que, como se dijo anteriormente, se trata de una función de estado. La diferencia estará en que en ese caso Q no vendrá dado por:

$$Q = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

sino que su valor será menor, de manera que se verifique:

$$\Delta S > \frac{Q}{T}$$

34 **Se mezclan 200 g de agua a 60 °C con otra masa de agua de 400 g a 20 °C. Calcula la variación de entropía del sistema.**

Dato: c = 4186 J/(kg · K).

La mezcla de agua a diferente temperatura es un proceso irreversible. Sin embargo, podemos pensar en un proceso reversible que lleve desde el estado inicial hasta el final, y calcular la variación de entropía de cada uno de los subsistemas. Para ello, empezamos por calcular la temperatura final de equilibrio.

Procedemos como en el apartado 3 de la unidad: el calor cedido por el agua caliente es absorbido por el agua fría. Entonces:

$$Q_f = m_f \cdot c \cdot (T_F - T_{0,f})$$

$$Q_c = m_c \cdot c \cdot (T_F - T_{0,c})$$

$$Q_f + Q_c = 0$$

con lo que ya tenemos:

$$m_f \cdot c \cdot \left(T_F - T_{0,f}\right) + m_c \cdot c \cdot \left(T_F - T_{0,c}\right) = 0$$

$$m_f \cdot \left(T_F - T_{0,f}\right) = m_c \cdot \left(T_{0,c} - T_F\right)$$

$$400 \cdot \left(T_F - 20\right) = 200 \cdot \left(60 - T_F\right)$$

$$400 \cdot T_F - 8\,000 = 12\,000 - 200 \cdot T_F$$

$$600 \cdot T_F = 20\,000 \quad \rightarrow \quad T_F = 33{,}3 \text{ °C}$$

Calculamos ahora la variación de entropía del agua fría y del agua caliente, suponiendo que el proceso haya tenido lugar de forma reversible:

$$\Delta S_c = m_c \cdot c \cdot \ln \frac{T_F}{T_{0,c}} = 0{,}2 \cdot 4\,186 \cdot \ln \frac{33{,}3 + 273}{60 + 273} = -70{,}0 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_f = m_f \cdot c \cdot \ln \frac{T_F}{T_{0,f}} = 0{,}4 \cdot 4\,186 \cdot \ln \frac{33{,}3 + 273}{20 + 273} = 74{,}3 \text{ J/K}$$

Luego, la variación total será:

$$\Delta S = 74{,}3 - 70{,}0 = 4{,}3 \text{ J/K}$$

Como ves, esta es positiva, lo que indica que aumenta el desorden del sistema.

35 **Supongamos que 500 g de agua a 80 °C se ponen en contacto térmico con 500 g de agua a 10 °C. Calcula el cambio de entropía total del sistema. Para ello, determina la variación de cada uno de los subsistemas por separado. Considera, en primer lugar, que el proceso tiene lugar de forma reversible, y, después, razona qué ocurriría si fuera irreversible. Discute los resultados que has obtenido.**

Dato: c_{agua} = 4186 J/(kg·K).

Estamos considerando que el calor específico del agua es constante en todo el rango de temperaturas, de 0 °C a 100 °C. Esto no es verdad, aunque constituye una buena aproximación. Además, se indica que, en primer lugar, realicemos los cálculos suponiendo que el proceso es reversible. Por tanto, podemos usar la expresión vista en el apartado 5.6:

$$\Delta S = m \cdot c \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Tanto el agua fría como la caliente acaban en un estado de equilibrio térmico con una temperatura igual al promedio de las dos iniciales:

$$T_2 = \frac{80 + 10}{2} = 45\ °\text{C}$$

Si tuviéramos dos cantidades distintas de agua, o bien si se tratara de dos sustancias diferentes, entonces tendríamos que recurrir a la técnica vista en el apartado 3. Por tanto, para el agua caliente:

$$\Delta S_c = m \cdot c \cdot \ln \frac{T_2}{T_{1,c}} = 0{,}5 \cdot 4\,186 \cdot \ln \frac{45 + 273}{80 + 273} = -218{,}5\ \text{J/K}$$

Y para el agua fría:

$$\Delta S_f = m \cdot c \cdot \ln \frac{T_2}{T_{1,f}} = 0{,}5 \cdot 4\,186 \cdot \ln \frac{45 + 273}{10 + 273} = 244{,}1\ \text{J/K}$$

La variación de entropía total será:

$$\Delta S = 25{,}6\ \text{J/K}$$

Fíjate que, en realidad, este proceso es irreversible. En efecto, debido a la diferencia de temperaturas, tiene lugar un flujo de calor desde un sistema hasta el otro. No hay forma de que, invirtiendo las condiciones, dicho flujo también se invierta y uno de ellos se caliente de nuevo hasta los 80 °C mientras que el otro se enfríe hasta 10 °C sin que ocurra ningún otro efecto.

Por tanto, podría parecer que no podemos calcular la variación de entropía del sistema, ya que la ecuación anterior deja de ser aplicable. Sin embargo, recuerda que la entropía es una función de estado, y su variación depende únicamente de los estados inicial y final, no del proceso seguido. Entonces, aunque consideremos que el proceso es irreversible, siempre que el estado inicial consista en 500 g de agua a 80 °C y 500 g de agua a 10 °C, y el final en 1 kg de agua a 45 °C, tendremos que la variación de entropía es 25,6 J/K.

36 Calcula la variación de entropía cuando se calienta 1 kg de agua a presión constante desde –18 °C hasta 150 °C. ¿En qué momento es mayor la variación de la entropía?

Datos: $c_{hielo} = 2\,100$ **J/(kg · K);** $c_{agua} = 4\,186$ **J/(kg · K);** $c_{gas} = 1\,840$ **J/(kg · K);** $L_f = 3{,}34 \cdot 10^5$ **J/kg;** $L_v = 2{,}256 \cdot 10^6$ **J/kg.**

Tenemos cinco procesos que vamos a considerar que tienen lugar reversiblemente. Analizándolos por separado:

- **Calentamiento del hielo desde –18 °C hasta 0 °C.** La entropía vendrá dada por:

$$\Delta S_1 = m \cdot c_{hielo} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} = 1 \cdot 2\,100 \cdot \ln \frac{273}{-18 + 273} = 143\ \text{J/K}$$

- **Fusión completa del hielo a temperatura constante de 0 °C.** Dado que se trata de un proceso isotermo, la entropía vendrá dada por:

$$\Delta S_2 = \frac{Q}{T_2}$$

El calor absorbido será:

$$Q = m \cdot L_f = 1 \cdot 3{,}34 \cdot 10^5 = 334\,000\ \text{J}$$

Por tanto:

$$\Delta S_2 = \frac{Q}{T_2} = \frac{334\,000}{273} = 1\,223\ \text{J/K}$$

- **Calentamiento del agua desde 0 °C hasta 100 °C.** La entropía vendrá dada por:

$$\Delta S_3 = m \cdot c_{agua} \cdot \ln \frac{T_3}{T_2} = 1 \cdot 4\,186 \cdot \ln \frac{373}{273} = 1\,037 \text{ J/K}$$

- **Vaporización completa del agua líquida a temperatura constante de 100 °C.** La entropía vendrá dada por:

$$\Delta S_4 = \frac{Q}{T_3}$$

El calor absorbido se calcula utilizando el calor latente de vaporización:

$$Q = m \cdot L_v = 1 \cdot 2{,}256 \cdot 10^6 = 2\,256\,000 \text{ J}$$

Por tanto:

$$\Delta S_4 = \frac{Q}{T_3} = \frac{2\,256\,000}{373} = 6\,048 \text{ J/K}$$

- **Calentamiento del vapor de agua desde 100 °C hasta 150 °C.** La entropía vendrá dada en este caso por:

$$\Delta S_5 = m \cdot c_{gas} \cdot \ln \frac{T_4}{T_3} = 1 \cdot 1\,840 \cdot \ln \frac{150 + 273}{373} = 232 \text{ J/K}$$

La variación total de la entropía será:

$$\Delta S = 143 + 1\,223 + 1\,037 + 6\,048 + 232 = 8\,683 \text{ J/K}$$

Vemos que, de los cinco procesos, el de la vaporización del agua presenta un aumento de entropía mayor que el resto.

37 **A partir de todo lo estudiado sobre la entropía, escribe un texto sobre el aumento de la entropía del universo como sistema aislado y qué consecuencias puede tener en un futuro. Para ello, infórmate sobre las distintas teorías que hay acerca de la evolución del universo y la relación que hay entre la vida y la entropía. Utiliza la técnica piensa y comparte en pareja.**

Puede sugerir a su alumnado que antes de responder a esta actividad, consulte en el banco de recursos de **anayaeducacion.es** cómo aplicar la técnica «Piensa y comparte en pareja».

Respuesta abierta.

TRABAJA CON LO APRENDIDO

CE.1.1. (EA.1.1.1.) **CE.1.2.** (EA.1.2.1.-1.2.2.) **CE.4.1.** (EA.4.1.1.) **CE.4.2.** (EA.4.2.1.) **CE.4.5.** (EA.4.5.1.) **CE.4.7.** (EA.4.7.1.-4.7.2.)

Página 140

Transferencia de energía

1 Calcula el trabajo realizado por un sistema que reduce su volumen en 25 cm³ a una presión constante de 1 atm. Interpreta el valor del signo.

Pasamos todos los datos al SI:

$$p = 1 \text{ atm} = 101\,300 \text{ Pa}$$

$$\Delta V = -25 \text{ cm}^3 = -25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

donde el signo menos indica que el volumen se ha reducido.

Como se dice que la presión es constante, tendremos que el trabajo realizado por el sistema será:

$$W = p \cdot \Delta V = -101\,300 \cdot 25 \cdot 10^{-6} = -2{,}53 \text{ J}$$

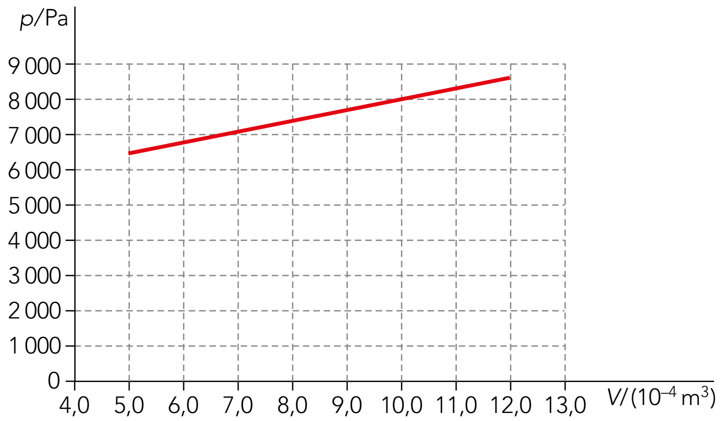
El signo menos indica que el entorno ha realizado trabajo sobre el sistema. Esto concuerda con el hecho de que el volumen se ha reducido.

2 ¿Qué trabajo realiza un sistema cuyo volumen aumenta de 0,5 L hasta 1,2 L? La presión varía mediante la expresión: p/Pa = 5 · 10³ + 3 · (V/cm³).

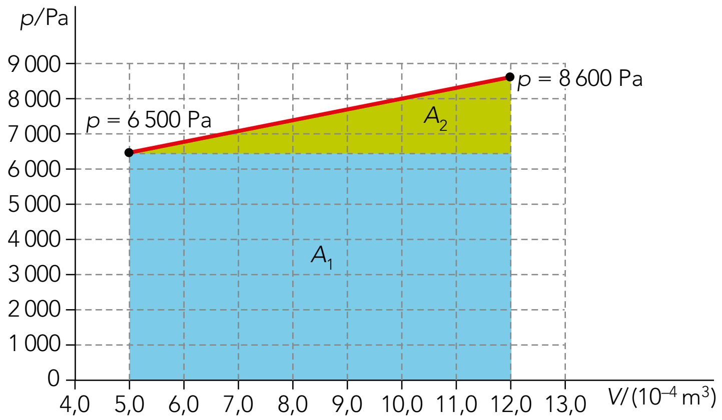
Si calculamos la presión en pascales, para los volúmenes $V_1 = 0{,}5 \cdot 10^3$ cm³ y $V_2 = 1{,}2 \cdot 10^3$ cm³, obtenemos los siguientes valores:

$V_1 = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ m³	$p_1 = 6\,500$ Pa
$V_2 = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ m³	$p_2 = 8\,600$ Pa

La gráfica p-V correspondiente es la siguiente:



El área bajo la curva se puede descomponer en dos partes: un rectángulo y un triángulo:



Área del rectángulo:

$$\text{Base: } \Delta V = 1\,200 - 500 = 700 \text{ cm}^3 = 7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$\text{Altura: } 6\,500 \text{ Pa}$$

$$W_1 = 7 \cdot 10^{-4} \cdot 6\,500 = 4{,}55 \text{ J}$$

Área del triángulo:

$$\text{Base: } \Delta V = 7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$\text{Altura: } 8\,600 - 6\,500 = 2\,100 \text{ Pa}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10^{-4} \cdot 2\,100 = 0{,}74 \text{ J}$$

Trabajo total:

$$W = W_1 + W_2 = 5{,}29 \text{ J}$$

3 El volumen que ocupan 3 mol de un gas ideal a una presión de 10 atm es de 2 L. En un momento dado, se expande a temperatura constante hasta ocupar un volumen de 10 L. Calcula el trabajo realizado por el gas.

Utilizamos la ecuación de los gases ideales para calcular la temperatura:

$$W = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = 1\,013\,000 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot \ln \frac{10}{2} = 3\,261 \text{ J}$$

Observa que el dato de la cantidad de sustancia no era necesario. Sí hubiéramos tenido que utilizarlo en caso de haber hecho uso de la otra expresión que tenemos para el trabajo:

$$W = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

En ese caso:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \rightarrow \quad T = \frac{p \cdot V}{n \cdot R} = \frac{10 \cdot 2}{3 \cdot 0{,}082} = 81{,}3 \text{ K}$$

$$W = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = 3 \cdot 8{,}314 \cdot 81{,}3 \cdot \ln \frac{10}{2} = 3\,264 \text{ J}$$

Fíjate que hemos usado el valor de la constante de los gases en el SI: $R = 8{,}314$ J/(mol · K), ya que, si no, hubiéramos obtenido un resultado erróneo.

4 Un volumen de 120 cm³ de agua a 100 °C hierve completamente a 1 atm de presión. Sabiendo que la densidad del vapor de agua a 100 °C es 1 671 veces menor que la del agua líquida a esa misma temperatura, calcula el trabajo realizado por el vapor sobre el entorno.

El volumen inicial del agua es de 120 cm³. Por otra parte, se dice que la densidad del vapor de agua a 100 °C es 1 671 veces menor que la del agua líquida a esa misma temperatura, por lo que su volumen ha de ser 1 671 veces mayor; es decir: $V_2 = 120 \cdot 1\,671 = 200\,520$ cm³.

Como el proceso tiene lugar a presión constante:

$$W = p \cdot (V_2 - V_1) = 101\,300 \cdot (200\,520 - 120) \cdot 10^{-6} \approx 20\,301 \text{ J}$$

Observa que hay que utilizar la presión en pascales y los volúmenes en metros cúbicos.

5 Utilizando un aparato como el que usó Joule, se hace descender una masa de 25 kg, a velocidad constante, una altura de 10 m. El trabajo producido se utiliza para calentar 200 g de agua. ¿Cuánto ascenderá su temperatura?

Nota: Recuerda la expresión de la energía potencial:

$$\boldsymbol{E_p = m \cdot g \cdot h}$$

La diferencia de energía potencial de la masa, al descender, viene dada por:

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot h = 25 \cdot 9{,}8 \cdot 10 = 2450 \text{ J}$$

Esta energía se transfiere al agua en forma de trabajo mecánico. Si este invierte en aumentar la temperatura de los 200 g de agua, tendremos:

$$W = m \cdot c \cdot \Delta T \quad \rightarrow \quad \Delta T = \frac{W}{m \cdot c} = \frac{2\,450}{0{,}2 \cdot 4\,186} = 2{,}9\,°\text{C}$$

6 **Se tiene una cierta cantidad de hielo a –25 °C. Se funde mediante una resistencia eléctrica, obteniéndose agua líquida a 40 °C. La cantidad de energía consumida es de 600 000 J. Calcula la masa de hielo que teníamos inicialmente.**

Datos: c_{agua} = 4 186 J/(kg · K); c_{hielo} = 2 100 J/kg; L_f = 3,34 · 10⁵ J/kg.

El proceso consta de 3 partes:

- El hielo aumenta su temperatura desde los –25 °C hasta los 0 °C. Hay que utilizar el calor específico del hielo: c_{hielo} = 2 100 J/(kg · K).
- El hielo se funde completamente a temperatura constante. Emplearemos el calor latente de fusión: L_f = 334 000 J/kg.
- El agua aumenta su temperatura desde 0 °C hasta 40 °C. En este caso hay que utilizar el calor específico del agua líquida: c_{agua} = 4 186 J/kg · K.

Por tanto, llamando *m* a la masa de hielo que había inicialmente, tenemos:

$$Q_1 = m \cdot c_{hielo} \cdot (T_{F,agua} - T_{0,agua}) = \text{m} \cdot 2\,100 \cdot (0 + 25) = 52\,500 \cdot m$$

$$Q_2 = m \cdot L_v = 334\,000 \cdot m$$

$$Q_3 = m \cdot c_{agua} \cdot (T_{F,vapor} - T_{0,vapor}) = m \cdot 4\,186 \cdot (40 - 0) = 167\,440 \cdot m$$

Hemos tenido en cuenta que la masa inicial de hielo es la misma que la de agua líquida al final, ya que no se pierde durante el proceso.

La energía total que se necesita será, entonces:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 553\,940 \cdot m = 600\,000$$

De donde obtenemos la masa de hielo:

$$m = 1{,}08 \text{ kg}$$

7 **En una estufa de gasolina se calientan 0,5 L de agua de 20 °C a 100 °C, y, además, hierven 250 g de ella. Sabiendo que la combustión de 1 g de gasolina libera 42 500 J, ¿qué masa de gasolina se debe quemar para que el proceso del agua tenga lugar?**

Datos: c_{agua} = 4 186 J/(kg · K); L_v = 2,256 · 10⁶ J/kg.

Si suponemos que la densidad del agua es de 1 g/cm³, tendremos una masa de 500 g. Vamos a calcular el calor necesario para aumentar su temperatura desde los 20 °C hasta los 100 °C:

$$Q_1 = m \cdot c_{agua} \cdot (T_{F,agua} - T_{0,agua}) = 0{,}5 \cdot 4\,186 \cdot (100 - 20) = 167\,440 \text{ J}$$

Por otra parte, la energía necesaria para que hiervan 250 g será:

$$Q_2 = m \cdot L_v = 0{,}250 \cdot 2{,}256 \cdot 10^6 = 564\,000 \text{ J}$$

Por tanto, la cantidad de calor necesaria será:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 731\,440 \text{ J}$$

Como 1 g de gasolina libera 42 500 J, hará falta quemar:

$$m_{gasolina} = 731\,440 \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ g}}{42\,500 \text{ J}} = 17{,}2 \text{ g}$$

8 **Una masa de 55 g de nitrógeno se calienta desde 120 °C hasta 300 °C. Calcula el calor absorbido si el proceso tiene lugar a presión constante. ¿Y si es a volumen constante?**

Datos: c_p = 29,1 J/(mol · K); c_V = 20,8 J/(mol · K).

Como el primer proceso tiene lugar a presión constante:

$$Q = n \cdot c_p \cdot \Delta T$$

Calculamos la cantidad de sustancia:

$$M\left(N_2\right) = 14{,}01 \text{ g/mol} \;\rightarrow\; n = \frac{55{,}0}{14{,}01} = 3{,}93 \text{ mol}$$

Por tanto:

$$Q = 3{,}93 \cdot 29{,}1 \cdot (300 - 120) = 20\,585 \text{ J}$$

Si el proceso es a volumen constante:

$$Q = n \cdot c_V \cdot \Delta T \;\rightarrow$$

$$Q = 3{,}93 \cdot 20{,}8 \cdot (300 - 120) = 14\,714 \text{ J}$$

9 **El gas del ejercicio anterior, que se encuentra a 120 °C, sufre una compresión isoterma hasta que su volumen se reduce a la tercera parte. Calcula el trabajo realizado sobre el sistema.**

Como la compresión es isoterma, el trabajo viene dado por:

$$W = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

donde V_1 es el volumen inicial, y V_2, el final. Puesto que el volumen se reduce a la tercera parte:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{3}$$

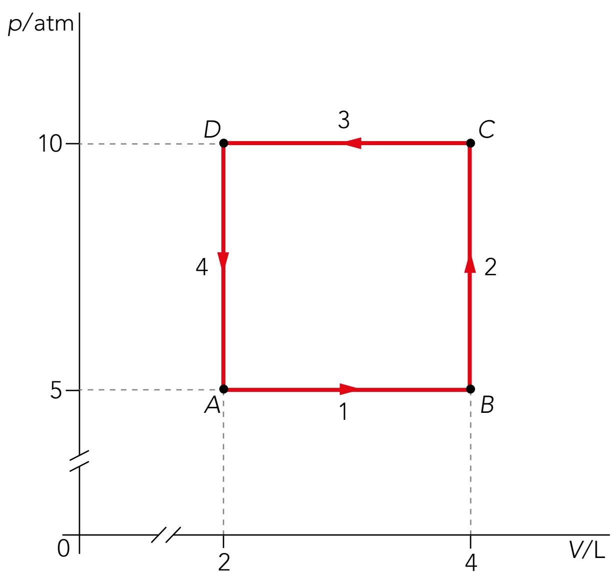
y por tanto:

$$W = 3{,}93 \cdot 8{,}314 \cdot (120 + 273) \cdot \ln \frac{1}{3} \approx -14\,107 \text{ J}$$

Es decir, se realiza un trabajo de 14 107 J sobre el gas.

10 **Calcula el trabajo realizado y el calor absorbido por 2 mol de un gas ideal a partir del siguiente ciclo. ¿En qué sentido tendría que recorrerse el ciclo si quisiéramos que este sistema funcionara como un motor?**

Datos: c_p = 29,1 J/(mol · K); c_V = 20,8 J/(mol · K).



Vamos a descomponer el ciclo en los cuatro tramos que se indican.

AB: esta parte se realiza a presión constante, por lo que el trabajo viene dado por:

$$W_{AB} = p_A \cdot (V_B - V_A)$$

Pasamos todas las magnitudes al SI:

$$p_A = 5 \text{ atm} \cdot \frac{101\,300 \text{ Pa}}{1 \text{ atm}} = 506\,500 \text{ Pa}$$

$$V_A = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3; \quad V_B = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Y ya tenemos:

$$W_{AB} = 506\,500 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 1\,013 \text{ J}$$

El calor absorbido, al ser a presión constante, viene dado por:

$$Q_{AB} = n \cdot c_p \cdot \Delta T$$

Para calcularlo tenemos que hallar las temperaturas en los estados *A* y *B*.

$$T_A = \frac{p_A \cdot V_A}{n \cdot R} = \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 0{,}082} = 60{,}98 \text{ K}$$

$$T_B = \frac{p_B \cdot V_B}{n \cdot R} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 0{,}082} = 121{,}95 \text{ K}$$

Por tanto:

$$\Delta T = 121{,}95 - 60{,}98 = 60{,}97 \text{ K}$$

Y ya tenemos:

$$Q_{AB} = n \cdot c_p \cdot \Delta T = 2 \cdot 29{,}1 \cdot 60{,}97 = 3\,549 \text{ J}$$

BC: esta parte se realiza a volumen constante, por lo que el trabajo es nulo:

$$W_{BC} = 0$$

El calor absorbido viene dado por:

$$Q_{BC} = n \cdot c_V \cdot \Delta T$$

Calculamos la temperatura en *C*, observando que el volumen es constante:

$$\frac{p_C}{T_C} = \frac{p_B}{T_B} \rightarrow T_C = T_B \cdot \frac{p_C}{p_B} = 121{,}95 \cdot 2 = 243{,}90 \text{ K}$$

Por tanto:

$$Q_{BC} = 2 \cdot 20{,}8 \cdot (243{,}9 - 121{,}96) = 5\,073 \text{ J}$$

CD: esta parte se realiza de nuevo a presión constante, por lo que el trabajo viene dado por:

$$W_{CD} = p_C \cdot (V_D - V_C)$$

$$p_C = 10 \text{ atm} = 1\,013\,000 \text{ Pa}$$

$$W_{CD} = 1\,013\,000 \cdot (-2 \cdot 10^{-3}) = -2\,026 \text{ J}$$

Y el calor absorbido será:

$$Q_{CD} = n \cdot c_p \cdot \Delta T$$

Calculamos la temperatura en el estado *D*. Como el proceso *DA* es a volumen constante:

$$\frac{p_D}{T_D} = \frac{p_A}{T_A} \rightarrow T_D = T_A \cdot \frac{p_D}{p_A} = 60{,}98 \cdot 2 = 121{,}96 \text{ K} = T_B$$

También podíamos haberla calculado teniendo en cuenta que el proceso *CD* es a presión constante, por lo que:

$$\frac{V_C}{T_C} = \frac{V_D}{T_D} \rightarrow T_D = T_C \cdot \frac{V_D}{V_C} = \frac{T_C}{2} = \frac{243{,}92}{2} = 121{,}96 \text{ K}$$

Así pues, ya tenemos:

$$Q_{CD} = 2 \cdot 29{,}1 \cdot (121{,}96 - 243{,}90) = -7\,097 \text{ J}$$

DA: esta última parte se realiza a volumen constante, por lo que el trabajo es nulo:

$$W_{DA} = 0$$

El calor absorbido viene dado por:

$$Q_{DA} = n \cdot c_V \cdot \Delta T = 2 \cdot 20{,}8 \cdot (60{,}98 - 121{,}96) = -2\,537 \text{ J}$$

El trabajo total realizado por el gas es:

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = 1013 + 0 - 2026 + 0 = -1\,013 \text{ J}$$

Y el calor total absorbido:

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA} = 3549 + 5074 - 7098 - 2537 = -1012 \text{ J}$$

La diferencia entre *W* y *Q* se debe únicamente a errores de redondeo. En realidad son iguales.

Dado que el trabajo realizado es negativo, deducimos que es el entorno el que realiza trabajo sobre el sistema. Si quisiéramos utilizarlo como motor, el trabajo total debería ser positivo, por lo que el ciclo tendría que recorrerse en sentido contrario al mostrado en la figura del enunciado.

11 **Se mezclan 250 g de agua a 25 °C con 540 g de aceite a 100 °C. Calcula la temperatura de equilibrio.**

Datos: $c_{agua} = 4186$ **J/(kg · K);** $c_{aceite} = 1675$ **J/(kg · K).**

El aceite cede calor por estar a mayor temperatura, que es completamente absorbido por el agua. Llamando T_F a la temperatura final de equilibrio, tendremos:

Calor cedido por el aceite:

$$Q_1 = m_{aceite} \cdot c_{aceite} \cdot (T_F - T_{0,aceite})$$

Calor absorbido por el agua:

$$Q_2 = m_{agua} \cdot c_{agua} \cdot (T_F - T_{0,agua})$$

Como:

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

$$m_{aceite} \cdot c_{aceite} \cdot (T_F - T_{0,aceite}) + m_{agua} \cdot c_{agua} \cdot (T_F - T_{0,agua}) = 0$$

$$0{,}54 \cdot 1675 \cdot (T_F - 100) = -0{,}25 \cdot 4186 \cdot (T_F - 25)$$

$$904{,}5 \cdot T_F - 90450 = -1\,046{,}5 \cdot T_F + 26162{,}5$$

$$1951 \cdot T_F = 116612{,}5 \rightarrow T_F = 59{,}8 \text{ °C}$$

12 **Se mezcla una cierta cantidad de agua líquida a 60 °C con 240 g con vapor de agua a 150 °C sin que escape calor al entorno. Si al final queda únicamente agua líquida a 90 °C, determina la masa inicial de agua líquida que teníamos.**

Datos: $c_{agua} = 4186$ **J/(kg · K);** $c_{vapor} = 1840$ **J/(kg · K);** $L_v = 2{,}256 \cdot 10^6$ **J/kg.**

Tenemos una cierta masa de agua líquida, m, a 60 °C. Su temperatura final es de 90 °C, por lo que habrá absorbido una cantidad de calor:

$$Q_1 = m \cdot c_{agua} \cdot (T_F - T_{0,agua}) = m \cdot 4\,186 \cdot (90 - 60) = 125\,580 \cdot m$$

Por otra parte, el vapor de agua que inicialmente estaba a 150 °C, sufre tres procesos:

– Primero, se enfría hasta los 100 °C:

$$Q_2 = m_{vapor} \cdot c_{vapor} \cdot (T_F - T_{0,vapor}) = 0,24 \cdot 1\,840 \cdot (100 - 150) = -22\,080 \text{ J}$$

Vemos que el signo es negativo porque libera calor.

– En segundo lugar, cambia de fase:

$$Q_3 = -m_{vapor} \cdot L_v = -0,24 \cdot 2,256 \cdot 10^6 = -541\,440 \text{ J}$$

Donde el signo negativo indica que libera calor, ya que pasa de estado gaseoso a líquido.

– Por último, se enfría hasta los 90 °C:

$$Q_4 = m_{vapor} \cdot c_{agua} \cdot (T_F - 100) = 0,24 \cdot 4\,186 \cdot (90 - 100) = -10\,046 \text{ J}$$

La suma total ha de resultar cero:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$$

$$125\,580 \cdot m = 22\,080 + 541\,440 + 10\,046 = 573\,566 \text{ J}$$

$$m = \frac{573\,566}{125\,580} = 4,57 \text{ kg}$$

Es decir, inicialmente teníamos 4,57 kg de agua líquida a 60 °C y 240 g de vapor de agua a 150 °C.

13 **Tenemos 100 g de agua a 20 °C, 25 g de hielo a –5 °C, y 120 g de alcohol a 50 °C. Si se mezclan y no se escapa calor al entorno, determina la fase en la que se encontrará el agua, y su temperatura de equilibrio.**

Datos: c_{agua} = 4186 J/(kg · K); c_{hielo} = 2100 J/(kg · K); $c_{alcohol}$ = 2513 J/(kg · K); L_f = 3,34 · 10^5 J/kg.

En principio, puede ocurrir que todo el hielo se funda y que se alcance una temperatura de equilibrio superior a 0 °C, o que no se funda completamente, y quede una mezcla de hielo, agua y alcohol a 0 °C. Consideremos la primera hipótesis, por ser la más sencilla.

Por tanto, **supongamos que todo el hielo se funde, y el agua líquida resultante adquiere una temperatura de equilibrio T_F**.

Los procesos que hay que tener en cuenta son los siguientes:

– El hielo aumenta su temperatura desde los –5 °C hasta 0 °C:

$$Q_1 = m_{hielo} \cdot c_{hielo} \cdot (0 - T_{0,hielo}) = 0,025 \cdot 2\,100 \cdot 5 = 262,5 \text{ J}$$

– Posteriormente se funde completamente:

$$Q_2 = m_{hielo} \cdot L_f = 0,025 \cdot 3,34 \cdot 10^5 = 8\,350 \text{ J}$$

– Y finalmente aumenta su temperatura desde 0 °C hasta la de equilibrio:

$$Q_3 = m_{hielo} \cdot c_{agua} \cdot (T_F - 0) = 0,025 \cdot 4\,186 \cdot T_F = 104,7 \cdot T_F$$

– Ahora tenemos en cuenta que hay 100 g de agua inicialmente a 20 °C:

$$Q_4 = m_{agua} \cdot c_{agua} \cdot (T_F - T_{0,agua}) = 0,1 \cdot 4\,186 \cdot (T_F - 20) = 418,6 \cdot T_F - 8\,372$$

– Y, finalmente, consideramos los 120 g de alcohol a 50 °C:

$$Q_5 = m_{alcohol} \cdot c_{alcohol} \cdot (T_F - T_{0,alcohol}) = 0{,}120 \cdot 2\,513 \cdot (T_F - 50) = 301{,}6 \cdot T_F - 15\,080$$

Ahora sumamos todo y lo igualamos a 0 (principio de conservación de la energía):

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = 0$$

$$262{,}5 + 8\,350 + 104{,}7 \cdot T_F + 418{,}6 \cdot T_F - 8\,372 + 301{,}6 \cdot T_F - 15\,080 = 0$$

De donde despejamos T_F:

$$824{,}9 \cdot T_F = 14\,839{,}5 \quad \rightarrow \quad T_F = \frac{14\,839{,}5}{824{,}9} = 17{,}99\ °C \approx 18\ °C$$

Quiere decir que todo el hielo se ha fundido, como habíamos supuesto, y el agua líquida resultante ha absorbido calor hasta que su temperatura alcanza los 18 °C. Por otra parte, tanto el agua que inicialmente estaba a 20 °C como el alcohol han cedido calor.

Observa que este método tiene varias ventajas:

Se aplica exactamente igual independientemente del número de sustancias que intervengan.

No necesitamos saber si cada una de ellas absorberá calor o lo cederá. Al utilizar en la fórmula el término $T_F - T_0$, el calor saldrá con su signo correspondiente.

Por último, cabe destacar que la suma $Q_1 + Q_2 + Q_3$ tiene signo positivo como debe ser, ya que el hielo aumenta su temperatura; después, se funde y, por último, el agua líquida resultante aumenta de nuevo su temperatura hasta los 18 °C. En estos tres procesos se absorbe calor (recuerda el criterio de signos visto en la unidad). Por otra parte, Q_4 y Q_5 son negativos ya que tanto el agua que estaba inicialmente a 20 °C como el alcohol se enfrían y por tanto ceden calor.

14 Te estás tomando 0,3 L de limonada en un caluroso día de verano, y su temperatura es de 30 °C. Para enfriarla, le echas dos cubitos de hielo, de 25 g cada uno, que están a –5 °C. Suponiendo que no hay intercambio de calor con el entorno, calcula la temperatura final. Si hubieras echado 5 cubitos, ¿cuál sería su temperatura?

Datos: c_{agua} = 4 186 J/(kg · K); c_{hielo} = 2 100 J/(kg · K); L_f = 3,34 · 10⁵ J/kg.

En principio no sabemos qué temperatura será la final, de equilibrio. Vamos a suponer que está por encima de 0 °C. Vamos a considerar entonces los dos subsistemas por separado:

– Limonada:

Su temperatura desciende desde $T_{0,limonada}$ = 30 °C hasta la temperatura final, T_F (consideramos que el calor específico de la limonada es igual al del agua):

$m_{limonada}$ = 300 g (tomando una densidad igual a la del agua)

$$Q_1 = m_{limonada} \cdot c_{agua} \cdot (T_F - T_{0,limonada}) = 0{,}3 \cdot 4\,186 \cdot (T_F - 30) =$$

$$= 1\,255{,}8 \cdot T_F - 37\,674 \text{ J}$$

– Hielo:

En primer lugar, su temperatura ascenderá desde los –5 °C hasta 0 °C:

$$Q_2 = m_{hielo} \cdot c_{hielo} \cdot (0 - T_{0,hielo}) = 2 \cdot 0{,}025 \cdot 2\,100 \cdot 5 = 525 \text{ J}$$

Después se fundirá:

$$Q_3 = m_{hielo} \cdot L_f = 2 \cdot 0{,}025 \cdot 3{,}34 \cdot 10^5 = 16\,700 \text{ J}$$

Y, por último, su temperatura volverá a subir hasta la de equilibrio:

$$Q_4 = m_{hielo} \cdot c_{agua} \cdot (T_F - 0) = 2 \cdot 0{,}025 \cdot 4\,186 \cdot T_F = 209{,}3 \cdot T_F$$

Ahora aplicamos la conservación de la energía:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$$

$$1\,255{,}8 \cdot T_F - 37\,674 + 525 + 16\,700 + 209{,}3 \cdot T_F = 0$$

$$1\,465{,}1 \cdot T_F = 20\,449 \rightarrow T_F = 14{,}0\ °C$$

Si hubiéramos echado 5 cubitos de hielo en vez de 2, tendríamos:

– Limonada:

Igual que antes.

– Hielo:

En primer lugar, su temperatura ascenderá desde los –5 °C hasta 0 °C:

$$Q'_2 = m_{hielo} \cdot c_{hielo} \cdot (0 - T_{0,hielo}) = 5 \cdot 0{,}025 \cdot 2\,100 \cdot 5 = 1\,312{,}5\ J$$

Después se fundirá:

$$Q'_3 = m_{hielo} \cdot L_f = 5 \cdot 0{,}025 \cdot 3{,}34 \cdot 10^5 = 41\,750\ J$$

Y, por último, su temperatura volverá a subir hasta la de equilibrio:

$$Q'_4 = m_{hielo} \cdot c_{agua} \cdot (T_F - 0) = 5 \cdot 0{,}025 \cdot 4\,186 \cdot T_F = 523{,}3 \cdot T_F$$

Ahora aplicamos la conservación de la energía:

$$Q_1 + Q'_2 + Q'_3 + Q'_4 = 0$$

$$1\,255{,}8 \cdot T_F - 37\,674 + 1\,312{,}5 + 41\,750 + 523{,}3 \cdot T_F = 0$$

$$1\,779{,}1 \cdot T_F = -5\,388{,}5 \rightarrow T_F = -3{,}0\ °C$$

Pero entonces tenemos una contradicción, porque habíamos supuesto que todo el hielo se funde y, sin embargo, hemos encontrado que la temperatura final está por debajo de 0 °C. Por tanto, nuestra hipótesis de partida era incorrecta. Así pues, la temperatura de la limonada disminuirá hasta 0 °C, y en ese momento aún no se habrá fundido todo el hielo, sino solamente una masa *m*. Calculémosla:

– Limonada:

Disminuye su temperatura desde los 30 °C hasta 0 °C:

$$Q_1 = m_{limonada} \cdot c_{agua} \cdot (T_F - T_{0,limonada}) = 0{,}3 \cdot 4\,186 \cdot (0 - 30) = -37\,674\ J$$

– Hielo:

En primer lugar, su temperatura ascenderá desde los –5 °C hasta 0 °C:

$$Q'_2 = m_{hielo} \cdot c_{hielo} \cdot (0 - T_{0,hielo}) = 5 \cdot 0{,}025 \cdot 2\,100 \cdot 5 = 1\,312{,}5\ J$$

Después se fundirá una masa *m:*

$$Q'_3 = m \cdot L_f = 3{,}34 \cdot 10^5 \cdot m$$

Por tanto:

$$Q_1 + Q'_2 + Q'_3 = 0$$

$$-37\,674 + 1\,312{,}5 + 3{,}34 \cdot 10^5 \cdot m = 0$$

$$3{,}34 \cdot 10^5 \cdot m = 36\,361{,}5 \rightarrow m = 0{,}109\ kg = 109\ g$$

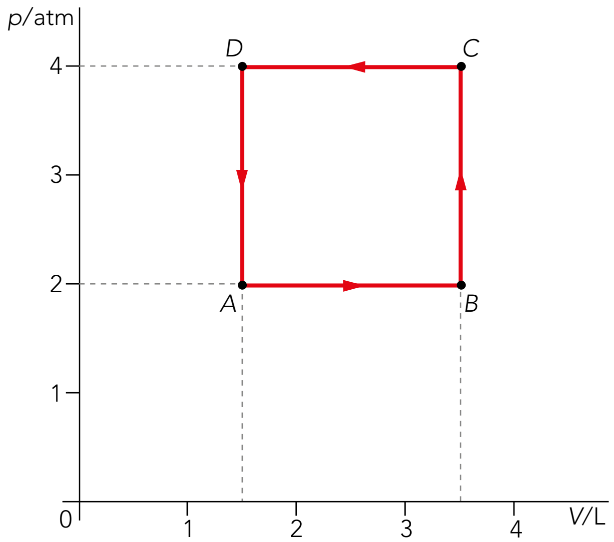
Como la masa de cada cubito es de 25 g, se habrán fundido 4 de ellos, y quedará el otro parcialmente sin fundir. Pero en ese momento toda la mezcla estará a 0 °C, coexistiendo una cierta cantidad líquida con otra sólida (suponemos que el punto de fusión de la limonada es igual al del agua pura).

Página 141

Energía interna. Primera ley de la termodinámica

15 **El diagrama *p-V* muestra un proceso cíclico. Calcula el trabajo realizado, el calor absorbido y la variación de energía interna a lo largo de cada uno de los tramos y en el ciclo total. ¿Estaría funcionando este sistema como un motor térmico?**

Datos: Q_{AB} = 500 J; Q_{BC} = 400 J; Q_{CD} = –950 J.



Observa que en este caso no se dice cuál es el valor del calor específico de la sustancia, por lo que nos tienen que proporcionar el dato del calor absorbido en algunos tramos. Analicemos cada proceso:

- ***AB:*** como aquí la presión es constante:

$$W_{AB} = p \cdot \Delta V$$

Obtenemos los valores de la presión y del volumen en el SI:

$$p = 2\ \text{atm} \cdot \frac{101\,300\ \text{Pa}}{1\ \text{atm}} = 202\,600\ \text{Pa}$$

$$V_A = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 \quad ; \quad V_B = 3{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$$

Por tanto:

$$W_{AB} = p \cdot (V_B - V_A) = 202\,600 \cdot (3{,}5 - 1{,}5) \cdot 10^{-3} = 405{,}2\ \text{J}$$

Como el calor absorbido en este proceso es Q_{AB} = 500 J, ya tenemos:

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} = 500 - 405{,}2 = 94{,}8\ \text{J}$$

- ***BC:*** como aquí el volumen es constante: W_{BC} = 0 J. También tenemos el dato del calor absorbido: Q_{BC} = 400 J. Por tanto, la variación de energía interna a lo largo de este proceso será:

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} - W_{BC} = 400\ \text{J}$$

- ***CD:*** en este caso, la presión es constante, por lo que:

$$W_{CD} = p \cdot \Delta V = 4 \cdot 101\,300 \cdot (-2 \cdot 10^{-3}) = -810{,}4\ \text{J}$$

Además, Q_{CD} = –950 J. Por tanto:

$$\Delta U_{CD} = Q_{CD} - W_{CD} = -950 + 810{,}4 = -139{,}6\ \text{J}$$

- ***DA:*** como la variación de la energía interna a lo largo de todo el ciclo ha de ser nula, ya podemos calcular la variación de energía interna en el proceso *DA:*

$$\Delta U = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CD} + \Delta U_{DA} = 0$$

Es decir:

$$\Delta U_{DA} = -\Delta U_{AB} - \Delta U_{BC} - \Delta U_{CD} = -94{,}8 - 400 + 139{,}6 = -355{,}2 \text{ J}$$

Ahora bien, en este tramo el volumen es constante, por lo que $W_{DA} = 0$ J. Y de aquí obtenemos:

$$\Delta U_{DA} = Q_{DA} - W_{DA} = Q_{DA} - 0 = Q_{DA} \rightarrow Q_{DA} = -355{,}2 \text{ J}$$

Ahora ya podemos calcular el trabajo total:

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = 405{,}2 + 0 - 810{,}4 + 0 = -405{,}2 \text{ J}$$

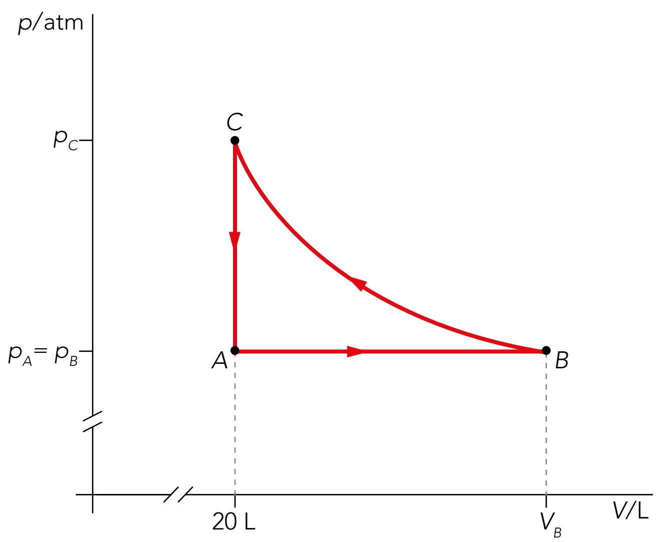
El calor total se puede obtener fácilmente mediante el primer principio de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W = 0 \rightarrow Q = W = -405{,}2 \text{ J}$$

Por tanto, vemos que $W < 0$ y $Q < 0$. Es decir, el entorno realiza trabajo sobre el sistema y este, además, libera un calor neto. Por tanto, no puede estar funcionando como un motor, sino como un refrigerador o una bomba térmica.

16 **El diagrama muestra el proceso cíclico seguido por 2 mol de un gas ideal. Se sabe que el proceso *BC* es adiabático, y se conocen los siguientes valores de la temperatura: $T_A = 300$ K, $T_B = 500$ K y $T_C = 600$ K. Calcula el trabajo, el calor y la variación de la energía interna a lo largo de cada uno de estos procesos y en el ciclo completo.**

Datos: $c_p = 29{,}1$ J/(mol · K); $c_V = 20{,}8$ J/(mol · K).



Analicemos los distintos tramos uno a uno:

- ***AB:*** en primer lugar, vamos a determinar los valores de las variables termodinámicas en cada uno de los estados.

$$T_A = 300 \text{ K} \quad ; \quad V_A = 20 \text{ L} \rightarrow p_A = \frac{n \cdot R \cdot T_A}{V_A} = \frac{2 \cdot 0{,}082 \cdot 300}{20} = 2{,}46 \text{ atm}$$

$$p_A = 2{,}46 \text{ atm} \cdot \frac{101\,300 \text{ Pa}}{1 \text{ atm}} = 249\,198 \text{ Pa}$$

$$T_B = 500 \text{ K} \quad ; \quad p_B = p_B = 2{,}46 \text{ atm}$$

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \rightarrow V_B = \frac{T_B}{T_A} \cdot V_A = \frac{500}{300} \cdot 20 = 33{,}3 \text{ L} = 33{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

El trabajo realizado por el sistema viene dado por:

$$W_{AB} = p_A \cdot \Delta V = 249\,198 \cdot 13{,}3 \cdot 10^{-3} = 3\,314 \text{ J}$$

Como el proceso tiene lugar a presión constante, podemos calcular el calor utilizando el calor específico y la diferencia de temperatura:

$$Q_{AB} = n \cdot c_p \cdot \Delta T = 2 \cdot 29{,}1 \cdot (500 - 300) = 11\,640 \text{ J}$$

Y la variación de energía interna:

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} = 11\,640 - 3\,314 = 8\,326 \text{ J}$$

Podemos comprobar el resultado teniendo en cuenta que, para un gas ideal, la variación de energía interna viene dada por:

$$\Delta U = n \cdot c_V \cdot \Delta T$$

Por tanto:

$$\Delta U_{AB} = 2 \cdot 20{,}8 \cdot 200 = 8\,320 \text{ J}$$

Ambos resultados coinciden (salvo errores debidos al redondeo).

- ***BC:*** como siempre, en primer lugar, vamos a determinar por completo el estado del sistema en el punto *C*.

$$T_C = 600 \text{ K} \quad ; \quad V_C = T_A = 20 \text{ L}$$

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_C}{T_C} \rightarrow p_C = \frac{T_C}{T_A} \cdot p_A = \frac{600}{300} \cdot 2{,}46 = 4{,}92 \text{ atm}$$

$$p_C = 4{,}92 \text{ atm} \cdot \frac{101\,300 \text{ Pa}}{1 \text{ atm}} = 498\,396 \text{ Pa}$$

Este proceso es adiabático, por lo que: $Q_{BC} = 0$ J. Por otro lado, para los gases ideales siempre se verifica que:

$$\Delta U_{BC} = n \cdot c_V \cdot \Delta T = 220{,}8 \cdot \left(600 - 500\right) = 4\,160 \text{ J}$$

Así pues:

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} - W_{BC} = 0 - W_{BC} \rightarrow W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -4\,160 \text{ J}$$

- ***CA:*** este proceso tiene lugar a volumen constante, por lo que: $W_{CA} = 0$ J, y:

$$\Delta U_{CA} = Q_{CA} = n \cdot c_V \cdot \Delta T = 2 \cdot 20{,}8 \cdot \left(300 - 600\right) = -12\,480 \text{ J}$$

También podríamos haber utilizado el hecho de que la variación de energía interna a lo largo de un ciclo es nula, por lo que:

$$\Delta U = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA} = 0$$

$$\Delta U_{CA} = -\Delta U_{AB} - \Delta U_{BC} = -8\,320 - 4\,160 = -12\,480 \text{ J}$$

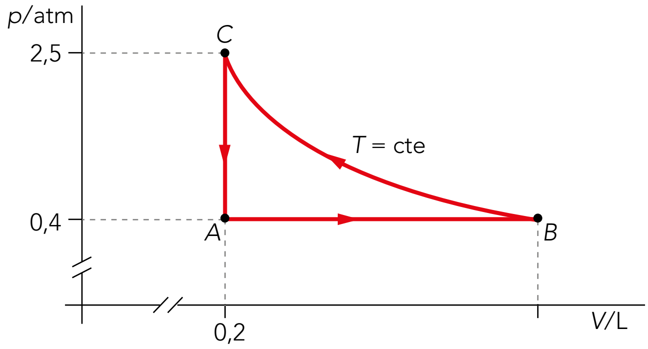
El trabajo y el calor totales serán:

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 3\,314 - 4\,160 = -846 \text{ J}$$

$$Q = W = -846 \text{ J}$$

17 **El siguiente diagrama muestra el proceso cíclico seguido por 0,0025 mol de un gas ideal. Calcula el trabajo, el calor y la variación de la energía interna a lo largo de cada una de estas etapas y en el ciclo completo.**

Datos: c_p = 29,1 J/(mol · K); c_V = 20,8 J/(mol · K).



Determinamos los valores de las variables termodinámicas en cada uno de los estados.

$$p_A = 0{,}4 \text{ atm} \cdot \frac{101\,300 \text{ Pa}}{1 \text{ atm}} = 40\,520 \text{ Pa}$$

$$V_A = 0{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_A = \frac{p_A \cdot V_A}{n \cdot R} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}2}{0{,}002\,5 \cdot 0{,}082} = 390{,}2 \text{ K}$$

Desconocemos tanto la temperatura como el volumen en el punto *B*, pero podemos tener en cuenta que el proceso ***BC*** es isotermo:

$$p_C = 2{,}5 \text{ atm} \cdot \frac{101\,300 \text{ Pa}}{1 \text{ atm}} = 253\,250 \text{ Pa}$$

$$V_C = V_A = 0{,}2 \text{ L} = 0{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \rightarrow$$

$$p_B \cdot V_B = p_C \cdot V_C \rightarrow V_B = \frac{p_C}{p_B} \cdot V_C = \frac{2{,}5}{0{,}4} \cdot 0{,}2 = 1{,}25 \text{ L} = 1{,}25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Por otro lado, sabiendo que el proceso ***CA*** es a volumen constante:

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_C}{T_C} \rightarrow T_C = \frac{p_C}{p_A} \cdot T_A = \frac{2{,}5}{0{,}4} \cdot 390{,}2 = 2\,438{,}8 \text{ K}$$

$$T_B = T_C = 2\,438{,}8 \text{ K}$$

$$p_B = p_A = 0{,}4 \text{ atm} = 40\,520 \text{ Pa}$$

Vamos a calcular ahora los valores del trabajo, el calor y las variaciones de energía interna:

- ***AB:*** este proceso tiene lugar a presión constante, por lo que:

$$W_{AB} = p_A \cdot \Delta V = 40\,520 \cdot (1{,}25 - 0{,}20) \cdot 10^{-3} = 42{,}6 \text{ J}$$

$$Q_{AB} = n \cdot c_p \cdot \Delta T = 0{,}0025 \cdot 29{,}1 \cdot (2\,438{,}8 - 390{,}2) = 149{,}0 \text{ J}$$

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} = 149{,}0 - 42{,}6 = 106{,}4 \text{ J}$$

Podemos comprobar el resultado teniendo en cuenta que, para un gas ideal, la variación de energía interna viene dada por:

$$\Delta U = n \cdot c_V \cdot \Delta T$$

Por tanto:

$$\Delta U_{AB} = 0{,}0025 \cdot 20{,}8 \cdot (2\,438{,}8 - 390{,}2) = 106{,}5 \text{ J}$$

Ambos resultados coinciden (salvo errores debidos al redondeo).

- ***BC:*** este proceso es isotermo, por lo que: $\Delta U_{BC} = 0$ J (por la ley de Joule). Por otro lado:

$$W_{BC} = p_B \cdot V_B \cdot \ln \frac{p_B}{p_C} = 40\,520 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot \ln \frac{0{,}4}{2{,}5} = -92{,}8 \text{ J}$$

Por tanto, usando la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} - W_{BC} = 0 \rightarrow Q_{BC} = W_{BC} = -92{,}8 \text{ J}$$

- ***CA:*** este proceso tiene lugar a volumen constante, por lo que: $W_{CA} = 0$ J, y:

$$\Delta U_{CA} = Q_{CA} = n \cdot c_V \cdot \Delta T = 0{,}0025 \cdot 20{,}8 \cdot (390{,}2 - 2\,438{,}8) = -106{,}5 \text{ J}$$

También podríamos haber utilizado el hecho de que la energía interna a lo largo de un ciclo no puede cambiar, por lo que:

$$\Delta U = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA} = 0$$

$$\Delta U_{CA} = -\Delta U_{AB} - \underbrace{\Delta U_{BC}}_{=0} = -106{,}5 \text{ J}$$

El trabajo y el calor totales serán:

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 42{,}6 - 92{,}8 = -50{,}2 \text{ J}$$

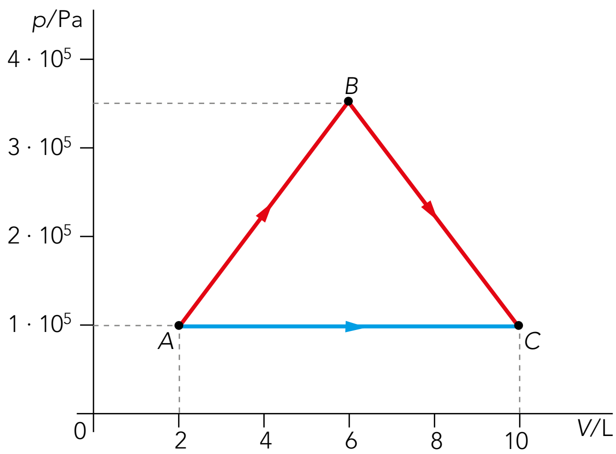
$$Q = W = -50{,}2 \text{ J}$$

Podemos comprobar que:

$$Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = -50{,}3 \text{ J}$$

18 **Un gas ideal sigue el proceso *ABC* representado en la figura. Si disponemos de 0,4 mol, calcula el trabajo ejercido por el sistema, el calor absorbido y la variación de energía interna para el proceso completo. ¿Y si hubiera seguido el camino *AC* directamente mediante la línea horizontal que une ambos estados?**

Datos: $c_V = 12{,}5$ J/(mol · K); $c_P = 20{,}8$ J/(mol · K).



Determinamos los valores de las variables termodinámicas en cada uno de los estados.

Estado ***A:***

$$p_A = 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_A = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_A = \frac{p_A \cdot V_A}{n \cdot R} = \frac{10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{0{,}4 \cdot 8{,}314} = 60{,}1 \text{ K}$$

Observa que hemos utilizado el valor $R = 8{,}314$ J/(mol · K) puesto que la presión está en Pa y hemos pasado el volumen a m^3.

Estado ***B:***

$$p_B = 3{,}5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_B = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_B = \frac{p_B \cdot V_B}{n \cdot R} = \frac{3{,}5 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{0{,}4 \cdot 8{,}314} = 631{,}5 \text{ K}$$

Estado ***C:***

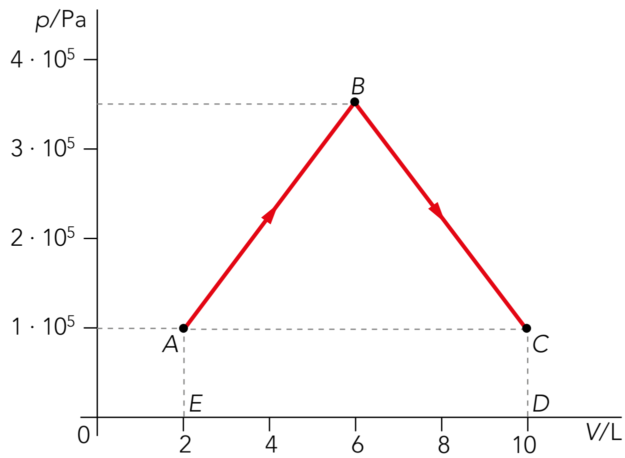
$$p_C = p_A = 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_C = 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$\frac{V_C}{T_C} = \frac{V_A}{T_A} \rightarrow T_C = T_A \cdot \frac{V_C}{V_A} = 5 \cdot T_A = 300{,}5 \text{ K}$$

Ahora calculamos cada una de las magnitudes pedidas a lo largo del proceso ***ABC.***

En primer lugar, observamos que el trabajo realizado por el sistema a lo largo del proceso completo es igual al área del triángulo de la gráfica más la del rectángulo *ACDE.*



Área del triángulo:

Como conocemos su base y su altura, tendremos:

$$\text{base} = 10 - 2 = 8 \text{ L} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\text{altura} = 3{,}5 \cdot 10^5 - 1 \cdot 10^5 = 2{,}5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}5 \cdot 10^5 = 1\,000 \text{ J}$$

Área del rectángulo:

$$\text{base} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\text{altura} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$W_2 = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 = 800 \text{ J}$$

Por tanto, el **trabajo total** será:

$$W_{ABC} = 1\,000 + 800 = 1\,800 \text{ J}$$

Para calcular la variación de energía interna utilizamos que *U* es una función de estado. Por tanto, ΔU valdrá lo mismo independientemente del proceso seguido. Como se trata de un gas ideal, podemos utilizar la ley de Joule:

$$U_{AC} = n \cdot c_V \cdot \Delta T = 0{,}4 \cdot 12{,}5 \cdot (300{,}5 - 60{,}1) = 1\,202 \text{ J}$$

Finalmente, el calor absorbido será:

$$\Delta U_{AC} = Q_{ABC} - W_{ABC} \rightarrow Q_{ABC} = \Delta U_{AC} + W_{ABC} = 1\,202 + 1\,800 = 3\,002 \text{ J}$$

Si el sistema hubiera seguido el proceso ***AC*** directamente, a lo largo de la línea horizontal que los une, la variación de energía interna sería la misma, ya que es una función de estado: $\Delta U = 1\,202$ J. Sin embargo, los valores de W y Q sí que cambiarían:

Al ser el proceso a presión constante:

$$W_{AC} = p_A \cdot \Delta V = 10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 800 \text{ J}$$

Por tanto:

$$Q_{AC} = \Delta U_{AC} + W_{AC} = 1\,202 + 800 = 2\,002 \text{ J}$$

Podemos comprobar este último resultado empleando la expresión:

$$Q_{AC} = n \cdot c_P \cdot \Delta T = 0{,}4 \cdot 20{,}8 \cdot (300{,}5 - 60{,}1) = 2\,000{,}1 \text{ J}$$

que coincide con el anterior.

19 Se encuentran encerrados 0,2 mol de aire a una temperatura de 30 °C en un cilindro que dispone de un pistón móvil. Este permite mantener una presión constante en el gas de 1 atm. Si este se calienta hasta una temperatura de 230 °C, calcula:

a) El volumen final del gas.

b) El trabajo realizado en este proceso.

c) El cambio de energía interna del gas.

d) El calor suministrado al aire.

e) El trabajo que habría suministrado si la presión fuera de 0,75 atm. Explica el resultado obtenido.

Datos: c_V = 20,8 J/(mol · K).

a) Calculamos los volúmenes inicial y final usando la ecuación de los gases ideales. Tenemos en cuenta que el pistón permite mantener constante la presión del gas, por lo que: $p_1 = p_2 = 1$ atm.

$$V_1 = \frac{n \cdot R \cdot T_1}{p} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}082 \cdot 303}{1} = 4{,}97 \text{ L}$$

$$V_2 = \frac{n \cdot R \cdot T_2}{p} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}082 \cdot 503}{1} = 8{,}25 \text{ L}$$

b) Como la presión es constante:

$$p = 1 \text{ atm} = 101\,300 \text{ Pa}$$

$$W = p \cdot \Delta V = 101\,300 \cdot (8{,}25 - 4{,}97) \cdot 10^{-3} = 332{,}3 \text{ J}$$

c) Dado que se trata de un gas ideal, la variación de energía interna vendrá dada por:

$$\Delta U = n \cdot c_V \cdot \Delta T = 0{,}2 \cdot 20{,}8 \cdot (503 - 303) = 832{,}0 \text{ J}$$

d) Para calcular el calor suministrado, usamos el primer principio de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W \rightarrow Q = \Delta U + W = 832{,}0 + 332{,}3 = 1\,164{,}3 \text{ J}$$

e) Si la presión hubiera sido en todo momento de 0,75 atm, los volúmenes serían:

$$V_1 = \frac{n \cdot R \cdot T_1}{p} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}082 \cdot 303}{0{,}75} = 6{,}63 \text{ L}$$

$$V_2 = \frac{n \cdot R \cdot T_2}{p} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}082 \cdot 503}{0{,}75} = 11{,}00 \text{ L}$$

Y por tanto el trabajo vendría dado por:

$$p = 0{,}75 \text{ atm} \cdot \frac{101\,300 \text{ Pa}}{1 \text{ atm}} = 75\,975 \text{ Pa}$$

$$W = p \cdot \Delta V = 75975 \cdot (11{,}00 - 6{,}63) \cdot 10^{-3} = 332{,}0 \text{ J}$$

Vemos que el trabajo hubiera sido el mismo. Esto se debe a que la temperatura se ha mantenido sin cambios. Por lo tanto, el producto $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ es el mismo en ambos casos. De hecho, vemos cómo la presión en este último apartado es 3/4 de la anterior. Asimismo, el volumen es 4/3 del considerado en los apartados a-d:

$$\frac{6{,}63}{4{,}97} = 1{,}33 = \frac{4}{3}$$

Entonces, la disminución de la presión y el aumento del volumen se cancelan, dando el mismo trabajo que antes.

Página 142

Máquinas térmicas

20 **Un gas ideal experimenta un ciclo de Carnot, entre un foco caliente a 400 °C y un foco frío a 75 °C. Para 0,4 mol, la presión en el punto *A* es de 3 atm, y el volumen del gas se triplica durante la expansión isotérmica. Además, se sabe que V_C = 114,8 L, y que en la compresión isotérmica este se reduce a la tercera parte.**

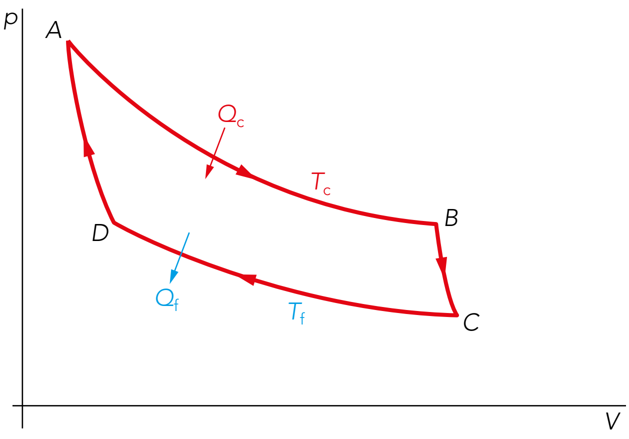
a) Calcula la presión y el volumen en los puntos *A, B, C* y *D* del ciclo.

b) Calcula el calor absorbido y el trabajo realizado por el gas ideal, así como su variación de energía interna, en cada tramo y en el ciclo completo.

c) Calcula el rendimiento de esta máquina térmica, y compara su valor con el máximo teórico.

Dato: c_V = 20,8 J/(mol · K).

a) Recordemos que un ciclo de Carnot tiene dos procesos isotermos y dos adiabáticos, como se muestra en la siguiente figura:



Vamos a calcular los datos de la presión y el volumen en cada uno de los estados:

A:

$$p_A = 3 \text{ atm} \cdot \frac{101\,300 \text{ Pa}}{1 \text{ atm}} = 303\,900 \text{ Pa}$$

$$T_A = 400 \text{ °C} = 673 \text{ K}$$

$$V_A = \frac{n \cdot R \cdot T_A}{p_A} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}082 \cdot 673}{3} = 7{,}36 \text{ L}$$

B: se dice que el volumen se triplica durante la expansión isotérmica, por lo que ya sabemos que:

$$V_B = 3 \cdot V_A = 22{,}08 \text{ L}$$

$$T_B = T_A = 673 \text{ K}$$

$$p_B \cdot V_B = p_A \cdot V_A \rightarrow p_B = p_A \cdot \frac{V_A}{V_B} = \frac{p_A}{3} = 1 \text{ atm} = 101\,300 \text{ Pa}$$

C: en este caso, conocemos tanto la temperatura como el volumen, por lo que ya podemos calcular la presión:

$$V_C = 114{,}8 \text{ L}$$

$$T_C = 75 \text{ °C} = 348 \text{ K}$$

$$p_C = \frac{n \cdot R \cdot T_C}{V_C} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}082 \cdot 348}{114{,}8} = 0{,}10 \text{ atm} = 10\,130 \text{ Pa}$$

D: sabemos que el volumen en este estado es un tercio de V_C y, además, su temperatura es la del foco frío, puesto que el proceso *CD* es isotermo:

$$V_D = \frac{V_C}{3} = 38{,}3 \text{ L}$$

$$T_D = T_C = 348 \text{ K}$$

$$p_D \cdot V_D = p_C \cdot V_C \rightarrow p_D = p_C \cdot \frac{V_C}{V_D} = 3 \cdot p_C = 0{,}3 \text{ atm} = 30\,390 \text{ Pa}$$

b) Calculemos *W, Q* y ΔU para cada uno de los tramos:

AB: Recordamos que la energía interna de un gas ideal a lo largo de un proceso isotermo permanece constante. Por tanto: $\Delta U_{AB} = 0$. Además:

$$W_{AB} = n \cdot R \cdot T_A \cdot \ln \underbrace{\frac{V_B}{V_A}}_{=3} = 0{,}4 \cdot 8{,}314 \cdot 673 \cdot \ln 3 = 2\,459 \text{ J}$$

Utilizando la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} = 0 \rightarrow Q_{AB} = W_{AB} = 2\,459 \text{ J}$$

BC: Como se trata de un proceso adiabático: $Q_{BC} = 0$. Al tratarse de un gas ideal, podemos utilizar la ley de Joule:

$$\Delta U_{BC} = n \cdot c_V \cdot (T_C - T_B) = 0{,}4 \cdot 20{,}8 \cdot (348 - 673) = -2\,704 \text{ J}$$

$$W_{BC} = -\Delta U_{BC} = 2\,704 \text{ J}$$

CD: De nuevo tenemos un proceso isotermo, por lo que: $\Delta U_{CD} = 0$.

$$W_{CD} = n \cdot R \cdot T_C \cdot \ln \underbrace{\frac{V_D}{V_C}}_{=\frac{1}{3}} = 0{,}4 \cdot 8{,}314 \cdot 348 \cdot \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -1\,271 \text{ J}$$

Y también: $Q_{CD} = W_{CD} = -1\,271$ J.

DA: Al tratarse nuevamente de un proceso adiabático: $Q_{DA} = 0$. Y:

$$\Delta U_{DA} = n \cdot c_V \cdot (T_A - T_D) = 0{,}4 \cdot 20{,}8 \cdot (673 - 348) = -2\,704 \text{ J}$$

$$W_{DA} = -\Delta U_{DA} = -2\,704 \text{ J}$$

Resumiendo todos los resultados en una tabla:

Proceso	Q	W	ΔU
AB	2459 J	2459 J	0
BC	0	2704 J	–2704 J
CD	–1271 J	–1271 J	0
DA	0	–2704 J	2704 J
Total	1188 J	1188 J	0

c) Vemos que el trabajo total es positivo, por lo que esta máquina está funcionando como un motor térmico. Su rendimiento entonces viene dado por:

$$\eta = \frac{W}{Q_c}$$

donde Q_c es el calor absorbido desde el foco caliente. Este corresponde en nuestro caso a Q_{AB} = 2459 J. Por tanto:

$$\eta = \frac{W}{Q_c} = \frac{1\,187}{2\,459} = 0{,}483 = 48{,}3\ \%$$

El rendimiento máximo teórico de un motor térmico viene dado por:

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

donde T_f y T_c corresponden a las temperaturas de los focos frío y caliente, respectivamente. Por tanto:

$$\eta = 1 - \frac{348}{673} = 0{,}483$$

Como vemos, el rendimiento de este motor es el máximo teórico, como debe ser, puesto que el motor de Carnot es una máquina ideal que siempre tiene el rendimiento máximo posible (y este depende únicamente de las temperaturas de los focos).

21 Calcula el rendimiento de un refrigerador que funcionara siguiendo el ciclo inverso al descrito en el ejercicio anterior.

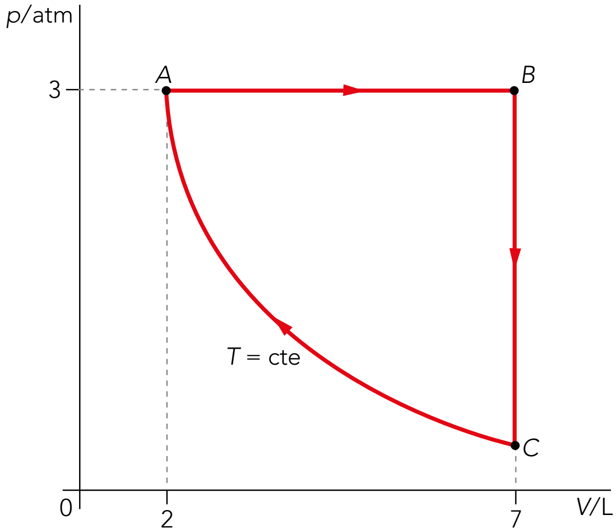
La máquina de Carnot sigue un proceso reversible, por lo que puede invertirse su funcionamiento y actuará como un refrigerador. No obstante, no es necesario llevar a cabo todos los cálculos de nuevo, puesto que sabemos que su rendimiento vuelve a ser el máximo posible, y viene dado por:

$$\eta_{\text{máx}} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

Los focos frío y caliente son los mismos que en el ejercicio 20, por lo que: T_c = 673 K, y T_f = 348 K. Entonces:

$$\eta_{\text{máx}} = \frac{T_f}{T_c - T_f} = \frac{348}{673 - 348} = 1{,}07$$

22 **Un gas ideal realiza el ciclo mostrado en la figura siguiente:**



a) **Calcula el trabajo realizado y el calor absorbido por 0,5 mol del gas en cada tramo y en el ciclo completo.**

b) **Calcula el rendimiento de esta máquina y compáralo con el máximo teórico.**

Datos: c_p = 29,1 J/(mol · K); c_V = 20,8 J/(mol · K).

a) En primer lugar, vamos a determinar los valores del volumen, la presión y la temperatura en los tres estados que determinan el ciclo.

A:

$$p_A = 3\ \text{atm} \cdot \frac{101\,300\ \text{Pa}}{1\ \text{atm}} = 303\,900\ \text{Pa}$$

$$V_A = 2\ \text{L}$$

$$T_A = \frac{p_A \cdot V_A}{n \cdot R} = \frac{32}{0{,}5 \cdot 0{,}082} = 146{,}3\ \text{K}$$

B:

$$p_B = p_A = 3\ \text{atm} = 303\,900\ \text{Pa}$$

$$V_B = 7\ \text{L}$$

$$T_B = T_A \cdot \frac{V_B}{V_A} = 146{,}3 \cdot \frac{7}{2} = 512{,}1\ \text{K}$$

C: como el proceso ***CA*** es isotermo, ya sabemos que:

$$T_C = T_A = 146{,}3\ \text{K}$$

$$V_C = V_B = 7\ \text{L}$$

$$p_C \cdot V_C = p_A \cdot V_A \ \rightarrow\ p_C = p_A \cdot \frac{V_A}{V_C} = p_A \cdot \frac{2}{7} = 0{,}857\ \text{atm} = 86\,814\ \text{Pa}$$

Calculamos ahora el trabajo y el calor en cada uno de los tramos del ciclo:

AB: este proceso tiene lugar a presión constante, por lo que:

$$W_{AB} = p_A \cdot (V_B - V_A) = 303\,900 \cdot (7-2) \cdot 10^{-3} = 1\,519{,}5\ \text{J}$$

$$Q_{AB} = n \cdot c_p \cdot (T_B - T_A) = 0{,}5 \cdot 29{,}1 \cdot (512{,}1 - 146{,}3) = 5\,322{,}4\ \text{J}$$

BC: este proceso tiene lugar a volumen constante, por lo que:

$$W_{BC} = 0$$

$$Q_{BC} = n \cdot c_V \cdot (T_C - T_B) = 0{,}5 \cdot 20{,}8 \cdot (146{,}3 - 512{,}1) = -3\,804{,}3\ \text{J}$$

CA: este proceso es isotermo, por lo que: $\Delta U_{CA} = 0$ J, y:

$$Q_{CA} = W_{CA} = n \cdot R \cdot T_C \cdot \ln \frac{V_A}{V_C} = 0{,}5 \cdot 8{,}314 \cdot 146{,}3 \cdot \ln \frac{2}{7} = -761{,}9 \text{ J}$$

Así pues, el **trabajo total** es:

$$W = 1\,519{,}5 + 0 - 761{,}9 = 757{,}6 \text{ J}$$

$$Q = 5\,322{,}4 - 3\,804{,}3 - 761{,}9 = 756{,}2 \text{ J}$$

Si hubiéramos empleado directamente la primera ley de la termodinámica habríamos obtenido: $Q = W = 757{,}6$ J. Esta pequeña diferencia se debe a errores de redondeo.

b) Como $W > 0$, el gas ejerce trabajo sobre el entorno. Esto quiere decir que el sistema está actuando como un motor, por lo que:

$$\eta = \frac{W}{Q_c}$$

donde $Q_c > 0$ es el calor absorbido por el sistema desde el foco caliente. En este caso:

$$Q_c = Q_{AB} = 5\,322{,}4 \text{ J}$$

Por tanto:

$$\eta = \frac{W}{Q_c} = \frac{757{,}6}{5\,322{,}4} = 0{,}142 = 14{,}2\ \%$$

El rendimiento máximo teórico viene dado por:

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

donde T_f y T_c corresponden a las temperaturas de los focos frío y caliente, respectivamente. Más concretamente, T_f es la temperatura del estado B y T_c la del estado *C*. Por tanto:

$$\eta = 1 - \frac{146{,}3}{512{,}1} = 0{,}714 = 71{,}4\ \%$$

Vemos que el rendimiento real de la máquina queda muy por debajo del máximo teórico.

23 Un motor de Carnot tiene un foco caliente a 650 K. En cada ciclo, absorbe 600 J y cede 375 J al foco frío. Calcula el trabajo mecánico que realiza la máquina en cada ciclo, su rendimiento y la temperatura del foco frío.

El trabajo mecánico realizado por el motor puede calcularse a partir de la primera ley de la termodinámica, teniendo en cuenta que la variación de energía interna en un ciclo completo es nula:

$$\Delta U = Q - W = 0 \ \rightarrow\ W = Q = Q_c - Q_f = 600 - 375 = 225 \text{ J}$$

El rendimiento de un motor viene dado por:

$$\eta = \frac{W}{Q_c}$$

donde W es el trabajo realizado y Q_c es el calor absorbido desde el foco caliente. En este caso:

$$\eta = \frac{225}{600} = 0{,}375 = 37{,}5\ \%$$

Como se trata de un motor de Carnot, sabemos que su rendimiento es el máximo posible, y que viene dado por:

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

De donde podemos despejar la temperatura del foco frío:

$$\frac{T_f}{T_c} = 1 - \eta \ \rightarrow\ T_f = T_c \cdot (1 - \eta) = 650 \cdot (1 - 0{,}375) = 406{,}3 \text{ K} = 133{,}3 \text{ °C}$$

24 **Un motor diésel, en cada ciclo, realiza un trabajo de 2500 J y cede a la atmósfera 4800 J en forma de calor. Calcula el calor que debe suministrársele en cada ciclo y su rendimiento. Si la temperatura ambiente es de 25 °C y el rendimiento de la máquina es la mitad que el máximo teórico, calcula la temperatura del foco caliente.**

El calor absorbido por el motor puede calcularse a partir de la primera ley de la termodinámica, teniendo en cuenta que la variación de energía interna en un ciclo completo es nula:

$$\Delta U = Q - W = 0 \rightarrow Q = W$$

Ahora tenemos en cuenta que $W = 2500$ J y $Q_f = -4800$ J:

$$Q = Q_c - Q_f = W \rightarrow Q_c = W + Q_f = 2500 + 4800 = 7300 \text{ J}$$

El rendimiento viene dado por:

$$\eta = \frac{W}{Q_c} = \frac{2\,500}{7\,300} = 0{,}343 = 34{,}3\ \%$$

Por otro lado, se dice que el rendimiento es la mitad que el máximo teórico, luego:

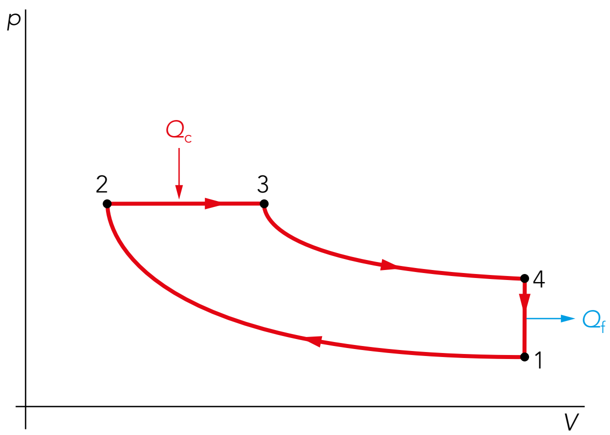
$$\eta_{máx} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 0{,}686$$

$$\frac{T_f}{T_c} = 1 - 0{,}686 = 0{,}314$$

$$T_c = \frac{T_f}{0{,}314} = \frac{25 + 273}{0{,}314} = 949{,}1\ \text{K} = 676{,}1\ °\text{C}$$

25 **Un gas ideal realiza el ciclo diésel mostrado en la figura. Para 2,5 mol de sustancia, este viene determinado por los siguientes datos: T_1 = 500 K, V_1 = 10 L, V_2 = 5 L, p_2 = 27,05 atm, V_3 = 6 L y p_4 = 13,2 atm. Calcula el trabajo realizado y el calor absorbido en cada uno de los tramos y en el ciclo completo. Halla su rendimiento y compáralo con el máximo teórico.**

Datos: c_p = 29,1 J/(mol · K); c_V = 20,8 J/(mol · K).



En primer lugar, vamos a calcular los valores de las variables termodinámicas en los estados 1, 2, 3, y 4.

Estado 1:

$$V_1 = 10 \text{ L} \quad ; \quad T_1 = 500 \text{ K}$$

Para calcular la presión utilizamos la ecuación de estado de los gases ideales:

$$p_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_1 \rightarrow p_1 = \frac{n \cdot R \cdot T_1}{V_1} = \frac{2{,}5 \cdot 0{,}082 \cdot 500}{10} = 10{,}25 \text{ atm}$$

Estado 2:

$$V_2 = 5 \text{ L} \quad ; \quad p_2 = 27{,}05 \text{ atm}$$

Calculemos la temperatura:

$$p_2 \cdot V_2 = n \cdot R \cdot T_2 \quad \rightarrow \quad T_2 = \frac{p_2 \cdot V_2}{n \cdot R} = \frac{27{,}05 \cdot 5}{2{,}5 \cdot 0{,}082} = 659{,}8 \text{ K}$$

Estado 3:

En este caso disponemos de información tanto de la presión como del volumen, ya que el proceso 23 se realiza a presión constante:

$$p_3 = 27{,}05 \text{ atm} \quad ; \quad V_3 = 6 \text{ L}$$

La temperatura será entonces:

$$T_3 = \frac{p_3 \cdot V_3}{n \cdot R} = \frac{27{,}05 \cdot 6}{2{,}5 \cdot 0{,}082} = 791{,}7 \text{ K}$$

Estado 4:

Como el proceso 41 es a volumen constante, tenemos:

$$V_4 = V_1 = 10 \text{ L} \quad ; \quad p_4 = 13{,}2 \text{ atm}$$

$$T_4 = \frac{p_4 \cdot V_4}{n \cdot R} = \frac{13{,}2 \cdot 10}{2{,}5 \cdot 0{,}082} = 643{,}9 \text{ K}$$

Calculemos ahora los valores de W y Q en cada uno de los procesos:

Proceso 12:

Se trata de una compresión adiabática, por lo que $Q_{12} = 0$ J. Entonces:

$$\Delta U_{12} = -W_{12}$$

Por tanto, usando la ley de Joule (puesto que se trata de un gas ideal):

$$\Delta U_{12} = n \cdot c_V \cdot \Delta T = 2{,}5 \cdot 20{,}8 \cdot (659{,}8 - 500) = 8\,309{,}6 \text{ J}$$

y:

$$W_{12} = -8\,309{,}6 \text{ J}$$

Proceso 23:

Como en este caso se produce una expansión isobárica:

$$W_{23} = p \cdot \Delta V = 27{,}05 \cdot 101\,300 \cdot (6 - 5) \cdot 10^{-3} = 2\,740{,}2 \text{ J}$$

y el calor viene dado por:

$$Q_{23} = n \cdot c_p \cdot \Delta T = 2{,}5 \cdot 29{,}1 \cdot (791{,}7 - 659{,}8) = 9\,595{,}7 \text{ J}$$

Proceso 34:

De nuevo se trata de un proceso adiabático, por lo que $Q_{34} = 0$ J, y:

$$\Delta U_{34} = -W_{34}$$

donde:

$$\Delta U_{34} = n \cdot c_V \cdot \Delta T = 2{,}5 \cdot 20{,}8 \cdot (643{,}9 - 791{,}7) = -7\,685{,}6 \text{ J}$$

y:

$$W_{34} = 7\,685{,}6 \text{ J}$$

Proceso 41:

En este caso tenemos un proceso a volumen constante, por lo que $W_{41} = 0$ J. Entonces:

$$\Delta U_{41} = Q_{41}$$

donde:

$$\Delta U_{41} = Q_{41} = n \cdot c_V \cdot \Delta T = 2{,}5 \cdot 20{,}8 \cdot (500 - 643{,}9) = -7\,482{,}8 \text{ J}$$

Vamos a resumir todos los resultados en una tabla:

Proceso	Q	W
12	0	–8 309,6 J
23	9 595,7 J	2 704,2 J
34	0	7 685,6 J
41	–7 482,8 J	0
Total	2 112,9 J	2 116,2 J

Observa que, en todo el proceso, sale $Q - W \approx 0$, debiéndose esa pequeña diferencia a errores de redondeo.

Ahora vamos a calcular el rendimiento. Al funcionar como un motor (es decir, una máquina térmica):

$$\eta = \frac{W}{Q_c}$$

Q_c es el calor que absorbe desde el foco caliente, que en este caso corresponde al calor absorbido en el proceso 23, por lo que:

$$\eta = \frac{W}{Q_c} = \frac{2\,116{,}2}{9\,595{,}7} = 0{,}221 = 22{,}1\ \%$$

El rendimiento máximo posible viene dado por:

$$\eta_{\text{máx}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

T_f es la temperatura del foco frío, que corresponde a T_1 (se cede el calor Q_f en el proceso 41), y T_c es la del foco caliente, que corresponde a T_3 (se absorbe el calor Q_c en el proceso 23). Por tanto:

$$\eta_{\text{máx}} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{500}{791{,}7} = 0{,}369 = 36{,}9\ \%$$

26 **Un amigo te dice que ha inventado un nuevo tipo de motor de gasolina enfriado por aire, construido exclusivamente de aluminio, por lo que es muy ligero, y además alcanza un rendimiento del 83 %. Justifica si es posible que tu amigo haya encontrado lo que dice.**

Dato: temperatura de fusión del aluminio: 660 °C

La temperatura máxima a la que puede operar el motor de gasolina es la de fusión del aluminio; esto es: $T_c = 660$ °C $= 933$ K. Además, al estar enfriado por aire, $T_f \approx 25$ °C $= 298$ K. Por tanto, el rendimiento máximo que puede alcanzar es:

$$\eta_{\text{máx}} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{298}{933} = 0{,}681 = 68{,}1\ \%$$

Por tanto, es imposible que haya encontrado un motor con estas características.

Segunda ley de la termodinámica. Entropía

27 **Se mezclan 10 kg de agua a 80 °C y 20 kg de agua a 20 °C. Calcula la variación de entropía del sistema. Justifica si se trata de un proceso reversible o irreversible.**

Dato: c_{agua} **= 4 186 J/kg.**

La mezcla de agua a diferente temperatura es un proceso irreversible. Sin embargo, podemos pensar en un proceso reversible que lleve cada uno de los subsistemas desde el estado inicial hasta el final. En ambos casos, la variación de entropía es la misma, ya que esta es una función de estado. Así, podemos calcular la variación de entropía de cada uno de ellos mediante la expresión:

$$\Delta S = m \cdot c \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Para ello, vamos a determinar, en primer lugar, la temperatura final de equilibrio. Procedemos como en el apartado 3 de la unidad: el calor cedido por el agua caliente es absorbido por el agua fría. Entonces:

$$Q_f = m_f \cdot c_{agua} \cdot (T_F - T_{0,f})$$

$$Q_c = m_c \cdot c_{agua} \cdot (T_F - T_{0,c})$$

donde el subíndice c hace referencia al agua caliente y el subíndice f al agua fría.

Como:

$$Q_f + Q_c = 0$$

ya tenemos:

$$m_f \cdot c_{agua} \cdot (T_F - T_{0,f}) + m_c \cdot c \cdot (T_F - T_{0,c}) = 0$$

$$m_f \cdot (T_F - T_{0,f}) = m_c \cdot (T_{0,c} - T_F)$$

$$20 \cdot (T_F - 20) = 10 \cdot (80 - T_F)$$

$$20 \cdot T_F - 400 = 800 - 10 \cdot T_F$$

$$30 \cdot T_F = 1\,200 \rightarrow T_F = 40 \text{ °C}$$

Calculemos ahora la variación de entropía del agua fría y del agua caliente:

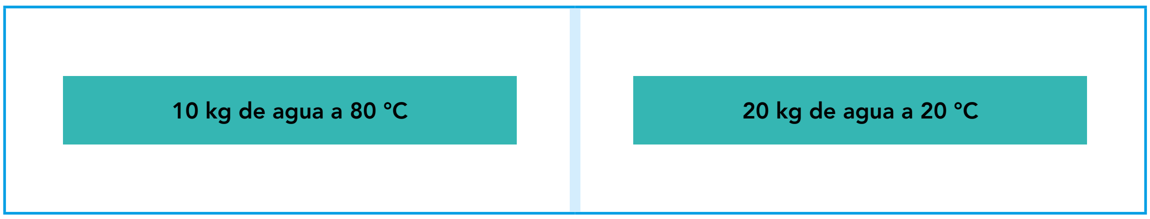
$$\Delta S_c = m_c \cdot c_{agua} \cdot \ln \frac{T_F}{T_{0,c}} = 10 \cdot 4\,186 \cdot \ln \frac{40 + 273}{80 + 273} \approx -5\,034 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_f = m_f \cdot c_{agua} \cdot \ln \frac{T_F}{T_{0,f}} = 20 \cdot 4\,186 \cdot \ln \frac{40 + 273}{20 + 273} = 5\,528 \text{ J/K}$$

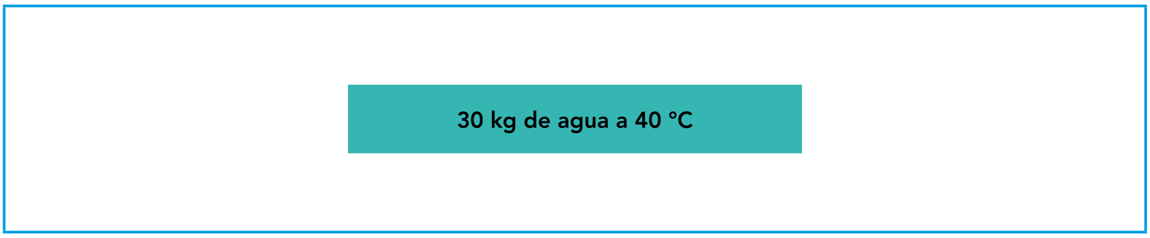
Luego la variación total será:

$$\Delta S = 5\,528 - 5\,034 = 494 \text{ J/K}$$

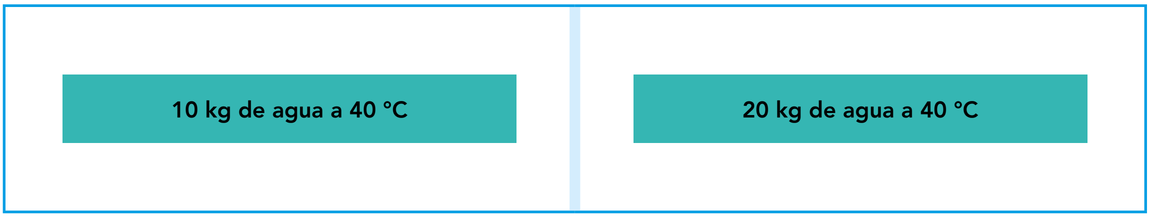
Se trata de un proceso irreversible porque no hay forma de pasar desde el estado final (30 kg de agua a 40 °C) al inicial (10 kg a 80 °C y 20 kg a 20 °C) sin más que invertir las condiciones y sin producir ningún otro efecto. Por ejemplo, podemos suponer dos recipientes separados por una pared aislante en los que se encuentran los 10 kg de agua a 80 °C y los 20 kg a 20 °C:



Podríamos retirar la pared, y al cabo de un tiempo tendríamos la siguiente situación:



Vemos claramente que, simplemente colocando la pared, no tendríamos el estado inicial, sino este otro:



Así que es irreversible.

28 **En un recipiente que contiene 700 mL de agua a 25 °C se vierten 450 mL a 70 °C. Si consideramos que la densidad del agua, a cualquier temperatura, es de 1 g/cm³, calcula la variación de entropía del sistema. Justifica si se trata de un proceso reversible o irreversible.**

Dato: c_{agua} = 4 186 J/kg.

La mezcla de agua a diferente temperatura es un proceso irreversible. Sin embargo, podemos pensar en un proceso reversible que lleve cada subsistema desde el estado inicial hasta el final. En ambos casos, la variación de entropía es la misma, ya que esta es una función de estado. Por tanto, podemos calcular la variación de entropía de cada uno de ellos mediante la expresión:

$$\Delta S = m \cdot c \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Para ello, vamos a determinar, en primer lugar, la temperatura final de equilibrio:

$$Q_f = m_f \cdot c_{agua} \cdot (T_F - T_{0,f})$$

$$Q_c = m_c \cdot c_{agua} \cdot (T_F - T_{0,c})$$

donde el subíndice c hace referencia al agua caliente y el subíndice f al agua fría.

Como:

$$Q_f + Q_c = 0$$

ya tenemos:

$$m_f \cdot c_{agua} \cdot (T_F - T_{0,f}) + m_c \cdot c_{agua} \cdot (T_F - T_{0,c}) = 0$$

$$m_f \cdot (T_F - T_{0,f}) = m_c \cdot (T_{0,c} - T_F)$$

donde m_f = 700 g y m_c = 450 g. Entonces:

$$700 \cdot (T_F - 25) = 450 \cdot (70 - T_F)$$

$$700 \cdot T_F - 17\,500 = 31\,500 - 450 \cdot T_F$$

$$1\,150 \cdot T_F = 49\,000 \rightarrow T_F = 42{,}6 \text{ °C}$$

Calculemos ahora la variación de entropía del agua fría y del agua caliente:

$$\Delta S_c = m_c \cdot c_{agua} \cdot \ln \frac{T_F}{T_{0,c}} = 0{,}450 \cdot 4\,186 \cdot \ln \frac{42{,}6 + 273}{70 + 273} = -156{,}8 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_f = m_f \cdot c_{agua} \cdot \ln \frac{T_F}{T_{0,f}} = 0{,}700 \cdot 4\,186 \cdot \ln \frac{42{,}6 + 273}{25 + 273} = 168{,}1 \text{ J/K}$$

Luego la variación total será:

$$\Delta S = 168{,}1 - 156{,}8 = 11{,}3 \text{ J/K}$$

Se trata de un proceso irreversible, porque no hay forma de pasar desde el estado final (1 150 mL de agua a 42,6 °C) al inicial (750 mL a 25 °C y 450 mL a 70 °C) sin más que invertir las condiciones, y sin producir ningún otro efecto. Considera, por ejemplo, que se separaran mediante una pared, como se explicó en el ejercicio anterior. No tendríamos la situación inicial, sino simplemente 750 mL de agua a 42,6 °C y 450 mL a 42,6 °C.

Página 143

29 Un recipiente con vapor de agua a 100 °C se introduce en una olla que tiene 1 kg de hielo triturado a 0 °C. La cantidad de vapor es la necesaria para que se funda todo el hielo. Calcula la masa inicial de vapor de agua a 100 °C y la variación de entropía del sistema.

Datos: c_{agua} = 4186 J/(kg · K); L_f = 3,34 · 10^5 J/kg; L_v = 2,256 · 10^6 J/kg.

Desconocemos la masa, *m*, de vapor de agua a 100 °C. Lo que sí sabemos es que es justo la necesaria para convertir 1 kg de hielo a 0 °C en 1 kg de agua a 0 °C. Como el calor de fusión del agua es L_f = 3,34 · 105 J/kg, necesitaremos 334 000 J para llevar a cabo este proceso.

Por otra parte, el vapor de agua experimenta dos procesos:

1) Condensa dando lugar a una masa *m* de agua a 100 °C. El calor liberado en este proceso es, en valor absoluto:

$$|Q_1| = m \cdot L_v = 2{,}256 \cdot 10^6 \text{ m}$$

2) En el enunciado se dice que la masa de vapor es la necesaria para que se funda todo el hielo. Por tanto, la temperatura final ha de ser de 0 °C (si fuera mayor, se habría fundido todo el hielo y el agua líquida resultante habría aumentado algo su temperatura). Por tanto, se enfría desde una temperatura de 100 °C hasta los 0 °C, de manera que se alcanza el equilibrio. El calor liberado es, en valor absoluto:

$$|Q_2| = m \cdot c_{agua} \cdot |\Delta T| = m \cdot 4\,186 \cdot 100 = 418\,600 \cdot m$$

La suma de Q_1 y Q_2 ha de ser igual a los 334 000 J calculados anteriormente, puesto que se dice que la cantidad de vapor era la necesaria para que justamente fundiera todo el hielo. Por tanto:

$$Q_1 + Q_2 = 2{,}256 \cdot 10^6 \cdot \text{m} + 418\,600 \cdot \text{m} = 334\,000$$

$$\text{m} = 0{,}125 \text{ kg} = 125 \text{ g}$$

Así pues, hay 125 g de vapor de agua a 100 °C. Con esta información, ya podemos calcular la variación de entropía del sistema. Como siempre, consideramos que tenemos un proceso reversible, ya que la entropía es una función de estado, y su variación depende únicamente de los estados inicial y final, y no del proceso seguido. Entonces:

Variación de entropía del hielo: como se trata de un proceso reversible isotermo a 0 °C:

$$\Delta S_1 = \frac{Q}{T} = \frac{334\,000}{0 + 273} = 1\,223{,}4 \text{ J/K}$$

Hemos tomado $Q > 0$ porque el hielo absorbe calor.

Variación de entropía del vapor de agua: aquí tenemos que considerar los dos procesos:

1) La condensación del vapor de agua es también un proceso isotermo reversible que tiene lugar a 100 °C, luego:

$$\Delta S_2 = \frac{Q_2}{T}$$

donde Q_2 es el calor necesario para que condensen los 0,125 kg de vapor:

$$Q_2 = -m \cdot L_v = -2{,}256 \cdot 10^6 \cdot m = -2{,}256 \cdot 10^6 \cdot 0{,}125 = -282\,000 \text{ J}$$

Observa que en este caso hemos tomado $Q_2 < 0$ porque el vapor de agua cede calor.

Por tanto:

$$\Delta S_2 = \frac{Q_2}{T} = -\frac{282\,000}{100 + 273} = -756{,}0 \text{ J/K}$$

2) El agua ahora se enfría desde los 100 °C hasta 0 °C. La variación de entropía viene dada por:

$$\Delta S_3 = m \cdot c_{agua} \cdot \ln \frac{T_F}{T_0} = 0{,}125 \cdot 4\,186 \cdot \ln \frac{273}{373} = -163{,}3 \text{ J/K}$$

La variación de entropía del sistema total será:

$$\Delta S = 1\,223{,}4 - 756{,}0 - 163{,}3 = 304{,}1 \text{ J/K}$$

Como vemos, este valor es positivo, como corresponde a un sistema aislado.

30 **Tres moles de un gas ideal experimentan una compresión isotérmica reversible a 20 °C. Para ello, se realiza un trabajo sobre el gas de 2 000 J. Calcula su variación de entropía.**

Al tratarse de un proceso reversible isotermo, la variación de la entropía viene dada por:

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

No se nos proporciona el valor de Q; sin embargo, lo podemos obtener a partir de la primera ley:

$$\Delta U = Q - W$$

Recordemos que la variación de la energía interna de un gas ideal en un proceso isotermo es nula; luego:

$$Q = W = -2\,000 \text{ J}$$

donde hemos tenido en cuenta que el trabajo realizado por el gas es negativo. Por tanto ya tenemos:

$$\Delta S = -\frac{2\,000}{20 + 273} = -6{,}83 \text{ J/K}$$

31 **Calcula la variación de entropía cuando hierven 250 g de alcohol si su temperatura de ebullición es de 78 °C. Interpreta el signo de esta variación.**

Dato: L_v (etanol) = 8,54 · 10^5 J/kg.

La variación de la entropía puede calcularse imaginando un proceso reversible, que en este caso es isotermo. Entonces:

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

El calor absorbido por el alcohol vendrá dado por:

$$Q = m \cdot L_v = 0{,}25 \cdot 8{,}54 \cdot 10^5 = 213\,500 \text{ J}$$

Observa que el signo es positivo, ya que se absorbe calor. Por tanto:

$$\Delta S = \frac{213\,500}{78 + 273} = 608{,}3 \text{ J/K}$$

Esta variación sale positiva porque aumenta el desorden del sistema. En efecto, al pasar de estado líquido a gaseoso, las moléculas de etanol pueden moverse más libremente, por lo que aumenta el número de microestados compatibles con el estado macroscópico, y por tanto su entropía.

32 Nos preparamos un té, calentando 200 g de agua a 80 °C. Después, dejamos que se enfríe a temperatura ambiente, 25 °C, para poder beberlo.

a) Calcula la variación de entropía del té al enfriarse.

b) Considerando que el aire de la cocina no cambia de temperatura mientras el té se enfría, calcula su variación de entropía.

c) Calcula la variación de entropía del sistema formado por el té y el aire. A partir del valor obtenido, justifica si el proceso es reversible o irreversible (considera que se trata de un sistema cerrado).

Dato: c_{agua} = 4 186 J/(kg · K).

a) Cuando el té se enfría, cede calor al entorno. Por tanto, si imaginamos que este proceso tiene lugar reversiblemente, la variación de entropía vendrá dada por:

$$\Delta S_1 = m \cdot c_{agua} \cdot \ln \frac{T_F}{T_0} = 0{,}2 \cdot 4\,186 \cdot \ln \frac{25 + 273}{80 + 273} = -141{,}8 \text{ J/K}$$

Como vemos, la variación de entropía es negativa porque el agua se está enfriando.

b) Como el aire de la cocina no cambia su temperatura apreciablemente, podemos suponer que sufre un proceso reversible isotermo, por lo que:

$$\Delta S_2 = \frac{Q}{T}$$

donde Q es el calor absorbido por el aire. Este ha de ser igual al calor cedido por el té, cambiado de signo:

$$Q_{\text{cedido por el té}} = m \cdot c_{agua} \cdot \Delta T = 0{,}2 \cdot 4186 \cdot (25 - 80) = -46\,046 \text{ J}$$

Luego:

$$Q = 46\,046 \text{ J}$$

y por tanto:

$$\Delta S_2 = \frac{46\,046}{25 + 273} = 154{,}5 \text{ J}$$

La variación de la entropía del aire es positiva porque el aire absorbe calor.

c) La variación de entropía total viene dada por:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -141{,}8 + 154{,}5 = 12{,}7 \text{ J/K}$$

Como vemos, es positiva.

Hay que tener en cuenta que para calcular las variaciones de entropía de cada uno de los subsistemas, hemos considerado que los procesos tienen lugar reversiblemente. A partir de los valores obtenidos, podemos determinar la variación para el sistema total té + aire de la cocina. Sin embargo, el proceso seguido por el sistema completo es irreversible. Esto se ve en el valor de la entropía, estrictamente mayor que cero.

En efecto, si se tratara de un proceso reversible, considerando que la cocina está completamente aislada del exterior, sería también adiabático, ya que no saldría ni entraría calor en el sistema aire + té. Por lo tanto, Q sería cero y la variación de entropía nula. Tenemos entonces:

Proceso reversible para el sistema té + aire	$\Delta S = 0$
Proceso irreversible para el sistema té + aire	ΔS = 12,7 J/K > 0

Por lo que concluimos que **el proceso es irreversible.**

33 **Uno de los grandes retos de los científicos, a lo largo de la historia y en la actualidad, ha sido fabricar un móvil perpetuo (del latín, *perpetuum mobile*) de primera o segunda especie. En esta unidad, nos hemos referido a ellos al hablar de la segunda ley de la termodinámica, pero ¿sabes qué son exactamente? Grandes pensadores como Boyle, Tesla o Leonardo da Vinci intentaron fabricarlos; ¿lo consiguieron? Haz una breve investigación sobre todo lo anterior y extrae tus propias conclusiones. A partir de ellas, ¿serías capaz de diseñar un móvil perpetuo? Comparte lo aprendido con el resto de la clase.**

Respuesta abierta.

34 ODS **Buscad información sobre qué tipo de motor tienen, y cómo se recargan las baterías de los coches híbridos. Pensad si suponen un ahorro en las emisiones de CO_2, y proponed diversas líneas de actuación a fin de alcanzar la meta 11.6.**

Su alumnado puede consultar en **anayaeducacion.es** el vídeo sobre la meta 11.6 de los ODS.

Respuesta abierta.

5 LA ENERGÍA EN LAS REACCIONES QUÍMICAS

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

1 TERMOQUÍMICA

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.4.3. (EA.4.3.1.)

Página 146

1 Razona si en una reacción endotérmica se produce un incremento o una disminución de la variación de energía interna. Busca algún ejemplo de reacciones endotérmicas.

En una reacción endotérmica, se produce un incremento de la variación de energía interna, puesto que absorbe calor ($\Delta U = Q$). Ejemplo: reacción química de las bolsas de frío instantáneo.

2 A partir de la siguiente tabla de valores:

Sustancia	$Q_{formación}$/(kJ/mol)
CF_4 (g)	–933,6
CCl_4 (g)	–128,2
CBr_4 (g)	29,4
CI_4 (g)	–392,9

Justifica si la formación de dichas sustancias es endotérmica o exotérmica. Explica por qué varían como lo hacen estos valores.

Las reacciones son, respectivamente: exotérmica (CF_4), exotérmica (CCl_4), endotérmica (CBr_4) y exotérmica (CI_4). Esto se debe a que la energía del producto de la tabla tiene más energía, si es endotérmica, o menos, si es exotérmica, que la suma de la energía de los reactivos; en este caso, sustancias simples de las que proviene.

3 En la columna derecha se muestran las imágenes de dos reacciones químicas; una de ellas sigue un proceso isocórico, y la otra, un proceso isobárico. Identifica cuál sigue cada una y razónalo.

a) Proceso isobárico, porque al estar abierto el recipiente, la presión a la que se mantiene la misma es constante e igual a la presión atmosférica, mientras que el volumen sí varía.

b) Proceso isocórico, porque al ser un recipiente cerrado su volumen no variará, aunque su presión sí puede variar.

a)


b)


Página 147

4 Razona si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

a) Si el proceso es isocórico, en una reacción exotérmica, se produce un aumento de la energía interna.

b) Si el proceso es isobárico, en una reacción endotérmica, se produce un aumento de la entalpía de reacción.

c) Si el proceso es isobárico, en una reacción exotérmica, se produce una disminución de la energía interna.

a) Falso. Si la reacción es exotérmica en un proceso isocórico, se produce una disminución de energía interna porque $\Delta U = Q_V < 0$.

b) Verdadero. Si la reacción es endotérmica en un proceso isobárico, se produce un aumento de la entalpía porque $\Delta H = Q_p > 0$.

c) Falso. Si el proceso es isobárico, se producen variaciones de entalpía, no de energía interna.

5 Al quemar 25 g de etanol (C_2H_5OH) líquido a presión atmosférica y 25 °C se desprenden 741,6 kJ de energía. Calcula:

a) El calor que se hubiera desprendido en un recipiente cerrado.

b) La variación de entalpía que ha tenido lugar en kJ/mol.

La reacción química que se produce es: $C_2H_5OH\ (l) + 3\ O_2\ (g) \rightarrow 2\ CO_2\ (g) + 3\ H_2O\ (l)$ y, como es inicialmente un proceso isobárico, la energía desprendida que se da como dato se corresponde con una variación de entalpía.

a) Si el recipiente hubiera estado cerrado, el proceso sería isocórico y no isobárico por lo que:

$$Q_p = Q_V + \Delta n \cdot R \cdot T \rightarrow Q_V = Q_p - \Delta n \cdot R \cdot T$$

$$Q_V = -741{,}6\ \text{kJ} - (2-3)\ \text{mol} \cdot 8{,}31 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{kJ}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 298\ \text{K} = -739{,}1\ \text{kJ}$$

b) $M\ (C_2H_5OH) = 2 \cdot 12{,}01 + 6 \cdot 1{,}01 + 1 \cdot 16{,}00 = 46{,}08$ g/mol

$$\Delta H = \frac{-741{,}6\ \text{kJ}}{25\ \text{g}} \cdot 46{,}08\ \text{g/mol} = -1\,366{,}9\ \text{kJ/mol}$$

6 Razona si Q_p será mayor, igual o menor que Q_V en las siguientes reacciones:

a) $N_2\ (g) + 3\ H_2\ (g) \rightarrow 2\ NH_3\ (g)$

b) $H_2\ (g) + Cl_2\ (g) \rightarrow 2\ HCl\ (g)$

c) $C\ (s) + O_2\ (g) \rightarrow CO_2\ (g)$

Como $Q_p = Q_V + \Delta n \cdot R \cdot T$, que Q_p sea mayor, igual o menor, dependerá del valor de Δn.

a) $\Delta n = 2 - (1 + 3) = -2$, por lo que Q_p será menor.

b) $\Delta n = 2 - (1 + 1) = 0$, por lo que Q_p será igual a Q_V.

c) Solo se tienen en cuenta los moles de sustancias en estado gaseoso; $\Delta n = 1 - (0 + 1) = 0$, por lo que Q_p será igual a Q_V.

7 Algunas de las centrales térmicas españolas más importantes están situadas en Andalucía; por ejemplo, la Central Térmica Litoral en Almería, o la Central Térmica de Los Barrios en Cádiz. En este tipo de centrales lo importante no son los nuevos productos que se forman en las reacciones, sino la energía que se libera en ellas, pues se transforma hasta convertirla en energía eléctrica. Investiga sobre el funcionamiento de las centrales térmicas convencionales y busca en qué se diferencian de las de ciclo combinado.

Las dos centrales térmicas mencionadas, la de Almería y la de Cádiz, son centrales térmicas de carbón del tipo convencional, es decir, no son de ciclo combinado. En ellas, la reacción de combustión que se produce es la de combustión del C ($C\ (s) + O_2\ (g) \rightarrow CO_2\ (g)$). Cuentan con una turbina de vapor que aprovecha el calor generado para evaporar agua. Esta mueve una turbina y provoca la generación de energía eléctrica en el generador. Las centrales de ciclo combinado usan como combustible gas natural, cuya combustión es mucho menos contaminante. Por otro lado, las centrales de ciclo combinado son mucho más eficientes, porque, además de la turbina de vapor, tienen previamente una turbina de gas que aprovecha la temperatura de los gases de combustión para producir electricidad antes de evaporar el agua para la turbina de vapor. Las ventajas de las centrales de ciclo combinado frente a las convencionales son: mayor eficiencia, generan menos emisiones contaminantes, consumen menos combustible, tienen un consumo de agua para refrigeración menor y son más pequeñas, por lo que su impacto visual también es menor. Además permiten cargas parciales. Se puede modular su funcionamiento.

2 ENTALPÍA DE REACCIÓN

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.4.3. (EA.4.3.1.)

Página 148

8 **La descomposición de un mol de $KClO_3$ sólido genera KCl sólido y O_2 gaseoso. La entalpía de reacción es de –22,3 kJ por mol de $KClO_3$. Escribe la ecuación termoquímica e indica si la reacción es exotérmica o endotérmica.**

$KClO_3\ (s) \rightarrow KCl\ (s) + \frac{3}{2}\ O_2\ (g)$; $\Delta H = -22{,}3$ kJ. La reacción es exotérmica.

9 **Calcula el volumen de etanol (C_2H_6O) que será necesario quemar para producir 500 kJ de energía, sabiendo que la ecuación química de la reacción de combustión del etanol es:**

$$C_2H_6O\ (l) + 3\ O_2\ (g) \rightarrow 2\ CO_2\ (g) + 3\ H_2O\ (l)$$

Datos: d(etanol) = 0,789 g/cm^3 ; $\Delta H_r = -1\,366{,}8$ kJ /mol

$$M\ (C_2H_6O) = 12{,}0 \cdot 2 + 1{,}0 \cdot 6 + 16{,}0 = 46 \text{ g/mol}$$

$$-500 \text{ kJ} \cdot \frac{1 \text{ mol } C_2H_6O}{-1\,366{,}8 \text{ kJ}} \cdot \frac{46 \text{ g}}{1 \text{ mol } C_2H_6O} \cdot \frac{1 \text{ cm}^3}{0{,}789 \text{ g}} = 21{,}3 \text{ cm}^3$$

10 **La reacción de dimerización del NO_2 (*g*) es la siguiente:**

$$2\ NO_2\ (g) \rightarrow N_2O_4\ (g)\ ;\ \Delta H = -58{,}2 \text{ kJ}$$

Calcula la variación de energía existente si en vez de formar un mol de N_2O_4 (*g*) se formaran tres.

$$3 \cdot [2\ NO_2\ (g) \rightarrow N_2O_4\ (g);\ \Delta H = -58{,}2 \text{ kJ}];$$

$$6\ NO_2\ (g) \rightarrow 3\ N_2O_4\ (g);\ \Delta H = 3 \cdot (-58{,}2) = -174{,}6 \text{ kJ}$$

11 **La entalpía de reacción de la oxidación catalítica del dióxido de azufre es de –198,2 kJ:**

$$2\ SO_2\ (g) + O_2\ (g) \rightarrow 2\ SO_3\ (g)$$

¿Cuál sería la variación de energía de la reacción si la ajustáramos para obtener un mol de SO_3?

$$\frac{1}{2}\ [2\ SO_2\ (g) + O_2\ (g) \rightarrow 2\ SO_3\ (g)]\ ;\ \ SO_2\ (g) + \frac{1}{2}\ O_2\ (g) \rightarrow SO_3\ (g)$$

por lo que la nueva entalpía será:

$\Delta H' = \frac{1}{2} \cdot (-198{,}2) = -99{,}1$ kJ/mol.

12 **En el ejercicio anterior hablamos de una reacción de oxidación catalítica, es decir, que se utiliza un catalizador para que se pueda llevar a cabo. Busca información sobre estas sustancias y explica si crees que esta reacción podría tener lugar sin este agente.**

Este es un buen momento para recordar a su alumnado que en **anayaeducacion.es** dispone de consejos para hacer un uso seguro de las TIC.

La producción de SO_3 es importante porque es el precursor del ácido sulfúrico, H_2SO_4, que es una sustancia fundamental para gran cantidad de industrias químicas. La oxidación de SO_2 para dar SO_3 suele estar catalizada por platino o por pentaóxido de vanadio. Si no se usara el catalizador, la reacción sería muy lenta a cualquier temperatura. Esta reacción es altamente exotérmica, y el uso del catalizador, además, permite hacerlo a altas temperaturas sin tener que enfriar el sistema para que se produzca la reacción.

13 **En la naturaleza se dan reacciones químicas continuamente. ¿Sabrías poner algún ejemplo? A partir de ellos, di si se trata de reacciones exotérmicas o endotérmicas. ¿Crees que es importante este hecho? ¿Por qué? Imagina que alguna de estas reacciones tuviera lugar de forma contraria a como la tiene, es decir, que un proceso absorbiera calor en vez de desprenderlo. ¿Qué ocurriría? Comparte tu opinión con el resto de compañeros y compañeras.**

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de documentación sobre cómo escribir textos argumentativos y consejos para hablar mejor en público.

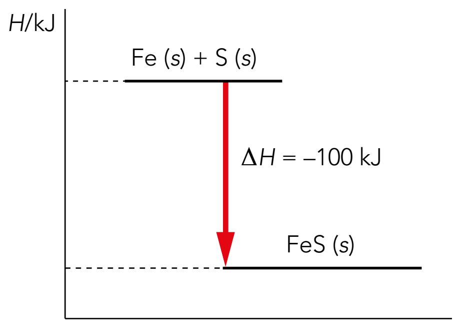
La respuesta es libre en función de la reacción que encuentren. Un ejemplo de reacción exotérmica puede ser la reacción de respiración celular:

$$C_6H_{12}O_6 + 6\ O_2 \rightarrow 6\ CO_2 + 6\ H_2O$$

Si se diera en sentido contrario y fuera endotérmica, no sería la base para obtener energía en los seres vivos.

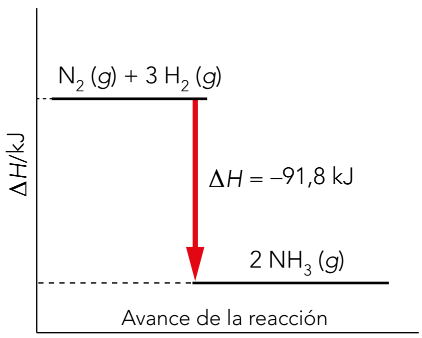
Página 149

14 **Haz el diagrama entálpico del proceso de formación de un mol de FeS (*s*) a partir de sus elementos en estado sólido sabiendo que en este proceso se liberan 100 kJ de energía. Explica si es un proceso endotérmico o exotérmico.**



La reacción es exotérmica porque los reactivos tienen más energía que los productos y se produce una liberación de energía.

15 **Escribe la ecuación termoquímica que representa el siguiente diagrama entálpico e indica si la reacción es endotérmica o exotérmica:**

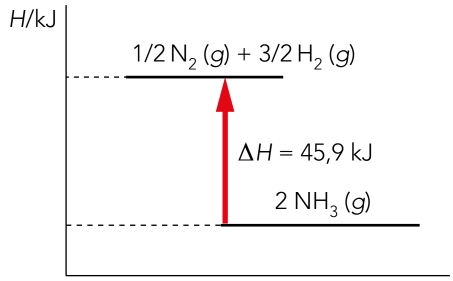


$N_2\ (g) + 3\ H_2\ (g) \rightarrow 2\ NH_3\ (g)$; $\Delta H = -91{,}8$ kJ. La reacción es exotérmica.

16 **Basándote en el ejercicio anterior, representa el diagrama entálpico de la reacción:**

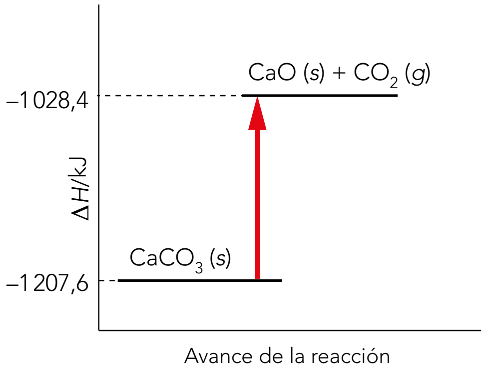
$$NH_3\ (g) \rightarrow \frac{1}{2}\ N_2\ (g) + \frac{3}{2}\ H_2\ (g)$$

¿La reacción es endotérmica o exotérmica? ¿Por qué?



La reacción es endotérmica porque es la reacción contraria a la del ejercicio anterior, que era exotérmica.

17 **A partir del diagrama entálpico, calcula la energía de reacción y escribe la ecuación termoquímica:**



Como la ΔH es la variación de energía que experimenta el sistema cuando cambia de los reactivos a los productos: $\Delta H = -1\,028{,}4 - (-1\,207{,}6) = 179{,}2$ kJ. La energía obtenida es positiva, es decir, la reacción es endotérmica, tal y como muestra el diagrama.

$$CaCO_3\ (s) \rightarrow CaO\ (s) + CO_2\ (g) \qquad \Delta H = 179{,}2 \text{ kJ}$$

3 CÁLCULOS DE ENTALPÍA

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.4.4. (EA.4.4.1.)

Página 150

18 **Para medir la entalpía de la reacción de neutralización entre el HCl y el NaOH en un calorímetro cuyo equivalente en agua es de 25 g, se mezclan 150 mL de HCl 0,5 M que inicialmente estaba a 20,0 °C con 3,0 g de NaOH sólido. Se comprueba que tras la reacción la temperatura de la disolución asciende hasta 25,7 °C.**

Determina la entalpía de neutralización.

Datos: $c_{agua} = 4\,186$ J · kg^{-1} · K^{-1}; *d* (agua) = 1 g/mL.

$$m_{H_2O} = d \cdot V = 1 \cdot 150 = 150 \text{ g}$$

porque la disolución es acuosa.

$$Q_{agua} = m \cdot c \cdot \Delta T = (0{,}150 + 0{,}025) \cdot 4\,186 \cdot (298{,}7 - 293{,}0) = 4\,175{,}5 \text{ J}$$

El agua ha absorbido calor.

$Q_{reacción} = -Q_{agua}$; $Q_{reacción} = -4\,175{,}5$ J

Reacción de neutralización: $HCl + NaOH \rightarrow NaCl + H_2O$

M (NaOH) = 23,0 + 16,0 + 1,0 = 40,0 g/mol; $n_{NaOH} = 3\ g \cdot \dfrac{1\ mol}{40\ g} = 0{,}075$ mol de NaOH

n_{HCl} = M · V = 0,5 · 0,15 = 0,075 mol de HCl. Por lo que no hay reactivo limitante.

$$\Delta H = 1\ mol \cdot \frac{-4\,175{,}5\ J}{0{,}075\ mol} = -55\,673{,}3\ J = -55{,}7\ kJ$$

Página 153

Nota: para resolver estos ejercicios, utiliza los datos de la separata final del libro.

19 **Escribe las ecuaciones termoquímicas correspondientes a la reacción de formación de las siguientes sustancias:**

a) Agua, H_2O (*l*).

b) Amoníaco, NH_3 (*l*).

c) Carbonato cálcico, $CaCO_3$ (*s*).

d) Eteno, C_2H_4 (*g*).

e) Etanol, C_2H_5OH (*l*).

a) $H_2\ (g) + \frac{1}{2}\ O_2\ (g) \rightarrow H_2O\ (l);\ \Delta H = -285{,}8$ kJ/mol

b) $\frac{1}{2}\ N_2\ (g) + \frac{3}{2}\ H_2\ (g) \rightarrow NH_3\ (g);\ \Delta H = -46{,}11$ kJ/mol

c) $Ca\ (s) + C\ (s) + \frac{3}{2}\ O_2\ (g) \rightarrow CaCO_3\ (s);\ \Delta H = -1\,207{,}0$ kJ/mol

d) $2\ C\ (s) + 2\ H_2\ (g) \rightarrow C_2H_4\ (g);\ \Delta H = 52{,}3$ kJ/mol

e) $2\ C\ (s) + 3\ H2\ (g) + \frac{1}{2}\ O_2\ (g) \rightarrow C_2H_5OH\ (l);\ \Delta H = -277{,}7$ kJ/mol

20 **Comprueba que se cumple la ley de Hess para la reacción de formación del CO_2 de forma directa o pasando por la formación de CO. Escribe las reacciones correspondientes.**

$\Delta H_R = \Delta H_1 + \Delta H_2$

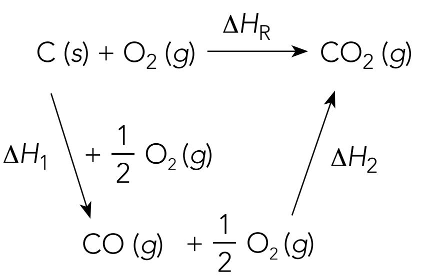
$-393{,}5 = -110{,}5 + -283;\ -393{,}5 = -393{,}5$

$C\ (s) + \frac{1}{2}\ O_2\ (g) \rightarrow CO\ (g);\qquad \Delta H_1 = -110{,}5$ kJ/mol

$CO\ (g) + \frac{1}{2}\ O_2\ (g) \rightarrow CO_2\ (g);\qquad \Delta H_2 = -283{,}0$ kJ/mol

---

$C\ (s) + O_2\ (g) \rightarrow CO_2\ (g)\quad ;\quad \Delta H_R = -393{,}5$ kJ/mol



21 **A partir de las entalpías estándar de formación, calcula la entalpía de la siguiente reacción:**

$$4\ NH_3\ (g) + 5\ O_2\ (g) \rightarrow 4\ NO\ (g) + H_2O\ (l)$$

¿Cuál es la variación de energía si reaccionan 5 L de NH_3 a 10^5 Pa y 25 °C?

$\Delta H° = 4 \cdot \Delta H_f°(NO) + \Delta H_f°(H_2O\ (l)) - (4 \cdot \Delta H_f°(NH_3) + 5 \cdot \Delta H_f°(O_2))$

$\Delta H° = 4 \cdot (90{,}25) + (-285{,}8) - (4 \cdot (-46{,}11) + 0) = 259{,}64$ kJ

$$n_{NH_3} = \frac{\frac{10^5}{101\,325} \cdot 5}{0{,}082 \cdot (25 + 273)} = 0{,}2 \text{ mol de } NH_3 \quad ; \quad 0{,}2 \text{ mol } NH_3 \cdot \frac{259{,}64 \text{ kJ}}{4 \text{ mol } NH_3} = 12{,}98 \text{ kJ}$$

se absorben.

22 **Escribe la ecuación termoquímica de la reacción con gas oxígeno de 1 mol de gas SO_2 para dar gas SO_3. Calcula su entalpía de reacción a partir de las entalpías de formación.**

$$\Delta H^\circ = \cdot\Delta H_f^\circ (SO_3) - \left(\Delta H_f^\circ (SO_2) + \frac{1}{2}\,\Delta H_f^\circ (O_2)\right) = -394{,}8 - \left(-296{,}8 + \frac{1}{2} \cdot 0\right) = -98{,}0 \text{ kJ}$$

$$SO_2\,(g) + \frac{1}{2}\,O_2\,(g) \rightarrow SO_3\,(g) \quad ; \quad \Delta H^\circ = -98{,}0 \text{ kJ}$$

23 **A partir de las entalpías de enlace, calcula la entalpía de la reacción de hidrogenación del etino, C_2H_2, para dar etano, C_2H_6:**

$$\mathbf{HC \equiv CH\,(g) + 2\,H_2\,(g) \rightarrow CH_3 - CH_3\,(g)}$$

$$\Delta H^\circ = 2\,H_{C-H} + H_{C\equiv C} + H_{H-H} - \left(6\,H_{C-H} + H_{C-C}\right) = 2 \cdot 413 + 839 - \left(6 \cdot 413 + 347\right) = -1\,160 \text{ kJ}$$

24 **Escribe la reacción de formación del vapor de agua y calcula su entalpía utilizando las entalpías de enlace correspondientes. Compara el valor obtenido con el que aparece en la tabla de entalpías estándar de formación. ¿Por qué crees que no coinciden?**

$$H_2\,(g) + \frac{1}{2}\,O_2\,(g) \rightarrow H_2O\,(g)$$

$$\Delta H^\circ = H_{H-H} + \frac{1}{2}\,H_{O=H} - 2\,H_{O-H} = 432 + \frac{1}{2} \cdot 495 - 2 \cdot 467 = -254{,}5 \text{ kJ}$$

$$\Delta H_f^\circ \left(H_2O\,(g)\right) = -241{,}8 \text{ kJ} \rightarrow \Delta H^\circ \neq \Delta H_f^\circ$$

Seguramente es debido a que los valores de las entalpías de enlace son valores medios, no específicos de los existentes en esas moléculas.

25 **Aplicando la ley de Hess y a partir de las entalpías estándar de combustión que aparecen en la tabla, calcula la entalpía de la reacción de formación del gas propano (C_3H_8).**

$$3 \cdot [C\,(s) + O_2\,(g) \rightarrow CO_2\,(g)] \qquad \Delta H_c^\circ = 3 \cdot (-393{,}5 \text{ kJ})$$

$$4 \cdot [H_2\,(g) + \frac{1}{2}\,O_2\,(g) \rightarrow H_2O\,(l)] \qquad \Delta H_c^\circ = 4 \cdot (-285{,}8 \text{ kJ})$$

$$3\,CO_2\,(g) + 4\,H_2O\,(l) \rightarrow C_3H_8\,(g) + 5\,O_2\,(g) \qquad \Delta H_c^\circ = -(-2\,219{,}2 \text{ kJ})$$

$$3\,C\,(s) + 4\,H_2\,(g) \rightarrow C_3H_8\,(g) + 5\,O_2\,(g) \qquad \Delta H_c^\circ = -104{,}5 \text{ kJ}$$

26 **Partiendo de los calores de combustión, escribe las ecuaciones de combustión correspondientes y calcula la entalpía de la reacción de hidrogenación del benceno (C_6H_6) para dar ciclohexano (C_6H_{12}):**

$$\mathbf{C_6H_6\,(l) + 3\,H_2\,(g) \rightarrow C_6H_{12}\,(l)}$$

Indica si la reacción es exotérmica o endotérmica y calcula la energía intercambiada cuando reaccionan 10 g de benceno. Utiliza los datos de la tabla.

$$C_6H_6\,(l) + \frac{15}{2}\,O_2\,(g) \rightarrow 6\,CO_2\,(g) + 3\,H_2O\,(l) \qquad \Delta H_c^\circ = -3\,264{,}5 \text{ kJ}$$

$$H_2\,(g) + \frac{1}{2}\,O2\,(g) \rightarrow H_2O\,(l) \qquad \Delta H_c^\circ = -285{,}8 \text{ kJ}$$

$$C_6H_{12}\,(l) + 9\,O_2\,(g) \rightarrow 6\,CO_2\,(g) + 6\,H_2O\,(l) \qquad \Delta H_c^\circ = -3\,919{,}6 \text{ kJ}$$

Con estos valores:

$C_6H_6\ (l) + \frac{15}{2}\ O_2\ (g) \rightarrow 6\ CO_2\ (g) + 3\ H_2O\ (l)$ $\quad \Delta H_c^\circ = -3\,264{,}5$ kJ

$3 \cdot [H_2\ (g) + \frac{1}{2}\ O_2\ (g) \rightarrow H_2O\ (l)]$ $\quad \Delta H_c^\circ = 3 \cdot \left(-285{,}8 \text{ kJ}\right)$

$6\ CO_2\ (g) + 6\ H_2O\ (l) \rightarrow C_6H_{12}\ (l) + 9\ O_2\ (g)$ $\quad \Delta H_c^\circ = -\left(-3\,919{,}6 \text{ kJ}\right)$

$C_6H_{12}\ (l) + 3\ H_2\ (g) \rightarrow C_6H_{12}\ (l)$ $\quad \Delta H_c^\circ = -202{,}3$ kJ

Es una reacción exotérmica.

$M\ (C_6H_6) = 12{,}0 \cdot 6 + 1{,}0 \cdot 6 = 78$ g/mol

$$10 \text{ g } C_6H_6 \cdot \frac{1 \text{ mol}}{78 \text{ g } C_6H_6} \cdot \frac{-202{,}3 \text{ kJ}}{1 \text{ mol}} = -25{,}9 \text{ kJ}$$

4 EFECTOS DE LAS REACCIONES DE COMBUSTIÓN

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.4.8. (EA.4.8.1.)

Página 155

27 **Busca la temperatura media de la superficie del planeta si no existiera el efecto invernadero natural. Razona si es compatible con la vida.**

Se cree que la temperatura media de la Tierra sería unos 33 grados inferior, es decir, unos −18 °C. En estas condiciones, el desarrollo de la vida es muy difícil y en ningún caso como la conocemos actualmente.

28 ODS Objetivo 7. **La tasa mundial de eficiencia energética hace referencia a la cantidad de energía que se utiliza para poder producir, tanto en la industria como a nivel de hogar. Uno de los principales objetivos para 2030 es mejorar esta tasa de eficiencia energética, para producir más consumiendo menos energía de lo que se hace actualmente. En este objetivo tienen especial interés las energías renovables, pues su uso supone un descenso en la contaminación y un aumento en el acceso a la electricidad en muchos países. En equipos, realizad una investigación sobre este tema y escribid un artículo como si fuerais a publicarlo en un periódico. Después, leedlos en voz alta y comentad vuestras opiniones.**

Respuesta libre.

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de vídeos en los que puede consultar las principales metas que se pretenden alcanzar en 2030 para cumplir el objetivo 7 de los ODS. Además, entre los recursos correspondientes al Plan Lingüístico encontrará información sobre los diferentes tipos de textos que le será de utilidad para redactar el artículo.

29 **Busca información sobre qué es un sistema de alerta temprana y cuál es su propósito. Para ello, puedes recurrir a la página web de la UNESCO. A continuación, elaborad un plan de actuación propio y compartidlo con el resto del centro.**

Respuesta libre.

5 ENTROPÍA

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.4.5. (EA.4.5.1.)

Página 157

30 Compara razonadamente la entropía molar estándar de las sustancias de cada pareja. Utiliza los datos recogidos en la tabla de la separata.

a) H_2O (*g*) y H_2O (*l*).

b) C_2H_4 (*g*) y C_2H_2 (*g*).

c) C_2H_6 (*g*) y C_2H_5OH (*l*).

a) $S[H_2O\ (g)] = 188{,}8$ J/K y $S[H_2O\ (l)] = 69{,}91$ J/K $\rightarrow$ El estado gaseoso tiene una entropía superior.

b) $S[C_2H_4\ (g)] = 219{,}6$ J/K y $S[C_2H_2\ (g)] = 200{,}9$ J/K $\rightarrow$ La entropía aumenta con el número de enlaces y átomos.

c) $S[C_2H_6\ (g)] = 229{,}6$ J/K y $S[C_2H_5OH\ (l)] = 160{,}7$ $\rightarrow$ La entropía del etano es mayor porque está en estado gaseoso, aunque tenga menos enlaces y menos número de átomos.

31 Predice si en las siguientes reacciones hay un aumento o disminución de entropía:

a) $C\ (s) + \frac{1}{2}\ O_2\ (g) \rightarrow CO\ (g)$.

b) $CaCO_3\ (s) \rightarrow CaO\ (s) + CO_2\ (g)$.

c) $PCl_3\ (g) + Cl_2\ (g) \rightarrow PCl_5\ (g)$.

a) $C\ (s) + \frac{1}{2}\ O_2\ (g) \rightarrow CO\ (g)$ $\rightarrow$ La entropía aumenta porque hay más moles gaseosos entre los productos·

b) $CaCO_3\ (s) \rightarrow CaO\ (s) + CO_2\ (g)$ $\rightarrow$ La entropía aumenta porque hay más moles gaseosos entre los productos.

c) $PCl_3\ (g) + Cl_2\ (g) \rightarrow PCl_5\ (g)$ $\rightarrow$ La entropía disminuye porque hay más moles gaseosos entre los reactivos.

32 Calcula la variación de entropía de las siguientes reacciones en condiciones estándar a partir de los datos de la tabla de entropías molares estándar incluida en la separata final, e interpreta el significado del signo de dicha variación:

a) $C_2H_4\ (g) + H_2\ (g) \rightarrow C_2H_6\ (g)$.

b) $NO_2\ (g) \rightarrow ½\ N_2\ (g) + O_2\ (g)$.

c) $CH_4\ (g) + 2\ O_2\ (g) \rightarrow CO_2\ (g) + 2\ H_2O\ (l)$.

a) $C_2H_4\ (g) + H_2\ (g) \rightarrow C_2H_6\ (g)$; $\Delta S° = 229{,}6 - 219{,}6 - 130{,}7 = -120{,}7$ J/K

b) $NO_2\ (g) \rightarrow \frac{1}{2}\ N_2\ (g) + O_2\ (g)$; $\Delta S° = 205{,}1 + \frac{1}{2} \cdot 191{,}5 - 240{,}1 = 60{,}75$ J/K

c) $CH_4\ (g) + 2\ O_2\ (g) \rightarrow CO_2\ (g) + 2\ H_2O\ (l)$

$\Delta S° = 213{,}7 + 2 \cdot 69{,}91 - 186{,}3 - 2 \cdot 205{,}1 = -242{,}98$ J/K

33 A partir de lo aprendido sobre la entropía en la unidad anterior y en esta, haced grupos y cread un modelo con el que podáis explicar qué es la entropía y por qué es tan importante en la física y la química. Utilizad la técnica de cabezas pensantes.

Respuesta libre.

Su alumnado puede consultar en **anayaeducacion.es** el documento que explica cómo utilizar la técnica «Cabezas pensantes», sugerida para resolver en grupo esta actividad.

6 ENERGÍA LIBRE DE GIBBS

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.4.6. (EA.4.6.1.-4.6.2.)

Página 159

34 **Comprueba que la transformación de carbono en forma de diamante a grafito es un proceso espontáneo. Si esto es así, ¿cómo es posible que, aparentemente, los diamantes no se trasformen espontáneamente en trozos de carbón grafito?**

C (diamante) → C (grafito); $\Delta G° = 0 - 2{,}9 = -2{,}9$ kJ. Es un proceso espontáneo porque $\Delta G°$ es negativo. Aparentemente, los diamantes no se transforman en grafito porque es una reacción muy lenta.

35 **Calcula la variación de energía libre que se produce en la combustión del gas metano, CH_4, a partir de la entalpía estándar de combustión que encontrarás en la tabla correspondiente y la variación de entropía que obtuviste para esa reacción en la actividad 32. ¿Es un proceso espontáneo?**

$\Delta H_c^° = -890{,}8$ kJ

$\Delta S° = 213{,}7 + 2 \cdot 69{,}91 - 186{,}3 - 2 \cdot 205{,}1 = -242{,}98$ J/K

$\Delta G° = \Delta H° - T \cdot \Delta S°$; $\Delta G° = -890\,800 - 298 \cdot (-242{,}98) = -818\,392$ J $= -818{,}4$ kJ

Sí, es un proceso espontáneo.

36 **Basándote en los valores de $\Delta G_f^°$ de la tabla de la separata final, calcula $\Delta G°$ de la reacción:**

$$N_2O_4\ (g) \rightarrow 2\ NO_2\ (g)$$

A partir del resultado obtenido y los datos que has encontrado, calcula la temperatura a la cual tiene lugar este proceso. ¿Cuál será su temperatura de equilibrio? Compara resultados y extrae conclusiones.

$\Delta G° = 2 \cdot (51{,}29) - 97{,}70 = 4{,}88$ kJ

37 **Existen infinidad de reacciones que se producen de forma espontánea, como la formación de agua o la oxidación del hierro. Sin embargo, muchas de ellas tardan mucho tiempo en producirse, e, incluso, no lo hacen de forma natural, sino que necesitan de unas condiciones determinadas. Busca información sobre este hecho y coméntalo en clase utilizando la técnica de cadena de preguntas.**

Respuesta libre.

En **anayaeducacion.es** también dispone de un documento que explica cómo utilizar la técnica «Cadena de preguntas».

TIC: SIMULACIÓN DEL EFECTO INVERNADERO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.1.2. (EA.1.2.1.-1.2.2.)

Página 160

1 **Busca qué es un fotón. ¿Es posible ver los fotones infrarrojos a simple vista? ¿Existe alguna manera de verlos?**

Es la partícula elemental de la que se componen las radiaciones electromagnéticas como la luz. A simple vista, no es posible ver la luz infrarroja, pero sí con una cámara de visión infrarroja.

2 **Comienza la simulación a la velocidad más rápida, usando la atmósfera de Hoy y poniendo la escala de temperaturas en grados centígrados. Deja ejecutarse la simulación durante cuatro minutos, completa la siguiente tabla y contesta a las cuestiones.**

Tiempo	*T*/°C	Tiempo	*T*/°C	Tiempo	*T*/°C
0 s		30 s		2 min	
15 s		1 min		4 min	

a) ¿Por qué crees que la simulación parte de una temperatura tan baja?

b) Habrás observado que durante los primeros 15 segundos la temperatura desciende en lugar de aumentar. Intenta explicar este resultado.

c) A partir de los 15 s, ¿la temperatura aumenta al mismo ritmo? Interpreta lo que has observado.

a) La temperatura tan baja simula la que habría en la Tierra si no existiera efecto invernadero.

b) Es debido a que los fotones de luz visible aún no han llegado a la superficie terrestre y la temperatura seguiría descendiendo sin ella.

c) La temperatura no aumenta al mismo ritmo; primero, se incrementa muy rápidamente y, después, disminuye la tendencia hasta que prácticamente se estabiliza.

3 **Repite el mismo procedimiento pero usando la atmósfera de Edad de Hielo y anota los resultados en una nueva tabla. Compara los resultados de ambos experimentos y argumenta tus conclusiones basándote en la composición de las atmósferas.**

La temperatura final a la que se llega es menor porque había una concentración menor de gases de efecto invernadero.

4 **Predice qué pasaría si en concentración del gas de invernadero hubieras seleccionado mucho. Ahora, realiza la simulación. ¿Has obtenido los resultados que habías predicho?**

La temperatura final de la superficie de la Tierra es mayor.

5 **Introduce una nube en la simulación y observa cómo interactúan tanto los fotones de luz visible como los fotones infrarrojos con ellas. ¿Crees que esto podría influir en el calentamiento global?**

Las nubes impiden el paso, tanto de los fotones de luz visible como de luz infrarroja. No dejan pasar hacia la superficie de la Tierra los fotones de luz visible, ni deja salir al espacio exterior los fotones infrarrojos. Por una parte, al parar la luz visible, baja la temperatura pero, al no dejar pasar la luz infrarroja, contribuye a acentuar el efecto invernadero. Su influencia dependerá del balance de ambos flujos de fotones. En general, la comunidad científica admite que el efecto de las nubes reales en el planeta es de incremento global de la temperatura.

6 **Diseña tú un experimento para estudiar la influencia de las nubes en la temperatura global de la superficie terrestre y emite una hipótesis sobre ello. Posteriormente, realiza la simulación que has diseñado y comprueba si tu hipótesis se cumple o no.**

Respuesta libre.

Página 161

7 **Acciona la simulación sin añadir ningún panel. En función de los resultados obtenidos, ¿crees que la atmósfera de esta simulación incluye gases de efecto invernadero? ¿Por qué? Ahora, añade un panel de vidrio. ¿Cómo interaccionan los distintos tipos de fotones con el panel de vidrio?**

No incluye gases de efecto invernadero porque la temperatura de la superficie terrestre es muy baja y no se incrementa. El panel de vidrio deja pasar los fotones visibles, pero no los infrarrojos.

8 **Reinicia la simulación con un panel de vidrio y ahora recoge la evolución de la temperatura de la superficie construyendo una tabla similar a la de la actividad 2. ¿Por qué crees que se obtienen estos resultados?**

Porque los paneles de vidrio acentúan mucho el efecto invernadero, mucho más que los gases de efecto invernadero actuales.

9 **El botón de pausa nos ayudará a contar los fotones infrarrojos que se escapan del panel de vidrio al exterior. Comienza añadiendo un solo panel y dejando que se desarrolle la simulación durante 30 s antes de contar los fotones pulsando pausa. Repite esta opción dos veces más para sacar una media. Reinicia el experimento con dos paneles y repite el proceso. Por último, haz el experimento con tres paneles. Utiliza estos datos para deducir una relación entre los fotones que salen y la temperatura final en la superficie.**

Si se incrementa el número de paneles, el número de fotones que salen al espacio exterior disminuyen proporcionalmente y la temperatura de la superficie del planeta aumenta.

10 **Acciona el emisor de fotones en un flujo alto, selecciona los fotones de luz infrarroja y prueba su efecto en cada uno de los cinco gases. ¿Qué gases pueden provocar efecto invernadero? ¿Por qué? Repite la operación usando fotones de luz visible. ¿Qué resultados has obtenido? ¿Qué puedes deducir de este resultado?**

Los gases que provocan efecto invernadero son el metano (CH_4), dióxido de carbono (CO_2) y el agua (H_2O) porque son los que esporádicamente interaccionan con los fotones de luz infrarroja desviando su trayectoria. Los fotones de luz visible no interaccionan con estos gases. La deducción es que toda la radiación de luz visible llega a la superficie de la Tierra sin que se vea afectada por los gases de su atmósfera.

11 **La atmósfera es una mezcla homogénea de gases. Observa los resultados que obtienes de la simulación con fotones infrarrojos cuando construyes estas atmósferas: 4 moléculas de CO_2; 15 moléculas de CO_2; 15 moléculas de N_2; 15 moléculas de CH_4; y 15 moléculas de CO_2. Busca información sobre la composición de la atmósfera y construye una que se parezca lo más posible a la real en composición y en concentración de gases.**

Respuesta libre.

12 **Basándote en los resultados observados, responde a las siguientes preguntas: ¿Qué influencia tiene aumentar la cantidad de un gas como el CO_2 en la atmósfera? El hecho de que haya mucha cantidad de un determinado gas, ¿significa que va a haber efecto invernadero? ¿Cómo influye la presencia de otros gases en el efecto que causa el CO_2?**

Si aumenta el número de moléculas de CO_2 se desvían un mayor número de fotones de luz infrarroja. No, no influye la cantidad sino la naturaleza del compuesto, es decir, solo afectan los gases de efecto invernadero, el nitrógeno y oxígeno gaseosos no afectan. La presencia de otros gases no afecta al efecto que provoca el CO_2. Si los gases adicionales tienen efecto invernadero, sus efectos se sumarán a las consecuencias ocasionadas por la presencia de CO_2.

TRABAJA CON LO APRENDIDO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) **CE.1.2.** (EA.1.2.1.-1.2.2.) **CE.4.3.** (EA.4.3.1.) **CE.4.4.** (EA.4.4.1.) **CE.4.5.** (EA.4.5.1.) **CE.4.6.** (EA.4.6.1.-4.6.2.) **CE.4.8.** (EA.4.8.1.)

Página 164

Termoquímica

1 **Define *reacción endotérmica* y *reacción exotérmica,* indicando, en cada caso, si el calor se absorbe o se libera, su signo y si la energía interna varía aumentando o disminuyendo.**

La respuesta se resume en la siguiente tabla:

Definición		Calor	ΔU
R. endotérmica	Reacción química que para producirse debe absorber energía.	Se absorbe (>0)	Aumenta
R. exotérmica	Reacción química que para producirse debe liberar energía.	Se libera (<0)	Disminuye

2 **En un proceso, un sistema desarrolla un trabajo de expansión de 150 J y absorbe 100 J de calor. ¿Cuánto varía su energía interna?**

Q = 100 J y W = –150 J; $\Delta U = Q + W$ = 100 – 150 = –50 J. El sistema disminuye en 50 J su energía interna.

3 **Un sistema aumenta su energía interna en 200 J cuando desarrolla un trabajo de expansión de 500 J. Para ello, ¿necesitará absorber calor o liberarlo? ¿En qué cantidad?**

ΔU = 200 J y W = –500 J; $\Delta U = Q + W$; 200 = Q – 500; Q = 700 J. El sistema absorbe 700 J en forma de calor.

4 **Pon un ejemplo de proceso isocórico y otro de proceso isobárico que se puedan producir cocinando.**

Proceso isocórico → Cocinar en una olla rápida (olla a presión sin salida de gases).

Proceso isobárico → Cocinar en una cazuela sin tapadera.

5 **En una reacción química, explica cuándo las variaciones de energía interna y de entalpía coinciden numéricamente.**

ΔU coincidirá con ΔH cuando Q_v sea igual a Q_p, es decir, cuando todos los compuestos que intervienen en la reacción sean sólidos, líquidos o estén en disolución, o cuando haya el mismo número de moles gaseosos en ambos miembros de la reacción.

6 **Para la reacción: $A + 2\,B \rightarrow 2\,C$, propón estados de agregación para *A*, *B* y *C* en los que:**

a) $Q_p > Q_V$.

b) $Q_p = Q_V$.

c) $Q_p < Q_V$.

Existen varias respuestas posibles. Nos centraremos en la posibilidad de que sean gases o no. En caso de no ser gases serían, indistintamente, sólidos, líquidos o estarían en disolución. Algunas de las respuestas posibles son:

a) Solo *C* gas o *A* y *C* gas y *B* no.

b) Ninguno gaseoso o *B* y *C* gases y *A* no.

c) Todos gases o solo *A* o *B* gases.

Entalpía de reacción

7 **Escribe la ecuación termoquímica de formación de un mol de agua líquida a partir de sustancias simples en estado gaseoso, sabiendo que se liberan 285,8 kJ de energía. La reacción, ¿es endotérmica o exotérmica?**

$H_2\,(g) + \frac{1}{2}\,O_2\,(g) \rightarrow H_2O\,(l)$; $\Delta H = -285{,}8$ kJ. La reacción es exotérmica.

8 **Dada la ecuación termoquímica:**

$$H_2\,(g) + Cl_2\,(g) \rightarrow 2\,HCl\,(g)$$

$$\Delta H = -184,\,6 \text{ kJ}$$

Calcula la variación de entalpía y escribe la ecuación termoquímica de la formación de un mol de HCl (*g*).

$\Delta H = \frac{-184{,}6}{2} = -92{,}3$ kJ.

$\frac{1}{2}\,H_2\,(g) + \frac{1}{2}\,Cl_2\,(g) \rightarrow HCl\,(g)$; $\Delta H = -92{,}3$ kJ.

9 **En la formación de 1 mol de FeS (*s*) a partir de sus sustancias simples, también en estado sólido, se liberan 100,0 kJ de energía. Calcula las variaciones de entalpía en los siguientes casos:**

a) Formación de 3 mol de FeS (*s*).

b) Descomposición de FeS (*s*). Esta reacción, ¿es endotérmica o exotérmica?

a) $\Delta H = -100{,}0 \cdot 3 = -300{,}0$ kJ

$3\,Fe\,(s) + 3\,S\,(s) \rightarrow 3\,FeS\,(s)$; $\Delta H = -300{,}0$ kJ

b) $\Delta H = -(-100{,}0) = 100{,}0$ kJ

$FeS\,(s) \rightarrow Fe\,(s) + S\,(s)$; $\Delta H = 100{,}0$ kJ. La reacción de descomposición es endotérmica.

10 **¿Cuánta energía se liberará en la formación de 100,0 g de NaCl a partir de la reacción química que se presenta a continuación?**

$$HCl\,(aq) + NaOH\,(aq) \rightarrow NaCl\,(aq) + H_2O\,(l)$$

$$\Delta H = -55{,}8 \text{ kJ}$$

M (NaCl) = 23,0 + 35,5 = 58,5 g/mol

$$100{,}0 \text{ g NaCl} \cdot \frac{1 \text{ mol}}{58{,}5 \text{ g NaCl}} \cdot \frac{-55{,}8 \text{ kJ}}{1 \text{ mol NaCl}} = -95{,}4 \text{ kJ}$$

11 **Según la reacción de descomposición:**

$$CaCO_3\,(s) \rightarrow CaO\,(s) + CO_2\,(g)\,;\ \Delta H = 179{,}2 \text{ kJ}$$

Calcula qué masa de $CaCO_3$ se descompone si la reacción absorbe 100 kJ.

M ($CaCO_3$) = 40,1 + 12,0 + 16,0 · 3 = 100,1 g/mol

$$100{,}0 \text{ kJ} \cdot \frac{1 \text{ mol } CaCO_3}{179{,}2 \text{ kJ}} \cdot \frac{100{,}1 \text{ g}}{1 \text{ mol } CaCO_3} = 55{,}9 \text{ g de } CaCO_3$$

12 **La ecuación termoquímica de la combustión del butano es:**

$$C_4H_{10} + \frac{13}{2}\,O_2\,(g) \rightarrow 4\,CO_2\,(g) + 5\,H_2O\,(l)$$

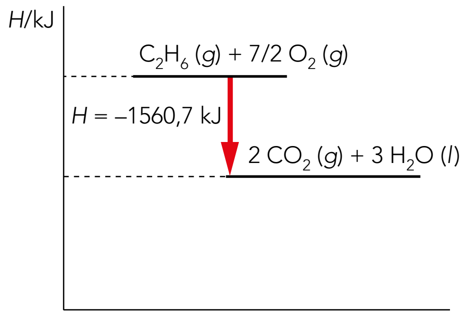
$$\Delta H = -2\,877{,}6 \text{ kJ/mol}$$

¿Qué volumen de butano (C_4H_{10}) habrá sido necesario quemar en condiciones normales para obtener 300,0 kJ de energía?

$$300{,}0\ \text{kJ} \cdot \frac{1\ \text{mol}\ C_4H_{10}}{-2\,877{,}6\ \text{kJ}} \cdot \frac{22{,}4\ \text{L (c.n.)}}{1\ \text{mol}\ C_4H_{10}} = 2{,}3\ \text{L de}\ C_4H_{10}\ \text{en condiciones normales.}$$

13 **Haz el diagrama entálpico del proceso de combustión de un mol de etano (C_2H_6) gaseoso en presencia de gas oxígeno, para dar CO_2 gaseoso y H_2O líquida, liberándose 1 560,7 kJ.**

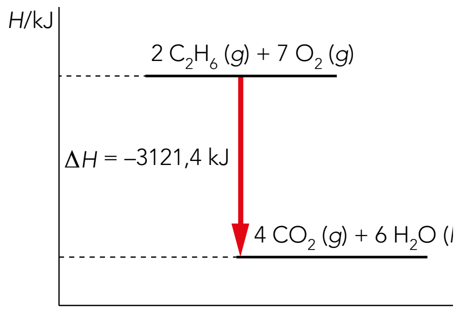
La ecuación química es: $C_2H_6\ (g) + \frac{7}{2}\ O_2\ (g) \rightarrow 2\ CO_2\ (g) + 3\ H_2O\ (l)$; $\Delta H = -1\,560{,}7$ kJ



14 **Representa, manteniendo las escalas que has usado en el ejercicio anterior, el diagrama entálpico correspondiente a la reacción:**

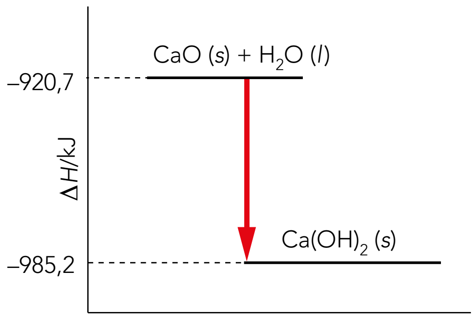
$$\mathbf{2\ C_2H_6\ (g) + 7\ O_2\ (g) \rightarrow 4\ CO_2\ (g) + 6\ H_2O\ (l)}$$

Calcula la entalpía de la reacción.



$\Delta H = -1\,560{,}7 \cdot 2 = -3\,121{,}4$ kJ

15 **Basándote en el siguiente diagrama entálpico, indica los reactivos, los productos, la reacción química representada, y calcula la variación de entalpía.**

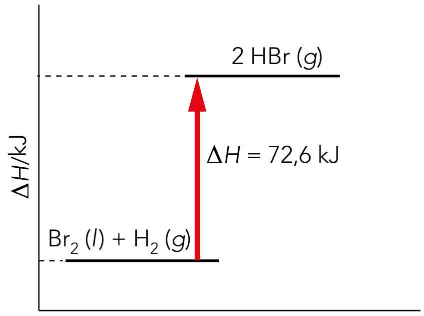


Los reactivos: CaO (s) y H_2O (l). Y los productos: $Ca(OH)_2$ (s).

La reacción química es: $CaO\ (s) + H_2O\ (l) \rightarrow Ca(OH)_2\ (s)$.

$\Delta H = -985{,}2 - (-920{,}7) = -64{,}5$ kJ

16 **A partir de la información contenida en el siguiente diagrama entálpico, escribe la ecuación termoquímica de la formación de un mol de HBr (*g*).**



$\frac{1}{2}$ H_2 (*g*) + $\frac{1}{2}$ Br_2 (*l*) → HBr (*g*); $\Delta H = -\frac{1}{2} \cdot (72{,}6) = -36{,}3$ kJ

Página 165

Cálculos de entalpía

17 **¿Cómo construirías un calorímetro casero a partir de materiales que puedas encontrar en tu casa? Normalmente, los calorímetros caseros solo sirven para procesos muy rápidos, ¿por qué crees que es así?**

Respuesta abierta. Una posible respuesta sería introducir un vaso de poliestireno dentro de otro para aumentar el aislamiento y, así, conseguir un recipiente más adiabático. Y tapar con una superficie aislante (corcho, corcho blanco, etc.) en el que se hacen dos orificios, uno para introducir un termómetro, y el otro para introducir algo con lo que agitar el contenido. Es conveniente agitar la mezcla para acelerar el proceso, de forma que la temperatura final del agua se alcance rápidamente y, así, haya pocas pérdidas debido a que el recipiente no es adiabático completamente.

18 **Para determinar la entalpía de disolución del NaOH (*s*) se introducen 5 g de esta sustancia dentro de un calorímetro que contiene 150 g de agua. Inmediatamente se tapa y se comprueba que existe un ascenso de temperatura de 7 °C. ¿Cuál es el valor de la entalpía de disolución?**

Datos: c_{H_2O} = 4 186 J · kg^{-1} · K^{-1}; equivalente en agua del calorímetro = 32 g.

$Q_{agua} = m \cdot c \cdot \Delta T = (0{,}150 + 0{,}032) \cdot 4\,186 \cdot 7 = 5\,333{,}0$ J que ha absorbido el agua.

$Q_{reacción} = -Q_{agua}$; $Q_{reacción} = -5\,333{,}0$ J

M (NaOH) = 23,0 + 16,0 + 1,0 = 40,0 g/mol; $n_{NaOH} = 5 \text{ g} \frac{1 \text{ mol}}{40 \text{ g}} = 0{,}125$ mol NaOH

$\Delta H = 1 \text{ mol} \cdot \frac{-5\,333{,}0 \text{ J}}{0{,}125 \text{ mol}} = -42\,664{,}0$ J; desprende 1 mol = –42,7 kJ/mol

19 **En un calorímetro a presión constante se queman 4 g de ácido benzoico, $C_7H_6O_2$, provocando que la temperatura de los 1,5 kg de agua que contiene el calorímetro aumente de los 20,2 °C a los 33,3 °C. Calcula el calor de combustión a presión constante.**

Datos: Equivalente en agua del calorímetro: 423 g; c_{H_2O} = 4 186 J · kg^{-1} · K^{-1}.

$Q_{agua} = m \cdot c \cdot \Delta T = 4\,186 \cdot (1{,}5 + 0{,}423) \cdot (33{,}3 - 20{,}2) = 105\,450{,}8$ J

Masa molar ácido benzoico ($C_7H_6O_2$) = 122,0 g/mol

El calor desprendido por la reacción a presión constante por mol será:

$$Q_p = -Q_{agua} = \frac{-105\,450{,}8 \text{ J}}{4 \text{ g}} \cdot \frac{1 \text{ kJ}}{10^3 \text{ J}} \cdot \frac{122{,}0 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = -3\,216{,}2 \text{ kJ/mol}$$

20 **Formula las ecuaciones termoquímicas de las reacciones de formación de HCl (*g*), SO_3 (*g*) y NO_2 (*g*), indicando en cada caso si son exotérmicas o endotérmicas.**

$\frac{1}{2}$ H_2 (*g*) + $\frac{1}{2}$ Cl_2 (*g*) → HCl (*g*) ; ΔH = −92,3 kJ/mol. Exotérmica.

S (*s*) + $\frac{3}{2}$ O_2 (*g*) → SO_3 (*g*) ; ΔH = −394,8 kJ/mol. Exotérmica.

$\frac{1}{2}$ N_2 (*g*) + O_2 (*g*) → NO_2 (*g*) ΔH = 33,2 kJ/mol. Endotérmica.

21 **Aplicando la ley de Hess, y basándote en las siguientes ecuaciones termoquímicas, calcula la entalpía de formación del H_2O_2 (*l*):**

$$H_2O_2\ (l) \rightarrow H_2O\ (l) + \frac{1}{2} O_2\ (g); \quad \Delta H = -98{,}0\ kJ$$
$$H_2\ (g) + \frac{1}{2} O_2 \rightarrow H_2O\ (l); \quad \Delta H = -285{,}8\ kJ$$

Reacción buscada: H_2 (*g*) + O_2 (*g*) → H_2O_2 (*l*)

$\cancel{H_2O\ (l)} + \frac{1}{2} O_2\ (g) \rightarrow H_2O_2\ (l)$; ΔH = 98,0 kJ

$H_2\ (g) + \frac{1}{2} O_2 \rightarrow \cancel{H_2O\ (l)}$; ΔH = −285,8 kJ

$H_2\ (g) + O_2 \rightarrow H_2O_2\ (l)$; ΔH = −187,8 kJ

22 **A partir de las entalpías de formación que encontrarás en la separata final, calcula la entalpía de la reacción:**

$$CaCO_3\ (s) \rightarrow CaO\ (s) + CO_2\ (g)$$

$$\Delta H° = \cdot\Delta H_f^{\circ}\left(CaO\right) + \Delta H_f^{\circ}\left(CO_2\right) - \Delta H_f^{\circ}\left(CaCO_3\right) = -635{,}1 + \left(-393{,}5\right) - \left(-1\,207{,}0\right) = 178{,}4\ kJ$$

23 **Basándote en la tabla de entalpías de formación del final del libro, calcula la entalpía de la dimerización del NO_2 (*g*). Indica si es una reacción exotérmica o endotérmica.**

$$2\ NO_2\ (g) \rightarrow N_2O_4\ (g)$$

$\Delta H° = \Delta H_f^{\circ}\left(N_2O_4\right) - 2\ \Delta H_f^{\circ}\left(NO_2\right) = 9{,}7 - 2 \cdot 33{,}2 = -56{,}7$ kJ. Es una reacción exotérmica.

24 **Escribe la reacción de formación del HCl, y calcula su entalpía correspondiente a partir de sus entalpías de enlace.**

La reacción buscada es $\frac{1}{2}$ H_2 (*g*) + $\frac{1}{2}$ Cl_2 (*g*) → HCl (*g*).

$$\Delta H = \frac{1}{2} H_{H-H} + \frac{1}{2} H_{Cl-Cl} - H_{H-Cl} = \frac{1}{2} \cdot 432 + \frac{1}{2} \cdot 239 - 427 = -91{,}5\ kJ$$

25 **Determina la entalpía de la reacción de obtención de cloro por el proceso Deacon que aparece a continuación, basándote en los valores de entalpía de enlace.**

$$4\ HCl\ (g) + O_2\ (g) \rightarrow 2\ Cl_2 + 2\ H_2O\ (g)$$

Busca información sobre el proceso anterior y elabora un esquema con las etapas principales y sus usos en la industria.

$\Delta H = 4\ H_{H-Cl} + H_{O=O} - (2 \cdot H_{Cl-Cl} + 2 \cdot (2 \cdot H_{O-H}) = 4 \cdot 427 + 495 - (2 \cdot 239 + 2 \cdot (2 \cdot 467)) = -143$ kJ

Respuesta libre. Es un proceso industrial.

26 **Una bombona de butano, C_4H_{10}, contiene aproximadamente 12,5 kg de esta sustancia. Sabiendo que su entalpía estándar de combustión es de –2 877,6 kJ/mol, calcula la energía total que se puede producir con una bombona de butano. ¿Qué volumen de CO_2 en condiciones normales se liberaría a la atmósfera?**

$M\,(C_4H_{10}) = 12{,}0 \cdot 4 + 1{,}0 \cdot 10 = 58{,}0$ g/mol

$$12\,500 \text{ g } C_4H_{10} \cdot \frac{1 \text{ mol}}{58{,}0 \text{ g } C_4H_{10}} \cdot \frac{-2\,877{,}6 \text{ kJ}}{1 \text{ mol } C_4H_{10}} = -620\,172 \text{ kJ}$$

La reacción de combustion es: $C_4H_{10}\,(g) + \frac{13}{2}\,O_2 \rightarrow 4\,CO_2\,(g) + 5\,H_2O\,(l)$

$$12\,500 \text{ g } C_4H_{10} \cdot \frac{1 \text{ mol}}{58{,}0 \text{ g } C_4H_{10}} \cdot \frac{4 \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol } C_4H_{10}} \cdot \frac{22{,}4 \text{ L}}{1 \text{ mol } CO_2} = 19\,310 \text{ L de } C_4H_{10}$$

27 **Fíjate en los resultados obtenidos en el ejercicio resuelto 6 del epígrafe 3.5 y, basándote en ellos, razona cuáles de esos gases liberarán más energía cuando se queme 1 L de cada uno de esos gases a 1 atm de presión y 25 °C. Según ese razonamiento, ¿qué gas emplearías en un sistema de calefacción de carácter doméstico? Cuando en un hogar determinado el depósito de gas se encuentra en el exterior, se recomienda usar propano frente a butano. Busca en Internet los motivos que fundamentan esta recomendación.**

Propano: $n = \frac{P \cdot V}{R \cdot T} = \frac{1 \cdot 1}{0{,}082 \cdot 298} = 0{,}041 \text{ mol de } C_3H_8$

$$0{,}041 \text{ mol de } C_3H_8 \cdot \frac{-2219{,}2 \text{kJ}}{1 \text{ mol } C_3H_8} = -90{,}8 \text{ kJ}$$

Butano: $0{,}041 \text{ mol de } C_4H_{10} \cdot \frac{-2\,877{,}6 \text{ kJ}}{1 \text{ mol } C_4H_{10}} = -118{,}0 \text{ kJ}$

Libera más energía el butano, por lo que sería más adecuado para una instalación de calefacción doméstica. En exterior, se suele usar el propano porque su punto de ebullición es menor.

28 **Escribe las reacciones de combustión del etanol (C_2H_6O), el ácido acético ($C_2H_4O_2$) y el acetato de etilo ($C_4H_8O_2$) y calcula la energía intercambiada en la siguiente reacción de esterificación. ¿Se absorbe o se libera energía en esta reacción?**

$$C_2H_4O_2\,(l) + C_2H_6O\,(l) \rightarrow C_4H_8O_2\,(l) + H_2O\,(l)$$

Datos: $\Delta H_c^\circ\,(C_2H_6O) = -1\,366{,}8$ **kJ/mol;** $\Delta H_c^\circ\,(C_2H_4O_2) = -874{,}2$ **kJ/mol**
y $\Delta H_c^\circ\,(C_4H_8O_2) = -2\,238{,}1$ **kJ/mol.**

Etanol: $C_2H_6O\,(l) + 3\,O_2 \rightarrow 2\,CO_2\,(g) + 3\,H_2O\,(l)$

Ácido acético: $C_2H_4O_2\,(l) + 2\,O_2 \rightarrow 2\,CO_2\,(g) + 2\,H_2O\,(l)$

Acetato de etilo: $C_4H_8O_2\,(l) + 5\,O_2 \rightarrow 4\,CO_2\,(g) + 4\,H_2O\,(l)$

Reacción buscada: $C_2H_4O_2\,(l) + C_2H_6O\,(l) \rightarrow C_4H_8O_2\,(l) + H_2O\,(l)$

$C_2H_4O_2\,(l) + 2\,O_2 \rightarrow 2\,CO_2\,(g) + 2\,H_2O\,(l)$	$\Delta H_c^\circ = -874{,}2$ kJ/mol
$C_2H_6O\,(l) + 3\,O_2 \rightarrow 2\,CO_2\,(g) + 3\,H_2O\,(l)$	$\Delta H_c^\circ = -1366{,}8$ kJ/mol
$4\,CO_2\,(g) + 4\,H_2O\,(l) \rightarrow C_4H_8O_2\,(l) + 5\,O_2\,(g)$	$\Delta H_c^\circ = -(-2238{,}1)$ kJ/mol
$C_2H_4O_2\,(l) + C_2H_6O\,(l) \rightarrow C_4H_8O_2\,(l) + H_2O\,(l)$	$\Delta H^\circ = -2{,}9$ kJ/mol

Se libera energía.

29 **El cianuro de hidrógeno (HCN) se produce industrialmente a través de la reacción del metano (CH_4) y el amoníaco (NH_3) con el gas oxígeno en presencia de un catalizador de platino:**

$2\ CH_4\ (g) + 2\ NH_3\ (g) + 3\ O_2\ (g) \rightarrow 2\ HCN\ (g) + 6\ H_2O\ (g)$

Calcula la entalpía de esta reacción a partir de las entalpías estándar de reacción indicando si la reacción es endotérmica o exotérmica.

Datos: ΔH_c° (CH_4) = –890,8 kJ/mol, ΔH_c° (NH_3) = 382,8 kJ/mol;

ΔH_c° (HCN) = –671,5 kJ/mol.

Reacción buscada: $2\ CH_4\ (g) + 2\ NH_3\ (g) + 3\ O_2\ (g) \rightarrow 2\ HCN\ (g) + 6\ H_2O\ (g)$

$$2 \cdot (CH_4\ (g) + 2\ O_2\ (g) \rightarrow CO_2\ (g) + 2\ H_2O\ (l)) \qquad \Delta H_c^\circ = 2 \cdot (-890{,}8\ \text{kJ})$$

$$2 \cdot \left(NH_3\ (g) + \frac{3}{4}\ O_2\ (g) \rightarrow \frac{1}{2}\ N_2\ (g) + \frac{3}{2}\ H_2O\ (l)\right) \qquad \Delta H_c^\circ = 2 \cdot (382{,}8\ \text{kJ})$$

$$2 \cdot \left(CO_2\ (g) + \frac{1}{2}\ H_2O\ (l) + \frac{1}{2}\ N_2\ (g) \rightarrow HCN\ (g) + \frac{5}{4}\ O_2\ (g)\right) \qquad \Delta H_c^\circ = 2 \cdot (-(-671{,}5))\ \text{kJ}$$

$$2\ CH_4\ (g) + 2\ NH_3\ (g) + 3\ O_2\ (g) \rightarrow 2\ HCN\ (g) + 6\ H_2O\ (g) \qquad \Delta H_c^\circ = 327{,}0\ \text{kJ}$$

Se absorbe energía.

Efectos de las reacciones de combustión

30 **El petróleo, además de como combustible, sirve de materia prima para muchas industrias. Sus reservas se encuentran concentradas solo en determinados lugares. Busca información sobre las reservas de petróleo existentes y cuánto se estima que durarán en función del consumo actual. Con los datos encontrados, argumenta si es urgente encontrar un cambio de los modelos energético e industrial.**

Respuesta libre.

Página 166

31 **¿Sería posible la vida en la Tierra, tal y como la conocemos, si no existiera el efecto invernadero? ¿Por qué actualmente el efecto invernadero tiene consecuencias negativas?**

No sería posible porque la temperatura media del planeta sería muy baja. Entorno a –18 °C cuando ahora es de unos 15 °C. Porque está aumentado rápidamente esa temperatura media del planeta y eso está provocando graves problemas medioambientales.

32 **En el gráfico interactivo sobre emisiones de CO_2 (kt) que encontrarás en la web de datos del Banco Mundial, busca los datos de emisión de CO_2 a nivel mundial de los años 1980, 1990, 2000 y 2010, y haz un estudio comparativo. ¿Concuerdan con lo que has aprendido en la unidad? ¿Por qué? Comparte tu opinión con el resto del aula.**

Datos extraídos de datos.bancomundial.org en millones de kilotoneladas.

Año	1974	1984	1994	2004	2014
Emisión	16,85	19,14	22,55	28,89	36,14
Diferencia	—	2,29	3,41	5,84	7,75

Algunas de las conclusiones puede ser que no solo sigue aumentando la cantidad de CO_2 que se emite a la atmósfera, sino que cada vez se emite más.

33 **En la quema de los combustibles fósiles, además del CO_2, se producen también óxidos de nitrógeno y azufre que son los responsables de la lluvia ácida. Busca y explica en qué consiste este fenómeno y las consecuencias que provoca.**

Respuesta libre.

34 **Busca información sobre plantas de generación de electricidad a partir de fuentes renovables que existan dentro de tu comunidad. ¿Son suficientes o habría que aumentarlas? Argumenta tu respuesta.**

Respuesta libre.

35 ODS **Se debe seguir aumentando el porcentaje de energía eléctrica que procede de fuentes renovables, pero también hay que aumentar la eficiencia energética de las centrales térmicas basadas en combustibles fósiles. Busca ejemplos de este tipo de centrales (centrales de tipo combinado) y di por qué son más eficientes que las tradicionales. Relaciona este hecho con la meta 7.1.**

Respuesta libre.

Las centrales de ciclo combinado son más eficientes porque generan menos emisiones contaminantes ya que usan gas natural, más limpio que el carbón o el petróleo, consumen menos combustible, tienen un consumo de agua para refrigeración menor y son más pequeñas, por lo que su impacto visual también es menor. Además al permitir cargas parciales se puede modular su funcionamiento adaptándolo mejor a la demanda existente.

Le sugerimos que recomiende a su alumnado la visualización del vídeo sobre la meta 7.1 de los ODS, disponible en **anayaeducacion.es**.

36 **¿Por qué crees que incrementar las zonas verdes existentes, hacer un consumo responsable y mejorar la gestión de los desechos, reciclando lo máximo posible, contribuye al desarrollo sostenible? ¿Qué efectos positivos puede tener en tu comunidad? ¿Cómo podrías concienciar a tu entorno para que apoyaran estas iniciativas?**

Respuesta libre.

Entropía

37 **¿Qué diferencia hay entre entropía del entorno y entropía del universo?**

La entropía del universo engloba tanto a la entropía del entorno como a la entropía del sistema estudiado, mientras que la entropía del entorno es la entropía de todo lo que no sea el sistema estudiado.

38 **Razona si es posible que se produzca una reacción endotérmica sin que la entropía del universo disminuya.**

En una reacción endotérmica, la entropía del sistema aumenta porque el sistema aumenta su temperatura desordenándose. Si el entorno, al disminuir su temperatura, no disminuye su entropía tanto como ha aumentado la del sistema, la entropía del universo aumentará.

39 **Según el segundo principio de la termodinámica, cuando un sistema evoluciona, la variación de entropía del universo aumenta. ¿Existe algún proceso en el que esta variación es nula? ¿Y negativa?**

Los únicos procesos químicos en los que no varía la entropía del universo es en los procesos reversibles, cuando el sistema se encuentra en equilibrio con su entorno. No existe ningún proceso en el que el universo disminuya su entropía espontáneamente.

40 **Busca información sobre si es posible alcanzar el cero absoluto de temperatura; es decir, 0 K.**

La tercera ley de la termodinámica implica que no se puede alcanzar el cero absoluto. De momento, no existe ningún hecho experimental que contradiga esta ley.

41 **Predice el signo de la variación de entropía de las siguientes reacciones y confirma los resultados empleando los datos de entropía molar estándar que se adjuntan:**

$$C_6H_6\ (l) + 3\ H_2\ (g) \rightarrow C_6H_{12}\ (l)$$

$$CH_4\ (g) + H_2O\ (l) \rightarrow CO\ (g) + 3\ H_2\ (g)$$

$$H_2\ (g) + I_2\ (s) \rightarrow 2\ HI\ (g)$$

$$Ca\ (OH)_2\ (s) + CO_2\ (g) \rightarrow CaCO_3\ (s) + H_2O\ (l)$$

Sustancia	$S°/(J \cdot K^{-1})$	Sustancia	$S°/(J \cdot K^{-1})$
C_6H_6 (*l*)	173,4	C_6H_{12} (*l*)	270,2
H_2 (*g*)	130,7	CH_4 (*g*)	186,3
H_2O (*l*)	70,0	I_2 (*s*)	116,1
CO (*g*)	197,7	HI (*g*)	206,6
$Ca(OH)_2$ (*s*)	83,4	CO_2 (*g*)	213,8
$CaCO_3$ (*s*)	91,7		

C_6H_6 (*l*) + 3 H_2 (*g*) → C_6H_{12} (*l*); El signo debe ser negativo porque entre los reactivos hay más moles gaseosos que entre los productos; disminuye el desorden.

$$\Delta S° = 270{,}2 - 173{,}4 - 3 \cdot 130{,}7 = -295{,}3\ J/K$$

CH_4 (*g*) + H_2O (*l*) → CO (*g*) + 3 H_2 (*g*); El signo debe ser positivo porque entre los productos hay cuatro moles gaseosos y entre los reactivos solo uno; aumenta el desorden.

$$\Delta S° = 197{,}7 + 3 \cdot 130{,}7 - 186{,}3 - 70{,}0 = 333{,}5\ J/K$$

H_2 (*g*) + I_2 (*s*) → 2 HI (*g*); El signo debe ser positivo porque entre los productos hay dos moles gaseosos y entre los reactivos solo uno; aumenta el desorden.

$$\Delta S° = 2 \cdot 206{,}6 - 130{,}7 - 116{,}1 = 166{,}4\ J/K$$

Ca $(OH)_2$ (*s*) + CO_2 (*g*) → $CaCO_3$ (*s*) + H_2O (*l*); El signo debe ser negativo porque solo hay moles gaseosos en los reactivos; disminuye el desorden.

$$\Delta S° = 91{,}7 + 70{,}0 - 83{,}4 - 213{,}8 = -135{,}5\ J/K$$

42 **A partir de los datos que aparecen en la tabla, determina la variación de energía libre en condiciones estándar de la siguiente reacción:**

$$CH_3\text{–}COOH\ (l) + CH_3OH\ (l) \rightarrow CH_3\text{–}COO\text{–}CH_3\ (g) + H_2O\ (l)$$

Sustancia	ΔH_c^o/(kJ/mol)	$S_f^o/(J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1})$
CH_3-COOH (*l*)	–874,2	159,8
CH_3OH (*l*)	–726,1	126,8
CH_3-COO-CH_3 (*g*)	–1 592,2	324,4
H_2O (*l*)		–237,1

Variación de entalpía:

Reacción buscada: $CH_3–COOH\ (l) + CH_3OH\ (l) \rightarrow CH_3–COO–CH_3\ (g) + H_2O\ (l)$

$CH_3–COOH\ (l) + 2\ O_2 \rightarrow 2\ CO_2\ (g) + 2\ H_2O\ (l)$ $\qquad \Delta H^\circ_c = -874{,}2$ kJ/mol

$CH_3OH\ (l) + \frac{3}{2}\ O_2 \rightarrow CO_2\ (g) + 2\ H_2O\ (l)$ $\qquad \Delta H^\circ_c = -726{,}1$ kJ/mol

$3\ CO_2\ (g) + 3\ H_2O\ (l) \rightarrow CH_3–COO–CH3\ (l) + \frac{7}{2}\ O_2\ (g)$ $\qquad \Delta H^\circ_c = -(-1592{,}2)$ kJ/mol

---

$CH_3–COOH\ (l) + CH_3OH\ (l) \rightarrow CH_3–COO–CH_3\ (g) + H_2O\ (l)$ $\qquad \Delta H^\circ = -8{,}1$ kJ/mol

Variación de entropía:

$\Delta S^\circ = S^\circ(CH_3–COO–CH_3) + S^\circ(H_2O) - S^\circ(CH_3–COOH) - S^\circ(CH_3OH)$

$\Delta S^\circ = 324{,}4 + 70{,}0 - 159{,}8 - 126{,}8 = 107{,}8$ J/K

Variación de energía libre de Gibbs:

$\Delta G^\circ = \Delta H^\circ - T \cdot \Delta S^\circ$; $\Delta G^\circ = -8\,100 - 298 \cdot 107{,}8 = -40\,224{,}2$ J $= -40{,}2$ kJ

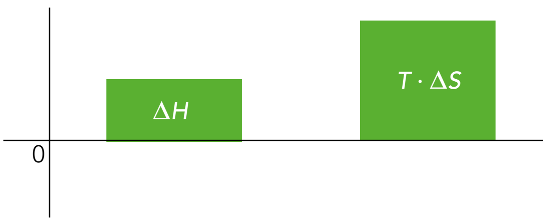
Energía libre de Gibbs

43 ¿Son espontáneas todas las reacciones exotérmicas? Razona tu respuesta.

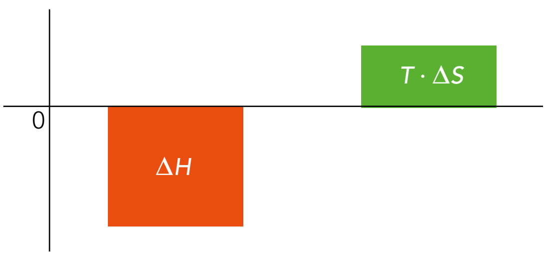
No. No son espontáneas aquellas reacciones exotérmicas en las que la entropía es positiva, disminuye el desorden y se dan a temperaturas bajas.

44 Analiza las siguientes gráficas para predecir si el proceso que muestran será espontáneo o no:

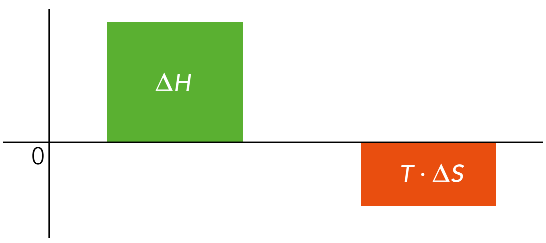
a)



b)



c)



a) El proceso será espontáneo porque el término en $T \cdot \Delta S°$ es mayor que el término de $\Delta H°$ y ambos son positivos. Como $\Delta G° = \Delta H° - T \cdot \Delta S°$, el término $-T \cdot \Delta S°$ será negativo y, por tanto, la suma será negativa también.

b) El proceso será espontáneo porque tanto $\Delta H°$ como $-T \cdot \Delta S°$ son negativos y, por tanto, $\Delta G°$ también lo será, lo que hace que la reacción sea espontánea.

c) El proceso no será espontáneo porque tanto $\Delta H°$ como $-T \cdot \Delta S°$ serán positivos y, por tanto, $\Delta G°$ también lo será, haciendo que la reacción no se produzca de forma espontánea.

Página 167

45 Basándote en los datos de energía libre estándar de formación de la tabla de la separata final, calcula si la siguiente reacción de deshidratación del etanol es espontánea:

$$C_2H_5OH\ (l) \rightarrow C_2H_4\ (g) + H_2O\ (l)$$

$\Delta G° = \Delta G°_f(C_2H_4) + \Delta G°_f(H_2O) - \Delta G°_f(C_2H_5OH) = 68{,}2 + (-237{,}1) - (-174{,}8) = 5{,}9$ kJ

La reacción no será espontánea al ser la variación positiva.

46 Calcula, a partir de los datos de energía libre estándar de formación, la variación de energía libre de Gibbs en la siguiente reacción. ¿Es un proceso espontáneo?

$$CaCO_3\ (s) \rightarrow CaO\ (s) + CO_2\ (g)$$

$\Delta G° = \Delta G°_f(CaO) + \Delta G°_f(CO_2) - \Delta G°_f(CaCO_3) = (-604{,}0) + (-394{,}4) - (-1129{,}0) = 130{,}6$ kJ

La reacción no será espontánea al ser la variación positiva.

47 Determina la energía libre de Gibbs a 25 °C y 105 Pa, basándote en los datos de la tabla adjunta, para la reacción siguiente:

$$2\ HCl\ (g) + Ca(OH)_2\ (s) \rightarrow CaCl_2\ (s) + 2\ H_2O\ (l)$$

Especie	$\Delta H_f^o/(kJ \cdot mol^{-1})$	$S°/(J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1})$
HCl	–92,3	186,9
$Ca\ (OH)_2$	–985,2	83,4
$CaCl_2$	–795,4	108,4
H_2O	–285,8	70,0

Reacción: $2\ HCl\ (g) + Ca(OH)_2\ (s) \rightarrow CaCl_2\ (s) + 2\ H_2O\ (l)$

Variación de entalpía: $\Delta H° = (-795{,}4) + 2 \cdot (-285{,}8) - 2 \cdot (-92{,}3) - (-985{,}2) = -197{,}2$ kJ

Variación de entropía: $\Delta S° = 108{,}4 + 2 \cdot 70{,}0 - 2 \cdot 186{,}9 - 83{,}4 = -208{,}8$ J/K

Variación de energía libre: $\Delta G° = \Delta H° - T \cdot \Delta S°$;

$\Delta G° = -197\,200 - 298 \cdot (-208{,}8) = -134\,978\ J = -135{,}0$ kJ

48 Demuestra que el proceso de combustión del etanol (CH_3CH_2OH) a 25 °C es un proceso espontáneo. ¿Será este proceso espontáneo a cualquier temperatura? De no ser así, calcula la temperatura a la que se producirá el cambio de signo de la energía libre, indicando si el proceso será espontáneo a partir o por debajo de esa temperatura.

Datos: $\Delta H_c^° = -1\,366{,}7\ kJ \cdot mol^{-1}$; $\Delta S° = -138{,}8\ J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$.

Reacción de combustión del etanol: $C_2H_6O\ (l) + 3\ O_2\ (g) \rightarrow 2\ CO_2\ (g) + 3\ H_2O\ (l)$

$\Delta G° = \Delta H° - T \cdot \Delta S°$; $\Delta G° = -1\,366\,700 - 298 \cdot (-138{,}8) = -1\,325\,338$ J $= -1\,325{,}3$ kJ

Como es negativo, efectivamente, es espontáneo a esa temperatura.

No será espontáneo a cualquier temperatura, puesto que según vaya subiendo la temperatura, el término en entropía, $-T \cdot \Delta S°$, se hará mayor y, al ser positivo, hará que el proceso se convierta en no espontáneo.

La temperatura a partir de la cual el proceso pase de espontáneo a no espontáneo será la que haga que $\Delta G° = 0$.

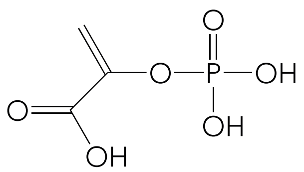
$$\Delta H° - T \cdot \Delta S° = 0 \quad \rightarrow \quad T = \frac{\Delta H°}{\Delta S°} = \frac{-1\,366\,700}{-138{,}8} = 9\,847 \text{ K}$$

CIENCIA, TECNOLOGÍA Y SOCIEDAD

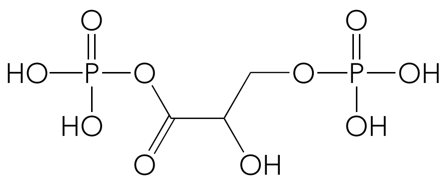
La energía de los seres vivos

Asamblea de ideas. **Busca las fórmulas desarrolladas de estas tres moléculas orgánicas. ¿Qué semejanzas y diferencias encuentras? Explica los valores de las entalpías de los enlaces en cada molécula.**

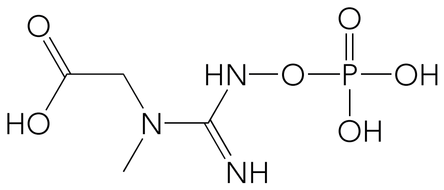
Fosfoenolpiruvato



1,3–difosfoglicerato



Fosfocreatina



Se asemejan en que todos tienen grupos fosfato. Se diferencian en el resto de la cadena.

La energía libre parece ser más negativa en estos compuestos cuanto menor es su número de átomos (sin contar los grupos fosfato).

6 LA QUÍMICA DEL CARBONO

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

1 COMPUESTOS DE CARBONO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.5.6. (EA.5.6.1.)

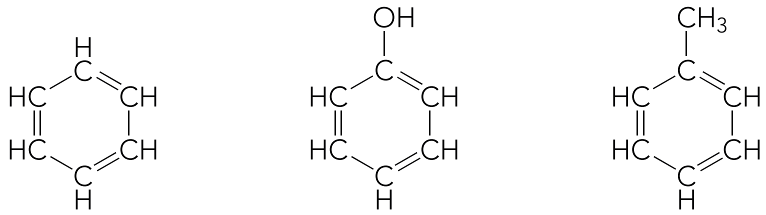
Página 170

1 **Con lo que sabes hasta ahora, ¿sería el CO_2 un compuesto de carbono? Razona tu respuesta.**

El CO_2 no sería un compuesto de carbono porque no contiene hidrógenos.

2 **El carbono es capaz de formar un tipo muy especial de ciclo que es el que tienen los denominados compuestos aromáticos, como el benceno, el fenol o el tolueno. Busca las fórmulas de estos tres compuestos, compáralas y deduce qué características tiene este ciclo. Las ecuaciones químicas ajustadas son:**

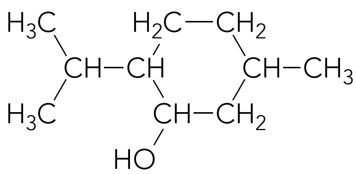
Los tres compuestos presentan un ciclo de seis carbonos con dobles enlaces alternados.



Benceno Fenol Tolueno

Aunque el alumnado está ya acostumbrado a realizar búsquedas en Internet, recomendamos recordarle las normas básicas para hacer uno uso seguro de las TIC, disponibles en anayaeducacion.es.

3 ¿Qué te hace decir eso? **¿Qué características del átomo de carbono, ya enumeradas, se reconocen en la fórmula del mentol que aparece a continuación?**



1) Los carbonos están unidos entre sí formando cadenas.

2) Parte de los carbonos están formando un ciclo.

3) Tiene ramificaciones.

4) Presenta un heteroátomo, el oxígeno.

En anayaeducacion.es dispone de un documento explicativo de la técnica de desarrollo del pensamiento «¿Qué te hace decir eso?», propuesta para resolver este ejercicio.

Página 171

4 **Si un compuesto cuenta con dos carbonos unidos mediante un enlace triple, ¿cuántos hidrógenos tendrá? Escribe su fórmula.**

Tendrá dos hidrógenos, uno unido a cada carbono. CH≡CH.

5 **Indica si son correctas las siguientes estructuras y corrige las erróneas.**

a) $CH_2{=}CH_2{-}CH_3$

b) $CH_3{-}C{\equiv}CH_2$

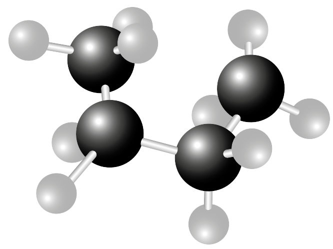
c) $CH_3{-}CH_2{-}CH_4$

a) Incorrecta. $CH_2{=}CH{-}CH_3$

b) Incorrecta. $CH_3{-}C{\equiv}CH$

c) Incorrecta. $CH_3{-}CH_2{-}CH_3$

6 **¿Es posible esta disposición para el butano?**



Sí, es posible. Los carbonos unidos por enlaces sencillos tienen la libertad de giro. Aunque, al no tener la forma de zigzag, no es la estructura más estable.

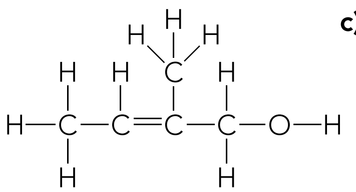
2 FÓRMULA DE LOS COMPUESTOS DE CARBONO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.5.6. (EA.5.6.1.)

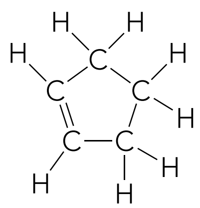
Página 172

7 **Escribe la fórmula semidesarrollada correspondiente a los siguientes compuestos:**

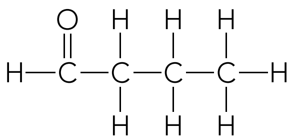
a)



c)

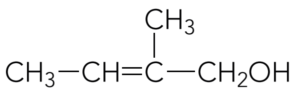


b)



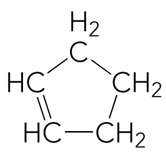
Las fórmulas semidesarrolladas son:

a)



b) $CHO{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3$

c)



8 **A partir de las siguientes fórmulas semidesarrolladas construye las correspondientes fórmulas desarrolladas. ¿Algunos de estos compuestos son isómeros?**

a) $CH_3{-}CH_2{-}CHO$

b) $CH_3{-}CO{-}CH_3$

c) $CH_3{-}CH_2{-}CH_2OH$

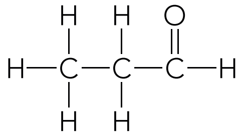
d) $CH_3{-}CH_2{-}CH(CH_3){-}COOH$

e) $CH_3{-}CO{-}CH{=}CH_2$

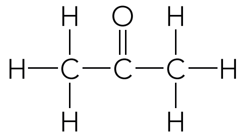
f) $HOOC{-}COOH$

Las fórmulas desarrolladas son:

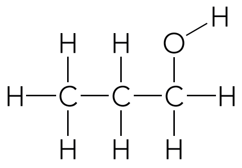
a)



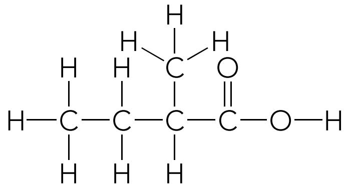
b)



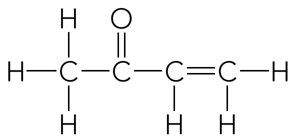
c)



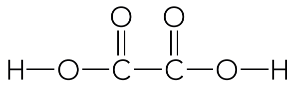
d)



e)



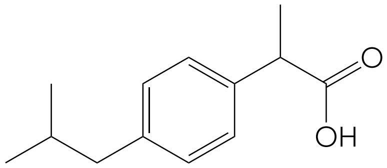
f)



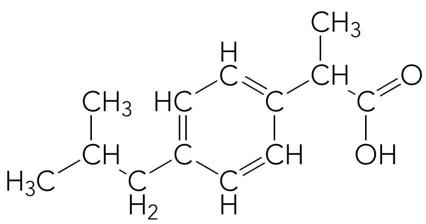
Son isómeros los compuestos a) y b).

Página 173

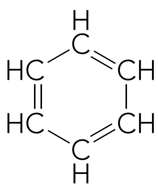
9 **El ibuprofeno es un medicamento antiinflamatorio cuya fórmula de esqueleto es la que aparece a continuación. A partir de ella escribe la correspondiente fórmula semidesarrollada.**



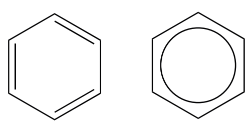
La formula semidesarrollada del ibuprofeno es:



10 **Escribe la fórmula de esqueleto del benceno a partir de su fórmula semidesarrollada. Busca en Internet la otra forma de representarse que tiene este compuesto.**



Las fórmulas de esqueleto correspondientes al benceno son:



La segunda forma representa mediante un círculo la deslocalización de los electrones en los seis átomos de carbono que forman el anillo. Ambas formas se encuentran fácilmente en Internet.

11 **En 1,250 g de un compuesto de carbono gaseoso formado únicamente por C, H y O se generan, por combustión con exceso de oxígeno, 1,833 g de CO_2 y 0,750 g de H_2O. Sabiendo que en condiciones normales esos 1,250 g ocupan un volumen de 0,933 L:**

a) Determina su fórmula molecular.

b) Construye una fórmula desarrollada que se corresponda con un compuesto de esa fórmula.

a) Fórmula molecular:

$$1{,}833\ \text{g} \cdot \frac{1\ \text{mol CO}_2}{44\ \text{g CO}_3} \cdot \frac{1\ \text{mol C}}{1\ \text{mol CO}_2} = 4{,}166 \cdot 10^{-2}\ \text{mol de C}$$

$$0{,}750\ \text{g} \cdot \frac{1\ \text{mol H}_2\text{O}}{18\ \text{g H}_2\text{O}} \cdot \frac{2\ \text{mol H}}{1\ \text{mol H}_2\text{O}} = 8{,}333 \cdot 10^{-2}\ \text{mol de H}$$

$$m_\text{O} = 1{,}250 - 4{,}166 \cdot 10^{-2}\ \text{mol C} \cdot \frac{12\ \text{g}}{1\ \text{mol C}} - 8{,}333 \cdot 10^{-2}\ \text{mol H} \cdot \frac{1\ \text{g}}{1\ \text{mol H}} =$$

$$= 0{,}666\,8\ \text{g O} \cdot \frac{1\ \text{mol}}{16\ \text{g O}} = 4{,}168 \cdot 10^{-2}\ \text{mol de O}$$

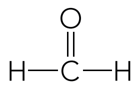
$$C_xH_yO_z;\quad x = \frac{4{,}166 \cdot 10^{-2}}{4{,}166 \cdot 10^{-2}} = 1;\quad y = \frac{8{,}333 \cdot 10^{-2}}{4{,}166 \cdot 10^{-2}} = 2;\quad z = \frac{4{,}166 \cdot 10^{-2}}{4{,}168 \cdot 10^{-2}} = 1;\quad CH_2O$$

$$M = \frac{m \cdot R \cdot T}{p \cdot V} = \frac{1{,}250 \cdot 0{,}082 \cdot 273}{1 \cdot 0{,}933} = 30{,}0\ \text{g/mol}$$

$$30 = n \cdot (12{,}0 \cdot 1 + 1{,}0 \cdot 2 + 16{,}0 \cdot 1) = 30;\quad n = \frac{30}{30} = 1$$

En conclusión, la fórmula molecular es: CH_2O

b) Fórmula desarrollada:



12 **El ácido adípico es un compuesto de carbono con gran interés industrial puesto que es el precursor de la producción del nailon. Está formado por C, H y O exclusivamente y presenta una masa molar de 146,4 g/mol. Al quemar una muestra de 4,864 g de ácido adípico con exceso de aire se producen 8,789 g de CO_2 y 2,966 g de H_2O. Calcula las fórmulas empírica y molecular del ácido adípico.**

$$8{,}789\ \text{g CO}_2 \cdot \frac{1\ \text{mol C}}{44\ \text{g CO}_2} = 0{,}1998\ \text{mol C};\quad 2{,}966\ \text{g} \cdot \frac{2\ \text{mol H}}{18\ \text{g H}_2\text{O}} = 0{,}3296\ \text{mol H}$$

$$n_\text{O} = \left(4{,}864 - 0{,}1998\ \text{mol C} \cdot \frac{12\ \text{g}}{1\ \text{mol}} - 0{,}329\,6\ \text{mol H} \frac{1\ \text{g}}{1\ \text{mol}}\right) \cdot 1 \frac{\text{mol}}{6\ \text{g O}} = 0{,}133\,6\ \text{mol O}$$

$$C_xH_yO_z;\ \left(x=\frac{0{,}199\,8}{0{,}133\,6}=1{,}5;\ \ y=\frac{0{,}329\,6}{0{,}133\,6}=2{,}5;\ \ z=\frac{0{,}133\,6}{0{,}133\,6}=1\right)\cdot 2;\ \ C_3H_5O_2$$

$$146{,}4=n\cdot(12{,}0\cdot 3+1{,}0\cdot 5+16{,}0\cdot 2)=73;\ \ n=\frac{146{,}4}{73}=2\ \rightarrow\ C_6H_{10}O_4$$

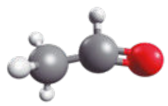
Página 174

13 Asocia cada una de las siguientes fórmulas semidesarrolladas con su modelo molecular:

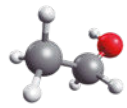
a) $CH_3{-}CH_2OH$ b) $CH_3{-}O{-}CH_3$ c) $CH_3{-}CHO$

1)

2)



3)



a) y 3)

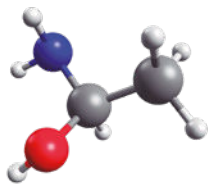
b) y 1)

c) y 2)

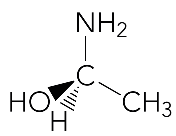
14 Con modelos moleculares de laboratorio construye las siguientes moléculas: $CH_3{-}CH_2{-}CH_3$; $CH_3{-}C{\equiv}CH$; $CH_3{-}CH_2{-}CH_2OH$; $CH_3{-}CHOH{-}CH_3$.

Actividad para hacer con los modelos moleculares.

15 Representa la fórmula de cuña del 1-aminoetanol correspondiente a este modelo molecular:



La fórmula solicitada es la siguiente:



16 Busca en Internet la representación de Fisher de la glucosa y de la galactosa y a partir de ellas escribe sus fórmulas semidesarrolladas. ¿Podrías distinguirlas por sus fórmulas semidesarrolladas?

$CHO{-}CHOH{-}CHOH{-}CHOH{-}CHOH{-}CH_2OH$, en ambos casos. No se pueden distinguir por su fórmula semidesarrollada.

Página 175

17 Indica qué clase de compuestos son cada una de las siguientes sustancias y el número de carbonos de su cadena principal: octano, etanol, propanona, ácido etanoico, propanal, metanol y ácido propanoico.

Octano: alcano, 8 C; etanol: alcohol, 2 C; acetona: cetona, 3 C; ácido etanoico: ácido carboxílico, 2 C; propanal: aldehído, 3 C; metanol: alcohol, 1 C y ácido propanoico: ácido carboxílico, 3 C.

18 **Escribe al menos tres miembros de la serie homóloga a la que pertenece el propino ($CH\equiv C-CH_3$).**

Existen muchas respuestas posibles: Los tres siguientes miembros de esa serie serían:

$CH\equiv C-CH_2-CH_3$ (but-1-ino)

$CH\equiv C-CH_2-CH_2-CH_3$ (pent-1-ino)

$CH\equiv C-CH_2-CH_2-CH_2-CH_3$ (hex-1-ino).

19 **Nombra un compuesto con 4 carbonos en su cadena principal y cuyo único grupo funcional es una cetona. ¿Existe algún otro compuesto con la misma fórmula empírica y distinto grupo funcional?**

Butanona. El inmediato es el butanal. También puede ser cualquiera de los butenol.

20 **Indica qué prefijo le correspondería a la cadena principal de estos compuestos.**

a) $CH_3-CH_2-CH_2-CH=CH-CH_3$

b) $CH_3-CH_2-CHOH-CH_3$

c) $HCOOH$

d) $CH_3-CHNH_2-CH_3$

e) $CH_3-CH(CH_3)-CHO$

f) $CH_3-CH_2-CH(CH_2-CH_2-CH_3)-(CH_2)_4-CH_3$

g) $CH_2=CH-CH_2-CO-NH_2$

a) hex. b) but. c) met. d) prop.

e) prop. f) non (porque la cadena más larga es la que coge el propilo y queda el etilo de sustituyente).

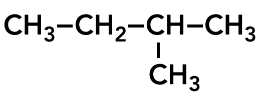
g) but.

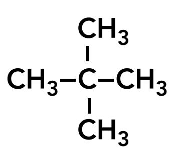
3 HIDROCARBUROS

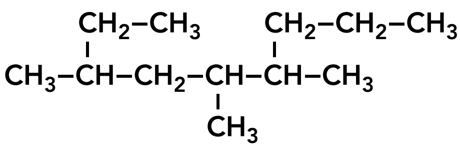
CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.5.1. (EA.5.1.1.)

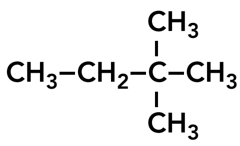
Página 176

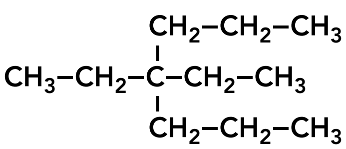
21 **Nombra los siguientes alcanos:**

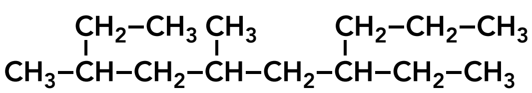
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

a) 2-metilbutano. b) 2,2-dimetilpropano. c) 3,5,6-trimetilnonano.

d) 2,2-dimetilbutano. e) 4,4-dietilheptano. f) 7-etil-3,5-dimetildecano.

22 Formula los siguientes alcanos:

a) 2-metilpentano.

b) 2,2-dimetilpropano.

c) 2,5-dimetil-3-propilheptano.

d) Tetrametilbutano.

e) 3-etil-2,3,5,5-tetrametiloctano.

f) 5-butil-5,6,7-trietil-2-metilnonano.

g) 4,7,8-trietil-2,7-dimetil-5-propildecano.

a) $CH_3–CH(CH_3)–CH_2–CH_2–CH_3$

b) $CH_3–C(CH_3)_2–CH_3$;

c) $CH_3CH(CH_3)–CH_2–CH(CH_2–CH_2–CH_3)–CH(CH_3)–CH_2–CH_3$

d) $CH_3–C(CH_3)_2–C(CH_3)_2–CH_3$

e)
$$\begin{array}{lllllllll} & & CH_3 & & CH_3 & & & & CH_3 \\ & & | & & | & & & & | \\ CH_3 & - & CH & - & C & - & CH_2 & - & C & - CH_2-CH_2-CH_3 \\ & & & & | & & & & | \\ & & & & CH_2-CH_3 & & & & CH_3 \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{ll} & CH_2-CH_2-CH_2-CH_3 \\ & | \\ CH_3-CH(CH_3)-CH_2-CH_2- & C(CH_2-CH_3)\text{-}CH(CH_2-CH_3)\text{-}CH(CH_2-CH_3)\text{-}CH_2-CH_3 \end{array}$$

g)
$$\begin{array}{ll} & CH_2-CH_3 \\ & | \\ CH_3-CH(CH_3)-CH_2-CH(CH_2-CH_3)\text{-}CH(CH_2-CH_2-CH_3)\text{-}CH_2- & C(CH_3)\text{-}CH(CH_2-CH_3)\text{-}CH_2-CH_3 \end{array}$$

Página 177

23 Nombra los siguientes alquenos y alquinos:

a) $CH_3–CH_2–CH_2–CH=CH–CH_3$

b) $CH_3–CH_2–C \equiv CH$

c)
$$\begin{array}{ll} & CH_2 \\ & \| \\ CH_3-CH_2-CH_2- & C-CH_2-CH_3 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{lllllll} & CH_3 & & CH_3 & & C\equiv CH & \\ & | & & | & & | & \\ CH_3- & CH & -CH_2- & CH & -CH_2- & CH & -CH_2-CH_2-CH_3 \end{array}$$

e) $CH_2=CH–CH=CH_2$

f)
$$\begin{array}{lllll} & CH_3 & & CH_2-CH_3 & \\ & | & & | & \\ CH_2= & C & -CH- & C & =CH-CH_3 \\ & & | & & \\ & & CH_3 & & \end{array}$$

a) Hex-2-eno. b) but-1-ino.

c) 2-etilpent-1-eno. d) 5,7-dimetil-3-propiloct-1-ino.

e) buta-1,3-dieno. f) 4-etil-2,3-dimetilhexa-1,4-dieno.

24 **Formula los siguientes compuestos:**

a) 2-metilbut-1-eno.

b) Butadiino.

c) Metilpropeno.

d) 2,5-dimetilhex-3-ino.

e) 4-etilocta-1,4,6-trieno.

f) 2-pentil-1,3-pentadieno.

g) 6,6-dimetil-3-propilnona-1,4,7-triino.

a) $CH=C(CH_3)-CH_2-CH_3$ b) $CH\equiv C-C\equiv CH$

c) $CH_2=C(CH_3)-CH_3$ d) $CH_3-CH(CH_3)-C\equiv C-CH(CH_3)-CH_3$

e) $CH_2=CH-CH_2-C(CH_2-CH_3)=CH-CH=CH-CH_3$

f) $CH_2=C(CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-CH_3)-CH=CH-CH_3$

g) $CH\equiv C-CH(CH_2-CH_2-CH_3)-C\equiv C-C(CH_3)_2-C\equiv C-CH_3$

25 **Formula o nombra, según corresponda:**

a) $\mathbf{CH\equiv C-CH=CH_2}$

b) $\mathbf{CH_2=CH-C\equiv C-CH=CH_2}$

c)
$$\mathbf{CH_2=CH-CH_2-CH=\overset{\overset{\displaystyle C\equiv CH}{|}}{C}-CH_2-CH=CH_2}$$

d) 3-butil-4,5-dimetilhex-3-en-1-ino.

e) 7-metiloct-6-en-1,4-diino.

f) 3-etenil-6-etinilnona-2,7-dien-4-ino.

a) But-1-en-3-ino. b) hexa-1,5-dien-3-ino.

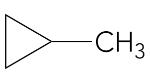
c) 4-etinilocta-1,4,7-trieno. d) $CH\equiv C-C(CH_2-CH_2-CH_2-CH_3)=C(CH_3)-CH(CH_3)-CH_3$

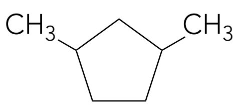
e) $CH\equiv C-CH_2-C\equiv C-CH=C(CH_3)-CH_3$

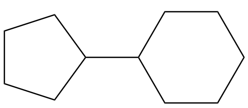
f) $CH_3-CH=C(CH=CH_2)-C\equiv C-CH(C\equiv CH)-CH=CH-CH_3$

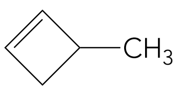
Página 178

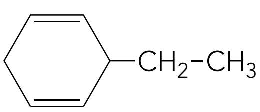
26 **Nombra los siguientes hidrocarburos alicíclicos:**

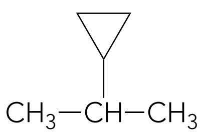
a) 

d) 

b) 

e) 

c) 

f) 

a) Metilciclopropano. d) 1,3-dimetilciclopentano.

b) Ciclopentilciclohexano. e) 3-metilciclobuteno.

c) 3-etilciclohexa-1,4-dieno. f) 2-ciclopropilpropano.

27 **Formula los siguientes compuestos:**

a) **Ciclooctano.**

b) **Propilciclobutano.**

c) **1-ciclobutilpropano.**

d) **1,3-dietil-1,4-dimetilciclopentano.**

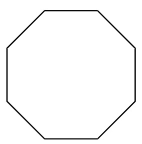
e) **Ciclohexa-1,3-diino.**

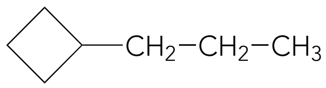
f) **1-metilciclopropeno.**

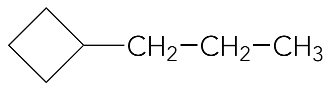
g) **3-metilciclopropeno.**

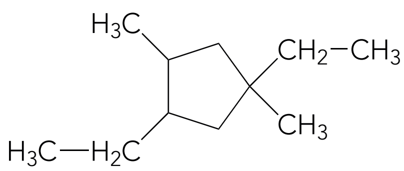
h) **Ciclopropilciclohexano.**

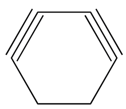
i) **Ciclopentilbut-2-ino.**

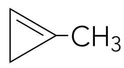
a) 

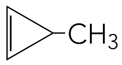
b) 

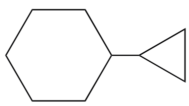
c) 

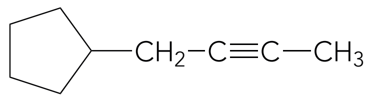
d) 

e) 

f) 

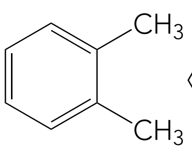
g) 

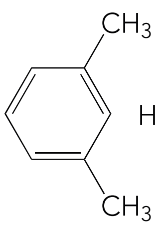
h) 

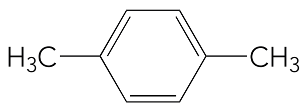
i) 

Página 179

28 **Los xilenos son bencenos con dos sustituyentes metilo. Pon la fórmula del *o*-xileno, *m*-xileno y *p*-xileno, así como su nombre sistemático.**

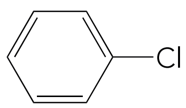


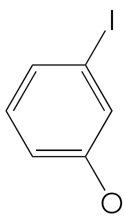


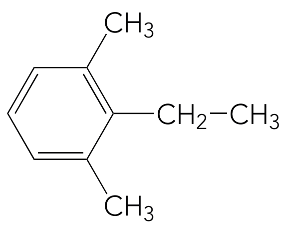


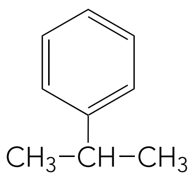
1,2-dimetilbenceno 1,3-dimetilbenceno 1,4-dimetilbenceno

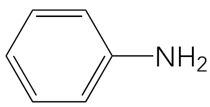
29 **Formula los siguientes compuestos aromáticos: a) clorobenceno; b) *m*-yodofenol; c) 2-etil-1,3-dimetilbenceno; d) 2-fenilpropano; e) anilina; f) 1,2-difeniletano.**

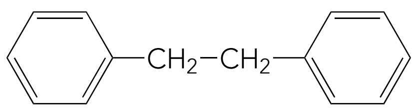
a) 

b) 

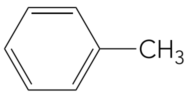
c) 

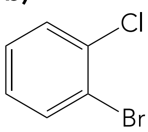
d) 

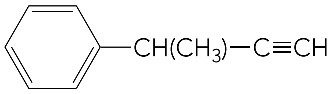
e) 

f) 

30 **Nombra los siguientes compuestos:**

a) 

b) 

c) 

a) Tolueno o metilbenceno. b) 1-bromo-2-clorobenceno. c) 3-fenilbut-1-ino.

31 **Formula o nombra los siguientes haloalcanos:**

a) $CHCl_3$

b) $CHF{=}CH{-}CH_2Cl$

c) 2-bromo-2-metilpropano.

d) Tetraclorometano.

e) Clorobut-2-ino.

a) Triclorometano o cloroformo. b) 3-cloro-1-fluoropropeno.

c)
```
        Br
        |
H3C — C — CH3
        |
        CH3
```

d) CCl_4

e) $CH_2Cl{-}C{\equiv}C{-}CH_3$

32 **Los CFC o compuestos fluoroclorocarbonados contribuyen significativamente a la destrucción de la capa de ozono de la atmósfera. En grupos, haced un informe sobre su estructura y cómo influye, en la situación actual, su emisión a la atmósfera.**

Respuesta abierta. Para realizar el trabajo en grupo, sugerimos la utilización de las técnicas de aprendizaje cooperativo «Sumamos» o «Rompecabezas»; cuyas explicaciones pueden consultarse en **anayaeducacion.es**.

4 COMPUESTOS DE CARBONO OXIGENADO

CE.1.1. **(EA.1.1.1.-1.1.2.)** **CE.5.2.** **(EA.5.2.1.)**

Página 180

33 **Formula los siguientes alcoholes y clasifícalos según sean primarios, secundarios o terciarios: a) Etanol; b) 3-metilbutan-1-ol; c) Pentan-2-ol; d) Pentan-3-ol; e) 3,4-dietilheptan-4-ol; f) ciclohexanol.**

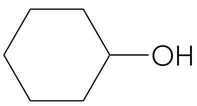
a) CH_3CH_2OH

b) $CH_2OH{-}CH_2{-}CH(CH_3){-}CH_3$

c) $CH_3{-}CHOH{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3$

d) $CH_3{-}CH_2{-}CHOH{-}CH_2{-}CH_3$

e) $CH_3{-}CH_3{-}CH(CH_2{-}CH_3){-}COH(CH_2{-}CH_3){-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3$

f) 

Alcohol primario: etanol y 3-metilbutan-1-ol.

Alcohol secundario: pentan-2-ol, pentan-3-ol y ciclohexanol.

Alcohol terciario: 3,4 dietilheptan-4-ol.

34 **Nombra los siguientes alcoholes:**

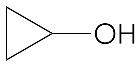
a) $CH_3{-}CH_2{-}CHOH{-}CH(CH_3){-}CH_2{-}CH_3$

b) $CH_2Br{-}CHOH{-}CH_3$

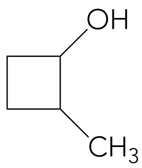
c) $CH_3{-}CHOH{-}CH_2{-}CHOH{-}CH_3$

d) $CH_2OH{-}CH_2{-}C(OH)_2{-}CH_3$

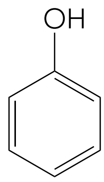
e)



f)



g)



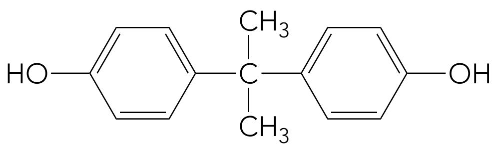
a) 4-metilhexan-3-ol. b) 1-bromopropan-2-ol. c) Pentano-2,4-diol.

d) Butano-1,3,3-triol. e) Ciclopropanol. f) 2-metilciclobutanol. g) Fenol.

35 **Los glicoles son compuestos con dos grupos hidroxilos en diferentes átomos de carbono, normalmente en carbonos adyacentes, aunque no es obligatorio. Formula y nombra tres glicoles y averigua una aplicación común de este tipo de compuestos.**

Respuesta libre. Tres posibles ejemplos son el $CH_2OH{-}CH_2OH$ (etano-1,2-diol), $CH_2OH{-}CHOH{-}CH_3$ (propano-1,2-diol) y el $CH_2OH{-}CHOH{-}CH_2{-}CH_3$ (butano-1,2-diol). Entre sus aplicaciones, es muy habitual su uso como descongelante.

36 Las desventajas o los inconvenientes. **El bisfenol A, cuya estructura se presenta a continuación, es un compuesto usado en la fabricación de polímeros. Busca información y haz un informe sobre la controversia acerca de sus posibles repercusiones en la salud.**



Respuesta libre. Una fuente fiable para la investigación puede ser:
https://www.efsa.europa.eu/en/topics/topic/bisphenol

En **anayaeducacion.es** dispone de un documento explicativo de la técnica de desarrollo del pensamiento «Las desventajas y los inconvenientes», propuesta para resolver este ejercicio.

Página 181

37 **Formula los siguientes compuestos: a) dietil éter; b) etoxipropano; c) butil etil éter; d) fenil metil éter; e) etoxibenceno; f) 2,4,6-trioxaheptano.**

a) $CH_3{-}CH_2{-}O{-}CH_2{-}CH_3$ b) $CH_3CH_2{-}O{-}CH_2CH_2CH_3$

c) $CH_3CH_2{-}O{-}CH_2CH_2CH_2CH_3$ d) $C_6H_5{-}O{-}CH_3$

e) $CH_3{-}CH_2{-}O{-}C_6H_5$ f) $CH_3{-}O{-}CH_2{-}O{-}CH_2{-}O{-}CH_3$

38 **Utiliza la nomenclatura indicada para nombrar los siguientes éteres:**

a) $CH_3{-}CH_2{-}CH_2{-}O{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3$ **(grupo funcional)**

b) $CH_3{-}O{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3$ **(grupo funcional)**

c) $CH_3{-}CH(CH_3){-}O{-}CH_2{-}CH_3$ **(sustitución)**

d) $CH_3{-}CH(OCH_3){-}CH_2(OCH_3)$ **(sustitución)**

e) $CH_3{-}CH_2{-}O{-}CH_2{-}O{-}CH_3$ **(reemplazamiento)**

a) Dipropil éter. b) Metil pentil éter. c) 2-etoxipropano.

d) 1,2-dimetoxipropano. e) 2,4-dioxahexano.

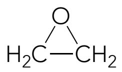
39 **Averigua por qué el dietil éter o éter etílico se dejó de usar, de forma general, como anestésico.**

Respuesta abierta.

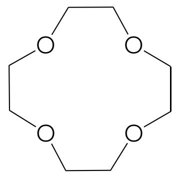
Entre otros motivos, se dejó de utilizar debido a su peligrosidad por ser altamente inflamable e irritante para algunos pacientes.

40 **Nombra los siguientes éteres cíclicos:**

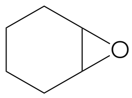
a)



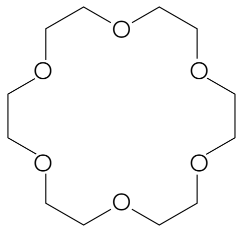
d)



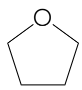
b)



e)



c)



a) 1,2-epoxietano. b) 1,2-epoxiciclohexano. c) 1,4-epoxibutano.

d) 12-corona-4. e) 18-corona-6.

Página 182

41 **Nombra los siguientes aldehídos o cetonas: a) Butanal; b) butanona; c) etanodial; d) pentano-2,4-diona; e) pentano-2,3-diona; f) propenal; g) hex-4-in-2-ona.**

a) $CH_3–CH_2–CH_2–CHO$ b) $CH_3–CH_2–CO–CH_3$ c) $CHO–CHO$

d) $CH_3–CO–CH_2–CO–CH_3$ e) $CH_3–CO–CO–CH_2–CH_3$ f) $CH_2=CH–CHO$

g) $CH_3–CO–CH_2–C\equiv C–CH_3$

42 **Formula los compuestos que aparecen a continuación:**

a) $CH_3–CH_2–CH_2–CO–CH_3$

b) $CH_2OH–CH_2–CH_2–CHO$

c) $CH_3–CO–CO–CH_3$

d) $CHO–CH_2–CH_2–CH_2–CH_2–CHO$

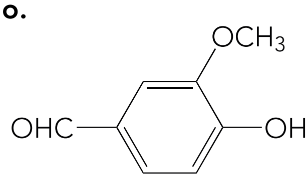
e) $CH_3–CH(CH_2–CH_3)–CO–CH=CH_2$

f) $CH_3–CO–CHOH–CHO$

a) Pentan-2-ona. b) 4-hidroxibutanal. c) Butanodiona.

d) Hexanodial. e) 4-etilpent-1-en-3-ona. f) 2-hidroxi-3-oxobutanal.

43 **La vainillina, $C_8H_8O_3$, es la responsable del aroma característico de la vainilla y es muy empleada en alimentación. Escribe su fórmula sabiendo que su nombre IUPAC es 4-hidroxi-3-metoxibenzaldehído.**



44 **Piensa en alguna aplicación de la propanona o acetona. A continuación, amplía tus conocimientos buscando en Internet otros usos o aplicaciones.**

Respuesta abierta. Quitaesmaltes, quitamanchas, disolvente, materia prima para fabricar polímeros como el metilmetacrilato o las resinas de policarbonato, fabricación de barnices, excipiente en productos farmacéuticos, etc.

45 **Busca la fórmula de al menos cuatro azúcares simples e infiere cuáles son las características estructurales que los definen. A continuación, nómbralos siguiendo las normas de la IUPAC.**

Respuesta libre. Las características comunes es que son cetonas o aldehídos con varios grupos alcohol.

Página 183

46 **Nombra o formula los siguientes ácidos carboxílicos:**

a) $CH_3-CH_2-CH_2-COOH$

b) $CH_3-CH=CH-COOH$

c) $CH_2=CH-CH_2-COOH$

d) Ácido metanoico.

e) Ácido 3-metilpentanoico.

f) Ácido 3-cloropropenoico.

a) Ácido butanoico.

b) Ácido but-2-enoico.

c) Ácido but-3-enoico

d) HCOOH.

e) $CH_3-CH_2-CH(CH_3)-CH_2-COOH$.

f) $CHCl=CH-COOH$.

47 **Busca en Internet la fórmula estructural del ácido graso linoleico y nómbralo siguiendo las normas de la IUPAC. Este ácido, ¿es saturado o insaturado?**

$HOOC-(CH_2)_7-CH=CH-CH_2-CH=CH-(CH_2)_4-CH_3$.

Ácido octadeca-9,12-dienoico. Es un ácido graso insaturado.

48 **Formula el propanoato de metilo y el etanoato de propilo.**

$CH_3-CH_2-COO-CH_3$ y $CH_3-COO-CH_2-CH_2-CH_3$

49 **Nombra los siguientes ésteres utilizando las normas de la IUPAC:**

a) $CH_3-COO-CH_3$

b) $HCOO-CH_2-CH_3$

a) Etanoato de metilo.

b) Metanoato de etilo.

50 **Formula los siguientes compuestos teniendo en cuenta que derivan de los nombres propios de sus ácidos carboxílicos:**

a) Acetato de etilo; b) Formiato de propilo; c) Oxalato de sodio.

a) $CH_3-COO-CH_2-CH_3$ b) $HCOOCH_2-CH_2-CH_3$ c) NaOOC–COONa

5 COMPUESTOS DE CARBONO NITROGENADO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.5.2. (EA.5.2.1.)

Página 184

51 **Formula las siguientes aminas: a) propan-2-amina; b) butilamina; c) prop-2-en-1-amina; d) dimetilamina; e) N-etilbutanamina; f) 3-cloro-N-metilpentan-2-amina.**

a) $CH_3–CH(NH_2)–CH_3$

b) $CH_3–CH_2–CH_2–CH_2–NH_2$

c) $CH_2=CH–CH_2–NH_2$

d) $NH(CH_3)_2$

e) $CH_3–CH_2–CH_2–CH_2–NH–CH_2–CH_3$

f) $CH_3–CH(NHCH_3)–CHCl–CH_2–CH_3$

52 **El punto de ebullición normal a 1 atm de presión de la etanamina es de 17 °C, mientras que la del etanol, en esas mismas condiciones, es de 78 °C. ¿Cómo explicas esta diferencia?**

La etanamina forma unos enlaces de hidrógeno más débiles que los alcoholes de masa molar similar.

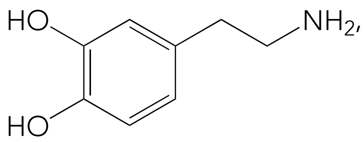
En **anayaeducacion.es** su alumnado puede consultar las características de los textos explicativos, así como consejos para hablar mejor.

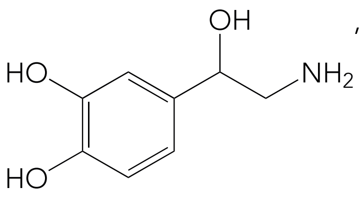
53 Cabezas numeradas. **Muchos neurotransmisores, moléculas que transmiten el impulso nervioso, contienen grupos amino. Ejemplo de ellos son la glicina, el ácido glutámico, el GABA, la dopamina, la noradrenalina o la adrenalina. Buscad en Internet sus fórmulas estructurales y trabajad en grupo para nombrarlos siguiendo las normas de la IUPAC explicadas.**

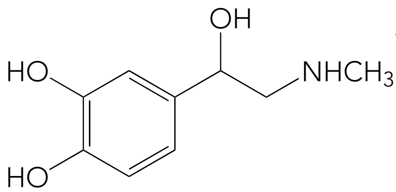
Glicina: $H_2N–CH_2–COOH$, ácido 2-aminoetanoico.

Acido glutámico: $HOOC–CH_2–CH_2–CH(NH_2)–COOH$, ácido 2-aminopentanodioico.

GABA o ácido γ-aminobutírico, $H_2N–CH_2–CH_2–CH_2–COOH$, ácido 4-aminobutanoico.

Dopamina, , 4-(2-aminoetil)benceno-1,2-diol.

Noradrenalina, , 4-(2-amino-1-hidroxietil)benceno-1,2-diol.

Adrenalina, , 4-[1-hidroxi-2-(metilamino)etil]benceno-1,2-diol.

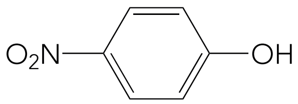
En **anayaeducacion.es** dispone de un documento explicativo de la técnica de aprendizaje cooperativo «Cabezas numeradas», propuesta para resolver este ejercicio.

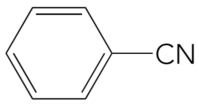
Página 185

54 **Nombra los siguientes compuestos: a) $CH_3–CH_2NH_2$; b) $H_2N–CH_2–CH_2–NH_2$; c) $CH_3–CH_2NO_2$; d) $CH_3–CN$; e) $CH_3–CONH_2$; f) CH_3 $CONH–CH_3$.**

a) Etanamina. b) Etano-1,2-diamina. c) Nitroetano.
d) Etanonitrilo o cianuro de metilo. e) Etanamida. f) *N*-metiletanamida.

55 Formula los siguientes compuestos de carbono nitrogenados: a) *p*-nitrofenol; b) cianuro de fenilo; c) 2,3-dimetilbutanonitrilo; d) 2-metilbutanamida; e) *N*-metilbutanamida.

a) 

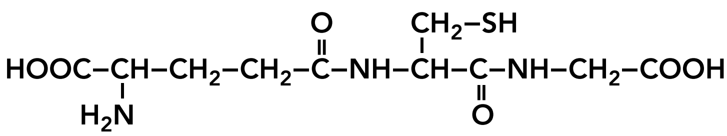
b) 

c) $CH_3–CH(CH_3)–CH(CH_3)–CN$

d) $CH_3–CH_2–CH(CH_3)–CONH_2$

e) $CH_3–CH_2–CH_2–CONH–CH_3$

56 A continuación, se presenta la estructura del glutatión. Averigua de qué aminoácidos está constituido y si las amidas que presenta son las que se suelen formar cuando se unen los aminoácidos.



Por orden de aparición, los aminoácidos son: el ácido glutámico, cisteína y glicina. Una de las amidas que contiene este compuesto no es la que se suele formar, puesto que usualmente se forma entre el grupo carboxilo del carbono-1 y el grupo amina del aminoácido siguiente. En este caso, la amida se forma con el segundo grupo carboxilo que presenta el ácido glutámico, el cual está en posición 5 y no 1.

8 ISOMERÍA

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.5.3. (EA.5.3.1.)

Página 188

57 Formula y nombra todos los isómeros de cadena de fórmula molecular C_5H_{12}.

I) $CH_3–CH_2–CH_2–CH_2–CH_3$, pentano.

II) $CH_3–CH_2–CH(CH_3)–CH_3$, 2-metilbutano.

III) $CH_3–C(CH_3)_2–CH_3$, dimetilpropano.

58 Dado el 2-metilbutan-2-ol escribe y nombra todos sus isómeros de posición.

Del $CH_3–COH(CH_3)–CH2–CH_3$, 2-metilbutan-2-ol serían isomeros de posición aquellos en los que el OH se coloque en cualquiera de los otros tres carbonos; es decir:

$CH_2OH–CH(CH_3)–CH_2–CH_3$, 2-metilbutan-1-ol

$CH_3–CHOH–CH(CH_3)–CH_3$; 3-metilbutan-2-ol

$CH_2OH–CH_2–CH(CH_3)–CH_3$, 3-metilbutan-1-ol

59 Halla y nombra dos isómeros de función de un compuesto de 3 átomos de carbono y un átomo de oxígeno.

Hay varias opciones, por ejemplo:

$CH_3–CO–CH_3$, propanona, y $CH_3–CH_2–CHO$, propanal.

$CH_3–CH_2–CH_2OH$, propan-1-ol, y $CH_3–CH_2–O–CH_3$, etil metil éter.

60 **Indica el tipo de isomería, si existe, que presentan los siguientes compuestos con la 3-metilhexanona. Pon sus fórmulas estructurales:**

a) 3-metilhexan-2-ol.
b) 4-metilhexan-2-ona.
c) Heptanal.
d) 4-metilhexan-3-ona.
e) 3-metilhexanal.
f) 3,4-dimetilpentanona.
g) 3,4-dimetilpentanal.
h) 3-etilpentanona.

3-metilhexanona: $CH_3–CO–CH(CH_3)–CH_2–CH_2–CH_3$

a) $CH_3–CHOH–CH(CH_3)–CH_2–CH_2–CH_3$. No es isómero.

b) $CH_3–CO–CH_2–CH(CH_3)–CH_2–CH_3$. Es isómero de cadena.

c) $CH_3–CH_2–CH_2–CH_2–CH_2–CH_2–CHO$. Es isómero, pero es a la vez de cadena y de función.

d) $CH_3–CH_2–CO–CH(CH_3)–CH_2–CH_3$. Es isómero, pero es a la vez de cadena y de posición.

e) $CHO–CH_2–CH(CH_3)–CH_2–CH_2–CH_3$. Es isómero de función.

f) $CH_3–CO–CH(CH_3)–CH(CH_3)–CH_3$. Es isómero de cadena.

g) $CHO–CH_2–CH(CH_3)–CH(CH_3)–CH_3$. Es isómero, pero es a la vez de cadena y de función.

h) $CH_3–CO–CH(CH_2–CH_3)–CH_2–CH_3$. Es isómero de cadena.

9 EL PETRÓLEO Y EL GAS NATURAL

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.5.4. (EA.5.4.1.-5.4.2.)

Página 189

61 **Elabora un informe sobre el proceso de obtención de hidrocarburos a partir del petróleo, incluyendo información sobre sus usos.**

Averigua si algunos de ellos son susceptibles de ser sometidas a algún proceso descrito en el texto. Finalmente, reflexiona sobre qué pasaría si las reservas de petróleo se agotaran.

Respuesta libre.

En anayaeducacion.es su alumnado dispone de información sobre los diferentes tipos de textos que le ayudará a elaborar el informe solicitado.

62 ODS **Investiga las fuentes de energía renovables que hay en tu comunidad autónoma y reflexiona sobre como se podría contribuir a la consecución de la meta 7.2.**

Respuesta libre.

Su alumnado puede visualizar el vídeo sobre la meta 7.2 de los ODS en anayaeducacion.es.

63 **Propón iniciativas que ayuden a paliar las repercusiones negativas que tiene el uso de estas fuentes de energía no renovables.**

Respuesta libre.

TRABAJA CON LO APRENDIDO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.1.2. (EA.1.2.1.-1.2.2.) CE.5.1. (EA.5.1.1.) CE.5.2. (EA.5.2.1.) CE.5.3. (EA.5.3.1.) CE.5.4. (EA.5.4.1.-5.4.2.) CE.5.5. (EA.5.5.1.) CE.5.6. (EA.5.6.1.-5.6.2.)

Página 194

Compuestos de carbono

1 ¿Por qué crees que es más correcto decir compuestos de carbono que compuestos orgánicos?

Porque no todos los compuestos de carbono se encuentran en los seres vivos.

2 Indica las características del átomo de carbono que hacen posible que se genere una diversidad tan alta de compuestos de carbono.

Las características son:

1) Puede unirse a otros átomos de carbono formando largas cadenas.

2) Puede formar ciclos, en los que el último carbono se une al primero.

3) Tanto en los ciclos como en las cadenas abiertas, los átomos de carbono se pueden unir a otros carbonos, formando ramificaciones.

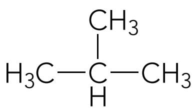
4) Los átomos de carbono pueden estar unidos por distintos tipos de enlace, formando compuestos distintos.

5) Aunque la mayoría de los compuestos de carbono se componen mayoritariamente por carbono e hidrógeno, el carbono también se puede unir a otros elementos, llamados heteroátomos, como pueden ser nitrógeno, oxígeno, azufre o fósforo.

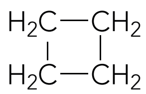
3 Dado un compuesto con 4 carbonos unidos por enlaces sencillos, representa las siguientes cadenas carbonadas completando las estructuras con tantos hidrógenos como sean necesarios: a) cadena lineal abierta sin ramificaciones; b) cadena lineal abierta con una ramificación; c) cadena lineal cerrada.

a) $CH_3–CH_2–CH_2–CH_3$

b)



c)



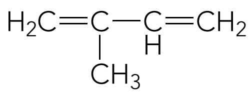
4 ¿Puede un carbono que está enlazado por un enlace triple unirse a tres átomos distintos? ¿Y a uno solo?

La respuesta es no para ambas preguntas. Un carbono enlazado mediante un enlace triple solo se puede unir a dos átomos.

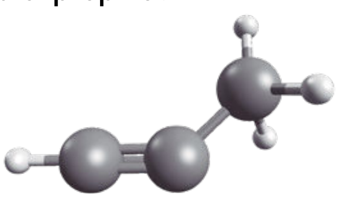
5 Representa un compuesto de cinco átomos de carbono que presente enlaces sencillos y dos enlaces doble carbono-carbono. Añade tantos hidrógenos como sean necesarios.

Puede haber varias respuestas.

Una de las posibles es:



6 ¿Es posible esta disposición para el propino?

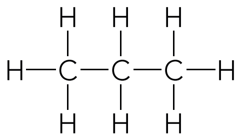


Esa disposición no es posible porque los átomos unidos a los carbonos que tienen el enlace triple deben tener una disposición lineal y no angular como muestra la figura.

Fórmula de los compuestos de carbono

7 **Escribe la fórmula desarrollada y semidesarrollada correspondiente a la fórmula molecular C_3H_8.**

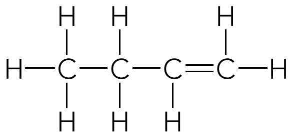
Fórmula desarrollada:

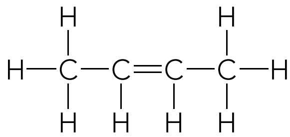


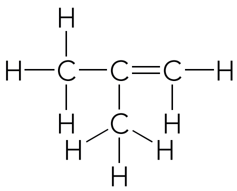
Fórmula semidesarrollada: $CH_3–CH_2–CH_3$.

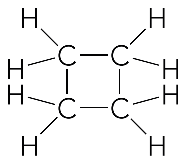
8 **Construye al menos tres fórmulas desarrolladas distintas correspondientes a la fórmula molecular C_4H_8.**

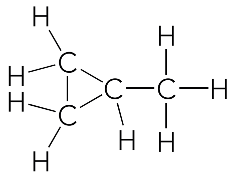
Las fórmulas posibles son:











9 **Dibuja las fórmulas desarrolladas o semidesarrolladas, según corresponda, de los siguientes compuestos:**

a) $CH_3-CH=CH-CH=CH_2$

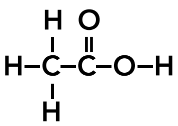
b) CH_3OH

c) HCHO

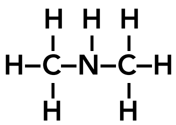
d) $CH\equiv C-CH(CH_3)-CH_2-CH_3$

e) $CH_3-NH-CH_2-CH_3$

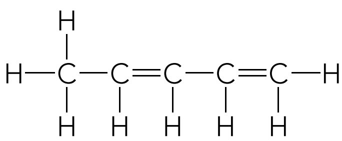
f)



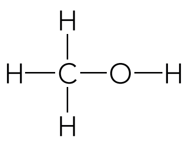
g)



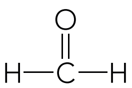
a)



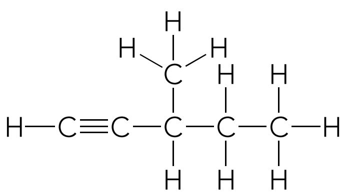
b)



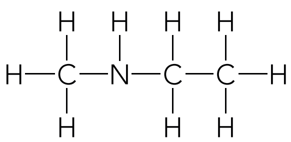
c)



d)



e)



f) CH_3-COOH

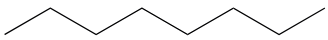
g) $CH_3-NH-CH_3$

10 **Escribe la fórmula desarrollada y la fórmula de esqueleto del octano sabiendo que su fórmula semidesarrollada es:**

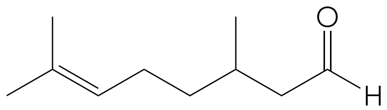
$$CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-CH_3$$

Fórmula desarrollada:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} & & H & & H & & H & & H & & H & & H & & H & & H & & \\ & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & \\ H & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & H \\ & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & \\ & & H & & H & & H & & H & & H & & H & & H & & H & & \end{array}$$

Fórmula esqueleto: 

11 **La citronela es una sustancia, presente en un género de plantas tropicales, que se usa en perfumería y como repelente de insectos. Obtén su fórmula semidesarrollada a partir de su fórmula en esqueleto:**



$$\begin{array}{l} \quad\;\; CH_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad CH_3 \\ \quad\;\;\; | \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; | \\ H_3C-C=CH-CH_2-CH_2-CH-CH_2-CHO \end{array}$$

12 **Al quemar 1,345 g de un compuesto constituido por C,H y O, se obtienen 1,973 g de dióxido de carbono y 0,807 g de agua. Sabiendo que cuando se vaporizan 2 g de ese compuesto a 20 °C y 0,987 atm ocupa un volumen de 0,811 L, calcula su fórmula molecular.**

$$1{,}973\ g \cdot \frac{1\ mol\ CO_2}{44\ g\ CO_2} \cdot \frac{1\ mol\ C}{1\ mol\ CO_2} = 4{,}48 \cdot 10^{-2}\ mol\ C$$

$$0{,}807\ g \cdot \frac{1\ mol\ H_2O}{18\ g\ H_2O} \cdot \frac{2\ mol\ H}{1\ mol\ H_2O} = 8{,}97 \cdot 10^{-2}\ mol\ H$$

$$m_O = 1{,}345 - 4{,}48 \cdot 10^{-2}\ mol\ C \cdot \frac{12\ g}{1\ mol\ C} - 8{,}97 \cdot 10^{-2}\ mol\ H \cdot \frac{1\ g}{1\ mol\ H} =$$

$$= 0{,}718\ g\ O \cdot \frac{1\ mol}{16\ g\ O} = 4{,}49 \cdot 10^{-2}\ mol\ O$$

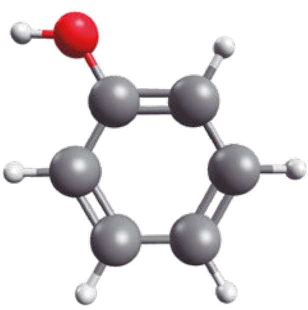
$$C_xH_yO_z;\ \ x = \frac{4{,}48 \cdot 10^{-2}}{4{,}48 \cdot 10^{-2}} = 1;\ \ y = \frac{8{,}97 \cdot 10^{-2}}{4{,}48 \cdot 10^{-2}} = 2;\ \ z = \frac{4{,}49 \cdot 10^{-2}}{4{,}48 \cdot 10^{-2}} = 1 \ \rightarrow\ CH_2O$$

$$M = \frac{m \cdot R \cdot T}{p \cdot V} = \frac{2 \cdot 0{,}082 \cdot 293}{0{,}987 \cdot 0{,}811} = 60{,}0\ g/mol$$

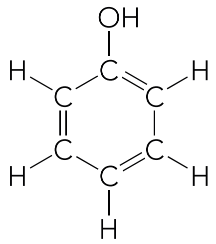
$$60 = n \cdot (12{,}0 \cdot 1 + 1{,}0 \cdot 2 + 16{,}0 \cdot 1) = 30;\ \ n = \frac{60}{30} = 2$$

Fórmula molecular: $C_2H_4O_2$

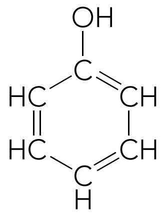
13 **Escribe las fórmulas desarrolladas y semidesarrolladas del fenol a partir de su modelo molecular:**



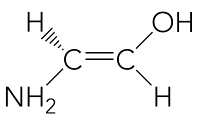
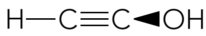
Fórmula desarrollada:



Fórmula semidesarrollada:



14 Razona si son correctas las siguientes fórmulas:

a)  **b)** 

a) No es correcta porque todos los enlaces sobre un carbono con un enlace doble están sobre el mismo plano.

b) No es correcta porque los enlaces de un carbono con un enlace triple forman una línea recta y no pueden estar sobre dos planos distintos.

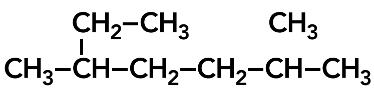
15 Completa la siguiente tabla indicando el número de carbonos y la clase de compuesto que es a partir de su nombre.

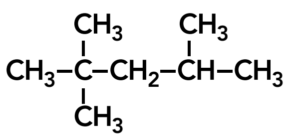
Nombre	N° C	Clase compuesto
Propanal	3	Aldehído
Heptino	7	Alquino
Butanamina	4	Amina
Ácido pentanoico	5	Ácido carboxílico
Metanol	1	Alcohol
Eteno	2	Alqueno
Decano	10	Alcano

Página 195

Hidrocarburos

16 Nombra los siguientes hidrocarburos lineales.

a) 

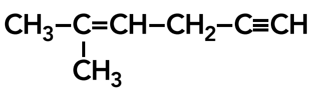
b) 

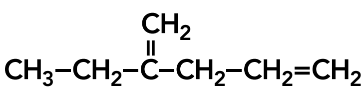
c) $CH_3-CH(CH_3)-CH_2-CH_3$

d) $CH_3-CH_2-CH(CH_2-CH_3)-CH(CH_3)_2$

e) $CH_3-CH=CH-CH_2-CH=CH_2$

f) $CH\equiv C-C\equiv CH$

g) 

h) 

a) 2,5-dimetilheptano.
b) 2,2,4-trimetilpentano.
c) 2-metilbutano.
d) 3-etil-2-metilpentano.
e) Hexano-1,4-dieno.
f) Butadiino.
g) 5-metilhex-4-en-1-ino.
h) 2-etilpenta-1,4-dieno.

17 **Escribe la fórmula semidesarrollada de:**

a) 4,4-dietil-2-metilhexano.
b) 4-etil-2,4-dimetilhexano.
c) Metilbutano.
d) Etilpentano.
e) Hexa-1,4-dieno.
f) 2-metilbuta-1,3-dieno.
g) Hexa-1,5-dien-3-ino.
h) 7-etil-6-metildec-6-en-2-ino.

a) $CH_3–CH(CH_3)–CH_2–C(CH_2–CH_3)_2–CH_2–CH_3$

b) $CH_3–CH(CH_3)–CH_2–C(CH_2–CH_3)(CH_3)–CH_2–CH_3$

c) $CH_3–CH(CH_3)–CH_2–CH_3$

d) $CH_3–CH_2–CH(CH_2–CH_3)–CH_2–CH_3$

e) $CH_2=CH–CH_2–CH=CH–CH_3$

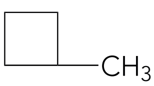
f) $CH_2=C(CH_3)–CH=CH_2$

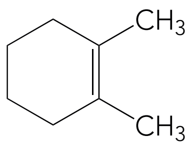
g) $CH_2=CH–C{\equiv}C–CH=CH_2$

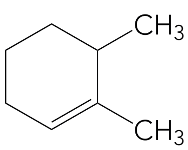
h) $CH_3–C{\equiv}C–CH_2–CH_2–C(CH_3)=C(CH_2–CH_3)–CH_2–CH_2–CH_3$

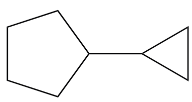
18 **Formula los siguientes hidrocarburos cíclicos:**

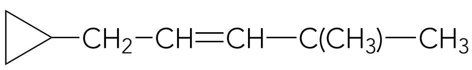
a) Metilciclobutano.
b) 1,2-dimetilciclohexeno.
c) 1,6-dimetilciclohexeno.
d) Ciclopropilciclopentano.
e) 1-ciclopropil-4-metilpent-2-eno.
f) Anilina.
g) *m*-metilfenol.
h) *o*-diclorobenceno.
i) Ácido *p*-metilbenzoico.
j) 1,2,4-trimetilbenceno.

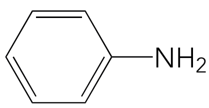
a) 

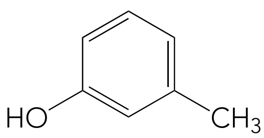
b) 

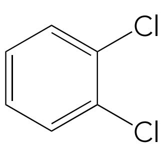
c) 

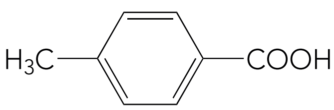
d) 

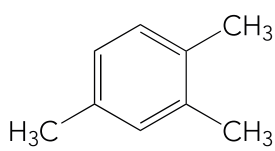
e) 

f) 

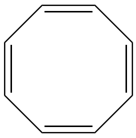
g) 

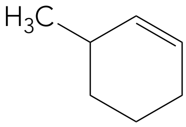
h) 

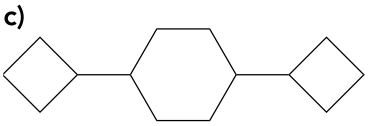
i) 

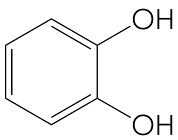
j) 

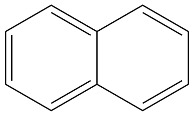
19 **Nombra los siguientes compuestos:**

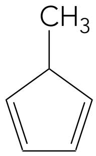
a) 

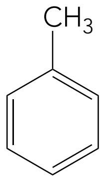
b) 

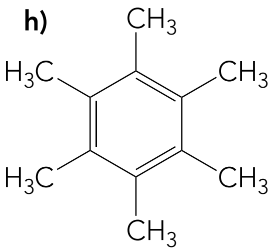
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

a) Cicloocta-1,3,5,7-tetraeno. b) 3-metilciclohexeno.

c) 1,4-diciclobutilciclohexano. d) o-dihidroxibenceno.

e) Naftaleno. f) 5-metilciclopenta-1,3-dieno.

g) Tolueno o metilbenceno. h) Hexametilbenceno.

20 **Nombra o formula, según corresponda, los siguientes haloalcanos:**

a) 2-cloro-3-metilpentano. **b) *o*-dibromobenceno.**

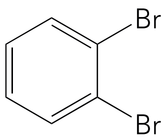
c) 1,3-difluoropropino. **d) Triclorometano o cloroformo.**

e) $CH_2Cl-CHF-CH_2-CH_2Cl$

f) $CBr_2=CBr_2$

g) $I-C_6H_5$

h) CF_2Cl_2

a) $CH_3-CHCl-CH(CH_3)-CH_2-CH_3$ b) 

c) $CF\equiv C-CH_2F$ d) $CHCl_3$

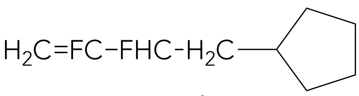
e) 1,4-dicloro-2-fluorobutano. f) Tetrabromoeteno.

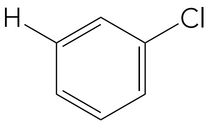
g) Yodobenceno. h) Diclorodifluorometano.

21 **Nombra o formula los siguientes hidrocarburos:**

a) $CH_3-CH=C(CH_3)-CH_2-C\equiv CH$

b) $CH_3-CH(CH_2-CH_2-CH_3)-CH(CH_3)-CH(CH_3)_2$

c) 

d) 

e) 3 etil-2,4,5-trimetil-1,3-diyodoheptano.

f) Ciclopropileteno.

g) Ácido benzoico.

h) *p*-fluorotolueno.

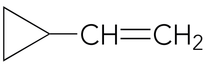
a) 4-metilhex-4-en-1-ino.

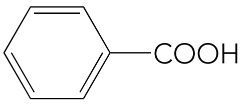
b) 2,3,4-trimetilheptano.

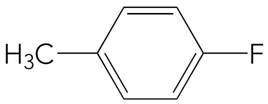
c) 4-ciclopentil-2,3-difluorobut-1-eno.

d) m-clorofenol.

e) $CH_2I–CH(CH_3)–CI(CH_2–CH_3)–CH(CH_3)–CH(CH_3)–CH_2–CH_3$

f) 

g) 

h) 

Página 196

Compuestos oxigenados

22 Formula los siguientes alcoholes:

a) Metanol. **b) Butan-1-ol.**

c) Butan-2-ol. **d) Butano-1,3-diol.**

e) Butano-2,2-diol. **f) 3-metilbutan-1-ol.**

g) 2,3-dimetilbutan-2-ol. **h) 3-metilciclopentanol.**

i) Ciclopropano-1,2-diol. **j) *p*-metilfenol.**

a) CH_3OH

b) $CH_3–CH_2–CH_2–CH_2OH$

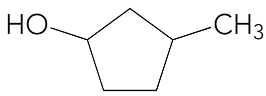
c) $CH_3–CHOH–CH_2–CH_3$

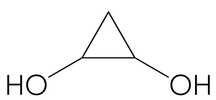
d) $CH_2OH–CH_2–CHOH–CH_3$

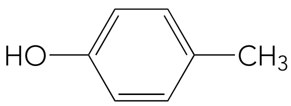
e) $CH_3–C(OH)_2–CH_2–CH_3$

f) $CH_3–CH(CH_3)–CH_2–CH_2OH$

g) $CH_3–COH(CH_3)–CH(CH_3)–CH_3$

h) 

i) 

j) 

23 Nombra los siguientes compuestos:

a) $CH_3–CH_2–CH_2OH$

b) $CH_3–CH(CH_3)–CH_2–CH_2–CHOH–CH_3$

c) $CH_2Cl–CH_2OH$

d) $CH_2OH–CH_2OH$

e) $CH_3–CH(CH_3)–C(OH)_2–CH_2–CH_2OH$

a) Propan-1-ol. b) 5-metilhexan-2-ol.

c) 2-cloroetan-1-ol. d) Etano-1,2-diol.

e) 4-metilpentano-1,3,3-triol.

24 **La glicerina o glicerol es el nombre común de un alcohol muy usado en cosmética. Busca su fórmula química y nómbralo siguiendo las recomendaciones de la IUPAC.**

$CH_2OH–CHOH–CH_2OH$. Propano-1,2,3-triol.

25 **Formula o nombra según corresponda:**

a) $(CH_3)_2O$ **b)** $CH_3CH(OCH_2CH_3)–CH_2–CH(CH_3)–CH_2–CH_3$

c) $CH_3O–CH_2–CH_2–OCH_3$ **d)** $C_6H_5–O–C_6H_5$

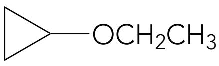
e) **Dipropiléter.** **f)** **Etoxiciclopropano.**

g) **2,2-dimetoxipropano.** **h)** **1,4-dioxaciclohexano.**

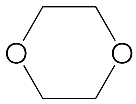
a) Dimetil éter o metoximetano. b) 4-metil-2-metoxihexano.

c) 1,2-dimetoxietano. d) Difenil éter o fenoxibenceno.

e) $(CH_3–CH_2–CH_2)_2O$

f) 

g) $CH_3–C(OCH_2CH_3)_2–CH_3$

h) 

26 **Nombra o formula, según corresponda, los siguientes aldehídos y cetonas:**

a) **Pentan-3-ona.** **b)** **3-metilpentanal.**

c) **But-2-enal.** **d)** **Hexano-2,3,5-triona.**

e) **HCHO** **f)** $CHO–CH_2–CH(CH_3)–CHO$

g) $CH_3–CO–CHCl_2$ **h)** $CH_3–CO–CH(CH_3)–CO–CH_3$

a) $CH_3–CH_2–CO–CH_2–CH_3$ b) $CH_3–CH_2–CH(CH_3)–CH_2–CHO$

c) $CH_3–CH=CH–CHO$ d) $CH_3–CO–CO–CH_2–CO–CH_3$

e) Metanal. f) 2-metilbutanodial.

g) 1,1-dicloropropanona. h) 3-metilpentano-2,4-diona.

27 **Unos ácidos grasos esenciales son los de las series omega-6 (ω-6) y los omega-3 (ω-3) que se caracterizan por tener el primer doble enlace en el sexto carbono o tercer carbono, respectivamente, contando desde el final de la cadena. Formula el ácido eicosa-5,8,11,14-tetraenoico, indica si es un ω-6 o un ω-3 y busca su nombre propio común.**

$CH_3–(CH_2)_4–CH=CH–CH_2–CH=CH–CH_2–CH=CH–CH_2–CH=CH–(CH_2)_3–COOH$.

Es un ω-6. Se trata del ácido araquidónico.

28 **Formula los siguientes ácidos carboxílicos y derivados:**

a) $CH_3–CH(CH_3)–CH_2–CH_2–COOH$ **b)** $CH_3–CH(CH_3)–CH_2–CH_2–COOCH_3$

c) $CH_3–CH_2–COO–CH(CH_3)–CH_2–CH_3$ **d)** $CH_3–CHCl–CH_2–CH(CH_3)–COOK$

a) Ácido 4-metilpentanoico. b) 4-metilpentanoato de metilo.

c) Propanoato de 1-metilpropilo. d) 4-cloro-2-metilpentanoato de potasio.

29 **Los jabones tradicionales son sales de sodio derivadas de ácidos grasos. Nombra y formula la sal de sodio que derivará del ácido oleico.**

Octadec-9-enoato de sodio. $CH_3-(CH_2)_7-CH=CH-(CH_2)_7-COONa$

Compuestos nitrogenados

30 **Formula los siguientes compuestos nitrogenados:**

a) **Pent-1,3,5-triamina.**

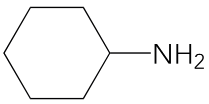
b) **Ciclohexilamina.**

c) **Ácido 2-aminoetanoico.**

d) **Dinitrometano.**

e) **2-metil-1-nitropropano.**

a) $H_2N–CH_2–CH_2–CH(NH_2)–CH_2–CH_2–NH_2$

b) 

c) $CH_3–CH(NH_2)–COOH$

d) $CH_2(NO_2)_2$

e) $O_2N–CH_2–CH(CH_3)–CH_3$

31 **Nombra los siguientes compuestos:**

a) $C_6H_5-NH_2$

b) $CH_2=CH-CH(NH_2)-CH_3$

c) $CH_3CH(CH_3)-CN$

d) $CH_3-CH(NO_2)-CONH-CH_3$

a) Fenilamina o bencenoamina o anilina.

b) But-3-en-2-amina.

c) 2-metilpropanonitrilo o cianuro de metiletilo.

d) *N*-metil-2-nitropropanamida.

32 **Formula y nombra tres aminoácidos indicando si son esenciales o no.**

La respuesta puede ser variada. Por ejemplo:

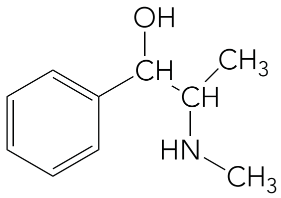
Isoleucina (esencial), $CH_3–CH_2–CH(CH_3)–CH(NH_2)–COOH$, ácido 2-amino-3-metilpentanoico;

Valina (esencial), $CH_3–CH(CH_3)–CH(NH_2)–COOH$, ácido 2-amino-3-metilbutanoico;

Ácido aspártico (no esencial) $HOOC–CH_2–CH(NH_2)–COOH$, ácido 2-aminobutanodioico.

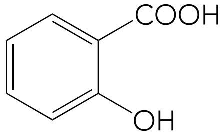
Prioridad de grupos funcionales

33 **Escribe el nombre recomendado por la IUPAC para la efedrina, un descongestionante usado en el tratamiento del asma.**



2-(metilamino)-1-fenilpropan-1-ol.

34 **El principio activo de la aspirina, el ácido salicílico, se obtuvo inicialmente de la corteza del sauce blanco. Formula este compuesto sabiendo que su nombre sistemático es ácido *o*-hidroxibenzoico.**



35 **Escribe el nombre sistemático según las recomendaciones de la IUPAC para el aminoácido lisina, cuya fórmula es:**

$$NH_2{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_2{-}\underset{\displaystyle NH_2}{\underset{|}{CH}}{-}COOH$$

Ácido 2,6-diaminohexanoico.

Página 197

36 **El gliceraldehído, $C_3H_6O_3$, además del grupo aldehído tiene dos grupos hidroxilo en carbonos distintos. Formula y nombra este compuesto.**

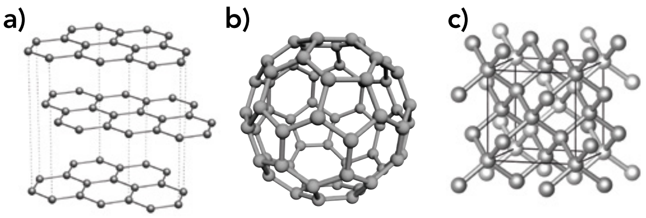
CH_2OH-CHOH-CHO, 2,3-dihidroxipropanal.

37 **Uno de los principios activos presentes en los collares antiparasitarios de perros y gatos es el geraniol o 3,7-dimetilocta-2,6-dien-1-ol y de forma natural se encuentra, entre otras plantas, en las rosas. Dibuja la fórmula semidesarrollada de este compuesto y halla su fórmula molecular.**

$CH_3–C(CH_3)=CH–CH_2–CH_2–C(CH_3)=CH–CH_2OH$; $C_{10}H_{18}O$

Formas alotrópicas del carbono

38 **Asocia las siguientes imágenes con una forma alotrópica del carbono de las que conoces.**



a) Grafito. b) Fullereno. c) Diamante.

39 **¿A qué se debe que el diamante sea uno de los materiales más duros que existen? Además de las estéticas, piensa en qué otras aplicaciones puede tener este alótropo gracias a su dureza.**

A que todos sus carbonos están unidos mediante 4 enlaces covalentes a otros carbonos. La respuesta a las aplicaciones es diversa, pero debería incluir el uso en herramientas de corte de materiales duros.

40 **Si necesitaras construir un objeto con una forma alotrópica del carbono que fuera conductor de la corriente eléctrica, ¿cuál usarías?, ¿por qué?**

Actualmente, la solución más asequible es hacerlo con grafito, puesto que es un material conductor y abundante. En el futuro, la forma alotrópica ideal será el grafeno, puesto que es mejor conductor y tiene muchas más prestaciones, pero su creación de forma masiva y procesamiento está todavía en desarrollo.

41 **Investiga los posibles usos actuales y futuros de los nanotubos de carbono y recapacita sobre la influencia en la calidad de vida que pueden tener.**

Respuesta libre.

Isomería

42 **Deduce el tipo de isómeros que son los siguientes compuestos respecto al etilpropiléter y nómbralos:**

a) $CH_3{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_2{-}O{-}CH_3$

b) $CH_3{-}CH_2{-}O{-}CH(CH_3){-}CH_3$

c) $CH_3{-}CH_2{-}CH_2{-}O{-}CH_2{-}CH_3$

d) $CH_3{-}CH_2{-}CHOH{-}CH_2{-}CH_3$

e) $(CH_3\ CH_2)_2{-}O$

a) Butil metil éter. Isómero de posición.

b) Etil metiletil éter. Isómero de cadena.

c) Etil propil éter. No es un isómero, es el mismo compuesto.

d) Pentan-3-ol. Isómero de función.

e) Dietil éter. No es un isómero.

43 **Busca las fórmulas de los aminoácidos leucina e isoleucina. Indica el tipo de isómeros que son y señala sus carbonos quirales, si existen.**

Los carbonos quirales están marcados con un asterisco.

Leucina: $CH_3{-}\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}{-}CH_2{-}\underset{\displaystyle NH_2}{\underset{|}{\overset{*}{C}H}}{-}COOH$

Isoleucina: $CH_3{-}CH_2{-}\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{\overset{*}{C}H}}{-}\underset{\displaystyle NH_2}{\underset{|}{\overset{*}{C}H}}{-}COOH$

Ambos compuestos son isómeros de cadena.

44 **Escribe y nombra todos los alquenos que existan de fórmula C_5H_{10} que no contengan ramificaciones. Si es necesario incluye en el nombre la designación *cis/trans*.**

$CH_2{=}CH{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3$, pent-1-eno.

$CH_3{-}\underset{\displaystyle H}{\underset{|}{C}}{=}\underset{\displaystyle H}{\underset{|}{C}}{-}CH_2{-}CH_3$, *cis*-pent-2-eno.

$CH_3{-}\underset{\displaystyle H}{\underset{|}{C}}{=}\overset{\displaystyle H}{\overset{|}{C}}{-}CH_2{-}CH_3$, *trans*-pent-2-eno.

Petróleo y el gas natural

45 **Resume los distintos procesos industriales a los que se somete el petróleo para obtener sus correspondientes derivados.**

Respuesta libre.

46 **¿Por qué para el tratamiento del petróleo es necesaria la existencia de una refinería y en el caso del gas natural solo hace falta una central regasificadora?**

Porque el petróleo es una mezcla mucho más compleja de compuestos, que además están en distintos estados físicos. El gas natural es una mezcla de muchos menos compuestos y todos en estado gaseoso; por eso, no se necesitan instalaciones tan complejas para separar y tratar sus componentes.

47 **Averigua cuál es el gaseoducto más cercano a tu localidad de residencia y el uso al que va destinado el gas que transporta, consumo urbano o industrial.**

Respuesta libre.

48 **Investiga las repercusiones medioambientales y sobre la calidad de vida que tiene el uso de combustibles fósiles como el petróleo o el gas natural.**

Respuesta libre.

7 CINEMÁTICA. MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS Y SU COMPOSICIÓN

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

1 RELATIVIDAD DEL MOVIMIENTO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.1. (EA.6.1.1.)

Página 200

1 **Después de leer el texto del recuadro referido al punto material, explica el significado de este párrafo: «La posibilidad de utilizar puntos materiales depende de lo que estudiemos. Así, podemos considerar la Luna como tal para estudiar su traslación alrededor de la Tierra, pero no cuando estemos interesados en su movimiento de rotación».**

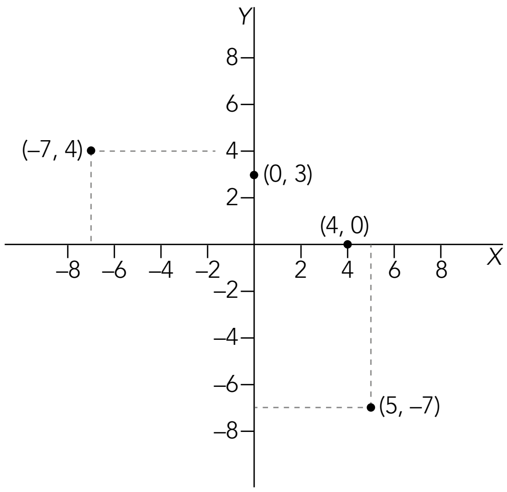
Si estudiamos el movimiento de traslación, lo que nos interesa es saber dónde está el astro, y nos basta saber dónde está su centro de masas. En este caso, se puede considerar punto material. Sin embargo, si queremos estudiar el movimiento de rotación, tendremos que estudiar el movimiento de distintos puntos de la superficie del astro, lo que no podríamos hacer si la considerásemos un punto material.

2 **Representa, en un sistema de ejes coordenados, los siguientes puntos:**

a) (0, 3) **b) (4, 0)**

c) (5, –7) **d) (–7, 4)**

La representación gráfica de estos puntos es la siguiente:



2 POSICIÓN Y DESPLAZAMIENTO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.2. (EA.6.2.1.)

Página 201

3 **Un móvil se encuentra en las coordenadas x = 2 m, y = 3 m. Se desplaza 1 m en sentido positivo del eje X y 2 m en sentido negativo del eje Y. ¿Cuál será ahora su vector posición? ¿A qué distancia se encuentra del origen? ¿Y del punto de partida?**

Si el móvil se desplaza 1 metro en sentido positivo del eje X, la coordenada x será:

$$x = 2 + 1 = 3 \text{ m}$$

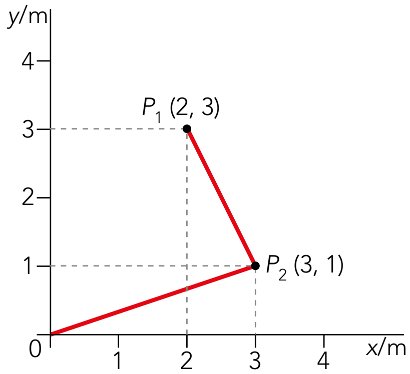
Si se desplaza 2 metros en sentido negativo del eje *Y*, la coordenada *y* será:

$$y = 3 - 2 = 1 \text{ m}$$

Por tanto, el vector posición es:

$$\vec{r} = (3 \cdot \vec{i} + \vec{j}) \text{ m}$$

Representamos en un diagrama el vector posición y el punto de partida:



La distancia al origen, en cualquier punto, es el módulo del vector posición. Por tanto, la distancia de P_2 al origen es:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3\text{m})^2 + (1\text{m})^2} = \sqrt{10} \text{ m}$$

Y la del punto de partida, P_1, será:

$$d_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{[(3-2)\text{ m}]^2 + [(1-3)\text{ m}]^2} = \sqrt{5} \text{ m}$$

4 **El vector posición de una partícula, en un momento determinado, es $\vec{r} = (-2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j})$ m. Sabemos que el vector desplazamiento, respecto de una posición anterior, es $\Delta\vec{r} = (-4 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j})$ m. ¿En qué punto se encontraba?**

El vector desplazamiento es la diferencia entre la posición dada menos la inicial. Por tanto, al vector posición inicial le corresponderán los puntos:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x = x - x_0 \;; \quad -4 = -2 - x_0 \rightarrow x_0 = 2 \\ \Delta y = y - y_0 \;; \quad 3 = 2 - y_0 \rightarrow y_0 = -1 \end{array}\right\} P\ (2, -1) \text{ m}$$

Por tanto la partícula se encontraba en el punto (2, –1) m.

5 **Visualiza la animación «Sistemas de referencia», que encontrarás en anayaeducacion.es, para repasar los contenidos que viste el curso pasado sobre el estudio del movimiento.**

Respuesta abierta.

Le sugerimos que recomiende periódicamente a su alumnado la visita al banco de recursos disponible en **anayaeducacion.es**, donde podrá encontrar una variedad de recursos que le ayudarán a reforzar los contenidos trabajados en cada una de las unidades del libro. Entre ellos, podrá encontrar:

- Vídeos.
- Laboratorios virtuales y simulaciones.
- Resúmenes de contenidos.
- Presentaciones interactivas.
- Actividades interactivas de ejercitación.
- Soluciones de las actividades con resultado numérico.

4 CAMBIOS DE POSICIÓN: VELOCIDAD

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.2. (EA.6.2.1.) CE.6.3. (EA.6.3.1.)

Página 203

6 La inversa. **En el texto se dice que la celeridad media (c_m) es mayor o igual que el módulo de la velocidad media (v_m). ¿En qué casos coinciden? Describe un movimiento en el que $c_m \neq 0$ y $\vec{v}_m = 0$.**

La celeridad media es el cociente entre el espacio recorrido (el espacio que seguimos en una trayectoria) y el tiempo que se tarda en recorrerlo, mientras que la velocidad media es la variación de los vectores posición con respecto al tiempo. Por tanto, la celeridad media siempre será mayor o igual que la velocidad media. Solo coincidirán en los casos en que sea un movimiento rectilíneo uniforme, sin cambio de sentido. El único caso en el que $\vec{v}_m$ se anula es aquel en el que la posición inicial coincide con la final, pues $\Delta\vec{r} = 0$, y así $\vec{v}_m = 0$. Por ejemplo, en un movimiento circular uniforme:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} \xrightarrow{\vec{r}_2 = \vec{r}_1} \vec{v}_m = \frac{0}{\Delta t} = 0$$

$$c_m = \frac{s_2 - s_1}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{\Delta t}$$

En **anayaeducacion.es** dispone de un documento que explica cómo utilizar la técnica de desarrollo de pensamiento «La inversa», cuya aplicación se propone para resolver este ejercicio.

7 **La ecuación del movimiento de una partícula viene dada por $\vec{r}\,(t) = (t - 2) \cdot \vec{i} + (3 \cdot t^2 + 1) \cdot \vec{j}$, en el SI. Realiza un estudio del movimiento entre $t_1 = 3$ s y $t_2 = 10$ s. (Si no sabes representar la ecuación de la trayectoria, puedes unir las posiciones en varios instantes de tiempo).**

Para dibujar la trayectoria de la partícula, escribimos la ecuación del movimiento en función de *x* e *y*:

$$x = t - 2 \rightarrow t = x + 2$$

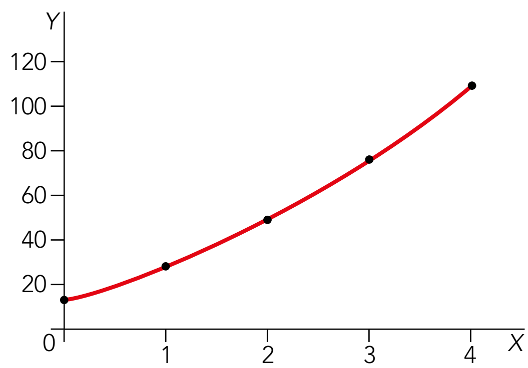
$$y = 3 \cdot t^2 + 1$$

Despejamos *t* de la primera y sustituímos en la segunda y, así, obtenemos la ecuación de la trayectoria:

$$y = 3 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 13$$

La gráfica que obtenemos al representarla es la siguiente:

x	0	1	2	3	4
y	13	28	49	76	109



Para el estudio del movimiento, calculamos el vector desplazamiento entre los instantes señalados:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(10) - \vec{r}(3) = [(10 - 2) - (3 - 2)] \cdot \vec{i} + [(3 \cdot 10^2 + 1) - (3 \cdot 3^2 + 1)] \cdot \vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = 7 \cdot \vec{i} + 273 \cdot \vec{j}$$

Como $\Delta t = t_2 - t_1 = 10\ \text{s} - 3\ \text{s} = 7\ \text{s}$, la velocidad media es:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{(7 \cdot \vec{i} + 273 \cdot \vec{j})\ \text{m}}{7\ \text{s}} = (1 \cdot \vec{i} + 39 \cdot \vec{j})\ \text{m/s}$$

$$v_m = \sqrt{1^2 + 39^2} \approx 39\ \text{m/s}$$

La velocidad instantánea es la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d[(t-2) \cdot \vec{i} + (3 \cdot t^2 + 1) \cdot \vec{j}]}{dt}$$

$$\vec{v} = (1 \cdot \vec{i} + 6 \cdot t \cdot \vec{j})\ \text{m/s}$$

5 CAMBIOS DE VELOCIDAD: ACELERACIÓN

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.2. (EA.6.2.1.) CE.6.3. (EA.6.3.1.) CE.6.5. (EA.6.5.1.)

Página 205

8 Desde un punto de vista cinemático, ¿cuántos aceleradores tiene un vehículo? Razona tu respuesta.

En un coche hay tres aceleradores: el «acelerador», que aumenta la celeridad; el «freno», que la disminuye, y el «volante», que modifica la dirección del vector velocidad.

9 Identifica en tu entorno dos movimientos de cada uno de los tipos presentados en la tabla del apartado 5.4. Indica, en cada caso, el sistema de referencia que has utilizado.

Movimiento	Ejemplo	Sistema de referencia
Rectilíneo uniforme	Una moto a $\vec{v}$ = cte	
	Una cinta transportadora recta en régimen estacionario	
Rectilíneo uniformemente acelerado	Un tren que sale de la estación	
	Un objeto en caída libre	
Rectilíneo acelerado	Un coche que pasa de ir detrás de otro vehículo a intentar adelantarlo	
	Un coche en un atasco en una calle recta	
Circular uniforme	Las manillas de un reloj analógico	
	La noria de la feria (una vez que ha arrancado)	
Circular uniformemente acelerado	Las aspas de un helicóptero al salir	
	Una noria de la feria al arrancar	Un observador en reposo con respecto al suelo
Circular acelerado	Las aspas de un helicóptero al salir	
	Un CD cuando cambiamos de canción	
Curvilíneo uniforme $a_n > 0$ $a_t = 0$ $\rho \neq$ cte	Un coche que toma una curva con velocidad constante	
	Una persona que callejea con paso constante	
Curvilíneo uniformemente acelerado $a_n > 0$ $\rho \neq$ cte a_t = cte	El disparo de una flecha	
	El recorrido de una pelota de golf tras ser golpeada	
Curvilíneo acelerado $a_n > 0$ $\rho \neq$ cte $a_t \neq 0$	Un globo que se desinfla	
	El movimiento de un cometa	

10 **El vector posición de un móvil viene dado por $\vec{r}\,(t) = [3 \cdot \cos(5 \cdot t) \cdot \vec{i} + 3 \cdot \text{sen}(5 \cdot t) \cdot \vec{j}\,]$ m. Calcula las componentes de la aceleración, cartesianas e intrínsecas. Represéntalas, junto al vector posición y el vector velocidad, en dos puntos que tú elijas de la trayectoria.**

Para calcular las componentes de la aceleración, debemos derivar dos veces la trayectoria. La primera derivada será la velocidad instantánea, y la segunda, la aceleración instantánea. De esta forma, las componentes cartesianas de la velocidad y la aceleración son:

$$\vec{v}_x\,(t) = \frac{d\vec{r}_x(t)}{dt} = -15 \cdot \text{sen}\,(5 \cdot t) \cdot \vec{i} \text{ m/s} \qquad \vec{a}_x\,(t) = \frac{d\vec{v}_x(t)}{dt} = -75 \cdot \cos\,(5 \cdot t) \cdot \vec{i} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{v}_y\,(t) = \frac{d\vec{r}_y(t)}{dt} = 15 \cdot \cos\,(5 \cdot t) \cdot \vec{j} \text{ m/s} \qquad \vec{a}_y\,(t) = \frac{d\vec{v}_y(t)}{dt} = -75 \cdot \text{sen}\,(5 \cdot t) \cdot \vec{j} \text{ m/s}^2$$

Para obtener las componentes intrínsecas, calculamos el módulo del vector velocidad:

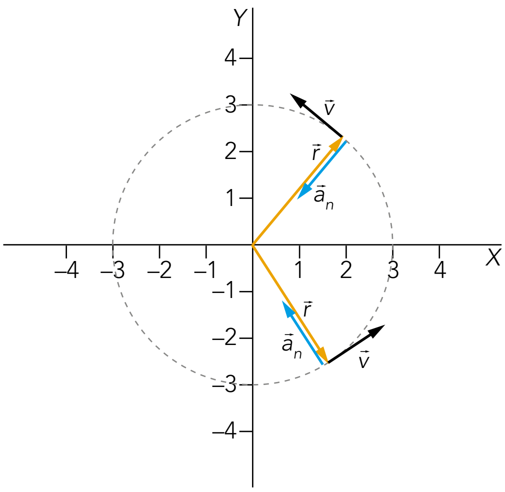
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(15 \cdot \text{sen}\,(5 \cdot t))^2 + (15 \cdot \cos\,(5 \cdot t))^2} = 15 \text{ m/s}$$

La componente tangencial es la derivada del módulo de la velocidad respecto al tiempo. En este caso, la velocidad no depende del tiempo; por tanto, $a_t = 0$. Se trata de un movimiento uniforme.

El módulo de la aceleración será igual a la aceleración normal:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-75 \cdot \cos(5 \cdot t))^2 + (75 \cdot \text{sen}(5 \cdot t))^2} = 75 \text{ m/s}^2 \rightarrow a_n = 75 \text{ m/s}^2$$

La trayectoria del movimiento es una circunferencia. Si representamos el vector posición y el vector velocidad en dos puntos, obtenemos:



Nota: Debemos recordar que $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\,\theta = 1$.

6 MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.3. (EA.6.3.2.) CE.6.4. (EA.6.4.1.) CE.6.5. (EA.6.5.1.)

Página 207

11 **¿Desde qué altura se ha de soltar un cuerpo para que llegue al suelo con una velocidad de 100 km/h? Representa sus gráficas *y-t* y *v-t*.**

Para calcular la altura a la que se debe soltar el cuerpo debemos utilizar las ecuaciones de caída libre, donde $v_0 = 0$ y $a = -g$, siendo g la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra igual a 9,8 m/s².

$$y = h_0 - \frac{2}{1} \cdot g \cdot t^2 \qquad v = -g \cdot t$$

En primer lugar, expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 100\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\,000\ \text{m}}{1\ \text{km}} \cdot \frac{1\text{h}}{3\,600\ \text{s}} = 27{,}78\ \text{m/s}$$

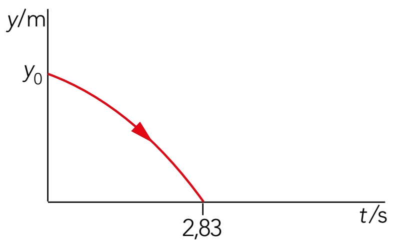
La velocidad de llegada se considera negativa según el convenio de signos. Por tanto, el tiempo que tarda el objeto en recorrer el espacio será:

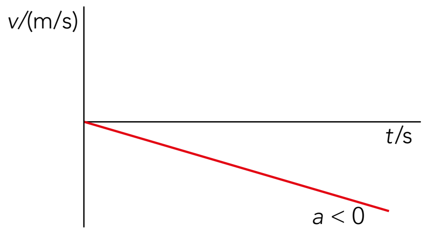
$$v = -g \cdot t \rightarrow t = \frac{v}{-g} = \frac{-27{,}78\ \text{m/s}}{-9{,}81\ \text{m/s}^2} = 2{,}83\ \text{s}$$

Cuando el cuerpo llega al suelo, $y = 0$. Por tanto:

$$h_0 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot (2{,}83\ \text{s})^2 = 39{,}3\ \text{m}$$

Las gráficas que representan este movimiento son:





12 **Comprueba que las ecuaciones del MRUA son dimensionalmente homogéneas. Repasa, si lo necesitas, la unidad introductoria del libro.**

Para estudiar la homogeneidad de las ecuaciones, planteamos sus ecuaciones de dimensiones. La ecuación de la velocidad para el movimiento uniformemente acelerado viene dada por:

$$v = v_0 + a \cdot t \quad \begin{cases} [v] = \text{L} \cdot \text{T}^{-1} \\ [v_0 + a \cdot t] = \text{L} \cdot \text{T}^{-1} + \text{L} \cdot \text{T}^{-2} \cdot \text{T}^{-1} = \text{L} \cdot \text{T}^{-1} \end{cases}$$

Por tanto, queda demostrado que la ecuación es homogénea.

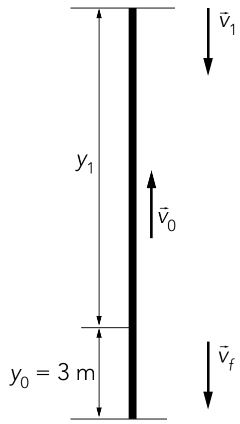
En el caso del espacio:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad \begin{cases} [x] = \text{L} \\ \left[v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2\right] = \text{L} \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{T} + \text{L} \cdot \text{T}^{-2} \cdot \text{T}^{-2} = \text{L} \end{cases}$$

Luego, la ecuación es homogénea.

13 **Desde una altura de 3 m se lanza un cuerpo, verticalmente hacia arriba, de modo que impacta con el suelo a 20 m/s. Calcula v_0.**

El esquema que representa el movimiento del cuerpo es el siguiente:



Las ecuaciones que utilizamos son:

$$v = v_0 - g \cdot t \qquad y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Cuando $y = 0$, la velocidad final $v = -20$ m/s. Por tanto, sustituyendo los datos en el SI tendremos en el momento del impacto en el suelo que:

$$-20 = v_0 - 9{,}8 \cdot t \rightarrow v_0 = 9{,}8 \cdot t - 20$$

$$0 = 3 + v_0 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

Así, sustituyendo el valor de v_0 en la segunda ecuación, hallamos los posibles valores del tiempo:

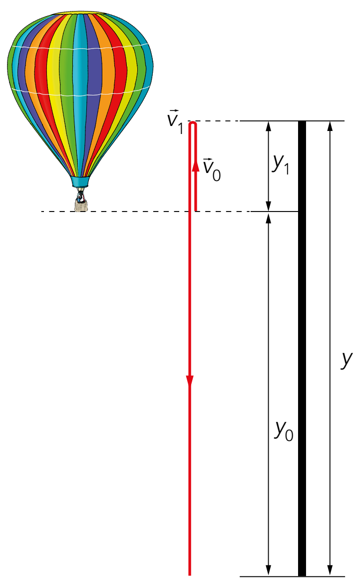
$$4{,}9 \cdot t^2 - 20 \cdot t + 3 = 0 \begin{cases} t_1 = 3{,}93 \text{ s} \\ t_2 = 0{,}16 \text{ s} \end{cases}$$

De donde desechamos t_2 porque haría que el valor de v_0 fuese negativo. Así, cuando $t_1 = 3{,}93$ s, la velocidad inicial será:

$$v_0 = 9{,}8 \cdot 3{,}93 - 20 = 18{,}51 \text{ m/s}$$

14 **Desde un globo que está a 15 m del suelo y asciende verticalmente a 2 m/s se suelta un saco de lastre. ¿Cuánto tardará en llegar al suelo?**

Realizamos un esquema que represente el movimiento:



Las ecuaciones del movimiento del saco son:

$$v = v_0 - g \cdot t \qquad h = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Del enunciado sabemos que la altura inicial, h_0, es de 15 m, y que la velocidad inicial es de 2 m/s. Además, diremos que cuando llegue al suelo, $y = 0$. Por tanto, sustituyendo los datos en unidades del SI:

$$v = 2 - 9{,}81 \cdot t \qquad 0 = 15 + 2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2$$

De la segunda ecuación obtenemos dos valores del tiempo, que son:

$$t_1 = 1{,}96 \text{ s} \qquad t_2 = -1{,}56 \text{ s}$$

Por tanto, el saco de lastre tarda 1,96 s en llegar al suelo (se obvia el segundo valor por ser negativo).

7 COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.8. (EA.6.8.1.-6.8.2.)

Página 210

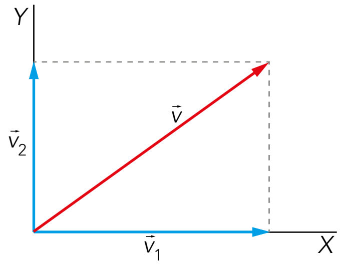
15 ¿Qué movimiento se obtiene al superponer dos MRUA perpendiculares, ambos con $v_0 = 0$?

Tenemos dos movimientos rectilíneos uniformemente acelerados, por lo que la suma de ambos también será un movimiento uniformemente acelerado. La ecuación de la velocidad en un MRUA viene dada por la ecuación:

$$v = v_0 + a \cdot t \xrightarrow{v_0 = 0} v = a \cdot t$$

Vectorialmente, como vemos en el esquema, su velocidad será la compuesta por la velocidad en el eje X (v_1) y la velocidad en el eje Y (v_2):

$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j}$$



De la misma forma, la aceleración será la compuesta por el eje X (a_1) y el eje Y (a_2):

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j}$$

La trayectoria la deducimos de la ecuación del espacio para un MRUA:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Considerando $x_0 = 0$, y como nos indican que v_0 es nula, las ecuaciones para el eje X, y para el eje Y serán, respectivamente:

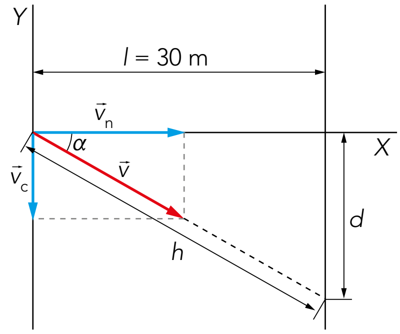
$$x = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2$$

La ecuación de la trayectoria la obtenemos al despejar t^2 de la ecuación de x, y sustituyendo en la de y:

$$\frac{2 \cdot x}{a_1} = t^2 \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot \left(\frac{2 \cdot x}{a_1}\right) \rightarrow y = \frac{a_2}{a_1} \cdot x$$

16 **El nadador del ejercicio resuelto 7 comienza a nadar en la dirección perpendicular al río. ¿A qué distancia del embarcadero de la derecha, situado enfrente del otro, tocaría tierra? ¿Cuánto tardaría?**

Tomamos como sistema de referencia unos ejes cartesianos, con el origen situado en la posición inical del nadador. Consideramos el eje *X* para referirnos a la velocidad del nadador ($\vec{v}_n$) y el eje *Y* para la de la corriente ($\vec{v}_c$). El esquema será:



El vector velocidad será:

$$\vec{v} = v_n \cdot \vec{i} + v_c \cdot \vec{j} = 2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$$

Podemos descomponer el movimiento en dos MRU, uno en el sentido del eje *X* y otro en el del eje *Y*:

Eje *X* $\Rightarrow$ $x = v_x \cdot t = 2t$

Eje *Y* $\Rightarrow$ $y = v_y \cdot t = t$

El vector posición será, por tanto:

$$\vec{r} = 2t \cdot \vec{i} + t \cdot \vec{j}$$

Para llegar a la otra orilla, el nadador debe recorrer 30 metros a lo largo del eje *X*. Sustituyendo en la ecuación de este movimiento, podemos averiguar cuánto tiempo tarda en llegar a la otra orilla:

$$x = 2t \rightarrow 30 = 2t \rightarrow t = 15 \text{ s}$$

Finalmente, podemos calcular qué distancia recorre a lo largo del eje *Y* durante esos 15 segundos:

$$y = t = 15 \text{ m} \rightarrow d = 15 \text{ m}$$

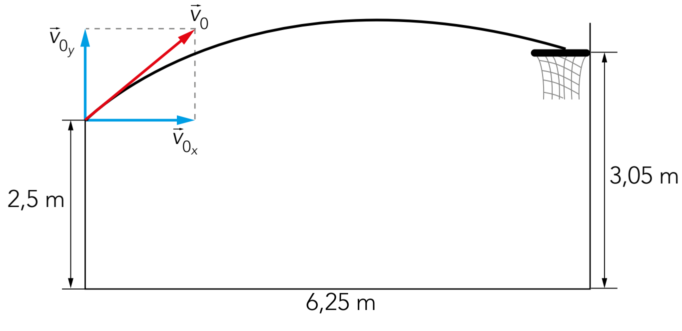
17 **Un jugador de baloncesto lanza el balón desde 2,50 m de altura con una elevación de 37° y encesta en la canasta, situada a 6,25 m de distancia y 3,05 m de altura. ¿Con qué velocidad lanzó?**

Se trata de un movimiento parabólico, para el que sus ecuaciones y su representación gráfica son:

Eje *X* $\quad x(t) = v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \;;\; v_x = v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$

Eje *Y*: $\quad y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = y_0 + v_0 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t = v_0 \cdot \text{sen}\,\alpha - g \cdot t$$



Como el tiempo transcurrido es el mismo para los dos ejes, despejamos *t* en *x* y los sutituimos en *y*:

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} \rightarrow y = y_0 + \cancel{v_0} \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \frac{x}{\cancel{v_0} \cdot \cos\alpha} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2$$

$$y = y_0 + x \cdot \text{tg}\,\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}$$

Despejando v_0, y sustituyendo por los datos del enunciado, obtenemos su valor:

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} = y_0 + x \cdot \text{tg}\,\alpha - y$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot \cos^2\alpha \cdot (y_0 + x \cdot tg\,\alpha - y)}} = \sqrt{\frac{9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot (6{,}25\,\text{m})^2}{2 \cdot \cos^2 37° \cdot (2{,}5\,\text{m} + 6{,}25 \cdot tg\,37° - 3{,}05\,\text{m})}} = 8{,}5\,\text{m/s}$$

18 **¿Qué pasaría si variámos la velocidad de lanzamiento y el ángulo? ¿Con qué valores encestaría?**

Respuesta abierta.

En **anayaeducacion.es** dispone de un documento que explica cómo utilizar la técnica de desarrollo de pensamiento «¿Qué pasaría si...?», propuesta para resolver este ejercicio.

8 CONTRIBUCIONES DE GALILEO AL ESTUDIO DEL MOVIMIENTO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.1. (EA6.1.2.)

Página 211

19 ODS **Piensa en la época de las contribuciones de Galileo. ¿Crees que habrían sido igualmente consideradas de haber sido realizadas por una mujer? Para alcanzar las metas 4.5 y 5.5 indaga en, al menos, dos hitos relevantes de mujeres relacionadas con la educación y otro más con el estudio de la física o la química.**

Respuesta abierta.

Antes de responder a esta actividad, es recomendable que su alumnado visualice los vídeos sobre las metas 4.5 y 5.5 de los ODS, disponibles en **anayaeducacion.es**.

TRABAJA CON LO APRENDIDO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.1.2. (EA.1.2.1.-1.2.2.) CE.6.1. (EA.6.1.1.-6.1.2.) CE.6.2. (EA.6.2.1.) CE.6.3. (EA.6.3.1.-6.3.2.) CE.6.4. (EA.6.4.1.) CE.6.5. (EA.6.5.1.) CE.6.8. (EA.6.8.1.-6.8.2.-6.8.3.)

Página 216

Relatividad del movimiento. Magnitudes cinemáticas

1 Describe el movimiento del extremo del aspa de un ventilador, desde tu perspectiva, si:

a) Te sitúas justo enfrente.

b) Te alejas perpendicularmente al plano de giro.

c) Andas en dirección paralela a dicho plano.

d) Te sitúas en un lateral del ventilador, viéndolo de perfil.

¿Cuál de estas descripciones es la correcta?

a) Movimiento circular uniforme, ya que la velocidad es constante.

b) El extremo del aspa describiría una espiral de radio decreciente.

c) En este caso, el extremo del aspa describiría un cicloide.

d) Movimiento de vaivén que se repite en el tiempo.

Todas las descripciones son correctas, ya que la descripción del movimiento depende del sistema de referencia.

2 Un observador, *A*, está en el interior de un vehículo que circula por delante de una gasolinera, en cuya cafetería hay otro observador, *B*. Razona para cuál de ellos es cierta cada una de estas afirmaciones:

a) El surtidor de la gasolinera está en reposo.

b) Los árboles del arcén se mueven.

c) Un maletín situado en uno de los asientos del coche está en reposo.

d) Un avión que vuela en dirección perpendicular a la carretera se encuentra en movimiento.

a) El observador *B*, que está en la cafetería, ve el surtidor en reposo.

b) Para el observador *A*, que está en el coche.

c) Para el observador *A*, que está en el coche, el maletín no se mueve.

d) Para ambos observadores *A* y *B*, el avión está en movimiento.

3 En cada uno de los siguientes casos, ¿qué móvil va más rápido, el *A* o el *B*? ¿Por qué?

De forma general, diremos que el móvil que va más rápido será el que recorra mayor espacio en menos tiempo. Por tanto:

- En el primer caso, será el móvil *B*, ya que en el mismo tiempo recorre mayor espacio.
- En el segundo caso, será el móvil *A*, porque recorre el mismo espacio en menos tiempo.
- En el tercer caso, será el móvil *A*, ya que recorre más espacio en menos tiempo.
- En el cuarto caso, será el móvil *B*. Aunque recorre menos espacio que *A*, el tiempo es la mitad y el espacio que recorre es mayor a la mitad del que recorre *A*. Si fuera justo la mitad del espacio que recorre *A*, la velocidad sería la misma.

4 Desde una posición determinada, un móvil se desplaza 10 m hacia el este, 20 m hacia el norte, 5 m hacia el oeste y 30 m hacia el sur:

a) Calcula el espacio recorrido, y el módulo del vector desplazamiento.

b) Desde la última posición, ¿qué espacio ha de recorrer, y en qué dirección, para llegar en línea recta al punto de partida?

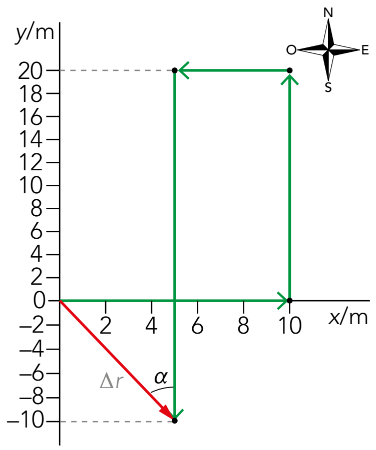
a) El espacio recorrido será la suma de lo recorrido en cada tramo:

$$\Delta s = 10\ \text{m} + 20\ \text{m} + 5\ \text{m} + 30\ \text{m} = 65\ \text{m}$$

Para calcular el vector desplazamiento, debemos conocer el punto final. Para ello, dibujamos un eje de coordenadas, donde el este será hacia el eje *X* positivo, norte hacia el eje *Y* positivo, el oeste hacia el eje *X* negativo y el sur hacia el eje *Y* negativo. Considerando que parte del origen de coordenadas, el punto final se encuentra en:

$$x = 10\ \text{m} - 5\ \text{m} = 5\ \text{m}$$

$$y = 20\ \text{m} - 30\ \text{m} = -10\ \text{m}$$



Con el teorema de Pitágoras, calculamos el módulo del vector desplazamiento:

$$\Delta r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \Delta r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{25\ \text{m}^2 + 100\ \text{m}^2} = \sqrt{125}\ \text{m}^2 = 5\sqrt{5}\ \text{m}$$

b) El espacio que debe recorrer será el calculado en el apartado anterior, $\Delta s = 5\sqrt{5}$ m. El ángulo que se debe girar, mirando hacia el norte, lo deducimos por trigonometría:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{5}{5\sqrt{5}}\ ;\ \alpha = 26{,}56°$$

Por tanto, diremos que el móvil debe recorrer en línea recta $5\sqrt{5}$ m en dirección noroeste con un ángulo de 26,56° medido sobre la vertical, hasta llegar al punto de partida.

5 **Las ecuaciones paramétricas de un movimiento vienen dadas por:**

$$x = t^2$$

$$y = 5 + 2 \cdot t^2$$

a) Determina la ecuación de la trayectoria y represéntala gráficamente.

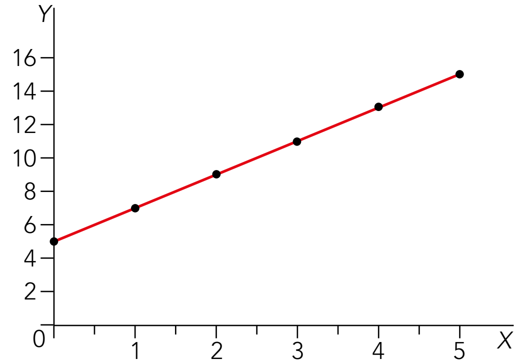
b) Calcula el vector desplazamiento entre los instantes t_1 = 2 s y t_2 = 5 s.

c) ¿En algún intervalo de tiempo coincide el módulo del vector desplazamiento con el espacio recorrido?

a) Para determinar la ecuación de la trayectoria sustituimos en y el valor de t^2 por x. Por tanto, la ecuación es:

$$y = 5 + 2 \cdot x$$

Que se corresponde con la ecuación de una recta. Su representación gráfica es la siguiente:



b) El vector posición es:

$$\vec{r}\,(t) = t^2 \cdot \vec{i} + (5 + 2 \cdot t^2) \cdot \vec{j}$$

El vector desplazamiento entre t_2 y t_1 es:

$$\Delta \vec{r} = (t_2^{\,2} - t_1^{\,2}) \cdot \vec{i} + [(5 + 2 \cdot t_2^{\,2}) - (5 + 2 \cdot t_1^{\,2})] \cdot \vec{j}$$

$$\Delta \vec{r} = (25 - 4) \cdot \vec{i} + [(5 + 2 \cdot 25) - (5 + 2 \cdot 4)] \cdot \vec{j}$$

$$\Delta \vec{r} = 21 \cdot \vec{i} + 42 \cdot \vec{j}$$

c) Para que el módulo del vector desplazamiento coincida con el espacio recorrido, el movimiento ha de ser rectilíneo (este lo es) y no cambiar de sentido. Para comprobar si en algún momento se produce cambio de sentido (el módulo de alguna componente de la velocidad cambia de signo), calculamos el vector velocidad:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2 \cdot t + \vec{i} + 4 \cdot t \cdot \vec{j}$$

Luego, podemos afirmar que el módulo del vector desplazamiento y el espacio recorrido siempre coinciden, ya que ninguna de las componentes de la velocidad cambia de signo en ningún momento.

6 **Un vehículo describe una circunferencia de radio R = 20 m, en sentido horario con celeridad constante, de modo que tarda 4 s en cada vuelta. Si situamos el origen del sistema de referencia en el centro de la circunferencia, calcula:**

a) La celeridad del movimiento.

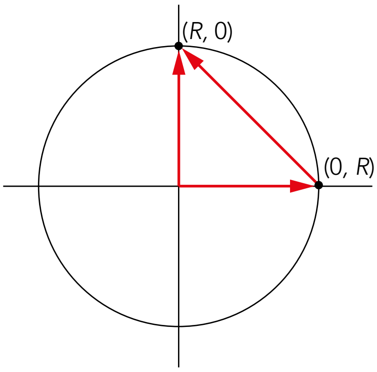
b) El vector velocidad media entre las posiciones (0, R) y (R, 0).

¿Coincide en este caso la celeridad con el módulo de la velocidad media? ¿A qué se debe?

a) La celeridad del movimiento se define como el espacio recorrido entre el tiempo que tarda en recorrerlo:

$$c = \frac{s}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 20 \text{ m}}{4 \text{ s}} = 10 \cdot \pi \text{ m/s}$$

b) La velocidad media se calcula dividiendo el vector desplazamiento entre el tiempo. Representando los puntos que nos da el enunciado:



Como tarda 4 s en dar una vuelta completa, en un cuarto de vuelta se invertirá 1 s. Con esto, la velocidad media será:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t} = \frac{(20 \cdot \vec{j} - 20 \cdot \vec{i}\,)}{1 \text{ s}} = 20 \cdot (-\vec{i} + \vec{j}\,) \text{ m/s}$$

Y su módulo es:

$$v_m = \sqrt{(20 \text{ m/s})^2 + (20 \text{ m/s})^2} = 20 \cdot \sqrt{2} \text{ m/s}$$

La celeridad no coincide con la velocidad media debido a que para la velocidad media se considera el vector desplazamiento, que es menor al espacio recorrido. Por tanto, su valor es menor.

7 **Un móvil se encuentra inicialmente en la posición (x = 2 m, y = 8 m). Si se desplaza con velocidad media $\vec{v}_m = (2 \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j}\,)$ m/s, ¿en qué posición se encontrará en t = 4 s? ¿A qué distancia del origen?**

La velocidad media es el vector desplazamiento entre el tiempo empleado. Si inicialmente se encuentra en el punto (2, 8) y después de 4 s se encuentra en (x, y):

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{t} = \frac{(x - 2) \cdot \vec{i} + (y - 8) \cdot \vec{j}}{4} = 2 \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j}$$

Conocida la expresión vectorial de la velocidad media, la posición en que se encontrará el móvil en el eje X y en el eje Y es:

Eje X: $$\frac{x - 2}{4} = 2 \text{ m} \rightarrow x = 10 \text{ m}$$

Eje Y: $$\frac{y - 8}{4} = -6 \text{ m} \rightarrow \mathbf{y} = -16 \text{ m}$$

La distancia del origen será el módulo del vector posición, por tanto:

$$d_0 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{10^2 \text{ m} + (-16 \text{ m})^2} = 18{,}87 \text{ m}$$

8 **La ecuación intrínseca de un movimiento viene dada por $s = (3 + 2 \cdot t - 5 \cdot t^2)$ m. Calcula:**

a) La celeridad media en los 3 primeros segundos.

b) La celeridad instantánea.

¿Se podría determinar, con estos datos, el vector velocidad? ¿Por qué?

a) La celeridad media viene dada por el espacio recorrido entre el tiempo:

$$c_m = \frac{|s_3 - s_0|}{t} = \frac{|(3 + 2 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2) - (3 + 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0^2)|\ \text{m}}{3\ \text{s}} = 13\ \text{m/s}$$

b) La celeridad instantánea se calcula al derivar el espacio frente al tiempo:

$$c_{ins} = \frac{\text{d}s}{\text{d}t} = \frac{\text{d}\,(3 + 2 \cdot t - 5 \cdot t^2)}{\text{d}t} = (2 - 10 \cdot t)\ \text{m/s}$$

No se conoce la trayectoria y, por tanto, no se puede calcular el vector velocidad; solo su módulo.

9 **¿Qué significado tiene que la aceleración de un móvil que se mueve en línea recta, supuesta constante, es de 2 m/s²?**

Su significado es que, cada segundo que pasa, la celeridad aumenta en 2 m/s.

10 **Indica si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:**

a) En un MCU, la aceleración es nula.

b) En un movimiento circular, $\vec{a}_n$ no varía.

c) Si la velocidad y la aceleración forman un ángulo de 30°, la celeridad es constante.

d) Si la velocidad y la aceleración forman un ángulo de 150°, la aceleración tangencial es negativa.

a) Falsa. Un movimiento circular siempre tiene aceleración normal (o centrípeta).

b) Falso. Si el movimiento circular es acelerado, la aceleración normal varía.

c) Falso. En las condiciones descritas, la aceleración tiene componente tangencial, y la celeridad no es constante.

d) Verdadero. Con el ángulo indicado, la componente tangencial de la aceleración tiene sentido contrario a la velocidad.

Página 217

11 **El vector posición de un móvil viene dado por $\vec{r} = [(2 - t2) \cdot \vec{i} - 3 \cdot t2 \cdot \vec{j}\,]$ m:**

a) Calcula y representa la ecuación de la trayectoria.

b) Determina los vectores velocidad y aceleración instantánea y sus módulos.

c) Calcula los valores medios de estas magnitudes entre $t = 2$ s y $t = 7$ s.

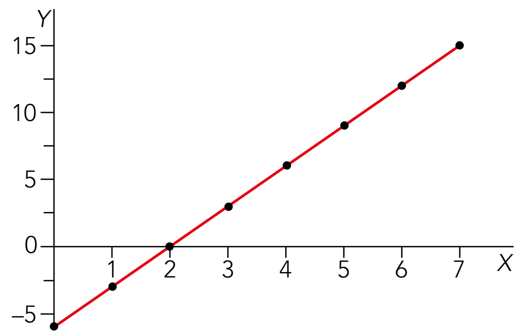
d) Halla las componentes intrínsecas de la aceleración.

e) ¿De qué tipo de movimiento se trata?

a) Conocido el vector posición, calculamos la ecuación de la trayectoria expresando y en función de x. Si partimos de las ecuaciones paramétricas del movimiento:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - t^2 \\ y = -3 \cdot t^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} t^2 = 2 - x \\ y = -3 \cdot (2 - x) \end{array}\right\} y = -6 + 3 \cdot x$$

Gráficamente, obtenemos esta representación:



b) Para determinar el vector velocidad, derivamos el vector posición respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\,[(2 - t^2) \cdot \vec{i} - 3 \cdot t^2 \cdot \vec{j}\,]}{dt} = (-2 \cdot t \cdot \vec{i} - 6 \cdot t \cdot \vec{j}\,)\ \text{m/s}$$

El vector aceleración será la derivada del vector velocidad:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\,(-2 \cdot t \cdot \vec{i} - 6 \cdot t \cdot \vec{j}\,)}{dt} = (-2 \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j}\,)\ \text{m/s}^2$$

Sus módulos vienen dados por la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de sus componentes x e y:

$$|\vec{v}\,| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2 \cdot t)^2 + (-6 \cdot t)^2} = \sqrt{40 \cdot t^2} = 6{,}32 \cdot t\ \text{m/s}$$

$$|\vec{a}\,| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40}\ \text{m/s}^2 = 6{,}32\ \text{m/s}^2$$

c) La velocidad media es el vector desplazamiento entre la diferencia de tiempo:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_7 - \vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{(-45 \cdot \vec{i} - 135 \cdot \vec{j}\,)\text{m}}{5\ \text{s}} = (-19 \cdot \vec{i} - 27 \cdot \vec{j}\,)\text{m/s}$$

La aceleración media se obtiene de la variación de velocidad entre el tiempo:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_7 - \vec{v}_2}{\Delta t} = \frac{(-10 \cdot \vec{i} - 30 \cdot \vec{j}\,)\ \text{m}}{5\ \text{s}} = (-2 \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j}\,)\ \text{m/s}^2$$

d) Para el cálculo de las componentes intrínsecas, hallamos el módulo de la velocidad; conocidas v_x y v_y:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 \cdot t^2 + 36 \cdot t^2} = \sqrt{40 \cdot t^2} = 6{,}32 \cdot t\ \text{m/s}$$

La aceleración tangencial es la derivada del módulo de la velocidad respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\,(6{,}32 \cdot t)}{dt} = 6{,}32\ \text{m/s}^2$$

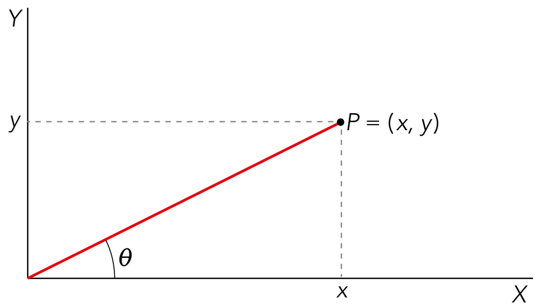
Calculamos el módulo de la aceleración, conociendo sus componentes a_x y a_y:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(2\ \text{m/s}^2)^2 + (6\ \text{m/s}^2)^2} = \sqrt{40}\ \text{m}^2/\text{s}^4 = 6{,}32\ \text{m/s}^2$$

La aceleración tangencial coincide con el módulo de la aceleración, lo que indica que la aceleración normal es nula.

e) Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

12 **Para describir un movimiento es necesario fijar un sistema de referencia. Los más utilizados son los cartesianos, pero no son los únicos. Para localizar un punto en el plano también es frecuente usar coordenadas polares. En estos sistemas de referencia lo que se proporciona es la distancia al origen, *r*, y el ángulo que forma el vector posición con el semieje positivo del eje *X*, *θ*. Se muestra en la siguiente figura.**



a) Si un objeto se localiza en las coordenadas cartesianas (3, 8), ¿cuáles serán sus coordenadas polares?

b) Si las coordenadas polares de un punto son (4, 120°), ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas?

c) ¿Cuáles son las ecuaciones generales para transformar coordenadas cartesianas en polares, y viceversa?

a) Si las coordenadas cartesianas son (3, 8), de la figura se puede deducir que:

$$r = \sqrt{3^2 + 8^2} = 8{,}54$$

$$\text{sen } \theta = \frac{8}{8{,}54} \Rightarrow \theta = 69{,}5°$$

b) Si las coordenadas polares son (4, 120°), de la figura se puede deducir que:

$$x = 4 \cdot \cos 120° = -2$$

$$y = 4 \cdot \text{sen } 120° = 3{,}46$$

c) En general, para transformar unas coordenadas en otras se procede como sigue:

$$(x, y) \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctg \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$(r, \theta) \Rightarrow \begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \text{sen } \theta \end{cases}$$

Movimientos rectilíneos

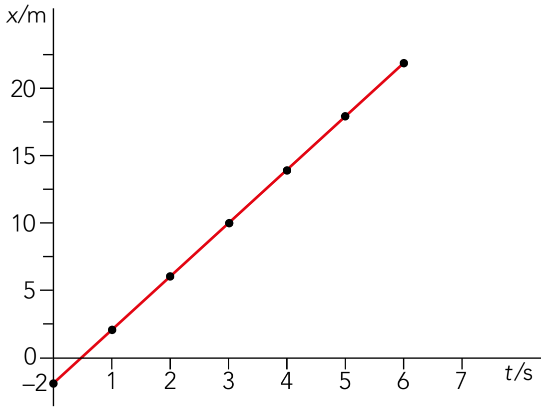
13 **Dibuja la gráfica posición-tiempo y velocidad-tiempo de los movimientos de ecuaciones:**

a) $x = (-2 + 4 \cdot t)$ **m.**

b) $x = (3 - 9 \cdot t)$ **m.**

Determina, en cada caso, los valores iniciales de posición y velocidad y los del instante $t = 3$ **s.**

a) Para la función $x = (-2 + 4 \cdot t)$, obtenemos la siguiente gráfica:



En el punto inicial, es decir, cuando $t = 0$:

$$x_0 = (-2 + 4 \cdot 0) = -2 \text{ m}$$

La velocidad será la derivada y sustituyendo:

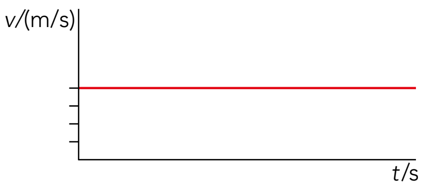
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d\,(-2 + 4 \cdot t)}{dt} = 4 \text{ m/s}$$

Si $t = 3$ s, los valores de posición y velocidad son:

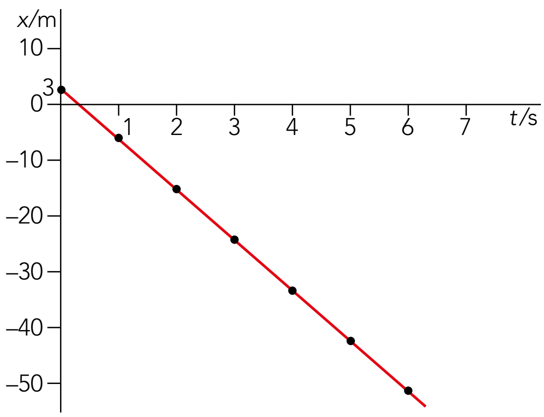
$$x_3 = (-2 + 4 \cdot 3) = 10 \text{ m}$$

$$v = 4 \text{ m/s}$$

Por tanto, la velocidad se mantiene constante en el tiempo. Así, su gráfica es:



b) Por otra parte, para la función $x = (3 - 9 \cdot t)$, su gráfica será:



En el instante inicial, cuando $t = 0$, la posición y la velocidad en este movimiento son:

$$x_0 = (3 - 9 \cdot 0) = 3 \text{ m}$$

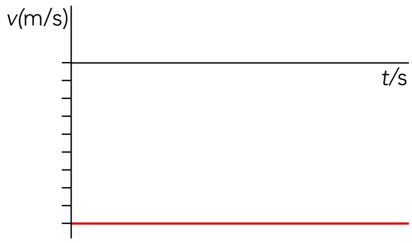
$$v_0 = \frac{dx}{dt} = \frac{d(3 - 9 \cdot t)}{dt} = -9 \text{ m/s}$$

Cuando t = 3 s, la velocidad y la posición serán:

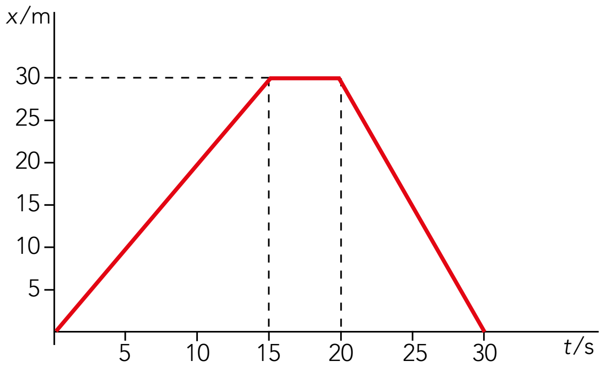
$$x_3 = (3 - 9 \cdot 3) = -24 \text{ m}$$

$$v_3 = -9 \text{ m/s}$$

En este caso, igual que en el anterior, la velocidad se mantiene constante también. Por tanto, su gráfica será similiar a la del caso anterior:



14 **La gráfica *x*-*t* del movimiento de un cuerpo es:**



Describe el movimiento en cada tramo, y calcula:

a) Las ecuaciones de la posición y la velocidad en cada tramo.

b) La distancia al origen en *t* = 10 s, *t* = 17 s y *t* = 25 s.

c) El vector velocidad media entre *t* = 10 s y *t* = 25 s.

d) El módulo del vector desplazamiento en cada tramo, y el total.

a) Las ecuaciones de la posición y la velocidad son:

Tramo I, desde t_0 = 0 hasta t_1 = 15 s; es un MRU:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{30 \text{ m}}{15 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}$$

$$x = v \cdot t \rightarrow x = 2 \cdot t \text{ m}$$

Tramo II, desde t_1 = 15 s hasta t_2 = 20 s, está en reposo. La posición no varía con el tiempo. Sus ecuaciones serán:

$$x = 30 \text{ m}$$

$$v = 0$$

Tramo III, desde t_2 = 20 s hasta t_3 = 30 s; es un MRU:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-30 \text{ m}}{10 \text{ s}} = -3 \text{ m/s}$$

$$x = x_0 + v \cdot \Delta t \rightarrow x = [30 - 3 \cdot (t - 20)] \text{ m}$$

b) Como se puede ver en la gráfica, o calcular de las expresiones *x*-*t* correspondientes a cada caso, la distancia al origen será:

$$t = 10 \text{ s} \rightarrow x_{10} = 20 \text{ m}$$
$$t = 17 \text{ s} \rightarrow x_{17} = 30 \text{ m}$$
$$t = 25 \text{ s} \rightarrow x_{25} = 15 \text{ m}$$

En el último caso, debemos recordar que el móvil ha recorrido 45 m y que está a 15 m del origen, que son los que le quedan por recorrer. A partir de t = 15 s, el móvil se acerca al origen.

c) El vector velocidad media entre t = 10 s y t = 25 s es:

$$\Delta\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} = \frac{(15 \text{ m} - 20 \text{ m}) \cdot \vec{i}}{15 \text{ s}} = -\frac{1}{3} \cdot \vec{i} \text{ m/s}$$

d) El módulo del vector desplazamiento en cada tramo será:

Tramo I:

$$\Delta\vec{r}_1 = (30 \text{ m} - 0 \text{ m}) \cdot \vec{i} = 30 \cdot \vec{i} \text{ m} \rightarrow |\Delta\vec{r}_I| = 30 \text{ m}$$

Tramo II: el vector desplazamiento es nulo.

Tramo III:

$$\Delta\vec{r}_{III} = (0 \cdot \vec{i} - 30 \cdot \vec{i}) \text{ m} = -30 \cdot \vec{i} \text{ m} \rightarrow |\Delta\vec{r}_{III}| = 30 \text{ m}$$

El total será:

$$\Delta\vec{r}_{total} = (30 \cdot \vec{i} - 30 \cdot \vec{i}) \text{ m} = 0 \cdot \vec{i} \text{ m} \rightarrow |\Delta\vec{r}_{total}| = 0 \text{ m}$$

15 Desde el origen de coordenadas, con una diferencia de 10 s, parten dos móviles en la misma dirección y sentido. El primero se mueve a 15 m/s. ¿A qué velocidad constante ha de moverse el segundo para alcanzarlo en 20 s? Resuelve el problema gráficamente, y comprueba que se obtienen los mismos resultados que si se resolviera numéricamente.

La ecuación de la posición para un MRU es:

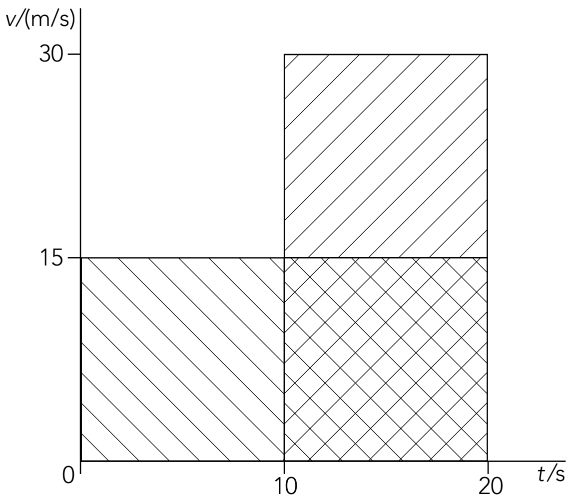
$$x = v \cdot t$$

Si planteamos las ecuaciones de los dos movimientos, y tenemos en cuenta que cuando se encuentran se cumple que $x_1 = x_2$:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = v_1 \cdot t_1 = 15 \text{ m/s} \cdot 20 \text{ s} \\ x_2 = v_2 \cdot (t_2 - t_1) = v_2 \cdot 10 \text{ s} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} 15 \text{ m/s} \cdot 20 \text{ s} = v_2 \cdot 10 \text{ s} \\ v_2 = 30 \text{ m/s} \end{array}$$

Gráficamente, al representar la velocidad frente al tiempo, el área será el espacio recorrido. Para que sea la misma área, la velocidad debe ser el doble de la primera, como podemos ver en la gráfica de la derecha.

Otra opción sería representar las gráficas *x*-*t* de los dos movimientos y determinar gráficamente la pendiente de la segunda recta.



16 **Un móvil, inicialmente en reposo, adquiere una velocidad de 20 m/s en 15 s. Determina las ecuaciones de la posición, la velocidad y aceleración. Representa gráficamente estas magnitudes y determina sus módulos en el instante t = 10 s.**

Si consideramos un MRUA:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Se considera que parte del origen de coordenadas; al partir del reposo, v_0 será nula. Calculamos su aceleración:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20 \text{ m/s}}{15 \text{ s}} = 1,\widehat{3} \text{ m/s}^2$$

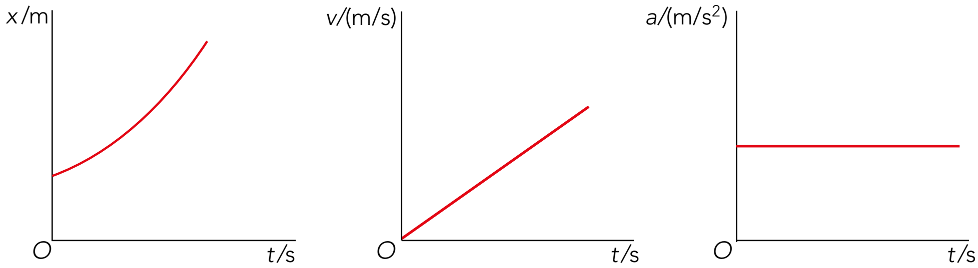
La ecuación del espacio es:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,\widehat{3} \text{ m/s}^2 \cdot t^2 \rightarrow x = 0,67 \cdot t^2 \text{ m}$$

Y la de la velocidad será:

$$v = a \cdot t \qquad\qquad v = 1,33 \cdot t \text{ m/s}$$

Gráficamente, podemos representarlas así:



Para t = 10 s, los valores del espacio, la velocidad y la aceleración son:

$$x_{10} = 0,67 \cdot 10^2 = 66,67 \text{ m}$$

$$v_{10} = 1,33 \cdot 10 = 13,33 \text{ m/s}$$

$$a_{10} = 1,33 \text{ m/s}^2$$

17 **Un camión circula por una recta a 100 km/h. Detrás de él, a una distancia de 30 m, lo hace una moto a la misma velocidad. En un instante (t = 0), el motorista decide adelantar al vehículo, invirtiendo 10 s en situarse 20 m delante. ¿Qué espacio recorre cada vehículo durante el adelantamiento?**

Para determinar el espacio recorrido por ambos vehículos, primero calculamos el espacio recorrido por el camión, que sigue un MRU:

$$\Delta x_{\text{camión}} = v \cdot t = 27,78 \text{ m/s} \cdot 10 \text{ s} = 277,8 \text{ m}$$

El espacio recorrido por el coche será 50 m más: 30 m antes de adelantarlo y 20 m al situarse delante:

$$\Delta x_{\text{coche}} = 30 \text{ m} + 277,8 \text{ m} + 20 \text{ m} = 327,8 \text{ m}$$

18 **La aceleración de frenado de un vehículo es de 5 m/s². Calcula:**

a) La distancia de frenado cuando circula a 60 km/h, y cuando lo hace a 120 km/h.

b) La distancia de frenado en ambos casos, si el tiempo de reacción del conductor es de 1 s.

c) Sin tener en cuenta el tiempo de reacción, ¿qué relación existe entre el tiempo y la velocidad inicial?

Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente decelerado (aceleración negativa). Las ecuaciones del movimiento son:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \;\rightarrow\; v = v_0 + a \cdot t$$

a) En primer lugar, pasamos las velocidades al SI de unidades (m/s):

$$v_{01} = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} \cdot \frac{1\,000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 16{,}67\ \text{m/s}$$

$$v_{02} = 120\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} \cdot \frac{1\,000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 33{,}33\ \text{m/s}$$

Para determinar la distancia de frenado, debemos conocer el tiempo que tarda en recorrer dicha distancia. Al frenar, la velocidad final será nula y conocida la velocidad inicial, podemos determinarlo:

- Para v = 60 km/h: $0\ \text{m/s} = 16{,}67\ \text{m/s} - 5\ \text{m/s}^2 \cdot t \rightarrow t = 3{,}33\ \text{s}$

$$d_{60} = 16{,}67\ \text{m/s} \cdot 3{,}33\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 5\ \text{m/s}^2 \cdot (3{,}33\ \text{s})^2 = 27{,}8\ \text{m}$$

- Para v = 120 km/h: $0\ \text{m/s} = 33{,}33\ \text{m/s} - 5\ \text{m/s}^2 \cdot t \rightarrow t = 6{,}67\ \text{s}$

$$d_{120} = 33{,}33\ \text{m/s} \cdot 6{,}67\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 5\ \text{m/s}^2 \cdot (6{,}67\ \text{s})^2 = 111{,}1\ \text{m}$$

b) El tiempo de reacción es el tiempo que transcurre desde que el conductor ve el obstáculo hasta que pisa el freno y el vehículo comienza a frenar. Por tanto, durante ese tiempo el vehículo circula a la velocidad inicial uniformemente y recorre una distancia inicial que incrementa la distancia de frenado calculada en el apartado anterior:

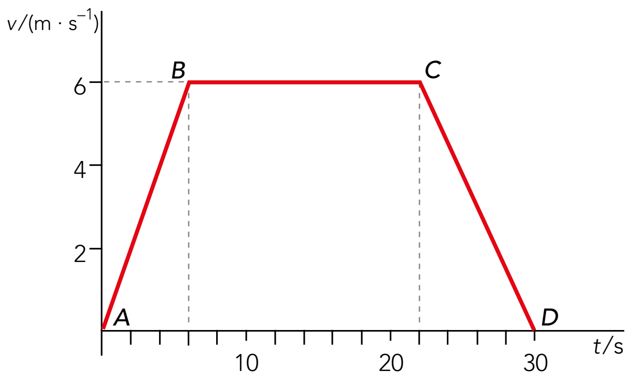
- Para v = 60 km/h: $d'_{60} = 16{,}67\ \text{m/s} \cdot 1\ \text{s} + 27{,}8\ \text{m} = 44{,}5\ \text{m}$
- Para v = 120 km/h: $d'_{120} = 33{,}33\ \text{m/s} \cdot 1\ \text{s} + 111{,}1\ \text{m} = 144{,}4\ \text{m}$

c) Al ser la velocidad final 0, la relación entre el tiempo y la velocidad inicial viene determinada por la expresión:

$$0 = v_0 - a \cdot t \rightarrow t = \frac{v_0}{a} \rightarrow t = \left(\frac{v_0}{5}\right)$$

Página 218

19 Calcula la aceleración en cada tramo y el espacio total recorrido por el móvil representado por la gráfica:



Tramo I: se trata de un MRUA. El valor de su aceleración y del espacio que recorre son:

$$a_I = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6\ \text{m/s} - 0}{6\ \text{s}} = 1\ \text{m/s}^2$$

$$\Delta x_I = x_0 + v_0 \cdot t_I + \frac{1}{2} \cdot a_I \cdot t_I^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 1\ \text{m/s}^2 \cdot (6\ \text{s})^2 = 18\ \text{m}$$

Tramo II: es un MRU. En este caso, su aceleración es nula, pues va a velocidad constante, y el espacio que recorre es:

$$a_{II} = 0$$
$$\Delta x_{III} = v_{II} \cdot t = 6\ \text{m/s} \cdot 16\ \text{s} = 96\ \text{m}$$

Tramo III: es un MRUA. En este tramo, para hallar el espacio, vamos a suponer que $x_0 = 0$. Así, su aceleración y su posición serán:

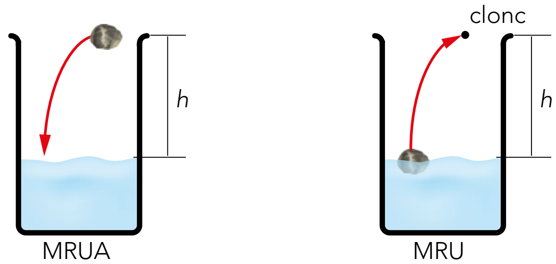
$$a_{III} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(0-6)\ \text{m/s}}{8\ \text{s}} = -0{,}75\ \text{m/s}^2$$
$$\Delta x_{III} = x_0 + v_{II} \cdot t_{III} + \frac{1}{2} \cdot a_{III} \cdot t_{III}{}^2 = 0 + 6\ \text{m/s} \cdot 8\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 0{,}75\ \text{m/s}^2 \cdot 8^2 = 24\ \text{m}$$

El espacio total recorrido es la suma de los espacios recorridos en los tres tramos:

$$x = \Delta x_I + \Delta x_{II} + \Delta x_{III} = 18\ \text{m} + 96\ \text{m} + 24\ \text{m} = 138\ \text{m}$$

20 Para medir la profundidad de un pozo se puede dejar caer una piedra desde su boca y medir el tiempo que tardamos en oír el impacto con el agua. Determina la ecuación que nos permite obtener esta profundidad en función del tiempo medido; ten en cuenta el tiempo que tarda en llegar el sonido, con velocidad v_s.

Para poder realizar el ejercicio, representamos primero lo que ocurre al tirar la piedra al pozo:



La caída de la piedra al pozo es un MRUA, pues es un movimiento tipo caída libre. El sonido que se escucha cuando la piedra impacta en el fondo (clonc) es un MRU, pues la velocidad del sonido es constante. Ambos movimientos recorren la misma distancia: h, la altura del pozo (ecuaciones [1] y [2]). Además, el tiempo que tarda en escucharse el sonido es la suma del tiempo que tarda la piedra en caer más el tiempo que tarda en subir el sonido (ecuación [3]). Por tanto, podemos plantear:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_c^2 \rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \qquad [1]$$
$$h = v_s \cdot t_s \rightarrow t_s = \frac{h}{v_s} \qquad [2]$$
$$t = t_c + t_s \rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} + \frac{h}{v_s} \qquad [3]$$

A partir de este punto, ya solo realizamos cálculos matemáticos:

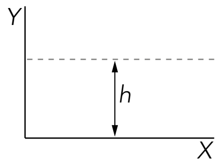
$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} + \frac{h}{v_s} \rightarrow \left(t - \frac{h}{v_s}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}\right)^2$$
$$t^2 + \frac{h^2}{v_s^2} - 2 \cdot t \cdot \frac{h}{v_s} = \frac{2 \cdot h}{g} \rightarrow \frac{h^2}{v_s^2} - 2 \cdot t \cdot \frac{h}{v_s} - 2 \cdot \frac{h}{g} + t^2 = 0$$

Por tanto, equiparando esto a una ecuación de segundo grado completa, podemos decir que:

$$A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{1}{v_s^2}}_{A} \cdot h^2 - \underbrace{\frac{2 \cdot (v_s + g \cdot t)}{v_s \cdot g}}_{B} \cdot h + \underbrace{t^2}_{C} = 0$$

21 **Un objeto en caída libre recorre la cuarta parte de la altura inicial en los últimos 0,75 s. ¿Desde qué altura se dejó caer? ¿Con qué velocidad impacta con el suelo? Elabora un listado con los pasos que has seguido para resolver el problema.**

De acuerdo con el enunciado del problema, la altura inicial, $y = h$, es:



Por tanto, las ecuaciones de la posición y la velocidad, de acuerdo con el sistema de referencia anterior, son:

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v = -g \cdot t$$

El tiempo total de caída, T, corresponde a la posición $y(T) = 0$; por tanto:

$$y(T) = 0 \rightarrow h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot T^2 = 0 \rightarrow T = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \qquad [1]$$

Durante los últimos 0,75 s (t_0 = 0,75 s), el objeto recorre un cuarto de la altura total. Por tanto, en el instante de tiempo $T - t_0$, el objeto habrá recorrido 3/4 de la altura inicial, y se encontrará a una altura $h/4$ respecto al suelo; así, respecto al S. R. elegido, la posición del objeto será:

$$y(T - t_0) = \frac{h}{4} \rightarrow \frac{h}{4} = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (T - t_0)^2 \rightarrow \frac{3}{4} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (T - t_0)^2$$

De donde despejamos la diferencia de tiempo que tarda en recorrer los 3/4 de altura que desconocemos:

$$T - t_0 = \sqrt{\frac{3 \cdot h}{2 \cdot g}} \qquad [2]$$

Si igualamos ahora las expresiones [1] y [2], resulta:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} - t_0 = \sqrt{\frac{3 \cdot h}{2 \cdot g}} \rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{h}{g}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Si se despeja h se tiene:

$$h = \frac{t_0^2 \cdot 2 \cdot g}{(2 - \sqrt{3})^2}$$

Al sustituir los valores de que disponemos, resulta:

$$h = \frac{(0{,}75 \text{ s})^2 \cdot 2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{(2 - \sqrt{3})^2} = 153{,}6 \text{ m}$$

El tiempo total, T, puede obtenerse a partir de las expresiones [1] o [2]; así, para [1], más sencilla, se tiene:

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 153{,}6 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m/s}^2}} = 5{,}59 \text{ s}$$

La velocidad de impacto con el suelo, sin tener en cuenta su signo, será:

$$v = g \cdot T \rightarrow v = 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 5{,}59 \text{ s} = 54{,}9 \text{ m/s}$$

22 **Se lanza verticalmente hacia arriba una pelota a 25 m/s. ¿En qué instantes la celeridad es 10 m/s? Desde un punto de vista físico, ¿por qué se obtienen dos valores? ¿A qué altura está la pelota en estos instantes? Representa, para esos dos puntos, los vectores posición, velocidad y aceleración.**

Teniendo en cuenta que el movimiento es una ascensión libre seguida de una caída libre, diremos que las ecuaciones que lo definen son:

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v = v_0 - g \cdot t \;\rightarrow\; t = \frac{v - v_0}{-g}$$

El enunciado nos dice que la celeridad es de 10 m/s, es decir:

$$c = 10 \text{ m/s} \;\rightarrow\; v = \pm 10 \text{ m/s}$$

Por tanto, si sabemos que la velocidad inicial son 25 m/s, podemos calcular el tiempo de ascenso y de descenso, en unidades del SI:

Ascenso: $v = 10$ m/s 8 $t_1 = \dfrac{10 - 25}{-9{,}81} = 1{,}53$ s

Descenso: $v = -10$ m/s 8 $t_2 = \dfrac{-10 - 25}{-9{,}81} = 3{,}57$ s

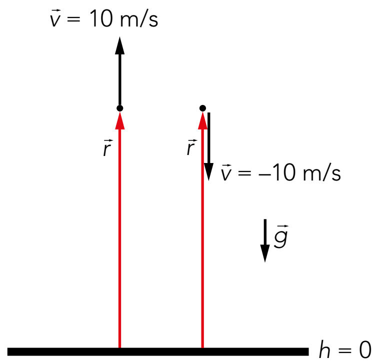
Así, las alturas recorridas en esos tiempo son:

Ascenso: $h = 25 \cdot 1{,}53 - \dfrac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}53^2 = 26{,}77$ m

Descenso: $h = 25 \cdot 3{,}57 - \dfrac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}57^2 = 26{,}74$ m

Luego, como esperábamos, los valores son prácticamente iguales. Así, la altura a la que se encuentra la pelota es de 26,75 m, cuando la celeridad es de 10 m/s.

La representación de los vectores posición, velocidad y aceleración en esos puntos es:

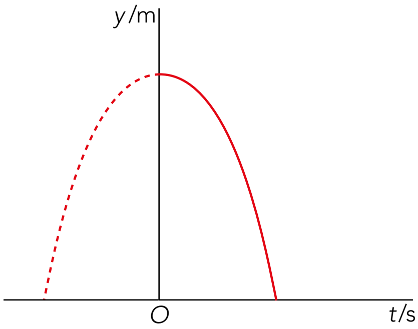


23 **La altura a la que se encuentra un cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo que lleva moviéndose. Por ello, cuando se resuelve la ecuación $y(t) = 0$ se obtienen dos soluciones, una de ellas negativa. ¿Qué significado podríamos darle a la solución negativa, que siempre desechamos?**

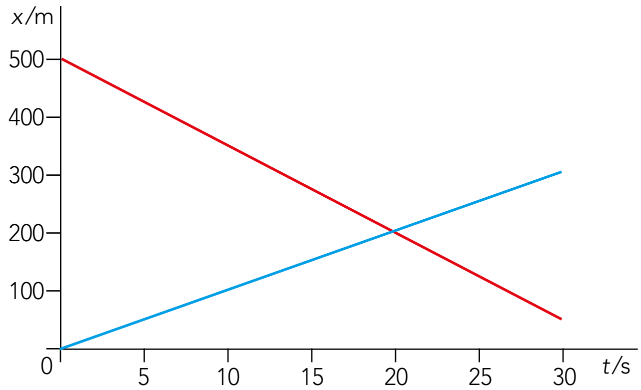
La ecuación a la que nos referimos es:

$$y\,(t) = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

La solución corresponde gráficamente al corte de la función parabólica con el eje de las *X* (el tiempo). Dado que valores negativos de tiempo no tienen sentido físico, se desecha el valor. Podemos comprobarlo al observar su representación:



24 **Observa el siguiente gráfico y explica a qué situación cotidiana puede hacer referencia, indicando los valores de las magnitudes cinemáticas de los movimientos que se representan.**



La gráfica representa los movimientos uniformes de dos móviles que se desplazan sobre la trayectoria en sentidos contrarios. Por ejemplo, dos vehículos que se cruzan en una carretera (no necesariamente una recta, aunque podría serlo).

El primero se mueve en el sentido positivo de la trayectoria y recorre 300 m en 30 s, por lo que su celeridad es v_1 = 10 m/s; el segundo lo hace en sentido negativo recorriendo 450 m en 30 s, por lo que su celeridad es v_2 = 15 m/s. Los dos vehículos se cruzan a los 20 s de empezar a estudiar el movimiento, a 200 m del origen de movimientos

25 **En un lazamiento vertical ascendente, ¿de qué variables depende el tiempo que se tarda en alcanzar la altura máxima? ¿Qué relaciones de proporcionalidad guarda con cada una de ellas?**

La ascensión libre viene descrita por las ecuaciones:

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2 \quad ; \quad v = v_0 - g \cdot t$$

Cuando la altura sea máxima, la velocidad en ese punto es nula, por tanto:

$$h = h_{máx} \rightarrow v = 0 \rightarrow v_0 = g \cdot t_v \rightarrow t_v = \frac{v_0}{g}$$

Luego, el tiempo de vuelo, es decir, el que tarda en alcanzar la altura máxima, depende de la velocidad inicial y de la gravedad. Las relaciones de proporcionalidad son:

$t_v \propto v_0$; directamente proporcional

$t_v \propto \frac{1}{g}$; inversamente proporcional

26 **Dos vehículos, *A* y *B*, circulan por una carretera recta sobre la que situamos el eje *X* de nuestro sistema de coordenadas. Cuando el vehículo que circula con velocidad constante $\vec{v} = 90 \cdot \hat{i}$ km/h, pasa por el origen de coordenadas, el *B* comienza, desde el reposo, un movimiento uniformemente acelerado en sentido contrario desde la posición $x = 500$ m. ¿Con qué aceleración debe describir *B* su movimiento para cruzarse con *A* en $x = 300$ m? ¿Qué velocidad lleva en ese momento, en km/h?**

Como los dos movimientos se realizan sobre el eje *X* podemos trabajar con los módulos de las magnitudes.

Las ecuaciones del movimiento de *A* son:

$$x_A = v_A \cdot t$$

Las ecuaciones del movimiento de *B* son ($v_{0B} = 0$):

$$x_B = x_{0B} - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$v_B = -\, a \cdot t$$

Como se tienen que cruzar en $x = 300$ m, en primer lugar, calculamos el tiempo que tarda *A* en llegar a esa posición (unidades SI):

$$x_A = 300 = 25 \cdot t \;\Rightarrow\; t = 12 \text{ s}$$

Este es el tiempo que debe tardar *B* en llegar a esa posición, por lo que:

$$x_B = x_{0B} - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow a = 2 \cdot \frac{x_{0B} - x_B}{t^2} = 2 \cdot \frac{500 - 300}{12^2} = 1{,}4 \text{ m/s}^2$$

Pasado este tiempo, la celeridad de *B* es (en unidades SI):

$$v_B = -\, a \cdot t = -\,1{,}4 \cdot 12 = -16{,}8 \text{ m/s} = -\,60{,}5 \text{ km/h}$$

Y la velocidad:

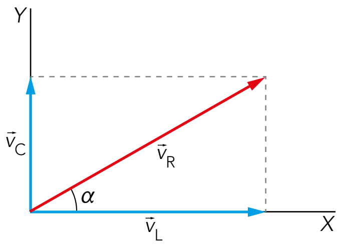
$$\vec{v} = -60{,}5 \cdot \vec{i} \text{ km/h}$$

Composición de movimientos

27 **Una lancha motora se mueve, según su panel de mandos, a 20 nudos con la proa orientada en dirección este. Si se encuentra inmersa en una corriente marina de 5 km/h dirección norte, ¿cuál es su velocidad respecto a la costa? Para moverse hacia el este respecto a costa, ¿hacia qué dirección se debería enfocar la proa?**

Dato: 1 nudo = 1,852 km/h.

La lancha y la corriente se mueven según el siguiente esquema:



Las velocidades de la lancha y de la corriente en unidades de SI son:

$$v_L = 20 \text{ nudos} \cdot 1{,}852 \frac{\text{km/h}}{\text{nudo}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 10{,}29 \text{ m/s}$$

$$v_C = 5 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 1{,}39 \text{ m/s}$$

Según el principio de superposición, la velocidad respecto a la costa será:

$$\vec{v}_R = \vec{v}_L + \vec{v}_C = v_L \cdot \vec{i} + v_C \cdot \vec{j}$$

$$v_R = \sqrt{v_L^2 + v_C^2} = \sqrt{10{,}29^2 + 1{,}39^2} = 10{,}38 \text{ m/s}$$

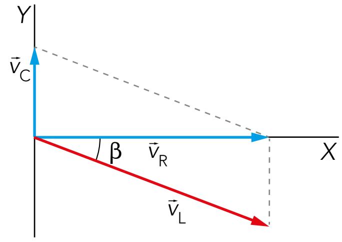
El ángulo que forman estas dos velocidades (α) es:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{v_C}{v_L} = \frac{1{,}39 \text{ m/s}}{10{,}29 \text{ m/s}} = 0{,}13 \rightarrow \alpha = 7{,}7°$$

Para ir hacia el este, la dirección a la que debe enfocar la proa será aquella cuya componente *y* anule la velocidad de la corriente; esto es:

$$v_L \cdot \text{sen}\,\beta = -v_C \rightarrow \beta = \text{arcsen}\left(\frac{-v_C}{v_L}\right) = \text{arcsen}\,\frac{-1{,}39 \text{ m/s}}{10{,}29 \text{ m/s}} = -7{,}8°$$

El esquema vectorial de velocidades es:



28 **Con una piragua, una persona tarda tres minutos en recorrer 200 m cuando rema a favor de la corriente, y cinco minutos cuando lo hace en contra, en ambos casos a velocidad constante. A esta velocidad, si rema perpendicularmente a la corriente, invierte cuatro minutos en cruzar el río. Calcula la velocidad de la piragua, la velocidad de la corriente y la anchura del río. ¿En qué dirección debería remar para cruzar el río perpendicularmente a la orilla, y cuánto tiempo tardaría en hacerlo?**

Según el principio de superposición, la velocidad resultante será la suma cuando corriente y piragua vayan en el mismo sentido, y la resta, cuando su movimiento es en sentido contrario. El espacio recorrido por cada una viene dado por:

$$d = (v_p + v_r) \cdot t_1$$

$$d = (v_p - v_r) \cdot t_2$$

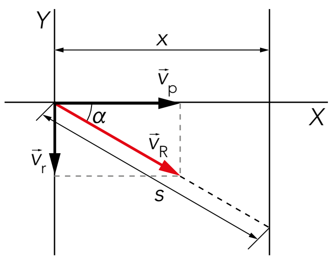
Resolviendo el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas calculamos v_p y v_r:

$$\left.\begin{array}{l} 200 = (v_p + v_r) \cdot 180 \\ 200 = (v_p - v_r) \cdot 300 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 1{,}11 = v_p + v_r \\ 0{,}67 = v_p - v_r \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} v_p = 0{,}67 + v_r \\ 1{,}11 = 0{,}67 + 2 \cdot v_r \end{array}$$

$$v_r = 0{,}22 \text{ m/s}$$

$$v_p = 0{,}67 + 0{,}22 = 0{,}89 \text{ m/s}$$

Según el esquema:



Al remar perpendicularmente, la velocidad resultante será:

$$v_R = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = \sqrt{0{,}22^2 + 0{,}89^2} = 0{,}92 \text{ m/s}$$

El espacio recorrido en este tiempo (t = 4 min) es:

$$s = v \cdot t = 0{,}92 \text{ m/s} \cdot 240 \text{ s} = 220{,}8 \text{ m}$$

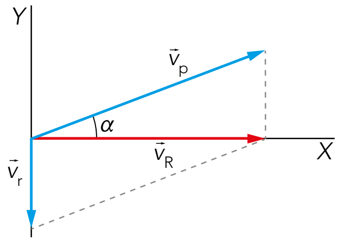
Por tanto, la anchura del río es:

$$\cos\alpha = \frac{x}{s} \rightarrow x = \cos\alpha \cdot s = \frac{0{,}89}{0{,}92} \cdot 220{,}8 \text{ m} = 213{,}6 \text{ m}$$

Para cruzarlo perpendicularmente se debe cumplir que:

$$v_p \cdot \text{sen}\,\alpha = v_r \rightarrow \alpha = \text{arcsen}\,\frac{v_r}{v_p} = \text{arcsen}\,\frac{0{,}22 \text{ m/s}}{0{,}89 \text{ m/s}} = 14{,}3°$$

El esquema vectorial de velocidades es:



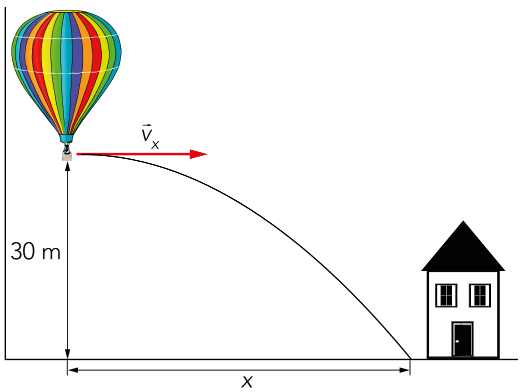
El tiempo que tarda en cruzarlo es:

$$x = v_p \cdot \cos\alpha \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{v_p \cdot \cos\alpha} = \frac{213{,}6 \text{ m}}{0{,}89 \text{ m/s} \cdot \cos 14{,}3°} = 247{,}7 \text{ s}$$

29 **Un pasajero de un globo aerostático que viaja a 10 nudos con trayectoria paralela al suelo a 30 m de altura quiere soltar un paquete de modo que caiga en el patio de su casa, por encima del cual pasará el globo. Si despreciamos el rozamiento con el aire, ¿en qué punto de la trayectoria deberá soltarlo? ¿Qué tipo de movimiento describe el paquete para el pasajero del globo? ¿Y para alguien que está esperando en el patio?**

Dato: 1 nudo = 1,852 km/h.

Se trata de un tiro horizontal:



Las ecuaciones del movimiento son:

Eje X: $$v_x = \text{cte} \rightarrow v_x = 10 \text{ nudos} \cdot 1{,}852 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} = 5{,}14 \text{ m/s}$$

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t$$

Eje Y: $$v_y = v_{0y} - g \cdot t \rightarrow v_{0y} = 0 \rightarrow v_y = -g \cdot t$$

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow v_{0y} = 0 \rightarrow y = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Aplicando estas ecuaciones, podemos calcular, en primer lugar, el tiempo de vuelo del paquete (hasta que $y = 0$ y toque el suelo):

$$0 = 30\ \text{m} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot t^2 \rightarrow t^2 = 6{,}12 \rightarrow t = 2{,}48\ \text{s}$$

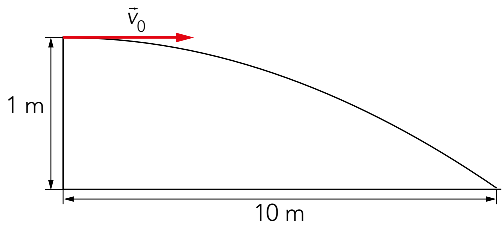
Por tanto, el punto en que se debe soltar es:

$$x = 5{,}14\ \text{m/s} \cdot 2{,}48\ \text{s} = 12{,}7\ \text{m}$$

Si se considera el sistema de referencia el globo, el tiro será una caída libre. Si consideramos un observador en el patio, es un tiro horizontal.

30 **La boca de una manguera, de 2 cm de diámetro, se sitúa de modo que, a 1 m de altura, el chorro de agua sale horizontal al suelo. Si el agua se aleja 10 m, ¿cuántos litros salen por minuto? Pista: m/s · m² = m³/s.**

Es un tiro horizontal, donde la velocidad inicial en el eje Y es 0. Según el siguiente esquema:



Las ecuaciones del movimiento son:

Eje X:

$$v_x = \text{cte}$$

$$x = x_0 + v_x \cdot t \rightarrow x = v_x \cdot t$$

Eje Y:

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t \rightarrow v_{0y} = 0 \rightarrow v_y = -g \cdot t$$

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow y = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

El tiempo que tarda el agua en llegar al suelo será:

$$0 = 1\ \text{m} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot t^2 \rightarrow t = 0{,}45\ \text{s}$$

Y la velocidad con la que el agua sale de la manguera es:

$$10\ \text{m} = v_x \cdot 0{,}45\ \text{s} \rightarrow v_x = \frac{10\ \text{m}}{0{,}45\ \text{s}} = 22{,}14\ \text{m/s}$$

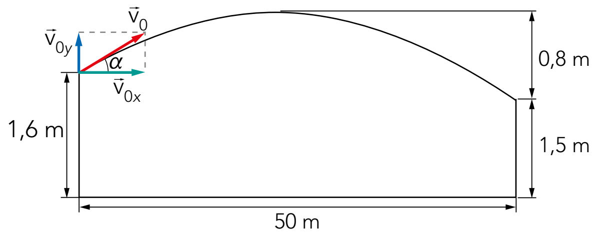
Así el caudal será la superficie de la manguera por la velocidad de salida del agua:

$$C = S \cdot v_x = \pi \cdot r^2 \cdot v_x = \pi \cdot (0{,}01\ \text{m})^2 \cdot 22{,}14\ \text{m/s} = 6{,}96 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s} = 6{,}96\ \text{L/s}$$

Página 219

31 **En una competición de tiro con arco la diana, de 80 cm de diámetro, se encuentra a 50 m de distancia, y su centro a 1,5 m del suelo. En uno de los tiros la flecha sale a 230 km/h, con un ángulo de 3,5°, desde una altura de 1,60 m. Despreciando el rozamiento con el aire, ¿impactará la flecha en la diana? En caso afirmativo, ¿con qué velocidad, y en qué dirección?**

Se trata de un tiro oblicuo. La gráfica que representa este movimiento en concreto es:



Las ecuaciones para un tiro oblicuo son:

Eje *X*: $v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha = 63{,}89 \text{ m/s} \cdot \cos 3{,}5° = 63{,}77 \text{ m/s}$

$$x = v_{0x} \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{v_{0x}}$$

Eje *Y*: $v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen } \alpha = 63{,}89 \text{ m/s} \cdot \text{sen } 3{,}5° = 3{,}90 \text{ m/s}$

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Sustituyendo el tiempo en la ecuación de *y*, obtenemos la ecuación de la trayectoria. Así, podemos calcular *y* cuando *x* = 50 m:

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_{0x}^2}$$

$$y = 1{,}60 \text{ m} + \frac{3{,}90 \text{ m/s}}{63{,}77 \text{ m/s}} \cdot 50 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{(50 \text{ m})^2}{(63{,}77 \text{ m/s})^2} = 1{,}64 \text{ m}$$

Por tanto, la flecha impacta contra la diana. La velocidad del impacto será:

$$v_x = v_{0x} = 63{,}77 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t = v_{0y} - g \cdot \frac{x}{v_{0x}} = 3{,}90 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{50 \text{ m}}{63{,}77 \text{ m/s}} = -3{,}79 \text{ m/s}$$

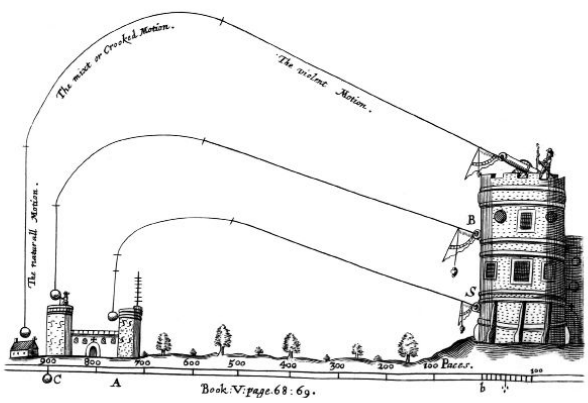
Así, el módulo de la velocidad es:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{63{,}77^2 + (-3{,}79)^2} = 63{,}88 \text{ m/s}$$

Y la dirección:

$$\alpha = \text{arctg } \frac{v_y}{v_x} = \text{arctg } \frac{(-3{,}79 \text{ m/s})}{63{,}77 \text{ m/s}} = -3{,}40°$$

32 En la Edad Media se pensaba que el movimiento de proyectiles tenía lugar según se muestra en la siguiente imagen. ¿Estaban en lo cierto? Justifícalo.



No estaban en lo cierto, ya que en el eje *X* tiene lugar un MRU; por tanto, en ningún momento la trayectoria puede ser vertical, como se ve en el dibujo.

33 **Desde el extremo del mástil de un velero, de 30 m de altura, se deja caer un cuerpo de 2 kg. Si despreciamos el rozamiento, ¿en qué punto de la cubierta impacta? ¿En qué caso tardará más en caer, si el velero navega a 10 nudos (1 nudo = 1,852 km/h) o si navega a 20 nudos? ¿Y si fuese un cuerpo de 4 kg? Si un observador describe el movimiento como rectilíneo, y otro como parabólico, ¿dónde está cada uno?**

Teniendo en cuenta el principio de inercia, el cuerpo cae en la base del mástil. El tiempo de caída es independiente de la velocidad del velero, pues cualquiera que sea esta el cuerpo cae, en su movimiento vertical, desde la misma altura y sometido a la misma aceleración (la de la gravedad).

El tiempo también es independiente de la masa del cuerpo, como en cualquier caída libre, tipo de movimiento que se atribuiría al objeto desde un sistema de referencia anclado en el velero. Por tanto, caerá en el mismo punto y tardará lo mismo tanto si su masa es de 2 kg, como si es de 4 kg.

El observador que describe el movimiento como rectilíneo se encuentra en el velero (caída libre), y el que lo describe como parabólico se encuentra en un sistema de referencia anclado a la orilla.

34 **¿Coinciden las ecuaciones de un tiro oblicuo a 90° con las de un lanzamiento vertical ascendente?**

Sí, coinciden. Para un tiro oblicuo a 90°, no existe componente de la velocidad en el eje *X*; por tanto, el desplazamiento viene dado por la misma ecuación que en ascensión libre:

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

35 **Sabiendo que en el primer cuadrante el valor del seno oscila entre 0 y 1, ¿para qué valor de α será máximo el alcance de un tiro parabólico para unos determinados valores de velocidad inicial y ángulos de lanzamiento?**

Las ecuaciones que definen el tiro oblicuo son:

Eje *X*:

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$$

$$v_x = v_0 \cdot \cos \alpha$$

Eje *Y*:

$$y = v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v_y = v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha - g \cdot t$$

Para que el alcance sea máximo, $y = 0$. Así:

$$y = 0 = v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$\rightarrow\ t_v = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha}{g}$$

Por tanto, el alcance máximo es:

$$A = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{2 \cdot v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\ (2 \cdot \alpha)}{g}$$

Luego *A* será máximo cuando sen $(2 \cdot \alpha) = 1$. Por ello:

$$\text{sen}\ (2 \cdot \alpha) = 1\ \rightarrow\ 2 \cdot \alpha = 90°\ \rightarrow\ \alpha = 45°$$

36 **Demuestra que las ecuaciones de un tiro horizontal equivalen a las de un tiro oblicuo desde la misma altura con elevación nula. Comprueba que la ecuación del alcance es dimensionalmente homogénea.**

En un tiro parabólico, las ecuaciones pueden simplificarse de esta forma:

Eje *X*: $$x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow x(t) = v_0 \cdot t$$

$$v_x = v_{0x} \cdot \cos\alpha \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow v_x = v_{0x}$$

Eje *Y*: $$y(t) = y_0 + v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow y(t) = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v_y = v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha - g \cdot t \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow v_y = -g \cdot t$$

Así, obtenemos las mismas ecuaciones que en un tiro horizontal.

La ecuación del alcance del tiro horizontal es:

$$x = \frac{v_0^2}{g}$$

El alcance tiene dimensiones de longitud:

$$[x] = \mathrm{L}$$

Las del segundo miembro son:

$$\left[\frac{v_0^2}{g}\right] = \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2} \cdot \mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{T}^2 = \mathrm{L}$$

Por tanto, la ecuación es dimensionalmente homogénea.

37 **Determina la celeridad inicial y el ángulo de lanzamiento de un proyectil que, lanzado desde el suelo, alcanza una altura máxima de 3 m e impacta a los 10 m del punto de lanzamiento.**

Las ecuaciones de la altura máxima y el alcance del tiro parabólico son ($y_0 = 0$):

$$h_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen}^2\alpha}{2 \cdot g}$$

$$A = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \alpha)}{g}$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones por sustitución (unidades SI):

$$v_0^2 = \frac{2 \cdot g \cdot h_{máx}}{\operatorname{sen}^2\alpha} \Rightarrow$$

$$A = \frac{2 \cdot g \cdot h_{máx} \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \alpha)}{\operatorname{sen}^2\alpha \cdot g} = \frac{2 \cdot h_{máx} \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{4 \cdot h_{máx} \cdot \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4 \cdot h_{máx}}{A} = 1{,}2 \Rightarrow \alpha = 50{,}2°$$

Con este valor del ángulo de lanzamiento podemos calcular la celeridad inicial con cualquiera de las dos ecuaciones del movimiento (unidades SI):

$$v_0^2 = \frac{2 \cdot g \cdot h_{máx}}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 99{,}72 \Rightarrow v_0 = 10 \text{ m/s}$$

Por tanto, el proyectil se lanza a 10 m/s con un ángulo de 50,2°.

38 **Un cañón puede disparar balas de diferente masa. En ausencia de rozamiento, ¿llegarán más lejos las más ligeras? Razona tu respuesta y compruébalo en el laboratorio virtual con el que has trabajado en la sección TIC de esta unidad.**

El alcance de un tiro parabólico se relaciona con las magnitudes del lanzamiento a través de la siguiente expresión:

$$A = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}(2 \cdot \alpha)}{g}$$

Se observa que depende de la celeridad inicial, del ángulo de lanzamiento y del valor de la aceleración de la gravedad del lugar en el que se realiza. Por tanto, no depende de la masa del proyectil, por lo que independientemente de esta, el alcance será el mismo. Se puede comprobar en el interactivo mencionado sin más que lanzar varios objetos o cambiar la masa del que se lanza. El simulador permite ambas opciones.

8 CINEMÁTICA. MOVIMIENTOS CIRCULARES Y OSCILATORIOS

Para consultar los **criterios de evaluación** y los **estándares de aprendizaje evaluables**, véase la Programación.

2 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME, MCU

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) **CE.6.4.** (EA.6.4.1.) **CE.6.6.** (EA.6.6.1.)

Página 223

1 La ecuación vectorial del MCU es: $\vec{r}\,(t) = R \cdot [\cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{i} + \text{sen}\,(\omega \cdot t) \cdot \vec{j}\,]$ con ω constante. Obtén los vectores velocidad y aceleración, y sus módulos.

La velocidad es la derivada respecto al tiempo del vector posición:

$$\vec{v}\,(t) = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}\,(t)}{\mathrm{d}\,t} = -R \cdot \omega \cdot [\text{sen}\,(\omega \cdot t) \cdot \vec{i} + \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{j}\,]$$

La aceleración es la derivada del vector velocidad respecto al tiempo:

$$\vec{a}\,(t) = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}\,(t)}{\mathrm{d}\,t} = -R \cdot \omega^2 \cdot [\cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{i} - \text{sen}\,(\omega \cdot t) \cdot \vec{j}\,]$$

Para calcular los módulos se tiene en cuenta que:

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$|\vec{v}\,(t)| = \sqrt{(-R \cdot \omega \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t))^2 + (R \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t))^2} = R \cdot \omega$$

$$|\vec{a}\,(t)| = \sqrt{(-R \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t))^2 + (-R \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t))^2} = R \cdot \omega^2$$

2 Folio giratorio en grupo. **Un móvil describe un MCU de 30 cm de radio a 10 m/s. Calcula:**

a) La velocidad angular (en rad/s y rpm).

b) El período y la frecuencia.

c) El número de vueltas que da en 15 minutos.

d) La aceleración.

En anayaeducacion.es puede consultar el documento que explica cómo utilizar la técnica de aprendizaje cooperativo «Folio giratorio en grupo», propuesta para resolver este ejercicio.

a) La velocidad angular será:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{10\ \text{m/s}}{0{,}30\ \text{m}} = 33{,}33\ \text{rad/s} \rightarrow \omega = 33{,}33\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\,\text{min}} \cdot \frac{1\ \text{vuelta}}{2 \cdot \pi\ \text{rad}} = 318{,}3\ \text{rpm}$$

b) El período, conocida la velocidad angular, lo calculamos como:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi\ \text{rad}}{33{,}33\ \text{rad/s}} = 0{,}19\ \text{s}$$

La frecuencia será el inverso del período:

$$f = \frac{1}{T} = 5{,}30\ \text{Hz}$$

c) El número de vueltas en 15 min se obtiene al multiplicar por la velocidad angular (en rpm):

$$N = 318{,}3\ \text{rpm} \cdot 15\ \text{min} = 4774{,}5\ \text{vueltas}$$

d) La aceleración, al ser un MCU, corresponde a la aceleración normal:

$$a = a_n = \omega^2 \cdot R = (0{,}33\ \text{rad/s})^2 \cdot 0{,}30\ \text{m} = 333{,}3\ \text{m/s}^2$$

3 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO, MCUA

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) **CE.6.4.** (EA.6.4.1.) **CE.6.6.** (EA.6.6.1.)

Página 225

3 Justifica la equivalencia entre rpm y rad/s.

Una revolución, o una vuelta, corresponde a $2 \cdot \pi$ rad, y 1 min, a 60 s. Por tanto, la equivalencia será:

$$1 \text{ rpm} = \frac{1 \text{ revolución}}{1 \text{ min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} = \frac{\pi}{30} \text{ rad/s}$$

4 Solución a cuatro. **La velocidad angular de un disco disminuye uniformemente de 700 rpm a 500 rpm en 7 s.**

Calcula:

a) Su aceleración angular.

b) El número de vueltas que da en ese tiempo.

c) El tiempo necesario para que, desde este momento, el disco se detenga.

Le sugerimos que recomiende a su alumnado la consulta del documento que explica cómo aplicar la técnica «Solución a cuatro», disponible en **anayaeducacion.es**.

a) Se trata de un MCUA. En primer lugar, expresamos las velocidades angulares en rad/s aplicando los factores de conversión correspondientes:

$$\omega_0 = 700 \text{ rpm} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ revolución}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 73{,}3 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 500 \text{ rpm} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ revolución}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 52{,}4 \text{ rad/s}$$

Por tanto, la aceleración angular será:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{52{,}4 \text{ rad/s} - 73{,}3 \text{ rad/s}}{7 \text{ s}}$$

$$\alpha = -2{,}99 \text{ rad/s}^2$$

b) El ángulo barrido en estas condiciones es:

$$\Delta\phi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = 73{,}3 \text{ rad/s} - \frac{1}{2} \cdot 2{,}99 \text{ rad/s}^2 \cdot (7 \text{ s})^2$$

$$\Delta\phi = 439{,}84 \text{ rad}$$

Sabiendo que una vuelta corresponde a $2 \cdot \pi$ rad, el número de vueltas en este caso será:

$$N = \Delta\phi \cdot \frac{1 \text{ vuelta}}{2 \cdot \pi \text{ rad}} = 439{,}84 \text{ rad} \cdot \frac{1 \text{ vuelta}}{2 \cdot \pi \text{ rad}}$$

$$N = 70 \text{ vueltas}$$

c) El tiempo necesario para que el disco se detenga, es decir, para que su velocidad angular final sea cero, se obtiene despejando en la ecuación de la velocidad angular en función del tiempo en un MCUA. Es decir:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$$

$$t = \frac{-52{,}3 \text{ rad/s}}{-2{,}99 \text{ rad/s}^2} = 17{,}5 \text{ s}$$

5 **La velocidad de una rueda de 40 cm de diámetro pasa de 240 rpm a 600 rpm en 10 s. Si ha estado sometida a una aceleración constante, calcula el valor de sus aceleraciones angular y tangencial.**

Se trata de un MCUA. En primer lugar, pasamos las velocidades angulares a rad/s:

$$\omega_0 = 240 \text{ rpm} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 25{,}13 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 600 \text{ rpm} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 62{,}83 \text{ rad/s}$$

Así, la aceleración angular será:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{62{,}83 \text{ rad/s} - 25{,}13 \text{ rad/s}}{10 \text{ s}} = 3{,}77 \text{ rad/s}^2$$

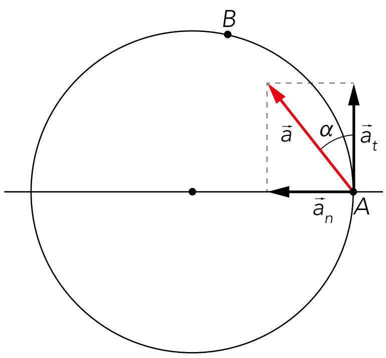
Y la aceleración tangencial:

$$a_t = \alpha \cdot R = 3{,}77 \text{ rad/s}^2 \cdot 0{,}2 \text{ m} = 0{,}75 \text{ m/s}^2$$

6 **Una partícula describe una circunferencia de 25 cm de radio, aumentando su celeridad de forma constante. En un punto *A* de la trayectoria, la velocidad es de 1 m/s, y en otro, *B*, de 2 m/s.**

Si el tiempo que tarda en llegar de *A* a *B* es de 0,5 s, determina el módulo, la dirección y el sentido del vector aceleración en el punto *A*.

El movimiento que sigue la partícula es circular uniformemente acelerado, y se puede representar como:



La velocidad angular de la partícula en cada una de las posiciones es:

$$\omega_A = \frac{v_A}{R} = \frac{1 \text{ m/s}}{0{,}25 \text{ m}} = 4 \text{ rad/s}$$

$$\omega_B = \frac{v_B}{R} = \frac{2 \text{ m/s}}{0{,}25 \text{ m}} = 8 \text{ rad/s}$$

A partir de estos resultados, obtenemos su aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\omega_B - \omega_A}{t} = \frac{8 \text{ rad/s} - 4 \text{ rad/s}}{0{,}5 \text{ s}} = 8 \text{ rad/s}^2$$

Por otro lado, la aceleración tangencial será la misma en todos los puntos de la trayectoria:

$$a_t = \alpha \cdot R = 8 \text{ rad/s}^2 \cdot 0{,}25 \text{ m} = 2 \text{ m/s}^2$$

Y la aceleración normal en el punto *A* es:

$$a_{n_A} = \omega_A^2 \cdot R = (4 \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}25 \text{ m} = 4 \text{ m/s}^2$$

Así, podemos calcular la aceleración lineal en el punto A:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(2\ \text{m/s})^2 + (4\ \text{m/s})^2} = 4{,}47\ \text{m/s}^2$$

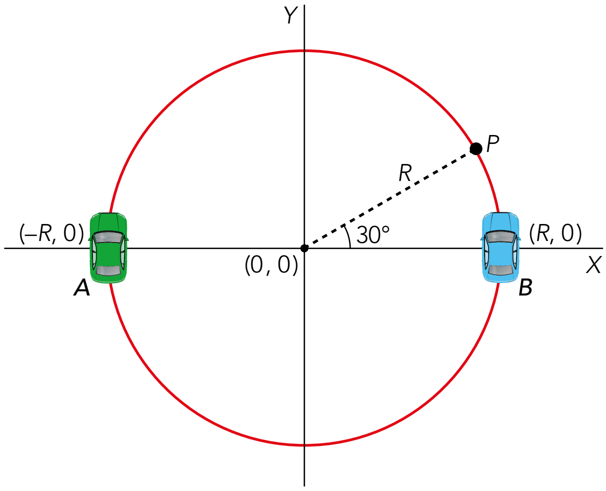
Una vez se ha calculado el módulo de la aceleración lineal, se procede al cálculo del ángulo alfa. De la figura:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow \alpha = 63{,}43\,°$$

7 **Dos móviles, *A* y *B*, inicialmente en reposo, se encuentran, respectivamente, en las posiciones (–*R*, 0) y (*R*, 0). Simultáneamente comienzan a recorrer una circunferencia de radio *R*, haciéndolo *A* en sentido horario y aceleración angular α_1, y *B* en sentido antihorario con aceleración angular α_2:**

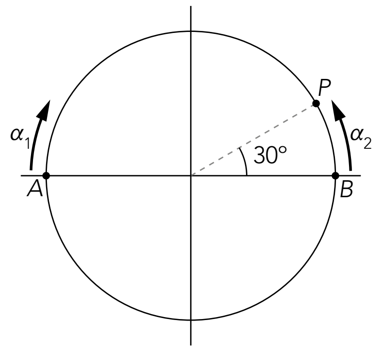
a) ¿Qué relación debe haber entre α_1 y α_2 para que se encuentren en un punto *P*, cuyo vector posición forma un ángulo de 30° con el semieje positivo *X*?

b) ¿Qué velocidad lineal tendrá cada móvil en ese instante, si α_1 = 0,5 rad/s²?



a) Los dos móviles describen un MCUA. El esquema de ambos movimientos es el que se muestra a continuación, a la derecha, y el ángulo de barrido de cada uno de los móviles es:

$$\Delta\phi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \begin{cases} \Delta\phi_1 = 150\,° = \dfrac{1}{2} \cdot \alpha_1 \cdot t^2 \\ \Delta\phi_2 = 30\,° = \dfrac{1}{2} \cdot \alpha_2 \cdot t^2 \end{cases}$$



Dividiendo ambas expresiones, obtenemos la relación entre las aceleraciones angulares de ambos móviles:

$$\frac{\Delta\phi_1}{\Delta\phi_2} = \frac{150\,°}{30\,°} = \frac{\dfrac{1}{2} \cdot \alpha_1 \cdot t^2}{\dfrac{1}{2} \cdot \alpha_2 \cdot t^2} \rightarrow 5 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

b) Conocida una de las aceleraciones angulares, despejamos el tiempo que tardan en llegar al punto P:

$$\Delta\phi_1 = 150\,° \cdot \frac{2 \cdot \pi\ \text{rad}}{360\,°} = 2{,}62\ \text{rad}$$

$$\Delta\phi_1 = \frac{1}{2} \cdot \alpha_1 \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta\phi}{\alpha_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}62\ \text{rad}}{0{,}5\ \text{rad/s}^2}} = 3{,}23\ \text{s}$$

Así, podemos calcular las velocidades angulares de cada uno. Al multiplicar esta por el radio de la circunferencia, obtenemos la velocidad lineal:

$$\omega_1 = \alpha_1 \cdot t = 0{,}5 \text{ rad/s}^2 \cdot 3{,}23 \text{ s} = 1{,}62 \text{ rad/s}$$

$$v_1 = \omega_1 \cdot R = 1{,}62 \cdot R \text{ m/s}$$

$$\omega_2 = \alpha_2 \cdot t = \frac{\alpha_1}{5} \cdot t = 0{,}1 \text{ rad/s}^2 \cdot 3{,}23 \text{ s} = 0{,}32 \text{ rad/s}$$

$$v_2 = \omega_2 \cdot R = 0{,}32 \cdot R \text{ m/s}$$

4 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.9. (EA.6.9.1.-6.9.2.-6.9.3.-6.9.4.-6.9.5.-6.9.6.)

Página 228

8 El movimiento de un oscilador armónico simple, en unidades del SI, viene dado por la expresión:

$$\boldsymbol{x(t) = 0{,}5 \cdot \text{sen}(0{,}2 \cdot t)}$$

Determina la amplitud, el período y la frecuencia de las oscilaciones. ¿Dónde se encuentra el móvil en *t* = 0?

Conocida la ecuación del movimiento, diremos que, a partir de ella, la amplitud y la frecuencia angular son:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

$$x(t) = 0{,}5 \cdot \text{sen}(0{,}2 \cdot t)$$

$$A = 0{,}5 \text{ m} \qquad \omega = 0{,}2 \text{ rad/s}$$

El período tendrá un valor de:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{0{,}2 \text{ rad/s}} = 10 \cdot \pi \text{ s}$$

Y la frecuencia será el inverso del período:

$$f = \frac{1}{T} = 0{,}03 \text{ Hz}$$

Sustituyendo $t = 0$ s en la ecuación del movimiento, su posición será:

$$x(t = 0 \text{ s}) = 0{,}5 \cdot \text{sen}\,0 = 0$$

9 En un MAS la velocidad máxima es 40 m/s, y la aceleración máxima, 45 m/s². Calcula la frecuencia y la amplitud de las oscilaciones.

La velocidad y la aceleración máximas vienen dadas por las expresiones:

$$v_{máx} = A \cdot \omega \;\; ; \;\; a_{máx} = -A \cdot \omega^2$$

Dividiendo una entre otra, calculamos la frecuencia angular:

$$\frac{a_{máx}}{v_{máx}} = \frac{A \cdot \omega^2}{A \cdot \omega} = \omega = \frac{45 \text{ m/s}^2}{40 \text{ m/s}} = 1{,}125 \text{ rad/s}$$

Y la frecuencia de la oscilación será:

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1{,}125 \text{ rad/s}}{2 \cdot \pi \text{ rad}} = 0{,}18 \text{ Hz}$$

Sustituyendo la frecuencia angular en la ecuación de la velocidad máxima calculamos la amplitud:

$$A = \frac{v_{máx}}{\omega} = \frac{40 \text{ m/s}}{1{,}125 \text{ rad/s}} = 35{,}56 \text{ m}$$

10 **Una partícula describe un MAS con un período de 2 s. En el instante inicial se encuentra a 3 cm del origen, acercándose a él a 5 cm/s:**

a) Escribe las ecuaciones del movimiento.

b) Calcula la velocidad y aceleración máximas.

c) Determina, para *t* = 0,5 s:

I) El valor de la elongación.

II) La velocidad de la partícula.

III) Su aceleración.

a) Las ecuaciones del movimiento vienen determinadas por las expresiones:

$$\text{Posición: } x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi)$$

$$\text{Velocidad: } v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$

$$\text{Aceleración: } a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi)$$

Para su descripción debemos conocer la amplitud, la frecuencia angular y la fase inicial.

Conocido el período, calculamos la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{2\text{ s}} = \pi \text{ rad/s}$$

Si hallamos la posición y la velocidad a $t = 0$ s:

$$x(t = 0) = A \cdot \text{sen}(\pi \cdot 0 + \phi) = 0{,}03\text{ m} \rightarrow 0{,}03\text{ m} = A \cdot \text{sen}\,\phi$$

$$v(t = 0) = A \cdot \pi \cdot \cos(\pi \cdot 0 + \phi) = 0{,}05\text{ m/s} \rightarrow 0{,}05\text{ m/s} = A \cdot \pi \cdot \cos\phi$$

Y si dividimos ambas expresiones, deducimos la fase inicial:

$$\frac{0{,}03}{0{,}05} = \frac{A \cdot \text{sen}\,\phi}{A \cdot \pi \cdot \cos\phi} = \frac{1}{\pi} \cdot tg\,\phi \rightarrow tg\,\phi = 0{,}6 \cdot \pi \rightarrow \phi = 1{,}08\text{ rad}$$

Y sustituyendo en la expresión del espacio en función del tiempo, para $t = 0$, tenemos la amplitud:

$$A = \frac{0{,}03\text{ m}}{\text{sen}\,1{,}08} = 0{,}034\text{ m} = 3{,}4\text{ cm}$$

Por tanto, las ecuaciones del movimiento quedan de esta forma:

$$x(t) = 3{,}40 \cdot \text{sen}(\pi \cdot t + 1{,}08)\text{ cm}$$

$$v(t) = 10{,}68 \cdot \cos(\pi \cdot t + 1{,}08)\text{ cm/s}$$

$$a(t) = -33{,}56 \cdot \text{sen}(\pi \cdot t + 1{,}08)\text{ cm/s}^2$$

b) La velocidad y la aceleración serán máximas cuando seno y coseno valgan 1. Estas serán:

$$v_{máx} = A \cdot \omega = 3{,}4\text{ cm} \cdot \pi\text{ rad/s} = 10{,}68\text{ cm/s}$$

$$a_{máx} = -A \cdot \omega^2 = -3{,}4\text{ cm} \cdot (\pi\text{ rad/s})^2 = -33{,}56\text{ cm/s}^2$$

c) Sustituyendo en las ecuaciones $t = 0{,}5$ s, obtenemos los valores de posición, velocidad y aceleración:

$$x(t = 0{,}5\text{ s}) = 3{,}4 \cdot \text{sen}(\pi \cdot 0{,}5 + 1{,}08) = 1{,}60\text{ cm}$$

$$v(t = 0{,}5\text{ s}) = 10{,}68 \cdot \cos(\pi \cdot 0{,}5 + 1{,}08) = -9{,}42\text{ cm/s}$$

$$a(t = 0{,}5\text{ s}) = -33{,}56 \cdot \text{sen}(\pi \cdot 0{,}5 + 1{,}08) = -15{,}84\text{ cm/s}^2$$

Página 229

11 **Un móvil describe un MCU (R = 0,5 m, f = 0,2 Hz). En t_0 = 0 se encuentra en la posición más alta de la circunferencia. Escribe las ecuaciones de los MAS que resultan de las proyecciones sobre los ejes X e Y, y demuestra que el desfase entre ambos MAS es de $\pi/2$ (cuando en uno de los movimientos una de las magnitudes es máxima, en el otro es cero, y viceversa).**

Para describir las ecuaciones del MAS resultantes de las proyecciones de X e Y, la amplitud coincide con el radio que describe el móvil (A = 0,5 m).

La frecuencia angular la calculamos a partir de la frecuencia del MCU:

$$\omega = f \cdot 2 \cdot \pi = 0{,}2 \text{ s}^{-1} \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad} = 1{,}26 \text{ rad/s}$$

Así, las ecuaciones quedan como:

$$x(t) = 0{,}5 \cdot \text{sen}(1{,}26 \cdot t) \text{ m}$$

$$y(t) = 0{,}5 \cdot \text{sen}\left(1{,}26 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

Se toma $\phi = 0$ en el semieje positivo X, por tanto, el semieje positivo Y tendrá $\phi = \frac{\pi}{2}$. De este modo, también se cumple que si $t = 0$, $x(t) = 0$ e $y(t) = 0{,}5$ m, verificando las posiciones iniciales.

El desfase viene determinado por la diferencia en las fases. Si en $x(t)$ no hay fase inicial y en $y(t)$ es $\frac{\pi}{2}$, podemos decir que el desfase entre ambas es de $\frac{\pi}{2}$. Así, se cumple lo que expone el enunciado: cuando uno de ellos es máximo, el otro es cero.

12 **Demuestra que el período de un MAS coincide con el del MCU del que procede.**

En el MCU, como $v = \omega \cdot R$, tenemos que:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v}$$

Para el MAS, como $v = A \cdot \omega$, tenemos que:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{v}$$

Por tanto, ambos periodos coinciden, ya que el radio del MCU coincide con la amplitud del MAS.

13 **Sabiendo que el ángulo plano, expresado en radianes, es una magnitud adimensional, analiza la homogenidad de las ecuaciones del MCU y del MAS.**

Para el MCU se demuestra la homogeneidad de sus ecuaciones:

$$\phi - \phi_0 = \omega \cdot t \begin{cases} [\Delta\phi] = 1 \text{ (adimensional)} \\ [\omega \cdot t] = \text{T}^{-1} \cdot \text{T} = 1 \text{ (adimensional)} \end{cases}$$

$$\omega - \omega_0 = \alpha \cdot t \begin{cases} [\Delta\omega] = \text{T}^{-1} \\ [\alpha \cdot t] = \text{T}^{-2} \cdot \text{T} = \text{T}^{-1} \end{cases}$$

Para el caso de un MAS:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi) \ ; \ [x] = \text{L} \ ; \ [A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi)] = \text{L}$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) \ ; \ [v] = \text{L} \cdot \text{T}^{-1} \ ; \ [A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)] = \text{L} \cdot \text{T}^{-1}$$

$$a = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi) \ ; \ [a] = \text{L} \cdot \text{T}^{-2} \ ; \ [-A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi)] = \text{L} \cdot \text{T}^{-2}$$

Debemos recordar que las funciones trigonométricas son adimensionales.

14 **Si proyectamos sobre el eje *X* un MCUA, ¿resulta un MAS? El movimiento, ¿es periódico?**

Si se proyecta sobre el eje *X* un MCUA, el movimiento resultante no es un MAS, ya que la velocidad angular varía con el tiempo, haciendo que varíen también la frecuencia angular y el período. Por tanto, no se trata de un movimiento periódico.

15 **Cuando Galileo observó con su telescopio los satélites de Júpiter, describió el movimiento de estos como oscilatorio. ¿Cómo explicarías esto?**

Lo que observó Galileo fue la proyección del movimiento circular de los satélites sobre uno de los diámetros de la circunferencia. De ahí que percibiera un movimiento oscilatorio cuando, en realidad, los satélites describían un movimiento circular alrededor del planeta Júpiter. Galileo fue consciente de este hecho, lo que le llevó a concluir que los satélites orbitaban el planeta.

Estas observaciones se pueden simular fácilmente con el programa Celestia, de acceso libre en Internet.

Su alumnado puede consultar en **anayaeducacion.es**, dentro de los recursos relacionados con las claves del proyecto, la documentación relacionada con el Plan Lingüístico, donde encontrará las características de los textos expositivos así como diversos consejos y orientaciones para escribir este tipo de textos.

TRABAJA CON LO APRENDIDO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.1.2. (EA.1.2.1.-1.2.2.) CE.6.4. (EA.6.4.1.) CE.6.6. (EA.6.6.1.) CE.6.7. (EA.6.7.1.) CE.6.9. (EA.6.9.1.-6.9.2.-6.9.3.-6.9.4.-6.9.5.-6.9.6.)

Página 236

Magnitudes cinemáticas angulares

1 **Una partícula describe una trayectoria circular de 2 m de radio. El espacio recorrido sobre la misma viene dado, en unidades del SI, por la expresión $s(t) = t^2 + t + 2$. Calcula, a los 2 s de iniciado el movimiento:**

a) El espacio recorrido.

b) La posición angular y el ángulo barrido.

c) El módulo de las velocidades lineal y angular.

d) El módulo de las aceleraciones tangencial, normal, total y angular.

e) En un dibujo de la trayectoria, representa los vectores velocidad y aceleración, este último a partir de sus componentes intrínsecas.

a) El espacio recorrido será la distancia, medida sobre la trayectoria, entre las posiciones final e inicial:

$$\Delta s = s(2\text{ s}) - s(0\text{ s}) = 8\text{ m} - 2\text{ m} = 6\text{ m}$$

b) De la relación entre las magnitudes angulares y lineales:

$$\phi\,(t = 2\text{ s}) = \frac{s\,(t = 2\text{ s})}{R} = \frac{8\text{ m}}{2\text{ m}} = 4\text{ rad}$$

Del mismo modo, para el ángulo barrido:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta s}{R} = \frac{6\text{ m}}{2\text{ m}} = 3\text{ rad}$$

c) La velocidad lineal será la derivada del espacio respecto al tiempo:

$$v = \frac{ds}{dt} = 2 \cdot t + 1 = 5\text{ m/s}$$

Su velocidad angular resultará de dividir la velocidad lineal entre el radio:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{5\text{ m/s}}{2\text{ m}} = 2{,}5\text{ rad/s}$$

d) La aceleración tangencial se obtiene de derivar la velocidad lineal respecto al tiempo:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2\text{ m/s}^2$$

La aceleración normal será:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(5\text{ m/s})^2}{2\text{ m}} = 12{,}5\text{ m/s}^2$$

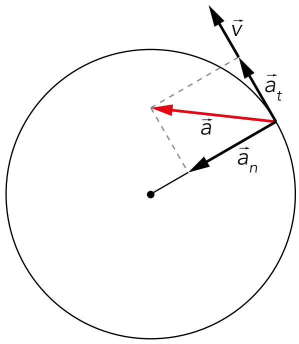
De la aceleración normal y tangencial obtenemos la aceleración total:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(2\text{ m/s}^2)^2 + (12{,}5\text{ m/s}^2)^2} = 12{,}66\text{ m/s}^2$$

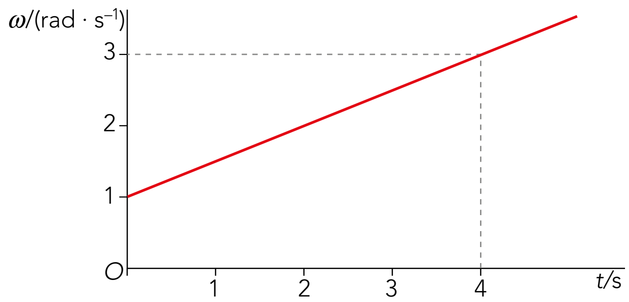
La aceleración angular será la tangencial entre el radio:

$$\alpha = \frac{a_t}{R} = \frac{2\text{ m/s}^2}{2\text{ m}} = 1\text{ rad/s}^2$$

e) La representación de la trayectoria de los vectores queda como:



2 **A partir de la siguiente gráfica ω-*t* de un movimiento circular de radio 1,5 m, que parte de $\phi_0 = 0$, calcula la posición angular, la velocidad lineal, las componentes intrínsecas de la aceleración y la aceleración angular en *t* = 2 s. El movimiento, ¿es uniforme, uniformemente acelerado o acelerado? Justifica tu respuesta.**



Como podemos observar, a los 2 s la velocidad angular es ω = 2 rad/s. A su vez, diremos que es un movimiento uniformemente acelerado, ya que gráficamente se comprueba que es una recta con una pendiente constante a lo largo del tiempo y, además, distinta de cero. Así, aplicando las ecuaciones del MCUA, calculamos la aceleración angular considerando *t* = 2 s y *t* = 0 s:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{2\text{ rad/s} - 1\text{ rad/s}}{2\text{ s}} = 0{,}5\text{ rad/s}^2$$

La posición angular para este movimiento, sabiendo que $\phi_0 = 0$, será:

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

$$\phi = 1\text{ rad/s} \cdot 2\text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}5\text{ rad/s}^2 \cdot (2\text{ s})^2 = 3\text{ rad}$$

La velocidad lineal será:

$$v = \omega \cdot R = 2\text{ rad/s} \cdot 1{,}5\text{ m} = 3\text{ m/s}$$

Las componentes intrínsecas de la aceleración son:

- Aceleración tangencial:

$$a_t = \alpha \cdot R = 0{,}5\text{ rad/s}^2 \cdot 1{,}5\text{ m} = 0{,}75\text{ m/s}^2$$

- Aceleración normal:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(3\text{ m/s})^2}{1{,}5\text{ m}} = 6\text{ m/s}^2$$

3 **La posición angular de un punto *P* de la periferia de una rueda de 50 cm de radio viene dada, en el SI, por la ecuación: $\phi = \pi/4 + 10 \cdot \pi \cdot t + 2 \cdot \pi \cdot t^2$.**

a) Determina la veracidad de las siguientes proposiciones:

1. En t = 2 s, la posición de *P* es $\pi/4$ rad.

2. En t = 2 s, la velocidad angular es $14 \cdot \pi$ rad/s.

3. Entre t = 1 s y t = 3 s la aceleración angular media es $2 \cdot \pi$ rad/s².

b) Para los enunciados falsos, indica los valores correctos de las magnitudes cinemáticas.

c) Representa las gráficas de las magnitudes cinemáticas angulares en función del tiempo.

a) 1. Si sustituimos t = 2 s en la expresión de la posición angular, esta resulta:

$$\phi = \frac{\pi}{4} + 10 \cdot \pi \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot 4 = 28{,}25 \cdot \pi \text{ rad}$$

Por tanto, la proposición dada es falsa.

2. La velocidad angular resultará de derivar la posición angular respecto al tiempo:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = 10 \cdot \pi + 4 \cdot \pi \cdot t$$

Para t = 2 s, su valor es:

$$\omega\ (t = 2\text{ s}) = 10 \cdot \pi + 4 \cdot \pi \cdot 2 = 18 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

Así, la proposición para la velocidad angular es falsa.

3. Para determinar la aceleración se deriva respecto del tiempo la expresión para la velocidad angular:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 4 \cdot \pi \text{ rad/s}^2$$

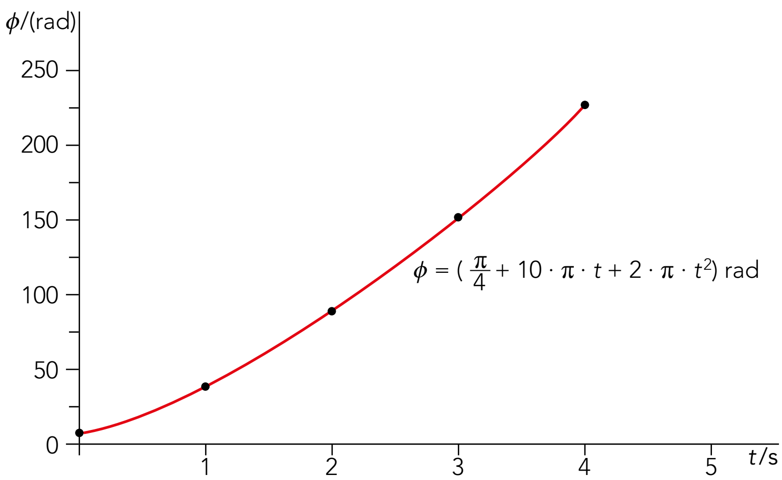
El mismo resultado se obtiene si restamos las velocidades angulares dadas y lo dividimos entre el tiempo:

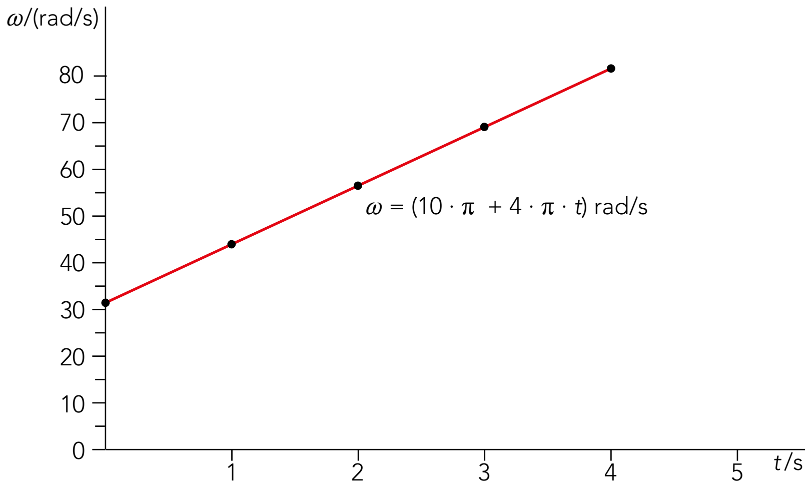
$$\alpha = \frac{\omega\ (3\text{ s}) - \omega\ (1\text{ s})}{2\text{ s}} = \frac{10 \cdot \pi + 4 \cdot \pi \cdot 3 - 10 \cdot \pi - 4 \cdot \pi}{2} = 4 \cdot \pi \text{ rad/s}^2$$

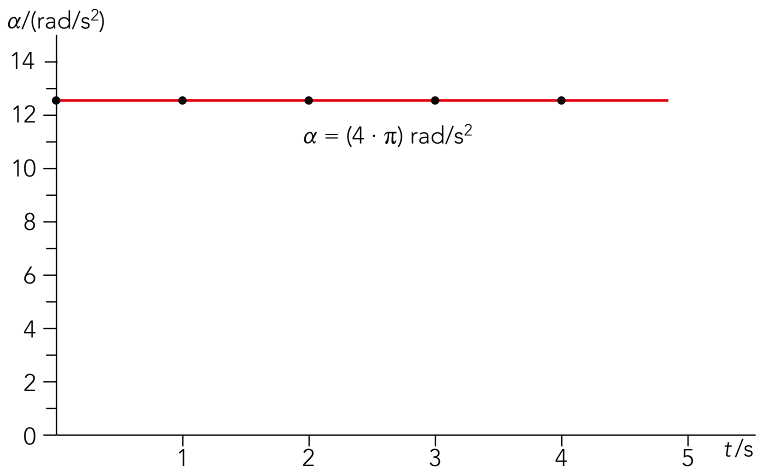
Por tanto, en este caso, la proposición también es falsa.

b) Los valores correctos se han calculado en el apartado anterior.

c) Las gráficas de posición, velocidad y aceleración angulares frente al tiempo son:







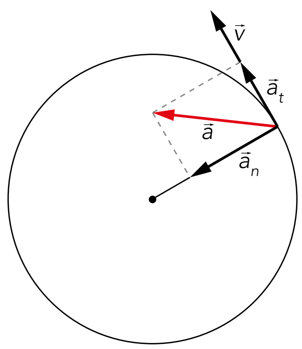
4 **En los movimientos circulares la aceleración se calcula, en ocasiones, como $a = \omega^2 \cdot R$, y en otras como $a = \alpha \cdot R$. ¿Se trata de la misma magnitud? ¿En qué casos se ha de utilizar cada una?**

Ambas son aceleraciones para el movimiento circular.

La expresión $a = \omega^2 \cdot R$ corresponde a la aceleración normal y la expresión $a = \alpha \cdot R$ corresponde a la aceleración tangencial. La aceleración normal, o centrípeta, existe en todos los movimiento curvilíneos, pues indica las variaciones en la dirección de la velocidad. En el caso de los MCU es constante. La aceleración tangencial, por su parte, indica las variaciones del módulo de la velocidad, y se tendrá presente en movimientos acelerados.

5 **En un movimiento circular, ¿pueden tener la aceleración y la velocidad la misma dirección? Argumenta tu respuesta de modo gráfico.**

No, pues en un movimiento circular la aceleración siempre tiene componente normal, por lo que al componerla con la tangencial (de existir), el vector aceleración nunca será tangente a la trayectoria, como lo es la velocidad. En el caso del MCU, la aceleración solo tiene componente normal, y es, por tanto, perpendicular al vector velocidad.



En la figura de la derecha se muestra lo descrito para el caso de un movimiento circular acelerado. Como se observa, el vector aceleración es tangente a la trayectoria solo cuando la componente normal de la aceleración es nula, en cuyo caso no se trataría de un movimiento circular, sino rectilíneo.

6 **Cuando se han estudiado las relaciones entre las magnitudes cinemáticas lineales y las angulares se ha visto que, en muchos casos, las primeras se obtienen multiplicando las segundas por el radio de la trayectoria. ¿Esto significa que si el radio es la unidad no hay que diferenciar unas de otras, pues valen lo mismo? Explica tu respuesta.**

Aunque tengan los mismos valores numéricos, el significado de las magnitudes lineales y angulares es distinto. Las primeras expresan relaciones entre longitudes y tiempos, y las segundas, entre ángulos y tiempos.

7 **¿Por qué no se habla de las componentes intrínsecas del vector velocidad?**

El vector velocidad es en todo momento tangente a la trayectoria, por lo que no tiene componente normal.

Movimiento circular uniforme

8 **El CD de un ordenador gira con una velocidad angular de 540 rpm. Calcula el número de vueltas que da durante la reproducción de una canción de 3,5 minutos. ¿Qué espacio ha recorrido un punto de la periferia en este tiempo, si el disco tiene 12 cm de diámetro?**

Para el cálculo del número de vueltas que da el CD, multiplicamos su velocidad angular en rpm por el tiempo que nos da el enunciado:

$$N = \omega \cdot t = 540 \text{ rpm} \cdot 3{,}5 \text{ min} = 1\,890 \text{ vueltas}$$

El espacio recorrido será el perímetro del CD por las vueltas realizadas:

$$\Delta s = N \cdot 2 \cdot \pi \cdot R = 1\,890 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0{,}06 \text{ m} = 712{,}5 \text{ m}$$

9 **Un disco circular de 1 m de radio gira con velocidad angular de 50 rad/s. Calcula:**

a) La velocidad lineal de un punto de la periferia.

b) La velocidad lineal de un punto situado a 0,5 m del centro.

c) El espacio recorrido por ambos puntos durante un minuto.

a) La velocidad lineal en un punto de la periferia será:

$$v_1 = \omega \cdot R_1 = 50 \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ m} = 50 \text{ m/s}$$

b) La velocidad lineal a 0,5 m del centro es:

$$v_2 = \omega \cdot R_2 = 50 \text{ rad/s} \cdot 0{,}5 \text{ m} = 25 \text{ m/s}$$

c) El espacio recorrido por cada uno de los puntos será:

$$s_1 = v_1 \cdot t = 50 \text{ m/s} \cdot 60 \text{ s} = 3\,000 \text{ m}$$

$$s_2 = v_2 \cdot t = 25 \text{ m/s} \cdot 60 \text{ s} = 1\,500 \text{ m}$$

10 **Una partícula describe un movimiento circular de 2 m de radio, de modo que completa 30 vueltas cada minuto. Calcula el período, la frecuencia, la velocidad angular, la velocidad lineal y la aceleración.**

La velocidad angular será el número de vueltas por minuto, que en rad/s corresponde a:

$$\omega = 30 \text{ rpm} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = \pi \text{ rad/s}$$

El valor del período será:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{\pi \text{ rad/s}} = 2 \text{ s}$$

La frecuencia será el inverso del período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \text{ s}} = 0{,}5 \text{ Hz}$$

La velocidad lineal es la angular por el radio, y su valor será:

$$v = \omega \cdot R = \pi \text{ rad/s} \cdot 2 \text{ m} = 2 \cdot \pi \text{ m/s}$$

Y la aceleración normal es:

$$a_n = \omega^2 \cdot R = (\pi \text{ rad/s})^2 \cdot 2 \text{ m} = 2 \cdot \pi^2 \text{ m/s}^2$$

11 **Dos móviles parten del mismo punto de una circunferencia de 20 m de radio y la recorren en sentidos contrarios. Uno tarda 40 s en dar una vuelta, y el otro se mueve a 1 rpm. Calcula el tiempo que tardan en cruzarse y el espacio recorrido por cada uno.**

Se trata de un MCU en ambos casos. Las velocidades angulares de ambos móviles son:

$$\omega_1 = \frac{1 \text{ vuelta}}{40 \text{ s}} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} = 0{,}157 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 1 \text{ rpm} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 0{,}105 \text{ rad/s}$$

La posición angular de cada uno a un tiempo *t* será:

$$\phi_1 = \omega_1 \cdot t = 0{,}157 \cdot t$$

$$\phi_2 = \omega_2 \cdot t = 0{,}105 \cdot t$$

Obteniendo la relación entre ambas posiciones y sabiendo que:

$$\phi_1 + \phi_2 = 2 \cdot \pi$$

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{0{,}157 \cdot t}{0{,}105 \cdot t} = 1{,}5$$

Determinamos la posición agular de cada móvil resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$1{,}5 \cdot \phi_2 + \phi_2 = 2 \cdot \pi \rightarrow \phi_2 = \frac{2 \cdot \pi}{2{,}5} = 2{,}51 \text{ rad}$$

$$\phi_1 = 2 \cdot \pi \text{ rad} - 2{,}51 \text{ rad} = 3{,}77 \text{ rad}$$

Por tanto, el tiempo que tardan en cruzarse será:

$$t = \frac{\phi_1}{\omega_1} = \frac{3{,}77 \text{ rad}}{0{,}157 \text{ rad/s}} = 24 \text{ s}$$

Y el espacio recorrido por cada uno de los móviles será:

$$s_1 = \phi_1 \cdot R = 3{,}77 \text{ rad} \cdot 20 \text{ m} = 75{,}4 \text{ m}$$

$$s_2 = \phi_2 \cdot R = 2{,}51 \text{ rad} \cdot 20 \text{ m} = 50{,}2 \text{ m}$$

12 **Si el período de un MCU se duplica, explica qué ocurre con: la velocidad angular, la frecuencia y la aceleración normal.**

En vista de estos resultados, ¿qué relaciones de proporcionalidad hay entre estas magnitudes cinemáticas y el período?

El período está relacionado con la velocidad angular por la expresión:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

Si el período se duplica, la velocidad angular será la mitad. Estas magnitudes son inversamente proporcionales.

$$\omega' = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot T} = \frac{\omega}{2}$$

La frecuencia es la inversa del período:

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f' = \frac{1}{2 \cdot T} = \frac{f}{2}$$

Al igual que con la velocidad angular, si el período se duplica la frecuencia será la mitad. Son magnitudes inversamente proporcionales.

La aceleración normal en función del período será:

$$a_n = \omega^2 \cdot R = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \cdot R \;;\; a'_n = \left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot T}\right)^2 \cdot R = \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \cdot R = \frac{a_n}{4}$$

Al duplicar el período, la aceleración normal será cuatro veces menor. Entre ellas existe, pues, una relación cuadrática inversa.

Página 237

13 La posición de una partícula viene dada por:

$$\vec{r} = [5 \cdot \cos(\pi \cdot t) - 1] \cdot \vec{i} + [5 \cdot \text{sen}(\pi \cdot t) + 2] \cdot \vec{j} \text{ (SI)}$$

a) Comprueba que se trata de un MCU.

b) Calcula el radio de la circunferencia y la frecuencia del movimiento.

a) Un movimiento circular y uniforme viene caracterizado porque los módulos de $\vec{v}$ y $\vec{a}_n$ son constantes y, por tanto, no existe $\vec{a}_t$.

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt} = -5 \cdot \pi \cdot \text{sen}(\pi \cdot t) \cdot \vec{i} + 5 \cdot \pi \cdot \cos(\pi \cdot t) \cdot \vec{j} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; v = \sqrt{25 \cdot \pi^2 \cdot \left[\text{sen}^2(\pi \cdot t) + \cos^2(\pi \cdot t)\right]} = 5 \cdot \pi \text{ m/s (constante)}$$

Si v = cte $\rightarrow$ $a_t = dv / dt = 0$

Luego: $$\vec{a} = \vec{a}_n = \frac{d\vec{v}}{dt} = -5 \cdot \pi^2 \cdot \cos(\pi \cdot t) \cdot \vec{i} + 5 \cdot \pi^2 \cdot \text{sen}(\pi \cdot t) \cdot \vec{j}$$

$$a_n = \sqrt{25 \cdot \pi^4 \cdot \left[\cos^2(\pi \cdot t) + \text{sen}^2(\pi \cdot t)\right]} = 5 \cdot \pi^2 \text{ m/s}^2 \text{ (constante)}$$

b) En primer lugar, calculamos el radio de la circunferencia:

$$a_n = \frac{v^2}{R} \;\rightarrow\; 5 \cdot \pi^2 = \frac{25 \cdot \pi^2}{R} \;\rightarrow\; R = 5 \text{ m}$$

A continuación, calculamos la frecuencia del movimiento:

$$v = \omega \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot R \;\rightarrow\; f = \frac{v}{2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{5 \cdot \pi}{2 \cdot \pi \cdot 5} = \frac{1}{2} \text{ Hz}$$

14 Las manecillas de un reloj sin segundero coinciden a las 12:00. ¿A qué hora coincidirán de nuevo por primera vez? Resuelve el problema mentalmente, matemáticamente y gráficamente.

La manecilla horaria da una vuelta cada 12 horas; por tanto, su velocidad angular es:

$$\omega_h = \frac{1}{12} \frac{\text{vueltas}}{\text{hora}}$$

Y el minutero, una vuelta cada hora; así:

$$\omega_m = 1 \frac{\text{vuelta}}{\text{hora}}$$

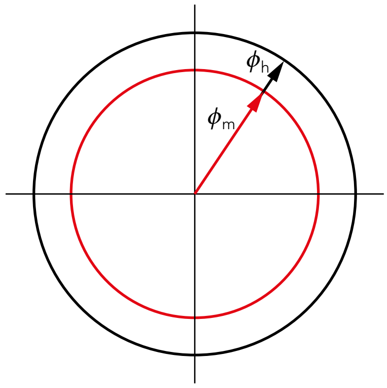
Si consideramos las 12:00 como punto inicial del movimiento, $\phi_{oh} = \phi_{om} = 0$, la posición angular de cada aguja queda determinada por las expresiones:

$$\phi_h = \frac{1}{12} \cdot t \qquad [1]$$

$$\phi_m = 1 \cdot t \qquad [2]$$

Donde la velocidad angular se expresa en vueltas/hora; el tiempo, en horas, y la posición angular, en vueltas.

De acuerdo con la siguiente figura:



Cuando las dos manecillas coincidan de nuevo, la del minutero habrá dado una vuelta completa más que la horaria; la expresión que impone esta condición es:

$$\phi_m = \phi_h + 1 \qquad [3]$$

Al sustituir las expresiones [1] y [2] en [3], obtenemos el valor del tiempo, expresado en horas, en que ambas agujas coinciden de nuevo:

$$1 \cdot t = \frac{1}{12} \cdot t + 1 \rightarrow t = \frac{12}{11} \text{ h}$$

Ese valor corresponde a:

$$t = 1 \text{ h } 5 \text{ min } 27''$$

La expresión [3] se puede generalizar para calcular los instantes de tiempo en que coinciden ambas agujas en una vuelta completa de la aguja que señala las horas; para ello, imponemos la condición:

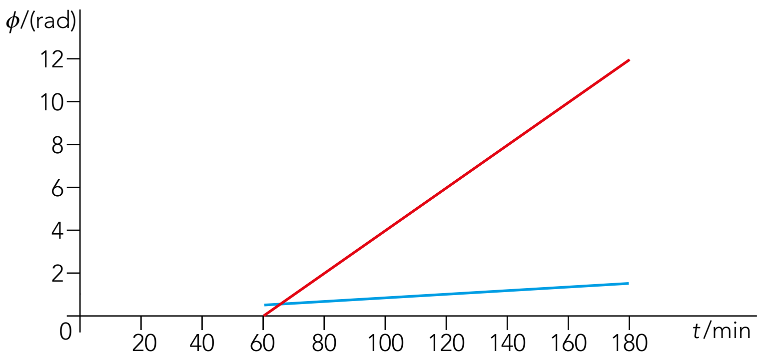
$$\phi_m = \phi_h + n$$

Donde n es el número de vueltas que da la aguja del minutero, así:

$$1 \cdot t = \frac{1}{12} \cdot t + n \rightarrow t = \frac{12}{11} \cdot n \ ; \ 0 < n \le 11; \ n \in \mathbb{Z}$$

En esta expresión, si n se expresa en vueltas, el tiempo aparecerá expresado en horas.

Gráficamente representamos las posiciones angulares para la manecilla de las horas y de los minutos en la segunda vuelta; donde las líneas se cortan, será donde ambas manecillas se encuentran.



15 **¿Qué clase de movimiento es el de un avión que vuela a una altitud fija con rapidez constante sin cambiar de latitud?**

Admitiendo la Tierra esférica, el avión describe un MCU.

Movimiento circular uniformemente acelerado

16 **¿Por qué las primeras bicicletas tenían una rueda delantera grande y una trasera pequeña?**

En **anayaeducacion.es** su alumnado puede consultar las características de los textos argumentativos, con consejos y orientaciones para escribir este tipo de textos.

Estas bicicletas no tenían cadena de transmisión y los pedales iban fijos a la rueda delantera. Cada vuelta de los pedales equivalía a un desplazamiento igual a la circunferencia de la rueda delantera, por lo que interesaba que esta fuera grande para conseguir desplazamientos también grandes.

17 **Un motorista parte del reposo, en un circuito con forma circular (*R* = 400 m), con MCUA, hasta que a los 50 s alcanza la velocidad de 72 km/h, que mantiene a partir de ese momento. Calcula:**

a) La aceleración tangencial en la primera etapa del movimiento.

b) El espacio recorrido durante el MCUA.

c) La aceleración normal en *t* = 50 s.

d) La velocidad angular media en los primeros 50 s.

e) Tiempo que tardará en dar 100 vueltas al circuito.

f) Representa las gráficas del movimiento.

a) Expresamos la velocidad lineal en unidades del SI:

$$v = 72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} = 20\ \text{m/s}$$

La velocidad angular que alcanza el motorista es:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{20\ \text{m/s}}{400\ \text{m}} = 0{,}05\ \text{rad/s}$$

Y su aceleración angular la calculamos sabiendo que parte del reposo ($\omega_o = 0$):

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0{,}05\ \text{rad/s}}{50\ \text{s}} = 10^{-3}\ \text{rad/s}^2$$

La aceleración tangencial, por tanto, es:

$$a_t = \alpha \cdot R = 10^{-3}\ \text{rad/s}^2 \cdot 400\ \text{m} = 0{,}4\ \text{m/s}^2$$

b) La posición angular a los 50 s es:

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}\ \text{rad/s}^2 \cdot (50\ \text{s})^2 = 1{,}25\ \text{rad}$$

Por tanto, el espacio que ha recorrido el motorista es:

$$\Delta s = \phi \cdot R = 1{,}25\ \text{rad} \cdot 400\ \text{m} = 500\ \text{m}$$

c) La aceleración normal es:

$$a_n = \omega^2 \cdot R = (0{,}05\ \text{rad/s})^2 \cdot 400\ \text{m} = 1\ \text{m/s}^2$$

d) La velocidad angular media será el cociente entre el desplazamiento angular, ya calculado y el tiempo, dato que proporciona el enunciado del problema:

$$\omega_m = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{1{,}25 \text{ rad}}{50 \text{ s}} = 0{,}025 \text{ rad/s}$$

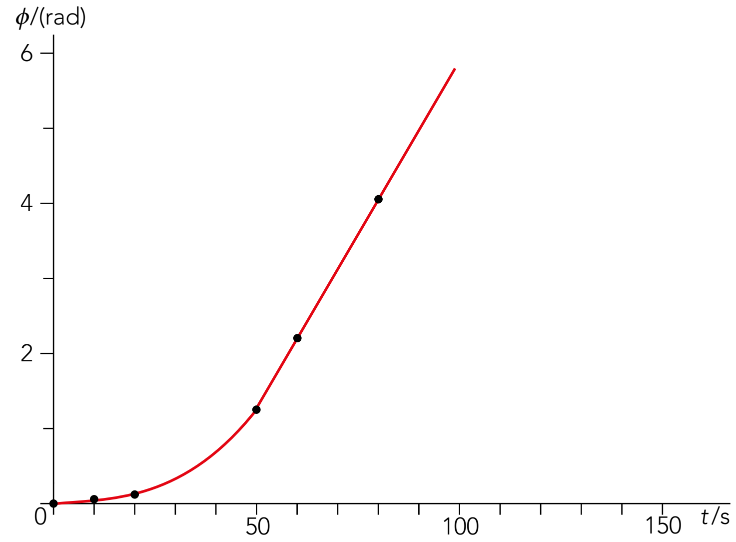
e) Para el cálculo del tiempo que tarda en dar 100 vueltas al circuito hay que considerar que los 50 primeros segundos se trata de un MCUA, y que una vez alcanzada la velocidad de 72 km/h, es un MCU.

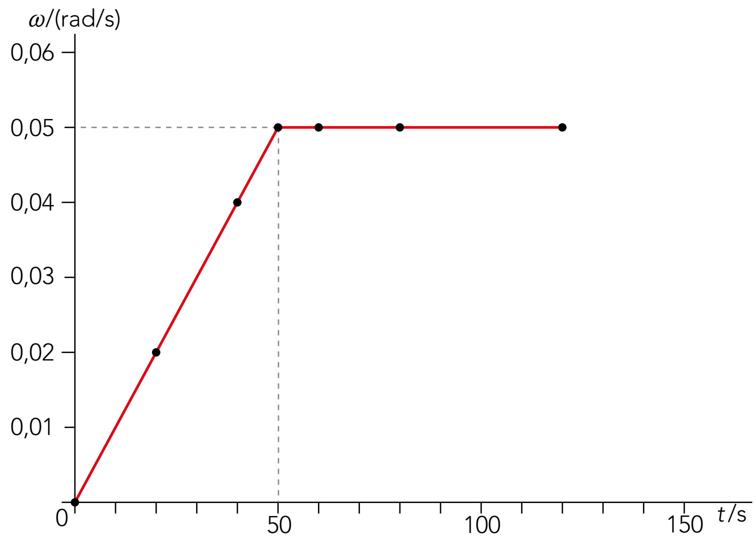
En los primeros 50 s el motorista recorre 1,25 rad, y el resto de las 100 vueltas ($200 \cdot \pi - 1{,}25$ rad) los recorre a 0,05 rad/s.

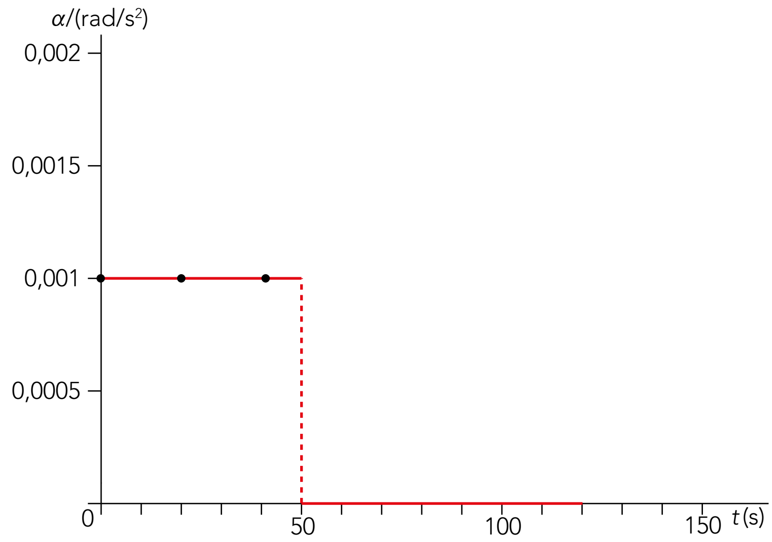
El tiempo total es:

$$t = 50 \text{ s} + \frac{(200 \cdot \pi - 1{,}25) \text{ rad}}{0{,}05 \text{ rad/s}} = 12\,591{,}4 \text{ s} = 3 \text{ h } 29 \text{ min } 51{,}6 \text{ s}$$

f) Para representar las gráficas del movimiento, hay que tener en cuenta que en los 50 primeros segundos se trata de un MCUA y que a partir de ahí se convierte en un MCU.







18 **Una rueda (*d* = 60 cm) gira en torno a su eje a 3000 rpm. Si se frena y tarda 20 s en detenerse, calcula:**

a) La aceleración angular, supuesta constante.

b) El número de vueltas que da hasta que se para.

c) El módulo de las aceleraciones tangencial, normal y total de un punto de su periferia una vez dadas 100 vueltas.

a) La velocidad angular inicial del movimiento, expresada en las unidades correspondientes del SI es:

$$\omega_0 = 3000\ \frac{\text{vueltas}}{\text{min}} \cdot \frac{2 \cdot \pi\ \text{rad}}{1\ \text{vuelta}} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 100 \cdot \pi\ \text{rad/s}$$

El valor de la aceleración de frenado será, entonces:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \rightarrow \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} \rightarrow \alpha = \frac{0 - 100 \cdot \pi}{20} = -5 \cdot \pi\ \text{rad/s}^2$$

b) La distancia angular que recorre un punto del exterior de la rueda hasta que esta se detiene es:

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 \cdot \text{t} + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

$$\phi = 0 + 100 \cdot \pi \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-5 \cdot \pi) \cdot 20^2 = 1000 \cdot \pi\ \text{rad}$$

Teniendo en cuenta que una vuelta equivale a $2 \cdot \pi$ rad, las que da la rueda hasta que se detiene son:

$$N = \frac{\phi}{2 \cdot \pi} \rightarrow N = \frac{1000 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 500\ \text{vueltas}$$

c) El radio de la rueda es:

$$R = \frac{d}{2} = \frac{60\ \text{cm}}{2} = 30\ \text{cm} = 0{,}3\ \text{m}$$

El valor de la aceleración tangencial de un punto de la periferia es:

$$a_t = \alpha \cdot R \rightarrow a_t = -5 \cdot \pi \cdot 0{,}3 = -1{,}5 \cdot \pi\ \text{m/s}^2$$

El cálculo de la aceleración normal se realiza a partir de la siguiente expresión:

$$a_n = \omega^2 \cdot R$$

Donde ω es el valor de la velocidad angular al cabo de 100 vueltas:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

Siendo t el instante de tiempo que corresponde a dicho valor de la velocidad, que calculamos como sigue:

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

Donde:

$$\alpha = -5 \cdot \pi \text{ rad/s}^2 \;\; ; \;\; \phi_0 = 0 \;\; ; \;\; \omega_0 = 100 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

$$\phi = 100 \text{ vueltas} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} = 200 \cdot \pi \text{ rad}$$

Así:

$$200 \cdot \pi = 0 + 100 \cdot \pi \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-5 \cdot \pi) \cdot t^2$$

$$5 \cdot t^2 - 200 \cdot t - 400 = 0 \;\; \begin{cases} t_1 = 37{,}89 \text{ s} \\ t_2 = 2{,}1 \text{ s} \end{cases}$$

La primera solución carece de significado físico, pues transcurridos 20 s, el móvil está parado; por tanto, la velocidad angular al cabo de 100 vueltas será:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \;\rightarrow\; \omega = 100 \cdot \pi - 5 \cdot \pi \cdot 2{,}1 = 89{,}5 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

La aceleración normal será entonces:

$$a_n = \omega^2 \cdot R = (89{,}5 \cdot \pi)^2 \cdot 0{,}3 = 2\,403{,}1 \cdot \pi^2 \text{ m/s}^2$$

El módulo de la aceleración total de un punto de la periferia de la rueda será:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{(2\,403{,}1 \cdot \pi^2)^2 + (-1{,}5 \cdot \pi)^2} \approx 2\,403{,}1 \cdot \pi^2 \text{ m/s}^2$$

En este último cálculo se puede despreciar la contribución de la aceleración tangencial al módulo de la aceleración total.

19 En un MCUA de 20 cm de radio la frecuencia disminuye de 30 Hz a 3 Hz en 5 segundos. Calcula:

a) La velocidad angular inicial y final.

b) La aceleración angular en ese intervalo.

c) El número de vueltas dadas en esos 5 segundos.

d) La velocidad lineal y las componentes intrínsecas de la aceleración al inicio y al final del movimiento.

a) La velocidad inicial y final, conocida la frecuencia, es:

$$\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0 = 2 \cdot \pi \text{ rad} \cdot 30 \text{ s}^{-1} = 188{,}50 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = 2 \cdot \pi \cdot f_f = 2 \cdot \pi \text{ rad} \cdot 3 \text{ s}^{-1} = 18{,}85 \text{ rad/s}$$

b) La aceleración angular en ese intervalo es:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} = \frac{18{,}85 \text{ rad/s} - 188{,}5 \text{ rad/s}}{3 \text{ s}} = -33{,}93 \text{ rad/s}^2$$

c) El ángulo barrido en este tiempo es:

$$\Delta\phi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = 188{,}5 \text{ rad/s} \cdot 5 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 33{,}93 \text{ rad/s}^2 \cdot (5 \text{ s})^2 = 518{,}37 \text{ rad}$$

Por tanto, el número de vueltas es:

$$N = \frac{\Delta\phi}{2 \cdot \pi} = \frac{518{,}37 \text{ rad}}{2 \cdot \pi \text{ rad}} = 82{,}5 \text{ vueltas}$$

d) La velocidad lineal inicial y final es:

$$v_0 = \omega_0 \cdot R = 188{,}5 \text{ rad/s} \cdot 0{,}2 \text{ m} = 37{,}70 \text{ m/s}$$

$$v_f = \omega_f \cdot R = 18{,}85 \text{ rad/s} \cdot 0{,}2 \text{ m} = 3{,}77 \text{ m/s}$$

La aceleración tangencial es la misma al inicio y al final del movimiento; así, su valor será:

$$a_t = \alpha \cdot R = -33{,}93 \text{ rad/s} \cdot 0{,}2 \text{ m} = -6{,}79 \text{ m/s}$$

La aceleración normal al inicio y al final del movimiento es:

$$a_{n_0} = \omega_0^2 \cdot R = (188{,}5 \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}2 \text{ m} = 7\,106{,}45 \text{ m/s}^2$$

$$a_{n_f} = \omega_f^2 \cdot R = (18{,}85 \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}2 \text{ m} = 71{,}06 \text{m/s}^2$$

20 ¿Qué velocidad angular, en rad/s, ha de tener una centrifugadora para que en un punto situado a 10 cm del eje de giro produzca una aceleración normal 100 veces mayor que la de la gravedad terrestre?

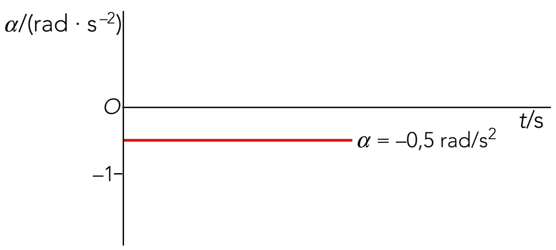
La aceleración normal será:

$$a_n = 100 \cdot g = 100 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 980 \text{ m/s}^2$$

Así, la velocidad angular será:

$$a_n = \omega^2 \cdot R \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_n}{R}} = \sqrt{\frac{980 \text{ m/s}^2}{0{,}1 \text{ m}}} = 99 \text{ rad/s}$$

21 A partir de la siguiente gráfica de aceleración angular de un movimiento circular, cuyo inicio ocurre en $\phi_0 = 0$ desde el reposo, representa las gráficas de posición y velocidad, angulares y lineales.

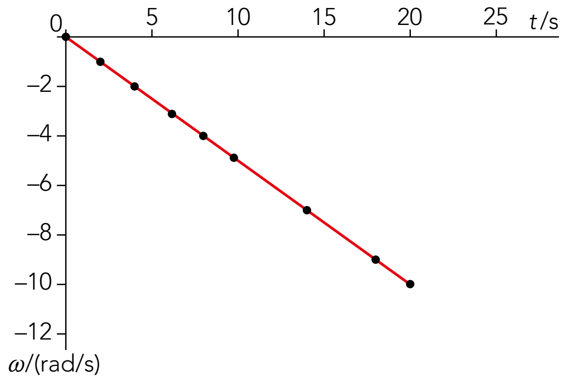


Para resolver este ejercicio, debemos obtener los valores correspondientes a la velocidad y a la aceleración angulares en función del tiempo. Dichos valores los obtendremos aplicando las siguientes expresiones:

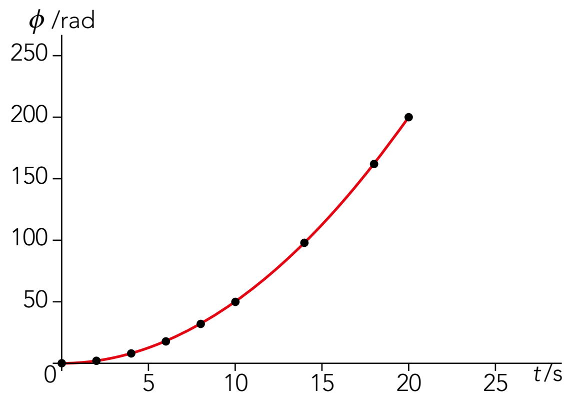
$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \quad ; \quad \phi(t) = \phi_0 + \omega \cdot t$$

En la gráfica de la aceleración angular frente al tiempo se obtiene el valor de $\alpha = -0{,}5$ rad/s^2.

La gráfica de la velocidad angular es, entonces:



Como se ha indicado, la gráfica de la posición angular se obtendrá al multiplicar el valor de la velocidad angular en cada instante por el tiempo:



Las gráficas de la velocidad y del espacio lineal trendrán la misma forma de las angulares, pero para obtener su valor se debe multiplicar por el radio.

22 **Se hace girar una honda durante 10 segundos, desde el reposo, con una aceleración angular de π rad/s^2, momento en el cual suelta la cuerda para dejar salir el proyectil:**

a) ¿A qué velocidad sale despedido si la cuerda de la honda mide 60 cm?

b) Si sale desde 15 cm del suelo, con un ángulo de 45°, ¿cuánto tiempo tardará en llegar al suelo? ¿A qué distancia lo hará?

c) ¿Cuánto tiempo tendría que hacer girar la honda para que la velocidad lineal de salida fuese el doble?

a) La velocidad con la que se lanza el proyectil coincide con la velocidad lineal del MCUA en ese tiempo. Calculamos la velocidad angular:

$$\omega = \alpha \cdot t = \pi \text{ rad/s}^2 \cdot 10 \text{ s} = 10 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

El radio es 60 cm; por tanto, la velocidad lineal es:

$$v = \omega \cdot R = 10 \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot 0{,}6 \text{ m} = 6 \cdot \pi \text{ m/s} = 18{,}8 \text{ m/s}$$

b) Se trata de un tiro oblicuo, cuyas ecuaciones del movimiento son:

Eje *X*:

$$v_x = v_0 \cdot \cos\alpha$$

$$x = v_x \cdot t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$$

Eje *Y*:

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t$$

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = y_0 + v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Despejamos el tiempo de vuelo del proyectil para llegar al suelo:

$$0 = 0{,}15 + 18{,}8 \cdot \operatorname{sen} 45° \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2 \rightarrow t = \frac{-13{,}33 \pm \sqrt{(13{,}33)^2 + 4 \cdot 0{,}15 \cdot 4{,}9}}{-2 \cdot 4{,}9}$$

$$t_1 = -0{,}011 \text{ s} \ ; \ t_2 = 2{,}7 \text{ s}$$

La distancia a la que llega es:

$$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t = 18{,}85 \cdot (\cos 45°) \cdot 2{,}7 \text{ s} = 35{,}98 \text{ m}$$

c) Para que la velocidad lineal de salida fuera el doble, su velocidad angular debe ser también el doble. Por tanto, el tiempo que se debe hacer girar la honda será el doble:

$$v' = 2 \cdot v \rightarrow 2 \cdot \omega \rightarrow 2 \cdot t \rightarrow t' = 2 \cdot 10 \text{ s} = 20 \text{ s}$$

Página 238

23 **Un móvil describe un MCU de 20 m de longitud y 2 s de período, centrado en un sistema de referencia cartesiano. Cuando pasa por el punto de corte de la trayectoria con el semieje *Y* positivo arranca otro móvil desde el reposo. Si ambos movimientos se dan en sentido antihorario, ¿con qué aceleración angular ha de hacerlo para alcanzar al primero en $\phi = \pi/2$ rad? ¿Qué valor tendrán las componentes intrínsecas de la aceleración de ambos móviles en el momento del encuentro?**

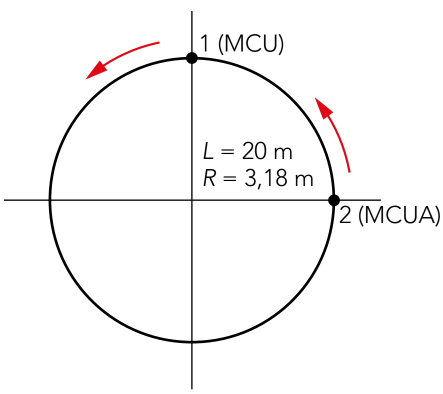
Las ecuaciones del movimiento de cada móvil son:

1 MCU: $\omega_1 = \frac{2 \cdot \pi}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi}{2} = \pi \text{ rad/s} \ ; \ \phi_1 = \omega_1 \cdot t + \phi_{01} = \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}$

$\phi_{01} = \frac{\pi}{2}$ rad

2 MCUA: $\omega_{02} = 0$ rad/s ; $\phi_2 = \frac{1}{2} \cdot \alpha_2 \cdot t^2$

$\phi_{02} = 0$ rad



Si ambos móviles se encuentran en la posición $\phi = \frac{\pi}{2}$, el móvil 1 habrá recorrido una vuelta completa, por lo que el tiempo transcurrido hasta que los móviles se encuentren será igual al período del primero; es decir, $t = 2$ s.

Igualando la posición de los cuerpos y sustituyendo el valor del tiempo, obtenemos la aceleración angular del segundo móvil:

$$\phi_1 = \phi_2 \rightarrow \pi \cdot t + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \alpha_2 \cdot t^2$$

$$2 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \alpha_2 \cdot 2^2 \rightarrow \alpha_2 = \frac{5 \cdot \pi}{4} \text{ rad/s}^2$$

Por tanto, las componentes intrínsecas en el punto de encuentro serán:

① $a_t = 0$

$$a_n = \omega^2 \cdot R = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot \frac{10}{\pi} = 31{,}46 \text{ m/s}^2$$

② $a_t = \alpha \cdot R = \frac{5 \cdot \pi}{4} \text{ rad/s}^2 \cdot \frac{10}{\pi} = 12{,}5 \text{ m/s}^2$

$$a_n = \omega^2 \cdot R = (\alpha \cdot t)^2 \cdot R = \left(\frac{5 \cdot \pi}{4} \cdot 2\right)^2 \cdot \frac{10}{\pi} = 196{,}35 \text{ m/s}^2$$

Nota: A partir de los datos del enunciado, diremos que si $L = 2 \cdot \pi \cdot R = 20$ m $\rightarrow R = \frac{10}{\pi}$ m

24 Las medidas de la posición angular en distintos instantes de tiempo, en un movimiento circular que parte del reposo, arrojan los siguientes datos:

t/s	0	1	2	3	4
ϕ/rad	0	1	4	9	16

Determina el tipo de movimiento circular y representa gráficamente sus ecuaciones.

Se trata de un movimiento circular uniformemente acelerado, cuyas ecuaciones son:

$$\phi = \phi_o + \omega_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \xrightarrow{\text{reposo}} \phi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

$$\omega = \omega_o + \alpha \cdot t \xrightarrow{\text{reposo}} \omega = \alpha \cdot t$$

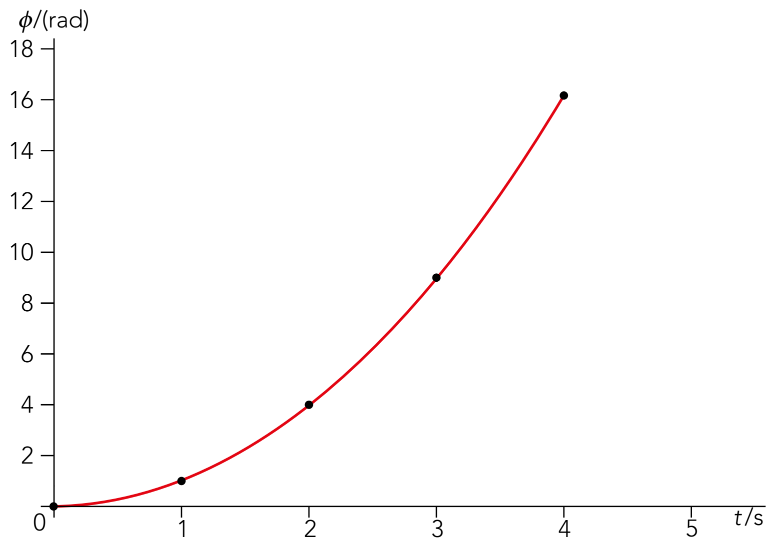
Viendo cómo son las ecuaciones, debemos deducir que el valor de $\alpha = 2$ rad/s².

A partir de los datos aportados calculamos la velocidad angular y la aceleración angular para cada tiempo:

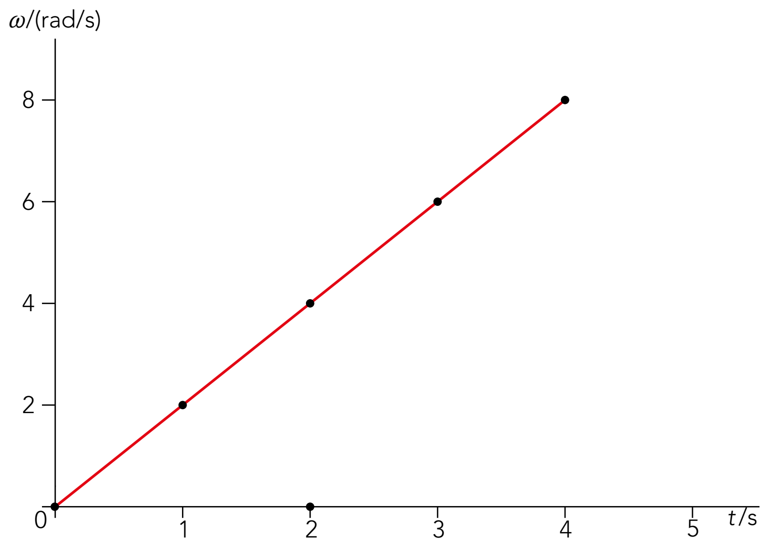
t/s	0	1	2	3	4
ϕ/rad	0	1	4	9	16
ω/(rad/s)	0	2	4	6	8
α/(rad/s²)	0	2	2	2	2

Las gráficas correspondientes son:

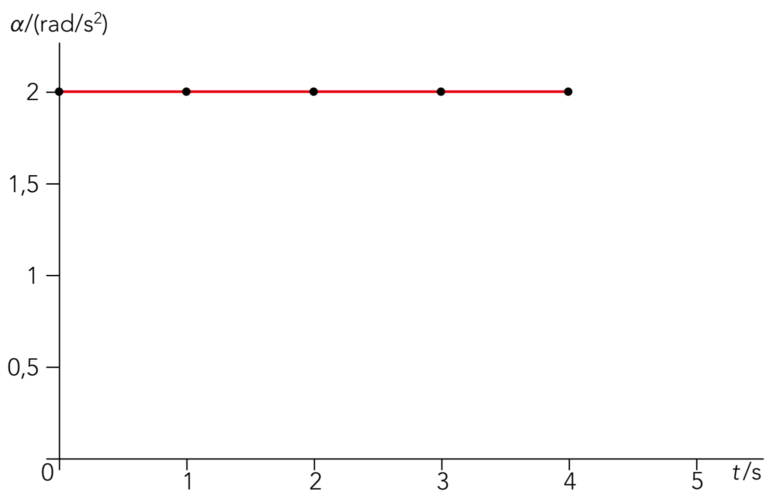
- Espacio - tiempo:



- Velocidad angular en función del tiempo:



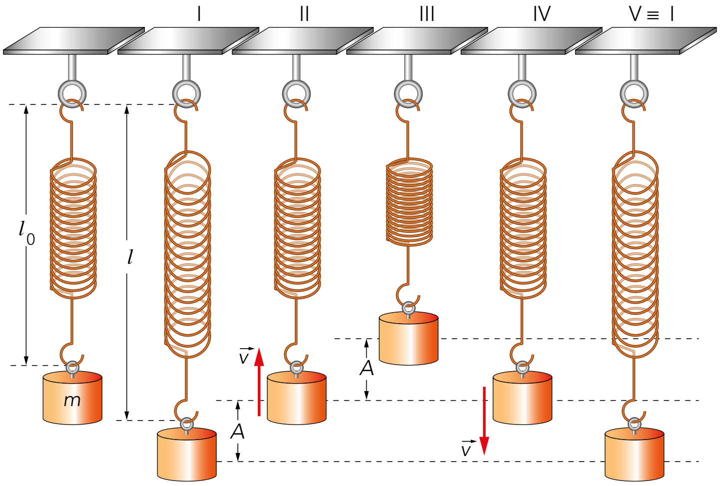
- Aceleración angular en función del tiempo:



Movimiento armónico simple

25 Un móvil describe un movimiento armónico simple de amplitud *A*. ¿Qué distancia recorre en un intervalo de tiempo igual a un período? Razona la respuesta.

En el tiempo correspondiente a un período, el móvil ha realizado una oscilación completa. Teniendo en cuenta el dibujo aportado, vemos que una oscilación completa es el equivalente a cuatro amplitudes:



Así, la distancia que se recorre en un tiempo igual al período es $4 \cdot A$.

26 En un MAS la elongación, la velocidad y la aceleración son magnitudes periódicas. ¿Coincide el período en los tres casos? Razona tu respuesta.

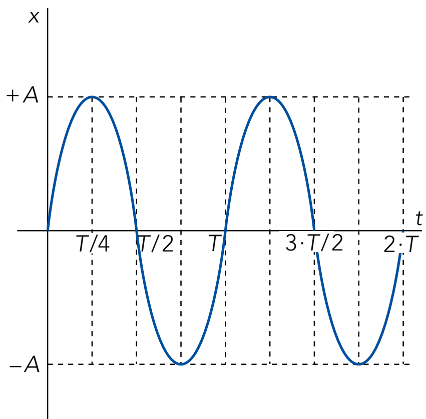
Como se observa de las ecuaciones del MAS, todas ellas dependen de la frecuencia angular, que está relacionada con el período:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_o)$$

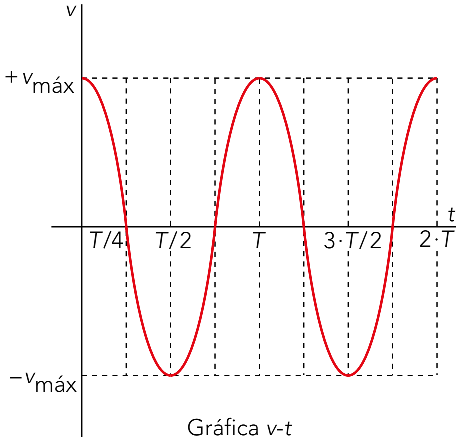
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_o)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_o)$$

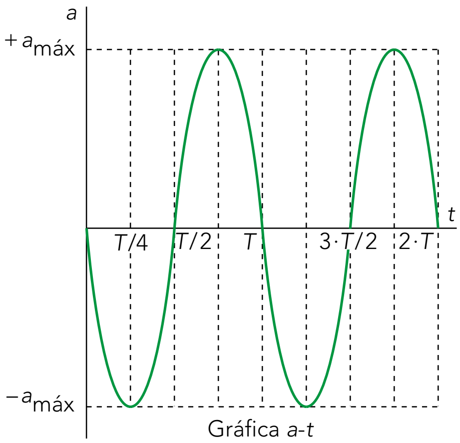
Sabiendo también que $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{T}$, podemos asegurar que el valor numérico del período sí es el mismo en los tres casos. Existe, no obstante, desfase entre las magnitudes, como se muestra en las gráficas siguientes:



Gráfica *x*-*t*



Gráfica *v-t*



Gráfica *a-t*

27 **Un móvil describe un MAS de 20 cm de amplitud y 2,5 s de período. Escribe la ecuación de la elongación en los casos siguientes:**

a) El tiempo empieza a contarse cuando la elongación es máxima y positiva.

b) El tiempo empieza a contarse cuando la elongación es nula y el movimiento es hacia valores positivos de la elongación.

c) El tiempo empieza a contarse cuando la elongación es nula y el movimiento es hacia valores negativos de la elongación.

Para un MAS, la ecuación de la elongación es:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi)$$

Conocidos $A = 20$ cm y $T = 2{,}5$ s, ω es:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{2{,}5 \text{ s}} = 0{,}8 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

Con estos datos ya podemos calcular la elongación en los distintos casos:

a) Cuando x es máxima a $t = 0$, el desfase será:

$$x_{máx} = A \rightarrow \text{sen}\,\phi = 1 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

Luego, la ecuación de la elongación es:

$$x(t) = 20 \cdot \text{sen}\left(0{,}8 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}$$

b) Cuando $x = 0$ a $t = 0$ y $v > 0$, el desfase es:

$$x = 0 \rightarrow \text{sen}\,\phi = 0 \rightarrow \phi = 0$$

Por tanto, la ecuación de la elongación resulta:

$$x\,(t) = 20 \cdot \text{sen}\,(0{,}8 \cdot \pi \cdot t)\ \text{cm}$$

c) Cuando $x = 0$ en $t = 0$, y $v < 0$, el desfase es:

$$x = 0 \rightarrow \text{sen}\,\phi = 0 \rightarrow \phi = \pi$$

Pues $v = A \cdot \omega \cdot \cos\phi < 0$, y $\cos\phi < 0$, por lo que ϕ debe encontrarse en el segundo cuadrante. La ecuación de la elongación es:

$$x\,(t) = 20 \cdot \text{sen}\,(0{,}8 \cdot \pi \cdot t + \pi)\ \text{cm}$$

28 Un móvil sigue un MAS de 10 cm de amplitud, realizando 2 oscilaciones cada segundo:

a) Calcula la elongación 1/6 s después de alcanzar su máxima separación con velocidad positiva.

b) Representa la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

Indica que se realizan 2 oscilaciones por segundo, por lo que la frecuencia angular es:

$$\omega = \frac{2\ \text{osc}}{1\ \text{s}} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{1\ \text{osc}} = 4 \cdot \pi\ \text{rad/s}$$

a) Calculamos el tiempo en el que alcanza su elongación máxima, considerando el desfase nulo:

$$x\,(t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t) \rightarrow \text{sen}\,(\omega \cdot t) = 1 \rightarrow \omega \cdot t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{2 \cdot 4 \cdot \pi} = \frac{1}{8}\ \text{s}$$

A este tiempo se suma $\frac{1}{6}$ s:

$$t = \frac{1}{8}\ \text{s} + \frac{1}{6}\ \text{s} = 0{,}29\ \text{s}$$

La elongación es, por tanto:

$$x = 10 \cdot \text{sen}\,(4 \cdot \pi \cdot 0{,}29) = -4{,}8\ \text{cm}$$

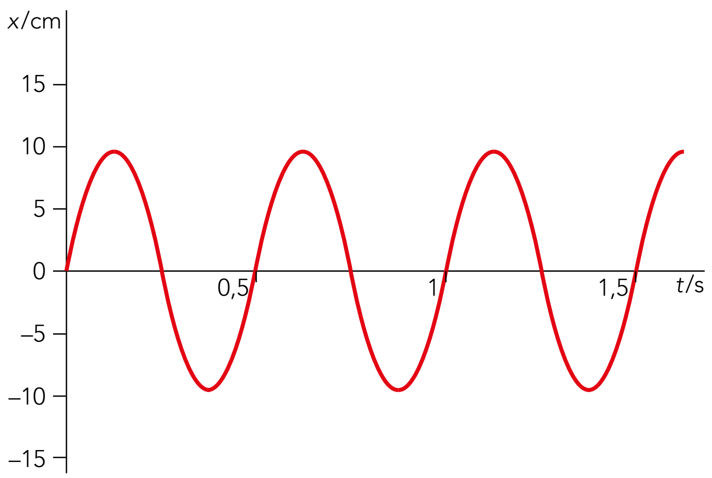
b) Sabiendo que las ecuaciones que representan el espacio, la velocidad y la aceleración, en función del tiempo, son:

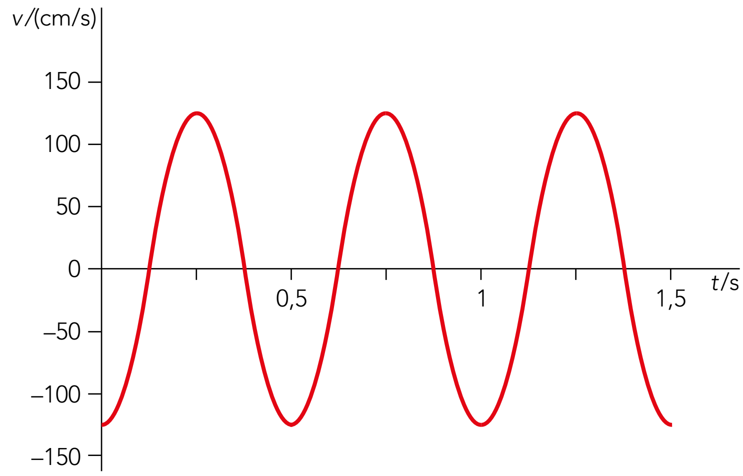
$$x\,(t) = 10 \cdot \text{sen}\,(4 \cdot \pi \cdot t)\ \text{cm}$$

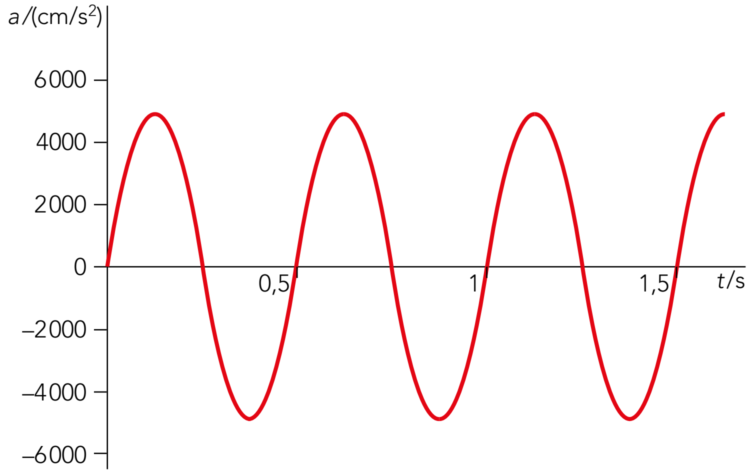
$$v\,(t) = 40 \cdot \pi \cdot \cos\,(4 \cdot \pi \cdot t)\ \text{cm/s}$$

$$a\,(t) = -160 \cdot \pi^2 \cdot \text{sen}\,(4 \cdot \pi \cdot t)\ \text{cm/s}^2$$

Dándole distintos valores al tiempo, obtenemos sus gráficas respectivas:







29 Una partícula se mueve con un MAS cuya ecuación, en unidades del SI, viene dada por:

$$\boldsymbol{y = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{t}{2} + \pi\right)}$$

Determina:

a) La amplitud, período y frecuencia de las oscilaciones.

b) La posición, velocidad y aceleración cuando la elongación es igual a la mitad de la amplitud.

a) De la ecuación de la elongación deducimos que $A = 2$ m y $\omega = 1/2$ rad/s. El período será:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{0{,}5 \text{ rad/s}} = 4 \cdot \pi \text{ s}$$

Como la frecuencia es el inverso del período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4 \cdot \pi} \text{ Hz}$$

b) El instante de tiempo en el que la elongación es la mitad de la amplitud, $y = 1$ m, es:

$$1 = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{t}{2} + \pi\right) \rightarrow \text{sen}\left(\frac{t}{2} + \pi\right) = 0{,}5 \rightarrow \frac{t}{2} + \pi = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot n \cdot \pi \xrightarrow{n\,=\,1} t = 7{,}33 \text{ s}$$

Así, la velocidad será:

$$v = \cos\left(\frac{t}{2} + \pi\right) = \cos\left(\frac{7{,}33}{2} + \pi\right) = 0{,}87 \text{ m/s}$$

Y la aceleración:

$$a = -\frac{1}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{t}{2} + \pi\right) = -\frac{1}{2}\ \text{sen}\left(\frac{7{,}33}{2} + \pi\right) = -0{,}25\ \text{m/s}^2$$

Nota: La variación en los resultados se debe a la aproximación en el número de decimales al realizar las operaciones matemáticas.

30 **Un objeto colgado de un muelle describe un MAS de 10 cm de amplitud y 0,1 s de período. En el instante inicial el muelle está estirado, ocupando el objeto la posición más baja en su oscilación:**

a) Escribe la ecuación del movimiento.

b) Calcula la elongación, la velocidad y la aceleración, transcurridos 10 s desde el inicio del movimiento.

c) Demuestra que la velocidad es máxima cuando el móvil pasa por la posición de equilibrio.

a) La ecuación de la elongación viene determinada por la expresión:

$$y\,(t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t + \phi)$$

La amplitud es A = 10 cm. Conocido el período calculamos la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi\ \text{rad}}{0{,}1\ \text{s}} = 20 \cdot \pi\ \text{rad/s}$$

Sabiendo que a t = 0 la elongación ocupa su posición más baja, $y = -A$, calculamos el desfase:

$$-A = A \cdot \text{sen}\,\phi \;\Rightarrow\; \text{sen}\,\phi = -1 \;\Rightarrow\; \phi = \frac{3 \cdot \pi}{2}$$

La ecuación de la elongación, por tanto, es:

$$y\,(t) = 10 \cdot \text{sen}\left(20 \cdot \pi \cdot t + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right)\ \text{cm}$$

b) La elongación en t = 10 s es:

$$y = 10 \cdot \text{sen}\left(20 \cdot \pi \cdot 10 + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right) = -10\ \text{cm}$$

La ecuación de la velocidad es:

$$v\,(t) = -200 \cdot \pi \cdot \cos\left(20 \cdot \pi \cdot t + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right)\ \text{(cm/s)}$$

Ya que:

$$\cos\left(20 \cdot \pi \cdot 10 + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right) = 0$$

En t = 10 s su velocidad es:

$$v = 0\ \text{cm/s}$$

La ecuación de la aceleración es:

$$a\,(t) = -4\,000 \cdot \pi^2 \cdot \text{sen}\left(20 \cdot \pi \cdot t + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right)\ \text{(cm/s}^2\text{)}$$

En t = 10 s es:

$$a = 4\,000 \cdot \pi^2\ \text{cm/s}^2$$

c) En la posición de equilibrio $y = 0$, el tiempo transcurrido es:

$$0 = 10 \cdot \text{sen}\left(20 \cdot \pi \cdot t + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right) \rightarrow 20 \cdot \pi \cdot t + \frac{3 \cdot \pi}{2} = 2 \cdot \pi$$

$$t = 0{,}05 \text{ s}$$

A este tiempo, la velocidad será:

$$v = -200 \cdot \pi \cdot \cos\left(20 \cdot \pi \cdot 0{,}05 + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right) = -200 \cdot \pi \text{ cm/s}$$

Como el coseno vale 1, diremos que es el máximo valor de velocidad que puede alcanzar.

31 Un móvil que describe un MAS tiene una aceleración de 5 m/s² cuando su elongación es de 5 cm. ¿Cuál es el período del movimiento?

Las ecuaciones de la elongación y de la aceleración son:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi)$$

$$a = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi)$$

Si dividimos, en valor absoluto, la aceleración entre la elongación, su relación corresponde a la frecuencia angular:

$$\frac{a}{y} = \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{5 \text{ m/s}^2}{0{,}05 \text{ m}}} = 10 \text{ rad/s}$$

Por tanto, el período es:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{10 \text{ rad/s}} = 0{,}2 \cdot \pi \text{ s}$$

32 El pistón de un automóvil describe un MAS de 5 cm de amplitud y 3 600 rpm de frecuencia angular. Calcula su velocidad cuando pasa por el punto medio, y la aceleración en los extremos del recorrido.

En primer lugar, expresamos la frecuencia angular en las unidades correspondientes del SI; en este caso, rad/s:

$$\omega = 3600 \text{ rpm} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 120 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

La velocidad en el punto medio o posición de equilibrio, corresponde con la velocidad máxima; de acuerdo con la expresión de la velocidad en un MAS:

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$

Resulta:

$$v_{máx}(t) = A \cdot \omega = 0{,}05 \text{ m} \cdot 120 \cdot \pi \text{ rad/s} = 6 \cdot \pi \text{ m/s}$$

La aceleración en los extremos corresponde con la aceleración máxima; esta será:

$$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi)$$

$$a_{máx}(t) = |-A \cdot \omega^2| = 0{,}05 \text{ m} \cdot (120 \cdot \pi \text{ rad/s})^2 = 720 \cdot \pi^2 \text{ m/s}^2$$

33 En el instante en que un móvil con MAS se encuentra a 6 cm de la posición de equilibrio, su velocidad es de 1 cm/s. Cuando se encuentra a 2 cm, su velocidad es de 4 cm/s. Calcula el período y la amplitud del movimiento.

Las expresiones generales de la posición y de la velocidad de una partícula que efectúa un MAS son:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_o) \;\; ; \;\; v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_o)$$

Si escribimos las ecuaciones en función del primer instante de tiempo, t_1, en el que $x_1 = 6$ cm y $v_1 = 1$ cm/s, obtenemos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 6 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t_1 + \phi_0) \\ 1 = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t_1 + \phi_0) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{6}{A} = \text{sen}(\omega \cdot t_1 + \phi_0) \\ \dfrac{1}{A \cdot \omega} = \cos(\omega \cdot t_1 + \phi_0) \end{array}$$

Si elevamos las dos expresiones al cuadrado y las sumamos, el miembro de la derecha es igual a la unidad, ya que:

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

Por tanto:

$$\frac{36}{A^2} + \frac{1}{A^2 \cdot \omega^2} = 1 \rightarrow \frac{36 \cdot \omega^2 + 1}{A^2 \cdot \omega^2} = 1 \rightarrow 36 \cdot \omega^2 - A^2 \cdot \omega^2 + 1 = 0 \qquad [1]$$

De manera similar, para el instante de tiempo t_2, en el que $x_2 = 2$ cm y $v_2 = 4$ cm/s, podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{l} 2 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t_2 + \phi_0) \\ 4 = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t_2 + \phi_0) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2}{A} = \text{sen}(\omega \cdot t_2 + \phi_0) \\ \dfrac{4}{A \cdot \omega} = \cos(\omega \cdot t_2 + \phi_0) \end{array}\right.$$

Elevando ambas expresiones al cuadrado y operando como en el caso anterior se obtiene:

$$\frac{4}{A^2} + \frac{16}{A^2 \cdot \omega^2} = 1 \rightarrow \frac{4 \cdot \omega^2 + 16}{A^2 \cdot \omega^2} = 1 \rightarrow 4 \cdot \omega^2 - A^2 \cdot \omega^2 + 16 = 0 \qquad [2]$$

Si a la expresión [1] le restamos la [2] y despejamos ω, obtenemos la frecuencia angular.

$$32 \cdot \omega^2 - 15 = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{15}{32}} = 0{,}68 \text{ rad/s}$$

El período será:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}68} = 9{,}24 \text{ s}$$

La amplitud la podemos obtener directamente a partir de las expresiones [1] o [2]. Si partimos de la ecuación [1] se obtiene:

$$36 \cdot \omega^2 - A^2 \cdot \omega^2 + 1 = 0 \rightarrow A^2 = \frac{36 \cdot \omega^2 + 1}{\omega^2}$$

$$A = \sqrt{\frac{36 \cdot \omega^2 + 1}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{36 \cdot 0{,}68^2 + 1}{0{,}68^2}} = 6{,}2 \text{ cm}$$

34 **Un móvil describe un MAS de amplitud A, frecuencia angular ω, y fase inicial $\phi_0 = 0$. Demuestra que la amplitud se puede calcular, en función de las condiciones iniciales del movimiento, con la expresión:**

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

Comprueba que esta ecuación es homogénea.

Las ecuaciones de la elongación y de la velocidad son:

$$x = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t + \phi)$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos\,(\omega \cdot t + \phi)$$

Dividimos la segunda ecuación entre la frecuencia angular y elevamos al cuadrado ambas expresiones:

$$x^2 = A^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t + \phi)$$

$$\frac{v^2}{\omega^2} = A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \phi)$$

Sumamos las expresiones:

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t + \phi) + A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \phi)$$

Sacamos factor común A^2 y sabiendo que:

$$\text{sen}^2\phi + \cos^2\phi = 1$$

La expresión queda como:

$$x_0{}^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

Para saber si la ecuación es homogénea, comprobamos si los dos miembros tienen la misma ecuación de dimensiones:

$$[A] = \text{L}$$

$$\left[\sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}\right] = \sqrt{\text{L}^2 + \frac{\text{L}^2 \cdot \cancel{\text{T}^{-2}}}{\cancel{\text{T}^{-2}}}} = \sqrt{\text{L}^2} = \text{L}$$

Los dos miembros tienen dimensión de longitud, por lo que la ecuación es dimensionalmente homogénea.

35 **Si se duplica la frecuencia angular de un MAS, indica como varía:**

a) Su período.

b) La frecuencia.

c) La amplitud.

d) La fase inicial.

¿Qué relaciones de proporcionalidad observas entre estas magnitudes angulares?

a) Al duplicar la frecuencia angular, el período será la mitad:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{2 \cdot \pi}{\omega_1} \\ T_2 &= \frac{2 \cdot \pi}{\omega_2} \end{aligned}\right\} \omega_2 = 2 \cdot \omega_1 \rightarrow T_2 = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \omega_1} \rightarrow T_2 = \frac{T_1}{2}$$

Las magnitudes son inversamente proporcionales.

b) La frecuencia de oscilación será el doble:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = 2 \cdot \pi \cdot \omega_1 \\ f_2 = 2 \cdot \pi \cdot \omega_2 \end{array}\right\} \omega_2 = 2 \cdot \omega_1 \rightarrow f_2 = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot \omega_1 \rightarrow f_2 = 2 \cdot f_1$$

Las magnitudes son directamente proporcionales.

c) La amplitud no varía, dado que no hay relación entre la amplitud y la frecuencia.

d) La fase inicial tampoco depende de la frecuencia angular.

Página 239

36 **En un MAS, la velocidad, la pulsación, la amplitud y la elongación se relacionan según la expresión:**

$$\mathbf{v = \omega^{n} \cdot \sqrt{A^2 - x^2}}$$

Determina *n* por análisis dimensional.

El análisis dimensional de la ecuación será:

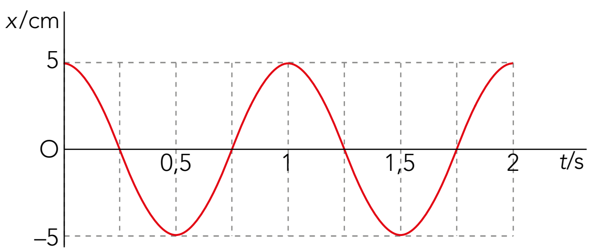
$$[v] = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}$$

$$\left[\omega^n \cdot \sqrt{A^2 - x^2}\right] = \mathrm{T}^{-n} \cdot \mathrm{L}$$

Igualando las expresiones se obtiene $n = 1$. Por tanto:

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

37 **A partir de la siguiente gráfica de la elongación en un MAS:**



a) Determina las ecuaciones que lo describen y las del MCU que lo genera como proyección sobre el eje *X* (en ambos casos, posición, velocidad y aceleración).

b) Representa estas ecuaciones en función del tiempo.

a) Las ecuaciones del movimiento son:

$$x(t) = A \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + \phi)$$

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$

$$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + \phi)$$

De la gráfica obtenemos que $A = 5$ cm. El tiempo que tarda en realizar una oscilación es 1 s; por tanto, la frecuencia angular es:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ s}} = 2 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

A $t = 0$, x es máxima, por lo que el desfase es:

$$\text{sen}(\omega \cdot t + \phi) = 1 \;\Rightarrow\; \text{sen}\,\phi = 1 \;\Rightarrow\; \phi = \frac{\pi}{2}$$

Así, las ecuaciones del movimiento son:

$$x(t) = 5 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = 5 \cdot \cos \pi \cdot t$$

$$v(t) = 10 \cdot \pi \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = -10 \cdot \pi \cdot \text{sen}\,\pi \cdot t$$

$$a(t) = -20 \cdot \pi^2 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = -20 \cdot \pi^2 \cdot \cos \pi \cdot t$$

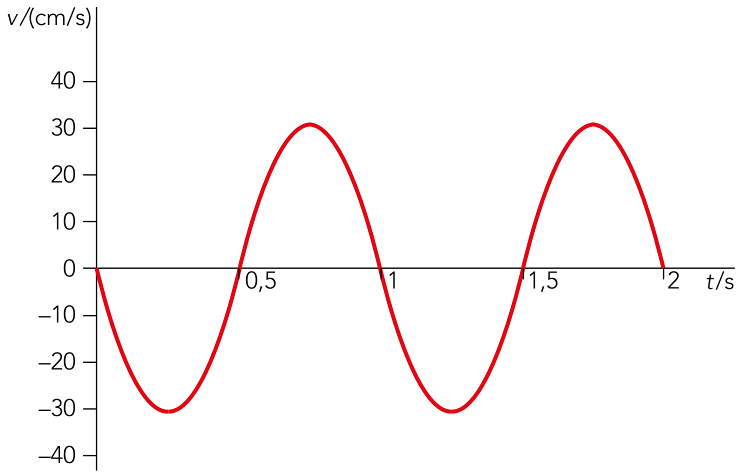
Las ecuaciones del MCU que lo generan como proyección son:

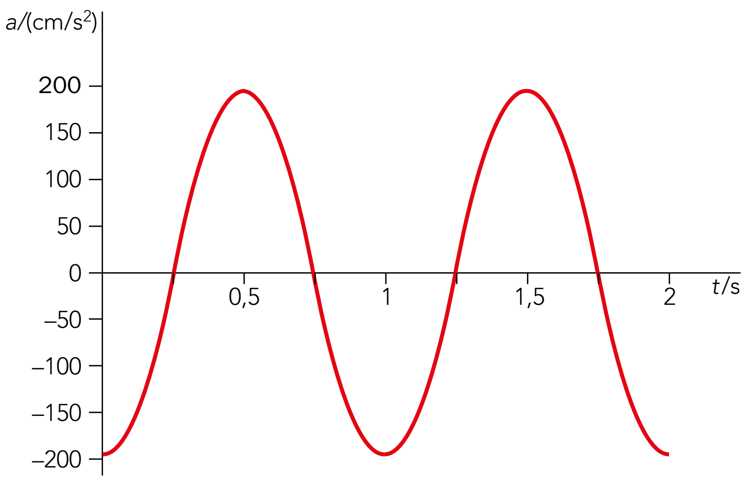
$$\vec{r}(t) = 5 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{i} + 5 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -10 \cdot \pi \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{i} + 10 \cdot \pi \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{j}$$

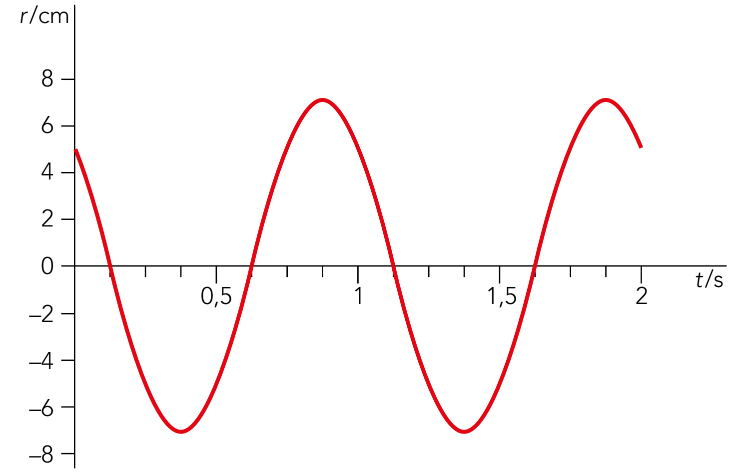
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -20 \cdot \pi^2 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{i} - 20 \cdot \pi^2 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{j}$$

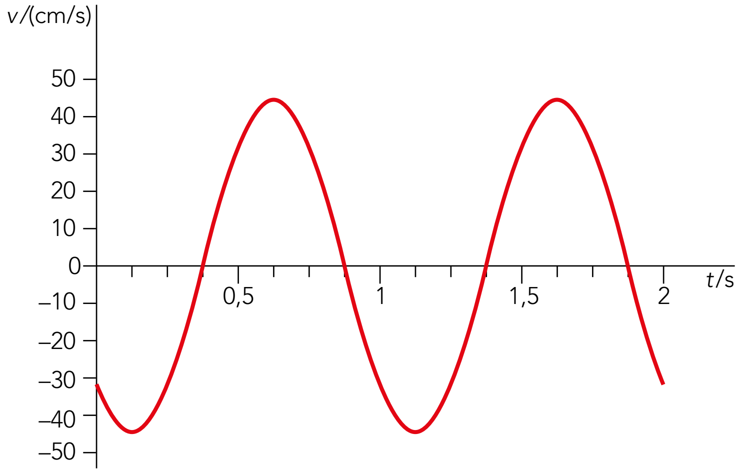
b) Gráficamente, las ecuaciones de velocidad y aceleración son:





Las gráficas correspondientes al MCU son:





38 Tenemos dos osciladores armónicos de ecuaciones, expresadas en el SI:

$$\mathbf{x_1 = A \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \quad ; \quad x_2 = A \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Determina:

a) La posición inicial de ambos y el sentido en que comienzan a moverse.

b) El punto en el que se cruzan.

c) La diferencia de fase entre ambos movimientos.

a) La posición inicial corresponde con $t = 0$. Por tanto:

$$x_1 = A \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0 \;\; ; \;\; x_2 = A \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

El oscilador 1 se mueve hacia la izquierda, debido a que su desfase es positivo, y el oscilador 2 hacia la derecha, ya que su desfase es negativo.

b) El punto en el que se cruzan será cuando ambas elongaciones sean iguales.

$$x_1 = x_2 \rightarrow A \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = A \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Como se mueven hacia sentidos diferentes, se cruzan cuando pasan por la posición de equilibrio $x = 0$ cm.

c) La diferencia de fase entre ambos movimientos será la diferencia de sus correspondientes desfases iniciales:

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \text{ rad}$$

39 **Comenta la siguiente frase: «Un móvil con MAS puede ocupar posiciones iguales con fases distintas».**

La frase es cierta, pues la elongación toma el mismo valor para todas las fases en las que el seno (o el coseno) valga lo mismo. Lo que sí puede ocurrir es que las velocidades y las aceleraciones tengan sentido contrario cuando pasa por esa elongación.

40 **¿Existe alguna diferencia entre los estados de movimiento de un MAS en dos instantes en que sus fases son 163° y 1 603°?**

Como la diferencia de fases, de 1 440°, coincide con cuatro circunferencias completas, en los dos instantes el móvil tiene la misma fase, por lo que su estado de movimiento (elongación, velocidad y aceleración) es el mismo. La diferencia, no visible, está en que en el segundo instante el móvil ha descrito cuatro oscilaciones más que en el primero.

9 DINÁMICA. LAS FUERZAS Y SUS EFECTOS

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

1 LAS FUERZAS COMO MEDIDA DE LAS INTERACCIONES

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.7.1. (EA.7.1.1.)

Página 242

1 **Según lo estudiado, ¿es correcto decir que un levantador de pesas tiene fuerza? Justifica tu respuesta.**

El levantador de pesas no tiene fuerza, sino que aplica fuerza para producir un cambio en el estado de reposo al mover las pesas. Lo correcto sería decir que tiene energía.

2 **¿Es posible que actúen varias fuerzas sobre un mismo objeto, y este no se deforme ni varíe su estado de movimiento? Pon un ejemplo.**

Sí, es posible. Si la resultante de las fuerzas aplicadas es nula, el objeto no se moverá.

Por ejemplo, un libro situado en una mesa. Actúan la fuerza del libro sobre la mesa y su recíproca, la de la mesa sobre el libro. Además, también actúan la del libro sobre la Tierra y la de la Tierra sobre el libro. En cuanto a las deformaciones, los cuerpos que llamamos rígidos sufren deformaciones tan pequeñas que son inapreciables para nuestros sentidos.

3 **Las siguientes fuerzas, expresadas en newtons, actúan sobre el mismo cuerpo. Dibuja y calcula la resultante.**

$$\vec{F}_1 = -20 \cdot \vec{i} + 30 \cdot \vec{j} \quad ; \quad \vec{F}_2 = 30 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j} \quad ; \quad \vec{F}_3 = 10 \cdot \vec{i} + 20 \cdot \vec{j}$$

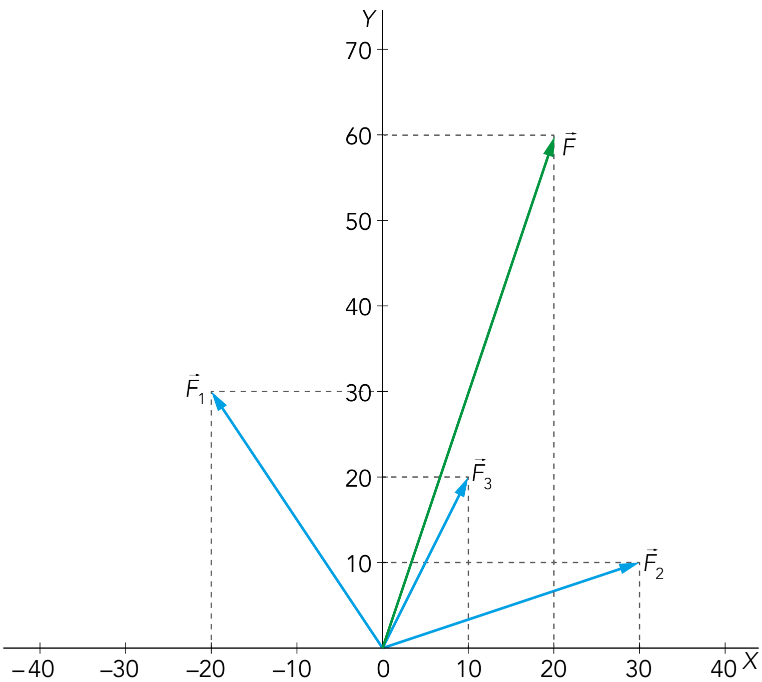
Para calcular la resultante de la fuerza, se suman las componentes de la fuerza en x y las componentes en y:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (-20 \cdot \vec{i} + 30 \cdot \vec{j}) + (30 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j}) + (10 \cdot \vec{i} + 20 \cdot \vec{j})$$

$$\vec{F} = (-20 + 30 + 10) \cdot \vec{i} + (30 + 10 + 20) \cdot \vec{j} \text{ N}$$

$$\vec{F} = (20 \cdot \vec{i} + 60 \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

Gráficamente:



Página 243

4 **Busca información y elabora un informe sobre los trabajos anteriores a la unificación de Maxwell, en los que este se basó para enunciar sus leyes del electromagnetismo.**

Maxwell introdujo el concepto de electromagnetismo, permitiendo una descripción matemática de la interacción entre electricidad y magnetismo. Para ello, formuló ecuaciones que describen y cuantifican los campos de las fuerzas, basados en los trabajos anteriores de:

- Carl Friedrich Gauss, para la electricidad y el magnetismo.

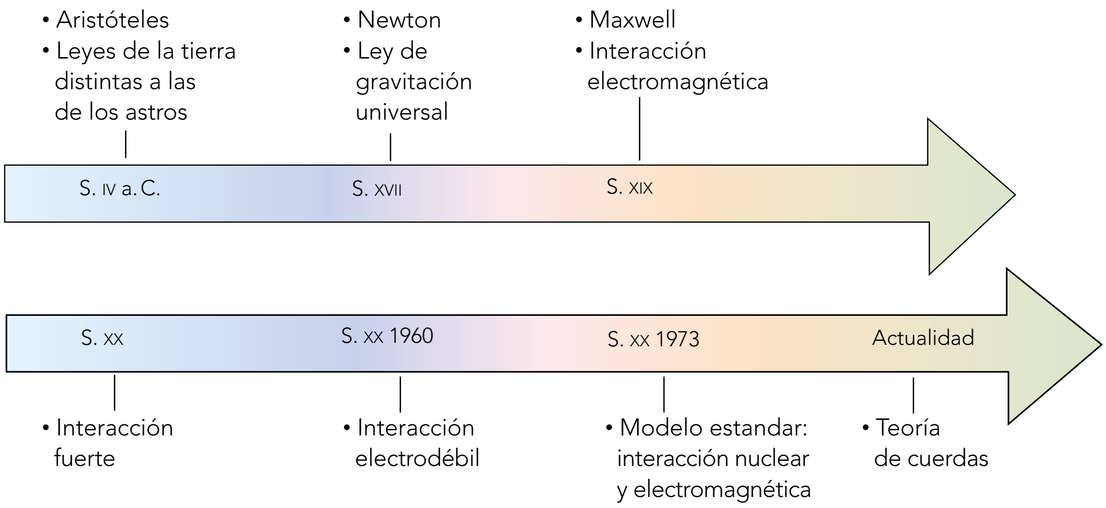
- Michael Faraday, para la inducción electromagnética.

- André-Marie Ampère, que relaciona el campo magnético y la causa que lo produce.

5 Línea de tiempo. **Diseña una línea cronológica con las unificaciones comentadas en el texto.**

En anayaeducacion.es su alumnado puede consultar el documento que explica las características del organizador gráfico que solicita el enunciado de esta actividad.

A partir de lo leído en el texto, podemos representar la siguiente línea cronológica:



6 **Busca información acerca de la intensidad y el alcance de las interacciones mencionadas.**

Respuesta abierta. La tabla siguiente muestra un resumen de la información:

Interacción	Intensidad (relativa)	Alcance	Sentido	Fuente
Fuerte	Fuerte (1)	Corto, 10^{-15} m	Atractivo o repulsivo (a muy cortas distancias)	Estabilidad del núcleo
Electromagnética	Fuerte (10^{-2})	Largo	Atractivo o repulsivo	Carga eléctrica
Débil	Débil (10^{-12})	Corto, $< 10^{-17}$ m	No aplicable	Reacciones entre partículas
Gravitatoria	Débil (10^{-40})	Largo	Atractivo	Masa

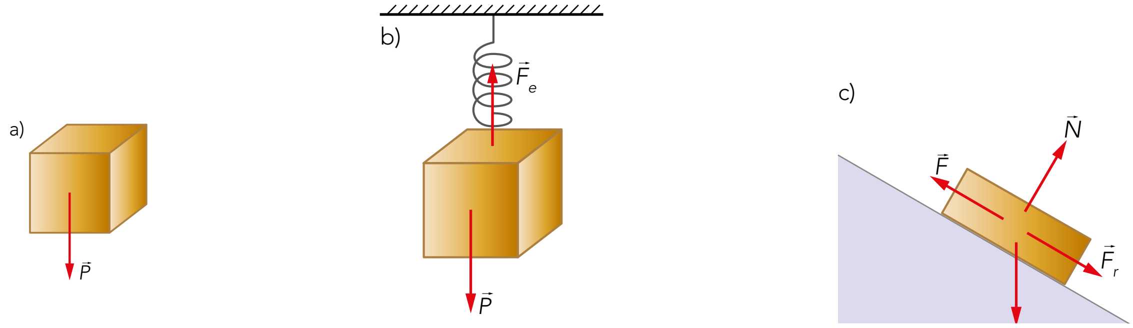
7 **Busca en Internet el vídeo del «universo elegante» de Brian Greene. Después de verlo, ¿crees que algún día se llegará a enunciar la teoría del todo? ¿Será una teoría definitiva?**

Respuesta abierta.
Siempre que se pide realizar una búsqueda de información en Internet, es recomendable que su alumnado recuerde las normas básicas de ciudadanía digital, disponibles en anayaeducacion.es.

Página 245

8 Lo común. **Indica las interacciones, y dibuja los diagramas de fuerzas, de un objeto en caída libre, un cuerpo colgado del techo mediante un muelle y un cuerpo que sube deslizando por un plano inclinado con rozamiento.**

En un objeto en caída libre solo actúa el peso del objeto (figura a). En un cuerpo colgado del techo mediante un muelle, actúan el peso y la fuerza elástica (figura b). En el caso de un cuerpo que sube deslizando por un plano inclinado, las fuerzas que actúan son el peso, la fuerza de rozamiento, la fuerza aplicada sobre el objeto para que suba (que puede estar o no presente) y la normal (figura c).



En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de un documento que explica cómo aplicar la llave para el desarrollo del pensamiento «Lo común».

9 **Calcula tu peso en la superficie de la Tierra. Si la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es la sexta parte que en la de la Tierra, ¿cuánto pesarías en la Luna? ¿Qué masa tendrías allí?**

El peso es masa por gravedad. Suponiendo una masa de 50 kg, el peso sería:

$$P = m \cdot g = 50 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 490 \text{ N}$$

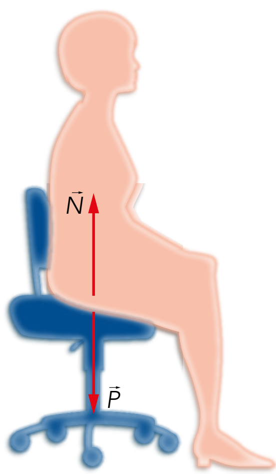
En la Luna, el peso será la sexta parte que en la Tierra:

$$P_L = m \cdot \frac{1}{6} \cdot g = 50 \text{ kg} \cdot \frac{1}{6} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 81{,}67 \text{ N}$$

La masa será la misma en la Tierra y en la Luna (se pueden despreciar los efectos relativistas).

10 **Dibuja las fuerzas que actúan sobre ti cuando estás sentado en una silla, calcula sus módulos, e identifica qué cuerpos las ejercen.**

Las fuerzas que actúan sobre una persona sentada en una silla son el peso, fuerza que ejerce la Tierra sobre la persona, y la normal ejercida por la silla:

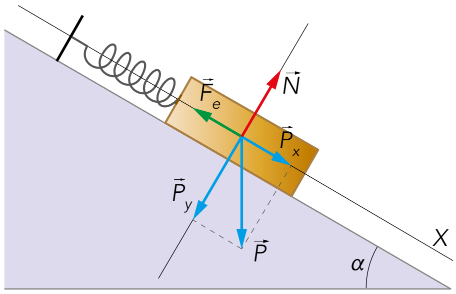


Las dos fuerzas tienen el mismo módulo y actúan en la misma dirección, pero tienen sentido contrario, y por eso se anulan. Para una persona de 50 kg:

$$P = N = m \cdot g = 50\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 490\ \text{N}$$

11 **Una de las condiciones para que un cuerpo esté en reposo es que la fuerza neta que actúa sobre él sea nula. Sabiendo esto, calcula la elongación del muelle y la fuerza normal en el ejercicio resuelto 3, si la masa del cuerpo es de 60 kg, y k = 5 000 N/m.**

El diagrama de fuerzas es:



La fuerza neta es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e$$

Expresada en componentes cartesianas:

$$\vec{F} = (P_x - F_e) \cdot \vec{i} + (N - P_y) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{F} = (m \cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha - k \cdot x) \cdot \vec{i} + (N - m \cdot g \cdot \cos \alpha) \cdot \vec{j}$$

Al estar en reposo, la fuerza neta será nula. De esta forma, deducimos la elongación del muelle de la fuerza en el eje X:

$$m \cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha - k \cdot x = 0$$

$$x = \frac{m \cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha}{k} = \frac{60\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\ 30°}{5\,000\ \text{N/m}}$$

$$x = 0{,}059\ \text{m} = 5{,}9\ \text{cm}$$

La fuerza normal será igual a la componente Y del peso:

$$N = m \cdot g \cdot \cos \alpha = 60\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \cos 30° = 509{,}7\ \text{N}$$

2 PRINCIPIOS DE LA DINÁMICA

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.1. (EA.6.1.1.) CE.7.1. (EA.7.1.1.)

Página 246

12 **Según el principio de inercia, explica qué le sucede a un pasajero que viaja de pie en un autobús cuando, de repente, el vehículo:**

a) Frena.

b) Acelera.

c) Toma una curva hacia la derecha.

Según el principio de inercia, todos los cuerpos mantienen su estado de reposo o movimiento uniforme, excepto que se vean forzados a cambiarlo por una fuerza externa. Por tanto:

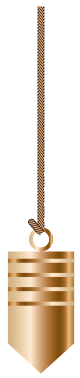
a) Cuando el autobús frena, el viajero tiende a continuar su movimiento y se desplaza hacia la parte delantera del vehículo.

b) Cuando el autobús acelera, el viajero tiende a ir hacia la parte trasera.

c) Al tomar una curva hacia la derecha, el viajero tiende a seguir recto. Respecto del autobús, se desplaza hacia la parte izquierda.

13 **Idea un método para comprobar si un vehículo está o no acelerando, utilizando una plomada.**

Una plomada es un instrumento que se utiliza para definir la vertical. Está compuesto por una pesa de metal (normalmente plomo) con una forma prismática o cilíndrica que termina en cono, unido a una cuerda que marca una línea vertical, como vemos en el ejemplo de la figura:



Si colocamos la plomada en el interior de un vehículo con movimiento rectilíneo unifrome, su posición será perpendicular al suelo. En el momento en el que el vehículo varíe su velocidad adquiriendo una aceleración, el ángulo de la plomada variará, comprobándose que el vehículo tiene aceleración.

14 **Busca en Internet el vídeo «inercia universo mecánico», que trata sobre la inercia. Después de verlo, explica por qué hemos dicho que unos científicos se basan en los trabajos de otros.**

Respuesta abierta.

Página 247

15 **Un observador está sentado en la tribuna de un circuito de motocicletas.**

El sistema de referencia de una moto que atraviesa la recta de meta acelerando, ¿es inercial?

¿Y el del director de carrera, que está sentado en la torre de control? Justifica tus respuestas.

La moto está acelerando respecto del observador de tribuna; por tanto, en este sistema de referencia, no se puede aplicar el principio de inercia. Luego, no es un sistema de referencia inercial.

El director de carrera, que está en reposo respecto al observador de tribuna, sí cumple el principio de inercia, por lo que se puede considerar un sistema de referencia inercial.

16 **Visualiza el vídeo de la Universidad de Toronto: «Frames of reference». Puedes encontrarlo, dividido en dos partes, utilizando las palabras clave «sistemas referencia universidad Toronto».**

A continuación, responde; ¿existe en el universo algún sistema de referencia inercial?

Respuesta abierta.

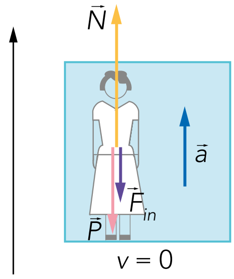
Página 248

17 **Cuando un ascensor (P = 3 000 N) arranca con a = 0,2 m/s², ¿qué fuerza inercial siente una persona de 70 kg? ¿Qué fuerza ejerce el cable que lo eleva?**

La fuerza inercial la calculamos al aplicar la segunda ley de Newton:

$$F_i = m \cdot a = 70 \text{ kg} \cdot 0{,}2 \text{ m/s}^2 = 14 \text{ N}$$

Para calcular la fuerza que ejerce el cable que eleva el ascensor, proponemos el siguiente esquema de fuerzas:



De donde decimos que, según la segunda ley de Newton:

$$F - P_T = m \cdot a \rightarrow F = P_T + m \cdot a = m_T \cdot g + m_T \cdot a = m_T \cdot (g + a) \qquad [1]$$

Siendo m la masa total (suma de la masa del ascensor y de la persona) y P_T, el peso total. Para calcular la masa del ascensor, utilizamos su peso y despejamos desde ahí:

$$P = m \cdot g = m \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 3000 \text{ N} \rightarrow m = 305{,}8 \text{ kg}$$

Por tanto, la masa total será:

$$m_T = 305{,}8 \text{ kg} + 70 \text{ kg} = 375{,}8 \text{ kg}$$

Así, sustituyendo en [1], la fuerza será:

$$F = m_T \cdot (g + a) = 375{,}8 \text{ kg} \cdot (9{,}81 \text{ m/s}^2 + 0{,}2 \text{ m/s}^2) = 3761{,}8 \text{ N}$$

18 **En el caso del ejercicio resuelto 4, ¿qué fuerza tendríamos que aplicar para que el cuerpo describiera un MRU?**

Para que el movimiento sea rectilíneo uniforme, según el principio de inercia, la fuerza resultante debe ser nula. Por tanto, la fuerza que se debe aplicar es la misma que la obtenida en el ejercicio resuelto 4, pero en sentido contrario:

$$\vec{F} = (-2 \cdot \vec{i} - \vec{j}) \text{ N}$$

19 **En el caso del ejercicio resuelto 5, ¿con qué aceleración máxima puede arrancar el camión para que un paquete de 30 kg no deslice si el coeficiente de rozamiento estático entre el suelo del cajón y el paquete es μ_e = 0,4?**

Como vimos en el ejemplo 5, cuando el camión arranca con una aceleración $\vec{a}$, añade una fuerza inercial $\vec{F} = -m \cdot \vec{a}$. Para que el paquete no deslice, el módulo de la fuerza de rozamiento debe ser mayor o igual al de esta fuerza; por tanto:

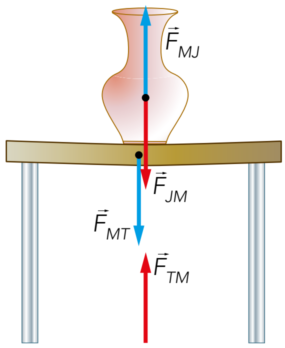
$$F = m \cdot a \quad ; \quad F_R = \mu \cdot N = \mu \cdot g \cdot m$$

$$m \cdot a = \mu \cdot g \cdot m \rightarrow a = \mu \cdot g = 0{,}4 \cdot 9{,}8 = 3{,}92 \text{ m/s}^2$$

Página 249

20 El espejo. **Repite el ejercicio resuelto 6, esta vez centrando el estudio de fuerzas en la mesa en lugar de en el jarrón. ¿Qué condición se ha de cumplir para que la mesa esté en reposo?**

Las fuerzas son las mismas que en el ejercicio resuelto 6 para las fuerzas jarrón-mesa. Hay que tener en cuenta también la fuerza de la mesa sobre la Tierra y la recíproca de la Tierra sobre el jarrón:



Para que la mesa esté en reposo, la fuerza neta debe ser nula.

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de un documento que explica cómo aplicar la técnica de desarrollo del pensamiento «El espejo», propuesta para resolver esta actividad.

21 **Si consideramos inercial un sistema de referencia situado en la superficie de la Tierra, razona si lo es, o no, el situado en:**

a) La terraza de tu casa.

b) Un cuerpo en caída libre.

c) Un ascensor.

a) La terraza es un sistema inercial, ya que está en reposo respecto a la superficie terrestre.

b) Un cuerpo en caída libre es acelerado, por tanto, no es un sistema inercial.

c) Durante el arranque y la parada no es sistema de referencia inercial, pues el ascensor acelera. Sí lo es durante el resto del trayecto, si lo hace con MRU.

Su alumnado puede consultar en **anayaeducacion.es** el documento que explica las características de los textos argumentativos, así como consejos para elaborar este tipo de textos.

3 CANTIDAD DE MOVIMIENTO O MOVIMIENTO LINEAL

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.7.2. (EA.7.2.1.) CE.7.4. (EA.7.4.1-7.4.2.)

Página 250

22 **Una pelota de pádel llega a la raqueta con una velocidad $\vec{v}_0 = (-12 \cdot \vec{i} + 15 \cdot \vec{j})$ m/s. Después de ser golpeada sale con $\vec{v} = (30 \cdot \vec{i} + 22 \cdot \vec{j})$ m/s. Si la masa de la pelota es m = 58 g, calcula:**

a) El impulso de la raqueta sobre la pelota.

b) La fuerza (constante) que ejerce la raqueta sobre la pelota, si están en contacto durante 3 cs.

a) A partir de la expresión del impulso, calculamos el que ejerce la raqueta sobre la pelota:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = m \cdot \Delta\vec{v}$$

$$\vec{I} = 0{,}058 \text{ kg} \cdot [(30 - (-12)) \cdot \vec{i} + (22 - 15) \cdot \vec{j}\,] \text{ m/s} = 0{,}058 \text{ kg} \cdot (42 \cdot \vec{i} + 7 \cdot \vec{j}\,) \text{ m/s}$$

$$\vec{I} = (2{,}4 \cdot \vec{i} + 0{,}4 \cdot \vec{j}\,) \text{ N/s}$$

b) El impulso mecánico de una fuerza es el producto de la fuerza por el tiempo durante el que actúa. Por tanto, en este caso, la fuerza tiene un valor de:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t \;\rightarrow\; \vec{F} = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{2{,}4 \cdot \vec{i} + 0{,}4 \cdot \vec{j}}{3 \cdot 10^{-2} \text{ s}} = (80 \cdot \vec{i} + 13{,}3 \cdot \vec{j}\,) \text{ N}$$

Página 252

23 **Si estuvieras en reposo en medio de un lago helado, sobre una capa de hielo sin rozamiento, ¿cómo podrías conseguir llegar a la orilla?**

Sobre una superficie sin rozamiento podríamos movernos lanzando un objeto en la dirección en la que queramos desplazarnos, pero en sentido contrario al deseado. Al tratarse de un sistema (persona-objeto) sin fuerzas externas (netas), se conservaría la cantidad de movimiento y, en módulos:

$$m \text{ (persona)} \cdot v \text{ (persona)} = m \text{ (objeto)} \cdot v \text{ (objeto)}$$

Así, cuanto mayor sea la masa del objeto lanzado, y mayor la velocidad con la que se haga, mayor será la velocidad de la persona, en la misma dirección, y sentido contrario, a la velocidad de lanzamiento.

24 **Una bala de 30 g impacta sobre un bloque de madera de 500 g, quedando incrustada en él. Justo antes del impacto, la bala se desplaza a 250 km/h, y el bloque lo hace, en la misma dirección y sentido contrario, a 20 km/h. Calcula la velocidad final del conjunto.**

En primer lugar, se expresan las velocidades de la bala y el bloque en unidades del SI:

$$\vec{v}_{bala} = 250 \, \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} = 69{,}4 \cdot \vec{i} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{madera} = -20 \, \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} = -5{,}56 \cdot \vec{i} \text{ m/s}$$

Si aplicamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento, podemos calcular la velocidad final:

$$\vec{p}_b + \vec{p}_m = \vec{p}_{b,m}$$

$$m_b \cdot \vec{v}_b + m_m \cdot \vec{v}_m = m_{b,m} \cdot \vec{v}_{b,m}$$

$$\vec{v}_{b,m} = \frac{m_b \cdot \vec{v}_b + m_m \cdot \vec{v}_m}{m_{b,m}} = \frac{0{,}03 \text{ kg} \cdot 69{,}4 \cdot \vec{i} \text{ m/s} + 0{,}5 \text{ kg} \cdot (-5{,}56 \cdot \vec{i}\,) \text{ m/s}}{0{,}53 \text{ kg}} = -1{,}3 \cdot \vec{i} \text{ m/s}$$

25 **Comenta la siguiente frase: «El descubrimiento del neutrino es un ejemplo del desarrollo de la física basado en los principios de conservación».**

Hay dos principios de conservación que afirman que en un sistema de partículas libre de fuerzas externas, tanto la masa como la cantidad de movimiento deben permanecer constantes. En las primeras investigaciones teóricas sobre la descomposición del neutrón en dos partículas, electrón y protón, se vio que no se cumplían estos principios. Por tanto, tras muchos estudios y experimentos, se llegó a la conclusión de que debía producirse otra partícula durante la reacción. A esa nueva partícula se la denominó neutrino. Por eso, su descubrimiento es una prueba de que se ha de confiar en los principios de conservación.

26 **Un objeto, de 1,5 kg, se rompe en 4 pedazos cuando se mueve con $\vec{v}_0 = (40 \cdot \vec{i} - 50 \cdot \vec{j})$ m/s. Un trozo, de 750 g, sale con $\vec{v}_1 = (150 \cdot \vec{i} + 115 \cdot \vec{j})$ m/s; otro, de 0,5 kg, con $\vec{v}_2 = (-25 \cdot \vec{i} - 76 \cdot \vec{j})$ m/s y el tercero, de 100 g, con $\vec{v}_3 = 43 \cdot \vec{i}$ m/s. ¿Con qué velocidad sale el cuarto?**

La masa del cuarto pedazo será:

$$m_4 = m_T - (m_1 + m_2 + m_3) = 1{,}5 \text{ kg} - (0{,}75 \text{ kg} + 0{,}5 \text{ kg} + 0{,}1 \text{ kg}) \quad \rightarrow \quad m_4 = 0{,}15 \text{ kg}$$

El principio de conservación del movimiento nos dice que la cantidad de movimiento antes de romperse será igual a después de romperse:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \quad \rightarrow \quad m_T \cdot \vec{v}_0 = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + m_3 \cdot \vec{v}_3 + m_4 \cdot \vec{v}_4$$

Despejando $\vec{v}_4$ obtenemos:

$$\vec{v}_4 = \frac{m_T \cdot \vec{v}_0 - m_1 \cdot \vec{v}_1 - m_2 \cdot \vec{v}_2 - m_3 \cdot \vec{v}_3}{m_4}$$

$$\vec{v}_4 = \frac{1{,}5 \text{ kg} \cdot (40 \cdot \vec{i} - 50 \cdot \vec{j}) \text{ m/s} - 0{,}75 \text{ kg} \cdot (150 \cdot \vec{i} + 115 \cdot \vec{j}) \text{ m/s}}{0{,}15 \text{ kg}} +$$

$$+ \frac{-0{,}5 \text{ kg} \cdot (-25 \cdot \vec{i} - 76 \cdot \vec{j}) \text{ m/s} - 0{,}1 \text{ kg} \cdot (43 \cdot \vec{i}) \text{ m/s}}{0{,}15 \text{ kg}}$$

$$\vec{v}_4 = (-295{,}3 \cdot \vec{i} - 821{,}7 \cdot \vec{j}) \text{ m/s}$$

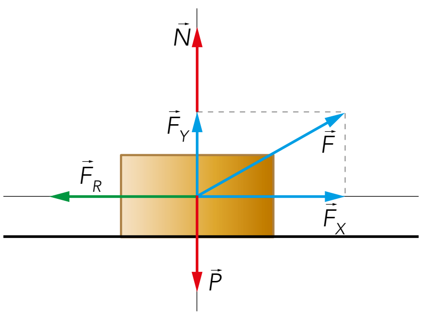
5 ESTUDIO DINÁMICO DE SITUACIONES COTIDIANAS

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.7.2. (EA.7.2.2.-7.2.3.) CE.7.3. (EA.7.3.1.-7.3.2.-7.3.3.) CE.7.5. (EA.7.5.1.)

Página 255

27 **Se arrastra un cajón de 35 kg tirando de él con una cuerda que forma un ángulo de 30° con la horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre el suelo y el cajón es $\mu_e = 0{,}3$, y el dinámico, $\mu_d = 0{,}25$. ¿Qué fuerza mínima habrá que aplicar para que el cajón deslice? Si se ejerce una fuerza doble, ¿cuál es la aceleración?**

Dibujamos el diagrama de fuerzas en donde el eje *X* positivo es hacia donde tiene lugar el movimiento:



La fuerza mínima necesaria para que el cajón empiece a moverse corresponderá con la fuerza de rozamiento. El coeficiente de rozamiento que aplicamos para empezar el movimiento será el estático:

$$F_R = \mu_e \cdot N = \mu_e \cdot (P - F_y) = \mu_e \cdot (m \cdot g \cdot - F \cdot \text{sen}\ \alpha)$$

$$F_R = F_x = F \cdot \cos \alpha$$

Igualamos ambas ecuaciones y despejamos la fuerza:

$$F \cdot \cos \alpha = \mu_e \cdot \text{m} \cdot g - \mu_e \cdot F \cdot \text{sen}\ \alpha$$

$$F = \frac{\mu_e \cdot m \cdot g}{\cos\alpha + \mu_e \cdot \text{sen}\,\alpha} = \frac{0{,}3 \cdot 35\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{\cos 30° + 0{,}3 \cdot \text{sen}\,30°} = 101{,}4\ \text{N}$$

Si la fuerza aplicada es el doble, la resultante de las fuerzas en el eje X, según la segunda ley de Newton, corresponde a:

$$F' = 2 \cdot F = 202{,}8\ \text{N}$$

$$F'_X - F_R = m \cdot a$$

En este caso, la fuerza de rozamiento se calcula con el coeficiente dinámico, ya que el cajón ya está en movimiento. Así, la aceleración será:

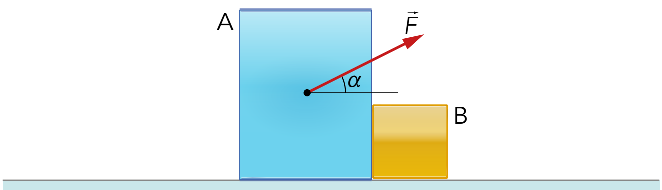
$$F' \cdot \cos \alpha - \mu_d \cdot (m \cdot g - F' \cdot \text{sen}\ \alpha) = m \cdot a$$

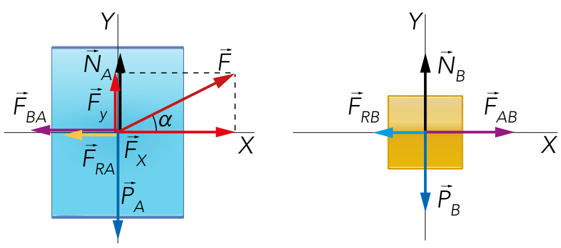
$$a = \frac{F' \cdot \cos\alpha - \mu_d \cdot (m \cdot g - F' \cdot \text{sen}\,\alpha)}{m} =$$

$$a = \frac{202{,}8\,\text{N} \cdot \cos 30° - 0{,}25 \cdot (35\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 - 202{,}8\,\text{N} \cdot \text{sen}\,30°)}{35\,\text{kg}} \rightarrow a = 3{,}3\ \text{m/s}^2$$

28 Si en el ejercicio resuelto 11, m_A = 15 kg, m_B = 20 kg, μ_A = 0,2, μ_B = 0,6, y el operario ejerce la fuerza de modo que α = 15° y F = 300 N, ¿qué valor se obtiene para la aceleración? ¿Qué fuerza ejerce un cuerpo sobre el otro?

El esquema de fuerzas es como el del ejercicio resuelto 11:





Aplicando la segunda ley de Newton para cada una de las cajas:

Caja A: $F_x - F_{RA} - F_{BA} = m_A \cdot a_A$ Caja B: $F_{AB} - F_{RB} = m_B \cdot a_B$

Teniendo en cuenta que:

$$a_A = a_B = a \quad ; \quad F_{AB} = F_{BA} \quad ; \quad F_R = F_{RA} + F_{RB}$$

Sumando ambas ecuaciones y despejando la aceleración:

$$F_x - F_{RA} - F_{RB} = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$F_x - \mu_A \cdot (m_A \cdot g - F_y) - \mu_B \cdot m_B \cdot g = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$a = \frac{F \cdot \cos\alpha - \mu_A \cdot (m_A \cdot g - F \cdot \text{sen}\,\alpha) - \mu_B \cdot m_b \cdot g}{m_A + m_B}$$

$$a = \frac{300\,\text{N} \cdot \cos 15° - 0{,}2 \cdot (15\,\text{kg} - 9{,}81\,\text{m/s}^2 - 300 \cdot \text{sen}\,15°) - 0{,}6 \cdot 20\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{15\,\text{kg} + 20\,\text{kg}} = 4{,}5\ \text{m/s}^2$$

Así, la fuerza que ejerce uno sobre el otro será:

$$F_{AB} - F_{RB} = m_B \cdot a$$

$$F_{AB} = m_B \cdot a + \mu_B \cdot m_B \cdot g = m_B\,(a + \mu_B \cdot g)$$

$$F_{AB} = 20\ \text{kg} \cdot (4{,}5\ \text{m/s}^2 + 0{,}6 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2)$$

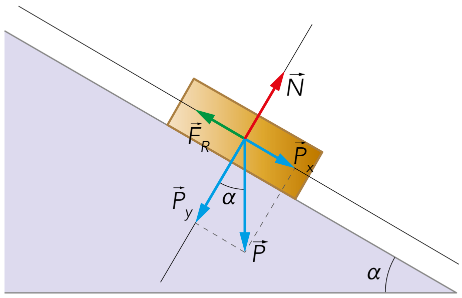
$$F_{AB} = F_{BA} = 207{,}7\ \text{N}$$

29 En lo más alto de un plano inclinado 25° con la horizontal se deja un cuerpo de masa *m*, que desciende deslizando con una aceleración *a* = 1,5 m/s². Calcula el coeficiente de rozamiento, la variación de altura entre *t* = 1 s y *t* = 2 s, y la variación de la cantidad de movimiento en ese intervalo si:

a) *m* = 5 kg.

b) *m* = 10 kg.

El esquema de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es:



La resultante de las fuerzas en el eje *X* será igual a la masa por la aceleración del cuerpo:

$$P_x - F_R = m \cdot a$$

$$P \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu \cdot P \cdot \cos\alpha = m \cdot a$$

$$m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot a$$

Despejando el coeficiente de rozamiento obtenemos el siguiente valor:

$$\mu_A = \frac{g \cdot \text{sen}\,\alpha - a}{g \cdot \cos\alpha} = \frac{9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\,25° - 1{,}5\,\text{m/s}^2}{9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 25°} = 0{,}3$$

Para ambas masas, el coeficiente de rozamiento será el mismo, ya que no depende de la masa del cuerpo.

La diferencia de altura será la misma para ambas masas. Se determina la diferencia del espacio recorrido entre $t = 1$ s y $t = 2$ s:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5\ \text{m/s}^2 \cdot (2\ \text{s})^2 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}5\ \text{m/s}^2 \cdot (1\ \text{s})^2$$

$$\Delta s = 2{,}25\ \text{m}$$

La diferencia de altura será este espacio por el seno del ángulo que forma el plano inclinado con la horizontal:

$$\Delta h = \Delta s \cdot \text{sen}\ \alpha$$

$$\Delta h = 2{,}25\ \text{m} \cdot \text{sen}\ 25° = 0{,}95\ \text{m}$$

La variación de cantidad de movimiento es:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = m \cdot v_2 - m \cdot v_1 = m \cdot a \cdot t_2 - m \cdot a \cdot t_1$$

$$\Delta p = m \cdot a \cdot (t_2 - t_1)$$

Así, para cada uno de los cuerpos será:

- $m = 5$ kg

$$\Delta p_a = 5\ \text{kg} \cdot 1{,}5\ \text{m/s}^2 \cdot (2\ \text{s} - 1\ \text{s}) = 7{,}5\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

- $m = 10$ kg

$$\Delta p_b = 10\ \text{kg} \cdot 1{,}5\ \text{m/s}^2 \cdot (2\ \text{s} - 1\ \text{s}) = 15\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

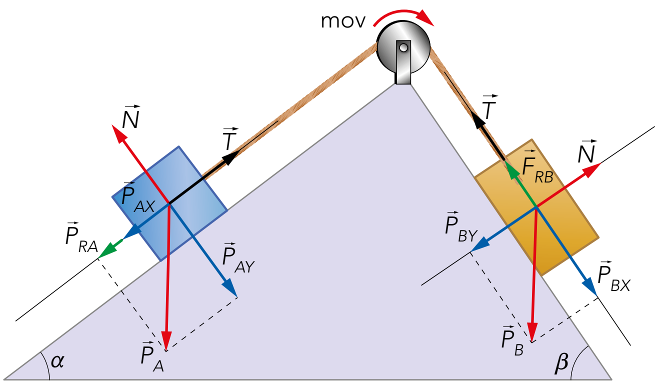
30 En el ejercicio resuelto 12, los numeradores de la expresión del tiempo total tienen un signo «–», en uno de los sumandos, incluso dentro de una raíz cuadrada. ¿Se trata de un error matemático? Razona tu respuesta.

No es un error matemático, ya que hay que tener en cuenta que la aceleración de subida tiene signo negativo. Por tanto, el primer término tendrá signo positivo, igual que en el segundo; al dividir entre la aceleración de subida, la raíz será positiva.

Página 259

31 Si en el ejercicio resuelto 14, m_A = 10 kg, m_B = 15 kg, α = 45°, β = 30° y μ = 0,3, calcula la aceleración y el sentido del movimiento. Si pulimos las superficies hasta hacer $\mu \approx 0$, ¿cuánto valdrá la aceleración?

En primer lugar, asignamos que el sentido del movimiento es horario. Su esquema de fuerzas es el siguiente:



Aplicando la segunda ley de Newton a cada cuerpo:

Cuerpo A: $\quad T - P_{XA} - F_{RA} = m_A \cdot a$

Cuerpo B: $\quad P_{XB} - F_{RB} - T = m_B \cdot a$

Si sumamos ambas ecuaciones obtenemos la aceleración:

$$P_{XB} - P_{XA} - F_{RA} - F_{RB} = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$P_{XB} - P_{XA} - \mu \cdot P_{YA} - \mu \cdot P_{YB} = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$P_B \cdot \text{sen}\,\beta - P_A \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu \cdot P_A \cdot \cos\alpha - \mu \cdot P_B \cdot \cos\alpha = (m_A + m_B) \cdot a$$

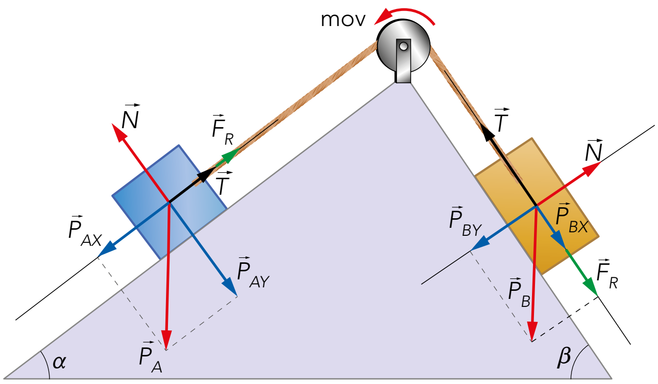
$$m_B \cdot g \cdot \text{sen}\,\beta - m_A \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu \cdot m_A \cdot g \cdot \cos\alpha - \mu \cdot m_B \cdot g \cdot \cos\alpha = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$a = \frac{15\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\,30° - 10\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\,45°}{10\,\text{kg} + 15\,\text{kg}} -$$

$$- \frac{0{,}3 \cdot 10\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 45° - 0{,}3 \cdot 5\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 30°}{10\,\text{kg} + 15\,\text{kg}}$$

$$a = -2{,}19\ \text{m/s}^2$$

Al ser la aceleración negativa, replanteamos el problema suponiendo que se mueve en sentido antihorario:



Si aplicamos la segunda ley de Newton:

Cuerpo *A*: $P_{XA} - F_{RA} - T = m_A \cdot a$

Cuerpo *B*: $T - P_{XB} - F_{RB} = m_B \cdot a$

Y sumando ambas ecuaciones, obtenemos la aceleración:

$$P_{XA} - F_{RA} - P_{XB} - F_{RB} = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$P_{XA} - \mu \cdot P_{YA} - P_{XB} - \mu \cdot P_{YB} = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$P_A \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu \cdot P_A \cdot \text{sen}\,\alpha - P_B \cdot \text{sen}\,\beta - \mu \cdot P_B \cdot \text{sen}\,\beta = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$m_A \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu \cdot m_A \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha - m_B \cdot g \cdot \text{sen}\,\beta - \mu \cdot m_B \cdot g \cdot \text{sen}\,\beta = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$a = \frac{10\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\,45° - 0{,}3 \cdot 10\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 45°}{10\,\text{kg} + 15\,\text{kg}} -$$

$$- \frac{15\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\,30° - 0{,}3 \cdot 15\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 30°}{10\,\text{kg} + 15\,\text{kg}} = -2{,}53\ \text{m/s}^2$$

Al ser la aceleración también negativa, diremos que el sistema está en reposo. Por tanto, $a = 0\ \text{m/s}^2$.

En el caso de que no exista rozamiento, vamos a suponer que el movimiento es en sentido horario, pues $m_B > m_A$. Aplicando la segunda ley de Newton a cada cuerpo:

Cuerpo *A*: $T - P_{AX} = m_A \cdot a$

Cuerpo *B*: $P_{BX} - T = m_B \cdot a$

Y sumando ambas ecuaciones, obtenemos la aceleración:

$$P_{BX} - P_{AX} = (m_A + m_B) \cdot a$$

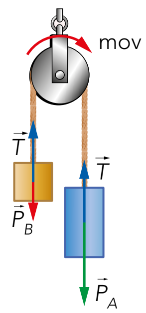
$$P_B \cdot \text{sen}\, \beta - P_A \cdot \text{sen}\, \alpha = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$m_B \cdot g \cdot \text{sen}\, \beta - m_A \cdot g \cdot \text{sen}\, \alpha = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$a = \frac{15\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\,30° - 10\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\,45°}{10\,\text{kg} + 15\,\text{kg}} = 0{,}17\ \text{m/s}^2$$

32 **Una cuerda pasa por una polea sin rozamiento. Si de un lado cuelga un cuerpo de 7 kg, y en el otro uno de 5 kg, calcula la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.**

El esquema de las fuerzas es:



Aplicando la segunda ley de Newton a los dos cuerpos, y sabiendo que el movimiento será en el sentido horario pues $m_A > m_B$:

Cuerpo *A*: $P_A - T = m_A \cdot a$

Cuerpo *B*: $T - P_B = m_B \cdot a$

Sumando ambas ecuaciones y despejando la aceleración, obtenemos su valor:

$$P_A - P_B = (m_A + m_B) \cdot a$$

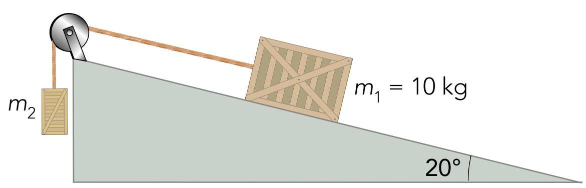
$$m_A \cdot g - m_B \cdot g = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$a = \frac{g \cdot (m_A - m_B)}{m_A + m_B} = \frac{9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot (7\,\text{kg} - 5\,\text{kg})}{7\,\text{kg} + 5\,\text{kg}} = 1{,}635\ \text{m/s}^2$$

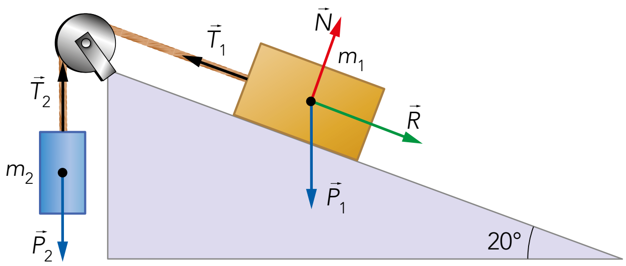
Con el valor de la aceleración, podemos calcular cuánto vale la tensión despejando en una de las dos ecuaciones (hemos elegido la de *A*):

$$T = m_A \cdot g - m_A \cdot a = 7\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 - 7\ \text{kg} \cdot 1{,}635\ \text{m/s}^2 = 57{,}24\ \text{N}$$

33 **¿Cuál debe ser la masa del bloque 2 para que el sistema esté en reposo si no existe rozamiento? ¿Y si el rozamiento estático es μ_e = 0,2?**



El diagrama de fuerzas es el siguiente:



a) Si no hay rozamiento, para que el sistema esté en reposo se debe cumplir que:

$$P_{1x} = P_2 \Rightarrow m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\,20 = m_2 \cdot g \Rightarrow m_2 = m_1 \cdot \text{sen}\,20 = 3{,}42\,\text{kg}$$

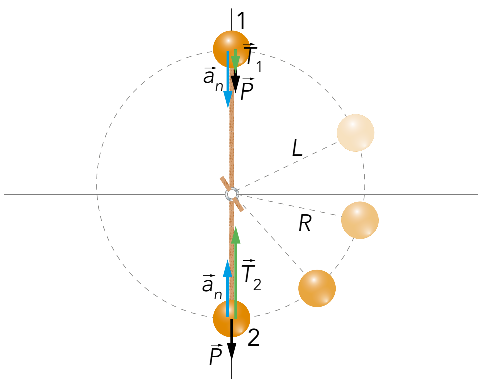
b) Si hay rozamiento:

$$P_{1x} - R = m_2 \cdot g \Rightarrow m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\,20 - \mu_e \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos 20 = m_2 \cdot g \Rightarrow$$

$$m_2 = m_1\,(\text{sen}\,20 - \mu_e \cdot \cos 20) = 1{,}54\,\text{kg}$$

34 Una cuerda (l = 80 cm) se rompe al colgar de ella un cuerpo de 15 kg. Calcula la velocidad máxima con que puede girar una piedra de 250 g sujeta a su extremo sin que se rompa, y la tensión de la cuerda en el punto más alto de la trayectoria.

En primer lugar, dibujamos el esquema de fuerzas que representa la situación dada por el enunciado:



En el punto más alto, el peso y la tensión tienen la misma dirección y sentido. En el punto más bajo, sus sentidos son contrarios. Si planteamos sus ecuaciones, obtenemos:

- Punto más alto: $m \cdot g + T_1 = m \cdot a_n = m \cdot \dfrac{v^2}{l}$
- Punto más bajo: $T_2 - m \cdot g = m \cdot a_n = m \cdot \dfrac{v^2}{l}$

La tensión máxima que soporta la cuerda es la del punto más bajo. Esta se corresponde cuando la tensión es igual al peso máximo que puede soportar justo antes de romperse; es decir:

$$T_2 = p_2 = m \cdot g = 15\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 = 147{,}15\text{ N}$$

Pero ahora tenemos que calcular la velocidad máxima para una masa de 250 g. Esta velocidad la alcanza en el punto de máxima tensión; el punto más bajo. Así, su valor será:

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{(T_{máx} - m \cdot g) \cdot l}{m}} = \sqrt{\frac{(147{,}15\,\text{N} - 0{,}25\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2) \cdot 0{,}8\,\text{m}}{0{,}25\,\text{kg}}}$$

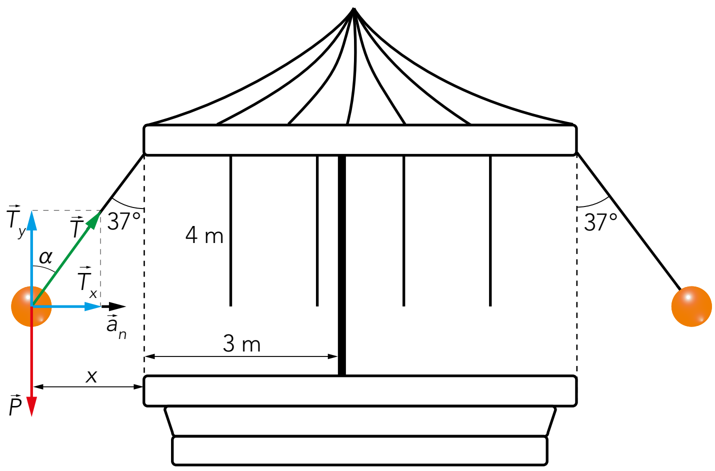
$$v_{máx} = 21{,}52\ \text{m/s}$$

Por tanto, la tensión en el punto más alto llevando esa velocidad será:

$$T_1 = m \cdot \frac{v^2}{l} - m \cdot g = 0{,}25\ \text{kg} \cdot \frac{(21{,}52\,\text{m/s})^2}{0{,}8\,\text{m}} - 0{,}25\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 142{,}27\ \text{N}$$

35 Un tiovivo consta de un aro horizontal de 3 m de radio del que cuelgan cuerdas de 4 m de longitud. Si en su extremo se sienta un hombre de 80 kg, ¿con qué velocidad angular girará el tiovivo para que la cuerda forme 37° con la vertical?

El movimiento del tiovivo es el de un péndulo cónico, cuyo esquema de fuerzas es:



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$T_x = m \cdot a_n \rightarrow T \cdot \text{sen}\ \alpha = m \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow T \cdot \text{sen}\ \alpha = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

Donde R es la suma de los 3 m del radio de base más x. Calculamos x por trigonometría:

$$\text{sen}\ 37° = \frac{x}{4} \rightarrow x = 4 \cdot \text{sen}\ 37° = 2{,}41\ \text{m}$$

Por tanto, diremos que:

$$R = 3\ \text{m} + 2{,}41\ \text{m} = 5{,}41\ \text{m}$$

Podemos calcular la tensión de la cuerda, asumiendo que el peso de la persona será igual a la componente Y de la tensión:

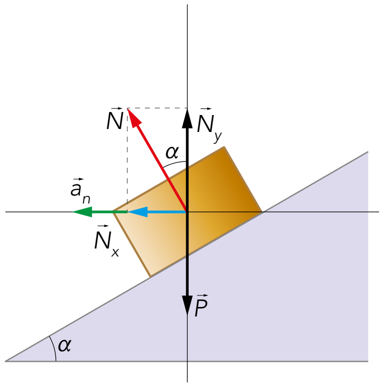
$$T_y = P \rightarrow T \cdot \text{sen}\ \alpha = m \cdot g \rightarrow T = \frac{m \cdot g}{\cos \alpha} = \frac{80\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{\cos 37°} = 982{,}68\ \text{N}$$

Por tanto, la velocidad angular del tiovivo es:

$$\omega = \sqrt{\frac{T \cdot \text{sen}\,\alpha}{m \cdot R}} = \sqrt{\frac{982{,}68\,\text{N}}{80\,\text{kg} \cdot 5{,}41\,\text{m}}} = 1{,}17\ \text{rad/s}$$

36 **Un vehículo circula sobre una curva peraltada de 60 m de radio. Suponiendo que no existe fuerza de rozamiento, ¿cuál debe ser el ángulo de peralte para que el vehículo pueda tomar la curva a 60 km/h sin derrapar? Manteniendo este ángulo, ¿con qué velocidad podría tomarla si el coeficiente de rozamiento fuese μ = 0,3?**

El esquema de fuerzas del movimiento es:



Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} = 16{,}67\ \text{m/s}$$

Aplicando la segunda ley de Newton en el eje X y en el eje Y:

$$N_x = m \cdot a_n \rightarrow N_x = m \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow N \cdot \text{sen}\ \alpha = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$N_y = P \rightarrow N \cdot \cos\alpha = P$$

Despejamos la normal de la ecuación anterior y sustituimos en la componente X:

$$N = \frac{P}{\cos\alpha} \rightarrow \frac{P \cdot \text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = m \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow m \cdot g \cdot \text{tg}\,\alpha = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Luego, el ángulo será:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{v^2}{R \cdot g} = \frac{(16{,}67\ \text{m/s})^2}{60\ \text{m} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} = 0{,}47 \rightarrow \alpha = 25{,}3°$$

Para obtener la velocidad teniendo en cuenta el rozamiento del coche, aplicamos la segunda ley de Newton en los dos ejes:

Eje X: $$F_{Rx} + N_x = m \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow F_R \cdot \cos\alpha + N \cdot \text{sen}\ \alpha = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Eje Y: $$N_y = F_{Ry} + P \rightarrow N \cdot \cos\alpha = \mu \cdot N \cdot \text{sen}\ \alpha + m \cdot g$$

De esta segunda expresión se despeja la normal y se sustituye en la primera:

$$N = \frac{m \cdot g}{\cos\alpha - \mu \cdot \text{sen}\,\alpha} \rightarrow \frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha + m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha - \mu \cdot \text{sen}\,\alpha} = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

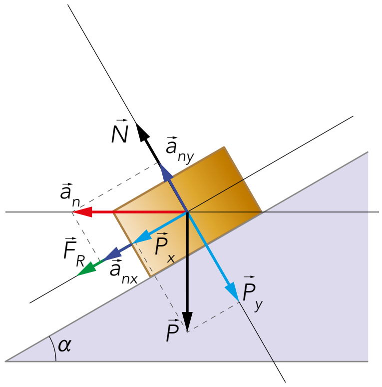
Así, ya despejamos la velocidad máxima:

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{R \cdot g \cdot (\mu \cdot \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha)}{\cos\alpha - \mu \cdot \text{sen}\,\alpha}} = \sqrt{\frac{60\ \text{m} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot (0{,}3 \cdot \cos 25{,}3° + \text{sen}\,25{,}3°)}{\cos 25{,}3° - 0{,}3 \cdot \text{sen}\,25{,}3°}}$$

$$v_{máx} = 23{,}02\ \text{m/s} = 82{,}8\ \text{km/h}$$

37 ¿Qué pasaría si en el **estudio de la curva peraltada se usa un sistema de referencia en el que el eje *X* sea paralelo al plano de peralte? ¿Se obtienen las mismas expresiones?**

Tomando como sistema de referencia el eje *X* paralelo al plano del peralte, el esquema de las fuerzas y la descomposición de la aceleración normal es:



En este caso, aplicamos la segunda ley de Newton a los dos ejes, ya que hay componente *x* e *y* de la aceleración normal:

Eje *X*: $F_R + P_x = m \cdot a_{nx}$; $\mu \cdot N + P \cdot \text{sen}\,\alpha = m \cdot a_n \cdot \cos\alpha$

$$\mu \cdot N + m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha = m \cdot a_n \cdot \cos\alpha$$

Eje *Y*: $N - P_y = m \cdot a_{ny}$; $N - P \cdot \cos\alpha = m \cdot a_n \cdot \text{sen}\,\alpha$

$$N - m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot a_n \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Despejamos la fuerza normal de la componente *y*, y sustituimos en *x*:

$$N = m \cdot a_n \cdot \text{sen}\,\alpha + m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$\mu \cdot m \cdot a_n \cdot \text{sen}\,\alpha + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha + m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha = m \cdot a_n \cdot \cos\alpha$$

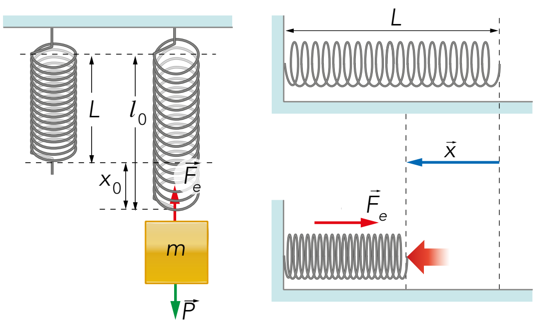
Despejando la aceleración normal, y teniendo en cuenta que $a_n = \dfrac{v^2}{R}$:

$$a_n = \frac{g \cdot (\text{sen}\,\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu \cdot \text{sen}\,\alpha} \qquad v = \sqrt{g \cdot R \cdot \frac{\text{sen}\,\alpha + \mu \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha - \mu \cdot \text{sen}\,\alpha}}$$

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de un documento que explica cómo aplicar la técnica de desarrollo del pensamiento «¿Qué pasaría si?», propuesta para resolver esta actividad.

38 Un muelle sujeto al techo se estira 5 cm cuando de él se cuelga una masa de 200 g. El sistema se coloca en una superficie horizontal sin rozamiento, con un extremo del muelle sujeto a una pared, y se empuja el cuerpo hasta que el muelle se comprime 10 cm. Calcula los parámetros del movimiento originado cuando el cuerpo se suelta del muelle que está sujeto al techo.

Las representaciones de las situaciones que nos proporciona el enunciado son:



La ecuación general del movimiento es:

$$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

De la situación de equilibrio que posee el muelle al estar en vertical, deducimos la constante de elasticidad:

$$P - F_e = 0 \rightarrow m \cdot g - k \cdot x_0 = 0$$

$$k = \frac{m \cdot g}{x_0} = \frac{0{,}2\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{0{,}05\,\text{m}} = 39{,}24\ \text{N/m}$$

Cuando el muelle se comprime se obtienen los otros parámetros del movimiento:

– La amplitud será 10 cm = 0,1 m, ya que el enunciado indica que es la máxima compresión.

– La frecuencia angular será:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\omega}} = \sqrt{\frac{39{,}24\,\text{N/m}}{0{,}2\,\text{kg}}} = 14\ \text{rad/s}$$

Calculamos el desfase sabiendo que a $t = 0$, la amplitud es máxima; es decir:

$$x_{(t\,=\,0)} = A \rightarrow \cos\phi_0 = 1 \rightarrow \phi_0 = \pi\ \text{rad}$$

39 **Un péndulo simple está formado por una masa de 200 g que cuelga de un hilo de 64 cm. Calcula el período y la frecuencia de las oscilaciones. ¿Cuál es el valor máximo de la fuerza que actúa sobre el cuerpo, si la amplitud de las oscilaciones es de 2 cm? Si al medir el período del péndulo obtenemos el valor 1,65 s, ¿cuánto vale *g* en ese lugar?**

La frecuencia angular del péndulo es:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{9{,}81\,\text{m/s}^2}{0{,}64\,\text{m}}} = 3{,}91\ \text{rad/s}$$

Con este dato, calculamos su período:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{3{,}91\,\text{rad/s}} = 1{,}6\ \text{s}$$

Y la frecuencia será el inverso del período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}6\,\text{s}} = 0{,}63\ \text{Hz}$$

La aceleración máxima del péndulo es:

$$a_{máx} = \omega^2 \cdot x = (3{,}91\ \text{rad/s})^2 \cdot 0{,}02\ \text{m} = 0{,}306\ \text{m/s}^2$$

Por tanto, la fuerza correspondiente a esta aceleración será:

$$F_{\text{máx}} = 0{,}2\ \text{kg} \cdot 0{,}306\ \text{m/s}^2 = 0{,}06\ \text{N}$$

Para $T = 1{,}65$ s, y sabiendo el valor de la longitud de la cuerda, podemos calcular g en este lugar:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot L}{T^2}$$

$$g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}64\,\text{m}}{(1{,}65\,\text{s})^2} = 9{,}28\ \text{m/s}^2$$

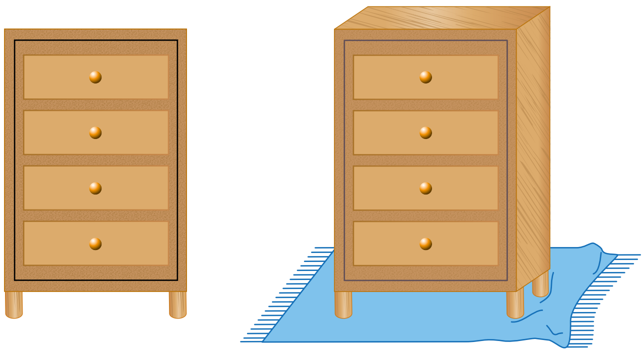
TRABAJA CON LO APRENDIDO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.1.2. (EA.1.2.1.-1.2.2.) CE.6.1. (EA.6.1.1.) CE.7.1. (EA.7.1.1.-7.1.2.) CE.7.2. (EA.7.2.1.-7.2.2.-7.2.3.) CE.7.3. (EA.7.3.1.-7.3.2.-7.3.3.) CE.7.4. (EA.7.4.1.-7.4.2.) CE.7.5. (EA.7.5.1.)

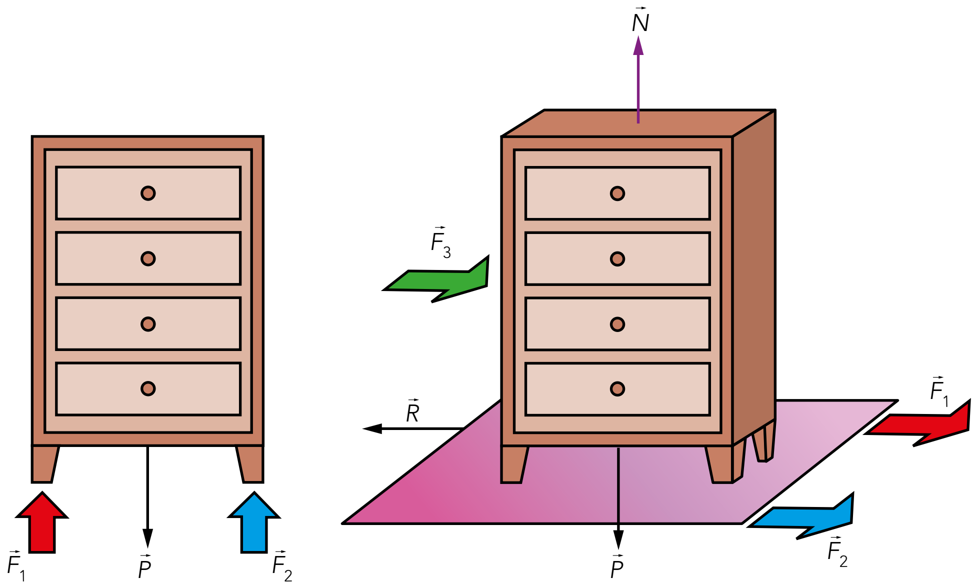
Página 266

Fuerzas e interacciones

1 **Deseas cambiar de sitio el armario de tu habitación con la ayuda de dos amigos. Primero, lo levantáis entre dos para ponerlo encima de una manta, y luego lo arrastráis: tus amigos tiran de la manta y tú empujas el armario. Indica las interacciones del armario cuando lo estáis levantando, y cuando lo arrastráis por el suelo.**



Para explicar las interacciones que existen, realizamos un esquema explicativo:



En el primer paso, las interacciones que se producen son:

– El peso del armario y su reacción, que actúa sobre la Tierra.

– La fuerza que ejercen las personas para levantarlo y su reacción (normal), que actúa sobre las personas en sentido contrario.

Cuando se coloca la manta bajo el armario y se arrastra sobre el suelo, las interacciones son:

– El peso del armario y su reacción, que actúa sobre la Tierra.

– La fuerza que ejerce el armario sobre la alfombra y su reacción (normal), que actúa sobre la alfombra en sentido contrario.

– La fuerza que yo ejerzo sobre el armario al empujarlo y su reacción, que actúa sobre mí en sentido contrario.

– La fuerza que ejerce la alfombra sobre cada pata y su reacción, que actúa sobre la alfombra en sentido contrario.

2 **Indica, justificando tu respuesta, la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:**

a) Para arrastrar una barca por un canal hacen falta dos caballerías, una en cada orilla.

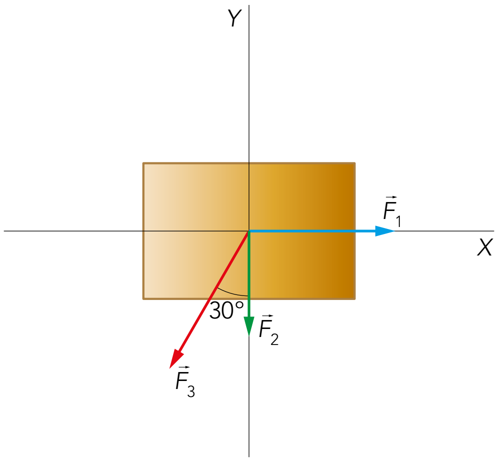
b) Dos fuerzas del mismo módulo y sentidos contrarios siempre producen equilibrio.

a) Verdadero, siempre y cuando las caballerías tiren de la barca con la misma fuerza. Así, la barca avanzará en línea recta y no se girará hacia ninguna de las orillas.

b) Falso, pues si sus puntos de aplicación no coinciden, pueden producir giro.

3 **Sobre un cuerpo actúan las siguientes fuerzas: $\vec{F}_1$, de 400 N, está dirigida hacia el este; $\vec{F}_2$, de 200 N, dirigida hacia el sur, y $\vec{F}_3$, de 400 N, dirigida hacia el suroeste formando un ángulo de 30° con la dirección sur. Dibuja el diagrama de fuerzas, y calcula el módulo, dirección y sentido de la resultante. ¿Cuál debería ser el módulo, dirección y sentido de una cuarta fuerza, $\vec{F}_4$, para que la resultante fuese nula?**

El esquema de las fuerzas en un eje de coordenadas, considerando dirección norte el eje *Y* positivo, y el este el eje *X* positivo, será:



Descomponemos la $\vec{F}_3$ en sus componentes:

$$\vec{F}_3 = F_3 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \vec{i} + F_3 \cdot \cos\alpha \cdot \vec{j} = -400 \cdot \text{sen}\,30° \cdot \vec{i} - 400 \cdot \cos 30° \cdot \vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = (-200 \cdot \vec{i} - 346{,}4 \cdot \vec{j}\,)\ \text{N}$$

Sumamos las fuerzas situadas en el eje *X* y en el eje *Y*:

$$\vec{F}_x = 400 \cdot \vec{i} - 200 \cdot \vec{i} = 200 \cdot \vec{i}\ \text{N}$$

$$\vec{F}_y = -200 \cdot \vec{j} - 346{,}4 \cdot \vec{j} = -546{,}4 \cdot \vec{j}\ \text{N}$$

Por tanto, el valor de la fuerza resultante es:

$$\vec{F} = (200 \cdot \vec{i} - 546{,}4 \cdot \vec{j}\,)\ \text{N}$$

Para que la resultante fuera nula, $\vec{F}_4$ debe ser del mismo módulo y dirección de $\vec{F}$, pero con sentido contrario. Esta será:

$$\vec{F}_4 = (-200 \cdot \vec{i} + 546{,}4 \cdot \vec{j}\,)\ \text{N}$$

Su módulo:

$$\left|\vec{F}_4\right| = \sqrt{200^2 + (-546{,}4)^2} = \sqrt{40\,000 + 298\,553} = 582\ \text{N}$$

Que formará un ángulo con el eje *X* tal que:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{546{,}4\ \text{N}}{-200\ \text{N}} = -2{,}732 \rightarrow \alpha = 110°$$

La dirección es noroeste, y forma 110° con el eje *X*.

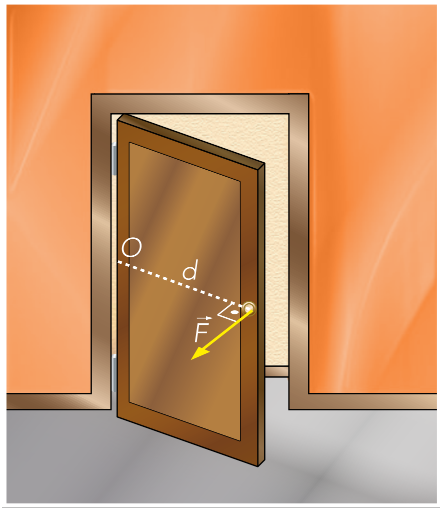
4 **Si estás sentado y tu peso es de 550 N, ¿qué objeto te aplica la fuerza necesaria para que no te hundas, y cuál es su valor? ¿En qué principio de la dinámica has basado tu respuesta?**

La silla en la que nos sentamos es la que aplica la fuerza necesaria para que no nos hundamos. La denominamos fuerza normal, y su valor es igual al del peso; es decir, $N = 550$ N.

Está basado en la tercera ley de Newton, que afirma que para toda acción hay siempre una reacción en sentido opuesto pero igual en módulo y dirección.

5 **La fuerza resultante para abrir una puerta tirando del pomo es la centésima parte de su peso. Si la masa de la puerta es de 10 kg, y la distancia del pomo al eje de giro es de 1 m, calcula la fuerza necesaria para abrirla si se aplica a 50 cm del eje**.

Teniendo en cuenta el esquema del movimiento:



La fuerza que se ejerce tirando del pomo es la siguiente:

$$F = \frac{P}{100} = \frac{m \cdot g}{100} = \frac{10\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s}}{100} = 0{,}98\,\text{N}$$

Para abrirla tirando desde una distancia de 50 cm, la mitad que desde el pomo, si se quiere ejercer el mismo momento, se deberá aplicar doble de fuerza:

$$M = r \cdot F = r' \cdot F' \rightarrow 1\text{m} \cdot 0{,}98\,\text{N} = 0{,}5\,\text{m} \cdot F' \rightarrow F' = \frac{0{,}98}{0{,}5} = 1{,}96\,\text{N}$$

Leyes de Newton

6 **¿Cómo podría comprobar un astronauta, sin instrumentos de medida, si su cápsula espacial está moviéndose o no con celeridad constante?**

Un astronauta que orbita alrededor de la Tierra lo hace con un movimiento circular uniforme, por lo que no experimenta aceleración tangencial. Si su velocidad no es constante, experimentará esta aceleración notando, respecto de la nave, un movimiento hacia delante si la velocidad disminuye o hacia atrás si aumenta, según el principio de inercia.

7 **Indica si los siguientes sistemas de referencia son inerciales o no, considerando que el de un observador situado en la orilla es inercial:**

a) **Un observador situado en la orilla opuesta.**

b) **Un observador arrastrado por el río con velocidad constante.**

c) **Un observador situado en una lancha motora en el momento de arrancar.**

d) **Un observador que se ha lanzado al río desde un helicóptero.**

a) Será un sistema de referencia inercial, pues el observador está inmóvil respecto al primero.

b) Al ser su velocidad constante respecto al primero, es decir un movimiento rectilíneo uniforme, el observador será un sistema de referencia inercial.

c) Un observador situado en una lancha motora al arrancar presenta aceleración. Por tanto, no será un sistema de referencia inercial.

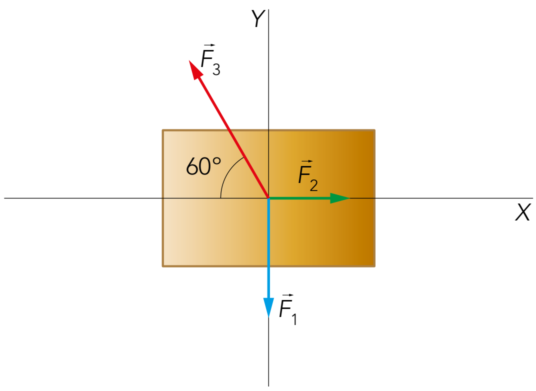
d) Al lanzarse al río, el observador cae con la aceleración de la gravedad, por lo que no será un sistema de referencia inercial.

8 Sobre un cuerpo situado en el origen de coordenadas actúan las siguientes fuerzas: $\vec{F}_1$, de 43,3 N, dirigida verticalmente hacia abajo; $\vec{F}_2$, de 25 N, dirigida horizontalmente hacia la derecha, y $\vec{F}_3$, de 50 N, dirigida hacia arriba y hacia atrás formando 60° con la horizontal. Calcula la posición del cuerpo a los 5 s si inicialmente:

a) Estaba en reposo.

b) Se estaba moviendo horizontalmente hacia la derecha a 2 m/s.

El siguiente esquema describe las fuerzas que actúan sobre el cuerpo:



Las fuerzas que actúan en cada uno de los ejes son:

$$\vec{F}_x = (F_2 - F_3 \cdot \cos 60°) \cdot \vec{i} = (25 - 50 \cdot \cos 60°) \cdot \vec{i} = (25 - 25) \cdot \vec{i} \text{ N} = 0 \cdot \vec{i} \text{ N}$$

$$\vec{F}_y = (F_1 - F_3 \cdot \text{sen}\, 60°) \cdot \vec{j} = (43{,}3 - 43{,}3 \cdot \text{sen}\, 60°) \cdot \vec{j} = (43{,}3 - 43{,}3) \cdot \vec{j} \text{ N} = 0 \cdot \vec{j} \text{ N}$$

La fuerza resultante es, por tanto, nula. Así:

a) Si el cuerpo está en reposo, continúa en reposo y su posición es $\vec{x}_1 = 0$.

b) El cuerpo continúa moviéndose con un MRU. Por tanto, el espacio recorrido es:

$$x = v \cdot t = 2 \text{ m/s} \cdot 5 \text{ s} = 10 \text{ m}$$

Al desplazarse a lo largo del eje X, su posición a los cinco segundos será:

$$\vec{x}_2 = 10 \cdot \vec{i} \text{ m}$$

9 **Cuando un objeto se mueve en el seno de un fluido (por ejemplo, un cuerpo que cae en la atmósfera) la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad. Sin embargo, la segunda ley de Newton indica que la fuerza es proporcional a la aceleración. ¿Supone esto una contradicción?**

No supone una contradicción. Cuando un cuerpo cae en el seno de un fluido, la fuerza resultante será, aplicando la segunda ley de Newton:

$$\left.\begin{array}{l} F_R = b \cdot v \\ P = m \cdot g \end{array}\right\} \begin{array}{l} P - F_R = m \cdot a \\ m \cdot g - b \cdot v = m \cdot a \end{array}$$

Por tanto, vemos que la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad de caída, y que, a su vez, la fuerza neta es proporcional a la aceleración.

10 **Siendo la fuerza la misma, ¿produce el mismo efecto al actuar durante 1 s sobre un cuerpo de 10 kg que al actuar 10 s sobre un cuerpo de 1 kg?**

Si aplicamos el teorema del impulso mecánico en las dos situaciones obtenemos los siguientes resultados:

- Para $\Delta t = 1$ s y $m = 10$ kg:

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \rightarrow \Delta v = \frac{F \cdot \Delta t}{m} = \frac{F}{10}$$

- Para $\Delta t = 10$ s y $m = 1$ kg:

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \rightarrow \Delta v = \frac{F \cdot \Delta t}{m} = 10 \cdot F$$

Por tanto, los efectos son diferentes:

– En el primer caso se produce un aumento de velocidad de la décima parte del valor de la fuerza aplicada (en unidades del SI).

– En el segundo se produce un incremento de diez veces el valor de dicha fuerza (también en unidades del SI).

11 **Calcula la fuerza que tiene que hacer el cable de un ascensor de 500 kg en cada uno de los casos siguientes:**

a) Para que suba con una aceleración de 2 m/s².

b) Para que suba a velocidad constante de 2 m/s.

c) Para que frene, mientras sube, con *a* = 3 m/s².

a) La fuerza que tiene que hacer el cable vendrá dada por la segunda ley de Newton:

$$F - P = m \cdot a$$

$$F = m \cdot a + m \cdot g = 500 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m/s}^2 + 500 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 5\,905 \text{ N}$$

b) Al subir con velocidad constante, el sumatorio de las fuerzas debe ser 0. Según la primera ley de Newton, la fuerza será:

$$F - P = m \cdot a = 0$$

$$F = P = 500\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 4\,905\ \text{N}$$

c) La fuerza de frenado la obtenemos a partir de la segunda ley de Newton:

$$F - P = m \cdot a$$

$$F = m \cdot a + m \cdot g = 500\ \text{kg} \cdot (-3\ \text{m/s}^2) + 500\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 3\,405\ \text{N}$$

Página 267

12 **En un plano inclinado, la mitad superior carece de rozamiento, mientras que la inferior lo tiene muy elevado. Si por él se deja resbalar un cuerpo, representa su velocidad en función del camino recorrido.**

En un MRUA, la velocidad tiene la siguiente ecuación:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s$$

Donde la pendiente de la recta es $2 \cdot a$. Teniendo en cuenta que en el primer tramo no hay rozamiento y en el segundo sí, podemos decir que:

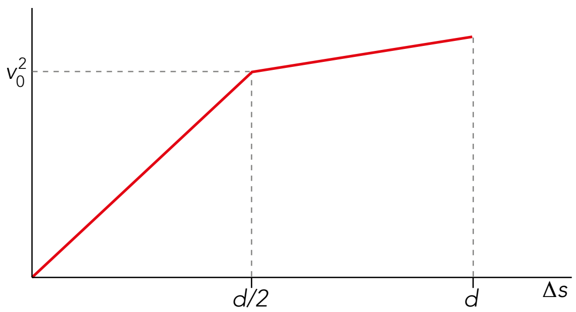
- Tramo sin rozamiento, $\mu = 0$:

$$v_0 = 0 \rightarrow v^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta s$$

- Tramo con rozamiento, $\mu \neq 0$:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a' \cdot \Delta s$$

Como $a > a'$, la pendiente del primer tramo es mayor que la del segundo. Así, la gráfica que lo representa es:



13 **Un cuerpo de 30 kg recorre una circunferencia de 50 m de radio con rapidez constante de 20 m/s. Calcula la aceleración del cuerpo y la fuerza que actúa sobre él.**

Conocida la velocidad del cuerpo, su aceleración normal es:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} = \frac{(20\ \text{m/s})^2}{50\ \text{m}} \cdot \vec{n} = 8 \cdot \vec{n}\ \text{m/s}^2$$

Por tanto, la fuerza que actúa sobre el cuerpo es la fuerza centrípeta:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_n = 30\ \text{kg} \cdot 8 \cdot \vec{n}\ \text{m/s}^2 = 240 \cdot \vec{n}\ \text{N}$$

14 **Siendo así que a toda acción se opone una reacción, ¿cómo se explica que podamos mover un cuerpo empujándolo si ambas fuerzas se anulan entre sí y, por tanto, deben producir reposo?**

Aunque las fuerzas actúan de manera simultánea, cada una actúa sobre uno de los cuerpos que interaccionan. Por tanto, las que actúan sobre uno de los cuerpos no se anulan entre sí.

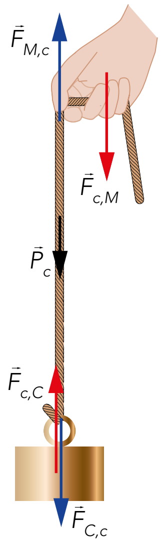
15 **Mantienes suspendido en el aire un cuerpo pesado mediante una cuerda que sujetas con tu mano. Indica:**

a) Las interacciones de la cuerda.

b) Las fuerzas que actúan sobre la cuerda.

c) Sobre qué cuerpo actúa la reacción correspondiente a cada una de ellas.

El esquema de fuerzas de esta situación es el siguiente:



La cuerda interacciona con la Tierra (a distancia), con la mano y con el bloque suspendido de ella.

Las fuerzas que actúan sobre la cuerda son:

– La fuerza cuerda-mano que es la reacción a la fuerza que la mano hace sobre la cuerda.

– La fuerza cuerda-cuerpo, que es la reacción al peso del cuerpo suspendido de esta.

– La fuerza peso de la cuerda, reacción de la fuerza de atracción de la Tierra, se puede considerar la masa de la cuerda despreciable, y no considerar esta fuerza.

Momento lineal e impulso mecánico

16 **Indica en cuáles de los siguientes movimientos permanece constante el momento lineal:**

a) Movimiento rectilíneo uniforme.

b) Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

c) Movimiento circular uniforme.

Sabiendo que el momento lineal tiene relación con la masa y la velocidad de esta forma:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

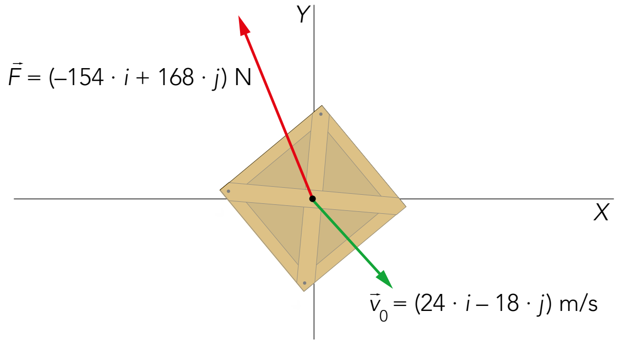
Al ser una magnitud vectorial, al igual que la velocidad, diremos que:

a) En un MRU, la velocidad del cuerpo permanece constante en módulo, dirección y sentido. Por tanto, el momento lineal lo es también en módulo, dirección y sentido.

b) En un MRUA, la dirección de la velocidad permanece constante, variando su módulo. Por tanto, el momento lineal, $\vec{p}$, no es constante.

c) En un MCU el vector velocidad cambia su dirección, pero el módulo es constante. Por tanto, la cantidad de movimiento será constante en módulo, cambiando la dirección. Así, $\vec{p}$ no es constante.

17 **Sobre un cuerpo de 70 kg, que se mueve con velocidad $\vec{v}_0 = (24 \cdot \vec{i} - 18 \cdot \vec{j})$ m/s, actúa la fuerza $\vec{F} = (-154 \cdot \vec{i} + 168 \cdot \vec{j})$ N durante 20 s. Calcula el momento lineal inicial, el impulso mecánico de la fuerza, el momento lineal final y la velocidad final del cuerpo.**



El momento lineal inicial es:

$$\vec{p}_0 = m \cdot \vec{v}_0 = 70 \text{ kg} \cdot (24 \cdot \vec{i} - 18 \cdot \vec{j}) \text{ m/s} = (1680 \cdot \vec{i} - 1260 \cdot \vec{j}) \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

El impulso mecánico de la fuerza es igual al producto de la fuerza por el tiempo que actúa; por tanto:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot t = (-154 \cdot \vec{i} + 168 \cdot \vec{j}) \text{ N} \cdot 20 \text{ s} = (-3\,080 \cdot \vec{i} + 3\,360 \cdot \vec{j}) \text{ N} \cdot \text{s}$$

Teniendo en cuenta el teorema del impulso mecánico, tenemos:

$$\vec{F} \cdot t = \Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0$$

Luego:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{F} \cdot t = (1680 \cdot \vec{i} - 1260 \cdot \vec{j}) + (-3\,080 \cdot \vec{i} + 3\,360 \cdot \vec{j})$$

$$\vec{p} = (-1400 \cdot \vec{i} + 2\,100 \cdot \vec{j}) \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Por tanto, aplicando de nuevo la ecuación matemática del momento lineal, la velocidad final será:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \rightarrow [-1400 \cdot \vec{i} + 2\,100 \cdot \vec{j}] = 70 \text{ kg} \cdot \vec{v} \rightarrow \vec{v} = (-20 \cdot \vec{i} + 30 \cdot \vec{j}) \text{ m/s}$$

18 **Sobre un cuerpo de 40 kg que está inicialmente en reposo actúan, durante 2 minutos, las siguientes fuerzas: $\vec{F}_1 = (150 \cdot \vec{i} + 200 \cdot \vec{j})$ N; $\vec{F}_2 = -392 \cdot \vec{j}$ N; $\vec{F}_3 = (-142 \cdot \vec{i} + 192 \cdot \vec{j})$ N. Calcula la fuerza resultante y su impulso mecánico, el momento lineal final y la velocidad del cuerpo a los 2 minutos.**

La fuerza resultante será la suma de todas las fuerzas:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (150 - 142) \cdot \vec{i} + (200 - 392 + 192) \cdot \vec{j} = 8 \cdot \vec{i} \text{ N}$$

El impulso mecánico será:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = 8 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot 120 \text{ s} = 960 \cdot \vec{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

La velocidad del cuerpo a los dos minutos es:

$$\vec{I} = m \cdot (\vec{v}_f - \vec{v}_0)$$

$$\vec{v}_f = \frac{\vec{I}}{m} = \frac{960 \cdot \vec{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{40 \text{ kg}} = 24 \cdot \vec{i} \text{ m/s}$$

Sabiendo que $\vec{I} = \Delta\vec{p}$ matemáticamente, podemos hallar el valor del momento lineal final:

$$\Delta\vec{p} = m \cdot \vec{v}_f = 40 \text{ kg} \cdot 24 \cdot \vec{i} \text{ m/s} = 960 \cdot \vec{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

19 **Para hacer un saque, una tenista lanza verticalmente hacia arriba la pelota y, cuando se encuentra a 2 m del suelo y desciende a 2 m/s, la golpea de forma que sale despedida horizontalmente a 25 m/s. Si la masa de la pelota es de 60 g y está en contacto con la raqueta 0,02 s, calcula:**

a) El momento lineal de la pelota antes y después de ser golpeada.

b) La fuerza, supuesta constante, que ejerce la raqueta sobre la pelota.

c) La distancia horizontal a la que cae la pelota, respecto de la posición de saque.

Tomaremos el eje *X* horizontal con su sentido positivo en la dirección del movimiento, y el eje *Y* vertical con el sentido positivo hacia arriba.

a) El momento lineal de la pelota antes de ser golpeada vale:

$$\vec{p}_0 = m \cdot \vec{v}_0 = 0{,}06 \cdot (-2 \cdot \vec{j}\,) = -0{,}12 \cdot \vec{j} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

El momento lineal de la pelota después de ser golpeada vale:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = 0{,}06 \cdot (25 \cdot \vec{i}\,) = 1{,}5 \cdot \vec{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

b) Aplicando el teorema de la cantidad de movimiento, podemos calcular la fuerza que ejerce la raqueta sobre la pelota:

$$\vec{F} \cdot t = \Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0$$

$$\vec{F} \cdot 0{,}02 \text{ s} = (1{,}5 \cdot \vec{i}\,) - (-0{,}12 \cdot \vec{j}\,) = 1{,}5 \cdot \vec{i} + 0{,}12 \cdot \vec{j}$$

Despejando:

$$\vec{F} = \frac{1{,}5}{0{,}02} \cdot \vec{i} + \frac{0{,}12}{0{,}02} \cdot \vec{j} = (75 \cdot \vec{i} + 6 \cdot \vec{j}\,) \text{ N}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{75^2 + 6^2} = \sqrt{5\,661} = 75{,}23 \text{ N}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{6}{75} = 0{,}08 \rightarrow \alpha = 4{,}5°$$

Por tanto, la raqueta ejerce una fuerza de 75,23 N formando un ángulo de 4,5° con la horizontal hacia arriba.

c) La pelota, una vez que abandona la raqueta, describe un movimiento parabólico correspondiente a un tiro horizontal desde una altura de 2 m y con una velocidad inicial de 25 m/s; luego, las ecuaciones de su movimiento son:

$$x = v_0 \cdot t = 25 \cdot t$$

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 2 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

Cuando llega al suelo, $y = 0$; luego:

$$0 = 2 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{2} \cdot 9{,}81}} = 0{,}638 \text{ s}$$

$$x = 25 \text{ m/s} \cdot 0{,}638 \text{ s} = 15{,}96 \text{ m}$$

Por tanto, la pelota cae a una distancia de 15,96 m del punto de saque.

20 **Un jugador de golf golpea una pelota de 20 g que está en reposo en el suelo, saliendo esta despedida con una elevación de 45°. Si la pelota cae a 125 m del lugar de lanzamiento, calcula:**

a) El módulo y las componentes de la velocidad de la pelota después de ser golpeada.

b) La fuerza que ejerce el palo sobre la pelota si están en contacto 0,01 s.

a) Las pelota realiza un tiro oblicuo con una elevación de 45°, por lo que las ecuaciones de su movimiento son:

$$x = v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot \cos 45° \cdot t$$

$$y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot \text{sen}\, 45° \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2$$

Cuando la pelota llega al suelo, sabiendo que sen 45° = cos 45°; x = 125 m e y = 0; luego:

$$\left.\begin{array}{l} 125 = v_0 \cdot \cos 45° \cdot t \\ 0 = v_0 \cdot \text{sen}\, 45° \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2 \end{array}\right\} \rightarrow 125 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2 = 0 \rightarrow t = \sqrt{\frac{125}{\frac{1}{2} \cdot 9{,}81}} = 5{,}05 \text{ s}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$125 = v_0 \cdot \cos 45° \cdot 5{,}05 \rightarrow v_0 = \frac{125}{\cos 45° \cdot 5{,}05} = 35 \text{ m/s}$$

La velocidad inicial de la pelota en su movimiento parabólico, después de ser golpeada, es, por tanto:

$$\vec{v} = (v_{0x} \cdot \vec{i} + v_{0y} \cdot \vec{j}) = (35 \cdot \cos 45° \cdot \vec{i} + 35 \cdot \cos 45° \cdot \vec{j})$$

$$\vec{v} = 24{,}75 \cdot (\vec{i} + \vec{j}) \text{ m/s}$$

b) La velocidad que acabamos de calcular es la de la pelota después de ser golpeada. Como antes de ser golpeada estaba en reposo, $\vec{p}_0 = 0$, teniendo en cuenta el teorema del impulso mecánico, resulta:

$$\vec{F} \cdot t = \vec{p} = m \cdot \vec{v} \rightarrow \vec{F} = \frac{\vec{p}}{t} = \frac{m \cdot \vec{v}}{t} = \frac{0{,}02 \text{ kg} \cdot (24{,}75 \cdot \vec{i} + 24{,}75 \cdot \vec{j}) \text{ m/s}}{0{,}01 \text{ s}}$$

$$\vec{F} = (49{,}5 \cdot \vec{i} + 49{,}5 \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

21 Un cohete de 3 kg, que asciende verticalmente a 10 m/s, explota cuando se encuentra a 20 m de altura, fragmentándose en dos trozos. Si uno de ellos, de 2 kg, sale horizontalmente hacia la derecha a 15 m/s, ¿dónde cae el otro?

Como el sistema está libre de fuerzas externas, podemos afirmar que la cantidad de movimiento total permanece constante. Por tanto, la velocidad del segundo trozo es:

$$\Delta p_0 = \Delta p_F$$

$$m_0 \cdot \vec{v}_0 = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2 = \frac{m_0 \cdot \vec{v}_0 - m_1 \cdot \vec{v}_1}{m_2} = \frac{3 \text{ kg} \cdot 10 \cdot \vec{j} - 2 \text{ kg} \cdot 15 \cdot \vec{i}}{1 \text{ kg}} = 30 \cdot (\vec{j} - \vec{i}) \text{ m/s}$$

El movimiento está compuesto por dos componentes, una en el eje X y otra en el eje Y:

Eje X:

$$x = v_x \cdot t$$

$$v_x = v_{0x} = \text{cte}$$

Eje Y:

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t$$

Cuando el segundo trozo cae al suelo, y = 0. Luego, podemos calcular el tiempo que tarda en caer al suelo y, después, la distancia que ha alcanzado:

$$y = 0 = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 20 + 30 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2$$

$$t = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}81}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}81} \rightarrow \begin{array}{l} t_1 = 6{,}73 \text{ s} \\ t_2 = -0{,}607 \text{ s} \end{array}$$

De donde desechamos el valor negativo del tiempo, pues no es posible físicamente. Así, la distancia recorrida por el segundo trozo será:

$$x = v_x \cdot t = -30\ \text{m/s} \cdot 6{,}73\ \text{s} = -201{,}9\ \text{m}$$

El signo negativo nos indica que este trozo cae hacia la izquierda de la vertical del punto de explosión.

Estudio dinámico de situaciones cotidianas

22 Una persona de 80 kg cuelga de una cuerda atada a un helicóptero que asciende verticalmente con $a = 5$ m/s². ¿Qué tensión soporta la cuerda? Si la cuerda se rompe cuando de ella se cuelgan 1200 N, ¿con qué aceleración máxima podrá subir el helicóptero para que la persona no caiga?

Según la segunda ley de Newton, la tensión que soporta la cuerda es:

$$T - P = m \cdot a$$

$$T = m \cdot a + m \cdot g = 80\ \text{kg} \cdot 5\ \text{m/s}^2 + 80\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 1\,184{,}8\ \text{N}$$

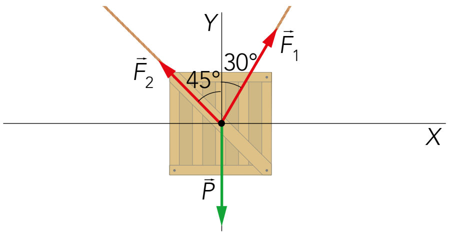
La aceleración máxima corresponderá a cuando la cuerda soporta su tensión máxima. Por tanto, su valor sería:

$$a = \frac{T_{máx} - P}{m} = \frac{1200\ \text{N} - 80\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{80\ \text{kg}} = 5{,}19\ \text{m/s}^2$$

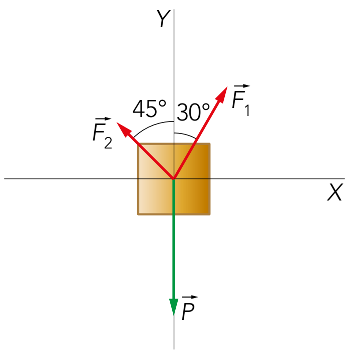
23 Para elevar verticalmente un cuerpo utilizamos dos cuerdas: una forma 30° con la vertical y tira hacia la derecha, y la otra tira hacia la izquierda formando 45° con la vertical. Si el peso del cuerpo es de 1 000 N, calcula la fuerza de cada una de las cuerdas para que el cuerpo:

a) Suba con velocidad constante.

b) Baje con velocidad constante.



Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son:



Si el cuerpo se mueve con velocidad constante, tanto si sube como si baja, la suma de las fuerzas que actúan sobre él ha de ser nula; luego:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P} = 0$$

Las componentes de cada fuerza son:

$$\vec{F}_1 = (F_1 \cdot \text{sen}\,30° \cdot \vec{i} + F_1 \cdot \cos 30° \cdot \vec{j}) = (F_1 \cdot 0{,}5 \cdot \vec{i} + F_1 \cdot 0{,}87 \cdot \vec{j})$$

$$\vec{F}_2 = (-F_2 \cdot \text{sen}\,45° \cdot \vec{i} + F_2 \cdot \cos 45° \cdot \vec{j}) = (-F_2 \cdot 0{,}71 \cdot \vec{i} + F_2 \cdot 0{,}71 \cdot \vec{j})$$

$$\vec{P} = -1\,000 \cdot \vec{j}\ \text{N}$$

Por tanto, en cada uno de los ejes, la fuerza es:

Eje *X*: $F_x = F_1 \cdot 0{,}5 - F_2 \cdot 0{,}71 = 0 \rightarrow F_1 \cdot 0{,}5 = F_2 \cdot 0{,}71 \rightarrow F_1 = 1{,}42 \cdot F_2$

Eje *Y*: $F_y = F_1 \cdot 0{,}87 + F_2 \cdot 0{,}71 - 1\,000 = 0 \rightarrow F_1 \cdot 0{,}87 + F_2 \cdot 0{,}71 = 1\,000$

Sustituyendo F_1, obtenemos:

$$F_1 \cdot 0{,}87 + F_2 \cdot 0{,}71 = 1\,000 \rightarrow F_2 \cdot 1{,}42 \cdot 0{,}87 + F_2 \cdot 0{,}71 = 1\,000$$

$$F_2 \cdot 1{,}94 = 1\,000 \rightarrow F_2 = 514{,}03 \text{ N}$$

Y, por tanto:

$$F_1 = 1{,}42 \cdot F_2 = 1{,}42 \cdot 514{,}03 = 729{,}9 \text{ N} \approx 730 \text{ N}$$

Página 268

24 **Sobre un cuerpo de 2 kg, inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal, se aplica durante 4 s una fuerza de 15 N paralela a la superficie. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la superficie es de 0,5, calcula:**

a) La aceleración del cuerpo a los 3 s y a los 5 s.

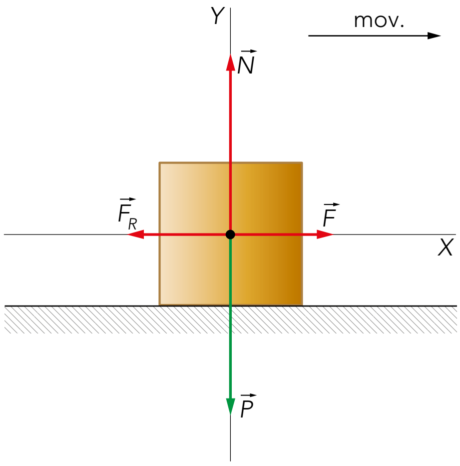
b) Su velocidad a los 4 s.

c) El tiempo que tarda en pararse, desde el instante inicial.

d) El espacio total recorrido.

a) Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso, la normal, la fuerza de rozamiento y la fuerza aplicada; luego:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$



Tomando el semieje *X* positivo en el sentido del movimiento, tenemos, para los ejes *X* e *Y*:

Eje *X*: $F - F_R = m \cdot a \rightarrow F - \mu \cdot N = m \cdot a$

Eje *Y*: $N - P = 0 \rightarrow N = m \cdot g$

$$F - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \rightarrow 15 \text{ N} - 0{,}5 \cdot 2 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 2 \cdot a \rightarrow a = 2{,}6 \text{ m/s}^2$$

Luego, esta es la aceleración del cuerpo en cualquier instante mientras actúa la fuerza *F*, y es positiva (hacia la derecha). Cuando deja de actuar la fuerza $\vec{F}$, la fuerza resultante es:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R = m \cdot \vec{a}$$

Descomponiendo la expresión anterior en los ejes *X* e *Y*, se obtiene:

Eje *X*: $-F_R = m \cdot a' \rightarrow -\mu \cdot N = m \cdot a'$

Eje *Y*: $N - P = 0 \rightarrow N = m \cdot g$

$$-\mu \cdot m \cdot g = m \cdot a' \rightarrow -0{,}5 \cdot 2 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 2 \cdot a' \rightarrow a' = -4{,}9 \text{ m/s}^2$$

Esta es la aceleración de frenado del cuerpo desde que deja de actuar la fuerza *F* hasta que este se detiene.

b) La velocidad del cuerpo a los 4 s, en el instante en que deja de actuar $\vec{F}$, vale:

$$v = a \cdot t = 2{,}6 \text{ m/s}^2 \cdot 4 \text{ s} = 10{,}4 \text{ m/s}$$

c) Cuando deja de actuar la fuerza $\vec{F}$, el cuerpo disminuye su velocidad y se para en un tiempo:

$$v = v_0 + a' \cdot t \rightarrow 0 = 10{,}4 \text{ m/s} - 4{,}9 \text{ m/s}^2 \cdot t_1 \rightarrow t_1 = 2{,}1 \text{ s}$$

Luego, el cuerpo tarda en pararse:

$$t_{detención} = 4 \text{ s} + 2{,}1 \text{ s} = 6{,}1 \text{ s}$$

d) El espacio recorrido por el cuerpo cuando actúa la fuerza $\vec{F}$ vale:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}6 \text{ m/s}^2 \cdot (4 \text{ s})^2 = 20{,}8 \text{ m}$$

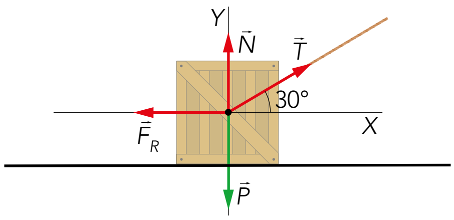
El espacio recorrido cuando deja de actuar la fuerza $\vec{F}$ vale:

$$x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a' \cdot t^2 = 10{,}4 \text{ m/s} \cdot 2{,}1 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 4{,}9 \text{ m/s}^2 \cdot (2{,}1 \text{ s})^2 = 11{,}0 \text{ m}$$

Luego, el espacio total recorrido vale:

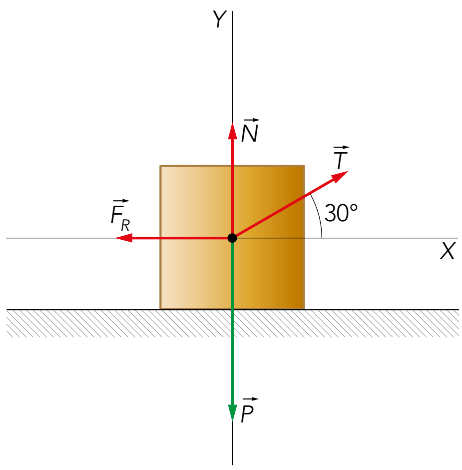
$$x = 20{,}8 \text{ m} + 11{,}0 \text{ m} = 31{,}8 \text{ m}$$

25 Atamos una cuerda a una caja de 40 kg que está apoyada en una superficie horizontal y tiramos de la cuerda hacia arriba formando 30° con la horizontal. La tensión de la cuerda justo antes de empezar a moverse la caja vale 116 N. Determina el coeficiente de rozamiento entre la caja y la superficie de apoyo.



Las fuerzas que actúan sobre la caja son el peso, la normal, la fuerza de rozamiento y la tensión de la cuerda; además, como la caja está a punto de moverse, la fuerza de rozamiento alcanza su máximo valor: $F_R = \mu \cdot N$, pero el cuerpo no se mueve; luego:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R + \vec{T} = 0$$



Por tanto, tenemos, para los ejes X e Y:

Eje X: $\quad T_x - F_R = 0 \rightarrow T \cdot \cos\alpha - \mu \cdot N = 0$

Eje Y: $\quad N + T_y - P = 0 \rightarrow N = m \cdot g - T \cdot \text{sen}\,\alpha$

$$T \cdot \cos\alpha - \mu \cdot (m \cdot g - T \cdot \text{sen}\,\alpha) = 0$$

Luego, la fuerza normal vale:

$$N = m \cdot g - T \cdot \text{sen}\,\alpha = 40\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 - 116\ \text{N} \cdot 0{,}5 = 334{,}4\ \text{N}$$

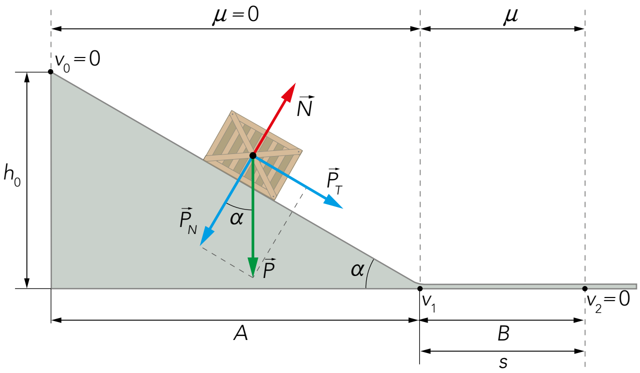
Ya la fuerza de rozamiento:

$$F_R = T \cdot \cos\alpha = 116\ \text{N} \cdot 0{,}866 = 100{,}46\ \text{N}$$

Por tanto, el coeficiente de rozamiento será:

$$\mu = \frac{F_R}{N} = \frac{100{,}46\ \text{N}}{334{,}4\ \text{N}} = 0{,}3$$

26 **Desde una altura h_0 se suelta un cuerpo de masa m que baja deslizando, sin rozamiento, por un plano inclinado un ángulo α respecto a la horizontal, y continúa sobre una superficie horizontal de coeficiente de rozamiento μ. Calcula, en función de este coeficiente, el espacio que recorrerá sobre la superficie horizontal antes de detenerse.**



Vamos a dividir el proceso en dos etapas distintas:

– En la primera, A, tenemos un MRUA en el que el cuerpo se desliza por un plano inclinado sin rozamiento, hasta llegar al suelo, P. Por tanto, planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} v_1^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot d \\ P_T = m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha = m \cdot a \end{array}\right\} \begin{array}{l} v_1^2 = 2 \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot d = 2 \cdot g \cdot h_0 \\ a = g \cdot \text{sen}\,\alpha \end{array}$$

– En la segunda parte del movimiento, B, el cuerpo sigue deslizándose desde P en adelante con un MRUA pero con rozamiento. Así, en este caso, planteamos que:

$$\left.\begin{array}{l} v_2^2 - v_1^2 = 2 \cdot a \cdot s \\ F_R = \mu \cdot N = m \cdot a \end{array}\right\} \begin{array}{l} -v_1^2 = 2 \cdot (-\mu \cdot g) \cdot s \rightarrow v_1^2 = 2 \cdot \mu \cdot g \cdot s \\ a = \dfrac{\mu \cdot N}{m} = -\mu \cdot g \end{array}$$

Como v_1 tiene el mismo valor en las dos partes, igualamos las expresiones para hallar qué espacio horizontal ha recorrido:

$$2 \cdot g \cdot h_0 = 2 \cdot \mu \cdot g \cdot s \rightarrow \Delta s = \frac{h_0}{\mu}$$

27 **Un cuerpo de 3 kg se lanza desde el punto más bajo de un plano inclinado 30° con una rapidez de 6 m/s, sube deslizando hasta detenerse y luego comienza a bajar. Si el coeficiente de rozamiento vale 0,35, calcula:**

a) La aceleración de subida.

b) El espacio que recorre hasta detenerse.

c) La aceleración de bajada.

d) El tiempo que tarda en volver al punto de partida.

Hay que tener en cuenta que, tanto en la subida como en la bajada, la fuerza de rozamiento se opone al movimiento del cuerpo; las demás fuerzas que actúan sobre él, el peso y la normal, no cambian de sentido.

a) En la subida, tomando el semieje *X* positivo hacia arriba, tenemos, para los ejes *X* e *Y*:

Eje *X*: $-P_x - F_R = m \cdot a \rightarrow -m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu \cdot N = m \cdot a$

Eje *Y*: $N - P_y = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$

$$-g \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu \cdot g \cdot \cos\alpha = a$$

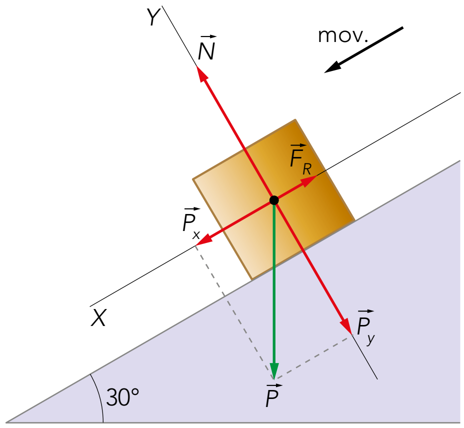
Luego, la aceleración de subida es:

$$a = -g \cdot (\text{sen}\,\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) = -9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot (0{,}5 + 0{,}35 \cdot 0{,}866) = -7{,}9\ \text{m/s}^2$$

b) Al subir con un MRUA con aceleración negativa, cuando se detiene se cumple:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s \rightarrow 0 - (6\ \text{m/s})^2 = 2 \cdot (-7{,}9\ \text{m/s}^2) \cdot s \rightarrow s = 2{,}3\ \text{m}$$

c) En la bajada, tomamos el semieje *X* positivo hacia abajo:



Así, las ecuaciones correspondiente en este movimiento, para los ejes *X* e *Y* son:

Eje *X*: $P_x - F_R = m \cdot a' \rightarrow m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu \cdot N = m \cdot a'$

Eje *Y*: $N - P_y = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$

$$g \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu \cdot g \cdot \cos\alpha = a'$$

Luego, la aceleración de bajada vale:

$$a' = g \cdot (\text{sen}\,\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) = 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot (0{,}5 - 0{,}35 \cdot 0{,}866) = 1{,}9\ \text{m/s}^2$$

d) Calculamos el tiempo empleado en cada trayecto. En la subida, el cuerpo emplea un tiempo:

$$v - v_0 = a \cdot t \rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{-6\ \text{m/s}}{-7{,}9\ \text{m/s}^2} = 0{,}76\ \text{s}$$

Y en la bajada:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a' \cdot t'^2 \rightarrow 2{,}3\ \text{m} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}9\ \text{m/s}^2 \cdot t'^2 \rightarrow t' = 1{,}54\ \text{s}$$

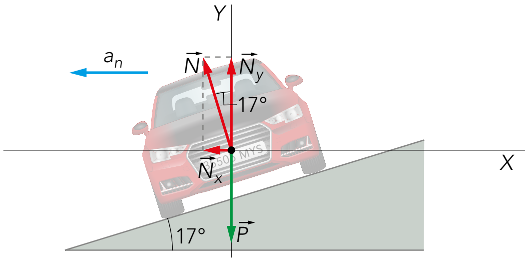
Por tanto, el tiempo que tarda en volver al punto de partida será la suma de estos dos valores. Así:

$$t_{total} = t + t' = 0{,}76\ \text{s} + 1{,}54\ \text{s} = 2{,}30\ \text{s}$$

28 **Calcula la máxima velocidad con que un automóvil puede tomar una curva peraltada 17° de 250 m de radio:**

a) Si consideramos despreciable el rozamiento.

b) Si el coeficiente de rozamiento vale 0,4.



a) Si consideramos despreciable el rozamiento, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo están representadas en el diagrama de la figura, y la fuerza resultante es:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}_n$$

Tomando el eje X horizontal con el sentido positivo hacia el centro de la curva, tenemos, para los ejes X e Y:

Eje X: $\quad N_x = m \cdot a_n \rightarrow N \cdot \operatorname{sen}\alpha = m \cdot \dfrac{v^2}{R}$

Eje Y: $\quad N_y - P = 0 \rightarrow N \cdot \cos\alpha = m \cdot g$

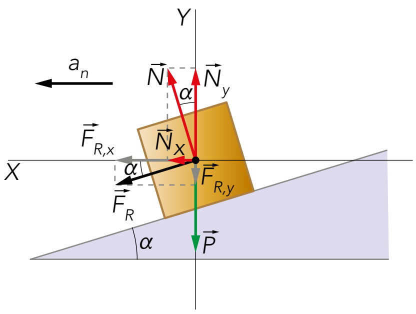
Dividiendo miembro a miembro ambas ecuaciones, tenemos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{g \cdot R} \rightarrow v^2 = g \cdot R \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

$$v_{máx} = \sqrt{g \cdot R \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 250\ \text{m} \cdot \operatorname{tg} 17°} = 27{,}38\ \text{m/s}$$

b) Si existe rozamiento, el diagrama de fuerzas es el de la figura, y la fuerza resultante es:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}_n$$



Tomando el eje X horizontal con el sentido positivo hacia el centro de la curva tenemos, en cada eje:

Eje X: $\quad N_x + F_{R,x} = m \cdot a_n \rightarrow N \cdot \operatorname{sen}\alpha + \mu \cdot N \cdot \cos\alpha = m \cdot \dfrac{v^2}{R}$

Eje Y: $\quad N_y - F_{R,y} - P = 0 \rightarrow N \cdot \cos\alpha - \mu \cdot N \cdot \operatorname{sen}\alpha = m \cdot g$

Despejando en la segunda ecuación:

$$N = \frac{m \cdot g}{\cos\alpha - \mu \cdot \operatorname{sen}\alpha}$$

Y sustituyendo en la primera:

$$(\operatorname{sen}\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) \cdot \frac{m \cdot g}{\cos\alpha - \mu \cdot \operatorname{sen}\alpha} = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

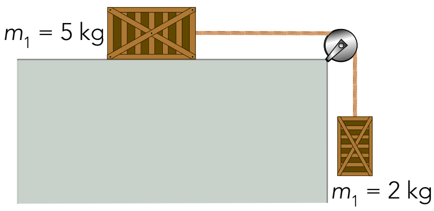
De donde se obtiene:

$$v^2 = g \cdot R \cdot \frac{\text{sen}\,\alpha + \mu \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha - \mu \cdot \text{sen}\,\alpha} =$$

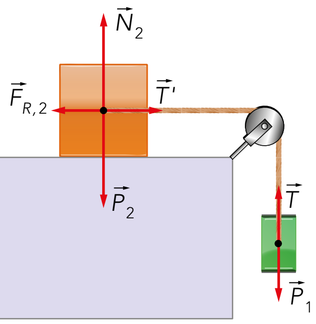
$$= 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 250\ \text{m} \cdot \frac{\text{sen}\,17° + 0{,}4 \cdot \cos 17°}{\cos 17° - 0{,}4 \cdot \text{sen}\,17°} = 1\,971{,}96\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v = 44{,}41\ \text{m/s} = 159{,}9\ \text{km/h}$$

29 **Calcula la aceleración de los cuerpos de la figura y la tensión de la cuerda si el coeficiente de rozamiento vale 0,2. ¿Qué ocurre si a los 5 s de iniciado el movimiento se corta la cuerda?**



Como los cuerpos están unidos, tienen la misma aceleración tangencial, $a_1 = a_2 = a$, y las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo son:



En el caso del cuerpo 1, actúan su peso y la tensión de la cuerda, y ninguna fuerza en el eje *X*. Tomando el semieje *Y* positivo hacia abajo, tenemos:

$$\Sigma\vec{F}_1 = \vec{P}_1 + \vec{T} = m_1 \cdot \vec{a}_1 \ \rightarrow\ m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot a \qquad [1]$$

Para el cuerpo 2, actuarán su peso, la normal, la tensión de la cuerda y la fuerza de rozamiento:

$$\Sigma\vec{F}_2 = \vec{P}_2 + \vec{T}' + \vec{N}_2 + \vec{F}_{R,2} = m_2 \cdot \vec{a}_2$$

Descomponiendo la anterior expresión en sus componentes, y teniendo en cuenta que $T' = T$:

Eje *X*: $T - F_{R,2} = m_2 \cdot a \ \rightarrow\ T - \mu \cdot N_2 = m_2 \cdot a$

Eje *Y*: $N_2 - m_2 \cdot g = 0 \ \rightarrow\ N_2 = m_2 \cdot g$

$$T - \mu \cdot m_2 \cdot g = m_2 \cdot a \qquad [2]$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones [1] y [2], obtenemos la expresión que permite calcular la aceleración; a partir de ella, obtenemos el valor de la tensión:

$$m_1 \cdot g - \mu \cdot m_2 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a$$

$$a = \frac{m_1 - \mu \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot g = \frac{2\ \text{kg} - 0{,}2 \cdot 5\ \text{kg}}{7\ \text{kg}} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 1{,}4\ \text{m/s}^2$$

$$T = m_2 \cdot a + \mu \cdot m_2 \cdot g = 5\ \text{kg} \cdot 1{,}4\ \text{m/s}^2 + 0{,}2 \cdot 5\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 16{,}8\ \text{N}$$

Como los cuerpos realizan un MRUA, a los 2 s, los cuerpos se mueven con una velocidad:

$$v = a \cdot t = 1{,}4\ \text{m/s}^2 \cdot 5\ \text{s} = 7\ \text{m/s}$$

Si se corta la cuerda en ese instante, desaparece la tensión, y, por tanto:

– Cuerpo 1: como sobre él solo actúa el peso, cae con una aceleración igual a la de la gravedad, 9,81 m/s², y con una velocidad inicial de 7 m/s; luego, realiza un movimiento vertical hacia abajo, siendo sus ecuaciones:

$$v_1 = v_0 + g \cdot t = 7 \text{ m/s} + 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot t$$

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = y_0 + 7 \text{ m/s} \cdot t - 4{,}9 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

– Cuerpo 2: al desaparecer la tensión, la fuerza resultante coincide con la fuerza de rozamiento, y, por tanto, realiza un movimiento uniformemente acelerado con una velocidad inicial de 1,4 m/s y cuya aceleración vale:

$$-F_{R,\,2} = m_2 \cdot a'_2 \rightarrow a'_2 = -\mu \cdot g = -0{,}2 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = -1{,}96 \text{ m/s}^2$$

El cuerpo 2 se detiene cuando $v_2 = 0$; luego:

$$v_2 = v_0 + a_2 \cdot t \rightarrow t = \frac{v_2 - v_0}{a_2} = \frac{-7 \text{ m/s}}{-1{,}96 \text{ m/s}^2} = 3{,}57 \text{ s}$$

Y recorre hasta detenerse:

$$s_2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 7 \text{ m/s} \cdot 3{,}57 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 1{,}96 \text{ m/s}^2 \cdot (3{,}57 \text{ s})^2 = 37{,}48 \text{ m}$$

En ese tiempo, el cuerpo 1 ha descendido:

$$\Delta y = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow \Delta y = 7 \text{ m/s} \cdot 3{,}57 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot (3{,}57 \text{ s})^2 = -37{,}5 \text{ m}$$

30 **En el cálculo de la velocidad máxima con la que un vehículo puede tomar una curva, plana o peraltada, las expresiones obtenidas no dependen de la masa. Sin embargo, sabemos que un vehículo alto y pesado debe hacerlo a menor velocidad que otro más bajo y ligero. ¿Es esto una contradicción? (Repasa el concepto de momento, en el problema 1 de la estrategia de resolución de problemas de esta unidad).**

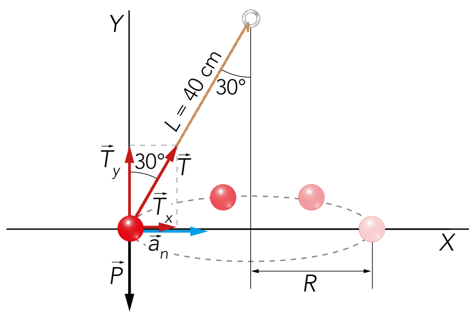
En el cálculo de la velocidad se considera una masa puntual. Así, las condiciones de equilibrio se reducen a que la resultante de las fuerzas sea cero. Al tener en cuenta la forma del cuerpo, debemos estudiar que los momentos estén en equilibrio también. Por tanto, como $\vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{F}$, el efecto del momento depende del brazo de la fuerza, siendo mayor cuanto mayor sea este. Por tanto, los vehículos altos han de tener el centro de masas lo más cercano posible al suelo, para no volcar en las curvas.

31 **Una pequeña bola de 250 g, colgada de un alambre recto de masa despreciable y de 40 cm de longitud, describe circunferencias en un plano horizontal. El alambre forma un ángulo constante de 30° con la vertical. Calcula:**

a) La tensión del alambre.

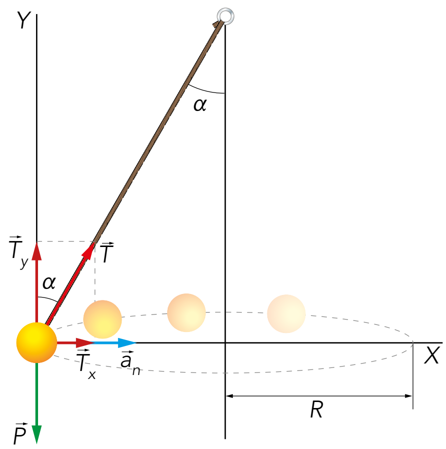
b) El radio de la trayectoria descrita por la bola.

c) La velocidad con la que la describe.



Las fuerzas que actúan sobre la bola son el peso y la tensión del alambre, y como describe un MCU en un plano horizontal, tenemos, de acuerdo con la siguiente figura:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}_n$$



Al descomponer las fuerzas en los ejes X e Y, tenemos:

Eje X: $T_x = m \cdot a_n \rightarrow T \cdot \text{sen}\,\alpha = m \cdot \dfrac{v^2}{R}$ [1]

Eje Y: $T_y - P = 0 \rightarrow T \cdot \cos\alpha = m \cdot g$ [2]

a) La tensión del alambre valdrá:

$$T = \frac{m \cdot g}{\cos\alpha} = \frac{0{,}25 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{0{,}866} = 2{,}8\ \text{N}$$

b) Si L es la longitud del alambre, el radio de la circunferencia descrita por la bola es:

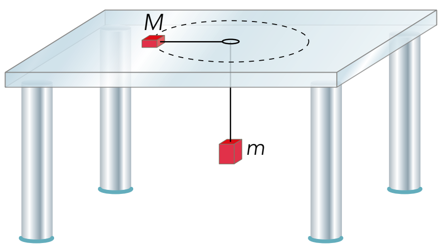
$$R = L \cdot \text{sen}\,\alpha = 0{,}4\ \text{m} \cdot 0{,}5 = 0{,}2\ \text{m}$$

c) Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones [1] y [2], obtenemos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{v^2}{g \cdot R} \rightarrow v = \sqrt{g \cdot R \cdot \text{tg}\,\alpha} = \sqrt{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}2\ \text{m} \cdot 0{,}58} = 1{,}1\ \text{m/s}$$

Página 269

32 Un cuerpo *M*, de 250 g, describe un MCU de 30 cm de radio sobre una mesa horizontal, con un período *T* = 0,25 s. Se encuentra unido a otro cuerpo, de masa *m*, que cuelga verticalmente de una cuerda que pasa por un orificio de la mesa, según se indica en la figura.



Calcula:

a) La aceleración del movimiento.

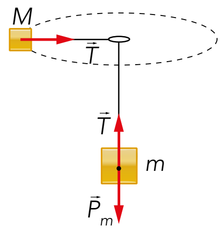
b) La tensión que soporta la cuerda.

c) El valor de *m* para que se obtengan los valores del enunciado.

La velocidad angular del cuerpo M es:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi\ \text{rad}}{0{,}25\ \text{s}} = 25{,}13\ \text{rad/s}$$

Y el esquema que representa las fuerzas en este movimiento es:



a) La aceleración normal podemos calcularla como:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = (25{,}13 \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}3 \text{ m} = 189{,}5 \text{ m/s}^2$$

b) La fuerza en el eje *X* será igual a la masa por la aceleración normal. Así, la tensión será:

$$T = M \cdot a_n = 0{,}25 \text{ kg} \cdot 189{,}5 \text{ m/s}^2 = 47{,}4 \text{ N}$$

c) Para que se den las condiciones del enunciado, el cuerpo *m* debe estar en equilibrio con el cuerpo *M*, es decir:

$$T - P_m = 0 \rightarrow T - m \cdot g = 0$$

$$m = \frac{T}{g} = \frac{47{,}4 \text{ N}}{9{,}81 \text{ m/s}^2} = 4{,}8 \text{ kg}$$

33 Al colocar un bloque de 2 kg suspendido de un resorte se produce un alargamiento de 4 cm. Si, a continuación, se le estira otros 5 cm y se suelta dejándolo oscilar libremente, el bloque describe un MAS. Calcula:

a) La constante recuperadora del muelle.

b) La frecuencia de las oscilaciones.

c) La fuerza máxima que actúa sobre el bloque.

d) La ecuación del movimiento.

a) Si el cuerpo está en equilibrio, el peso de la masa será igual a la fuerza elástica, por tanto:

$$P - F_e = 0 \rightarrow F_e = m \cdot g = 2 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 19{,}62 \text{ N}$$

Conocida la fuerza elástica, calculamos la constante del muelle:

$$F_e = k \cdot x \rightarrow k = \frac{F_e}{x} = \frac{19{,}62 \text{ N}}{0{,}04 \text{ m}} = 490{,}5 \text{ N/m}$$

b) Conocidas *k* y *m*, determinamos la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{490{,}5 \text{ N/m}}{2 \text{ kg}}} = 15{,}66 \text{ rad/s}$$

Así, la frecuencia de la oscilación será:

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{15{,}66 \text{ rad/s}}{2 \cdot \pi \text{ rad}} = 2{,}49 \text{ Hz}$$

c) La fuerza será máxima cuando su aceleración sea máxima, esto es:

$$F_{máx} = m \cdot a_{máx} = m \cdot \omega^2 \cdot A = 2 \text{ kg} \cdot (15{,}66 \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}05 \text{ m} = 24{,}52 \text{ N}$$

d) La ecuación del movimiento será:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$y = 0{,}05 \cdot \cos(15{,}66 \cdot t) \text{ m}$$

34 **Un péndulo simple está formado por una cuerda de 6,2 m y una masa puntual de 2 kg que separamos 5° de la vertical y dejamos oscilar libremente. Calcula:**

a) El período y la amplitud de las oscilaciones.

b) La tensión de la cuerda y la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo cuando la elongación es máxima.

c) ¿Qué valores se obtendrían en la Luna, si la aceleración de la gravedad en su superficie es la sexta parte que en la de la Tierra?

La frecuencia angular del péndulo es:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{1}} = \sqrt{\frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{6{,}2\ \text{m}}} = 1{,}26\ \text{rad/s}$$

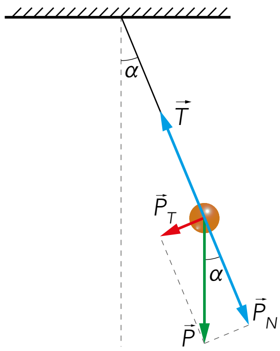
a) Conocida la frecuencia angular, determinamos el período:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi\ \text{rad}}{1{,}26\ \text{rad/s}} = 5\ \text{s}$$

Y la amplitud del movimiento será:

$$A = l \cdot \text{sen}\,\alpha = 6{,}2\ \text{m} \cdot \text{sen}\,5° = 0{,}54\ \text{m}$$

b) El esquema de las fuerzas que actúan sobre la masa en el péndulo es:



La componente normal del peso será igual a la tensión de la cuerda:

$$T = P_n = P \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha = 2\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \cos 5° = 19{,}5\ \text{N}$$

Cuando la elongación es máxima, la fuerza resultante será igual a la componente tangencial del peso:

$$F_T = P_t = P \cdot \text{sen}\,\alpha = m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha = 2\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\,5° = 1{,}7\ \text{N}$$

c) Si la gravedad en la Luna es una sexta parte a la que hay en la Tierra, podemos calcular el valor de su frecuencia angular como:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g/6}{l}} = \sqrt{\frac{9{,}81\ \text{m/s}^2/6}{6{,}2\ \text{m}}} = 0{,}51\ \text{rad/s}$$

El período, por tanto, será:

$$T_L = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi\ \text{rad}}{0{,}51\ \text{rad/s}} = 12{,}2\ \text{s}$$

La amplitud es la misma que en la Tierra.

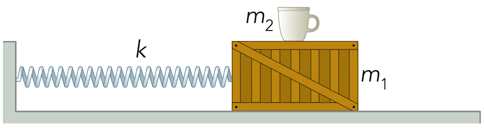
El valor de la tensión de la cuerda será una sexta parte a la que hay en la Tierra:

$$T_L = \frac{T_T}{6} = \frac{19{,}5\ \text{N}}{6} = 3{,}25\ \text{N}$$

Y la fuerza resultante, al igual que la tensión, será un sexto del valor en la Tierra:

$$F_{RL} = \frac{F_{RT}}{6} = \frac{1{,}7\ \text{N}}{6} = 0{,}28\ \text{N}$$

35 El coeficiente de rozamiento estático entre el soporte de la figura, de masa m_1 = 2 kg, y la taza, de masa m_2 = 100 g, es 0,3. Entre m_1 y la superficie sobre la que desliza no hay rozamiento. Si la constante elástica del muelle es k = 75 N/m, calcula la máxima amplitud que se puede dar al MAS del sistema para que no caiga la taza.



Como la taza se encuentra en un sistema de referencia no inercial, aparecen fuerzas ficticias (inerciales). La condición de no deslizamiento es que el módulo de la fuerza ficticia sea menor que el de la fuerza de rozamiento, y en el caso límite, que sean iguales:

$$F_{in} \leq F_R \xrightarrow{\text{límite}} F_{in} = F_R$$

Por tanto, en este caso límite, diremos que:

$$F_{in} = F_R \rightarrow m_2 \cdot a = \mu \cdot m_2 \cdot g \rightarrow a = \mu \cdot g$$

Además, en un MAS, sabemos que:

$$|a_{máx}| = \omega^2 \cdot A \rightarrow \omega^2 = \frac{K}{m_1 + m_2}$$

Así, igualando las dos expresiones:

$$\omega^2 \cdot A = \mu \cdot g \rightarrow A_{máx} = \frac{\mu \cdot g}{\omega^2} = \frac{\mu \cdot g}{K} \cdot (m_1 + m_2)$$

Por tanto, el valor de la amplitud máxima es:

$$A_{máx} = \frac{0{,}3 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{75\ \text{N/m}} \cdot (2 + 0{,}1)\ \text{kg} = 0{,}082\ \text{m} = 8{,}2\ \text{cm}$$

10 TRABAJO Y ENERGÍA

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

1 TRABAJO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.8.1. (EA.8.1.2.)

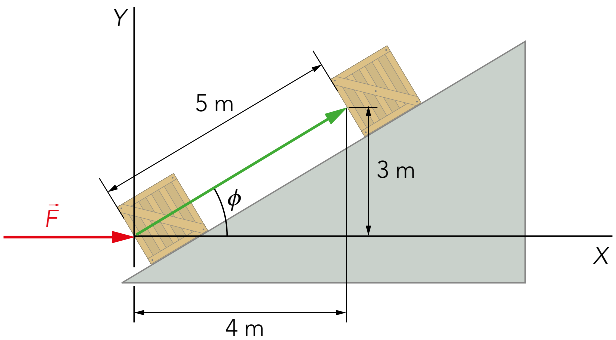
Página 273

1 La chica de la fotografía lleva una maleta con ruedas, para lo cual ejerce una fuerza de 70 N. Calcula el trabajo que realiza cuando la desplaza 10 m.

La fuerza que la chica ejerce sobre la maleta tiene un módulo de 70 N y forma un ángulo de 30° con el desplazamiento. Por tanto:

$$W = F \cdot s \cdot \cos 30° = 70 \cdot 10 \cdot 0{,}87 = 609 \text{ J}$$

2 Se aplica una fuerza sobre el cuerpo de la figura, de 2 kg de masa, de modo que sube por un plano inclinado sin rozamiento con rapidez constante. Calcula el trabajo realizado por dicha fuerza al desplazar el bloque una distancia de 5 m.

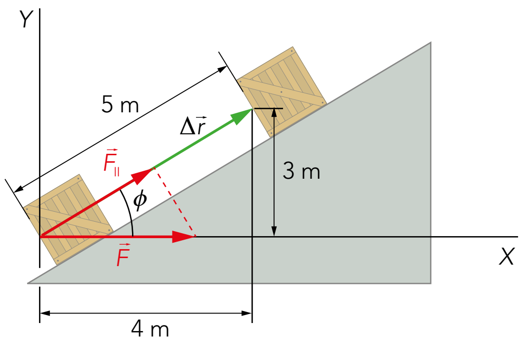


En este caso, no se proporciona el valor de la fuerza. Sin embargo, sí se dice que es tal que el cuerpo sube sin rozamiento por el plano inclinado a velocidad constante. Con esta información, podemos calcular la componente que nos interesa, la paralela al movimiento:

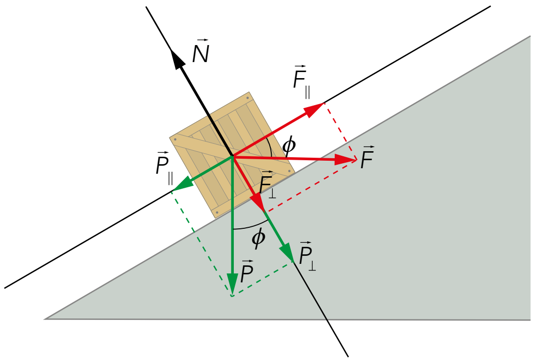
$$F_{\parallel} = F \cdot \cos \phi \rightarrow$$

$$W = F \cdot |\Delta \vec{r}| \cdot \cos \phi = F_{\parallel} \cdot |\Delta \vec{r}| \cdot \cos 0° = F_{\parallel} \cdot |\Delta \vec{r}|$$

donde el subíndice || indica la componente paralela al plano.



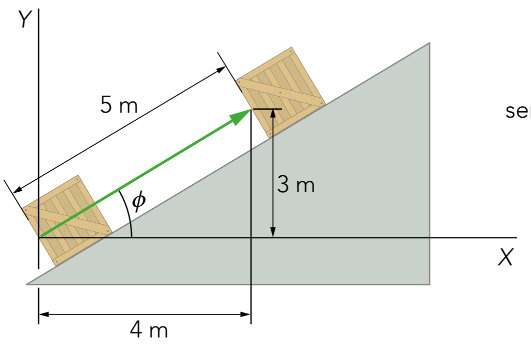
Como el cuerpo sube a velocidad constante, la resultante de las fuerzas paralelas al plano inclinado ha de ser cero:



Por tanto:

$$F_{\|} - P_{\|} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{\|} = P_{\|} = m \cdot g \cdot \text{sen}\,\phi$$

Observa que, a partir de la figura del enunciado, podemos obtener el seno del ángulo ϕ:

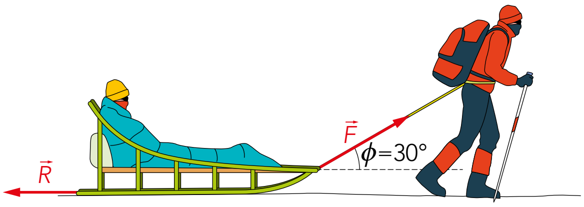


Por tanto, ya tenemos:

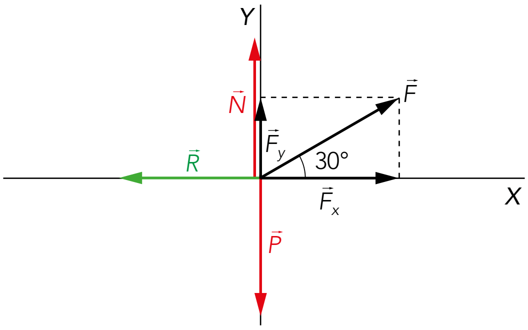
$$W = F_{\|} \cdot |\Delta\vec{r}\,| = m \cdot g \cdot \underbrace{\text{sen}\,\phi}_{=\frac{3}{5}} \cdot |\Delta\vec{r}\,| = 2 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{3}{5} \cdot 5 = 58{,}8 \text{ J}$$

Página 277

3 **Comprobamos. Una persona de 50 kg de masa está tumbada en un trineo de 15 kg mientras su compañero tira ejerciendo una fuerza constante de 500 N que hace que se desplace una distancia de 50 m, como se muestra en la figura. Tomando un valor para el coeficiente de rozamiento de μ = 0,3, calcula el trabajo total realizado sobre el sistema formado por la persona y el trineo.**



Tomemos el eje X horizontal, en la dirección del desplazamiento, y el eje Y vertical, y calculemos las componentes de la resultante en estas dos direcciones:



Las fuerzas verticales no realizan trabajo por ser perpendiculares a la dirección del desplazamiento. Sin embargo, para calcular la fuerza de rozamiento, necesitaremos determinar la fuerza normal.

El peso es el correspondiente a la persona y al trineo:

$$P = m \cdot g = (50 + 15) \cdot 9{,}8 = 637 \text{ N}$$

Eje Y:

$$N + F_y - P = 0 \quad \rightarrow \quad N = P - F_y = m \cdot g - F \cdot \text{sen } 30° = 637 - 500 \cdot 0{,}5 = 387 \text{ N}$$

$$F_{T,y} = N + F_y - P = 0$$

Eje X:

$$F_x = F \cdot \cos 30° = 500 \cdot 0{,}87 = 435 \text{ N}$$

$$R = \mu \cdot N = 0{,}3 \cdot 387 = 116{,}1 \text{ N}$$

$$F_{T,x} = F_x - R = 435 - 116{,}1 = 318{,}9 \text{ N}$$

Por tanto:

$$\vec{F}_T = 318{,}9 \cdot \vec{i} \text{ N}$$

Como:

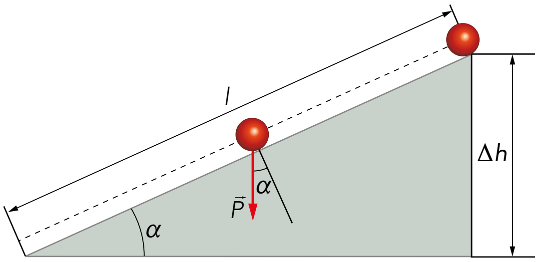
$$\Delta \vec{r} = 50 \cdot \vec{i} \text{ m}$$

ya tenemos:

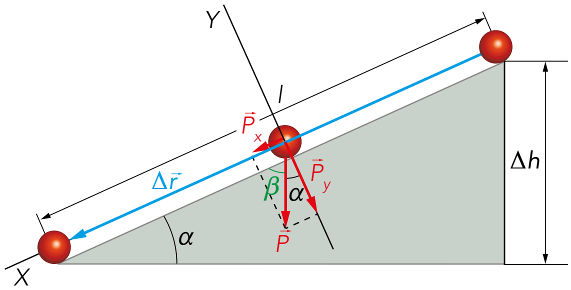
$$W_T = \vec{F}_T \cdot \Delta \vec{r} = 318{,}9 \cdot 50 = 15\,945 \text{ J}$$

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de un documento que explica cómo aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo «Comprobamos».

4 **Un cuerpo de masa *m* cae a lo largo de un plano inclinado sin rozamiento, recorriendo una distancia *l*. Calcula el trabajo realizado sobre el objeto por la fuerza de la gravedad. ¿Depende del ángulo de inclinación, α?**



Vamos a tomar el eje *X* paralelo al plano inclinado, con sentido hacia abajo, coincidiendo con el del movimiento (hay que tener en cuenta que el trabajo que se obtenga será independiente de cómo se tome el sistema de coordenadas, pero su elección puede facilitar la resolución del problema):



Entonces:

$$W_P = \vec{P} \cdot \Delta\vec{r} = P \cdot l \cdot \cos\beta$$

donde: $\beta = 90° - \alpha$. Por tanto, $\cos\beta = \text{sen}\,\alpha$, y tenemos:

$$W_P = \vec{P} \cdot \Delta\vec{r} = P \cdot l \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Como $P = m \cdot g$:

$$W_P = m \cdot g \cdot l \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Además:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\Delta h}{l} \rightarrow l \cdot \text{sen}\,\alpha = \Delta h$$

con lo que, finalmente, nos queda:

$$W_P = m \cdot g \cdot \Delta h$$

y vemos que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria depende de la altura que cae el cuerpo, no del ángulo del plano inclinado.

5 **El mismo cuerpo del ejercicio anterior cae ahora una distancia Δh verticalmente. Calcula el trabajo realizado en este caso por la fuerza gravitatoria. A partir del resultado de este ejercicio y del anterior, ¿qué podemos concluir acerca del valor del trabajo realizado por la fuerza gravitatoria? Explica tus conclusiones y pon un ejemplo que las justifique.**

Tomemos el eje *Y* vertical hacia abajo, en el mismo sentido que el peso. Entonces, este y el desplazamiento tienen la misma dirección y sentido, por lo que:

$$W_P = P \cdot |\Delta\vec{r}| = m \cdot g \cdot \Delta h$$

Vemos que se obtiene el mismo resultado que en el ejercicio anterior.

Podemos concluir, entonces, que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria depende únicamente de la masa del cuerpo y de la altura que cae, independientemente de la longitud del camino recorrido.

Más adelante se estudiará esto con mayor profundidad, y se verá la relación que tiene el trabajo con la energía potencial.

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de información sobre las características de los textos de tipo expositivo y argumentativo, que le sera de utilidad para redactar la respuesta a esta actividad.

6 **Una fuerza constante $\vec{F} = (5 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j})$ N actúa sobre una partícula que realiza un desplazamiento dado por: $\Delta\vec{r} = (\vec{i} - 5 \cdot \vec{j})$ m. Recordando la expresión del producto escalar de dos vectores a partir de sus componentes, calcula el trabajo realizado por la fuerza sobre el cuerpo.**

Recordemos que si tenemos dos vectores dados en componentes:

$$\vec{A} = A_1 \cdot \vec{i} + A_2 \cdot \vec{j}$$

$$\vec{B} = B_1 \cdot \vec{i} + B_2 \cdot \vec{j}$$

su producto escalar viene dado por:

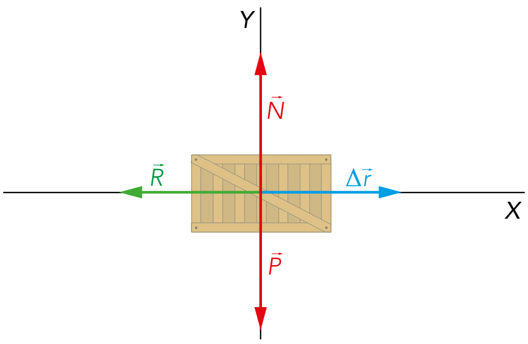
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2$$

Por tanto, en nuestro caso:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = 5 \cdot 1 + 4 \cdot (-5) = 5 - 20 = -15 \text{ J}$$

7 **Un cuerpo de 2 kg de masa se desliza sobre el suelo, con un coeficiente de rozamiento μ = 0,25. Calcula el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento cuando el cuerpo se ha desplazado una distancia de 2 m, 3 m y 5 m.**

Supongamos que el cuerpo se desplaza hacia la derecha, como se muestra en la figura siguiente:



La fuerza de rozamiento se opone al movimiento. El trabajo que realiza viene dado por:

$$W_R = \vec{R} \cdot \Delta\vec{r} = R \cdot s \cdot \cos 180° = -R \cdot s$$

donde s es la distancia recorrida:

$$s = |\Delta\vec{r}|$$

Tenemos, entonces:

$$\vec{N} - \vec{P} = 0 \rightarrow N = P = m \cdot g$$

$$R = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g$$

Así pues:

$$W_R = -R \cdot s = -\mu \cdot m \cdot g \cdot s = -0{,}25 \cdot 2 \cdot 9{,}8 \cdot s = -4{,}9 \cdot s \text{ J}$$

Sustituyendo los distintos valores de la distancia recorrida:

$$s = 2 \text{ m} \rightarrow W_R = -9{,}8 \text{ J}$$

$$s = 3 \text{ m} \rightarrow W_R = -14{,}7 \text{ J}$$

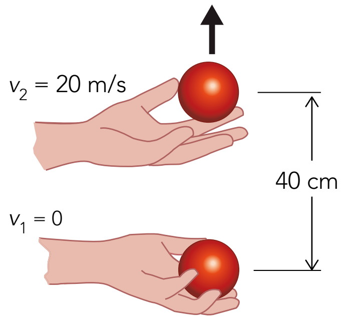
$$s = 5 \text{ m} \rightarrow W_R = -24{,}5 \text{ J}$$

3 ENERGÍA CINÉTICA

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.8.1. (EA.8.1.1.-8.1.2.)

Página 281

8 **Se lanza hacia arriba una pelota de 200 g de masa con una rapidez de 20,0 m/s. Para ello, la mano tiene que subir 40 cm. Calcula el valor medio del módulo de la fuerza aplicada sobre la pelota.**



Durante el trayecto desde el punto inicial hasta que se suelta la pelota, el valor medio del módulo de la fuerza ejercida es *F*. Además, sobre ella actúa el peso, por lo que el trabajo total realizado sobre la pelota será:

$$W = (F - m \cdot g) \cdot s = E_{c,2} - E_{c,1}$$

Como en el punto 1 la pelota estaba en reposo: $E_{c,1} = 0$. En el punto 2 tiene una rapidez de 20 m/s, por lo que:

$$(F - m \cdot g) \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \rightarrow F = m \cdot g + \frac{m \cdot v_2^2}{2 \cdot s}$$

$$F = 0{,}2 \cdot 9{,}8 + \frac{0{,}2 \cdot 20^2}{2 \cdot 0{,}4} \approx 102 \text{ N}$$

9 **Demuestra el teorema de la energía cinética para el caso de un MRUA en el que la fuerza tiene sentido contrario al desplazamiento.**

Supongamos, igual que se hizo en la sección 2.2, que tenemos un MRUA, pero en este caso, la fuerza se opone al movimiento. Entonces, si *F* y *s* denotan, al igual que antes, a los módulos de la fuerza y el desplazamiento, respectivamente, tenemos:

$$W = -F \cdot s$$

Por otra parte, si *a* denota el módulo del vector aceleración:

$$F = m \cdot a$$

Además:

$$s = -\frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot a}$$

Observa que, al ser $v_2 < v_1$ y $a > 0$, tenemos que incluir el signo menos para que s, que es la distancia recorrida, siga siendo positiva. Sustituyendo, ya tenemos:

$$W = -(m \cdot a) \cdot \left(-\frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot a}\right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = E_{c,2} - E_{c,1}$$

igual que antes.

También podríamos haber trabajado con las componentes de los vectores. Tomando el eje X en la dirección del movimiento, con su mismo sentido, tendríamos:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{i}, \text{ con } F < 0$$

$$\vec{a} = a \cdot \vec{i}, \text{ con } a < 0$$

$$\Delta \vec{r} = s \cdot \vec{i}, \text{ con } s > 0$$

La relación entre estas componentes sería:

$$F = m \cdot a$$

$$s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot a}$$

Como en este caso $v_2 < v_1$ y $a < 0$, ya obtenemos un valor de $s > 0$. Ahora bien, el trabajo viene dado por:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot s$$

que es menor que cero, puesto que $F < 0$. Sustituyendo, tendremos:

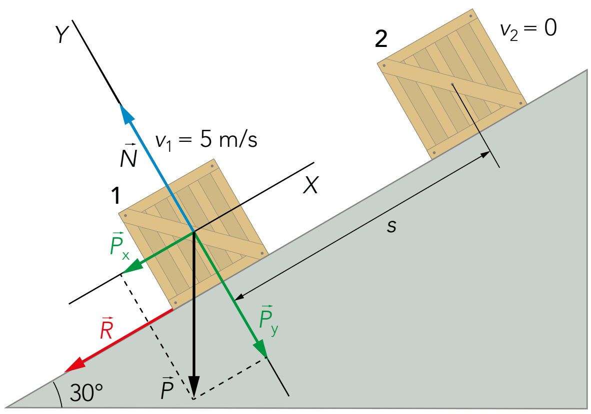
$$W = (m \cdot a) \cdot \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot a}\right) = E_{c,2} - E_{c,1}$$

Y, de nuevo, llegamos al mismo resultado.

Observa la diferencia que hay entre trabajar con módulos y con componentes. Ten cuidado de elegir qué significan los distintos términos que utilices, y mantén la coherencia a lo largo de todo el desarrollo del problema.

10 Se lanza un cuerpo hacia arriba por un plano inclinado 30°, con una velocidad inicial de 5 m/s. Sabiendo que μ = 0,2, calcula cuánto recorre el cuerpo antes de pararse.

Se lanza un cuerpo hacia arriba por un plano inclinado con rozamiento. El diagrama de fuerzas es el siguiente:



Observa que las únicas fuerzas que realizan trabajo son la de rozamiento y la componente X del peso:

$$R = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30°$$

$$P_x = m \cdot g \cdot \text{sen}\, 30°$$

Por tanto:

$$W = -(R + P_x) \cdot s = -(\mu \cdot \cos 30° + \text{sen}\, 30°) \cdot m \cdot g \cdot s$$

donde el signo menos proviene del hecho de que ambas fuerzas se oponen al movimiento.

Utilizando el teorema de la energía cinética:

$$W = E_{c,2} - E_{c,1}$$

donde:

$$E_{c,2} = 0$$

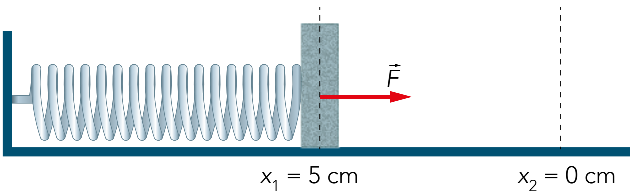
$$E_{c,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$

Por tanto:

$$-(\mu \cdot \cos 30° + \text{sen}\ 30°) \cdot m \cdot g \cdot s = 0 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$

$$s = \frac{v_1^2}{2 \cdot (\mu \cdot \cos 30° + \text{sen}\, 30°) \cdot g} = \frac{5^2}{2 \cdot (0{,}2 \cdot 0{,}87 + 0{,}5) \cdot 9{,}8} = 1{,}89\ \text{m}$$

11 Un bloque de 150 g de masa comprime 5 cm un muelle de constante elástica k = 2000 N/m. Cuando se suelta, el muelle vuelve a su posición de equilibrio. Calcula la velocidad del cuerpo en ese momento.



En el ejercicio resuelto 5, se derivó la expresión del trabajo realizado por la fuerza elástica cuando un muelle se estira desde un alargamiento inicial $x_0 = 0$ hasta otro final x. En este caso, tenemos que el muelle, inicialmente, está comprimido una distancia $x < 0$, y vuelve a su posición de equilibrio, $x_0 = 0$. Vamos a obtener el trabajo en esta situación.

La fuerza elástica viene dada por:

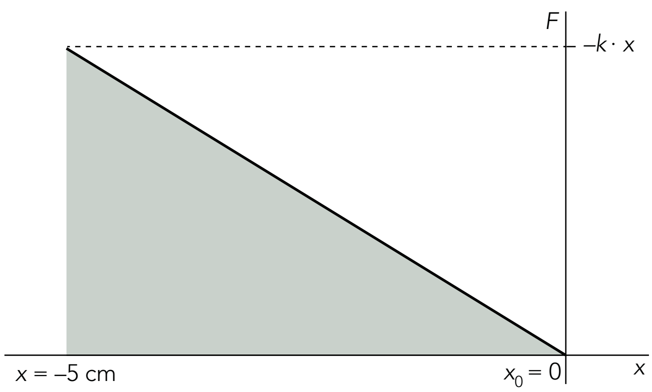
$$\vec{F}_e = -k \cdot \vec{x}$$

Vamos a trabajar con componentes, por lo que tomamos el eje X en sentido de $x > 0$. Entonces:

$$\vec{x} = x \cdot \vec{i}$$

$$\vec{F}_e = -k \cdot x \cdot \vec{i}$$

Observemos que si el muelle se alarga, $x > 0$, y entonces $F_e < 0$, es decir, está dirigida hacia la izquierda. Si el muelle se comprime, $x < 0$ y $F_e > 0$, esto es, la fuerza se dirige hacia la derecha. En nuestro caso, la gráfica $F_e - x$ sería la siguiente:



Vemos que el trabajo realizado por la fuerza elástica es el área de un triángulo de base x y altura $k \cdot x$, igual que en el caso estudiado en el ejercicio resuelto 6, por lo que de nuevo tendremos:

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Aplicando el teorema de la energía cinética:

$$W_e = E_{c,2} - E_{c,1}$$

donde: $E_{c,1} = 0$, porque parte del reposo y:

$$E_{c,2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Por tanto, tenemos:

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v^2 = \frac{k}{m} \cdot x^2$$

$$v^2 = \frac{2\,000}{0{,}150} \cdot 0{,}05^2 = 33{,}33\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v = 5{,}77\ \text{m/s}$$

Dado que estamos trabajando con componentes, hemos tomado $v > 0$, ya que la velocidad está dirigida hacia la derecha.

4 ENERGÍA POTENCIAL

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.8.2. (EA.8.2.1.) CE.8.3. (EA.8.3.1.)

Página 283

12 Una masa de 5 kg se eleva a velocidad constante hasta una altura de 20 m mediante una fuerza. Calcula el trabajo realizado por dicha fuerza y por el peso.

Se dice que el cuerpo se eleva a velocidad constante. Por lo tanto, llamando $\vec{F}$ a la fuerza, tendremos:

$$\vec{F} + \vec{P} = 0 \rightarrow \vec{F} = -\vec{P}$$

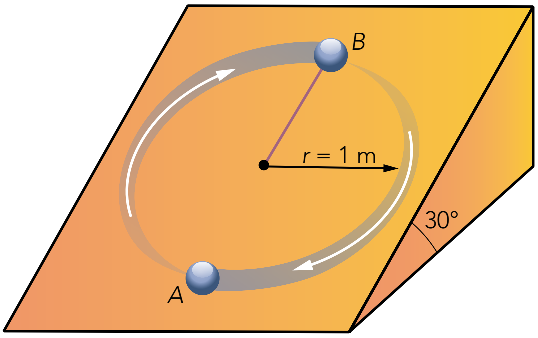
Y está dirigida hacia arriba, igual que el desplazamiento. Por tanto:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot \Delta h = 5 \cdot 9{,}8 \cdot 20 = 980\ \text{J}$$

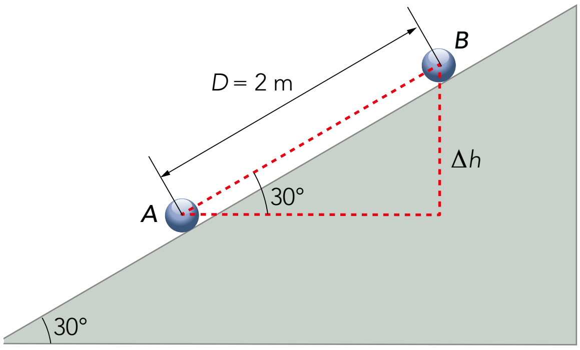
Como el peso tiene el mismo módulo y dirección, pero sentido contrario:

$$W_g = -W = -980\ \text{J}$$

13 **Un cuerpo de 4 kg de masa está sujeto por una cuerda en el centro de un plano inclinado 30° y describe una trayectoria circular de 1 m de radio. Calcula el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad cuando el cuerpo se mueve desde *A* hasta *B*.**



Sabemos que el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad es independiente de la trayectoria seguida. Lo único que necesitamos es conocer la diferencia de alturas. Hallémosla. Consideremos la siguiente imagen, donde se muestra la trayectoria de la partícula vista «de perfil»:

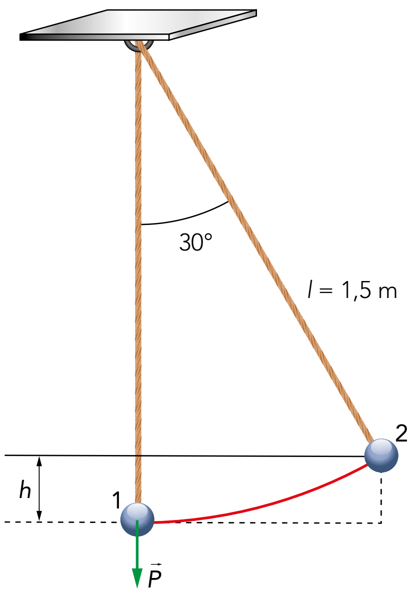


Podemos observar que la altura Δh está relacionada con el diámetro de la circunferencia, D, mediante:

$$\text{sen}\,30° = \frac{\Delta h}{D} \rightarrow \Delta h = D \cdot \text{sen}\,30° = 2 \cdot 0{,}5 = 1\text{ m}$$

Por tanto: $W_g = -\Delta E_p = -m \cdot g \cdot \Delta h = 4 \cdot 9{,}8 \cdot 1 = -39{,}2$ J

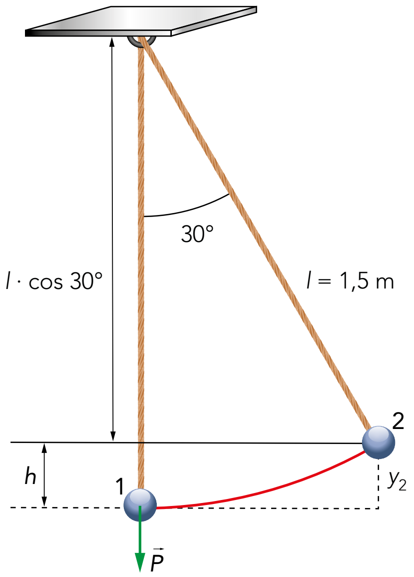
14 **Un péndulo de 250 g de masa y 1,5 m de longitud oscila con una amplitud de 30° (ver la figura). Calcula el trabajo que realiza la fuerza de la gravedad sobre el cuerpo durante el trayecto que va desde el punto 1 hasta el punto 2.**



Tomemos el origen de alturas en el punto 1. Hemos visto que, independientemente de la trayectoria, se verifica:

$$W_g = -\Delta E_p = -m \cdot g \cdot \Delta h$$

En nuestro caso:



$$y_1 = 0$$

$$y_2 = l - l \cdot \cos 30° = l \cdot (1 - \cos 30°) = 1{,}5 \cdot (1 - 0{,}87) = 0{,}195 \text{ m}$$

Por tanto:

$$W_g = -m \cdot g \cdot \Delta h = -0{,}250 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}195 = -0{,}478 \text{ J}$$

Es conveniente insistir en lo útil que resulta el hecho de que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria no dependa de la trayectoria seguida, sino únicamente de la diferencia de alturas, ya que esto permite simplificar los problemas enormemente.

Página 285

15 ¿Qué te hace decir eso? **Comprueba que la energía potencial gravitatoria y la elástica tienen las mismas dimensiones que el trabajo.**

Las unidades de la energía potencial gravitatoria son:

$$[E_{p,g}] = [m] \cdot [g] \cdot [\Delta h] = \text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2} \cdot \text{L} = \text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}$$

Y las de la energía potencial elástica:

$$[E_{p,e}] = [k] \cdot [x^2]$$

Recordemos que las dimensiones de fuerza son:

$$[F] = [m] \cdot [a] = \text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2}$$

Por tanto:

$$[k] = \frac{[F]}{\text{L}} = \text{M} \cdot \text{T}^{-2}$$

Y, ya tenemos:

$$[E_{p,e}] = [k] \cdot [x^2] = \text{M} \cdot \text{T}^{-2} \cdot \text{L}^2$$

Como vemos, tanto la energía potencial gravitatoria como la elástica, tienen las mismas dimensiones que el trabajo.

Su alumnado puede consultar en **anayaeducacion.es** el documento que explica cómo aplicar la técnica «¿Qué te hace decir eso?».

16 **De un muelle vertical de constante elástica k = 500 N/m se cuelga un cuerpo de 150 g de masa. Una vez alcanzado el equilibrio, se estira 1 cm más. Calcula el trabajo necesario para ello.**

En primer lugar, vamos a calcular cuánto se ha alargado el muelle cuando se le cuelga el cuerpo, y lo vamos a denotar x_0. Sabemos que la fuerza elástica y la gravitatoria se compensarán, por lo que:

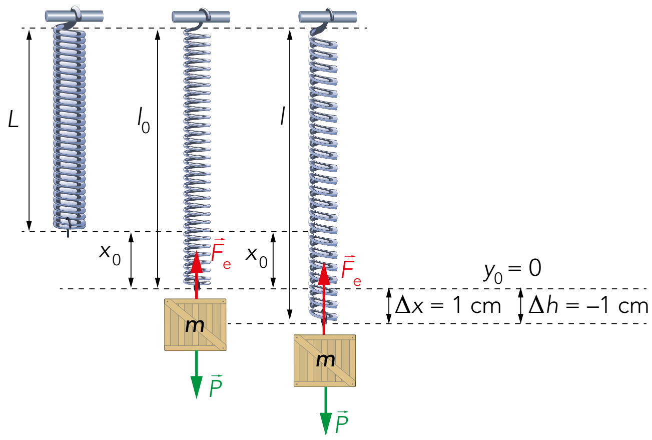
$$\vec{F}_e + \vec{P} = 0 \rightarrow F_e = P \rightarrow k \cdot x_0 = m \cdot g \rightarrow x_0 = \frac{m \cdot g}{k}$$

Por tanto, en el equilibrio, el muelle se habrá estirado una cantidad:

$$x_0 = \frac{0{,}150 \cdot 9{,}8}{500} = 2{,}94 \cdot 10^{-3}\,\text{m} = 0{,}294\ \text{cm}$$

Ahora vamos a calcular el trabajo necesario para estirar el resorte un centímetro más desde esta posición. Para ello, hay que tener en cuenta los dos tipos de energía potencial, la gravitatoria y la elástica, y aplicar:

$$W = \Delta E_p = \Delta E_{p,g} + \Delta E_{p,e}$$



Por tanto:

$$\Delta E_{p,g} = m \cdot g \cdot \Delta h = -0{,}150 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}01 = -0{,}0147\ \text{J}$$

$$x_2 = x_0 + 1\ \text{cm} = 1{,}294\ \text{cm};\quad x_1 = x_0 = 1\ \text{cm} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta E_{p,e} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_2^2 - x_1^2) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 500 \cdot [(1{,}294 \cdot 10^{-2})^2 - (2{,}94 \cdot 10^{-3})^2] = 0{,}0397\ \text{J}$$

Así pues, finalmente, tenemos:

$$W = -0{,}0147 + 0{,}039 = 0{,}0243\ \text{J}$$

Como vemos, es necesario realizar trabajo para estirar el muelle.

17 Cabezas pensantes. **Se cuelga un cuerpo de 10 kg de masa de un muelle vertical. Una vez que alcanza la posición de equilibrio es necesario realizar un trabajo de 10 J para estirarlo 5 cm. Calcula la constante elástica del muelle y cuánto se había estirado inicialmente.**

En primer lugar, vamos a calcular la posición de equilibrio. Esta viene dada por la igualdad:

$$\vec{F}_e + \vec{P} = 0 \rightarrow F_e = P \rightarrow k \cdot x_0 = m \cdot g$$

$$x_0 = \frac{m \cdot g}{k} = \frac{98}{k} \rightarrow k \cdot x_0 = 98$$

Ahora no conocemos el valor de la constante k, pero sí sabemos que, para estirarlo 5 cm más hay que realizar un trabajo de 10 J. Entonces:

$$W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x^2 - x_0^2)$$

$$10 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot [(x_0 + 0{,}05)^2 - x_0^2] = \frac{1}{2} \cdot k \cdot [x_0^2 + 2{,}5 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 0{,}05 \cdot x_0 - x_0^2]$$

$$10 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-3} + 0{,}1 \cdot x_0)$$

$$20 = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot k + 0{,}1 \cdot k \cdot x_0$$

Por la primera ecuación sabemos que:

$$k \cdot x_0 = 98$$

y por tanto:

$$20 = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot k + 0{,}1 \cdot 98$$

$$20 = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot k + 9{,}8$$

$$10{,}2 = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot k$$

$$k = 4\,080 \text{ N/m}$$

Y, finalmente:

$$x_0 = \frac{98}{k} = \frac{98}{4\,080} = 0{,}024 \text{ m} = 2{,}4 \text{ cm}$$

En **anayaeducacion.es** dispone de un documento que explica cómo aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo «Cabezas pensantes».

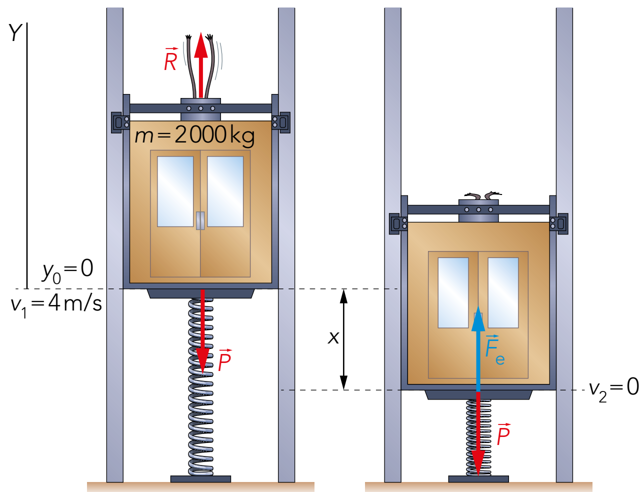
5 ENERGÍA MECÁNICA. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.8.1. (EA.8.1.1.) CE.8.2. (EA.8.2.1.) CE.8.3. (EA.8.3.1.-8.3.2)

Página 288

18 Si en el ejercicio resuelto 14 no hubiera rozamiento, ¿cuánto se comprimiría el muelle?

1) Tomamos el sistema de coordenadas igual que en el ejercicio resuelto 14:



Por tanto, igual que antes: $y_1 = y_0 = 0$; $y_2 = -x < 0$

2) Las únicas fuerzas que actúan son la gravedad y la elástica, ambas conservativas, por lo que:

$$\Delta E_m = 0$$

3) Calculamos la energía cinética y potencial en los puntos inicial (1) y final (2):

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 ; \; E_{c,2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = 0$$

Como tomamos el origen de altura en $y_1 = y_0 = 0$, en el punto inicial (1):

$$E_{p,g,1} = m \cdot g \cdot y_1 = 0$$

y, al no estar el muelle comprimido:

$$E_{p,e,1} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = 0$$

por lo que:

$$E_{p,1} = E_{p,g,1} + E_{p,e,1} = 0$$

En el punto (2):

$$E_{p,2} = E_{p,g,2} + E_{p,e,2} = -m \cdot g \cdot x + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

4) Igualamos la energía mecánica inicial y final:

$$E_{c,1} + E_{p,1} = E_{c,2} + E_{p,2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + 0 = -m \cdot g \cdot x + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 - m \cdot g \cdot x - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = 0$$

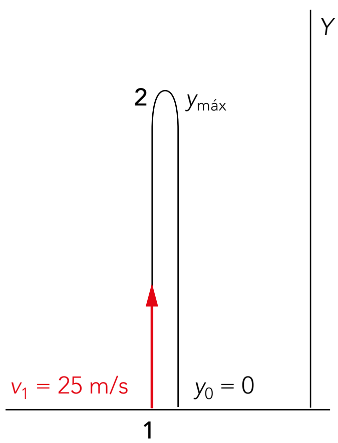
$$5\,300 \cdot x^2 - 19\,600 \cdot x - 16\,000 = 0$$

Obtenemos dos soluciones: $x = 4{,}39$ m; $x = -0{,}69$ m

Por un lado, vemos que la solución positiva corresponde a una compresión, en este caso, mayor que en el ejercicio resuelto, pues ahora no se disipa energía por rozamiento. Por otro lado, la segunda corresponde a una situación en la que el muelle se ha estirado 0,69 m y el ascensor está subiendo a 4 m/s (recuerda que *x* es positivo hacia abajo, en nuestro caso).

19 **Se lanza un cuerpo de 2 kg verticalmente hacia arriba con una velocidad de 25 m/s. ¿Hasta qué altura subirá? Si se comprueba que solamente sube hasta 20 m, ¿cuál es el valor de la fuerza de rozamiento con el aire?**

1) Tomamos el eje *Y* vertical con sentido hacia arriba, de manera que el origen de alturas se encuentre en el punto en el que empieza el ascenso del cuerpo:



2) La única fuerza que interviene es la gravedad, por lo que la energía mecánica se ha de conservar:

$$\Delta E_m = 0$$

3) Calculamos las energías cinética y potencial en los puntos inicial y final:

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2; \quad E_{c,2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = 0$$

$$E_{p,1} = m \cdot g \cdot y_0 = 0; \quad E_{p,2} = m \cdot g \cdot y_{máx}$$

4) Igualamos:

$$E_{c,1} + E_{p,1} = E_{c,2} + E_{p,2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = m \cdot g \cdot y_{máx} \rightarrow y_{máx} = \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{25^2}{2 \cdot 9{,}8} = 31{,}9 \text{ m}$$

Ahora, supongamos que sube solamente hasta una altura de 20 m. Eso quiere decir que se ha perdido energía mecánica debido a la fricción con el aire, por lo que:

$$W_{NC} = \Delta E_m$$

Las energías cinética y potencial en los puntos inicial y final son, al igual que antes:

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2; \quad E_{c,2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = 0$$

$$E_{p,1} = m \cdot g \cdot y_0 = 0; \quad E_{p,2} = m \cdot g \cdot y_{máx}$$

Y el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento:

$$W_{NC} = -R \cdot y_{máx}$$

Así pues:

$$W_{NC} = E_{c,2} + E_{p,2} - E_{c,1} - E_{p,1}$$

$$-R \cdot y_{máx} = m \cdot g \cdot y_{máx} - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$

$$R = -m \cdot g + \frac{m \cdot v_1^2}{2 \cdot y_{máx}}$$

$$R = -2 \cdot 9{,}8 \cdot + \frac{2 \cdot 25^2}{2 \cdot 20} = 11{,}7 \text{ N}$$

Hay que tener en cuenta que R, en este caso, es el módulo de la fuerza de rozamiento, no la componente. Esto se debe a que en la expresión del trabajo está implícito el uso de módulos. Si hubiéramos tomado:

$$W_{NC} = R \cdot y_{máx}$$

entonces estaríamos trabajando con componentes, y el resultado obtenido sería:

$$R \cdot y_{max} = m \cdot g \cdot y_{max} - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$

$$R = m \cdot g - \frac{m \cdot v_1^2}{2 \cdot y_{máx}} = -11{,}7 \text{ N}$$

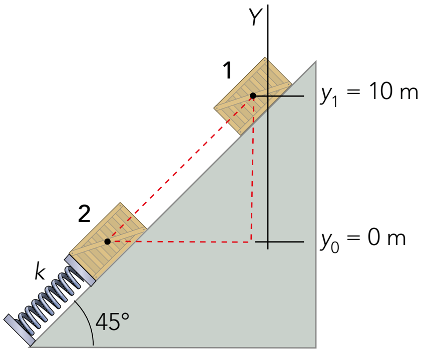
Como debe ser, puesto que:

$$\vec{R} = -11{,}7 \cdot \vec{j} \text{ N}$$

Por tanto, hay que tener muy claro el significado de las distintas variables, y decidir, antes de empezar a resolver el ejercicio, si cada una de ellas va a representar una componente o un módulo, eligiendo los signos adecuadamente.

20 Un objeto de 0,5 kg de masa cae desde una altura de 10 m por un plano inclinado 45°, partiendo del reposo. En la parte inferior de dicho plano hay un muelle de constante elástica *k* = 80 N/m. Calcula a qué velocidad llega el cuerpo al muelle y cuánto se comprime este, considerando que no hay fricción con el plano inclinado.

Consideremos la siguiente figura:



El cuerpo parte del reposo desde una altura de 10 m en el punto 1. Desliza por el plano inclinado y llega al punto 2, donde entra en contacto con el muelle. Por tanto:

$$v_1 = 0; \quad v_2 = ?$$

La velocidad que nos piden es v_2.

a.1. Tomamos el eje *Y* vertical, con sentido hacia arriba. El origen de alturas se toma en el punto 2, como se mostraba en la figura anterior.

Por tanto:

$$y_1 = 10 \text{ m}; \quad y_2 = y_0 = 0$$

a.2. Las fuerzas que intervienen son: el peso, que es conservativa (el muelle todavía no juega ningún papel), y la normal, que no realiza trabajo. Por tanto, utilizaremos la conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_m = 0$$

a.3. Calculamos la energía cinética y la potencial en los puntos 1 y 2:

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = 0; \quad E_{c,2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2$$

$$E_{p,1} = E_{p,g,1} = m \cdot g \cdot y_1$$

$$E_{p,2} = E_{p,g,2} = m \cdot g \cdot y_2 = 0$$

a.4. Por tanto:

$$E_{c,1} + E_{p,1} = E_{c,2} + E_{p,2}$$

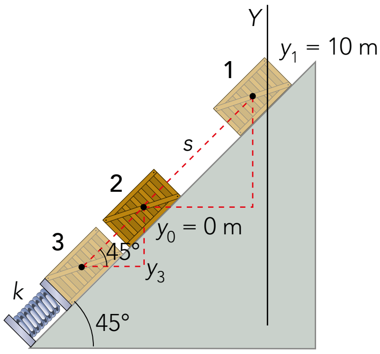
$$m \cdot g \cdot y_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2$$

$$v_2^2 = 2 \cdot g \cdot y_1$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot y_1} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 10} = 14 \text{ m/s}$$

Ahora vamos a calcular cuánto se comprime el muelle.

b.1. Para ello, vamos a considerar los puntos 2 y 3:



Como puedes comprobar, no hemos cambiado la posición del origen de coordenadas.

b.2. Las fuerzas que intervienen son: el peso y la fuerza elástica, que son conservativas, y la normal, que no realiza trabajo, por lo que utilizaremos la conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_m = 0$$

Pero, ahora, la energía potencial tendrá dos contribuciones: la gravitatoria y la elástica.

b.3. Calculamos la energía cinética y la potencial en los puntos 2 y 3:

$$E_{c,2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 14^2 = 49 \text{ J}$$

Como en el punto 3 el muelle está totalmente comprimido, y se detiene instantáneamente el movimiento:

$$E_{c,3} = 0$$

Además, en el punto 2 el muelle aún no ha empezado a comprimirse, por lo que:

$$E_{p,2} = E_{p,g,2} + E_{p,e,2} = 0$$

Llamando $x > 0$ a la máxima elongación tenemos que la energía potencial en el punto 3 viene dada por:

$$E_{p,3} = E_{p,g,3} + E_{p,e,3} = m \cdot g \cdot y_3 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

(observa que $y_3 < 0$). La relación existente entre y_3 y x es la siguiente:

$$\text{sen } 45° = \frac{|y_3|}{x} \rightarrow y_3 = -0{,}71 \cdot x$$

donde hemos puesto el signo menos porque y_3 es negativo. Por tanto:

$$E_{p,g,3} = -0{,}71 \cdot m \cdot g \cdot x; \; E_{p,e,3} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

$$E_{p,3} = -0{,}71 \cdot m \cdot g \cdot x + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 =$$

$$= -0{,}71 \cdot 0{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot x^2 = -3{,}48 \cdot x + 40 \cdot x^2$$

b.4. Ahora ya podemos igualar la energía de los puntos 2 y 3:

$$E_{c,2} + E_{p,2} = E_{c,3} + E_{p,3}$$

$$49 + 0 = 0 - 3{,}48 \cdot x + 40 \cdot x^2$$

Y ya tenemos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$40 \cdot x^2 - 3{,}48 \cdot x - 49 = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$x = 1{,}15 \text{ m}; \quad x = -1{,}06 \text{ m}$$

El valor pedido es el primero: el muelle se comprime 1,15 m, ya que hemos tomado $x > 0$ en el sentido de la compresión del muelle. La segunda solución correspondería al momento en el que el muelle se recupera y lanza el cuerpo hacia arriba. En ese instante, el cuerpo tendrá la misma rapidez calculada en el apartado anterior, y el resorte se habrá estirado 1,06 m.

Página 289

21 Un cuerpo de 200 g está unido a un muelle horizontal de constante elástica *k* = 200 N/m. Se separa de su posición de equilibrio 20 cm. Calcula el período y la energía mecánica del movimiento oscilatorio.

Se dice que el muelle se estira inicialmente una distancia de 20 cm, que será la amplitud del movimiento oscilatorio. Como la fuerza elástica es conservativa, la energía mecánica se mantendrá constante. Calculémosla:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0{,}2^2 = 4 \text{ J}$$

El periodo de la oscilación vendrá dado por:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}2}{200}} = 0{,}2 \text{ s}$$

22 Un cuerpo de 1,5 kg está unido a un muelle horizontal. Se separa de su posición de equilibrio 10 cm. Sabiendo que la rapidez en *x* = 0 es de 2 m/s, calcula la celeridad en *x* = 3 cm. Representa gráficamente *Ec*, *Ep* y *Em* en función del tiempo.

Se dice que el muelle se estira inicialmente una distancia de 10 cm, que será la amplitud del movimiento oscilatorio posterior. Como la fuerza elástica es conservativa, la energía mecánica se ha de conservar. Pero ahora, no conocemos el valor de la constante k. Vamos a determinarlo a partir del valor de la energía mecánica:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

Como se dice que, en $x = 0$, la rapidez de la partícula unida al muelle es de 2 m/s, en ese punto, la energía mecánica será:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 2^2 + 0 = 3 \text{ J}$$

Por tanto:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \rightarrow k = \frac{2 \cdot E_m}{A^2} = \frac{2 \cdot 3}{0{,}1^2} = 600 \text{ N/m}$$

Ahora ya podemos calcular la celeridad en $x = 3$ cm. Usando que la energía mecánica es constante:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

$$3 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 0{,}03^2$$

$$0{,}75 \cdot v^2 + 0{,}27 = 3$$

$$v = \pm 1{,}91 \text{ m/s}$$

Donde ± indica que se puede estar moviendo en los dos sentidos; en ambos casos tendrá la misma celeridad.

La energía cinética viene dada por:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

donde:

$$v = \pm \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

La energía potencial se determina mediante:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot x^2$$

Vemos, por tanto, que lo primero que necesitamos es la expresión de $x(t)$, que será de la forma:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0)$$

La frecuencia angular es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{600}{1,5}} = 20 \text{ rad/s}$$

Además, como en $t = 0$, la elongación es igual a la amplitud, $x = A$, la fase inicial será: $\phi_0 = \pi/2$. Por tanto:

$$x(t) = 0,1 \cdot \text{sen}\left(20 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{m} = 0,1 \cdot \cos(20 \cdot t) \text{ m}$$

Y la rapidez vendrá dada por:

$$v(t) = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2} = \omega \cdot \sqrt{A^2 - A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t)} =$$

$$= \omega \cdot A \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\omega \cdot t)} = \omega \cdot A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) =$$

$$= 2 \cdot \text{sen}(20 \cdot t) \text{ m/s}$$

Con esta información, ya podemos representar gráficamente la energía cinética:

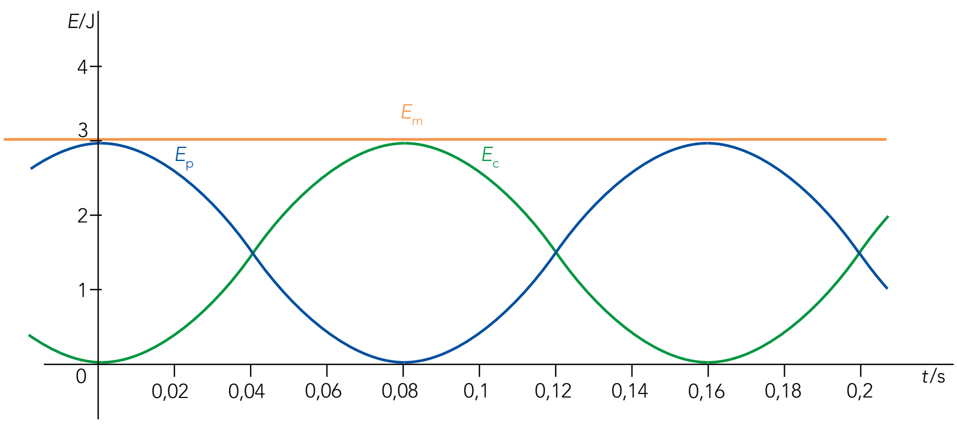
$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 3 \cdot \text{sen}^2(20 \cdot t) \text{ J}$$

y la potencial:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t)$$

$$E_p = 3 \cdot \cos^2(20 \cdot t) \text{ J}$$

como se muestra a continuación:



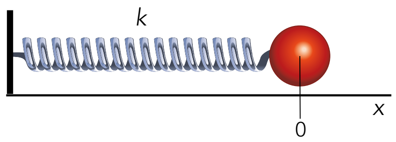
Se puede observar que la energía mecánica es, efectivamente, constante, ya que:

$$E_m = E_c + E_p = 3 \cdot \cos^2 (20 \cdot t) + 3 \cdot \text{sen}^2 (20 \cdot t) \text{ J} =$$

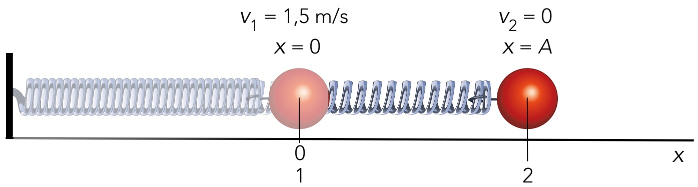
$$= 3 \cdot \underbrace{(\cos^2 (20 \cdot t) + \text{sen}^2 (20 \cdot t))}_{=1} \text{ J} = 3 \text{ J}$$

23 **Una masa de 250 g está unida a un muelle de constante elástica 150 N/m. Se le da un empujón y adquiere, instantáneamente, una rapidez de 1,5 m/s. Calcula la frecuencia y la amplitud de la oscilación y representa gráficamente E_c, E_p y E_m en función del tiempo.**

Consideremos el sistema de la figura, donde se representa un cuerpo unido a un muelle que tiene una elongación $x = 0$:



En ese momento (1), recibe un empujón y adquiere una celeridad de 1,5 m/s. Llamemos (2) al punto correspondiente a la elongación máxima:



La frecuencia angular es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{150}{0{,}250}} = 24{,}5 \text{ rad/s}$$

Y, por tanto:

$$\upsilon = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = 3{,}9 \text{ s}^{-1}$$

Para calcular la amplitud de la oscilación vamos a igualar las energías en los puntos 1 y 2:

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2; \quad E_{c,2} = 0$$

$$E_{p,1} = 0; \quad E_{p,2} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

Igualando:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \rightarrow v_1^2 = \frac{k}{m} \cdot A^2 = \omega^2 \cdot A^2$$

como debe ser, puesto que ya sabemos que en un MAS:

$$v = \pm \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

Y como la velocidad máxima se alcanza en $x = 0$:

$$v_{máx} = \pm v_1 = \pm \omega \cdot A$$

Por tanto:

$$A = \frac{v_1}{\omega} = \frac{1{,}5}{24{,}5} = 0{,}061 \text{ m}$$

Vamos a obtener las expresiones de E_c, E_p y E_m en función del tiempo. La forma general de $x(t)$ es:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0)$$

Como en $t = 0$, $x = 0$, hemos de tener: $\phi_0 = 0$:

$$x(t) = 0{,}061 \cdot \text{sen}(24{,}5 \cdot t) \text{ m}$$

La expresión de la velocidad es:

$$v(t) = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0) = 1{,}5 \cdot \cos(24{,}5 \cdot t) \text{ m/s}$$

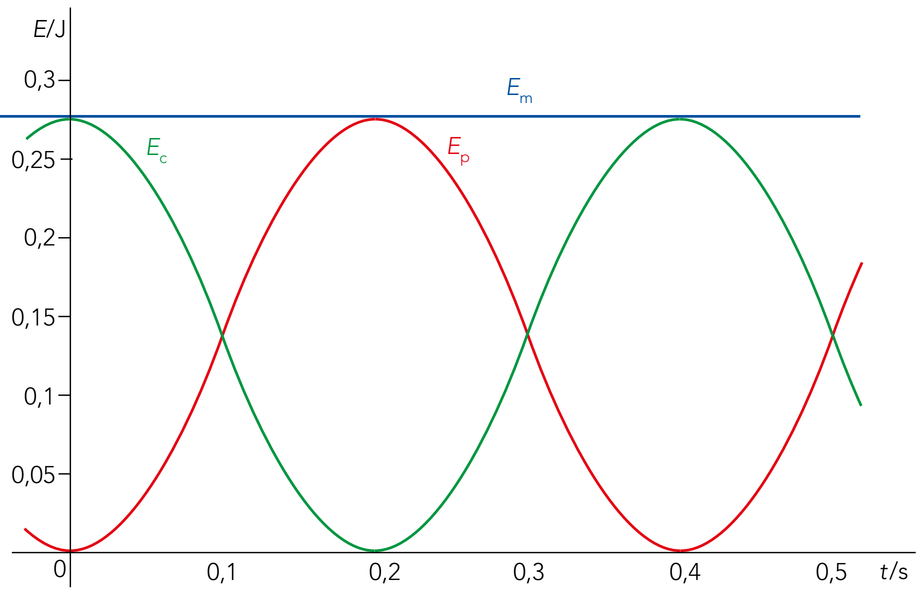
Por tanto:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}250 \cdot 1{,}5^2 \cdot \cos^2(24{,}5 \cdot t) = 0{,}28 \cdot \cos^2(24{,}5 \cdot t) \text{ J}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 0{,}194^2 \cdot \text{sen}^2(7{,}75 \cdot t) = 0{,}28 \cdot \text{sen}^2(24{,}5 \cdot t) \text{ J}$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 = 0{,}28 \text{ J}$$

Este valor corresponde a $E_c + E_p$. La representación gráfica es la siguiente:



24 **Deduce la expresión más general de la energía cinética, la energía potencial y la energía mecánica en función del tiempo, para un oscilador armónico.**

Sabemos que la forma más general de la elongación en función del tiempo viene dada por:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0)$$

Por tanto:

$$v(t) = \pm\omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2} = \pm\omega \cdot \sqrt{A^2 - A^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t + \phi_0)} =$$

$$= \pm\omega \cdot A \cdot \sqrt{1 - \text{sen}^2(\omega \cdot t + \phi_0)} =$$

$$= \pm\omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)$$

Entonces, la energía cinética tendrá la siguiente expresión:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \phi_0)$$

Y la potencial:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t + \phi_0) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t + \phi_0)$$

Sumando ambas tenemos la energía mecánica en función del tiempo:

$$E_m = E_c + E_p =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \phi_0) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t + \phi_0) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \underbrace{(\cos^2(\omega \cdot t + \phi_0) + \text{sen}^2(\omega \cdot t + \phi_0))}_{=1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

25 **Un péndulo de 3 m de longitud y 150 g de masa realiza oscilaciones pequeñas, de 10°.**

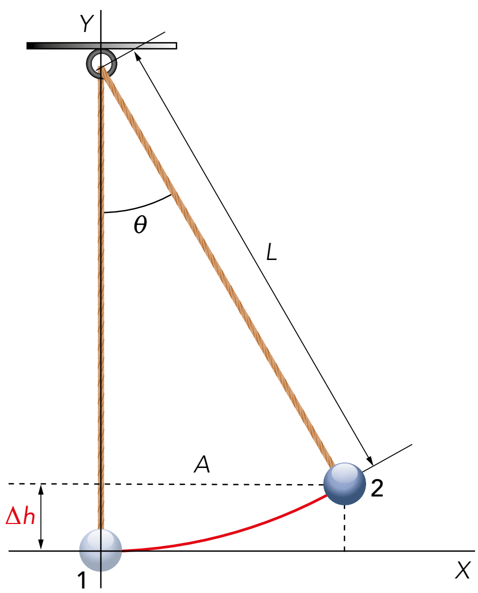
a) Halla una expresión de $v_{máx}$ en función de g, L y de la amplitud angular de la oscilación, θ.

b) Comprueba que, para ángulos muy pequeños, se tiene, con muy buena aproximación:

$$v_{máx} \cong \omega \cdot A \quad ; \quad A \cong L \cdot \theta \quad ; \quad h \cong L \cdot \theta^2/2.$$

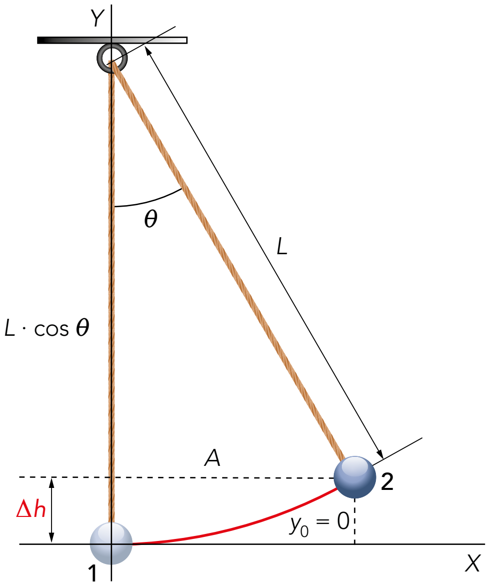
c) Calcula la energía mecánica del péndulo.

a) Consideremos el siguiente péndulo simple, como el que vimos en la unidad 9:



Donde θ es la amplitud angular máxima de su movimiento. Vamos a seguir el procedimiento visto en esta sección.

1) Tomamos un sistema de coordenadas con origen en el punto 1 y con el eje *Y* hacia arriba (observa qué diferencias existen respecto a cómo interesaba tomar el sistema de referencia cuando se resolvía el problema recurriendo a las leyes de Newton). El punto 2 es el de la máxima separación del equilibrio:



Por tanto:

$$y_1 = 0; \quad y_2 = L \cdot (1 - \cos\theta)$$

2) Las únicas fuerzas que actúan son el peso, que es conservativa, y la tensión de hilo, que no realiza trabajo. Por tanto, usaremos la conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_m = 0$$

3) Calculemos las energías cinética y potencial en los puntos 1 y 2:

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{máx}^2 \, ; \quad E_{c,2} = 0$$

$$E_{p,1} = 0; \quad E_{p,2} = m \cdot g \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot L \cdot (1 - \cos\theta)$$

4) Por último, igualamos:

$$E_{c,1} + E_{c,2} = E_{p,1} + E_{p,2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{máx}^2 = m \cdot g \cdot L \cdot (1 - \cos\theta)$$

$$v_{máx}^2 = 2 \cdot g \cdot L \cdot (1 - \cos\theta) \rightarrow v_{máx} = \sqrt{2 \cdot g \cdot L \cdot (1 - \cos\theta)}$$

Observa que θ es la amplitud angular de la oscilación.

b) Para comprobar la primera de las aproximaciones, consideremos:

$$\frac{v_{máx}}{A} = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot L \cdot (1 - \cos\theta)}}{A}$$

Observa en la imagen anterior que:

$$A = L \cdot \text{sen}\,\theta$$

Por tanto:

$$\frac{v_{\text{máx}}}{A} = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (1 - \cos \theta)}{L \cdot \text{sen}^2 \theta}}$$

Puedes comprobar que, cuando el ángulo θ es muy pequeño:

$$\frac{1 - \cos \theta}{\text{sen}^2 \theta} \approx 0{,}5$$

Por ejemplo, para $\theta = 10°$:

$$\frac{1 - \cos \theta}{\text{sen}^2 \theta} = \frac{1 - \cos 10°}{\text{sen}^2 10°} = \frac{1 - 0{,}984\,8}{0{,}173\,7^2} = 0{,}503\,8$$

Por tanto:

$$\frac{v_{\text{máx}}}{A} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot 0{,}5}{L}} = \sqrt{\frac{g}{L}} = \omega$$

De donde ya tenemos:

$$v_{\text{máx}} \approx A \cdot \omega$$

De hecho, para el ejemplo propuesto:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{9{,}8}{3}} = 1{,}81\ \text{s}^{-1}$$

Observemos que en este caso:

$$A = L \cdot \text{sen}\ \theta = 3 \cdot \text{sen}\ 10° = 0{,}52\ \text{m}$$

Por tanto:

$$v_{\text{máx}} \approx 0{,}52 \cdot 1{,}81 = 0{,}94\ \text{m/s}$$

Veamos la segunda de las aproximaciones. Partimos de la expresión:

$$A = L \cdot \text{sen}\ \theta$$

Puedes comprobar que, para ángulos pequeños:

$$\text{sen}\ \theta \approx \theta$$

donde θ tiene que estar en radianes. En efecto:

$$\theta = 10° = 10 \cdot \frac{\pi}{180} = 0{,}174\,5\ \text{rad} \rightarrow \text{sen}\ \theta = 0{,}173\,7 \approx \theta$$

Por tanto:

$$A \approx L \cdot \theta$$

En nuestro ejemplo (no olvides que usamos el valor de θ en radianes):

$$A = 0{,}5210\ \text{m}$$

$$L \cdot \theta = 3 \cdot 0{,}1745 = 0{,}5235\ \text{m}$$

Ambos valores coinciden hasta la segunda cifra decimal.

Veamos la última de las aproximaciones. De nuevo, para ángulos pequeños:

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

donde, como antes, θ ha de estar en radianes. Por ejemplo:

$$\theta = 10° = 0{,}1745 \text{ rad} \rightarrow \cos\theta = 0{,}9848$$

$$1 - \frac{\theta^2}{2} = 1 - \frac{0{,}174\,5^2}{2} = 1 - 0{,}015\,2 = 0{,}984\,8$$

Es decir, coinciden hasta la cuarta cifra decimal. Por tanto:

$$1 - \cos\theta \approx 1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{\theta^2}{2}$$

Y ya tenemos:

$$y_2 = L \cdot (1 - \cos\theta) \approx L \cdot \frac{\theta^2}{2}$$

En nuestro ejemplo concreto:

$$y_2 = L \cdot (1 - \cos\theta) = 3 \cdot (1 - \cos 0{,}1745) = 0{,}0456 \text{ m}$$

$$L \cdot \frac{\theta^2}{2} = 3 \cdot \frac{0{,}174\,5^2}{2} = 0{,}045\,7 \text{ m}$$

Coinciden hasta la tercera cifra decimal.

c) Podemos tomar, por ejemplo, el punto 1:

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{máx}^2 \approx \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2$$

$$E_{p,1} = 0$$

Luego:

$$E_m = E_{c,1} + E_{p,1} \approx \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot 0{,}150 \cdot 0{,}521^2 \cdot 1{,}81^2 = 0{,}067 \text{ J}$$

Si hubiéramos tomado el punto 2:

$$E_{c,2} = 0$$

$$E_{p,2} = m \cdot g \cdot y_2 = m \cdot g \cdot L \cdot (1 - \cos\theta)$$

Utilizando la tercera de las aproximaciones vistas en el apartado anterior:

$$E_{p,2} = m \cdot g \cdot y_2 \approx m \cdot g \cdot L \cdot \frac{\theta^2}{2}$$

y, empleando la segunda de las aproximaciones:

$$A \approx L \cdot \theta \rightarrow \theta^2 \approx \frac{A^2}{L^2}$$

Con lo que ya tenemos:

$$E_{p,2} \approx \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot L \cdot \frac{A^2}{L^2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{g}{L} \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2$$

Y, de nuevo, obtenemos la misma expresión que antes:

$$E_m = E_{c,2} + E_{p,2} \approx \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2$$

Como hemos podido comprobar, el movimiento de un péndulo corresponde de forma aproximada a un OA cuando las oscilaciones tienen una amplitud muy pequeña.

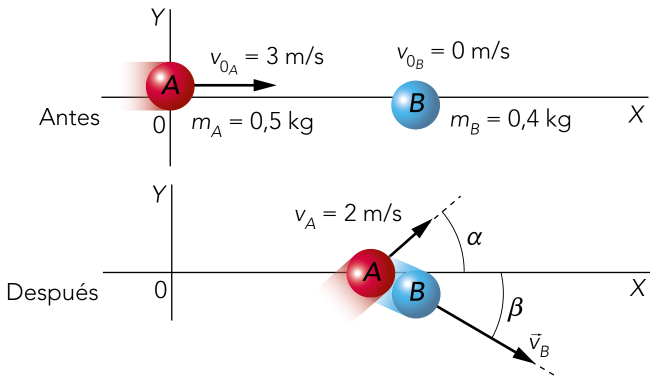
Página 291

26 ODS **Explica cómo se cumple el principio de conservación de la energía en una central solar fotovoltaica. ¿Crees que una central de este tipo cumple las metas 9.1 y 9.a de los objetivos de desarrollo sostenible?**

Para poder responder a esta actividad, le sugerimos que recomiende a su alumnado la visualización de los vídeos sobre las metas citadas, disponibles en **anayaeducacion.es**.

Respuesta abierta.

27 **La figura muestra un choque elástico entre dos discos que se desplazan sin fricción. Después de la colisión, el disco *A* se mueve en una dirección α desconocida. Calcula los valores de v_B, α y β.**



Para analizar esta colisión, tomamos los ejes de coordenadas como se muestra en la figura del enunciado.

Vamos a aplicar la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía cinética. Consideremos las dos componentes del momento lineal:

$$\left.\begin{array}{r} p_{0A,x} + p_{0B,x} = p_{A,x} + p_{B,x} \\ p_{0A,y} + p_{0B,y} = p_{A,y} + p_{B,y} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} m_A \cdot v_{0A,x} + m_B \cdot v_{0B,x} = m_A \cdot v_{A,x} + m_B \cdot v_{B,x} \\ m_A \cdot v_{0A,y} + m_B \cdot v_{0B,y} = m_A \cdot v_{A,y} + m_B \cdot v_{B,y} \end{array}\right\}$$

Ahora usamos:

$$v_{0_{A,x}} = 3 \text{ m/s}; \quad v_{0_{A,y}} = 0$$

$$v_{0_{B,x}} = 0; \quad v_{0_{B,Y}} = 0$$

$$v_{A,x} = 2 \cdot \cos\alpha; \quad v_{0_{A,Y}} = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha$$

$$v_{B,x} = v_B \cdot \cos\beta; \quad v_{B,y} = v_B \cdot \text{sen}\,\beta$$

Y ya tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}5 \cdot 3 = 0{,}5 \cdot 2 \cdot \cos\alpha + 0{,}4 \cdot v_B \cdot \cos\beta \quad (1) \\ 0 = 0{,}5 \cdot 2 \cdot \text{sen}\,\alpha + 0{,}4 \cdot v_B \cdot \text{sen}\,\beta \quad (2) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 1{,}5 = \cos\alpha + 0{,}4 \cdot v_B \cdot \cos\beta \quad (1) \\ 0 = \text{sen}\,\alpha + 0{,}4 \cdot v_B \cdot \text{sen}\,\beta \quad (2) \end{array}\right\}$$

Vemos que tenemos tres incógnitas: v_B, α y β. Para obtener una ecuación más usamos la conservación de la energía cinética, ya que se dice que el choque es elástico:

$$\frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_{0A}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_{0B}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_A^2 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_B^2$$

$$0{,}5 \cdot 3^2 + 0 = 0{,}5 \cdot 2^2 + 0{,}4 \cdot v_B^2$$

De donde tenemos:

$$v_B = 2{,}5 \text{ m/s}$$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones (1) y (2) tenemos:

$$(1)\ \cos\alpha + \cos\beta = 1{,}5$$

$$(2)\ \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = 0$$

Podemos resolver este sistema de la siguiente manera:

$$(2) \rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\text{sen}\,\beta \rightarrow \alpha = -\beta \rightarrow \cos\alpha = \cos\beta$$

Sustituyendo en la ecuación (1):

$$2 \cdot \cos\beta = 1{,}5 \rightarrow \cos\beta = 0{,}75 \rightarrow \beta = 41{,}4°$$

$$\alpha = -41{,}4°$$

Otra forma de resolver este tipo de sistemas de ecuaciones es la siguiente. Primero las elevamos al cuadrado:

$$\begin{cases} (1)\ \cos^2\alpha = (1{,}5 - \cos\beta)^2 = 2{,}25 + \cos^2\beta - 3 \cdot \cos\beta \\ (2)\ \text{sen}^2\,\alpha = \text{sen}^2\,\beta \end{cases}$$

Ahora, las sumamos:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \text{sen}^2\,\beta + 2{,}25 + \cos^2\beta - 3 \cdot \cos\beta$$

Usando que:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

y lo mismo para β, queda:

$$1 = 1 + 2{,}25 - 3 \cdot \cos\beta$$

$$2{,}25 = 3 \cdot \cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{2{,}25}{3} = 0{,}75 \rightarrow \beta = 41{,}4°$$

Y ya tenemos:

$$\alpha = -41{,}4°$$

Por tanto:

$$v_{A,x} = v_A \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \cos(-41{,}4°) = 1{,}44 \text{ m/s};$$

$$v_{0A,y} = v_A \cdot \text{sen}\,\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,(-41{,}4°) = -1{,}39 \text{ m/s}$$

$$v_{B,x} = v_B \cdot \cos\beta = 2{,}5 \cdot \cos 41{,}4° = 1{,}88 \text{ m/s};$$

$$v_{B,y} = v_B \cdot \text{sen}\,\beta = 2{,}5 \cdot \text{sen}\,41{,}4° = 1{,}65 \text{ m/s}$$

Comprobemos que, efectivamente, se conserva la cantidad de movimiento:

$$\text{Componente } x\text{:}\begin{cases} m_A \cdot v_{0A,x} + m_B \cdot v_{0B,x} = 1{,}5 \text{ m/s} \\ m_A \cdot v_{A,x} + m_B \cdot v_{B,x} = 0{,}72 + 0{,}75 = 1{,}47 \approx 1{,}5 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\text{Componente } y\text{:}\begin{cases} m_A \cdot v_{0A,y} + m_B \cdot v_{0B,y} = 0 \\ m_A \cdot v_{A,y} + m_B \cdot v_{B,y} = 0{,}695 + 0{,}66 \approx 0 \end{cases}$$

y la energía cinética:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_{0A}^2 + \dfrac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_{0B}^2 = 2{,}25 \text{ m/s} \\ \dfrac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_A^2 + \dfrac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_B^2 = 2{,}25 \text{ m/s} \end{cases}$$

Una última observación: hemos obtenido que α es negativo y β positivo. Es decir, la partícula *A* sale despedida hacia abajo y la *B* hacia arriba. ¿Por qué, entonces, se representó al revés en el enunciado del ejercicio? Para que te des cuenta de que cuando uno trabaja con componentes, da igual cómo se tomen las direcciones de cada vector a la hora de representarlos. Al final cada una de ellas tendrá su signo, y se comprobará si esta era correcta o no, pero esto no influye en el resultado final. Cuando se trabaja con módulos, sí que hay que saber de antemano hacia donde están dirigidos los vectores, para incluir el signo «a mano».

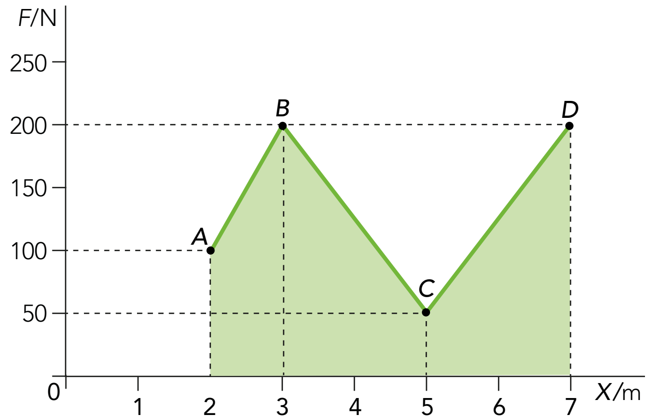
TRABAJA CON LO APRENDIDO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.1.2. (EA.1.2.1.-1.2.2.) CE.8.1. (EA.8.1.1.-8.1.2.) CE.8.2. (EA.8.2.1.) CE.8.3. (EA.8.3.1.-8.3.2.)

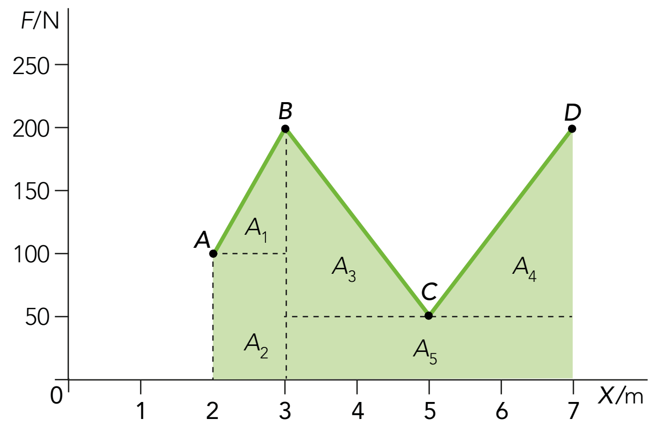
Página 298

Trabajo

1 **Calcula el trabajo total realizado por la fuerza variable que se muestra en la gráfica siguiente, sobre un cuerpo que se mueve a lo largo del eje *X*, desde *x* = 2 m hasta *x* = 7 m.**



El trabajo realizado por una fuerza variable viene dado por el área bajo la curva $F(x)$. Dicha área puede descomponerse como se muestra en la figura siguiente:



$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 200 = 100 \text{ J}$$

$$A_2 = 1 \cdot 100 = 100 \text{ J}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 150 = 150 \text{ J}$$

$$A_4 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 150 = 150 \text{ J}$$

$$A_5 = 4 \cdot 50 = 200 \text{ J}$$

Por tanto, el trabajo total será:

$$W = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 700 \text{ J}$$

2 **Una fuerza constante $\vec{F} = (-7 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{i})$ N actúa sobre una partícula que realiza un desplazamiento dado por: $\Delta\vec{r} = (4 \cdot \vec{i} + 7 \cdot \vec{j})$ m. Calcula el trabajo realizado por la fuerza sobre el cuerpo. ¿Qué podemos concluir del resultado obtenido?**

El trabajo viene dado por el producto escalar de los dos vectores. Por tanto:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = (-7 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}) \cdot (4 \cdot \vec{i} + 7 \cdot \vec{j}) = -7 \cdot 4 + 4 \cdot 7 = 0 \text{ J}$$

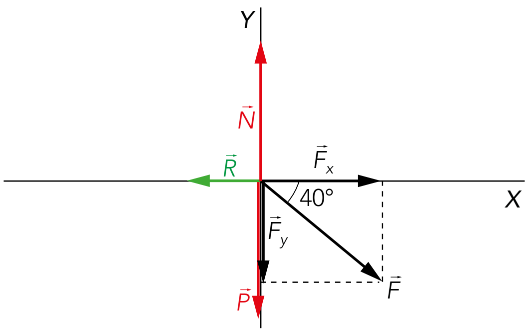
Luego, la fuerza es perpendicular al desplazamiento. En efecto, recuerda que cuando el producto escalar de dos vectores no nulos es cero, es que son perpendiculares:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \phi = 0 \rightarrow \cos \phi = 0 \rightarrow \phi = 90°$$

3 **Un cuerpo de 10 kg de masa se desplaza 20 m por una superficie horizontal sometida a una fuerza de 200 N que forma 40° con la dirección de movimiento. Calcula el trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, sabiendo que el coeficiente de rozamiento es μ = 0,3.**

Fe de erratas de la primera edición del libro del alumnado: El enunciado tiene una errata. El ángulo que forma la fuerza con la dirección de movimiento debe ser de –40°. De lo contrario, la fuerza levantaría el objeto.

El diagrama de fuerzas es el siguiente:



Calculamos el trabajo realizado por cada una de ellas:

Fuerza $\vec{F}$:

$$W_1 = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot s \cdot \cos 40° = 200 \cdot 20 \cdot 0{,}77 = 3\,080 \text{ J}$$

Fuerza normal:

Como es perpendicular al desplazamiento, no realiza trabajo.

Peso:

Tampoco realiza trabajo, por la misma razón que antes.

Como la fuerza que mueve al objeto lo empuja en parte contra el suelo, la componente vertical de esta fuerza se suma a la normal para calcular el rozamiento.

Fuerza de rozamiento: $R = \mu \cdot (N + F_y) = \mu \cdot (m \cdot g + F \cdot \text{sen } 40°) = 0{,}3 \cdot (10 \cdot 9{,}8 + 200 \cdot 0{,}64) = 67{,}8$ N

$$W_2 = \vec{R} \cdot \Delta \vec{r} = -R \cdot s = -67{,}8 \cdot 20 = -1\,356 \text{ J}$$

Por tanto, el trabajo total será:

$$W = W_1 + W_2 = 1\,724 \text{ J}$$

4 **Para estirar un muelle una distancia de 10 cm es necesario realizar un trabajo de 125 J. Calcula la constante del muelle y la fuerza elástica cuando el alargamiento es de 5 cm.**

Recordando lo visto en el ejercicio resuelto 5, el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ que estira un muelle desde x_0 = 0 hasta un cierto alargamiento, x, viene dado por:

$$W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Por lo tanto:

$$k = \frac{2 \cdot W}{x^2} = \frac{2 \cdot 125 \text{ J}}{0{,}1^2 \text{ m}^2} = 25\,000 \text{ N/m}$$

donde hemos usado que 1 J = 1 N · m, luego:

$$\frac{\text{J}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Así pues, cuando el alargamiento es de 5 cm, el módulo de la fuerza elástica será:

$$F_e = k \cdot x = 25\,000 \cdot 0{,}05 = 1\,250 \text{ N}$$

Energía cinética

5 **Si el cuerpo del ejercicio 1, de 2 kg de masa, tenía inicialmente, en *x* = 2 m, una rapidez de 20 m/s hacia la derecha, calcula su rapidez en *x* = 7 m.**

Usando el teorema de la energía cinética, tenemos:

$$W = \Delta E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2) \rightarrow v_2^2 = \frac{2 \cdot W}{m} + v_1^2$$

$$v_2^2 = \frac{2 \cdot 700}{2} + 20^2 = 1\,100 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_2 = 33{,}2 \text{ m/s}$$

6 **Un vehículo de 750 kg se desplaza horizontalmente con una rapidez de 60 km/h. Calcula la fuerza de frenado si se detiene en 200 m.**

Inicialmente, el vehículo tenía una energía cinética de:

$$E_{c,i} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2$$

Pasando la celeridad inicial a m/s:

$$v_i = \frac{60 \text{ km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} = 16{,}67 \text{ m/s}$$

$$E_{c,i} = \frac{1}{2} \cdot 750 \cdot 16{,}67^2 = 104\,208 \text{ J}$$

Como al final se detiene, su energía cinética será nula. Por tanto, el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento será:

$$W = \Delta E_c = E_{c,f} - E_{c,i} = -104\,208 \text{ J}$$

Puesto que se detiene después de 200 m de recorrido:

$$W = -R \cdot s \rightarrow R = -\frac{W}{s} = \frac{104\,208}{200} = 521 \text{ N}$$

Observa que, en este caso, *R* representa el módulo de la fuerza de rozamiento y, por tanto, tiene que salir positivo.

7 **Demuestra la siguiente expresión para la energía cinética de un cuerpo de masa *m* que tiene una cantidad de movimiento *p*:**

$$E_c = \frac{p^2}{2 \cdot m}$$

De la definición de cantidad de movimiento:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

tenemos:

$$v^2 = |\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\vec{p}}{m} = \frac{|\vec{p}|^2}{m^2} = \frac{p^2}{m^2}$$

Sustituyendo en la definición de energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{p^2}{m^2} = \frac{p^2}{2 \cdot m}$$

Observa que esta fórmula es válida para cualquier tipo de movimiento, no tiene por qué ser necesariamente en una dimensión. Solo hay que tener en cuenta que p^2 es el módulo del vector $\vec{p}$, al cuadrado.

8 Sobre un cuerpo de 500 g de masa que realiza un MRUA actúa una fuerza de rozamiento constante de 10 N. Si la rapidez inicial es de 40 km/h, calcula el espacio recorrido antes de pararse, utilizando razonamientos energéticos.

Utilizamos el teorema de la energía cinética:

$$W = \Delta E_c = E_{c,f} - E_{c,i}$$

Tenemos en cuenta que la energía cinética final es cero, por lo que:

$$W = -E_{c,i} = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 \rightarrow -R \cdot s = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2$$

$$s = \frac{m \cdot v_i^2}{2 \cdot R}$$

Pasamos la rapidez inicial a m/s:

$$v_i = \frac{40\ \text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\,000\ \text{m}}{1\ \text{km}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} = 11{,}11\ \text{m/s}$$

y ya tenemos:

$$s = \frac{0{,}5 \cdot 11{,}11^2}{2 \cdot 10} = 3{,}09\ \text{m}$$

9 ODS Según los datos del objetivo 7 de los ODS sabemos que a nivel mundial y en los últimos años, más del 20% de la energía se generó a través de fuentes renovables.

a) Investiga y cita dos fuentes renovables que utilicen la energía cinética y explica brevemente cómo funcionan.

b) Piensa y responde: ¿cuál crees que es la fuente de energía renovable más utilizada en España? Ahora busca información y contrasta tu respuesta. ¿En qué parte de España es más utilizada dicha fuente?

c) ¿A qué crees que se debe este hecho?

En **anayaeducacion.es** se pueden consultar los vídeos sobre las principales metas fijadas para dar cumplimiento al objetivo 7 de los ODS.

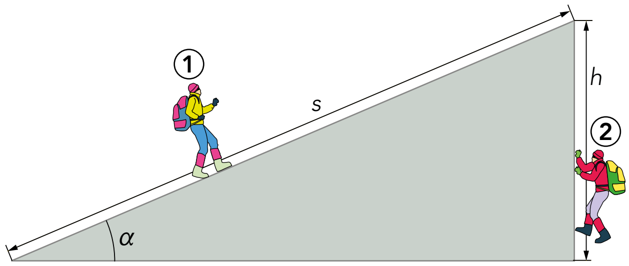
Respuesta libre.

Energía potencial

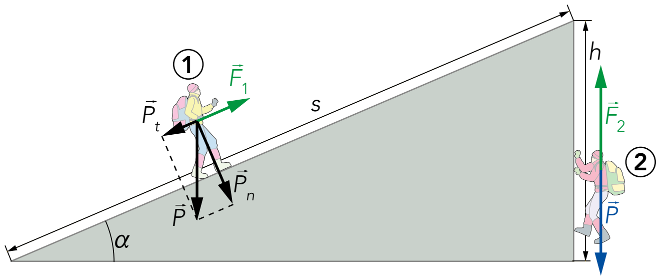
10 Dos personas de masas idénticas suben una montaña. La primera lo hace caminando por su ladera, que tiene una pendiente α, y la segunda escalando por un acantilado que hay por su parte posterior, como se muestra en la figura. Determina:

a) El cociente entre las fuerzas que han de realizar si ambos suben a velocidad constante.

b) El trabajo que han de realizar en ambos casos. Interpreta el resultado usando argumentos energéticos.



a) Vamos a calcular la fuerza que tienen que ejercer los dos escaladores:



Escalador 1:

$$F_1 - P_t = 0 \rightarrow F_1 = P_t = m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Escalador 2:

$$F_2 - P = 0 \rightarrow F_2 = P = m \cdot g$$

Por lo tanto, el cociente entre las fuerzas es:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha}{m \cdot g} = \text{sen}\,\alpha < 1$$

Como podemos comprobar, el escalador 1 tiene que realizar una fuerza menor.

b) Ahora, vamos a calcular el trabajo que tiene que realizar cada uno de ellos:

Escalador 1:

$$W_1 = F_1 \cdot s = m \cdot g \cdot s \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Escalador 2:

$$W_2 = F_2 \cdot s = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot s \cdot \text{sen}\,\alpha$$

donde hemos utilizado que:

$$h = s \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Como vemos, el trabajo que han de realizar es el mismo. Esto se debe a que tienen que ejercer una fuerza que se opone a la gravitatoria, y esta es conservativa. Por lo tanto, el trabajo no dependerá de la trayectoria seguida, sino únicamente de la diferencia de alturas.

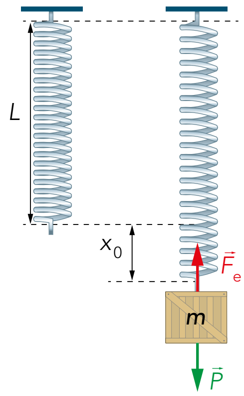
De hecho, el trabajo realizado por una fuerza en contra del campo gravitatorio viene dado por:

$$W = \Delta E_p$$

Como ΔE_p depende, como decimos, únicamente de la diferencia de alturas, y no del camino seguido, lo mismo le ocurrirá a W.

11 **Un muelle se alarga 5 cm cuando se cuelga de él un cuerpo de 100 g de masa. Calcula qué trabajo hay que realizar para estirar ese muelle otros 5 cm más.**

Con el primer dato del problema, podemos calcular la constante elástica del muelle. Cuando se cuelga el cuerpo, se estira hasta que alcanza la posición de equilibrio. En ese momento:



$$\vec{P} + \vec{F}_e = 0 \rightarrow m \cdot g = k \cdot x_0 \rightarrow k = \frac{m \cdot g}{x_0}$$

Sustituyendo los valores:

$$k = \frac{m \cdot g}{x_0} = \frac{0{,}1 \cdot 9{,}8}{0{,}05} = 19{,}6 \text{ N/m}$$

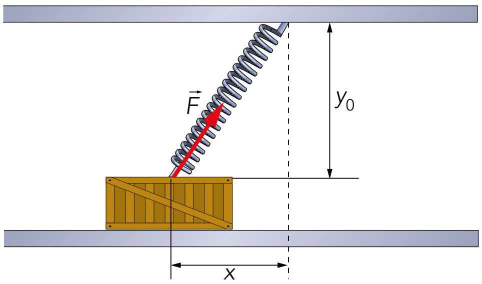
Como sabemos que el trabajo realizado por una fuerza que se opone a la elástica viene dado por:

$$W = \Delta E_p$$

ya tenemos:

$$W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x^2 - x_0^2) = \frac{1}{2} \cdot 19{,}6 \cdot (0{,}1^2 - 0{,}05^2) = 0{,}073\,5 \text{ J}$$

12 **El cuerpo de la figura está unido a un muelle de constante elástica *k*, y se fuerza, mediante unos rieles, a moverse horizontalmente. La longitud natural del muelle es y_0, por lo que cuando $x = 0$, el muelle no está estirado.**



a) Demuestra que la energía potencial acumulada en el muelle, en función de la distancia *x* viene dada por:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_0^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{x^2}{y_0^2} + 1} - 1\right)^2$$

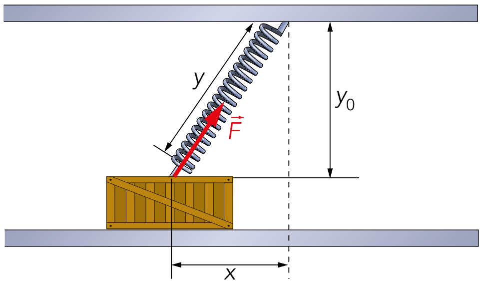
b) Sabiendo que para valores de *z* muy pequeños se verifica la siguiente aproximación:

$$\sqrt{z + 1} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot z$$

demuestra que para valores de *x* mucho menores que y_0 la energía potencial es, aproximadamente:

$$E_p \approx \frac{1}{8} \cdot k \cdot \frac{x^4}{y_0^2}$$

a) Vamos a denominar *y* a la longitud del muelle cuando el cuerpo se desplaza horizontalmente una distancia *x*:



Como el alargamiento es $y - y_0$, puesto que la longitud natural del muelle es y_0, la energía potencial vendrá dada por:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (y - y_0)^2$$

Teniendo en cuenta que:

$$y^2 = x^2 + y_0^2$$

obtenemos:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(\sqrt{x^2 + y_0^2} - y_0\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(y_0 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y_0^2} + 1} - y_0\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_0^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{x^2}{y_0^2} + 1} - 1\right)^2$$

b) Si la distancia *x* es muy pequeña, también lo será el cociente x^2 / y_0^2, por lo que tendremos:

$$\sqrt{\frac{x^2}{y_0^2} + 1} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{y_0^2}$$

y la energía potencial quedará:

$$E_p \approx \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_0^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{y_0^2} - 1\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_0^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{y_0^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_0^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{y_0^4} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot k \cdot \frac{x^4}{y_0^2}$$

Página 299

Energía mecánica. Conservación de la energía

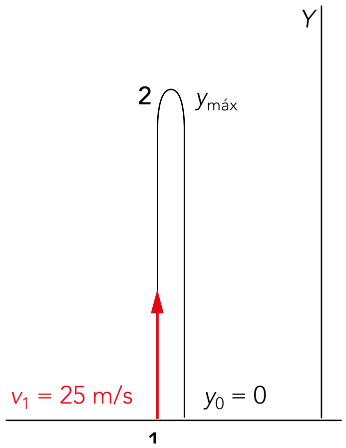
13 **Se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo de 2 kg de masa con una rapidez de 25 m/s.**

a) ¿Hasta qué altura subirá, si no hay rozamiento?

b) Sin embargo, se observa que cuando llega de nuevo al suelo lleva una celeridad de 20 m/s. Calcula la fuerza de rozamiento con el aire, y la altura máxima alcanzada.

a) Sigamos el procedimiento explicado en el apartado 5.

1. Tomamos un sistema de coordenadas con origen en el suelo, de modo que el eje *Y* esté dirigido verticalmente hacia arriba:



Por tanto:

$$y_1 = y_0 = 0; \quad y_2 = y_{máx}$$

2. La única fuerza que actúa es la gravedad, que es conservativa, por lo que utilizamos:

$$\Delta E_m = 0 \rightarrow E_{c,1} + E_{p,1} = E_{c,2} + E_{p,2}$$

3. Calculamos la energía mecánica en los puntos 1 y 2:

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2; \quad E_{p,1} = m \cdot g \cdot y_0 = 0 \rightarrow E_{m,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$

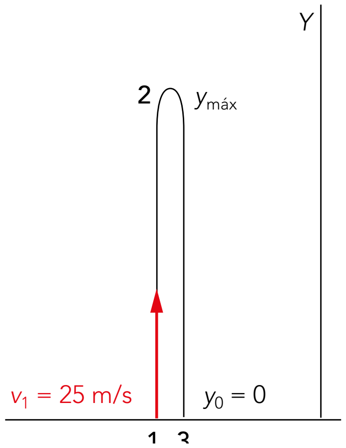
$$E_{c,2} = 0; \quad E_{p,2} = m \cdot g \cdot y_{máx} \rightarrow E_{m,2} = m \cdot g \cdot y_{máx}$$

4. Igualamos y despejamos $y_{máx}$:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = m \cdot g \cdot y_{máx} \rightarrow y_{máx} = \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{25^2}{2 \cdot 9{,}8} = 31{,}9 \text{ m}$$

b) Ahora, se pide que tengamos en cuenta la fricción con el aire.

1. Tomamos el sistema de coordenadas igual que antes, pero los puntos 1, 2 y 3 serán:



1: En el suelo, justo cuando sale disparado hacia arriba.

2: En el punto más alto de la trayectoria.

3: En el suelo, cuando cae.

Por tanto:

$$y_1 = y_0 = 0; \quad y_2 = y_{máx}; \quad y_3 = y_0 = 0$$

2. Como tenemos la fuerza de rozamiento, no se conservará la energía mecánica, por lo que usamos:

$$W_{NC} = \Delta E_m$$

3. Ahora, vamos a calcular las energías cinética y potencial en los puntos 1, 2 y 3, con objeto de aplicar dos veces la ecuación anterior, ya que tenemos dos incógnitas: $y_{máx}$ y R.

$$\left.\begin{array}{l} E_{c,1} = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2;\ \ E_{p,1} = m \cdot g \cdot y_0 = 0 \\ E_{c,2} = 0;\ \ E_{p,2} = m \cdot g \cdot y_{máx} \end{array}\right\} W_{NC,1\to 2} = -R \cdot y_{máx}$$

$$\left.\begin{array}{l} E_{c,1} = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2;\ \ E_{p,1} = m \cdot g \cdot y_0 = 0 \\ E_{c,3} = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_3^2;\ \ E_{p,3} = m \cdot g \cdot y_0 = 0 \end{array}\right\} W_{NC,1\to 3} = -2 \cdot R \cdot y_{máx}$$

En la segunda expresión, hemos tenido en cuenta que el espacio recorrido es dos veces $y_{máx}$.

4. Igualamos el trabajo no conservativo con la variación de energía mecánica:

$$W_{NC,1\to 2} = E_{c,2} + E_{p,2} - E_{c,1} - E_{p,1} \to -R \cdot y_{máx} = m \cdot g \cdot y_{máx} - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$

$$y_{máx} = \frac{m \cdot v_1^2}{2 \cdot (m \cdot g + R)}$$

$$W_{NC,1\to 3} = E_{c,3} + E_{p,3} - E_{c,1} - E_{p,1} \to -2 \cdot R \cdot y_{máx} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_3^2 - v_1^2)$$

$$y_{máx} = \frac{m \cdot (v_1^2 - v_3^2)}{4 \cdot R}$$

Sustituyendo en las dos expresiones los valores conocidos tenemos:

$$y_{máx} = \frac{2 \cdot 625}{2 \cdot (19{,}6 + R)} \qquad\qquad y_{máx} = \frac{2 \cdot 225}{4 \cdot R}$$

Igualando para resolver el sistema:

$$\frac{625}{19{,}6 + R} = \frac{112{,}5}{R} \to 625 \cdot R = 2\,205 + 112{,}5 \cdot R \to R = 4{,}3\ \text{N}$$

Sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores, por ejemplo, en la segunda:

$$y_{máx} = \frac{2 \cdot 225}{4 \cdot R} = \frac{112{,}5}{4{,}3} = 26{,}2\ \text{m}$$

Podemos comprobar que los resultados son correctos. Por ejemplo:

$$W_{NC,1\to 2} = -R \cdot y_{máx} = -4{,}3 \cdot 26{,}2 = -112{,}7\ \text{J}$$

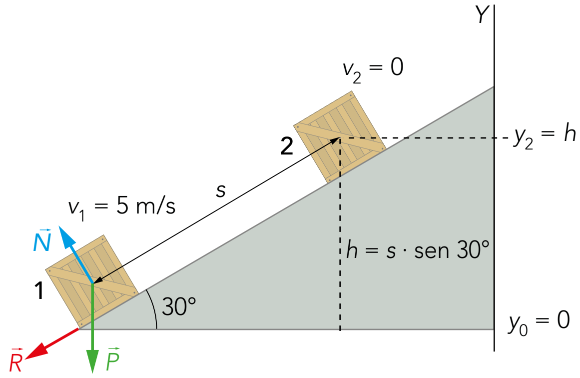
$$\Delta E_{m,1\to 2} = -113{,}5\ \text{J}$$

$$W_{NC,1\to 3} = -2 \cdot R \cdot y_{máx} = -2 \cdot 4{,}3 \cdot 26{,}2 = -225{,}3\ \text{J}$$

$$\Delta E_{m,1\to 3} = -225\ \text{J}$$

14 **Se le da un empujón a una caja de 12 kg de masa, proporcionándole una rapidez inicial de 5,0 m/s, para que suba por un plano inclinado 30°. Calcula qué distancia recorrerá si μ = 0,34. Cuando está en el punto más alto, vuelve a caer. ¿Con qué velocidad llega al punto desde el que partió?**

Para la primera parte del problema, tomamos el sistema de coordenadas en la base del plano inclinado, como se muestra en la figura siguiente:



Las fuerzas que actúan son la gravedad, la normal, que no realiza trabajo y la de rozamiento, que es no conservativa. Por tanto utilizaremos:

$$W_{NC} = \Delta E_m$$

Calculamos cada uno de los términos:

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2; \quad E_{p,1} = m \cdot g \cdot y_0 = 0$$

$$E_{c,2} = 0; \quad E_{p,2} = m \cdot g \cdot h$$

$$W_{NC} = -R \cdot s = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30° \cdot s$$

Pero s y h están relacionados mediante:

$$h = s \cdot \text{sen } 30° \rightarrow s = \frac{h}{\text{sen } 30°}$$

Y ya tenemos:

$$W_{NC} = -\frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot h}{\tan 30°}$$

Igualando:

$$W_{NC} = E_{c,2} + E_{p,2} - E_{c,1} - E_{p,1}$$

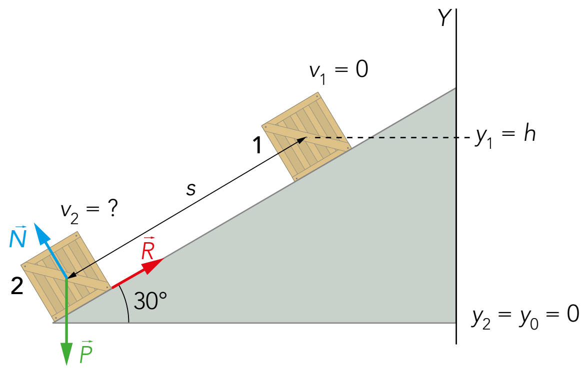
$$-\frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot h}{\tan 30°} = m \cdot g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \frac{v_1^2}{2 \cdot g \cdot \left(1 + \dfrac{\mu}{\tan 30°}\right)} = 0{,}80 \text{ m}$$

Por tanto, la distancia recorrida por el cuerpo será:

$$s = \frac{h}{\text{sen } 30°} = 1{,}60 \text{ m}$$

Para la segunda parte, tomamos el mismo sistema de coordenadas. Ahora el punto 1 será el más alto, y el 2, el de retorno:



De nuevo:

$$W_{NC} = -R \cdot s = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30° \cdot s = -\frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot h}{\tan 30°}$$

Calculamos ahora los valores de la energía en 1 y 2:

$$E_{c,1} = 0; \quad E_{p,1} = m \cdot g \cdot h$$

$$E_{c,2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2; \quad E_{p,2} = m \cdot g \cdot y_0 = 0$$

Por tanto:

$$W_{NC} = \Delta E_m = E_{c,2} + E_{p,2} - E_{c,1} - E_{p,1}$$

$$-\frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot h}{\tan 30°} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - m \cdot g \cdot h$$

$$v_2^2 = 2 \cdot g \cdot h \cdot \left(1 - \frac{\mu}{\tan 30°}\right) \rightarrow v_2 = 2{,}54 \text{ m/s}$$

Como vemos, vuelve con menos velocidad de la que partió. La energía cinética se ha disipado debido a la fuerza de rozamiento.

15 **Un ascensor de 1 500 kg de masa cae libremente, al romperse los cables que lo sostienen, desde una altura de 20 m. En ese instante se activa el sistema de seguridad, que ejerce una fuerza de rozamiento constante de 12 000 N. Al fondo del hueco hay un muelle de constante elástica k = 30 000 N/m.**

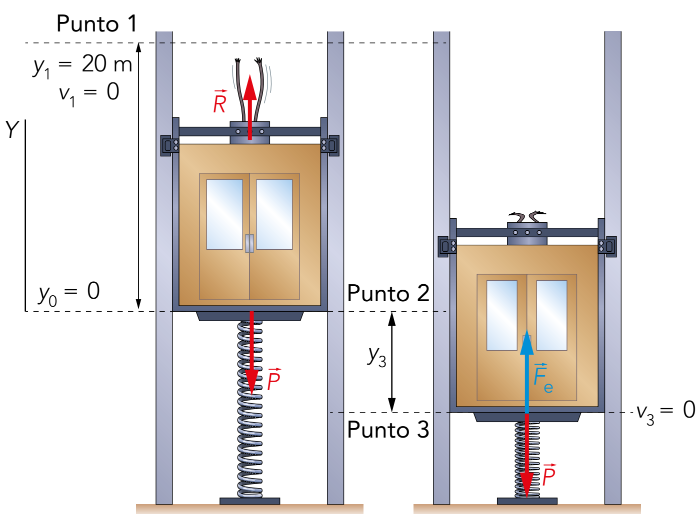
a) Calcula la celeridad con la que el ascensor llega al punto en el que toca el muelle.

b) Calcula cuánto se comprime este.

c) Determina el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento.

d) El muelle vuelve a su posición de equilibrio, por lo que el ascensor rebota. Calcula la altura a la que sube. Recuerda que, en todo momento, sigue actuando la fuerza de rozamiento.

a) 1) Tomamos el sistema de coordenadas con el origen de alturas en el punto en el que el muelle no está comprimido. Desde este, la altura a la que se encuentra el ascensor es de 20 m, como se muestra en la figura:



Por tanto:

$$y_1 = 20 \text{ m}; \quad y_2 = y_0 = 0$$

2) En este caso, actúa la gravedad y la fuerza de rozamiento, por lo que utilizamos:

$$W_{NC} = \Delta E_m$$

3) Calculamos las energías cinética y potencial en los puntos 1 y 2:

$$E_{c,1} = 0; \quad E_{p,1} = m \cdot g \cdot y_1$$

$$E_{c,2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2; \quad E_{p,2} = m \cdot g \cdot y_0 = 0$$

$$W_{NC} = -R \cdot y_1$$

donde hemos utilizado que $s = y_1 > 0$ y $R > 0$, ya que estamos trabajando con componentes, y la fuerza de rozamiento está dirigida hacia arriba.

4) Igualando:

$$W_{NC} = \Delta E_m = E_{c,2} + E_{p,2} - E_{c,1} - E_{p,1}$$

$$-R \cdot y_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - m \cdot g \cdot y_1$$

$$v_2^2 = \frac{2 \cdot y_1 \cdot (m \cdot g - R)}{m} \rightarrow v_2 = 8{,}49 \text{ m/s}$$

b) Ahora, vamos a calcular cuánto se comprime el muelle. Para ello, tenemos que añadir la energía potencial elástica a la energía mecánica (teniendo en cuenta que sigue actuando la fuerza de rozamiento).

1) El sistema de coordenadas es como el anterior:

$$y_2 = y_0 = 0; \quad y_3 < 0$$

2) $W_{NC} = \Delta E_m$

3) Calculamos la energía en los puntos 2 y 3, así como el trabajo no conservativo:

$$E_{c,2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2; \quad E_{p,g,2} = m \cdot g \cdot y_0 = 0; \quad E_{p,e,2} = 0$$

$$E_{c,3} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_3^2 = 0; \quad E_{p,g,3} = m \cdot g \cdot y_3 < 0; \quad E_{p,e,3} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_3^2$$

$$W_{NC} = -R \cdot s = R \cdot y_3$$

donde hemos utilizado que $s = -y_3 > 0$. Fíjate en que, de esta manera, ya sale directamente $W_{NC} < 0$ (la fuerza de rozamiento sigue actuando hacia arriba, por lo que $R > 0$).

4) Igualamos:

$$W_{NC} = \Delta E_m = E_{m,3} - E_{m,2} = E_{c,3} + E_{p,g,3} + E_{p,e,3} - E_{c,2} - E_{p,g,2} - E_{p,g,2} \rightarrow$$

$$\rightarrow R \cdot y_3 = m \cdot g \cdot y_3 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_3^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_3^2 + (m \cdot g - R) \cdot y_3 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = 0$$

Sustituyendo valores:

$$15\,000 \cdot y_3^2 + 2\,700 \cdot y_3 - 54\,000 = 0$$

Y ya, resolviendo la ecuación, tenemos dos soluciones:

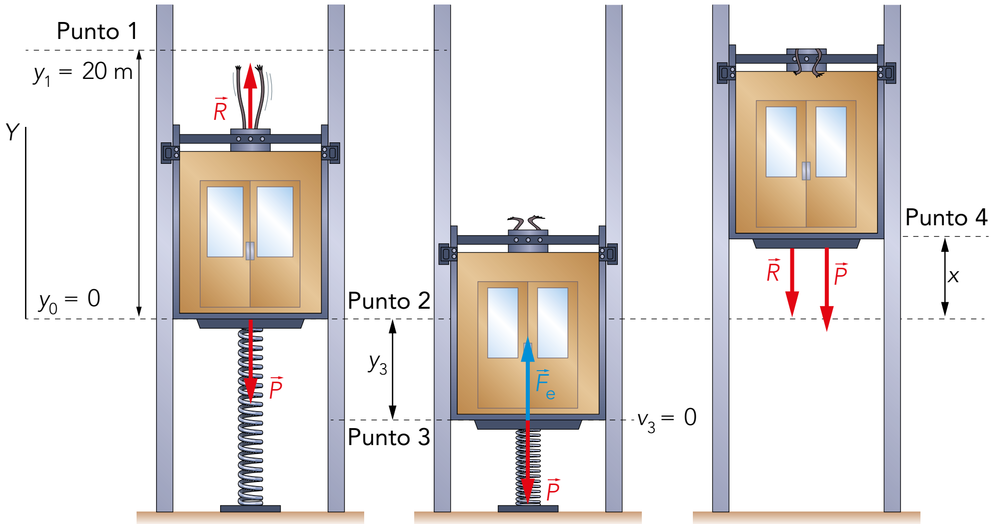
$$y_3 = -1{,}99 \text{ m}; \quad y_3 = 1{,}81 \text{ m}$$

La que nos interesa es la negativa, por lo que tenemos que el muelle se comprime 1,99 m.

c) Para calcular el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento, tenemos en cuenta que la distancia recorrida por el ascensor es $s = 20 + 1{,}99 = 21{,}99$ m. Por tanto:

$$W_{NC} = -R \cdot s = -12\,000 \cdot 21{,}99 = -263\,880 \text{ J}$$

d) Ahora el muelle se estira, volviendo a su posición de equilibrio, por lo que el muelle asciende, llegando hasta el punto 4:



Como vemos, el origen de alturas sigue siendo el mismo en todo momento. Vamos a comparar la energía en los puntos 3 y 4:

$$E_{c,3} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_3^2 = 0; \quad E_{p,g,3} = m \cdot g \cdot y_3 < 0; \quad E_{p,e,3} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_3^2$$

$$E_{c,4} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_4^2 = 0; \quad E_{p,g,4} = m \cdot g \cdot x; \quad E_{p,e,4} = 0$$

Ahora, la fuerza de rozamiento está dirigida hacia abajo, pues, como siempre, tiene sentido contrario al movimiento. Llamando, como hasta ahora, R al módulo de la fuerza de rozamiento, tenemos:

$$R = 12\,000 \text{ N} \rightarrow \vec{R} = -R \cdot \vec{j} = -12\,000 \cdot \vec{j} \text{ N}$$

Además, si $s > 0$ es el espacio recorrido y, por tanto, el módulo del vector desplazamiento:

$$s = x - y_3 \rightarrow \Delta\vec{r} = s \cdot \vec{j} = (x - y_3) \cdot \vec{j}$$

donde $x > 0$ e $y_3 < 0$.

Por tanto:

$$W_{NC} = \vec{R} \cdot \Delta\vec{r} = -R \cdot s = -R \cdot (x - y_3) < 0$$

Igualando:

$$W_{NC} = \Delta E_m = E_{m,4} - E_{m,3} = E_{c,4} + E_{p,g,4} + E_{p,e,4} - E_{c,3} - E_{p,g,3} - E_{p,g,3} \rightarrow$$

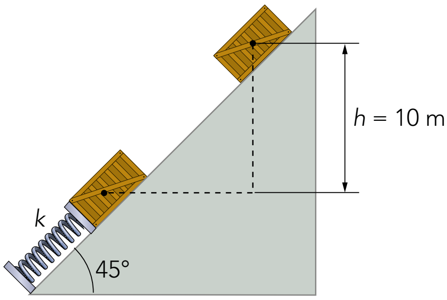
$$\rightarrow \; -R \cdot (x - y_3) = m \cdot g \cdot x - m \cdot g \cdot y_3 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_3^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x \cdot (m \cdot g + R) = y_3 \cdot (m \cdot g + R) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_3^2 \rightarrow$$

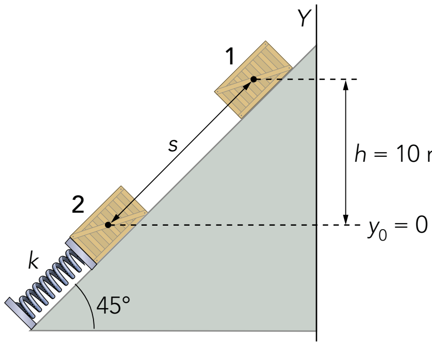
$$\rightarrow x = y_3 + \frac{k \cdot y_3^2}{2 \cdot (m \cdot g + R)} = -1{,}99 + \frac{30\,000 \cdot 1{,}99^2}{2 \cdot (1\,500 \cdot 9{,}8 + 12\,000)} = 0{,}24 \text{ m}$$

Fíjate en el papel que juega el rozamiento en el problema. Si no estuviera presente, debido a la conservación de la energía, el ascensor subiría hasta los 20 m iniciales. Sin embargo, ahora sube 0,24 m por encima del punto de reposo del muelle. Gracias al rozamiento, por tanto, el ascensor se detiene en uno o dos rebotes.

16 Un objeto de 0,5 kg de masa cae desde una altura de 10 m por un plano inclinado 45°, partiendo del reposo. En la parte inferior de dicho plano hay un muelle de constante elástica *k* = 800 N/m. Calcula a qué velocidad llega el cuerpo al muelle y cuánto se comprime este, considerando que el coeficiente de rozamiento entre el plano y el objeto es μ = 0,2.



1) Tomamos el sistema de coordenadas con el origen de alturas en el punto en el que el objeto toca al muelle, como se muestra en la figura:



$$y_1 = h = 10 \text{ m}; \quad y_2 = 0$$

2) Antes de tocar al muelle, las fuerzas que actúan son la gravedad, la normal, que no realiza trabajo, y la de rozamiento, por lo que utilizamos:

$$W_{NC} = \Delta E_m$$

3) Calculamos la energía cinética y potencial en los puntos 1 y 2:

$$E_{c,1} = 0; \quad E_{p,1} = m \cdot g \cdot h$$

$$E_{c,2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2; \quad E_{p,2} = m \cdot g \cdot y_0 = 0$$

$$W_{NC} = -R \cdot s$$

Teniendo en cuenta que:

$$s = \frac{h}{\text{sen}\, 45°}$$

y que:

$$R = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 45°$$

ya tenemos la expresión para el trabajo no conservativo:

$$W_{NC} = -R \cdot s = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 45° \cdot s = -\frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot h}{\tan 45°} = -\mu \cdot m \cdot g \cdot h$$

donde hemos tenido en cuenta que tan 45° = 1.

4) Igualamos:

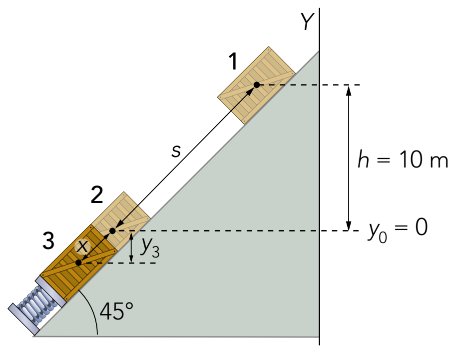
$$W_{NC} = \Delta E_m = E_{c,2} + E_{p,2} - E_{c,1} - E_{p,1}$$

$$-\mu \cdot m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - m \cdot g \cdot h$$

$$v_2^2 = 2 \cdot g \cdot h \cdot (1 - \mu) \rightarrow v_2 = 12{,}5 \text{ m/s}$$

Calculamos ahora cuánto se comprime el muelle. Seguimos la misma secuencia que antes:

1) Tomamos el mismo sistema de coordenadas, pero añadimos un punto, el 3, que es donde se detiene el cuerpo (máxima compresión del muelle):



Ten en cuenta que $y_3 < 0$ y que $x > 0$, pues es la distancia recorrida.

2) La fuerza que actúa ahora es la elástica, que es conservativa, y la de rozamiento, por lo que seguimos utilizando:

$$W_{NC} = \Delta E_m$$

3) Podemos tomar, o bien los puntos 1 y 3, o bien el 2 y el 3. Lo vamos a hacer de la primera forma. Intenta tú hacerlo de la segunda y comprueba que sale el mismo resultado, dentro de los errores de redondeo.

$$E_{c,1} = 0; \quad E_{p,g,1} = m \cdot g \cdot h\,; \quad E_{p,e,1} = 0$$

$$E_{c,3} = 0; \quad E_{p,g,3} = m \cdot g \cdot y_3 < 0; \quad E_{p,e,3} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

La relación entre y_3 y x es la siguiente (ten en cuenta que $x > 0$):

$$y_3 = -x \cdot \text{sen } 45°$$

El trabajo no conservativo viene dado por:

$$W_{NC} = -R \cdot s'$$

donde:

$$s' = s + x = \frac{h}{\text{sen } 45°} + x$$

por lo que, ya tenemos, utilizando que tan 45° = 1:

$$W_{NC} = R \cdot s' = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 45° \cdot \left(\frac{h}{\text{sen } 45°} + x\right) =$$

$$= -\mu \cdot m \cdot g \cdot (h + x \cdot \cos 45°)$$

4) Igualamos la variación de la energía mecánica y el trabajo no conservativo:

$$W_{NC} = \Delta E_m = E_{c,3} + E_{p,g,3} + E_{p,e,3} - E_{c,1} - E_{p,g,1} - E_{p,e,1}$$

$$-\mu \cdot m \cdot g \cdot (h + x \cdot \cos 45°) = \underbrace{-m \cdot g \cdot x \cdot \text{sen}\,45°}_{=E_{p,g,3}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2}_{=E_{p,e,3}} - \underbrace{m \cdot g \cdot h}_{=E_{p,g,1}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + x \cdot m \cdot g \cdot (\mu \cdot \cos 45° - \text{sen}\,45°) + m \cdot g \cdot h \cdot (\mu - 1) = 0$$

Sustituyendo valores:

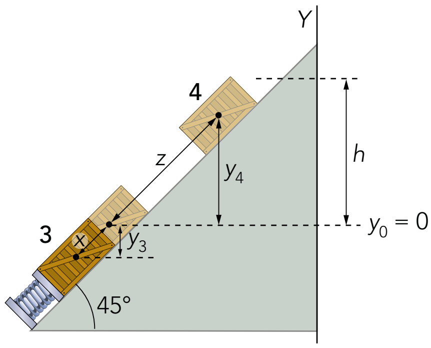
$$400 \cdot x^2 - 2{,}77 \cdot x - 39{,}2 = 0$$

Resolviendo la ecuación obtenemos dos soluciones:

$$x = -0{,}31 \text{ m}; \quad x = 0{,}32 \text{ m}$$

Como hemos tomado x positivo, la solución buscada es la segunda: el muelle se comprime 0,32 m.

Por último, calculamos la altura hasta la que sube el bloque cuando rebota. Llamemos 4 al punto más alto:



En este caso:

$$E_{c,3} = 0; \quad E_{p,g,3} = m \cdot g \cdot y_3 < 0; \quad E_{p,e,3} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

$$E_{c,4} = 0; \quad E_{p,g,4} = m \cdot g \cdot y_4; \quad E_{p,e,4} = 0$$

donde, al ser $x = 0{,}32$ m:

$$y_3 = -x \cdot \text{sen}\,45° = -0{,}32 \cdot 0{,}71 = -0{,}23 \text{ m}$$

y:

$$y_4 = z \cdot \text{sen}\,45°$$

El trabajo no conservativo viene dado por:

$$W_{NC} = -R \cdot s''$$

donde (recuerda que $y_3 < 0$):

$$s'' = x + z = -\frac{y_3}{\text{sen}\,45°} + \frac{y_4}{\text{sen}\,45°} = \frac{1}{\text{sen}\,45°} \cdot (y_4 - y_3)$$

Entonces:

$$W_{NC} = -R \cdot s'' = -\frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 45°}{\text{sen}\,45°} \cdot (y_4 - y_3) = -\mu \cdot m \cdot g \cdot (y_4 - y_3)$$

ya que tan 45° = 1.

Igualamos la variación de la energía mecánica y el trabajo no conservativo:

$$W_{NC} = \Delta E_m = E_{c,4} + E_{p,g,4} + E_{p,e,4} - E_{c,3} - E_{p,g,3} - E_{p,e,3}$$

$$-\mu \cdot m \cdot g \cdot (y_4 - y_3) = \underbrace{m \cdot g \cdot y_4}_{=E_{p,g,4}} - \underbrace{m \cdot g \cdot y_3}_{=E_{p,g,3}} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2}_{=E_{p,e,3}}$$

$$-\mu \cdot m \cdot g \cdot (y_4 - y_3) = m \cdot g \cdot (y_4 - y_3) - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

$$m \cdot g \cdot (1 + \mu) \cdot (y_4 - y_3) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

$$y_4 - y_3 = \frac{k \cdot x^2}{2 \cdot m \cdot g \cdot (1 + \mu)}$$

$$y_4 = y_3 + \frac{k \cdot x^2}{2 \cdot m \cdot g \cdot (1 + \mu)} = 6{,}74\ \text{m}$$

Como vemos, no sube hasta la altura inicial debido a la pérdida de energía por rozamiento

17 **Repite el ejercicio anterior suponiendo que inicialmente se empuja el cuerpo hacia abajo, imprimiéndole una celeridad de 12 m/s, siendo el coeficiente de rozamiento el mismo. Si el muelle se estira de nuevo y el objeto rebota hacia arriba, ¿hasta qué altura subirá?**

1) Empezamos el ejercicio igual que el anterior, con el mismo sistema de coordenadas:

$$y_1 = h = 10\ \text{m}; \quad y_2 = 0$$

2) Antes de tocar el muelle, las fuerzas que actúan son la gravedad, la normal, que no realiza trabajo, y la de rozamiento, por lo que utilizaremos:

$$W_{NC} = \Delta E_m$$

3) Calculamos la energía cinética y potencial en los puntos 1 y 2:

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2; \quad E_{p,1} = m \cdot g \cdot h$$

$$E_{c,2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2; \quad E_{p,2} = m \cdot g \cdot y_0 = 0$$

$$W_{NC} = -R \cdot s = -\mu \cdot m \cdot g \cdot h$$

4) Aplicamos la conservación de la energía:

$$W_{NC} = \Delta E_m = E_{c,2} + E_{p,2} - E_{c,1} - E_{p,1}$$

$$-\mu \cdot m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - m \cdot g \cdot h$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2 \cdot g \cdot h \cdot (1 - \mu) \rightarrow v_2 = 17{,}3\ \text{m/s}$$

Como vemos, se obtiene una rapidez mayor, ya que el objeto tenía inicialmente cierta energía cinética.

Para calcular cuánto se comprime el muelle, también seguimos el mismo procedimiento que antes (tomamos los puntos 1 y 3).

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2; \quad E_{p,g,1} = m \cdot g \cdot h; \quad E_{p,e,1} = 0$$

$$E_{c,3} = 0; \quad E_{p,g,3} = m \cdot g \cdot y_3 < 0; \quad E_{p,e,3} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

$$W_{NC} = -R \cdot s' = -\mu \cdot m \cdot g \cdot (h + x \cdot \cos 45°)$$

Por tanto:

$$W_{NC} = \Delta E_m = E_{c,3} + E_{p,g,3} + E_{p,e,3} - E_{c,1} - E_{p,g,1} - E_{p,e,1}$$

$$-\mu \cdot m \cdot g \cdot (h + x \cdot \cos 45°) = \underbrace{-m \cdot g \cdot x \cdot \text{sen}\, 45°}_{=E_{p,g,3}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2}_{=E_{p,e,3}} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2}_{=E_{c,1}} - \underbrace{m \cdot g \cdot h}_{=E_{p,g,1}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + x \cdot m \cdot g \cdot (\mu \cdot \cos 45° - \text{sen}\, 45°) - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h \cdot (\mu - 1) = 0$$

Sustituyendo valores:

$$400 \cdot x^2 - 2{,}77 \cdot x - 75{,}2 = 0$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos dos soluciones:

$$x = \pm 0{,}43 \text{ m}$$

El muelle se comprime más que antes, 0,43 m.

El siguiente paso es cuando el muelle se estira y el cuerpo rebota. Ahora, al igual que en el ejercicio anterior:

$$E_{c,3} = 0; \quad E_{p,g,3} = m \cdot g \cdot y_3 < 0; \quad E_{p,e,3} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

$$E_{c,4} = 0; \quad E_{p,g,4} = m \cdot g \cdot y_4; \quad E_{p,e,4} = 0$$

con la única diferencia de que el valor de x es diferente:

$$y_3 = -x \cdot \text{sen } 45° = -0{,}43 \cdot 0{,}71 = -0{,}31 \text{ m}$$

Por tanto:

$$y_4 = y_3 + \frac{k \cdot x^2}{2 \cdot m \cdot g \cdot (1 + \mu)} = 12{,}27 \text{ m}$$

Observa que esta es la altura por encima del punto 2. La distancia que recorre por el plano inclinado es:

$$x + z = x + \frac{y_4}{\text{sen}\, 45°} = 17{,}78 \text{ m}$$

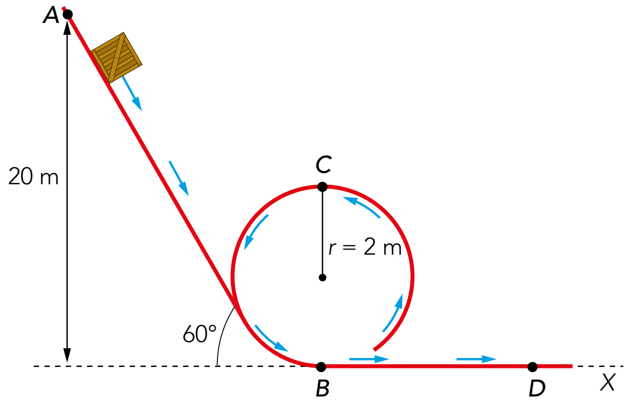
Sería conveniente que, con este resultado, comprobaras que los valores de W_{NC}, $E_{m,3}$ y $E_{m,4}$ verifican la conservación de la energía.

18 Un vagón de una montaña rusa, de 50 kg de masa, parte del reposo desde el punto más alto, a una altura h = 20 m, y describe un *loop* de radio r = 2 m. La fuerza de rozamiento con las vías es constante e igual a 250 N. Calcula:

a) La celeridad en el punto más alto del rizo.

b) La distancia entre los puntos B y D que recorre antes de pararse.

c) Determina la altura mínima desde la que empezará a moverse el vagón, con objeto de que no se caiga al hacer el rizo. Calcula, en ese caso, la distancia $\overline{BD}$ que recorrerá antes de pararse, y el trabajo total realizado por la fuerza de rozamiento.



a)

1) Vamos a tomar el sistema de coordenadas de manera que el origen de altura esté en el suelo (punto *B*):

Por tanto:

$$y_A = h = 20\text{ m};\quad y_C = 2 \cdot r = 4\text{ m}$$

2) Como hay trabajo no conservativo:

$$W_{NC} = \Delta E_m$$

3) Calculamos las energías en los puntos *A* y *C*:

$$E_{c,A} = 0;\ \ E_{p,A} = m \cdot g \cdot h$$

$$E_{c,C} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_C^2;\ \ E_{p,C} = 2 \cdot m \cdot g \cdot r$$

El trabajo no conservativo es:

$$W_{NC} = -R \cdot s$$

Donde *s* es la distancia recorrida por el vagón a lo largo de las vías:

$$s = \overline{AB} + \overline{BC} = \frac{h}{\text{sen } 60°} + \pi \cdot r$$

Por tanto:

$$W_{NC} = -R \cdot \left(\frac{h}{\text{sen } 60°} + \pi \cdot r\right)$$

4) Sustituimos todos los valores e igualamos:

$$W_{NC} = \Delta E_m = E_{c,C} + E_{p,C} - E_{c,A} - E_{p,A}$$

$$-R \cdot \left(\frac{h}{\text{sen } 60°} + \pi \cdot r\right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_C^2 + 2 \cdot m \cdot g \cdot r - m \cdot g \cdot h$$

$$7\,344{,}3 = 25 \cdot v_C^2 + 1960 - 9\,800$$

$$v_C^2 = 19{,}8\text{ m}^2/\text{s}^2 \rightarrow v_C = 4{,}5\text{ m/s}$$

b) En este caso, podemos tomar, o bien los puntos *A* y *D*, o *C* y *D*. Vamos a elegir la primera opción.

1) El sistema de coordenadas es como antes:

$$y_A = h = 20\text{ m};\quad y_D = 0$$

2) Como hay trabajo no conservativo:

$$W_{NC} = \Delta E_m$$

3) Calculemos las energías en los puntos A y D:

$$E_{c,A} = 0;\ \ E_{p,A} = m \cdot g \cdot h$$
$$E_{c,D} = 0;\ \ E_{p,D} = 0$$

El trabajo no conservativo es:

$$W_{NC} = -R \cdot s'$$

donde la distancia recorrida es:

$$s' = \overline{AB} + 2 \cdot \overline{BC} + \overline{BD} = \frac{h}{\text{sen}\,60°} + 2 \cdot \pi \cdot r + \overline{BD}$$

Luego:

$$W_{NC} = -R \cdot \left(\frac{h}{\text{sen}\,60°} + 2 \cdot \pi \cdot r + \overline{BD}\right)$$

4)

$$W_{NC} = \Delta E_m = E_{c,D} + E_{p,D} - E_{c,A} - E_{p,A}$$

$$-R \cdot \left(\frac{h}{\text{sen}\,60°} + 2 \cdot \pi \cdot r + \overline{BD}\right) = -m \cdot g \cdot h$$

$$\frac{h}{\text{sen}\,60°} + 2 \cdot \pi \cdot r + \overline{BD} = \frac{m \cdot g \cdot h}{R}$$

$$\overline{BD} = \frac{m \cdot g \cdot h}{R} - \frac{h}{\text{sen}\,60°} - 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$\overline{BD} = 39{,}2 - 23{,}1 - 12{,}6 = 3{,}5 \text{ m}$$

c) Ahora, al igual que en el apartado anterior:

$$\overline{BD} = \frac{m \cdot g \cdot h}{R} - \frac{h}{\text{sen}\,60°} - 2 \cdot \pi \cdot r$$

La diferencia radica en que no conocemos el valor de la altura h. Para determinarla, vamos a volver al apartado a). Allí habíamos comparado la energía en A y en C:

$$W_{NC,A \to C} = \Delta E_m = E_{c,C} + E_{p,C} - E_{c,A} - E_{p,A}$$

$$-R \cdot \left(\frac{h}{\text{sen}\,60°} + \pi \cdot r\right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_C^2 + 2 \cdot m \cdot g \cdot r - m \cdot g \cdot h$$

Ahora, h es desconocida, por lo que tendremos que calcularla a partir del valor de v_C. Para ello, utilizamos la condición dinámica (ver el ejercicio 1 de «Estrategia de resolución de problemas»):

En C:

$$N = 0 \rightarrow P = F_c \rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{v_C^2}{r} \rightarrow v_C^2 = g \cdot r = 9{,}8 \cdot 2 = 19{,}6 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Por tanto, ya tenemos:

$$-R \cdot \left(\frac{h}{\text{sen}\,60°} + \pi \cdot r\right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot r + 2 \cdot m \cdot g \cdot r - m \cdot g \cdot h$$

$$-R \cdot \left(\frac{h}{\text{sen}\,60°} + \pi \cdot r\right) = \frac{5}{2} \cdot m \cdot g \cdot r - m \cdot g \cdot h$$

$$-250 \cdot (1{,}16 \cdot h + 6{,}28) = 2\,450 - 490 \cdot h$$

$$-290 \cdot h - 1\,570 = 2\,450 - 490 \cdot h$$

$$200 \cdot h = 4\,020 \rightarrow h = 20{,}1 \text{ m}$$

Comprueba que, con esta altura, en efecto se cumple:

$$W_{NC,A \rightarrow C} = \Delta E_m$$

Ahora ya podemos calcular la distancia que recorre antes de pararse:

$$\overline{BD} = \frac{m \cdot g \cdot h}{R} - \frac{h}{\text{sen}\,60°} - 2 \cdot \pi \cdot r = 39{,}4 - 23{,}3 - 12{,}6 = 3{,}5 \text{ m}$$

Sale el mismo valor que antes. Sin embargo, esto se debe al azar, y no hay que buscarle ningún significado; se debe, simplemente, a que las celeridades en ambos casos son muy parecidas.

Por último, para calcular el trabajo total realizado por la fuerza de rozamiento, tenemos en cuenta que:

$$W_{NC,A \rightarrow D} = \underbrace{E_{m,D}}_{=0} - E_{m,A} = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 - m \cdot g \cdot h = 0 - 50 \cdot 9.8 \cdot 20{,}1 =$$

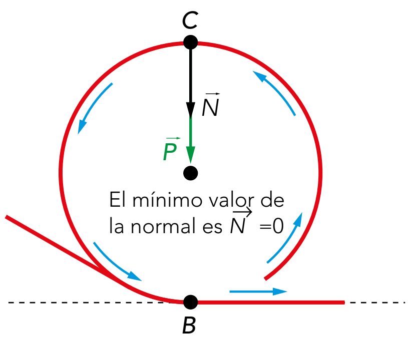
$$= -9\,849 \text{ J}$$

Página 300

19 Considera ahora una montaña en la que el vagón parte de una cierta altura *h*, pero se mueve en el punto *A* con una celeridad de 7 m/s y describe un rizo de radio *r* = 3 m, sin que haya rozamiento. Calcula el mínimo valor que debe tener *h* para que el vagón no se caiga, y la rapidez en el punto *B*.

Volvemos a utilizar el mismo sistema de coordenadas que en el ejercicio anterior:

Nos dicen que la altura debe ser la mínima para que el vagón no se caiga al pasar por el rizo. La mínima rapidez se alcanza en el punto *C* y, para que no se caiga, la normal ha de ser mayor que cero. Por lo tanto, la condición viene dada por: $N = 0$ en el punto *C*.



Usando la tercera ley de Newton:

$$\sum F_y = m \cdot a_n \rightarrow \underbrace{-N}_{=0} - \underbrace{P}_{=m \cdot g} = \underbrace{-m \cdot \frac{v_C^2}{r}}_{a_n \text{ es negativa porque está dirigida hacia abajo}}$$

Por tanto:

$$m \cdot g = m \cdot \frac{v_C^2}{R} \rightarrow v_C^2 = g \cdot r$$

Ahora, seguimos el procedimiento habitual, comparando las energías en los puntos *A* y *C*:

1) Según hemos elegido el sistema de referencia, tenemos:

$$y_A = h; \quad y_C = 2 \cdot r$$

2) Como solo actúa la gravedad, que es conservativa, y la normal, que no realiza trabajo, tenemos:

$$\Delta E_m = 0$$

3) Calculamos la energía mecánica en A y en C:

$$E_{c,A} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2; \quad E_{p,A} = m \cdot g \cdot h$$

$$E_{c,C} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_C^2 = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot r; \quad E_{p,C} = 2 \cdot m \cdot g \cdot r$$

4) Igualamos las energías:

$$E_{c,A} + E_{p,A} = E_{c,C} + E_{p,C} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot r + 2 \cdot m \cdot g \cdot r \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \frac{5}{2} \cdot r - \frac{v_A^2}{2 \cdot g} = 5 \text{ m}$$

Para calcular la rapidez en el punto B, solo tenemos que igualar la energía mecánica en ese punto con la correspondiente en A:

$$E_{c,B} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2; \quad E_{p,B} = 0$$

y ya tenemos:

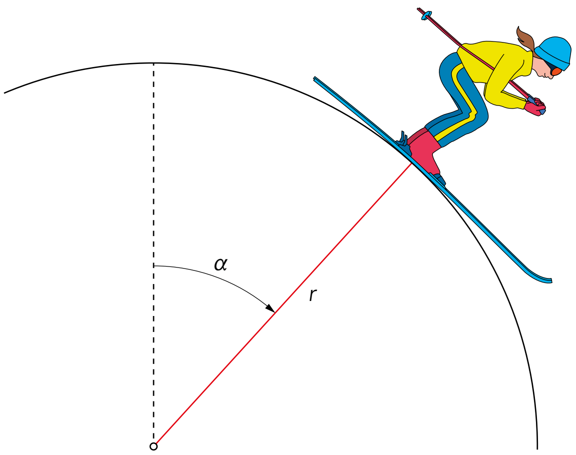
$$E_{c,A} + E_{p,A} = E_{c,B} + E_{p,B}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow v_B^2 = v_A^2 + 2 \cdot g \cdot h \rightarrow$$

$$\rightarrow v_B = 12{,}12 \text{ m/s}$$

20 **Un esquiador comienza a deslizarse, sin rozamiento y con velocidad inicial nula, en la parte superior de una enorme bola de nieve esférica de radio *r*. Calcula el ángulo a en el que pierde contacto con la nieve y sigue una trayectoria tangente a esta.**



Vamos a elegir el sistema de coordenadas de manera que el origen esté en el centro de la esfera, y llamaremos A y B a los puntos desde el que parte el esquiador y donde pierde contacto con la bola, respectivamente:

Como puedes ver, esta elección es arbitraria. Podríamos haber tomado el origen de alturas en el punto A, por ejemplo, y el resultado sería el mismo (compruébalo).

1) Tenemos, por tanto:

$$y_A = r; \quad y_B = r \cdot \cos \alpha$$

2) Las fuerzas que actúan son la gravedad, que es conservativa, y la normal, que no realiza trabajo, por lo que utilizaremos:

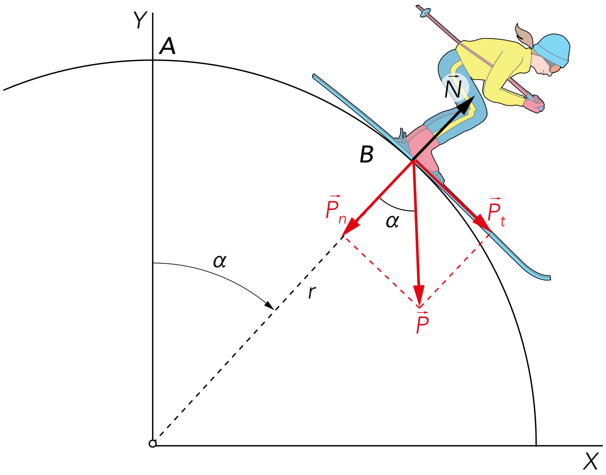
$$\Delta E_m = 0$$

3) Calculamos cada una de las contribuciones de la energía en A y en B:

$$E_{c,A} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 = 0; \quad E_{p,A} = m \cdot g \cdot r$$

$$E_{c,B} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2; \quad E_{p,B} = m \cdot g \cdot r \cdot \cos\alpha$$

La condición para calcular la velocidad en B sigue siendo que la normal se anule (siempre se hace esto cuando un cuerpo pierde contacto con una superficie). Por tanto, aplicando la tercera ley de Newton a las componentes normales de las fuerzas:



$$\vec{P}_n + \underbrace{\vec{N}}_{=0} = m \cdot \vec{a}_n$$

$$m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot \frac{v_B^2}{r} \rightarrow v_B^2 = r \cdot g \cdot \cos\alpha$$

Por tanto:

$$E_{c,B} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot r \cdot \cos\alpha$$

4) Igualamos las energías:

$$E_{c,A} + E_{p,A} = E_{c,B} + E_{p,B}$$

$$m \cdot g \cdot r = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot r \cdot \cos\alpha + m \cdot g \cdot r \cdot \cos\alpha$$

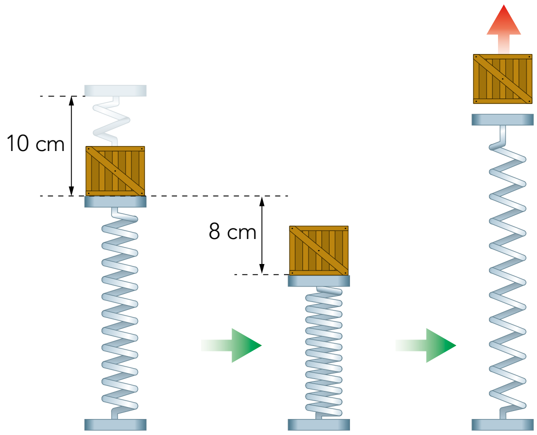
$$1 = \frac{3}{2} \cdot \cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{3} \rightarrow \alpha = 48{,}2°$$

21 **Un muelle se comprime 10 cm cuando sobre él se coloca un cuerpo de 2 kg de masa. Se comprime el muelle 8 cm más y se suelta. Calcula:**

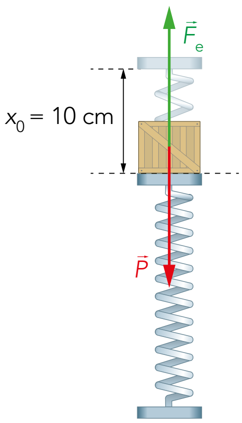
a) La altura hasta la que sube el cuerpo, medida respecto a la posición de equilibrio del sistema objeto-resorte.

b) Su celeridad cuando pasa de nuevo por dicho punto de equilibrio.

c) Se observa que el cuerpo sube solamente 5 cm por encima del punto de equilibrio. Calcula el módulo de la fuerza de rozamiento del objeto con el aire.

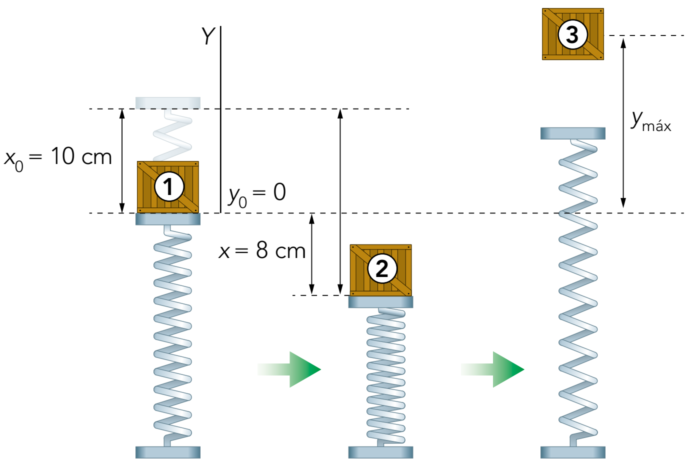


a) En primer lugar, vamos a calcular la constante elástica del muelle a partir de los datos proporcionados. En el equilibrio se verifica:



$$m \cdot g = k \cdot x_0 \rightarrow k = \frac{m \cdot g}{x_0} = \frac{2 \cdot 9{,}8}{0{,}1} = 196 \text{ N/m}$$

1) Se pide que se calcule la altura medida respecto a la posición de equilibrio del muelle con el objeto. Por tanto, es lógico tomar ahí el origen del sistema de coordenadas:



Por tanto, como vamos a comparar los puntos 2 y 3, tendremos:

$$y_2 = -x = -0{,}08 \text{ m}; \quad y_3 = y_{máx}$$

donde hemos tomado $x > 0$.

2) En este caso, solo intervienen fuerzas conservativas, el peso y la fuerza elástica; así que, emplearemos la expresión:

$$\Delta E_m = 0$$

3) $$E_{c,2} = 0;\quad E_{p,g,2} = m \cdot g \cdot y_2 = -m \cdot g \cdot x < 0;\quad E_{p,e,2} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x + x_0)^2$$

$$E_{c,3} = 0;\quad E_{p,g,3} = m \cdot g \cdot y_{máx};\quad E_{p,e,3} = 0$$

4) Igualando:

$$E_{c,2} + E_{p,g,2} + E_{p,e,2} = E_{c,3} + E_{p,g,3} + E_{p,e,3}$$

$$-m \cdot g \cdot x + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x + x_0)^2 = m \cdot g \cdot y_{máx}$$

Vemos, por tanto, que toda la energía potencial acumulada en el muelle se transforma en energía potencial gravitatoria. Finalmente, tenemos:

$$y_{máx} = -x + \frac{k \cdot (x + x_0)^2}{2 \cdot m \cdot g} = 0{,}082\,\text{m} = 8{,}2\ \text{cm}$$

Es decir, sube 8,2 cm sobre el punto de equilibrio muelle-objeto.

b) Para calcular la velocidad cuando va por el punto de equilibrio (denotado como 1 en la figura anterior), comparamos las energías en 1 y en 2.

1) No hace falta modificar el origen del sistema de coordenadas. Por tanto:

$$y_1 = y_0 = 0;\quad y_2 = -0{,}08\ \text{m}$$

2) Volvemos a usar:

$$\Delta E_m = 0$$

3) $$E_{c,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2;\quad E_{p,g,1} = m \cdot g \cdot y_1 = 0;\quad E_{p,e,1} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2$$

$$E_{c,2} = 0;\quad E_{p,g,2} = -m \cdot g \cdot x;\quad E_{p,e,2} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x + x_0)^2$$

4) Igualando:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2 = -m \cdot g \cdot x + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x + x_0)^2$$

$$v_1^2 = -\frac{k}{m} \cdot x_0^2 - 2 \cdot g \cdot x + \frac{k}{m} \cdot (x + x_0)^2$$

Y, sustituyendo los valores conocidos:

$$v_1^2 = 0{,}63\,\text{m}^2/\text{s}^2 \rightarrow v_1 = 0{,}79\ \text{m/s}$$

c) Ahora, se dice que el cuerpo, en vez de subir los 8,2 cm por encima del punto 1, solo llega a alcanzar una altura de 5 cm. Por tanto, ha debido de existir alguna pérdida de energía debida al rozamiento con el aire. Por tanto:

$$W_{NC} = \Delta E_m$$

Dejamos invariante el sistema de coordenadas. La energía mecánica en el punto 3 viene dada ahora por:

$$E_{c,3} = 0;\quad E_{p,g,3} = m \cdot g \cdot y_{máx};\quad E_{p,e,3} = 0$$

Por otro lado, el trabajo no conservativo será:

$$W_{NC} = -R \cdot s$$

siendo s la distancia recorrida por el cuerpo:

$$s = x + y'_{\text{máx}}$$

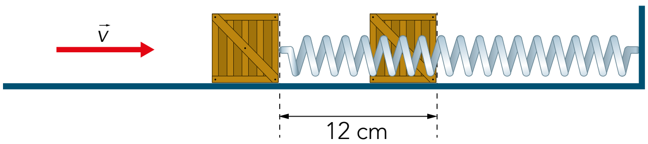
Por tanto:

$$W_{NC} = \Delta E_m = E_{m,3} - E_{m,2}$$

$$-R \cdot (x + y'_{\text{máx}}) = m \cdot g \cdot y'_{\text{máx}} + m \cdot g \cdot x - \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x + x_0)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow R = -m \cdot g + \frac{k \cdot (x + x_0)^2}{(x + y'_{\text{máx}})} = 29{,}3 \text{ N}$$

22 **Una bala de 5 g golpea un bloque de 1,5 kg de masa y se queda unida a él. El bloque está en una superficie horizontal sin rozamiento, sujeto a un muelle de constante elástica *k* = 50 N/m, que se comprime 12 cm a causa del impacto. Calcula la rapidez inicial de la bala y la celeridad del bloque justo después de la colisión.**



Se trata de una colisión completamente inelástica. Vamos a plantear las situaciones inicial y final. Justo antes del choque, la rapidez de la bala es v_{0_A} y la del bloque es $v_{0_B} = 0$. El momento lineal total en ese instante será:

$$p_0 = m_A \cdot v_{0_A}$$

Después de la colisión ambos cuerpos se mueven juntos con una celeridad v. La cantidad de movimiento final será, por tanto:

$$p = (m_A + m_B) \cdot v$$

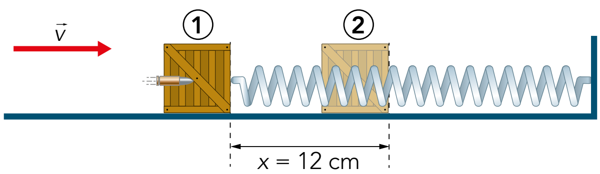
Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento:

$$p_0 = p \rightarrow m_A \cdot v_{0_A} = (m_A + m_B) \cdot v$$

$$v_{0_A} = \frac{m_A + m_B}{m_A} \cdot v$$

Sin embargo, no conocemos el valor de v. Para determinarlo, vamos a aplicar la conservación de la energía después de la colisión. Es cierto que durante el choque no se conserva la energía mecánica. Pero en el movimiento posterior, una vez que ya han colisionado, sí, porque al no haber rozamiento, las únicas fuerzas que actúan son conservativas.

1) Empezamos considerando, después de la colisión, los instantes 1 (momento en que da comienzo el movimiento conjunto de la bala y el bloque) y 2 (máxima compresión del muelle):



$$v_1 = v; \quad v_2 = 0$$

2) Usando la conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_m = 0$$

3) Y determinando la energía cinética y potencial en los puntos 1 y 2:

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} \cdot (m_A + m_B) \cdot v^2;\ \ E_{p,1} = 0$$

$$E_{c,2} = 0;\ \ E_{p,2} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

4) Igualamos:

$$E_{c,1} + E_{p,1} = E_{c,2} + E_{p,2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (m_A + m_B) \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

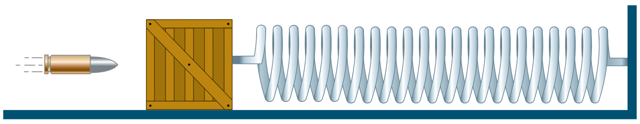
Vemos que, por tanto, toda la energía cinética inicial se transforma en energía potencial. Despejamos el valor de v:

$$v^2 = \frac{k \cdot x^2}{(m_A + m_B)} \rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{(m_A + m_B)}} \cdot x = 0{,}69 \text{ m/s}$$

Ahora ya podemos obtener la velocidad inicial de la bala:

$$v_{0_A} = \frac{m_A + m_B}{m_A} \cdot v = \frac{0{,}005 + 1{,}500}{0{,}005} \cdot 0{,}69 = 207{,}7 \text{ m/s}$$

23 **Se dispara una bala de 2 g de masa con una rapidez de 800 m/s. Esta choca contra el bloque de la figura, de 1 kg de masa y se incrusta en él. Sabiendo que la constante elástica del muelle es de 100 N/m, calcula cuánto se comprimirá como máximo a causa del impacto.**



Vamos a seguir el mismo procedimiento que en el ejercicio anterior. La cantidad de movimiento antes de la colisión es:

$$p_0 = m_A \cdot v_{0_A}$$

Y justo después:

$$p = (m_A + m_B) \cdot v$$

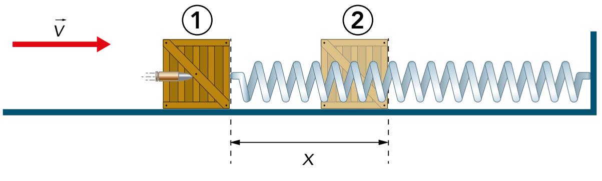
Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento:

$$p_0 = p \rightarrow m_A \cdot v_{0_A} = (m_A + m_B) \cdot v$$

$$v = \frac{m_A}{m_A + m_B} \cdot v_{0_A} = 1{,}6 \text{ m/s}$$

Con este dato ya podemos obtener cuánto se comprime el muelle.

1) Empezamos considerando, después de la colisión, los instantes 1 (momento en que da comienzo el movimiento conjunto de la bala y el bloque) y 2 (máxima compresión del muelle):



$$v_1 = v;\ \ v_2 = 0$$

2) Usamos la conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_m = 0$$

3) Determinamos la energía cinética y potencial en los puntos 1 y 2:

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} \cdot (m_A + m_B) \cdot v^2; \quad E_{p,1} = 0$$

$$E_{c,2} = 0; \quad E_{p,2} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

4) Igualamos:

$$E_{c,1} + E_{p,1} = E_{c,2} + E_{p,2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (m_A + m_B) \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Vemos que toda la energía cinética inicial se transforma en energía potencial. Despejamos el valor de x:

$$x^2 = \frac{(m_A + m_B) \cdot v^2}{k} \rightarrow x = \sqrt{\frac{(m_A + m_B)}{k}} \cdot v = 0{,}16 \text{ m} = 16 \text{ cm}$$

Es decir, se comprime 16 cm.

24 Un cuerpo de 200 g está unido a un muelle de constante elástica k = 100 N/m colocado horizontalmente sobre una superficie sin rozamiento. Se separa de su posición de equilibrio una distancia de 20 cm y se suelta. Calcula el período de oscilación y la celeridad que tendrá cuando pase por su posición de equilibrio. Representa gráficamente E_c, E_p y E_m en función del tiempo.

La frecuencia angular de la oscilación viene dada por: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0{,}2}} = 22{,}36$ rad/s

Y el período: $T = \frac{2 \cdot r}{\omega} = 0{,}28$ s

Para calcular la rapidez cuando pasa por su posición de equilibrio (x = 0), empleamos:

$$v\,(x = 0) = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2} = \omega \cdot \sqrt{A^2 - 0^2} = \omega \cdot A = 22{,}36 \cdot 0{,}2 = 4{,}47 \text{ m/s}$$

Observa que, como parte del reposo, la amplitud será igual a la distancia que se ha estirado inicialmente: A = 0,2 m.

Vamos a obtener ahora las expresiones de E_c, E_p y E_m en función del tiempo. La forma general de $x(t)$ es:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t + \phi_0)$$

Como en t = 0, x = A = 0,2 m, hemos de tener: $\phi_0 = \pi/2$. Por tanto:

$$x(t) = 0{,}2 \cdot \text{sen}\left(22{,}36 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m} = 0{,}2 \cdot \cos(22{,}36 \cdot t) \text{ m}$$

Y la rapidez vendrá dada por: $v(t) = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2} = \omega \cdot \sqrt{A^2 - A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t)} =$

$$= \omega \cdot A \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\omega \cdot t)} = \omega \cdot A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) = 4{,}47 \cdot \text{sen}\,(22{,}36 \cdot t) \text{ m/s}$$

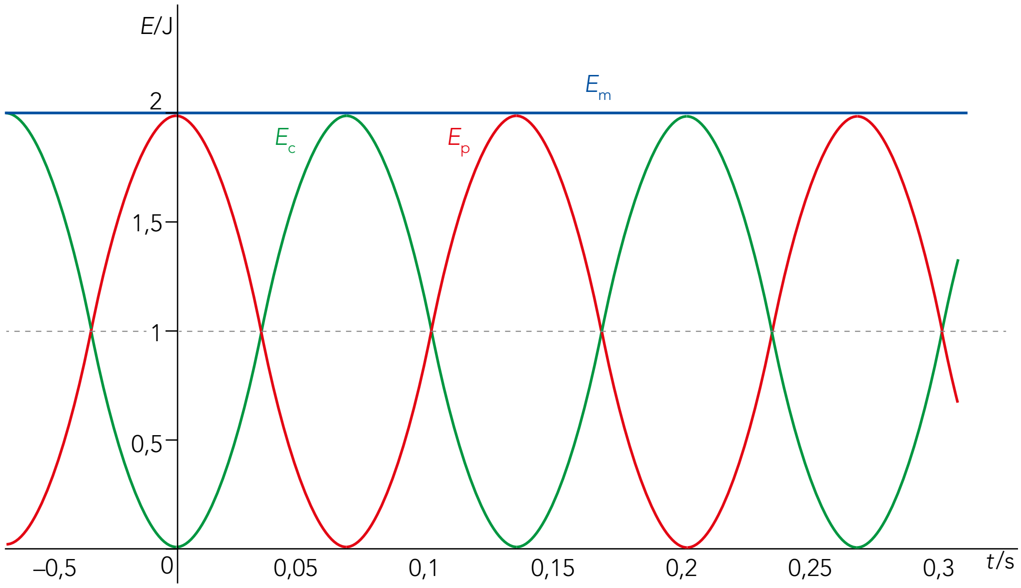
Por tanto:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}2 \cdot 4{,}47^2 \cdot \text{sen}^2(22{,}36 \cdot t) = 2 \cdot \text{sen}^2(22{,}36 \cdot t) \text{ J}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0{,}2^2 \cdot \cos^2(22{,}36 \cdot t) = 2 \cdot \cos^2(22{,}36 \cdot t) \text{ J}$$

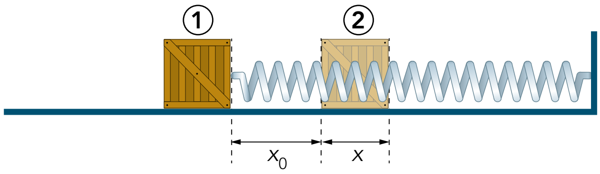
$$E_m = E_c + E_p = 2 \text{ J}$$

La representación gráfica es la siguiente:



25 Supongamos que en el sistema del ejercicio anterior está actuando la fuerza de rozamiento. Si μ = 0,2, calcula cuánto se comprimirá el muelle después de haberlo soltado.

En este caso tenemos dos puntos:



Como actúa la fuerza de rozamiento, tendremos:

$$W_{NC} = \Delta E_m$$

Por tanto:

$$E_{c,1} = 0; \quad E_{p,e,1} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2$$

$$E_{c,2} = 0; \quad E_{p,e,2} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

$$W_{NC} = -R \cdot (x + x_0)$$

Igualando:

$$-R \cdot (x + x_0) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + R \cdot x - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2 + R \cdot x_0 = 0$$

Solo nos queda determinar el valor del módulo de la fuerza de rozamiento:

$$R = \mu \cdot m \cdot g = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 9{,}8 = 0{,}39 \text{ N}$$

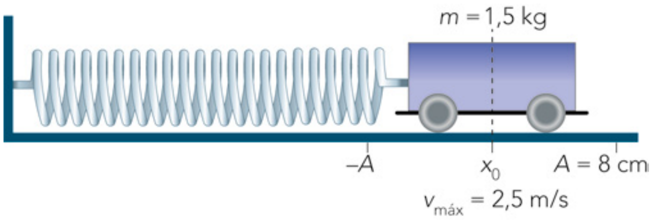
Por lo que, finalmente, tenemos:

$$50 \cdot x^2 + 0{,}39 \cdot x - 1{,}92 = 0$$

$$x = -0{,}20 \text{ m}; \quad x = 0{,}19 \text{ m}$$

La solución que buscamos es 0,19 m. Es decir, debido a las pérdidas por rozamiento, el muelle no se comprime 20 cm, sino solo 19 cm.

26 **El carrito de la figura, de 1,5 kg de masa, está unido a un muelle horizontal. Su movimiento es un MAS de 10 cm de amplitud y $v_{máx}$ = 2,5 m/s. Calcula la constante elástica del muelle y la velocidad del carrito cuando $x = A/2$. Utiliza únicamente razonamientos de conservación de la energía.**



La energía mecánica es igual a la energía cinética máxima, que se alcanza en $x = 0$, donde $v = v_{máx}$. Por tanto:

$$E_m = E_{c,máx} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2_{máx} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}5^2 = 4{,}69 \text{ J}$$

A su vez, esta es igual a la energía potencial máxima, que se alcanza en $x = A$:

$$E_m = E_{p,máx} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = 4{,}69 \text{ J}$$

Sabiendo que $A = 0{,}1$ m, podemos despejar el valor de k:

$$k = \frac{2 \cdot E_m}{A^2} = \frac{2 \cdot 4{,}69}{0{,}1^2} = 938 \text{ N/m}$$

En $x = A/2$ tendremos:

$$E_m = E_c + E_p \rightarrow$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(\frac{A}{2}\right)^2 \rightarrow$$

$$v^2 = \frac{2 \cdot E_m}{m} - \frac{k \cdot A^2}{4 \cdot m} \rightarrow v = 2{,}17 \text{ m/s}$$

Página 301

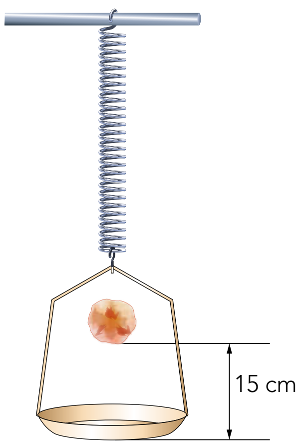
27 **Un platillo de 200 g está sujeto a un muelle vertical, estirándolo una distancia de 2 cm. Se deja caer sobre el platillo un trozo de plastilina de 400 g de masa desde una altura de 15 cm.**

a) Calcula la constante elástica del muelle.

b) Calcula la celeridad con la que la plastilina llega al platillo.

c) Determina la rapidez con la que el platillo junto con la plastilina comienza el movimiento posterior a la colisión.

d) Calcula la distancia máxima a la que baja el platillo respecto a su posición de equilibrio.



a) Vamos a calcular, en primer lugar, la constante elástica del muelle. En el equilibrio:

$$M \cdot g = k \cdot x_0$$

donde x_0 es la distancia que se estira el muelle y M es la masa del platillo. Por tanto:

$$k = \frac{M \cdot g}{x_0} = 98 \text{ N/m}$$

b) En segundo lugar, vamos a calcular la celeridad con la que el trozo de plastilina llega al platillo. Cae desde una altura h = 15 cm respecto a él, por lo que:

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = 1{,}72 \text{ m/s}$$

c) A continuación, vamos a determinar la rapidez con la que el platillo, junto con la plastilina, inician el movimiento. Ten en cuenta que se trata de un choque completamente inelástico, porque la plastilina, en cuanto toca la superficie del platillo, se deforma y se queda pegada a él. El momento lineal antes de la colisión será:

$$p_0 = m \cdot v_0$$

Y justo después:

$$p = (m + M) \cdot v$$

donde m es la masa de la plastilina y M la del platillo.

La conservación de la cantidad de movimiento implica que:

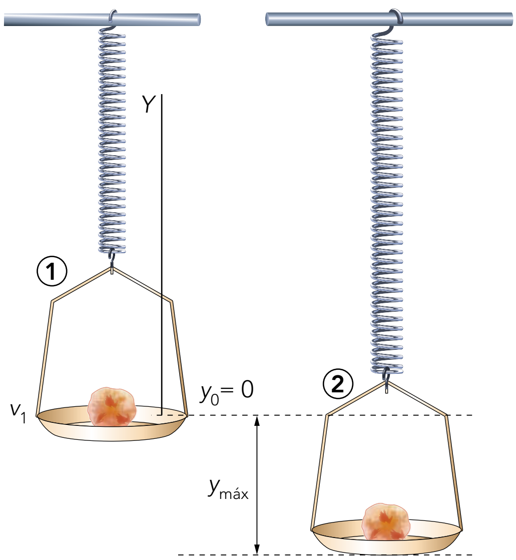
$$p_0 = p \;\rightarrow\; m \cdot v_0 = (m + M) \cdot v_1$$

Luego la celeridad, justo después de la colisión, es:

$$v_1 = \frac{m}{m + M} \cdot v_0 = \frac{0{,}4}{0{,}2 + 0{,}4} \cdot 1{,}72 = 1{,}15 \text{ m/s}$$

d) Vamos a calcular la distancia máxima de deformación del muelle.

1) Como la oscilación se va a producir en torno a la posición de equilibrio del platillo, tomaremos en ese punto el origen del sistema de coordenadas:



Vamos a comparar el punto 1 (justo después del impacto, pero todavía en $y = y_0$) y el punto 2, aquel en el que baja hasta un altura mínima ($y_{máx}$). Tomamos el origen de alturas en $y_0 = 0$.

Por tanto (ten en cuenta que $y_{máx} < 0$):

$$y_1 = y_0 = 0; \quad y_2 = y_{máx}$$

2) Las fuerzas que intervienen son la elástica y la gravitatoria, por lo que se conservará la energía mecánica:

$$\Delta E_m = 0$$

3) Calculamos el valor de la energía en los puntos 1 y 2:

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} \cdot (m + M) \cdot v_1^2; \quad E_{p,g,1} = (m + M) \cdot g \cdot y_1 = 0; \quad E_{p,e,1} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_0^2 = 0$$

$$E_{c,2} = 0; \quad E_{p,g,2} = (m + M) \cdot g \cdot y_{máx} < 0; \quad E_{p,e,2} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_{máx}^2$$

4) Igualamos:

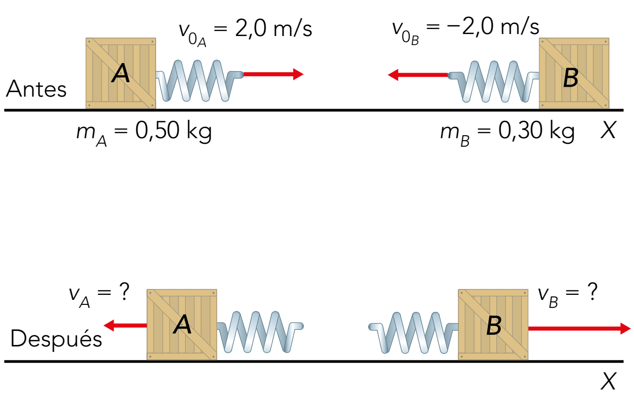
$$\frac{1}{2} \cdot (m + M) \cdot v_1^2 = (m + M) \cdot g \cdot y_{máx} + \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_{máx}^2$$

$$49 \cdot y_{máx}^2 + 5{,}88 \cdot y_{máx} - 0{,}40 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y_{máx} = 0{,}049 \text{ m}; \quad y_{máx} = -0{,}168 \text{ m}$$

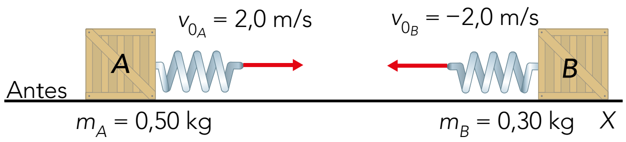
La solución válida es $y_{máx} = -0{,}168$ m $= -16{,}8$ cm, puesto que habíamos tomado $y_{máx} < 0$.

28 **Dos cuerpos tienen unos muelles adosados, ambos de constante elástica k = 150 N/m, como se muestra en la figura. Se mueven uno hacia el otro, de manera que experimentan un choque elástico. Si se supone que los dos muelles, durante la colisión, se comprimen en la misma cantidad, calcula el valor de dicha compresión. Halla la rapidez con la que salen despedidos ambos cuerpos después del choque.**

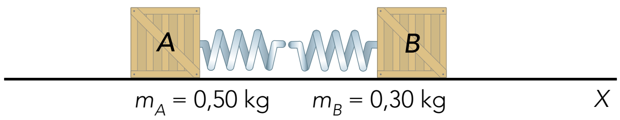


Vamos a considerar tres momentos: (1) cuando los cuerpos se dirigen uno hacia el otro, antes de la colisión, (2) cuando los muelles están totalmente comprimidos y (3) después de la colisión:

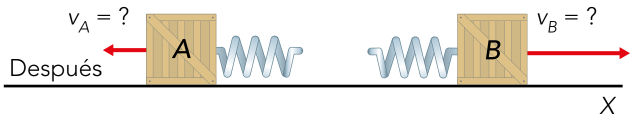
(1)



(2)



(3)



En este caso, como el movimiento es horizontal, no hay que considerar ningún origen de alturas, y el origen de la energía potencial elástica corresponde a la longitud natural de los muelles.

Como todas las fuerzas son conservativas, utilizamos:

$$\Delta E_m = 0$$

Calculamos las energías en los puntos 1 y 2:

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_{A1}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_{B1}^2 \; ; \; E_{p,1} = 0$$

$$E_{c,1} = 0; \; E_{p,2} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_A^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_B^2$$

Igualando:

$$\frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_{A1}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_{B1}^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_A^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_B^2$$

$$m_A \cdot v_{A1}^2 + m_B \cdot v_{B1}^2 = k \cdot x_A^2 + k \cdot x_B^2$$

Además, sabemos que $x_A = x_B$. Vamos a llamar x a esa cantidad. Por tanto:

$$m_A \cdot v_{A1}^2 + m_B \cdot v_{B1}^2 = 2 \cdot k \cdot x^2$$

$$0{,}5 \cdot 2^2 + 0{,}3 \cdot (-2)^2 = 2 \cdot 150 \cdot x^2$$

Y ya tenemos:

$$3{,}2 = 300 \cdot x^2 \rightarrow x = 0{,}103 \text{ m} = 10{,}3 \text{ cm}$$

Por otra parte, entre los instantes (1) y (3), se verifica que tanto la energía cinética como la cantidad de movimiento se conservan, puesto que se trata de una colisión elástica:

-

$$E_{c,3} = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_{A3}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_{B3}^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_{A_1}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_{B_1}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_{A_3}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_{B_3}^2$$

$$m_A \cdot v_{A_1}^2 + m_B \cdot v_{B_1}^2 = m_A \cdot v_{A_3}^2 + m_B \cdot v_{B_3}^2$$

$$0{,}5 \cdot v_{A_3}^2 + 0{,}3 \cdot v_{B_3}^2 = 3{,}2$$

-

$$p_1 = p_2 \rightarrow$$

$$m_A \cdot v_{A_1} + m_B \cdot v_{B_1} = m_A \cdot v_{A_3} + m_B \cdot v_{B_3}$$

$$0{,}5 \cdot 2 - 0{,}3 \cdot 2 = 0{,}5 \cdot v_{A_3} + 0{,}3 \cdot v_{B_3}$$

$$0{,}5 \cdot v_{A_3} + 0{,}3 \cdot v_{B_3} = 0{,}4$$

Despejamos v_{A_3} de la segunda ecuación:

$$v_{A3} = \frac{0{,}40 - 3 \cdot v_{B3}}{0{,}5} = 0{,}8 - 0{,}6 \cdot v_{B3}$$

y sustituimos en la primera:

$$0{,}5 \cdot (0{,}8 - 0{,}6 \cdot v_{B_3})^2 + 0{,}3 \cdot v_{B_3}^2 = 3{,}2$$

$$0{,}32 + 0{,}18 \cdot v_{B_3}^2 - 0{,}48 \cdot v_{B_3} + 0{,}3 \cdot v_{B_3}^2 = 3{,}2$$

$$0{,}48 \cdot v_{B_3}^2 - 0{,}48 \cdot v_{B_3} - 2{,}88 = 0$$

Las dos soluciones son:

$$v_{B_3} = -2 \text{ m/s} \rightarrow v_{A_3} = 2 \text{ m/s}$$

$$v_{B_3} = 3 \text{ m/s} \rightarrow v_{A_3} = -1 \text{ m/s}$$

La primera solución correspondería a la ausencia de choque, ya que ambos continúan con la misma velocidad que tenían inicialmente. La que nos interesa, por tanto, es la segunda.

12 ELECTROSTÁTICA

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

1 NATURALEZA ELÉCTRICA DE LA MATERIA

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.7.10. (EA.7.10.1.)

Página 337

1 **Determina cuántos electrones debe perder un cuerpo para quedar cargado con una carga de 1 C.**

Cuando un cuerpo pierde un electrón, queda cargado positivamente con una carga igual a *e*. El número de electrones que debe perder para que quede cargado con un culombio es:

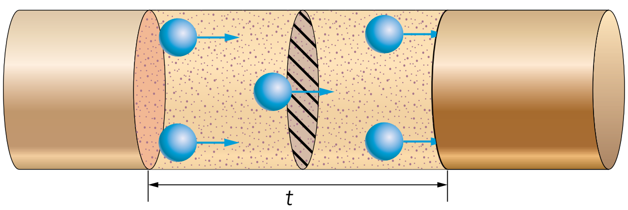
$$n.^{\circ}\ e^- = \frac{1\ \text{C}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \dfrac{\text{C}}{e^-}} = 6{,}25 \cdot 10^{18} e^- = 6{,}25 \text{ trillones de } e^-$$

2 **¿Cuántos electrones ha ganado un cuerpo que tiene una carga de –2,5 pC?**

Cada electrón tiene una carga igual a *e* con signo negativo. El número de electrones que hay que ganar para juntar una carga de –2,5 pC es:

$$n.^{\circ}\ e^- = \frac{-2{,}5 \cdot 10^{-12}\ \text{C}}{-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \dfrac{\text{C}}{e^-}} \approx 1{,}56 \cdot 10^{7}\ e^- = 15{,}6 \text{ millones de } e^-$$

3 **Si por un cable pasa una corriente eléctrica de intensidad un amperio, 1 A, significa que pasa un culombio cada segundo. ¿Cuántos electrones pasarán por una sección del cable en una milésima de segundo si la corriente eléctrica es de 1 mA?**



Una corriente eléctrica de intensidad 1 mA significa que pasa 1 mC cada segundo. En una milésima de segundo, pasa 1 µC.

O si se prefiere, utilizamos la ecuación de la intensidad eléctrica:

$$I = \frac{C}{t} \rightarrow C = I \cdot t = 10^{-3}\ \text{A} \cdot 10^{-3}\ \text{s} = 10^{-6}\ \text{C} = 1\ \mu\text{C}$$

Por tanto, la carga que pasa es de 1 µC, esto quiere decir que la cantidad de electrones que han pasado en sentido contrario es:

$$\text{n.}^{\circ}\ e^- = \frac{10^{-6}\ \text{C}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \dfrac{C}{e^-}} = 6{,}25 \cdot 10^{12}\ e^- = 6{,}25 \text{ billones de } e^-$$

2 LEY DE COULOMB

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) **CE.7.9.** (EA.7.9.1-7.9.2.) **CE.7.10.** (EA.7.10.1.)

Página 339

4 **Dos cuerpos cargados se atraen cuando están separados una cierta distancia. ¿Con qué fuerza se atraerán si los situamos al doble de distancia?**

Puesto que el módulo de la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, quiere decir que el producto $F \cdot r^2$ se mantiene constante. Por tanto, la nueva fuerza (F') será:

$$F \cdot r^2 = F' \cdot r'^2 \rightarrow F \cdot r^2 = F' \cdot (2 \cdot r)^2 \rightarrow F' = \frac{r^2}{4 \cdot r^2} \cdot F = \frac{1}{4} \cdot F$$

Luego la fuerza se reduce en un cuarto.

5 **Dos cuerpos cargados se encuentran separados una distancia r_0. ¿A qué distancia tendremos que separarlos si queremos que se repelan con un 10% de la fuerza con la que lo hacen ahora?**

A diferencia del anterior, este ejercicio lo resolveremos utilizando las expresiones matemáticas de la ley de Coulomb.

Si llamamos F_0 a la fuerza ejercida cuando la distancia es r_0, se cumplirá:

$$F_0 = K \cdot \frac{q \cdot q'}{r_0^2}$$

Queremos que se cumpla que, a la nueva distancia r, la fuerza sea $0{,}1 \cdot F_0$, es decir:

$$0{,}1 \cdot F_0 = K \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2}$$

Despejamos r^2:

$$r^2 = K \cdot \frac{q \cdot q'}{0{,}1 \cdot F_0}$$

y sustituimos F_0 por el valor inicial que conocíamos:

$$r^2 = K \cdot \frac{q \cdot q'}{0{,}1} \cdot \frac{1}{F_0} = K \cdot \frac{q \cdot q'}{0{,}1} \cdot \frac{r_0^2}{K \cdot q \cdot q'} = \frac{r_0^2}{0{,}1} \rightarrow r = \frac{r_0}{\sqrt{0{,}1}} \approx 3{,}16 \cdot r_0$$

6 **En un átomo de hidrógeno, la distancia entre el protón y el electrón en su estado fundamental es de $5{,}26 \cdot 10^{-11}$ m. Calcula la fuerza eléctrica con la que se atraen, y compárala con la fuerza gravitatoria que se ejercen.**

Dato: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

La fuerza electrostática es:

$$F_e = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_0^2} = K_0 \cdot \frac{e \cdot (-e)}{r_0^2} = K_0 \cdot \frac{-e^2}{r_0^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{(5{,}26 \cdot 10^{-11})^2} \approx -8{,}33 \cdot 10^{-8}\ \text{N}$$

La fuerza gravitatoria es (introducimos un menos para hacer la fuerza gravitatoria atractiva):

$$F_g = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_0^2} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{(5{,}26 \cdot 10^{-11})^2} \approx -3{,}66 \cdot 10^{-47}\ \text{N}$$

Si las comparamos:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{-8{,}33 \cdot 10^{-8}}{-3{,}66 \cdot 10^{-47}} \approx 2 \cdot 10^{39}$$

Vemos que la fuerza eléctrica es unas $2 \cdot 10^{39}$ veces mayor que la gravitatoria. Es lógico pensar que la fuerza gravitatoria no influye prácticamente nada en el comportamiento de los átomos.

7 **Un cuerpo colocado en el suelo tiene un carga de 0,2 C. Por encima colocamos una bola de 200 g de masa y con una carga de 2 μC. ¿A qué altura quedará suspendida la bola?**

La fuerza de repulsión electrostática tiene que igualarse con el peso:

$$m \cdot g = K \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{K \cdot q \cdot q'}{m \cdot g}} = \sqrt{\frac{9{,}0 \cdot 10^9 \cdot 0{,}2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{0{,}200 \cdot 9{,}8}} \approx 42{,}9 \text{ m}$$

8 **Una carga de 2 μC hace contacto con un cuerpo, inicialmente neutro, y le comunica parte de su carga eléctrica. Cuando ambos se separan 25 cm, se repelen con una fuerza de 0,1 N. ¿Cuál es la carga final de cada uno?**

La suma de la carga de los dos cuerpos tiene que ser de 2 μC, ya que la carga se reparte entre estos dos cuerpos:

$$q_1 + q_2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Puesto que conocemos la fuerza con la que se repelen:

$$F_0 = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_0^2} \rightarrow q_1 \cdot q_2 = \frac{F_0 \cdot r_0^2}{K_0} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}25^2}{9{,}0 \cdot 10^9} \approx 6{,}94 \cdot 10^{-13} \text{ C}^2$$

Así que, tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left\{\begin{matrix} q_1 + q_2 = 2 \cdot 10^{-6} \\ q_1 \cdot q_2 = 6{,}94 \cdot 10^{-13} \end{matrix}\right\} \rightarrow q_1 + \frac{6{,}94 \cdot 10^{-13}}{q_1} = 2 \cdot 10^{-6} \rightarrow q_1^2 + 6{,}94 \cdot 10^{-13} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot q_1$$

$$q_1^2 - 2 \cdot 10^{-6} \cdot q_1 + 6{,}94 \cdot 10^{-13} = 0$$

$$q_1 = \frac{2 \cdot 10^{-6} \pm \sqrt{(2 \cdot 10^{-6})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6{,}94 \cdot 10^{-13}}}{2} \approx 1{,}55 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 1{,}55 \text{ μC}$$

$$q_2 = 2 \cdot 10^{-6} - 1{,}55 \cdot 10^{-6} = 0{,}45 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 0{,}45 \text{ μC}$$

9 **A partir del valor de la constante de Coulomb, *K*, en el agua, deduce el valor de la constante dieléctrica, *ε*, en este medio. Relaciona este resultado con la permitividad en el vacío.**

La constante *K* es:

$$K = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \rightarrow \varepsilon = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot K} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 1{,}1 \cdot 10^8} \approx 7{,}23 \cdot 10^{-10} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

La constante dieléctrica relativa del agua es:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{7{,}23 \cdot 10^{-10}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}} \approx 81{,}7$$

10 **En la tabla de la página anterior, se recogen los valores de las constantes de Coulomb en diferentes medios. ¿En cuál de esos materiales crees que se atraerán con más fuerza eléctrica dos cuerpos cargados? ¿Por qué? Explica tu respuesta haciendo referencia a la permitividad del medio. Busca el valor de esta constante en otros medios y comenta lo encontrado con el resto de la clase.**

Respuesta abierta.

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de información acerca de las características de los distintos tipos de textos, lo que le será de utilidad para elaborar y argumentar su respuesta.

11 **Grupo nominal. ¿Por qué crees que la electricidad se transporta en hilos de cobre, aluminio o acero? Las redes eléctricas causan un gran impacto medioambiental difícil de controlar. Por grupos, realizad una búsqueda de lugares en los que las redes eléctricas hayan supuesto un problema en el entorno y si ha podido subsanarse. ¿Qué soluciones se proponen desde asociaciones o gobiernos? Redactad un informe con lo que hayáis encontrado y con vuestras propias propuestas.**

Respuesta abierta.

En **anayaeducacion.es** explicamos cómo aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo «Grupo nominal», propuesta para la resolución de esta actividad en grupo.

12 ODS **A partir de las ideas recogidas en el ejercicio anterior, ¿qué soluciones proponéis para lograr la meta 7.1? Buscad proyectos reales que se estén llevando a cabo como *Smiling Through Light* en Sierra Leona y comentadlos en clase.**

Respuesta abierta.

Para poder responder a la pregunta planteada en esta actividad, su alumnado puede consultar en **anayaeducacion.es** un vídeo con la información relativa a la meta 7.1 de los ODS.

3 CARÁCTER VECTORIAL DE LA LEY DE COULOMB

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.7.9. (EA.7.9.1.-7.9.2.) CE.7.10. (EA.7.10.1.)

Página 341

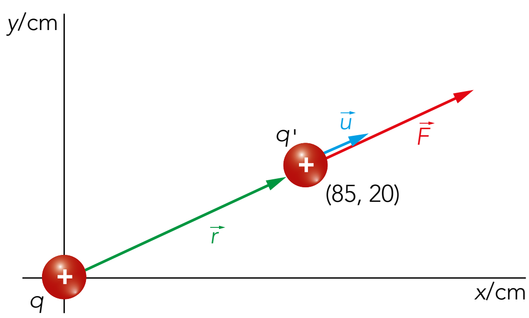
13 **Un cuerpo con una carga de 10 mC está situado en el origen de coordenadas. Calcula la fuerza que se ejercerá sobre otra carga de 4 µC colocada en el punto (85, 20) cm.**

Veamos las coordenadas del vector $\vec{r}$.

$\vec{r} = (85, 20) - (0, 0) = (85, 20)$ cm

El vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{r}$ es:

$$\vec{u} = \frac{(85, 20)}{\sqrt{85^2 + 20^2}} \approx \frac{(85, 20)}{87{,}32}$$



Ahora, calcularemos el valor de la fuerza:

$$F = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{\left[85^2 + 20^2\right] \cdot 10^{-4}} \approx 472 \text{ N}$$

Y la expresión vectorial es:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u} = 472 \cdot \frac{(85, 20)}{87{,}32} \cdot (15{,}7; 3{,}7) \text{ N}$$

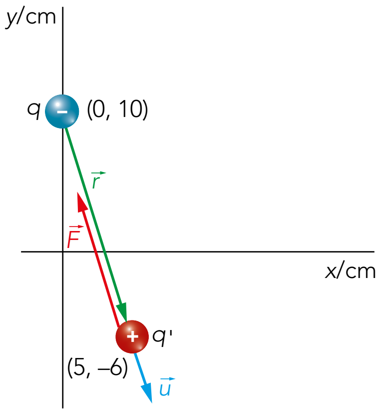
14 **Una carga de –5 mC está colocada en la posición (0, 10) cm. Calcula la fuerza que se ejercerá sobre otra carga de 2 nC colocada en el punto (5, –6) cm.**

Veamos las coordenadas del vector $\vec{r}$.

$\vec{r} = (5, -6) - (0, 10) = (5, -16)$ cm

El vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{r}$ es:

$$\vec{u} = \frac{(5, -16)}{\sqrt{5^2 + (-16)^2}} \approx \frac{(5, -16)}{16{,}76}$$



Ahora calcularemos el valor de la fuerza:

$$F = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{\left[5^2 + (-16)^2\right] \cdot 10^{-4}} \approx -3{,}2 \text{ N}$$

Y la expresión vectorial es:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u} = -3{,}2 \cdot \frac{(5, -16)}{16{,}76} \approx (-0{,}95;\ 3{,}05) \text{ N}$$

15 **Calcula la fuerza que se ejerce sobre una carga q' = 5 µC en (0, 3) cm debida a las cargas q_1 = 0,1 mC en (1, 4) cm, q_2 = –5,0 mC en (–5, 2) cm y q_3 = –4,5 mC en (6, 5) cm.**

Inicialmente, vamos a calcular los tres vectores $\vec{r}$:

$\vec{r}_1 = (0, 3) - (1, 4) = (-1, -1)$ cm

$\vec{r}_2 = (0, 3) - (-5, 2) = (5, 1)$ cm

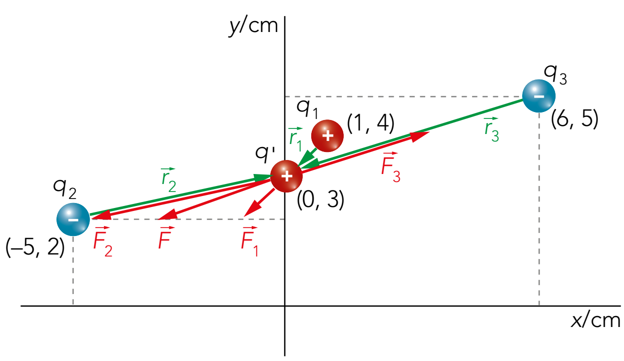
$\vec{r}_3 = (0, 3) - (6, 5) = (-6, -2)$ cm

Ahora los vectores unitarios:

$$\vec{u}_1 = \frac{(-1, -1)}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}} \approx \frac{(-1, -1)}{1{,}41}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(5, 1)}{\sqrt{5^2 + 1^2}} \approx \frac{(5, 1)}{5{,}10}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{(-6, -2)}{\sqrt{(-6)^2 + (-2)^2}} \approx \frac{(-6, -2)}{6{,}32}$$



Determinamos el valor de cada fuerza:

$$F_1 = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{0{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{\left[(-1)^2 + (-1)^2\right] \cdot 10^{-4}} = 22\,500 \text{ N}$$

$$F_2 = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{\left[5^2 + 1^2\right] \cdot 10^{-4}} = -86\,538 \text{ N}$$

$$F_3 = K_0 \cdot \frac{q_3 \cdot q'}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-4{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{\left[(-6)^2 + (-2)^2\right] \cdot 10^{-4}} = -50\,625 \text{ N}$$

Expresamos vectorialmente las tres fuerzas:

$$\vec{F}_1 = F_1 \cdot \vec{u}_1 = 22\,500 \cdot \frac{(-1, -1)}{1{,}41} \approx (-15\,957, -15\,957) \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = F_2 \cdot \vec{u}_2 = -86\,538 \cdot \frac{(5, 1)}{5{,}10} \approx (-84\,841, -16\,968) \text{ N}$$

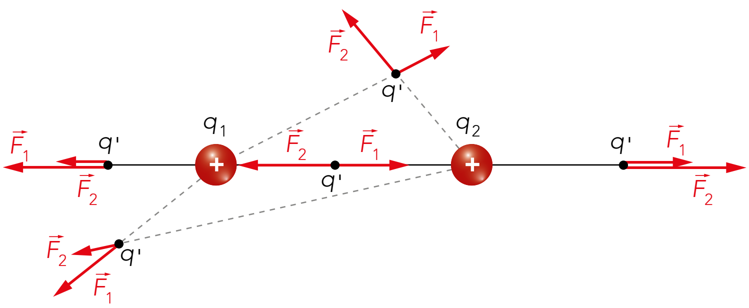
$$\vec{F}_3 = F_3 \cdot \vec{u}_3 = -50\,625 \cdot \frac{(-6, -2)}{6{,}32} \approx (48\,062, 16\,021) \text{ N}$$

La fuerza neta es la suma de estas tres fuerzas:

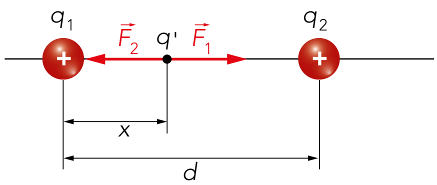
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (-15\,957, -15\,957) + (-84\,841, -16\,968) + (48\,062, 16\,021) = (-52\,736, -16\,904) \text{ N}$$

16 **Dos cargas, q_1 = 4 mC y q_2 = 8 mC, están separadas un metro. ¿En qué punto podremos colocar una carga q' para que quede en equilibrio?**

Si realizamos el dibujo de dos cargas positivas separadas una cierta distancia, podremos ver que, solo en la recta que forman las dos cargas, es posible que exista un punto donde las fuerzas sobre q' se anulen, ya que es el único lugar donde las dos fuerzas tienen la misma dirección. Además, solo en el segmento que queda entre las dos cargas, las dos fuerzas tienen sentido opuesto. Por tanto, de existir un punto donde se anulen las dos fuerzas, tiene que estar en este segmento.



Llamemos x a la distancia desde q_1 hasta el punto buscado, y d, a la distancia entre las dos cargas. Ahora, imponemos la condición de que las dos fuerzas en el punto x se anulan puesto que tienen el mismo módulo:



$$\left|F_1\right| = \left|F_2\right| \rightarrow K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{x^2} = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{\left(d - x\right)^2} \rightarrow \frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{\left(d - x\right)^2} \rightarrow \left(q_1 - q_2\right) \cdot x^2 - 2 \cdot d \cdot q_1 \cdot x + q_1 \cdot d^2 = 0$$

$$-4 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 - 8 \cdot 10^{-3} \cdot x + 4 \cdot 10^{-3} = 0 \rightarrow x^2 + 2 \cdot x - 1 = 0 \rightarrow x \approx 0{,}414 \text{ m} = 41{,}4 \text{ cm}$$

Nos hemos quedado con la solución positiva, ya que la negativa no tiene significado en nuestro ejercicio.

En la imagen hemos supuesto que $q' > 0$, pero si fuese $q' < 0$, los cálculos servirían, aunque los vectores habría que dibujarlos con el sentido cambiado.

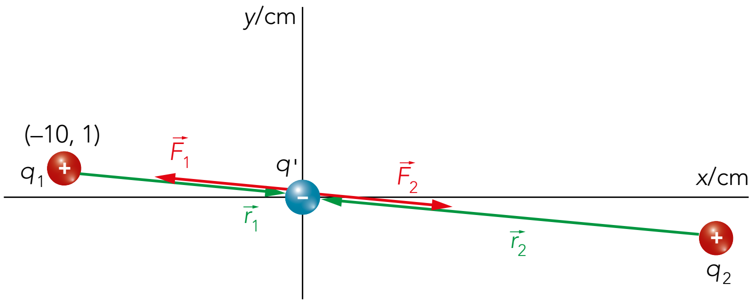
17 **Una carga $q' = -1$ nC colocada en el origen de coordenadas es atraída por otra carga $q_1 = 3$ mC situada en (–10, 1) cm. ¿Dónde colocamos una carga $q_2 = 9$ mC para dejar a q' en equilibrio?**

Si unimos con una recta las dos cargas, q_1 y q', tal y como se ve en la imagen de abajo, deducimos que la carga $q_2 = 9$ mC habrá que colocarla en la parte derecha de dicha recta.

El vector $\vec{r}_1$ es:

$$\vec{r}_1 = (0, 0) - (-10, 1) = (10, -1) \text{ cm}$$

Imponemos que sean los módulos iguales:



$$\left|F_1\right| = \left|F_2\right| \rightarrow K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot |q'|}{r_1^2} = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot |q'|}{r_2^2} \rightarrow \frac{q_1}{r_1^2} = \frac{q_2}{r_2^2} \rightarrow r_2 = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \cdot r_1 = \sqrt{\frac{9}{3}} \cdot \sqrt{10^2 + \left(-1\right)^2} \approx 17{,}4 \text{ cm}$$

La ecuación de la recta que pasa por (–10, 1) con la dirección de $\vec{r}_1 = (10, -1)$ es:

$$\frac{x + 10}{10} = \frac{y - 1}{-1} \rightarrow y = -\frac{x}{10}$$

Por tanto, las coordenadas de la carga q_2 tienen que ser del tipo:

$$\vec{r}_2 = \left(x, -\frac{x}{10}\right)$$

con $x > 0$, para que esté en la recta y a la derecha de q'.

Además, tiene que cumplir que su módulo sea:

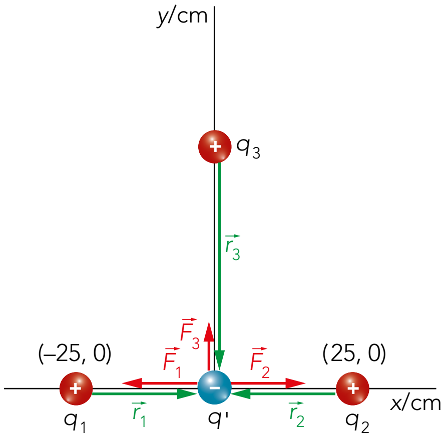
$$r_2 = \sqrt{x^2 + \left(-\frac{x}{10}\right)^2} = 17{,}4 \rightarrow x^2 + \frac{x^2}{100} = 17{,}4^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{17{,}4^2 \cdot 100}{101}} \approx 17{,}3 \text{ cm}$$

Por tanto:

$$\vec{r}_2 = (17{,}3, -1{,}7) \text{ cm}$$

18 **Tres cargas de 2 C están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de medio metro de lado. Determina la fuerza que se ejercerá sobre una carga testigo de −1 pC colocada en la mitad de uno de los lados.**

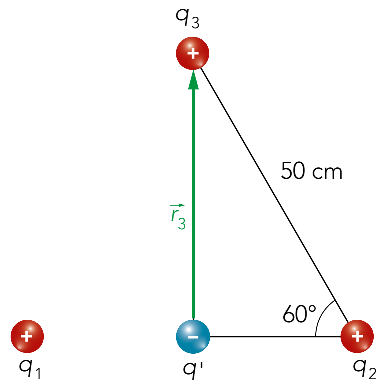
Vamos a utilizar unos ejes y dibujamos el triángulo en la disposición que nos parezca más fácil:



Se observa que, debido a la simetría del ejercicio, las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ se anulan entre sí. Por tanto, la fuerza total es la $\vec{F}_3$. Por eso, solamente calcularemos $\vec{F}_3$:

$$F_3 = K_0 \cdot \frac{q_3 \cdot q'}{r_3^2}$$

r_3 es la altura del triángulo:



$$\text{sen } 60° = \frac{r_3}{50} \rightarrow r_3 = 50 \cdot \text{sen } 60° \approx 43{,}3 \text{ cm}$$

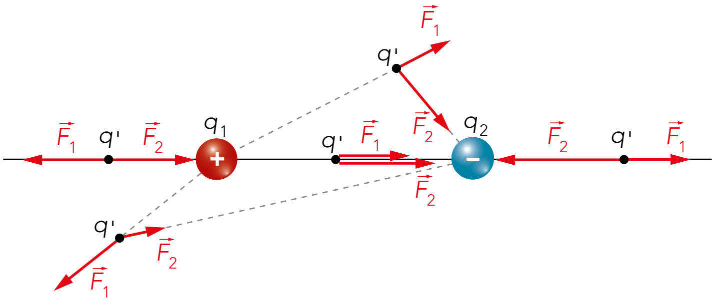
$$F_3 = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot \left(-1 \cdot 10^{-12}\right)}{43{,}3^2 \cdot 10^{-4}} \approx -0{,}096 \text{ N}$$

Ahora, multiplicamos por el vector unitario $\vec{u}_3 = (0, -1)$.

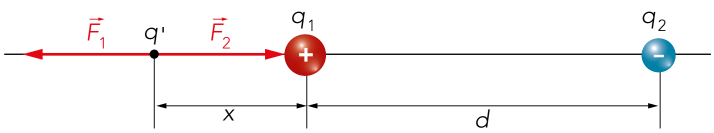
$$\vec{F} = \vec{F}_3 = F_3 \cdot \vec{u}_3 = -0{,}096 \cdot \left(0; -1\right) = \left(0; 0{,}096\right) \text{ N}$$

19 **La carga q_1 = 0,4 mC está separada un metro de la carga q_2 = −1,2 mC. Encuentra el punto en el que podremos colocar una carga testigo y que quede en equilibrio.**

Si realizamos el dibujo de dos cargas separadas una cierta distancia, podremos ver que solo en la recta que forman las dos cargas, es posible que exista un punto donde las fuerzas sobre q' se anulen, ya que es el único lugar donde las dos fuerzas tienen la misma dirección. Pero no puede ser en el segmento que hay entre las dos cargas, ya que las dos fuerzas tienen el mismo sentido. La carga q' deberá estar más lejos de la carga mayor $|q_2|$ que de la menor $|q_1|$; por tanto, según la disposición que hemos considerado, el punto buscado estará sobre la parte izquierda de la recta.



En la imagen de abajo, hemos llamado x a la distancia desde q_1 hasta el punto buscado, y d, a la distancia que separa las dos cargas. Ahora, imponemos la condición de que las dos fuerzas en el punto x se anulan puesto que tienen el mismo módulo:



$$|F_1| = |F_2| \rightarrow K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{x^2} = K_0 \cdot \frac{|q_2| \cdot q'}{(d+x)^2} \rightarrow \frac{q_1}{x^2} = \frac{|q_2|}{(d+x)^2} \rightarrow (q_1 - |q_2|) \cdot x^2 + 2 \cdot d \cdot q_1 \cdot x + q_1 \cdot d^2 = 0$$

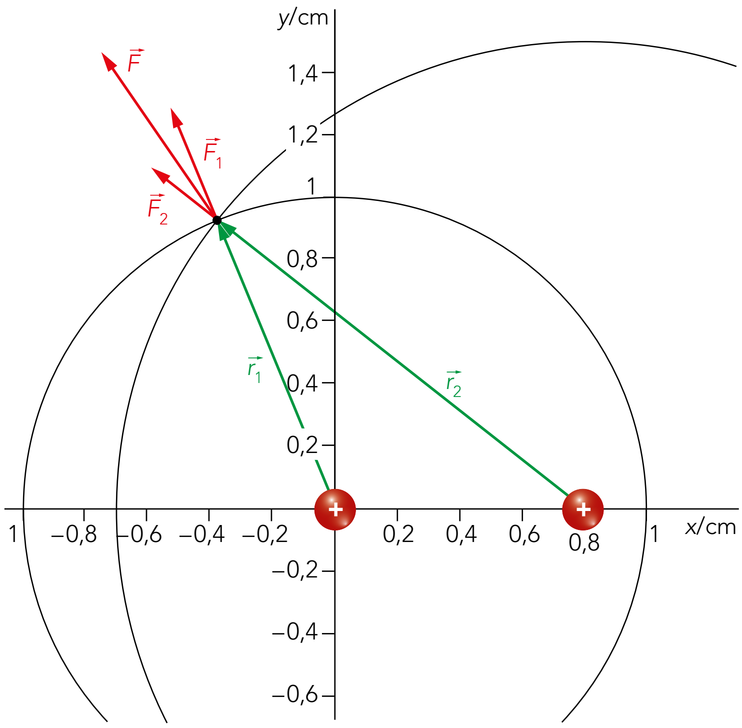
$$-0{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 0{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot x + 0{,}4 \cdot 10^{-3} = 0 \rightarrow x^2 - x - 0{,}5 = 0 \rightarrow x \approx 1{,}366 \text{ m}$$

Nos hemos quedado con la solución positiva, que es la que tiene sentido en nuestro ejercicio.

En la imagen hemos supuesto que $q' > 0$, pero que si fuese $q' < 0$ los cálculos servirían, aunque los vectores habría que dibujarlos con el sentido cambiado.

20 Piensa y comparte en pareja. **Dos cargas de 8 mC cada una se encuentran separadas 80 cm. Calcula la fuerza que se ejercerá sobre una tercera carga testigo de 1 μC situada a 1 m de una de las cargas y 1,5 m de la otra.**

Como se muestra en la imagen, existen dos puntos que cumplen esta condición. Si dibujamos las dos cargas fuente sobre el eje x, los dos puntos son simétricos con respecto a este eje. Nos centraremos solamente en uno de ellos. El resultado que obtengamos será simétrico en el otro punto.



Vamos a calcular primero el valor de cada fuerza:

$$F_1 = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r_1^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{1^2} = 72\ \text{N}$$

$$F_2 = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r_2^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{1{,}5^2} = 32\ \text{N}$$

La parte complicada del ejercicio es calcular los vectores unitarios; para ello, es necesario calcular las coordenadas del punto donde está q'. Este punto lo calcularemos estudiando la intersección de las dos circunferencias.

$$\left\{\begin{matrix} x^2 + y^2 = 1 \\ (x - 0{,}8)^2 + y^2 = 1{,}5^2 \end{matrix}\right\} \rightarrow x \approx -0{,}38\ \text{cm};\ y \approx 0{,}92\ \text{cm}$$

Ya podemos escribir los vectores $\vec{r}$.

$$\vec{r}_1 = (-0{,}38; 0{,}92) - (0; 0) = (-0{,}38; 0{,}92)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_2 = (-0{,}38; 0{,}92) - (0{,}8; 0) = (-1{,}18; 0{,}92)\ \text{m}$$

Los vectores unitarios son:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(-0{,}38; 0{,}92)}{\sqrt{(-0{,}38)^2 + 0{,}92^2}} \approx (-0{,}382; 0{,}924)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(-1{,}18; 0{,}92)}{\sqrt{(-1{,}18)^2 + 0{,}92^2}} \approx (-0{,}789; 0{,}615)$$

Por tanto:

$\vec{F}_1 = F_1 \cdot \vec{u}_1 = 72 \cdot (-0{,}382; 0{,}924) \approx (-27{,}50; 66{,}53)\ \text{N}$

$\vec{F}_2 = F_2 \cdot \vec{u}_2 = 32 \cdot (-0{,}789; 0{,}615) \approx (-25{,}25; 19{,}68)\ \text{N}$

La fuerza total es:

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-27{,}50; 66{,}53) + (-25{,}25; 19{,}68) = (-52{,}75; 86{,}21)\ \text{N}$

En el punto inferior, la fuerza es:

$\vec{F}' \approx (-52{,}8; 86{,}2)\ \text{N}$

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de un documento que explica cómo aplicar la estrategia de desarrollo del pensamiento «Piensa y comparte en pareja».

21 **Además de las fuerzas gravitatoria y eléctrica, también existe otra fuerza importante que se puede apreciar a simple vista llamada fuerza magnética, que, en combinación con la eléctrica, se denomina electromagnética. Uno de los ejemplos naturales de esta fuerza son las auroras polares, fenómenos que se producen en los polos terrestres en determinadas épocas del año en los que el cielo nocturno toma colores muy llamativos. Busca la explicación científica a este hecho e ilústralo con imágenes.**

Respuesta abierta.

Conviene que el alumnado recuerde y tenga presentes las normas básicas de ciudadanía digital, que puede consultar en los recursos relacionados con la clave TIC en **anayaeducacion.es**.

22 **La distancia que hay entre los protones en un núcleo es del orden de 10^{-15} m. Compara la fuerza de repulsión eléctrica con la de atracción gravitatoria.**

Datos: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

La fuerza electrostática es:

$$F_e = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_0^2} = K_0 \cdot \frac{e \cdot e}{r_0^2} = K_0 \cdot \frac{e^2}{r_0^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{(10^{-15})^2} \approx 230{,}4\ \text{N}$$

La fuerza gravitatoria es (introducimos un menos para hacer la fuerza gravitatoria atractiva):

$$F_g = G \cdot \frac{m_p \cdot m_p}{r_0^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{(1{,}67 \cdot 10^{-27})^2}{(10^{-15})^2} \approx 1{,}86 \cdot 10^{-34}\ \text{N}$$

Si las comparamos:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{230{,}4}{1{,}86 \cdot 10^{-34}} \approx 1{,}24 \cdot 10^{36}$$

Vemos que la fuerza eléctrica es unas 10^{36} veces mayor que la gravitatoria. Es lógico pensar que la fuerza gravitatoria no influye prácticamente nada en el comportamiento de los átomos.

4 CAMPO ELECTROSTÁTICO

CE.1.1. **(EA.1.1.1.-1.1.2.)** **CE.7.9.** **(EA.7.9.2.)** **CE.7.10.** **(EA.7.10.1.)**

Página 343

23 El campo eléctrico en el punto *P* es (1, 2) · 10⁵ N/C. ¿Qué fuerza se ejercerá sobre una carga de –3 mC colocada en dicho punto?

Simplemente tenemos en cuenta que el campo eléctrico es una fuerza por unidad de carga:

$$\vec{F} = q' \cdot \vec{E} = -3 \cdot 10^{-3} \cdot (1,\ 2) \cdot 10^5 = (-300,\ -600)\ \text{N}$$

24 Sobre una carga de –6 µC se ejerce una fuerza electrostática de (–0,060; 0,012) N. ¿Qué valor tiene el campo electrostático en ese punto?

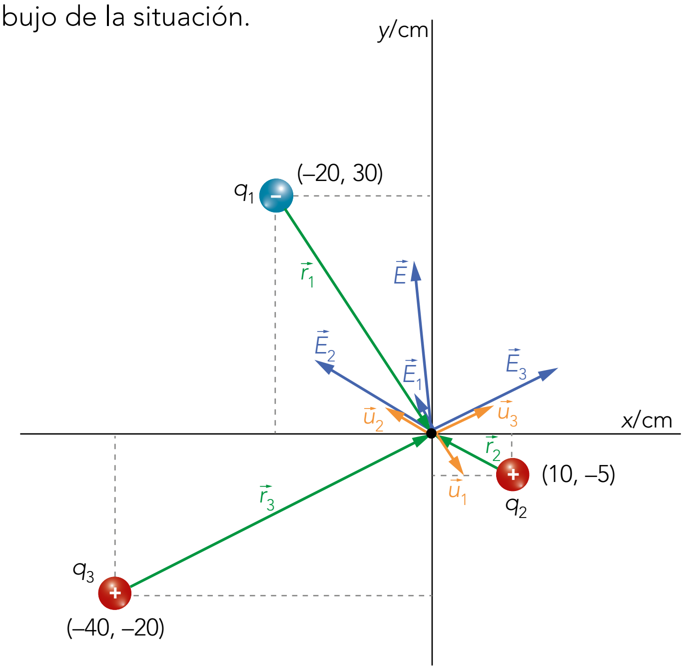
Teniendo en cuenta la relación entre el campo eléctrico y la fuerza que experimenta una carga:

$$\vec{F} = q' \cdot \vec{E} \ \rightarrow\ \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{(-0{,}060;\ 0{,}012)}{-6 \cdot 10^{-6}} = (10\,000;\ -2\,000)\ \text{N/C}$$

25 Disponemos de tres cargas: q_1 = –5 nC en (–20, 30), q_2 = –1 nC en (10, –5) y q_3 = 15 nC en (–40, –20). Determina el campo eléctrico creado en el punto *P* = (0, 0). ¿Qué fuerza se ejercerá sobre una carga de –5 mC colocada en el punto *P*?

Nota: todas las coordenadas se expresan en cm.

Realicemos un dibujo de la situación.



Calculemos los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (0,\ 0) - (-20,\ 30) = (20,\ -30)\ \text{cm}$$

$$\vec{r}_2 = (0,\ 0) - (10,\ -5) = (-10,\ 5)\ \text{cm}$$

$$\vec{r}_3 = (0,\ 0) - (-40,\ -20) = (40,\ 20)\ \text{cm}$$

Ahora, los vectores unitarios:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(20, -30)}{\sqrt{20^2 + (-30)^2}} \approx \frac{(20, -30)}{36{,}056}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(-10{,}5)}{\sqrt{(-10)^2 + 5^2}} \approx \frac{(-10{,}5)}{11{,}180}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{r}_3}{r_3} = \frac{(40, 20)}{\sqrt{40^2 + 20^2}} \approx \frac{(40, 20)}{44{,}721}$$

Veamos los valores de los campos:

$$E_1 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-9}}{\left(20^2 + (-30)^2\right) \cdot 10^{-4}} \approx -346 \text{ N/C}$$

$$E_2 = K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-9}}{\left((-10)^2 + 5^2\right) \cdot 10^{-4}} \approx 720 \text{ N/C}$$

$$E_3 = K_0 \cdot \frac{q_3}{r_3^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{15 \cdot 10^{-9}}{\left(40^2 + 20^2\right) \cdot 10^{-4}} \approx 675 \text{ N/C}$$

Ya podemos escribir cada campo vectorialmente:

$$\vec{E}_1 = E_1 \cdot \vec{u}_1 = -346 \cdot \frac{(20, -30)}{36{,}056} \approx (-192, 288) \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \cdot \vec{u}_2 = 720 \cdot \frac{(-10{,}5)}{11{,}180} \approx (-644, 322) \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_3 = E_3 \cdot \vec{u}_3 = 675 \cdot \frac{(40, 20)}{44{,}721} \approx (604, 302) \text{ N/C}$$

El campo total o neto es la suma de todos:

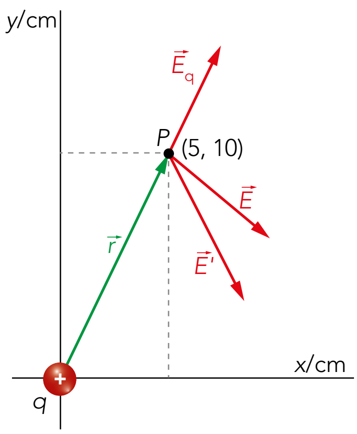
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = (-192, 288) + (-644, 322) + (604, 302) = (-232, 912) \text{ N/C}$$

Aplicamos la expresión que relaciona el campo con la fuerza:

$$\vec{F} = q' \cdot \vec{E} = -5 \cdot 10^{-3} \cdot (-232; 912) \approx (1{,}2; -4{,}6) \text{ N}$$

26 El campo eléctrico en el punto *P* = (5, 10) cm es (250, –451) N/C. Si colocamos una carga de 0,2 nC en el punto (0, 0), ¿qué valor tendrá ahora el campo en el punto *P*?

Aplicamos el principio de superposición. Al campo existente en el punto *P*, le sumamos (vectorialmente) el producido por la carga de 0,2 nC. Así que, calculemos el campo eléctrico que crea la carga en el punto *P*.



El vector $\vec{r}$:

$$\vec{r} = (5, 10) - (0, 0) = (5, 10) \text{ cm}$$

El vector unitario $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(5, 10)}{5^2 + 10^2} \approx (0{,}447,\ 0{,}894)$$

El valor del campo:

$$E_q = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{0{,}2 \cdot 10^{-9}}{[5^2 + 10^2] \cdot 10^{-4}} = 144 \text{ N/C}$$

Y por último, la expresión vectorial del campo:

$$\vec{E}_q = E_q \cdot \vec{u} = 144 \cdot (0{,}447,\ 0{,}894) \approx (64,\ 129) \text{ N/C}$$

El campo total en el punto P es:

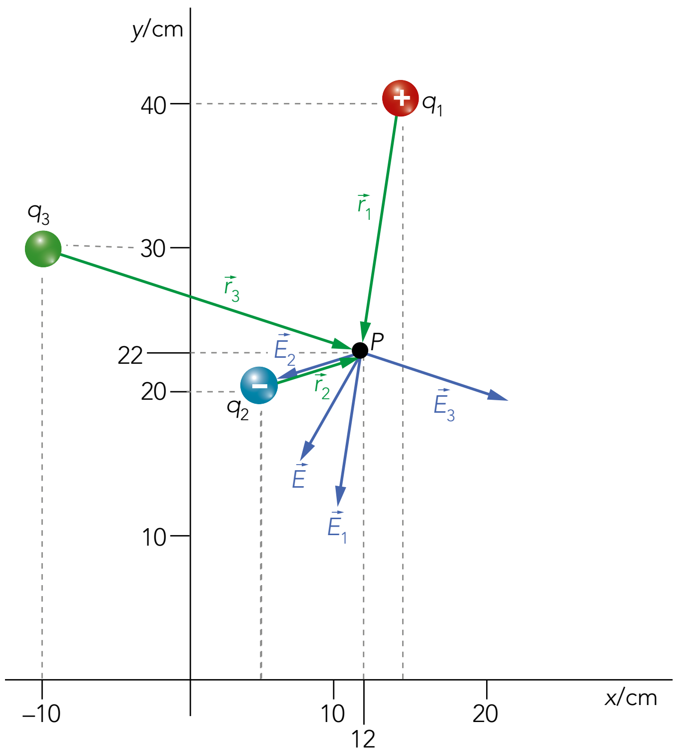
$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}_q = (250, -451) + (64,\ 128) = (314,\ -323) \text{ N/C}$$

27 Disponemos de tres cargas: q_1 = 6 μC en (15, 40), q_2 = –2 μC en (5, –20) y q_3 en (–10, 30). Si el campo creado por estas tres cargas en P = (12, 22), es (–1,992, –3,093) · 10^6 N/C, ¿qué valor tendrá la carga q_3?

Nota: todas las coordenadas se expresan en cm.

Fe de erratas de la primera edición del libro del alumnado: Las coordenadas de la carga q_2 que aparecen en el enunciado hacen el problema irresoluble. Para que se pueda resolver, las coordenadas de la carga q_2 deben ser (5, 20). Con esta modificiación, se resuelve a continuación.

Haciendo un dibujo de la situación, se deduce que la carga q_3 tiene que ser positiva, ya que si fuese negativa, los tres vectores del campo nunca podrían sumar un vector con coordenada x positiva.



Tendremos que proceder de manera análoga a si conociéramos todas las cargas. Cuando impongamos el principio de superposición al campo eléctrico, obtendremos una ecuación con nuestra incógnita E_3 lista para despejar.

Calculemos los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (12, 22) - (15, 40) = (-3, -18) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_2 = (12, 22) - (5, 20) = (7, 2) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_3 = (12, 22) - (-10, 30) = (22, -8) \text{ cm}$$

Ahora los vectores unitarios:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(-3, -18)}{\sqrt{(-3)^2 + (-18)^2}} \approx \frac{(-3, -18)}{18{,}248}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(7, 2)}{\sqrt{7^2 + 2^2}} \approx \frac{(7, 2)}{7{,}280}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{r}_3}{r_3} = \frac{(22, -8)}{\sqrt{22^2 + (-8)^2}} \approx \frac{(22, -8)}{23{,}409}$$

Veamos los valores de los campos:

$$E_1 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6}}{\left[(-3)^2 + (-18)^2\right] \cdot 10^{-4}} \approx 1{,}62 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

$$E_2 = K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{\left[7^2 + 2^2\right] \cdot 10^{-4}} \approx -3{,}40 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

$$E_3 = K_0 \cdot \frac{q_3}{r_3^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{q_3}{\left[22^2 + (-8)^2\right] \cdot 10^{-4}} \approx 1{,}642 \cdot 10^{11} \cdot q_3 \text{ N/C}$$

Ya podemos escribir cada campo vectorialmente:

$$\vec{E}_1 = E_1 \cdot \vec{u}_1 = 1{,}62 \cdot 10^6 \cdot \frac{(-3, -18)}{18{,}248} \approx (-0{,}266; -1{,}598) \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \cdot \vec{u}_2 = -3{,}40 \cdot 10^6 \cdot \frac{(7, 2)}{7{,}280} \approx (-3{,}269; -0{,}934) \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_3 = E_3 \cdot \vec{u}_3 = 1{,}642 \cdot 10^{11} \cdot q_3 \cdot \frac{(22, -8)}{23{,}409} \approx (154\,316{,}716; -56\,115{,}169) \cdot 10^6 \cdot q_3 \text{ N/C}$$

El campo total o neto es la suma de todos:

$$\vec{E} = (-0{,}266; -1{,}598) \cdot 10^6 + (-3{,}269; -0{,}934) \cdot 10^6 + (154\,316{,}716; -56\,115{,}169) \cdot 10^6 \cdot q_3$$

$$\vec{E} = (-1{,}992; -3{,}093) \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

Despejando en cualquiera de las coordenadas, obtenemos q_3. Debe comprobarse que se obtiene el mismo resultado independientemente de la coordenada que utilicemos para calcular el valor de la carga.

$$q_3 \approx 10 \ \mu\text{C}$$

28 **El campo eléctrico en un punto *P*, creado por una carga en el punto *A*, es (–860, 1320) N/C. ¿Qué valor tendrá el campo si nos alejamos una distancia tres veces mayor a *AP* y en la misma dirección?**

El módulo del campo eléctrico es:

$$E = \sqrt{(-860)^2 + 1\,320^2} \approx 1\,575 \text{ N/C}$$

Tenemos que calcular el valor actual de r.

$$E = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} \rightarrow r = \frac{K_0 \cdot q}{E}$$

Si la nueva distancia es $r' = 3 \cdot r$, su campo E' será:

$$E' = K_0 \cdot \frac{q}{r'^2} = K_0 \cdot \frac{q}{(3 \cdot r)^2} = \frac{1}{9} \cdot K_0 \cdot \frac{q}{r^2} = \frac{E}{9} = \frac{1\,575}{9} = 175 \text{ N/C}$$

Puesto que este vector tiene la misma dirección y sentido que el anterior, cumple que sus coordenadas son proporcionales:

$$\frac{E}{E_x} = \frac{E'}{E'_x} \rightarrow E'_x = \frac{E'}{E} \cdot E_x = \frac{175}{1\,575} \cdot (-860) \approx -96 \text{ N/C}$$

$$\frac{E}{E_y} = \frac{E'}{E'_y} \rightarrow E'_y = \frac{E'}{E} \cdot E_y = \frac{175}{1\,575} \cdot 1\,320 \approx 147 \text{ N/C}$$

Por tanto:

$$\vec{E}' = (-96, 147) \text{ N/C}$$

29 **La idea de campo eléctrico es muy complicada de entender, ya que requiere de una abstracción muy grande respecto a todo lo que conocemos. ¿Alguna vez has visto las líneas de campo? Para entender su importancia, busca ejemplos de la vida cotidiana en donde el campo eléctrico sea clave en su funcionamiento. Explica con un póster lo que has encontrado y compara tus hallazgos con los del resto de compañeros y compañeras.**

Respuesta abierta.

Recuerde a su alumnado que en el apartado Plan Lingüístico de **anayaeducacion.es** dispone de información sobre los distintos tipos de textos.

30 **Nuestro cuerpo es una fuente de energía eléctrica. Piensa en los calambres que sufres al tocar a otras personas u objetos, o en cómo se transporta la información entre las neuronas. Busca más ejemplos y relaciónalos con lo que has aprendido hasta ahora. A continuación, puedes ir a la sección TIC del final de esta unidad y ejecutar una aplicación que reproduce y explica alguno de estos fenómenos.**

Respuesta abierta.

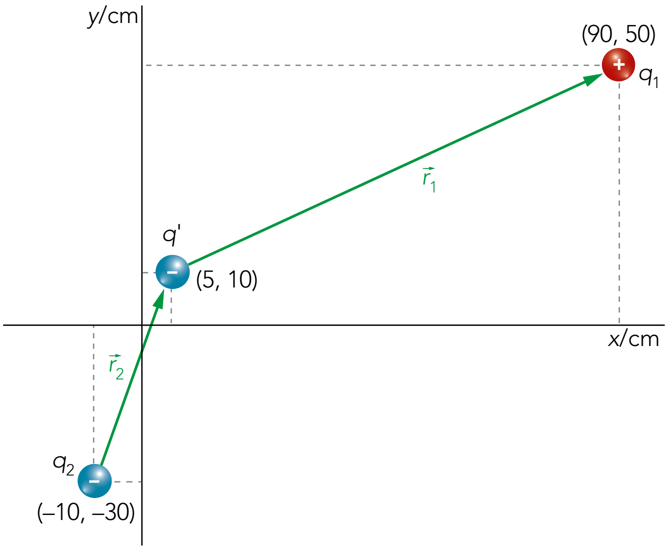
5 ENERGÍA POTENCIAL

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.8.4. (EA.8.4.1.)

Página 347

31 **Calcula la energía potencial que tiene la carga q' = –5 µC en (5, 10) cm debido a las cargas: q_1 = 2 mC en (90, 50) cm y q_2 = –5 mC en (–10, –30) cm.**

Tenemos que aplicar el principio de superposición.



Calculemos las $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (5, 10) - (90, 50) = (-85, -40) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_2 = (5, 10) - (-10, -30) = (15, 40) \text{ cm}$$

Cada energía potencial individual es:

$$E_{p_1} = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r_1} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot \left(-5 \cdot 10^{-6}\right)}{\sqrt{\left(-85\right)^2 + \left(-40\right)^2} \cdot 10^{-2}} \approx -95{,}80 \text{ J}$$

$$E_{p_2} = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r_2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-3} \cdot \left(-5 \cdot 10^{-6}\right)}{\sqrt{15^2 + 40^2} \cdot 10^{-2}} \approx 526{,}69 \text{ J}$$

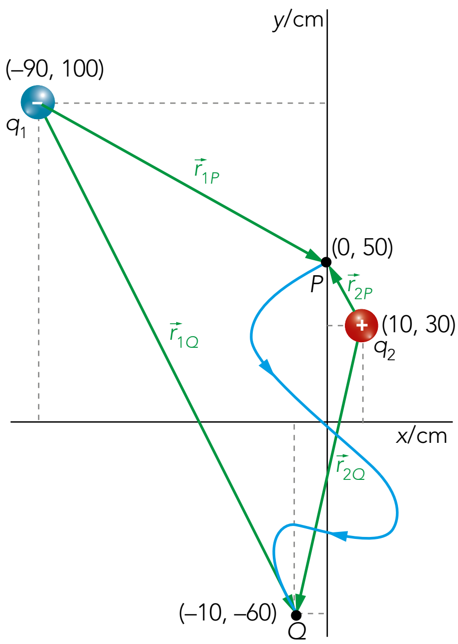
Por tanto:

$$E_p = E_{p_1} + E_{p_2} = -95{,}80 + 526{,}69 = 430{,}89 \text{ J}$$

32 Disponemos de dos cargas, q_1 = –5 μC en (–90, 100) y q_2 = 6 μC en (10, 30). Calcula el trabajo que habrá que realizar para desplazar una carga q' = 2 mC que inicialmente está en reposo en (0, 50) hasta dejarla en reposo en (–10, –60). ¿Qué trabajo realiza la fuerza eléctrica del campo creado por las cargas fuente, q_1 y q_2?

Nota: todas las coordenadas se expresan en cm.

La situación es la siguiente:



Mediante la aplicación de una fuerza externa, se va a llevar la carga q' en reposo en P = (0, 50) cm, hasta el punto Q = (–10, –60) cm, dejándola nuevamente en reposo.

Veamos la energía potencial que tiene la carga q' en cada punto; para ello, primero calculemos las $\vec{r}$:

$$\vec{r}_{1P} = (0, 50) - (-90, 100) = (90, -50) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_{1Q} = (-10, -60) - (-90, 100) = (80, -160) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_{2P} = (0, 50) - (10, 30) = (-10, 20) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_{2Q} = (-10, -60) - (10, 30) = (-20, -90) \text{ cm}$$

Cada energía potencial individual es:

$$E_{p_{1P}} = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r_{1P}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{90^2 + (-50)^2} \cdot 10^{-2}} \approx -87{,}42 \text{ J}$$

$$E_{p_{1Q}} = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r_{1Q}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{80^2 + (-160)^2} \cdot 10^{-2}} \approx -50{,}31 \text{ J}$$

$$E_{p_{2P}} = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r_{2P}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{(-10)^2 + 20^2} \cdot 10^{-2}} \approx 482{,}99 \text{ J}$$

$$E_{p_{2Q}} = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r_{2Q}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{(-20)^2 + (-90)^2} \cdot 10^{-2}} \approx 117{,}14 \text{ J}$$

Por tanto:

$$E_{p_P} = E_{p_{1P}} + E_{p_{2P}} = -87{,}42 + 482{,}99 = 395{,}57 \text{ J}$$

$$E_{p_Q} = E_{p_{1Q}} + E_{p_{2Q}} = -50{,}31 + 117{,}14 = 66{,}83 \text{ J}$$

El trabajo total que se realiza es el de la fuerza eléctrica más el de la fuerza externa y, en virtud del teorema de las fuerzas vivas, es cero, ya que no hay incremento de energía cinética:

$$W_T = W_C + W_{ext} = \Delta E = 0$$

Por tanto:

$$W_{ext} = -W_C = -(-\Delta E_p) = \Delta E_p = E_{p_Q} - E_{p_P} = 66{,}83 - 395{,}57 = -328{,}74 \text{ J}$$

Es un trabajo negativo, porque la fuerza externa tiene que frenar la carga al ir de P a Q, ya que el campo tiende a desplazar la carga de manera «natural» desde P hasta Q.

Ya sabemos que:

$$W_C = -\Delta E_p = E_{p_P} - E_{p_Q} = 395{,}57 - 66{,}83 = 328{,}74 \text{ J}$$

El trabajo del campo es positivo, porque favorece el desplazamiento de la carga.

33 Tres cargas de 1 nC están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de 30 cm de lado. Calcula la energía necesaria para colocar una carga de 10 mC en el centro del triángulo.

La carga no experimenta ningún incremento de energía cinética, puesto que suponemos que la carga estaba inicialmente en reposo y se deja en reposo al final. Por tanto, en virtud del teorema de las fuerzas vivas, el trabajo total es cero (como vimos en el ejercicio anterior) y el trabajo externo es precisamente el trabajo realizado por la fuerza eléctrica pero cambiado de signo. Por tanto:

$$W_{ext} = -W_C = -(-\Delta E_p) = \Delta E_p = E_p(r) - E_p(\infty) = E_p(r) - 0 = E_p(r)$$

Tenemos que (como se ha visto en la unidad), la energía potencial es, precisamente, el trabajo que hay que realizar para llevar la carga desde una distancia «infinita» hasta el punto en cuestión.

Así que, lo que tenemos que calcular es la energía potencial de la carga de 10 mC que llamaremos q' en el punto final.

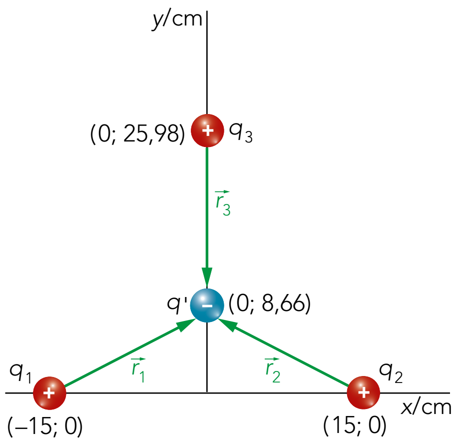
Debemos recordar o demostrar que el centro de un triángulo equilátero está a un tercio de la altura. La altura es:

$$h = l \cdot \text{sen } 60° = 30 \cdot \text{sen } 60° \approx 25{,}98 \text{ cm}$$

Así, un tercio de esta altura es:

$$\frac{1}{3}\, 25{,}98 = 8{,}66 \text{ cm}$$

Colocamos las cargas que forman el triángulo como mejor nos parezca en un sistema de ejes y utilizamos los datos obtenidos.



Calculamos los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (0;\, 8{,}66) - (-15,\, 0) = (15;\, 8{,}66) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_2 = (0;\, 8{,}66) - (15,\, 0) = (-15;\, 8{,}66) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_3 = (0;\, 8{,}66) - (0;\, 25{,}98) = (0;\, -17{,}32) \text{ cm}$$

Las energías potenciales de q' debidas a cada carga fuente son:

$$E_{p_1} = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r_1} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-9} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{15^2 + 8{,}66^2} \cdot 10^{-2}} \approx 0{,}52 \text{ J}$$

$$E_{p_2} = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r_2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-9} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{(-15)^2 + 8{,}66^2} \cdot 10^{-2}} \approx 0{,}52 \text{ J}$$

$$E_{p_3} = K_0 \cdot \frac{q_3 \cdot q'}{r_3} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-9} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{17{,}32 \cdot 10^{-2}} \approx 0{,}52 \text{ J}$$

Lógicamente, las tres energías potenciales son iguales puesto que las cargas fuente son del mismo valor (1 nC) y q' está a la misma distancia de cada una de ellas (17,32 cm).

La energía potencial es:

$$E_p = E_{p_1} + E_{p_2} + E_{p_3} = 3 \cdot 5{,}2 \cdot 10^{-1} = 1{,}56 \text{ J}$$

Luego esta es la energía que cuesta llevar la carga q' desde una distancia «infinita» hasta el centro del triángulo.

34 **Calcula la energía necesaria para colocar dos cargas de −1 mC a una distancia de un metro.**

Puesto que el trabajo de las fuerzas eléctricas no dependen del camino, ya que son fuerzas conservativas, da igual mediante qué caminos coloquemos las dos cargas a un metro de separación. Podemos suponer que vamos donde esté una de ellas, y que la otra la cogemos «del infinito» y la llevamos a un metro de la primera. Por tanto, lo que tenemos que calcular es el trabajo de llevar una carga que estaba en «el infinito» en reposo, hasta llegar a un metro de la otra (en reposo). Y, como ya hemos visto en los ejercicios anteriores y en la unidad, esto es igual a la energía potencial que tiene la carga testigo debido a la carga fuente.

Por tanto:

$$E_p = K_0 \cdot \frac{q \cdot q}{r} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-10^{-3} \cdot \left(-10^{-3}\right)}{1} = 9\,000\ \text{J}$$

35 **Una carga *q'* de 20 g, inicialmente en reposo, tiene una energía potencial de 3 J en un punto *P*, y de 8 J en otro punto, *A*.**

a) ¿Cuál es la energía mínima necesaria para llevarla desde *P* hasta *A*?

b) ¿Cuál sería la velocidad de la partícula en *A* si utilizáramos 10 J para desplazarla de *P* a *A*?

a) Puesto que nos piden el trabajo mínimo, quiere decir que la carga la colocaremos en reposo en el punto *A*. Si hiciéramos un trabajo mayor a este valor mínimo, conseguiríamos mover la carga *q'* de *P* a *A* y, además, dejarla con una cierta energía cinética.

Entonces, si dejamos la carga en reposo, no hay incremento de energía cinética, y en virtud del teorema de las fuerzas vivas el trabajo total es cero. Por tanto, el trabajo externo el trabajo que realiza las fuerzas eléctricas con el signo contrario:

$$W_T = W_C + W_{ext} = \Delta E_c = 0 \;\rightarrow\; W_{ext} = -W_C = -\left(-\Delta E_p\right) = \Delta E_p = E_{p_A} - E_{p_P}$$

Por tanto:

$$W_{ext} = 8 - 3 = 5\ \text{J}$$

b) Si se utilizan 10 J en para mover la carga, se invertirán 8 J en el cambio de posición, y sobrarán 2 J que quedarán en forma de energía cinética.

Esto lo podemos demostrar; hemos representado el trabajo mínimo por W_{ext}, y vamos a representar el trabajo que ahora nos piden (que no es mínimo) por W_{EXT}. Este trabajo es el de las fuerzas no conservativas y, como sabemos, es igual al incremento de energía mecánica:

$$W_{EXT} = \Delta E_m = E_{m_A} - E_{m_P} = E_{c_A} + E_{p_A} - E_{c_P} - E_{p_P} = E_{c_A} + E_{p_A} - 0 - E_{p_P} = E_{c_A} + \Delta E_p = E_{c_A} + W_{ext}$$

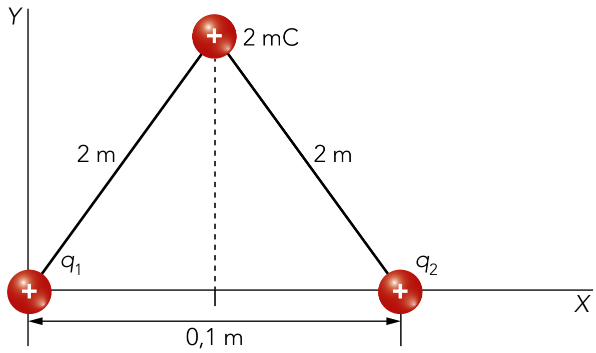
Es decir:

$$10\ \text{J} = E_{c_A} + 8\ \text{J} \;\rightarrow\; E_{c_A} = 2\ \text{J}$$

Simplemente tenemos que despejar la velocidad de la partícula de la expresión de la energía cinética:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 2 \;\rightarrow\; v = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{m}} = \sqrt{\frac{4}{20 \cdot 10^{-3}}} \approx 14{,}1\ \text{m/s}$$

36 **Dos cargas, q_1 = 60 nC y q_2 = 25 nC, están separadas 10 cm. Calcula el trabajo que realiza la fuerza eléctrica cuando lleva una carga de 2 mC desde el punto medio de las dos cargas hasta situarla a 2 m de cada una de las cargas fuente. ¿Con qué energía cinética llega la carga a ese punto?**



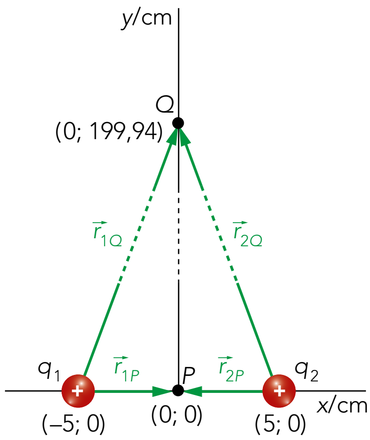
El trabajo que realiza la fuerza eléctrica lo calculamos mediante el teorema de la energía potencial:

$$W_C = -\Delta E_p = E_{p_P} - E_{p_Q}$$

Vamos a realizar un dibujo de la situación. Para ello, colocamos un sistema de referencia como nos parezca mejor, y calculamos las coordenadas de cada punto de interés:

La coordenada *Y* del punto *Q* es:

$$200^2 = y_Q^2 + 5^2 \quad \rightarrow \quad y_Q = \sqrt{200^2 - 5^2} \approx 199{,}94 \text{ cm}$$



Por tanto, tenemos que calcular estas energías potenciales; para ello, empezamos con los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_{1P} = (0, 0) - (-5, 0) = (5, 0) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_{2P} = (0, 0) - (5, 0) = (-5, 0) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_{1Q} = (0;\ 199{,}94) - (-5, 0) = (5;\ 199{,}94) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_{2Q} = (0;\ 199{,}94) - (5, 0) = (-5;\ 199{,}94) \text{ cm}$$

Ahora las energías potenciales debidas a cada carga fuente:

$$E_{p_{1P}} = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r_{1P}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{60 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-2}} = 21{,}60 \text{ J}$$

$$E_{p_{2P}} = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r_{2P}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{25 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-2}} = 9{,}00 \text{ J}$$

$$E_{p_{1Q}} = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r_{1Q}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{60 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{5^2 + 199{,}94^2} \cdot 10^{-2}} \approx 0{,}54 \text{ J}$$

$$E_{p_{2Q}} = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r_{2Q}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{25 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{(-5)^2 + 199{,}94^2} \cdot 10^{-2}} \approx 0{,}22 \text{ J}$$

La energía potencial total de cada punto es:

$$E_{p_P} = 21{,}60 + 9{,}00 = 30{,}60 \text{ J}$$

$$E_{p_Q} = 0{,}54 + 0{,}22 = 0{,}76 \text{ J}$$

El trabajo realizado por la fuerza eléctrica es:

$$W_C = -\Delta E_p = E_{p_P} - E_{p_Q} = 30{,}60 - 0{,}76 = 29{,}84 \text{ J}$$

Es un trabajo positivo, luego el movimiento de la carga q' se produce a favor del campo.

La única fuerza que actúa sobre la carga es la eléctrica, que es conservativa. Por tanto, la energía mecánica se conserva:

$$E_{m_P} = E_{m_Q} \rightarrow E_{p_P} + E_{c_P} = E_{p_Q} + E_{c_Q} \rightarrow E_{p_P} + 0 = E_{p_Q} + E_{c_Q} \rightarrow E_{c_Q} = E_{p_P} - E_{p_Q} = 30{,}6 - 0{,}76 = 29{,}84 \text{ J}$$

Como vemos, el campo eléctrico realiza un trabajo utilizando la energía potencial de la carga q', así, lo que ocurre es que se transforma energía potencial en cinética.

37 **Una carga en reposo de 2 g de masa tiene una energía potencial en el punto *P* de 0,5 J, y en el punto *B*, de –2,8 J. Si mediante una fuerza externa se realiza un trabajo de 5 J para llevar la carga desde *P* hasta *B*. ¿Qué velocidad tendrá la carga?**

Existen dos fuerzas sobre la carga testigo (q'), la fuerza eléctrica, que es conservativa, y la externa, que no lo es. Según el teorema de las fuerzas vivas:

$$W_T = \Delta E_c = E_{c_Q} - E_{c_P} = E_{c_Q}$$

Además:

$$W_T = W_C + W_{EXT} = -\Delta E_p + W_{EXT} = E_{c_Q}$$

donde hemos utilizado el teorema de la energía potencial.

Ya podemos calcular la energía cinética en el punto final:

$$E_{c_Q} = -\Delta E_p + W_{EXT} = E_{p_P} - E_{p_Q} + W_{EXT} = 0{,}5 - \left(-2{,}8\right) + 5 = 8{,}3 \text{ J}$$

La velocidad es:

$$E_{c_Q} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_Q^2 \rightarrow v_Q = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{c_Q}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}3}{2 \cdot 10^{-3}}} \approx 91{,}1 \text{ m/s}$$

6 POTENCIAL ELÉCTRICO

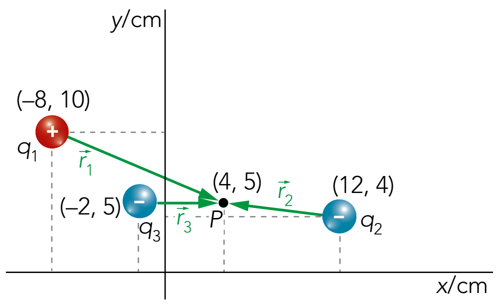
CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.8.4. (EA.8.4.1.)

Página 349

38 **Disponemos de tres cargas: q_1 = 3,5 pC, en (–8, 10), q_2 = –5,1 pC en (12, 4) y q_3 = –14,4 pC en (–2, 5). Determina el potencial en el punto *P* = (4, 5) y la energía potencial de una carga de –2 C colocada en ese punto.**

Nota: todas las coordenadas se expresan en cm.

Aplicamos el principio de superposición.



Calculamos los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (4, 5) - (-8, 10) = (12, -5) \text{ cm}$$
$$\vec{r}_2 = (4, 5) - (12, 4) = (-8, 1) \text{ cm}$$
$$\vec{r}_3 = (4, 5) - (-2, 5) = (6, 0) \text{ cm}$$

Ahora, los potenciales:

$$V_1 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{3{,}5 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{12^2 + (-5)^2} \cdot 10^{-2}} \approx 0{,}242 \text{ V}$$

$$V_2 = K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5{,}1 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{(-8)^2 + 1^2} \cdot 10^{-2}} \approx -0{,}569 \text{ V}$$

$$V_3 = K_0 \cdot \frac{q_3}{r_3} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-14{,}4 \cdot 10^{-12}}{6 \cdot 10^{-2}} = -2{,}160 \text{ V}$$

Sumamos los potenciales:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 0{,}242 - 0{,}569 - 2{,}160 = -2{,}487 \text{ V}$$

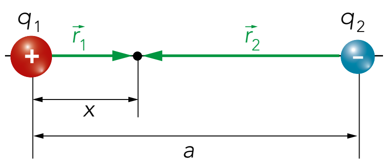
La energía potencial de una carga de –2 C colocada en este potencial es:

$$E_p = q' \cdot V = -2 \cdot (-2{,}487) \approx 4{,}97 \text{ J}$$

Una energía potencial positiva significa que la carga se escaparía «al infinito» si se le liberara. Si la energía potencial fuese negativa, significaría que la carga, de «manera natural» (debido al campo) se mueve desde «el infinito» hasta este punto.

39 Dos cargas q_1 = 4 nC y q_2 = –12 nC están separadas 60 cm. Encuentra un punto en el segmento que las une donde el potencial sea cero. ¿Hay más puntos donde se anule el potencial?

Aplicamos el principio de superposición, imponiendo que el potencial en el punto buscado es cero:



$$V = V_1 + V_2 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1} + K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2} = K_0 \cdot \frac{q_1}{x} + K_0 \cdot \frac{q_2}{a - x} = 0 \rightarrow \frac{q_1}{x} = -\frac{q_2}{a - x} \rightarrow q_1 \cdot (a - x) = -q_2 \cdot x$$

$$q_1 \cdot a - q_1 \cdot x + q_2 \cdot x = 0 \rightarrow x = -\frac{q_1 \cdot a}{q_2 - q_1} = -\frac{4 \cdot 10^{-9} \cdot 60 \cdot 10^{-2}}{-12 \cdot 10^{-9} - 4 \cdot 10^{-9}} = 0{,}15 \text{ m} = 15 \text{ cm}$$

A diferencia de cuando calculábamos puntos donde el campo (o la fuerza) es cero, con el potencial (o la energía potencial) hay infinitos puntos que lo cumplen; son todos aquellos que pertenecen a la superficie equipotencial de valor cero voltios. En este ejercicio, solo hay que calcular el punto, en el segmento que une las cargas, donde el potencial es cero. Se trata del punto donde interseca la superficie equipotencial de valor cero, con el segmento que une las dos cargas.

Si quisiéramos calcular la posición de todos estos puntos, habría que desarrollar:

$$K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1} + K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2} = 0 \rightarrow \frac{q_1}{r_1} = -\frac{q_2}{r_2} \rightarrow \frac{q_1}{r_1} = \frac{|q_2|}{r_2} \rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{|q_2|}{q_1} = \frac{12 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 10^{-9}} = 3$$

Luego, todos los puntos del espacio que cumplan $r_2 = 3 \cdot r_1$ pertenecen a la superficie de potencial cero.

40 **Calcula la diferencia de potencial entre los puntos *A* y *B* situados a 50 cm y 100 cm, respectivamente, de una carga *q* = 4 pC.**

Vamos a calcular $V_{BA} = V_B - V_A$.

$$V_{BA} = V_B - V_A = K_0 \cdot \frac{q}{r_B} - K_0 \cdot \frac{q}{r_A} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-12}}{100 \cdot 10^{-2}} - 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-12}}{50 \cdot 10^{-2}} = -0{,}036 \text{ V} = -36 \text{ mV}$$

Puesto que la diferencia de potencial, V_{BA}, es negativa, significa, lógicamente, que el potencial disminuye al ir de *A* a *B*.

41 **Dos puntos *A* y *B* están separados 1 m de distancia. Sobre la recta que los une, ¿a qué distancia de *A* tendremos que colocar una carga de –6 nC para que la diferencia de potencial ΔV_{AB} sea de 30 V?**

Recordemos que V_{BA} representa $V_B - V_A$.

$$V_{BA} = V_B - V_A = K_0 \cdot \frac{q}{r_B} - K_0 \cdot \frac{q}{r_A} = K_0 \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = K_0 \cdot q \cdot \frac{r_A - r_B}{r_B \cdot r_A} = K_0 \cdot |q| \cdot \frac{r_B - r_A}{r_B \cdot r_A}$$

Además, sabemos que: $r_B + r_A = 1 \rightarrow r_B = 1 - r_A$

Sustituimos esto en la ecuación principal:

$$V_{BA} = K_0 \cdot |q| \cdot \frac{1 - r_A - r_A}{(1 - r_A) \cdot r_A} = K_0 \cdot |q| \cdot \frac{1 - 2 \cdot r_A}{r_A - r_A^2} \rightarrow V_{BA} \cdot r_A - V_{BA} \cdot r_A^2 - K_0 \cdot |q| + 2 \cdot K_0 \cdot |q| \cdot r_A = 0$$

$$r_A^2 - \frac{(V_{BA} + 2 \cdot K_0 \cdot |q|)}{V_{BA}} \cdot r_A + \frac{K_0 \cdot |q|}{V_{BA}} = 0$$

$$r_A^2 - \frac{(30 + 2 \cdot 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-9})}{30} \cdot r_A + \frac{9{,}0 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-9}}{30} = 0$$

$$r_A^2 - 4{,}6 \cdot r_A + 1{,}8 = 0 \rightarrow r_A \approx 0{,}432 \text{ m} = 43{,}2 \text{ cm}$$

42 **Calcula el valor de una carga *q* < 0, situada a 3 m y 1 m de dos puntos cuya diferencia de potencial es de –200 V.**

Llamemos al punto más cercano *P*, y al más lejano, *Q*. Puesto que la carga es negativa, el potencial en cualquier punto es negativo. Dado que la diferencia de potencial que buscamos es negativa, significa que hay que restar el potencial menor (el de *P*, ya que es el más negativo) menos el potencial mayor (el de *Q*, ya que es el menos negativo).

Por tanto, calcularemos $V_{PQ} = V_P - V_Q$ sabiendo que su valor es –200 V.

$$V_{PQ} = V_P - V_Q = K_0 \cdot \frac{q}{r_P} - K_0 \cdot \frac{q}{r_Q} = K_0 \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q}\right) \rightarrow q = \frac{V_{PQ}}{K_0 \cdot \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q}\right)}$$

$$q = \frac{-200}{9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right)} \approx -3{,}33 \cdot 10^{-8} \text{ C} = -33{,}3 \text{ nC}$$

43 **A partir del ejercicio resuelto 10, calcula el trabajo mínimo que habrá que realizar sobre una carga *q'* = 5 mC para llevarla desde *B* hasta *A*. ¿Qué significa el signo del trabajo que has obtenido?**

El trabajo mínimo es aquel que, finalmente, deja la carga sin energía cinética (parada). Por tanto, la carga se coge en reposo y se suelta en reposo. No hay incremento de energía cinética y, en virtud del teorema de las fuerzas vivas, el trabajo total (el de la fuerza eléctrica y la fuerza externa) es cero:

$$W_T = W_C + W_{ext} = \Delta E_c = 0 \rightarrow W_{ext} = -W_C$$

Teniendo en cuenta el teorema de la energía potencial y la definición de potencial y diferencia de potencial:

$$W_C = -\Delta E_p = E_{p_A} - E_{p_B} = q' \cdot V_A - q' \cdot V_B = q' \cdot (V_A - V_B) = -q' \cdot (V_B - V_A) = -q' \cdot V_{BA}$$

Juntando estas dos ecuaciones:

$$W_{ext} = -W_C = q' \cdot V_{BA} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot (-0{,}370) = -1{,}85 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

El trabajo externo es negativo porque el campo tiende a mover de manera «natural» la carga de *A* a *B* y, mediante una fuerza externa, tenemos que ir frenándola para dejarla en reposo al final. Si no se aplicara la fuerza externa, la carga llegaría a *B* con una cierta velocidad.

44 Dos cargas de –4 nC y 8 nC están separadas 40 cm. ¿Qué trabajo mínimo tendríamos que hacer para llevar una carga de –1 mC desde el punto medio que las une hasta el infinito? Explica este resultado.

Calculamos el potencial en el punto medio de las dos cargas. Aplicamos el principio de superposición:

$$V_m = V_{1m} + V_{2m} = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_{1m}} + K_0 \cdot \frac{q_2}{r_{2m}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-4 \cdot 10^{-9}}{20 \cdot 10^{-2}} + 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-9}}{20 \cdot 10^{-2}} = 180\ \text{V}$$

El potencial en «el infinito» es cero:

$$V_\infty = 0$$

Como ya hemos visto en ejercicios anteriores, cuando el trabajo externo es el mínimo, quiere decir que no se incrementa la energía cinética de la carga y, en este caso, el trabajo realizado por la fuerza externa es el opuesto al realizado por el campo:

$$W_{ext} = -W_C = -(-\Delta E_p) = \Delta E_p = E_{p_\infty} - E_{p_m} = q' \cdot (V_\infty - V_m) = -10^{-3} \cdot (0 - 180) = 0{,}180\ \text{J}$$

El trabajo es positivo porque hay que aplicar una fuerza a la carga y obligarla a moverse en contra del campo, aumentando su energía potencial desde –0,180 J hasta 0 J.

45 El trabajo mínimo que hay que realizar para llevar una carga de 7 mC desde el infinito hasta un punto *P* es de 21 J. Determina el potencial en el punto *P*. ¿Qué trabajo realizará el campo si dejáramos que llevara, nuevamente, la carga al infinito? ¿Con qué energía cinética llegaría?

Si se realiza un trabajo mínimo, la carga no se deja con energía cinética al final. En este caso, como en ejercicios anteriores, el trabajo de la fuerza externa es el opuesto al que realiza el campo:

$$W_{ext} = -W_C = -(-\Delta E_p) = \Delta E_p = E_{p_P} - E_{p_\infty} = E_{p_P} - 0 = E_{p_P} = q' \cdot V_P$$

Sustituimos:

$$21 = 7 \cdot 10^{-3} \cdot V_P \rightarrow V_P = \frac{21}{7 \cdot 10^{-3}} = 3\,000\ \text{V}$$

Los 21 J de energía potencial que tiene la partícula cargada en el punto *P* los utiliza el campo para llevarla «al infinito», donde no tiene energía potencial. Por tanto, el trabajo que realiza el campo es de esos 21 J. Lo podemos comprobar aplicando el teorema de la energía potencial:

$$W_C = -\Delta E_p = E_{p_P} - E_{p_\infty} = q' \cdot V_P = 7 \cdot 10^{-3} \cdot 3000 = 21\ \text{J}$$

Puesto que no hay fuerzas no conservativas, la energía mecánica se conserva. Es decir, que los 21 J de energía potencial que tiene la partícula en el punto inicial, se transforman en energía cinética en un punto que podamos considerar infinitamente lejos. Luego, la energía cinética final será 21 J. De todas formas, podemos calcularlo:

$$W_T = \Delta E_c = E_{c_\infty} - E_{c_P} = E_{c_\infty} - 0 = E_{c_\infty}$$

Y el trabajo total es el de la única fuerza que hay, el de la fuerza eléctrica:

$$W_T = W_C$$

Por tanto:

$$W_C = E_{c_\infty} \rightarrow E_{c_\infty} = 21 \text{ J}$$

Vemos que, si tomamos una carga del «infinito» y la acercamos a un punto con energía potencial positiva, cuando liberamos esta carga, el campo la lleva de nuevo «al infinito». Pero no queda igual que al principio, ya que ahora la partícula queda con energía cinética; la misma cantidad que el trabajo externo realizó.

46 El potencial en un punto *A* es de 2 V, y en un punto *B*, de 6 V. Hacia dónde desplazará el campo una carga de –1 nC, ¿de *A* a *B* o de *B* a *A*? Razona tu respuesta.

El campo desplazará la carga hacia donde realice un trabajo positivo. Veamos pues:

$$W_C = -\Delta E_p > 0 \rightarrow \Delta E_p < 0 \rightarrow E_{p_{final}} - E_{p_{inicial}} < 0 \rightarrow E_{p_{final}} < E_{p_{inicial}} \rightarrow q' \cdot V_{final} < q' \cdot V_{inicial}$$

$$-|q'| \cdot V_{final} < -|q'| \cdot V_{inicial} \rightarrow |q'| \cdot V_{final} > |q'| \cdot V_{inicial} \rightarrow V_{final} > V_{inicial} \rightarrow V_{final} = V_B \text{ y } V_{inicial} = V_A$$

Por tanto, la carga se moverá de *A* a *B*.

47 Uno de los principales objetivos de los gobiernos es la generación de energía eléctrica a partir de fuentes de energía renovables, pues su uso implica un menor impacto ambiental y un incremento de la esperanza de vida de nuestro planeta y los seres que lo habitamos. Las redes sociales son un buen lugar de intercambio de información, por lo que puedes encontrar miles de referencias sobre las medidas que se están llevando a cabo y las que quieren aplicarse en el futuro. En grupo, cread un usuario en una red social con el que podáis compartir los proyectos más destacados y todo aquello que podáis hacer a nivel individual y colectivo para ayudar en la mejora del medioambiente.

Respuesta abierta.

TIC. SIMULACIÓN DE FENÓMENOS ELÉCTRICOS

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) **CE.1.2.** (EA.1.2.1.) **CE.7.9.** (EA.7.9.2.)

1 En la primera propuesta para la aplicación Cargas y campos, busca la línea equipotencial de 20 V y dibújala. ¿Eres capaz de justificar su forma?

Más o menos, se trata de dos circunferencias unidas de distinto radio. La circunferencia de la izquierda tiene un radio mayor, puesto que la carga es mayor que la de la derecha. Por eso, hay que alejarse más de ella para disminuir el voltaje hasta los 20 V. Con la carga de la derecha, no hay que alejarse tanto de ella para llegar a esos 20 V.

2 En la segunda propuesta de la misma aplicación, ¿es el valor del módulo del campo constante a lo largo de una línea equipotencial? Compruébalo.

Evidentemente, no lo es. Mientras que el valor del potencial eléctrico es inversamente proporcional a r, el módulo del campo es inversamente proporcional a r^2. Por eso, el módulo del campo tomará distintos valores sobre los distintos puntos de una superficie equipotencial.

3 ¿Has observado qué ocurre cuando colocamos una carga negativa en la misma posición donde hay una positiva? Esta observación te puede servir para explicar por qué los cuerpos son neutros en su estado natural; ¿puedes hacerlo?

Una carga anula a la otra, de tal forma que el campo y el potencial es cero en todo el espacio. Un cuerpo real es normalmente neutro por el mismo motivo; aunque en su interior hay cargas eléctricas, las cargas de un signo son canceladas por las de signo contrario.

4 Cuando se carga un globo, ¿qué otro cuerpo también se carga? ¿Lo hará con una carga mayor, igual o menor que la del globo? Cuenta el exceso de carga en cada cuerpo.

Cuando el globo se carga negativamente es porque gana electrones, descompensándose el equilibrio eléctrico que había inicialmente entre el número de cargas positivas y negativas. Pero eso no quiere decir que en su interior no haya cargas positivas; en realidad, hay las mismas que al principio, son las negativas las que pueden desplazarse de un cuerpo a otro.

5 Cuando el globo se carga negativamente, ¿puede tener cargas positivas en su interior? Compruébalo.

Al frotar el globo con el jersey, se cargan los dos cuerpos con el mismo valor de carga, pero el globo negativo y el jersey positivo. Lo que realmente ocurre es un traspaso de cargas eléctricas negativas desde el jersey al globo. Se puede comprobar contando el exceso de carga en cada objeto.

6 Cuando el globo se pega a la pared, ¿deja la pared de ser neutra?

La pared sigue siendo neutra porque no pierde ni gana cargas negativas, que son las móviles. Por supuesto, tampoco gana ni pierde cargas positivas, que están inmóviles. Al acercar el globo a la pared, se repelen las cargas negativas (móviles) de la zona de la pared más cercana al globo, de tal manera que, aunque la pared sigue siendo neutra, queda una zona cercana al globo con una carga neta positiva que hace que el globo se quede pegado a la pared. Se dice que, sobre esa zona de la pared, se ha inducido una carga eléctrica positiva.

7 En la aplicación de Travoltaje, el muñeco se carga negativamente. ¿Crees que habrá otro cuerpo que se cargue positivamente? ¿Podría haberse cargado el muñeco positivamente?

Si la pierna se carga negativamente al frotarse con la alfombra, es porque ha habido una transferencia de cargas negativas desde la alfombra hasta la pierna. De este modo, la pierna queda cargada negativamente y la alfombra positivamente, con el mismo valor pero positiva.

Dependiendo de la naturaleza de los materiales, al rozarlos, unos átomos tendrán tendencia a capturar electrones y otros a perderlos. Podría ocurrir que el material del que esté hecho el zapato, tuviera tendencia a ceder cargas negativas y los de la alfombra a capturarlas. En este caso, los cuerpos se cargarían al frotarlos con cargas contrarias a las de la simulación.

8 **Coloca la mano del personaje de la aplicación Travoltaje cerca del pomo de la puerta, pero no lo más cerca. Mueve la pierna para que se cargue, pero no demasiado. Verás que, en este caso, no se descarga. Sin mover el brazo, mueve la pierna del personaje para que se cargue aún más. ¿Qué ocurre? ¿Por qué?**

Cuando el personaje se carga poco y la distancia de descarga es grande, no se produce la descarga, y la persona queda cargada hasta que acerque más la mano al pomo de la puerta. Pero si no acerca la mano, y la persona se sigue cargando con la alfombra, llegará un momento en que la carga negativa se repele tanto entre sí que saltará al pomo, aunque la distancia no sea pequeña.

TRABAJA CON LO APRENDIDO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.1.2. (EA.1.2.1.-1.2.2.) CE.7.9. (EA.7.9.1.-7.9.2.) CE.7.10. (EA.7.10.1.) CE.8.4. (EA.8.4.1.)

Página 354

Carga eléctrica y ley de Coulomb

1 **Dentro de la gran cantidad de hadrones que existen (partículas formadas por quarks), hay uno, denominado delta doble positiva, formado por tres quarks *up*. ¿Qué carga eléctrica tiene esta partícula?**

En la tabla de partículas fundamentales de la unidad, vemos que la carga del quark up es 2/3. Esto significa que tiene una carga 2/3 de *e*, que recordemos que es el valor absoluto de la carga de un electrón y cuyo valor es, aproximadamente: $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. Por tanto, la carga de la partícula delta doble positiva es:

$$\frac{2}{3}\,e + \frac{2}{3}\,e + \frac{2}{3}\,e = \frac{6}{3}\,e = 2 \cdot e = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$$

2 **Calcula la fuerza eléctrica con la que interaccionan dos quarks *up* en un protón si se encuentran separados una distancia de $2 \cdot 10^{-16}$ m. ¿Qué masa, en la superficie de la Tierra, tendría un peso igual al valor de esta fuerza eléctrica?**

Cada quark up tiene una carga de 2/3, lo que quiere decir que es $2/3 \cdot e$.

Con ello, aplicamos la ley de Coulomb:

$$F = K_0 \cdot \frac{q^2}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)^2}{\left(0{,}2 \cdot 10^{-15}\right)^2} = 2\,560\ \text{N}$$

Luego, se repelen con una fuerza de 2 560 N. Si este valor fuese debido al peso de un cuerpo en la Tierra, este cuerpo tendría una masa de:

$$P = m \cdot g \rightarrow m = \frac{P}{g} = \frac{2\,560}{9{,}8} \approx 261\ \text{kg}$$

Así, sobre cada quark se está ejerciendo una fuerza igual al peso de una masa de 261 kg. Una fuerza terrible para unas partículas que tienen una masa del orden de 10^{-30} kg. Si fuese la única fuerza, produciría una aceleración del orden de 10^{32} m/s^2, pero la fuerza nuclear fuerte es lo suficientemente intensa como para no dejar que esto ocurra.

3 **Dos bolitas cargadas con 0,6 mC y –0,3 mC se atraen con una fuerza de 495 N cuando están sumergidas en agua y separadas 20 cm. Calcula la constante dieléctrica del agua. Compara este valor con la permitividad en el vacío.**

Despejamos la constante de Coulomb de su expresión:

$$F = K \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2} \rightarrow K = \frac{F \cdot r^2}{q \cdot q'} = \frac{-495 \cdot \left(20 \cdot 10^{-2}\right)^2}{0{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot (-0{,}3) \cdot 10^{-3}} = 1{,}1 \cdot 10^8\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

La constante dieléctrica o permitividad del agua es:

$$K = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \rightarrow \varepsilon = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot K} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 1{,}1 \cdot 10^8} \approx 7{,}23 \cdot 10^{-10}\ \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

La permitividad relativa es:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{7{,}23 \cdot 10^{-10}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}} \approx 81{,}7$$

4 **Si la constante dieléctrica del etanol a 25 °C es 24 veces mayor que la del vacío (permitividad relativa), calcula la proporción que existe entre las fuerzas eléctricas en el vacío y en el etanol entre cargas iguales.**

Cuando dos cargas de valor q están en el vacío separadas una distancia r, se repelen con una fuerza F_0, y todo ello, guarda la siguiente relación:

$$F_0 = K_0 \cdot \frac{q^2}{r^2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2}$$

Cuando las dos cargas están sumergidas en etanol a la misma distancia r, se repelen con una fuerza F, tal que:

$$F = K \cdot \frac{q^2}{r^2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{q^2}{r^2}$$

Comparamos una con la otra dividiéndolas:

$$\frac{F_0}{F} = \frac{\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2}}{\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{q^2}{r^2}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 24 \rightarrow F = \frac{1}{24} \cdot F_0$$

El resultado es que se repelen con una fuerza 24 veces menor.

5 **Un hilo inextensible puede soportar una tensión máxima de 300 N hasta romperse. Si en cada extremo del hilo colocamos dos bolitas con la misma carga de 3 mC, ¿cuál será la longitud mínima del hilo para no partirse?**

Vamos a buscar a qué distancia, las dos cargas se repelen con una fuerza de 300 N.

$$F = K_0 \cdot \frac{q^2}{r^2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{K_0 \cdot q^2}{F}} = \sqrt{\frac{9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \left(3 \cdot 10^{-3}\right)^2}{300}} \approx 16{,}43 \text{ m}$$

6 **Dos cargas separadas una distancia r_0 interaccionan con una fuerza F_0. ¿A qué distancia interaccionarán con una fuerza el doble de F_0?**

Para la fuerza inicial, podemos escribir:

$$F_0 = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_0^2}$$

Y para la nueva:

$$F' = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r'^2}$$

donde $F' = 2 \cdot F_0$. Sustituimos este valor en la ecuación anterior:

$$2 \cdot F_0 = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r'^2}$$

Dividimos esta ecuación entre la primera, y nos queda después de simplificar:

$$2 = \frac{r_0^2}{r'^2} \rightarrow r' = \frac{r_0}{\sqrt{2}}$$

7 **Dos cargas positivas iguales están separadas una distancia r_0 y se repelen con una fuerza F_0. Si se aumenta la carga de cada partícula en 10 mC y se separan una distancia $3 \cdot r_0$, se ve que ahora se repelen con una fuerza $F_0/4$. ¿Qué valor tenían las cargas inicialmente?**

En la situación inicial se puede plantear:

$$F_0 = K_0 \cdot \frac{q \cdot q}{r_0^2}$$

Posteriormente, tenemos:

$$F' = K_0 \cdot \frac{q' \cdot q'}{r'^2}$$

donde $q' = q + 10^{-2}$, $F' = \frac{F_0}{4}$ y $r' = 3 \cdot r_0$. Sustituimos estos datos en la segunda ecuación:

$$\frac{F_0}{4} = K_0 \cdot \frac{\left(q + 10^{-2}\right) \cdot \left(q + 10^{-2}\right)}{\left(3 \cdot r_0\right)^2}$$

Reescribiendo:

$$\frac{F_0}{4} = K_0 \cdot \frac{q^2 + 2 \cdot 10^{-2} \cdot q + 10^{-4}}{9 \cdot r_0^2}$$

Dividimos esta ecuación entre la primera y simplificamos:

$$\frac{1}{4} = \frac{\dfrac{q^2 + 2 \cdot 10^{-2} \cdot q + 10^{-4}}{9}}{\dfrac{q^2}{1}} = \frac{q^2 + 2 \cdot 10^{-2} \cdot q + 10^{-4}}{9 \cdot q^2} \rightarrow \frac{9}{4} \cdot q^2 = q^2 + 2 \cdot 10^{-2} \cdot q + 10^{-4}$$

$$1{,}25 \cdot q^2 - 0{,}02 \cdot q - 0{,}0001 = 0 \rightarrow q = 0{,}02 \text{ C} = 20 \text{ mC}$$

Se ha descartado la solución negativa por no ser coherente con el ejercicio.

8 **Dos cargas de 0,25 mC y –0,06 mC, sumergidas en un gas, se atraen cuando están separadas 80 cm con una fuerza de 21 N. Determina la permitividad relativa del gas.**

Aplicamos la ley de Coulomb:

$$F = K \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2} \rightarrow K = \frac{F \cdot r^2}{q \cdot q'} = \frac{-21 \cdot 0{,}8^2}{0{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot \left(-0{,}06 \cdot 10^{-3}\right)} \approx 9{,}0 \cdot 10^8 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

Por tanto:

$$K = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \rightarrow \varepsilon = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot K}$$

Para el vacío, la constante dieléctrica es:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot K_0}$$

Puesto que la constate dieléctrica relativa es:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

dividimos las expresiones anteriores:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\dfrac{1}{4 \cdot \pi \cdot K}}{\dfrac{1}{4 \cdot \pi \cdot K_0}} = \frac{K_0}{K} = \frac{9{,}0 \cdot 10^9}{9{,}0 \cdot 10^8} = 10$$

El resultado es adimensional.

9 **En una región del espacio hay un campo eléctrico vertical. Una pequeña gotita de aceite de 2 μg se ioniza mediante la captura de un millón de electrones, aproximadamente. ¿Qué valor debe tener el campo, y con qué sentido, para que la gotita de aceite levite? Este experimento fue muy relevante para calcular la carga del electrón. Busca información sobre su descubridor y cómo se llevó a cabo.**

En el equilibrio, la fuerza peso, hacia abajo, se tiene que compensar con la fuerza eléctrica hacia arriba. Puesto que la carga de la gotita de aceite es negativa, el campo eléctrico tiene que tener sentido hacia abajo. Así:

$$m \cdot g = |q'| \cdot E \rightarrow m \cdot g = 10^6 \cdot e \cdot E \rightarrow E = \frac{m \cdot g}{10^6 \cdot e} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}8}{10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 122{,}5 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

10 **Tenemos una bolita sujeta en un punto que está cargada con 0,5 mC. ¿Con qué aceleración saldrá repelida otra bolita cargada con 2 nC y 5 g de masa que coloquemos a 40 cm de la primera bola?**

Veamos la fuerza que se ejerce sobre la carga testigo:

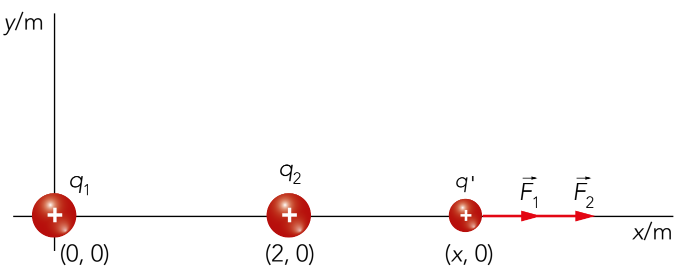
$$F = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'^2}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{\left(40 \cdot 10^{-2}\right)^2} \approx 0{,}056 \text{ N}$$

Mediante la segunda ley de Newton, calculamos la aceleración:

$$F = m \cdot a \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{0{,}056}{5 \cdot 10^{-3}} = 11{,}2 \text{ m/s}^2$$

11 **Una carga q_1 = 1 mC está situada en el origen de coordenadas. En la posición (2, 0) m, se encuentra q_2 = 2 mC. Calcula en qué punto sobre el eje *X*, y a la derecha de q_2, se debe colocar una carga q' = 0,5 μC para que sea repelida con una fuerza de 10 N. Puedes utilizar algún programa matemático para resolver el polinomio de cuarto grado que obtendrás.**

La disposición de las cargas es la siguiente:



Planteamos la fuerza total, que tiene que ser 10 N, y despejaremos la *x*:

$$F_T = F_1 + F_2 = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{x^2} + K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'^{\,2}}{(x-2)^2} =$$

$$= 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-3} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}}{x^2} + 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}}{(x-2)^2} = \frac{4{,}5}{x^2} + \frac{9{,}0}{(x-2)^2} = 10$$

$$\frac{4{,}5 \cdot (x-2)^2}{x^2 \cdot (x-2)^2} + \frac{9{,}0 \cdot x^2}{x^2 \cdot (x-2)^2} = 10 \rightarrow \frac{4{,}5 \cdot (x-2)^2 + 9{,}0 \cdot x^2}{x^2 \cdot (x-2)^2} = 10$$

$$4{,}5 \cdot (x-2)^2 + 9{,}0 \cdot x^2 = 10 \cdot x^2 \cdot (x-2)^2$$

$$4{,}5 \cdot \left(x^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot x\right) + 9{,}0 \cdot x^2 = 10 \cdot x^2 \cdot \left(x^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot x\right)$$

$$4{,}5 \cdot x^2 + 18 - 18 \cdot x + 9{,}0 \cdot x^2 = 10 \cdot x^4 + 40 \cdot x^2 - 40 \cdot x^3$$

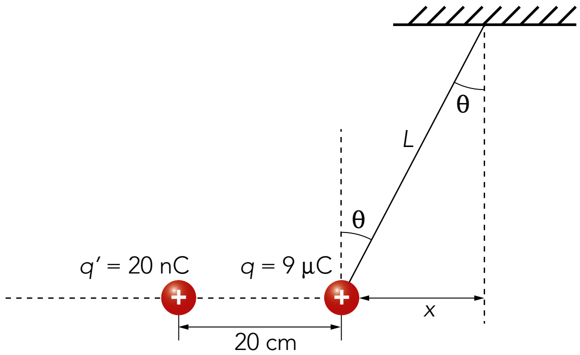
$$10 \cdot x^4 - 40 \cdot x^3 + 26{,}5 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 18 = 0$$

$$x^4 - 4 \cdot x^3 + 2{,}65 \cdot x^2 + 1{,}8 \cdot x - 1{,}8 = 0 \quad \rightarrow \quad x \approx 2{,}974 \text{ m}$$

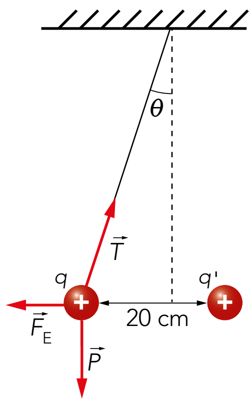
La solución de esta ecuación la hemos obtenido con Geogebra. Se trata de *software* gratuito muy potente, que todo alumno de ciencias debe aprender a manejar. La manera de proceder es fácil, en la línea de entrada se introduce el polinomio y luego se le dice al programa que busque los puntos de corte con el eje *x*. Se obtienen dos resultados, pero uno de ellos es negativo y, por tanto, hay que descartarlo.

Carácter vectorial de la fuerza y del campo

12 **Una bolita con una carga de 9 µC y una masa de 40 g cuelga de un hilo de longitud *L*. ¿Qué ángulo se desviará de la vertical si colocamos una carga de 20 nC en el eje *X*, a 20 cm de distancia?**



La situación de equilibrio es la que se muestra en la imagen:



El módulo de la fuerza peso es:

$$P = m \cdot g = 0{,}040 \cdot 9{,}8 = 0{,}392 \text{ N}$$

El de la fuerza eléctrica es:

$$F_E = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{x^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{9 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 10^{-9}}{0{,}20^2} = 0{,}040\,5 \text{ N}$$

La tensión es la fuerza que anula a las otras dos en el equilibrio. Por tanto:

$$\vec{T} = \left(0{,}040\,5;\ 0{,}392\right) \text{ N}$$

El ángulo es:

$$\theta = \arctan \frac{0{,}040\,5}{0{,}392} \approx 5{,}9°$$

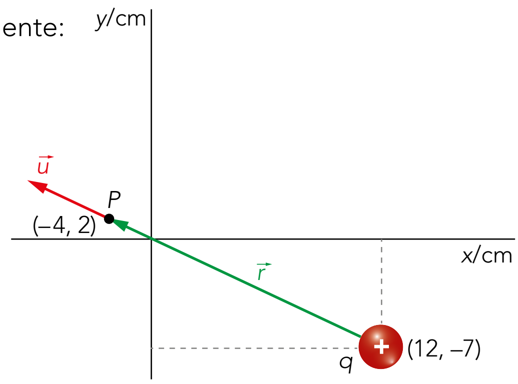
Como vemos, el resultado es independiente de la longitud del hilo.

13 **Una carga eléctrica q = 68 nC está fija en el punto (12, –7) cm.**

a) Calcula el campo eléctrico que crea en el punto P = (–4, 2) cm.

b) ¿Qué fuerza se ejercerá sobre una carga testigo de –7 mC colocada en *P*?

a) La situación es la siguiente:



Calculamos la coordenada del vector $\vec{r}$:

$$\vec{r} = (-4,2) - (12,-7) = (-16, 9)\ \text{cm}$$

El vector unitario $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(-16, 9)}{\sqrt{(-16)^2 + 9^2}} \approx (-0{,}872;\ 0{,}490)$$

Calculemos el valor del campo:

$$E = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{68 \cdot 10^{-9}}{\left[(-16)^2 + 9^2\right] \cdot 10^{-4}} \approx 18\,160\ \text{N/C}$$

La expresión vectorial del campo es:

$$\vec{E} = E \cdot \vec{u} = 18\,160 \cdot (-0{,}872;\ 0{,}490) \approx (-15\,836, 8\,898)\ \text{N/C}$$

b) La fuerza sobre la carga testigo es:

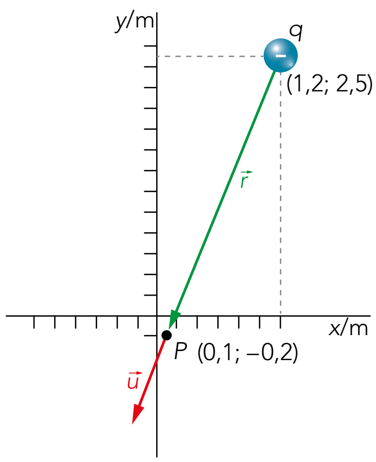
$$\vec{F} = q' \cdot \vec{E} = -7 \cdot 10^{-3} \cdot (-15\,836,\ 8\,898) \approx (111,\ -62)\ \text{N}$$

14 Una carga de −6 μC está en (1,2; 2,5) m.

a) Calcula el campo que crea en *P* = (0,1; −0,2) m.

b) Si colocamos una segunda carga en (–1,0, 1,0) m de 4 μC, ¿qué cambio experimentará el campo eléctrico en *P*?

a) La disposición es:



Vector $\vec{r}$:

$$\vec{r} = (0{,}1;\ -0{,}2) - (1{,}2;\ 2{,}5) = (-1{,}1;\ -2{,}7)\ \text{m}$$

El vector unitario $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(-1{,}1;\ -2{,}7)}{\sqrt{(-1{,}1)^2 + (-2{,}7)^2}} \approx (-0{,}377;\ -0{,}926)$$

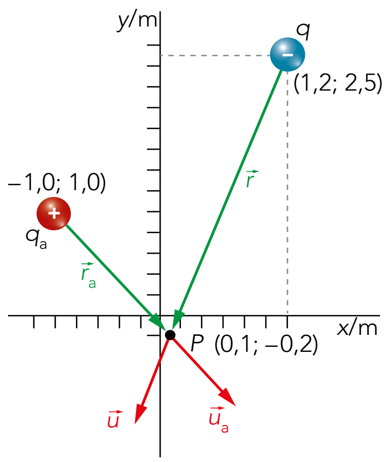
Calculemos el valor del campo en *P*:

$$E = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-6 \cdot 10^{-6}}{\left[(-1{,}1)^2 + (-2{,}7)^2\right]} \approx -6\,353\ \text{N/C}$$

La expresión vectorial del campo es:

$$\vec{E} = E \cdot \vec{u} = -6\,353 \cdot (-0{,}377;\ -0{,}926) \approx (2\,395,\ 5\,883)\ \text{N/C}$$

b) Ahora, calculamos el nuevo campo, que será el que ya había más el que va a crear la carga q_a = 4 μC. Ahora tenemos:



Vector $\vec{r}_a$:

$$\vec{r}_a = (0{,}1;\ -0{,}2) - (-1{,}0;\ 1{,}0) = (1{,}1;\ -1{,}2)\ \text{m}$$

El vector unitario $\vec{u}$:

$$\vec{u}_a = \frac{\vec{r}_a}{r_a} = \frac{(1{,}1;\ -1{,}2)}{\sqrt{1{,}1^2 + (-1{,}2)^2}} \approx (0{,}676;\ -0{,}737)$$

Calculamos el valor del campo:

$$E_a = K_0 \cdot \frac{q_a}{r_a^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6}}{\left[1{,}1^2 + (-1{,}2)^2\right]} \approx 13\,585\ \text{N/C}$$

La expresión vectorial del campo es:

$$\vec{E}_a = E_a \cdot \vec{u}_a = 13\,585 \cdot (0{,}676;\ -0{,}737) \approx (9\,183,\ -10\,012)\ \text{N/C}$$

El campo total es:

$$\vec{E}_T = \vec{E} + \vec{E}_a = (2\,395,\ 5\,883) + (9\,183,\ -10\,012) = (11\,578,\ -4\,129)\ \text{N/C}$$

15 El campo eléctrico en *P* es $\vec{E}$ = (200, −600) N/C.

a) Calcula el módulo de la fuerza que se ejercerá sobre una carga testigo de −3 mC colocada en dicho punto.

b) Indica qué ángulo tiene el vector fuerza con respecto al eje *X*.

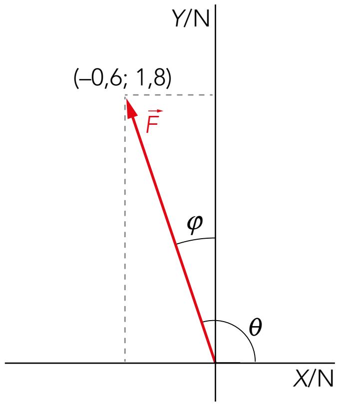
a) La fuerza está relacionada con el campo mediante: $\vec{F} = q' \cdot \vec{E}$

Y si escribimos esta ecuación atendiendo únicamente al módulo:

$$\left\|\vec{F}\right\| = |q'| \cdot \left\|\vec{E}\right\| = 3 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{200^2 + (-600)^2} \approx 1{,}9\ \text{N}$$

b) Calculamos, en este caso, el vector fuerza:

$$\vec{F} = q' \cdot \vec{E} = -3 \cdot 10^{-3} \cdot (200, -600) = (-0,6; 1,8)\ \text{N}$$



El ángulo con el eje *y* es:

$$\varphi = \arctan \frac{0,6}{1,8} \approx 18,4°$$

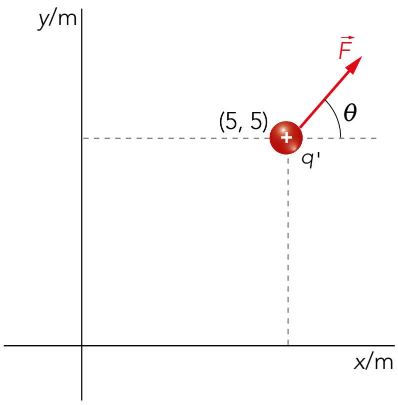
Y, con el eje *x*:

$$\theta = \varphi + 90° = 18,4° + 90° = 108,4°$$

Página 355

16 Una carga $q' = 2,2\ \mu$C está en $P = (5, 5)$ cm, mientras es empujada por una fuerza eléctrica de módulo 86 N formando un ángulo de 30° sobre el eje *X*. Determina la expresión vectorial del campo eléctrico en *P*.

La situación es como se muestra en la imagen:



El vector unitario con la dirección y sentido de la fuerza es:

$$\vec{u} = (\cos 30°, \sin 30°)$$

La expresión vectorial de la fuerza es:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u} = 86 \cdot (\cos 30°, \sin 30°) \approx (74,48; 43,00)\ \text{N}$$

El campo y la fuerza están relacionados mediante la expresión:

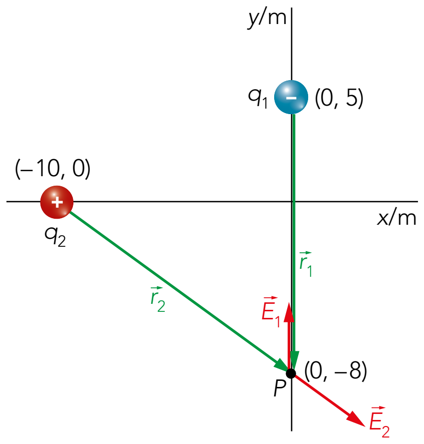
$$\vec{F} = q' \cdot \vec{E} \ \rightarrow\ \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{(74,48; 43,00)}{2,2 \cdot 10^{-6}} \approx (33,9; 19,5) \cdot 10^{6}\ \text{N/C}$$

17 Se dispone de dos cargas: q_1 = −2 μC en (0, 5) cm y q_2 = 8 μC en (−10, 0) cm.

a) Calcula el campo eléctrico en el punto *P* = (0, −8) cm.

b) Determina la fuerza que se ejercerá sobre una carga *q'* = 3 μC colocada en el punto *P*.

La situación es:



a) Calculamos los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (0, -8) - (0, 5) = (0, -13) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_2 = (0, -8) - (-10, 0) = (10, -8) \text{ cm}$$

Los vectores unitarios $\vec{u}$:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(0, -13)}{13} = (0, -1)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(10, -8)}{\sqrt{10^2 + (-8)^2}} = (0{,}781; -0{,}625)$$

Los valores del campo de cada carga:

$$E_1 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{13^2 10^{-4}} = -1\,065\,089 \text{ N/C}$$

$$E_2 = K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-6}}{\left[10^2 + (-8)^2\right] \cdot 10^{-4}} = 4\,390\,244 \text{ N/C}$$

La expresión vectorial de los campos:

$$\vec{E}_1 = E_1 \cdot \vec{u}_1 = -1\,065\,089 \cdot (0, -1) = (0, 1\,065\,089) \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \cdot \vec{u}_2 = 4\,390\,244 \cdot (0{,}781; -0{,}625) = (3\,428\,781, -2\,743\,903) \text{ N/C}$$

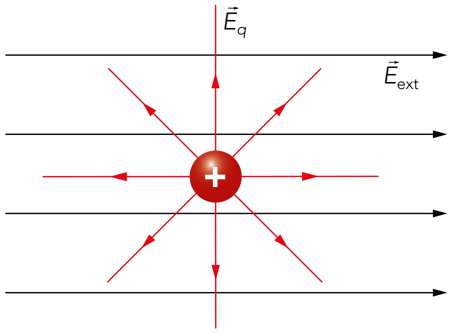
Y el campo total:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (0, 1\,065\,089) + (3\,428\,781, -2\,743\,903) = (3\,428\,781, -1\,678\,814) \text{ N/C}$$

b) La relación entre el campo y la fuerza es:

$$\vec{F} = q' \cdot \vec{E} = 3 \cdot 10^{-6} \cdot (3\,428\,781, -1\,678\,814) \approx (10{,}3; -5{,}0) \text{ N}$$

18 **En una región del espacio donde hay un campo eléctrico uniforme de 500 N/C horizontal y hacia la derecha, se coloca, bien fijada para que no se desplace, una carga eléctrica de 1,5 μC. ¿En qué punto se formará un campo nulo?**



Veamos a qué distancia de la carga, el campo que esta crea es de 500 N/C.

$$E = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} \rightarrow 500 = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{1{,}5 \cdot 10^{-6}}{r^2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{9{,}0 \cdot 10^9 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-6}}{500}} \approx 5{,}196 \text{ m}$$

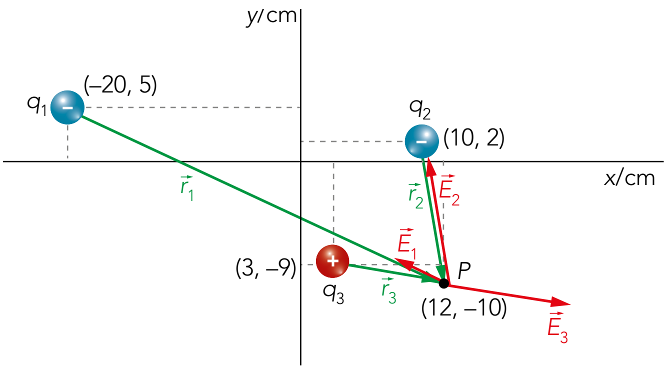
Luego, a la izquierda de la carga, a 5,196 m, la carga crea un campo hacia la izquierda de 500 N/C, que al superponerse con el externo, hacia la derecha de 500 N/C, da un campo total igual a cero.

19 **Tres cargas están fijas en las siguientes posiciones: q_1 = –5 mC en (–20, 5) cm, q_2 = –6 mC en (10, 2) cm y q_3 = 8 mC en (3, –9) cm.**

a) **¿Qué valor tiene el campo eléctrico en el punto *P* = (12, –10) cm?**

b) **Si en dicho punto hay una carga *q'* que tiende a alejarse en la dirección y sentido del campo con una fuerza de 100 N, ¿qué valor tiene esta carga?**

La situación es la siguiente:



a) Calculamos los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (12, -10) - (-20, 5) = (32, -15) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_2 = (12, -10) - (10, 2) = (2, -12) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_3 = (12, -10) - (3, -9) = (9, -1) \text{ cm}$$

Y los vectores unitarios $\vec{u}$:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(32, -15)}{\sqrt{32^2 + (-15)^2}} = (0{,}905; -0{,}424)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(2, -12)}{\sqrt{2^2 + (-12)^2}} = (0{,}164; -0{,}986)$$

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{r}_3}{r_3} = \frac{(9, -1)}{\sqrt{9^2 + (-1)^2}} = (0{,}994; -0{,}110)$$

Los valores del campo de cada carga:

$$E_1 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-3}}{\left[32^2 + (-15)^2\right] \cdot 10^{-4}} = -360\,288\,231 \text{ N/C}$$

$$E_2 = K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-6 \cdot 10^{-3}}{\left[2^2 + (-12)^2\right] \cdot 10^{-4}} = -3\,648\,648\,649 \text{ N/C}$$

$$E_3 = K_0 \cdot \frac{q_3}{r_3^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-3}}{\left[9^2 + (-1)^2\right] \cdot 10^{-4}} = 8\,780\,487\,805 \text{ N/C}$$

Y la expresión vectorial de los campos:

$$\vec{E}_1 = E_1 \cdot \vec{u}_1 = -360\,288\,231 \cdot (0{,}905; -0{,}424) = (-326\,060\,849,\ 152\,762\,210) \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \cdot \vec{u}_2 = -3\,648\,648\,649 \cdot (0{,}164; -0{,}986) = (-598\,378\,378,\ 3\,597\,567\,568) \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_3 = E_3 \cdot \vec{u}_3 = 8\,780\,487\,805 \cdot (0{,}994; -0{,}110) = (8\,727\,804\,878,\ -965\,853\,659) \text{ N/C}$$

Finalmente, el campo total:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = (-326\,060\,849,\ 152\,762\,210) + (-598\,378\,378,\ 3\,597\,567\,568) +$$

$$+(8\,727\,804\,878,\ -965\,853\,659) = (7\,803\,365\,651,\ 2\,784\,476\,119) \text{ N/C} \approx (7{,}8; 2{,}8) \cdot 10^9 \text{ N/C}$$

b) Hagamos que el módulo de la fuerza sea 100 N:

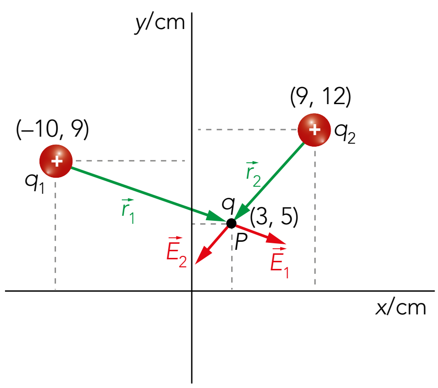
$$\left|\vec{F}\right| = |q'| \cdot \left|\vec{E}\right| \rightarrow |q'| = \frac{\left|\vec{F}\right|}{\left|\vec{E}\right|} = \frac{100}{\sqrt{7{,}8^2 + 2{,}8^2} \cdot 10^9} \approx 1{,}21 \cdot 10^{-8} \text{ C} = 12{,}1 \text{ nC}$$

Luego el valor absoluto de la carga tiene que ser de 12,1 nC, aproximadamente. Puesto que se aleja en la dirección y sentido del campo, significa que la carga es positiva:

$$q' = 12{,}1 \text{ nC}$$

20 **Tenemos dos cargas q_1 = 14,2 nC y q_2 = 6,9 nC situadas en (–10, 9) cm y (9, 12) cm, respectivamente. ¿Qué carga, q_3, deberemos colocar en el punto P = (3, 5) cm para que se ejerza sobre ella una fuerza de (–3,696; 15,152) · 10⁻⁶ N?**

La situación es:



Vamos a calcular el campo que crean q_1 y q_2 juntas en el punto P, ya que el campo que origina la fuerza que experimenta q es igual a $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$.

Vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (3,\ 5) - (-10,\ 9) = (13,\ -4)\ \text{cm}$$

$$\vec{r}_2 = (3,\ 5) - (9,\ 12) = (-6,\ -7)\ \text{cm}$$

Los vectores unitarios:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(13,\ -4)}{\sqrt{13^2 + (-4)^2}} \approx (0{,}956;\ -0{,}294)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(-6,\ -7)}{\sqrt{(-6)^2 + (-7)^2}} \approx (-0{,}651;\ -0{,}759)$$

Los valores del campo:

$$E_1 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{14{,}2 \cdot 10^{-9}}{\left[13^2 + (-4)^2\right] \cdot 10^{-4}} \approx 6\,908\ \text{N/C}$$

$$E_2 = K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{6{,}9 \cdot 10^{-9}}{\left[(-6)^2 + (-7)^2\right] \cdot 10^{-4}} \approx 7\,306\ \text{N/C}$$

La expresión vectorial de los campos:

$$\vec{E}_1 = E_1 \cdot \vec{u}_1 = 6\,908 \cdot (0{,}956;\ -0{,}294) \approx (6\,604, -2\,031)\ \text{N/C}$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \cdot \vec{u}_2 = 7\,306 \cdot (-0{,}651;\ -0{,}759) \approx (-4\,756,\ -5\,545)\ \text{N/C}$$

El campo total formado por estas dos cargas en P es:

$$\vec{E}_{12} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (6\,604,\ -2\,031) + (-4\,756,\ -5\,545) = (1\,848,\ -7\,576)\ \text{N/C}$$

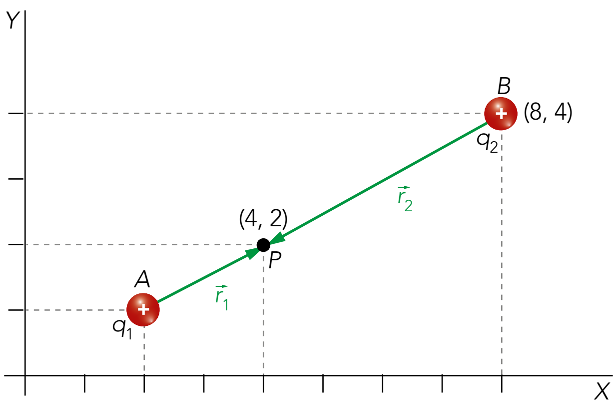
Puesto que la fuerza es $\vec{F} = (-3{,}696;\ 15{,}152) \cdot 10^{-6}$ N, concluimos que:

$$q = -2 \cdot 10^{-9}\ \text{C}$$

Puesto que, con este valor, se cumple que: $(-3{,}696;\ 15{,}152) \cdot 10^{-6} = -2 \cdot 10^{-9} \cdot (1\,848, -7\,576)$

21 En el punto *A* (2, 1) m hay una carga eléctrica de q_1 = 20 nC, ¿qué carga eléctrica, q_2, habrá que poner en el punto *B* (8, 4) m para que el campo eléctrico en el punto *P* (4, 2) m sea cero?

La situación es:



Para que el campo total sea cero, el vector $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ deben ser opuestos, y esto solamente será posible si los puntos *A*, *B* y *P* están alineados. Cuando calculemos los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, veremos que son paralelos y, por tanto, los tres puntos están alineados.

Vamos a calcular el campo que crean q_1 y q_2 juntas en el punto P e igualar a cero su suma.

Vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (4, 2) - (2, 1) = (2, 1)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_2 = (4, 2) - (8,4) = (-4, -2)\ \text{m}$$

Vemos que $\vec{r}_2 = -0{,}5 \cdot \vec{r}_1$, indicando que los dos vectores son paralelos.

Los vectores unitarios:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(2, 1)}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \approx (0{,}894;\ 0{,}447)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(-4, -2)}{\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2}} \approx (-0{,}894;\ -0{,}447)$$

Los valores del campo:

$$E_1 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{20 \cdot 10^{-9}}{2^2 + 1^2} = 36\ \text{N/C}$$

$$E_2 = K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{q_2}{(-4)^2 + (-2)^2} = 4{,}5 \cdot 10^8 \cdot q_2$$

La expresión vectorial de los campos:

$$\vec{E}_1 = E_1 \cdot \vec{u}_1 = 36 \cdot (0{,}894;\ 0{,}447) \approx (32{,}18;\ 16{,}09)\ \text{N/C}$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \cdot \vec{u}_2 = 4{,}5 \cdot 10^8 \cdot q_2 \cdot (-0{,}894;\ -0{,}447) \approx (-4{,}02 \cdot 10^8;\ -2{,}01 \cdot 10^8) \cdot q_2\ \text{N/C}$$

El campo total formado por estas dos cargas en P debe ser cero:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (32{,}18;\ 16{,}09) + (-4{,}02 \cdot 10^8;\ -2{,}01 \cdot 10^8) \cdot q_2 = (0;\ 0)$$

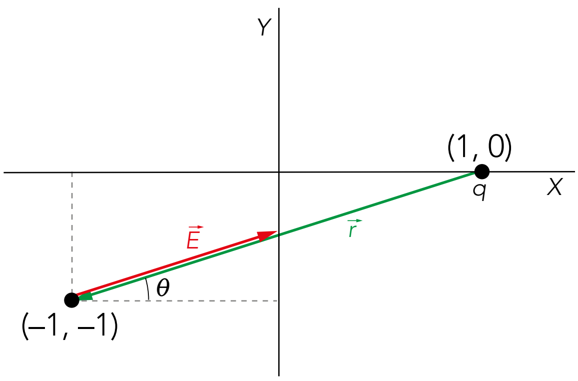
Para que exista una solución al problema, debe cumplirse que se obtenga el mismo valor de q_2 despejándolo de cualquiera de las dos coordenadas.

$$q_2 = \frac{32{,}18}{4{,}02} \cdot 10^{-8} \approx 8{,}0 \cdot 10^{-8}\ \text{C} = 80\ \text{nC}$$

$$q_2 = \frac{16{,}09}{2{,}01} \cdot 10^{-8} \approx 8{,}0 \cdot 10^{-8}\ \text{C} = 80\ \text{nC}$$

22 Una carga eléctrica de −2 mC está en la posición (1, 0) m. Determina el valor del campo eléctrico en el punto (−1, −1) m. Expresa el resultado indicando el módulo y el ángulo con el eje *X*.

La situación es:



Determinamos el vector $\vec{r}$:

$$\vec{r} = (-1, -1) - (1, 0) = (-2, -1)\ \text{m}$$

El vector unitario en la dirección de $\vec{r}$ es:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(-2, -1)}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-2, -1)$$

El valor del campo es:

$$\vec{E} = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} = \vec{u} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-3}}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-2, -1) \approx (3{,}2;\ 1{,}6) \cdot 10^6\ \text{N/C}$$

Su módulo es:

$$E = \sqrt{3{,}2^2 + 1{,}6^2} \cdot 10^6 \approx 3{,}7 \cdot 10^6\ \text{N/C}$$

Y el ángulo que forma con el eje x es:

$$\theta = \text{actg}\ \frac{1.6 \cdot 10^6}{3{,}2 \cdot 10^6} \approx 26{,}6°$$

Energía potencial electrostática y trabajo

23 Una carga positiva q' inmersa en un campo eléctrico es desplazada bajo la acción de una fuerza externa desde A hasta B efectuando un trabajo de 30 J. Si la carga estaba en reposo en A, y se deja en reposo en B:

a) ¿Qué trabajo habrá realizado la fuerza eléctrica?

b) ¿Se ha movido la carga q' en contra de la fuerza eléctrica o a favor?

a) Puesto que no se incrementa la energía cinética, en virtud del teorema de la energía cinética, el trabajo total es cero. Luego el trabajo que realiza la fuerza externa es, justamente, igual al trabajo realizado por la fuerza eléctrica del campo cambiada de signo. En consecuencia:

$$W_C = -W_{ext} = -30\ \text{J}$$

b) Al ser el trabajo del campo negativo, significa que la fuerza eléctrica se opone al desplazamiento de la carga. Es decir, la fuerza eléctrica tira hacia atrás para que el coseno sea negativo y el trabajo salga negativo.

24 Una carga $q' = 2\ \mu$C está en reposo a una distancia r_0 de una carga fuente $q = -6\ \mu$C. La energía potencial de q' es de −2,4 J.

a) ¿Cuál es el valor de r_0?

b) Si mediante una fuerza externa se lleva q' desde el punto inicial hasta una distancia $r_0/2$, dejándola en reposo, ¿qué trabajo se ha hecho?

a) Aplicamos la expresión de la energía potencial para el estado inicial:

$$E_{p_0} = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_0}$$

E_{p_0} es negativo, puesto que el producto de las cargas lo es. Sustituimos los valores, y despejamos la incógnita:

$$r_0 = \frac{K_0 \cdot q \cdot q'}{E_{p_0}} = \frac{9{,}0 \cdot 10^9 \cdot (-6) \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{-2{,}4} = 0{,}045\ \text{m} = 4{,}5\ \text{cm}$$

b) Recordemos que, si la carga parte del reposo y se deja en la posición final en reposo, el trabajo total es cero y, por tanto, el trabajo externo es igual al que realizan las fuerzas eléctricas, pero cambiado de signo:

$$W_{ext} = -W_C = -\left(-\Delta E_p\right) = \Delta E_p = E_p \cdot \left(\frac{r_0}{2}\right) - E_p \cdot \left(r_0\right) = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{\frac{r_0}{2}} - K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_0} = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_0} = -2{,}4 \text{ J}$$

Un trabajo externo negativo significa que se ha ido frenando la carga. Si por el campo fuera, la carga realizaría el mismo movimiento pero llegando al punto final con energía cinética. Mediante el trabajo externo negativo, lo que se ha hecho es eliminar la energía cinética.

25 Una carga q = 2 mC está situada en el punto (20, –10) cm.

a) ¿Qué energía potencial tendrá una carga q' = 80 μC colocada en (–5, 10) cm?

b) Si la carga q' se aleja hasta el infinito, ¿qué trabajo realizará el campo? ¿Con qué energía cinética llega?

a) Vector $\vec{r}$:

$$\vec{r} = (-5, 10) - (20, -10) = (-25, 20) \text{ cm}$$

Expresión de la energía potencial:

$$E_p = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{(-25)^2 + 20^2} \cdot 10^{-2}} \approx 4{,}5 \cdot 10^3 \text{ J} = 4{,}5 \text{ kJ}$$

b) El trabajo del campo, W_C, que como sabemos es conservativo, y según el teorema de la energía potencial:

$$W_C = -\Delta E_p = E_p\left(r\right) - E_p\left(\infty\right) = E_p\left(r\right) - 0 = E_p\left(r\right) = 4{,}5 \text{ kJ}$$

Vemos que el trabajo que hace el campo para repeler la carga q' hasta una distancia «infinita» es, precisamente, la energía potencial que tenía.

Puesto que la única fuerza que hay es la del campo, que es conservativa, la energía mecánica se conserva. En este caso, significa que la energía potencial que tiene q' al inicio, se transforma en energía cinética en «el infinito».

$$E_{m_0} = E_m \rightarrow E_{c_0} + E_{p_0} = E_c + E_p \rightarrow 0 + E_{p_0} = E_c + 0 \rightarrow E_{p_0} = E_c \rightarrow E_c = 4{,}5 \text{ kJ}$$

26 Imaginemos dos cargas de 1 C en reposo y separadas infinitamente.

a) ¿Cuánta energía necesitaríamos para dejarlas en reposo separadas un metro de distancia?

b) Si dejáramos que el campo vuelva a separar las cargas, ¿llegaríamos a la misma situación inicial?

a) Podemos imaginar que una de las cargas está fija, y que la otra es acercada mediante una fuerza externa hasta un metro de la primera, adquiriendo una energía potencial gravitatoria. Como se ha visto en el estudio de la energía potencial, la energía potencial es, precisamente, el trabajo externo que hay que realizar para llevar esta carga desde el infinito (en reposo) hasta el punto en cuestión (nuevamente en reposo).

Así:

$$W_{ext} = E_p\left(r\right) = K_0 \cdot \frac{q^2}{r} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{1^2}{1} = 9{,}0 \cdot 10^9 \text{ J}$$

b) Puesto que las cargas se repelen, si dejamos que se separen mediante la acción de la fuerza eléctrica hasta el infinito, donde ya no tendrán energía potencial, quedarán con cierta energía cinética, que será igual a la energía potencial que tenían cuando estaban a un metro de distancia.

Por consiguiente, no estarán igual que al principio, puesto que inicialmente estaban infinitamente separadas, pero en reposo. Podemos comprender, que el trabajo externo que se hizo para acercar las cargas, ha quedado finalmente en forma de energía cinética en las cargas.

27 Calcula la energía electrostática de tres cargas: $q_1 = 5\ \mu C$, $q_2 = -1\ \mu C$ y $q_3 = 7\ \mu C$ en los puntos (0, 0), (15, 0) y (–5, 5) cm, respectivamente. Comprueba que la energía de las tres cargas es indiferente al orden en el que se coloquen las cargas.

Llevar la primera carga desde una distancia infinita hasta la posición que sea, si no hay otras cargas con las que interaccionen, no nos costará ninguna energía. En realidad, tendríamos que aplicar una fuerza externa para acelerar la carga, ya que estaba en reposo, y así conseguiríamos desplazarla hacia donde queramos. Pero, después, hay que frenarla para dejarla en reposo en el punto deseado. Primeramente, se hace un trabajo positivo y, finalmente, otro negativo, y puesto que la energía cinética no se incrementa, por el teorema de las fuerzas vivas, el trabajo total es cero; se cancela el trabajo positivo con el negativo.

Empecemos, por ejemplo, llevando la carga q_1 desde «el infinito» hasta (0, 0). Esto no nos costará ninguna energía.

Si ahora llevamos la carga q_2 hasta el punto (15, 0), sí realizaremos trabajo puesto que interacciona con la q_1. Recordemos que si la carga estaba en reposo y la dejamos en reposo, el trabajo externo es menos el trabajo conservativo; es decir, es igual al incremento de energía potencial:

$$W_{ext21} = \Delta E_p = E_p\left(15, 0\right) - E_p\left(\infty\right) = E_p\left(15, 0\right) - 0 = E_p\left(15, 0\right) = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}}$$

Si ahora llevamos la carga q_3, estando ya colocadas la q_1 y la q_2, será:

$$W_{ext321} = -E_p = E_p\left(-5, 5\right) - E_p\left(\infty\right) = E_p\left(-5, 5\right) - 0 = E_p\left(-5, 5\right) = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{r_{13}} + K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r_{23}}$$

Por tanto, la energía total será:

$$E = W_{ext21} + W_{ext321} = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}} + K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{r_{13}} + K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r_{23}}$$

Vemos que se obtiene una expresión totalmente simétrica y que es independiente del orden en el que se lleven las cargas. Si colocamos las cargas en otro orden, llegaremos a la misma expresión.

Vamos a cálcular los módulos de los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_{12} = (15, 0) - (0, 0) = (15, 0)\ \text{cm}$$

$$\vec{r}_{13} = (-5, 5) - (0, 0) = (-5, 5)\ \text{cm}$$

$$\vec{r}_{23} = (-5, 5) - (15, 0) = (-20, 5)\ \text{cm}$$

$$\vec{r}_{12} = 15\ \text{cm}$$

$$\vec{r}_{13} = \sqrt{\left(-5\right)^2 + 5^2} \approx 7{,}071\ \text{cm}$$

$$\vec{r}_{23} = \sqrt{\left(-20\right)^2 + 5^2} \approx 20{,}616\ \text{cm}$$

Por tanto:

$$E = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot \left(-10^{-6}\right)}{15 \cdot 10^{-2}} + 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{7{,}071 \cdot 10^{-2}} + 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{\left(-10^{-6}\right) \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{20{,}616 \cdot 10^{-2}}$$

$$E \approx -0{,}30 + 4{,}45 - 0{,}31 = 3{,}84\ \text{J}$$

28 **Una carga q = 12 μC está colocada en A = (8, 8) cm.**

a) ¿Qué trabajo externo habrá que realizar sobre una carga q' = −4 μC para llevarla desde el infinito hasta el punto P = (0, −4) cm, dejándola en reposo?

b) Si q' se hubiera desplazado sin la acción de la fuerza externa, ¿llegaría al punto P en las mismas condiciones que con la fuerza externa anterior?

a) No hay incremento de energía cinética, luego el trabajo total es cero. En consecuencia:

$$W_{ext} = -W_C = -\left(-\Delta E_p\right) = \Delta E_p = E_p\left(r_P\right) - E_p\left(\infty\right) = E_p\left(r_P\right) - 0 = E_p\left(r_P\right) = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_{AP}}$$

La distancia entre cargas es:

$$\vec{r}_{AP} = (0, -4) - (8, 8) = (-8, -12) \text{ cm}$$

Por tanto:

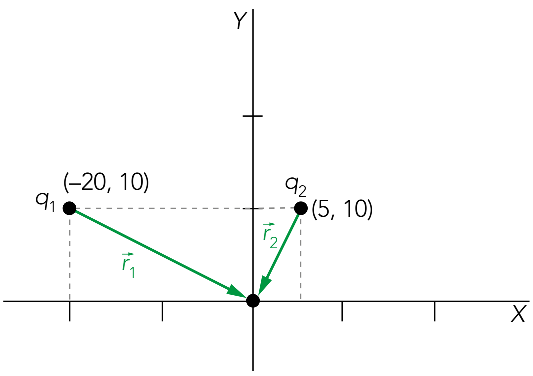
$$W_{ext} = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_{AP}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot \left(-4\right) \cdot 10^{-6}}{\sqrt{\left(-8\right)^2 + \left(-12\right)^2} \cdot 10^{-2}} \approx -3{,}0 \text{ J}$$

Es un trabajo negativo, luego la fuerza externa se opone al movimiento «natural» de la carga.

b) Si no hubiese una fuerza externa, la carga podría haber realizado el mismo desplazamiento gracias al campo, pero, al no haber una fuerza externa que frene la carga (mediante su trabajo negativo), la carga q' llegaría con 3,0 J de energía cinética.

29 **Una carga q_1 = 10 mC está en (−20, 10) cm y q_2 en (5, 10) cm. Determina qué energía sería necesaria para colocar una carga q' = −2 mC en (0, 0). Interpreta el resultado.**

La situación es:



Se ha estudiado en la unidad que la energía necesaria para tomar la carga q' y colocarla en reposo en (0, 0) es precisamente la energía potencial que va a tener dicha carga en este punto.

$$W_{ext} = E_p = E_{p_1} + E_{p_2} = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r_1} + K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r_2}$$

Los vectores $\vec{r}$ son:

$$\vec{r}_1 = (0, 0) - (-20, 10) = (20, -10) \text{ cm}$$
$$\vec{r}_2 = (0, 0) - (5, 10) = (-5, -10) \text{ cm}$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$W_{ext} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot \left(-2\right) \cdot 10^{-3}}{\sqrt{20^2 + \left(-10\right)^2} \cdot 10^{-2}} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{\left(-5\right) \cdot 10^{-3} \cdot \left(-2\right) \cdot 10^{-3}}{\sqrt{\left(-5\right)^2 + \left(-10\right)^2} \cdot 10^{-2}} = 0$$

Esto significa que, en el proceso neto, el trabajo realizado es cero; posiblemente, habrá tramos en los que se ha hecho trabajo positivo, y otros, en los que el trabajo habrá sido negativo. Es decir, hay tramos en los que ha habido que empujar a la carga para llevarla, y otros que habrá sido necesario frenarla para que no se acerque descontroladamente, y en el proceso neto, el trabajo es cero.

Página 356

30 **Se tiene una carga q = 6 μC en el punto P = (10, 10) cm. Mediante una fuerza externa, se realiza un trabajo a q' = 5 μC, que inicialmente está en reposo en «el infinito», de 3 J, hasta llevarla al punto Q = (1, 2) cm.**

a) ¿Qué trabajo ha realizado el campo?

b) ¿Se queda la carga q' en reposo en el punto Q?

a) El trabajo que realiza el campo es:

$$W_C = -\Delta E_p = E_p(\infty) - E_p\left(Q\right) = -E_p\left(Q\right) = -K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_{PQ}}$$

donde:

$$r_{PQ} = \left(1,\ 2\right) - \left(10,\ 10\right) = \left(-9,\ -8\right)\ \text{cm}$$

Entonces:

$$W_C = -K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_{PQ}} = -9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{\left(-9\right)^2 + \left(-8\right)^2} \cdot 10^{-2}} \approx -2{,}2\ \text{J}$$

b) El trabajo total es:

$$W_T = W_{ext} + W_C = 3 - 2{,}2 = 0{,}8\ \text{J}$$

Por el teorema de las fuerzas vivas, 0,8 J es la energía cinética que ha ganado la carga q'. Luego la carga no queda en reposo.

31 **Se tienen dos cargas, q_1 = –139 μC en (–11, –21) cm y q_2 = 860 μC en (10, 1) cm.**

a) ¿Qué energía potencial tendrá q' = –9 nC en el punto P = (–2, –1) cm?

b) ¿Qué trabajo realizará el campo si se lleva q' hasta una distancia infinita?

c) ¿Qué trabajo tendría que realizar una fuerza externa si quisiéramos dejar la carga en reposo?

a) Aplicamos el principio de superposición:

$$E_p = E_{p_1} + E_{p_2} = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r_1} + K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r_2}$$

donde:

$$\vec{r}_1 = (-2, -1) - (-11, -21) = (9, 20)\ \text{cm}$$
$$\vec{r}_2 = (-2, -1) - (10, 1) = (-12, -2)\ \text{cm}$$

Así que:

$$E_p = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-139 \cdot 10^{-6} \cdot \left(-9\right) \cdot 10^{-9}}{\sqrt{9^2 + 20^2} \cdot 10^{-2}} + 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{860 \cdot 10^{-6} \cdot \left(-9\right) \cdot 10^{-9}}{\sqrt{\left(-12\right)^2 + \left(-2\right)^2} \cdot 10^{-2}} \approx -0{,}52\ \text{J}$$

b) Si la carga q' se lleva a una distancia «infinita», el trabajo que realiza el campo es:

$$W_C = -\Delta E_p = E_p\left(P\right) - E_p(\infty) = E_p\left(P\right) - 0 = E_p\left(P\right) = -0{,}52\ \text{J}$$

El trabajo del campo es negativo, luego el campo está en contra de este desplazamiento. Esto quiere decir que hay una fuerza externa que ha obligado a la carga a realizar este desplazamiento, o que hubo una fuerza externa que la lanzó, proporcionándole una velocidad inicial para que se alejara hasta «el infinito».

c) En este caso, ya sabemos que no hay incremento de energía cinética, por lo que:

$$W_{ext} = -W_C = 0{,}52 \text{ J}$$

32 Una carga q = –50 µC se encuentra en (30, 8) cm.

a) ¿Qué energía mínima será necesaria para mover una carga q' = –5 µC desde (0, 0) hasta (20, 8) cm?

b) ¿Qué trabajo total se realiza?

Resolvemos, en primer lugar, el apartado b), porque se puede hacer de forma directa y nos ayudará en la resolución del apartado a).

b) Un trabajo mínimo externo significa que la carga se deja en reposo. Aunque no lo diga el enunciado, se supone que la carga estaba en reposo; por tanto, mediante el trabajo externo no se incrementa la energía cinética. En este caso, el trabajo total es cero, y el trabajo externo es el opuesto del trabajo del campo.

a) Entonces:

$$W_{ext} = -W_C = -\left(-\Delta E_p\right) = \Delta E_p = E_{p_{final}} - E_{p_{inicial}}$$

En primer lugar, calculamos los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_{inicial} = (0, 0) - (30, 8) = (-30, -8) \text{ cm}$$
$$\vec{r}_{final} = (20, 8) - (30, 8) = (-10, 0) \text{ cm}$$

Entonces:

$$W_{ext} = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_{final}} - K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_{inicial}}$$

$$W_{ext} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-50 \cdot 10^{-6} \cdot \left(-5\right) \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-2}} - 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-50 \cdot 10^{-6} \cdot \left(-5\right) \cdot 10^{-6}}{\sqrt{\left(-30\right)^2 + \left(-8\right)^2} \cdot 10^{-2}} \approx 19{,}3 \text{ J}$$

Potencial electrostático

33 Si una carga q crea un potencial V_0 a una distancia r_0, ¿qué potencial creará otra carga de valor la mitad en un punto a una distancia el doble del caso anterior?

La condición que se cumple en el primer caso es:

$$V_0 = K_0 \cdot \frac{q}{r_0}$$

En el segundo caso, el potencial V' debido a una carga $q' = \dfrac{q}{2}$ a una distancia $r' = 2 \cdot r_0$ es:

$$V' = K_0 \cdot \frac{q'}{r'}$$

Si relacionamos los datos:

$$V' = K_0 \cdot \frac{\frac{q}{2}}{2 \cdot r_0} = \frac{1}{4} \cdot K_0 \cdot \frac{q}{r_0} = \frac{1}{4} \cdot V_0$$

34 **¿A qué distancia de una carga $q > 0$ el valor del módulo del campo es numéricamente igual al del potencial?**

Tenemos que imponer la igualdad:

$$E = V \;\rightarrow\; K_0 \cdot \frac{q}{r^2} = K_0 \cdot \frac{q}{r} \;\rightarrow\; r^2 = r \;\rightarrow\; r \cdot (r-1) = 0 \;\rightarrow\; r = 1\,\text{m}$$

Otra solución matemática es $r = 0$, que tenemos que descartar porque para este valor, E y V no están definidos.

35 **Una carga $q = 52$ mC está en (2, 5) m.**

a) Determina el potencial en el punto (–2, 1) m.

b) ¿Qué energía potencial tendrá una carga de 1 μC en este punto?

a) Calculemos el vector $\vec{r}$:

$$\vec{r} = (-2, 1) - (2, 5) = (-4, -4)\ \text{m}$$

El potencial eléctrico es:

$$V = K_0 \cdot \frac{q}{r} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{52 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{(-4)^2 + (-4)^2}} \approx 8{,}273 \cdot 10^7\ \text{V}$$

b) La relación que tiene la energía potencial con el potencial es:

$$E_p = q' \cdot V = 10^{-6} \cdot 8{,}273 \cdot 10^7 \approx 82{,}7\ \text{J}$$

36 **Se tienen dos cargas, $q_1 = -140$ pC en (–1, –2) cm y $q_2 = 590$ pC en (0, 1) cm.**

a) ¿Qué potencial producen en el punto $P = (2, 0)$ cm?

b) ¿Qué energía potencial tendrá en este punto una carga de $q' = 50$ μC?

a) Calculamos los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (2, 0) - (-1, -2) = (3, 2)\ \text{cm}$$

$$\vec{r}_2 = (2, 0) - (0, 1) = (2, -1)\ \text{cm}$$

Aplicamos el principio de superposición al potencial eléctrico:

$$V = V_1 + V_2 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1} + K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2}$$

$$V = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-140 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{3^2 + 2^2} \cdot 10^{-2}} + 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{590 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot 10^{-2}} \approx 202{,}5\ \text{V}$$

b) Utilizamos la relación entre la energía potencial y el potencial:

$$E_p = q' \cdot V = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 202{,}5 \approx 0{,}010\ \text{J} = 10\ \text{mJ}$$

37 **Se dispone de tres cargas eléctricas, $q_1 = 5$ μC en (–15, 5) cm, $q_2 = -8$ μC en (8, –12) cm y $q_3 = -7$ μC en (–1, 10) cm.**

a) Calcula el potencial que crean en el punto (–5, –5) cm.

b) Si una carga q' está en este punto con una energía potencial de –10 J, ¿de qué valor es la carga?

a) Calculemos los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (-5, -5) - (-15, 5) = (10, -10)\ \text{cm}$$

$$\vec{r}_2 = (-5, -5) - (8, -12) = (-13, 7)\ \text{cm}$$

$$\vec{r}_3 = (-5, -5) - (-1, 10) = (-4, -15)\ \text{cm}$$

Aplicamos el principio de superposición al potencial:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1} + K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2} + K_0 \cdot \frac{q_3}{r_3}$$

$$V = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{10^2 + (-10)^2} \cdot 10^{-2}} + 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-8 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{(-13)^2 + 7^2} \cdot 10^{-2}} + 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-7 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{(-4)^2 + (-15)^2} \cdot 10^{-2}}$$

$$V \approx -575 \cdot 10^3\ V = -575\ kV$$

b) A partir de la relación entre la energía potencial y el potencial:

$$E_p = q' \cdot V \ \rightarrow \ q' = \frac{E_p}{V} = \frac{-10}{-575 \cdot 10^3} = 1{,}74 \cdot 10^{-5}\ C = 17{,}4\ \mu C$$

38 El potencial que una carga $q = -50$ pC crea en (1, 2) m es de -5 V. Si la carga está sobre el eje *Y*, ¿en qué punto se encuentra?

La coordenada del punto donde está la carga será (0, *y*). Así, el vector $\vec{r}$ es:

$$\vec{r} = (1, 2) - (0, y) = (1, 2 - y)\ cm$$

Utilizando la expresión del potencial:

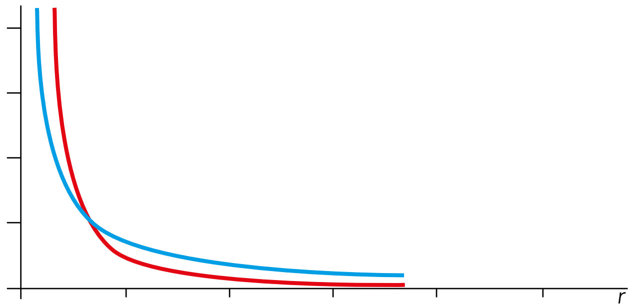
$$V = K_0 \cdot \frac{q}{r} \ \rightarrow \ r = \frac{K_0 \cdot q}{V} = \frac{9{,}0 \cdot 10^9 \cdot (-50 \cdot 10^{-12})}{-5} = 0{,}09\ m = 9\ cm$$

Así que:

$$r = \sqrt{1^2 + (2-y)^2} = 9\,cm \ \rightarrow \ 1 + 4 + y^2 - 4 \cdot y = 81 \ \rightarrow \ y^2 - 4 \cdot y - 76 = 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} y \approx 10{,}9\ cm \\ y \approx -6{,}9\ cm \end{cases}$$

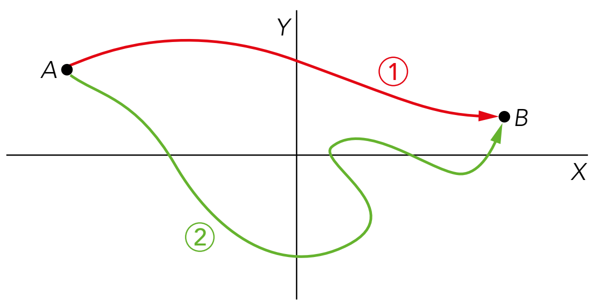
Por tanto, hay dos posibilidades: *q* puede estar en (0; 10,9) cm o en (0; −6,9) cm.

39 En la gráfica se muestran dos curvas, una representa la variación del módulo del campo que crea una carga, y la otra el potencial eléctrico. Justifica cuál es cada una.



La gráfica *roja* decae más rápidamente conforme la distancia se va haciendo mayor. Por tanto, es la función que depende de $1/r^2$. La *azul*, por tanto, es la del potencial, ya que va a cero más lentamente cuando *r* aumenta. Es decir, es la que depende de $1/r$.

40 Una carga *q'* está en reposo en el punto *A* cuyo potencial es de 1 000 V. El campo eléctrico la desplaza, «de manera natural», por la trayectoria 1 hasta *B*, con un potencial de 500 V, realizando un trabajo de 80 J.



a) ¿Qué valor tiene la carga *q'*?

b) ¿Tendrá *q'* energía cinética en el punto *B*?

c) Si mediante fuerzas externas se hubiera obligado a la carga *q'* a ir desde *A* hasta *B* por el camino 2, ¿qué trabajo habría realizado la fuerza eléctrica? ¿Tendría la misma energía cinética en el punto *B* que en el caso anterior?

a) Sabemos que:

$$W_C = -\Delta p = -q' \cdot \Delta V \;\rightarrow\; q' = -\frac{W_C}{\Delta V} = -\frac{80}{500 - 1\,000} = 0{,}16 \text{ C}$$

b) En primer lugar, tendremos en cuenta que no hay más fuerzas que la eléctrica del campo. Esta fuerza realiza trabajo positivo a consta de la energía potencial; por tanto, en el punto *B*, tiene menos energía potencial que en *A*. Puesto que la energía mecánica no cambia (la fuerza eléctrica es conservativa), tenemos que quedará con energía cinética. Aplicamos el teorema de la energía cinética:

$$W_T = \Delta E_c \;\rightarrow\; W_C = E_c \;\rightarrow\; E_c = 80 \text{ J}$$

c) Puesto que la fuerza eléctrica es conservativa, el trabajo no depende de la trayectoria; por tanto, será 80 J.

Sin embargo, no podemos saber la energía cinética que tendrá en el punto *B*, puesto que no sabemos cuánto es el trabajo que ha realizado la fuerza externa.

41 El trabajo mínimo realizado para llevar una carga de 3 mC desde una distancia de 5 cm de una carga fuente *q* hasta el infinito es de 21 J.

a) ¿Qué potencial eléctrico había en la posición inicial?

b) Si el valor del trabajo fuera de 21 J, ¿qué diferencia habría?

a) Como ya se ha explicado en otros ejercicios, en este caso se cumple que:

$$W_{ext} = -W_C = \Delta E_p = E_p(\infty) - E_p(5 \text{ cm}) = 0 - E_p\,(5 \text{ cm}) = -q' \cdot V\,(5 \text{ cm}) = -3 \cdot 10^{-3} \cdot V\,(5 \text{ cm}) = 21 \text{ J}$$

$$V\,(5 \text{ cm}) = \frac{21}{-3 \cdot 10^{-3}} = -7\,000 \text{ V}$$

b) Si el trabajo hubiera sido de 23 J, se hubiera dejado en «el infinito» con una energía cinética de 2 J; son necesarios 21 J para llevarla infinitamente lejos, y la energía sobrante quedaría como energía cinética.

$$W_{ext} = \Delta E_m = E_m\,(\infty) - E_{m_0} = E_c\,(\infty) + E_p\,(\infty) - E_{c_0} - E_{p_0} = E_c\,(\infty) + 0 - 0 - q' \cdot V_0 = E_c(\infty) - q' \cdot V_0$$

$$23 = E_c(\infty) - 3 \cdot 10^{-3} \cdot (-7\,000) \;\rightarrow\; 23 = E_c(\infty) + 21 \;\rightarrow\; E_c(\infty) = 23 - 21 = 2 \text{ J}$$

42 Una carga *q'*, en reposo, a una distancia de 60 cm de una carga fuente de 22 mC experimenta una repulsión con una aceleración de 200 m/s².

a) Determina el valor de la carga de *q'* si sabemos que su masa es de 50 g.

b) ¿Con qué velocidad llegará al infinito?

a) Mediante la segunda ley de Newton determinamos la fuerza que experimenta la carga testigo:

$$\text{F} = \text{m} \cdot \text{a} = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 200 = 10 \text{ N}$$

Ahora, utilizamos la ley de Coulomb:

$$F = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2} \;\rightarrow\; q' = \frac{F \cdot r^2}{K_0 \cdot q} = \frac{10 \cdot (60 \cdot 10^{-2})^2}{9 \cdot 10^9 \cdot 22 \cdot 10^{-3}} \approx 1{,}82 \cdot 10^{-8} = 18{,}2 \text{ nC}$$

b) Puesto que la carga se irá «al infinito» debido a la fuerza eléctrica repulsiva, que es conservativa, la energía mecánica inicial será igual a la final.

$$E_{m_0} = E_{m_\infty} \rightarrow E_{p_0} = E_{c_\infty} \rightarrow K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r} = \frac{1}{2}\, m \cdot v_\infty^2 \rightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{2 \cdot K_0 \cdot q \cdot q'}{r \cdot m}}$$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 22 \cdot 10^{-3} \cdot 18{,}2 \cdot 10^{-9}}{60 \cdot 10^{-2} \cdot 50 \cdot 10^{-3}}} \approx 15{,}5 \text{ m/s}$$

Página 357

43 La función matemática que describe cómo cambia el potencial en el vacío de una carga *q* con la distancia es:

$$\mathbf{V\,(r) = -\frac{1{,}8 \cdot 10^5}{r}}$$

a) ¿Cuál es el valor de la carga *q*?

b) Calcula el valor del campo eléctrico a 50 cm de la carga *q*.

c) Encuentra la relación que existe entre *V* y *E*.

a) Comparamos esta expresión con la del potencial que hemos estudiado en la unidad:

$$V\left(r\right) = K_0 \cdot \frac{q}{r} = -\frac{1{,}8 \cdot 10^5}{r} \rightarrow K_0 \cdot q = -1{,}8 \cdot 10^5 \rightarrow q = \frac{-1{,}8 \cdot 10^5}{9{,}0 \cdot 10^9} = -2 \cdot 10^{-5} \text{ C} = -20\ \mu\text{C}$$

b) El valor del campo es:

$$E\left(r\right) = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-5}}{0{,}50^2} = -7{,}2 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$

c) La relación entre *V* y *E* es:

$$E\left(r\right) = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} = \frac{K_0 \cdot \frac{q}{r}}{r} = \frac{V\left(r\right)}{r}$$

44 A una cierta distancia de una carga *q*, el valor del campo es 432 N/C, mientras que el potencial es 108 V. Encuentra el valor de la carga y la distancia a la que se están midiendo estos valores.

Utilizamos la relación que hemos encontrado en el ejercicio anterior entre el valor del campo y el potencial:

$$E = \frac{V}{r} \rightarrow r = \frac{V}{E} = \frac{108}{432} = 0{,}25 \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

Y ahora, con la expresión del potencial, determinamos el valor de la carga:

$$V = K_0 \cdot \frac{q}{r} \rightarrow q = \frac{r \cdot V}{K_0} = \frac{0{,}25 \cdot 108}{9{,}0 \cdot 10^9} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ C} = 3 \text{ nC}$$

45 Una bolita de 5 g de masa y con una carga de 2 mC, que inicialmente estaba en reposo en el infinito, donde el potencial es cero, se lleva, mediante la acción de una fuerza externa, hasta el punto *P*, cuyo potencial es de 2 500 V, quedando con una velocidad de 100 m/s. Determina el trabajo que ha realizado la fuerza externa.

La energía potencial que tendrá la bolita en el punto *P* será:

$$E_p = q \cdot V = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2\,500 = 5 \text{ J}$$

Luego, según se ha estudiado en la unidad, el trabajo realizado por una fuerza externa para llevar la carga en reposo en el infinito hasta un cierto punto, dejándola nuevamente en reposo es, precisamente, el valor de la energía potencial que adquiere la carga en dicho punto.

En consecuencia, si el trabajo externo fuese de 5 J, se dejaría la carga en el punto *P* en reposo. Si no queremos que se quede en reposo, sino que se mueva a una cierta velocidad, habrá que proporcionar a la carga la energía cinética necesaria:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 100^2 = 25 \text{ J}$$

En consecuencia, el trabajo externo necesario será:

$$W_{ext} = E_p + E_c = 5 + 25 = 30 \text{ J}$$

46 **Se puede demostrar que las expresiones matemáticas utilizadas para calcular el campo y el potencial de una esfera uniformemente cargada en su exterior son exactamente las mismas que las que se utilizan cuando la carga total está colocada en el centro de la esfera. Calcula el campo y el potencial de una esfera de 10 cm de radio a 5 cm de su superficie, sabiendo que la densidad de carga es de 0,6 nC/cm³.**

Nota: la densidad de carga expresa la cantidad de carga por unidad de longitud, superficie o volumen. En nuestro caso, por ser una esfera, será por unidad de volumen. Su expresión matemática es:

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

El volumen de la esfera es:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 \approx 4\,188{,}8 \text{ cm}^3$$

La carga almacenada en el volumen de la esfera es:

$$q = 0{,}6 \text{ nC/cm}^3 \cdot 4\,188{,}8 \text{ cm}^3 \approx 2\,513 \text{ nC} \approx 2{,}5\ \mu\text{C}$$

Tenemos que ver cuánto es el valor del campo y del potencial a 15 cm del centro de la esfera. Si esta carga la consideramos concentrada en el centro de la esfera, entonces, $r = 15$ cm.

$$E = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{2{,}5 \cdot 10^{-6}}{\left(15 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 10^6 \text{ N/C}$$

$$V = K_0 \cdot \frac{q}{r} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{2{,}5 \cdot 10^{-6}}{15 \cdot 10^{-2}} = 10^6 = 1{,}50 \cdot 10^5 \text{ V} = 150 \text{ kV}$$

47 **El campo eléctrico más grande que puede aguantar el aire antes de producir una descarga es del orden de 3 · 10⁶ N/C.**

a) ¿Cuánto podría cargarse, como máximo, la esfera metálica del ejercicio anterior?

b) ¿A qué potencial eléctrico quedaría el aire que está tocando la esfera?

a) Vamos a suponer que la esfera adquiere una carga tal que, en la misma superficie de ella, el campo ya toma el valor máximo posible que admite el aire ($3 \cdot 10^6$ N/C).

Vamos a utilizar la constante del vacío que es prácticamente igual a la del aire.

Por tanto:

$$E_{máx} = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} \rightarrow q = \frac{E_{máx} \cdot r^2}{K_0} = \frac{3 \cdot 10^6 \cdot \left(10 \cdot 10^{-2}\right)^2}{9{,}0 \cdot 10^9} \approx 3{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 3{,}3\ \mu\text{C}$$

b) El potencial eléctrico será:

$$V = K_0 \cdot \frac{q}{r} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{3{,}3 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-2}} \approx 2{,}97 \cdot 10^5 \text{ V} = 297 \text{ kV}$$

11 INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

2 LEYES DE KEPLER

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.7.6. (EA.7.6.1-7.6.2.)

Página 308

1 **Suponiendo movimientos circulares para Mercurio y Venus alrededor del Sol, compara sus períodos y velocidades lineales, y demuestra que los planetas son más lentos cuanto más alejados están del Sol.**

Aplicamos la tercera ley de Kepler al primer y segundo planeta del sistema solar: Mercurio y Venus.

$$\frac{T_M^2}{a_M^3} = \frac{T_V^2}{a_V^3}$$

Suponiendo que el movimiento de ambos planetas es aproximadamente circular, podemos considerar que el semieje mayor de la elipse que describen es prácticamente igual a la distancia media al Sol: $a \sim r$. Entonces:

$$\frac{T_M^2}{r_M^3} = \frac{T_V^2}{r_V^3} \rightarrow T_M = \left(\frac{r_M}{r_V}\right)^{3/2} T_V$$

$$\text{como } r_M < r_V \rightarrow \frac{r_M}{r_V} < 1 \rightarrow \left(\frac{r_M}{r_V}\right)^{3/2} < 1 \rightarrow T_M < T_V$$

Suponiendo que los movimientos orbitales son MCU, se cumple que la velocidad orbital y el período de revolución están relacionados a través del radio orbital mediante la siguiente expresión:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$$

Particularizando para Venus y Mercurio, tenemos que:

$$v_V = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_V}{T_V} \text{ y } v_M = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_M}{T_M} \rightarrow \frac{v_V}{v_M} = \frac{\dfrac{2 \cdot \pi \cdot r_V}{T_V}}{\dfrac{2 \cdot \pi \cdot r_M}{T_M}}$$

$$\frac{v_V}{v_M} = \frac{r_V \cdot T_M}{r_M \cdot T_V}$$

Y, puesto que se cumple, como hemos visto, que:

$$T_M = \left(\frac{r_M}{r_V}\right)^{3/2} T_V$$

Sustituyendo en:

$$\frac{v_V}{v_M} = \frac{r_V \cdot \left(\dfrac{r_M}{r_V}\right)^{3/2} T_V}{r_M \cdot T_V} \rightarrow \frac{v_V}{v_M} = \sqrt{\frac{r_M}{r_V}} \rightarrow v_V = \sqrt{\frac{r_M}{r_V}}\, v_M$$

$$\text{como } r_M < r_V \rightarrow \frac{r_M}{r_V} < 1 \rightarrow \sqrt{\frac{r_M}{r_V}} < 1 \rightarrow v_V < v_M$$

Quedando demostrado que, cuanto más alejado se encuentra un planeta orbitando, más lento es su viaje en torno al Sol.

2 La órbita del cometa Halley tiene un período de 76 años y una excentricidad muy elevada, e = 0,97, por lo que la diferencia de velocidades en su trayectoria es muy acusada. Sabiendo que la máxima distancia al Sol es de 35 ua y la mínima es de 0,6 ua, aproximadamente, calcula:

a) La relación entre las velocidades en esos puntos.

b) El valor del semieje mayor y del semieje menor de la elipse que describe la órbita y la distancia del centro al foco.

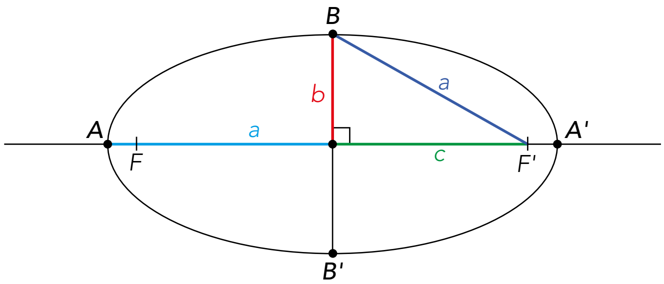
a) Si aplicamos la segunda ley de Kepler a la órbita del cometa Halley en sus puntos de máximo y mínimo acercamiento, el afelio y el perihelio, se cumple que:

$$r_{afelio} \cdot v_{afelio} = r_{perihelio} \cdot v_{perihelio}$$

$$\rightarrow \frac{v_{perihelio}}{v_{afelio}} = \frac{r_{afelio}}{r_{perihelio}} \rightarrow \frac{v_{perihelio}}{v_{afelio}} = \frac{35 \text{ ua}}{0{,}6 \text{ ua}} = 58{,}3$$

$$v_{perihelio} = 58{,}3\ v_{afelio}$$

b) Según la primera ley de Kepler, los movimientos planetarios son elípticos. Para calcular los elementos de una elipse: el semieje mayor, a, el semieje menor, b, y la distancia del foco al centro, c, nos apoyamos en el siguiente dibujo:



Observamos que se cumple:

$$r_{afelio} + r_{perihelio} = 2 \cdot a$$

$$a = \frac{r_{afelio} + r_{perihelio}}{2} = \frac{35 + 0{,}6}{2} = 17{,}8 \text{ ua}$$

Por otro lado, la excentricidad de una elipse puede expresarse como $e = c/a$, expresión que utilizaremos para el cálculo de la distancia del foco al centro, c.

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow c = e \cdot a = 0{,}97 \cdot 17{,}8 = 17{,}3 \text{ ua}$$

Además, la imagen nos permite comprobar, por el teorema de Pitágoras, que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{17{,}8^2 - 17{,}3^2} = 4{,}2 \text{ ua}$$

Las soluciones serían: a = 17,8 ua; b = 4,2 ua; c = 17,3 ua

3 Utilizando los valores de la tabla, construye una gráfica en la que se observe el decrecimiento kepleriano de la velocidad orbital frente al radio orbital medio de los planetas.

Planeta	e	T/años	a/ua
Mercurio	0,2056	0,24	0,39
Venus	0,0068	0,62	0,72
Tierra	0,0167	1,00	1,00
Marte	0,0934	1,88	1,52
Júpiter	0,0484	11,86	5,20
Saturno	0,0542	29,46	9,54
Urano	0,0444	84,02	19,19
Neptuno	0,0086	164,79	30,06

Se denomina decrecimiento kepleriano de la velocidad orbital a la disminución que sufre la velocidad de los planetas conforme se alejan del Sol y sus órbitas tienen mayores radios. Este decrecimiento viene dimanado de las leyes de Kepler.

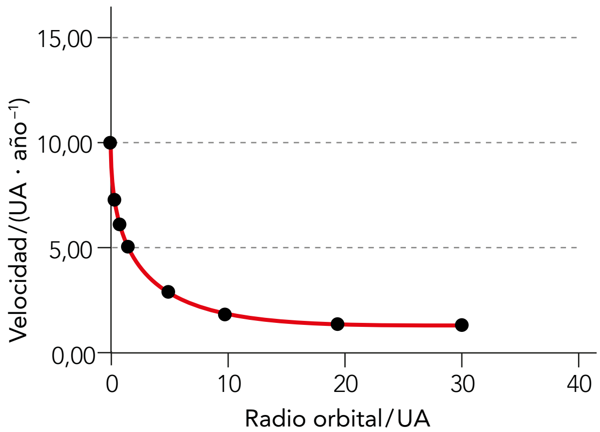
A partir de la tabla del enunciado, y utilizando la relación entre la velocidad orbital y el período de revolución a través del radio orbital:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

Planeta	e	T/años	a/ua	v/ua · años^{-1}
Mercurio	0,2056	0,24	0,39	10,21
Venus	0,0068	0,62	0,72	7,30
Tierra	0,0167	1,00	1,00	6,28
Marte	0,0934	1,88	1,52	5,08
Júpiter	0,0484	11,86	5,20	2,75
Saturno	0,0542	29,46	9,54	2,03
Urano	0,0444	84,02	19,19	1,44
Neptuno	0,0086	164,79	30,06	1,15

Con los datos obtenidos de la velocidad, representamos v frente a T; para ello, podemos utilizar una hoja de cálculo. En las páginas TIC se dan orientaciones para realizar cálculos con dicha aplicación.

El resultado gráfico sería el siguiente:



3 LA LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.7.8. (EA.7.8.1.)

Página 313

4 **Enuncia la LGU y comenta el significado físico de las magnitudes que aparecen en su expresión matemática.**

Todas las partículas materiales del universo se atraen entre sí con una fuerza, dirigida según la línea que las une, directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Esta es la ley de gravitación universal o LGU enunciada por Newton en 1686. Matemáticamente se expresa así:

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Donde G, constante de gravitación universal, es la constante de proporcionalidad en la ley. Tiene un valor muy pequeño que es consecuencia de la debilidad de las fuerzas gravitatorias. Esta constante toma el mismo valor en cualquier punto del universo.

m_1 y m_2 son las masas de los cuerpos que interactúan. Se trata de la masa gravitatoria, que es la propiedad que poseen los cuerpos y que es capaz de generar campo gravitatorio.

r es la distancia que separa las masas, supuestas partículas puntuales. En el caso de que se trate de cuerpos extensos, r es la distancia desde el centro de gravedad de uno de los cuerpos hasta el centro de gravedad del otro.

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de información acerca de las características de los distintos tipos de textos, lo que le será de utilidad para elaborar y argumentar su respuesta.

5 **Recuerda el concepto de inercia y explica por qué la masa que aparece en la segunda ley de Newton se denomina masa inercial.**

La inercia es la resistencia que ponen los cuerpos a cambiar el estado de movimiento en el que se encuentran. La masa inercial representa esta inercia, de forma que, cuanto mayor es la masa inercial, mayor es la resistencia para cambiar el estado de movimiento y acelerarse. La segunda ley de Newton así lo expresa:

$$F = m \cdot a \rightarrow m = \frac{F}{a}$$

Donde m es la masa inercial, magnitud que mide la aceleración que adquiere un cuerpo al aplicársele una fuerza F.

En esta ley, se puede ver la proporcionalidad inversa entre la masa y la aceleración. Recuerda que la aceleración es la magnitud que mide la variación del estado de movimiento del cuerpo. Para una misma fuerza aplicada a diversos cuerpos de diferente masa, ocurre que cuanto mayor es la masa del cuerpo, menor es la aceleración que adquiere el cuerpo.

6 **Preguntas provocadoras. Si la LGU solo es aplicable a masas puntuales, ¿por qué la utilizamos para cuerpos extensos como los planetas?**

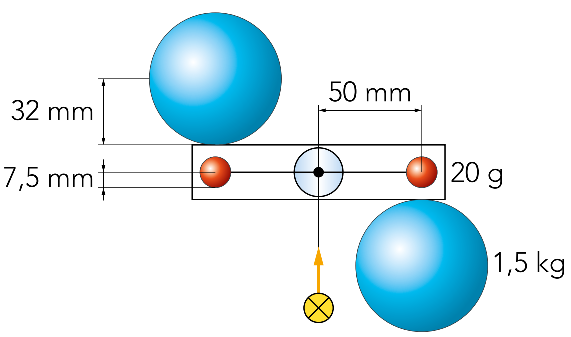
La utilizamos para cuerpos extensos siempre que tengamos en cuenta la siguiente hipótesis:

«La fuerza gravitatoria que ejerce una esfera homogénea de radio R y masa M es la misma que ejercería una partícula puntual de la misma masa situada en su centro de gravedad».

El centro de gravedad, CG, de un cuerpo es el punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas de gravedad que actúan sobre sus partículas. En el caso de cuerpos con alta simetría y densidad uniforme el CG se sitúa sobre su centro de simetría o centro geométrico.

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de un documento que explica cómo aplicar la estrategia de desarrollo del pensamiento «Preguntas provocadoras».

7 **En la figura adjunta se representa un diagrama del experimento de Cavendish. Según los datos que aparecen en la imagen, encuentra la fuerza de atracción entre la esfera grande y la pequeña en el momento del contacto.**



En el momento del contacto de la esfera grande, de masa m_1 = 1,5 kg, con la pequeña, de masa $m_2 = 20 \cdot 10^{-3}$ kg, la distancia que separa los cuerpos, medida de centro a centro, es la suma de sus radios:

$$d_{12} = 32 + 7{,}5 = 39{,}5 \text{ mm} = 0{,}0395 \text{ m}$$

Aplicando la LGU:

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d_{12}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1{,}5 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{0{,}039\,5^2}$$

Obtenemos que la fuerza de atracción entre las esferas en el momento del contacto es:

$$F_g = 1{,}28 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

8 Asamblea de ideas. **Según la LGU, la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo depende de la masa del cuerpo, de forma que existe más atracción sobre cuerpos más masivos. Sin embargo, sabemos que todos los cuerpos caen desde una misma altura con la misma velocidad. Explica por qué los cuerpos más pesados no caen más rápidos.**

Es cierto que, cuanto mayor es la masa del cuerpo, mayor es la fuerza de atracción gravitatoria. Pero también es cierto que, cuanto mayor es la masa, mayor es la inercia o resistencia al cambio y, por tanto, existe más dificultad para cambiar el estado de movimiento del cuerpo y acelerarlo.

Como consecuencia, la aceleración se mantiene constante e igual para todos los cuerpos. Deduciremos la expresión de la aceleración de la gravedad mediante la segunda ley de Newton y la LGU:

$$F = m \cdot a \;\rightarrow\; a = \frac{F}{m} = \frac{G \cdot \dfrac{M \cdot m}{r^2}}{m} = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

Si aumenta F, y aumenta m, finalmente, la aceleración a debe permanecer constante, como puede observarse en la expresión superior. La aceleración de la gravedad dependería del cuerpo que la crea y no del cuerpo que se ve afectado; por tanto, aumentar la masa del cuerpo no implicaría un aumento de la gravedad.

En **anayaeducacion.es** explicamos cómo aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo «Asamblea de ideas», propuesta para la resolución de esta actividad en grupo.

9 **Explica en qué consiste el principio de superposición aplicado a un sistema discreto de masas.**

Supongamos un sistema discreto de partículas formado por n masas puntuales distribuidas en el espacio. Si introducimos otra partícula en ese sistema, aparecerá sobre ella una fuerza neta que podremos calcular aplicando el **principio de superposición.**

Este principio enuncia que la fuerza neta que se ejerce sobre la masa introducida en el sistema es la suma de cada una de las fuerzas que ejercen las n masas sobre ella, como si cada partícula del sistema estuviese aislada del resto. La fuerza resultante puede expresarse así:

$$\vec{F}_{g_{\text{resultante}}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{g_i}$$

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de información acerca de las características de los distintos tipos de textos, lo que le será de utilidad para elaborar y argumentar su respuesta.

10 **Calcula la distancia existente entre un meteorito de 900 kg y el planeta al que se dirige, si la fuerza gravitatoria que ejerce el planeta sobre el meteorito a esa distancia es 250 N.**

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_{planeta} = 5 \cdot 10^{23}$ kg.

La fuerza gravitatoria con la que el planeta atrae al meteorito es de 250 N, conocida las masas de los cuerpos que se atraen y aplicando la LGU:

$$F_g = G \cdot \frac{M_{planeta} \cdot M_{meteorito}}{r^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \sqrt{\frac{G \cdot M_{planeta} \cdot M_{meteorito}}{F_g}}$$

Sustituyendo los datos en la expresión encontrada:

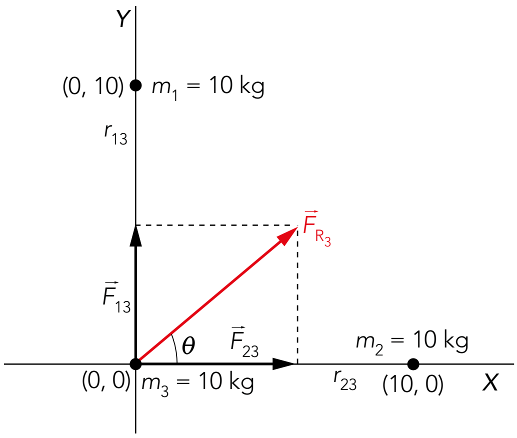
$$r = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 10^{23} \cdot 900}{250}} \sim 1{,}0957 \cdot 10^{7}\ \text{m}$$

$$r \approx 10\,957\ \text{km}$$

11 **En los puntos (0, 10) y (10, 0), en metros, de un sistema de referencia cartesiano se encuentran situadas dos partículas de igual masa, $m_1 = m_2 = 10$ kg. Si situamos una tercera partícula, de masa $m_3 = 10$ kg, en el origen de coordenadas (0, 0), calcula la fuerza gravitatoria neta que aparece sobre esta tercera masa.**

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Realizamos una representación gráfica de la situación de las partículas en un sistema de coordenadas cartesiano:



Aplicando el principio de superposición para un sistema discreto de masas, la fuerza resultante sobre la masa 3, $\vec{F}_{R_3}$ será la suma vectorial de las fuerzas que ejercen la masa 1 sobre la 3, como si la 2 no existiera, $\vec{F}_{13}$, más la fuerza que ejerce la 2 sobre la 3, como si la 1 no existiera, $\vec{F}_{23}$. Sin olvidarnos que las fuerzas son vectores y que se trata de una suma vectorial:

$$\vec{F}_{R_3} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

$$\vec{F}_{13} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_3}{r_{13}^2} \cdot \vec{j} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10 \cdot 10}{10^2} \cdot \vec{j} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{F}_{13} = G \cdot \frac{m_2 \cdot m_3}{r_{23}^2} \cdot \vec{i} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10 \cdot 10}{10^2} \cdot \vec{i} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{i}$$

$$\vec{F}_{R_3} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{i} + 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{j}\ \text{N}$$

Podemos escribir dicha fuerza resultante mediante su módulo y argumento:

$F_{R_3} \sim 9{,}43 \cdot 10^{-11}$ N y $\theta = 45°$

4 CONSECUENCIAS DE LA LGU

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.7.8. (EA.7.8.2.)

Página 317

12 **Utilizando los datos que aparecen en la tabla de datos planetarios de esta página, calcula:**

a) La gravedad en la superficie del planeta Neptuno.

b) El campo gravitatorio creado por Neptuno a una altura que sea tres veces su radio.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻².

a) Para calcular la gravedad sobre la superficie de Neptuno utilizaremos los datos que hemos sombreado en la tabla.

Planeta	Radio (km)	Radio (R_T)	Masa (kg)	Masa (M_T)	Velocidad de escape (km/s)
Neptuno	24764	3,88 R_T	$1{,}0 \cdot 10^{26}$	17 M_T	24

Aplicamos la expresión matemática que define la aceleración de la gravedad sobre la superficie de Neptuno, g_{0N}:

$$g_{0N} = G \cdot \frac{M_N}{R_N^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1{,}0 \cdot 10^{26}}{\left(24\,764 \cdot 10^3\right)^2} = 10{,}876 \text{ m/s}^2 \approx 11 \text{ m/s}^2$$

b) El campo gravitatorio y la aceleración de la gravedad en un punto son conceptos totalmente equivalentes y se pueden calcular mediante la misma expresión. Sus respectivas unidades en el SI, N/kg y m/s², poseen las mismas dimensiones. En este caso, utilizaremos la expresión obtenida en el apartado anterior para una altura $h = 3\ R_N$:

$$g_{hN} = G \cdot \frac{M_N}{\left(R_N + h\right)^2} = G \cdot \frac{M_N}{\left(R_N + 3\ R_N\right)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10^{26}}{\left(4 \cdot 24\,764 \cdot 10^3\right)^2} = 0{,}6798\ \frac{\text{N}}{\text{kg}} \approx 0{,}7 \text{ N/kg}$$

13 **Calcula el peso de un astronauta de 82 kg de masa que se encuentra orbitando junto a la estación ISS a 415 km de altura.**

Datos: $g_0 = 9{,}8$ m/s²; $R_T = 6\,371$ km.

Un astronauta de $m = 82$ kg que orbite junto a la ISS se encuentra a una altura $h = 415$ km. Para calcular el peso de dicho astronauta, aplicaremos la LGU:

$$P = F_g = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{\left(R_T + h\right)^2}$$

Como los datos que nos aporta el enunciado del ejercicio son g_0 y R_T, no podemos utilizar G y M_T en la expresión, así que relacionaremos estas magnitudes mediante la definición de gravedad en la superficie terrestre de la siguiente forma:

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow g_0 \cdot R_T^2 = G \cdot M_T$$

Y sustituyendo en la LGU:

$$P = F_g = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{\left(R_T + h\right)^2} = \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m}{\left(R_T + h\right)^2} = \frac{9{,}8 \cdot (6\,371 \cdot 10^3)^2 \cdot 82}{\left(6\,371 \cdot 10^3 + 415 \cdot 10^3\right)^2} \approx 708 \text{ N}$$

El peso del astronauta será: $P \sim 708$ N.

14 El espejo. **Explica las diferencias entre *g* y *G*.**

No confundas G y g, son diferentes. G es una constante universal, es la constante de proporcionalidad en la LGU y vale $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg² en cualquier lugar del universo. Por el contrario, g es la aceleración de la gravedad y coincide con el campo gravitatorio que crea un astro en un punto. No es constante, varía con la localización. Sobre la superficie de la Tierra, toma el valor de 9,8 m/s².

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de un documento que explica cómo aplicar la estrategia de desarrollo del pensamiento «El espejo».

15 ¿A qué altura sobre la superficie terrestre el campo gravitatorio se reduce un 90 % en relación con su valor en la superficie?

Si la gravedad a una altura h, g_h, se reduce un 90 % de su valor en la superficie terrestre, g_0, es que toma el valor del 10 % de g_0 y, entonces, $g_h = 0{,}1 \cdot g_0$.

Puesto que el enunciado del ejercicio no aporta ningún dato, trabajaremos relacionando la gravedad en la superficie y la gravedad a una altura h:

$$g_h = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

Dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} \rightarrow \frac{0{,}1 \cdot g_0}{g_0} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

$$0{,}1 \cdot (R_T + h)^2 = R_T^2 \rightarrow \sqrt{0{,}1} \cdot (R_T + h) = R_T$$

Despejando, $h = 2{,}16\ R_T$

16 Calcula la densidad de la Luna sabiendo que la gravedad sobre su superficie es 0,16 veces la gravedad sobre la superficie terrestre y que el radio de la Tierra es 3,7 veces el lunar.

Dato: $\rho_{Tierra} = 5{,}5$ g/cm³.

Los datos que nos proporciona el enunciado del ejercicio son relaciones entre magnitudes del planeta Tierra y su satélite lunar: $g_L = 0{,}16\ g_T$; $R_T = 3{,}7\ R_L$, por lo que nuestro objetivo es relacionar las densidades de la Tierra y la Luna.

Veamos cómo se define la densidad:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3}$$

A partir de la definición de la gravedad sobre la superficie de un astro, podemos despejar la masa M de dicho astro de la siguiente forma:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2} \rightarrow M = \frac{g \cdot R^2}{G}$$

Que sustituyendo en la definición de la densidad, nos proporciona la siguiente expresión:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} = \frac{\frac{g \cdot R^2}{G}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} = \frac{g}{G \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R}$$

que utilizaremos para relacionar las densidades de la Luna y la Tierra:

$$\rho_L = \frac{g_L}{G \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_L}$$

$$\rho_T = \frac{g_T}{G \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_T}$$

$$\frac{\rho_L}{\rho_T} = \frac{g_L}{g_T} \cdot \frac{R_T}{R_L} = \frac{0{,}16\ g_T \cdot 3{,}7\ R_L}{g_T \cdot R_L} = 0{,}16 \cdot 3{,}7 = 0{,}592$$

$$\rho_L = 0{,}592 \cdot \rho_T = 0{,}592 \cdot 5{,}5 = 3{,}256 \text{ g/cm}^3$$

La solución sería que la densidad lunar toma el valor: $\rho_{Luna} \sim 3{,}3$ g/cc

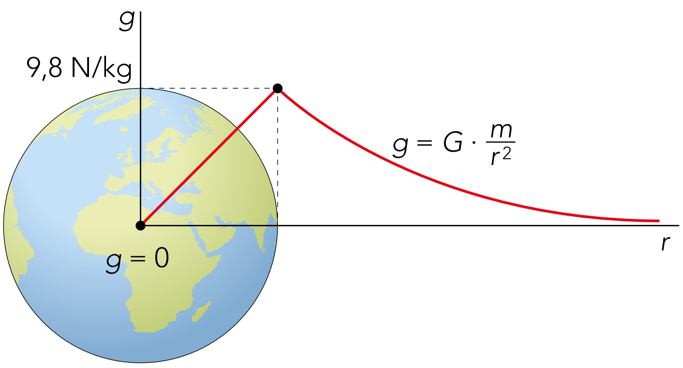
17 **Explica cómo varía la aceleración de la gravedad de un astro en función de la distancia a su centro. ¿Y cómo varía en función de su latitud?**

La aceleración de la gravedad varía según la distancia al centro del astro. Podemos diferenciar dos zonas en las que la aceleración varía de diferente forma:

i) En el interior del astro, la aceleración de la gravedad varía linealmente con la distancia a su centro, de forma que, cuando nos vamos acercando a su centro, $r = 0$, la gravedad disminuye hasta hacerse cero en el centro, $g = 0$.

ii) En el exterior del astro, desde su superficie, donde la gravedad toma su valor máximo, y conforme nos alejamos de él, la gravedad va disminuyendo hasta anularse en el infinito.

Esta variación queda representada gráficamente así para el caso de la Tierra:



La gravedad también varía en función de la latitud. Para el caso de la Tierra, que es el planeta que mejor conocemos, ocurre que:

La Tierra no es totalmente esférica ni homogénea, y esto hace que la gravedad varíe localmente de unos puntos a otros.

El valor de la aceleración de la gravedad varía con la latitud, siendo mayor en los polos que en el ecuador:

Localización	Ecuador 0°	Latitud 45°	Polos 90°	Media
g/(m/s²)	9,78	9,807	9,83	9,81

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de información acerca de las características de los textos expositivos.

18 **Calcula la relación que existe entre la gravedad en la superficie de Mercurio g_0 y la gravedad g a una altura de un diámetro sobre su superficie.**

Utilizaremos la expresión de la gravedad sobre la superficie de Mercurio, g_0, y la gravedad, g_h, a una altura $h = D = 2\,R$. Llamaremos M a la masa de Mercurio y R al radio del planeta.

Una vez desarrolladas ambas expresiones las dividiremos para encontrar una relación:

$$g_h = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2} = G \cdot \frac{M}{(R+2R)^2} = G \cdot \frac{M}{9\,R^2}$$

$$g_0 = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{G \cdot \frac{M}{9\,R^2}}{G \cdot \frac{M}{R^2}} = \frac{1}{9}$$

Por tanto, $\frac{g_h}{g_0} = \frac{1}{9}$.

19 **Utilizando los datos de la tabla superior, encuentra la gravedad en la superficie del planeta Urano.**

Dato: g = 9,8 m/s².

Para calcular la gravedad en la superficie de Urano a partir de la gravedad sobre la superficie de la Tierra, g_T, utilizaremos como datos las relaciones entre radio y masa que aparecen en la tabla: $R_U = 4{,}01\ R_T$ y $M_U = 14{,}5\ M_T$.

Aplicando la LGU para las gravedades en la superficie de Urano y de la Tierra y dividiendo las expresiones resultantes:

$$g_U = G \cdot \frac{M_U}{R_U^2} = G \cdot \frac{14{,}5 \cdot M_T}{(4{,}01 \cdot R_T)^2}$$

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

$$\frac{g_U}{g_T} = \frac{G \cdot \frac{14{,}5 \cdot M_T}{(4{,}01 \cdot R_T)^2}}{G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{14{,}5}{4{,}01^2} \quad \rightarrow \quad g_U = \frac{14{,}5}{4{,}01^2}\, g_T$$

Sustituyendo $g_T = 9{,}8$ m/s² en la expresión obtenemos: $g_U = 8{,}837$ m/s² ≈ 9 m/s².

20 **¿A qué altura sobre la superficie de un planeta de radio R debes situarte para que tu peso se reduzca a la mitad?**

Aplicando la LGU, calculamos el peso de un cuerpo de masa m sobre la superficie del planeta de radio R, y calcularemos, además, el peso del mismo cuerpo a una altura h sobre el planeta. Esto se cumple para cualquier cuerpo, también el tuyo:

$$P_0 = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

$$P_h = 0{,}5 \cdot P_0 = G \cdot \frac{M \cdot m}{(R+h)^2}$$

Sustituyendo la relación entre pesos y dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{0{,}5 \cdot P_0}{P_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

De donde: $h = (\sqrt{2} - 1) \cdot R = 0{,}41\ R$

5 MOVIMIENTOS ORBITALES

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.7.7. (EA.7.7.2.) CE.7.8. (EA.7.8.2.)

Página 318

21 Representa, en las siguientes situaciones, la fuerza centrípeta que mantiene a estos cuerpos en movimiento circular:

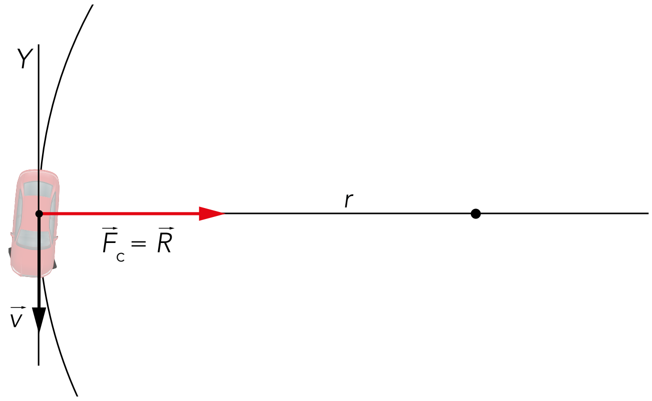
a) Un coche toma una curva plana.

b) Un coche toma una curva peraltada.

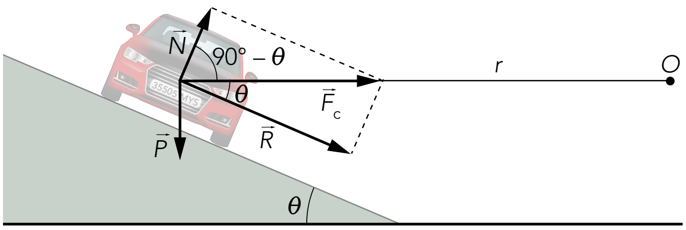
c) Un péndulo cónico.

d) Un martillo gira en la prueba de lanzamiento de martillo.

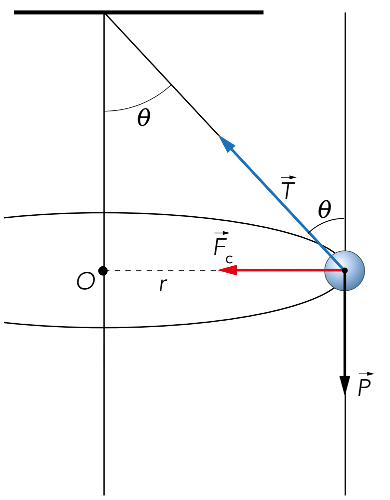
a) En la siguiente imagen, podemos ver que, al tomar una curva plana de radio r, la fuerza centrípeta es la fuerza de rozamiento que lo mantiene dentro de la curva: $F_c = R$



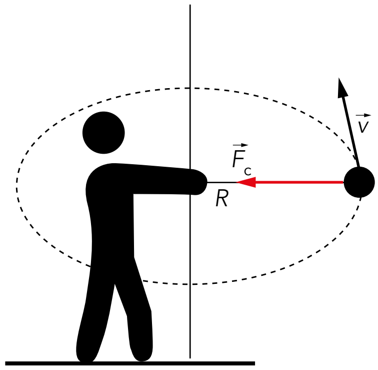
b) En el caso de que la curva esté peraltada un ángulo θ, la fuerza centrípeta es creada por la contribución de la fuerza de rozamiento y de la fuerza normal que realiza el plano para aguantar el vehículo. En la siguiente imagen puede verse que: $F_c = N \cdot \cos(90 - \theta) + R \cdot \cos\theta$



c) En un péndulo cónico que abre un ángulo θ respecto de la vertical, ocurre que una componente de la tensión de la cuerda que sujeta la masa que gira compensa el peso de la masa, y la otra componente actúa de fuerza centrípeta que hace girar la masa en torno a un centro. En la imagen puede observarse que: $F_c = T \cdot \operatorname{sen}\theta$



d) En un martillo que gira, la tensión de la cuerda actúa de fuerza centrípeta:



22 **Elabora y escribe un argumento científico que dé explicación al hecho de que la Luna no caiga sobre la superficie terrestre.**

La fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre la Luna se comporta como una fuerza centrípeta que genera un movimiento aproximadamente circular y uniforme que la mantiene en órbita. Podemos decir que la Luna cae constantemente, pues siempre que la Luna quiere escapar de la órbita, la Tierra no le deja y la atrapa haciéndola caer permanentemente sobre su órbita lunar.

23 **Responde a las siguientes preguntas:**

a) ¿Cuál es la aceleración a la que se ve sometido el planeta Tierra en su traslación alrededor del Sol?

b) ¿Qué fuerza hace que la Tierra se mantenga en órbita?

Dato: R_T = 6 371 km.

En primer lugar, transformamos los datos que aporta el enunciado del ejercicio en unidades SI:

$d_{T\text{-}S} = 1{,}5 \cdot 10^8$ km $= 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m

T = 1 año = 365 días = 31 536 000 s

a) Si suponemos que la Tierra realiza un MCU en torno al Sol, su aceleración centrípeta vendrá dada por la expresión:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

siendo v la velocidad orbital constante y r la distancia media de la Tierra al Sol, $d_{T\text{-}S}$.

Al ser un MCU, se cumple que:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

$$a_c = \frac{\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}}{\left(3{,}154 \cdot 10^7\right)^2}$$

Por tanto, la aceleración centrípeta vale: $a_c \approx 5{,}95 \cdot 10^{-3}$ m/s^2.

b) Para calcular la fuerza de atracción gravitatoria, podemos utilizar la segunda ley de Newton: $F = m \cdot a \rightarrow F_g = M_T \cdot a_c$. Sustituyendo datos:

$$F_g = 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 5{,}95 \cdot 10^{-3} = 3{,}55 \cdot 10^{22} \text{ N}$$

24 **Calcula el período de traslación de un satélite artificial que orbita en torno a la Tierra a una altura de 15 000 km y con una velocidad lineal de 7 500 km/h.**

Dato: R_T = 6 371 km.

Primero, pasamos los datos que aporta el enunciado del ejercicio a unidades SI:

$h = 15\ 000 \text{km} = 1{,}5 \cdot 10^7$ m

$R_T = 6\ 371$ km $= 6{,}371 \cdot 10^6$ m

$v = 7\ 500$ km/h $= 2\ 083{,}3$ m/s

Si suponemos que el movimiento que sigue el satélite es un MCU, se cumple que:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_T + h)}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (6{,}37 \cdot 10^6 + 1{,}5 \cdot 10^7)}{2\ 083{,}3} = 64\ 454{,}45 \text{ s}$$

Si transformamos los segundos a horas, obtenemos: $T \approx 17{,}9$ h

25 **¿Cuál es la velocidad de desplazamiento de la Luna alrededor de la Tierra, sabiendo que su período es de 27,3 días?**

Dato: $d_{T\text{-}L}$ = 384 400 km.

Si consideramos el movimiento orbital de la Luna como un MCU, podemos utilizar esta relación:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

Pasando los datos al SI y sustituyendo, obtenemos: $v \approx 1\,024$ m/s.

Página 320

26 **Un satélite artificial orbita en torno a la Tierra con una velocidad orbital de 6 554 m/s. Considerando que la órbita que describe el satélite es circular, calcula la distancia de la superficie terrestre a la que este se encuentra.**

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; R_T = 6 371 km.

Sabemos que la fuerza gravitatoria se comporta como una fuerza centrípeta:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot M_{\text{satélite}}}{r^2} = M_{\text{satélite}} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} \rightarrow r = \frac{G \cdot M_T}{v^2}$$

Sustituyendo los datos:

$$r = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{6\ 554^2} = 9{,}27 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Para calcular la altura:

$$r = R_T + h \rightarrow h = r - R_T = 9{,}27 \cdot 10^6 - 6{,}371 \cdot 10^6 = 2{,}899 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La solución es: $h \approx 2{,}9 \cdot 10^6$ m.

27 **Calcula la masa de la Tierra sabiendo que los satélites geoestacionarios orbitan a una altura sobre la superficie terrestre de 35 800 km, aproximadamente. ¿Cuál es la velocidad lineal de estos satélites? ¿Y su velocidad angular?**

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; R_T = 6 371 km.

a) Supuesto que el satélite realiza un MCU, se cumple que: $T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$; entonces, se tiene que: $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$

donde $r = R_T + h = 6{,}371 \cdot 10^6 + 3{,}58 \cdot 10^7 = 4{,}2171 \cdot 10^7$ m.

Y, como la fuerza gravitatoria actúa como una fuerza centrípeta sobre el satélite, se tiene:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot M_{satélite}}{r^2} = M_{satélite} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Igualando ambas expresiones de la velocidad orbital: $\dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_T}{r}}$

Y despejando la masa de la tierra:

$$M_T = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (4{,}2171 \cdot 10^7)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 86\,400^2} = 5{,}9 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Ya podemos calcular la velocidad del satélite usando la expresión que obtuvimos anteriormente:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}9 \cdot 10^{24}}{4{,}2171 \cdot 10^7}} = 3\,080{,}57 \text{ m/s}$$

b) Para el cálculo de la velocidad angular, utilizamos la relación entre la velocidad lineal y la angular:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{3\,080{,}57}{4{,}2171 \cdot 10^7} = 7{,}305 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

6 FUERZAS CENTRALES Y MOMENTO ANGULAR

CE.1.1. **(EA.1.1.1.-1.1.2.)** **CE.7.7.** **(EA.7.7.1.-7.7.2.)**

Página 321

28 Demuestra que las fuerzas centrales tienen un momento de la fuerza nulo.

Las fuerzas centrales cumplen que:

- Siempre apuntan hacia un mismo punto, denominado centro de fuerzas.
- Dependen exclusivamente de la distancia, *r*, que las separa del punto al que se dirigen.

El momento de estas fuerzas siempre es nulo, por la propia definición del momento de una fuerza. El vector *r* tiene la misma dirección que la fuerza *F*.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow \text{su módulo: } M = r \cdot F \cdot \text{sen}\,180° = 0$$

29 Una partícula de masa 100 g con un vector de posición: $\vec{r} = 3 \cdot t \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 5 \cdot t \cdot \vec{k}$ m, respecto al origen de coordenadas, se ve impulsada por una fuerza $F = -500 \cdot \vec{i}$ N. Calcula el momento de la fuerza en el instante $t = 2$ s.

Si la fuerza se mantiene aplicada en el tiempo, el momento de la fuerza podría calcularse mediante la siguiente expresión:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Calculamos las componentes de $\vec{r}$ y $\vec{F}$ para $t = 2$ s

$$\vec{r} = 6 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 10 \cdot \vec{k}$$

$$\vec{F} = -500 \cdot \vec{i}$$

Sustituimos en el determinante y lo resolvemos, obteniendo:

$$\vec{M} = 5000 \cdot \vec{j} + 1000 \cdot \vec{k} \text{ m} \cdot \text{N}$$

Página 322

30 **En torno a la Tierra gira un satélite artificial en una órbita circular de radio orbital 2 · R_T. Demuestra que la trayectoria del satélite se encuentra siempre en un mismo plano.**

Las fuerzas gravitatorias son fuerzas centrales por lo que no originan momento, $\vec{M}$, ya que el radio vector del planeta, $\vec{r}$, y la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre el satélite, $\vec{F}_g$, son paralelos.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow \text{su módulo: } M = r \cdot F \cdot \text{sen}\,180° = 0$$

Por tanto, si no existe momento externo actuando sobre el satélite, su momento angular, $\vec{L}$, permanece constante, en módulo, dirección y sentido a lo largo de toda la órbita, ya que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \text{ si } \vec{M} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{cte}$$

Si $\vec{L}$ es constante en dirección, $\vec{r}$ y $\vec{v}$ deben estar contenidos siempre en un mismo plano, ya que:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\,\vec{v} = \text{cte}$$

Por tanto, la trayectoria del satélite se encuentra siempre en un mismo plano, independientemente del radio de su órbita.

31 **Calcula el momento angular L de un satélite artificial de masa 1 100 kg, que se encuentra orbitando la Tierra en una órbita circular geoestacionaria del plano ecuatorial.**

Datos: $M_{Tierra} = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

El momento angular viene dado por la expresión:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\,\vec{v}$$

Por ser la órbita circular, los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares entre sí.

El módulo del momento angular es: $L = m \cdot r \cdot v \cdot \text{sen}\,90°$

Para obtener v y r, trabajaremos con las siguientes expresiones:

– Un satélite geoestacionario realiza un MCU, de período 24 h = 86 400 s, cumpliéndose que:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}, \text{ entonces se tiene que: } v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \qquad (1)$$

– La fuerza gravitatoria actúa como una fuerza centrípeta sobre el satélite, cumpliéndose que:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot M_{satélite}}{r^2} = M_{satélite} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} \qquad (2)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones (1) y (2), y obtenemos que:

$r = 4{,}22 \cdot 10^7$ m

$v = 3{,}07 \cdot 10^3$ m/s

Por tanto, $L = 1{,}43 \cdot 10^{14}$ kg m² s⁻¹

32 **Busca información y explica, basándote en el principio de conservación del momento angular, por qué la Luna se aleja inexorablemente de la Tierra.**

Lo primero que debemos saber es que el sistema aislado Tierra-Luna debe mantener constante su momento angular. Sin embargo, debemos tener en cuenta que la Tierra gira sobre sí misma y, por tanto, que el momento angular total del sistema aislado es el de traslación de la Luna en torno al Sol y el de rotación de la Tierra (se desprecia el movimiento de rotación lunar). La suma de ambos debe mantenerse constante.

La explicación del alejamiento de la Luna respecto de la Tierra se encuentra en las fuerzas de las mareas causadas por la Luna. Este movimiento es de sentido contrario al de rotación de la Tierra, por lo que, mientras se produce la rotación terrestre aparece una fuerza de fricción de las aguas sobre los fondos marinos que disipan energía y frenan esta rotación, provocando la disminución del momento angular de rotación de la Tierra. Para compensar esta disminución del L terrestre y que permanezca constante el momento angular total del sistema, el momento angular de traslación de la Luna debe aumentar y para ello debe alejarse de la Tierra. El resultado es que la Luna se aleja de la Tierra una distancia de aproximadamente 3,8 cm cada año.

33 **Una masa puntual de 50 g pasa por el punto (1,1,0) en el instante t = 1 s con una velocidad que viene dada por la expresión: $\vec{v} = -5 \cdot t \cdot \vec{i} + (2 \cdot t^2 - 2) \cdot \vec{j}$ m/s. Determina el momento angular de la partícula en el instante t = 1 s, medido respecto del centro del sistema de referencia (0,0,0).**

El momento angular puede calcularse mediante la siguiente expresión:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

Primero, calculamos las componentes de r y p para t = 1 s

$$\vec{r} = \vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = 0{,}05 \cdot (-5 \cdot \vec{i})$$

Y, a continuación, sustituimos en el determinante y resolvemos, obteniendo:

$$\vec{L} = 0{,}25 \cdot \vec{k} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

TIC: ESTUDIO DE LOS SISTEMAS KEPLERIANOS CON EXCEL

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.1.2. (EA.1.2.1.) CE.7.6. (EA.7.6.1.-7.6.2.) CE.7.7. (EA.7.7.2.) CE.7.8. (EA.7.8.1.)

1 Representa gráficamente *T*/días frente a *r*/km y obtén conclusiones.

El primer paso es filtrar en la tabla de datos de nuestro Excel, los astros que nos interesen. Para ello, nos vamos a la base de datos creada en la HOJA1 y, situados sobre la celda E1, filtramos el sistema kepleriano de Júpiter.

De forma que esta es la base de datos general:

ASTROS	Masa (kg)	Radio (km)	Radio orbital medio (km)	SATÉLITE DE…
SOL	1,99E+30	6,95E+05	CENTRO	SOL
MERCURIO	3,30E+23	2,44E+03	5,79E+07	SOL MERCURIO
VENUS	4,87E+24	6,05E+03	1,08E+08	SOL VENUS
TIERRA	5,97E+24	6,37E+03	1,50E+08	SOL TIERRA
MARTE	6,42E+23	3,40E+03	2,28E+08	SOL MARTE
CERES	9,43E+20	4,73E+02	4,14E+08	SOL ENANO
JÚPITER	1,90E+27	7,15E+04	7,78E+08	SOL JÚPITER
SATURNO	5,69E+26	6,03E+04	1,43E+09	SOL SATURNO
URANO	8,69E+25	2,56E+04	2,87E+09	SOL URANO
NEPTUNO	1,02E+26	2,48E+04	4,50E+09	SOL NEPTUNO
PLUTÓN	1,25E+22	1,19E+03	5,90E+09	SOL ENANO
HAUMEA	4,20E+21	8,00E+02	6,50E+09	SOL ENANO
ERIS	1,67E+22	1,16E+02	9,87E+09	SOL ENANO
MAKEMAKE	4,00E+21	7,10E+02	6,85E+11	SOL ENANO
LUNA	7,35E+22	1,74E+03	3,84E+05	TIERRA
FOBOS	1,07E+16	1,10E+01	9,38E+03	MARTE
DEIMOS	1,48E+15	6,20E+00	2,35E+04	MARTE
METIS	3,60E+16	2,00E+01	1,28E+05	JÚPITER
ÍO	8,94E+22	1,82E+03	4,22E+05	JÚPITER
EUROPA	4,80E+22	1,57E+03	6,71E+05	JÚPITER
GANÍMEDES	1,48E+23	2,63E+03	1,07E+06	JÚPITER
CALISTO	1,08E+23	2,40E+03	1,88E+06	JÚPITER
MIMAS	3,75E+19	1,96E+02	1,86E+05	SATURNO
ENCÉLADO	1,08E+20	2,50E+02	2,38E+05	SATURNO
TETIS	6,18E+20	5,30E+02	2,95E+05	SATURNO
DIONE	1,10E+21	5,60E+02	3,77E+05	SATURNO
REA	2,32E+21	7,65E+02	5,27E+05	SATURNO
TITÁN	1,35E+23	2,58E+03	1,22E+06	SATURNO

Al situarnos sobre la última columna y filtrar, nos quedaremos con aquellas celdas que contengan la palabra Júpiter. Esto nos proporcionará los datos del sistema kepleriano generado por Júpiter. Tal y como se muestra a continuación:

ASTROS	Masa (kg)	Radio (km)	Radio orbital medio (km)	SATÉLITE DE…
JÚPITER	1,90E+27	7,15E+04	7,78E+08	SOL JÚPITER
METIS	3,60E+16	2,00E+01	1,28E+05	JÚPITER
ÍO	8,94E+22	1,82E+03	4,22E+05	JÚPITER
EUROPA	4,80E+22	1,57E+03	6,71E+05	JÚPITER
GANÍMEDES	1,48E+23	2,63E+03	1,07E+06	JÚPITER
CALISTO	1,08E+23	2,40E+03	1,88E+06	JÚPITER

Seleccionamos la tabla filtrada y la copiamos en la celda A1 de la HOJA2. Una vez copiada, insertaremos una nueva columna tras la columna C que llamaremos Radio (m) y otra, tras la nueva E, que llamaremos Radio orbital medio (m). En ellas, pasaremos a metros los datos de la columna anterior, mediante los siguientes pasos:

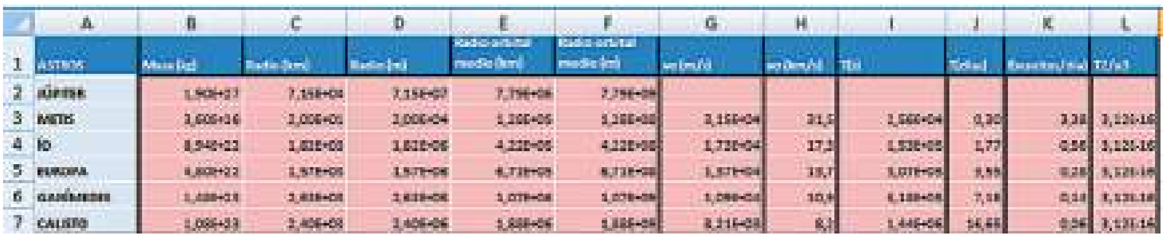
En la nueva celda D3 escribimos "=C3*1000" y en la nueva F3 "=E3*1000". En ambos casos, arrastramos hacia abajo para copiar la fórmula al resto de filas.

Decidimos las magnitudes orbitales que calcularemos para los 5 satélites de Júpiter de nuestra base de datos. Estas serán la velocidad orbital en m/s y en km/s, el período orbital en s y en días y la frecuencia del movimiento en vueltas por día.

Para ello nos posicionamos en la celda G1 y creamos el campo v_o (m/s), correspondiente a la velocidad orbital. En G3 escribimos la fórmula para su cálculo. Luego en H1 creamos el campo v_o (km/s) y en H3 pasamos a km/s la velocidad obtenida. Para el cálculo del período nos situamos en I1 y creamos el campo T (s) y en I3 escribimos la fórmula para su cálculo. En J1 creamos el campo T (días) y en J3 pasamos el período a días. Para la frecuencia usaremos la columna K. Todas las fórmulas a las que hemos hecho referencia aparecen resumidas en la siguiente tabla:

Magnitud orbital	Expresión matemática	Fórmula Excel
Velocidad orbital v_o	$v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_J}{r}}$	G3"=RAIZ(6.67E-11*1,9E+27/F3)" H3"=G3/1000"
Período orbital T	$T = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot R}{v}$	I3"=2*PI()*F3/G3" J3"=I3/86400"
Frecuencia f	$f = \dfrac{1}{T}$	K3"=1/J3"

El resultado puede verse en la imagen que se adjunta:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	ASTROS	Masa (kg)	Radio (km)	Radio (m)	Radio orbital medio (km)	Radio orbital medio (m)	vo (m/s)	vo (km/s)	T (s)	T (días)	f (vueltas/día)	T2/a3
2	JÚPITER	1,90E+27	7,15E+04	7,15E+07	7,78E+08	7,78E+11						
3	METIS	3,60E+16	2,00E+01	2,00E+04	1,28E+05	1,28E+08	3,15E+04	31,5	2,56E+04	0,30	3,38	3,12E-16
4	ÍO	8,94E+22	1,82E+03	1,82E+06	4,22E+05	4,22E+08	1,73E+04	17,3	1,53E+05	1,77	0,56	3,12E-16
5	EUROPA	4,80E+22	1,57E+03	1,57E+06	6,71E+05	6,71E+08	1,37E+04	13,7	3,07E+05	3,55	0,28	[illegible]
6	GANÍMEDES	1,48E+23	2,63E+03	2,63E+06	1,07E+06	1,07E+09	1,09E+04	10,9	6,18E+05	7,16	0,14	[illegible]
7	CALISTO	1,08E+23	2,40E+03	2,40E+06	1,88E+06	1,88E+09	8,21E+03	8,2	1,44E+06	16,66	0,06	[illegible]

Por último, comprobamos que el sistema estudiado es kepleriano, demostrando que se rige por la tercera ley de Kepler. El cociente T^2/r^3 debe ser el mismo para todos los satélites de Júpiter. Para ello, en L1, escribiremos T^2/r^3 como enunciado de campo y en L3"=I3^2/F3^3".

Finalmente, arrastramos hacia abajo el rango G3:L3 y copiamos al resto de filas.

A continuación, marcamos las celdas correspondientes a T y r e insertamos un gráfico de puntos. Quedará así:

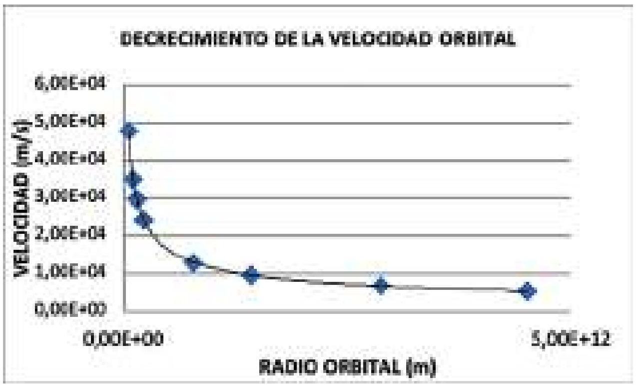
2 **Realiza esta misma hoja de cálculo para cada uno de los sistemas keplerianos que puedas formar con la hoja de datos que hemos elaborado.**

El procedimiento es idéntico al realizado en la actividad 1, la diferencia estriba en el filtrado que hagamos. Por ejemplo, si decidimos estudiar el sistema solar con sus planetas naturales, en la HOJA1, al situarnos sobre la celda E1, filtraremos seleccionando las celdas que contengan la palabra Sol, excepto Sol Enano, por razones obvias. Obtendríamos esta tabla reducida:

ASTROS	Masa (kg)	Radio (km)	Radio orbital medio (km)	SATÉLITE DE...
SOL	1,99E+30	6,95E+05	CENTRO	SOL
MERCURIO	3,30E+23	2,44E+03	5,79E+07	SOL MERCURIO
VENUS	4,87E+24	6,05E+03	1,08E+08	SOL VENUS
TIERRA	5,97E+24	6,37E+03	1,50E+08	SOL TIERRA
MARTE	6,42E+23	3,40E+03	2,28E+08	SOL MARTE
JÚPITER	1,90E+27	7,15E+04	7,78E+08	SOL JÚPITER
SATURNO	5,69E+26	6,03E+04	1,43E+09	SOL SATURNO
URANO	8,69E+25	2,56E+04	2,87E+09	SOL URANO
NEPTUNO	1,02E+26	2,48E+04	4,50E+09	SOL NEPTUNO

A continuación, procederemos como en la actividad 1. Obteniendo la hoja de cálculo que habremos construido en la HOJA2:

La gráfica que representa el decrecimiento orbital será como la que sigue:



TRABAJA CON LO APRENDIDO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.1.2. (EA.1.2.1.-1.2.2.) CE.7.6. (EA.7.6.1.-7.6.2.) CE.7.7. (EA.7.7.1.-7.7.2.) CE.7.8. (EA.7.8.1.-7.8.2.)

Página 330

El camino hacia la LGU

1 **Elabora un mapa conceptual en el que relaciones las fases del método científico con los pasos seguidos a lo largo de la historia de la astronomía para desarrollar la teoría de la gravitación de Newton.**

- el método científico
  - observación
    - observación en la Edad Antigua: modelo geocéntrico de Ptolomeo
  - formulación de hipótesis
    - formulación de la hipótesis heliocéntrica de Copérnico
  - experimentación
    - recogida de datos por Brahe y análisis de los mismos por Kepler
  - enunciado de leyes y desarrollo de teorías
    - enunciado de la LGU y desarrollo de la teoría de la gravitación de Newton

Este mapa conceptual es de tipo jerárquico. En **anayaeducacion.es** dispone de más información sobre las características de los distintos tipos de mapas conceptuales.

2 **Realiza una tabla en la que resumas las diferencias y las semejanzas entre los modelos del universo desarrollados por Ptolomeo, Copérnico, Brahe y Kepler.**

AUTORES	Ptolomeo	Copérnico	Brahe	Kepler
Modelo	Geocéntrico	Heliocéntrico	Mixto Geo-Helio	Heliocéntrico
Órbitas	Circulares: epiciclos y deferentes	Circulares	Circulares	Elípticas
Centro	Tierra	Sol	Tierra; el Sol y la Luna giran en torno a la Tierra, pero los planetas giran en torno al Sol	Sol
Siglo	S. II a.C.	S. XVI	S. XVI	S. XVII

3 **Busca información en Internet y explica qué significado tiene y a quién se le atribuye la frase: «E pur si muove...».**

Esta frase se le atribuye a Galileo Galilei y significa «Y, sin embargo, se mueve...».

Galileo Galilei es, sin duda, el mayor responsable del nacimiento de la ciencia moderna. Galileo siempre apoyó las ideas copernicanas, encontrando evidencias empíricas que sostenían el heliocentrismo. Los fieles seguidores de Aristóteles se aliaron con la Iglesia para impedir que el modelo de Copérnico cobrase seguidores. La iglesia católica, temerosa de que el protestantismo ganara la batalla religiosa que traían entre sí, hizo que Galileo adjurara de sus teorías, llevándolo a un juicio ante la Inquisición que lo condenaría a un arresto domiciliario de por vida.

Se dice que, tras el juicio, Galileo murmuró: «Y, sin embargo, se mueve…» refiriéndose a la Tierra, a una Tierra que se mueve en torno al Sol, por mucho que la Iglesia quisiera negarlo.

4 **A pesar de que Tycho Brahe no consiguió elaborar un modelo matemático sobre los movimientos planetarios, sus aportaciones fueron imprescindibles para el desarrollo de la LGU. Argumenta este hecho.**

La experimentación es la base del método científico, método de trabajo capaz de dar explicación a los fenómenos naturales. Para ello, se necesitan hacer medidas y recoger datos que puedan posteriormente ser analizados. Ninguna ley puede elaborarse sin unos datos que la avalen. Es por ello por lo que la multitud de datos recogidos por Brahe a lo largo de su vida fueron imprescindibles para que, más tarde, llegara Kepler y, haciendo uso de las mediciones de Brahe, fuera capaz de construir sus leyes empíricas del movimiento planetario.

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de información sobre las características de los textos argumentativos, lo que le será de utilidad para elaborar la respuesta a esta pregunta.

Leyes de Kepler

5 **Enuncia la segunda ley de Kepler y explica cómo varía la velocidad de un planeta a lo largo de su trayectoria alrededor del Sol.**

Para que la velocidad areolar permanezca constante es necesario que el radio vector del planeta cubra áreas iguales en tiempo iguales a lo largo del barrido que hace sobre la elipse que dibuja. Como consecuencia, cuando el planeta está más alejado del Sol debe ir más rápido y cuando está más cerca del Sol debe ir más lento, de esta forma, el área barrida por unidad de tiempo en ambos casos debe ser la misma, tal y como enuncia la segunda ley de Kepler.

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de información sobre las características de los textos expositivos.

6 **Los valores aproximados de la distancia media de Urano al Sol y del período de revolución de Venus alrededor del Sol son 2,9 · 10⁹ km y 225 días, respectivamente. Asimismo, la distancia entre la Tierra y el Sol es de 1 ua y el período de revolución de la Tierra en torno al Sol es de 365,25 días. Calcula:**

a) La distancia entre Venus y el Sol en ua.

b) La duración, en días, de una vuelta completa de Urano en torno al Sol.

a) Aplicando la tercera ley de Kepler para Venus y la Tierra:

$$\frac{T_V^2}{r_V^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \rightarrow \frac{225^2}{r_V^3} = \frac{365{,}25^2}{1^3}$$

$$r_V \approx 0{,}72 \text{ ua}$$

b) Nuevamente, aplicamos la tercera ley de Kepler para Urano y la Tierra:

$$\frac{T_U^2}{r_U^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \rightarrow \frac{T_U^2}{\left(2{,}9 \cdot 10^{12}\right)^3} = \frac{365{,}25^2}{\left(1{,}5 \cdot 10^{11}\right)^3}$$

$$T_U = 31\,049{,}19 \text{ días} \approx 31\,000 \text{ días}$$

7 **Los dos únicos planetas que carecen de satélites naturales en el sistema solar son Mercurio y Venus. Por el contrario, Júpiter tiene hasta 69 satélites naturales. Los más importantes, por ser los de mayor masa, son cuatro: Ío, Europa, Ganímedes y Calisto. Fueron descubiertos en 1610 por Galileo, por lo que también se les denomina lunas galileanas. Sabiendo que Ío tarda 1,7 días terrestres en completar una vuelta en torno a Júpiter, calcula el período de revolución de los principales satélites de Júpiter.**

Utiliza los datos que aparecen en la siguiente tabla:

Satélites	Ío	Europa	Ganímedes	Calisto
Radio orbital (km)	421 600	671 100	1 070 400	1 882 700

Aplicamos la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T_{\text{IO}}^2}{r_{\text{IO}}^3} = \frac{T_{\text{EUROPA}}^2}{r_{\text{EUROPA}}^3} = \frac{T_{\text{GANÍMEDES}}^2}{r_{\text{GANÍMEDES}}^3} = \frac{T_{\text{CALISTO}}^2}{r_{\text{CALISTO}}^3}$$

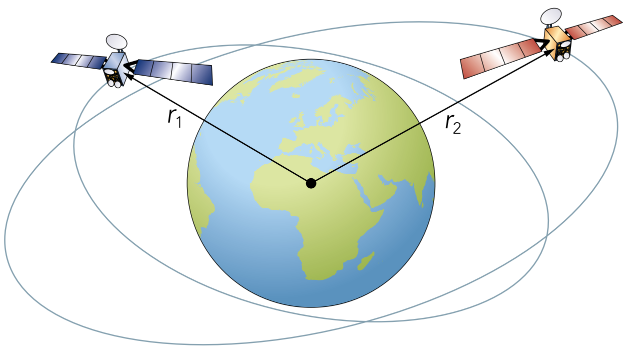
$$\frac{T_{\text{IO}}^2}{r_{\text{IO}}^3} = \frac{T_{\text{EUROPA}}^2}{r_{\text{EUROPA}}^3} \rightarrow T_{\text{EUROPA}} = \sqrt{\frac{1{,}7^2 \cdot 671\,100^3}{421\,600^3}} = 3{,}414 \text{ días}$$

$$\frac{T_{\text{IO}}^2}{r_{\text{IO}}^3} = \frac{T_{\text{GANÍMEDES}}^2}{r_{\text{GANÍMEDES}}^3} \rightarrow T_{\text{GANÍMEDES}} = \sqrt{\frac{1{,}7^2 \cdot 1\,070\,400^3}{421\,600^3}} = 6{,}877 \text{ días}$$

$$\frac{T_{\text{IO}}^2}{r_{\text{IO}}^3} = \frac{T_{\text{CALISTO}}^2}{r_{\text{CALISTO}}^3} = \rightarrow T_{\text{CALISTO}} = \sqrt{\frac{1{,}7^2 \cdot 1\,882\,700^3}{421\,600^3}} = 16{,}042 \text{ días}$$

$T_{\text{EUR}} \approx 3{,}4$ días; $T_{\text{GAN}} \approx 7$ días; $T_{\text{CAL}} \approx 16$ días

8 **Dos satélites artificiales orbitan la Tierra en órbitas circulares de radios r_1 = 7 500 km y r_2 = 9 500 km. Calcula la relación que existe entre sus períodos de revolución alrededor de la Tierra.**



Aplicando la tercera ley de Kepler para ambos satélites:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{7\,500^3}{9\,500^3}} = 0{,}70$$

$$\frac{T_1}{T_2} = 0{,}7$$

9 **El período de revolución del planeta Marte alrededor del Sol es de 1,88 años terrestres y el de Mercurio de 0,24 años terrestres. Mercurio es el planeta más cercano al Sol, siendo su órbita la más excéntrica de todos los planetas del sistema solar, con un valor de 0,2056. Además, la distancia máxima de Mercurio al Sol es 0,47 ua y la mínima 0,31 ua. Calcula:**

a) **La relación que existe entre las velocidades de Mercurio en su perihelio y su afelio.**

b) **El semieje mayor, a, de la trayectoria elíptica que recorre Mercurio en torno al Sol.**

c) **La distancia media de Marte al Sol.**

a) La segunda ley de Kepler enuncia que el radio vector de un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales; esto supone que, en las zonas en las que planeta se acerca al Sol, debe aumentar su celeridad y, en las zonas en las que se aleja, se reduzca dicha celeridad, cumpliéndose para el afelio y para el perihelio que:

$$r_a \cdot v_a = r_p \cdot v_p$$

Si aplicamos esta relación al planeta Mercurio:

$$0{,}47 \cdot v_a = 0{,}31 \cdot v_p \quad \rightarrow \quad \frac{v_p}{v_a} = \frac{0{,}47}{0{,}31} = 1{,}516$$

$$\frac{v_p}{v_a} \approx 1{,}52$$

b) Aplicando la primera ley de Kepler, las órbitas de los planetas son elípticas y cumplen que:

$$2 \cdot a = r_a + r_p \rightarrow$$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{0{,}47 + 0{,}31}{2} = 0{,}39 \text{ ua}$$

c) Aplicando la tercera ley de Kepler a Marte y Mercurio:

$$\frac{T^2_{MARTE}}{a^3_{MARTE}} = \frac{T^2_{MERCURIO}}{a^3_{MERCURIO}}$$

Conocido el semieje mayor de la elipse de Mercurio podemos calcular el semieje mayor de Marte:

$$a_{MARTE} = \sqrt[3]{\frac{T^2_{MARTE}}{T^2_{MERCURIO}}} \cdot a_{MERCURIO} = 1{,}538 \text{ ua}$$

$$a_{MARTE} \approx 1{,}5 \text{ ua}$$

Si suponemos que el planeta Marte realiza un movimiento aproximadamente circular y uniforme alrededor del Sol podemos decir que:

$$r_{MARTE} \sim 1{,}5 \text{ ua}$$

Ley de gravitación universal

10 Describe las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. ¿En qué circunstancias se puede utilizar la LGU para cuerpos extensos?

La fuerza gravitatoria con la que se atraen dos cuerpos cualesquiera del universo es **directamente proporcional al producto de sus masas** e **inversamente proporcional al cuadrado de la distancia** que separa sus centros. Su expresión matemática es:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En esta expresión:

- F es la fuerza con la que los cuerpos se atraen, medida en N.
- M y m son las masas de ambos cuerpos, medidas en kg.
- G es la constante de proporcionalidad y su valor es: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻².

Esta ley no solo demostraría la caída de los cuerpos hacia el centro de la Tierra, sino todos los movimientos orbitales que a lo largo de la historia habían intentado explicarse.

La LGU está diseñada para masas puntuales, pero la utilizamos para cuerpos extensos siempre que tengamos en cuenta la siguiente hipótesis:

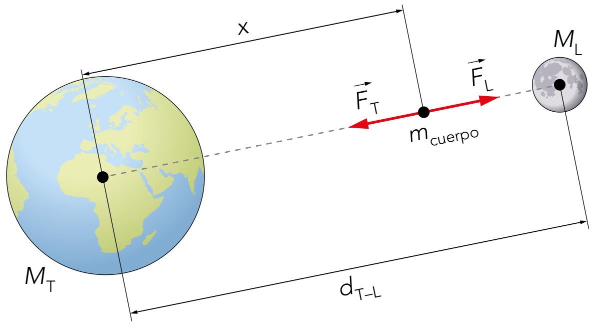
«La fuerza gravitatoria que ejerce una esfera homogénea de radio R y masa M es la misma que ejercería una partícula puntual de la misma masa situada en su centro de gravedad».

El centro de gravedad, CG, de un cuerpo es el punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas de gravedad que actúan sobre sus partículas. En el caso de cuerpos con alta simetría y densidad uniforme, el CG se sitúa sobre su centro de simetría o centro geométrico.

11 **Una sonda de 2 000 kg de masa es lanzada al espacio en dirección a la Luna. Cuando la sonda se localiza a 2 · 10⁸ m de la superficie terrestre se encuentra totalmente alineada con la Tierra y la Luna. ¿Qué fuerza gravitatoria neta se ejerce sobre la sonda en ese momento? Extrae conclusiones sobre el resultado obtenido.**

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ **N · m²/kg²;** $R_T = 6\,371$ **km;** $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ **kg;**
$M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ **kg;** $d_{T-L} = 3{,}84 \cdot 10^8$ **m.**

Realizamos un diagrama de fuerzas para una mejor comprensión del problema:



La fuerza que ejerce la Tierra a esa distancia es:

$$F_T = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{x^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 2\,000}{\left(2{,}06 \cdot 10^8\right)^2}$$

$$F_T = 18{,}70 \text{ N}$$

La fuerza que ejerce la Luna a esa distancia es:

$$F_L = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{\left(d_{T-L} - x\right)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22} \cdot 2\,000}{\left(1{,}78 \cdot 10^8\right)^2}$$

$$F_L = 0{,}31 \text{ N}$$

Si aplicamos el principio de superposición, la resultante de fuerzas sobre el cuerpo es:

$$F_R = 18{,}70 - 0{,}31 = 18{,}39 \text{ N} \sim 18{,}4 \text{ N}$$

A la distancia que propone el enunciado del ejercicio, la fuerza que ejerce la Tierra sobre el satélite ha disminuido enormemente con respecto a la superficie, cuyo valor sería:

$$P = m \cdot g = 2\,000 \cdot 9{,}8 = 19\,600 \text{ N}$$

12 **Supuesta la Luna como una esfera homogénea de radio** $R_L = 0{,}27 \cdot R_T$ **y masa** $M_L = 0{,}012 \cdot M_T$**, calcula la densidad del satélite terrestre.**

Datos: g_0 **(Tierra) = 9,8 m/s²;** $R_T = 6\,371$ **km;** $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ **N · m²/kg².**

Los datos que aporta el problema permiten calcular la masa de la Tierra:

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow M_T = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{G}$$

Que necesitaremos para el cálculo de la densidad de la Luna, como vemos:

$$\rho_L = \frac{M_L}{V_L} = \frac{0{,}012 \cdot M_T}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_L^3} = \frac{0{,}012 \cdot M_T}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}27^3 \cdot R_T^3} = \frac{0{,}012 \cdot \frac{g_0 \cdot R_T^2}{G}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}27^3 \cdot R_T^3}$$

Sustituyendo datos:

$$\rho_L = \frac{0{,}012 \cdot \dfrac{g_0 \cdot R_T^2}{G}}{\dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}27^3 \cdot R_T^3} = 3\,356{,}56 \text{ kg/m}^3$$

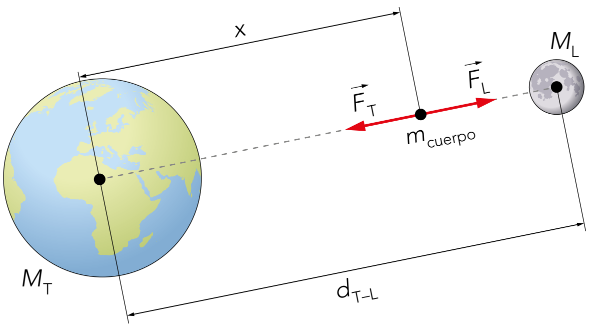
$$\rho_{Luna} \sim 3\,360 \text{ kg/m}^3$$

Página 331

13 **Calcula la fuerza neta a la que se vería sometido un cuerpo de masa 500 kg, situado sobre la recta que une los centros de la Tierra y la Luna, a una distancia de la Tierra de $0{,}9 \cdot d_{T\text{-}L}$. Dibuja un diagrama de fuerzas.**

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg;
$M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg; $d_{T\text{-}L} = 3{,}84 \cdot 10^8$ m.

Realizaremos un diagrama de fuerzas para una mejor comprensión del problema, suponiendo que el cuerpo se encuentra totalmente alineado con la Tierra y la Luna y las únicas fuerzas que aparecen sobre él son las producidas por estos dos astros.



Aplicando la LGU:

$$F_T = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(0{,}9\, d_{T-L})^2}$$

$$F_L = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{(0{,}1\, d_{T-L})^2}$$

Dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{F_T}{F_L} = \frac{0{,}1^2}{0{,}9^2} \cdot \frac{M_T}{M_L} = 1{,}002\,8 \approx 1 \;\rightarrow\; F_T \approx F_L$$

Aplicando el principio de superposición, se obtiene la fuerza resultante:

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_T + \vec{F}_L = 0$$

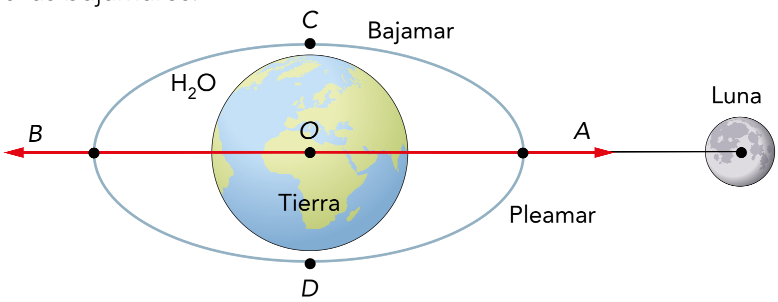
Por tanto, $F_R \sim 0$ N.

14 **Busca información en Internet y, utilizando la LGU, escribe un informe en el que expongas cómo se produce el fenómeno de las mareas.**

Las mareas se producen de manera cíclica, y consisten en los movimientos de subida y bajada del nivel del mar que se repiten dos veces al día. La subida del nivel del mar se denomina marea alta (pleamar) y, transcurridas 6 horas y 13 minutos de media, comienza la bajada del nivel del mar o marea baja (bajamar). En un día, ocurren dos mareas altas y dos mareas bajas.

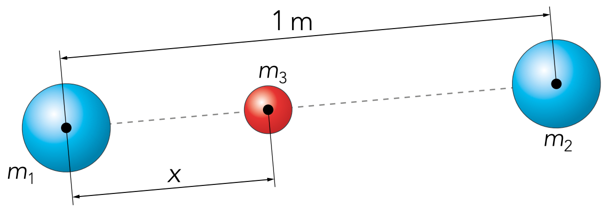
Newton estudió estos fenómenos y fue capaz de explicarlos mediante su ley de gravitación: la atracción que sufren los mares y los océanos debida a las fuerzas gravitatorias que ejercen la Luna y el Sol sobre ellos produce las mareas.

Explicar la ***fuerza de marea*** requiere entender dos cosas. La primera de ellas consiste en comprender que la Tierra está formada por una capa de agua que se encuentra en su superficie, y que ese fluido superficial puede modificar su forma dependiendo de las fuerzas que se apliquen. La segunda es que la Luna ejerce una fuerza sobre los mares y los océanos, de manera que las aguas que están más cerca de la Luna (A) se ven atraídas con mayor fuerza que las que se encuentran en sus antípodas (B), sufriendo estas menor atracción. El resultado es una deformación elipsoidal de las aguas cuyos vértices, A y B, se encuentran en la dirección de la Luna. En estos vértices se produce la pleamar, mientras que en las posiciones C y D encontraremos las bajamares.

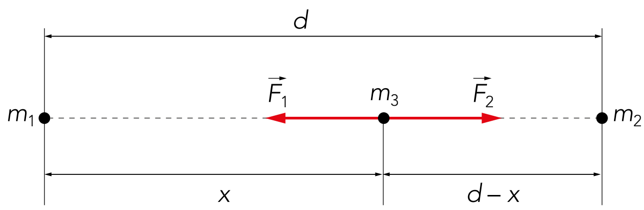


Le sugerimos que recomiende a su alumnado la consulta de los apartados Plan Lingüístico y TIC, que encontrará en los recursos relacionados con las claves del proyecto, en **anayaeducacion.es**.

15 **Dos partículas m_1 y m_2, una con el doble de masa que la otra (m_1 = 2 · m_2), se encuentran separadas una distancia d = 1 m. Calcula en qué punto del segmento que las une, medido desde la masa m_1, se anula la fuerza gravitatoria resultante sobre una tercera masa puntual m_3 = 0,5 · m_2 colocada en dicho punto.**



La situación que nos expone el problema puede representarse mediante el siguiente diagrama:



Representaremos por x la distancia entre la masa m_3 y la m_1. Como la distancia entre las dos masas m_1 y m_2 es d, nos queda que la distancia entre m_2 y m_3 es $d - x$. A esa distancia, las fuerzas que ejercen las masas m_1 y m_2 sobre la m_3 deben anularse.

Aplicando el principio de superposición:

$$\Sigma \vec{F}_i = 0 \rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Esto implica que los módulos de dichas fuerzas tengan que ser iguales, para poder anularse sus vectores:

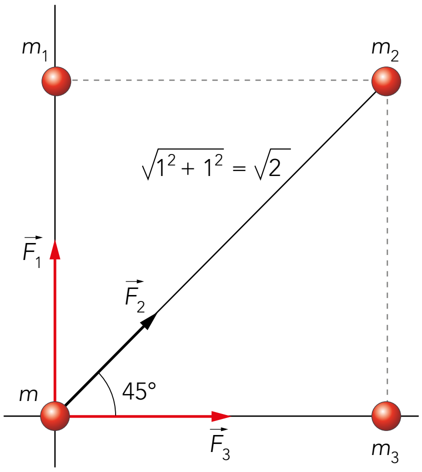
$$F_1 = F_2 \rightarrow G \cdot \frac{m_1 \cdot m_3}{x^2} = G \cdot \frac{m_2 \cdot m_3}{(d - x)^2}$$

$$\cancel{G} \cdot \frac{2\, \cancel{m_2} \cdot \cancel{m_3}}{x^2} = \cancel{G} \cdot \frac{\cancel{m_2} \cdot \cancel{m_3}}{(d - x)^2} \rightarrow \frac{2}{x^2} = \frac{1}{(d - x)^2}$$

$$x \approx 0{,}6 \text{ m}$$

16 **Calcula la fuerza gravitatoria resultante sobre una masa m = 1 kg, situada en el punto (0,0) de un sistema de referencia cartesiano, debida al sistema de partículas formado por tres masas puntuales iguales de 1 kg, m_1, m_2 y m_3, distribuidas en los puntos (0,1), (1,1), (1,0), respectivamente, medidos en metros.**

Realizamos un diagrama de fuerzas para una mejor comprensión del problema:



$$\vec{F}_1 = G \cdot \frac{1 \cdot 1}{1^2} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = G \cdot \frac{1 \cdot 1}{1^2} \cdot \vec{i}$$

$$\vec{F}_2 = G \cdot \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{2}^2} \cdot \cos 45 \cdot \vec{i} + G \cdot \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{2}^2} \cdot \text{sen}\, 45 \cdot \vec{j}$$

Aplicando el principio de superposición, hacemos la suma vectorial de las tres fuerzas y obtenemos la fuerza resultante sobre la masa m.

$$\vec{F} = 9{,}03 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{i} + 9{,}03 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{j} \text{ N}$$

La gravedad y el peso de los cuerpos

17 **Si dejamos caer dos cuerpos de diferente masa sobre la superficie de la Tierra, razona si lo harán con la misma aceleración.**

Cualquier cuerpo que caiga sobre la Tierra desde una misma altura se verá sometido a la misma aceleración de la gravedad y llegará al suelo con la misma velocidad. Hay que hacer notar que esto ocurrirá si está sometido únicamente a la fuerza de la gravedad; es decir, en ausencia de fuerzas exteriores como los rozamientos.

La aceleración de la gravedad no depende de la masa del cuerpo, depende de la masa del planeta que crea la gravedad y de la distancia a la que se encuentra el cuerpo.

$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

Por tanto, todos los cuerpos se ven igualmente acelerados en sus caídas, independientemente de la masa que tengan.

18 **Calcula el valor de la gravedad en una órbita situada a 5 000 km de altura sobre la superficie de la Tierra. Si a esa altura hacemos orbitar un satélite artificial de 1 200 kg, ¿cuál será su peso?**

Datos: g_0(Tierra) = 9,8 m/s²; R_T = 6 371 km.

La aceleración de la gravedad queda definida a través de la siguiente expresión:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{r^2}$$

Donde $r = R_T + h = 6{,}371 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^6 = 1{,}1371 \cdot 10^7$ m

Como los datos que nos aporta el enunciado del ejercicio son g_0 y R_T, no podemos utilizar G y M_T en la expresión, así que, relacionaremos estas magnitudes mediante la definición de gravedad en la superficie terrestre de la siguiente forma:

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow g_0 \cdot R_T^2 = G \cdot M_T$$

Y, sustituyendo en la definición de la aceleración de la gravedad:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{r^2} = \frac{9{,}8 \cdot (6{,}371 \cdot 10^6)^2}{(1{,}1371 \cdot 10^7)^2} = 3{,}076 \text{ m/s}^2$$

$$g \approx 3{,}08 \text{ m/s}^2$$

Para el cálculo del peso del cuerpo aplicamos: $P = m \cdot g$

$$P = 1\,200 \cdot 3{,}08 = 3\,696 \text{ N}$$

19 Si dejamos caer un cuerpo sobre la superficie lunar desde una altura *h* igual al radio del satélite lunar, R_L; ¿en qué proporción habrá aumentado su peso al llegar a la superficie respecto del que tenía momentos antes de la caída?

La falta de datos en el enunciado del ejercicio nos hace suponer que podremos calcular la proporción en la que habrá aumentado el peso del cuerpo al llegar a la superficie respecto del que tenía momentos antes de la caída mediante relaciones. Por tanto, expresaremos el peso sobre la superficie terrestre y el peso a cierta altura $h = R_L$, y dividiremos ambas expresiones:

$$P_0 = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{R_L{}^2}$$

$$P_h = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{(R_L + R_L)^2}$$

El resultado de dividir las dos expresiones es:

$$P_0 = 4\, P_h$$

20 Calcula qué relación existe entre la aceleración de la gravedad en la superficie de cualquiera de los planetas del sistema solar y la gravedad a una altura $h = 2 \cdot R$. Siendo *R* el radio del planeta.

La falta de datos en el enunciado del ejercicio nos hace suponer que podremos calcular la relación existente entre la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta de radio R y la gravedad a una altura $h = 2 \cdot R$ mediante relaciones. Por tanto, expresaremos la gravedad a cierta altura h y la gravedad sobre la superficie del planeta y dividiremos ambas expresiones:

$$g_h = G \cdot \frac{M}{(R + 2\,R)^2}$$

$$g_0 = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

El resultado de dividir las dos expresiones es: $g_h = \dfrac{1}{9}\, g_0$

21 ¿A qué altura tiene que orbitar un satélite de 590 kg sobre la superficie de Marte para que su peso se reduzca a la mitad respecto del que tendría en la superficie marciana?

Dato: $R_{Marte} = 3\,397$ km.

Utilizamos la LGU aplicada sobre la superficie del planeta y a cierta altura del planeta:

$$P_0 = G \cdot \frac{M_M \cdot m}{{R_M}^2}$$

$$P_h = \frac{P_0}{2} = G \cdot \frac{M_M \cdot m}{\left(R_M + h\right)^2}$$

Al dividir las dos expresiones se obtiene que:

$$2 = \frac{\left(R_M + h\right)^2}{R_M^2}$$

Despejando h se obtiene:

$$h = (\sqrt{2} - 1) \cdot R_M = (\sqrt{2} - 1) \cdot 3{,}397 \cdot 10^6 = 1\,407\,083{,}5 \text{ m}$$

$$h \approx 1\,400 \text{ km}$$

22 Puesto que la gravedad en la superficie lunar es una sexta parte de la gravedad terrestre, si midiéramos el valor de la constante de la gravedad *G* utilizando la balanza de Cavendish en la Luna, ¿cuál sería el valor encontrado para *G* en la superficie lunar?

El experimento de la balanza de torsión de Cavendish arrojaría el mismo valor para la constante G independientemente del astro en el que se realizara el experimento, ya que se trata de una constante universal, lo que indica que las fuerzas gravitatorias aparecen entre cuerpos materiales en cualquier lugar del universo, cumpliéndose la misma ley: la LGU.

23 Si el planeta Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su misma masa, ¿en qué proporción se vería afectada la gravedad sobre la superficie de la nueva Tierra?

Para calcular la relación entre gravedades en diferentes situaciones, expresaremos la gravedad en la superficie de la Tierra de radio R_T y la gravedad en la superficie de una hipotética Tierra de radio $R_T/2$:

$$g'_0 = G \cdot \frac{M_T}{\left(\frac{R_T}{2}\right)^2}$$

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{{R_T}^2}$$

Si dividimos ambas expresiones obtenemos:

$$g_0' = 4\, g_0$$

24 Si la Luna duplicase su volumen y modificase su masa de tal forma que la gravedad en su superficie siguiera siendo la misma, ¿en qué factor variaría la densidad del satélite?

Para contestar a esta pregunta, representaremos el volumen de la hipotética Luna con relación a la Luna original como:

$$V' = 2 \cdot V$$

Si consideramos la Luna como un astro de forma esférica podemos sustituir el volumen de la esfera en la relación anterior:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R'^3 = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

Obteniéndose así la relación entre el radio de la hipotética Luna y la Luna original: $R' = \sqrt[3]{2} \cdot R$

La relación entre la masa de la nueva Luna M' y la original M no es conocida. A partir de la relación entre gravedades de ambos astros, obtendremos la relación entre M' y M:

$$g' = G \cdot \frac{M'}{R'^2} = G \cdot \frac{M'}{\left(\sqrt[3]{2} \cdot R\right)^2}$$

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

Dividiendo las dos expresiones obtenemos:

$$M' = 1{,}587\,40\ M$$

Una vez que conocemos la relación entre masas y también la relación entre volúmenes, calcularemos la densidad de la hipotética Luna y la original y volveremos a dividir las dos expresiones:

$$\rho' = \frac{M'}{V'} = \frac{1{,}587\,4\ M}{2 \cdot V}$$

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Al dividir las dos expresiones, se obtiene que: $\rho' = 0{,}79\ \rho$.

25 Si la gravedad en la superficie de la Tierra es 2,6 veces mayor que la gravedad en la superficie de Marte, ¿cuánto pesaría un cuerpo de 200 kg sobre la superficie marciana?

Datos: g_0(Tierra) = 9,8 m/s².

Para calcular el peso en la superficie marciana, utilizaremos la expresión reducida de la LGU:

$$P_M = m \cdot g_M$$

Puesto que: $g_T = 2{,}6\ g_M \rightarrow g_M = \dfrac{9{,}8}{2{,}6} = 3{,}769\ \text{m/s}^2$

Sustituyendo en el peso:

$$P_M = m \cdot g_M = 200 \cdot 3{,}769 = 753{,}85\ \text{N}$$

26 Se deja caer un cuerpo desde una altura de 300 m sobre la superficie de la Luna. Calcula la velocidad con la que impactaría al llegar al suelo lunar, sabiendo que la Luna tiene una masa 0,012 veces la de la Tierra y su radio es 0,27 veces el terrestre.

Dato: g_0(Tierra) = 9,8 m/s².

Si despreciamos los 300 m de altura frente al radio lunar, podríamos calcular la velocidad con la que se deja caer un cuerpo sobre la superficie de un astro desde una altura h, aplicando las ecuaciones cinemáticas del movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado, siendo esta aceleración la de la gravedad en el astro, g:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Conocida la altura desde la que cae el cuerpo, nos interesa encontrar la gravedad en la Luna, g_L:

$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{R_L^2} = G \cdot \frac{0{,}012 \cdot M_T}{(0{,}27 \cdot R_T)^2}$$

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

Dividiendo ambas expresiones:

$$g_L = \frac{0{,}012}{0{,}27^2} \cdot g_T = 1{,}613\,17\ \text{m/s}^2$$

Encontrada la gravedad en la Luna, obtenemos la velocidad de caída:

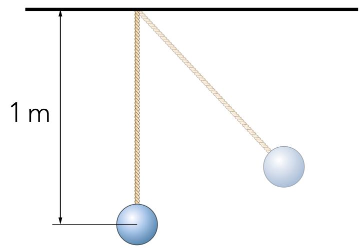
$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 1{,}613\,17 \cdot 300} = 30{,}98\ \text{m/s}$$

Puesto que la velocidad es de caída, la componente Y del vector que la representa sería negativa:

$$v \approx -31\ \text{m/s}$$

27 **Calcula el período de oscilación de un péndulo de 1 m de longitud situado en la superficie de Marte.**

Datos: $M_{Marte} = 0{,}107 \cdot M_T$; $R_{Marte} = 0{,}53 \cdot R_T$; g_0**(Tierra) = 9,8 m/s²**.



El período de oscilación de un péndulo puede calcularse mediante la expresión:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Siendo l = 1 m, la longitud del péndulo, y g, la aceleración de la gravedad en la superficie de Marte.

Necesitamos, por tanto, calcular la gravedad marciana. Y lo haremos a partir de la gravedad terrestre:

$$g_M = G \cdot \frac{M_M}{{R_M}^2} = G \cdot \frac{0{,}107\ M_T}{(0{,}53\ R_T)^2}$$

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{{R_T}^2}$$

Dividiendo ambas expresiones, obtenemos:

$$g_M = 3{,}733 \text{ m/s}^2$$

Y, con ello, podemos calcular el período de oscilación:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1}{3{,}733}} = 3{,}25 \text{ s}$$

$$T \approx 3{,}3 \text{ s}$$

28 **Explica qué es la velocidad de escape. ¿Qué ocurriría si lanzáramos un cuerpo desde la superficie de la Tierra hacia el espacio con una velocidad mayor a la velocidad de escape? ¿Y si lo lanzáramos con una velocidad menor que la de escape?**

Las fuerzas gravitatorias que ejercen los astros sobre los cuerpos impiden que estos escapen del campo gravitatorio que generan.

Este campo es más intenso en las proximidades del astro y se va debilitando conforme nos alejamos de él, terminando por anularse.

Se llama **velocidad de escape** a la velocidad mínima que habría que imprimir a un cuerpo para que escapase del campo gravitatorio del astro.

Esta velocidad es mayor cuanto mayor es la masa del astro; sin embargo, disminuye cuando aumenta el radio, no dependiendo de la masa del cuerpo que pretende escapar.

Si la velocidad de lanzamiento es mayor que la velocidad de escape, el cuerpo se perderá en el universo rumbo al infinito y no volverá jamás, siempre que no sea interceptado por ningún otro astro que lo desvíe y lo capture en su campo gravitatorio.

Si la velocidad de lanzamiento es menor que la de escape, el cuerpo acabará parándose a cierta altura y volverá a ser atrapado por el planeta cayendo sobre aquel.

Página 332

Movimientos orbitales

29 **La masa del Sol es $2 \cdot 10^{30}$ kg, y la de la Tierra, $6 \cdot 10^{24}$ kg, aproximadamente. Si la aceleración centrípeta con la que se desplaza la Tierra en torno al Sol tiene un valor de 0,0059 m/s², y suponiendo el movimiento orbital circular y uniforme, calcula la distancia que separa ambos astros, medida de centro a centro.**

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

La aceleración centrípeta se define como:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

En nuestro problema, *v* es la velocidad orbital de la Tierra y *r* es la distancia que separa el Sol de la Tierra y que despejaremos de la expresión anterior para proceder a su cálculo:

$$r = \frac{v_o^2}{a_c}$$

Necesitamos calcular la velocidad orbital de la Tierra, para lo que recurriremos al concepto de fuerza centrípeta:

$$F_g = F_c$$

$$G \cdot \frac{M_S \cdot M_T}{r^2} = M_T \cdot \frac{v_o^2}{r}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r}}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior, obtendremos la expresión para la distancia pedida:

$$r = \frac{v_o^2}{a_c} = \frac{\frac{G \cdot M_S}{r}}{a_c} = \frac{G \cdot M_S}{r \cdot a_c} \rightarrow r^2 = \frac{G \cdot M_S}{a_c}$$

$$r = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{a_c}}$$

Sustituyendo los datos, se tiene que: $r \approx 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.

30 **Deduce la expresión de la velocidad orbital de un satélite artificial que describe una órbita circular alrededor de la Tierra y explica qué significado tiene.**

Los satélites naturales giran en torno a sus planetas en órbitas estables, a la velocidad necesaria para que no se salgan de la órbita ni precipiten sobre el planeta. Esta velocidad se denomina velocidad orbital, y puede calcularse combinando la segunda ley de la dinámica de Newton y la ley de la gravitación universal.

La segunda ley dice que la resultante de las fuerzas aplicadas sobre un sistema es igual al producto de su masa por la aceleración que experimenta: $F_R = m \cdot a$

En este caso, el movimiento es circular y uniforme, por lo que la aceleración experimentada es únicamente aceleración normal o centrípeta, ya que es provocada por una fuerza dirigida hacia el centro de la Tierra: la fuerza centrípeta.

Por tanto: $F_c = m \cdot a_c \rightarrow F_c = m \cdot \frac{v^2}{r}$

Esa fuerza centrípeta es una fuerza real, causante del movimiento orbital, es la fuerza de atracción gravitatoria que se define como:

$$F_g = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2}$$

Por tanto, podemos igualar ambas ecuaciones y despejar la velocidad orbital:

$$F_c = F_g \;\rightarrow\; v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

31 **Calcula la velocidad y el período orbital de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra.**

Datos: g_0 = 9,8 m/s²; R_T = 6 371 km; $d_{T\text{-}L}$ = 384 400 km.

Sabemos que la fuerza de atracción gravitatoria sobre la Luna es una fuerza centrípeta, por lo que podemos obtener la velocidad orbital de esta igualdad:

$$F_c = F_g \;\rightarrow\; v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{d_{T-L}}}$$

Como los datos que nos aporta el enunciado del ejercicio son g_0 y R_T, no podemos utilizar ni G ni M_T en la expresión, así que, relacionaremos estas magnitudes mediante la definición de gravedad en la superficie terrestre de la siguiente forma:

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = \;\rightarrow\; g_0 \cdot R_T^2 = G \cdot M_T$$

Sustituyendo en la expresión de la velocidad orbital:

$$\rightarrow\; v_o = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{d_{T-L}}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot (6{,}371 \cdot 10^6)^2}{3{,}844 \cdot 10^8}}$$

$$v_o = 1\,017{,}25 \text{ m/s} \sim 1\,017 \text{ m/s}$$

Para el cálculo del período, supondremos que el movimiento de la Luna es, aproximadamente, circular y uniforme y se cumple:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot d_{T-L}}{v_o} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3{,}844 \cdot 10^8}{1017} = 2\,374\,883{,}414 \text{ s}$$

Expresado en días: $T \approx 27{,}5$ días.

32 **Calcula el período de revolución de un satélite alrededor de la Tierra, si sabemos que orbita a una altura de 1000 km sobre la superficie terrestre.**

Datos: M_T = 5,97 · 10²⁴ kg; R_T = 6 371 km; G = 6,67 · 10⁻¹¹ N · m²/kg².

Supondremos que el movimiento que sigue el satélite es, aproximadamente, circular y uniforme y se cumple:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot \left(R_T + h\right)}{v_o} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \left(6.371 \cdot 10^6 + 10^6\right)}{v_o}$$

Necesitamos la velocidad orbital del satélite, que conseguiremos a partir de:

$$F_c = F_g \;\rightarrow\; v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{6{,}371 \cdot 10^6 + 10^6}}$$

$$v_o = 7\,349{,}99 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en la expresión del período:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot \left(6{,}371 \cdot 10^6 + 10^6\right)}{7\,349{,}99} \approx 6\,301 \text{ s}$$

El período en minutos: $T \approx 105$ min.

33 **Si conocemos las características del movimiento de un satélite artificial que orbita la Tierra, es decir, su velocidad, período y radio orbital, ¿podríamos calcular con estos datos la masa del satélite? ¿Y la masa de la Tierra? Razona tu respuesta.**

Las características del movimiento de un satélite vienen determinadas por la masa de la Tierra y la distancia a la que orbita, siendo independientes de la masa del satélite. Por tanto, conocidas las características del movimiento de un satélite artificial que orbita la Tierra, es decir, su velocidad, periodo y radio orbital, solo podríamos conocer la masa de la Tierra y no la del propio satélite. Puede comprobarse con las siguientes expresiones:

$$v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_o}$$

34 ¿Qué radio orbital medio debe tener la trayectoria de un satélite artificial que gira en torno a la Tierra con una velocidad lineal de 4550 m/s?

Datos: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

La fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre el satélite es la causante de que este realice un movimiento orbital, comportándose la fuerza gravitatoria como una fuerza centrípeta:

$$F_c = F_g \rightarrow v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Sustituyendo datos:

$$4\,550 = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{r}}$$

Despejando el radio orbital: $r \approx 1{,}93 \cdot 10^7$ m.

35 Saturno tiene más de 60 satélites con órbitas estables. El más grande se llama Titán, tan grande como el planeta Mercurio. Titán gira en una órbita de $1{,}22 \cdot 10^6$ km y tarda 15,9 días en dar una vuelta alrededor de Saturno. Calcula la masa de Saturno.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Supuesto que el satélite realiza un MCU, se cumple que:

$T = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$, entonces se tiene que: $v = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$

Donde el radio orbital es $r = 1{,}22 \cdot 10^9$ m y el período es:

$T = 15{,}9$ días · 86 400 s/día = 1 373 760 s.

Y, como la fuerza gravitatoria actúa como una fuerza centrípeta sobre el satélite, se tiene:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_S \cdot M_{satélite}}{r^2} = M_{satélite} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r}}$$

Igualando ambas expresiones de la velocidad orbital: $\dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_S}{r}}$

De donde despejaremos la masa de Saturno:

$$M_S = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} = 5{,}69 \cdot 10^{26} \text{ kg}$$

$$M_S \approx 5{,}7 \cdot 10^{26} \text{ kg}$$

36 Como sabes, la Estación Espacial Internacional, ISS, se encuentra a una altura de unos 415 km sobre la superficie terrestre y posee una masa de unas 400 toneladas. Calcula el período orbital de la ISS y el valor del campo gravitatorio a esa altura. ¿Cuál sería su energía potencial?

Datos: g_0(Tierra) = 9,8 m/s²; R_{Tierra} = 6371 km.

Supuesto que la ISS realiza un MCU, se cumple que:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_o}$$

Siendo $r = 6\,371 + 415$ km $= 6\,786$ km $= 6{,}786 \cdot 10^6$ m.

Su velocidad orbital puede encontrarse mediante la expresión:

$$v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Los datos que aporta el enunciado del problema nos hacen realizar un cambio de variable:

$$G \cdot M_T = g_o \cdot R_T^2$$

$$v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}} = 7\,656{,}2 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en la expresión del período:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_o} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6{,}786 \cdot 10^6}{7\,656{,}2} = 5\,569{,}036 \text{ s}$$

Que en minutos se obtiene: $T \approx 93$ min.

Para calcular el valor del campo gravitatorio en la posición en la que se encuentra la ISS, sustituimos datos en la expresión:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{r^2}$$

$$g = \frac{9{,}8 \cdot \left(6{,}37 \cdot 10^6\right)^2}{\left(6{,}78 \cdot 10^6\right)^2}$$

Obtenemos: $g = 8{,}7$ N/kg.

37 Calcula la altura sobre la superficie de la Tierra a la que tiene que orbitar un satélite para que su velocidad orbital sea 3,5 km/s.

Datos: $g_0 = 9{,}8$ m/s²; $R_T = 6\,371$ km

Sabemos que la fuerza gravitatoria se comporta como una fuerza centrípeta:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot M_{\text{satélite}}}{r^2} = M_{\text{satélite}} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} \rightarrow r = \frac{G \cdot M_T}{v^2}$$

Puesto que solo podemos utilizar los datos que nos ofrecen en el enunciado del ejercicio, vamos a encontrar la relación entre G y M_T con g_0 y R_T.

La gravedad sobre la superficie terrestre se expresa mediante la LGU como:

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow g_0 \cdot R_T^2 = G \cdot M_T$$

Ahora, sí podemos utilizar la expresión obtenida previamente:

$$R_T + h = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{v^2}$$

Sustituyendo los datos y despejando h:

$$h = 2{,}61 \cdot 10^7 \text{ m}$$

38 **¿Cuál será el radio orbital de un satélite que gira en torno a la Tierra con un período orbital de 6 h? Expresa el resultado en función del radio terrestre.**

Dato: g_0 = 9,8 m/s².

Supuesto que el satélite realiza un MCU, se cumple que:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}, \text{ entonces se tiene que: } v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

Y, como la fuerza gravitatoria actúa como una fuerza centrípeta sobre el satélite, se tiene:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot M_{satélite}}{r^2} = M_{satélite} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Igualando ambas expresiones de la velocidad orbital:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} \rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}}$$

Sustituyendo datos y despejando r:

$$r = 487 \cdot \sqrt[3]{R_T^2}$$

39 **El planeta Marte orbita en torno al Sol con un período de 1,88 años terrestres y a una distancia de 1,52 ua. Calcula:**

a) La fuerza centrípeta a la que se ve sometido Marte.

b) La aceleración tangencial y la aceleración centrípeta que le genera dicha fuerza.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_{Marte} = 6{,}4 \cdot 10^{23}$ kg; $M_{Sol} = 2 \cdot 10^{30}$ kg.

a) La fuerza de atracción gravitatoria actúa como fuerza centrípeta, por lo que:

$$F_c = F_g = G \cdot \frac{M_{Sol} \cdot M_{Marte}}{r^2}$$

Pasando los datos al SI y sustituyendo:

$$F_c = 1{,}64 \cdot 10^{21} \text{ N}$$

b) En los MCU como el que nos ocupa, la a_t es nula y la a_n puede calcularse como:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}\right)^2}{r}$$

Pasando los datos al SI y sustituyendo: $a_n = 2{,}56 \cdot 10^{-3}$ m/s².

Fuerzas centrales

40 **Investiga qué planetas no giran sobre sí mismos en sentido directo. ¿A qué se debe esta anomalía?**

El movimiento de rotación de los planetas tiene sentido directo, esto es, observado un planeta desde el polo norte solar, su sentido de giro es antihorario. Sin embargo, los planetas Venus y Urano no rotan en el mismo sentido que el resto de los planetas del sistema solar. Los científicos no saben con seguridad cuál es la explicación de esta anomalía, aunque existen diferentes hipótesis. Una de ellas expone que estos planetas podrían haber sufrido una colisión de otro cuerpo celeste en su fase de formación volcando su eje de inclinación y cambiado así su sentido de rotación.

41 **Calcula la velocidad areolar de la Tierra en torno al Sol, sabiendo que su radio orbital medio es 1,5 · 10¹¹ m, y su período, de 365,25 días.**

Se deduce, de la segunda ley de Kepler, la relación:

$$v_{\text{areolar}} = \frac{L}{2 \cdot m} = \frac{m \cdot v \cdot r}{2 \cdot m} = \frac{\dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \cdot r}{2} = \frac{\pi \cdot r^2}{T}$$

Sustituyendo valores:

$$v_{\text{areolar}} = \frac{\pi \cdot r^2}{T} = \frac{\pi \cdot \left(1{,}5 \cdot 10^{11}\right)^2}{365{,}25 \cdot 86\,400}$$

$$v_{\text{areolar}} = 2{,}24 \cdot 10^{15} \text{ m}^2/\text{s}$$

42 **Utilizando el principio de conservación del momento angular, encuentra la relación entre las velocidades máximas y mínimas de los planetas en su órbita elíptica en torno al Sol.**

Los puntos de máxima y mínima velocidad coinciden con el afelio (mínimo alejamiento del Sol) y el perihelio (máximo alejamiento del Sol), respectivamente.

$$v_{\text{máx}} = v_{\text{afelio}} \text{ y } v_{\text{min}} = v_{\text{perihelio}}$$

En estos puntos se cumple que los vectores *r* y *p* son perpendiculares entre sí, por lo que el módulo del momento angular será:

$$L = r \cdot p \cdot \text{sen}\, 90° = r \cdot p = r \cdot m \cdot v$$

El principio de conservación del momento angular asegura que el momento angular se mantiene constante a lo largo de toda la trayectoria del planeta en su órbita en torno al Sol. Por tanto:

$$L_{\text{afelio}} = L_{\text{perihelio}}$$

$$m \cdot r_{\text{afelio}} \cdot v_{\text{afelio}} = m \cdot r_{\text{perihelio}} \cdot v_{\text{perihelio}}$$

De donde obtenemos la relación:

$$\frac{v_{\text{afelio}}}{v_{\text{perihelio}}} = \frac{r_{\text{perihelio}}}{r_{\text{afelio}}}$$

Así:

$$\frac{v_{\text{máx}}}{v_{\text{min}}} = \frac{r_{\text{máx}}}{r_{\text{min}}}$$

43 **Explica qué son fuerzas centrales y pon varios ejemplos de fuerzas que lo sean, razonando tu decisión.**

Se denominan fuerzas centrales a aquellas que apuntan siempre hacia un mismo lugar, denominado centro de fuerzas. Estas fuerzas dependen exclusivamente de la distancia, *r*, que las separa del punto al que se dirigen, pudiendo expresarse en la forma: $\vec{F} = F(r) \cdot \vec{u}_r$. Las fuerzas centrales se comportan como fuerzas centrípetas produciendo trayectorias cerradas estables, como las circulares o elípticas.

Las fuerzas eléctricas, las elásticas y las gravitatorias son fuerzas centrales. Las fuerzas elásticas y gravitatorias están dirigidas siempre hacia el centro de fuerzas, y llevan igual dirección y sentido contrario al vector de posición del cuerpo sobre el que actúan. En el caso de las fuerzas eléctricas, funcionan igual exceptuando que el sentido de la fuerza no siempre es contrario al vector de posición de la carga sobre la que actúan, sino que dependerá de los signos de las cargas que interactúan.

44 **Explica por qué las fuerzas centrales conservan el momento angular o cinético.**

El momento angular respecto a un punto origen se expresa como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\, \vec{v}$$

Donde $\vec{p}$ es la cantidad de movimiento del cuerpo que gira y $\vec{r}$ su vector de posición respecto al origen elegido.

Para entender la conservación de L, derivaremos dicha magnitud respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\, \vec{v}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\, \vec{v} + \vec{r} \times m\, \frac{d\vec{v}}{dt} =$$

$$= \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times m\, \vec{a} = 0 + \vec{r} \times \vec{F}$$

En el caso de fuerzas centrales, puesto que $\vec{F}$ y $\vec{r}$ son paralelos, el producto vectorial entre sus vectores es nulo, demostrándose que para estas fuerzas se cumple la conservación de L.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \;\rightarrow\; \vec{L} = \text{cte}$$

45 **Infórmate en Internet sobre la inclinación del plano orbital de los planetas del sistema solar respecto de la eclíptica y del sentido de giro de estos en torno al Sol. Elabora una tabla de datos al respecto.**

Se denomina eclíptica a la línea imaginaria que describe la Tierra en torno al Sol. El plano de la eclíptica es el plano que contiene a la órbita terrestre. Los planos en los que orbitan el resto de los planetas están levemente inclinados respecto al plano de la eclíptica. Todos los planetas giran en sentido directo en torno al Sol; se trata de sentido antihorario si observamos el movimiento desde el polo norte solar.

Con respecto al sentido de giro en su rotación sobre sí mismos, todos los planetas, excepto Venus y Urano, giran en sentido directo.

Los datos se recogen en la siguiente tabla:

Objetos	Inclinación del plano orbital	Excentricidad de la órbita	Sentido de giro en torno al Sol
Mercurio	7,004870°	0,205630690	Directo
Venus	3,390000°	0,006800000	Directo
Tierra	0°	0,016710220	Directo
Marte	1,850610°	0,093412330	Directo
Júpiter	1,305300°	0,048392660	Directo
Saturno	2,484460°	0,054150600	Directo
Urano	0,772556°	0,044405586	Directo
Neptuno	1,769170°	0,008585870	Directo

Estos datos se han extraído de la página web:

http://www.astronoo.com/es/articulos/posiciones-de-los-planetas.html

En esta misma página de Internet aparece un simulador en el que puede observarse la revolución de los planetas desde distintos ángulos. Accede a ella y juega con los movimientos planetarios.

46 **Busca información sobre el concepto de fuerzas conservativas y explica por qué las fuerzas centrales son conservativas. Explica qué son fuerzas centrales y pon varios ejemplos de fuerzas que lo sean, razonando tu decisión.**

Se denominan **fuerzas centrales** aquellas que cumplen los siguientes requisitos:

– Las fuerzas centrales siempre se dirigen hacia el centro de fuerzas, independientemente del tipo de órbita.

– Dependen exclusivamente de la distancia, r, que las separa del punto al que se dirigen, pudiendo expresarse en la forma: $\vec{F} = F\left(r\right) \cdot \vec{u}_r$.

Como consecuencia:

Conservan la energía mecánica en un desplazamiento, siendo **fuerzas conservativas.** En el recorrido de los planetas en torno al Sol, y puesto que en el espacio exterior no existen fricciones que produzcan pérdidas de energía, la energía mecánica del planeta se mantiene constante, cumpliéndose el principio de conservación de la energía:

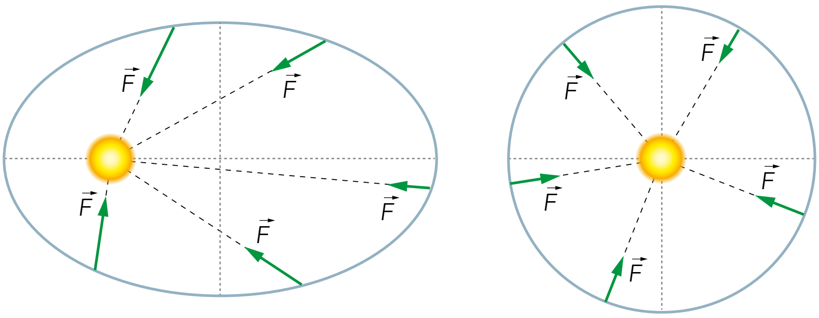
$$\Delta E_M = 0$$

Se puede demostrar que el trabajo, ***W,*** conservativo que realiza la fuerza gravitatoria, ejercida por un astro de masa ***M,*** al desplazar otro cuerpo de masa ***m,*** no depende de la trayectoria seguida, sino de las posiciones inicial y final de su recorrido. Esto significa que la fuerza gravitatoria es conservativa. Para estas fuerzas se cumple el **teorema de la energía potencial:** «El trabajo que realiza una fuerza conservativa es igual a la disminución que experimenta la energía potencial».

$$W_c = -\Delta E_p \qquad \text{siendo} \qquad E_p = -\,G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

¿Qué ocurre en las órbitas circulares? La energía potencial no varía en la órbita, el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria en cualquier desplazamiento orbital es nulo.

¿Qué ocurre en las órbitas elípticas? La energía potencial varía en la órbita, en media vuelta aumenta al alejarse del Sol, en dirección al afelio ($W_c < 0$) y en la otra media vuelta disminuye al acercarse el planeta al perihelio ($W_c > 0$). En una vuelta completa, el trabajo que habrá realizado la fuerza es nula.



47 **Demuestra que los planetas aumentan su momento angular respecto del Sol al alejarse de este. Siendo r_1 y r_2, $r_2 > r_1$, los radios orbitales de dos satélites artificiales de igual masa $m_1 = m_2$ que orbitan la Tierra con MCU, demuestra la siguiente relación entre sus momentos angulares, L_1 y L_2, respecto de la Tierra:**

$$\frac{L_2}{L_1} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$$

El módulo del momento angular se expresa como: $L = m \cdot r \cdot v \cdot \text{sen}\,\theta$

En el caso de órbitas circulares:

$L = m \cdot r \cdot v \cdot \text{sen}\,90° = m \cdot r \cdot v$, siendo m la masa del planeta, r el radio orbital y v la velocidad orbital.

Y, puesto que la velocidad orbital puede calcularse como:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{Sol}}{r}}$$

Sustituyendo en la expresión del momento angular:

$$L = m \cdot r \cdot v = m \cdot \sqrt{G \cdot M_{Sol} \cdot r}$$

De forma que, si el planeta se aleja del Sol, aumentando r, también lo hace el momento angular, L.

A partir de las definiciones de momento angular para cada satélite:

$$\vec{L}_1 = m_1 \cdot \left(\vec{r}_1 \times \vec{v}_1\right)$$

$$L_1 = m_1 \cdot v_1 \cdot r_1 \cdot \text{sen}\,90 = m_1 \cdot v_1 \cdot r_1$$

$$\vec{L}_2 = m_2 \cdot \left(\vec{r}_2 \times \vec{v}_2\right)$$

$$L_2 = m_2 \cdot v_2 \cdot r_2 \cdot \text{sen}\,90 = m_2 \cdot v_2 \cdot r_2$$

Sabemos que la velocidad orbital puede expresarse mediante:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Particularizando para cada satélite:

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_1}}; \quad v_2 = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_2}}$$

Sustituyendo la velocidad orbital en la expresión del momento angular:

$$L_1 = m_1 \cdot v_1 \cdot r_1 = m_1 \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_1}} \cdot r_1 = m_1 \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_T \cdot r_1^{\cancel{2}}}{\cancel{r_1}}}$$

$$L_2 = m_2 \cdot v_2 \cdot r_2 = m_2 \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_2}} \cdot r_2 = m_2 \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_T \cdot r_2^{\cancel{2}}}{\cancel{r_2}}}$$

Dividiendo ambas expresiones, sabiendo que $m_1 = m_2$:

$$\frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$$

Página 333

48 Demuestra que la relación que existe entre el momento angular de la Tierra en el afelio y en el perihelio es $L_{perihelio}/L_{afelio} = 1$.

Si acudimos al principio de conservación del momento angular, el cual asegura que el momento angular permanece constante a lo largo de la trayectoria de la Tierra en torno al Sol, entonces, debe cumplirse que:

$$L_{perihelio} = L_{afelio} \;\rightarrow\; \frac{L_{perihelio}}{L_{afelio}} = 1$$

49 Calcula el momento angular de la Tierra en su movimiento de traslación con respecto al Sol, supuesto este circular y uniforme.

Datos: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $d_{T\text{-}S} = 1$ ua; $T = 1$ año.

Sabiendo que el módulo del momento angular de un cuerpo que rota en torno a un centro con un movimiento circular y uniforme es:

$$L = m \cdot v \cdot r \cdot \text{sen}\,90° = m \cdot v \cdot r$$

Puesto que suponemos movimiento circular y uniforme:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

Sustituyendo datos en la expresión de L:

$$L = m \cdot r \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}}{31\,557\,600} = 2{,}67 \cdot 10^{40}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

$$L \approx 2{,}7 \cdot 10^{40}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

50 La Luna describe una órbita de 384 400 km de radio medio en torno a la Tierra. Calcula el área que barre por segundo el radio vector que posiciona la Luna respecto de la Tierra.

Datos: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Se define la velocidad areolar de un astro que orbita en torno a otro, como el área que barre su radio vector en la unidad de tiempo. Por tanto, vamos a calcular la velocidad areolar y, con ello, tendremos la solución al problema.

Podemos calcular la velocidad areolar mediante la siguiente expresión:

$$v_{areolar} = \frac{L}{2 \cdot m}$$

Y puesto que el momento angular L de la Luna respecto a la Tierra, supuesto un movimiento circular y uniforme de radio 384 400 km = $3{,}844 \cdot 10^8$ m, puede calcularse como:

$$L = m \cdot r \cdot v \cdot \text{sen}\,90° = m \cdot r \cdot v$$

Donde m es la masa de la Luna, r es el radio orbital de la Luna en torno a la Tierra y v es la velocidad orbital de la Luna. Podemos calcular esta velocidad sabiendo que la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre la Luna se comporta como una fuerza centrípeta:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Sustituyendo esta expresión en la de la velocidad areolar:

$$v_{areolar} = \frac{L}{2 \cdot m} = \frac{\cancel{m} \cdot r \cdot v}{2 \cdot \cancel{m}} = \frac{r \cdot v}{2} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Y sustituyendo datos:

$$v_{areolar} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \frac{3{,}844 \cdot 10^8}{2} \cdot \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{3{,}844 \cdot 10^8}}$$

Obtenemos como solución: $v_{areolar} \approx 1{,}96 \cdot 10^{11}$ m²/s.

Modelos del universo

51 Explica, según la teoría de la gravitación de Einstein, cómo la luz puede desviarse al pasar cerca de una estrella masiva.

El fundamento físico de este hecho se basa en la geometría del espacio-tiempo y se encuentra desarrollado en la teoría de la relatividad general de Einstein. Se trata de un universo deformable, como si de una gran sábana tensa se tratara; sobre esta descansan las estrellas curvando dicha sábana en sus proximidades. Si un cuerpo más pequeño como un planeta se lanzara en las cercanías de una estrella acabaría girando en torno a ella describiendo círculos sobre la sábana. En un universo así, la luz se desplazaría sobre la sábana curvándose en las zonas donde la sábana está curvada, justamente en las cercanías de las estrellas, siguiendo la deformación del propio espacio-tiempo.

El astrofísico Eddington observó como la luz procedente de una estrella lejana se curvaba en las proximidades del Sol. Demostrando, así, la teoría de Einstein.

52 Sumamos. **Explica las diferencias entre materia oscura y energía oscura.**

La materia oscura es materia de origen desconocido que no emite luz, la gran cantidad de materia oscura que se encuentra en los cúmulos de galaxias proporciona una gran gravedad que evita la disolución de dichos cúmulos.

La energía oscura, por el contrario, produce otro efecto. Las observaciones realizadas sobre las galaxias también evidenciaron que el universo no solo se expande, sino que lo hace de forma acelerada. Se ideó, entonces, una nueva clase de energía que debía provocar dicha aceleración y se la denominó energía oscura.

En **anayaeducacion.es** explicamos cómo aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo «Sumamos», propuesta para la resolución de esta actividad en grupo.

53 ¿Qué otras alternativas a la muerte térmica han barajado los científicos para explicar el destino del universo?

El futuro del universo depende de dos variables: la expansión acelerada producida por la energía oscura y la atracción gravitatoria que produce la materia oscura. Si la expansión supera a la atracción, tendremos la muerte térmica. Si la atracción supera a la expansión, podría ocurrir un *Big-Crunch* o gran implosión, consistente en la contracción del universo hasta una situación de colapso de alta temperatura y densidad donde todo quedaría reducido en una singularidad o un punto, tal y como el que originó el universo a través del *Big-Bang* o gran explosión.

54 Documéntate y realiza un informe sobre las aportaciones que ha hecho el físico Stephen Hawking al desarrollo de la teoría de los agujeros negros.

Los agujeros negros son el resultado del colapso o muerte de una estrella muy masiva. En un agujero negro, existe una concentración de materia tan elevada que es capaz de generar un campo gravitatorio tan potente que nada puede escapar de él, ni siquiera su propia luz. La teoría de los agujeros negros trata de dar explicación a esa región del espacio-tiempo que, debido a su inmensa gravedad, queda desconectada del resto del universo.

Las aportaciones de Stephen Hawking a esta teoría consisten, básicamente, en:

- El tiempo deja de transcurrir en el interior de los agujeros negros.
- Los agujeros negros poseen una línea a su alrededor de no retorno, denominada horizonte de sucesos, nada que supere esa línea puede salir del agujero.
- Los agujeros negros emiten algo de energía, es la llamada radiación de Hawking, que muy lentamente hará que vayan perdiendo masa.
- La pérdida de masa dará lugar a un universo que, conforme se expanda, irá enfriándose y las estrellas apagándose hasta que finalmente muera térmicamente.