Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Representación de los números irracionales en la recta real (página 8)

En el archivo de GeoGebra puede verse la representación exacta de los primeros números irracionales sobre la recta real aplicando el teorema de Pitágoras. Pulsando sobre los botones del reproductor se muestra la construcción paso a paso. Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento a seguir por los alumnos tanto para realizar la construcción en GeoGebra como para dibujarla con lápiz y papel.

Cálculo de raíces con la calculadora científica (página 19)

En el vídeo se muestra cómo usar la calculadora científica para hallar raíces con cualquier índice.

Notación científica con la calculadora (página 22)

En el vídeo se muestra cómo introducir los números expresados en notación científica en una calculadora científica, así como hacer algunas operaciones con ella.

Logaritmos con calculadora científica (página 24)

En el vídeo se muestra cómo usar la calculadora científica para hallar logaritmos decimales y neperianos. Tanto en este recurso como en los anteriores, aunque se utiliza la calculadora de un ordenador, el procedimiento es similar en muchos modelos ya sean digitales o manuales.

Actividades (páginas 8/24)

1 **¿Por qué $-5{,}02\widehat{27}$ no es un número irracional?**

El número $-5{,}02\widehat{27}$ es racional puesto que se puede escribir en forma fraccionaria. Su fracción generatriz es $\frac{-221}{44}$.

2 **Determina y razona cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles irracionales.**

$\frac{2}{7}$, 0,017, −3,412 323 23…, $\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{1}{81}}$, 4,121 314 151 6…

Los números $\frac{2}{7}$, 0,017, −3,412 323 23… y $\sqrt{\frac{1}{81}}$ son racionales.

Los números $\sqrt{3}$ y 4,121 314 151 6… son irracionales.

3 **Razona cuál de las siguientes frases es cierta.**

a) **Todo número decimal se puede expresar como una fracción.**

b) **Los números reales se pueden expresar como un número decimal exacto o periódico.**

c) **Todo número racional es real.**

d) **Todo número entero es racional.**

e) **Hay números reales que no pueden expresarse como una fracción.**

f) **Entre dos números racionales hay infinitos irracionales.**

g) **Los números irracionales no se pueden expresar en forma decimal.**

Las frases de los apartados *c), d), e)* y *f)* son ciertas.

4 **Determina una sucesión que se aproxime por defecto al número irracional $\sqrt{5}$.**

2; 2,2; 2,23; 2,236; 2,236 0; 2,236 06; 2,236 067; 2,236 067 9; 2,236 067 97; 2,236 067 977; 2,236 067 977 4; …

5 **Escribe una sucesión que se aproxime a $-\frac{4}{7}$ por exceso.**

−0,5; −0,57; −0,571; −0,571 4; −0,571 42; −0,571 428; −0,571 428 5; −0,571 428 57; −0,571 428 571; −0,571 428 571 4; −0,571 428 571 42; …

6 **Aproxima por defecto el número e mediante una expresión con cuatro cifras decimales.**

Una aproximación es: 2,718 2

7 **Escribe dos números, uno racional y otro irracional, comprendidos entre los siguientes pares de números.**

a) **5,1497 y 5,1498**

b) **−0,0091 y −0,009**

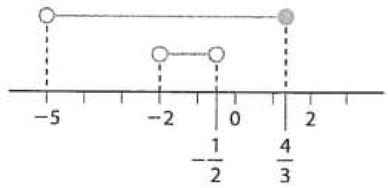
a) 5,149 73 (racional)

$5{,}1497 + \frac{\sqrt{2}}{10^5} = 5{,}149\,714\,142\,135\,623\ldots$ (irracional)

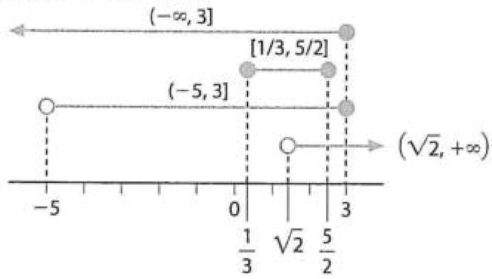
b) −0,009 05 (racional)

$-0{,}009 - \frac{\pi}{10^5} = -0{,}009\,031\,415\,926\,535\ldots$ (irracional)

8 **Representa en la recta real los intervalos $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-5, \frac{4}{3}\right]$.**



9 **Representa gráficamente los números reales que verifican $-5 < x \leq 3$, $x > \sqrt{2}$, $1/3 \leq x \leq 5/2$ y $x \leq 3$. Escribe, en cada caso, de qué intervalo se trata.**



Se trata de los intervalos $(-5, 3]$, $(\sqrt{2}, +\infty)$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right]$ y $(-\infty, 3]$, respectivamente.

10 **Si $a > 0$, $b > 0$ y $a < b$, ¿qué relación de desigualdad existe entre $1/a$ y $1/b$?**

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

11 **Si $a < 0$ y $b > 0$, ¿qué relación de desigualdad existe entre $1/a$ y $1/b$?**

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

12 **Si $2a - 1 > 0$ y $-3a > 4$, determina el intervalo al que pertenece a.**

No hay ningún número real que cumpla al mismo tiempo las dos desigualdades.

13 **Si x, y, z son positivos, y $x \cdot (y + z) > y \cdot (x + z)$, ¿qué relación de orden existe entre x e y?**

$x(y + z) > y(x + z) \Rightarrow xy + xz > yx + yz \Rightarrow xz > yz \Rightarrow x > y$

14 **La diferencia de edad entre una madre y su hija es de 28 años. ¿Cuándo superará la edad de la hija la mitad de la de su madre más 10 años?**

$$m = h + 28$$

$$h > \frac{m}{2} + 10 \Rightarrow 2h > m + 20 \Rightarrow 2h > 48 + h \Rightarrow h > 48$$

La edad de la hija debe ser más de 48 años.

15 **Escribe dos números racionales y dos irracionales que sean, en valor absoluto, menores que 0,1.**

Por ejemplo, 0,01, −0,01, $\frac{\pi}{40}$ y $0{,}1 - \frac{\sqrt{2}}{100}$

16 **Si sabemos que $|x - 1| < 5$, ¿a qué intervalo pertenece x?**

$$|x - 1| < 5 \Rightarrow -5 < x - 1 < 5 \Rightarrow -4 < x < 6$$

Pertenece al intervalo (−4, 6).

17 **Si $|x| \le \sqrt{2}$, determina la amplitud del intervalo en el que está x.**

La amplitud del intervalo es: $2\sqrt{2}$

18 **Determina el conjunto de números reales que cumplen que $|x| > 4$.**

$$|x| > 4 \Rightarrow x < -4 \text{ o } x > 4 \Rightarrow \mathbb{R} - [-4, 4]$$

19 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $\left| |(2/3) - 1| - |(1/2) - (7/6)| \right|$

b) $|2 - \sqrt{5}| - |\sqrt{5} + 1|$

a) $\left| \left|\frac{2}{3} - 1\right| - \left|\frac{1}{2} - \frac{7}{6}\right| \right| = \left| \left|-\frac{1}{3}\right| - \left|-\frac{4}{6}\right| \right| =$

$= \left|\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

b) $|2 - \sqrt{5}| - |\sqrt{5} + 1| = |\sqrt{5} - 2| - |\sqrt{5} + 1| =$

$= \sqrt{5} - 2 - (\sqrt{5} + 1) = -3$

20 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $3^2 + 3^{-2}$ ***d)*** $3 \cdot (6/5)^{-2}$

b) $2^{-3} \cdot 2^5$ ***e)*** $2^{-1} \cdot (2/3)^2 \cdot (1/6)^{-2} - 2^{-3}$

c) $2^3/2^{-6}$ ***f)*** $5^{-2} \cdot (1/5)^{-4}$

a) $3^2 + 3^{-2} = 9 + \frac{1}{9} = \frac{82}{9}$

b) $2^{-3} \cdot 2^5 = 2^2 = 4$

c) $\frac{2^3}{2^{-6}} = 2^9 = 512$

d) $3 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = 3 \cdot \frac{25}{36} = \frac{25}{12}$

e) $2^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} - 2^{-3} = 2^3 - \frac{1}{2^3} = \frac{63}{8}$

f) $5^{-2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = 5^2 = 25$

21 **Expresa los siguientes números como potencias de exponente negativo.**

a) $1/4^7$ ***c)*** $1/125$

b) $(3/5)^6$ ***d)*** $729/64$

a) 2^{-14} ***b)*** $(5/3)^{-6}$ ***c)*** 5^{-3} ***d)*** $(2/3)^{-6}$

22 **Escribe en forma de potencias de base 10 las siguientes expresiones.**

a) 1/10 000 ***c)*** 1/0,001

b) 0,000 001 ***d)*** 10 000 000

a) 10^{-4} ***b)*** 10^{-6} ***c)*** 10^3 ***d)*** 10^7

23 **Simplifica las siguientes expresiones.**

a) $\frac{6^4 \cdot 3^{-2} \cdot 7^{-3}}{14^{-3} \cdot 3^2 \cdot 10^7}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$

c) $\frac{21^5 \cdot 5^{-7} \cdot 15^2 \cdot 3^4}{2^{-8} \cdot 36^2}$

a) $\frac{6^4 \cdot 3^{-2} \cdot 7^{-3}}{14^{-3} \cdot 3^2 \cdot 10^7} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^{-2} \cdot 7^{-3}}{2^{-3} \cdot 7^{-3} \cdot 3^2 \cdot 2^7 \cdot 5^7} = \frac{1}{5^7} = 5^{-7}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = 3^2 \cdot \frac{2^6}{3^3} \cdot \frac{3^5}{2^5} = 2 \cdot 3^4$

c) $\frac{21^5 \cdot 5^{-7} \cdot 15^2 \cdot 3^4}{2^{-8} \cdot 36^2} = \frac{3^5 \cdot 7^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 3^4 \cdot 2^8}{5^7 \cdot 2^4 \cdot 3^4} = \frac{2^4 \cdot 3^7 \cdot 7^5}{5^5}$

24 **Di si son ciertas estas igualdades. Cuando no lo sean, escribe la igualdad correcta.**

a) $\frac{2^{-4}}{3^{-7}} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

b) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-3} = 2^{18}$

c) $\left(\frac{3^{-3} \cdot 3^2}{6^{-1}}\right) = 2$

a) Falsa: $\frac{3^7}{2^4}$ ***b)*** Cierta ***c)*** Cierta

25 **Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado.**

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1$ ***c)*** $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - 1\right]^{-1}$

b) $\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2$ ***d)*** $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} - 1\right]^{-2} \cdot \left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^2$

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{4}{9} - 1 = -\frac{5}{9}$

b) $\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

c) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - 1\right]^{-1} = \left(\frac{9}{4} - 1\right)^{-1} = \frac{4}{5}$

d) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} - 1\right]^{-2} \cdot \left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^2 =$

$= \left(\frac{9}{4} - 1\right)^{-2} \cdot \left(1 - \frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{25} \cdot \frac{25}{81} = \frac{16}{81}$

26 **Escribe tres radicales equivalentes a estos otros:**

$$\sqrt[5]{2^2},\ \sqrt{14},\ \sqrt[3]{(-3)} \text{ y } \sqrt[4]{2^3}$$

$$\sqrt[5]{2^2} = \sqrt[10]{2^4} = \sqrt[15]{2^6} = \sqrt[20]{2^8}; \sqrt{14} = \sqrt[4]{14^2} = \sqrt[6]{14^3} = \sqrt[8]{14^4}$$

$$\sqrt[3]{(-3)} = -\sqrt[6]{3^2} = \sqrt[9]{(-3)^3} = -\sqrt[12]{3^4}; \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[8]{2^6} = \sqrt[12]{2^9} = \sqrt[16]{2^{12}}$$

27 **¿Por qué son falsas las siguientes igualdades?**

a) $\sqrt{-2} = \sqrt[8]{(-2)^4} = \sqrt[8]{16}$

b) $\sqrt[3]{-2} = \sqrt[12]{(-2)^4} = \sqrt[12]{16}$

a) $\sqrt{-2}$ no existe. ***b)*** $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[12]{2^4} = -\sqrt[12]{16}$

28 **Escribe un radical equivalente a cada uno de los siguientes radicales con el índice común.**

$$\sqrt{3},\ \sqrt[3]{3^2},\ \sqrt[4]{3^3}$$

$\sqrt[12]{3^6}, \sqrt[12]{3^8}, \sqrt[12]{3^9}$

29 **Simplifica los radicales $\sqrt[4]{5^2}$, $\sqrt[14]{7^7}$, $\sqrt[8]{3^6}$ y $\sqrt[12]{2^{16}}$.**

$$\sqrt{5},\ \sqrt{7},\ \sqrt[4]{3^3},\ \sqrt[3]{2^4}$$

30 Escribe estas expresiones en forma de potencias de exponente fraccionario.

a) $\sqrt[3]{a^7}$ *d)* $\sqrt[12]{5^9}$ *g)* $\dfrac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[3]{2^{-2}}}$

b) $\sqrt{2^5}$ *e)* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4^2}}$ *h)* $\sqrt{3^{-1}}\cdot\sqrt[3]{3^2}$

c) $\sqrt[4]{3^{-3}}$ *f)* $a^3\cdot\sqrt[3]{a^{-2}}$ *i)* $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}}$

a) $a^{7/3}$ *d)* $5^{3/4}$ *g)* $2^{19/15}$

b) $2^{5/2}$ *e)* $2^{-4/3}$ *h)* $3^{1/6}$

c) $3^{-3/4}$ *f)* $a^{7/3}$ *i)* $5^{15/16}$

31 Realiza las siguientes operaciones, expresando el resultado como un único radical lo más simplificado posible.

a) $\sqrt[3]{125^5}\cdot\sqrt[7]{-\dfrac{1}{5^6}}$ *d)* $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3\cdot b^{-3}}\cdot\sqrt[3]{(-a)}$

b) $3\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}$ *e)* $\dfrac{\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[6]{6}}{\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{40}$ *f)* $\dfrac{\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[12]{a^5}}$

a) $\sqrt[3]{125^5}\cdot\sqrt[7]{-\dfrac{1}{5^6}}=-5^5\cdot 5^{-6/7}=-5^{29/7}=-5^4\cdot\sqrt[7]{5}$

b) $3\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}=3\cdot\sqrt[6]{2^3\cdot 3^2}=3\cdot\sqrt[6]{72}$

c) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{40}=\sqrt{3^3\cdot 3\cdot 5\cdot 2^3\cdot 5}=90\cdot\sqrt{2}$

d) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3\cdot b^{-3}}\cdot\sqrt[3]{(-a)}=-a^{2/3}\cdot a^{3/4}\cdot b^{-3/4}\cdot a^{1/3}=$

$=-a^{7/4}\cdot b^{-3/4}=-\sqrt[4]{\dfrac{a^7}{b^3}}=-a\sqrt[4]{\dfrac{a^3}{b^3}}$

e) $\dfrac{\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[6]{6}}{\sqrt{3}}=\dfrac{3^{3/4}\cdot 2^{1/6}\cdot 3^{1/6}}{3^{1/2}}=3^{5/12}\cdot 2^{1/6}=\sqrt[12]{3^5\cdot 2^2}$

f) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[12]{a^5}}=\dfrac{a^{1/2}\cdot a^{1/6}\cdot a^{3/4}}{a^{5/12}}=\dfrac{a^{17/12}}{a^{5/12}}=a^{12/12}=a$

32 Simplifica las siguientes operaciones extrayendo factores fuera del radical.

a) $\dfrac{\sqrt{6048x^7y^3}}{\sqrt[3]{7938xy^4}}$ *b)* $\dfrac{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^4\cdot\left(a^2\cdot\sqrt{a}\right)^3}{\sqrt[6]{a^5}}$

a) $\dfrac{\sqrt{6048x^7y^3}}{\sqrt[3]{7938xy^4}}=\dfrac{2^2\cdot 3\cdot x^3y\sqrt{2\cdot 3\cdot 7xy}}{3y\cdot\sqrt[3]{2\cdot 3\cdot 7^2xy}}=$

$=2^2\cdot x^3\cdot\sqrt[6]{\dfrac{x^3y^32^3\cdot 3^3\cdot 7^3}{2^2\cdot 3^2\cdot 7^4x^2y^2}}=2^2\cdot x^3\cdot\sqrt[6]{\dfrac{6xy}{7}}$

b) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^4\cdot(a^2\cdot\sqrt{a})^3}{\sqrt[6]{a^5}}=\dfrac{a^{8/3}\cdot a^6\cdot a^{3/2}}{a^{5/6}}=\dfrac{a^{61/6}}{a^{5/6}}=a^{56/6}=$

$=a^9\cdot a^{2/6}=a^9\cdot\sqrt[3]{a}$

33 Efectúa las siguientes operaciones simplificando al máximo.

a) $\sqrt[6]{8}+\sqrt[4]{4}-7\sqrt{72}$

b) $\sqrt{75}-\dfrac{\sqrt{18}}{3}+\dfrac{3\sqrt{12}}{4}-\sqrt{\dfrac{2}{25}}$

a) $\sqrt[6]{8}+\sqrt[4]{4}-7\sqrt{72}=\sqrt{2}+\sqrt{2}-42\sqrt{2}=-40\sqrt{2}$

b) $\sqrt{75}-\dfrac{\sqrt{18}}{3}+\dfrac{3\sqrt{12}}{4}-\sqrt{\dfrac{2}{25}}=$

$=5\sqrt{3}-\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}-\dfrac{1}{5}\sqrt{2}=\dfrac{13}{2}\sqrt{3}-\dfrac{6}{5}\sqrt{2}$

34 Simplifica las expresiones.

a) $\sqrt{512}+\sqrt{648}-\sqrt{\dfrac{128}{81}}$

b) $\sqrt[6]{6\,561a^2}+\sqrt[3]{3\,993a}-\sqrt[3]{3a^4}$

a) $\sqrt{512}+\sqrt{648}-\sqrt{\dfrac{128}{81}}=\sqrt{2^9}+\sqrt{2^3\cdot 3^4}-\sqrt{\dfrac{2^7}{3^4}}=$

$=16\sqrt{2}+18\sqrt{2}-\dfrac{8}{9}\sqrt{2}=\dfrac{298}{9}\sqrt{2}$

b) $\sqrt[6]{6\,561a^2}+\sqrt[3]{3\,993a}-\sqrt[3]{3a^4}=\sqrt[3]{3^4\cdot a}+\sqrt[3]{11^3\cdot 3\cdot a}-$

$-\sqrt[3]{3a^4}=3\sqrt[3]{3a}+11\sqrt[3]{3a}-a\sqrt[3]{3a}=\sqrt[3]{3a}\,(14-a)$

35 Realiza las siguientes operaciones.

a) $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$ *b)* $2\sqrt{6}\cdot\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$

a) $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})^2=4\cdot 3+4\sqrt{15}+5=17+4\sqrt{15}$

b) $2\sqrt{6}\cdot(2\sqrt{5}-\sqrt{2})^2=2\sqrt{6}\,(4\cdot 5-4\sqrt{10}+2)=$

$=2\sqrt{6}\,(22-4\sqrt{10})=44\sqrt{6}-8\sqrt{60}=44\sqrt{6}-16\sqrt{15}$

36 Efectúa estos cálculos.

a) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2\cdot\sqrt{3}$

b) $\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+3\right)$

c) $\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^2-1\right]\cdot\sqrt{2}$

d) $\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$

a) $(\sqrt{2}+1)^2\cdot\sqrt{3}=(3+2\sqrt{2})\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

b) $(2\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}+3)=2\sqrt{6}+6\sqrt{2}-3-3\sqrt{3}$

c) $[(\sqrt{2}-1)^2-1]\cdot\sqrt{2}=(3-2\sqrt{2}-1)\sqrt{2}=2\sqrt{2}-4$

d) $(1+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-1+2-\sqrt{2}=1$

37 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ *c)* $\dfrac{7}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}$

b) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1}$ *d)* $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}}}$

a) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}-1}=$

$=\dfrac{2\sqrt{5}-1-10+\sqrt{5}}{19}=\dfrac{-11+3\sqrt{5}}{19}$

c) $\dfrac{7}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}=\dfrac{7\sqrt{3}\,\sqrt[3]{2^2}}{6}=\dfrac{7\,\sqrt[6]{432}}{6}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{12}}=\dfrac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt[4]{12}}=\dfrac{\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[4]{12^3}}{12}=$

$=\dfrac{\sqrt[4]{2^6\cdot 3^5}}{12}=\dfrac{6\,\sqrt[4]{12}}{12}=\dfrac{\sqrt[4]{12}}{2}$

38 Establece, en cada caso, una aproximación con 4 cifras exactas.

a) $\sqrt{23}$ *b)* $\sqrt[6]{3}$ *c)* $-4{,}\widehat{57}$

a) 4,796   *b)* 1,201   *c)* −4,576

39 Haciendo uso de la calculadora, redondea el resultado de los siguientes cálculos con un error menor que una milésima.

a) $\sqrt{10}\cdot\pi$ *b)* $\sqrt{7}-\sqrt[3]{2}$ *c)* $\sqrt[5]{7}\cdot 7{,}02$

a) 9,935   *b)* 1,386   *c)* 10,360

40 **Determina entre qué valores están comprendidos cada uno de los siguientes números aproximados. Escribe la aproximación y su incertidumbre en cada uno de los casos.**

a) **−7,06**

b) **0,003**

c) **−50 000**

a) $(-7{,}065, -7{,}055)$, $-7{,}06 \pm 0{,}005$

b) $(0{,}0025, 0{,}0035)$, $0{,}003 \pm 0{,}0005$

c) $(-55\,000, -45\,000)$, $-50\,000 \pm 5\,000$

41 **Utilizando la calculadora, averigua qué error relativo se comete en las siguientes aproximaciones de π:**

a) **3,14** ***b)*** **267/85** ***c)*** **3 927/1 250**

a) $\dfrac{|\pi - 3{,}14|}{\pi} \cdot 100 = 0{,}05\ \%$

b) $\dfrac{|\pi - (267/85)|}{\pi} \cdot 100 = 0{,}01\ \%$

c) $\dfrac{|\pi - (3\,927/1\,250)|}{\pi} \cdot 100 = 0{,}0002\ \%$

42 **Realiza las siguientes operaciones expresadas en notación científica.**

a) $2 \cdot 10^7 \cdot 3{,}5 \cdot 10^4 \cdot 1{,}25 \cdot 10^5$

b) $1{,}03 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-8} - 10^{-5}$

c) $(4{,}7 \cdot 10^{-4})^2$

a) $8{,}75 \cdot 10^{16}$ *b)* $-8{,}92 \cdot 10^{-6}$ *c)* $2{,}209 \cdot 10^{-7}$

43 **Expresa $3{,}7 \cdot 10^9$ años luz en km (velocidad de la luz: $c = 2{,}9979 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}$).**

$3{,}498 \cdot 10^{22}$ km

44 **Sabiendo que 18 g de agua contienen $6{,}022 \cdot 10^{23}$ moléculas, expresa en notación científica la masa de una molécula de agua.**

$$\frac{18\ g}{6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{molec}\ H_2O} = 2{,}99 \cdot 10^{-23}\ \text{g/molec}\ H_2O$$

45 **Expresa en notación científica y con tres cifras exactas.**

a) **299 792,4562 km/s** ***c)*** **33 075 894,32 m**

b) **0,003450 g** ***d)*** $0{,}003468 \cdot 10^{-3}$ **cm**

a) $3{,}00 \cdot 10^5$ km/s *c)* $3{,}31 \cdot 10^7$ m

b) $3{,}45 \cdot 10^{-3}$ g *d)* $3{,}47 \cdot 10^{-6}$ cm

46 **Realiza estas operaciones y expresa el resultado en notación científica.**

a) $4{,}872 \cdot 10^4 + 1{,}74 \cdot 10^5 - 9{,}54 \cdot 10^6$

b) $3{,}76 \cdot 10^{-12} - 8{,}53 \cdot 10^{-13} + 4{,}98 \cdot 10^{-14}$

a) $-9{,}31728 \cdot 10^6$ *b)* $2{,}9568 \cdot 10^{-12}$

47 **Calcula los siguientes logaritmos.**

a) $\log_{1/3} \sqrt{3}$ ***c)*** $\log_{\sqrt{3}} 729$

b) $\log_2 0{,}0625$ ***d)*** $\log_{1/5} \sqrt[3]{78\,125}$

a) $(1/3)^x = 3^{1/2} \Rightarrow x = -1/2$

b) $2^x = 625/10\,000 \Rightarrow 2^x = (1/2)^4 \Rightarrow x = -4$

c) $3^{x/2} = 729 \Rightarrow 3^{x/2} = 3^6 \Rightarrow x = 12$

d) $(1/5)^x = 5^{7/3} \Rightarrow x = -7/3$

48 **Calcula x en estos logaritmos.**

a) $\log_x 1\,024 = 5$ ***c)*** $\log_{2/5} x = -1$

b) $\log_x \left(\dfrac{1}{2\,187}\right) = 7$ ***d)*** $\log_{\sqrt{2}} x = \dfrac{2}{3}$

a) $x^5 = 2^{10} \Rightarrow x = 4$ *c)* $5/2 = x$

b) $x^7 = 3^{-7} \Rightarrow x = 1/3$ *d)* $2^{1/3} = x$

49 **Ordena de menor a mayor las siguientes expresiones.**

$$\log_4 2,\ \log_2 (1/2),\ \log_4 (1/8),\ \log_2 2,\ \log_3 9,\ \log_{1/4} 2,\ \log_{1/9} 1,\ \log_{1/4} (1/8),\ \log_{1/2} 8$$

$\log_{1/2} 8 < \log_4 (1/8) < \log_2 (1/2) < \log_{1/4} 2 < \log_{1/9} 1 < \log_4 2 <$
$< \log_2 2 < \log_{1/4} (1/8) < \log_3 9$

50 **Expresa como un solo logaritmo.**

$$3 \ln a - (1/2) \ln b + 5 (\ln a - (1/2) \ln b)$$

$3\ln a - (1/2)\ln b + 5(\ln a - (1/2) \ln b) =$
$= \ln a^3 - \ln \sqrt{b} + 5(\ln a - \ln \sqrt{b}) =$
$= \ln a^3 + \ln a^5 - 6\ln \sqrt{b} = \ln a^8 - \ln b^3 = \ln \left(\dfrac{a^8}{b^3}\right)$

51 **Calcula:**

a) $\log_{1/2} 0{,}006$ ***b)*** $\log_{0{,}3} \sqrt[5]{52}$

a) 7,38 aprox. *b)* −0,66 aprox.

Ejercicios y problemas (páginas 28/32)

Numeros racionales e irracionales

1 **Sin realizar la división, di qué fracciones dan lugar a decimales exactos y cuáles a decimales periódicos puros o mixtos.**

$$\frac{7}{99}, \frac{6}{15}, -\frac{3}{14}, \frac{2}{9}, \frac{15}{17}, -\frac{11}{8}, \frac{21}{30}, \frac{23}{990}, -\frac{81}{90}, -\frac{68}{85}$$

Exactos: 6/15, −11/8, 21/30, −81/90, −68/85

Periódicos: 7/99, −3/14, 2/9, 15/17, 23/990

2 **Halla la fracción generatriz irreducible de estos números decimales:**

$$0{,}0\widehat{32},\ -7{,}\widehat{39},\ 31{,}0\widehat{9},\ 2{,}\widehat{312},\ -5{,}355$$

$0{,}0\widehat{32} = 16/495$; $-7{,}\widehat{39} = -244/33$; $31{,}0\widehat{9} = 311/10$;
$2{,}\widehat{312} = 770/333$; $-5{,}355 = -1\,071/200$

3 **Ordena de menor a mayor.**

$$0{,}40;\ 0{,}45;\ 7/16;\ 1/2;\ 0{,}\widehat{428571};\ 5/12;\ 0{,}\widehat{407};\ 13/32$$

Los decimales correspondientes son:

0,40; 0,45; 0,4375; 0,5; $0{,}\widehat{428571}$; $0{,}41\widehat{6}$;

$0{,}\widehat{407}$; 0,406 25. Por tanto:

$0{,}40 < 13/32 < 0{,}\widehat{407} < 5/12 < 0{,}\widehat{428571} < 7/16 <$
$< 0{,}45 < 1/2$

4 **Realiza estas operaciones y expresa el resultado en forma decimal.**

a) $2{,}\widehat{18} \cdot 0{,}\widehat{4}$ ***c)*** $3 \cdot 0{,}2\widehat{7}/0{,}\widehat{24}$

b) $0{,}\widehat{21} \cdot 2/7$ ***d)*** $5 \cdot 2{,}\widehat{9}/3$

a) $0{,}\widehat{96}$ *c)* 3,4375

b) $0{,}0\widehat{6}$ *d)* 5

5 **Calcula las siguientes raíces.**

a) $\sqrt{0{,}\widehat{4}}$ ***b)*** $\sqrt{0{,}18\widehat{7}}$ ***c)*** $\sqrt{1/0{,}00\widehat{1}}$

a) $0{,}\widehat{6}$ *b)* $0{,}4\widehat{3}$ *c)* 30

6 **Clasifica en racionales e irracionales cada uno de los siguientes números reales.**

a) **11,003 003 003 003…** ***e)*** $\sqrt[5]{-32}$

b) **−2,797 140 797 140…** ***f)*** $3\sqrt{2{,}\widehat{7}}$

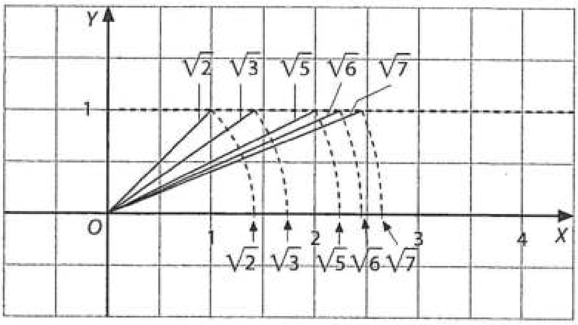
c) $\sqrt{4{,}9}$ ***g)*** $\sqrt{1{,}21/25}$

d) $\sqrt[3]{0{,}0\widehat{01}}$ ***h)*** π^2

Racionales: *a), b), e), f)* y *g)*. Irracionales: *c), d)* y *h)*.

7 Representa sobre la recta real $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ y $\sqrt{7}$. ¿Cómo se representarían $\sqrt{29}$, $\sqrt{50}$ y $\sqrt{148}$?

$$\sqrt{29}=\sqrt{5^2+2^2},\ \sqrt{50}=\sqrt{7^2+1^2},\ \sqrt{148}=\sqrt{12^2+2^2}$$



8 Escribe tres números irracionales entre 12 y 13.

$$9\sqrt{2},\ \frac{9\sqrt{2}+12}{2},\ \frac{9\sqrt{2}+13}{2}$$

9 Escribe un número racional y otro irracional que pertenezcan al intervalo $(-4; -3{,}98)$.

Ejemplos de racionales: $-3{,}99$, $-3{,}9\overset{\frown}{8}$, $-3{,}995$

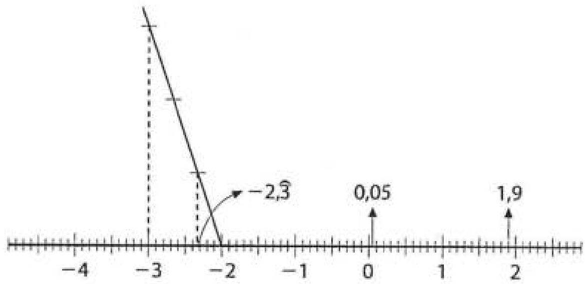
Ejemplos de irracionales: $-3{,}98-(\sqrt{2}/100)$, $-3{,}98-(\pi/300)$, $-4+(\sqrt{3}/200)$

10 Ordena de menor a mayor -4; $-3{,}9\overset{\frown}{8}$; $-3{,}\overset{\frown}{98}$; $5{,}1\overset{\frown}{7}$; $5{,}\overset{\frown}{17}$; $5{,}170\overset{\frown}{9}$; $5{,}171$; π; $3{,}1416$; $3{,}141593$; $3{,}1415926$.

$-4 < -3{,}\overset{\frown}{98} < -3{,}9\overset{\frown}{8} < 3{,}141\,5926 < \pi < 3{,}141\,593 <$
$< 3{,}141\,6 < 5{,}170\overset{\frown}{9} < 5{,}171 < 5{,}\overset{\frown}{17} < 5{,}1\overset{\frown}{7}$

11 Representa sobre la recta real los siguientes números: $-2{,}\overset{\frown}{3}$; $0{,}05$; $1{,}9$.

$-2{,}\overset{\frown}{3}=-7/3=-2-(1/3)$



12 Escribe un número decimal que sea 3 milésimas menor que:

a) $-0{,}097$

b) $1{,}567\,57$

c) $47{,}76$

d) $-\pi$

a) $-0{,}1$ *c)* $47{,}757$

b) $1{,}564\,57$ *d)* $-3{,}144\,592\,65\ldots$

13 Indica la relación de orden que existe entre los siguientes pares de números.

a) $1{,}209$ y $1{,}20\overset{\frown}{9}$

b) $1/1{,}209$ y $1/1{,}20\overset{\frown}{9}$

c) $-1/1{,}209$ y $-1/1{,}20\overset{\frown}{9}$

d) $-2\cdot 1{,}209$ y $-2\cdot 1{,}20\overset{\frown}{9}$

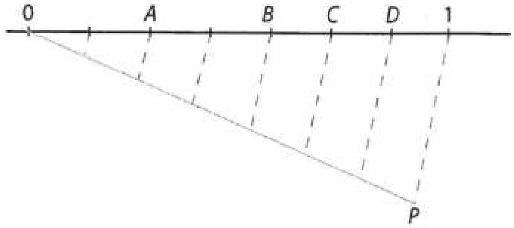
a) $1{,}209 < 1{,}20\overset{\frown}{9}$

b) $1/1{,}209 > 1/1{,}20\overset{\frown}{9}$

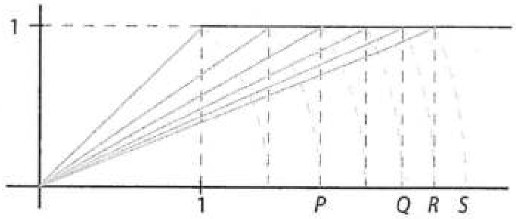
c) $-1/1{,}209 < -1/1{,}20\overset{\frown}{9}$

d) $-2\cdot 1{,}209 > -2\cdot 1{,}20\overset{\frown}{9}$

14 *a)* Sabiendo que los segmentos en que se divide *OP* son de la misma longitud, indica qué números racionales representan los puntos *A, B, C* y *D* de la siguiente figura.



b) Determina qué números irracionales representan los puntos *P, Q, R* y *S* de la figura.



a) $A=\frac{2}{7}, B=\frac{4}{7}, C=\frac{5}{7}, D=\frac{6}{7}$

b) $P=\sqrt{3}, Q=\sqrt{5}, R=\sqrt{6}, S=\sqrt{7}$

Intervalos y valor absoluto

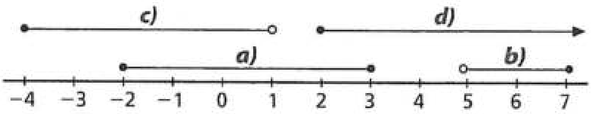
15 Representa sobre la recta los siguientes intervalos.

a) $[-2, 3]$

b) $(5, 7]$

c) $[-4, 1)$

d) $[2, +\infty)$



16 Dado el intervalo $(-3{,}7;\ -\pi)$ de la recta real, indica cuáles de los siguientes puntos pertenecen a él:

$-3{,}72$ $-3{,}46$ $-11\pi/10$ $-3{,}14$

$I=(-3{,}7, -\pi)$, $-3{,}72\notin I$, $-3{,}46\in I$, $-11\pi/10\in I$, $-3{,}14\notin I$

17 Determina a qué intervalo pertenecen los números reales que cumplen las siguientes condiciones.

a) $-4/3 < x \leq 10$ *d)* $x \leq -9/5$

b) $1/5 \leq x \leq 0{,}25$ *e)* $x > 21/4$

c) $x > 7$ y $x \leq 9$ *f)* $x < 13$ y $x \leq 14$

a) $x\in(-4/3, 10]$ *d)* $x\in(-\infty, -9/5]$

b) $x\in[1/5; 0{,}25]$ *e)* $x\in(21/4, +\infty)$

c) $x\in(7, 9]$ *f)* $x\in(-\infty, 13)$

18 ¿A qué intervalo pertenece *x*?

a) $0 < \frac{x}{4}+1 \leq 7$

b) $-2 \leq -x+3 < 4$

a) $x\in(-4, 24]$ *b)* $x\in(-1, 5]$

19 Si $|-x+3| \leq 7$, ¿a qué intervalo pertenece *x*?

$x\in[-4, 10]$

20 ¿Qué conjunto de números reales, *x*, cumplen la desigualdad $|2x-1| > 2$?

El conjunto unión: $(-\infty, -1/2)\cup(3/2, +\infty) =$
$=\mathbb{R}-[-1/2, 3/2]$

21 Calcula las siguientes expresiones.

a) $|2 \cdot |-3| + |-5+6|| - |-|7-9| \cdot (-1)|$

b) $|(3/5) \cdot (1/3 - 4) \cdot |1 - (5/2)||$

c) $|(\sqrt{5}/3) - 1| - |3 - 2\sqrt{5}|$

a) 5 *b)* $33/10$ *c)* $4 - 7\sqrt{5}/3$

22 Calcula la amplitud de estos intervalos en la recta real.

a) $(x-3,\ x+3)$

b) $\left(\sqrt{2},\ 5\sqrt{2}\right)$

c) $\left(-\sqrt{3}/2,\ 7\sqrt{3}/5\right)$

d) $(8/3,\ 13)$

a) 6 *b)* $4\sqrt{2}$ *c)* $19\sqrt{3}/10$ *d)* $31/3$

Potencias y radicales

23 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\dfrac{2^3 \cdot 5^{-7} \cdot 7^3}{(-2)^{-4} \cdot 5^7 \cdot 7^3}$

b) $\dfrac{a^{-4} \cdot (6^2)^{-1} \cdot b^2}{2^3 \cdot 3^2 \cdot a^6 \cdot b^{-7}}$

c) $\dfrac{(a \cdot b)^2 \cdot (a^{-3} \cdot b^3)^3}{(a \cdot b^2 \cdot c^3)^{-5}}$

d) $\dfrac{(4 \cdot 3^2 \cdot 6^{-2})^2 \cdot (2^3 \cdot 3^4)^{-1}}{(2^6 \cdot 3^7)^{-3} \cdot (6^4)^3}$

a) $\dfrac{2^7}{5^{14}}$ *b)* $\dfrac{b^9}{a^{10}\, 2^5\, 3^4}$ *c)* $\dfrac{b^{21}\, c^{15}}{a^2}$ *d)* $2^3 \cdot 3^5$

24 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\left(\dfrac{3}{5} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}\right)^2$

b) $\left(-2 - \left(\dfrac{-1}{4}\right)^{-3}\right)^{-2}$

c) $\left(\dfrac{3}{8} - (-2)^{-3}\right)^3$

a) $49/2\,025$ *b)* $1/3\,844$ *c)* $1/8$

25 Introduce factores dentro del radical.

a) $2\sqrt{\dfrac{7}{8}}$

b) $\dfrac{2^3 \cdot 5}{3}\sqrt[3]{\dfrac{3^2 \cdot 7 \cdot 5}{2^2}}$

c) $(x-3)^2\sqrt[3]{(x-3)^2(x+3)}$

a) $\sqrt{\dfrac{7}{2}}$ *b)* $\sqrt[3]{2^7 \cdot 5^4 \cdot \dfrac{7}{3}}$ *c)* $\sqrt[3]{(x-3)^8(x+3)}$

26 Extrae factores del radical.

a) $\sqrt{2^3 \cdot 8^{-2}}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{3^4 \cdot 12^{-1} \cdot 7^3}{2^2}}$

c) $\sqrt{\left(1 - \dfrac{3}{11}\right) \cdot \left(\dfrac{6}{25} + \dfrac{3}{4}\right)}$

d) $\sqrt{24a^5b^6 - 32a^9b^4}$

e) $\sqrt[3]{8m^4n^6p^8}$

f) $\sqrt[6]{1\,024}$

g) $\sqrt[5]{2\,187x^9y^{12}}$

h) $\sqrt{4^2 \cdot 3^2 \cdot 12^2x^5y^7}$

a) $\sqrt{\dfrac{1}{2^3}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

b) $\dfrac{21}{2}\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

c) $\dfrac{3}{5}\sqrt{2}$

d) $2a^2b^2\sqrt{2a(3b^2 - 4a^4)}$

e) $2mn^2p^2\sqrt[3]{mp^2}$

f) $2\sqrt[3]{2^2}$

g) $3xy^2\sqrt[5]{3^2x^4y^2}$

h) $144x^2y^3\sqrt{xy}$

27 Expresa las siguientes potencias como raíces.

a) $2^{3/4}$ *b)* $12^{5/7}$ *c)* $3^{-1/4}$

a) $\sqrt[4]{8}$ *b)* $\sqrt[7]{12^5}$ *c)* $\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}$

28 Expresa estas raíces en forma de potencias.

a) $\sqrt[5]{3^2}$ *b)* $\sqrt[3]{10^2}$ *c)* $\dfrac{3}{\sqrt[3]{7}}$

a) $3^{2/5}$ *b)* $10^{2/3}$ *c)* $3 \cdot 7^{-1/3}$

29 Expresa en forma de potencias de exponente fraccionario.

a) $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{3^5}{2^3}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3^{-5}}} \cdot \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^{-2}}$

c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2^3}}}$

a) $2^{-1/12} \cdot 3^{5/4}$ *b)* $2^{4/3} \cdot 3^{11/6}$ *c)* $2^{9/8}$

30 Realiza los siguientes cálculos.

a) $\sqrt[3]{0{,}04} \cdot \sqrt{0{,}2}$

b) $\left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{6}}$

c) $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[8]{81}$

d) $\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[3]{2}$

a) $\dfrac{1}{5\sqrt[6]{5}}$ *b)* $2\sqrt[6]{\dfrac{2^2}{3^3}}$ *c)* $2\sqrt{3}$ *d)* $\sqrt[15]{4000}$

31 Realiza estos cálculos simplificando al máximo.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4}$

b) $\sqrt{32} + \sqrt{18} - \sqrt{3}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$

d) $\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}}{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}$

a) $\sqrt[6]{432}$ *b)* $7\sqrt{2} - \sqrt{3}$ *c)* $\sqrt[6]{5}$ *d)* $\sqrt[3]{2^2}$

32 Efectúa el cálculo y expresa el resultado como un radical.

$$\frac{3^{-3/4} \cdot 9^{3/2}}{\left(\sqrt{3}\right)^{-3} \cdot \sqrt{81}}$$

$$3^{7/4} = 3\sqrt[4]{3^3}$$

33 Calcula las siguientes expresiones con radicales.

a) $\sqrt{10} + 2\sqrt{10} - \dfrac{1}{2}\sqrt{10}$

b) $3\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + 7\sqrt{3}$

c) $\sqrt{243} - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{27}$

d) $3\sqrt{8} - 5\sqrt{72} + \sqrt{50} + 4\sqrt{18}$

e) $\sqrt{32} - 5\sqrt{18} + \sqrt{3}$

f) $3\sqrt{8} + 2\sqrt{50} - 4\sqrt{18}$

g) $5\sqrt{27} + 3\sqrt{12} - 4\sqrt{75}$

h) $\sqrt{512} + \sqrt{648} + \sqrt{\dfrac{128}{81}}$

i) $\sqrt{75} - \dfrac{\sqrt{18}}{3} + \dfrac{3\sqrt{12}}{4} - \sqrt{\dfrac{2}{25}}$

a) $\dfrac{5}{2}\sqrt{10}$ *b)* $3\sqrt{3}$ *c)* $10\sqrt{3}$ *d)* $-7\sqrt{2}$ *e)* $\sqrt{3} - 11\sqrt{2}$

f) $4\sqrt{2}$ *g)* $\sqrt{3}$ *h)* $\dfrac{314}{9}\sqrt{2}$ *i)* $\dfrac{13}{2}\sqrt{3} - \dfrac{6}{5}\sqrt{2}$

34 Calcula cada una de estas expresiones con radicales.

a) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2$

b) $\left(2 - 2\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{48}$

c) $\left(\sqrt{7} - \sqrt{18}\right)^2 - 3\sqrt{56}$

d) $\left(1 + \sqrt{5}\right)^2 \cdot \left(1 - \sqrt{5}\right)^2$

a) $8 + 4\sqrt{3}$ *b)* $16(1 - \sqrt{3})$ *c)* $25 - 12\sqrt{14}$ *d)* 16

35 **Efectúa, simplificando al máximo.**

a) $2\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{20}-8\sqrt{45}\right)-\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$

b) $-\sqrt[3]{-16}-\sqrt[3]{-54}-\sqrt[3]{-250}$

a) -218

b) $10\sqrt[3]{2}$

36 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $\sqrt[4]{x+1}\cdot\sqrt{(x+1)^3}\cdot\sqrt[8]{\dfrac{1}{(x+1)^7}}$

b) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{18}\right)^2+6\sqrt{14}$

c) $\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)\cdot\left(\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b}\right)$

d) $\sqrt[3]{-4}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt[4]{9}$

a) $\sqrt[8]{(x+1)^7}$

b) 25

c) $(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b})\cdot(\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b})=$
$=(a-b)-(a+b)=-2b$

d) $-6\sqrt[6]{2}$

37 **Simplifica las siguientes expresiones.**

a) $\dfrac{1}{1-a}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{(a+1)^2}}\cdot\sqrt[3]{(1-a)^2}$

b) $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a\sqrt{a}}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-a)\cdot(1+a)^2}}$

b) $a\sqrt[3]{a}$

38 **Determina si son ciertas o falsas las igualdades que se dan a continuación.**

a) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$

b) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$

a) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{x+3}{\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-3}}=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}$ Cierta

b) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{18}$ Cierta

39 **Racionaliza las siguientes expresiones.**

a) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{\sqrt{6}-2}{\sqrt[3]{9}}$

c) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$

a) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

b) $\dfrac{\left(\sqrt{6}-2\right)\cdot\sqrt[3]{3}}{3}$

c) $6+\sqrt{35}$

d) $\dfrac{-\sqrt[6]{32}}{2}-\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}+1$

40 **Calcula el resultado de las siguientes operaciones, simplificando al máximo.**

a) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{\sqrt{8}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{8}-2}}$

c) $\sqrt{2\sqrt{\dfrac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\dfrac{1}{2}}}}}$

d) $\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right]\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{2}}=$
$=\dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2-\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{2}+\sqrt{2}=$
$=-4\sqrt{2}+\sqrt{2}=-3\sqrt{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{\sqrt{8}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{8}-2}}=\sqrt{\dfrac{4}{4}}=1$

c) $\sqrt{2\sqrt{\dfrac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\dfrac{1}{2}}}}}=2^{1/2}\cdot 2^{-1/4}\cdot 2^{1/8}\cdot 2^{-1/16}=$
$=2^{5/16}=\sqrt[16]{2^5}$

d) $\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right]\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=$
$=\left(2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-3\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=$
$=\dfrac{-\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{-13-6\sqrt{6}}{-1}=$
$=13+6\sqrt{6}$

Aproximaciones y errores

41 **A Brahmagupta (siglo VII a. C.) se le atribuye una aproximación de π que vale $\sqrt{10}$. Siglos después, en el III a. C., Arquímedes propuso otra: $\dfrac{245}{78}$. Calcula cuántas cifras exactas tiene cada aproximación y qué porcentaje de error se comete cuando se aproxima π con cada una de ellas.**

La primera tiene dos cifras exactas y un porcentaje de error del 0,66 %.

La segunda tiene cuatro cifras exactas y un porcentaje de error del 0,02 %.

42 **Redondea a dos cifras decimales estos números e indica si la aproximación es por exceso o por defecto.**

a) **3,05679** ***c)*** **0,00078** ***e)*** **4,34505**

b) **−2,9346** ***d)*** **45,8620** ***f)*** **−3,00531**

a) 3,06, por exceso.

b) −2,93, por exceso.

c) 0,00, por defecto.

d) 45,86, por defecto.

e) 4,35, por exceso.

f) −3,01, por defecto.

43 **Calcula el error absoluto que se comete al tomar 0,71 como aproximación de 5/7.**

El error absoluto que se comete es 3/700.

44 **Aproxima $\sqrt{13}$ con un error absoluto menor que una milésima. ¿Existe una sola aproximación?**

Cualquier valor comprendido en (3,6046; 3,6066).

45 **El número decimal 7,543 es la aproximación por redondeo de cierto número real. ¿En qué intervalo está comprendido? Escríbelo e indica su incertidumbre.**

Está comprendido en el intervalo: (7,5425; 7,5435)

Lo escribimos como $7{,}543 \pm 0{,}0005$.

46 **A continuación se ofrece una tabla con las aproximaciones de algunos números reales. Cópiala y determina, para cada caso, el tipo de aproximación, la incertidumbre o cota de error y el intervalo en el que está comprendido el número exacto. Indica también el número de cifras exactas y el error relativo cometido. ¿Cuál de las aproximaciones crees que es la mejor?**

La solución a esta pregunta se encuentra en la tabla de la parte inferior de esta página.

47 **Determina entre qué números están comprendidos los valores exactos de cada una de las siguientes aproximaciones.**

a) $6{,}87 \pm 0{,}02$

b) $67\,894 \pm 5$

c) $0{,}0543 \pm 0{,}0001$

d) $67{,}0 \pm 0{,}2$

a) (6,85; 6,89)

b) (67 889; 67 899)

c) (0,0542; 0,0544)

d) (66,8; 67,2)

Notación científica

48 **Utilizando la notación científica escribe las siguientes magnitudes en metros:**

a) **La Unidad Astronómica de distancia es la distancia media que separa la Tierra del Sol, su valor es 149,6 millones de kilómetros.**

b) **Un año-luz es la distancia que recorre la luz en un año (velocidad de la luz = 300 000 km/s).**

c) **El C-elegans fue el primer organismo cuyo genoma fue completamente secuenciado. Su longitud es de aproximadamente 1 mm.**

a) $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m

b) $9{,}4608 \cdot 10^{15}$ m

c) 10^{-3} m

49 **Ordena de menor a mayor los siguientes números, expresándolos previamente en notación científica.**

a) $3{,}23 \cdot 10^{18}$, $523{,}17 \cdot 10^{16}$, $444 \cdot 10^{17}$

b) $3{,}19 \cdot 10^{-12}$, $0{,}033 \cdot 10^{-10}$, $444 \cdot 10^{-14}$

a) $3{,}23 \cdot 10^{18} < 5{,}2317 \cdot 10^{18} < 4{,}44 \cdot 10^{19}$

b) $3{,}19 \cdot 10^{-12} < 3{,}3 \cdot 10^{-12} < 4{,}44 \cdot 10^{-12}$

50 **Si $X = 3 \cdot 10^7$, $Y = 4{,}25 \cdot 10^5$ y $Z = 72{,}12 \cdot 10^{10}$, calcula, expresando el resultado en notación científica.**

a) $(X + Y) \cdot Z$ *b)* $\dfrac{X \cdot Y}{Z}$

a) $2{,}194\,251 \cdot 10^{19}$ *b)* $1{,}767\,886\,855 \cdot 10$

Logaritmos

51 **Calcula.**

a) $\log 0{,}00001$ *d)* $\log_{1/3} \sqrt{3}$ *g)* $\log_{23} 1$

b) $\log_5 (1/625)$ *e)* $\log_{\sqrt{2}} 0{,}125$ *h)* $\log_{13} \sqrt[5]{2\,197}$

c) $\log_2 2\,048$ *f)* $\log_a \sqrt[3]{a^7}$ *i)* $\log_3 81$

a) -5 *c)* 11 *e)* -6 *g)* 0 *i)* 4

b) -4 *d)* $-1/2$ *f)* 7/3 *h)* 3/5

52 **Utilizando las propiedades de los logaritmos, calcula x en las siguientes expresiones.**

a) $\log_x \left(\dfrac{1}{27}\right) = -3$

b) $\log_{1/2} 128 = x$

c) $\log_5 x = 6/5$

d) $\log_x 4 = 1/8$

e) $\log_x 4{,}9 = 0{,}16$

f) $\log_{\sqrt{3}} x = 6{,}5$

g) $\log_{x+1} 25 = 2$

h) $\log (x^3 - 25) = 2$

i) $\log_2 32^x = 0{,}1$

a) 3 *d)* 2^{16} *g)* 4

b) -7 *e)* $4{,}9^{\frac{25}{4}}$ *h)* 5

c) $\sqrt[5]{5^6}$ *f)* $\sqrt[4]{3^{13}}$ *i)* 1/50

53 **Formula estas expresiones como un solo logaritmo.**

a) $3(\log 5 + \log 2) - \log 2 - \log 7$

b) $\dfrac{3}{2}(1 - \log 5) + \dfrac{1}{2} \log 2$

c) $3 \ln 2 - 1 + \dfrac{\ln 5}{3}$

a) $3(\log 5 + \log 2) - \log 2 - \log 7 = \log \dfrac{10^3}{14} = \log \left(\dfrac{500}{7}\right)$

b) $\dfrac{3}{2}(1 - \log 5) + \dfrac{1}{2} \log 2 = \dfrac{1}{2} \log (2^3 \cdot 2) = \log 4$

c) $3 \ln 2 - 1 + \dfrac{\ln 5}{3} = \ln \left(\dfrac{8\sqrt[3]{5}}{e}\right)$

Valor exacto	$(1+\sqrt{5})/2$	$\sqrt{5}$	$-7{,}5436\ldots$	299 792,5	$\sqrt[3]{10}$
Valor aproximado	1,62	2,236	$-7{,}544$	300 000	2,154
Aproximación	exceso	defecto	defecto	exceso	defecto
Incertidumbre	0,002	0,0001	0,0004	208	0,0005
Intervalo	(1,618; 1,622)	(2,2359; 2,2361)	($-7{,}5444$; $-7{,}5436$)	(299 584,5; 300 000,5)	(2,1535; 2,1545)
Cifras exactas	$\Delta x < 0{,}005$ 3 cifras exactas	$\Delta x < 0{,}0005$ 4 cifras exactas	$\Delta x < 0{,}0005$ 4 cifras exactas	$\Delta x < 500$ 3 cifras exactas	$\Delta x < 0{,}0005$ 4 cifras exactas
Error relativo	0,12 %	0,003 %	0,005 %	0,07 %	0,02 %

La segunda es la mejor aproximación.

54 **Halla el valor de a para que se cumplan las siguientes igualdades.**

a) $\log_a 12 + \log_a 3 = 2$

b) $3^a = 10$

c) $\log a = 1 + 3\log 2 - \frac{1}{2}\log 64$

d) $\ln a = \log_3 243 - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$

a) $\log_a 36 = 2 \Rightarrow a = 6$

b) $a = \frac{\ln 10}{\ln 3}$

c) $\log a = \log \frac{10 \cdot 2^3}{\sqrt{64}} = \log 10 \Rightarrow a = 10$

d) $\ln a = 5 - (-4) = 9 \Rightarrow a = e^9$

55 **Calcula x para que se cumpla cada una de las siguientes igualdades.**

a) $\log_8 (2x+1) = -\frac{1}{3}$

b) $x^{0,8} = 1\,024$

c) $5^{x-2} = e$

d) $2^{x^2-1} = 3^{\ln 2}$

a) $8^{-1/3} = 2x + 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

b) $0,8 \cdot \log_2 x = \log_2 1\,024 \Rightarrow x = \sqrt{2^{25}}$

c) $(x-2)\ln 5 = 1 \Rightarrow x = 2 + \frac{1}{\ln 5}$

d) $(x^2-1)\ln 2 = \ln 2 \cdot \ln 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1+\ln 3}$

56 **Calcula cuánto vale k en cada caso.**

a) $\log_a x - \log_{1/a} x^k = 0$

b) $\log_2 x^k = \log_4 x$

a) $\log_a x - \log_{1/a} x^k = 0 \Rightarrow \log_a x = \log_{1/a} x^k \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_a x = -\log_a x^k \Rightarrow \log_a x = \log_a x^{-k} \Rightarrow$
$\Rightarrow k = -1$

b) $\log_2 x^k = \log_4 x \Rightarrow \log_2 x^k = \log_2 \sqrt{x} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

Ejercicios de aplicación

57 **Indica cuál de las siguientes opciones es más conveniente.**

- **Que te cobren el precio de un artículo sin IVA.**
- **Que te cobren el precio del artículo más el 21 % de IVA y que después te hagan un descuento del 21 %.**

Razona la respuesta.

La segunda opción es la mejor, ya que:

$$p \cdot 1,21 \cdot 0,79 = 0,9559p < p$$

donde p es el precio del artículo.

58 **Un comerciante vende sus artículos en las rebajas de enero al 80 % del precio que tenían en diciembre; en las rebajas de febrero los vende al 70 % del precio de las de enero. Determina:**

a) **El precio de un jersey en diciembre y enero si en febrero costaba 50 €.**

b) **El precio en diciembre y febrero de unos pantalones que en enero costaban 50 €.**

a) 89,29 € y 71,43 €, respectivamente.

b) 62,50 € y 35 €, respectivamente.

59 **Tres operarios remodelan una cocina trabajando 8 h diarias durante quince días. ¿En cuánto tiempo habrían remodelado la cocina 4 operarios trabajando 9 h diarias?**

En 10 días.

60 **Al medir a un niño de 90 cm de altura se obtuvieron 91 cm y al medir un edificio de 30 m de altura se obtuvieron 31 m, determina:**

a) **El error absoluto de las dos medidas.**

b) **El error relativo de las dos medidas.**

c) **¿Cuál te parece la medida más precisa?**

a) 1 cm y 1 m, respectivamente.

b) 1,11 % y 3,33 % respectivamente.

c) La primera medida es más precisa.

61 **La arista de un cubo mide 6 cm. ¿Cuánto mide su diagonal?**

$D = \sqrt{2 \cdot 6^2 + 6^2} = 6\sqrt{3} = 10,39$ cm

62 **Calcula la longitud de la diagonal de una caja de dimensiones 11 cm × 32 cm × 14 cm.**

$D = \sqrt{11^2 + 32^2 + 14^2} = 36,62$ cm

63 **La pirámide de Keops tenía 230,35 m de lado y 146,6 m de altura, cuando la construyeron en el 2400 a. C. estaba recubierta de planchas de piedra pulida. ¿Cuántos metros cuadrados de piedra pulida necesitaron los constructores para recubrirla?**

Calculamos el área de cuatro triángulos isósceles de base 230,35 m y una altura de:

$$h = \sqrt{146,6^2 + \left(\frac{230,35}{2}\right)^2} = 186,43 \text{ m}$$

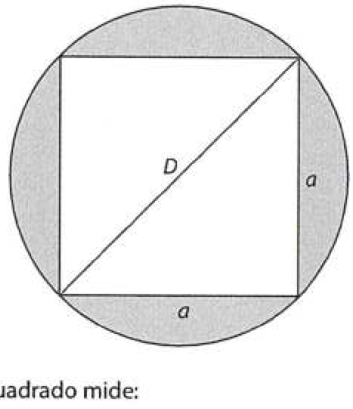
Necesitaron entonces:

$$A = 4 \cdot \frac{230,35 \cdot 186,43}{2} = 85\,889,16 \text{ m}^2$$

64 **Se quiere construir un rectángulo áureo. Sabiendo que el lado menor mide 7 cm, ¿cuánto deberá medir el lado mayor?**

$$\frac{7 \cdot (1+\sqrt{5})}{2} = 11,33 \text{ cm}$$

65 **Halla el área de la zona sombreada si $D = 2\sqrt{2}$ cm, y expresa el resultado con cuatro cifras exactas.**



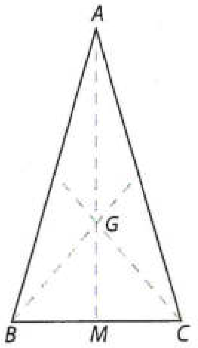
El lado del cuadrado mide:

$$(2\sqrt{2})^2 = 2a^2 \Rightarrow 2\sqrt{2} = \sqrt{2}\,a \Rightarrow a = 2 \text{ cm}$$

El área sombreada es:

$$A = \pi(\sqrt{2})^2 - 2^2 \Rightarrow 2,283 \text{ cm}^2$$

66 **El punto G es el baricentro del triángulo isósceles ABC, $AB = AC = 5$ cm y $BC = 3$ cm. Sabiendo que G cumple $GM = \frac{1}{2}GA$, calcula el área del triángulo GBC y redondea el resultado con un error menor que una milésima.**



La altura del triángulo GBC es $h = \frac{1}{3}\sqrt{25 - \frac{9}{4}} = \frac{1}{6}\sqrt{91}$ cm.

Con este valor aproximado, el área es: $A = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6}\sqrt{91} = \frac{\sqrt{91}}{4}$ cm^2, por lo que con un error menor que una milésima el resultado no es único: 2,384 cm^2 o 2,385 cm^2 son resultados válidos. En efecto: $\left|\frac{\sqrt{91}}{4} - 2{,}384\right| = 0{,}000848\ldots$,

$\left|\frac{\sqrt{91}}{4} - 2{,}385\right| = 0{,}000151\ldots$

67 **El área de un hexágono regular es de $9\sqrt{3}$ cm^2. Halla la longitud del lado, expresando esta medida con un radical.**

Sea l el lado del hexágono, entonces su apotema vale $\sqrt{3}/2\ l$, por lo que: $9\sqrt{3} = 6l/2 \cdot \sqrt{3}/2\ l \Rightarrow \sqrt{6}$ cm

68 **Aplicando las propiedades de los logaritmos, demuestra lo siguiente.**

a) $\log_a x = -\log_{1/a} x$

b) $\log_{\sqrt{a}} x = 2\log_a x$

a) Sea $\log_a x = y$; entonces $a^y = x$.
Por otra parte, $-\log_{1/a} x = \log_{1/a} x^{-1}$.

Sea $\log_{1/a} x^{-1} = z$, entonces $\left(\frac{1}{a}\right)^z = x^{-1}$ o $a^z = x$.

Por tanto, $a^y = a^z$, o lo que es igual $y = z$:

$$\log_a x = -\log_{1/a} x$$

b) $\log_{\sqrt{a}} x = \log_{a^{1/2}} x = \frac{\log x}{\log a^{1/2}} = \frac{\log x}{(1/2)\log a} = 2\frac{\log x}{\log a} =$

$= 2\log_a x$

69 **Una población sufre una fuerte emigración y en 10 años se ve reducida a la cuarta parte. Su decrecimiento es exponencial, del tipo $P = P_0 \cdot e^{-kt}$, donde k es la tasa de decrecimiento, y t, el tiempo, medido en años. Calcula la constante k.**

$$(1/4) = e^{-10k} \Rightarrow k = \frac{\ln 4}{10} = 0{,}138$$

70 **El pH de una disolución es el logaritmo decimal del inverso de la concentración de iones hidronio, $[H_3O^+]$, es decir, pH = log $(1/[H_3O^+])$. El pH máximo es 14 y, evidentemente, siempre es positivo. Una disolución es ácida si su pH es menor que 7 y básica cuando es mayor que 7. ¿Cuál es el pH de una disolución cuya concentración de iones hidronio es de $6 \cdot 10^{-5}$ mol/L? ¿Es ácida o básica?**

Sustituyendo se obtiene:

$$pH = 4{,}22$$

Es una disolución ácida.

Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Operaciones con fracciones algebraicas (página 42)

En el vídeo se muestra cómo resolver la operación con fracciones algebraicas del ejercicio resuelto paso a paso.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento a seguir para resolver este tipo de operaciones o para que los alumnos repasen las operaciones con fracciones algebraicas.

Ecuaciones exponenciales (página 49)

En el vídeo se muestra la resolución de la ecuación exponencial $2 \cdot 3^{2x-1} = 1 - 3^{x-1}$ aplicando un cambio de variable, indicado los pasos a seguir y deshaciendo el cambio al final.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento a seguir para resolver este tipo de ecuaciones o para que los alumnos repasen la resolución de estas ecuaciones más tarde.

Método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales (página 56)

En el vídeo se muestra la resolución del primer sistema de ecuaciones del ejercicio resuelto utilizando el método de Gauss para hallar las soluciones. Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital un ejemplo del método paso a paso o para que los alumnos puedan repasar el procedimiento más tarde.

Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas (página 62)

En el archivo de GeoGebra puede verse la resolución gráfica del ejercicio resuelto 9 en el que se representan dos inecuaciones lineales con dos incógnitas. Moviendo los deslizadores y eligiendo los signos de orden pueden verse las soluciones de otros sistemas del mismo tipo, así el recurso puede utilizarse para comprobar las soluciones de otros ejercicios.

Actividades (páginas 37/57)

1 **Realiza las siguientes divisiones.**

a) $(4x^4 - 12x^3 + 7x - 5) : (3x^2 - 6x)$

b) $(7x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 5) : (x^3 + 2x)$

a) $c(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{8}{3},\ r(x) = -9x - 5$

b) $c(x) = 7x^2 + 4x - 17,\ r(x) = -20x^2 + 34x + 5$

2 **Realiza las siguientes divisiones utilizando la regla de Ruffini.**

a) $(x^3 - 2x^2 + 3x - 5) : (x - 2)$ *c)* $(6x^3 + 2x - 3) : (x - 5)$

b) $(7x^3 + 2x^2 - 5x + 10) : (x + 2)$

a) $c(x) = x^2 + 3,\ r(x) = 1$

b) $c(x) = 7x^2 - 12x + 19,\ r(x) = -28$

c) $c(x) = 6x^2 + 30x + 152,\ r(x) = 757$

3 **Dados $p(x) = x + \frac{1}{3}$, $q(x) = x^4 + 3x^2 - 3x + 1$, y $s(x) = 3x^2 - 5x - 2$, calcula:**

a) $p(x) + q(x) - s(x)$ *d)* $q(x) : s(x)$

b) $p(x) \cdot s(x)$ *e)* $s(x) : p(x)$

c) $q(x) \cdot s(x)$ *f)* $q(x) : p(x)$

a) $p(x) + q(x) - s(x) = x + \frac{1}{3} + x^4 + 3x^2 - 3x + 1 - 3x^2 + 5x + 2 = x^4 + 3x + \frac{10}{3}$

b) $p(x) \cdot s(x) = 3x^3 - 5x^2 - 2x + x^2 - \frac{5x}{3} - \frac{2}{3} = 3x^3 - 4x^2 - \frac{11}{3}x - \frac{2}{3}$

c) $q(x) \cdot s(x) = 3x^6 - 5x^5 - 2x^4 + 9x^4 - 15x^3 - 6x^2 - 9x^3 + 15x^2 + 6x + 3x^2 - 5x - 2 = 3x^6 - 5x^5 + 7x^4 - 24x^3 + 12x^2 + x - 2$

d)

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + \quad + 3x^2 - 3x + 1 & 3x^2 - 5x - 2 \\ \cline{2-2}
-x^4 + 5x^3/3 + 2x^2/3 & x^2/3 + 5x/9 + 58/27 \\ \cline{1-1}
\quad 5x^3/3 + 11x^2/3 - 3x & \\
\quad -5x^3/3 + 25x^2/9 + 10x/9 & \\ \cline{1-1}
\qquad 58x^2/9 - 17x/9 + 1 & \\
\qquad -58x^2/9 + 290x/27 + 116/27 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 239x/27 + 143/27 &
\end{array}$$

e)

$$\begin{array}{l|l}
3x^2 - 5x - 2 & x + 1/3 \\ \cline{2-2}
-3x^2 - x & 3x - 6 \\ \cline{1-1}
\quad -6x - 2 & \\
\quad 6x + 2 & \\ \cline{1-1}
\qquad 0 &
\end{array}$$

f)

$$\begin{array}{l|l}
x^4 \quad + \quad 3x^2 \quad -3x + 1 & x + 1/3 \\ \cline{2-2}
-x^4 - (1/3)x^3 & x^3 - (1/3)x^2 + \\ \cline{1-1}
\quad -(1/3)x^3 + \quad 3x^2 \quad -3x + 1 & +(28/9)x - (109/27) \\
\quad (1/3)x^3 + (1/9)x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad (28/9)x^2 \quad -3x + 1 & \\
\qquad -(28/9)x^2 - (28/27)x & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -(109/27)x + 1 & \\
\qquad\quad (109/27)x + 109/81 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 190/81 &
\end{array}$$

4 **Factoriza los siguientes polinomios.**

a) $t(x) = 2x^2 + x - 1$

b) $p(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

c) $q(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45$

d) $s(x) = 9x^3 - 9x^2 - x + 1$

a) $t(x) = 2x^2 + x - 1 = 2(x - 1/2)(x + 1)$

b) $p(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x - 3)^3$

c) $q(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45 = (x - 3)^2 \cdot (x + 5)$

d) $s(x) = 9x^3 - 9x^2 - x + 1 = 9(x - 1)(x + 1/3)(x - 1/3)$

5 **Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 13x - 15}{x^3 + x^2 - 9x - 9}$ *c)* $\dfrac{2(2x^3 - 5x^2 + x + 2)}{2x^3 + x^2 - 8x - 4}$

b) $\dfrac{x^3 - 4x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$

a) $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 13x - 15}{x^3 + x^2 - 9x - 9} = \dfrac{(x - 3)(x + 1)(x - 5)}{(x - 3)(x + 1)(x + 3)} = \dfrac{x + 5}{x + 3}$

b) $\dfrac{x^3 - 4x}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \dfrac{x(x + 2)(x - 2)}{x(x + 2)^2} = \dfrac{x - 2}{x + 2}$

c) $\dfrac{2(2x^3 - 5x^2 + x + 2)}{2x^3 + x^2 - 8x - 4} = \dfrac{2(x - 1) \cdot 2(x - 2)(x + 1/2)}{2(x - 2)(x + 1/2)(x + 2)} = \dfrac{2(x - 1)}{x + 2}$

6 Dadas las fracciones algebraicas $a(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+4x+3}$ y $b(x) = \dfrac{5}{x^2+x-6}$, calcula $a(x)+b(x)$, $a(x)-b(x)$, $a(x)\cdot b(x)$ y $a(x):b(x)$.

- $a(x)+b(x) = \dfrac{2x-1}{(x+3)(x+1)} + \dfrac{5}{(x+3)(x-2)} =$
  $= \dfrac{(2x-1)(x-2)+5(x+1)}{(x+3)(x-2)(x+1)} = \dfrac{2x^2+7}{x^3+2x^2-5x-6}$
- $a(x)-b(x) = \dfrac{2x-1}{(x+3)(x+1)} - \dfrac{5}{(x+3)(x-2)} =$
  $= \dfrac{(2x-1)(x-2)-5(x+1)}{(x+3)(x-2)(x+1)} = \dfrac{2x^2-10x-3}{x^3+2x^2-5x-6}$
- $a(x)\cdot b(x) = \dfrac{2x-1}{(x+3)(x+1)} \cdot \dfrac{5}{(x+3)(x-2)} =$
  $= \dfrac{(2x-1)\cdot 5}{(x+3)^2\cdot(x-2)(x+1)} = \dfrac{10x-5}{x^4+5x^3+x^2-21x-18}$
- $a(x):b(x) = \dfrac{2x-1}{(x+3)(x+1)} : \dfrac{5}{(x+3)(x-2)} =$
  $= \dfrac{(2x-1)(x+3)(x-2)}{5\,(x+3)(x+1)} = \dfrac{2x^2-5x+2}{5x+5}$

7 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^4+7x^2+13=0$ *c)* $x^3-4x=0$

b) $x^3-9x^2+15x+25=0$ *d)* $x^3+4x=0$

a) $7^2-4\cdot 1\cdot 13<0$, la ecuación no tiene solución.

b) Se descompone el polinomio y se obtiene:
$(x+1)(x-5)^2=0$
Por lo que las soluciones son $x=-1$ y $x=5$.

c) Factorizando: $x(x+2)(x-2)=0$, por lo que las soluciones son $x=0$, $x=2$ y $x=-2$.

d) Factorizando: $x(x^2+4)=0$, por lo que la solución es $x=0$.

8 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^3-3x^2-9x-5=0$

b) $x^3-9x=0$

c) $x^4+4x^2=0$

d) $x^3-3x^2-2x+6=0$

a) Se descompone el polinomio: $(x+1)^2(x-5)=0$, por lo que las soluciones son $x=-1$ y $x=5$.

b) Factorizando: $x(x+3)(x-3)=0$, por lo que las soluciones son $x=0$, $x=-3$ y $x=3$.

c) Factorizando: $x^2(x^2+4)=0$, por lo que la solución es $x=0$.

d) Se descompone el polinomio: $(x-3)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)=0$, por lo que las soluciones son $x=3$, $x=-\sqrt{2}$ y $x=\sqrt{2}$.

9 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^4-5x^2+4=0$

b) $9x^4-6x^2+1=0$

c) $x^4+5x^2+20=0$

a) $x^2=\dfrac{5\pm 3}{2} \Rightarrow x^2=4$ o $x^2=1$, por lo que las soluciones son:
$x=-2, x=2, x=-1, x=1$

b) $x^2=\dfrac{6}{18}=\dfrac{1}{3}$, por lo que las soluciones son: $x=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$, $x=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

c) $5^2-4\cdot 1\cdot 20<0$, por lo que no tiene solución.

10 Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $x-5=-\dfrac{6}{x}$ *c)* $\dfrac{6x+1}{x^2-4}=\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x}{x-2}$

b) $\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{4}{x^2-1}$ *d)* $\dfrac{4x}{x^2-1}-\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{25}{x^2-1}$

a) Se reduce a común denominador y se obtiene:
$x^2-5x+6=0$, y sus soluciones son $x=2$ y $x=3$.

b) Se reduce a común denominador y se obtiene:
$2x(x-1)=4 \Rightarrow 2x^2-2x-4=0$ y se obtiene para x dos valores, 2 y -1.
$x=-1$ anula el denominador de la ecuación racional, por lo que la solución es $x=2$.

c) Se reduce a común denominador, se ordenan los términos:
$2x^2-5x-3=0$ y se obtiene para x dos valores, 3 y $-1/2$.
Ambas soluciones son válidas.

d) Se reduce a común denominador y se obtiene:
$4x-4x+4=25$ que es una igualdad imposible. Por tanto, la ecuación no tiene solución.

11 Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales.

a) $3+\sqrt{2x+3}=2x$ *d)* $x-1=\sqrt{x^2-25}$

b) $\sqrt[3]{9x-8}=\sqrt{2x}$ *e)* $\sqrt{2x-3}+1=x$

c) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x}=6$ *f)* $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=3$

a) $\sqrt{2x+3}=2x-3$
Elevando al cuadrado y reagrupando términos, se obtiene $2x^2-7x+3=0$, cuyas soluciones son $x=3$ y $x=1/2$. Solo es válida la solución $x=3$.

b) Se reduce a común índice y se obtiene:
$$(9x-8)^2=8x^3 \Rightarrow 8x^3-81x^2+144x-64=0$$
Se factoriza la ecuación y se obtienen las soluciones $x=8$ y $x=\dfrac{17\pm\sqrt{33}}{16}$. Para la ecuación irracional inicial solo son válidas las soluciones $x=8$ y $x=\dfrac{17+\sqrt{33}}{16}$

c) Separamos los radicales, y elevando al cuadrado y reagrupando términos se obtiene:
$$12\sqrt{x}=30 \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{5}{2} \Rightarrow x=\frac{25}{4}$$

d) Elevando al cuadrado se obtiene:
$$x^2-2x+1=x^2-25 \Rightarrow x=13$$

e) $\sqrt{2x-3}=x-1$
Elevando al cuadrado y reagrupando términos, se obtiene $x^2-4x+4=0$, cuya solución es $x=2$.

f) Separamos los radicales, y elevando al cuadrado y reagrupando términos se obtiene: $x-5=3\sqrt{x-1}$.
Volvemos a elevar al cuadrado y se obtiene la ecuación $x^2-19x+34=0$, cuyas soluciones son $x=17$ y $x=2$. Solo verifica la ecuación irracional inicial $x=2$.

Resuelve estas ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

12 $3^x+3^{-x}=2$

Hacemos $3^x=a$, y nos queda:
$$a+\frac{1}{a}=2 \Rightarrow a^2-2a+1=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow 3^x=1 \Rightarrow x=0$$

13 $10^x+10^{x-1}+3\cdot 10^{x-2}=11\,300$

Hacemos $10^x=a$, y nos queda:
$$a+\frac{a}{10}+\frac{3a}{100}=11\,300 \Rightarrow (100+10+3)\frac{a}{100}=11\,300$$
$$\Rightarrow a=10^4 \Rightarrow 10^x=10^4 \Rightarrow x=4$$

14 $1 = 2(1 - e^{-x})$

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-x} \Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \ln 2$$

15 $\ln (x + 1) - \ln x = 1$

Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\frac{x+1}{x} = e \Rightarrow x + 1 - ex = 0 \Rightarrow x(1 - e) = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e - 1}$$

16 $\log (x + 3) - \log (x + 1) = 1 - \log 5$

Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\frac{x+3}{x+1} = 2 \Rightarrow x = 1$$

17 $\log 2^{\log x} + \log x^{\log 2} = \log x^x$

Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log x \cdot \log 2 + \log 2 \cdot \log x = x \cdot \log x$$

Si $\log x = 0$ entonces $x = 1$.

$\log 2 + \log 2 = x \Rightarrow x = 2 \log 2 = \log 4$

18 **Resuelve las siguientes inecuaciones.**

a) $3x + 1 \leq 7$ *c)* $-x^2 - x + 6 \geq 0$

b) $x^2 + 9 < 0$ *d)* $x^4 + 2x^3 - 2x - 1 > 0$

a) $3x \leq 6 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow$ El intervalo solución es $(-\infty, 2]$.

b) $x^2 \leq -9$ es imposible.

c) La gráfica de la parábola $y = -x^2 - x + 6$ corta el eje de abscisas en $x = -3$ y $x = 2$, y es convexa, por lo que el intervalo solución es $[-3, 2]$.

d) Factorizamos el polinomio y elaboramos una tabla de signos:

$$(x + 1)^3 (x - 1) > 0$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$x - 1$	−	−	+
$x + 1$	−	+	+
	+	−	+

El conjunto solución es $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

19 **Resuelve las siguientes inecuaciones.**

a) $\dfrac{x^2 - 16}{x + 5} > 0$ *c)* $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 9} \leq 0$

b) $\dfrac{x + 5}{x^2 - 9} \leq 0$ *d)* $\dfrac{x + 5}{16 - x^2} \geq 0$

a) Factorizamos el numerador de la fracción y elaboramos una tabla de signos:

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -4)$	$(-4, 4)$	$(4, +\infty)$
$x + 4$	−	−	+	+
$x - 4$	−	−	−	+
$x + 5$	−	+	+	+
	−	+	−	+

El conjunto solución es $(-5, -4) \cup (4, +\infty)$.

b) Factorizamos el denominador de la fracción y elaboramos una tabla de signos:

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
$x + 5$	−	+	+	+
$x + 3$	−	−	+	+
$x - 3$	−	−	−	+
	−	+	−	+

El conjunto solución es $(-\infty, -5] \cup (-3, 3)$.

c) Factorizamos el numerador de la fracción y elaboramos una tabla de signos:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 2)$	$(2, 9)$	$(9, +\infty)$
$x + 3$	−	+	+	+
$x - 2$	−	−	+	+
$x - 9$	−	−	−	+
	−	+	−	+

El conjunto solución es $(-\infty, -3] \cup [2, 9)$.

d) Factorizamos el denominador de la fracción y elaboramos una tabla de signos:

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -4)$	$(-4, 4)$	$(4, +\infty)$
$x + 5$	−	+	+	+
$4 - x$	+	+	+	−
$4 + x$	−	−	+	+
	+	−	+	−

El conjunto solución es $(-\infty, -5] \cup (-4, 4)$.

20 **Resuelve los siguientes sistemas.**

a) $\begin{cases} 2x + 2y + z = 4 \\ x + 3y + z = 0 \\ 5x + y + z = 12 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x - 5y + z = -2 \\ x - 4z = 3 \\ 2x - 5y - 3z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2y + 2z = 0 \\ x - 4y - z = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x + 2y + z = 4 \\ x + 3y + z = 0 \\ 5x + y + z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 4 \\ 5x + y + z = 12 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ -4y - z = 4 \\ -14y - 4z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ -4y - z = 4 \\ y = -4 \end{cases}$

$\Rightarrow y = -2, z = 4, x = 2$

b) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2y + 2z = 0 \\ x - 4y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2y + 2z = 0 \\ -2y - 2z = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2y + 2z = 0 \\ 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow$ Sistema incompatible. No tiene solución.

c) $\begin{cases} x - 5y + z = -2 \\ x - 4z = 3 \\ 2x - 5y - 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y + z = -2 \\ x - 4z = 3 \\ x - 4z = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 5y + z = -2 \\ x = 4z + 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. $x = 4z + 3, y = z + 1$

21 **Resuelve los siguientes sistemas.**

a) $\begin{cases} x \cdot y = 4 \\ x^2 \cdot y^3 = 16 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 4^{x+1} = 2^y \\ \ln x + 1 = \ln y \end{cases}$

a) $x = \dfrac{4}{y}$, sustituimos en la segunda ecuación y se obtiene:

$$16y = 16 \Rightarrow y = 1, x = 4$$

b) La primera ecuación se puede escribir como:

$$2^{2x+2} = 2^y \Rightarrow 2x + 2 = y$$

de la segunda ecuación se deduce que $y = xe$, por lo que tenemos:

$$2x + 2 = xe \Rightarrow 2 = x(e - 2) \Rightarrow x = \frac{2}{e - 2}, y = \frac{2e}{e - 2}$$

Ejercicios y problemas (páginas 63/68)

Polinomios y operaciones con polinomios

1 Dados $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 9$ y $q(x) = 7x^2 + 11x - 5$, halla:

a) $3p(x) - 2q(x)$

b) $\dfrac{p(x)}{q(x)}$

a) $12x^3 - 20x^2 - 7x - 17$

b) $c(x) = \dfrac{4}{7}x - \dfrac{58}{49}$

$r(x) = \dfrac{1\,023}{49}x - \dfrac{731}{49}$

2 Calcula.

a) $(3x - 4)^2$

b) $(x^2 - 3x + 1)^2$

c) $(3x^3 - 7x + 2)(-x - 2)x^2$

d) $(2x - 3)^3$

e) $(x^2 - 5x)(x^2 + 5x)$

f) $(x^3 - 2x^2 - 5)(x^3 - x)$

a) $(3x - 4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$

b) $(x^2 - 3x + 1)^2 = (x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 1) =$
$= x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$

c) $(3x^3 - 7x + 2)(-x - 2)x^2 = -3x^6 - 6x^5 + 7x^4 + 12x^3 - 4x^2$

d) $(2x - 3)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

e) $(x^2 - 5x)(x^2 + 5x) = x^4 - 25x^2$

f) $(x^3 - 2x^2 - 5)(x^3 - x) = x^6 - 2x^5 - x^4 - 3x^3 - 5x$

3 Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones.

a) $(x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 3) : (x^2 - x + 3)$

b) $(2x^6 - 5x^5 + x^4 + 5x^2 + 5x) : (x^4 - 1)$

c) $(12x^4 - 15x^3 - 32x^2 + 41x + 6) : (4x^2 - 5x)$

a) $c(x) = x^3 - 2x^2 + 1$; $r(x) = x - 6$

b) $c(x) = 2x^2 - 5x + 1$; $r(x) = 7x^2 + 1$

c) $c(x) = 3x^2 - 8$; $r(x) = x + 6$

4 Dados dos polinomios, $P(x)$ de grado 5 y $Q(x)$ de grado 3:

a) ¿Cuál será el grado de $P(x) \cdot Q(x)$?

b) ¿Cuál será el grado de $P(x) : Q(x)$?

c) ¿Cuál será, como máximo, el grado del resto de la división $P(x)$ entre $Q(x)$?

a) El grado de $P(x) \cdot Q(x)$ será la suma de los grados de $P(x)$ y $Q(x)$, es decir, 8.

b) El grado de $P(x) : Q(x)$ será la resta de los grados de $P(x)$ y $Q(x)$, es decir, 2.

c) El grado del resto ha de ser como máximo un grado menos que el grado del divisor, en nuestro caso, 2.

5 Determina el valor de a y b para que sea exacta la división $(3x^4 - 8x^3 - 5x^2 + ax + b) : (x^2 - 3x)$.

Se realiza la división y se obtiene de resto $(a - 6)x + b$. Para que la división sea exacta, se debe cumplir que $a = 6$ y $b = 0$.

6 Calcula el cociente y el resto de:

a) $(7x^3 - 5x^2 + 3x - 7) : (x + 2)$

b) $(4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x) : (x - 2)$

c) $(x^4 - 16) : (x + 2)$

a) $c(x) = 7x^2 - 19x + 41$; $r(x) = -89$

b) $c(x) = 4x^3 + 5x^2 + 12x + 23$; $r(x) = 46$

c) $c(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$; $r(x) = 0$

Factorización de polinomios y teorema del resto

7 Dados los polinomios $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ y $q(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$:

a) Calcula las raíces de $p(x)$ y de $q(x)$.

b) Descompón factorialmente los dos polinomios.

c) Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de $p(x)$ y $q(x)$ ayudándote de sus descomposiciones factoriales.

a) Las raíces de $p(x)$ son $x = 1$, doble y $x = 3$.

Las raíces de $q(x)$ son $x = 5$, $x = 3$ y $x = 1$.

b) $p(x) = (x - 3)(x - 1)^2$

$q(x) = (x - 3)(x - 1)(x - 5)$

c) m.c.d. $= (x - 3)(x - 1) = x^2 - 4x + 3$

m.c.m. $= (x - 3)(x - 1)^2(x - 5) = x^4 - 10x^3 + 32x^2 - 38x + 15$

8 Utiliza el teorema del resto para determinar el resto de la división del polinomio $P(x) = x^4 - 7x^3 + 12x - 6$ entre $(x - 2)$ y entre $(x + 3)$.

a) $P(2) = 2^4 - 7 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2 - 6 = -22$

b) $P(-3) = (-3)^4 - 7 \cdot (-3)^3 + 12 \cdot (-3) - 6 = 228$

9 Calcula el valor de m para que el polinomio:

$$p(x) = x^3 + mx^2 + (3m + 1)x - 2$$

sea divisible por el binomio $x + 2$.

Calculando $p(-2)$ e igualando a 0 se obtiene $m = -6$.

10 Si la división del polinomio $p(x)$ entre $(x + 2)$ es exacta, ¿qué puedes afirmar de $p(-2)$? ¿Y de $p(2)$?

$p(-2) = 0$ y $p(2)$ no se puede conocer.

11 Determina en cada caso el valor de k, para que las siguientes divisiones sean exactas:

a) $(x^6 - x^4 + 3x^3 - kx^2 + x - 5) : (x - 1)$

b) $(x^5 + 3x^3 + 2x^2 + kx - 5) : (x + 1)$

c) $(x^5 - 7x^4 + 2x^3 + 8x^2 - x - k) : (x + 2)$

a) Sustituyendo x por 1 e igualando a cero, se obtiene:

$k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$

b) Sustituyendo x por -1 e igualando a cero, se obtiene:

$k + 7 = 0 \Rightarrow k = -7$

c) Sustituyendo x por -2 e igualando a cero, se obtiene:

$k + 126 = 0 \Rightarrow k = -126$

12 Si dado el polinomio $q(x)$ se verifica que $q(-7) = 10$, ¿cuál será el resto de la división de $q(x) : (x + 7)$?

Por el teorema del resto, será 10.

13 Calcula el valor de m para que el resto de la división de $(x^4 - 7x^3 + mx^2 - 5x + 2)$ entre $(x - 2)$ sea 7.

Sustituimos x por 2 e igualamos a 7.

Se obtiene $-48 + 4m = 7 \Rightarrow m = \dfrac{55}{4}$

14 **Sin efectuar divisiones, contesta razonadamente las siguientes preguntas.**

a) **¿Es divisible $(x^3 - 64)$ por $(x - 4)$? ¿Y por $(x + 4)$?**

b) **¿Es divisor $(x + 3)$ de $(x^4 - 81)$? ¿Y de $(x^4 + 81)$?**

c) **¿Es el polinomio $p(x) = 2x^3 - 2x - 6x^2 + 6$ múltiplo del binomio $q(x) = x - 4$?**

a) Por $(x - 4)$ sí, ya que $p(4) = 4^3 - 64 = 0$.
Por $(x + 4)$ no, ya que $p(-4) = (-4)^3 - 64 \neq 0$.

b) $(x + 3)$ es divisor de $x^4 - 81$, ya que $(-3)^4 - 81 = 0$.
En cambio no es divisor de $x^4 + 81$, ya que: $(-3)^4 + 81 \neq 0$.

c) Determinaremos si $p(x)$ es divisible por $q(x)$, calculando el valor: $p(4) = 2 \cdot 4^3 - 2 \cdot 4 - 6 \cdot 4^2 + 6 = 128 - 8 - 96 + 6 \neq 0$.
No es divisible, luego $p(x)$ no es múltiplo de $q(x)$.

15 **Halla el polinomio de segundo grado que satisfaga las siguientes condiciones:**

a) **Que el coeficiente de segundo grado sea -2.**

b) **Que sea divisible por $x - 3$.**

c) **Que al dividirlo por $x + 2$, el resto de la división sea -10.**

Primera condición

$p(x) = -2x^2 + bx + c$

Segunda condición

$p(3) = 0 = 18 + 3b + c$

Tercera condición

$p(-2) = -10 = -8 - 2b + c$

Resolviendo el sistema se obtiene $b = 4$ y $c = 6$:
$p(x) = -2x^2 + 4x + 6$

16 **Dado el polinomio $p(x) = x^3 - ax^2 + 7x + b$, calcula a y b sabiendo que $p(x)$ es divisible por $(x - 5)$ y que el resto de dividir $p(x)$ por $(x - 2)$ es 9.**

Imponiendo $p(5) = 0$ y $p(2) = 9$ obtenemos $a = 7$ y $b = 15$.

17 **Dado el polinomio $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - ax + b$, determina el valor de a y b sabiendo que al dividirlo por $(x - 1)$ la división es exacta, y que al dividirlo por $(x + 2)$ el resto es 101.**

Al sustituir x por 1 e igualar a cero, se obtiene $2 - a + b = 0$. Si se sustituye x por -2 y se iguala a 101, se obtiene $48 + 40 + 16 + 2a + b = 101$.

Al resolver el sistema, se obtienen los valores pedidos:

$$\begin{cases} -a + b = -2 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = -1/3, b = -7/3$$

18 **Calcula a y b para que $p(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 - 4x$ sea divisible por $(x + 4)$ y al dividirlo por $(x + 1)$ el resto sea -6.**

Al sustituir x por -4 e igualar a cero, se obtiene:

$$512 - 64a + 16b + 16 = 0$$

A continuación se sustituye x por -1 y se iguala a 6, con lo que tenemos la ecuación $2 - a + b + 4 = -6$.

Se resuelve el sistema y se obtienen los valores pedidos:

$$\begin{cases} -64a + 16b = -528 \\ -a + b = -12 \end{cases} \Rightarrow a = 7, b = -5$$

19 **Siendo $p(x) = x^5 + ax^4 + 2x^3 - x^2 + bx - 2$, calcula a y b para que sea múltiplo de $(x - 1)$ y $(x + 2)$.**

Se sustituye x por 1 y se iguala a cero, se obtiene entonces $1 + a + 2 - 1 + b - 2 = 0$. A continuación, se sustituye x por -2 y se vuelve igualar a cero, $-32 + 16a - 16 - 4 - 2b - 2 = 0$.

Se resuelve el sistema, obteniendo los valores de a y b:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 16a - 2b = 54 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = -3$$

20 **Escribe tres polinomios de tercer grado que tengan por raíces:**

a) **2, -2 y 7**

b) **2 y -1**

c) **Únicamente 3**

a) $a(x - 2)(x + 2)(x - 7)$

b) $a(x - 2)^2 \cdot (x + 1)$ o $a(x - 2)(x + 1)^2$

c) $a(x - 3)^3$

21 **Escribe un polinomio de grado 4 que no tenga ninguna raíz real.**

$(x^2 + a) \cdot (x^2 + b)$, donde $a > 0$ y $b > 0$

22 **Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes polinomios.**

- **$p(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 2x - 3)$**
- **$q(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4)$**
- **$s(x) = (x^2 + 6x + 9) \cdot (x^2 - 3x + 2)$**

m.c.d. $= (x - 2)(x - 1)$
m.c.m. $= (x + 1)^2(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 3)^2$

23 **Descompón factorialmente los siguientes polinomios y halla sus raíces.**

a) **$x^4 - 9$**

b) **$x^3 - 4x^2 + x + 6$**

c) **$x^3 + 3x^2 - 9x + 5$**

d) **$3x^3 - 9x^2 - 3x + 9$**

a) $x^4 - 9 = (x^2 + 3)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$, sus raíces son $x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$

b) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)(x - 3)(x + 1)$, sus raíces son $x = 2$, $x = 3$ y $x = -1$

c) $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = (x + 5)(x - 1)^2$, sus raíces son $x = -5$ y $x = 1$ (doble)

d) $3x^3 - 9x^2 - 3x + 9 = 3(x - 1)(x + 1)(x - 3)$ sus raíces son $x = 1, x = -1$ y $x = 3$

24 **Extrae factor común y utiliza las identidades notables para factorizar cada uno de los siguientes polinomios, y di cuáles son sus raíces.**

a) **$x^3 + 6x^2 + 9x$**

b) **$5x^4 - 20x$**

c) **$x^3 - 4x$**

d) **$2x^4 + 8x^2$**

e) **$6x^3 - 54x$**

f) **$\dfrac{x^3}{4} + x^2 + x$**

a) $x^3 + 6x^2 + 9x = x^3 + 6x^2 + 9x = x(x + 3)^2$, raíces: 0 y -3 (doble)

b) $5x^4 - 20x = 5x(x^3 - 4)$, sus raíces son: 0 y $\sqrt[3]{4}$

c) $x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$, sus raíces son: 0, 2 y -2

d) $2x^4 + 8x^2 = 2x^2(x^2 + 4)$, sus raíces son: 0 (doble)

e) $6x^3 - 54x = 6x(x - 3)(x + 3)$, sus raíces son: 0, 3 y -3

f) $\dfrac{x^3}{4} + x^2 + x = \dfrac{1}{4}(x + 2)^2x$, sus raíces son: -2 (doble) y 0

25 **Factoriza.**

a) **$x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 16x + 24$**

b) **$4x^3 + 14x^2 + 6x$**

c) **$3x^3 - 6x^2 - 45x$**

a) $x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 16x + 24 =$
$= (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x^2 + 2x + 4)$

b) $4x^3 + 14x^2 + 6x = 2x(2x + 1)(x + 3)$

c) $3x^3 - 6x^2 - 45x = 3x(x + 3)(x - 5)$

26 **Determina las raíces de cada uno de los siguientes polinomios.**

a) $x^4 - 7x^2 - 6x$

b) $x^5 + 3x^4 - x - 3$

c) $3x^4 - 5x^3 - 28x^2$

a) 0, −1, −2, 3

b) 1, −1, −3

c) 0 (doble), 4, −7/3

27 **Si un polinomio, $P(x)$, tiene como raíces $x = -2$ y $x = 4$, ¿puede ser el grado de $P(x)$ mayor que dos?**

Sí, si alguna de las raíces no es simple.

28 **Calcula un polinomio que tiene por cuadrado $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$.**

Descomponiendo el polinomio obtenemos:

$$p(x) = (x + 3)^2(x - 1)^2$$

Aplicando la raíz cuadrada encontramos el polinomio buscado:

$$(x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3$$

29 **Averigua el m.c.m. y el m.c.d. de los siguientes polinomios.**

a) $A(x) = 2x^4 + x^3 - x^2$ y $B(x) = x^3 - x$

b) $A(x) = x^4 + 2x^2 + 1$, $B(x) = x^5 + 2x^3 + x$ y $C(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2$

c) $A(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ y $B(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

a) m.c.m. $(A(x), B(x)) = (x + 1)(x - 1)(2x - 1)x^2$;
m.c.d. $(A(x), B(x)) = (x + 1)x$

b) m.c.m. $(A(x), B(x), C(x)) = x(x - 2)(x^2 + 1)^2$;
m.c.d. $(A(x), B(x), C(x)) = (x^2 + 1)^2$

c) m.c.m. $(A(x), B(x)) = (x^2 + x + 1)(x + 1)(x - 1)^2(2x + 1)$;
m.c.d. $(A(x), B(x)) = (x - 1)$

Fracciones algebraicas

30 **Dada la fracción $\dfrac{x - 2}{x^2 + 1}$ determina una equivalente que tenga en el numerador un polinomio de grado 3.**

Basta con multiplicar numerador y denominador por el mismo polinomio de grado 2.

31 **Determina, en cada caso, $q(x)$ de modo que estas fracciones sean equivalentes.**

a) $\dfrac{2x - 5}{4x} = \dfrac{q(x)}{12x}$

b) $\dfrac{3x + 1}{x^2} = \dfrac{3x^2 + x}{q(x)}$

c) $\dfrac{x + 3}{2x} = \dfrac{x^2 - 9}{q(x)}$

d) $\dfrac{x^2 - 4x}{x^4} = \dfrac{x - 4}{q(x)}$

a) $6x - 15$

b) x^3

c) $2x^2 - 6x$

d) x^3

32 **Extrae factor común y simplifica cada una de las siguientes fracciones.**

a) $\dfrac{3x^2 + 3xy}{2xy + 2y^2}$

b) $\dfrac{2x^2 - 8}{2x^2 - 8x + 8}$

c) $\dfrac{x^3 - xy^2}{2x^2 - 2xy}$

a) $\dfrac{3x}{2y}$

b) $\dfrac{x + 2}{x - 2}$

c) $\dfrac{x + y}{2}$

33 **Calcula la fracción irreducible equivalente a las siguientes fracciones.**

a) $\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

b) $\dfrac{7x(x + 2)}{x^3 - 4x}$

c) $\dfrac{6x^2 - 30x + 36}{3x^2 - 9x + 6}$

a) $\dfrac{x + 1}{x^2 + 3x}$

b) $\dfrac{7}{x - 2}$

c) $\dfrac{2(x - 3)}{x - 1}$

34 **Averigua si existe un polinomio $p(x)$ que verifique la siguiente igualdad:**

$$\frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1} = \frac{p(x)}{x + 1}$$

$p(x) = x + 5$

35 **Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

b) $\dfrac{x^3 - 64}{x^2 - 16}$

c) $\dfrac{2x^5 + x^3 + 2x^2 - 10x + 5}{2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 4x + 3}$

d) $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$

a) $\dfrac{x + 1}{x - 1}$

b) $\dfrac{x^2 + 4x + 16}{x + 4}$

c) $\dfrac{2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x - 5}{2x^3 + 5x^2 + x - 3}$

d) $\dfrac{1}{x - 1}$

36 **Efectúa, simplificando al máximo, las siguientes operaciones con fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{7x}{x + 1} - \dfrac{2x}{3x(x + 1)} - \dfrac{7}{x + 1}$

b) $\dfrac{x^2 - 9}{x + 1} \cdot \dfrac{x^2 - 1}{x + 3}$

c) $\dfrac{x^4 - 16}{3x - 15} : \dfrac{4x^2 + 16}{x^2 - 9}$

d) $\left(\dfrac{x + 1}{x - 3}\right)^2$

e) $\dfrac{3x}{x - 2}\left(\dfrac{x + 1}{x - 1} - \dfrac{2x + 5}{x}\right)$

f) $\dfrac{x - 2}{2x} + \dfrac{x - 1}{x} + \dfrac{3x + 3}{3x}$

g) $\dfrac{x^2 - 5}{x} - \dfrac{x + 1}{x^2}$

h) $\dfrac{10}{3x^2 + 6x} - \dfrac{1}{4x^2 + 8x}$

i) $\dfrac{3}{x + 1} - \dfrac{5x + 1}{x - 1} + \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

j) $\dfrac{x - 1}{x + 3} + \dfrac{2x - 5}{x - 1} + \dfrac{4x}{x^2 + 2x - 3}$

k) $2 - \dfrac{5}{x^2+2x+1} - \dfrac{7x}{x+1}$

l) $\left(1 - \dfrac{x+5}{x+2} \cdot \dfrac{x-3}{x+2}\right) : \dfrac{4}{x+2}$

m) $\left(\dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{x-2}{x+2}\right) \cdot \left(x - \dfrac{4}{x}\right)$

n) $\dfrac{2x}{x-1/x} - \dfrac{2}{x^2+1}$

ñ) $\dfrac{6}{\dfrac{1}{1+(1/x)} - 1}$

o) $\dfrac{x^2-8x+16}{x^2+5x+6} : \dfrac{x-4}{x+2}$

p) $\dfrac{x^2-49}{2x} \cdot \dfrac{3x^3}{x^2+2x-35}$

a) $\dfrac{21x-23}{3(x+1)}$

b) $(x-3)(x-1)$

c) $\dfrac{x^4-13x^2+36}{12x-60}$

d) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-6x+9}$

e) $\dfrac{-3x^2-6x+15}{(x-1)(x-2)}$

f) $\dfrac{5x-2}{2x}$

g) $\dfrac{x^3-6x-1}{x^2}$

h) $\dfrac{37}{12x^2+24x}$

i) $\dfrac{-5x^2-x-4}{x^2-1}$

j) $\dfrac{3x^2+3x-14}{x^2+2x-3}$

k) $\dfrac{-5x^2-3x-3}{x^2+2x+1}$

l) $\dfrac{2x+19}{4x+8}$

m) 8

n) $\dfrac{2x^4+2}{x^4-1}$

ñ) $-6(x+1)$

o) $\dfrac{x-4}{x+3}$

p) $\dfrac{3x^3-21x^2}{2x-10}$

37 **Calcula *a* y *b* para que se cumpla que:**

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

$3x+2 = a(x+2) + b(x-1)$

Si $x = 1 \Rightarrow 5 = a \cdot 3 \Rightarrow a = 5/3$

Si $x = 2 \Rightarrow -4 = b \cdot (-3) \Rightarrow b = 4/3$

38 **Calcula *a*, *b* y *c*, sabiendo que:**

$$\frac{-2x^2-16x+2}{(x-1)(x+2)(x-5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-5}$$

$a = \dfrac{4}{3}, b = \dfrac{26}{21}$ y $c = -\dfrac{32}{7}$

39 **Determina *A*, *B* y *C* para que se cumpla que:**

$$\frac{3x^2+5}{4x^3+16x^2+21x+9} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+3} + \frac{C}{(2x+3)^2}$$

$A = 8, B = -\dfrac{29}{2}$ y $C = -\dfrac{47}{2}$

Ecuaciones polinómicas

40 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $x^2-5x+4=0$

b) $x^2-3x-4=0$

c) $x^2-6x-16=0$

d) $x^2-16=0$

e) $2x^2+10x+8=0$

f) $x^2-x-6=0$

a) $x_1 = 1, x_2 = 4$

b) $x_1 = 4, x_2 = -1$

c) $x_1 = 8, x_2 = -2$

d) $x_1 = 4, x_2 = -4$

e) $x_1 = -4, x_2 = -1$

f) $x_1 = 3, x_2 = -2$

41 **¿Qué valor debe tener *c* en la ecuación $x^2-5x+c=0$ para que esta no tenga soluciones reales?**

Imponiendo que el discriminante sea negativo $\Delta < 0$:

$\Delta = 25 - 4c < 0 \Rightarrow -4c < -25 \Rightarrow 4c > 25 \Rightarrow c > 25/4$. En el intervalo $(25/4, +\infty)$ la ecuación no tendrá solución real.

42 **Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas.**

a) $x^4+3x^2-4=0$

b) $x^4-5x^2+4=0$

c) $x^4+5x^2+4=0$

d) $x^4-10x^2+9=0$

a) $x = \pm 1$

b) $x = \pm 1, x = \pm 2$

c) No tiene soluciones reales.

d) $x = \pm 1, x = \pm 3$

43 **Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones.**

a) $3x^3+12x^2+3x-18=0$

b) $x^3+x^2-16x+20=0$

c) $x^4-x^3-24x^2+4x+80=0$

d) $2x^3-24x+32=0$

e) $x^3+9x^2+15x+7=0$

f) $2x^3-5x^2-4x+3=0$

g) $6x^3+25x^2-24x+5=0$

a) $x = 1, x = -2, x = -3$

b) $x = -5, x = 2$

c) $x = 2, x = -2, x = -4, x = 5$

d) $x = 2, x = -4$

e) $x = -7, x = -1$

f) $x = -1, x = 3, x = 1/2$

g) $x = -5, x = 1/3, x = 1/2$

Ecuaciones racionales

44 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $x^2 - \dfrac{64}{x^2} = -12$

b) $\dfrac{4}{x^2-1} + \dfrac{1}{x+1} = 0$

c) $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x^2-9} = \dfrac{1}{x-3}$

d) $\dfrac{3x-3}{x-1} + \dfrac{x^2+2}{x+1} = \dfrac{7x+1}{x^2-1}$

a) $x = \pm 2$

b) $x = -3$

c) No tiene solución.

d) $x = -3, x = 2$

Ecuaciones con valor absoluto

45 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $|x^2 + 7x - 8| = 10$

b) $\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right| = 6$

c) $|x^2 + 2| = 4$

a) $x_1 = -9, x_2 = 2, x_3 = \dfrac{-7+\sqrt{41}}{2}, x_4 = \dfrac{-7-\sqrt{41}}{2}$

b) $x_1 = \dfrac{13}{5}, x_2 = \dfrac{11}{7}$

c) $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$

Ecuaciones irracionales

46 Resuelve estas ecuaciones.

a) $x = 1 + \sqrt{x^2 + 25}$

b) $\sqrt{2x+5} + 3 = 3x$

c) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{x+1}{2}$

d) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x} = 6$

a) No tiene solución.

b) $x = 2$. No es solución $x = 2/9$.

c) $x = 4$. No es solución $x = -1$.

d) $x = 25/4$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

47 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $2^{-2x} = 10^{x+1}$

b) $3^{x+1} + 9^{x-1} = 162$

c) $\sqrt{2^x\sqrt{4^x\sqrt{8^x}}} = \sqrt[4]{2^{2x+7}}$

d) $3^{2x} = 12$

e) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 117$

f) $0{,}4 = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

g) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4x-1} - 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} + 3 = 0$

h) $2 \cdot 4^{x+1} + 2^{x+2} = \dfrac{3}{2}$

i) $3^{x+1} = 2 \cdot 5^{2x}$

a) $2^{-2x} = 10^{x+1}$

No se puede expresar la ecuación en función de una única potencia, por lo que se toman logaritmos decimales:

$-2x \log 2 = x + 1 \Rightarrow x(-2\log 2 - 1) = 1$

$\Rightarrow x = -\dfrac{1}{2\log 2 + 1}$

b) $3^{x+1} + 9^{x-1} = 162$

Se expresa la ecuación en función de 3^x, y se obtiene una ecuación de segundo grado con una incógnita:

$3 \cdot 3^x + \dfrac{3^{2x}}{9} = 162 \Rightarrow 27 \cdot 3^x + 3^{2x} = 1\,458$

$\Rightarrow 3^{2x} + 27 \cdot 3^x - 1\,458 = 0$

De esta ecuación se deduce que $3^x = 27$, por lo que $x = 3$.

c) $\sqrt{2^x\sqrt{4^x\sqrt{8^x}}} = \sqrt[4]{2^{2x+7}}$

Expresando los dos miembros bajo una única raíz:

$\sqrt[8]{2^{4x} \cdot 4^{2x} \cdot 8^x} = \sqrt[4]{2^{2x+7}} \Rightarrow \sqrt[8]{2^{11x}} = \sqrt[4]{2^{2x+7}}$

Igualando los exponentes:

$$\frac{11x}{8} = \frac{2x+7}{4} \Rightarrow x = 2$$

d) $3^{2x} = 12$

Tomando logaritmos:

$$2x \log 3 = \log 12 \Rightarrow x = \frac{\log 12}{2\log 3}$$

e) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 117$

$\dfrac{3^x}{3} + 3^x + 3 \cdot 3^x = 117$

$\Rightarrow 3^x\left(\dfrac{1}{3} + 1 + 3\right) = 117 \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow x = 3$

f) $0{,}4 = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

Se despeja e^{-x} y se aplican logaritmos:

$$0{,}4 + 0{,}4e^{-x} = 1 \Rightarrow e^{-x} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

g) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4x-1} - 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} + 3 = 0$

Sea $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} = t$. Sustituyendo se tiene:

$$2t^2 - 7t + 3 = 0$$

con lo que las soluciones para t son 3 y $\dfrac{1}{2}$.

Si $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} = 3$, tomando logaritmos:

$2x\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln 3 \Rightarrow -2x\ln 2 = \ln 3 \Rightarrow x = -\dfrac{\ln 3}{2 \cdot \ln 2}$

Si $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} = \dfrac{1}{2}$, tenemos:

$$2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

h) $2 \cdot 4^{x+1} + 2^{x+2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow 2^{2x+3} + 2^{x+2} = \dfrac{3}{2}$

Llamando $2^x = y$, tenemos:

$8y^2 + 4y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow 16y^2 + 8y - 3 = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{3}{4}$

e $y = \dfrac{1}{4}$

Solo es válida la solución positiva, por lo que $x = -2$.

i) $3^{x-1} = 2 \cdot 5^{2x}$

Tomando logaritmos neperianos, tenemos:

$(x+1)\ln 3 = \ln 2 + 2x\ln 5 \Rightarrow x\ln 3 - 2x\ln 5 =$

$= \ln 2 - \ln 3 \Rightarrow x(\ln 3 - 2\ln 5) = \ln 2 - \ln 3$

$\Rightarrow x = \dfrac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 3 - 2\ln 5}$

48 Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_8 4^{2x} = 4$

b) $\ln(x+2)\log e = 1$

c) $\log e^{\ln x} + \ln x^{\log e} = 1$

d) $x^{1+\log x} = 10x$

e) $\log_{x+1} 25 = 2$

f) $\log\sqrt{x+1} - \log\sqrt{x} = \log 1\,000$

g) $2x \cdot \ln x - 3x = 0$

a) $\log_8 4^{2x} = 4$

Aplicando la definición de logaritmo:

$$8^4 = 4^{2x}$$

Ahora se expresan las potencias con la misma base:

$$2^{12} = 2^{4x} \Rightarrow x = 3$$

b) $\ln(x+2) \cdot \log e = 1$

En primer lugar, se deben expresar los logaritmos en la misma base.

Si llamamos $y = \log e$, podemos escribir: $10^y = e$

Tomando logaritmos neperianos en esta última igualdad se tiene que:

$$y \cdot \ln 10 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{\ln 10} = \log e$$

Se sustituye y se obtiene:

$\ln(x+2) \cdot \dfrac{1}{\ln 10} = 1$, es decir:

$\ln(x+2) = \ln 10$, de lo que se deduce que $x = 8$.

c) $\log e^{\ln x} + \ln x^{\log e} = 1$

Aplicamos propiedades de los logaritmos:

$\ln x \log e + \log e \ln x = 1$

$2 \log e \ln x = 1$

Como $\log e = \dfrac{1}{\ln 10}$, sustituimos y se obtiene:

$$\ln x = \frac{\ln 10}{2} \Rightarrow x = \sqrt{10}$$

d) $x^{1+\log x} = 10x$

Aplicamos logaritmos y se obtiene:

$(1 + \log x) \log x = 1 + \log x \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10$

e) $\log_{x+1} 25 = 2$

Aplicamos la definición de logaritmo y se obtiene:

$$(x+1)^2 = 25 \Rightarrow x = 4$$

f) $\log \sqrt{x+1} - \log \sqrt{x} = \log 1\,000$

Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \log 1\,000 \Rightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x}} = 1\,000$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x} = 10^6 \Rightarrow x + 1 = 10^6 x \Rightarrow x = \frac{1}{(10^6 - 1)}$$

g) $2x \ln x - 3x = 0 \Rightarrow x(2 \ln x - 3) = 0$

Observa que x no puede ser cero, porque $\ln 0$ no existe. Por tanto:

$$2 \ln x = 3 \Rightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = e^{3/2} = \sqrt{e^3}$$

Inecuaciones

49 **Resuelve las siguientes inecuaciones.**

a) $2 + x - x^2 > 0$

b) $\dfrac{(x+7)(x-5)}{x-2} \leq 0$

c) $\dfrac{x^3 + x}{x+1} < 0$

d) $x^3 + 1 \geq 0$

e) $-x^3 + 3x^2 + x - 3 < 0$

f) $x^2 - 6x + 8 > 0$

g) $x^3 - 3x^2 - x + 3 \leq 0$

a) $(-1, 2)$

b) $(-\infty, -7] \cup (2, 5]$

c) $(-1, 0)$

d) $[-1, +\infty)$

e) $(-1, 1) \cup (3, +\infty)$

f) $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

g) $(-\infty, -1] \cup [1, 3]$

50 **Resuelve estas inecuaciones racionales.**

a) $\dfrac{1-x}{x+2} \geq 0$

b) $\dfrac{x^2 - x - 6}{x+5} \leq 0$

c) $\dfrac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 - 9} < 0$

a) $(-2, 1]$

b) $(-\infty, -5) \cup [-2, 3]$

c) $(-3, -2) \cup (1/3, 3)$

51 **Resuelve las siguientes inecuaciones.**

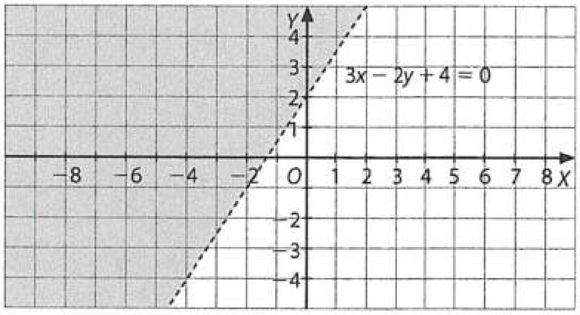
a) $3x - 2y + 4 < 0$

b) $4x + y - 2 \geq 0$

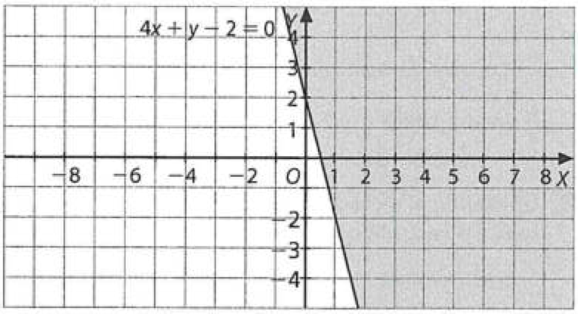
c) $7x \leq 3y + 1$

d) $2x + 3y \geq 5$

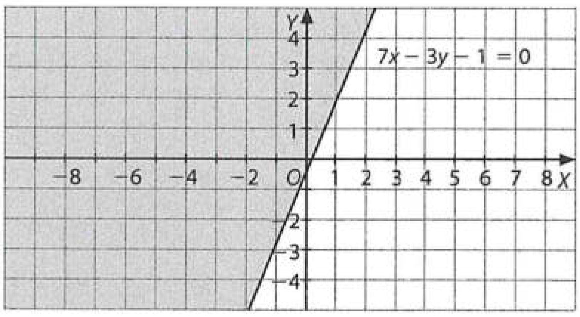
a)



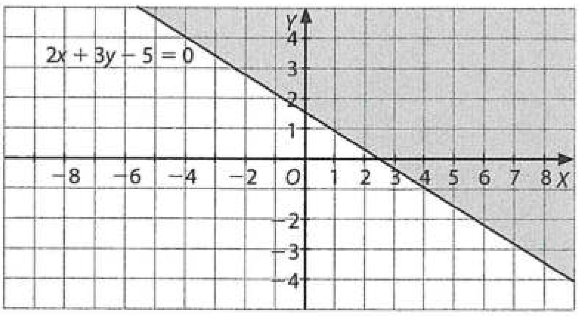
b)



c)



d)



Sistemas de ecuaciones

52 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, indicando si son incompatibles o compatibles y, en este caso, si son determinados o indeterminados.**

a) $\begin{cases} 3x-2y=-5 \\ x+y=10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-y=5 \\ 4x-2y=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+3=y \\ 2x=y-2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 1+x=y \\ 2x-2y=-2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+3y=12 \\ \dfrac{x-y}{2}=\dfrac{2x}{3}-2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}-\dfrac{y+1}{2}=1 \\ 4x-7y=5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -(x+3)+\dfrac{x+y}{4}=-1 \\ \dfrac{y-x}{2}+\dfrac{5y}{3}=x+\dfrac{12+5y}{3} \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x-7y=-22 \\ x+y=5/2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} (3/2)(x+y)=2+4y \\ 3(x+2)-5y=11 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2(x+2)=24-(3x+y) \\ 12-3(x+y)=0 \end{cases}$

a) Compatible determinado: $x=3, y=7$

b) Incompatible

c) Compatible determinado: $x=1, y=4$

d) Compatible indeterminado: $x=y-1$

e) Compatible indeterminado: $x=12-3y$

f) Compatible determinado: $x=3, y=1$

g) Compatible indeterminado: $x=\dfrac{-8+y}{3}$

h) Compatible determinado: $x=-\dfrac{1}{2}, y=3$

i) Incompatible

j) Compatible determinado: $x=4, y=0$

53 **Utilizando el método de Gauss, resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.**

a) $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x-y+z=5 \\ x+y-3z=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ -2x+3y-z=4 \\ -2x+2y+2z=8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+3y-z=12 \\ x-y+2z=-4 \\ 3x+2y+z=8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-3y+4z=3 \\ x-2y+z=0 \\ y-2z=-1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3(x+y)-2z=-1 \\ 3x-2y=0 \\ -y+\dfrac{z}{2}=3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y-6z=2 \\ -x+y=-1/4 \\ 2x+y-5z=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+2y-3z=-6 \\ 2(x-y)+3(y-z)=7 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x+y=\dfrac{5(x+1)}{6} \\ 2y-z=\dfrac{5x+y}{2} \\ x-6=z+1 \end{cases}$

a) $x=3, y=-1, z=1$

b) $x=-8/9, y=4/3, z=16/9$

c) Compatible indeterminado: $x=-z, y=4+z$

d) $x=1, y=1, z=1$

e) $x=22/3, y=11, z=28$

f) $x=-39/32, y=-47/32, z=-25/32$

g) Incompatible

h) $x=11/5, y=7/15, z=-24/5$

54 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales.**

a) $\begin{cases} xy+x^2+y^2=7 \\ xy=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log(x+1)-\log y=1 \\ x-2y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}-y=2 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x=1-\dfrac{\ln y}{\ln 3} \\ y=3^x-2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} xy+x^2+y^2=7 \\ xy=2 \end{cases}$

despejando x en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, tenemos:

$$2+x^2+\frac{4}{x^2}=7 \Rightarrow 2x^2+x^4+4=7x^2 \Rightarrow x^4-5x^2+4=0$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada obtenida, se obtiene: $x=1, y=2; x=-1, y=-2; x=2, y=1; x=-2, y=-1$

b) $\begin{cases} \log(x+1)-\log y=1 \\ x-2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log\dfrac{x+1}{y}=1 \\ x-2y=3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{y}=10 \\ x-2y=3 \end{cases} \Rightarrow x=4, y=1/2$

c) $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}-y=2 \\ x^2-y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1}=2+y \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+1=4+4y+y^2 \\ x^2-y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=4y+3 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$

$\Rightarrow 4y+3=1 \Rightarrow y=-1/2, x=\pm\sqrt{5}/2$

d) $\begin{cases} x=1-\dfrac{\ln y}{\ln 3} \\ y=3^x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ln 3=\ln 3-\ln y \\ y=3^x-2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \ln 3^x=\ln\dfrac{3}{y} \\ y=3^x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x=\dfrac{3}{y} \\ y=3^x-2 \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{3}{y}-2$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, se obtiene $y=1$ e $y=-3$. Esta última solución no tiene sentido, puesto que no existen logaritmos de números negativos. La solución es: $x=1, y=1$.

Sistemas de inecuaciones

55 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.**

a) $\begin{cases} 3x-1<\dfrac{-3-x}{4} \\ -(x+6)\geq 8x-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1+x}{3}\geq x+1 \\ 2(x-1)\geq 1+\dfrac{x}{2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x-1<\dfrac{-3-x}{4} \\ -(x+6)\geq 8x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x<1 \\ -5\geq 9x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x<1/13 \\ x\leq -5/9 \end{matrix}$

La solución del sistema es $x\leq -5/9$.

b) $\begin{cases} \dfrac{1+x}{3}\geq x+1 \\ 2(x-1)\geq 1+\dfrac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\geq 2x \\ 3x\geq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x\leq -1 \\ x\geq 2 \end{matrix}$

El sistema no tiene solución.

56 **Resuelve gráficamente los sistemas de inecuaciones.**

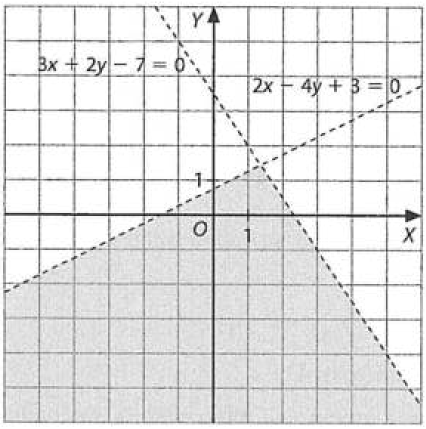
a) $\begin{cases} 3x + 2y - 7 < 0 \\ 2x - 4y + 3 > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 3y - 7 \leq 0 \\ y < 2 \end{cases}$

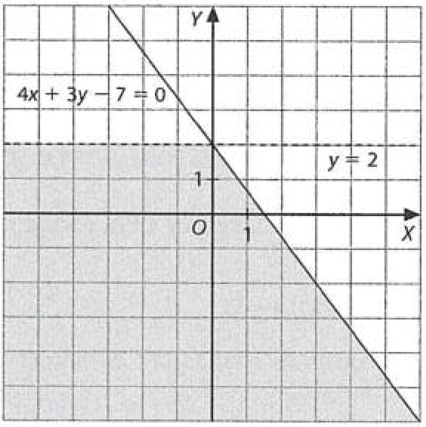
c) $\begin{cases} x > -1 \\ 3x - y < 0 \\ x + y > 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x < 5 \\ x + y - 2 > 0 \\ 3x - \dfrac{5(y+1)}{2} < 0 \end{cases}$

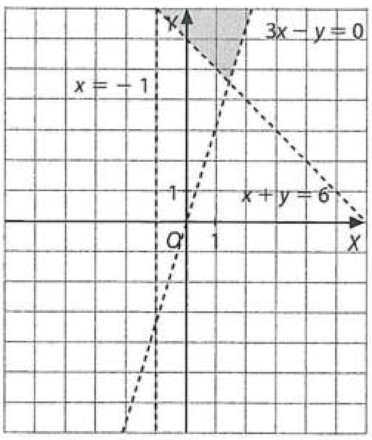
a)



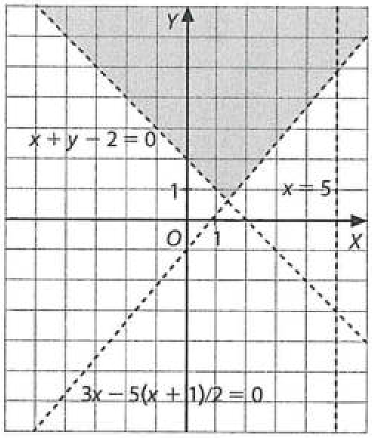
b)



c)



d)



57 **Resuelve estos sistemas de inecuaciones no lineales.**

a) $\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ -2x^2 + 3x + 9 \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x^2 + 8x - 12 \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2-x} \leq 0 \\ x^3 - 4x > 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - 4x + 4 \leq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x} > 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ -2x^2 + 3x + 9 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (-\infty, -1] \cup [2, +\infty) \\ [-3/2, 3] \end{matrix}$

La solución del sistema es $[-3/2, -1] \cup [2, 3]$.

b) $\begin{cases} -x^2 + 8x - 12 \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} [2, 6] \\ (-3, -1) \end{matrix}$

No tiene solución.

c) $\begin{cases} x + \dfrac{1}{2} - x \leq 0 \\ x^3 - 4x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (-\infty, -1] \cup [2, +\infty) \\ (-2, 0] \cup [2, +\infty) \end{matrix}$

La solución del sistema es $(-2, -1] \cup (2, +\infty)$.

d) $\begin{cases} x^2 + 4x + 4 \leq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \{2\} \\ (0, +\infty) \end{matrix}$

La solución del sistema es $x = 2$.

58 **Resuelve gráficamente estos sistemas no lineales.**

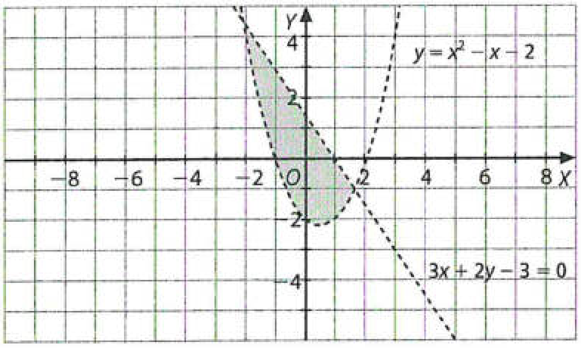
a) $\begin{cases} y > x^2 - x - 2 \\ 3x + 2y - 3 < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y^2 < x \\ x - y - 3 \geq 0 \end{cases}$

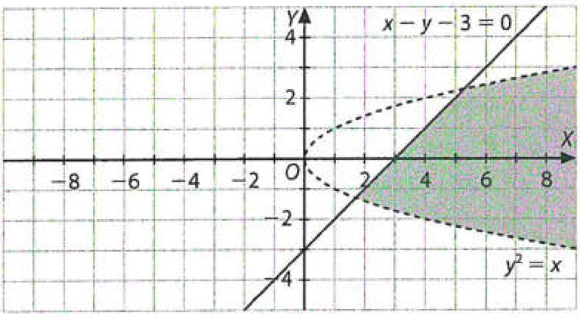
c) $\begin{cases} y < -x^2 + x + 2 \\ x^2 - 2x + 1 < y \end{cases}$

d) $\begin{cases} y > 1/x^2 \\ x^2 + y^2 < 2 \end{cases}$

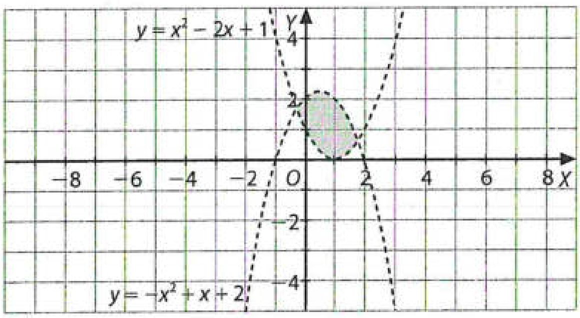
a)



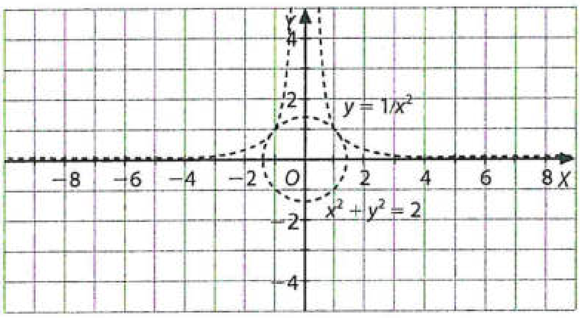
b)



c)



d)



Este sistema no tiene solución.

Problemas de aplicación

59 **Un padre tiene el doble de edad que su hijo, al que dentro de 15 años sacará 25 años. ¿Qué edades tienen los dos en la actualidad?**

Determinamos que x es la edad del hijo e y, la del padre. Como el padre tiene el doble de edad que su hijo, $y = 2x$. Y como dentro de 15 años le sacará 25 años, $(y + 15) = (x + 15) + 25$. El sistema que se plantea es el siguiente:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y + 15 = x + 15 + 25 \end{cases}$$

La solución del sistema es:

$x = 25, y = 50$

Por lo tanto, la edad del padre deberá ser 50 años y la del hijo, 25 años.

60 **Actualmente un padre tiene 30 años más que su hijo, y dentro de 10 años la edad del hijo será la cuarta parte de la suma de sus edades. ¿Qué edades tienen el padre y el hijo actualmente?**

Si p es la edad del padre y x la del hijo, se debe plantear este sistema:

$$\begin{cases} p = 30 + x \\ x + 10 = \dfrac{x + p + 20}{4} \end{cases} \Rightarrow p = 35, x = 5$$

Por tanto, la edad del padre es 35 años y la del hijo, 5 años.

61 **La suma de las dos cifras de un número es 12. Si a este número le restamos 54, el resultado es igual al obtenido al cambiar de orden las cifras del número inicial. ¿De qué número se trata?**

Sea xy el número. Se plantea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ (10x + y) - 54 = 10y + 15 \end{cases} \Rightarrow x = 9, y = 3$$

Por tanto, el número es 93.

62 **Halla un número de dos cifras sabiendo que las decenas son el cuádruple de las unidades y que si invertimos sus cifras y sumamos el número resultante con el anterior, obtenemos 55.**

Si xy es el número inicial, se deben cumplir las dos ecuaciones de este sistema:

$$\begin{cases} x = 4y \\ 10(x + y) + x + y = 55 \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = 1$$

Por tanto, el número es 41.

63 **Determina qué número se diferencia de su cuadrado en 30 unidades.**

Si llamamos x al número:

$$x^2 - x = 30 \Rightarrow x_1 = 6, x_2 = -5$$

Los números son $x_1 = 6$ y $x_2 = -5$.

64 **Un bodeguero vende 54 L de vino de dos tipos: uno de 2 €/L y el otro de 4 €/L. El precio total de la venta es 174 €. ¿Cuántos litros ha vendido de cada vino?**

Si llamamos x al vino de 2 €/L e y al de 4 €/L, obtenemos este sistema:

$$\begin{cases} x + y = 54 \\ 2x + 4y = 174 \end{cases} \Rightarrow x = 21, y = 33$$

Por tanto, el bodeguero ha vendido 21 L de vino de 2 €/L y 33 L del que cuesta 4 €/L.

65 **Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son tres números consecutivos. Averigua las medidas de dicho triángulo, en cm.**

Si llamamos x a la longitud del lado más pequeño, se obtiene esta ecuación: $(x + 2)^2 = (x + 1)^2 + x^2 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$

Las longitudes de los lados del triángulo son 3, 4 y 5 cm.

66 **Sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo se puede construir un cuadrado de 65 cm² de superficie. Uno de los catetos de dicho triángulo mide 3 cm más que el otro. Averigua el área del triángulo.**

El cuadrado de la hipotenusa coincide con el valor de la superficie del cuadrado que se construye sobre ella, y uno de los catetos es 3 cm más largo que el otro. Se puede plantear esta ecuación: $65 = x^2 + (x + 3)^2$

La solución es $x = 4$, por lo que el otro cateto mide 7 cm.

El área del triángulo es, por tanto:

$$A = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14 \text{ cm}^2$$

67 **Calcula el área de un triángulo isósceles cuyo perímetro mide 32 cm y cuyo lado desigual es de 12 cm.**

Cada uno de los dos lados iguales mide: $\frac{32-12}{2} = 10$ cm

Así, la altura del triángulo es $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm.

Por tanto, $A = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48$ cm^2.

68 **Un grifo tarda 3 h en llenar un depósito, mientras que otro solo necesita 2 h. ¿Cuánto tiempo emplearán los dos grifos en llenarlo si están funcionando a la vez?**

Si x es el tiempo que tardan los dos grifos en llenarlo, a es el caudal del primer grifo y b, el del segundo, se obtienen estas ecuaciones:

$3a = V$

$2b = V$

$x(a + b) = V \Rightarrow x(a + 3a/2) = 3a \Rightarrow x = 1{,}2 \text{ h} = 1 \text{ h } 12 \text{ min}$

Los dos grifos a la vez tardan 1 h y 12 min en llenar el depósito.

69 **Dos grifos llenan un recipiente en 10 s. Si uno de ellos lo llena en 14 s, ¿en cuánto tiempo lo llena el otro?**

Los dos grifos, a y b, llenan un determinado volumen en 10 s: $(a + b) \cdot 10 = V$.

El grifo a lo llena en 14 s: $a \cdot 14 = V$.

Despejando a y sustituyendo en la primera ecuación, se obtiene:

$$\left(\frac{V}{14} + b\right) \cdot 10 = V \Rightarrow b = \frac{V}{10} - \frac{V}{14} \Rightarrow b = \frac{V}{35}$$

Por tanto, el segundo grifo llena el recipiente de volumen V en 35 s.

70 **Tres amigos invierten 10 000 €, 40 000 € y 50 000 €, respectivamente, para abrir un negocio. Tras finalizar el primer ejercicio económico y al repartir los beneficios, el segundo de los amigos obtiene 2 400 € más que el primero. ¿Cuáles son los beneficios del negocio?**

Si x son los beneficios del primero (el que puso 10 000 €), entonces el del segundo (que invirtió 40 000 €) habrá tenido unos beneficios de $(x + 2\,400)$. Observa la relación entre los dos:

$$\frac{x}{10\,000} = \frac{x + 2\,400}{40\,000} \Rightarrow x = 800$$

Para obtener los beneficios del tercero, y, se resuelve esta ecuación:

$$\frac{800}{10\,000} = \frac{y}{50\,000} \Rightarrow y = 4\,000$$

Por tanto, los beneficios de los tres amigos son, respectivamente, 800 €, 3 200 € y 4 000 €.

71 **Los beneficios de una empresa se reparten entre tres socios: uno recibe la mitad, otro el 60 % de lo que queda y el tercero, 3 700 €. ¿A cuánto ascendían los beneficios? ¿Qué porcentaje de capital había puesto cada uno de ellos, si suponemos que los beneficios se reparten de forma proporcional al capital invertido?**

Si b son los beneficios, se debe plantear esta ecuación:

$$\frac{b}{2} + 0{,}6\frac{b}{2} + 3\,700 = b \Rightarrow b = 18\,500$$

Por tanto, los beneficios de la empresa son 18 500 €.

Y se reparte, respectivamente, 50 %, 30 % y 20 %.

72 **Una hipoteca aumenta dos veces durante un año: la primera un 0,75 %, y la segunda, un 1,25 %. Calcula el importe de la mensualidad inicial si ha sufrido en total un incremento de 10 €.**

$$\left.\begin{array}{l} y = x \cdot 1{,}0075 \cdot 1{,}0075 \\ y = x = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 498, y = 508$$

Así, la mensualidad inicial era de 498 €.

73 **Un cierto capital se coloca a lo largo de un año al 1,25 % anual. Transcurrido el año, se coloca el capital final al 4 % anual durante otro año. Si al final del segundo año se ha obtenido un beneficio total de 2 650 %, ¿cuál fue el capital invertido?**

Si C es el capital invertido, se debe plantear:

$$C \cdot 1{,}0125 \cdot 1{,}04 - C = 2\,650 \Rightarrow C = 50\,000$$

Se han invertido 50 000 €.

74 **Una población de 10 000 habitantes sufre primero un descenso y después, gracias a la inmigración, llega a ser de 11 520 habitantes. Sabiendo que el porcentaje de aumento ha sido 5 veces mayor que el porcentaje de disminución, averigua qué porcentajes de disminución y aumento ha sufrido la población.**

Si x es el porcentaje de disminución, se plantea esta ecuación:

$$11\,520 = 10\,000 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{5x}{100}\right)$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 400x + 1\,520 = 0 \Rightarrow x = 76 \text{ y } x = 4$$

Por tanto, deducimos que la población sufre un 4 % de disminución y un 20 % de aumento, o 76 % de disminución y 380 % de aumento.

75 **Con una lámina cuadrada de cartón de 121 cm^2 de superficie, se desea construir una caja sin tapa que tenga una capacidad de 75 cm^3, cortando cuatro cuadrados idénticos en cada esquina. Determina las dimensiones de los cuadrados que debemos recortar de la lámina original.**

Si x es el lado del cuadrado que se recorta, el área de la base de la caja es:

$$(11 - 2x)^2$$

Al multiplicar la base, $(11 - 2x)^2$, por la altura, x, se obtiene la capacidad, la cual se iguala a 75:

$$x(11 - 2x)^2 = 75$$

Operando, se obtiene la ecuación:

$$4x^3 - 44x^2 + 121x - 75 = 0$$

Con el teorema del resto y la regla de Ruffini se deduce que una solución es $x = 3$ cm:

$$4x^3 - 44x^2 + 121x - 75 = (x - 3)(4x^2 - 32x + 25) = 0$$

Solucionando la ecuación de 2.° grado $4x^2 - 32x + 25 = 0$, se obtiene la otra solución, $x = 0{,}878$ cm.

76 **En el mercado, Pedro se ha gastado 11,60 € por la compra de patatas, manzanas y naranjas que costaban, respectivamente, 1 €/kg, 1,20 €/kg y 1,50 €/kg. ¿Cuántos kilos ha comprado de cada alimento si entre todos han pesado 9 kg y, además, se ha llevado 1 kg más de naranjas que de manzanas?**

Llamamos x a los kilos de patatas; y, a los de manzanas, y z, a los de naranjas. Se plantea el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + 1{,}20y + 1{,}50z = 11{,}60 \Rightarrow x = 2, y = 3, z = 4 \\ z = y + 1 \end{cases}$$

Por tanto, Pedro compró 2 kg de patatas, 3 kg de manzanas y 4 kg de naranjas.

77 **Una familia tiene unos ingresos al mes de 3 250 € por los sueldos de la madre, el padre y el hijo. Si la madre gana el doble que el hijo, y el padre 2/3 de lo que recibe la madre, ¿cuánto gana cada uno de los miembros de la familia?**

Si x es el sueldo del padre; y, el de la madre, y z, el del hijo, podemos plantear este sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 3\,200 \\ y = 2z \\ x = 2y/3 \end{cases} \Rightarrow x = 1\,000, y = 1\,500, z = 750$$

Por tanto, el padre gana 1 000 €, la madre, 1 500 € y el hijo, 750 €.

78 **Calcula tres números sabiendo que el tercero es igual a dos veces el primero más el segundo; que el segundo es la cuarta parte del doble del primero más el tercero, y que si se resta al tercero la suma del primero más el segundo, el resultado da 3.**

Llamamos x al primer número, y al segundo y z al tercero. Se obtiene este sistema:

$$\begin{cases} z = 2x + y \\ y = 1/4\,(2x + z) \\ x = 2y/3 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 4, z = 10$$

Por tanto, los números son, respectivamente, 3, 4 y 10.

79 **Determina los valores de a, b y c para que la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos (1, 0), (−1, 10) y (3, 14).**

Si imponemos que la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pase por esos puntos, habrá que sustituir cada punto en la ecuación y así obtener tres ecuaciones. Con ellas se forma este sistema:

$$\begin{cases} (1, 0) \rightarrow 0 = a + b + c \\ (-1, 10) \rightarrow 10 = a - b + c \\ (3, 14) \rightarrow 14 = 9a + 3b + c \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = -5, c = 2$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es $y = 3x^2 - 5x + 2$.

Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Razones trigonométricas de ángulos complementarios
(página 85)

En el archivo de GeoGebra se pueden comprobar las relaciones entre las razones trigonométricas de dos ángulos complementarios a partir de la semejanza entre los triángulos rectángulos que determinan.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital las relaciones entre las razones de estos ángulos o para que los alumnos puedan deducir estas relaciones por sí mismos.

Razones trigonométricas de ángulos que difieren 180° o π rad (página 86)

En el archivo de GeoGebra se pueden comprobar las relaciones entre las razones trigonométricas de dos ángulos que difieren 180° a partir de la semejanza entre los triángulos rectángulos que determinan en la circunferencia goniométrica.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital las relaciones entre las razones de estos ángulos o para que los alumnos puedan deducir estas relaciones por sí mismos.

Ejercicio resuelto (página 88)

En el vídeo se muestra la resolución, paso a paso, de un ejercicio resuelto en el que se ha realizado una doble observación de una altura inaccesible.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento a seguir para resolver un ejercicio de este tipo o para que los alumnos puedan repasarlo más tarde.

Cálculo de las razones trigonométricas (página 90)

En el vídeo se muestra paso a paso cómo resolver el ejercicio para calcular todas las razones trigonométricas de un ángulo, a partir de una que ya es conocida, sabiendo en qué cuadrante se encuentra.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital cómo debe resolverse este tipo de ejercicio o para que los alumnos puedan repasar el procedimiento más tarde.

Actividades (páginas 72/88)

1 **Expresa en grados, minutos y segundos sexagesimales un ángulo de 34,2577°.**

34° 15′ 28″

2 **Expresa en grados sexagesimales un ángulo de 23° 57′ 33″.**

Aproximadamente 23,96°

3 **Calcula en grados, minutos y segundos sexagesimales el valor de un ángulo de 1 rad.**

$$1 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 57° \, 17' \, 45''$$

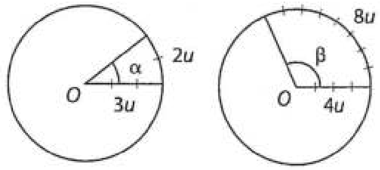
4 **Expresa $\frac{5\pi}{3}$ rad en grados, minutos y segundos sexagesimales.**

$$\frac{5\pi}{3} \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 300°$$

5 **Expresa 63° 25′ 48″ en radianes.**

$$63° \, 25' \, 48'' \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = 1{,}11 \text{ rad}$$

6 **Calcula la medida en radianes de los ángulos representados en la figura 3.6.**



$\alpha = \frac{2}{3}$ rad, $\beta = 2$ rad

7 **Halla los ángulos comprendidos entre 0° y 360° equivalentes a:**

a) 3 724°

b) 23,5π rad

c) $\frac{64\pi}{7}$ rad

d) 123 rad

a) 3 724° = 360° · 10 + 124°, el ángulo equivalente a 3 724° en el primer giro es 124°.

b) 23,5π rad = 2π rad · 11 + 3π/2 rad, el ángulo equivalente a 23,5π rad en el primer giro es 3π/2 rad.

c) 64π/7 rad = 2π rad · 4 + 8π/7 rad, el ángulo equivalente a 64π/7 rad en el primer giro es 8π/7 rad.

d) 123 rad = 2π rad · 19 + 3,62 rad, el ángulo equivalente a 123π rad en el primer giro es 3,62 rad.

8 **Los lados de un triángulo miden 12 cm, 9 cm y 6 cm. Calcula la longitud de los lados de un triángulo semejante a él si la razón de semejanza vale 2/3.**

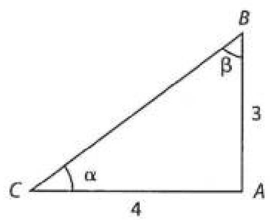
Basta con multiplicar por 2/3 las longitudes del triángulo inicial, con lo que se obtienen unas nuevas medidas de los lados: 8 cm, 6 cm y 4 cm, respectivamente.

9 **¿El triángulo cuyos lados miden 4 cm, 8 cm y 10 cm es semejante al triángulo cuyos lados miden 5 cm, 10 cm y 12,5 cm? ¿Por qué?**

Son semejantes:

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{10}{12{,}5}$$

10 **Dado el triángulo *ABC* de la figura 3.10, cuyas medidas están expresadas en cm, calcula las razones trigonométricas de α.**



$$a = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

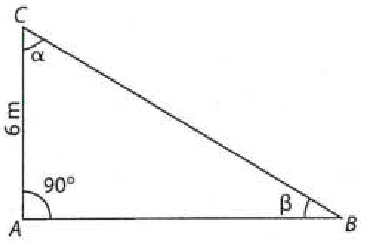
- $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$
- $\cos\alpha = \frac{4}{5}$
- $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$

11 **Deduce las razones trigonométricas del ángulo β del triángulo de la figura 3.10.**

Las razones trigonométricas de β son:

- $\text{sen}\,\beta = \frac{4}{5}$
- $\cos\beta = \frac{3}{5}$
- $\text{tg}\,\beta = \frac{4}{3}$

12 **Dado el triángulo *ABC* de la figura, sabemos que $AC = 6$ m y $\operatorname{tg}\beta = 0{,}6$. Calcula el otro cateto y la hipotenusa.**



$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{6}{AB} \Rightarrow AB = \dfrac{6}{0{,}6} = 10$ m

$CB = \sqrt{10^2 + 6^2} \Rightarrow CB = 11{,}66$ m

13 **Con los resultados del ejercicio anterior, calcula sen α.**

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{10}{11{,}66} = 0{,}86$

14 **Calcula las razones trigonométricas de un ángulo agudo α, si $\cos\alpha = 0{,}35$.**

- $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - 0{,}35^2} = 0{,}94$
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{0{,}94}{0{,}35} = 2{,}68$
- $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{0{,}35} = 2{,}86$
- $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{1}{0{,}94} = 1{,}07$
- $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{0{,}35}{0{,}94} = 0{,}37$

15 **Calcula las razones trigonométricas de un ángulo agudo α, si $\operatorname{cotg}\alpha = 3$.**

$\operatorname{cotg}\alpha = 3 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1/3$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \dfrac{1}{9} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

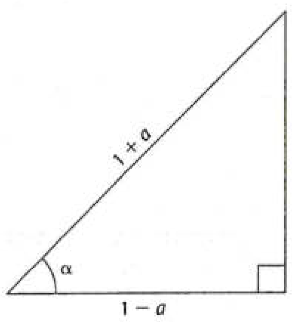
Y entonces, $\sec\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ y $\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{10}$

16 **Demuestra que: $1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$**

$$1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = 1 + \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

17 **Dado el triángulo de la figura 3.16, calcula sen α, cos α, tg α.**



$c = \sqrt{(1 + a)^2 - (1 - a)^2} = \sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$

- $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2\sqrt{a}}{1 + a}$
- $\cos\alpha = \dfrac{1 - a}{1 + a}$
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\sqrt{a}}{1 - a}$

18 **Una estaca vertical de longitud *l* proyecta una sombra de longitud $\sqrt{3}l$. Calcula el ángulo de elevación del Sol sobre el horizonte.**

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{l}{\sqrt{3}l} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30°$

19 **Calcula la longitud de las diagonales de un rombo sabiendo que sus ángulos son 60° y 120°, y que sus lados miden 6 cm.**

La diagonal menor mide 6 cm, igual que los lados, puesto que el ángulo menor es de 60°.

La diagonal mayor se puede calcula a partir de uno de los cuatro triángulos rectángulos que determinan las dos diagonales en el rombo:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\dfrac{D}{2}}{6} \Rightarrow D = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

20 **Determina los valores del seno y el coseno de los siguientes ángulos: 540° y 1 350°.**

540° = 360° + 180°, por lo que sen 540° = sen 180° = 0 y cos 540° = cos 180° = −1

1 350° = 3 · 360° + 270°, por lo que sen 1 350° = sen 270° = = −1 y cos 1 350° = cos 270° = 0

21 **Calcula las razones trigonométricas de un ángulo del segundo cuadrante si sen α = 3/7.**

El ángulo pertenece al segundo cuadrante, por lo que el seno es positivo, el coseno, negativo y la tangente, negativa.

$\cos\alpha = -\sqrt{1 - (3/7)^2} = -\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{-3}{2\sqrt{10}} = -\dfrac{3\sqrt{10}}{20}$

22 **Si $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$ y $\operatorname{cotg}\alpha = -0{,}27$, calcula las demás razones trigonométricas del ángulo α.**

El ángulo pertenece al cuarto cuadrante, por lo que el seno es negativo, el coseno, positivo y la tangente, negativa.

$\operatorname{cotg}\alpha = -0{,}27 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -3{,}7$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{-0{,}27}\right)^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}26$

$\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = -0{,}97$

23 **Sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha < 0$ y que $\cos\alpha = -\sqrt{3}/4$, calcula las restantes razones trigonométricas.**

El ángulo pertenece al segundo cuadrante:

$$\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{39}}{3}$$

24 **Calcula todos los ángulos entre 0° y 360° que cumplen $\operatorname{cotg}\alpha = -0{,}03$.**

$\operatorname{cotg}\alpha = -0{,}03 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -3{,}7 \Rightarrow \alpha = -88{,}272° = 271{,}72°$ y $\alpha = 91{,}72°$

25 **Resuelve $\sec\alpha = -3{,}78$.**

$\sec\alpha = -3{,}78 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -0{,}265$, por tanto:

$\alpha = 105{,}34°$ y $\alpha = 254{,}66°$

26 **Resuelve $\cos\alpha = 0{,}32$.**

$\cos\alpha = 0{,}32$, por tanto:

$\alpha = 71{,}34°$ y $\alpha = 288{,}66°$

27 **Resuelve cosec $\alpha = -5$.**

$\text{cosec}\ \alpha = -5 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = -0{,}2 \Rightarrow \alpha = -11{,}54° = 348{,}46°$ y $\alpha = 191{,}54°$

28 **Utiliza la calculadora para resolver las actividades 22 y 23 del epígrafe anterior.**

Utilizando la calculadora, se obtienen los mismos resultados.

29 **Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.**

a) **120°** ***c)*** **210°** ***e)*** **300°**

b) **135°** ***d)*** **225°** ***f)*** **−45°**

a) $\text{sen}\ 120° = \sqrt{3}/2$; $\cos 120° = -1/2$; $\text{tg}\ 120° = -\sqrt{3}$

b) $\text{sen}\ 135° = \sqrt{2}/2$; $\cos 135° = -\sqrt{2}/2$; $\text{tg}\ 135° = -1$

c) $\text{sen}\ 210° = -1/2$; $\cos 210° = -\sqrt{3}/2$; $\text{tg}\ 210° = \sqrt{3}/3$

d) $\text{sen}\ 225° = -\sqrt{2}/2$; $\cos 225° = -\sqrt{2}/2$; $\text{tg}\ 225° = 1$

e) $\text{sen}\ 300° = -\sqrt{3}/2$; $\cos 300° = 1/2$; $\text{tg}\ 300° = -\sqrt{3}$

f) $\text{sen}\ (-45°) = -\sqrt{2}/2$; $\cos(-45°) = \sqrt{2}/2$; $\text{tg}\ (-45°) = -1$

30 **Dado el triángulo rectángulo cuyo ángulo recto es *A*, calcula los elementos desconocidos en cada uno de los siguientes casos:**

a) $b = 10$ cm, $a = 15$ cm ***c)*** $b = 7$ cm, $c = 14$ cm ***e)*** $B = 27°$, $C = 63°$

b) $C = 26°$, $c = 3$ cm ***d)*** $B = 38°$, $a = 20$ cm

a) $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 11{,}18$ cm, $\text{sen}\ B = \dfrac{10}{15} \Rightarrow B = 41{,}81°$ y $C = 48{,}19°$

b) $B = 90° - 26° = 64°$, $a = \dfrac{c}{\text{sen}\ C} = 6{,}84$ cm y $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 6{,}15$ cm

c) $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 15{,}65$ cm, $\text{sen}\ B = \dfrac{7}{a} \Rightarrow B = 26{,}57°$ y $C = 63{,}43°$

d) $C = 90° - B = 52°$, $b = a \cdot \text{sen}\ B = 12{,}31$ cm y $c = a \cdot \text{sen}\ C = 15{,}76$ cm

e) Existen infinitos triángulos semejantes con estos dos ángulos dados.

31 **Calcula la altura a la que llega una escalera de 4,50 m apoyada en una pared y que forma un ángulo de 67° con el suelo.**

Si llamamos *h* a la altura:

$h = 4{,}50 \cdot \text{sen}\ 67° = 4{,}14$ m

32 **Calcula las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo en el que la longitud de la hipotenusa es el triple que la de uno de los catetos.**

En primer lugar calculamos el otro cateto:

$$c = \sqrt{(3x)^2 - x^2} = 2x\sqrt{2}$$

Las razones son las siguientes:

- $\text{sen}\ B = \dfrac{x}{3x} = \dfrac{1}{3}$
- $\cos B = \dfrac{2x\sqrt{2}}{3x} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
- $\text{tg}\ B = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$
- $\text{sen}\ C = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
- $\cos C = \dfrac{1}{3}$
- $\text{tg}\ C = 2\sqrt{2}$

Ejercicios y problemas (páginas 92/96)

Ángulos

1 **Dada una circunferencia de 3 m de radio, calcula la longitud de una cuerda correspondiente a un ángulo central de 38,5°.**

La longitud de la cuerda que nos piden es la longitud del lado desigual de un triángulo isósceles, siendo el ángulo desigual de 38,5°. Por tanto, la mitad de la cuerda medirá:

$x = 3 \cdot \text{sen}\ 19{,}25° = 0{,}99$ m

Y la cuerda medirá el doble:
Longitud de la cuerda $= 2x = 1{,}98$ m

2 **En una trayectoria circular de 7 m de radio, un móvil se desplaza a 3 m/s. Calcula el ángulo central recorrido en 4 s y escribe el resultado en grados sexagesimales y en radianes.**

En cuatro segundos recorrerá 12 m. Si el radio mide 7 m, el ángulo recorrido en radianes será:

$$\alpha = \frac{12}{7} = 1{,}71 \text{ rad}$$

En grados sexagesimales:

$$\alpha = \frac{12}{7} \text{ rad} \cdot \left(\frac{180°}{\pi \text{ rad}}\right) = 98{,}22°$$

3 **Expresa los siguientes ángulos en radianes.**

a) **320°** ***c)*** **125°**

b) **1 273°** ***d)*** **−765°**

a) $320° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = 5{,}59$ rad

b) $1\,273° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = 22{,}22$ rad

c) $125° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = 2{,}18$ rad

d) $-765° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = -13{,}35$ rad

4 **Expresa como un ángulo entre 0° y 360°:**

a) **1 230°** ***c)*** **9,63 rad**

b) **−730°** ***d)*** $\dfrac{14\pi}{3}$ **rad**

a) 150° *c)* 3,35 rad

b) 350° *d)* $\dfrac{2\pi}{3}$ rad

5 **¿Qué ángulo forman las agujas del reloj a las 9 y 20? ¿Y a las 9 y 15? ¿Y a las 6 y media?**

- A las 9 h 20 min, la manecilla horaria ha recorrido 10° en 20 min, por lo que el ángulo que forman las dos manecillas será de 200°.
- A las 9 h y 15 min, la manecilla horaria ha recorrido 30°/4 en 20 min, por lo que el ángulo que forman las dos manecillas será de 172,5°.
- A las 6 h, las manecillas forman un ángulo de 180° y cuando pasa media hora, la manecilla horaria ha recorrido 15°, por lo que ambas formarán 345°.

6 **En una circunferencia de radio 10 cm, un arco mide 20 cm. Averigua el valor del ángulo central correspondiente y qué longitud tiene la cuerda que determina.**

$$\alpha = \frac{20}{2\pi \cdot 10} \cdot 360° = 114°\ 35'29{,}6''$$

$$c = 2 \cdot 10 \cdot \text{sen}\ \frac{114°\ 35'29{,}6''}{2} = 16{,}83 \text{ cm}$$

Razones trigonométricas

7 **Resuelve un triángulo rectángulo, sabiendo que la tangente de uno de sus ángulos agudos es 3,5 y que el cateto opuesto a este ángulo mide 2 cm.**

Dado que el triángulo es rectángulo, un ángulo, A, vale 90°.

$\text{tg } B = 3{,}5$

$B = 74{,}05°$

Entonces, $C = 15{,}95°$.

Como sabes $\text{tg } B = \frac{b}{c}$, por lo que:

$$c = \frac{b}{\text{tg } B} \Rightarrow c = \frac{2}{3{,}5} = 0{,}57 \text{ cm}$$

por el teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = 2{,}08 \text{ cm}$$

8 **¿Es posible que exista un ángulo, α, que verifique simultáneamente $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$ y $\cos \alpha = \frac{2}{5}$? ¿Por qué?**

No es posible.

Se ha de cumplir que: $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ para cualquier ángulo.

Si sustituimos por los valores que nos da el enunciado obtenemos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{13}{25} \neq 1$$

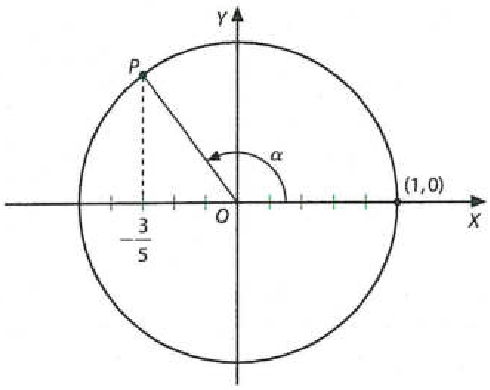
9 **Si $\text{cotg } \alpha = \text{cotg } \beta$, ¿podemos asegurar que α y β son iguales? Razona tu respuesta.**

No puede asegurarse que α y β sean iguales.

Las cotangentes de ángulos que difieren 180° también son iguales.

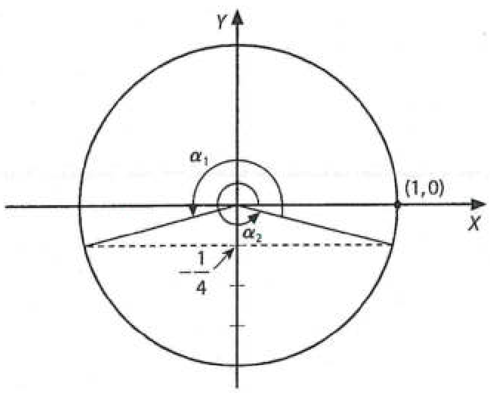
10 **Dibuja un ángulo del segundo cuadrante cuyo coseno vale $-3/5$, utilizando una circunferencia de radio unidad.**

La representación del ángulo α es la siguiente:

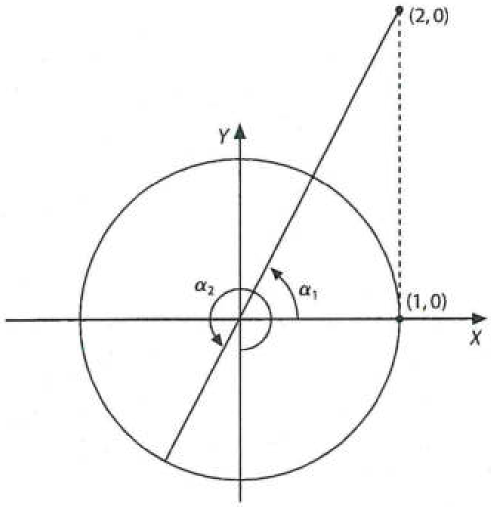


11 **Dibuja los ángulos cuyo seno vale $-1/4$ utilizando una circunferencia de radio unidad.**

La representación de los ángulos α_1 y α_2 es la siguiente:



12 **Utiliza una circunferencia de radio unidad para dibujar los ángulos cuya tangente es 2.**



13 **Si $\cos \alpha = -1{,}11$, indica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta y razona tu respuesta.**

a) **α es un ángulo negativo.**

b) **α está en el tercer cuadrante.**

c) **α es un ángulo mayor que 2π.**

d) **Es imposible que el coseno de un ángulo sea $-1{,}11$.**

$|\cos \alpha| \leq 1$ para cualquier ángulo; por tanto, la respuesta correcta es la *d)*.

14 **Señala en qué cuadrante está el ángulo α si:**

a) **$\text{sen } \alpha > 0$ y $\cos \alpha < 0$**

b) **$\text{sen } \alpha < 0$ y $\text{tg } \alpha > 0$**

c) **$\sec \alpha < 0$ y $\text{cosec } \alpha < 0$**

d) **$\text{cotg } \alpha < 0$ y $\cos \alpha > 0$**

a) Seno positivo y coseno negativo: segundo cuadrante.

b) Seno negativo y tangente positiva: tercer cuadrante.

c) Secante y cosecante negativas: tercer cuadrante.

d) Cotangente negativa y coseno positivo: cuarto cuadrante.

15 **Sean α y β dos ángulos cualesquiera teniendo en cuenta que:**

$$\text{tg } \alpha > \text{tg } \beta;\ 270° < \alpha < 360°;\ 270° < \beta < 360°$$

indica si las siguientes afirmaciones son ciertas o no.

a) **$\alpha < \beta$**

b) **$\text{sen } \alpha < \text{sen } \beta$**

c) **$\beta < \alpha$**

d) **$\text{sen } \beta < \text{sen } \alpha$**

Los dos ángulos pertenecen al cuarto cuadrante. Sus tangentes son negativas. Es más negativa la tangente del ángulo menor, por tanto es correcta la afirmación *c)*. Además la afirmación *d)* también es correcta, porque con el seno ocurre lo mismo en el cuarto cuadrante.

16 **Si $\text{tg } \alpha = -4$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcula las demás razones trigonométricas.**

α pertenece al segundo cuadrante. Con el dato del enunciado y la ecuación fundamental de la trigonometría, expresando la tangente en función del seno y coseno de un ángulo, se obtiene:

$\text{sen } \alpha = 0{,}97$ $\qquad \cos \alpha = -0{,}24$

$\text{cosec } \alpha = 1{,}03$ $\qquad \sec \alpha = -4{,}17$

$\text{cotg } \alpha = -0{,}25$

17 **Si sen $\alpha = -0{,}3$ y $180° < \alpha < 270°$, calcula las otras razones trigonométricas.**

α pertenece al tercer cuadrante.

Con el dato del enunciado y la ecuación fundamental se deduce:

$\cos\alpha = -0{,}95$ $\quad$ $\text{tg}\,\alpha = 0{,}31$

$\text{cosec}\,\alpha = -3{,}33$ $\quad$ $\sec\alpha = -1{,}05$

$\text{cotg}\,\alpha = 3{,}22$

18 **Si $\cos\alpha = 0{,}65$ y $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcula las restantes razones trigonométricas.**

α pertenece al cuarto cuadrante.

Con el dato del enunciado y la ecuación fundamental se deducen:

$\text{sen}\,\alpha = -0{,}76$ $\quad$ $\text{tg}\,\alpha = -1{,}17$

$\text{cosec}\,\alpha = -1{,}32$ $\quad$ $\sec\alpha = 1{,}54$

$\text{cotg}\,\alpha = -0{,}86$

19 **De un ángulo α sabemos que:**

$$\text{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2};\ \text{sen}\,\alpha < \cos\alpha$$

¿En qué cuadrante se encuentra dicho ángulo?

En el cuarto cuadrante.

20 **Señala si las siguientes igualdades son ciertas o no. En este último caso, escribe la igualdad correcta.**

a) $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,(180° + \alpha)$

b) $\cos\alpha = \text{sen}\,(90° + \alpha)$

c) $\sec\alpha = \sec\,(2\pi - \alpha)$

d) $\text{tg}\,\alpha = \text{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

e) $\text{cosec}\,\alpha = -\text{cosec}\,(\pi - \alpha)$

f) $\text{cotg}\,\alpha = \text{cotg}\,(360° - \alpha)$

a) No es cierta: $\text{sen}\,\alpha = -\text{sen}\,(180° + \alpha)$

b) Cierta.

c) Cierta.

d) Cierta.

e) No es cierta: $\text{cosec}\,\alpha = \text{cosec}\,(\pi - \alpha)$

f) No es cierta: $\text{cotg}\,\alpha = -\text{tg}\,(360° - \alpha)$

21 **A partir de las razones de 0°, 30° y 45° calcula.**

a) sen 135°

b) cos 720°

c) cos 210°

d) tg 300°

e) cos 450°

f) tg 135°

g) tg 210°

a) $\text{sen}\,135° = \text{sen}\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 720° = \cos 0° = 1$

c) $\cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\text{tg}\,300° = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

e) $\cos 450° = \text{sen}\,0° = 0$

f) $\text{tg}\,135° = -1$

g) $\text{tg}\,210° = \text{tg}\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

22 **Sin usar la calculadora, halla todos los valores de α en el primer giro que verifican las siguientes igualdades.**

a) $\text{sen}\,\alpha = -1/2$ $\quad$ ***d)*** $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$

b) $\sec\alpha = -\sqrt{2}$ $\quad$ ***e)*** $\text{cosec}\,\alpha = -2/\sqrt{3}$

c) $\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$ $\quad$ ***f)*** $\text{cosec}\,\alpha = -2$

a) Ángulos cuyo seno es $-1/2$: 210° y 330°

b) Ángulos cuya secante es $-\sqrt{2}$: 135° y 225°

c) Ángulos cuyo coseno es $\frac{1}{\sqrt{2}}$: 45° y 315°

d) Ángulos cuya tangente es $\sqrt{3}$: 60° y 240°

e) Ángulos cuya cosecante es $\frac{-2}{\sqrt{3}}$: 240° y 300°

f) Ángulos cuya cosecante es -2: 210° y 330°

23 **Averigua sin utilizar la calculadora:**

a) sen 1 500° $\quad$ ***d)*** $\cos\left(\frac{37\pi}{6}\right)$

b) $\text{sen}\left(\frac{61\pi}{3}\right)$ $\quad$ ***e)*** tg 2 010°

c) cos 2 745° $\quad$ ***f)*** $\text{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$

a) $\text{sen}\,1\,500° = \text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{sen}\left(\frac{61\pi}{3}\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos 2\,745° = \cos 225° = -\cos 45° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos\left(\frac{37\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\text{tg}\,2\,010° = \text{tg}\,210° = \text{tg}\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\text{tg}\left(\frac{-7\pi}{3}\right) = \text{tg}\left(\frac{-\pi}{3}\right) = -\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

24 **Sabiendo que sen $\alpha = \frac{3}{4}$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula:**

a) $\text{sen}\,(180° - \alpha)$ $\quad$ ***d)*** $\text{sen}\,(180° + \alpha)$ $\quad$ ***g)*** $\text{cosec}\,\alpha$

b) $\text{cosec}\,(-\alpha)$ $\quad$ ***e)*** $\cos\,(360° - \alpha)$ $\quad$ ***h)*** $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

c) $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ $\quad$ ***f)*** $\sec\,(180° - \alpha)$ $\quad$ ***i)*** $\text{cotg}\,(-\alpha)$

a) $\text{sen}\,(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha = 3/4$

b) $\text{cosec}\,(-\alpha) = -\text{cosec}\,\alpha = -4/3$

c) $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\,\text{cotg}\,\alpha = -\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

d) $\text{sen}\,(180° + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha = -3/4$

e) $\cos\,(360° - \alpha) = \cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

f) $\sec\,(180° - \alpha) = \frac{1}{\cos\,(180° - \alpha)} = \frac{1}{-\cos\alpha} = -\frac{4\sqrt{7}}{7}$

g) $\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{4}{3}$

h) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\text{sen}\,\alpha = -\frac{3}{4}$

i) $\text{cotg}\,(-\alpha) = \frac{1}{\text{tg}\,(-\alpha)} = \frac{-1}{\text{tg}\,\alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

25 **Halla estas razones trigonométricas sin calculadora.**

a) sen 150° *f)* cos 225° *k)* tg (−45°)

b) cosec 120° *g)* cotg 240° *l)* sec 135°

c) sen 315° *h)* sec (−120°) *m)* sen 1 395°

d) $\text{cosec}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ *i)* $\text{sen}\left(\frac{13\pi}{3}\right)$ *n)* $\text{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

e) tg (−495°) *j)* $\text{cotg}\left(\frac{13\pi}{2}\right)$ *ñ)* cosec 720°

a) $\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

b) $\text{cosec } 120° = \text{cosec } 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $\text{sen } 315° = -\text{sen } 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\text{cosec}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\text{cosec}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2$

e) $\text{tg } (-495°) = \text{tg } (-135°) = \text{tg } 225° = \text{tg } 45° = 1$

f) $\cos 225° = -\cos 45° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\text{cotg } 240° = \text{cotg } 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

h) $\sec (-120°) = \sec 240° = -\sec 60° = -2$

i) $\text{sen}\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

j) $\text{cotg}\left(\frac{13\pi}{2}\right) = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

k) $\text{tg } (-45°) = -\text{tg } 45° = -1$

l) $\sec 135° = -\sec 45° = -\sqrt{2}$

m) $\text{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

n) $\text{sen } 1\,395° = \text{sen } 315° = -\text{sen } 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ñ) cosec 720° = cosec 0° no existe

26 **Calcula las siguientes razones trigonométricas:**

a) $\text{tg } (7\pi - \alpha)$, si $\text{tg } \alpha = 2$

b) $\text{tg}\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$, si $\text{tg } \alpha = \frac{3}{2}$

a) $\text{tg } (7\pi - \alpha) = \text{tg } (\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha = -2$

b) $\text{tg}\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{cotg } \alpha = -\frac{2}{3}$

27 **Calcula los ángulos del primer giro que cumplen:**

a) $\cos \alpha = 0{,}989$ *b)* $\text{tg } \alpha = 2{,}5$

Utilizando la calculadora:

a) 8° 30′ 22,13″ y 351° 29′ 37,9″ en el primer giro.

b) 68° 11′ 54,93″ y 248° 11′ 54,93″ en el primer giro.

28 **Utilizando la calculadora, averigua el valor que tiene el ángulo α.**

a) $\text{sen } \alpha = -0{,}15$, $\alpha < 3\pi/2$

b) $\cos \alpha = -0{,}92$, $\alpha > \pi$

c) $\text{tg } \alpha = 2{,}35$, $\alpha > \pi$

d) $\text{cotg } \alpha = 0{,}36$, $\alpha < \pi/2$

a) 188° 37′ 37″ *c)* 246° 56′ 55,3″

b) 203° 4′ 26″ *d)* 70° 12′ 4″

Expresiones trigonométricas

29 **Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas.**

a) $$\frac{\cos(\pi + \alpha) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha)}$$

b) $$\frac{\cos^2 \alpha}{1 + \text{sen } \alpha}$$

c) $$(2 - \text{cosec}^2 \alpha) : \frac{\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha}$$

d) $$\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$$

e) $\text{sen}^4 \alpha + \text{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$

f) $$\frac{\cos^3 \alpha + \cos \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha}{\text{sen}^3 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \text{sen } \alpha}$$

g) $$\frac{-\text{sen } \alpha - \cos^2 \alpha + 1}{\text{sen } \alpha} \cdot (1 + \text{sen } \alpha)$$

a) Sustituyendo en función del ángulo α, se obtiene:

$$\frac{-\cos \alpha - \cos \alpha}{-\cos \alpha - \cos \alpha} = 1$$

b) Expresando el coseno en función del seno:

$$\frac{1 - \text{sen}^2 \alpha}{1 + \text{sen } \alpha} = \frac{(1 + \text{sen } \alpha) \cdot (1 - \text{sen } \alpha)}{1 + \text{sen } \alpha} = 1 - \text{sen } \alpha$$

c) Recordando que la cosecante es la inversa del seno y reduciendo a común denominador el primer paréntesis, y dado que:

$$\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \\ = \text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

tenemos:

$$\frac{2\,\text{sen}^2 \alpha - 1}{\text{sen}^2 \alpha} \cdot \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \\ = \frac{2\,\text{sen}^2 \alpha - (\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \\ = \frac{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = 1$$

d) Sustituimos por sus valores y operamos.

$$\frac{(1/\sqrt{2}) + (1/\sqrt{3})}{(\sqrt{3}/2) - 0} = \\ = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})/\sqrt{6}}{\sqrt{3}/2} = \\ = \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3\sqrt{2}}$$

e) Factorizando la expresión, se obtiene:

$$\text{sen}^2 \alpha\,(\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \text{sen}^2 \alpha$$

f) Factorizamos numerador y denominador, simplificamos y se obtiene:

$$\frac{\cos \alpha\,(\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha)}{\text{sen } \alpha\,(\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} = \text{cotg } \alpha$$

g) Dado que $1 - \cos^2 \alpha = \text{sen}^2 \alpha$, se sustituye, se simplifica y se obtiene:

$$\frac{-\text{sen } \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\text{sen } \alpha} \cdot (1 + \text{sen } \alpha) = \\ = (-1 + \text{sen } \alpha)(1 + \text{sen } \alpha) = \\ = \text{sen}^2 \alpha - 1 = -\cos^2 \alpha$$

30 **Demuestra, de forma razonada, las siguientes igualdades.**

a) $\dfrac{\sec^2\alpha}{\cotg\alpha}(1-\operatorname{sen}^2\alpha)\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha=\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha}$

b) $(1-\operatorname{sen}^2\alpha)\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{1+\cos^2\alpha}{2-\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{sen}\alpha$

c) $\cotg^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-\cotg^2\alpha=-\cos^2\alpha$

d) $\dfrac{\cos^4\alpha-\operatorname{sen}^4\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$

e) $(1+\operatorname{tg}\alpha)\cdot(1+\cotg\alpha)=\dfrac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}$

a) $\sec^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}, \dfrac{1}{\cotg\alpha}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha},$

$(1-\operatorname{sen}^2\alpha)=\cos^2\alpha, \operatorname{cosec}^2\alpha=1/\operatorname{sen}^2\alpha$

Sustituimos en el primer miembro de la igualdad:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha}$$

b) $1-\operatorname{sen}^2\alpha=\cos^2\alpha \quad \operatorname{tg}\alpha=\operatorname{sen}\alpha/\cos\alpha$

$1+\cos^2\alpha=1+1-\operatorname{sen}^2\alpha=2-\operatorname{sen}^2\alpha$

Sustituimos en el primer miembro y simplificamos:

$$\cos^2\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{2-\operatorname{sen}^2\alpha}{2-\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\cos^2\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot1\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{sen}\alpha$$

c) Factorizando y expresando $\cos^2\alpha-1=-\operatorname{sen}^2\alpha$, se obtiene:

$$\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot(-\operatorname{sen}^2\alpha)=-\cos^2\alpha$$

d) Expresando la diferencia de cuadrados como suma por diferencia, la suma vale 1. Luego se separa el primer miembro en dos fracciones y se simplifica:

$$\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}=$$

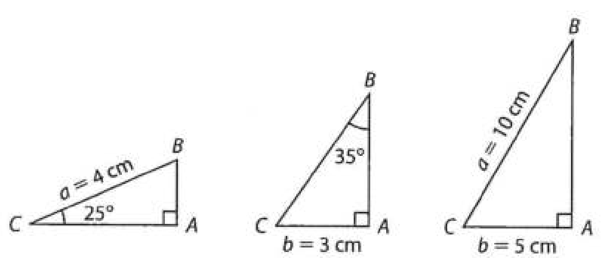
$$=\cotg\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}-\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$$

e) Expresando la tangente y la cotangente en función del seno y del coseno, y reduciendo a común denominador cada paréntesis, cuando se multiplican estos se obtiene:

$$\frac{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}$$

Triángulos rectángulos

31 **Resuelve cada uno de los triángulos rectángulos de la figura.**



a) $B=90°-25°=65°$

$b=4\cdot\cos 25°=3{,}63$ cm; $c=4\cdot\operatorname{sen}25°=1{,}69$ cm

b) $C=90°-35°=55°$

$c=\dfrac{3}{\operatorname{tg}35°}=4{,}28$ cm; $a=\dfrac{3}{\operatorname{sen}35°}=5{,}23$ cm

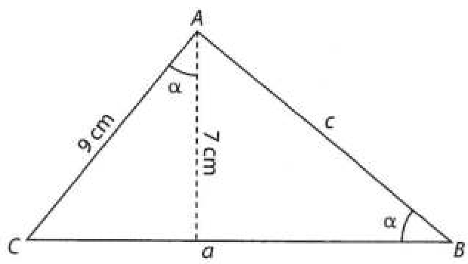
c) $\operatorname{sen}B=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$

$B=30°; C=60°; c=\sqrt{a^2-b^2}=5\sqrt{3}$ cm $=8{,}66$ cm

32 **Calcula el ángulo de elevación del Sol sobre el horizonte, sabiendo que una estatua proyecta una sombra que mide tres veces su altura.**

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3},\ \alpha=18{,}435°=18°\,26'6''$$

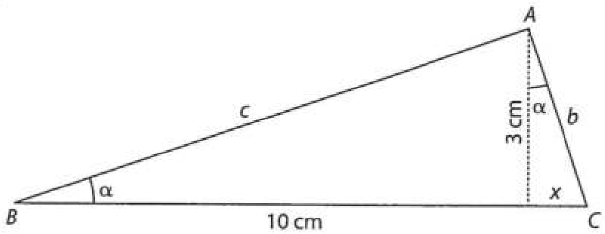
33 **En un triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, conocemos la altura correspondiente al vértice *A*, que es 7 cm, y el cateto *b* que es de 9 cm. Calcula el valor de los ángulos *B* y *C*, del cateto *c*, y de la hipotenusa, *a*.**



$\cos B=\cos\alpha=\dfrac{7}{9}\Rightarrow B=38°\ 56'\ 32{,}79''$, y por tanto: $C=51°\,3'\,27{,}21''$

Por otra parte: $\operatorname{sen}B=\dfrac{9}{a}\Rightarrow a=14{,}32$ cm y $c=11{,}14$ cm

34 **En un triángulo rectángulo, conocemos la altura correspondiente relativa a la hipotenusa, que es 3 cm, y la hipotenusa, $a=10$ cm. Calcula el valor de los ángulos agudos, y la medida de los catetos.**



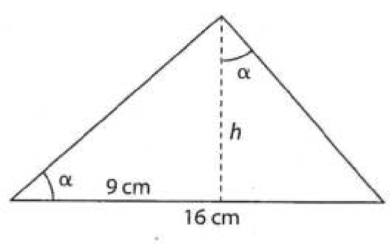
Podemos plantear: $\dfrac{3}{10-x}=\dfrac{x}{3}\Rightarrow x=1$ y $x=9$

Esto significa que la altura determina sobre la hipotenusa dos segmentos, de 9 cm y 1 cm. En la figura, con $x=1$:

$\operatorname{tg}\alpha=1/3\Rightarrow B=18°\,26'6''$, y por tanto, el otro ángulo agudo es, aproximadamente, $C=71°\,33'54''$.

$\operatorname{sen}\alpha=3/c\Rightarrow c=3\sqrt{10}$ cm $=9{,}49$ cm y $b=\sqrt{10}$ cm $=$ $=3{,}16$ cm

35 **Conociendo la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, 16 cm, y que la proyección ortogonal de uno de los catetos sobre ella es de 9 cm, calcula el área del triángulo.**

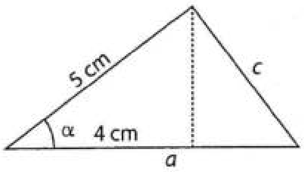


Tomando la hipotenusa como la base del triángulo, podemos calcular la altura correspondiente a la hipotenusa:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{9}=\frac{16-9}{h}\Rightarrow h^2=63\Rightarrow h=\sqrt{63}\text{ cm}$$

El área será: $A=\dfrac{b\cdot h}{2}=8\sqrt{63}$ cm$^2=63{,}50$ cm^2

36 **En un triángulo rectángulo, un cateto, *b*, mide 5 cm y su proyección sobre la hipotenusa 4 cm. Calcula la longitud de la hipotenusa y del otro cateto.**



Sea a la longitud de la hipotenusa, y c la del otro cateto.

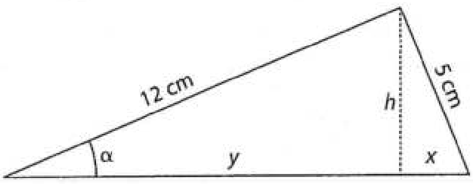
$$\cos\alpha = \frac{4}{5} = \frac{5}{a} \Rightarrow a = \frac{25}{4}\text{ cm}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \text{ y } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Como también tenemos que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{5} \Rightarrow c = 5\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{4}$ cm

Por tanto, la hipotenusa mide 6,25 cm y el otro cateto, 3,75 cm.

37 **Construye un triángulo rectángulo cuyos catetos midan $b = 5$ cm y $c = 12$ cm. Calcula la longitud de la hipotenusa, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, la altura correspondiente a la hipotenusa y los ángulos agudos de dicho triángulo.**



Aplicando Pitágoras, la hipotenusa mide $a = x + y = 13$ cm.

A partir de la figura, podemos deducir:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13} = \frac{h}{12} = \frac{x}{5}$$

de lo que se deduce lo siguiente:

$\alpha = B = 22^\circ\ 37'\ 11{,}51''$, su complementario: $C = 67^\circ\ 22'\ 48{,}49''$

$h = \frac{60}{13} = 4{,}62$ cm; $x = \frac{25}{13} = 1{,}92$ cm

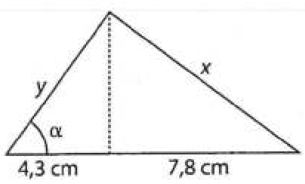
y la otra proyección, y, será: $y = 13 - \frac{25}{13} = \frac{144}{13} = 11{,}08$ cm,
$y = 12 \cdot \cos\alpha = 11{,}08$ cm

38 **En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos de 4,3 y 7,8 cm, respectivamente. Calcula:**

a) **Los ángulos agudos del triángulo.**

b) **La longitud de los catetos.**

c) **Su área.**



A partir de la figura $\operatorname{sen}\alpha = \frac{x}{12{,}1} = \frac{7{,}8}{x}$

Luego podemos calcular $x = 9{,}71$ cm

a) Con x podemos calcular los ángulos del triángulo:
$\alpha = 53^\circ\ 24'\ 24{,}18''$, su complementario: $36^\circ\ 35'\ 35{,}82''$

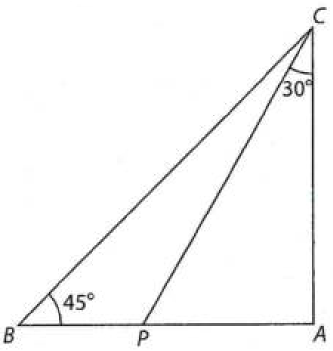
b) El otro cateto, y, se puede calcular por Pitágoras o a partir del ángulo α, y resulta ser $y = 7{,}21$ cm.

c) Con los dos catetos se puede calcular el área del triángulo, que es de 35,04 cm^2.

39 **Uno de los ángulos de un triángulo rectángulo mide $B = 27^\circ\ 45'\ 12''$ y su cateto opuesto, $b = 4$ cm. ¿Cuánto miden los otros lados y ángulos del triángulo?**

La hipotenusa mide $a = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = 8{,}59$ cm, el otro cateto, $c = \frac{b}{\operatorname{tg} B} = 7{,}60$ cm, y el otro ángulo agudo, $62^\circ\ 14'\ 48''$.

40 **Calcula el perímetro del triángulo rectángulo *ABC*, sabiendo que la longitud del segmento *CP* es $2\sqrt{3}$ cm.**



$AC = CP \cdot \cos 30^\circ = 3$ cm

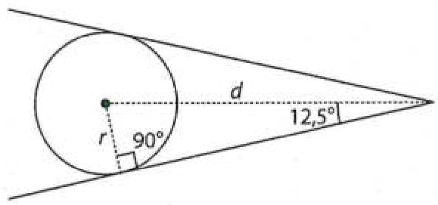
$AB = AC = 3$ cm, puesto que el ángulo $B = 45^\circ$

Por Pitágoras, $CB = 3\sqrt{2}$ cm.

El perímetro es pues: $P = 6 + 3\sqrt{2} = 10{,}24$ cm

Problemas de aplicación

41 **Una circunferencia mide 48,56 cm y las dos tangentes trazadas desde un punto exterior forman un ángulo de 25°. Calcula la distancia del centro de la circunferencia a dicho punto.**



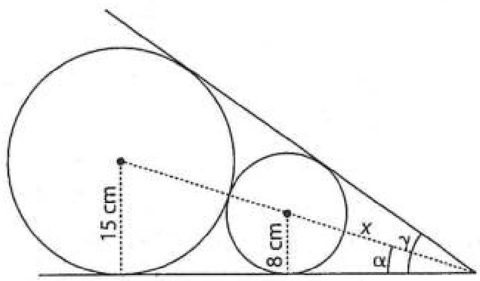
En primer lugar, calculamos el radio de la circunferencia:

$$r = \frac{48{,}56}{2\pi} = 7{,}73\text{ cm}$$

Ahora ya se puede hallar la distancia pedida:

$$\operatorname{sen} 12{,}5^\circ = \frac{r}{d} \Rightarrow d = \frac{r}{\operatorname{sen} 12{,}5^\circ} \Rightarrow d = 35{,}71\text{ cm}$$

42 **Los radios de dos circunferencias tangentes exteriormente son de 15 cm y 8 cm, respectivamente. Calcula el ángulo que forman sus tangentes comunes.**

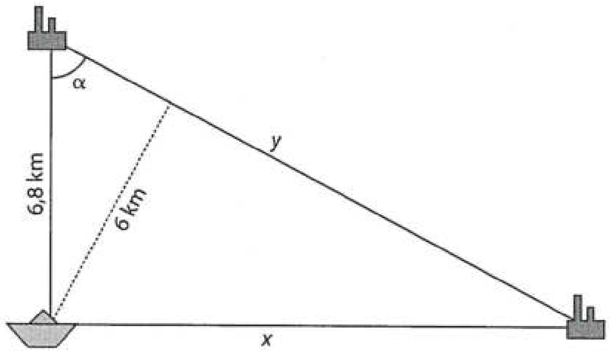


Por semejanza de triángulos: $\frac{8}{x} = \frac{15}{x+23} \Rightarrow x = 26{,}29$ cm

Por lo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{8}{x} \Rightarrow \alpha = 17{,}719^\circ$

$\Rightarrow 2\alpha = 35{,}438^\circ = 35^\circ\ 26'\ 16{,}31''$

43 **Bajo un ángulo de 90°, un barco divisa dos plataformas petrolíferas. Se sabe que la distancia a una de las plataformas es de 6,8 km, y que la distancia a la línea imaginaria que las une es de 6 km. Calcula la distancia que hay entre las plataformas y la distancia del barco a la segunda plataforma.**



Sea x la distancia a la segunda plataforma e y la distancia entre las plataformas:

$$\text{sen}\, \alpha = \frac{6}{6{,}8}$$

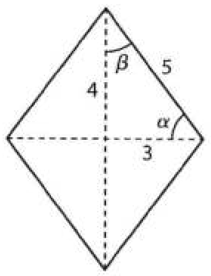
De esta igualdad se deduce el ángulo y a partir de él, tenemos que:

$x = 6{,}8 \cdot \text{tg}\, \alpha = 12{,}75$ km

$y = \dfrac{6{,}8}{\cos \alpha} = 14{,}45$ km

Las distancias son, aproximadamente, 14,45 km y 12,75 km, respectivamente.

44 **Calcula los ángulos de un rombo sabiendo que la longitud de sus lados es de 5 cm y que sus diagonales miden 6 cm y 8 cm.**



A partir de la figura, se puede deducir que:

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{4}{3}$$

Por lo que $\alpha = 53{,}13°$.

Y como β es el ángulo complementario de α, vale $\beta = 36{,}87°$.

Por lo tanto, los ángulos del rombo de la figura son 106° 15′ 37″ y 73° 44′ 23″.

45 **Desde un helicóptero que vuela a 300 m de altura se observa un pueblo, bajo un ángulo de depresión de 25°. Calcula la distancia del helicóptero al pueblo medida sobre la horizontal.**

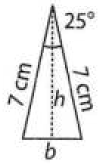
$$\text{tg}\, 25° = \frac{300}{x} \Rightarrow x = 643{,}35 \text{ m}$$

46 **El ángulo desigual de un triángulo isósceles mide 32° 24′ 36″. El lado desigual mide 7 cm. Calcula el área del triángulo.**

$$h = \frac{3{,}5}{\text{tg}\, 16°\, 12'\, 18''}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{7}{2} \cdot \frac{3{,}5}{\text{tg}\, 16°\, 12'\, 18''} = 42{,}15 \text{ cm}^2$$

47 **El ángulo desigual de un triángulo isósceles es de 25°. Los lados iguales miden 7 cm cada uno. Calcula el área del triángulo.**



Para calcular la altura del triángulo hacemos:

$$h = 7 \cdot \cos 12{,}5° = 6{,}834 \text{ cm}$$

Ahora calculamos la mitad de la base:

$$\frac{b}{2} = 7 \cdot \text{sen}\, 12{,}5° = 1{,}515 \text{ cm}$$

El área del triángulo es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = 10{,}35 \text{ cm}^2$$

48 **El área de un triángulo rectángulo es 30 cm², y su hipotenusa mide 13 cm. Averigua el valor de los ángulos agudos de dicho triángulo.**

$$\begin{cases} \dfrac{b \cdot c}{2} = 30 \\ 13^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow b = 12 \text{ y } c = 5$$

De $\text{sen}\, C = \dfrac{c}{13}$ se deduce que $C = 22°\, 37'\, 11{,}51''$, luego

$B = 90° - C = 67°\, 22'\, 48{,}49''$

Los ángulos agudos son, aproximadamente 67° 22′ 48,49″ y 22° 37′ 11,51″.

49 **Un grupo de bomberos intenta llegar con una escalera de 5 m de longitud a una ventana de un edificio que está situada a 4 m del suelo, de donde sale una densa nube de humo. ¿A qué distancia de la pared del edificio habrán de colocar los bomberos el pie de la escalera para poder entrar por la ventana?**

Simplemente por Pitágoras, $d = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ m

50 **Situados en un punto de un terreno horizontal, el ángulo que forma la visual dirigida al punto más alto de un árbol con la horizontal, es de 60°. ¿Cuál será el ángulo que se formará si nos alejamos a una distancia del árbol el triple de la inicial?**

Mediante un esquema y llamando x a la distancia inicial, tenemos que:

$$\begin{cases} \text{tg}\, 60° = h/x \\ \text{tg}\, \alpha = h/3x \end{cases} \Rightarrow \text{tg}\, \alpha = \frac{\text{tg}\, 60°}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$$

51 **Desde el suelo, vemos la terraza de un rascacielos bajo un ángulo de 40°. ¿Con qué ángulo la veríamos desde una distancia que fuera la mitad de la anterior?**

Mediante un esquema y llamando x a la distancia inicial, tenemos que:

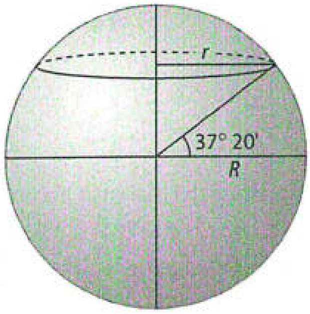
$$\begin{cases} \text{tg}\, 40° = h/x \\ \text{tg}\, \alpha = 2h/x \end{cases} \Rightarrow \text{tg}\, \alpha = 2\text{tg}\, 40° \Rightarrow \alpha = 59°\, 12'\, 36{,}96''$$

52 **La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide el triple que uno de los catetos. Averigua el valor de los ángulos de este triángulo y la relación entre la hipotenusa y el otro cateto.**

Por Pitágoras, el otro cateto mide $2\sqrt{2}$ del primero, por lo que la relación entre la hipotenusa y él es $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$.

Luego los ángulos agudos miden 70° 31′ 43,61″ y 19° 28′ 16,39″.

53 **El radio terrestre, R, mide alrededor de 6 370 km. ¿Cuál es la longitud aproximada del paralelo que pasa por Sevilla? (Latitud de Sevilla: 37° 20')**



Del dibujo deducimos: $r = R \cdot \cos 37° 20' = 5\,064{,}92$ km.

Por tanto, la longitud del paralelo será $2\pi r = 31\,823{,}83$ km.

54 **Calcula los ángulos que determina la diagonal de una caja de zapatos de 35 × 20 × 15 cm con cada una de las caras.**

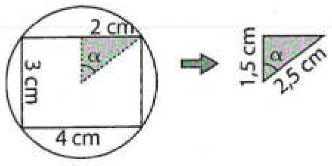
$$D = \sqrt{35^2 + 20^2 + 15^2} = \sqrt{1\,850} \text{ cm}$$

Con la cara de 35 × 20: $\text{sen } \alpha = \dfrac{15}{\sqrt{1\,850}} \Rightarrow \alpha = 20° 24' 37{,}6''$

Con la cara de 35 × 15: $\text{sen } \beta = \dfrac{20}{\sqrt{1\,850}} \Rightarrow \beta = 27° 42' 34{,}6''$

Con la cara de 15 × 20: $\text{sen } \gamma = \dfrac{35}{\sqrt{1\,850}} \Rightarrow \gamma = 54° 27' 44{,}36''$

55 **Un rectángulo de 3 cm × 4 cm está inscrito en una circunferencia. Calcula cuánto miden los arcos que determina en ella.**



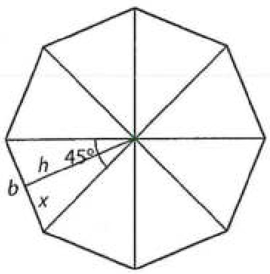
La diagonal del rectángulo mide 5 cm y el radio, 2,5 cm. Los ángulos que determinan las diagonales son:

$\text{tg } \alpha = \dfrac{2}{1{,}5} \Rightarrow \alpha = 53{,}13° \Rightarrow 2\alpha = 106{,}26°$ y, por tanto, el otro ángulo será 73,74°.

Los arcos medirán, dos a dos:

$$106{,}26° \cdot \frac{2\pi \cdot 2{,}5}{360°} = 4{,}64 \text{ cm}; \; 73{,}74° \cdot \frac{2\pi \cdot 2{,}5}{360°} = 3{,}22 \text{ cm}$$

56 **Halla el área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 5 m de radio.**



El octógono se puede dividir en ocho triángulos isósceles cuyo ángulo desigual es de 45° y sus lados iguales miden 5 m.

A partir del dibujo se observa que:

$$h = 5 \cdot \cos 22{,}5° = 4{,}619 \text{ m}$$

$$b = 2 \cdot x = 2 \cdot 5 \text{ sen } 22{,}5° = 3{,}827 \text{ m}$$

El área del octógono es el área de ocho triángulos iguales:

$$A = 8 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = 4 \cdot b \cdot h = 70{,}71 \text{ m}^2$$

57 **Un pentágono regular está inscrito en una circunferencia de radio 10 cm. Calcula:**

a) **El área del pentágono.**

b) **El área de la corona circular que forman dicha circunferencia y la circunferencia inscrita en el pentágono.**

a) El ángulo central del pentágono mide 72°. Si l es el lado:

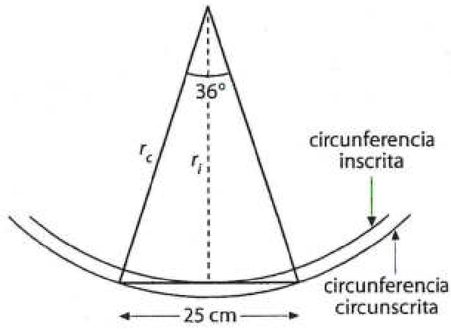
$$l/2 = 10\text{sen } 36° = 5{,}88 \text{ cm} \Rightarrow l = 11{,}76 \text{ cm}$$

La apotema mide: $a = 10\cos 36° \cong 8{,}09$ cm

$$A = 5 \cdot \frac{2 \cdot 10\text{sen } 36° \cdot 10\cos 36°}{2} = 237{,}76 \text{ cm}^2$$

b) El radio de la circunferencia inscrita es $a = 10\cos 36° = 8{,}09 \text{ cm} \Rightarrow A = \pi(10^2 - 8{,}09^2) = 108{,}54 \text{ cm}^2$

58 **Calcula el radio de la circunferencia inscrita y circunscrita a un decágono regular de 25 cm de lado.**



Este decágono se puede descomponer en diez triángulos isósceles de ángulo desigual 36° y de lado desigual 25 cm.

El radio de la circunferencia circunscrita mide lo que uno de los lados iguales de estos triángulos, r_c.

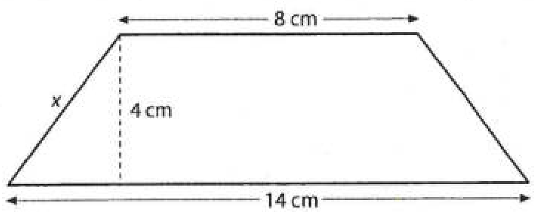
El radio de la circunferencia inscrita mide lo que la altura de uno de estos triángulos, r_i.

$$r_c = \frac{12{,}5}{\text{sen } 18°} = 40{,}45 \text{ cm} \qquad r_i = \frac{12{,}5}{\text{tg } 18°} = 38{,}47 \text{ cm}$$

59 **Un club náutico dispone de una rampa para efectuar saltos de esquí acuático. Esta rampa tiene una longitud de 8 m y su punto más elevado se encuentra a 2 m sobre el nivel del agua. Si se pretende que los esquiadores salgan desde un punto a 2,5 m de altura, ¿cuántos metros hay que alargar la rampa sin variar el ángulo de inclinación?**

Se ha de mantener $\text{sen } \alpha = 0{,}25$ si el ángulo de inclinación ha de ser el mismo; así, para saltar desde 2,5 m de altura se necesitarán $2{,}5/0{,}25 = 10$ m, es decir, hay que alargarla 2 m.

60 **Un trapecio regular tiene una altura de 4 cm y sus bases miden 8 cm y 14 cm, respectivamente. Calcula su perímetro, su área y el valor de sus ángulos.**



Como se observa en el dibujo, $x = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, por tanto:

$$P = 14 + 8 + 2 \cdot 5 = 32 \text{ cm}$$

$$A = \frac{8 + 14}{2} \cdot 4 = 44 \text{ cm}^2$$

Sus ángulos agudos tienen por tangente 4/3, es decir, son, aproximadamente, de 53,13°, y por lo tanto, sus ángulos obtusos valen, aproximadamente: $90° + 36{,}87° = 126{,}87°$

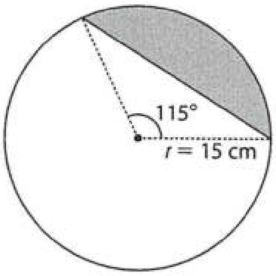
61 **En un círculo de 14 cm de radio, calcula el perímetro de un sector circular correspondiente a un ángulo central de 40°.**

40° son $40° \cdot \dfrac{\pi}{180°} = 0{,}698$ rad, por tanto, la longitud del arco de circunferencia que determina un ángulo de 40° en este círculo de radio 14 cm es, aproximadamente:

$$14 \cdot 0{,}698 = 9{,}77 \text{ cm}$$

$$P = 2 \cdot r + 9{,}772 = 37{,}77 \text{ cm}$$

62 **Calcula el área del segmento circular correspondiente a un ángulo central de 115° en una circunferencia de 15 cm de radio.**



Debemos calcular el área de la zona sombreada.

Calculamos primero el área del sector circular y, a continuación, le restamos el área del triangulo isósceles cuyo ángulo desigual mide 115° y sus lados iguales, 15 cm:

$$A_{sector} = \frac{115}{360}\pi \cdot 15^2 = 225{,}80 \text{ cm}^2$$

Ahora se calcula la altura del triángulo correspondiente a uno de los lados iguales:

$$h = 15 \cdot \text{sen } 115°$$

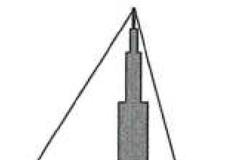
Y el área del triángulo es:

$$A_{triángulo} = \frac{15 \cdot 15 \cdot \text{sen } 115°}{2} = 101{,}96 \text{ cm}^2$$

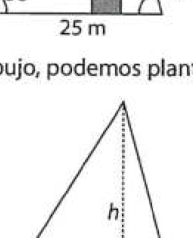
Por tanto, el área del segmento circular es de:

$$A = 225{,}80 - 101{,}96 = 123{,}84 \text{ cm}^2$$

63 **Dos observadores ven el punto más alto de una torre bajo un ángulo de 58° y 75°, respectivamente, tal como indica la figura. La distancia que los separa es de 25 metros. Calcula la altura de la torre.**



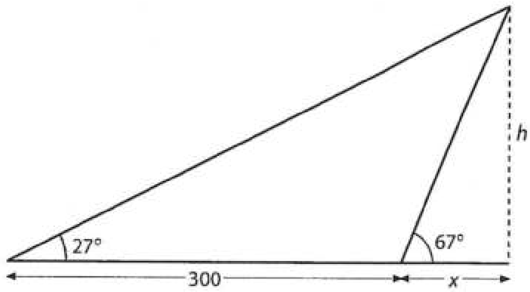
Con el siguiente dibujo, podemos plantear un sistema:



$$\begin{cases} \text{tg } 58° = \dfrac{h}{25 - x} \\ \text{tg } 75° = \dfrac{h}{x} \end{cases}$$

Se obtiene $h = 28$ m.

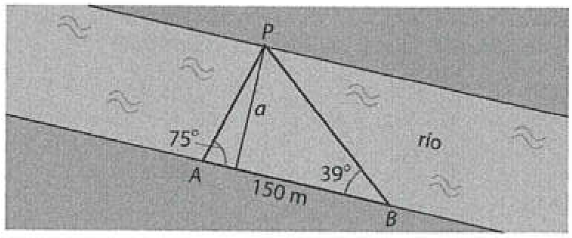
64 **Observamos la cima de una montaña bajo un ángulo de elevación de 67°. Si nos alejamos 300 m, el ángulo de elevación es de 27°. Calcula la altura de la montaña.**



$$\begin{cases} \text{tg } 67° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 27° = \dfrac{h}{(300 + x)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(\text{tg } 67° - \text{tg } 27°) = 300 \cdot \text{tg } 67° \cdot \text{tg } 27° \Rightarrow h = 195{,}04 \text{ m}$$

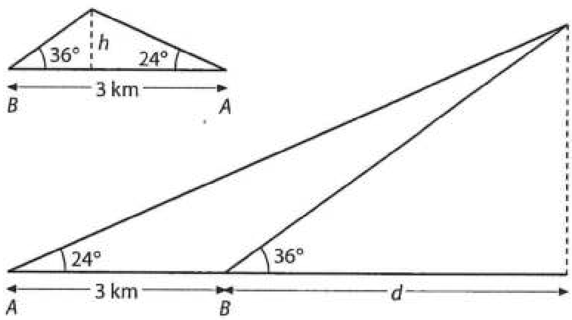
65 **Para medir la anchura de un río, dos amigos se colocan en una de las orillas separados una distancia de 150 m. Los dos miden el ángulo que forma su visual a un árbol, punto de la orilla contraria con la recta que los une, y resultan 39° y 75°, tal como indica la figura. ¿Cuál es la anchura del río?**



$$\begin{cases} \text{tg } 75° = \dfrac{a}{(150 - x)} \\ \text{tg } 39° = \dfrac{a}{x} \end{cases} \Rightarrow a = 99{,}81 \text{ m}$$

66 **Desde dos puntos distantes entre sí 3 km se observa un globo sonda. El ángulo de elevación desde uno de los puntos, *A*, es 24° y desde el otro, *B*, 36°. ¿Cuál es el punto más próximo al globo sonda? ¿Y la altura del globo?**

Del enunciado no se deduce si el globo está situado en un punto entre *A* y *B*, o si está a un mismo lado de *A* y *B*. Como se observa en los dibujos, en cualquier caso está más próximo a *B*.



Caso *a)*

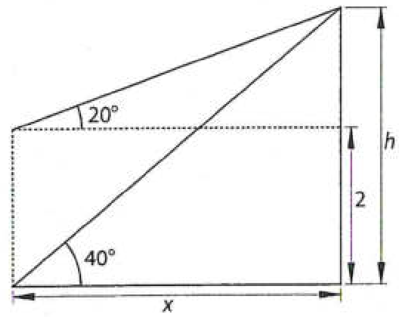
$$\begin{cases} \text{tg } 36° = h/d \\ \text{tg } 24° = h/(3 - d) \end{cases} \Rightarrow d = 1{,}86 \text{ km}; h = 0{,}83 \text{ km}$$

Caso *b)*

Hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} \text{tg } 36° = h/d \\ \text{tg } 24° = h/(3 + d) \end{cases} \Rightarrow d = 4{,}75 \text{ km}; h = 3{,}45 \text{ km}$$

67 **Desde un punto observamos la copa de un árbol bajo un ángulo de 40°. Desde ese mismo punto, pero a una altura de 2 m, vemos la copa bajo un ángulo de 20°. Calcula la altura del árbol y la distancia a la que nos encontramos de él.**

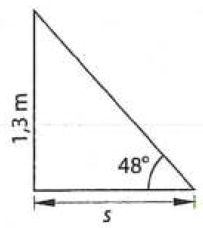


Como se observa en la figura, se puede plantear este sistema:

$$\begin{cases} \text{tg } 40° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 20° = \dfrac{h-2}{x} \end{cases}$$

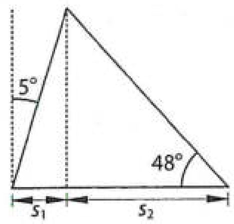
$\Rightarrow h(\text{tg } 40° - \text{tg } 20°) = 2 \cdot \text{tg } 40° \Rightarrow h = 3{,}53$ m y $x = 4{,}21$ m

68 **El ángulo de elevación del Sol sobre el horizonte es de 48°. Calcula la longitud de la sombra que proyectará una estaca clavada verticalmente en el suelo si su longitud es de 1,3 m. ¿Cuál sería la longitud de la sombra de la estaca si esta estuviera inclinada 5° respecto de la vertical?**



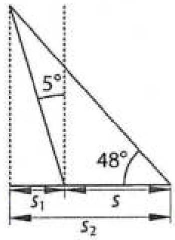
Si la estaca está clavada verticalmente, según la figura:

$$s = \frac{130}{\text{tg } 48°} = 117{,}05 \text{ cm}$$



Si la estaca está inclinada «en contra del Sol» 5° respecto de la vertical, según se observa en la figura: $s = s_1 + s_2$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = 130 \cdot \text{sen } 5° = 11{,}33 \text{ cm} \\ s_2 = \dfrac{130 \cdot \cos 5°}{\text{tg } 48°} = 116{,}61 \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow s = 127{,}94 \text{ cm}$$

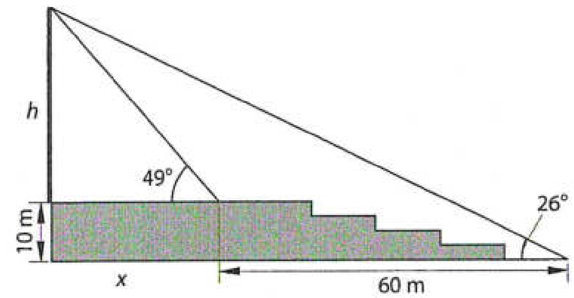


Si la estaca está inclinada «hacia el Sol» respecto de la vertical, según se observa en la figura:

$s_1 = 130 \cdot \text{sen } 5° = 11{,}33$ cm $\quad s_2 = \dfrac{130 \cdot \cos 5°}{\text{tg } 48°} = 116{,}61$ cm

Por tanto: $s = 105{,}28$ cm

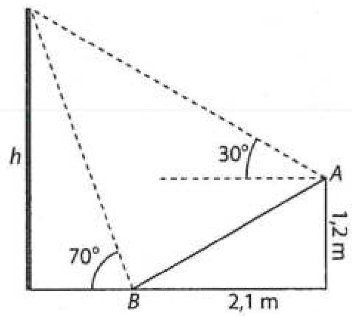
69 **Desde un punto situado a una cierta distancia de la fachada de un edificio, observamos su punto más alto bajo un ángulo de 49°, tal como se indica en la figura. Nos alejamos 60 m, bajando unas escaleras, y desde un punto 10 m por debajo del anterior, vemos el mismo punto en lo alto del edificio bajo un ángulo de 26°. Calcula la altura del edificio.**



Sea h la altura del edificio y x la distancia del edificio al primer punto de observación, se puede plantear este sistema:

$$\begin{cases} \text{tg } 49° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 26° = \dfrac{h+10}{x+60} \end{cases} \Rightarrow h = 33{,}44 \text{ m}$$

70 **Para calcular la altura de un mural, realizamos dos mediciones desde dos puntos *A* y *B*, como se indica en la siguiente figura. Calcula la distancia de ambos puntos al mural, y la altura de este.**



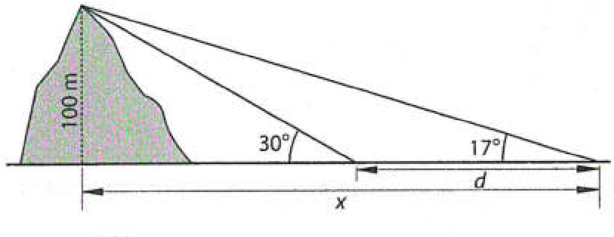
Sea x la distancia del mural al punto B. Planteamos este sistema:

$$\begin{cases} \text{tg } 70° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 30° = \dfrac{h-1{,}2}{x+2{,}1} \end{cases} \Rightarrow x = 1{,}11 \text{m}, h = 3{,}05 \text{ m}$$

La distancia de A al mural es de 3,21 m y la distancia de B al mural es de 1,11 m.

La altura del mural es de $h = 3{,}05$ m.

71 **Se observa la cima de un promontorio de altura 100 m bajo un ángulo de 17°. Nos acercamos una cierta distancia y entonces el ángulo de elevación es de 30°. Calcula qué distancia nos hemos acercado.**

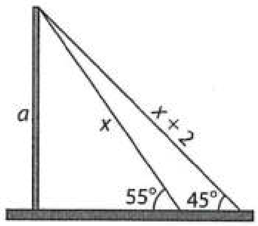


$$\text{tg } 17° = \frac{100}{x} \Rightarrow x = 327{,}085 \text{ m}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{100}{x-d} \Rightarrow d = 153{,}88 \text{ m}$$

Nos hemos acercado 153,88 m.

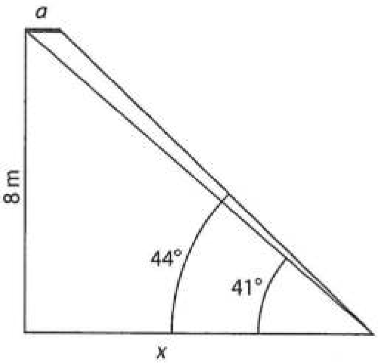
72 **El poste central de una carpa se sujeta con cables al suelo. En el punto de fijación del cable con el suelo, el ángulo que forma el cable con el terreno, supuestamente horizontal, es de 45°, y se gastan 2 m más de cable que si el cable y el terreno forman un ángulo de 55°. Si hacen falta 6 cables para realizar una sujeción segura del poste, averigua cuánto cable hace falta si gastamos la menor cantidad posible, y cuál es la altura del poste.**



$$\left\{\begin{array}{l} \text{sen } 55° = \dfrac{a}{x} \\ \text{sen } 45° = \dfrac{a}{x+2} \end{array}\right. \Rightarrow x = 12{,}622 \text{ m}, a = 10{,}339 \text{ m}$$

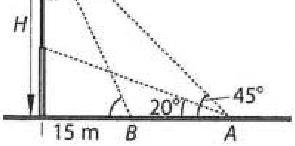
Luego hacen falta 75,73 m de cable, aproximadamente y la altura del poste es de 10,34 m, aproximadamente.

73 **Queremos averiguar la anchura de un voladizo situado a 8 m de altura. Desde un mismo punto realizamos dos mediciones y obtenemos los ángulos que se indican en la figura. Calcula la anchura del voladizo.**



$$\left\{\begin{array}{l} \text{tg } 41° = \dfrac{8}{x} \\ \text{tg } 44° = \dfrac{8}{x-a} \end{array}\right. \Rightarrow a = 0{,}92 \text{ m}$$

74 **Desde un barco A se divisa la luz de un faro bajo un ángulo de 45°, y su base, que está en una pequeña elevación de la costa, bajo un ángulo de 20°. Una barca, B, situada a 15 m del punto de la costa en que está el faro, ve su luz bajo un ángulo de 65°. Calcula cuánto mide el faro desde su base hasta su luz.**



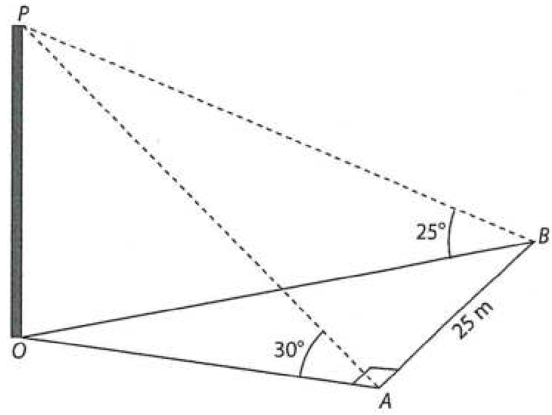
$$H = \text{tg } 65° \cdot 15$$

Esta distancia es la misma que la que hay entre A y la costa, ya que el ángulo bajo el que se divisa la luz desde A es de 45°.

Por tanto, la altura del pequeño promontorio o elevación será:

$H - a = \text{tg } 20° \cdot \text{tg } 65° \cdot 15 \Rightarrow a = H - \text{tg } 20° \cdot \text{tg } 65° \cdot 15 =$
$= \text{tg } 65° \cdot 15 - \text{tg } 20° \cdot \text{tg } 65° \cdot 15 = 20{,}46 \text{ m}$

75 **Para calcular la altura de un punto P inaccesible, dos amigos, A y B, han realizado las mediciones que se reflejan en la figura. Sabiendo que el ángulo OAB es recto, calcula la altura del punto P, perpendicular al plano OAB.**



Llamemos x a la distancia entre O y A. Llamemos y a la distancia entre O y B.

Se cumple lo siguiente: $y^2 = 25^2 + x^2$

Llamando L a la longitud del segmento OP, tenemos este sistema:

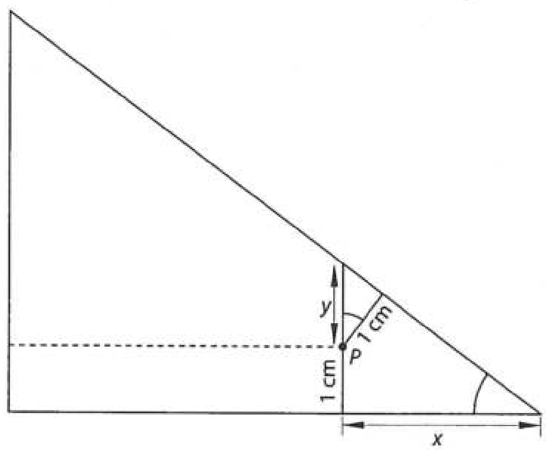
$$\left\{\begin{array}{l} \text{tg } 30° = \dfrac{L}{x} \\ \text{tg } 25° = \dfrac{L}{y} \end{array}\right. \Rightarrow x \cdot \text{tg } 30° = y \cdot \text{tg } 25°$$

Como $y = \sqrt{625 + x^2}$, tenemos que

$$x \cdot \text{tg } 30° = \sqrt{625 + x^2} \cdot \text{tg } 25°$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene: $x = 34{,}244$ m y $L = x \cdot \text{tg } 30° = 19{,}77$ m.

76 **En un triángulo rectángulo de lados 6 cm, 8 cm y 10 cm se considera un punto P, que dista 1 cm del cateto más largo y de la hipotenusa. Desde este punto trazamos perpendiculares a los dos catetos, de forma que queda dibujando un rectángulo. ¿Cuál es la superficie de este rectángulo?**



Observando los triángulos pequeños de los ángulos indicados, que son iguales por construcción, se observa que son semejantes y semejantes al triángulo mayor. Se puede escribir:

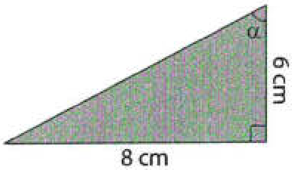
$$\frac{y}{1} = \frac{10}{8} \Rightarrow y = \frac{10}{8}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{1 + \dfrac{10}{8}}{x} \Rightarrow x = 3$$

Si $x = 3$ cm, la base del rectángulo mide 5 cm y su área, 5 cm^2.

Evaluación (página 97)

1. Calcula las razones trigonométricas del ángulo α de este triángulo rectángulo.



$a^2 = b^2 + c^2$, por tanto, $a^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \rightarrow a = 10$

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$ $\qquad$ $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$ $\qquad$ $\sec\alpha = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$

$\cos\alpha = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$ $\qquad$ $\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{10}{8} = 1{,}25$ $\qquad$ $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

2. Si el coseno y la tangente de un ángulo son negativos, ¿entre qué valores está el ángulo?

Si el coseno y la tangente de un ángulo son negativos, entonces el seno del ángulo es positivo.

Un ángulo cuyo seno es positivo y cuyo coseno es negativo se encuentra en el segundo cuadrante de la circunferencia.

Por tanto, el ángulo se encuentra entre los valores 90° y 180°, ambos no incluidos.

3. Halla los posibles valores de las siguientes razones trigonométricas sabiendo que cotg α = 1.

a) **sen α** $\qquad$ ***b)*** **cos(180° + α)** $\qquad$ ***c)*** **tg(90° + α)**

d) **¿En qué cuadrantes puede estar α? ¿Qué valores puede tomar? Da tu respuesta en grados y en radianes.**

Como $\text{cotg}\,\alpha = 1$, entonces $\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha} = 1$. Por tanto, $\text{tg}\,\alpha = 1$ y $\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha$.

a) $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ o bien $\text{sen}\,\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ o bien $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha \Rightarrow \cos(180° + \alpha) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ o bien $\cos(180° + \alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{tg}(90° + \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha = -1$

d) La cotangente es positiva en el primer y tercer cuadrante, entonces puede estar en cualquiera de los dos.

$\alpha = 45° = \dfrac{\pi}{4}$ rad o bien $\alpha = 225° = \dfrac{5\pi}{4}$ rad

4. Comprueba que se cumplen las siguientes identidades.

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \text{sen}(\pi - \alpha) + \cos(2\pi - \alpha) \cdot \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1$ $\qquad$ ***b)*** $\dfrac{\text{sen}(2\pi - \alpha) \cdot \cos\left(-\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)}{\text{sen}(\pi - \alpha)} = -\text{sen}\,\alpha$

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha$, $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$, $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ y $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$. Sustituyendo resulta: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

b) $\text{sen}(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$, $\cos\left(-\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\,\alpha$ y $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$. Sustituyendo resulta: $\dfrac{-\text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = -\text{sen}\,\alpha$

5. En un triángulo isósceles, el seno del ángulo desigual es $\dfrac{1}{2}$. ¿Cuáles son las posibles medidas de los ángulos?

Los ángulos cuyo seno es $\dfrac{1}{2}$ son 30° y 150°. Los dos son ángulos válidos para un triángulo.

Como el triángulo es isósceles, los otros dos lados son iguales, por lo que los posibles ángulos para los triángulos son:

$\hat{A} = 30°, \hat{B} = 75°, \hat{C} = 75°$ $\qquad$ $\hat{A} = 150°, \hat{B} = 15°, \hat{C} = 15°$

6. Calcula el área y el perímetro de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio. Utiliza GeoGebra para realizar la construcción y comprueba que se obtiene el mismo resultado para el área que el obtenido mediante trigonometría.

$\dfrac{360°}{8} = 45°$ $\qquad$ $\dfrac{45°}{2} = 22{,}5°$ $\qquad$ $\text{sen}\,22{,}5° = \dfrac{x}{5} \Rightarrow x = 5 \cdot \text{sen}\,22{,}5° = 1{,}913$ cm

$P = 1{,}913 \cdot 16 = 30{,}61$ cm

$\cos 22{,}5° = \dfrac{a_p}{5} \Rightarrow a_p = 5 \cdot \cos 22{,}5° = 4{,}62$ cm

$A = \dfrac{P \cdot a_p}{2} = \dfrac{30{,}61 \cdot 4{,}62}{2} = 70{,}71\ \text{cm}^2$

7. Marta observa el punto más alto de la torre Eiffel, de 324 m de altura, bajo un ángulo de 60°. Su amigo Cristian le recomienda que mire bajo un ángulo de 45°. ¿Qué distancia debe alejarse?

Primero se calcula la distancia a la que se encuentra: $\text{tg}\,60° = \dfrac{324}{x} \Rightarrow x = \dfrac{324}{\text{tg}\,60°} = 187{,}06$ m

Después se calcula la distancia que se debe alejar: $\text{tg}\,45° = \dfrac{324}{d + 187{,}06°} \Rightarrow d = \dfrac{324}{\text{tg}\,45°} - 187{,}06° = 136{,}94$ m

Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Razones trigonométricas del ángulo doble (página 102)

En el vídeo se muestran las demostraciones de las fórmulas que permiten calcular el coseno y la tangente del ángulo doble.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital estas demostraciones paso a paso o para que los alumnos puedan repasarlas más tarde.

Teorema del seno (página 107)

En el archivo de GeoGebra se puede comprobar que las longitudes de los lados y los senos de los ángulos opuestos son proporcionales y que la razón de proporcionalidad coincide con la longitud del diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital las relaciones entre los lados y las razones o para que los alumnos puedan deducir estas relaciones por sí mismos.

Teorema del coseno (página 108)

En el archivo de GeoGebra se puede comprobar que la relación entre los lados y el coseno de uno de los ángulos de un triángulo cualquiera.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital estas relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo o para que los alumnos puedan deducir estas relaciones por sí mismos.

Sistema de ecuaciones trigonométricas (página 115)

En el vídeo se muestra paso a paso cómo resolver el sistema de ecuaciones trigonométricas propuesto en el ejercicio resuelto.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital cómo debe resolverse este tipo de ejercicio o para que los alumnos puedan repasar el procedimiento más tarde.

Actividades (páginas 101/112)

1 **Calcula las razones trigonométricas de un ángulo de 15°, conociendo las de uno de 45° y las de otro de 30°.**

$\text{sen } 15° = \dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$, $\cos 15° = \dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$,

$\text{tg } 15° = 2-\sqrt{3}$

2 **Sabiendo que $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$; que el ángulo α pertenece al 3.^{er} cuadrante, que $\text{sen }\beta = \dfrac{3}{5}$ y que β pertenece al 2.° cuadrante, calcula $\text{sen }(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha-\beta)$.**

$\text{sen }(\alpha+\beta) = \dfrac{33}{65}$, $\cos(\alpha-\beta) = -\dfrac{16}{65}$

3 **Calcula el coseno y la tangente del ángulo de 75° utilizando las razones trigonométricas de 30° y 45°. Comprueba después el resultado utilizando una calculadora científica.**

$\cos 75° = \cos(30°+45°) = \cos 45°\cdot\cos 30° - \text{sen } 45°\cdot\text{sen } 30° =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$\text{tg } 75° = \text{tg }(30°+45°) = \frac{\text{tg } 45° + \text{tg } 30°}{1-\text{tg } 45°\cdot\text{tg } 30°} = \frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$= 2+\sqrt{3}$

4 **Procediendo de forma análoga a como se halló $\text{tg }(\alpha+\beta)$, demuestra que: $\text{tg }(\alpha-\beta) = \dfrac{\text{tg }\alpha - \text{tg }\beta}{1+\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\beta}$**

$$\text{tg }(\alpha-\beta) = \frac{\text{sen }(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{(\text{sen }\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\text{sen }\beta)}{(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \text{sen }\alpha\cdot\text{sen }\beta)}$$

Dividiendo todos los términos por $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, queda:

$$\text{tg}(\alpha-\beta) = \frac{(\text{tg }\alpha - \text{tg }\beta)}{(1+\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\beta)}$$

5 **Conociendo las razones trigonométricas de $\pi/6$, calcula las de $\pi/12$.**

$\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$,

$\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$

6 **Si $\text{sen }\alpha = -\dfrac{12}{13}$ y $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, calcula las razones trigonométricas del ángulo doble y del ángulo mitad de α.**

$\text{sen } 2\alpha = \dfrac{120}{169}$, $\cos 2\alpha = -\dfrac{119}{169}$, $\text{tg } 2\alpha = -\dfrac{120}{119}$,

$\text{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = -\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$, $\text{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = -\dfrac{3}{2}$

7 **Demuestra.**

a) **$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha$** ***b)*** **$\text{tg } 2\alpha = \dfrac{2\,\text{tg }\alpha}{1-\text{tg}^2\,\alpha}$**

a) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \text{sen }\alpha\cdot\text{sen }\alpha =$
$= \cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha$

b) $\text{tg } 2\alpha = \dfrac{\text{sen } 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{2\,\text{sen }\alpha\cdot\cos\alpha}{(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha)}$

Dividiendo el denominador y numerador de la fracción entre $\cos^2\alpha$: $\text{tg } 2\alpha = \dfrac{2\,\text{tg }\alpha}{(1-\text{tg}^2\,\alpha)}$

8 **Demuestra la igualdad: $\dfrac{\text{sen } 3x + \text{sen } x}{\text{sen } 3x - \text{sen } x} = \dfrac{2}{1-\text{tg}^2\,x}$**

$$\frac{\text{sen } 3x + \text{sen } x}{\text{sen } 3x - \text{sen } x} = \frac{2\text{sen }[(3x+x)/2]\cdot\cos[(3x-x)/2]}{2\cos[(3x+x)/2]\cdot\text{sen }[(3x-x)/2]} =$$

$$= \frac{2\text{sen } 2x\cdot\cos x}{2\cos 2x\cdot\text{sen } x} = \frac{\text{tg } 2x}{\text{tg } x} = \frac{2\,\text{tg } x}{1-\text{tg}^2\,x}\cdot\frac{1}{\text{tg } x} = \frac{2}{1-\text{tg}^2\,x}$$

9 **Calcula.**

a) **$\dfrac{\cos 105° - \cos 15°}{\cos 105° + \cos 15°}$** ***c)*** **$\dfrac{\text{sen } 100° + \text{sen } 40°}{\cos 100° - \cos 40°}$**

b) **$\dfrac{\text{sen } 70° + \text{sen } 50°}{\cos 70° + \cos 50°}$** ***d)*** **$\cos 52{,}5°\cdot\cos 7{,}5°$**

a) $\dfrac{\cos 105° - \cos 15°}{\cos 105° + \cos 15°} =$

$$= \frac{-2\text{sen }[(105°+15°)/2]\cdot\text{sen }[(105°-15°)/2]}{2\cos[(105°+15°)/2]\cdot\cos[(105°-15°)/2]}$$

$$= \frac{-2\text{sen } 60°\cdot\text{sen } 45°}{2\cos 60°\cdot\cos 45°} = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$$

b) $\dfrac{\text{sen } 70° + \text{sen } 40°}{\cos 100° - \cos 40°} =$

$$= \frac{2\text{sen }[(70°+50°)/2]\cdot\cos[(70°-50°)/2]}{2\cos[(70°+50°)/2]\cdot\cos[(70°-50°)/2]} =$$

$$= \frac{2\text{sen } 60°\cdot\cos 10°}{2\cos 60°\cdot\cos 10°} = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$$

c) $\dfrac{\text{sen } 100° + \text{ sen } 50°}{\cos 70° + \cos 15°} =$

$= \dfrac{2\text{sen } [(100° + 40°)/2] \cdot \cos [(100° - 40°)/2]}{(-2\text{sen } [(100° + 40°)/2] \cdot \text{sen } [(100° - 40°)/2])} =$

$= \dfrac{2\text{sen } 70° \cdot \cos 30°}{-2\text{sen } 70° \cdot \text{sen } 30°} = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

d) $\cos 52{,}5° \cdot \cos 7{,}5° = \cos \dfrac{105°}{2} \cdot \cos \dfrac{15°}{2} =$

$= \dfrac{1}{2}(\cos 60° + \cos 45°) = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{4}$

10 **Demuestra.**

***a)* La fórmula de la conversión de la diferencia de senos en productos.**

***b)* La fórmula de la conversión de la diferencia de cosenos en productos.**

a) Partiendo de las ecuaciones del seno de la suma y de la diferencia:

$$\text{sen } (\alpha + \beta) - \text{sen } (\alpha - \beta) = 2 \text{ sen } \beta \cdot \cos \alpha$$

Llamando $\alpha + \beta = A$ y $\alpha - \beta = B$, tenemos que $\alpha = \dfrac{A + B}{2}$ y $\beta = \dfrac{A - B}{2}$, con lo que:

$$\text{sen } A - \text{sen } B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cdot \text{sen } \frac{A - B}{2}$$

b) Partiendo de las ecuaciones del coseno de la suma y de la diferencia:

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta) = -2 \text{ sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$$

Llamando $\alpha + \beta = A$ y $\alpha - \beta = B$, tenemos que $\alpha = \dfrac{A + B}{2}$ y $\beta = \dfrac{A - B}{2}$, con lo que:

$$\cos A - \cos B = -2 \text{ sen } \frac{A + B}{2} \cdot \text{sen } \frac{A - B}{2}$$

11 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

***a)* $\text{sen } 3x = 1$** ***b)* $\text{sen } x = \cos x$** ***c)* $\text{cosec } x = -2$**

a) $\text{sen } 3x = 1 \Rightarrow 3x = 90° + k \cdot 360° \Rightarrow x = 30° + k \cdot 120°$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $\text{sen } x = \cos x \Rightarrow \text{tg } x = 1 \Rightarrow x = 45° + k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}$

c) $\dfrac{1}{\text{sen } x} = -2 \Rightarrow \text{sen } x = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 210° + k \cdot 360° \\ x = 330° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

12 **Resuelve $\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$**

$\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$

$\cos x = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 2 \text{ No puede ser} \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

13 **Resuelve $\text{sen } x + \cos x = 1$**

$\text{sen } x + \cos x = 1$

$\text{sen } x + \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = 1 \Rightarrow \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = 1 - \text{sen } x$

$\Rightarrow 1 - \text{sen}^2 x = 1 - 2 \text{ sen } x + \text{sen}^2 x \Rightarrow 2 \text{ sen}^2 x - 2 \text{ sen } x = 0$

$\Rightarrow \text{sen } x (\text{sen } x - 1) = 0 \Rightarrow \text{sen } x = 0 \text{ o sen } x = 1$

$\Rightarrow x = k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}, x = 180° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z},$

$x = 90° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

De estas soluciones solo son válidas para que se cumpla la ecuación inicial:

$$x = k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}, x = 90° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$$

14 **Resuelve $\text{tg } x \cdot \sec x = \sqrt{2}$**

$\text{tg } x \cdot \sec x = \sqrt{2} \Rightarrow \text{sen } x = \sqrt{2} \cos^2 x$

$\text{sen } x - \sqrt{2}(1 - \text{sen}^2 x) = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\text{sen}^2 x + \text{sen } x - \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow \text{sen } x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{sen } x = \dfrac{-2}{\sqrt{2}} \text{ No es posible.} \end{cases}$

Por tanto:

$\begin{cases} x = 45° + k \cdot 360° \\ x = 135° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

15 **Los lados de un triángulo son $a = 2$ cm, $b = 7$ cm y $c = 8$ cm. Calcula sus ángulos.**

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \dfrac{49 + 64 - 4}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \dfrac{109}{112}$
  $\Rightarrow A = 13° \, 17' \, 28{,}24'' = 13{,}3°$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow \cos B = \dfrac{4 + 64 - 49}{2 \cdot 2 \cdot 8} = \dfrac{19}{32}$
  $\Rightarrow B = 53° \, 34' \, 35{,}13'' = 53{,}6°$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow \cos C = \dfrac{4 + 49 - 64}{2 \cdot 2 \cdot 7} = -\dfrac{11}{28}$
  $\Rightarrow C = 113° \, 7' \, 56{,}63'' = 113{,}1°$

16 **Los lados *a* y *b* de un triángulo miden, respectivamente, 7 cm y 5 cm, y el ángulo comprendido entre ambos, *C*, es de 45°. Calcula el valor del lado *c*.**

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow c^2 = 49 + 25 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 45°$
$\Rightarrow c = 4{,}95$ cm

17 **Dos lados de un paralelogramo miden 6 cm y 8 cm, y forman un ángulo de 100°. Calcula la longitud de sus diagonales.**

- $d_1 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos 100° \Rightarrow d_1 = 10{,}8$ cm
- $d_2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos 80° \Rightarrow d_2 = 9{,}1$ cm

18 **Desde un punto, *A*, se divisan otros dos puntos, *B* y *C*, las visuales forman un ángulo de 52° 29'. Se sabe que *B* y *C* distan entre sí 450 m, y que *A* y *B* están separados por 500 m. Averigua la distancia que hay entre *A* y *C*.**

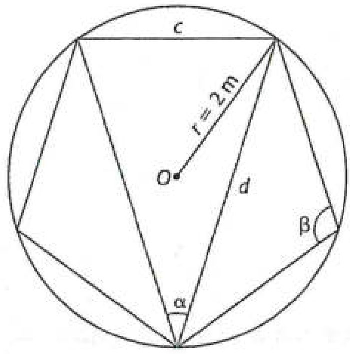
Aplicando el teorema del coseno se obtiene:

$$450^2 = 500^2 + x^2 - 1\,000x \cos 52° \, 29'$$

Resolvemos la ecuación y obtenemos:

$$\begin{cases} x = 517{,}14 \text{ m} \\ x = 91{,}85 \text{ m} \end{cases}$$

19 **Dado el pentágono regular de la siguiente figura, averigua: *c*, β, *d* y α.**



- El ángulo central que abarca un lado mide 72°, por lo que:
  $c^2 = 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 72° \Rightarrow c = 2{,}35$ cm
- $\beta = 180° - 72° = 108°$
- $d^2 = 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 144° \Rightarrow d = 3{,}80$ m
- El ángulo inscrito que abarca un lado mide la mitad del central, es decir, $\alpha = 36°$.

Ejercicios y problemas (páginas 116/120)

Identidades trigonométricas

1 **Si sen 40° = 0,6428 y sen 15° = 0,2588, ¿se puede deducir que sen 55° = 0,9008?**

No, porque sen 55° ≠ sen 40° + sen 15°

2 **Razona qué es mayor, sen 2α o 2sen α.**

Dado que sen 2α = 2 sen α · cos α, podemos observar las siguientes situaciones:

Si α ∈ 1.er cuadrante, sen 2α < 2 sen α, ya que cos α es positivo y menor que 1.

Si α ∈ 2.º cuadrante, sen 2α < 2 sen α, ya que cos α < 0.

Si α ∈ 3.er cuadrante, sen 2α > 2 sen α, ya que sen α < 0 y cos α < 0, luego el producto sen α · cos α > 0.

Si α ∈ 4.º cuadrante, sen 2α > 2 sen α, ya que 1 > cos α > 0 al multiplicar por sen α < 0 da un resultado menor en valor absoluto y, como es negativo, sen 2α es mayor que 2 sen α.

También puede utilizarse la representación geométrica.

3 **Conociendo las razones trigonométricas de $\frac{\pi}{4}$, calcula las de $\frac{\pi}{8}$.**

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{tg}\,\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

4 **El seno de un ángulo del segundo cuadrante vale 3/5. Calcula las razones trigonométricas de su ángulo doble.**

$$\text{Si sen}\,\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{4}{5}\ \text{y}\ \text{tg}\,\alpha=-\frac{3}{4}$$

$$\text{sen}\,2\alpha=-\frac{24}{25},\ \cos 2\alpha=\frac{7}{25},\ \text{tg}\,2\alpha=-\frac{24}{7}$$

5 **Sin utilizar la calculadora, halla el valor de:**

a) **sen 105°** ***b)*** **cos 165°** ***c)*** **tg 285°**

a) $\text{sen}\,105°=\text{sen}\,(45°+60°)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=$

$=\frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4}=\text{sen}\,75°$

b) $\cos 165°=-\text{sen}105°=\frac{-\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4}$

c) $\text{tg}\,285°=-\text{tg}\,75°=\text{tg}\,105°=\text{tg}(45+60)=-2-\sqrt{3}$

6 **Calcula tg α si tg 2α = $\frac{2}{3}$ y α pertenece al tercer cuadrante.**

Aplicaremos: $\text{tg}\,\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$

Será necesario, en primer lugar, calcular cos 2α, dado que $1+\text{tg}^2\,2\alpha=1/\cos^2 2\alpha$, se obtiene:

$$\cos 2\alpha=-3/\sqrt{13}$$

y sustituyendo:

$$\text{tg}\,\alpha=\sqrt{\frac{1+(3/\sqrt{13})}{1-(3/\sqrt{13})}}=0{,}3028$$

7 **Si α es un ángulo del que se conoce que π/2 < α < π, y tg α = −10, calcula sen (π + α), cos (π + α) y tg (π + α).**

sen (π + α) = −0,995, cos (π + α) = 0,0995,
tg (π + α) = −10

8 **Sabiendo que sen α = 3/4 , π/2 < α < π, y cos β = −1/3, π/2 < β < π, averigua:**

a) **sen 2α, cos 2α y tg 2α**

b) **sen (α + β), cos (α + β) y tg (α + β)**

c) **sen (α /2) y cos 2 β**

a) sen 2α = −0,992, cos 2α = −1/8, tg 2α = 7,937

b) $\text{sen}\,(\alpha+\beta)=\frac{-3-2\sqrt{14}}{12}$, $\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{7}-6\sqrt{2}}{12}$,
tg (α + β) = 1,8

c) sen (α/2) = 0,91, cos 2β = −7/9

9 **Sabiendo que dos ángulos son agudos y que sus tangentes son 3 y 0,75, respectivamente, calcula el seno de su suma, el coseno de su diferencia y la tangente de su semisuma.**

sen (α + β) = 0,95
cos (α − β) = 0,82
tg ((α + β)/2) = 1,39

10 **Sabemos que tg α = 14/5, α < π, y que sen β = −2/7, π < β < 3π/2. Averigua:**

a) **sen 2α, cos 2α y tg 2α**

b) **sen (β/2), cos (β/2) y tg (β/2)**

c) **sen (α + β), cos (α − β) y tg (2α + β/2)**

a) sen 2α = 0,63, cos 2α = −0,77, tg 2α = −0,82

b) sen (β/2) = 0,99, cos (β/2) = −0,14,
tg (β/2) = −6,85

c) sen (α + β) = − 0,99, cos (α − β) = −0,59,
tg (2α + β/2) = 1,66

11 **Si cos *a* = 3/5 y *a* es un ángulo del cuarto cuadrante y sen *b* = 4/5 y *b* es un ángulo del segundo cuadrante, calcula:**

a) $\cos\left(\frac{a}{2}+90°\right)$ ***d)*** **sen (*a* − *b*)** ***f)*** $\cos\left(\frac{a}{2}\right)$

b) **sen (2*a* + 2*b*)** ***e)*** **tg 2*a*** ***h)*** $\text{tg}\left(\frac{b}{2}\right)$

c) **tg (180° − *b*)** ***f)*** $\text{tg}\left(\frac{b}{2}-2b\right)$ ***i)*** **tg 3*a***

a) $\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}=\sqrt{\frac{1-3/5}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\cos\left(\frac{a}{2}+90°\right)=\cos\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\cos 90°-\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\text{sen}\,90°=$$

$$=-\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right)\cdot 1=\frac{-1}{\sqrt{5}}$$

b) cos *a* = 3/5 ⇒ sen *a* = − 4/5

sen 2*a* = −24/25 y cos 2*a* = −7/25

sen *b* = 4/5 ⇒ cos *b* = −3/5

sen 2*b* = −24/25 y cos 2*b* = −7/25

sen (2*a* + 2*b*) = sen 2*a* · cos 2*b* + sen 2*b* · cos 2*a* =

$$=\frac{-24}{25}\cdot\frac{-7}{25}+\frac{-24}{25}\cdot\frac{-7}{25}=0{,}54$$

c) $\text{tg}\,b=\frac{\text{sen}\,b}{\cos b}=\frac{-4}{3}$

$$\text{tg}\,(180°-b)=\frac{\text{tg}\,180°-\text{tg}\,b}{1+\text{tg}\,180°\cdot\text{tg}\,b}=\frac{0+\frac{4}{3}}{1+0\cdot\left(\frac{-4}{3}\right)}=\frac{4}{3}$$

d) $\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a =$

$$= \frac{-4}{5} \cdot \frac{-3}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = 0$$

e) $\text{tg}\,2a = \dfrac{2\,\text{tg}\,a}{1-\text{tg}^2 a} = \dfrac{24}{7}$

f) $\text{tg}\left(\dfrac{b}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos b}{1+\cos b}} = \sqrt{4} = 2$

$$\text{tg}\,2b = \frac{24}{7}$$

$$\text{tg}\left(\frac{b}{2} - 2b\right) = \frac{2-24/7}{1+2\cdot 24/7} = \frac{-10}{55}$$

g) $\cos\left(\dfrac{a}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}} = \dfrac{-2}{\sqrt{5}} = \dfrac{-2\sqrt{5}}{5}$

h) Véase el apartado *f)*.

i) $\text{tg}\,3a = \text{tg}\,(2a+a) = \dfrac{\text{tg}\,2a + \text{tg}\,a}{1-\text{tg}\,2a \cdot \text{tg}\,a} =$

$$= \frac{\dfrac{24}{7} + \left(\dfrac{-4}{3}\right)}{1 + \dfrac{27}{7}\cdot\dfrac{4}{3}} = \frac{44}{117}$$

12 **Comprueba que es rectángulo todo triángulo *ABC* que verifique lo siguiente:**

$$\text{sen}\,B + \text{sen}\,C = \cos B + \cos C$$

Es evidente, dado que si el triángulo es rectángulo en *A*, $\text{sen}\,B = \cos C$ y $\text{sen}\,C = \cos B$.

13 **Demuestra que si $A + B = \dfrac{\pi}{2}$, se cumple que:**

$$(\text{sen}\,A + \text{sen}\,B) \cdot (\cos A + \cos B) = 1 + \text{sen}\,2A$$

Si $A + B = \dfrac{\pi}{2}$, se cumple que $\text{sen}\,B = \cos A$ y $\cos B = \text{sen}\,A$.

Entonces:

$(\text{sen}\,A + \text{sen}\,B) \cdot (\cos A + \cos B) =$
$= \text{sen}\,A \cos A + \text{sen}\,B \cos A + \text{sen}\,A \cos B + \text{sen}\,B \cos B =$
$= \text{sen}\,A \cos A + \cos A \cos A + \text{sen}\,A\,\text{sen}\,A + \cos A\,\text{sen}\,A =$
$= 2\,\text{sen}\,A \cos A + \cos^2 A + \text{sen}^2 A = \text{sen}\,2A + 1$

Queda, entonces, demostrado.

14 **Demuestra las siguientes igualdades.**

a) $\text{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1-\cos^2 x}{4\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$

b) $\dfrac{\cos(a+b) - \cos(a-b)}{\text{sen}\,(a+b) + \text{sen}\,(a-b)} = -\text{tg}\,b$

c) $\dfrac{\cos a + (\cos 3a)/3}{\text{sen}\,a - (\text{sen}\,3a)/3} = \dfrac{1}{\text{tg}^3 a}$

a) $\dfrac{1-\cos^2 x}{4\cos^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{\text{sen}^2 x}{4\cdot\dfrac{1+\cos x}{2}} = \dfrac{\left[2\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2}{2(1+\cos x)} =$

$$= \frac{4\,\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\left(1+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)} =$$

$$= \frac{4\,\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cdot 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

b) $\dfrac{\cos(a+b) - \cos(a-b)}{\text{sen}\,(a+b) + \text{sen}\,(a-b)} =$

$$= \frac{-2\,\text{sen}\,\dfrac{a+b+a-b}{2}\cdot\text{sen}\,\dfrac{a+b-a+b}{2}}{2\,\text{sen}\,\dfrac{a+b+a-b}{2}\cdot\cos\dfrac{a+b-a+b}{2}} =$$

$$= \frac{-\text{sen}\,a\cdot\text{sen}\,b}{\text{sen}\,a\cdot\cos b} = -\text{tg}\,b$$

c) $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$\text{sen}\,3a = 3\,\text{sen}\,a - 4\,\text{sen}^3 a$

Sustituyendo:

$$\frac{\cos a + \dfrac{\cos 3a}{3}}{\text{sen}\,a - \dfrac{\text{sen}\,3a}{3}} = \frac{\cos a + \dfrac{1}{3}(4\cos^3 a - 3\cos a)}{\text{sen}\,a - \dfrac{1}{3}(3\,\text{sen}\,a - 4\,\text{sen}^3 a)} =$$

$$= \frac{\cos a + \dfrac{4}{3}\cos^3 a - \cos a}{\text{sen}\,a - \text{sen}\,a + \dfrac{4}{3}\text{sen}^3 a} = \frac{\dfrac{4}{3}\cos^3 a}{\dfrac{4}{3}\text{sen}^3 a} = \text{cotg}^3 a = \frac{1}{\text{tg}^3 a}$$

15 **Simplifica** $\dfrac{\text{tg}\,2a}{(1+\sec 2a)} - \dfrac{\text{sen}\,(a-b)}{\cos a\cdot\cos b} - (\text{tg}\,a + \text{tg}\,b)$

Simplificamos la primera fracción:

$$\frac{\text{tg}\,2a}{1+\sec 2a} = \frac{\dfrac{\text{sen}\,2a}{\cos 2a}}{1+\dfrac{1}{\cos 2a}} = \frac{\dfrac{\text{sen}\,2a}{\cos 2a}}{\dfrac{\cos 2a + 1}{\cos 2a}} =$$

$$= \frac{2\,\text{sen}\,a\cos a}{\cos^2 a - \text{sen}^2 a + \text{sen}^2 a + \cos^2 a} = \frac{2\,\text{sen}\,a\cos a}{2\cos^2 a} = \text{tg}\,a$$

Simplificamos la segunda fracción:

$$\frac{\text{sen}\,(a-b)}{\cos a\cdot\cos b} = \frac{\text{sen}\,a\cos b - \text{sen}\,b\cos a}{\cos a\cos b} =$$

$$= \frac{\text{sen}\,a\cos b}{\cos a\cos b} - \frac{\text{sen}\,b\cos a}{\cos a\cos b} = \text{tg}\,a - \text{tg}\,b$$

Sustituimos estas expresiones en la expresión global:

$$\frac{\text{tg}\,2a}{1+\sec 2a} - \frac{\text{sen}\,(a-b)}{\cos a\cdot\cos b} - (\text{tg}\,a + \text{tg}\,b) =$$

$= \text{tg}\,a - (\text{tg}\,a - \text{tg}\,b) - (\text{tg}\,a + \text{tg}\,b) =$
$= \text{tg}\,a - \text{tg}\,a + \text{tg}\,b - \text{tg}\,a - \text{tg}\,b = -\text{tg}\,a$

16 **Comprueba que se verifican estas igualdades.**

a) **$\text{sen}\,44° - \text{sen}\,22° = -2\cos 147° \cdot \text{sen}\,11°$**

b) **$\cos 70° - \cos 50° = 2\,\text{sen}\,300° \cdot \text{sen}\,10°$**

c) **$\text{sen}\,75° - \cos 75° = 2\cos 45° \cdot \text{sen}\,30°$**

a) $\text{sen}\,44° - \text{sen}\,22° = 2\cos 33° \cdot \text{sen}\,11° =$
$= 2(-\cos 147°) \cdot \text{sen}\,11° = -2\cos 147° \cdot \text{sen}\,11°$

b) $\cos 70° - \cos 50° = -2\,\text{sen}\,60° \cdot \text{sen}\,10° =$
$= -2(-\text{sen}\,300°) \cdot \text{sen}\,10° = 2\,\text{sen}\,300° \cdot \text{sen}\,10°$

c) $\text{sen}\,75° - \cos 75° = \text{sen}\,75° - \text{sen}\,15° =$
$= 2\cos 45°\,\text{sen}\,30°$

17 **Transforma en productos las siguientes sumas.**

a) **$\text{sen}\,100° + \text{sen}\,20°$**

b) **$\cos 100° - \cos 20°$**

c) **$\cos 70° + \cos 50°$**

a) $2\,\text{sen}\,60° \cdot \cos 40°$

b) $-2\,\text{sen}\,60° \cdot \text{sen}\,40°$

c) $2\cos 60° \cdot \cos 10°$

18 Sin utilizar la calculadora, halla:

a) $\dfrac{\text{sen } 40° + \text{sen } 20°}{\cos 40° + \cos 20°}$ *c)* $\cos 75° \cdot \cos 15°$

b) $\dfrac{\text{sen } 110° + \text{sen } 50°}{\cos 110° - \cos 50°}$ *d)* $\text{sen } 75° \cdot \cos 15°$

a) $\dfrac{\text{sen } 40° + \text{sen } 20°}{\cos 40° + \cos 20°} = \dfrac{2 \text{ sen } 30° \cdot \cos 10°}{2 \text{ sen } 30° \cdot \cos 10°} = \text{tg } 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\dfrac{\text{sen } 110° + \text{sen } 50°}{\cos 110° - \cos 50°} = \dfrac{2 \text{ sen } 80° \cdot \cos 30°}{-2 \text{ sen } 80° \cdot \text{sen } 30°} =$

$= -\text{cotg } 30° = -\sqrt{3}$

c) $\cos 75° \cdot \cos 15° = \dfrac{\cos 90° + \cos 60°}{2} = \dfrac{1}{4}$

d) $\text{sen } 75° \cdot \cos 15° = \dfrac{\text{sen } 90° + \text{sen } 60°}{2} =$

$= \dfrac{1 + \sqrt{3}/2}{2} = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}$

19 Sin utilizar la calculadora, averigua el valor de las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{\text{sen } 105° + \text{sen } 15°}{\cos 105° - \cos 15°} \cdot \text{tg } 15°$

b) $(\text{sen } 75° \cdot \text{sen } 45°) \cdot (\cos 75° \cdot \cos 45°) \cdot (1 - \cos 15°)$

a) $\dfrac{\text{sen } 105° + \text{sen } 15°}{\cos 105° - \cos 15°} \cdot \text{tg } 15° =$

$= \dfrac{2 \text{ sen } 60° \cdot \cos 45°}{-2 \text{ sen } 60° \cdot \text{sen } 45°} \cdot \text{tg } (45° - 30°) =$

$= -\text{cotg } 45° \cdot \dfrac{\text{tg } 45° - \text{tg } 30°}{1 + \text{tg } 45° \cdot \text{tg } 30°} =$

$= -1 \cdot \dfrac{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} - 2$

b) $(\text{sen } 75° \cdot \text{sen } 45°) \cdot (\cos 75° \cdot \cos 45°) \cdot (1 - \cos 15°) =$

$= \dfrac{1}{2} (\text{sen } 120° + \text{sen } 30°) \cdot \dfrac{1}{2} (\cos 120° + \cos 30°) \cdot$

$\cdot (1 - \cos (45° - 30°)) =$

$= \dfrac{1}{4} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot$

$\cdot (1 - (\cos 45° \cdot \cos 30° + \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30°)) =$

$= \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \left(1 - \left(\dfrac{\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)\right) = \dfrac{1}{8} - \left(\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{32}\right)$

20 Calcula la expresión de tg $3a$ en función de tg a. Aplícala para $a = 45°$.

$$\text{tg } 3a = \text{tg } (2a + a) = \dfrac{\text{tg } 2a + \text{tg } a}{1 - \text{tg } 2a \cdot \text{tg } a} = \dfrac{\dfrac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 a} + \text{tg } a}{1 - \dfrac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 a} \cdot \text{tg } a} =$$

$$= \dfrac{2 \text{ tg } a + \text{tg } a - \text{tg}^3 a}{1 - \text{tg}^2 a - 2 \text{ tg}^2 a} = \dfrac{3 \text{ tg } a - \text{tg}^3 a}{1 - 3 \text{ tg}^2 a}$$

$$\text{tg } 135° = \text{tg } (3 \cdot 45°) = \dfrac{3 \text{ tg } 45° - \text{tg}^3 45}{1 - 3 \text{ tg}^2 45} = \dfrac{3 - 1}{1 - 3} = -1$$

21 Halla sen $2x$ si sen $x - \cos x = 1/3$

Basta con elevar al cuadrado los dos miembros de la igualdad.

$(\text{sen } x - \cos x)^2 = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \text{sen}^2 x - 2 \text{ sen } x \cdot \cos x + \cos^2 x = \dfrac{1}{9}$

$(\text{sen}^2 x + \cos^2 x) - \text{sen } 2x = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \text{sen } 2x = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$

Ecuaciones trigonométricas

22 Resuelve.

a) $\text{tg } x = \sqrt{3}$ *d)* $\text{sen } (x/2) = \sqrt{2}/2$

b) $\sec x = 2$ *e)* $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

c) $\text{cotg } x = -1$ *f)* $\text{cosec } (x + \pi) = -\sqrt{2}$

a) $x = 60° + k \cdot 180°$

b) $\begin{cases} x = 60° + k \cdot 360° \\ x = 300° + k \cdot 360° \end{cases}$

c) $x = 135° + k \cdot 180°$

d) $\begin{cases} x = 90° + k \cdot 720° \\ x = 270° + k \cdot 720° \end{cases}$

e) $x = 3\pi/2 + k \cdot 2\pi$

f) $\begin{cases} x = \pi/4 + k \cdot 2\pi \\ x = 3\pi/4 + k \cdot 2\pi \end{cases}$

23 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\cos 3x = \text{sen } 30°$

b) $\cos (4x - \pi) = -1/2$

c) $\text{sen } 2x = \cos x$

d) $2\text{sen}^2 x + \text{sen } x = 1/2$

e) $\text{sen } x + \cos x = \sqrt{2}$

f) $\cos x - \cos 3x = 0$

g) $\text{sen } x - \cos x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

h) $\text{sen } x - \dfrac{1}{\text{sen } x} = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

i) $\text{sen } x + 2 = 3 \cos 2x$

j) $1 = \dfrac{\text{sen } 2x}{2} + \cos^2 x$

k) $\cos 2x + 5 \cos x + 3 = 0$

l) $\dfrac{\text{sen}^2 2x}{2} + \cos^2 x = 1$

m) $6 \cos^2 x + \cos 2x = 5$

n) $\cos x - \dfrac{2 \text{ tg } x}{1 + \text{tg}^2 x} = 0$

a) $\cos 3x = \text{sen } 30° \Rightarrow \cos 3x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 3x = 60° + k \cdot 360°$

$\Rightarrow 3x = 300° + k \cdot 360°$, es decir:

$\begin{cases} x = 20° + k \cdot 120° \\ x = 100° + k \cdot 120° \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos (4x - \pi) = -\dfrac{1}{2}$

El coseno de esta diferencia se puede escribir como:

$\cos 4x \cos \pi + \text{sen } 4x \text{ sen } \pi = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow -\cos 4x = -\dfrac{1}{2}$

Es decir:

$\cos 4x = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} 4x = 60° + k \cdot 360° \\ 4x = 300° + k \cdot 360° \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

Por lo que las soluciones de la ecuación son:

$\begin{cases} x = 15° + k \cdot 90° \\ x = 75° + k \cdot 90° \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

c) Se sustituye sen $2x$ y se obtiene:

$$2 \text{ sen } x \cdot \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \text{ sen } x - 1) = 0$$

De lo que se deduce:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = 90° + k \cdot 180°$$

$$2 \text{ sen } x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 30° + k \cdot 360° \\ x = 150° + k \cdot 360° \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

d) Reduciendo a común denominador se obtiene la ecuación de segundo grado:

$$4 \text{ sen}^2 x + 2 \text{ sen } x - 1 = 0$$

Se resuelve y se obtiene:

$\text{sen } x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 38{,}17° + k \cdot 360° \\ x = 141{,}83° + k \cdot 360° \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\text{sen } x = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} < -1$, no hay solución.

e) Se eleva al cuadrado la ecuación y se obtiene:

$$1 + \text{sen } 2x = 2 \Rightarrow \text{sen } 2x = 1 \Rightarrow x = 45° + k \cdot 180°$$

Hay que verificar la solución, porque al elevar al cuadrado se obtiene una ecuación cuyas soluciones son válidas para $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, y se observa que es cierta si k es un número par, por lo tanto:

$$x = 45° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$$

f) Transformamos la suma de cosenos en producto:

$$-2 \text{ sen } 2x \cdot \text{sen } (-x) = 0 \Rightarrow 2 \text{ sen } 2x \cdot \text{sen } x = 0$$

De lo que se deduce:

$$\begin{cases} \text{sen } 2x = 0 \Rightarrow x = k \cdot 90° \\ \text{sen } x = 0 \Rightarrow x = k \cdot 180° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

Estos dos conjuntos de soluciones se pueden englobar como $x = k \cdot 90°, k \in \mathbb{Z}$

g) $\text{sen } x - \cos x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

Para resolver esta ecuación se puede elevar al cuadrado y solucionarla, teniendo en cuenta que aparece la expresión del seno del ángulo doble. Hay que remarcar la necesidad de comprobar las soluciones.

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x - 2 \text{ sen } x \cos x = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - \text{sen } 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{sen } 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 210° + k \cdot 360° \Rightarrow x = 105° + k \cdot 180° \\ 2x = 330° + k \cdot 360° \Rightarrow x = 165° + k \cdot 180° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

Debemos comprobar las soluciones:

$\text{sen } 105° - \cos 105° = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $x = 105°$ es solución.

$\text{sen } 285° - \cos 285° = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $x = 105° + 180°$ no es solución.

$105° + 360°$, $\text{sen } 465° - \cos 465° = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

En general:

$x = 105 + k \cdot 360° \quad k \in \mathbb{Z}$ es solución.

Lo mismo ocurre con $165° + k \cdot 180°$: solo son soluciones aquellas que resultan de sumar a $165°$ giros completos, por lo que las soluciones de la ecuación son:

$$\begin{cases} x = 105° + k \cdot 360° \\ x = 165° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

h) $\text{sen } x - \dfrac{1}{\text{sen } x} = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

Reduciendo a común denominador, resulta:

$$2\sqrt{3} \text{ sen}^2 x + \text{sen } x - 2\sqrt{3} = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, se obtiene:

$$\text{sen } x = \begin{cases} -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

- Si $\text{sen } x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} < -1$, x no tiene solución.
- Si $\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ tenemos las siguientes soluciones:

$$\begin{cases} x = 60° + k \cdot 360° \\ x = 120° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

i) $\text{sen } x + 2 = 3 \cos 2x$

Se sustituye $\cos 2x$ y se expresa la ecuación en función de $\text{sen } x$ para conseguir una ecuación de segundo grado.

$\text{sen } x + 2 = 3 (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)$

$\Rightarrow \text{sen } x + 2 = 3(1 - 2 \text{ sen}^2 x)$

$\Rightarrow 6 \text{ sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0$

Las soluciones son:

- $\text{sen } x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 19{,}47° + k \cdot 360° \\ x = 160{,}53° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$
- $\text{sen } x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 210° + k \cdot 360° \\ x = 330° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

j) $1 = \dfrac{\text{sen } 2x}{2} + \cos^2 x$

Se sustituye $\text{sen } 2x$ y se obtiene:

$1 = \text{sen } x \cos x + \cos^2 x$

$\Rightarrow 1 - \cos^2 x - \text{sen } x \cdot \cos x = 0$

$\Rightarrow \text{sen}^2 x - \text{sen } x \cdot \cos x = 0$

$\Rightarrow \text{sen } x \text{ (sen } x - \cos x) = 0$

De lo que se deduce:

$$\begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ \text{sen } x = \cos x \end{cases}$$

Las soluciones son:

$$\begin{cases} x = k \cdot 180° \\ x = 45° + k \cdot 180° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

k) $\cos 2x + 5 \cos x + 3 = 0$

Se sustituye $\cos 2x$, y se expresa la ecuación en función de $\cos x$:

$\cos^2 x - \text{sen}^2 x + 5 \cos x + 3 = 0$

$\Rightarrow 2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0$

Se resuelve la ecuación y se obtiene:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120° + k \cdot 360° \\ x = 240° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

La otra solución de la ecuación, $\cos x = -2$, es imposible.

l) $\dfrac{\text{sen}^2 2x}{2} + \cos^2 x = 1$

$4 \text{ sen}^2 x \cos^2 x + 2 \cos^2 x = 2$

$\Rightarrow 4 \text{ sen}^2 x \cos^2 x + 2(1 - \text{sen}^2 x) = 2$

$\Rightarrow 4 \text{ sen}^2 x \cos^2 x - 2 \text{ sen}^2 x = 0$

$\Rightarrow 2 \text{ sen}^2 x (2 \cos^2 x - 1) = 0$

De esta igualdad se deduce:

$$\begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Las soluciones son:

$$\begin{cases} x = k \cdot 180° \\ x = 45° + k \cdot 90° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

m) $6 \cos^2 x + \cos 2x = 5$

$\Rightarrow 6 \cos^2 x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 5$

$\Rightarrow 6 \cos^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x - 1 = 5$

$\Rightarrow 8 \cos^2 x = 6 \Rightarrow \cos x = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 30° + k \cdot 180° \\ x = 150° + k \cdot 180° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

n) Si se expresa la tg x como $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$, se obtiene:

$$\cos x - \frac{\frac{2 \text{ sen } x}{\cos x}}{1 + \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = 0 \Rightarrow \cos x - \frac{\frac{2 \text{ sen } x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 0$$

$$\Rightarrow \cos x - \frac{2 \text{ sen } x \cos^2 x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \cos x - 2 \text{ sen } x \cos x = 0$$

Sacando factor común:

$$\cos x\,(1 - 2 \text{ sen } x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 1 - 2 \text{ sen } x = 0 \end{cases}$$

La solución $\cos x = 0$ no es válida, pues entonces no existe tg x:

$$1 - 2 \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° + k \cdot 360° \\ x = 150° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

24 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.**

a) $\begin{cases} 5 \text{ sen } x + 15 \cos y = -1 \\ 10 \text{ sen } x - 20 \cos y = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{sen}^2 \frac{x}{2} - \text{sen } y = \frac{1}{4} \\ \cos x + \cos^2 y = \frac{1}{4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2 \cos 2x = \text{tg } y \\ 4 \text{ sen}^2 2x - 2 \text{ tg } y = 1 \end{cases}$

a) Al reducir el sistema se obtiene sen $x = 0{,}7$ y $\cos y = -0{,}3$, por lo tanto:

$$\begin{cases} x = 44{,}427° + k \cdot 360° \\ x = 135{,}573° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z} \text{ y}$$

$$\begin{cases} y = 107{,}458° + k \cdot 360° \\ y = 252{,}542° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

b) Sustituyendo el seno del ángulo mitad en función del coseno y operando, se obtiene:

$$\begin{cases} 2 \cos x + 4 \cos y = 1 \\ -4 \cos x + 4 \text{ sen}^2 y = 3 \end{cases}$$

Dividiendo la segunda ecuación por 2 y sumando las dos, se obtiene:

$$2 \text{ sen}^2 y + 4 \text{ sen } y = \frac{5}{2} \Rightarrow 4 \text{ sen}^2 y + 8 \text{ sen } y - 5 = 0$$

Resolviendo esta ecuación, se obtienen dos soluciones para el seno de y, 1/2 y $-5/2$, que por ser menor que -1, no puede ser solución. Por tanto:

$$\text{sen } y = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1 - 4 \text{ sen } y}{2} = -\frac{1}{2}$$

Las soluciones son:

$$\begin{cases} x = 120° + k \cdot 360° \\ x = 240° + k \cdot 360° \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \text{ y } \begin{cases} y = 30° + k \cdot 360° \\ y = 150° + k \cdot 360° \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

c) Se sustituye tg y en la segunda ecuación:

$4 \text{ sen}^2 2x - 4 \cos 2x = 1 \Rightarrow 4(1 - \cos^2 2x) - 4 \cos 2x = 1$

Se ordena y se obtiene una ecuación de segundo grado: $4 \cos^2 2x + 4 \cos 2x - 3 = 0$.

Sus soluciones son $\cos 2x = \frac{1}{2}$ y $\cos 2x = -\frac{3}{2}$ (solución no válida).

Si $\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° + k \cdot 180° \\ x = 150° + k \cdot 180° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

Como $2 \cos 2x = \text{tg } y$, tenemos que: tg $y = 1$

$\Rightarrow y = 45° + k \cdot 180°$

Resolución de triángulos. Teoremas del seno y del coseno

25 **¿Es posible resolver un triángulo sabiendo que $a = 30$ cm, $A = 110°$ y $B = 80°$? ¿Por qué?**

No, porque $A + B > 180°$.

26 **Demuestra que el teorema del coseno equivale al teorema de Pitágoras cuando el triángulo es rectángulo.**

Suponemos el triángulo rectángulo en A, el teorema del coseno para el lado a:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90° = b^2 + c^2 \text{ (teorema de Pitágoras)}$$

27 **Resuelve los triángulos de los siguientes casos, ayudándote de su construcción gráfica:**

a) $a = 5$ $\quad b = 4$ $\quad c = 7$

b) $A = 45°$ $\quad a = 8$ $\quad b = 10$

c) $A = 35°$ $\quad B = 48°$ $\quad a = 11$

d) $A = 30°$ $\quad B = 100°$ $\quad C = 50°$

e) $A = 35°$ $\quad B = 48°$ $\quad c = 11$

a) Es un triángulo posible dado que la suma de dos cualesquiera de los lados es mayor que el otro lado.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow A = 44{,}42°$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow B = 34{,}05°$

$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos C \Rightarrow C = 101{,}53°$

b) $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow B = 62{,}11°$

$A + B + C = 180° \Rightarrow C = 72{,}89°$

$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = 10{,}81$ cm

c) $A + B + C = 180° \Rightarrow C = 97°$

$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow b = 11{,}56$ cm

$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = 15{,}44$ cm

d) Existen infinitos triángulos.

e) $A + B + C = 180° \Rightarrow C = 97°$

$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow a = 6{,}36$ cm

$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow b = 8{,}24$ cm

28 **Resuelve los siguientes triángulos.**

a) $a = 10$ cm $\quad b = 7$ cm $\quad c = 13$ cm

b) $a = 10$ cm $\quad b = 7$ cm $\quad B = 30°$

c) $a = 10$ cm $\quad b = 7$ cm $\quad C = 80°$

d) $a = 10$ cm $\quad B = 30°$ $\quad C = 80°$

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow A = 49{,}58°$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow B = 32{,}20°$

$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos C \Rightarrow C = 98{,}21°$

b) Primer triángulo: $\begin{cases} \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow A = 45{,}58° \\ A + B + C = 180° \Rightarrow C = 104{,}42° \\ \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = 13{,}56 \text{ cm} \end{cases}$

Segundo triángulo: $\begin{cases} \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow A = 134{,}42° \\ A + B + C = 180° \Rightarrow C = 15{,}58° \\ \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = 3{,}76 \text{ cm} \end{cases}$

c) $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos C \Rightarrow c = 11{,}17$ cm

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow A = 61{,}84°$$

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow B = 38{,}16°$$

d) $A + B + C = 180° \Rightarrow A = 70°$

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow b = 5{,}32 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = 10{,}48 \text{ cm}$$

29 **Calcula una cualquiera de las alturas de los triángulos resueltos en el ejercicio anterior y utilízala después para calcular su área.**

Para resolver este ejercicio hemos calculado la altura correspondiente al vértice A en todos los casos.

a) $\text{sen } B = \frac{h}{c} \Rightarrow h = 6{,}93 \Rightarrow \text{Área} = 34{,}65 \text{ cm}^2$

b) Primer triángulo: $h = 6{,}78$ cm $\Rightarrow$ Área $= 33{,}9$ cm^2

Segundo triángulo: $h = 1{,}88$ cm $\Rightarrow$ Área $= 9{,}4$ cm^2

c) $h = 6{,}89$ cm $\Rightarrow$ Área $= 34{,}45$ cm^2

d) $h = 5{,}24$ cm $\Rightarrow$ Área $= 26{,}2$ cm^2

30 **Calcula el área de cada uno de los triángulos siguientes, sabiendo:**

a) $b = 30$ cm, $A = 50°$ y $B = 74°$

b) $a = 41$ cm, $C = 45°$, y $B = 75°$

c) $a = 18$ cm, $b = 15$ cm, $C = 19° 42'$

d) $a = 6$ cm, $b = 12$ cm, $A = 17° 30'$

e) $a = 33$ cm, $b = 24$ cm, $c = 20$ cm

a) $c = \frac{30 \cdot \text{sen } 56°}{\text{sen } 74°}$

$$\text{Área} = \frac{b}{2} \cdot c \cdot \text{sen } A = 15 \cdot \frac{30 \cdot \text{sen } 56°}{\text{sen } 74°} \cdot \text{sen } 50° = 297{,}30 \text{ cm}^2$$

b) $c = \frac{41 \cdot \text{sen } 45°}{\text{sen } 60°}$

$$\text{Área} = \frac{a}{2} \cdot c \cdot \text{sen } B = \frac{41}{2} \cdot \frac{41 \cdot \text{sen } 45°}{\text{sen } 60°} \cdot \text{sen } 75° = 662{,}88 \text{ cm}^2$$

c) $\text{Área} = \frac{a}{2} \cdot b \cdot \text{sen } C = \frac{18}{2} \cdot 15 \cdot \text{sen } 19° 42' = 45{,}71 \text{ cm}^2$

d) Hay dos posibles triángulos:

- $B = 36° 58' 15{,}83''$, $C = 125° 31' 44{,}17''$, $c = 16{,}238$ cm

  $$\text{Área} = \frac{b \cdot a \cdot \text{sen } C}{2} = 29{,}30 \text{ cm}^2$$

- $B = 143° 1' 44{,}17''$, $C = 19° 28' 15{,}83''$, $c = 6{,}651$ cm

  $$\text{Área} = \frac{b \cdot a \cdot \text{sen } C}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

e) $\text{Área} = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } C}{2}$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$\text{sen } C = \sqrt{1 - \cos^2 C}$, por tanto:

$\cos C = 0{,}79861$ y $\text{sen } C = 0{,}60185 \Rightarrow \text{Área} = 283{,}33 \text{ cm}^2$

31 **Uno de los ángulos de un rombo mide 75°, y su diagonal mayor, 10 cm. Calcula su perímetro.**

$10^2 = l^2 + l^2 - 2\, l^2 \cos 105° \Rightarrow l = 6{,}3$ cm

perímetro $= 25{,}2$ cm

32 **El ángulo entre los dos lados iguales de un triángulo isósceles es de 40° y el lado desigual tiene una longitud de 40 cm. ¿Cuál es la longitud de cada uno de los lados iguales del triángulo?**

Los ángulos iguales del triángulo miden 70° cada uno. Aplicando el teorema del seno, se obtiene lo siguiente:

$$l = \frac{40 \cdot \text{sen } 70°}{\text{sen } 40°} = 58{,}48 \text{ cm}$$

33 **El ángulo agudo de un rombo mide 25°. El lado mide 13 cm. Calcula el área del rombo.**

Aplicando el teorema del coseno, $D = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cos 155°$ y $d^2 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cos 25°$ siendo D y d las dos diagonales del rombo.

Sacando factor común, se obtiene $D = \sqrt{2} \cdot 13\sqrt{1 - \cos 155°}$ y $d = \sqrt{2} \cdot 13\sqrt{1 - \cos 25°}$.

Podemos calcular el área: $A = \frac{d \cdot D}{2} = 71{,}42 \text{ cm}^2$

34 **Los lados de un triángulo miden 8 cm, 11 cm y 13 cm, respectivamente. Calcula el valor del seno del ángulo más pequeño.**

El ángulo más pequeño es el opuesto al lado de longitud 8 cm. Aplicando el teorema del coseno, se obtiene lo siguiente:

$$8^2 = 11^2 + 13^2 - 2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{11^2 + 13^2 - 8^2}{2 \cdot 11 \cdot 13}$$

Teniendo en cuenta que $\text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, o utilizando la calculadora:

$$\text{sen } \alpha = 0{,}61$$

35 **Los tres lados de un triángulo miden 6 cm, 8 cm y 9 cm. Calcula sus ángulos y su área.**

Aplicando el teorema del coseno se pueden obtener los ángulos:

$$\alpha = 40{,}80°; \beta = 60{,}61°; \gamma = 78{,}59°$$

$$A = \frac{9 \cdot 8 \cdot \text{sen } 40{,}80°}{2} = 23{,}52 \text{ cm}^2$$

36 **Una araña ha tejido una tela octogonal de 7 cm de radio. Calcula el área que abarca la tela de araña.**

Lado tela de araña $= 5{,}36$ cm

Perímetro tela de araña $= 42{,}88$ cm

Apotema tela de araña $= 6{,}47$ cm

Área tela de araña $= 138{,}72$ cm^2

37 **Calcula el radio de las circunferencias inscrita y circunscrita de un pentágono regular de 5 dm de lado.**

$$\frac{R_c}{\text{sen } 54°} = \frac{5}{\text{sen } 72°} \Rightarrow R_c = 4{,}25 \text{ dm}$$

$$\text{tg } 36° = \frac{2{,}5}{R_i} \Rightarrow R_i = 3{,}44 \text{ dm}$$

38 **En un triángulo ABC, conocemos los ángulos, $A = 34{,}5°$, $B = 78°$ y la suma de los lados, $a + b = 43$ cm. Calcula cuánto miden los lados a y b.**

$$\frac{43 - b}{\text{sen } 34{,}5°} = \frac{b}{\text{sen } 78°} \Rightarrow b = 27{,}24 \text{ cm}, a = 15{,}76 \text{ cm}$$

39 **En un triángulo ABC, conocemos los lados $a = 15$ cm, $b = 11$ cm y la suma de dos de sus ángulos $A + B = 104°$. Calcula cuánto miden los ángulos A y B.**

El ángulo C mide 76°. Aplicando el teorema del coseno podemos hallar $c = 16{,}315$. Luego se calcula A y B:

$$\text{sen } A = \frac{15 \cdot \text{sen } 76°}{c} \Rightarrow A = 63° 8' 23{,}36'' \text{ y } B = 40° 51' 36{,}64''$$

40 **En un triángulo ABC dados $A - B = 16°$, $a = 23$ cm y $b = 19$ cm. Calcula los ángulos del triángulo.**

Sabemos que $A = 16° + B$. Por el teorema del seno:

$$\frac{23}{\text{sen}\,(16° + B)} = \frac{19}{\text{sen}\,B}$$

$$\Rightarrow 23 \cdot \text{sen}\,B = 19\,(\text{sen}\,16° \cdot \cos B + \text{sen}\,B \cdot \cos 16°)$$

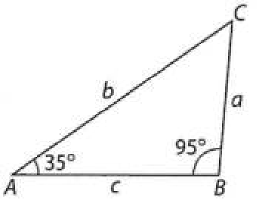
$$\Rightarrow \text{sen}\,B\,(23 - 19 \cdot \cos 16°) = 19\,\text{sen}\,16° \cdot \cos B$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,B = \frac{19 \cdot \text{sen}\,16°}{23 - 19 \cdot \cos 16°} \Rightarrow B = 47°\,52'\,34{,}69''$$

Por tanto: $A = 16° + B = 63°\,52'\,34{,}69''$ y

$C = 180° - A - B = 68°\,14'\,50{,}62''$

41 **Los ángulos de la base de un triángulo valen 35° y 95°, y la suma de los otros dos lados es 38 cm. Calcula el perímetro y el área del triángulo.**



$$\frac{a}{\text{sen}\,35°} = \frac{b}{\text{sen}\,95°} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\,35°} = \frac{38 - a}{\text{sen}\,95°}$$

$\Rightarrow a = 13{,}88$ cm $\Rightarrow b = 24{,}12$ cm

$C = 50°$

$$\frac{a}{\text{sen}\,35°} = \frac{c}{\text{sen}\,50°} \Rightarrow c = 18{,}54 \text{ cm}$$

Perímetro $= 56{,}54$ cm

$\text{sen}\,35° = h/c \Rightarrow h = 10{,}63$ cm $\Rightarrow$ Área $= 128{,}25$ cm^2

42 **Demuestra que en todo triángulo ABC, se cumple el teorema de la tangente, también conocido como teorema de Nepper:**

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\text{tg}\,\dfrac{A-B}{2}}{\text{tg}\,\dfrac{A+B}{2}}$$

(Indicación: debes usar el teorema del seno para escribir la relación entre a y b)

Por el teorema del seno: $a = \dfrac{\text{sen}\,A}{\text{sen}\,B} \cdot b$. Sustituimos:

$$\frac{\dfrac{\text{sen}\,A}{\text{sen}\,B} \cdot b - b}{\dfrac{\text{sen}\,A}{\text{sen}\,B} \cdot b + b} = \frac{\text{sen}\,A - \text{sen}\,B}{\text{sen}\,A + \text{sen}\,B} =$$

$$= \frac{2\cos\dfrac{A+B}{2}\,\text{sen}\,\dfrac{A-B}{2}}{2\,\text{sen}\,\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}} = \frac{\text{tg}\,\dfrac{A-B}{2}}{\text{tg}\,\dfrac{A+B}{2}}$$

Queda entonces demostrado.

43 **En los lados de un triángulo ABC se cumple que $b - a = 1$ y $c - b = 1$, y se tiene que $\cos A = 0{,}6$. Calcula a, $\text{tg}\left(\dfrac{B}{2}\right)$ y $\text{sen}\,2C$.**

Los lados son a, $b = a + 1$ y $c = a + 2$.

Planteamos el teorema del coseno y obtenemos esta ecuación una vez simplificada: $a^2 - 12a - 13 = 0 \Rightarrow a = 13$.

Para calcular B con el teorema del coseno obtenemos:

$$\cos B = 0{,}51 \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{B}{2}\right) = 0{,}57$$

Para calcular C aplicamos el teorema del coseno y se obtiene:

$$\cos C = 0{,}38 \Rightarrow C = 67{,}38° \text{ y } \text{sen}\,2C = 0{,}71$$

44 **De un triángulo se conocen los lados $b = 2{,}5$ cm y $c = 3{,}5$ cm y se sabe que el ángulo B es la mitad del ángulo C. Calcula a y los ángulos A, B y C.**

Si $C = 2B$, a partir del teorema del seno se obtiene que $\cos B = 0{,}7$. Luego:

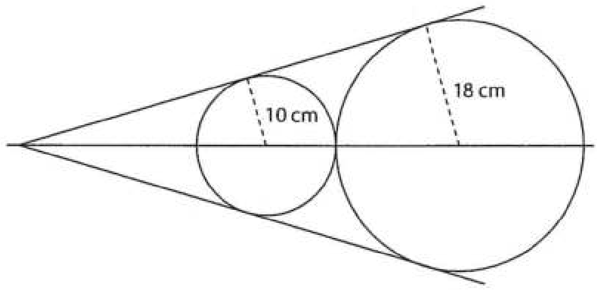
$$B = 45°\,34'\,22{,}79'',\ C = 91°\,8'\,45{,}57'' \text{ y } A = 43°\,16'\,51{,}64''$$

Aplicando el teorema del seno se obtiene: $a = 2{,}49$ cm

45 **En un círculo de 10 cm de radio, dibujamos una cuerda que une los extremos de un arco que abarca un ángulo de 80°. Averigua la longitud de la cuerda que se estudia.**

$$\frac{10}{\text{sen}\,50°} = \frac{x}{\text{sen}\,80°} \Rightarrow x = 12{,}86 \text{ m}$$

46 **Halla el ángulo que forman las dos tangentes comunes a dos circunferencias exteriores cuyos radios miden, respectivamente, 10 cm y 18 cm.**



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{18}{x + 38}$$

Por otra parte: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{10}{x + 10}$

Resolviendo el sistema obtenemos: $\begin{cases} x = 25 \text{ cm} \\ \alpha = 16{,}6° \end{cases}$

Por tanto, el ángulo que forman las dos tangentes es: $2\alpha = 33{,}2°$.

47 **Un triángulo de lados 3 cm, 4 cm y 6 cm, está inscrito en una circunferencia.**

a) **Calcula su perímetro.**

b) **Averigua su área.**

En primer lugar, calculamos uno de sus ángulos. Sea $a = 3$ cm, $b = 4$ cm y $c = 6$ cm

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{16 + 36 - 9}{48} \Rightarrow A = 26°\,23'\,3{,}59''$$

Por el teorema del seno, si r es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo:

$$\frac{a}{\text{sen}\,A} = 2r \Rightarrow r = 3{,}375 \text{ cm}$$

Por lo que el perímetro y el área de la circunferencia son, respectivamente: $P = 21{,}21$ cm y $A = 35{,}79$ cm^2.

48 **En una circunferencia de radio 10 cm, hay inscrito un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 10 cm también. Calcula el área de dicho triángulo.**

Sea $a = 10$ cm. Por el teorema del seno, si r es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo, $\dfrac{a}{\text{sen}\,A} = 2r \Rightarrow A = 30°$

Los ángulos iguales medirán 75° cada uno. Uno de los lados iguales, b, medirá:

$$b = 20 \cdot \text{sen}\,75°$$

El área del triángulo es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,75°}{2} = \frac{10 \cdot 20 \cdot \text{sen}\,75° \cdot \text{sen}\,75°}{2}$$

$\Rightarrow A = 93{,}3$ cm^2

49 **Determina el área de un triángulo que está inscrito en una circunferencia de radio 3 cm, sabiendo que dos de los lados del triángulo miden 2 cm y 4 cm, respectivamente.**

Supongamos $a = 2$ cm y $b = 4$ cm. Como: $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = 2r$, siendo r el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo, tenemos lo siguiente: sen $A = 1/3$ y sen $B = 2/3$

$A = 19° \, 28' \, 16{,}39''$ o $A = 160° \, 31' 43{,}6''$ y $B = 41° \, 48' \, 37{,}13''$ o $B = 138° \, 11' \, 22{,}8''$.

Hay pues, dos triángulos posibles:

Triángulo 1:

$A = 19° \, 28' \, 16{,}39''$, $B = 41° \, 48' \, 37{,}13''$ y $C = 118° \, 43' \, 6{,}48''$

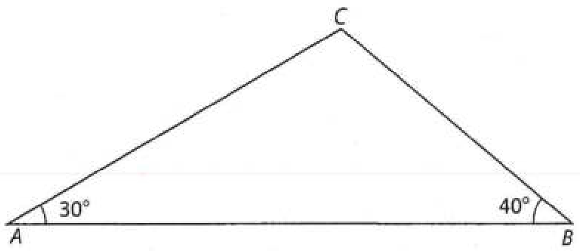
Triángulo 2:

$A = 19° \, 28' \, 16{,}39''$, $B = 138° \, 11' \, 22{,}8''$ y $C = 22° \, 20' \, 20{,}84''$

Como es área de un triángulo es $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(a \cdot b \cdot \text{sen } C)}{2}$, sustituyendo se tiene:

- Triángulo 1: $A = \frac{2 \cdot 4 \cdot \text{sen } C}{2} = 3{,}51 \text{ cm}^2$
- Triángulo 2: $A = \frac{2 \cdot 4 \cdot \text{sen } C}{2} = 1{,}52 \text{ cm}^2$

50 **Calcula el área del triángulo *ABC* representado en la siguiente figura si sabes que $AB = 25$ cm:**



Por el teorema del seno: $CB = \frac{25 \cdot \text{sen } 30°}{\text{sen } 110°}$

$A = \frac{25 \cdot CB \text{ sen } 40°}{2} = \frac{25 \cdot (25 \cdot \text{sen } 30°/\text{sen } 110) \cdot \text{sen } 40°}{2} =$

$= 106{,}88 \text{ cm}^2$

51 **Sabiendo que la longitud de las manecillas de un reloj de pared miden 10 y 12 centímetros, respectivamente.**

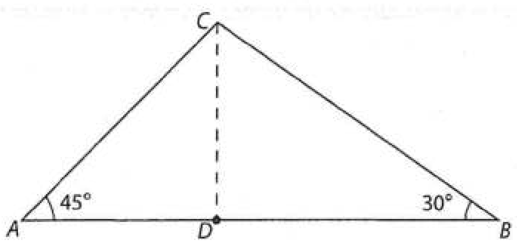
a) **¿Cuál es la distancia entre sus extremos cuando son las 16:00?**

b) **¿Qué área tiene el triángulo que determinan las manecillas a esta hora?**

a) Por el teorema del coseno, la distancia entre sus extremos es 19,08 cm aproximadamente. El ángulo que forman las manecillas es de 120°.

b) $A = \frac{12 \cdot 10 \cdot \text{sen } 120°}{2} = 51{,}96 \text{ cm}^2$

52 **El área de un triángulo de vértices *A*, *B* y *C*, tiene una superficie de 50 m². El ángulo *A* de este triángulo es de 45° y el ángulo *B* es de 30°. Sea *D* el pie de la altura desde el vértice *C*, es decir, el punto del segmento *AB* en que se cumple que *CD* es perpendicular a *AB*. Calcula la longitud de los segmentos *CD*, *AD*, *BD*, *AB*, *BC* y *AC*.**



A partir de este sistema se pueden calcular las longitudes solicitadas:

$$\begin{cases} \frac{AB \cdot CD}{2} = 50 \\ \frac{AB}{\text{sen } 105°} = \frac{CB}{\text{sen } 45°} = \frac{AC}{\text{sen } 30°} \end{cases}$$

$\Rightarrow CD = AD = 6{,}05$ m; $BD = 10{,}48$ m; $AB = 16{,}53$ m; $BC = 12{,}10$ m; $AC = 8{,}56$ m.

53 **De un triángulo conocemos que $a + b = 11$ m; el ángulo $C = 30°$; y el área es 7 m². Calcula:**

a) **La longitud de cada uno de los lados del triángulo.**

b) **Los ángulos del triángulo.**

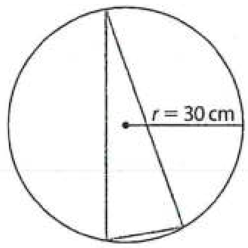
a) Planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a + b = 11 \\ 7 = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } 30°}{2} \end{cases} \Rightarrow b = 7, b = 4 \Rightarrow a = 4, a = 7$$

Es decir, los lados miden 4 m y 7 m, respectivamente.

b) Por el teorema del seno, los ángulos miden 29,49° y 120,51°, respectivamente.

54 **Calcula el área de un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia de 30 cm de radio, y cuyo lado desigual mide 20 cm.**



Para resolver este problema conviene consultar el apartado **Aplicación de los teoremas del seno y del coseno** de la sección **Ejercicios resueltos.**

Para calcular el ángulo desigual del triángulo isósceles, se calcula el ángulo que abarca un arco igual y uno de cuyos lados es un diámetro.

$\text{sen } \alpha = \frac{20}{60} \Rightarrow \alpha_1 = 19{,}47° \quad \alpha_2 = 160{,}53°$

Hay dos triángulos isósceles inscritos.

Los elementos de uno son:

- El ángulo que forman los lados iguales es, aproximadamente, 19,47°.
- La longitud de los lados iguales:

$$\text{sen } 9{,}735° = \frac{10}{x} \Rightarrow x = 59{,}14 \text{ cm}$$

- La altura:

$\cos 9{,}735° = \frac{h}{x} \Rightarrow h = 58{,}29$ cm, y por tanto, el área es 582,9 cm², aproximadamente.

Los elementos del otro triángulo son:

- El ángulo que forman los ángulos iguales es, aproximadamente, 160,53°.
- La longitud de los lados iguales:

$$\text{sen } 80{,}265° = \frac{10}{x} \Rightarrow x = 10{,}15 \text{ cm}$$

- La altura:

$\cos 80{,}265° = \frac{h}{x} \Rightarrow h = 1{,}72$ cm, y por tanto, el área es 17,2 cm².

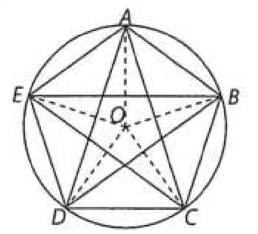
55 **Sobre una circunferencia de radio 1 m y centro en el punto *O*, consideramos los cinco vértices *A, B, C, D* y *E* de un pentágono regular. Calcula:**

a) **El ángulo que forma el radio que acaba en el vértice *A* con el lado *AB* y el ángulo que forman en el vértice *A* los dos lados que lo tienen como extremo.**

b) **La longitud de cada uno de los lados del pentágono.**

c) **La longitud de cualquiera de las diagonales.**

d) **El área del triángulo *EAB*.**



a) Como es un pentágono, el ángulo interno del arco *AB* es $360°/5 = 72°$. Por tanto, como el triángulo *ABO* es isósceles, el ángulo que forman el radio y el lado *AB* es:

$$\frac{180° - 72°}{2} = 54°$$

Y el ángulo que forman *AE* y *AB* es el doble, es decir, 108°.

b) Por el teorema del coseno: $l = \sqrt{2 - 2\cos 72°} = 1{,}176$ m

c) El ángulo central que abarca un lado mide 72°, por tanto el que abarca dos lados del pentágono 144°. Por el teorema del coseno: $d = \sqrt{2 - 2\cos 144°} = 1{,}902$ m

d) $A = \dfrac{EB \cdot AB \cdot \text{sen } 36°}{2} = 0{,}657 \text{ m}^2$

56 **El lado más largo de un paralelogramo mide 20 cm, su área es de 120 cm² y su ángulo menor, 30°. Determina:**

a) **El ángulo mayor del paralelogramo.**

b) **La longitud del lado menor.**

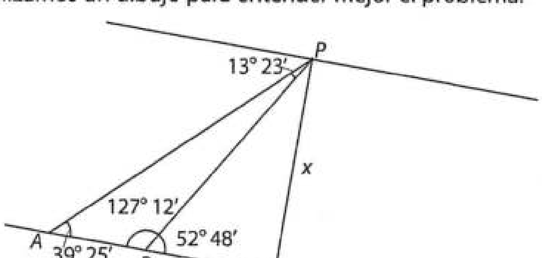
a) Los cuatro ángulos de un cuadrilátero suman 360°. Por tanto, el ángulo mayor es 150°.

b) El área es $A = b \cdot h$. Tomando como base el lado conocido: $120 = 20 \cdot c \cdot \text{sen } 30° \Rightarrow c = 12$ cm.

Aplicaciones de la trigonometría

57 **En un cierto lugar de su recorrido un río tiene sus orillas paralelas. En ese punto se desea medir su anchura. Para ello desde dos puntos *A* y *B* de una de sus orillas, que están separados 25 m, se observa un punto *P* de la otra orilla, situado río abajo. Si las visuales desde *A* y *B* a *P* forman con la orilla unos ángulos de 39° 25′ y 52° 48′ respectivamente, averigua la anchura del río en ese punto.**

Realizamos un dibujo para entender mejor el problema:



Como $AB = 25$ m, al aplicar el teorema del seno:

$$\frac{25}{\text{sen } 13° 23'} = \frac{AP}{\text{sen } 127° 12'}$$

Luego obtenemos *AP* y como $x = AP \cdot \text{sen } 39° 25' \Rightarrow x = 54{,}63$ m

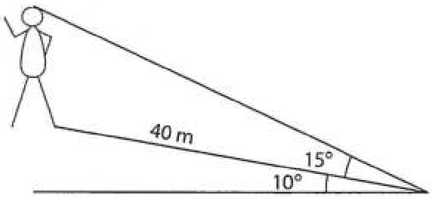
58 **Si el extremo superior de una estatua es observado desde un punto situado a ras del suelo y a cierta distancia, con un ángulo de elevación de 35°, ¿cuál será el ángulo de elevación desde el triple de distancia?**

$$\text{tg } 35° = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \text{ tg } 35°$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{h}{3x} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\text{tg } 35°}{3} \Rightarrow \alpha = 13{,}14°$$

El ángulo de elevación es de 13,14°.

59 **Una rampa de 40 m de longitud y 10° de inclinación conduce al pie de una estatua. Calcula su altura sabiendo que, en el inicio de la rampa, el ángulo de elevación del punto más alto de la estatua es de 15°.**



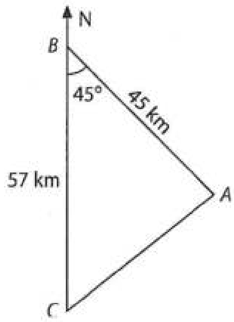
$$\frac{40 \text{ m}}{\text{sen } 65°} = \frac{h}{\text{sen } 15°} \Rightarrow h = 11{,}42 \text{ m}$$

La altura de la estatua es de 11,42 m.

60 **Una embarcación, *A*, se encuentra a 45 km al sureste de otro barco *B*, y una tercera embarcación, *C*, se halla a 57 km al sur de *B*.**

a) **¿Qué distancia separa a los barcos *A* y *C*?**

b) **¿Qué rumbo debería tomar el barco *C* para arribar al punto donde está situado *A*?**



a) $AC^2 = 57^2 + 45^2 - 2 \cdot 57 \cdot 45 \cdot \cos 45°$

$\Rightarrow AC = 40{,}58$ km

b) $\dfrac{AC}{\text{sen } 45°} = \dfrac{45}{\text{sen } C} \Rightarrow C = 51{,}64°$

El barco *C* debería tomar un rumbo 51,64° Noreste.

61 **Un golfista golpea la pelota de modo que su lanzamiento alcanza una longitud de 129 m. Si la distancia del golfista al hoyo es de 150 m y la pelota queda a una distancia de 40 m del hoyo, calcula el ángulo que forma la línea de unión del golfista con el hoyo y la dirección del lanzamiento.**

Aplicando el teorema del coseno:

$$40^2 = 129^2 + 150^2 - 2 \cdot 129 \cdot 150 \cdot \cos \alpha$$

El ángulo que forma la dirección del tiro y la visual entre el golfista y el hoyo es $\alpha = 14{,}06°$.

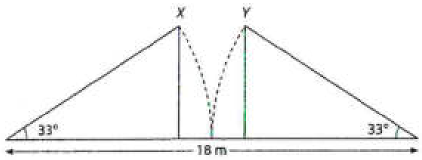
62 **Dos observadores que se hallan en la costa a 1 000 m de distancia el uno del otro contemplan una plataforma petrolífera situada mar adentro. Ambos dirigen sus respectivas visuales a la plataforma y miden el ángulo que forman estas con la línea imaginaria que los une. Si estos ángulos valen 63° y 83°, ¿cuál es la distancia que separa la plataforma de la costa?**

$$\frac{x}{\text{sen } 83°} = \frac{1\,000}{\text{sen } 34°} \Rightarrow x = 1\,774{,}96 \text{ m}$$

$$\text{sen } 63° = \frac{h}{1\,774{,}96} \Rightarrow h = 1\,581{,}5 \text{ m}$$

La distancia de la plataforma a tierra es de 1 581,5 m, aproximadamente.

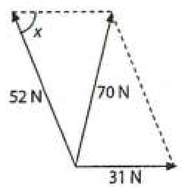
63 **Los puentes levadizos de la figura tienen la misma longitud. Cuando están elevados 33°, ¿qué distancia separa los puntos *X* e *Y*?**



$\cos 33° = X/9 \Rightarrow X = 7{,}55$ m $\qquad 18 - 15{,}10 = 2{,}90$ m

La distancia entre *X* e *Y* es 2,90 m.

64 **Averigua el ángulo que forman dos fuerzas de 52 N y 31 N, cuya resultante es de 70 N.**



Aplicando el teorema del coseno:

$70^2 = 31^2 + 52^2 - 2 \cdot 31 \cdot 52 \cos \alpha$

$\Rightarrow \alpha = 112° \, 31' 25''$

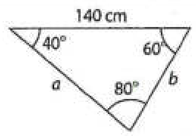
A partir de la figura y teniendo en cuenta este resultado, se obtiene que el ángulo que forman las dos fuerzas es su suplementario, 67° 28′ 35″.

65 **Alejandro quiere colgar una lámpara a una determinada distancia del techo de su habitación. Para ello, coge un cable, fija la lámpara y lo clava por sus extremos en dos puntos del techo que están separados 140 cm. Alejandro escoge estos puntos de modo que los ángulos entre el cable y el techo son de 40° y 60° en cada uno de los puntos de fijación.**

a) **¿Cuál es la longitud del cable?**

b) **¿A qué distancia del techo quedará la lámpara?**

a)



Aplicando el teorema del seno:

$$a + b = \frac{140}{\text{sen } 80°}(\text{sen } 60° + \text{sen } 40°) = 214{,}49$$

La longitud del cable será, por tanto, 214,49 cm

b) La lámpara estará a $d = \dfrac{140}{\text{sen } 80°} \text{sen } 60° \cdot \text{sen } 40° =$

$= 79{,}14$ cm del techo.

66 **Hay que realizar un mapa de una cierta zona montañosa y *A*, *B* y *C* son las cimas de tres montañas de la misma altura. Las cimas *A* y *B* están bien determinadas y representadas en el mapa, mientras que la situación de *C* está por determinar.**

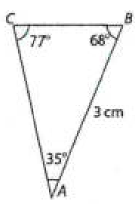
Subimos a lo alto de la cima *A* y medimos el ángulo entre la línea *AB* y la línea *AC*, que resulta de 68°. Subimos a *B* y el ángulo entre las líneas *BC* y *BA* es de 35°. En el mapa la distancia entre *A* y *B* es de 3 cm.

a) **Haz un diagrama de la situación, anotando el ángulo que forman en *C* las líneas *CA* y *CB*.**

b) **Halla, sobre el mapa, la distancia entre *A* y *C* y la distancia entre *B* y *C*.**

c) **Si la escala del mapa es 1:50 000, calcula la distancia entre las cimas de las tres montañas.**

a)



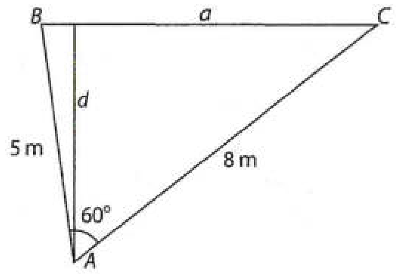
b) Aplicando el teorema del seno, se obtiene:

$$\frac{CB}{\text{sen } 35°} = \frac{3}{\text{sen } 77°} = \frac{CA}{\text{sen } 68°}$$

$\Rightarrow AC = 1{,}77$cm y $BC = 2{,}85$ cm

c) Puesto que 1 cm del mapa son 500 m en la realidad, $AC = 883$ m y $BC = 1427{,}36$ m.

67 **En el momento de marcar el último gol de Alemania en la final de la Eurocopa de Inglaterra, Bierhoff estaba situado a 5 metros de uno de los palos y a 8 metros del otro, y veía la portería bajo un ángulo de 60°. Calcula la distancia del jugador a la línea de gol.**



$c = 5$ m y $b = 8$ m en el dibujo

Aplicando el teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cdot \cos A$

$\Rightarrow a^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60° = 49 \Rightarrow a = 7$

La anchura de la portería es, por tanto, 7 m.

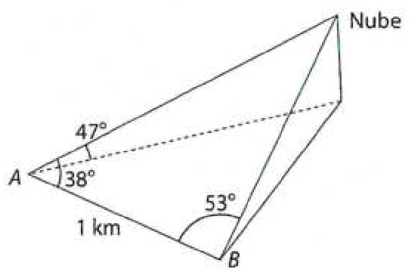
Entonces: $\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \dfrac{7}{\text{sen } 60°} = \dfrac{8}{\text{sen } B}$

$\Rightarrow \text{sen } B = \dfrac{8 \cdot \text{sen } 60°}{7}$

$\text{sen } B = \dfrac{d}{5} \Rightarrow d = 5 \cdot \text{sen } B = 5 \cdot \dfrac{8 \cdot \text{sen } 60°}{7} = 4{,}95$

La distancia del jugador a la portería es de 4,95 m.

68 **Para medir la altura de una nube se han hecho dos observaciones simultáneas desde los puntos *A* y *B*, ambos situados al nivel del mar y que distan entre sí 1 km. La inclinación de la visual desde *A* a la nube, respecto de la horizontal, es de 47°. Los ángulos que forman las visuales desde *A* y desde *B* con la recta *AB* son, respectivamente, 38° y 53°, tal como se indica en la figura. Averigua la altura a la que se encuentra situada dicha nube con respecto del nivel del mar.**



Sea *C* el ángulo el ángulo que forma la nube con *A* y *B*.

$$C = 180° - (38° + 53°) = 89°$$

Con este dato podemos calcular el lado *b:*

$$\frac{c}{\text{sen } C} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow b = \frac{c \cdot \text{sen } B}{\text{sen } C} = \frac{1\,000 \cdot \text{sen } 53°}{\text{sen } 89°}$$

Con este valor podemos calcular la altura de la nube, *h:*

$\text{sen } 47° = \dfrac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \text{sen } 47° = \dfrac{1\,000 \cdot \text{sen } 53°}{\text{sen } 89°} \cdot \text{sen } 47° =$

$= 584{,}17$ m

69 **Dos amigos están cada uno de ellos en la terraza de su casa y observan un barco. Quieren determinar a qué distancia se encuentra, y para ello disponen cada uno de un teodolito. Llamemos *A* y *B* a los puntos en que se encuentran sus respectivos teodolitos.**

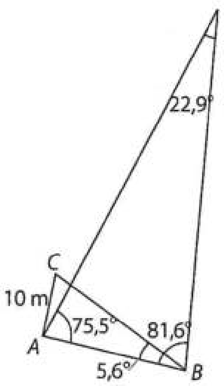
Desde el punto *A* miden una distancia de 10 m a un punto *C*, *AC* = 10 m, de manera que el triángulo *ACB* es rectángulo en *A*.

Desde el punto *B* resulta que el ángulo *B* de este triángulo es de 5,6°.

a) **¿Qué distancia hay entre los dos amigos?**

b) **Calcula a qué distancia está el barco de cada uno de ellos si la recta que une *A* con el barco forma con la recta *AB* un ángulo de 75,5°. Y si la recta que une *B* con el barco forma con la recta *AB* un ángulo de 81,6°.**

c) **¿Podemos saber, sin hacer cálculos, quién está más cerca del barco? ¿Por qué?**



a) La distancia entre *A* y *B* es:

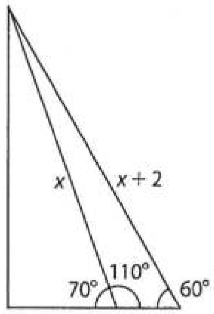
$$AB = \frac{10}{\text{tg } 5{,}6°} = 101{,}99 \text{ m}$$

b) A partir de la figura y, simplemente aplicando el teorema del seno, se obtiene:

259,28 m y 253,75 m, distancia del barco a *A* y a *B*, respectivamente.

c) Está más cerca de *B* porque el ángulo *A* es más pequeño.

70 **El circo ha llegado a una ciudad y hay que instalarlo. El especialista que lo monta no ha llegado y los operarios no saben cuánto cable necesitan. Hay uno que recuerda que, una vez tensado el cable desde el extremo del palo principal hasta un punto determinado del suelo, con el cual forma un ángulo de 60°, hacen falta 2 m más de cable que si forma con el suelo un ángulo de 70°. En total han de colocar 6 cables tensados formando con el suelo un ángulo de 60° cada uno de ellos. ¿Cuántos metros de cable necesitan?**



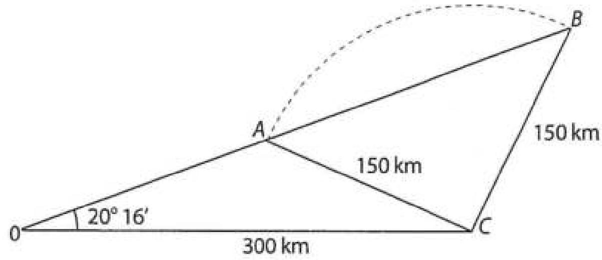
Por el teorema del seno:

$$\frac{x}{\text{sen } 60°} = \frac{x+2}{\text{sen } 110°} \Rightarrow x = 23{,}512 \text{ m}$$

En total, necesitan:

$6 \cdot (23{,}512 + 2) = 153{,}07$ m de cable

71 **Dos vías de ferrocarril se cortan formando un ángulo cuyo valor es de 20° 16'. Del cruce salen al mismo tiempo dos locomotoras, una por cada vía. Una de las locomotoras va a una velocidad de 100 km/h. ¿A qué velocidad debe circular la otra para que a las 3 horas estén separadas una distancia de 150 km?**



Planteamos el teorema del seno:

$$\frac{150}{\text{sen } 20°\, 16'} = \frac{300}{\text{sen } x} \Rightarrow \begin{cases} x = A = 43{,}851° \\ x = B = 136{,}149° \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = 115{,}883° \\ C = 23{,}584° \end{cases}$$

Hay dos soluciones a la situación:

$$d = \frac{150 \cdot \text{sen } 115{,}883°}{\text{sen } 20°\, 16'} = 389{,}599 \text{ km}$$

$\Rightarrow$ 129,87 km/h aproximadamente

$$d = \frac{150 \cdot \text{sen } 23{,}584°}{\text{sen } 20°\, 16'} = 173{,}255 \text{ km}$$

$\Rightarrow$ 57,75 km/h aproximadamente

Evaluación (página 121)

1. **Demuestra la identidad: tg (45° + α) − tg (45° − α) = 2tg2α**

$$\text{tg}(45° + \alpha) - \text{tg}(45° - \alpha) = \frac{\text{tg } 45° + \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg } 45° \cdot \text{tg } \alpha} - \frac{\text{tg } 45° - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg } 45° \cdot \text{tg } \alpha} = \frac{1 + \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg } \alpha} - \frac{1 - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg } \alpha} =$$

$$= \frac{1 + \text{tg}^2 \alpha + 2\text{tg } \alpha - 1 - \text{tg}^2 \alpha + 2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} = 2 \cdot \frac{2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} = 2 \cdot \text{tg } 2\alpha$$

2. **Si** $\cot g\, \alpha = \frac{8}{15}$ **determina el valor de las siguientes expresiones: *a)*** $\dfrac{\frac{1}{3}\text{sen } \alpha - \frac{1}{2}\cos \alpha}{\frac{1}{17}(\sec \alpha + \text{tg } \alpha)}$ ***b)*** $\sec 2\alpha + \text{tg } 2\alpha$

a) $$\frac{\frac{1}{3}\text{sen } \alpha - \frac{1}{2}\cos \alpha}{\frac{1}{17}(\sec \alpha + \text{tg } \alpha)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{15}{17} - \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{17}}{\frac{1}{17} \cdot \left(\frac{17}{8} + \frac{15}{8}\right)} = \frac{\frac{1}{17}}{\frac{4}{17}} = \frac{1}{4}$$

b) $$\sec 2\alpha + \text{tg } 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha} + \text{sen } 2\alpha \cdot \sec 2\alpha = \frac{1 + 2\text{sen } \alpha \cos \alpha}{\left(\frac{64}{289}\right) - \left(\frac{225}{289}\right)} = \frac{-23}{7}$$

3. **Demuestra que cuando $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ se verifica que: $\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta + \text{tg}\,\gamma = \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta \cdot \text{tg}\,\gamma$**

$$\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta + \text{tg}\,\gamma = \text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta + \text{tg}[180° - (\alpha + \beta)] = \text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta + \frac{\text{tg}\,180° - \text{tg}(\alpha+\beta)}{1 + \text{tg}\,180 \cdot \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} =$$

$$= \text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta - \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta - \text{tg}^2\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}^2\,\beta - \text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} =$$

$$= -\text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} = -\text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta \cdot \text{tg}(180° - \gamma) = \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta \cdot \text{tg}\,\gamma$$

4. **Si en un triángulo rectángulo la hipotenusa vale $\dfrac{1}{\text{cosec}\,\alpha - \text{cotg}\,\alpha} + \dfrac{1}{\text{cosec}\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha}$ y uno de los catetos vale $\dfrac{2 \cdot (1 + \cos 2\alpha)}{\text{sen}\,2\alpha}$, calcula el valor del otro cateto.**

$$\frac{1}{\text{cosec}\,\alpha - \text{cotg}\,\alpha} + \frac{1}{\text{cosec}\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha} = \frac{\text{cosec}\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha}{\text{cosec}^2\,\alpha - \text{cotg}^2\,\alpha} + \frac{\text{cosec}\,\alpha - \text{cotg}\,\alpha}{\text{cosec}^2\,\alpha - \text{cotg}^2\,\alpha} = 2\text{cosec}\,\alpha$$

$$\frac{2 \cdot (1 + \cos 2\alpha)}{\text{sen}\,2\alpha} = \frac{4\cos^2 2\alpha}{2\,\text{sen}\,\alpha \cos\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$$

Por el teorema de Pitágoras se tiene que: $4\text{cosec}^2\,\alpha = x^2 + \dfrac{4\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\,\alpha} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{4 - 4\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\,\alpha}} = \sqrt{4} = 2$

5. **Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas. *a)* $\cos\alpha = \text{sen}\,2\alpha$ *b)* $\cos 2\alpha + 3\text{sen}\,\alpha = 2$**

a) $\cos\alpha = \text{sen}\,2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha \Rightarrow 2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha - \cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha(2\text{sen}\,\alpha - 1) = 0$

$\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos 2\,\alpha + 3\text{sen}\,\alpha = 2 \Rightarrow \cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha + 3\text{sen}\,\alpha - 2 = 0 \Rightarrow -2\text{sen}^2\,\alpha + 3\text{sen}\,\alpha - 1 = 0$

$\text{sen}\,\alpha = +1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

6. **Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = \dfrac{3}{2} \\ \cos\alpha + \cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$**

$$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = \dfrac{3}{2} \\ \cos\alpha + \cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\text{sen}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) = \dfrac{3}{2} \\ 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda, resulta: $\text{tg}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sqrt{3}$

Como $1 + \text{tg}^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sec^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \Rightarrow \sec\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{1 + \sqrt{3}^2} = \pm 2 \Rightarrow \cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = \pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

En consecuencia: $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \arccos\left(\pm\dfrac{1}{2}\right)$ y $\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \arccos\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

De donde: $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \pm 60° + 180°\,k$ y $\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \pm 30° + 180°\,k \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \pm 120° + 360°\,k \\ \alpha - \beta = \pm 60° + 360°\,k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 90° + 360°\,k; \pm 30° + 360°\,k \\ \beta = \pm 30° + 360°\,k; \pm 90° + 360°\,k \end{cases}$

7. **Resuelve el triángulo cuyos lados *b* y *c* miden 10 cm y 7 cm respectivamente, y cuyo ángulo A mide 60°.**

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cos 60° \Rightarrow a^2 = 100 + 49 - 70 \Rightarrow a = 8{,}89$ cm

$\text{sen}\,B = \dfrac{10 \cdot \text{sen}\,60°}{\sqrt{79}} \Rightarrow B = 76°\,59'\,45{,}92''$ $\quad$ $\text{sen}\,C = \dfrac{7 \cdot \text{sen}\,60°}{\sqrt{79}} \Rightarrow C = 43°\,0'\,14{,}08''$

8. **Desde la torre de un pueblo *A*, y bajo un ángulo de 60°, se ven las torres de dos pueblos *B* y *C*, distantes de *A* 20 km y 12 km respectivamente. Calcula la distancia que hay entre las torres de los pueblos *B* y *C*.**

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cos\hat{A} = 20^2 + 12^2 - 2 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \cos 60° = 304 \Rightarrow a = \sqrt{304} = 17{,}44$

La distancia entre las dos torres es 17,44 m

Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Suma de números complejos (página 127)

En el archivo de GeoGebra se puede comprobar que la suma de números complejos puede representarse y obtenerse geométricamente, como la de los vectores, mediante la regla del paralelogramo.

Moviendo los deslizadores se pueden mostrar en la pizarra digital distintas sumas según las partes real e imaginaria de los números complejos sean positivas o negativas. También puede ser utilizado por los alumnos para comprobar sus resultados al hacer los ejercicios de suma de números complejos.

Potencias de *i* (página 128)

En el archivo de GeoGebra se pueden ver las representaciones gráficas de las sucesivas potencias de *i* para comprobar que los resultados van ocupando puntos sucesivos en cada eje según el giro de 90° producido por la cada potencia.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital esta propiedad de las potencias de *i* o para que los alumnos puedan comprobar esta relación por sí mismos.

Opuesto y conjugado de un número complejo (página 131)

En el archivo de GeoGebra se pueden comprobar las relaciones de simetría que se verifican entre las representaciones gráficas de un número complejo, su opuesto y su conjugado.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital las simetrías entre los números complejos o para que los alumnos puedan descubrir estas simetrías por sí mismos.

Resolución de ecuaciones (página 139)

En el vídeo se muestra paso a paso cómo resolver la ecuación del ejercicio resuelto, calculando las raíces cuartas de -1.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital cómo debe resolverse este tipo de ejercicio o para que los alumnos puedan repasar el procedimiento más tarde.

Actividades (páginas 124/134)

1 Calcula las soluciones de las ecuaciones en el conjunto $\mathbb{C}$.

a) $x^2 + 16 = 0$

b) $x^2 + 8x + 25 = 0$

c) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

a) $x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-16} = \pm 4i$

$x_1 = 4i,\ x_2 = -4i$

b) $x^2 + 8x + 25 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2} = -4 \pm 3i$

$x_1 = -4 + 3i,\ x_2 = -4 - 3i$

c) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ Si realizamos el cambio $x^2 = t$:

Obtenemos la ecuación de segundo grado

$t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4$ y $t = -1$

Deshaciendo el cambio, se tiene:

$x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = i,\ x_4 = -i$

2 Calcula los valores de las potencias siguientes.

a) i^{19}

b) i^{29}

c) i^{56}

a) Dividimos 19 entre 4 y obtenemos de resto 3; por tanto, $i^{19} = i^3 = -i$

b) Dividimos 29 entre 4 y obtenemos de resto 1; por tanto, $i^{29} = i^1 = i$

c) Dividimos 56 entre 4 y obtenemos de resto 0; por tanto, $i^{56} = i^0 = 1$

3 Dados los números complejos $z = 3 - 2i$ y $\omega = 4 + i$, calcula.

a) $z + \omega$

b) $z \cdot \omega$

c) z/ω

d) $1/z$

e) $1/\omega$

f) $-z$

g) $-\omega$

h) $\overline{z}$

i) $\overline{\omega}$

j) $\overline{z} \cdot \omega$

a) $z + \omega = (3 - 2i) + (4 + i) = 7 - i$

b) $z \cdot \omega = (3 - 2i) \cdot (4 + i) = 12 + 3i - 8i + 2 = 14 - 5i$

c) $\dfrac{z}{\omega} = \dfrac{3 - 2i}{4 + i} = \dfrac{3 - 2i}{4 + i} \cdot \dfrac{4 - i}{4 - i} = \dfrac{10}{17} - \dfrac{11}{17}i$

d) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3 - 2i} \cdot \dfrac{3 + 2i}{3 + 2i} = \dfrac{3 + 2i}{13} = \dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13}i$

e) $\dfrac{1}{\omega} = \dfrac{1}{4 + i} \cdot \dfrac{4 - i}{4 - i} = \dfrac{4 - i}{17} = \dfrac{4}{17} - \dfrac{1}{17}i$

f) $-z = -3 + 2i$

g) $-\omega = -4 - i$

h) $\overline{z} = 3 + 2i$

i) $\overline{\omega} = 4 - i$

j) $\overline{z} \cdot \omega = (3 + 2i) \cdot (4 + i) = 12 + 3i + 8i - 2 = 10 + 11i$

4 Calcula.

a) $(2 - 2i)^6$

b) $(3 - 4i)^3$

a) $(2 - 2i)^6 = (2 - 2i)^2 \cdot (2 - 2i)^2 \cdot (2 - 2i)^2 = -8i \cdot (-8i) \cdot$
$\cdot (-8i) = 512i$

b) $(3 - 4i)^3 = (3 - 4i)^2 \cdot (3 - 4i) = (-7 - 24i) \cdot (3 - 4i) =$
$= -21 - 72i + 28i - 96 = -117 - 44i$

5 Expresa los siguientes números complejos en forma polar.

a) $-3 + 2i$

b) $-4i$

c) $5\,(\cos 20° - i \operatorname{sen} 20°)$

d) **La unidad imaginaria positiva.**

a) $-3 + 2i \Rightarrow m = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$; $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2}{-3}$

$\Rightarrow \alpha = 146{,}309\,9° \Rightarrow \sqrt{13}_{146{,}3°}$

b) $-4i = 4_{270°}$

c) $5(\cos 20° - i \operatorname{sen} 20°) = 5(\cos(-20°) + i \operatorname{sen}(-20°)) =$
$= 5_{-20°} = 5_{340°}$

d) $i = 1_{90°}$

6 Expresa el número complejo $3\,(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$ en forma binómica.

Sustituyendo sen 150° y cos 150° por su valor se obtiene:

$$3(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

7 **Calcula el opuesto y el conjugado de los siguientes números complejos, expresándolos en forma polar.**

a) $z = 1 - \sqrt{3}i$ ***b)*** $z = \frac{1}{2}(\cos 200° + i \text{ sen } 200°)$ ***c)*** $z = 4_{-15°}$

Expresamos en primer lugar los números complejos en forma polar:

a) $z = 1 - \sqrt{3}i = 2_{300°} \Rightarrow \overline{z} = 2_{60°}, -z = 2_{120°}$

b) $z = \frac{1}{2}(\cos 200° + i \text{ sen } 200°) = \left(\frac{1}{2}\right)_{200°}$

$\Rightarrow \overline{z} = \left(\frac{1}{2}\right)_{160°}, -z = \left(\frac{1}{2}\right)_{20°}$

c) $z = 4_{-15°} = 4_{345°} \Rightarrow \overline{z} = 4_{15°}, -z = 4_{165°}$

8 **Dados los números complejos $z = 3_{75°}$ y $\omega = 4_{20°}$, calcula:**

a) $z + \omega$	***c)*** z/ω	***e)*** $1/\omega$	***g)*** $-\omega$
b) $z \cdot \omega$	***d)*** $1/z$	***f)*** $-z$	***h)*** $\overline{z}$

a) Para sumar los dos números complejos en forma polar es preciso, en primer lugar, expresarlos en forma binómica:

$z = 3_{75°} = 3(\cos 75° + i \text{ sen } 75°) = 0{,}78 + 2{,}90i$

$\omega = 4_{20°} = 4(\cos 20° + i \text{ sen } 20°) = 3{,}76 + 1{,}37i$

$z + \omega = (0{,}78 + 2{,}90i) + (3{,}76 + 1{,}37i) = 4{,}54 + 4{,}27i$

b) $z \cdot \omega = 3_{75°} \cdot 4_{20°} = 12_{95°}$

c) $\frac{z}{\omega} = 3_{75°}/4_{20°} = \left(\frac{3}{4}\right)_{55°}$

d) $\frac{1}{z} = \frac{1_{0°}}{3_{75°}} = \left(\frac{1}{3}\right)_{-75°} = \left(\frac{1}{3}\right)_{285°}$

e) $\frac{1}{\omega} = \frac{1_{0°}}{4_{20°}} = \left(\frac{1}{4}\right)_{-20°} = \left(\frac{1}{4}\right)_{340°}$

f) $-z = 3_{75° + 180°} = 3_{255°}$

g) $-\omega = 4_{20° + 180°} = 4_{200°}$

h) $\overline{z} = 3_{-75°} = 3_{285°}$

9 **Calcula la potencia cuarta del número complejo $3 - 3i$, expresándolo previamente en forma polar.**

$3 - 3i \Rightarrow m = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$; $\text{tg } \alpha = \frac{-3}{3} \Rightarrow \alpha = 315°$

$(3 - 3i)^4 = \left(\sqrt{18}_{315°}\right)^4 = 324_{180°}$

10 **Calcula $(-4 + 2i)^5$, expresándolo en forma polar.**

$-4 + 2i \Rightarrow m = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$; $\text{tg } \alpha = \frac{2}{-4}$

$\Rightarrow \alpha = 153{,}43°$

$(4 + 2i)^5 = \left(\sqrt{20}_{153{,}43°}\right)^5 = \left(800\sqrt{5}\right)_{47{,}17°}$

11 **Calcula las raíces cúbicas del número complejo $8 - 8i$.**

Expresamos, en primer lugar, el número $8 - 8i$ en forma polar:

$8 - 8i \Rightarrow m = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = \sqrt{128}$; $\text{tg } \alpha = \frac{-8}{8} \Rightarrow \alpha = 315°$;

$8 - 8i = \sqrt{128}_{315°}$

El módulo de las raíces cúbicas de $8 - 8i$ será:

$$\sqrt[3]{\sqrt{128}} = \sqrt[6]{128} = 2\sqrt[6]{2}$$

Y sus argumentos:

$\alpha_1 = \frac{315°}{3} = 105°$

$\alpha_2 = \frac{315° + 360°}{3} = 225°$

$\alpha_3 = \frac{315° + 720°}{3} = 345°$

Las tres raíces cúbicas de $8 - 8i$ son:

$$2\sqrt[6]{2}_{105°},\ 2\sqrt[6]{2}_{225°},\ 2\sqrt[6]{2}_{345°}$$

12 **Calcula las raíces quintas de 32.**

El número 32 en forma polar es $32_{0°}$.

El módulo de las raíces quintas de 32 es $\sqrt[5]{32} = 2$.

Y sus argumentos:

$\alpha_1 = \frac{0°}{5} = 0°$ $\qquad \alpha_4 = \frac{0° + 1080°}{5} = 216°$

$\alpha_2 = \frac{0° + 360°}{5} = 72°$ $\qquad \alpha_5 = \frac{0° + 1440°}{5} = 288°$

$\alpha_3 = \frac{0° + 720°}{5} = 144°$

Las raíces quintas de 32 son: $2_{0°}, 2_{72°}, 2_{144°}, 2_{216°}, 2_{288°}$

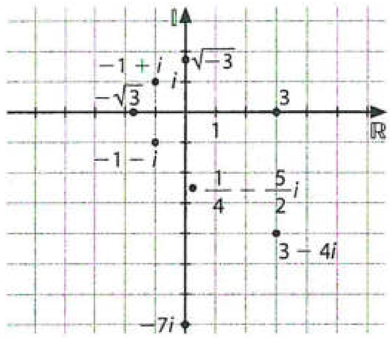
Ejercicios y problemas (páginas 140/142)

Números imaginarios. Forma binómica. Representación gráfica

1 **Representa gráficamente estos números complejos e indica cuáles son imaginarios puros y cuáles reales.**

$$3 - 4i, -7i, -\sqrt{3}, \sqrt{-3}, -1 - i, -1 + i, \frac{1}{4} - \frac{5}{2}i, 3$$

Imaginarios puros: $-7i$ y $\sqrt{-3}$; Reales: $-\sqrt{3}$ y 3



2 **Escribe los conjugados y los opuestos de:**

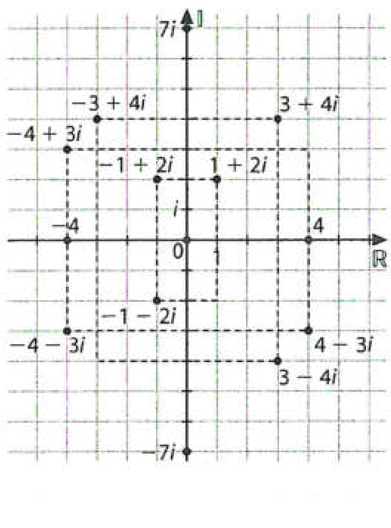
$$3 - i,\ 2 + 4i,\ -5i,\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$$

Conjugados: $3 + i, 2 - 4i, 5i, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$, respectivamente.

Opuestos: $-3 + i, -2 - 4i, 5i, -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$, respectivamente.

3 **Representa gráficamente el conjugado y el opuesto de los siguientes números complejos.**

a) $z = -4 + 3i$	***c)*** $z = 4$	***e)*** $z = 3 - 4i$
b) $z = -7i$	***d)*** $z = -1 - 2i$	***f)*** $z = 0$



4 ¿Qué tienen en común los números complejos de afijos (4, 0), (−4, 0), (0, 4) y (0, −4)? ¿Por qué?

Están situados sobre los ejes de coordenadas a igual distancia del origen. Su módulo vale 4.

5 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $x^2 + 36 = 0$ ***c)*** $x^3 - 27 = 0$

b) $x^2 - 36 = 0$ ***d)*** $x^2 - 4x + 5 = 0$

¿A qué campo numérico pertenecen las soluciones?

a) $x^2 + 36 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-36} \Rightarrow x = \pm 6i$, las dos soluciones son imaginarias.

b) $x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} \Rightarrow x = \pm 6$, las dos soluciones son reales.

c) $x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$, que es una solución real, pero en el campo de los complejos esta ecuación tiene tres soluciones, que son:

$x^3 = 27_{0^\circ}$

$$x = \sqrt[3]{(27_{0^\circ})} = \begin{cases} 3_{0^\circ} = 3 \\ 3_{120^\circ} = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i \\ 3_{240^\circ} = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

d) $x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i$

Por tanto, sus dos soluciones son complejas.

6 **Resuelve la ecuación $x^2 - 2x + 10 = 0$ y comprueba que las raíces obtenidas la verifican.**

De forma análoga al último apartado del ejercicio anterior:

$$x^2 - 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} \Rightarrow x = 1 \pm 3i$$

Sus dos soluciones son complejas.

Para comprobar que, efectivamente, son soluciones de la ecuación sustituimos:

$(1 + 3i)^2 - 2 \cdot (1 + 3i) + 10 = 1 + 6i - 9 - 2 - 6i + 10 = 0$

$(1 - 3i)^2 - 2 \cdot (1 - 3i) + 10 = 1 - 6i - 9 - 2 + 6i + 10 = 0$

7 **Determina las soluciones, en el campo de los números complejos, de las siguientes ecuaciones.**

a) $x^2 + 1 = 0$ ***c)*** $x^2 - 4x + 29 = 0$

b) $x^4 - 81 = 0$ ***d)*** $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = 0$

a) $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

b) $x^4 - 81 = 0 \Rightarrow x^4 - 81 = (x^2 + 9)(x^2 - 9) \Rightarrow x_1 = 3i$, $x_2 = -3i, x_3 = 3, x_4 = -3$

c) $x^2 - 4x + 29 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 116}}{2} = \dfrac{4 \pm 10i}{2}$

$\Rightarrow x_1 = 2 + 5i, x_2 = 2 - 5i$

d) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = 0$

Primero aplicando Ruffini tenemos:

	1	−5	4	−20
5		5	0	20
	1	0	4	0

El polinomio dado lo podemos factorizar:

$$x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = (x - 5)(x^2 + 4)$$

La soluciones de la ecuación polinómica dada son:

$$x_1 = 5, x_2 = -2i, x_3 = 2i$$

Operaciones con números complejos en forma binómica

8 **Efectúa las siguientes sumas en forma binómica.**

a) $(-2 + 3i) + (7 - 4i)$

b) $\left(\dfrac{1}{2} - 3i\right) + \left(\dfrac{3}{2} - i\right)$

c) $(\sqrt{2} + \sqrt{5}i) + (\sqrt{2} - 5\sqrt{5}i)$

a) $5 - i$

b) $2 - 4i$

c) $2\sqrt{2} - 4\sqrt{5}i$

9 **Calcula los siguientes productos.**

a) $(2 + 3i) \cdot (3 - 5i)$ ***c)*** $(\sqrt{3} + i) \cdot (\sqrt{3} - i)$

b) $\left(\dfrac{1}{2} - i\right) \cdot \left(\dfrac{3}{4} + 2i\right)$ ***d)*** $(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^2$

a) $21 - i$

b) $\dfrac{19}{8} + \dfrac{1}{4}i$

c) 4

d) $4i$

10 **Efectúa las siguientes operaciones.**

a) $(3 - 2i) \cdot (3 + i) - (1 - 2i) \cdot (4 + 2i)$

b) $\dfrac{4 - 2i}{2 + 3i} + (2 - 2i)$

a) $3 + 3i$

b) $\dfrac{28}{13} - \dfrac{42}{13}i$

11 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $[(3 - 2i) \cdot (3 + i) - (1 - 2i) \cdot (1 + 2i)]\,(5 + 4i)$

b) $\dfrac{2}{3 - i}$

c) $\dfrac{\sqrt{2} + i}{-i}$

d) $\dfrac{1 + \sqrt{5}i}{i}$

a) $42 + 9i$

b) $\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}i$

c) $-1 + \sqrt{2}i$

d) $\sqrt{5} - i$

12 **Demuestra que es $\dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2}i$ el inverso de $a + bi$.**

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

13 **Calcula: $z = \dfrac{3}{i} + \dfrac{2i}{2 + i} + \dfrac{2 + 3i}{1 + 2i}$**

$$z = \frac{3}{i} = \frac{2i}{2 + i} = \frac{2 + 3i}{1 + 2i} = -3i + \frac{2 + 4i}{5} + \frac{8 - i}{5} = \frac{10 - 12i}{5}$$

14 **Dados los números complejos $3 - bi$ y $a + 2i$, calcula a y b para que su producto sea $7 + 4i$.**

$(3 - bi)(a + 2i) = 7 + 4i \Rightarrow 3a + 6i - abi + 2b = 7 + 4i$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 7 \\ 6 - ab = 4 \rightarrow a = \dfrac{2}{b} \end{cases}$$

Sustituyendo tenemos:

$$\frac{6}{b} + 2b = 7 \Rightarrow 2b^2 - 7b + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \Rightarrow a = 1 \\ b = 3/2 \Rightarrow a = 4/3 \end{cases}$$

15 **Calcula.**

a) $\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$ *b)* $\dfrac{(2+i)\cdot(1-2i)^2}{2-i}$

a) -1 *b)* $\dfrac{7}{5}-\dfrac{24}{5}i$

16 **Calcula.**

a) i^{33} *b)* i^{185} *c)* i^{186} *d)* i^{64} *e)* $1/i^5$ *f)* i^{-2}

a) $i^{33}=i$

b) $i^{185}=i$

c) $i^{186}=i^2=-1$

d) $i^{64}=i^0=1$

e) $\dfrac{1}{i^5}=\dfrac{1}{i}=\dfrac{-i}{1}=-i$

f) $i^{-2}=\dfrac{1}{i^2}=\dfrac{1}{-1}=-1$

17 **Determina el valor de m para que el cociente $\dfrac{6+mi}{1-i}$ sea igual a $1+5i$.**

$$\frac{6+mi}{1-i}=\frac{6+mi}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{6+6i+mi-m}{2}=$$

$$=\frac{6-m}{2}+\frac{6+m}{2}i=1+5i\Rightarrow\begin{cases}6-m=2\Rightarrow m=4\\ 6+m=10\Rightarrow m=4\end{cases}$$

18 **Determina el valor de a para que $(a-5i)^2$ sea un número imaginario puro.**

$(a-5i)^2=a^2-10ai-25$

Para que sea imaginario puro la parte real $a^2-25=0$ $\Rightarrow a=5, a=-5$

19 **Halla b para que el producto $(3+bi)(3-5i)$ sea:**

a) **Un número real.**

b) **Un número imaginario puro.**

$(3+bi)(3-5i)=9-15i+3bi+5b$

a) Para que sea real: $-15+3b=0\Rightarrow b=5$

b) Para que sea imaginario puro: $9+5b=0\Rightarrow b=-9/5$

20 **Halla el valor de k para que el número $\left(\dfrac{4-ki}{3+i}\right)\cdot i^{563}$ sea imaginario puro.**

Si $\dfrac{4-ki}{3+i}\cdot i^{563}$ es imaginario puro, su parte real debe ser nula.

$i^{563}=i^3=-i$, por lo tanto, si operamos:

$$\frac{4-ki}{3+i}\cdot(-i)\cdot\frac{3-i}{3-i}=\frac{-3k-4+(k-12)i}{10}$$

$$-3k-4=0\Rightarrow k=\frac{-4}{3}$$

21 **Calcula el valor de x para que el complejo $\dfrac{3-2xi}{4+3i}$:**

a) **Sea imaginario puro.**

b) **Sea un número real.**

c) **Tenga su afijo en la bisectriz del primer cuadrante.**

$$\frac{3-2xi}{4+3i}\cdot\frac{4-3i}{4-3i}=\frac{12-6x+(-8x-9)i}{25}$$

a) Si ha de ser imaginario puro, su parte real debe ser nula: $12-6x=0\Rightarrow x=2$

b) Si ha de ser real, su parte imaginaria debe ser nula:

$$-8x-9=0\Rightarrow x=-9/8$$

c) Si su afijo debe estar en la bisectriz del primer cuadrante, deben ser iguales la parte real y la imaginaria:

$$12-6x=-8x-9\Rightarrow x=-21/2$$

22 **Calcula el cociente $\dfrac{x+i}{2+i}$ y determina el valor de x para que el módulo del complejo resultante sea $\sqrt{2}$.**

Operando se obtiene:

$$\frac{x+i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{2x+1}{5}+\frac{2-x}{5}i$$

Si el módulo debe valer $\sqrt{2}$, tenemos:

$$\sqrt{2}=\sqrt{\left(\frac{2x+1}{5}\right)^2+\left(\frac{2-x}{5}\right)^2}$$

$$2=\frac{5x^2+5}{25}\Rightarrow 5x^2-45=0,\ x=\pm 3$$

23 **El número $\dfrac{2-(1+x)\,i}{1-xi}$ es real. Calcula x y obtén el número.**

Operando se obtiene:

$$\frac{2-(1+x)i}{1-xi}\cdot\frac{1+xi}{1+xi}=\frac{2+(1+x)x+(2x-1-x)i}{1+x^2}$$

Si es real: $2x-1-x=0\Rightarrow x=1$

Sustituyendo: $n=\dfrac{2-2i}{1-i}=\dfrac{2(1-i)}{1-i}=2$

24 **Calcula el número real a para que el número complejo $z=\dfrac{3-2ai}{4-3i}$ esté situado en la bisectriz del primer cuadrante.**

Para que un número complejo tenga su afijo en la bisectriz del primer cuadrante, sus partes reales e imaginarias deberán coincidir:

$$\frac{3-2ai}{4-3i}\cdot\frac{4+3i}{4+3i}=\frac{(12+6a)+(9+8a)i}{25}$$

$\Rightarrow 12+6a=9-8a\Rightarrow 14a=-3\Rightarrow a=-3/14$

Forma polar de un número complejo

25 **¿El producto de dos números complejos es real?**

a) **Si son conjugados, sí.**

b) **Si son opuestos, sí.**

c) **El producto de dos números complejos nunca puede ser un número real.**

Indica y razona la respuesta correcta.

a) Si son conjugados, sí, ya que $m_\alpha\cdot m_{-\alpha}=m^2{}_0$, que es un número real.

26 **Si dos números complejos tienen el mismo afijo:**

a) **Tienen el mismo argumento.**

b) **Tienen módulos proporcionales.**

c) **Su cociente tiene como módulo 1.**

Indica y razona la afirmación correcta.

Todas las respuestas son correctas.

27 **¿Qué tipo de gráfica forman los afijos de los números complejos que tienen el mismo argumento?**

Forman una semirrecta con origen en el (0, 0) y pendiente la tangente del argumento de los complejos.

28 **¿Se puede decir que un número complejo es real si su argumento es π?**

Si su argumento es π el número complejo está situado sobre el eje real, en el semieje negativo.

29 **Si $z=m_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números complejos $m_{\alpha+180°}$ y $m_{-\alpha}$?**

$-z=m_{\alpha+180°}$ y $\overline{z}=m_{-\alpha}$

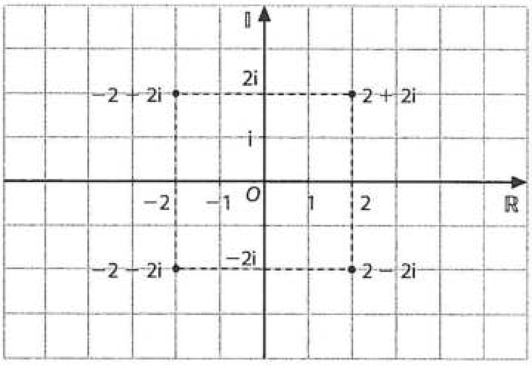
30 **¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su conjugado? ¿Y con el de su opuesto?**

El argumento del conjugado es el mismo cambiado de signo y el del opuesto difiere en 180°.

31 **Calcula el módulo y el argumento de los siguientes números complejos, representándolos previamente:**

a) $2-2i$ ***c)*** $2i$ ***e)*** $-2i$ ***g)*** $-2+2i$

b) $2+2i$ ***d)*** $-2-2i$ ***f)*** 2 ***h)*** -2



a) $z=2-2i \Rightarrow m=\sqrt{8}=2\sqrt{2}, \text{tg}\,\alpha=\left(\frac{-2}{2}\right)=(-1)$

$\Rightarrow \alpha = 315°$, puesto que su afijo está en el cuarto cuadrante.

$$z=\left(2\sqrt{2}\right)_{315°}=\left(2\sqrt{2}\right)_{7\pi/4}$$

b) $z=2+2i \Rightarrow m=2\sqrt{2}, \text{tg}\,\alpha=\left(\frac{2}{2}\right)=1$

$\Rightarrow \alpha = 45° = \frac{\pi}{4}$ rad, puesto que su afijo está en el primer cuadrante.

$$z=\left(2\sqrt{2}\right)_{45°}=\left(2\sqrt{2}\right)_{\pi/4}$$

c) $z=2i \Rightarrow m=2, \alpha=90°=\frac{\pi}{2}\text{ rad} \Rightarrow z=2_{90°}=2_{\pi/2}$

d) $z=-2-2i \Rightarrow m=2\sqrt{2}, \alpha=225°=\frac{5\pi}{4}\text{ rad}$

$\Rightarrow z=\left(2\sqrt{2}\right)_{225°}=\left(2\sqrt{2}\right)_{5\pi/4}$

e) $z=-2i \Rightarrow m=2, \alpha=270°=\frac{3\pi}{2}\text{ rad} \Rightarrow z=2_{270°}=2_{3\pi/2}$

f) $z=2 \Rightarrow m=2, \alpha=0°=0\text{ rad} \Rightarrow z=2_{0°}=2_0$

g) $z=-2+2i \Rightarrow m=2\sqrt{2}, \text{tg}\,\alpha=\frac{2}{-2}=-1$

$\Rightarrow \alpha = 135°$, puesto que su afijo está en el segundo cuadrante.

$$z=\left(2\sqrt{2}\right)_{135°}=\left(2\sqrt{2}\right)_{3\pi/4}$$

h) $z=-2 \Rightarrow m=2, \alpha=180°=\pi\text{ rad} \Rightarrow z=2_{180°}=2_{\pi}$

32 **Expresa en forma polar y trigonométrica los siguientes complejos.**

a) $-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$ ***c)*** $4-4\sqrt{3}i$

b) $4i$ ***d)*** $3+3i$

a) $z=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i=4_{5\pi/4}=4\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right)$

b) $z=4i=4_{\pi/2}=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$

c) $z=4-4\sqrt{3}i=8_{5\pi/3}=8\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)$

d) $z=3+3i=\left(3\sqrt{2}\right)_{\pi/4}=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$

33 **Expresa en forma binómica estos complejos.**

a) $3_{\frac{3\pi}{4}}$ ***d)*** $8_{\frac{4\pi}{3}}$

b) $1_{\frac{\pi}{6}}$ ***e)*** $3_{\frac{\pi}{4}}$

c) 2_{π}

a) $3_{3\pi/4}=3\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$

b) $1_{\pi/6}=\cos\frac{\pi}{6}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

c) $2_{\pi}=2(\cos\pi+i\,\text{sen}\,\pi)=-2$

d) $8_{4\pi/3}=8\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right)=-4-4\sqrt{3}i$

e) $3_{\pi/4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$

34 **Expresa en forma binómica los siguientes números complejos.**

a) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)$

b) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$

c) $3\,(\cos 3+i\,\text{sen}\,3)$

a) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}i$

b) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)=-3+3i$

c) $3(\cos 3+i\,\text{sen}\,3)=-2{,}97+0{,}42i$

35 **Representa gráficamente estos números complejos.**

a) $3-2i$

b) $4+2i$

c) $-1-3i$

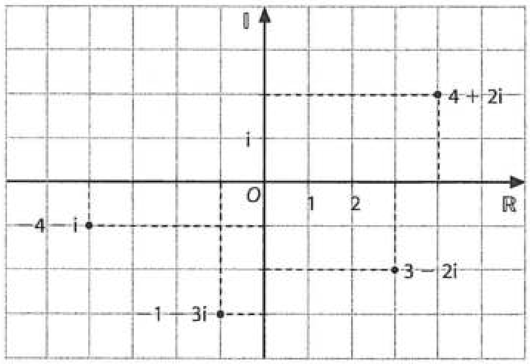
d) $-4-i$

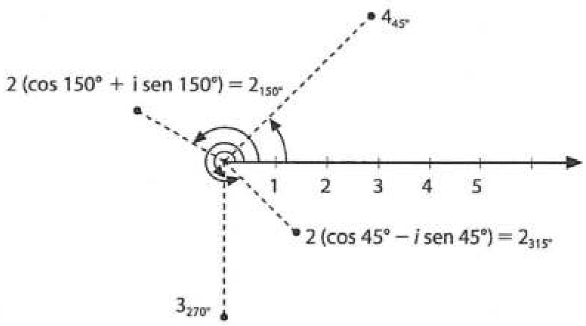
e) $4_{45°}$

f) $3_{270°}$

g) $2\,(\cos 150°+i\,\text{sen}\,150°)$

h) $2\,(\cos 45°-i\,\text{sen}\,45°)$





36 **Calcula el conjugado, el opuesto y el inverso de los números complejos del ejercicio anterior.**

a) $z = 3 - 2i$

$\overline{z} = 3 + 2i$

$-z = -3 + 2i$

$\frac{1}{z} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$

b) $z = 4 + 2i$

$\overline{z} = 4 - 2i$

$-z = -4 - 2i$

$\frac{1}{z} = \frac{4}{20} + \left(-\frac{2}{20}\right)i = \frac{1}{5} - \frac{1}{10}i$

c) $z = -1 - 3i$

$\overline{z} = -1 + 3i$

$-z = 1 + 3i$

$\frac{1}{z} = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$

d) $z = -4 - i$

$\overline{z} = -4 + i$

$-z = 4 + i$

$\frac{1}{z} = -\frac{4}{17} + \frac{i}{17}$

e) $z = 4_{45°}$

$\overline{z} = 4_{-45°} = 4_{315°}$

$-z = 4_{225°}$

$\frac{1}{z} = \left(\frac{1}{4}\right)_{-45°} = \left(\frac{1}{4}\right)_{315°}$

f) $z = 3_{270°}$

$\overline{z} = 3_{90°}$

$-z = 3_{90°}$

$\frac{1}{z} = \left(\frac{1}{3}\right)_{-270°} = \left(\frac{1}{3}\right)_{90°}$

g) $z = 2(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$

$\overline{z} = 2(\cos 150° - i \operatorname{sen} 150°) = 2(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$

$-z = 2(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}(\cos(-150°) + i \operatorname{sen}(-150°)) =$

$= \frac{1}{2}(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$

h) $z = 2(\cos 45° - i \operatorname{sen} 45°) = 2(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$

$\overline{z} = 2(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$

$-z = 2(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}(\cos(-315°) + i \operatorname{sen}(-315°)) =$

$= \frac{1}{2}(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$

37 **Calcula el valor de m para que el número complejo $m + 4i$ tenga el mismo módulo que $\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i$.**

Hallamos primero el módulo de $m + 4i$ y lo igualamos al módulo de $\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i$. Mediante este procedimiento obtenemos el valor de m:

$$\sqrt{m^2 + 16} = \sqrt{\frac{25}{2} + \frac{50}{4}} \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$$

Por tanto, los números complejos serían $3 + 4i$ y $-3 + 4i$.

Operaciones con números complejos en forma polar

38 **Resuelve los siguientes productos.**

a) $(3)_{\frac{3\pi}{4}} \cdot (2)_{\frac{\pi}{6}}$

b) $(\sqrt{2})_{\frac{\pi}{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{\frac{5\pi}{3}}$

c) $-3 \cdot 5_{45°}$

d) $(4)_{\frac{\pi}{12}} \cdot (2)_{\frac{5\pi}{18}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)_{\pi}$

e) $(2 + 2i) \cdot (\sqrt{2})_{\frac{\pi}{3}}$

f) $6 \cdot 2_{15°}$

a) $3_{3\pi/4} \cdot 2_{\pi/6} = 6_{11\pi/12}$

b) $(\sqrt{2})_{\pi/3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{5\pi/3} = 1_{2\pi} = 1_0$

c) $-3 \cdot 5_{45°} = 3_{180°} \cdot 5_{45°} = 15_{225°}$

d) $4_{\pi/12} \cdot 2_{5\pi/18} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)_{\pi} = \left(\frac{8}{3}\right)_{49\pi/36}$

e) $(2 + 2i) \cdot (\sqrt{2})_{\pi/3} = (2\sqrt{2})_{\pi/4} \cdot (\sqrt{2})_{\pi/3} = 4_{7\pi/12}$

f) $6 \cdot 2_{15°} = 6_{0°} \cdot 2_{15°} = 12_{15°}$

39 **Calcula los siguientes cocientes.**

a) $\frac{10_{\frac{\pi}{3}}}{2_{\frac{\pi}{3}}}$

b) $\frac{2_{\pi}}{-2}$

c) $\frac{6_{30°}}{2_{50°}}$

d) $\frac{12_{30°}}{i}$

a) $\frac{10_{\pi/3}}{2_{\pi/3}} = 5_0$

b) $\frac{2_{\pi}}{-2} = 1_0$

c) $\frac{6_{30°}}{2_{50°}} = 3_{-20°} = 3_{340°}$

d) $\frac{12_{30°}}{i} = 12_{-60°} = 12_{300°}$

40 **Calcula.**

a) $(3 - 2i)^4$

b) $(\sqrt{3} - i)^5$

c) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2$

d) $(2 + i)^3$

a) $(3 - 2i)^4 = (3 - 2i)^2(3 - 2i)^2 = (9 - 12i - 4)(9 - 12i - 4) =$
$= (5 - 12i)^2 = 25 - 120i - 144 = -119 - 120i$

b) $(\sqrt{3} - i)^5 = (\sqrt{3} - i)^2(\sqrt{3} - i)^2(\sqrt{3} - i) =$
$= (3 - 2\sqrt{3}i - 1)(3 - 2\sqrt{3}i - 1)(\sqrt{3} - i) =$
$= (2 - 2\sqrt{3}i)^2(\sqrt{3} - i) = (-8 - 8\sqrt{3}i)(\sqrt{3} - i) =$
$= -16\sqrt{3} - 16i$

c) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2}i$

d) $(2 + i)^3 = (2 + i)^2(2 + i) = (4 + 4i - 1)(2 + i) =$
$= (3 + 4i)(2 + i) = 6 + 3i + 8i - 4 = 2 + 11i$

41 **Calcula.**

a) $(1 - 2i)^{52}$

b) $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{12}$

c) $\sqrt[4]{-81i}$

d) $\sqrt[5]{3\sqrt{3} + \sqrt{3}i}$

a) $(1 - 2i)^{52} = \left(\sqrt{5}_{296,57°}\right)^{52} = 5^{26}{}_{296,57° \cdot 52} = 5^{26}{}_{301,64°}$

b) $\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{12} = \left(\frac{2_{60°}}{\sqrt{2}_{315°}}\right)^{12} = 2^6{}_{(60° - 315°) \cdot 12} = 2^6{}_{180°} = -64$

c) $\sqrt[4]{-81i} = \sqrt[4]{81_{270°}} \Rightarrow 3_{67,5°}; 3_{157,5°}; 3_{247,5°}; 3_{337,5°}$

d) $\sqrt[5]{3\sqrt{3} + \sqrt{3}i} = \sqrt[5]{\sqrt{30}_{18,43°}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt[10]{30}_{3,69°}; \sqrt[10]{30}_{75,69°}; \sqrt[10]{30}_{147,69°}; \sqrt[10]{30}_{219,69°}; \sqrt[10]{30}_{291,69°}$

42 **Calcula el módulo y el argumento de:**

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)^4\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)+i^{31}$$

Calculamos cada factor paso a paso, trabajando en forma polar:

$z_1 = -1 + \sqrt{3}i \Rightarrow m = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 120°$, puesto que el afijo está en el segundo cuadrante.

Por tanto:

$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3 = (2_{120°})^3 = 8_{360°} = 8_{0°}$

$z_2 = \sqrt{3} + i \Rightarrow m = 2$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30°$, puesto que el afijo está en el primer cuadrante.

Por tanto:

$\left(\sqrt{3}+i\right)^4 = (2_{30°})^4 = 16_{120°}$

$z_3 = \sqrt{3} - i \Rightarrow m = 2$

$\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 330°$, puesto que el afijo está en el cuarto cuadrante.

Por tanto:

$\sqrt{3} - i = 2_{330°}$

$z_4 = i^{31} = i^3 = -i$

Sustituyendo y realizando las operaciones que se indican, se obtiene:

$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 + z_4 = 8_{0°} \cdot 16_{120°} \cdot 2_{330°} - i = 256_{450°} - i = 256_{90°} - i =$
$= 256i - i = 255i$

Por tanto: $m = 255$, $\alpha = 90°$

43 **Resuelve las siguientes potencias.**

a) $\left[\left(\sqrt{3}\right)_{\frac{\pi}{3}}\right]^4$ **b)** $\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)^3$ **c)** $\left(1_{\frac{3\pi}{2}}\right)^{50}$

a) $\left(\sqrt{3}_{\pi/3}\right)^4 = 9_{4\pi/3}$

b) $\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)^3 = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}$

c) $(1_{3\pi/2})^{50} = 1_{75\pi} = 1_{\pi}$

44 **Representa gráficamente las seis primeras potencias del número $z = 2 - 2i$.**

$z = 2 - 2i$

$z^1 = 2\sqrt{2}_{315°}$

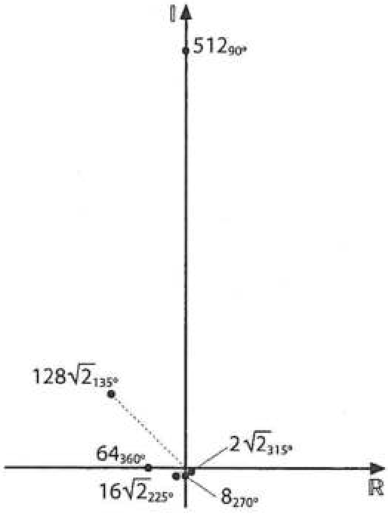
$z^2 = 8_{630°} = 8_{270°}$

$z^3 = 16\sqrt{2}_{945°} = 16\sqrt{2}_{225°}$

$z^4 = 64_{1\,260°} = 64_{180°}$

$z^5 = 128\sqrt{2}_{1\,575°} = 128\sqrt{2}_{135°}$

$z^6 = 512_{1\,890°} = 512_{90°}$



45 **Calcula las siguientes raíces.**

a) $\sqrt{3_{(\pi/3)}}$

b) $\sqrt{-i}$

c) $\sqrt{2-2i}$

d) $\sqrt[4]{-625}$

e) $\sqrt[3]{8i}$

f) $\sqrt[5]{243_{60°}}$

a) Hay dos raíces con módulo $\sqrt{3}$, y argumentos:

$$\alpha_1 = \frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\alpha_2 = \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{2} = \frac{7\pi}{6}$$

Por tanto, las raíces son:

$\sqrt{3}_{\pi/6}$ y $\sqrt{3}_{7\pi/6}$

b) Existen dos raíces cuadradas de $-i$:

$\sqrt{-i} = \sqrt{1_{270°}} = \begin{cases} 1_{135°} \\ 1_{315°} \end{cases}$

c) $\sqrt{2-2i} = \sqrt{(\sqrt{8})_{315°}} = \begin{cases} (\sqrt[4]{8})_{157,5°} \\ (\sqrt[4]{8})_{337,5°} \end{cases}$

d) $\sqrt[4]{-625} = \sqrt[4]{625_{\pi}} = \begin{cases} 5_{\pi/4} \\ 5_{3\pi/4} \\ 5_{5\pi/4} \\ 5_{7\pi/4} \end{cases}$

e) $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{\pi/2}} = \begin{cases} 2_{\pi/6} \\ 2_{5\pi/6} \\ 2_{9\pi/6} \end{cases}$

f) $\sqrt[5]{243_{60°}} = \begin{cases} 3_{12°} \\ 3_{84°} \\ 3_{156°} \\ 3_{228°} \\ 3_{300°} \end{cases}$

46 **Calcula.**

a) $\sqrt[5]{1+\sqrt{3}i}$

b) $(1-i)^{5/4}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{-1+i}}{\sqrt{1+\sqrt{3}i}}$

d) $\sqrt{\sqrt{3+3\sqrt{3}i}}$

a) $\sqrt[5]{1+\sqrt{3}i} = \sqrt[5]{2_{60°}} \Rightarrow \sqrt[5]{2}_{12°}; \sqrt[5]{2}_{84°}; \sqrt[5]{2}_{156°}; \sqrt[5]{2}_{228°}; \sqrt[5]{2}_{300°}$

b) $(1-i)^{5/4} = \left(\sqrt{2}_{315°}\right)^{5/4} = \sqrt[4]{\sqrt{2}^5{}_{135°}}$

$\Rightarrow \sqrt[8]{32}_{33,75°}; \sqrt[8]{32}_{123,75°}; \sqrt[8]{32}_{213,75°}; \sqrt[8]{32}_{303,75°}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{-1+i}}{\sqrt{1-\sqrt{3}i}} = \dfrac{\sqrt[6]{\left(\left(\sqrt{2}\right)_{135°}\right)^2}}{\sqrt[6]{(2_{60°})^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{2_{270°}}{8_{180°}}} = \sqrt[6]{\left(\dfrac{1}{4}\right)_{90°}}$

$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{1/2}\right)_{15°}; \left(\sqrt[3]{1/2}\right)_{75°}; \left(\sqrt[3]{1/2}\right)_{135°}; \left(\sqrt[3]{1/2}\right)_{195°}; \left(\sqrt[3]{1/2}\right)_{255°};$
$\left(\sqrt[3]{1/2}\right)_{315°}$

d) $\sqrt{\sqrt{3+3\sqrt{3}i}} = \sqrt[4]{6_{60°}} \Rightarrow \sqrt[4]{6}_{15°}; \sqrt[4]{6}_{105°}; \sqrt[4]{6}_{195°}; \sqrt[4]{6}_{285°}$

47 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $z^4+81=0$ *d)* $(z+1)^2+25=0$

b) $z^4+2z^2+1=0$ *e)* $z^2+(3-i)+(2-2i)=0$

c) $z^6+32z=0$ *f)* $z^3+z^2+15z-17=0$

a) $z^4+81=0$ debe tener cuatro soluciones en el campo de los complejos.

$z=\sqrt[4]{-81}$. Escribimos -81 en forma polar, esto es, $81_{180°}$, con lo que las soluciones son las raíces cuartas de este número complejo:

$$z=\sqrt[4]{81}_{180°} \begin{cases} 3_{45°} \\ 3_{135°} \\ 3_{225°} \\ 3_{315°} \end{cases}$$

b) $z^4+2z^2+1=0$, trabajamos como con las bicuadradas, pero en el campo de los complejos.

Hacemos $x=z^2$, con lo que $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}=-1$, que es una solución doble.

Pero $z^2=-1$, con lo que las soluciones de la ecuación son: i y $-i$, ambas dobles.

c) $z^6+32z=0$, debe tener seis soluciones en el campo de los complejos.

$z(z^5+32)=0 \Rightarrow z=0$ y $z=\sqrt[5]{-32}$. Calculamos las raíces quintas de -32, expresando previamente este número en forma polar: $32_{180°}$

$$z=\sqrt[5]{(32_{180°})} \begin{cases} 2_{36°} \\ 2_{108°} \\ 2_{180°} \\ 2_{252°} \\ 2_{324°} \end{cases}$$

Las seis soluciones son 0, $2_{36°}$, $2_{108°}$, $2_{180°}$, $2_{252°}$ y $2_{324°}$.

d) $(z+1)^2+25=0$. Esta ecuación tiene dos soluciones en el campo de los complejos.

$(z+1)^2=-25 \Rightarrow z+1=\sqrt{-25} \Rightarrow z=-1\pm 5i$

Es decir, las dos soluciones son:

$$-1+5i \text{ y } -1-5i$$

e) $z^2+5-3i=0$ debe tener dos soluciones complejas.

$z^2=-5+3i$, por lo que: $z=\sqrt{(-5+3i)}$

Expresamos el radicando en forma polar y averiguamos las dos raíces que serán las soluciones de la ecuación.

$m=\sqrt{34}$, tg $\alpha=-\dfrac{3}{5} \Rightarrow \alpha=149{,}04°$, pues su afijo está en el segundo cuadrante. Por tanto:

$$z=\sqrt{(-5+3i)}=\sqrt{(\sqrt{34}_{149{,}04°})}=$$

$$= \begin{cases} \sqrt[4]{34}_{74{,}52°}=0{,}64+2{,}33i \\ \sqrt[4]{34}_{254{,}52°}=-0{,}64-2{,}33i \end{cases}$$

Así pues, las dos soluciones de la ecuación son:

$$0{,}64+2{,}33i \text{ y } -0{,}64-2{,}33i$$

f) $z^3+z^2+15z-17=0$, esta ecuación debe tener tres soluciones complejas.

Por Ruffini obtenemos la primera solución: $z=1=1_{0°}$

El cociente, $z^2+2z+17=0$, debe tener dos soluciones.

$$z=\frac{-2\pm\sqrt{-64}}{2}=\frac{-2\pm 8i}{2}=-1\pm 4i$$

Así pues, las tres soluciones de la ecuación son:

$$1,\ -1+4i \text{ y } -1-4i$$

Problemas de aplicación

48 **Calcula el inverso de estos números complejos.**

a) $5_{\pi/4}$ *b)* $6i$ *c)* $2-2i$

¿Qué relación hay entre los módulos de un número complejo y los de su inverso? ¿Y entre los argumentos?

a) $\dfrac{1}{5_{\pi/4}}=\left(\dfrac{1}{5}\right)_{-\pi/4}$

b) $\dfrac{1}{6i}=\dfrac{1}{6_{90°}}=\left(\dfrac{1}{6}\right)_{-90°}$

c) $\dfrac{1}{2-2i}=\dfrac{1}{\sqrt{8}_{315°}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{8}}\right)_{-315°}$

Los módulos de un número complejo y de su inverso son inversos y los argumentos opuestos.

49 **Halla los complejos que cumplan que el cuadrado del inverso del opuesto dividido entre $(1/8)_{30°}$ dé $2i$.**

Si $z=m_\alpha$, el enunciado pide averiguar los complejos z que cumplen que $\left[\dfrac{1}{-(m_\alpha)}\right]^2 : \left(\dfrac{1}{8}\right)_{30°}=2_{90°}$.

Como $\left[\dfrac{1}{-(m_\alpha)}\right]^2=\left[\dfrac{1}{m_{180°+\alpha}}\right]^2=\left[\left(\dfrac{1}{m}\right)_{360°-180°-\alpha}\right]^2=$

$=\left(\dfrac{1}{m}\right)^2_{360°-2\alpha}$, sustituyendo tenemos:

$\left[\left(\dfrac{1}{m}\right)^2_{360°-2\alpha}\right] : \left(\dfrac{1}{8}\right)_{30°}=2_{90°}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{m}\right)^2 : \left(\dfrac{1}{8}\right)=2$ y $360°-2\alpha-30°=90°$

de lo que se obtiene: $m=2$ y $\alpha=120°$

Así pues, los complejos son: $2_{120°+k\cdot 180°}$, $k\in\mathbb{Z}$

50 **Determina dos números complejos z_1 y z_2 sabiendo que su cociente es 3, que la suma de sus argumentos es $\pi/3$ y que la suma de sus módulos es 4.**

$\dfrac{m_\alpha}{m'_\beta}=3 \Rightarrow \dfrac{m}{m'}=3$ y $\alpha-\beta=0°$

$\begin{cases} \alpha-\beta=0° \\ \alpha+\beta=60° \end{cases} \Rightarrow \alpha=30°,\ \beta=30°$

$\begin{cases} m=3m' \\ m+m'=4 \end{cases} \Rightarrow m'=1,\ m=3$

Los números son $3_{30°}$ y $1_{30°}$.

51 **Calcula dos complejos cuyo cociente es 4, sus argumentos suman 40° y la suma de sus módulos es 14.**

Sean los complejos m_α y n_β.

Su cociente es 4, es decir $4_{0°}$, por lo que tenemos:

$$\frac{m}{n}=4 \text{ y } \alpha-\beta=0°$$

La suma de sus argumentos es 40°, por lo que tenemos:

$$\alpha+\beta=40°$$

La suma de sus módulos es 14: $m+n=14$

Agrupando las ecuaciones deducidas del enunciado en función de sus incógnitas, se obtiene:

$\begin{cases} m/n=4 \\ m+n=14 \end{cases} \Rightarrow m=\dfrac{56}{5}, n=\dfrac{14}{5}$

$\begin{cases} \alpha-\beta=0° \\ \alpha+\beta=40° \end{cases} \Rightarrow \alpha=20°, \beta=20°$

Por lo que los complejos buscados son:

$$m_\alpha=\left(\frac{56}{5}\right)_{20°} \text{ y } n_\beta=\left(\frac{14}{5}\right)_{20°}$$

52 **Calcula dos números complejos tales que su producto sea $8i$ y uno de ellos sea el cuadrado del otro.**

Sean los complejos m_α y n_β. Su producto es $8i$, es decir, $8_{\pi/2}$:

$$m_\alpha \cdot n_\beta = 8_{\pi/2} \Rightarrow m \cdot n = 8 \text{ y } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Uno de ellos es el cuadrado del otro:

$$m_\alpha = (n_\beta)^2 = (n^2)_{2\beta} \Rightarrow m = n^2 \text{ y } \alpha = 2\beta$$

Agrupando las ecuaciones deducidas del enunciado en función de sus incógnitas, se obtiene:

$$\begin{cases} m \cdot n = 8 \\ m = n^2 \end{cases} \Rightarrow m = 4, n = 2$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \pi/2 \\ \alpha = 2\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{6}$$

Con lo que los dos complejos buscados son:

$$m_\alpha = 4_{\pi/3} \text{ y } n_\beta = 2_{\pi/6}$$

53 **El producto de dos números complejos es $3i$, y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es 1/3. Calcúlalos.**

Sean los complejos: m_α y n_β. Del enunciado se deduce que:

$$m_\alpha \cdot n_\beta = 3_{\pi/2} \Rightarrow m \cdot n = 3 \text{ y } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{m_\alpha{}^3}{n_\beta} = \left(\frac{1}{3}\right)_{0^\circ} \Rightarrow \frac{m^3}{n} = \frac{1}{3} \text{ y } 3\alpha - \beta = 0$$

Agrupando las ecuaciones deducidas del enunciado en función de sus incógnitas, se obtiene:

$$\begin{cases} m \cdot n = 3 \\ \dfrac{m^3}{n} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow m = 1, n = 3$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2} \\ 3\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8}, \beta = \frac{3\pi}{8}$$

Con lo que los complejos son:

$m_\alpha = 1_{\pi/8}$, $n_\beta = 3_{3\pi/8}$

54 **Dos números complejos tienen el mismo módulo, sus argumentos suman 50° y uno de ellos es el conjugado del cuadrado del otro. Calcúlalos.**

Sean los complejos m_α y n_β. Del enunciado se deduce:

$$m = n, \alpha + \beta = 50^\circ$$

$$m_\alpha = \overline{[(n_\beta)^2]} = \overline{[(n^2)_{2\beta}]} = (n^2)_{360^\circ - 2\beta} \Rightarrow m = n^2, \alpha = 360^\circ - 2\beta$$

Agrupando las ecuaciones deducidas del enunciado en función de sus incógnitas, se obtiene:

$$\begin{cases} m = n \\ m = n^2 \end{cases} \Rightarrow m = 1, n = 1$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 50^\circ \\ \alpha = 360^\circ - 2\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = -260^\circ = 100^\circ,\ \beta = 310^\circ$$

Con lo que los complejos son:

$m_\alpha = 1_{100^\circ}$, $n_\beta = 1_{310^\circ}$

55 **Determina los números complejos que cumplan que el cubo de su conjugado coincida con su opuesto.**

Hay que hallar la expresión de los complejos tales que el cubo de su conjugado coincida con el opuesto, es decir: $(\overline{z})^3 = -z$

Si $z = m_\alpha$, el enunciado se traduce en:

$(m_{360^\circ - \alpha})^3 = m_{180^\circ + \alpha} \Rightarrow m^3 = m$ y $3(360^\circ - \alpha) = 180^\circ + \alpha$

$m = 1$, puesto que no consideramos la solución trivial $m = 0$, y $m > 0$.

$3(360^\circ - \alpha) = 180^\circ + \alpha \Rightarrow \alpha = 225^\circ$

Por tanto, los complejos buscados son:

$$z = 1_{225^\circ + k \cdot 360^\circ}, k \in \mathbb{Z}$$

56 **Calcula todos los números complejos que cumplan que el cuadrado de su inverso sea el opuesto de su conjugado.**

Hay que encontrar la expresión de $z \in \mathbb{C}$, tal que:

$$\left(\frac{1}{z}\right)^2 = -\overline{z}$$

Si $z = m_\alpha$, esta igualdad se traduce en:

$$\left(\frac{1}{m_\alpha}\right)^2 = -(m_{360^\circ - \alpha}) = m_{180^\circ - \alpha}$$

y, como: $\left(\dfrac{1}{m_\alpha}\right)^2 = \left[\left(\dfrac{1}{m}\right)_{360^\circ - \alpha}\right]^2 = \left(\dfrac{1}{m^2}\right)_{2(360^\circ - \alpha)}$

tenemos:

$$\left(\frac{1}{m^2}\right)_{2(360^\circ - \alpha)} = m_{180^\circ - \alpha} \Rightarrow \frac{1}{m^2} = m$$

y $720^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \alpha$

de lo que se deduce que:

$m = 1$ y $\alpha = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$

Por tanto, los complejos buscados son:

$$z = 1_{180^\circ + k \cdot 360^\circ}, k \in \mathbb{Z}$$

57 **Una de las raíces cúbicas de un número complejo es $8i$. Calcula dicho número y las otras raíces.**

Dado que $8i = 8_{90^\circ}$ es una de las raíces cúbicas, $z = (8_{90^\circ})^3 = 512_{270^\circ} = -512i$, y haciendo uso de la interpretación gráfica de la radicación en los complejos, se puede deducir que las otras dos raíces son: 8_{210° y 8_{330°

58 **Encuentra el número complejo que sumado a $\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^3$ da como resultado 4 (cos 315° + i sen 315°). Expresa la solución en forma polar, binómica y trigonométrica.**

Dado que hay que sumar, es conveniente trabajar en notación binómica o trigonométrica.

$(a + bi) + \left(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^3 = 4(\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ)$

Primero se calcula la potencia del binomio $\left(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^3$, para lo cual es conveniente usar notación polar:

$m = 2$, $\operatorname{tg} \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ$, puesto que el afijo está en el segundo cuadrante.

Por tanto: $\left(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^3 = (2_{135^\circ})^3 = 8_{405^\circ} = 8_{45^\circ} = 8(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$

Aislando el complejo buscado:

$a + bi = 4(\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ) - 8(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$

$$a = 4 \cos 315^\circ - 8 \cos 45^\circ = \frac{4\sqrt{2}}{2} - \frac{8\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$$

$$b = 4 \operatorname{sen} 315^\circ - 8 \operatorname{sen} 45^\circ = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 8\frac{\sqrt{2}}{2} = -6\sqrt{2}$$

Es decir: $a + bi = -2\sqrt{2} - 6\sqrt{2}i$

Buscamos el módulo $m = 4\sqrt{5}$

$\operatorname{tg} \alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 251{,}57^\circ$.

Con esto el número complejo buscado es:

$$a + bi = -2\sqrt{2} - 6\sqrt{2}i = (4\sqrt{5})_{251{,}57^\circ} = 4\sqrt{5}(\cos 251{,}57^\circ + i \operatorname{sen} 251{,}57^\circ)$$

59 **Dados tres números complejos, z_1, z_2 y z_3, sabemos que z_2 es el conjugado de z_1 y que z_3 es el conjugado del opuesto de z_2. ¿Cómo son entre ellos z_1 y z_3?**

La transcripción del enunciado es:

$$z_2 = \overline{z_1}$$

$$z_3 = \overline{(-z_2)}$$

Se deduce que la relación entre z_3 y z_1 debe ser:

$$z_3 = \overline{[-(\overline{z_1})]} = -z_1$$

60 **Calcula sen 4α y cos 4α utilizando la fórmula de De Moivre.**

La fórmula de De Moivre es:

$$(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^n = \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha$$

Aplicamos la fórmula a una potencia de exponente cuatro:

$$(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^4 = \cos 4\alpha + i \operatorname{sen} 4\alpha$$

Desarrollamos el primer miembro y se obtiene:

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^4 &= (\cos\alpha + i\operatorname{sen})^2(\cos\alpha + i\operatorname{sen})^2 = \\ &= (\cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)\cdot \\ &\cdot(\cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = \\ &= \cos^4\alpha + 2i\cos^3\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha - \cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\alpha + \\ &+ 2i\cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha - 4\cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\alpha - \\ &- 2i\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}^3\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha - \\ &- 2i\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}^3\alpha + \operatorname{sen}^4\alpha\end{aligned}$$

Igualando:

$$\begin{aligned}\cos 4\alpha + i\operatorname{sen} 4\alpha &= \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^4\alpha + \\ &+ (4\cos^3\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha - 4\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}^3\alpha)i\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^4\alpha$$
$$\operatorname{sen} 4\alpha = 4\cos^3\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha - 4\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}^3\alpha$$

61 **Comprueba las fórmulas del seno y el coseno del ángulo doble demostradas en la UNIDAD 4 empleando la fórmula de De Moivre.**

$(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\operatorname{sen} 2\alpha$

De forma análoga al ejercicio anterior:

$(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^2 = \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\,(i\operatorname{sen}\alpha) + (i\operatorname{sen}\alpha)^2 =$
$= \cos^2\alpha + (2\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha)i - \operatorname{sen}^2\alpha$

Igualando:

$\cos 2\alpha + i\operatorname{sen} 2\alpha = \cos^2\alpha + (2\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha)i - \operatorname{sen}^2\alpha$

Con lo que:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$
$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

62 **Tenemos un triángulo de vértices $A(1, 1)$, $B(2, -1)$ y $C(-3, 2)$, y lo giramos un ángulo de 30° con centro el origen de coordenadas. Calcula los vértices del triángulo girado.**

Los vértices del triángulo son los afijos de los siguientes números complejos:

$A(1, 1) \Rightarrow 1 + i$

$B(2, -1) \Rightarrow 2 - i$

$C(-3, 2) \Rightarrow -3 + 2i$

Girar 30° es multiplicar por $1_{30^\circ} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$.

Multiplicando los complejos que representan los vértices por $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$, se obtienen complejos cuyos afijos son los vértices del triángulo resultado de girar 30°.

$$A'(1+i)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right)$$

$$\Rightarrow A' = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$$

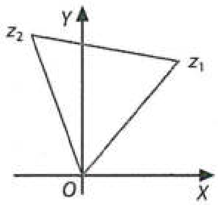
$$B'(2-i)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}+1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\Rightarrow B' = \left(\frac{2\sqrt{3}+1}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$C'(-3+2i)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left(\frac{-3\sqrt{3}-2}{2} + \frac{2\sqrt{3}-3}{2}i\right)$$

$$\Rightarrow C' = \left(\frac{-3\sqrt{3}-2}{2}, \frac{2\sqrt{3}-3}{2}\right)$$

63 **Los afijos de los puntos z_1 y z_2 forman un triángulo equilátero con el origen de coordenadas. Calcula z_2, sabiendo que $z_1 = 4 + 5i$.**



Las coordenadas polares del punto (4, 5) son las siguientes:

$m = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \alpha = 51{,}34^\circ$

Imponiendo un giro de 60°, tenemos:

$$\sqrt{41}_{51,34^\circ}\cdot 1_{60^\circ} = \sqrt{41}_{111,34^\circ} \Rightarrow (-2{,}33; 5{,}96) = -2{,}33 + 5{,}96i$$

Observa que existe otro triángulo equilátero cuyo tercer vértice se obtendría imponiendo un giro de -60°:

$$\sqrt{41}_{51,34^\circ}\cdot 1_{-60^\circ} = \sqrt{41}_{-8,66^\circ} \Rightarrow (6{,}33; -0{,}96)$$

64 **Un hexágono regular centrado en el origen tiene un vértice en el punto (3, 3). Calcula los otros vértices.**

A partir de un vértice de un hexágono se pueden obtener los otros cinco multiplicando el complejo correspondiente al vértice dado por 1_{60°.

Por comodidad, en este ejercicio trabajaremos con notación polar:

(3, 3) es el afijo correspondiente al complejo $\sqrt{18}_{45^\circ}$. Por tanto:

$\sqrt{18}_{45^\circ}\cdot 1_{60^\circ} = \sqrt{18}_{105^\circ} \Rightarrow (-1{,}1;\ 4{,}1)$

$\sqrt{18}_{105^\circ}\cdot 1_{60^\circ} = \sqrt{18}_{165^\circ} \Rightarrow (-4{,}1;\ 1{,}1)$

$\sqrt{18}_{165^\circ}\cdot 1_{60^\circ} = \sqrt{18}_{225^\circ} \Rightarrow (-3;\ -3)$

$\sqrt{18}_{225^\circ}\cdot 1_{60^\circ} = \sqrt{18}_{285^\circ} \Rightarrow (1{,}1;\ -4{,}1)$

$\sqrt{18}_{285^\circ}\cdot 1_{60^\circ} = \sqrt{18}_{345^\circ} \Rightarrow (4{,}1;\ -1{,}1)$

65 **Considera las siguientes aplicaciones en el plano:**

α: giro de centro el origen y de amplitud 30°.

β: simetría respecto del origen de coordenadas.

γ: simetría respecto del eje de abscisas.

δ: giro de centro el origen y de amplitud 60°.

Halla las coordenadas del punto que se obtienen al aplicar sucesivamente α, β, γ, δ, al punto (2, 3).

$(2, 3) \Rightarrow \sqrt{13}_{56,31^\circ}$

$\alpha \Rightarrow \sqrt{13}_{56,31^\circ}\cdot 1_{30^\circ} = \sqrt{13}_{86,31^\circ}$

$\beta \Rightarrow \sqrt{13}_{266,31^\circ}$

$\gamma \Rightarrow \sqrt{13}_{93,69^\circ}$

$\delta \Rightarrow \sqrt{13}_{93,69^\circ + 60^\circ} = \sqrt{13}_{153,69^\circ} = (-3{,}23; 1{,}59)$

Evaluación (página 143)

1. Escribe un número complejo que sea real y otro que sea imaginario puro. Explica cada caso.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Número real: $2 + 0i$

Como la parte imaginaria es nula, el número es real.

Número imaginario puro: $0 - 3i$

Como la parte real es nula, el número es imaginario puro.

2. Halla el conjugado y el opuesto de los siguientes números. Represéntalos en el plano.

a) $z = -2 - 4i$

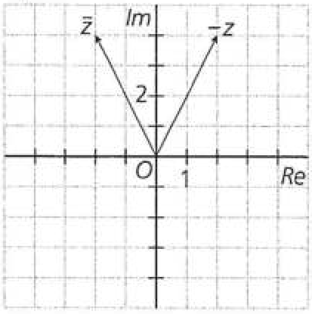
b) $z = 3 + 5i$

c) $z = -7 + 2i$

d) $z = 8 - 3i$

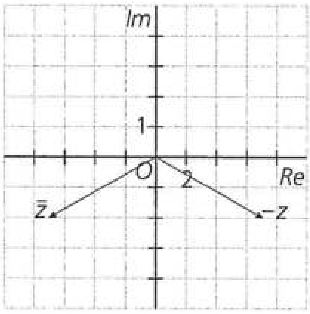
a) Conjugado: $-2 + 4i$

Opuesto: $+2 + 4i$



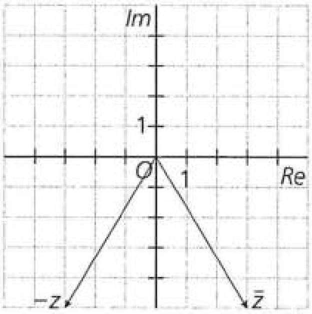
c) Conjugado: $-7 - 2i$

Opuesto: $+7 - 2i$



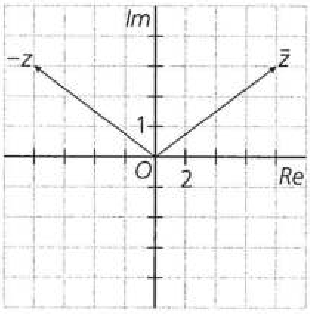
b) Conjugado: $3 - 5i$

Opuesto: $-3 - 5i$



d) Conjugado: $8 + 3i$

Opuesto: $-8 + 3i$



3. Realiza estas operaciones, pasando a forma binómica o polar, según convenga.

a) $(2 - 3i) + (-5 + 4i)$

b) $(1 - i) - (-8 + 7i)$

c) $(2 - 9i) \cdot (3 + 4i)$

d) $\dfrac{3 + i}{2 + 3i}$

e) $2_{30°} + 5_{60°}$

f) $(1 + i)^5$

a) $-3 + i$

b) $9 - 8i$

c) $6 + 8i - 27i + 36 = 42 - 19i$

d) $\dfrac{3+i}{2+3i} \cdot \dfrac{2-3i}{2-3i} = \dfrac{6-9i+2i+3}{4+9} = \dfrac{9-7i}{13}$

e) $2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) + 5(\cos 60° + i\operatorname{sen} 60°) = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2i \cdot \dfrac{1}{2} + 5 \cdot \dfrac{1}{2} + 5i \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + \dfrac{5}{2} + i\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2} + 1\right)$

f) $(1 + i)^5 = \left(\sqrt{2}_{45°}\right)^5 = \left(\sqrt{2^5}\right)_{225°} = \left(4\sqrt{2}\right)_{225°}$

4. Utiliza la fórmula de De Moivre para calcular las siguientes potencias.

a) $(2 - 3i)^3$

b) $(-1 + 4i)^3$

c) $(3 - i)^2$

d) $(1 + i)^6$

a) $(2 - 3i)^3 = \left(\sqrt{13}_{-56{,}31°}\right)^3 = \sqrt{13^3}(\cos(3 \cdot (-56{,}31)) + i\operatorname{sen}(3 \cdot (-56{,}31))) = -46 - 9i$

b) $(-1 + 4i)^3 = \left(\sqrt{17}_{104{,}04°}\right)^3 = \sqrt{17^3}(\cos(3 \cdot (104{,}04) + i\operatorname{sen}(3 \cdot 104{,}04)) = 47 - 52i$

c) $(3 - i)^2 = \left(\sqrt{10}_{-18{,}43°}\right)^2 = 10(\cos(2 \cdot (-18{,}43) + i\operatorname{sen}(2 \cdot (-18{,}43))) = 8 - 6i$

d) $(1 + i)^6 = \left(\sqrt{2}_{45°}\right)^6 = 8(\cos(6 \cdot 45) + i\operatorname{sen}(6 \cdot 45)) = -8i$

5. **Dado el número complejo $2_{70°}$, escribe sus cinco primeras potencias y represéntalas.**

$(2_{70°})^2 = 4_{140°}$

$(2_{70°})^3 = 8_{210°}$

$(2_{70°})^4 = 16_{280°}$

$(2_{70°})^5 = 32_{350°}$

Comprobar que el alumno lo representa correctamente.

6. **Encuentra una ecuación de segundo grado cuyas raíces son $3 + 2i$ y $3 - 2i$.**

$(z - (3 + 2i)) \cdot (z - (3 - 2i)) = 0 \Rightarrow z^2 - 6z + 13 = 0$

7. **Resuelve estas ecuaciones e interpreta las soluciones geométricamente.**

a) $z^4 + 256 = 0$

b) $z^3 - 6z^2 + 10z = 0$

c) $z^3 - 11z^2 + 36z - 26 = 0$

d) $z^4 - 3z^3 - 3z^2 + 61z = 156$

a) $z_1 = 4_{45°}$ $\quad z_2 = 4_{135°}$ $\quad z_3 = 4_{225°}$ $\quad z_4 = 4_{315°}$

b) $z_1 = 0$ $\quad z_2 = 3 + i$ $\quad z_3 = 3 - i$

c) $z_1 = 1$ $\quad z_2 = 5 + i$ $\quad z_3 = 5 - i$

d) $z_1 = -4$ $\quad z_2 = 3$ $\quad z_3 = 2 - 3i$ $\quad z_4 = 2 + 3i$

8. **Halla las raíces que se indican. ¿Qué obtenemos en cada caso al unir los afijos que son solución?**

a) $\sqrt[3]{2 - 2i}$ ***b)*** $\sqrt[4]{-2\sqrt{3} + 2i}$ ***c)*** $\sqrt[5]{-3 - 3\sqrt{3}i}$ ***d)*** $\sqrt[6]{1 - i}$

a) $2 - 2i = \sqrt{8}_{-45°}$

$z_1 = \sqrt{2}_{-15°}$ $\quad z_2 = \sqrt{2}_{105°}$ $\quad z_3 = \sqrt{2}_{225°}$

b) $-2\sqrt{3} + 2i = 4_{150°}$

$z_1 = \sqrt[4]{4}_{37,5°}$ $\quad z_2 = \sqrt[4]{4}_{127,5°}$ $\quad z_3 = \sqrt[4]{4}_{217,5°}$ $\quad z_4 = \sqrt[4]{4}_{307,5°}$

c) $-3 - 3\sqrt{3}i = 6_{240°}$

$z_1 = \sqrt[5]{6}_{48°}$ $\quad z_2 = \sqrt[5]{6}_{120°}$ $\quad z_3 = \sqrt[5]{6}_{192°}$ $\quad z_4 = \sqrt[5]{6}_{264°}$ $\quad z_5 = \sqrt[5]{6}_{336°}$

d) $1 - i = \sqrt{2}_{-45°}$

$z_1 = \sqrt[12]{2}_{-7,5°}$ $\quad z_2 = \sqrt[12]{2}_{52,5°}$ $\quad z_3 = \sqrt[12]{2}_{112,5°}$

$z_4 = \sqrt[12]{2}_{172,5°}$ $\quad z_5 = \sqrt[12]{2}_{232,5°}$ $\quad z_6 = \sqrt[12]{2}_{292,5°}$

9. **Halla a para que el número $\dfrac{3 + ai}{a + 2i}$ sea:**

a) **Un número real.**

b) **Un número imaginario puro.**

$$\frac{3 + ai}{a + 2i} \cdot \frac{a - 2i}{a - 2i} = \frac{3a - 6i + a^2 i + 2a}{a^2 + 4} = \frac{5a}{a^2 + 4} + i \cdot \frac{a^2 - 6}{a^2 + 4}$$

a) $a^2 - 6 = 0 \rightarrow a = \pm\sqrt{6}$

b) $5a = 0 \rightarrow a = 0$

10. **El cociente de dos números complejos es $3i$. Halla estos dos números sabiendo que la suma de sus argumentos es 150° y la suma de sus módulos es 20.**

$$\frac{R_\alpha}{r_\beta} = \left(\frac{R}{r}\right)_{\alpha - \beta} = 3i = 3_{30°}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 90° \\ \alpha + \beta = 150° \end{cases} \Rightarrow \alpha = 120°, \beta = 30° \qquad \begin{cases} \dfrac{R}{r} = 3 \\ R + r = 20 \end{cases} \Rightarrow R = 15, r = 5$$

Los números son $15_{120°}$, $5_{30°}$.

6 GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL PLANO

El estudio de la geometría analítica del plano será el hilo conductor de la unidad, los alumnos aprenderán a trabajar con ella y comprobarán su aplicación en la vida cotidiana.

Al inicio de esta unidad se presentan los vectores y sus operaciones que los alumnos conocen de cursos anteriores, y se introducen los conceptos de base y base canónica. A continuación, se presenta una nueva operación con vectores, el producto escalar, así como su interpretación geométrica y sus propiedades. Es importante que el alumno recuerde conceptos como vector unitario para poder comprender otros que se definen a partir de este, base ortonormal.

Se trabajan las diferentes ecuaciones de la recta en el plano para utilizarlas después al determinar rectas paralelas y otras posiciones relativas entre rectas. Finalmente, se estudian las distancias de diferentes elementos del plano y las características que cumplen.

La metodología se ha diseñado incluyendo actividades de aprendizaje integradas que permitirán al alumnado avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.

Se desarrolla la **competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)** a lo largo de toda la unidad. A través del conocimiento de la geometría analítica del plano, se desarrolla en el alumno la capacidad de aplicar el razonamiento lógico-matemático y sus herramientas para describir e interpretar distintas situaciones.

La **competencia digital (CD)** se integra a lo largo de la unidad haciendo partícipes a los alumnos de las ventajas que tiene recurrir a los medios informáticos.

Especial interés tienen las actividades propuestas con GeoGebra a lo largo de los epígrafes, así como las actividades interactivas del *test de autoevaluación* que se encuentra al final de la unidad.

A través de la incorporación del lenguaje matemático a la expresión habitual de los alumnos, se fomenta la **competencia en comunicación lingüística (CL).** En esta unidad se presentan numerosos conceptos matemáticos que los alumnos han de utilizar correctamente a la hora de resolver actividades y problemas.

La **competencia aprender a aprender (CAA)** se fomenta a través de la autonomía de los alumnos a la hora de resolver problemas. Es fundamental que el profesor incida en las destrezas necesarias para comunicar con eficacia los resultados de la resolución de cualquier actividad, reto o problema.

Las **competencias sociales y cívicas (CSC)** se desarrollan en el área de Matemáticas mediante la aceptación de otros puntos de vista en la resolución de algunos problemas. Es importante que el docente trabaje situaciones que se pueden resolver de diferentes formas, el manejo de los conceptos relacionados con la geometría analítica del plano, etc.; para trabajar con los alumnos el hecho de que distintas soluciones pueden ser igualmente válidas. El reconocimiento y valoración de las aportaciones ajenas enriquece el aprendizaje.

Temporalización

El tiempo previsto para el desarrollo de la unidad es de tres semanas, aunque deberá adaptarse a las necesidades de los alumnos.

Objetivos

Los objetivos que los alumnos tienen que alcanzar son:

- Manejar los vectores en el plano y operar con ellos.
- Reconocer bases y determinar bases ortogonales y ortonormales.
- Trabajar con el producto escalar y sus propiedades.
- Reconocer y manejar las diferentes ecuaciones de rectas en el plano.
- Determinar la posición relativa de rectas en el plano, así como distancias entre distintos elementos del plano.

Atención a la diversidad

Con el fin de atender los distintos ritmos de aprendizaje de los alumnos, se proponen algunas actividades de refuerzo y de ampliación que podrán utilizarse como alternativa o complemento a las que figuran en el libro del alumno.

PROGRAMACIÓN DE LA UNIDAD

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Competencias clave
Vectores Vector fijo y vector libre Operaciones con vectores Combinación lineal de vectores. Base	1. Conocer y manejar con precisión los conceptos básicos de la geometría analítica. 2. Comprender el concepto de base.	1.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 1.2. Calcula la expresión analítica del módulo de un vector. 1.3. Distingue y maneja vectores fijos y vectores libres. 1.4. Realiza correctamente operaciones con vectores. 2.1. Reconoce el significado de combinación lineal de dos vectores. 2.2. Determina la independencia de vectores para llegar a formar bases en el plano.	CMCT CL CAA CSC
Producto escalar Un producto entre vectores: producto escalar Interpretación geométrica del producto escalar Propiedades del producto escalar Determinación del ángulo que forman dos vectores Expresión analítica del producto escalar Expresión analítica del ángulo entre dos vectores	3. Manejar la operación de producto escalar y sus consecuencias. 4. Entender los conceptos de base ortogonal y base ortonormal. Distinguir y manejarse con precisión en el plano euclídeo y en el plano métrico, utilizando en ambos casos sus herramientas y propiedades.	3.1. Calcula la expresión analítica del producto escalar y maneja sus propiedades. 3.2. Comprende la interpretación geométrica del producto escalar. 3.3. Utiliza medios tecnológicos adecuados para comprender la interpretación geométrica del producto escalar de vectores. 4.1. Emplea las consecuencias de la definición de producto escalar para normalizar vectores, calcular el coseno de un ángulo, estudiar la ortogonalidad de dos vectores o la proyección de un vector sobre otro. 4.2. Utiliza medios tecnológicos adecuados para comprender los conceptos de base ortogonal y base ortonormal.	CMCT CD CL CAA
Rectas en el plano Ecuaciones de la recta Rectas paralelas Posición relativa entre rectas Ángulo formado por dos rectas. Perpendicularidad	5. Interpretar analíticamente distintas situaciones de la geometría plana elemental, obteniendo ecuaciones de rectas, y utilizarlas para resolver problemas de incidencia.	5.1. Obtiene la ecuación de la recta en sus diversas formas, identificando en cada caso sus elementos característicos. 5.2. Reconoce y diferencia analíticamente las posiciones relativas de las rectas. 5.3. Calcula ángulos entre dos rectas. 5.4. Utiliza medios tecnológicos adecuados para estudiar propiedades de la geometría analítica como determinar ecuaciones de la recta o posiciones relativas entre ellas.	CMCT CD CL CAA
Distancias en el plano Distancia entre dos puntos Distancia entre un punto y una recta Distancia entre dos rectas	6. Interpretar analíticamente distintas situaciones de la geometría plana elemental, obteniendo ecuaciones de rectas, y utilizarlas para resolver problemas de cálculo de distancias.	6.1. Calcula la distancia entre dos puntos. 6.2. Calcula la distancia entre un punto y una recta. 6.3. Calcula la distancia entre dos rectas. 6.4. Utiliza medios tecnológicos adecuados para determinar distancias entre distintos elementos del plano.	CMCT CD CL CAA

MAPA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD

PARA EL PROFESOR

Actividades de refuerzo
Actividades de ampliación

Prueba de evaluación

PARA EL ALUMNO

Presentación de la unidad
Repasa lo que sabes

1. Vectores
- Vector fijo y vector libre
- Operaciones con vectores
- Combinación lineal de vectores. Base

GeoGebra. Combinación lineal de vectores

2. Producto escalar
- Un producto entre vectores: producto escalar
- Interpretación geométrica del producto escalar
- Propiedades del producto escalar
- Determinación del ángulo que forman dos vectores
- Expresión analítica del producto escalar
- Expresión analítica del ángulo entre dos vectores
- Base ortogonales y bases ortonormales del plano

GeoGebra. Interpretación del producto escalar

3. Rectas en el plano
- Ecuaciones de la recta
- Rectas paralelas
- Posición relativa entre rectas
- Ángulo formado por dos rectas. Perpendicularidad

4. Distancias en el plano
- Distancia entre dos puntos
- Distancia entre un punto y una recta
- Distancia entre dos rectas

GeoGebra. Distancia entre un punto y una recta

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

EVALUACIÓN

Actividades interactivas. Test de autoevaluación

Repasa lo que sabes (página 145)

1. Halla las raíces de los siguientes polinomios.

a) $p(x) = 2x^3 - 6x^2 - 12x + 16$ ***b)*** $q(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

a) Para hallar las raíces de un polinomio cúbico aplicamos la regla de Ruffini con los divisores del término independiente que en este caso son: $D(16) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$

Las raíces de este polinomio son $x = 1$, $x = -2$, $x = 4$ ya que:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -6 & -12 & 16 \\ 1 & & 2 & -4 & -16 \\ \hline & 2 & -4 & -16 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 2 & -4 & -16 \\ -2 & & -4 & 16 \\ \hline & 2 & -8 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rr} & 2 & -8 \\ 4 & & 8 \\ \hline & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

b) En este caso, es una ecuación bicuadrada por lo que se resuelve directamente: $x^2 = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

2. Calcula las soluciones de estas ecuaciones.

a) $3\sqrt{x-1} = \dfrac{5}{\sqrt{x-1}}$ ***b)*** $\log(x+7) - \log(2x-4) = 1 - \log(x-1)$ ***c)*** $2^x - 3 \cdot 4^x = -44$

a) $3 \cdot (x-1) = 5 \Rightarrow x = \dfrac{8}{3}$

b) $\log\left(\dfrac{x+7}{2x-4}\right) = \log\left(\dfrac{10}{x-1}\right) \Rightarrow \dfrac{x+7}{2x-4} = \dfrac{10}{x-1} \Rightarrow x^2 - 14x + 33 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 11 \end{cases}$

c) $2^x - 3 \cdot 4^x = 44 \Rightarrow -3(2^x)^2 + 2^x + 44 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ 2^x = -\dfrac{11}{3} \Rightarrow \nexists \text{ solución} \end{cases}$

3. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ 2x - y + 4z = 5 \\ -2x + 3y - z = 0 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y + z = 7 \\ y + z = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ 2x - y + 4z = 5 \\ -2x + 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ y - 2z = -5 \\ 7z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y + z = 7 \\ y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ -2y + z = 2 \\ 3z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 14/3 \\ y = -1/3 \\ z = 8/3 \end{cases}$

4. ¿Cómo calcularías de manera no gráfica el punto de intersección de las rectas $y = 3x - 6$ e $y = 2x - 5$? Calcula dicho punto.

El punto de intersección de estas dos rectas se puede hallar de forma no gráfica con un sistema de ecuaciones.

$\begin{cases} y = 3x - 6 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \Rightarrow 3x - 6 = 2x - 5 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -3$ El punto de intersección de estas dos rectas es $(1, -3)$.

5. Resuelve estas ecuaciones trigonométricas, dando sus soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

a) $\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ***b)*** $\text{tg}\,(x + \pi) = 0$ ***c)*** $\text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + \pi = 0 \Rightarrow x = -\pi \\ x + \pi = \pi \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

c) $x + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \pi$

6. Calcula el número complejo w en cada caso sabiendo que $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = -1 - i$.

a) $w = z_1 + z_2$ ***b)*** $w = 2 \cdot z_1 - 3 \cdot z_2$

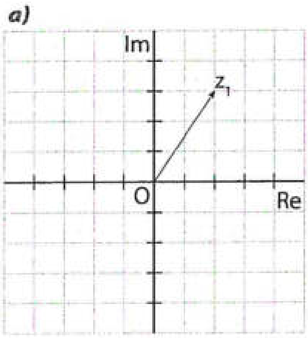
a) $w = z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (-1 - i) = 1 + 2i$

b) $w = 2 \cdot z_1 - 3 \cdot z_2 = (4 + 6i) - (-3 - 3i) = 7 + 9i$

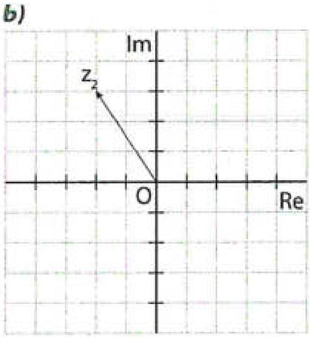
7. Representa los siguientes números complejos.

a) $z = 2 + 3i$ ***b)*** $z = -2 + 3i$ ***c)*** $z = 2 - 3i$ ***d)*** $z = -2 - 3i$

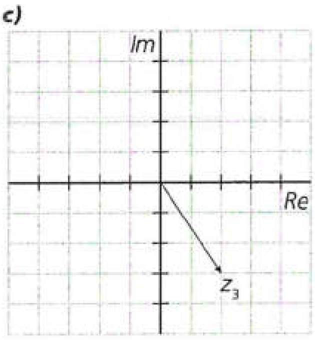
a)



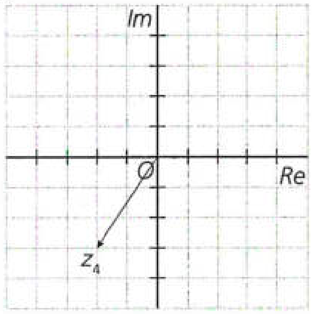
b)



c)



d)



Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Combinación lineal de vectores (página 148)

En el archivo de GeoGebra puede verse la representación gráfica de una combinación lineal de dos vectores según los valores de las componentes a y b. Moviendo los deslizadores correspondientes se puede comprobar, mediante la regla del paralelogramo, que la combinación lineal de los vectores resulta un único vector cuya dirección coincide con la de la diagonal del paralelogramo determinado por ambos vectores. También pueden moverse los extremos de los vectores y obtener así otras combinaciones distintas.

Interpretación geométrica del producto escalar (página 150)

En el archivo de GeoGebra aparece representado un par de vectores y la proyección ortogonal de uno de ellos sobre el otro. Moviendo los extremos de los vectores se obtiene la longitud de la nueva proyección en cada caso.

Distancia entre un punto y una recta (página 163)

En el archivo de GeoGebra se muestra, paso a paso, el método geométrico para determinar la distancia entre un punto y una recta. Puede ser interesante comprobar que se obtiene el mismo resultado que utilizando el método analítico descrito en la unidad. Moviendo el punto o la recta se obtienen nuevos ejercicios.

Rectas y puntos notables de un triángulo (página 167)

En el archivo de GeoGebra aparecen representadas las rectas y los puntos notables de un triángulo cualquiera. Activando las casillas correspondientes se observa cada tipo de recta y su relación con el triángulo o entre sí. Moviendo los vértices del triángulo también pueden comprobarse las propiedades de estas rectas y puntos notables según el tipo de triángulo dibujado.

Actividades (páginas 148/164)

1 **Razona cuáles de estos pares de vectores son linealmente independientes y, por tanto, constituyen una base de vectores libres del plano. A continuación, expresa $\vec{w} = (3, 1)$ como combinación lineal de las bases que hayas encontrado.**

a) $\vec{u}_1 = (1, 1)$ y $\vec{u}_2 = (0, 2)$

b) $\vec{v}_1 = (1/3, -1/2)$ y $\vec{v}_2 = (-2, 3)$

c) $\vec{z}_1 = \left(-2, \sqrt{3}/3\right)$ y $\vec{z}_2 = \left(-2\sqrt{3}, 1\right)$

d) $\vec{e}_1 = (1, 2)$ y $\vec{e}_2 = (-2, 1)$

a) Son l.i. porque no son paralelos:

$$(3, 1) = a(1, 1) + b(0, 2) \Rightarrow \begin{cases} 3 = a \\ 1 = a + 2b \end{cases}$$

$\Rightarrow a = 3$ y $b = -1$, por lo que $\vec{w} = 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2$.

b) Son l.d. porque son proporcionales:

$$\frac{1/3}{-2} = \frac{-1/2}{3} = -1/6 \Rightarrow \vec{v}_1 = -\vec{v}_2/6$$

c) Son l.d. porque son proporcionales:

$$\frac{-2}{-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}/3}{1} = \sqrt{3}/3 \Rightarrow \vec{z}_1 = \sqrt{3}\vec{z}_2/3$$

d) Son l.i. porque no son paralelos:

$$(3, 1) = a(1, 2) + b(-2, 1) \Rightarrow \begin{cases} 3 = a - 2b \\ 1 = 2a + b \end{cases}$$

$\Rightarrow a = 1$ y $b = -1$, por lo que $\vec{w} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

2 **Indica cuáles de los siguientes vectores son unitarios, y de ellos, cuáles tienen la misma dirección que el vector $\vec{v} = (2, \sqrt{5})$.**

$$\vec{a} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3\sqrt{5}}\right), \vec{b} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right), \vec{c} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

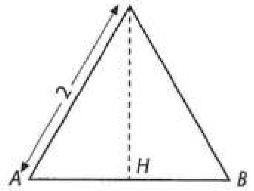
$$\vec{d} = (-1, 2),\ \vec{e} = \left(\frac{2}{9}, \frac{\sqrt{5}}{9}\right)$$

Se calculan sus módulos y se obtiene que $\vec{a}$ y $\vec{c}$ son unitarios. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección:

- $\dfrac{-2/3}{2} = \dfrac{-5/3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \vec{a}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.
- $\dfrac{-1/2}{2} \neq \dfrac{-\sqrt{3}/2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \vec{c}$ y $\vec{v}$ no tienen la misma dirección.

3 **Calcula el producto escalar de los siguientes vectores de la figura 6.8:**

a) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CH}$ ***b)*** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}$



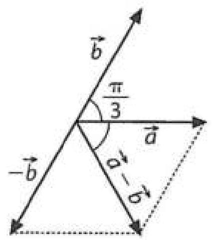
a) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CH} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30° = 3$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 90° = 0$

4 **Dado el vector $\vec{u} = \left(1, -\sqrt{3}\right)$, determina el módulo del producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, si sabemos que la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es 3.**

$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = 2 \cdot 3 = 6$

5 **A partir de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, tales que $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ y el ángulo $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3$ rad, calcula el ángulo $(\vec{a}, \vec{a} - \vec{b})$. Puedes ayudarte de su representación gráfica.**



Como puedes ver en el dibujo, el ángulo pedido es $\pi/3$ rad.

6 **Calcula el producto escalar de los siguientes pares de vectores.**

a) $\vec{u} = \left(1 - \sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\vec{v} = \left(\sqrt{3} - 1, -6\right)$

b) $\vec{u} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3} + 1, -\dfrac{1}{3}\right)$ y $\vec{v} = \left(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 =$

$$= \left(1 - \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-6) = -4$$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 =$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + 1\right) \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}$$

7 **Si $\vec{a} = (3x-1, 2)$ y $\vec{b} = (7, 2-x)$, calcula el valor de x si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 16$.**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = (3x-1) \cdot 7 - 2 \cdot (2-x) = 16$
$\Rightarrow 19x - 3 = 16 \Rightarrow x = 1$

8 **Identifica los vectores unitarios de entre los siguientes. En el caso de que no lo sean, calcula el vector unitario que tiene la misma dirección y sentido.**

a) $\vec{u} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

b) $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

c) $\vec{w} = \left(-4, -\sqrt{2}\right)$

a) $\vec{u}$ no es unitario.

El vector unitario es $\vec{u}/|\vec{u}| = \left(1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10}\right)$.

b) $\vec{v}$ es unitario.

c) $\vec{w}$ no es unitario.

El vector unitario es $\vec{w}/|\vec{w}| = \left(-2\sqrt{2}/3, -1/3\right)$.

9 **Calcula los ángulos que forman los siguientes pares de vectores.**

a) $\vec{v} = (3, -4)$ **y** $\vec{w} = (3/2, -1)$

b) $\vec{v} = (2, 6)$ **y** $\vec{w} = (-7, 1)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{9/2 + 4}{5 \cdot \sqrt{13/4}} \Rightarrow \alpha = 19{,}44°$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{-14+6}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{50}} \Rightarrow \alpha = 100{,}30°$

10 **Determina el valor de z, para que los vectores $\vec{u} = (z, -3)$ y $\vec{v} = (1, -2)$:**

a) **Sean paralelos.**

b) **Sean perpendiculares.**

c) **Formen un ángulo de $\pi/4$ rad.**

d) **Formen un ángulo de $\pi/3$ rad.**

a) $\dfrac{z}{1} = \dfrac{-3}{-2} \Rightarrow z = \dfrac{3}{2}$

b) $z + 6 = 0 \Rightarrow z = -6$

c) $\cos\pi/4 = \dfrac{z+6}{\sqrt{z^2+9} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow z = 9, z = -1$

d) $\cos\pi/3 = \dfrac{z+6}{\sqrt{z^2+9} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow z = 24 \pm 15\sqrt{3}$

11 **Halla el ángulo entre estos vectores.**

a) $\vec{u} = (2, 1)$ **y** $\vec{v} = (1, 3)$

b) $\vec{u} = (-1, 1)$ **y** $\vec{v} = (2, 3)$

c) $\vec{u} = (-5, 2)$ **y** $\vec{v} = (2, 5)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} \Rightarrow \alpha = 45°$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{11}} \Rightarrow \alpha = 82°\ 1'43{,}74''$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{0}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}} \Rightarrow \alpha = 90°$

12 **Comprueba que los vectores $\vec{u} = (-1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 1)$ forman una base ortogonal. Escribe de nuevo ambos vectores para que sean una base ortonormal y calcula las coordenadas del vector $\vec{z} = \left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.**

Para saber si dos vectores forman una base ortogonal el producto escalar debe ser cero, ya que serían perpendiculares y además tendrían direcciones distintas, es decir, serían linealmente independientes.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, 1) \cdot (1, 1) = 0$$

Como el módulo de cada vector es $\sqrt{2}$, entonces, hay que dividir ambos vectores por dicho modulo para normalizarlos y así obtener vectores de módulo uno. Por tanto:

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1, 1) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Así pues, para hallar las coordenadas del vector en la base ortonormal, se calcula el producto escalar del vector por cada vector de la base.

$$\vec{u} \cdot \vec{z} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right) = 1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{z} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right) = 3$$

Luego, las coordenadas del vector con respecto la base ortonormal son 1 y 3.

13 **Determina tres puntos y un vector director de cada una de las siguientes rectas.**

a) $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$

b) $3x - 2y + 7 = 0$

c) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-5}$

a) $\vec{v} = (-1, 2)$; puntos: $(0, 3)$, $(-1, 5)$, $(2, -1)$

b) $\vec{v} = (2, 3)$; puntos: $(0, 7/2)$, $(-7/3, 0)$, $(1, 5)$

c) $\vec{v} = (2, -5)$; puntos: $(0, -1/2)$, $(-1/5, 0)$, $(-1, 2)$

14 **Escribe, en forma general y paramétrica, la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-1, 3)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (-3, 4)$.**

Con los datos podemos escribir:

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{4} \Rightarrow 4x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

15 **Dada la recta que pasa por los puntos $A(-5, 8)$ y $B(0, 3)$, encuentra un vector que determine su dirección y calcula su ecuación general.**

$\vec{AB} = (5, -5)$; por tanto un vector director de la recta es $(1, -1)$ y la ecuación de la recta es $x + y - 3 = 0$.

16 **Determina qué ecuación general corresponde a cada uno de los ejes de coordenadas.**

Eje de abscisas: $\vec{v} = (1, 0)$, un punto $(0, 0)$, la ecuación general es $y = 0$.

Eje de ordenadas: $\vec{v} = (0, 1)$, un punto $(0, 0)$, la ecuación general es $x = 0$.

17 **Dada la recta $3x + 2y - 3 = 0$, halla el valor de su pendiente. Después, averigua la ecuación, en forma general, de otra recta que tenga la misma pendiente y pase por el punto $P(4, 2)$. ¿Qué se observa?**

La pendiente es $m = -3/2$.

Otra recta paralela tiene por ecuación general $3x + 2y + c = 0$.

Si contiene el punto $(4, 2)$, entonces:

$12 + 4 + c = 0 \Rightarrow c = -16$

La ecuación pedida es $3x + 2y + 16 = 0$.

Se observa que los coeficientes de x e y de la ecuación de la nueva recta son iguales que los de la ecuación de la recta inicial, ya que ambas rectas son paralelas.

18 **Escribe, en forma explícita, la ecuación de la recta que corta el eje de ordenadas en $y = 3$ y el valor de cuya pendiente es 7.**

Si $m = 7$ y $n = 3$, la ecuación es $y = 7x + 3$.

19 **Escribe, en forma explícita, la ecuación de la recta que corta el eje de abscisas en el punto $x = -2$, y cuyo vector director es $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$. ¿Qué ángulo forma con el eje de abscisas?**

$m = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{3}; 0 = \sqrt{3} \cdot (-2) + n \Rightarrow n = 2\sqrt{3}$

La ecuación es $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$, y el ángulo es 60°, puesto que $\text{tg } 60° = \sqrt{3}$.

20 **¿Cuál es la ecuación explícita de una recta que pasa por el punto $(-2, 3)$ y cuyo vector director es $\vec{v} = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$?**

Es un vector paralelo al eje de ordenadas, la ecuación de la recta que pasa por $(-2, 3)$ con esa dirección es $x = -2$.

21 **Dados los puntos $A(-3/2, 7)$ y $B(1/2, 5)$:**

a) **Averigua un vector director de la recta que contiene A y B, y su pendiente.**

b) **Determina la ecuación general de la recta, r, que contiene A y B.**

c) **Escribe una ecuación punto-pendiente de dicha recta.**

d) **Halla sus puntos de intersección con los ejes de coordenadas.**

e) **¿Describe la recta r la ecuación $(x, y) = (9/2, 1) + \lambda(-1, 1)$?**

a) $\overrightarrow{AB} = (2, -2), m = -1$

b) $2x + 2y - 11 = 0$

c) $y - 7 = -1(x + 3/2)$

d) $(11/2, 0), (0, 11/2)$

e) Sí, $(9/2, 1)$ pertenece a r y $(-1, 1)$ es paralelo a $\overrightarrow{AB}$.

22 **Escribe la ecuación en forma continua de una recta que forma un ángulo de 30° con el semieje positivo de abscisas y cuya ordenada en el origen es 1.**

$m = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \vec{v} = (3, \sqrt{3})$, la ecuación es: $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{\sqrt{3}}$

23 **Una recta pasa por el punto de intersección del eje de abscisas y la recta de ecuación $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$, y por el punto $(1, -7)$.**

Escribe su ecuación en forma vectorial.

Puntos de la recta $(4, 0)$ y $(1, -7)$, por lo que $\vec{v} = (3, 7)$.

La ecuación es: $(x, y) = (4, 0) + \lambda(3, 7), \lambda \in \mathbb{R}$

24 **Dada $\frac{7-x}{2} = \frac{y-3}{7}$, averigua la ecuación en forma general de la recta que pasa por la intersección de r: $x = y$ y s: $x + y = 3$ y tiene la misma pendiente.**

Resolviendo el sistema se obtiene el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Entonces la recta pedida, paralela a la recta dada, cuya dirección viene dada por el vector $(-2, 7)$ es: $14x + 4y - 27 = 0$

25 **Dada la recta $4y = x + 2$, calcula la ecuación general de otra recta paralela a ella que pase por el punto $A\left(7, \frac{3}{4}\right)$.**

$m = \frac{1}{4}$, es decir, un vector director puede ser $(4, 1)$. Imponiendo que pase por $A(7, 3/4)$, tenemos la ecuación de la recta es: $x - 4y - 4 = 0$

26 **Determina la ecuación de la recta que pasa por $O(0, 0)$ y es paralela a la recta cuyas ecuaciones paramétricas son las siguientes:**

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 7 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Un vector director de la recta buscada es $(-1, 3)$, y como debe contener el origen de coordenadas, la ecuación es: $3x + y = 0$

27 **Determina la ecuación de una recta paralela al eje de ordenadas que pase por el punto $A\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$.**

Es una recta vertical cuya ecuación es: $x = -\frac{2}{3}$

28 **Determina la ecuación punto–pendiente de una recta que pase por el punto $P(1, -2)$ y que sea paralela a otra cuya ecuación vectorial es la siguiente:**

$$(x, y) = (2, 5) + \left(-\frac{2}{3}, 1\right)\lambda \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Un vector director de la recta buscada es $(-2/3, 1)$, luego su pendiente es $-3/2$, y debe contener el punto $P(1, -2)$, por lo que su ecuación punto-pendiente es: $y + 2 = -\frac{3}{2}(x - 1)$

29 **Determina la posición relativa de los siguientes pares de rectas, estudiando la proporcionalidad de los vectores directores y la de los coeficientes de la recta en forma general, antes de resolver el sistema. En los casos en que sean secantes, determina el punto de intersección.**

a) r: $3x + 2y - 1 = 0$ $\quad s$: $5x - y + 7 = 0$

b) r: $2x - 3y + 7 = 0$ $\quad s$: $-4x + 6y = 0$

c) r: $8x - 2y + 2 = 0$ $\quad s$: $-4x + y - 1 = 0$

d) r: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad s$: $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+5}{3}$

e) r: $(x, y) = (2, -1) + \lambda(1, -1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

s: $-x + y + 5 = 0$

f) r: $\frac{x+2}{5} = \frac{2-y}{-1}$ $\quad s$: $x - 5y + 12 = 0$

g) r: $2x - 2y + 5 = 0$ $\quad s$: $x - y + 2 = 0$

a) Los coeficientes no son proporcionales: $\frac{3}{5} \neq \frac{2}{-1}$, por lo que son secantes. Resolviendo el sistema, se obtiene que el punto de intersección es $(-1, 2)$.

b) Los coeficientes son proporcionales: $\frac{2}{-4} = \frac{-3}{6}$, por lo que son paralelas, y no son coincidentes, puesto que los términos independientes no mantienen la proporción $-1/2$.

c) Son paralelas y coincidentes porque todos los coeficientes son proporcionales: $\frac{8}{-4} = \frac{-2}{1} = \frac{2}{-1}$

d) Los vectores directores son proporcionales: $\frac{1}{-1} = \frac{-3}{3}$, por lo que son paralelas. Los puntos de r, por ejemplo $(0, 2)$, no pertenecen a s, por lo que no son coincidentes.

e) Un vector director de r es $(1, -1)$ y uno de s es $(1, 1)$, por lo que son secantes. Resolviendo el sistema se obtiene el punto de intersección $(3, -2)$.

f) Un vector director de *r* es (5, 1) y uno de *s* es (5, 1), por lo que son paralelas. Los puntos de *r*, por ejemplo $(-2, 2)$, verifican la ecuación de la recta *s*, por lo que son coincidentes.

g) Un vector director de *r* es (1, 1) y uno de *s* es (1, 1), por lo que son paralelas. Los puntos de *s*, por ejemplo (0, 2), no verifican la ecuación de *r*, por lo que no son coincidentes.

30 Dados los puntos $A(0, -3)$, $B(1, 5)$, $C(-1, 3)$ y $D(1, 0)$, averigua los ángulos que determinan las rectas cuyos vectores directores son:

a) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 8)$ y $\overrightarrow{CB} = (-2, -2)$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{2+16}{\sqrt{65}\cdot\sqrt{8}} \Rightarrow \alpha = 37{,}87°$$

b) $\overrightarrow{AC} = (-1, 6)$ y $\overrightarrow{BD} = (0, -5)$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|} = \frac{30}{\sqrt{37}\cdot 5} \Rightarrow \alpha = 9{,}46°$$

31 Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = -m\alpha \\ y = 2 + 2\alpha \end{cases}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $s: y = \frac{4}{3}x - 2$, determina *m* para que estas sean perpendiculares.

Se debe cumplir que: $(-m, 2)\cdot(3, 4) = 0 \Rightarrow -3m + 8 = 0$

Por tanto: $m = 8/3$

32 Dadas las rectas $r: ax - 2y + 7 = 0$ y $s: \frac{x+1}{b} = \frac{y}{2}$, halla *a* y *b* sabiendo que las rectas son perpendiculares y que *r* pasa por el punto $P(-1, 2)$.

En primer lugar, son perpendiculares, luego: $(2, a)\cdot(b, 2) = 0$.

Si *r* pasa por $(-1, 2)$, entonces: $-a - 4 + 7 = 0$, luego se debe resolver el sistema:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ y } b = -3$$

33 Obtén la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(7, -2)$ y forma un ángulo de 120° con el eje de abscisas, en sentido positivo.

$m = \operatorname{tg} 120° = -\sqrt{3}$

La ecuación punto-pendiente es: $y + 2 = -\sqrt{3}\,(x - 7)$

En forma general: $\sqrt{3}x + y - 7\sqrt{3} + 2 = 0$

34 Halla la ecuación de las rectas que pasan por el punto $A(3, -1)$ y forman un ángulo de 30° con la recta $x = 4$.

La recta $x = 4$ es vertical, por lo que estamos buscando las ecuaciones de las dos rectas que pasan por $A(3, -1)$ que forman un ángulo de 60° y 120°, respectivamente, con el eje de abscisas en sentido positivo.

- $r: m = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, luego $y + 1 = \sqrt{3}(x - 3)$
  $\Rightarrow \sqrt{3}x - y - 3\sqrt{3} - 1 = 0$
- $s: m = \operatorname{tg} 120° = -\sqrt{3}$, luego $y + 1 = -\sqrt{3}(x - 3)$
  $\Rightarrow \sqrt{3}x + y - 3\sqrt{3} + 1 = 0$

35 Calcula la distancia entre la recta $r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ y el punto de intersección de las rectas:

$$s: 2x + 3y - 1 = 0 \text{ y } t: x + y + 2 = 0$$

Primero se determina el punto de intersección de *s* y *t*:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow P(-7, 5)$$

La recta *r* en forma general es $x - 2y - 3 = 0$.

La distancia entre *P* y *r* es:

$$d(P, r) = \frac{|-7 - 2\cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}\text{ u}$$

36 Determina la longitud de la altura correspondiente a *A* en el triángulo de vértices $A(1, 4)$, $B(7, 5)$ y $C(-1, -3)$.

Buscamos la ecuación en forma general de la recta que pasa por *B* y *C*:

$\overrightarrow{BC} = (-8, -8)$, luego un vector director de la recta será:

$$\vec{v} = (1, 1)$$

Si la recta pasa por *C*, entonces: $x + 1 = y + 3 \Rightarrow x - y - 2 = 0$.

La altura del triángulo *ABC*, correspondiente al vértice *A*, es la siguiente distancia:

$$d(A, r) = \frac{|1 - 4 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\text{ u}$$

37 Halla la distancia entre la recta $r: 5x - y + 7 = 0$ y una paralela a ella que pase por el punto (1, 7).

Una recta paralela es de la forma $5x - y + c = 0$.

Como pasa por (1, 7), tenemos: $5 - 7 + c = 0 \Rightarrow c = 2$

Luego la recta paralela es $5x - y + 2 = 0$.

Un punto de ella es $P(0, 2)$, por lo que la distancia pedida es:

$$d(r, s) = d(P, r) = \frac{|0 - 2 + 7|}{\sqrt{5^2 + (-1^2)}} = \frac{5}{\sqrt{26}}\text{ u}$$

38 Calcula la distancia entre la recta $r: 3x - 4y + 6 = 0$ y una paralela a ella que dista 3 unidades del origen de coordenadas (dos soluciones).

Una recta paralela a la dada, tiene por ecuación:

$$s: 3x - 4y + C = 0$$

Buscamos dos rectas que disten 3 unidades del origen de coordenadas, (0, 0). Luego:

$$d(O, s) = \frac{|C|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|C|}{5} = 3\text{ u} \Rightarrow |C| = 15$$

$\Rightarrow C = 15$ y $C = -15$

Las ecuaciones de las rectas paralelas a la del enunciado que distan 3 unidades del origen son:

$$s_1: 3x - 4y + 15 = 0 \text{ y } s_2: 3x - 4y - 15 = 0$$

Un punto de la recta *r* es $P(-2, 0)$:

- $$d(r, s_1) = d(P, s_1) = \frac{|3\cdot(-2) - 4\cdot 0 + 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{9}{5}\text{u}$$
- $$d(r, s_2) = d(P, s_2) = \frac{|3\cdot(-2) - 4\cdot 0 - 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{21}{5}\text{u}$$

Por tanto, las distancias pedidas son $\frac{9}{5}$ u y $\frac{21}{5}$ u, respectivamente.

Ejercicios y problemas (páginas 170/174)

Vectores

1 Calcula el extremo del vector $\vec{v} = \left(\sqrt{2}, -1\right)$ si su origen es el punto $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 4\right)$.

Si $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, entonces: $B\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 3\right)$

2 Calcula las componentes y el módulo de los vectores.

a) $\vec{w} = -3 \cdot \left(-\frac{1}{3}, +3\right) + \sqrt{2}\left(\frac{2}{3\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

b) $\vec{w} = (5, \sqrt{3}) - \sqrt{6} \cdot (1, -\sqrt{2})$

a) $\vec{w} = \left(\frac{5}{3}, \frac{-25}{3}\right)$, $|\vec{w}| = \frac{5\sqrt{26}}{3}$

b) $\vec{w} = (5 - \sqrt{6}, 3\sqrt{3})$, $|\vec{w}| = 5{,}79$

3 Calcula x e y para que se cumpla esta igualdad:

$$\frac{1}{3} \cdot (2x, 3y - 6) = (-2, 12) - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1-x}{4}, 0\right)$$

$x = -7, y = 14$

4 Si $\vec{a} = (3, 1/2)$, $\vec{b} = (-2/3, 5)$ y $\vec{c} = (2, 3)$, determina las siguientes combinaciones lineales.

a) $3\vec{a} - 2(\vec{b} + \vec{c})$

b) $3(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{c})$

a) $3\vec{a} - 2(\vec{b} + \vec{c}) = (9, 3/2) - 2(4/3, 8) = (9, 3/2) - (8/3, 16) =$
$= (19/3, -29/2)$

b) $3(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{c}) = 3(11/3, -9/2) + \frac{1}{3}(-8/3, 2) =$
$= (11, -27/2) + (-8/9, 2/3) = (91/9, -77/6)$

5 Halla el valor de x e y si $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$, sabiendo que $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{b} = (7, 5)$ y $\vec{v} = (5, -2)$.

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} 5 = -x + 7y \\ -2 = 3x + 5y \end{cases} \Rightarrow x = -3/2, y = 1/2$$

6 Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento AB en cuatro partes iguales, si $A(22, 7)$ y $B(-6, 5)$.

Los tres puntos son $M\left(15, \frac{13}{2}\right)$, $N(8, 6)$ y $P\left(1, \frac{11}{2}\right)$.

Dependencia lineal y bases

7 ¿Es el vector $\vec{v} = \left(2, -\frac{5}{7}\right)$ una combinación lineal del vector $\vec{u} = \left(-7, \frac{5}{2}\right)$? Expresa la respuesta enunciando la característica que los relaciona.

Sí, $\left(2, \frac{-5}{7}\right) = \frac{-2}{7} \cdot \left(-7, \frac{5}{2}\right)$, luego son paralelos.

8 La combinación lineal de dos vectores paralelos, ¿es necesariamente otro vector paralelo a ellos?

Sí, $\vec{v} = k\vec{w}$, $a\vec{v} + b\vec{w} = ak\vec{v} + b\vec{w} = (ak + b) \cdot \vec{w}$, que es un vector paralelo a los anteriores.

9 ¿Es posible que dos vectores linealmente dependientes formen un ángulo de 180°? ¿Y un ángulo de 90°?

Sí, son vectores de la misma dirección y sentido opuesto.

No, si forman un ángulo de 90° no son paralelos, por lo tanto no son dependientes.

10 ¿Son los vectores $\vec{u} = (4, 2)$ y $\vec{v} = (-2, -1)$ linealmente dependientes? ¿Son paralelos?

Como $\vec{u} = -2 \cdot \vec{v}$, son l.d. y por lo tanto paralelos.

11 Los puntos $A(2, 6)$, $B(5, 8)$ y $C(17, m)$ están alineados. Calcula m.

Si están alineados, debe cumplirse que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, de lo cual se deduce que:

$$\frac{3}{15} = \frac{2}{m-6} \Rightarrow m = 16$$

12 Considera los puntos del plano $A(3, 2)$, $B(-1, 8)$ y $C(k, k + 4)$ con $k \in \mathbb{R}$. Calcula el valor de k para que A, B y C estén alineados.

Para que los puntos A, B y C estén alineados se ha de verificar que $\overrightarrow{AB} = a \cdot \overrightarrow{AC}$, donde a es un parámetro.

Como $\overrightarrow{AB} = (-4, 6)$, $\overrightarrow{AC} = (k - 3, k + 2)$:

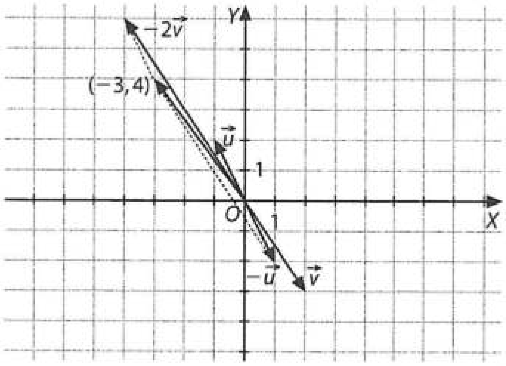
$$(-4, 6) = a(k - 3, k + 2) \Rightarrow \begin{cases} -4 = a(k - 3) \\ 6 = a(k + 2) \end{cases}$$

Despejando a de las dos ecuaciones e igualando, se obtiene:

$$\frac{-4}{k-3} = \frac{6}{k+2} \Rightarrow k = 1$$

13 Expresa el vector $\vec{w} = (-3, 4)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (-1, 2)$ y $\vec{v} = (2, -3)$. Realiza la representación gráfica para comprobar el resultado.

$$(-3, 4) = -1(-1, 2) - 2(2, -3)$$



14 Di cuáles de los siguientes pares de vectores forman base.

a) $(-3, 1)$ y $(\sqrt{3}, -\sqrt{3}/3)$

b) $(-\sqrt{2}, 4)$ y $(-1/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2})$

c) $(-5, 1)$ y $(2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$

d) $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ y $(1, -7 - 4\sqrt{3})$

e) $(1/(\sqrt{5} + 1), (\sqrt{5} - 1)/4)$ y $(1, 1)$

a) $-3/\sqrt{3} = 1/(-\sqrt{3}/3)$ no forman base.

b) $-\sqrt{2}/(-1/\sqrt{2}) \neq 4/(2/\sqrt{2})$ sí forman base.

c) $-5/2\sqrt{5} \neq 1/(-\sqrt{5})$ sí forman base.

d) $2 - \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})/(-7 - 4\sqrt{3})$ forman base.

e) $\frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ forman base.

15 Dado el vector $\vec{v} = (3, -7)$, expresa el vector $\vec{v}$ en la base formada por los vectores $\vec{a} = (-1, 1)$ y $\vec{b} = (2, -1)$.

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} 3 = -x + 2y \\ -7 = x - y \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{v} = (-11, -4)$ en la base $\{\vec{a}, \vec{b}\}$

Producto escalar

16 Calcula el producto escalar de dos vectores de módulos 3 y 4, respectivamente, que forman 60°.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 4 \cdot \cos 60° = 6$

17 Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (1, 1)$ y $\vec{v} = (3, 4)$. Determina el ángulo que forman.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 1) \cdot (3, 4) = 7$. Aplicando la fórmula para el coseno del ángulo que forman dos vectores, se obtiene $\alpha = 8{,}13°$.

18 **Calcula el ángulo que forman $\vec{v} = (3, 4)$ y $\vec{w} = (-3, 1)$.**

$$\cos\alpha = \frac{(3,4)\cdot(-3,1)}{5\sqrt{10}} = \frac{-5}{5\sqrt{10}}$$

Por tanto, $\alpha = 108{,}43°$.

19 **¿Es posible que dos vectores cuyo producto escalar vale 3 formen un ángulo de 120°? Razona la respuesta.**

No es posible, puesto que si el producto escalar es positivo el ángulo que forman es agudo.

20 **Determina qué ángulos forman los siguientes pares de vectores.**

a) $\vec{u} = (3, 2)$ y $\vec{v} = (7, -1)$

b) $\vec{u} = \left(2-\sqrt{2}, 2/(2+\sqrt{2})\right)$ y $\vec{v} = (1, -1)$

c) $\vec{u} = \left(\sqrt{5}/2, -\sqrt{5}\right)$ y $\vec{v} = (-1, 2)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{21-2}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{50}} \Rightarrow \alpha = 41°\,49'\,12{,}61''$

b) $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\left(-5\sqrt{5}/2\right)}{\left(5/2\sqrt{5}\right)} = -1 \Rightarrow \alpha = 180°$

21 **Dado el vector $\vec{u} = (-5, 2)$, determina cuáles de los siguientes vectores son paralelos y cuáles perpendiculares a dicho vector.**

a) $\vec{v} = (5, -2)$

b) $\vec{w} = (2, -5)$

c) $\vec{m} = (-2, -5)$

d) $\vec{n} = (-4, -10)$

e) $\vec{o} = (5/2, -1)$

f) $\vec{p} = (1, 5/2)$

Paralelos: *a)* y *e)*

Perpendiculares: *c)*, *d)* y *f)*.

22 **Dados $A(3, 0)$, $B(1, 4)$, $C(-1, 3)$ y $D(-1, -2)$, calcula el perímetro del cuadrilátero que determinan y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$.**

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{20}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{CD}\right| = 5$, $\left|\overrightarrow{DA}\right| = \sqrt{20}$, $P = 5\sqrt{5} + 5$

$\cos\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\right) = 1$, por lo tanto, $\alpha = 0°$, son vectores paralelos.

23 **Dados $\vec{a} = (2x, 5)$ y $\vec{b} = (7, y)$, averigua los valores de x e y sabiendo que $\vec{a}$ se encuentra en el primer cuadrante, $|\vec{a}| = 5\sqrt{5}$, y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares.**

Del módulo del vector $\vec{a}$ se deduce lo siguiente:

$$4x^2 + 25 = 125 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \vec{a} = (10, 5)$$

Si ambos vectores son perpendiculares:

$(10, 5)\cdot(7, y) = 0 \Rightarrow 70 + 5y = 0 \Rightarrow y = -14 \Rightarrow \vec{b} = (7, -14)$

24 **Sabiendo que el vector $\vec{a} = (x, y)$ es perpendicular a $\vec{b} = (-3, 2)$ y que el módulo de $\vec{a}$ es $2\sqrt{13}$, halla el valor de x e y.**

Del módulo se deduce que: $x^2 + y^2 = 52$

Puesto que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, $-3x + 2y = 0$.

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, se obtiene que $\vec{a} = (4, 6)$ $\vec{a} = (-4, 6)$.

25 **Calcula a sabiendo que $\vec{u} = (a, 3)$ y $\vec{v} = \left(\sqrt{2}, 1\right)$ forman un ángulo de 30°.**

$$\sqrt{3}/2 = \frac{\sqrt{2}a + 3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2+9}} \Rightarrow a^2 - 24\sqrt{2}a + 45 = 0$$

$\Rightarrow a = 12\sqrt{2} + 9\sqrt{3}, a = 12\sqrt{2} - 9\sqrt{3}$

26 **Si $|\vec{a}| = 2$ y $|\vec{b}| = 3$, y $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, halla $|\vec{a}+\vec{b}|$ y $|\vec{a}-\vec{b}|$.**

Tomando $\vec{a} = (x, y)$ y $\vec{b} = (z, t)$, tenemos lo siguiente:

- $x^2 + y^2 = 4$
- $z^2 + t^2 = 9$
- $xz + yt = 0$

El módulo de $\vec{a} + \vec{b}$:

$$\sqrt{(x+z)^2 + (y+t)^2} = \sqrt{4 + 9 + 2(xz+yt)} = \sqrt{13}$$

El módulo de $\vec{a} - \vec{b}$:

$$\sqrt{(x-z)^2 + (y-t)^2} = \sqrt{4 + 9 - 2(xz+yt)} = \sqrt{13}$$

27 **Sabiendo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo módulo y que $\vec{u} = (3x, y)$ y $\vec{v} = (2, -1)$, calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.**

El módulo es $\sqrt{5}$, luego: $9x^2 + y^2 = -5 = 0$

$$\cos\alpha = \frac{(3x+2, y-1)(3x-2, y+1)}{\sqrt{(3x+2)^2 + (y-1)^2}\sqrt{(3x-2)^2 + (y+1)^2}} =$$

$$= \frac{9x^2 + y^2 - 5}{\sqrt{(3x+2)^2 + (y-1)^2}\sqrt{(3x-2)^2 + (y+1)^2}} = 0$$

Por tanto, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son perpendiculares, el ángulo que forman es 90°.

28 **Dados los vectores $\vec{v} = (7, 4)$ y $\vec{w} = (4, x)$, calcula x para que estos:**

a) **Sean perpendiculares.**

b) **Sean paralelos.**

c) **Formen un ángulo de 30°.**

a) $x = -7$

b) $x = \dfrac{16}{7}$

c) Para resolver este apartado hace falta saber resolver una ecuación irracional.

Se obtienen dos soluciones: $x = 6{,}86$ y $x = -0{,}02$

29 **Halla la proyección ortogonal del vector $\vec{u} = (2, -1)$ sobre el vector $\vec{v} = (-3, 7)$.**

Aplicando la definición de proyección ortogonal de un vector $\vec{u}$ sobre otro $\vec{v}$, tenemos:

$$proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{|-6-7|}{\sqrt{9+49}} = \frac{13}{\sqrt{58}}$$

30 **Dado el vector $\vec{u} = (-3, 6)$, determina el módulo del producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, si sabemos que la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es 3.**

Aplicando la definición de proyección de un vector sobre otro, tenemos que:

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = 3\cdot\sqrt{9+36} = 9\sqrt{5}$$

31 **Dados los puntos $A(7, 0)$, $B(4, 6)$ y $C(-1, -1)$, calcula las proyecciones de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$ y comprueba que la suma de ambas es igual al módulo de $\overrightarrow{AC}$.**

$\overrightarrow{AB} = (-3{,}6)$, $\overrightarrow{AC} = (-8, -1)$, $p_1 = proy_{\overrightarrow{AC}}(\overrightarrow{AB}) = \dfrac{18}{\sqrt{65}}$

$\overrightarrow{CB} = (5, 7)$, $\overrightarrow{CA} = (8, 1)$, $p_2 = proy_{\overrightarrow{CA}}(\overrightarrow{CB}) = \dfrac{47}{\sqrt{65}}$

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{65}, p_1 + p_2 = \dfrac{18}{\sqrt{65}} + \dfrac{47}{\sqrt{65}} = \sqrt{65}$

Aplicaciones de los vectores

32 **Dado el triángulo cuyos vértices son $A(-1, 0)$, $B(3, 3)$ y $C(1, -2)$, calcula:**

a) **La longitud del lado AB.**

b) **La longitud del lado AC.**

c) **El ángulo A.**

d) **El área del triángulo.**

a) $|\overrightarrow{AB}| = 5$ u

b) $|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2}$ u

c) $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{(4, 3) \cdot (2, -2)}{5 \cdot 2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}$

$\Rightarrow A = 81° \ 52' 11{,}63''$

d) Área $= \dfrac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \text{sen } A}{2} = 7 \text{ u}^2$

33 **Dado el triángulo de vértices $A(-3, 7)$, $B(5, 6)$ y $C(-2, 15)$, calcula el valor de su área y el ángulo A.**

Tomando como base la longitud del lado AB, la altura es el producto del lado AC por el seno del ángulo A.

Primero calculamos el ángulo A:

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(8, -1) \cdot (1, 8)}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{65}} = 0 \Rightarrow A = 90°$$

Por tanto el área será: $\dfrac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}{2} = 32{,}5 \text{ u}^2$

34 **Dado el triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(-3, 5)$ y $C(1, 3)$, calcula el valor de su área y el ángulo A.**

Tomando como base la longitud del lado AB, la altura es el producto del lado AC por el seno del ángulo A.

Primero calculamos el ángulo A:

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-2, 6) \cdot (2, 4)}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{20}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = 45°$$

Por tanto el área será: $\dfrac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \text{sen } A}{2} = 10 \text{ u}^2$

Ecuaciones de la recta

35 **Determina si los siguientes puntos están alineados y, en el caso de que lo estén, averigua la ecuación de la recta a la que pertenecen.**

***a)* $A(1, 6)$, $B(-2, 0)$ y $C(1/2, 5)$**

***b)* $A(1, 2)$, $B(-3, 3)$ y $C(-1, 4)$**

a) A, B y C están alineados, puesto que pertenecen a la misma recta $2x - y + 4 = 0$.

b) No están alineados, puesto que el punto C no pertenece a la recta que pasa por A y B, $x + 4y - 9 = 0$.

36 **Calcula la ecuación de la recta que pasa por $A(3, 2)$ y $B(-6, 0)$. Exprésala de todas las formas posibles.**

Ecuación en forma vectorial: $(x, y) = (3, 2) + \lambda(9, 2)$

Ecuación en forma paramétrica: $\begin{cases} x = 3 + 9\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$

Ecuación en forma continua: $\dfrac{x - 3}{9} = \dfrac{y - 2}{2}$

Ecuación en forma general: $2x - 9y + 12 = 0$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{2}{9x} + \dfrac{4}{3}$

37 **¿Qué podrías decir acerca de una recta cuyo vector director es $(1, 1)$?**

Su pendiente vale 1 y por tanto forma un ángulo de 45° con el semieje positivo de abscisas. Es la bisectriz del ángulo que forman los ejes de coordenadas.

38 **Si $A(2, 7)$, $B(8, -3)$ y $C(0, -10)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, determina las coordenadas del vértice D. A continuación, averigua las del punto en el que se cortan sus diagonales.**

$D(-6, 0)$. El punto de corte de sus diagonales es: $M\left(1, -\dfrac{3}{2}\right)$

39 **Los puntos $A(0, -2)$, $B(6, 0)$ y $C(3, 4)$ son tres vértices de un paralelogramo. Calcula el cuarto vértice y las ecuaciones de sus diagonales.**

$D(-3, 2)$. Las ecuaciones de sus diagonales:

AC es $2x - y - 2 = 0$ y BD es $2x + 9y - 12 = 0$

40 **Dada la recta r: $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = a - 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, halla el valor de a para que $(-4, 7)$ pertenezca a r.**

Si $x = -4$, $t = -1$, por lo que: $7 = a + 3 \Rightarrow a = 4$

41 **Calcula b para que la recta $x + by - 7 = 0$ pase por el punto de intersección de estas rectas:**

$$r: (x, y) = (-7, 0) + \lambda(5, 1), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s: \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha - 4 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Trabajando en paramétricas o escribiendo las ecuaciones en forma general, se resuelve el sistema de r y s, y se obtiene que el punto de intersección es $(3, 2)$.

Este punto debe pertenecer a la recta $x + by - 7 = 0$, por tanto: $3 + 2b - 7 = 0 \Rightarrow b = 2$.

42 **Dados los puntos del plano $A(2, -1)$ y $B(0, 3)$ y la recta r de ecuación $x + y - 2 = 0$, calcula las coordenadas de un punto C de la recta que esté alineado con A y B.**

C pertenece a r, por tanto, las coordenadas son $C(x, 2 - x)$. Si está alineado con A y con B, cumple lo siguiente:

$$(-2, 4) = k(x - 2, 2 - x + 1) \Rightarrow \frac{-2}{x - 2} = \frac{4}{3 - x} \Rightarrow x = 1$$

Por tanto, el punto C tiene las siguientes coordenadas: $C(1, 1)$

Posiciones relativas de rectas

43 **Calcula la ecuación de una recta paralela a la de ecuación $3x - 2y + 5 = 0$ que pase por el punto $P(-1, 5)$. Exprésala en forma vectorial y paramétrica.**

En forma vectorial: $(x, y) = (-1, 5) + \lambda(2, 3)$

En forma paramétrica: $\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 5 + 3\lambda \end{cases}$

44 **Sean r y s las dos rectas del plano de ecuaciones:**

$$r: 2x - y - 3 = 0$$

$$s: \frac{x + 1}{4} = \frac{y + 2}{2}$$

Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de r y s, y es paralela a la recta de ecuación que pasa por los puntos $(2, -1)$ y $(-3, 2)$.

Se resuelve el sistema formado por las rectas r y s y obtenemos el punto de intersección $P(1, -1)$.

Una recta paralela a la dada será de la forma $3x + 5y + C = 0$. Imponemos que contenga el punto P:

$$3 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) + C = 0 \Rightarrow C = 2$$

Por lo que la recta buscada es: $3x + 5y + 2 = 0$

45 **Calcula la ecuación de la recta perpendicular a la de ecuación $3x - 2y + 5 = 0$ que pase por el punto $P(-1, 5)$. Exprésala en forma continua y explícita.**

En forma continua: $\dfrac{x + 1}{-3} = \dfrac{y - 5}{2}$

En forma explícita: $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{13}{3}$

46 **Considera la recta de ecuación $y = -7x + 5$. Encuentra las coordenadas del punto de intersección de esta recta con la recta perpendicular a ella que pasa por $(-7, 5)$.**

Una recta perpendicular es de la forma: $y = \frac{1}{7}x + b$

Debe pasar por el punto $(-7, 5)$, por tanto:

$$5 = \frac{1}{7} \cdot (-7) + b \Rightarrow b = 6$$

Luego la recta perpendicular es $y = \frac{1}{7}x + 6$.

El punto de intersección se calcula resolviendo este sistema:

$$\begin{cases} y = -7x + 5 \\ y = \frac{x}{7} + 6 \end{cases} \Rightarrow -7x + 5 = \frac{x}{7} + 6$$

$$\Rightarrow x = -\frac{7}{50}, y = \frac{299}{50}$$

El punto es $P\left(-\frac{7}{50}, \frac{299}{50}\right)$.

47 **Dadas las siguientes rectas:**

$$r\text{: } 5x - y + 4 = 0$$

$$s\text{: } \begin{cases} x = -3 + m\lambda \\ y = 4 - \lambda \end{cases}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

determina el valor de m para que las rectas r y s sean:

a) **Paralelas.**

b) **Perpendiculares.**

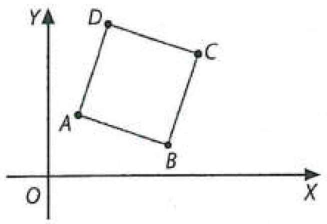
c) **Coincidentes.**

a) $m = -\frac{1}{5}$

b) $m = 5$

c) No pueden ser coincidentes.

48 **Los puntos $A(1, 2)$ y $C(5, 4)$ representan los vértices opuestos de un cuadrado:**



a) **Calcula el punto medio, M, de la diagonal, AC, del cuadrado (M será el centro del cuadrado).**

b) **Escribe la ecuación de la recta que pasa por M y es perpendicular a la diagonal AC.**

c) **Calcula las coordenadas de los otros dos vértices B y D del cuadrado.**

a) $M(3, 3)$

b) $\overrightarrow{AC} = (4, 2)$, luego la recta es de la forma: $4x + 2y + C = 0$

Como contiene al punto $M(3, 3)$ debe cumplir:

$$4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + C = 0 \Rightarrow C = -18$$

La recta pedida es $4x + 2y - 18 = 0 \Rightarrow 2x + y - 9 = 0$.

c) El vector $\overrightarrow{AM} = (2, 1)$. Dos vectores perpendiculares y del mismo módulo son:

$$\vec{u} = (-1, 2) \text{ y } \vec{v} = (1, -2)$$

Luego los puntos B y D son:

$$(3 - 1, 3 + 2) = (2, 5) \text{ y } (3 + 1, 3 - 2) = (4, 1)$$

En concreto, $B(4, 1)$ y $D(2, 5)$, porque B debe estar a la derecha y hacia abajo respecto de M.

49 **Explica la condición que han de verificar A y B si las rectas $Ax + By + C = 0$ y $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3}$:**

a) **Son perpendiculares.** ***b)*** **Son paralelas.**

a) $-2B + 3A = 0$ *b)* $A/3 = -B/2$

50 **Sea r la recta de ecuación $3x - 5y + 2 = 0$. Determina las ecuaciones de las rectas paralela y perpendicular a r que pasen por el punto $(-15, 4)$.**

Paralela: $3x - 5y + 65 = 0$; perpendicular: $5x + 3y + 63 = 0$

51 **Dada la recta de ecuación $3x - 5y + 7 = 0$, determina la ecuación de la recta perpendicular que corta el eje de ordenadas en $y = 3$.**

Una perpendicular tendrá por ecuación $5x + 3y + C = 0$.

Debe pasar por $(0, 3)$, es decir:

$$5 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + C = 0 \Rightarrow C = -9$$

La recta buscada es $5x + 3y - 9 = 0$.

52 **Determina el valor de a para que las rectas de ecuaciones $x - 5ay = 1$ y $2x + 3y = 1$ sean:**

a) **Paralelas.** ***b)*** **Perpendiculares.**

a) $\frac{1}{2} = \frac{-5a}{3} \Rightarrow a = \frac{-3}{10}$

b) $1 \cdot 2 + (-5a) \cdot 3 = 0 \Rightarrow a = 2/15$

53 **Determina el valor de m para que r: $x - y + 4 = 0$ y s: $\begin{cases} x = 3 + m\lambda \\ y = 1 - 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ sean:**

a) **Paralelas.** ***b)*** **Perpendiculares.**

$$\vec{v}_r = (1, 1) \text{ y } \vec{v}_s = (m, -4)$$

a) Si son paralelas: $(1, 1) = k(m, -4) \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{-4} \Rightarrow m = -4$

b) Si son perpendiculares: $(1, 1) \cdot (m, -4) = 0 \Rightarrow m = 4$

54 **Dadas r: $2x + my - 7 = 0$ y s: $\begin{cases} x = -3 + 5\lambda \\ y = 7 + n\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$, sabiendo que s pasa por $P(13, 8)$, determina m y n en los siguientes casos:**

a) **Si r y s son paralelas.**

b) **Si r y s son perpendiculares.**

Si $P(13, 8)$ pertenece a s: $13 = -3 + 5\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{16}{5}$

Entonces: $8 = 7 + n\frac{16}{5} \Rightarrow n = \frac{5}{16}$

Un vector director de s es $(16, 1)$ y un vector director de r es $(-m, 2)$:

a) r y s son paralelas si: $\frac{-m}{16} = \frac{2}{1} \Rightarrow m = -32$

b) r y s son perpendiculares si: $(-m, 2) \cdot (16, 1) = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{8}$

55 **De un rombo $ABCD$ conocemos las coordenadas de tres vértices: A es el origen de coordenadas, $B(4, 1)$ y $D(1, 4)$.**

a) **Calcula las coordenadas del cuarto vértice, C.**

b) **Comprueba, analíticamente, que las diagonales son perpendiculares y que se cortan en su punto medio.**

a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow (1, 4) = (x - 4, y - 1) \Rightarrow x = 5, y = 5$, luego $C(5, 5)$.

b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (5, 5) \cdot (-3, 3) = -15 + 15 = 0$, luego las diagonales son perpendiculares.

El punto medio de una de las diagonales es: $M(5/2, 5/2)$

Comprobamos que las rectas que contienen A y C y B y D, se cortan en el mismo punto:

Recta que pasa por A y C: $y = x$

Recta que pasa por B y D: $x + y = 5$

El punto de intersección es la solución de este sistema:

$$\begin{cases} y = x \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow P(5/2, 5/2)$$

56 **Calcula las coordenadas del punto simétrico de $A(1/6, 1)$ respecto del punto $P(1, -4)$.**

$$A'\left(\frac{11}{6}, -9\right)$$

57 **Halla las coordenadas del punto simétrico al punto $P(2, 2)$ respecto de la recta $x - 2y - 5 = 0$.**

Recta perpendicular a la dada que pasa por (2, 2):

$$2x + y - 6 = 0$$

Punto de intersección de las dos rectas: $\left(\frac{17}{5}, \frac{-4}{5}\right)$

El punto de intersección es el punto medio entre (2, 2) y su simétrico, por tanto, el simétrico buscado es:

$$\left(\frac{24}{5}, \frac{-18}{5}\right)$$

58 **Calcula el punto simétrico de $A(0, 4)$ respecto de la recta $3x - y + 1 = 0$.**

Primero calculemos la proyección ortogonal de A sobre la recta r. Para ello necesitamos calcular la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por A.

Una perpendicular cualquiera es de la forma $x + 3y + C = 0$. Imponemos que contenga el punto A:

$$1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + C = 0 \Rightarrow C = -12$$

Por tanto, la recta buscada perpendicular a r que pasa por A es $x + 3y - 12 = 0$.

Ahora buscamos la proyección de A sobre r resolviendo el sistema y obtenemos $A(9/10, 37/10)$.

Esta proyección es el punto medio entre A y su simétrico, por tanto podemos escribir:

$$\frac{9}{10} = \frac{0 + x}{2} \Rightarrow x = \frac{9}{5}; \ \frac{37}{10} = \frac{4 + y}{2} \Rightarrow y = \frac{17}{5}$$

El punto simétrico es $A'(9/5, 17/5)$.

59 **Calcula el punto simétrico de $A(-2, -1)$ respecto de la recta r: $\begin{cases} x = 3t \\ y = 7 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.**

Primero calculemos la proyección ortogonal de A sobre la recta r. Para ello necesitamos calcular la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por A.

Una perpendicular cualquiera es de la forma $3x - 5y + C = 0$. Como un vector director de r es $(3, -5)$, imponemos que contenga el punto A: $3 \cdot (-2) - 5 \cdot (-1) + C = 0 \Rightarrow C = 1$

Por tanto, la recta buscada perpendicular a r que pasa por A es $3x - 5y + 1 = 0$.

Ahora buscamos la proyección de A sobre r resolviendo el sistema y obtenemos $A(3, 2)$.

Esta proyección es el punto medio entre A y su simétrico, por tanto podemos escribir:

$$3 = \frac{-2 + x}{2} \Rightarrow x = 8; \ 2 = \frac{-1 + y}{2} \Rightarrow y = 5$$

El punto simétrico es $A'(8, 5)$.

60 **Determina la ecuación de la recta simétrica de r: $x + y - 1 = 0$ respecto de la recta s: $x - 2y + 3 = 0$.**

La recta r y su simétrica respecto a s tienen un punto en común: el de su intersección.

Si resolvemos el sistema de r y s se obtiene:

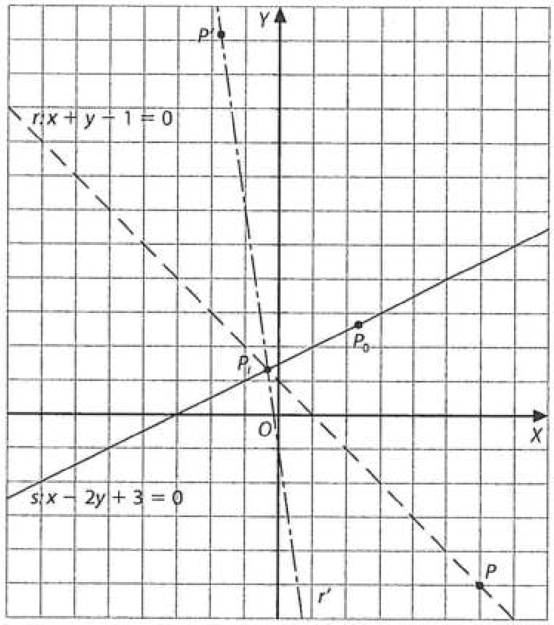
$$P_i = (-1/3, 4/3)$$

Otro punto de r' será el simétrico de uno de r respecto a s.

Un punto de r es (0, 1). La recta t perpendicular a s que pasa por (0, 1) es t: $2x + y - 1 = 0$.

El punto de intersección de s y t es $P_0\left(\frac{-1}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

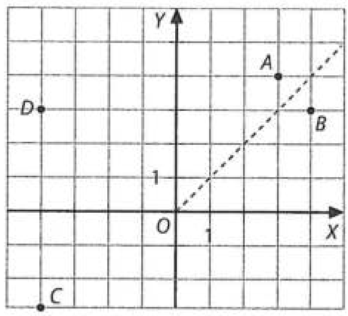
Con estos datos, el punto de r' buscado es: $\left(\frac{-2}{5}, \frac{9}{5}\right)$



Con dos puntos se puede deducir la ecuación de r', que es: $7x + y + 1 = 0$.

Distancias y áreas

61 **Halla el perímetro del cuadrilátero $ABCD$ si $A = (3, 4)$; B es el punto simétrico de A respecto de la bisectriz del primer cuadrante; C, el simétrico de B respecto del eje de ordenadas, y D, el simétrico de C respecto del eje de abscisas.**

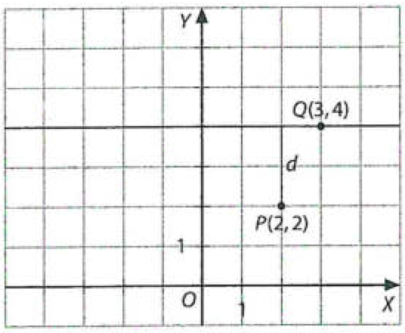


Las coordenadas de los puntos son: $B(4, 3)$; $D(-4, 3)$ y $C(-4, -3)$, por lo tanto el perímetro:

$$P = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BD}| + |\overrightarrow{DC}| + |\overrightarrow{CA}| = 16 + 6\sqrt{2} \text{ u}$$

62 **Halla la distancia del punto $P(2, 2)$ a la recta paralela al eje de abscisas que pasa por el punto $Q(3, 4)$.**

Observa la representación gráfica:



Por tanto la distancia es $d = 2$.

63 **Considera el triángulo formado por las rectas de ecuaciones $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 8 = 0$ y el eje de coordenadas.**

Calcula su perímetro y su área.

Los vértices del triángulo son los puntos de intersección de las tres rectas: $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 8 = 0$ y $x = 0$, que son: $A(0, 4)$, $B(0, -1)$ y $C(2, 3)$.

Por tanto, el perímetro es:

$$|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CA}| = 5 + \sqrt{5} + \sqrt{20} = 5 + 3\sqrt{5}\text{ u}$$

Para calcular el área, tomamos $|\overrightarrow{AB}|$ como base y entonces la altura vale 2 unidades, por lo que:

Área $= 5$ u^2

64 **Calcula la distancia entre las rectas:**

$4x - 3y + 7 = 0$ $\qquad$ $8x - 6y = 0$

Son rectas paralelas porque los coeficientes A y B de las dos rectas son proporcionales. Con un punto de la segunda, por ejemplo, $O(0, 0)$, calculamos la distancia a la primera recta:

$$d(O, r) = \frac{|4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{5} = 1{,}4\text{ u}$$

65 **Determina, sin efectuar cálculos, la distancia entre las rectas:**

$3x + 2y - 5 = 0$

$2x - 5y + 1 = 0$

Como los vectores directores de las rectas no son proporcionales, podemos asegurar que no son rectas paralelas, por tanto son secantes y su distancia es cero.

66 **Dadas las rectas $ax + (a + 2)y = a + 2$ y $x + ay = 3$, donde a es un parámetro.**

a) **Calcula un vector director de cada una de estas rectas.**

b) **Halla los valores de a para los que las rectas son paralelas.**

c) **Calcula los valores de a para los cuales las rectas son perpendiculares.**

d) **Calcula la distancia que hay entre las dos rectas cuando $a = 2$.**

a) $\vec{v}_r = (-a - 2, a)$ y $\vec{v}_s = (-a, 1)$

b) Las rectas son paralelas si sus vectores son proporcionales:

$$\frac{-a-2}{-a} = \frac{a}{1} \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2, a = -1$$

c) Las rectas son perpendiculares si el producto escalar de sus vectores directores es cero:

$$(-a - 2, a) \cdot (-a, 1) = 0 \Rightarrow a^2 + 3a = 0 \Rightarrow a = 0, a = -3$$

d) Si $a = 2$, las dos rectas que quedan son:

- r: $x + 2y = 2$
- s: $x + 2y = 3$

Son paralelas, por eso tomamos el punto $(0, 1)$ de la recta r y calculamos la distancia de este punto a la recta s, que será la distancia entre las dos rectas:

$$d(r, s) = \frac{|0 + 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\text{ u}$$

67 **Considera la recta de ecuación $y = -2x + 2$.**

a) **Averigua las coordenadas del punto de intersección de esta recta con su recta perpendicular que pasa por (6, 3).**

b) **Halla la ecuación de la paralela que contiene (3, 5).**

c) **Calcula la distancia entre las dos rectas paralelas.**

a) Una recta perpendicular es de la forma: $y = (1/2)x + b$

Debe pasar por $(6, 3)$, por tanto: $3 = (1/2) \cdot 6 + b \Rightarrow b = 0$

Luego la recta perpendicular es $y = \dfrac{1}{2}x$.

El punto de intersección es la solución de este sistema:

$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = x/2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{5}, y = \frac{2}{5}$$

El punto es $P(4/5, 2/5)$.

b) Una recta paralela es de la forma: $y = -2x + b$

Debe pasar por $(3, 5)$: $5 = -2 \cdot 3 + b \Rightarrow b = 11$

Luego la recta paralela es $y = -2x + 11$

c) La distancia es $9/\sqrt{5}$ u

68 **Determina si es equilátero, isósceles o rectángulo el triángulo cuyos vértices son $A(2, 2)$, $B(5, 6)$ y $C(-2, 5)$. Averigua el valor de la altura correspondiente al vértice A y utilízalo para calcular el área del triángulo.**

Como $\overrightarrow{AB} = (3, 4)$ y $\overrightarrow{AC} = (-4, 3)$, el triángulo es rectángulo en A. La longitud correspondiente a estos lados es 5 u. Por tanto, es isósceles.

Como $\overrightarrow{BC} = (-7, -1)$, la recta perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ que pasa por A es: $7x + y - 16 = 0$. La proyección ortogonal de A sobre esta recta es el punto de intersección de esta recta con la que pasa por BC, es decir, $x - 7y + 37 = 0$.

Este punto es: $A_0(3/2, 11/2)$

La longitud de la altura es el módulo del vector $\overrightarrow{AA_0}$: $h = 5\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

El área del triángulo será: $\dfrac{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AA_0}|}{2} = 12{,}5\text{ u}^2$

69 **Calcula la distancia entre estas rectas.**

r: $4x - 2y + 10 = 0$ $\qquad$ s: $4x - 2y - 10 = 0$

Un punto de una de ellas es $P(0, 5)$, puesto que son paralelas:

$$d = \left|\frac{4 \cdot 0 - 2 \cdot 5 - 10}{\sqrt{16 + 4}}\right| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\text{ u}$$

70 **Sabiendo que $3x + ay - 5a = 0$ y $-bx + 3y + 3b = 0$ son perpendiculares y sus ordenadas en el origen están a 4 unidades de distancia, calcula a y b.**

Primero debe cumplirse $(-a, 3) \cdot (3, b) = 0 \Rightarrow -a + b = 0$.

Si $x = 0$, en la primera recta $y = 5$, y en la segunda, $y = -b$.

Debe cumplirse: $|5 - (-b)| = 4$; es decir, $5 + b = 4 \Rightarrow b = -1$ y $5 + b = -4 \Rightarrow b = -9$. Por tanto:

- Si $b = -1 \Rightarrow a = -1$
- Si $b = -9 \Rightarrow a = -9$

71 **Averigua qué punto, $P(x, y)$, del plano dista $5\sqrt{2}$ u de $Q(4, 1)$ y cumple lo siguiente:**

- **$x > y$**
- **$|y| = 2|x|$**
- **$x > 0$**

La ordenada debe ser negativa y en valor absoluto el doble que la abscisa, por tanto $P(x, -2x)$.

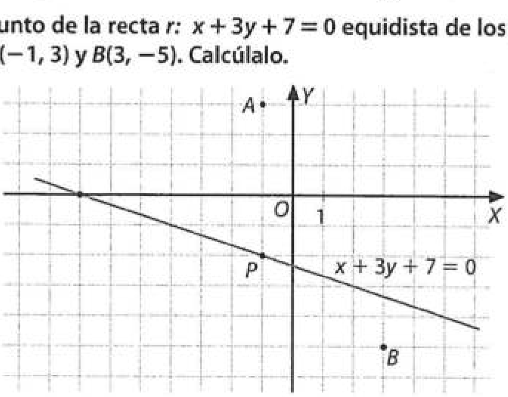
Deberá cumplir:

$(x - 4)^2 + (-2x - 1)^2 = 50 \Rightarrow 5x^2 - 4x - 33 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -11/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -6 \\ y = 22/5 \end{cases}$$

Solo cumple el enunciado la solución $x = 3, y = -6$.

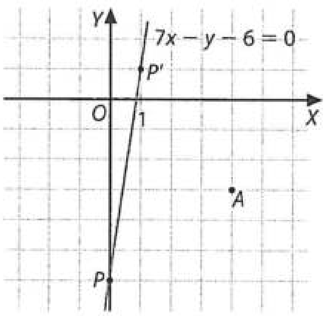
72 **Un punto de la recta *r*: $x + 3y + 7 = 0$ equidista de los puntos $A(-1, 3)$ y $B(3, -5)$. Calcúlalo.**



El punto de la recta será: $P\,(x, (x + 7)/(-3))$

Aplicando la expresión de distancia entre dos puntos e igualando, se obtiene $d(A, P) = d(B, P)$ que a su vez: $120x = -120$, es decir, $x = -1$, y sustituyendo $y = -2$, luego $P(-1, -2)$.

73 **El punto $A(4, -3)$ dista 5 unidades de dos puntos de la recta $7x - y - 6 = 0$; halla las coordenadas de los puntos.**



Los puntos de la recta son de la forma $(x, 7x - 6)$, por tanto, los puntos que distan 5 unidades de *A* son aquellos que cumplen que: $(x - 4)^2 + (7x - 6 + 3)^2 = 5^2$

Operando, se obtiene la ecuación $50x(x - 1) = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 1$. Los puntos son: $P(0, -6)$ y $P'(1, 1)$

74 **Determina los puntos de la recta $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, que distan $\sqrt{10}$ u de $y = 3x + 1$.**

Podemos sustituir en la fórmula que permite hallar la distancia de un punto $(3 - t, 2t)$ a una recta, $3x - y + 1 = 0$:

$$\sqrt{10} = \frac{|3(3 - t) - 2t + 1|}{\sqrt{10}} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$$

Por lo que los puntos son:

- Si $t = 0 \Rightarrow (3, 0)$
- Si $t = 4 \Rightarrow (-1, 8)$

75 **Halla el punto de la recta $2x + 3y - 5 = 0$ que equidista de $A(0, 3)$ y $B(-1, 4)$.**

El punto es de la forma $\left(x, \dfrac{-2x + 5}{3}\right)$. Se debe cumplir que:

$$x^2 + \left(\frac{-2x + 5}{3} - 3\right)^2 = (x + 1)^2 + \left(\frac{-2x + 5}{3} - 4\right)^2$$

$$\Rightarrow x = -\frac{7}{5}, y = \frac{13}{5}$$

Por tanto, el punto buscado es $(-7/5, 13/5)$.

76 **Averigua los puntos de la recta $-8x + y - 1 = 0$ que están a distancia $2\sqrt{2}$ u del punto $A(2, 3)$.**

Los puntos de la recta son de la forma $(x, 8x + 1)$. Por tanto:

$$(x - 2)^2 + (8x - 2)^2 = 8 \Rightarrow 65x^2 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 36/65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 353/65 \end{cases}$$

Los puntos de la recta que están a distancia $2\sqrt{2}$ u del punto $A(2, 3)$ son $(0, 1)$ y $(36/65, 353/65)$.

77 **Encuentra las coordenadas de los puntos situados en la recta *r*: $x + 2y - 3 = 0$ que distan dos unidades de la recta *s*: $4x - 3y + 9 = 0$.**

P y *P'* son de la forma $\left(x, \dfrac{3 - x}{2}\right)$.

La distancia de uno cualquiera de ellos a *s* es 2, por lo que:

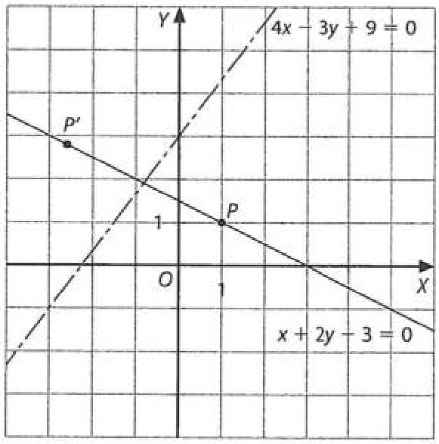
$$2 = \frac{|4x - 3y + 9|}{5}$$

Como $y = 3 - \dfrac{x}{2}$, tenemos que:

$$\left|4x - 3 \cdot \left(\frac{3x - 2}{2}\right) + 9\right| = 10 \Rightarrow |11x + 9| = 20$$

Las soluciones de esta ecuación son: $x = 1$ y $x = -29/11$. Sustituyendo en la ecuación irracional, ambas son válidas, por lo que solo falta calcular las ordenadas de los puntos *P* y *P'*.

Se obtiene: $P(1, 1)$ y $P'\left(\dfrac{-29}{11}, \dfrac{31}{11}\right)$



78 **De todas las rectas que pasan por el punto $P(2, 1)$, halla las que distan una unidad del origen.**

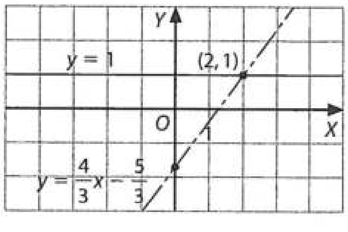
Las rectas que pasan por el punto $(2, 1)$ son de la forma: $y - 1 = m\,(x - 2)$, es decir, $mx - y + (1 - 2m) = 0$.

Podemos hallar las dos rectas que pasan por el punto $(2, 1)$ y distan una unidad del origen, a partir de la expresión que proporciona la distancia de una recta a un punto:

$$1 = \left|\frac{m \cdot 0 - 0 + (1 - 2m)}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| \Rightarrow \sqrt{m^2 + 1} = |1 - 2m|$$

Al resolver esta ecuación irracional, se obtiene $m = 0$ y $m = 4/3$, por lo que las dos rectas buscadas son:

$$y = 1 \text{ e } y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$



79 **Averigua las ecuaciones de las rectas que pasan por $(-2, 4)$ y distan 3 unidades del punto $(-1, 7)$.**

Las rectas que pasan por $(-2, 4)$, son de la siguiente forma: $y - 4 = m(x + 2)$, es decir, $mx - y + 2m + 4 = 0$.

Por tanto, se puede escribir:

$$3 = \frac{|m(-1) - 7 + 2m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} \Rightarrow 8m^2 + 6m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3/4 \end{cases}$$

Es decir, las rectas serán:

- Si $m = 0 \Rightarrow y = 4$
- Si $m = 3/4 \Rightarrow 3x - 4y + 22 = 0$

80 **Determina las ecuaciones de las rectas que distan 7 unidades del punto $P(3, 5)$ y son perpendiculares a la recta cuya ecuación es $3x - 4y + 6 = 0$.**

Hay dos rectas que cumplen las condiciones del enunciado.

Si son perpendiculares a $3x - 4y + 6 = 0$, son de la forma: $4x + 3y + C = 0$.

Si distan 7 unidades del punto $(3, 5)$, deben cumplir:

$$7 = \frac{|4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + C|}{\sqrt{16 + 9}} \Rightarrow 35 = |27 + C| \Rightarrow C = 8 \text{ y } C = -62$$

Las dos rectas son: $4x + 3y + 8 = 0$ y $4x + 3y - 62 = 0$.

81 **En el triángulo de vértices $A(0, 3)$, $B(3, 7)$ y $C(6, 0)$, determina:**

a) **El perímetro.**

b) **La ecuación de la recta perpendicular a BC que pasa por A, es decir, la altura del triángulo desde el vértice A.**

c) **La distancia del punto A a la recta que contiene el segmento BC.**

d) **El área.**

a) Lado $AB = 5$ u; lado $BC = \sqrt{58}$ u; lado $AC = 3\sqrt{5}$ u; Perímetro $= 19{,}32$ u.

b) La recta que contiene a $A(0, 3)$ y es perpendicular al vector $\overrightarrow{BC} = (3, -7)$ es: $3x - 7y + 21 = 0$

c) La distancia de $A(0, 3)$ a la recta que contiene el segmento BC, $7x + 3y - 42 = 0$, es: $d = \dfrac{|7 \cdot 0 + 3 \cdot 3 - 42|}{\sqrt{49 + 9}} = \dfrac{33}{\sqrt{58}}$ u

d) $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{|\overrightarrow{BC}| \cdot d}{2} = \dfrac{\sqrt{58} \cdot 33/\sqrt{58}}{2} = \dfrac{33}{2}$ u^2

Ángulos

82 **Encuentra las ecuaciones de las rectas que forman con el eje de abscisas un ángulo cuya tangente vale 3.**

$y = 3x + b$

83 **Determina, sin efectuar cálculos, el ángulo existente entre las rectas $3x - 2y - 5 = 0$ y $2x + 3y = 0$.**

El ángulo mide 90°, puesto que $AA' + BB' = 0$.

84 **Halla el ángulo que forman estas dos rectas:**

$$r: 3x - 5y + 10 = 0, \; s: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 2t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$$

Aplicando la fórmula para el coseno del ángulo que forman los dos vectores directores, se obtiene $\alpha = 64°\,39'\,13{,}77''$.

85 **Averigua la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A(-1/2, 5)$ y $B(7, -2)$ y determina el ángulo que forma con la recta $x = 5$.**

El punto medio del segmento es $M(13/4, 3/2)$.

El vector es $\overrightarrow{AB} = (15/2, -7)$, por lo que una perpendicular al segmento AB que pase por M es:

$$\frac{15}{2}x - 7y + C = 0$$

Imponiendo que pase por M:

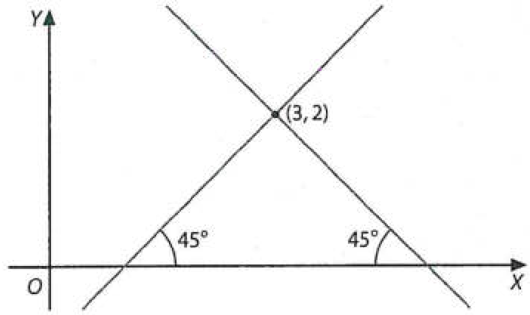
$$\frac{15}{2} \cdot \frac{13}{4} - 7 \cdot \frac{3}{2} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{111}{8}$$

La recta es: $\dfrac{15}{2}x - 7y + \dfrac{111}{8} = 0 \Rightarrow 60x - 56y + 111 = 0$

El ángulo que forma con la recta $x = 5$ es:

$$\cos \alpha = \frac{|(56, 60) \cdot (0, 1)|}{\sqrt{6736}} = \frac{60}{4\sqrt{421}} \Rightarrow \alpha = 43°\,1'\,30{,}24''$$

86 **Escribe la ecuación de las dos rectas que pasan por el punto $(3, 2)$ y forman un ángulo de 45° con el eje OX:**



La recta de pendiente positiva será de la forma:

$$y = x + b$$

Imponiendo que pase por $(3, 2)$, tenemos:

$$2 = 3 + b \Rightarrow b = -1$$

Por tanto, esta recta tiene por ecuación $y = x - 1$.

La recta de pendiente negativa será de la forma:

$$y = -x + b$$

Como pasa por $(3, 2)$, tenemos: $2 = -3 + b \Rightarrow b = 5$

Por tanto, esta recta tiene por ecuación $y = -x + 5$.

87 **Determina la pendiente de las rectas que forman un ángulo de 60° con la recta de ecuación $-x + 2y = 4$.**

Un vector director de la recta es $\vec{u} = (2, 1)$ y un vector director $\vec{v} = (1, m)$ de otra que forme con ella 60° cumplirá:

$$\frac{1}{2} = \frac{|2 + m|}{\sqrt{5}\sqrt{1 + m^2}} \Rightarrow |4 + 2m| = \sqrt{5 + 5m^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m' = 8 + 5\sqrt{3} = 16{,}66 \\ m = 8 - 5\sqrt{3} = -0{,}66 \end{cases}$$

88 **Escribe las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto de intersección de $x + 3y - 5 = 0$ y $-2x + y + 3 = 0$ y forman un ángulo de 45° con $2x - y - 1 = 0$.**

Un vector director de la recta $2x - y - 1 = 0$ es $\vec{u} = (1, 2)$ y un vector director $\vec{v} = (1, m)$ de una recta que forme con ella un ángulo de 45° cumplirá:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1 + 2m|}{\sqrt{5}\sqrt{1 + m^2}} \Rightarrow |2 + 4m| = \sqrt{10 + 10m^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Que verifican la primera ecuación.

Por otra parte, el punto de intersección de las dos rectas es la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ -2x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

Se cortan en el punto $P(2, 1)$, por lo que las rectas buscadas tienen por ecuación:

- $y - 1 = -3(x - 2) \Rightarrow 3x + y - 7 = 0$

■ $y - 1 = \frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow x - 3y + 1 = 0$

Ejercicios de aplicación

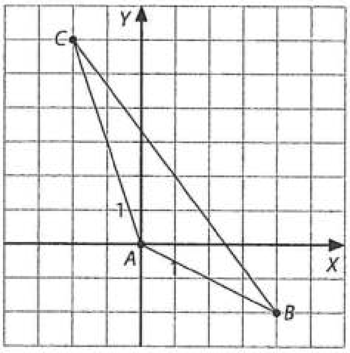
89 **Dado el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(4, -2)$ y $C(-2, 6)$, calcula:**

a) **Su área.**

b) **El ángulo B.**

c) **La ecuación de la mediatriz del segmento AB.**

d) **El punto simétrico de C respecto de AB.**



a) Siguiendo el proceso de ejercicios anteriores se obtiene: Área $= 10$ u^2

b) $\cos B = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{(-4, 2) \cdot (-6, 8)}{\sqrt{20} \cdot 10}$

El ángulo buscado es, por tanto: $B = 26{,}57°$

Atención: Si se calcula primero B, podemos hacer:

$$\overrightarrow{AB} = (4, -2)$$

$h = |\overrightarrow{AB}| \cdot \text{sen } B$, por lo que el área será:

$$A = |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \text{sen } B = 10 \text{ u}^2$$

c) La mediatriz del segmento AB es la perpendicular a AB por su punto medio. Por tanto, es de la forma $2x - y + C = 0$, como el punto medio de AB es $(2, -1)$, $C = -5$. La ecuación pedida es la siguiente:

$$2x - y - 5 = 0$$

d) Calculando la proyección ortogonal de C sobre AB se obtiene $C_0(-4, 2)$, por lo que $C'(-6, -2)$.

90 **Halla el área del triángulo determinado por:**

r: $y = -x$

s: $\begin{cases} x = 3 + k \\ y = -3 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

t: $y = -\dfrac{x}{5} + \dfrac{4}{5}$

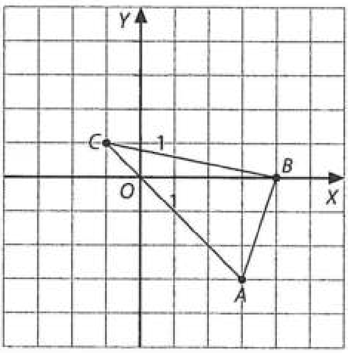
Los vértices de este triángulo son:

$A = r \cap s \Rightarrow A(3, -3)$

$C = r \cap t \Rightarrow C(-1, 1)$

$B = s \cap t \Rightarrow B(4, 0)$

Siguiendo el procedimiento aplicado ya anteriormente, el área vale 8 u^2.



También podemos calcular el ángulo B, y, a continuación, la altura del triángulo.

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA}|} = \frac{(-5, 1) \cdot (-1, -3)}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{260}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen } B = \sqrt{1 - \frac{4}{260}} = 0{,}99$$

Como $h = |\overrightarrow{BC}| \cdot \text{sen } B = 5{,}06$ u, resulta que:

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{10} \cdot 5{,}06}{2} = 8 \text{ u}^2$$

91 **Considera los puntos $O(0, 0)$ y $A(9, 12)$. Una persona situada en el punto O viaja en línea recta hacia A.**

a) **¿Qué distancia recorre para ir de O hasta A?**

b) **Escribe la ecuación de la recta que sigue en este camino.**

c) **Cuando lleva la tercera parte de recorrido, ¿qué coordenadas serán las del punto P en que se encuentre?**

d) **Si cuando llega al punto P decide dirigirse hacia un punto Q de coordenadas $Q(7, 1)$, ¿qué ángulo deberá girar respecto de la trayectoria que seguía?**

a) La distancia entre O y A corresponde con el módulo del vector que une los puntos O y A:

$$d = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 \, u$$

b) Como se conoce el punto $A(0, 0)$ y el vector $\overrightarrow{OA} = (9, 12)$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$r: \frac{x - 0}{9} = \frac{y - 0}{12} \Rightarrow 4x - 3y = 0$$

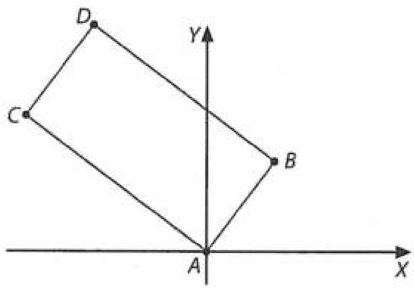
c) Dado que debe cumplirse esta relación entre vectores:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$$

El punto P tiene por coordenadas $(3, 4)$.

d) El vector $\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$, que indica la nueva dirección y el vector $\overrightarrow{OP} = (3, 4)$, que tiene la dirección inicial del trayecto son perpendiculares, porque su producto escalar es cero. Por tanto, el ángulo que indica el cambio de dirección es de 90°.

92 **Considera el siguiente rectángulo del plano:**



a) **Si $A(0, 0)$ y $B(3, 4)$, calcula la longitud de AB.**

b) **Determina la ecuación de la recta que pasa por C y A.**

c) **Determina las coordenadas del vértice C sabiendo que la longitud del lado CA es doble de la de AB.**

d) **Calcula las coordenadas del vértice D.**

a) $|\overrightarrow{AB}| = 5$ u

b) La recta determinada por C y A es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB} = (3, 4)$. Por tanto:

$$\vec{v}_{AC} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{v}_{AC} = (-4, 3)$$

Como esta recta pasa por $(0, 0)$, tiene por ecuación:

$$3x + 4y = 0$$

c) Sobre la recta AC, un punto que esté a 10 unidades de distancia del origen ha de tener por coordenadas $(-8, 6)$. Es decir, $C(-8, 6)$.

d) Se ha de cumplir que: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; es decir, $D = (-5, 10)$.

93 El lado desigual de un triángulo isósceles mide $2\sqrt{2}$ u y está sobre $y = x$. El vértice opuesto es (0, 4).

***a)* Averigua la longitud de los lados iguales.**

***b)* Determina las coordenadas de su baricentro.**

a) La distancia del punto a la recta es el valor de la altura del triángulo isósceles tomando como base el lado desigual. Esta altura divide el triangulo en dos triángulos rectángulos cuyas hipotenusas son los lados iguales del triángulo isósceles. En uno de estos triángulos rectángulos, los catetos son la altura y la mitad del lado desigual, es decir, $\sqrt{2}$.

Por tanto, calculamos la altura del triángulo y aplicando el teorema de Pitágoras, obtendremos la longitud del lado deseado.

$$\text{altura} = d((0, 4), x - y = 0) = \frac{|0-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\ \text{u}$$

Ahora aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$\text{lado igual} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{8+2} = \sqrt{10}\ \text{u}$$

Por tanto, la longitud del lado igual es $\sqrt{10}$ u.

b) Puesto que el triángulo es isósceles, el baricentro se halla situado sobre la recta perpendicular al lado desigual a una distancia 1/3 de la base y 2/3 del vértice (0, 4).

Llamando A_0 a la proyección del vértice conocido $A(0, 4)$, A_0 es el punto de intersección de la recta $y = x$ y su perpendicular por A:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow A_0(2, 2)$$

Llamando G al baricentro:

$$\overrightarrow{A_0G} \Rightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{A_0G} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = -2/3 \\ y - 2 = 2/3 \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

94 Determina las ecuaciones de las rectas que pasan por $P(-2, 7)$ y son perpendiculares a la bisectriz del primer cuadrante y al eje de abscisas. Halla, también, el área del cuadrilátero que forman los ejes X e Y y las rectas halladas.

Una perpendicular a $y = x$ es $y = -x + b$; si pasa por $(-2, 7)$, debe cumplirse lo siguiente:

$$7 = 2 + b \Rightarrow b = 5$$

Por tanto, $y = -x + 5$ es perpendicular a la bisectriz del primer cuadrante y contiene al punto $(-2, 7)$.

La perpendicular al eje OX es $x = -2$.

El cuadrilátero es un trapecio rectángulo.

El punto de intersección con el eje de ordenadas de la recta $y = -x + 5$ es (0, 5).

Con la ayuda de un esquema se observa que la base menor mide 5 u y la mayor, 7 u.

La altura es 2, por lo que el área del trapecio es 12 u^2.

95 Halla las ecuaciones de las rectas que pasa por (6, 2) y forman un triángulo de 27 u^2 con los ejes de coordenadas.

Debe cumplirse que:

$$27 = \frac{a \cdot b}{2} \text{ y } \frac{b}{a} = \frac{b-2}{6}$$

Se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones y se obtiene:

$$a = 9 \text{ y } b = 6 \text{ o bien } a = 18 \text{ y } b = 3$$

La pendiente de la recta es $-2/3$, y la ordenada en el origen es 6.

La ecuación de la recta buscada es:

$$y = 6 - \frac{2}{3}x$$

La pendiente de la recta es $-\frac{1}{6}$, y la ordenada en el origen es 3.

La ecuación de la recta buscada es:

$$y = 3 - \frac{1}{6}x$$

96 Un triángulo tiene dos vértices en los puntos $A(0, 0)$ y $B(3, 1)$. Su área es 2 u^2 y el tercer vértice, de ordenada positiva, se encuentra sobre la recta de ecuación $x - 2y + 2 = 0$. Calcula las coordenadas de C y el perímetro del triángulo.

El vértice C está en la recta $x - 2y + 2 = 0$, por lo que sus coordenadas deben ser $C\left(x, \frac{x}{2} + 1\right)$. Tomamos el lado AB como base, luego esta mide $\sqrt{10}$ u. Si el área mide 2, la altura del triángulo sobre AB debe medir $\frac{4}{\sqrt{10}}$ u.

Esta altura es la distancia entre el vértice $C\left(x, \frac{x}{2} + 1\right)$ y la recta que contiene AB, $x - 3y = 0$:

$$\frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{\left|x - 3\cdot\left(\frac{x}{2}+1\right)\right|}{\sqrt{10}} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{3x}{2} - 3 = 4 \\ -x + \frac{3x}{2} + 3 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -14 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -6 \\ y = 2 \end{cases}$$

Así pues, el vértice C es el punto (2, 2).

El perímetro será:

$$AB + AC + BC = \sqrt{10} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{10} + 3\sqrt{2}\ \text{u}$$

97 Escribe la ecuación de la recta simétrica de r: $y = 3x$ respecto de la bisectriz del primer cuadrante y, a continuación, calcula el área del triángulo que forman la recta r, su simétrica, y la recta de ecuación t: $5x + y - 16 = 0$.

La bisectriz del primer cuadrante, $y = x$, y la recta r se cortan en el origen de coordenadas. Un punto de la recta r es, por ejemplo, $P(1, 3)$. Su simétrico respecto de la bisectriz del primer cuadrante es $P'(3, 1)$.

Por tanto, la ecuación de la recta simétrica buscada, s, es:

$$y = \frac{1}{3}x$$

Buscamos los puntos de intersección de la recta la recta t con las rectas r y s:

$$\begin{cases} y = 3x \\ 5x + y - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2, 6)$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x \\ 5x + y - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(3, 1)$$

Buscamos el ángulo que forman r y s para, así, hallar el área:

$$\cos(r, s) = \frac{|(1, 3)\cdot(3, 1)|}{\left(\sqrt{10}\right)^2} = 0{,}6 \Rightarrow \text{sen}(r, s) = 0{,}8$$

El área será:

$$A = \frac{\sqrt{40}\cdot\sqrt{10}\cdot 0{,}8}{2} = 8\ \text{u}^2$$

98 **Un triángulo rectángulo tiene un vértice, *A*, correspondiente al ángulo recto, en el origen de coordenadas; otro en el punto *B*(2, 4), y el *C* está a distancia 3 u del eje de abscisas. Calcula:**

a) **Las ecuaciones de las rectas que contienen *AB* y *AC*.**

b) **El vértice *C*.**

c) **El área del triángulo.**

a) Lado *AB*: $y = 2x$

Lado *AC*: $y = -\dfrac{x}{2}$

b) El vértice *C* tiene por ordenada 3 y, por tanto, su abscisa es -6, puesto que pertenece a $y = -\dfrac{x}{2}$.

c) El área del triangulo rectángulo *BAC* es:

$$A = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{45}}{2} = 15 \text{ u}^2$$

99 **Determina:**

a) **La ecuación de la recta paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante que pasa por el punto (0, *a*).**

b) **El valor de *a* para que la recta anterior determine en el primer cuadrante con los ejes de coordenadas un triángulo de 8 u² de área.**

c) **La distancia del origen de coordenadas a esta recta.**

d) **La distancia entre esta recta y el punto (4, 0).**

a) $m = -1$ y $n = a$

$y = -x + a \Rightarrow x + y = a$

b) La recta corta al eje de abscisa en el punto $(a, 0)$ y al eje de ordenadas en el punto $(0, a)$, y el triángulo es rectángulo. Por tanto, si el área es 8, $a^2 = 16$, por lo que $a = 4$ (no puede ser -4).

Por tanto, la recta tiene de ecuación:

$$x + y - 4 = 0$$

c) La recta es $x + y - 4 = 0$ y la distancia de (0, 0) a ella es $d = 4/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ u.

d) Dado que el punto de coordenadas (4, 0) pertenece a la recta $x + y - 4 = 0$, podemos determinar que la distancia pedida es 0 u.

100 **En el triángulo de vértices *A*(−1, −1), *B*(−3, 5) y *C*(1, 3), averigua:**

a) **Las ecuaciones de sus medianas.**

b) **Las coordenadas del ortocentro.**

a) El punto medio de *AB* es $(-2, 2)$. La ecuación de la recta que pasa por este punto y *C*, es $x - 3y + 8 = 0$.

El punto medio de *AC* es (0, 1). La ecuación de la recta que pasa por este punto y *B*, es $4x + 3y - 3 = 0$.

El punto medio de *BC* es $(-1, 4)$. La ecuación de la recta que pasa por este punto y *A*, es $x = -1$.

b) La altura correspondiente al vértice *C* es:

$-x + 3y - 8 = 0$

La altura correspondiente al vértice *B* es:

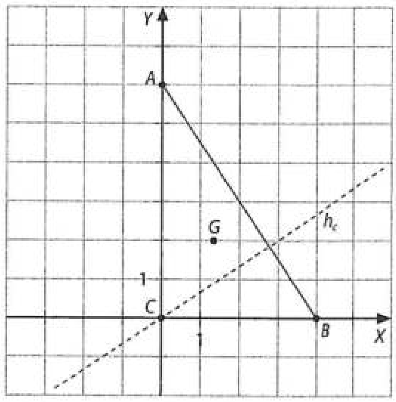
$x + 2y - 7 = 0$

La altura correspondiente al vértice *A* es:

$2x - y + 1 = 0$

Resolviendo un sistema con cualquier par de ecuaciones, se obtiene (1, 3).

101 **Calcula las ecuaciones de las alturas y el baricentro del triángulo que tiene por vértices *A*(0, 6), *B*(4, 0) y *O*(0, 0).**



A partir de la figura, se puede deducir directamente:

- Alturas:

  Correspondiente al vértice *A*: $x = 0$

  Correspondiente al vértice *B*: $y = 0$

  Correspondiente al vértice *C*: como $\overrightarrow{AB} = (4, -6)$, la ecuación de la altura será de la forma $2x - 3y + C = 0$. Como ha de contener el (0, 0), la ecuación es:

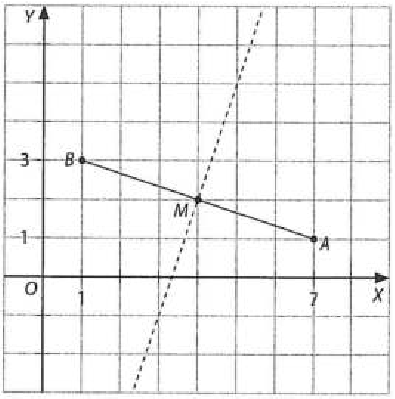
  $$-2x + 3y = 0$$

- Baricentro: es el punto de intersección de las medianas, y se puede calcular directamente sumando las coordenadas de los vértices y dividiendo por tres:

  $$G\left(\frac{4}{3}, 2\right)$$

102 **Un punto equidista de los puntos *A*(7, 1) y *B*(1, 3). La distancia de dicho punto al eje de ordenadas es el doble que al eje de abscisas. Calcula el punto.**

El punto pedido debe estar en la mediatriz de *AB*.



$\overrightarrow{AB} = (-6, 2)$, $M(4, 2)$

Recta perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ que pasa por *M* es:

$$-3x + y + 10 = 0$$

Según enunciado, $P(x, y)$ es tal que $x = 2y$, por tanto:

$$\begin{cases} -3x + y + 10 = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow P(4, 2)$$

103 **Determina la ecuación de una recta que forma con el eje *X* un ángulo de 45° y que dista 15 unidades con (0, 0).**

Hay dos rectas que cumplen las condiciones del enunciado.

Las rectas son de la forma: $x - y + C = 0$.

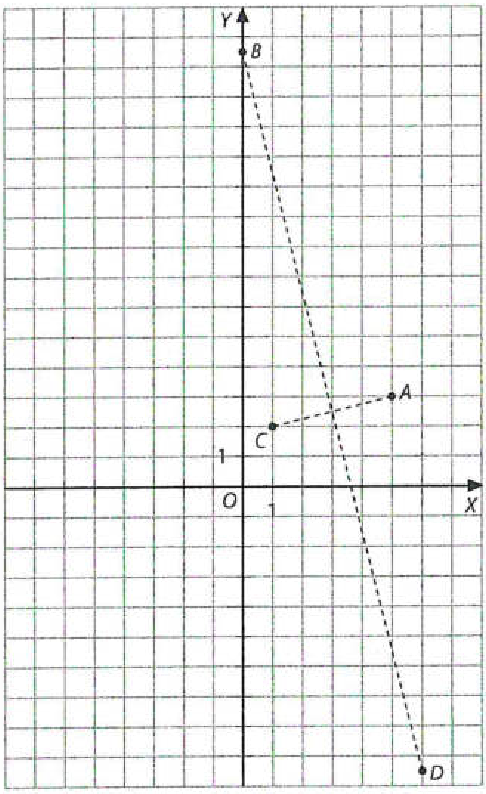
La distancia del origen de coordenadas a estas rectas es de 15 unidades, por tanto:

$$15 = \frac{|0 - 0 + C|}{\sqrt{2}} \Rightarrow C = 15\sqrt{2} \text{ y } C = -15\sqrt{2}$$

Las dos rectas buscadas son:

$$x - y + 15\sqrt{2} = 0 \text{ y } x - y - 15\sqrt{2} = 0$$

104 **Un rombo tiene dos vértices opuestos, $A(5, 3)$ y $C(1, 2)$, y un vértice, B, que está sobre el eje de ordenadas. Halla D.**



$\overrightarrow{CA} = (4, 1)$

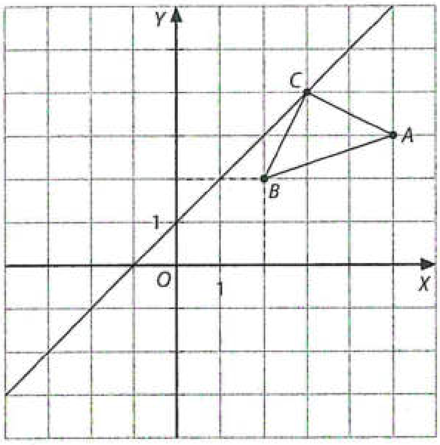
B es la intersección de la mediatriz de CA y el eje de ordenadas.

La mediatriz de CA es de la forma $4x + y + C = 0$. Como debe pasar por el punto medio de CA, que es el $\left(3, \frac{5}{2}\right)$, la ecuación es $4x + y - \frac{29}{2} = 0$.

Intersectando esta recta con el eje de ordenadas, $x = 0$, se obtiene el punto $B\left(0, \frac{29}{2}\right)$.

El vértice D se obtiene considerando que el segmento BD tiene como punto medio $\left(3, \frac{5}{2}\right)$. Las coordenadas de D son $\left(6, -\frac{19}{2}\right)$.

105 **Dado un triángulo isósceles cuyo lado desigual es AB, con $A(5, 3)$, $B(2, 2)$, calcula el vértice opuesto, C, si sabemos que pertenece a la recta $x - y + 1 = 0$.**



$A(5, 3)$, $B(2, 2)$ y $C(x, x+1)$

Si $d(B, C) = d(C, A)$, debe cumplirse que:

$(5 - x)^2 + (2 - x)^2 = (x - 2)^2 + (x - 1)^2 \Rightarrow (5 - x)^2 = (x - 1)^2$
$\Rightarrow 24 = 8x \Rightarrow x = 3$

El vértice opuesto es $C(3, 4)$.

106 **De un triángulo conocemos un vértice, $A(0, 2)$, y las ecuaciones de dos alturas, $y = -x$ y $x - 3y - 2 = 0$. Halla las ecuaciones de los lados del triángulo y los otros vértices.**

Lados: $3x + y - 2 = 0$, $y = 2 + x$, $x - 5y - 6 = 0$

Vértices: $(-4, -2)$ y $(1, -1)$

El vértice A no pertenece a ninguna de las alturas, por lo que son perpendiculares a los lados AB y AC.

Supongamos que B es el vértice correspondiente a la altura $y = -x$, luego la pendiente del lado AC es 1: $y = x + b$, pasa por A; por tanto, $2 = b$.

El lado AC está en la recta de ecuación $y = x + 2$.

Supongamos que C es el vértice correspondiente a la altura $x - 3y - 2 = 0$, luego la ecuación de la recta del lado AB es de la forma: $3x + y + C = 0$. Como pasa por A, se cumple esta igualdad: $0 + 2 + C = 0 \Rightarrow C = -2$

El lado AB está en la recta de ecuación $3x + y - 2 = 0$.

El vértice C es el punto de intersección de las rectas AC y de la altura que pasa por C:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ x - 3y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-4, -2)$$

El vértice B es el punto de intersección de las rectas AB y de la altura que pasa por B:

$$\begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow B(1, -1)$$

Evaluación (página 175)

1. Halla el módulo y el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:

a) **$\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 3)$**

b) **$\vec{u} = (2, 4)$ y $\vec{v} = (-4, 2)$**

a) $\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{-2+3}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{50}} \Rightarrow \alpha = 81°\ 52'\ 11{,}63''$

b) $\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{-8+8}{\sqrt{20}\sqrt{20}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

2. Verifica que $\{\vec{u} = (1, 3), \vec{v} = (-1, 2)\}$ es una base y halla las coordenadas del vector $\vec{w} = (3, 5)$ con respecto a esa base.

Como $\dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{3}{2}$, entonces tienen direcciones distintas y, por tanto, forman una base del plano.

Se quiere hallar a y b para que se verifique la igualdad $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$. Sustituyendo los datos del enunciado, resolviendo las operaciones e igualando, se llega al siguiente sistema: $\begin{cases} a - b = 3 \\ 3a + 2b = 5 \end{cases}$

La solución es: $a = \dfrac{11}{5}$ y $b = \dfrac{-4}{5}$

3. Determina el vector $\overrightarrow{AB}$ siendo $A(-2, 0)$ y $B(-4, 2)$. Además:

a) **Halla un vector para que formen una base del plano.**

b) **Busca otro vector para que la base sea ortogonal.**

Se halla el vector formado por los puntos A y B:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-4, 2) - (-2, 0) = (-2, 2)$$

a) Para hallar una base formada por el vector $\overrightarrow{AB}$, hay que buscar un vector linealmente independiente.
Por ejemplo, el vector $\vec{u} = (3, 1)$.

b) Se tiene que buscar otro vector para que la base sea ortogonal.
Por ejemplo, se toma el vector $\vec{v} = (1, 1)$.

4. Dada la base de vectores $\{\vec{u} = (2, 3), \vec{v} = (-3, 2)\}$

a) **Comprueba que la base es ortogonal.**

b) **Reescribe la base para que sea una base ortonormal del plano.**

a) Como $\dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{3}{2}$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = 0$, ambos vectores forman una base ortogonal del plano.

b) Para reescribir la base a una ortonormal, hay que normalizar los vectores.

$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \Rightarrow \vec{x} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}}\right) \quad |\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13} \Rightarrow \vec{y} = \left(\dfrac{-3}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$

5. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por $A(-1, 3)$ y tiene a $\vec{v} = (2, 1)$ como vector director. Calcula, además, la recta perpendicular que pase por ese punto.

En la siguiente tabla se recogen las ecuaciones:

VECTORIAL	$(x, y) = (-1, 3) + \lambda(2, 1)\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$	GENERAL	$x - 2y + 7 = 0$
PARAMÉTRICAS	$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases} \forall\lambda \in \mathbb{R}$	EXPLÍCITA	$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$
CONTINUA	$\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{1}$	PUNTO-PENDIENTE	$y - 3 = \dfrac{1}{2}(x + 1)$

La recta perpendicular pedida es: $(x + 1, y - 3) \cdot (2, 1) = 0 \Rightarrow 2x + y + 2 - 3 = 0 \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$

6. Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, 3)$ y $B(0, 1)$.

Partimos de la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos, hallando la ecuación continua de la recta. Después se despeja para obtener la ecuación general:

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-3}{1-3} \Rightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{-2} \Rightarrow 2x - y + 1 = 0$$

7. **Dada la recta $r: x + 3y - 5 = 0$ y el punto $A(-2, -2)$, calcula:**

a) **La ecuación de la recta paralela a r que pasa por A.**

b) **La ecuación de la recta normal a r que pasa por A.**

a) Una ecuación de la recta que sea paralela podría tener los mismos coeficientes de la recta r:

$$s: x + 3y + C = 0$$

Se impone que la recta s tiene que pasar por el punto $A(-2, -2)$ y obtenemos el valor de C:

$$(-2) + 3 \cdot (-2) + C = 0 \Rightarrow C = 8 \Rightarrow s: x + 3y + 8 = 0$$

b) La recta perpendicular o normal de la recta verifica la ecuación:

$$(-3, 1) \cdot (x + 2, y + 2) = -3x - 6 + y + 2 = 0 \Rightarrow -3x + y - 4 = 0$$

8. **Calcula el área del triángulo cuyos vértices son: $A(1, 3)$, $B(5, 6)$ y $C(0, 3)$**

El área del triángulo corresponde a la fórmula: $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

La base es la distancia entre dos vértices, esto es: $b = d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 9} = 5$

Se halla la ecuación general de la recta que pasa por A y B: $\overrightarrow{AB} = (4, 3) \Rightarrow 3x - 4y + C = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1 - 4 \cdot 3 + C = 0 \Rightarrow C = 9$

Luego, la recta tiene ecuación s: $3x - 4y + 9 = 0$

La altura es la distancia entre el punto C y la recta s, es decir: $h = \dfrac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 3 + 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{3}{5}$

Entonces, el área es: $A = \dfrac{5 \cdot \frac{3}{5}}{2} = 1{,}5 \text{ u}^2$

9. **Halla el circuncentro del triángulo con vértices: $A(1, -3)$, $B(1, 1)$ y $C(3, -1)$**

Se calculan las mediatrices de los lados del triángulo.

$$\overrightarrow{AB} = (0, 4) \text{ y } M_1(1, -1) \Rightarrow m_1: y = -1$$

$$\overrightarrow{BC} = (2, -2) \text{ y } M_2(2, 0) \Rightarrow m_2: x - y - 2 = 0$$

Para hallar el circuncentro, se resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x - y = 2 \\ \quad\; y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

El circuncentro es el punto $C(1, -1)$.

10. **Calcula el punto simétrico de $P(3, 5)$ con respecto a la recta $r: x - 4y = 0$.**

Se calcula la recta perpendicular a r que pasa por el punto P.

$$(x - 3, y - 5) \cdot (4, 1) = 0 \Rightarrow 4x - 12 + y - 5 = 0 \Rightarrow 4x + y - 17 = 0$$

Se halla el punto de intersección de ambas rectas: $\begin{cases} x - 4y = 0 \\ 4x + y = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

Dicho punto es el punto medio del punto P y su simétrico.

Así pues: $(4, 1) = \left(\dfrac{a + 3}{2}, \dfrac{b + 5}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \end{cases}$

11. **Dados los puntos $A(1, 4)$, $B(2, 1)$ y $C(6, 1)$. Halla:**

a) **El vértice D para que $ABCD$ forme un paralelogramo.**

b) **El área de dicho cuadrilátero.**

a) El vector $\overrightarrow{AB}$ y el vector $\overrightarrow{DC}$ son vectores equipolentes. Por consiguiente:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (1, -3) = (6 - x, 1 - y) \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

b) La base del paralelogramo es la distancia entre el punto A y el punto B.

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \text{ u}$$

La altura es la distancia entre dos rectas paralelas, que se calcula como la distancia del punto C a la recta que pasa por A y B, cuya ecuación es r: $3x + y - 7 = 0$.

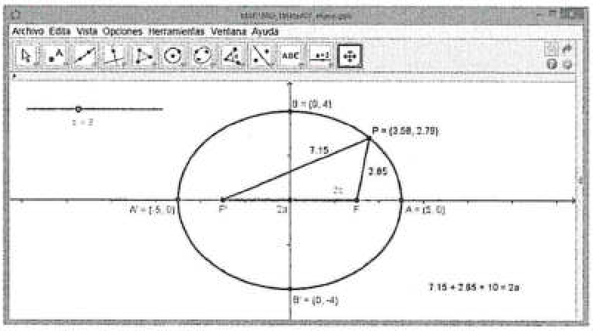
$$h = d(D, r) = \frac{|3 \cdot 6 + 1 - 7|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{10}}$$

Finalmente, el área es: $A = b \cdot h = \sqrt{10} \cdot \dfrac{12}{\sqrt{10}} = 12 \text{ u}^2$

Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Elipse (página 183)

En el archivo de GeoGebra aparece representada una elipse. Moviendo el punto P se puede comprobar la propiedad de la elipse como el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias es constante. El deslizador de color verde permite modificar la longitud del eje focal para ver otras elipses y comprobar la misma propiedad con ellas.



Hipérbola (página 187)

En el archivo de GeoGebra aparece representada una hipérbola. Moviendo el punto P se puede comprobar la propiedad de la hipérbola como el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias es constante. El deslizador de color verde permite modificar la longitud del eje focal para ver otras hipérbolas y comprobar la misma propiedad con ellas.

Parábola (página 193)

En el archivo de GeoGebra aparece representada una parábola. Moviendo el punto P se puede comprobar la propiedad de la parábola como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta y de un punto. El deslizador de color verde permite modificar el parámetro p para ver otras parábolas y comprobar la misma propiedad con ellas.

Actividades (páginas 179/194)

1 **Halla la mediatriz del segmento cuyos extremos son los puntos $A(1, -1)$ y $B(-3, 4)$.**

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2}$$

$$\Rightarrow -8x + 10y - 23 = 0$$

2 **Calcula la bisectriz del ángulo formado por las rectas r: $3x - 4y + 10 = 0$ y s: $5x + 12y - 2 = 0$.**

$$\frac{3x - 4y + 10}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \pm\frac{5x + 12y - 2}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

$$\Rightarrow 13(3x - 4y + 10) = \pm 5(5x + 12y - 2)$$

Las ecuaciones de las bisectrices son:

$$x - 8y + 10 = 0 \text{ y } 8x + y + 15 = 0$$

3 **Determina el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al origen es el triple que la distancia a la recta $6x - y + 4 = 0$.**

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \pm 3 \cdot \frac{6x - y + 4}{\sqrt{6^2 + (-1)^2}}$$

$$\Rightarrow 287x^2 - 28y^2 + 432x - 72y - 108xy + 144 = 0$$

4 **Dada la recta de ecuación r: $7x + 2y - 4 = 0$ y el punto $P(-3, 2)$, determina las coordenadas de un punto Q sabiendo que la recta r es la mediatriz del segmento PQ.**

El segmento PQ, debe ser perpendicular a la recta r, por tanto $PQ = k(7, 2)$. Además, $d(P, r) = d(Q, r)$.

Sean (a, b) las coordenadas del punto Q, $Q(a, b)$:

$$(a + 3, b - 2) = k(7, 2) \Rightarrow \begin{cases} a = 7k - 3 \\ b = 2k + 2 \end{cases}$$

$$d(P, r) = \frac{|7\cdot(-3) + 2\cdot 2 - 4|}{\sqrt{7^2 + (-2)^2}} = \frac{21}{\sqrt{53}}$$

$$d(Q, r) = \frac{|7\cdot a + 2\cdot b - 4|}{\sqrt{7^2 + (-2)^2}} = \frac{7a + 2b - 4}{\sqrt{53}}$$

Así, $7a + 2b - 4 = 21$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} a = 7k - 3 \\ b = 2k + 2 \\ 7a + 2b = 25 \end{cases}$$

Se obtiene: $k = \frac{42}{53}$; $a = \frac{135}{53}$ y $b = \frac{190}{53}$

Las coordenadas de Q son: $Q\left(\frac{135}{53}, \frac{190}{53}\right)$

5 **Sabiendo que el punto de intersección de dos rectas r y s es $P(9, -2)$ y una de sus bisectrices es la recta de ecuación $2x + 5y - 8 = 0$, halla la ecuación de la otra bisectriz.**

La otra bisectriz será perpendicular a la conocida, por tanto su ecuación será de la forma $5x - 2y + C = 0$, sustituyendo el punto $P(9, -2)$, tenemos:

$5 \cdot 9 - 2 \cdot (-2) + C = 0 \rightarrow C = -49$, la ecuación pedida es $5x - 2y - 49 = 0$.

6 **Determina la ecuación que cumplen los puntos del plano cuya distancia a $P(-3, 5)$ es 4.**

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-5)^2} = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 16$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$$

7 **Calcula la ecuación de una circunferencia de centro $C(-1, 5)$ y radio 7.**

$$(x+1)^2 + (y-5)^2 = 49 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 10y - 23 = 0$$

8 **Calcula las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$**

$$m = -2a \Rightarrow -4 = -2a \Rightarrow a = 2$$

$$n = -2b \Rightarrow 8 = -2b \Rightarrow b = -4$$

$$p = a^2 + b^2 - R^2 \Rightarrow -16 = 4 + 16 - R^2 \Rightarrow R = 6$$

Así, $C(2, -4)$ y $R = 6$.

9 **Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x + 6y - 47 = 0$, calcula la ecuación de otra concéntrica con respecto a ella que:**

a) **Tenga radio 2.** ***b)*** **Pase por el punto $(5, -7)$.**

a) $m = -2a \Rightarrow -10 = -2a \Rightarrow a = 5$

$n = -2b \Rightarrow 6 = -2b \Rightarrow b = -3$

$p = a^2 + b^2 - R^2 \Rightarrow p = 25 + 9 - 4 = 30 \Rightarrow R = 6$

La ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 30 = 0$$

b) La ecuación será de la forma: $x^2 + y^2 - 10x + 6y + p = 0$, imponemos que la circunferencia pase por el punto $(5, -7)$ y tenemos: $25 + 49 - 50 - 42 + p = 0 \Rightarrow p = 18$

La ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 18 = 0$$

10 **Calcula las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia de ecuación $4x^2 + 4y^2 - 10x + 5y - 1 = 0$.**

En primer lugar se debe dividir toda la ecuación entre 4:

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}y - \frac{1}{4} = 0$$

$$m = -2a \Rightarrow -\frac{5}{2} = -2a \Rightarrow a = \frac{5}{4}$$

$$n = -2b \Rightarrow \frac{5}{4} = -2b \Rightarrow b = -\frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(-\frac{5}{8}\right)^2 - R^2 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{141}}{8}$$

Por tanto: $C\left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{8}\right)$ y $R = \frac{\sqrt{141}}{8}$

11 **Calcula la ecuación de una circunferencia cuyo centro esté sobre el eje de abscisas, y la de una circunferencia que tenga su centro sobre el eje de ordenadas.**

Si la circunferencia tiene su centro sobre el eje de abscisas las coordenadas de este serán de la forma $C(a, 0)$ y su ecuación:

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - R^2 = 0$$

Si la circunferencia tiene su centro sobre el eje de ordenadas las coordenadas de dicho centro serán de la forma $C(0, b)$ y su ecuación:

$$x^2 + y^2 - 2by + b^2 - R^2 = 0$$

12 **Calcula la ecuación de una elipse centrada en el origen, de semieje mayor 10 y distancia focal 12.**

Sabemos que en una elipse se cumple:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 100 = b^2 + 36 \Rightarrow b = 8$$

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

13 **Calcula la ecuación de una elipse de excentricidad 0,4 y semidistancia focal 2.**

Dado que $e = \frac{c}{a} \Rightarrow 0{,}4 = \frac{2}{a} \Rightarrow a = 5$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 21$

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$$

14 **Calcula la excentricidad de cada una de las elipses cuyas ecuaciones son las siguientes:**

a) $\frac{x^2}{80} + \frac{y^2}{20} = 1$

b) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$

a) Como $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 80 = 20 + c^2 \Rightarrow c^2 = 60$

$$e = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Como $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 18 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 9$

$$e = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Esta elipse tiene el eje mayor vertical, como $a^2 = b^2 + c^2$ $\Rightarrow 49 = 25 + c^2 \Rightarrow c^2 = 24$

$$e = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

15 **Calcula el eje mayor, el eje menor, las coordenadas de los vértices y de los focos y la excentricidad de la elipse de ecuación:**

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Teniendo en cuenta que $a^2 = b^2 + c^2$ y que $e = \frac{c}{a}$ entonces: $25 = 16 + c^2 \Rightarrow c = 3$

Obtenemos:

Eje mayor $= 10$, eje menor $= 8$, $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$, $B(0, 4)$, $B'(0, -4)$, $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$, $e = 0{,}6$.

16 **Calcula la ecuación de una hipérbola centrada en el origen cuyo eje real es 20 cm y cuya distancia focal es 32 cm.**

Como $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16^2 = 10^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 156$

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{156} = 1$$

17 **Determina la ecuación de una hipérbola de excentricidad 1,4 y semidistancia focal 7.**

Dado que $e = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 5$; $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 49 = 25 + b^2$ $\Rightarrow b^2 = 24$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$$

18 **Calcula la excentricidad de la hipérbola cuya ecuación es la siguiente:**

$$\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 80 + 20 = 100 \Rightarrow c = 10$

$$e = \frac{10}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

19 **Calcula el eje real, el eje imaginario, las coordenadas de los vértices y de los focos, y la excentricidad de la hipérbola de ecuación:**

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Dado que $c^2 = a^2 + b^2$ y que $e = \frac{c}{a}$, tenemos:

Eje real $= 2a = 10$, eje imaginario $= 2b = 8$, $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$, $F\left(\sqrt{41}, 0\right)$ y $F'\left(-\sqrt{41}, 0\right)$, $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$

20 **Calcula las asíntotas de la hipérbola de ecuación:**

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{49} = 1$$

Las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola son:

$y = \pm \frac{b}{a}x$, en nuestro caso $b = 7$ y $a = 6$, por tanto:

$$y = \frac{7}{6}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{7}{6}x$$

21 **Dada la hipérbola cuyo semieje real es 10 y cuya distancia focal es $20\sqrt{2}$, ¿puedes decir si es o no equilátera?**

Todas las hipérbolas equiláteras tienen $e = \sqrt{2}$, determinaremos la excentricidad de la que dice el enunciado:

$$e = \frac{10\sqrt{2}}{10} = \sqrt{2}$$

Podemos afirmar que esta hipérbola es equilátera.

22 **Calcula el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de la recta $x = -3$ y del punto $P(5, 0)$.**

$$|x + 3| = \sqrt{(x - 5)^2 + y^2} \Rightarrow y^2 = 16x - 16$$

23 **Calcula la ecuación de una parábola de foco $F(3, -1)$ y directriz el eje de abscisas. Observa que esta parábola tiene el eje paralelo al eje de ordenadas, es decir, es una parábola vertical.**

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2} = y \Rightarrow y = \frac{-x^2+6x-10}{2}$$

24 **Calcula el parámetro p de una parábola de ecuación $y^2 = 2px$ con foco en el punto $(1, 0)$.**

$p = 2$

Ejercicios y problemas (páginas 197/198)

Lugares geométricos

1 **Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de $A(-1, 3)$ y $B(7, -1)$.**

Es una mediatriz de ecuación: $2x - y - 5 = 0$

2 **Calcula la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al eje de abscisas sea el doble que su distancia al punto $(1, 1)$.**

$y = 2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \Rightarrow 4x^2+3y^2-8x-8y+8=0$

3 **Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a la recta $y = -3$ sea el cuadrado de la distancia a la recta $x + y + 1 = 0$.**

$$\begin{cases} y+3 = \left(\dfrac{x+y+1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow x^2+y^2+2xy+2x-5=0 \\ -y-3 = \left(\dfrac{x+y+1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow x^2+y^2+2xy+2x+4y+7=0 \end{cases}$$

4 **Calcula el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas $3x + 4y - 2 = 0$ y $6x - 8y + 13 = 0$.**

Son las bisectrices de ecuaciones:

$16y - 17 = 0,\ 4x + 3 = 0$

5 **Determina el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los ejes de coordenadas es igual a 6.**

$|x| + |y| = 6$

Circunferencia

6 **Calcula la ecuación de una circunferencia:**

a) **De centro el punto $C(1, 0)$ y radio 3.**

b) **De centro el punto $C(-1, -2)$ y radio 5.**

c) **De centro el punto $C(4, -4)$ y radio 4.**

d) **De centro el punto $C(0, 0)$ y radio 2.**

a) $x^2+y^2-2x-8=0$ ***c)*** $x^2+y^2-8x+8y+16=0$

b) $x^2+y^2+2x+4y-20=0$ ***d)*** $x^2+y^2-4=0$

7 **Halla las coordenadas del centro y el radio de las siguientes circunferencias.**

a) $x^2+y^2-18x-9=0$

b) $x^2+y^2+6x+4y+10=0$

c) $x^2+y^2-4x+10y+33=0$

d) $4x^2+4y^2-8x+4y-14=0$

a) $C(9, 0)$ y $r = 3\sqrt{10}$

b) $C(-3, -2)$ y $r = \sqrt{3}$

c) Esta ecuación no corresponde a una circunferencia, ya que no hay ningún punto que cumpla sus condiciones.

d) $C\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$ y $r = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$

8 **Dada la circunferencia $x^2+y^2-4x+10y-50=0$, halla:**

a) **La ecuación de otra circunferencia concéntrica a ella de radio 8.**

b) **La ecuación de otra circunferencia concéntrica a ella que pase por el punto $(2, 2)$.**

a) $x^2+y^2-4x+10y-35=0$

b) $x^2+y^2-4x+10y-20=0$

9 **Calcula la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(0, -1)$, $B(1, 2)$ y $C(-3, 2)$.**

Se deberá resolver el sistema:

$$\begin{cases} 1 - n + p = 0 \\ 1+4+\ m + 2n + p = 0 \\ 9+4-3m+2n+p=0 \end{cases}$$

Se obtiene: $m = 2, n = -2, p = -3$

La ecuación de la circunferencia buscada es:

$$x^2+y^2+2x-2y-3=0$$

10 **Determina la ecuación de una circunferencia de centro $C(2, -1)$ y que es tangente a la recta $3x - 4y + 10 = 0$.**

El radio de la circunferencia será la distancia desde el centro hasta la recta tangente:

$$r = \frac{|3\cdot 2 - 4\cdot(-1)+10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 4$$

En consecuencia, la ecuación de la circunferencia será:

$(x-2)^2+(y+1)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2+y^2-4x+2y-11=0$

11 **Sean la circunferencia $x^2+y^2=25$ y una recta secante, $7x + y - 25 = 0$. Calcula la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por la circunferencia y la recta.**

En primer lugar, se deberán calcular los puntos de intersección de la circunferencia y la recta secante, resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 7x+y-25=0 \end{cases}$$

Se obtienen los puntos $(4, -3)$ y $(3, 4)$. La ecuación es:

$$\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$$

Elevando al cuadrado, y agrupando, nos queda:

$$x - 7y = 0$$

12 **Halla la ecuación de una circunferencia que pasa por el origen de coordenadas, tiene radio 4 y su centro está situado en la bisectriz del segundo cuadrante.**

Si el centro se encuentra en la bisectriz del segundo cuadrante, las coordenadas de este serán de la forma $(-a, a)$; como pasa por el origen de coordenadas:

$$(-a)^2+a^2=16 \Rightarrow 2a^2=16 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

Las coordenadas del centro serán $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

La ecuación de la circunferencia es:

$$x^2+y^2+4\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y=0$$

13 **Calcula la ecuación de una circunferencia que pasa por el origen de coordenadas, tiene su centro en la bisectriz del primer cuadrante y cuyo diámetro es $4\sqrt{2}$.**

Las tres condiciones nos permiten escribir:

- *pasa por el origen* $\Rightarrow p = 0$
- *centro en la bisectriz* $\Rightarrow a = b$
- *radio* $= 2\sqrt{2} \Rightarrow a^2+b^2-(2\sqrt{2})^2 = 0 \Rightarrow a = b = \pm 2$

Como el centro está en el primer cuadrante, sus coordenadas son $(2, 2)$, y la ecuación de la circunferencia:

$$x^2+y^2-4x-4y=0$$

14 **Halla la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(2, 1)$ y $B(3, -3)$ y tiene su centro sobre la recta de ecuación $x + y - 5 = 0$.**

Se deberá resolver el sistema:

$$\begin{cases}(2-a)^2+(1-b)^2=r^2\\(3-a)^2+(-3-b)^2=r^2\\a+b=5\end{cases}$$

Se obtiene:

$$a=\frac{53}{10} \qquad b=\frac{-3}{10}$$

$$r^2=\frac{1\,258}{100}$$

Para la circunferencia, se obtiene:

$$10x^2+10y^2-106x+6y+156=0$$

15 **Calcula la longitud de la cuerda común a las circunferencias c_1: $x^2 + y^2 = 10$ y c_2: $x^2 + y^2 - 10x = 0$.**

Los puntos de corte de las dos circunferencias se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{cases}x^2+y^2=10\\x^2+y^2-10x=0\end{cases}$$

Se obtiene $(1, 3)$ y $(1, -3)$.

La longitud de la cuerda es: $\sqrt{(1-1)^2+[3-(-3)]^2}=6$

16 **Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $A(-4, 5)$ y $A'(10, 9)$. Calcula la ecuación de esa circunferencia.**

El centro de la circunferencia es el punto $C(3, 7)$, y el radio, la distancia de este a uno cualquiera de los extremos del diámetro:

$$r=\sqrt{(3+4)^2+(7-5)^2}=\sqrt{49+4}=\sqrt{53}$$

$$(x-3)^2+(y-7)^2=53 \Rightarrow x^2+y^2-6x-14y+5=0$$

17 **Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, determina las ecuaciones de las rectas tangentes a esta que pasan por:**

a) **El punto $P(3, -4)$.**

b) **El punto $Q(0, 6)$.**

a) El sistema $\begin{cases}x^2+y^2=25\\y+4=m(x-3)\end{cases}$ deberá tener una solución.

$$x^2+[m(x-3)-4]^2=25$$
$$\Rightarrow x^2(1+m^2)+(-6m^2-8m)x+9m^2+24m-9=0$$

Imponemos que el discriminante de la ecuación de segundo grado anterior sea 0.

$$64m^2-96m+36=0 \Rightarrow m=\frac{3}{4}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y+4=\frac{3}{4}(x-3) \Rightarrow 3x-4y-25=0$$

b) El punto Q no pertenece a la circunferencia.

El sistema $\begin{cases}x^2+y^2=25\\y-6=mx\end{cases}$ deberá tener una única solución.

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera:

$$(m^2+1)x^2+12mx+11=0 \Rightarrow m=\pm\frac{\sqrt{11}}{5}$$

Las dos rectas tangentes son:

$$y-6=\frac{\sqrt{11}}{5}x$$

$$y-6=-\frac{\sqrt{11}}{5}x$$

18 **Halla la ecuación de una circunferencia de centro $C(2, 3)$ tangente a la recta $4x - 3y + 6 = 0$.**

La distancia entre el centro de la circunferencia y la recta será el radio de aquella:

$$r=\frac{|4\cdot 2-3\cdot 3+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=1$$

La ecuación de la circunferencia pedida es:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=1 \Rightarrow x^2+y^2-4x-6y+12=0$$

19 **Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$, calcula la ecuación de la recta tangente a ella paralela a $2x - y + 3 = 0$.**

Si la recta ha de ser paralela a $2x - y + 3 = 0$, deberá tener una ecuación de la forma:

$$2x-y+C=0$$

Además, esta recta deberá distar del centro de la circunferencia una longitud igual al radio:

$$4=\frac{|2\cdot 0-0+C|}{\sqrt{5}} \Rightarrow C=\pm 4\sqrt{5}$$

Existen dos rectas tangentes a la circunferencia:

$$r_1\text{: } 2x-y+4\sqrt{5}=0 \quad \text{y} \quad r_2\text{: } 2x-y-4\sqrt{5}=0$$

20 **Halla las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ que sean:**

a) **Paralelas a la recta $3x - 4y + 10 = 0$.**

b) **Perpendiculares a la recta $3x - 4y + 10 = 0$.**

a) La circunferencia tiene de centro el punto $C(2, -3)$, y de radio, 1.

La nueva recta debe ser paralela a $3x - 4y + 10 = 0$, y deberá distar 1 del centro.

$$1=\pm\frac{3\cdot 2-4\cdot(-3)+C}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} \Rightarrow \pm 5=6+12+C$$
$$\Rightarrow C=-13 \text{ y } C=-23$$

Existen dos rectas paralelas a $3x - 4y + 10 = 0$ tangentes a la circunferencia:

$$3x-4y-13=0 \text{ y } 3x-4y-23=0$$

b) La nueva recta debe ser perpendicular a $3x - 4y + 10 = 0$, y debe distar del centro una unidad; es por tanto de la forma: $4x + 3y + C = 0$

$$1=\pm\frac{4\cdot 2+3\cdot(-3)+C}{\sqrt{3^2+4^2}} \Rightarrow \pm 5=8-9+C$$
$$\Rightarrow C=6 \text{ y } C=-4$$

Existen dos rectas perpendiculares a $3x - 4y + 10 = 0$ y tangentes a la circunferencia:

$$4x+3y+6=0 \text{ y } 4x+3y-4=0$$

Elipse

21 **Calcula las ecuaciones de las elipses de las que se conoce:**

a) **$b = 4$ y $c = 3$**

b) **$c = 9$ y $e = 0{,}2$**

c) **$2c = 10$ y $a = 10$**

d) **$b = 5$ y pasa por $P(-2, 4)$.**

a) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

b) $\dfrac{x^2}{2\,025}+\dfrac{y^2}{1\,944}=1$

c) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{75}=1$

d) $\dfrac{9x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$

22 **Determina los ejes, focos, vértices y excentricidad de las elipses:**

a) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$ ***b)*** $3x^2+6y^2=12$

a) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$

$a=\sqrt{6}, b=\sqrt{2}$

Los vértices son:

$A(\sqrt{6},0),\ A'(-\sqrt{6},0),\ B(0,\sqrt{2}),\ B'(0,-\sqrt{2})$

$c^2=a^2-b^2=6-2=4, c=2$

Los focos son: $F(2,0)$ y $F'(-2,0)$

El eje mayor es: $2a=2\sqrt{6}$

El eje menor es: $2b=2\sqrt{2}$

La excentricidad es: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

b) $3x^2+6y^2=12$

La elipse deberá escribirse de la forma siguiente:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \Rightarrow a=2 \text{ y } b=\sqrt{2}$$

Los vértices son:

$A(2,0),\ A'(-2,0),\ B(0,\sqrt{2}),\ B'(0,-\sqrt{2})$

$c^2=a^2-b^2=4-2=2 \Rightarrow c=\sqrt{2}$

Los focos son: $F(\sqrt{2},0)$ y $F'(-\sqrt{2},0)$

El eje mayor es: $2a=4$

El eje menor es: $2b=2\sqrt{2}$

La excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

23 **Calcula la ecuación de una elipse centrada en el origen que pasa por los puntos $A(1,-1)$ y $B(0,-4)$.**

Imponemos que la elipse pase por estos puntos: $A(1,-1)$ y $B(0,-4)$.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\\[2mm] \dfrac{16}{b^2}=1\end{cases} \Rightarrow b=4, a^2=\frac{16}{15}$$

Por consiguiente, la ecuación de la elipse será:

$$\frac{15x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=1$$

24 **Comprueba si el punto $P(\sqrt{5}, 2\sqrt{2})$ pertenece a la elipse $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{10}=1$.**

El punto pertenece a la elipse, ya que sustituyendo el punto en la ecuación, cumple la igualdad:

$$\frac{(\sqrt{5})^2}{25}+\frac{(2\sqrt{2})^2}{10}=1$$

25 **Dada la elipse $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{10}=1$, calcula las coordenadas de un punto de dicha elipse cuya ordenada es el triple que la abscisa.**

Imponiendo $y=3x$, se obtiene:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{9x^2}{10}=1 \Rightarrow 2x^2+45x^2=50 \Rightarrow x=\pm 5\sqrt{\frac{2}{47}}$$

Los puntos que cumplen la condición pedida son:

$$P_1\left(5\sqrt{\frac{2}{47}}, 15\sqrt{\frac{2}{47}}\right) \text{ y } P_2\left(-5\sqrt{\frac{2}{47}}, -15\sqrt{\frac{2}{47}}\right)$$

26 **Calcula la ecuación de una elipse cuyos focos son $F(2, 5)$ y $F'(2, -4)$, sabiendo, además, que $a = 15$.**

$\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}=30$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}=30-\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}$

Elevando al cuadrado se obtiene:

$(x-2)^2+(y-5)^2=900+(x-2)^2+(y-4)^2-$
$-60\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}$

$\Rightarrow -18y-891=-60\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}$

Elevando de nuevo al cuadrado y agrupando:

$400x^2+364y^2-1\,600x-364y-80\,209=0$

27 **Determina las ecuaciones de las tangentes a la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{5}=1$ en el punto $P(0, 6)$.**

El punto no pertenece a la elipse.

El sistema $\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{5}=1\\ y-6=mx\end{cases}$ deberá tener una única solución.

$$\frac{x^2}{16}+\frac{(6+mx)^2}{5}=1 \Rightarrow m=\pm\frac{\sqrt{31}}{4}$$

Las ecuaciones de las rectas tangentes son:

$$y=6+\frac{\sqrt{31}}{4}x,\quad y=6-\frac{\sqrt{31}}{4}x$$

28 **Calcula la ecuación de las rectas tangente y normal a la elipse $4x^2+y^2=20$ en el punto de abscisa 1 y ordenada negativa.**

Se calcula, en primer lugar, la recta tangente. El punto de tangencia cuya abscisa vale 1 es: $4\cdot 1+y^2=20 \Rightarrow y=\pm 4$.

Al imponerse que la ordenada sea negativa, tenemos para el punto de tangencia las coordenadas $(1,-4)$.

El sistema $\begin{cases}4x^2+y^2=20\\ y+4=m(x-1)\end{cases} \Rightarrow 4x^2+[m(x-1)-4]^2=20$

$\Rightarrow x^2[4+m^2]+x(-2m^2-8m)+m^2+8m-4=0$

Imponemos que el discriminante se anule:

$$m^2-2m+1=0 \Rightarrow m=1$$

La ecuación de la recta tangente es de la forma:

$$(y+4)=1\,(x-1) \Rightarrow x-y-5=0$$

La ecuación de la recta normal tiene la forma: $x+y+C=0$. Como sabemos que pasa por $(1,-4)$, se tiene que:

$$1-4+C=0 \Rightarrow C=3$$

La ecuación de la recta normal es la siguiente:

$$x+y+3=0$$

29 **Calcula la ecuación de la recta tangente a la elipse, cuya ecuación es $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$, por el punto $P(6, 0)$.**

El punto $P(6,0)$ no pertenece a la elipse.

La recta tangente a la elipse por el punto $P(6,0)$ será de la forma: $y=m(x-6)$, y únicamente deberá tener con esta un punto en común. Planteamos el sistema:

$\begin{cases}\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1\\ y=m(x-6)\end{cases}$ sustituyendo: $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{[m(x-6)]^2}{9}=1$

se obtiene: $x^2(1+2m^2)-24m^2x+72m^2-18=0$

Para que el discriminante sea 0, $m=\pm 1/\sqrt{2}$.

Las dos rectas tangentes son:

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-6),\quad y=-\frac{1}{\sqrt{2}}(x-6)$$

Hipérbola

30 **Halla los ejes, focos, vértices y excentricidad de las siguientes hipérbolas:**

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

b) $x^2 - 3y^2 = 18$

c) $x^2 - y^2 = 25$

a) *Ejes:* $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 2a = 10$
$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 2b = 6$

Focos: $c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 9 = 34 \Rightarrow c = \sqrt{34}$
$\Rightarrow F(\sqrt{34}, 0)$ y $F'(-\sqrt{34}, 0)$

Vértices: $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$

Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{34}}{5}$

b) *Ejes:* $a^2 = 18 \Rightarrow a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \Rightarrow 2a = 6\sqrt{2}$
$b^2 = 6 \Rightarrow b = \sqrt{6} \Rightarrow 2b = 2\sqrt{6}$

Focos: $c^2 = a^2 + b^2 = 18 + 6 = 24 \Rightarrow c = \sqrt{24}$
$\Rightarrow F(\sqrt{24}, 0)$ y $F'(-\sqrt{24}, 0)$

Vértices: $A(3\sqrt{2}, 0)$, $A'(-3\sqrt{2}, 0)$

Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{24}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

c) *Ejes:* $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 2a = 10$
$b^2 = 25 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow 2b = 10$

Focos: $c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 25 = 50$
$\Rightarrow c = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Rightarrow F(5\sqrt{2}, 0)$ y $F'(-5\sqrt{2}, 0)$.

Vértices: $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$

Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{50}}{5} = \sqrt{2}$

La excentricidad es $\sqrt{2}$, ya que la hipérbola es equilátera.

31 **La hipérbola $\frac{x^2}{25} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ pasa por $(3\sqrt{5}, -2)$. Halla su ecuación.**

Sustituimos el punto $(3\sqrt{5}, -2)$ en la ecuación de la hipérbola para obtener el valor de *b:*

$$\frac{(3\sqrt{5})^2}{25} - \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow 20b^2 = 100 \Rightarrow b^2 = 5$$

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{5} = 1$$

32 **Halla la ecuación de una hipérbola equilátera cuya distancia focal dé $8\sqrt{2}$. Calcula sus ejes, focos, vértices y excentricidad.**

$a^2 + b^2 = 32 \Rightarrow$ dado que $a = b \Rightarrow 2a^2 = 32 \Rightarrow a^2 = 16$

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Ejes: $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow 2a = 8$
$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 2b = 8$

Focos: $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 16 = 32 \Rightarrow c = 4\sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow F(4\sqrt{2}, 0)$ y $F'(-4\sqrt{2}, 0)$

Vértices: $A(4, 0)$ y $A'(-4, 0)$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$

33 **Determina el ángulo que forman las asíntotas de la hipérbola de ecuación $11x^2 - 7y^2 = 77$.**

$a^2 = 7 \Rightarrow a = \sqrt{7}$ $\qquad b^2 = 11 \Rightarrow b = \sqrt{11}$

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = \sqrt{\frac{11}{7}}x \qquad y = -\sqrt{\frac{11}{7}}x$$

El vector director de la primera asíntota es $\left(1, \sqrt{\frac{11}{7}}\right)$ y el de la segunda, $\left(1, -\sqrt{\frac{11}{7}}\right)$.

El ángulo que forman las rectas es:

$$\cos\alpha = \frac{|1 - 11/7|}{\sqrt{1 + 11/7} \cdot \sqrt{1 + 11/7}} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \alpha = \text{arc cos}\left(\frac{2}{9}\right) = 77^\circ\, 9'\, 37{,}48''$$

34 **El eje imaginario de una hipérbola mide 16 cm, y sus asíntotas son $y = \frac{4}{5}x$ e $y = -\frac{4}{5}x$. Calcula la ecuación de la hipérbola, sus ejes, focos, vértices y excentricidad.**

$\frac{b}{a} = \frac{4}{5} = \frac{8}{a} \Rightarrow a = 10$

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1$$

Ejes: $2a = 20$, $2b = 16$

Focos: $c^2 = a^2 + b^2 = 164 \Rightarrow c = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$
$\Rightarrow F(2\sqrt{41}, 0)$ y $F'(-2\sqrt{41}, 0)$

Vértices: $A(10, 0)$, $A'(-10, 0)$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{41}}{10} = \frac{\sqrt{41}}{5}$

35 **Dada la hipérbola $4x^2 - 10y^2 = 24$, calcula las coordenadas de un punto del tercer cuadrante cuya abscisa sea el doble que la ordenada. Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a dicha hipérbola que pasan por este punto.**

Las coordenadas del punto cumplirán: $P(2y, y)$

Sustituyendo en la ecuación de la hipérbola:
$16y^2 - 10y^2 = 24 \Rightarrow 6y^2 = 24 \Rightarrow y_1 = 2$, $y_2 = -2$

El punto del tercer cuadrante, siendo la abscisa el doble que la ordenada es, $P(-4, -2)$.

El sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 - 10y^2 = 24 \\ y + 2 = m(x + 4) \end{cases}$$

deberá tener solución única.

$4x^2 - 10[m(x + 4) - 2]^2 - 24 = 0$

$x^2[4 - 10m^2] + x(-80m^2 + 40m) + (-160m^2 + 160m - 64) = 0$

La ecuación deberá tener discriminante cero.

$$1\,600m^2 - 2\,560m + 1\,024 = 0 \Rightarrow m = -\frac{4}{5}$$

La ecuación de la recta tangente:

$$y + 2 = \frac{4}{5}(x + 4) \Rightarrow 4x - 5y + 6 = 0$$

La recta normal tendrá de pendiente $y' = -\frac{5}{4}$, y su ecuación es:

$$y + 2 = -\frac{5}{4}(x + 4) \Rightarrow 5x + 4y + 28 = 0$$

36 **Si la ecuación de una hipérbola es $x \cdot y = 1$, ¿cuáles son las ecuaciones de sus asíntotas? ¿Y la ecuación de su eje focal? ¿Cuánto vale el eje real? ¿Cuáles son las coordenadas de los focos? ¿Y las coordenadas de los vértices?**

Esta hipérbola es equilátera referida a sus asíntotas; por tanto, estas son: $x = 0$ e $y = 0$.

El eje focal coincide con la bisectriz del primer y tercer cuadrantes, y su ecuación es: $y = x$.

La hipérbola referida a sus asíntotas tiene como ecuación $x \cdot y = \frac{a^2}{2}$, en nuestro caso, $\frac{a^2}{2} = 1 \Rightarrow a = \sqrt{2}$, luego el eje real vale $2\sqrt{2}$.

Teniendo en cuenta que deben tener la ordenada igual que la abscisa, las coordenadas de los vértices serán:

$$2x^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow A(1, 1) \text{ y } A'(-1, -1)$$

Dado que la hipérbola es equilátera, $c = \sqrt{2}a = 2$; las coordenadas del foco serán (x, y), con $x = y$:

$$2x^2 = c^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Las coordenadas de los focos son, $F\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ y $F'\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

37 **Dada la ecuación de la hipérbola:**

$$x^2 - 6y^2 = 24$$

calcula n para que $y = 3x + n$ sea una de sus tangentes.

El sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 6y^2 = 24 \\ y = 3x + n \end{cases}$$

deberá tener solución única.

$x^2 - 6(3x + n)^2 = 24 \Rightarrow -53x^2 - 36nx - (24 + 6n^2) = 0$

El discriminante de esta ecuación deberá ser 0:

$1\,296n^2 - 212\,(24 + 6n^2) = 0 \Rightarrow n = \pm 2\sqrt{53}$

38 **Determina la ecuación de la recta tangente a la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ en el punto $P(6, 0)$.**

El punto $P(6, 0)$ no pertenece a la hipérbola.

La recta tangente a la hipérbola por $P(6, 0)$ será de la forma: $y = m(x - 6)$, y únicamente deberá tener con ésta un punto en común. Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = m(x - 6) \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{[m(x - 6)]^2}{2} = 1$$

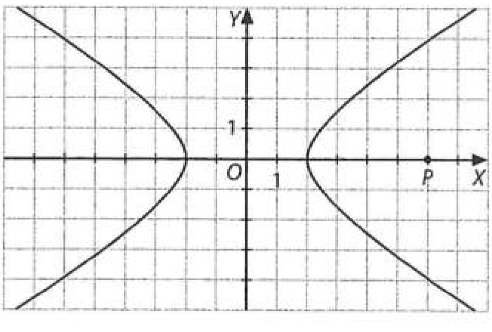
Se obtiene:

$$x^2(1 - 2m^2) + 24m^2x - 72m^2 - 4 = 0$$

Imponiendo que el discriminante sea 0, se obtiene:

$$256m^2 = -16$$

En conclusión, observamos que no es posible trazar una recta tangente a la hipérbola por el punto $P(6, 0)$.



Parábola

39 **Calcula la ecuación de las parábolas que tienen las siguientes características:**

a) **La directriz es la recta $x = -5$, y el foco, el punto $F(5, 0)$.**

b) **El vértice está en el origen de coordenadas, pasa por el punto $(5, 4)$ y su eje es el de abscisas.**

c) **El vértice está en el origen de coordenadas, pasa por el punto $(5, 4)$ y su eje es el de ordenadas.**

d) **El vértice está en el punto $V(5, 4)$ y la directriz es la recta $x = 0$.**

a) Puesto que el foco está sobre el eje de abscisas, y el origen equidista del foco y de la directriz, se trata de una parábola de la forma: $y^2 = 2px$. El parámetro es 10, y la ecuación de la parábola: $y^2 = 20x$

b) La parábola será de la forma: $y^2 = 2px$

Si pasa por $(5, 4)$, entonces: $p = 8/5$

La ecuación de la parábola es: $y^2 = 16x/5$

c) La parábola será de la forma: $x^2 = 2py$

Si pasa por $(5, 4)$, entonces: $p = 25/8$

La ecuación de la parábola es: $x^2 = 25y/4$

d) La ecuación será de la forma: $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

$\Rightarrow (y - 4)^2 = 2p(x - 5)$

Como la distancia del vértice a la directriz es $p/2 = 5$ $\Rightarrow p = 10$, obtenemos:

$$(y - 4)^2 = 20\,(x - 5)$$

40 **Halla la ecuación de una parábola cuyo foco es el punto $(1, 1)$ y su directriz, la recta $y = 2x$.**

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = \frac{|2x - y|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$\Rightarrow x^2 + 4y^2 - 10x - 10y + 4xy + 10 = 0$$

41 **Calcula la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 6x$ en el punto de coordenadas $P(6, -6)$.**

El sistema $\begin{cases} y^2 = 6x \\ y + 6 = m(x - 6) \end{cases}$ deberá tener una única solución

$$y^2 = \frac{y + 6 + 6m}{m} \cdot 6 \Rightarrow my^2 - 6y - 36(1 + m) = 0$$

Para que el discriminante sea 0, $m = -\frac{1}{2}$. Luego, la ecuación de la recta tangente es:

$$y + 6 = \frac{-1}{2}(x - 6) \Rightarrow x + 2y + 6 = 0$$

42 **Calcula la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 10x - 30$ en el punto $P(1, 0)$.**

El punto $(1, 0)$ no pertenece a la parábola.

La recta $y = m(x - 1)$ que pasa por el punto $(1, 0)$ solo deberá tener un punto en común con la parábola.

$$\begin{cases} y^2 = 10x - 30 \\ y = m(x - 1) \end{cases} \Rightarrow [m(x - 1)]^2 = 10x - 30$$

$$\Rightarrow m^2x^2 - (2m^2 + 10)x + (m^2 + 30) = 0$$

El discriminante deberá ser cero:

$$-80m^2 + 100 = 0 \Rightarrow m = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Las ecuaciones de las tangentes son:

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1), \quad y = -\frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1)$$

Ejercicios de aplicación

43 **Determina la posición relativa de la elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 3$ y la recta $x + 2y - 1 = 0$.**

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

se obtiene: $(1 - 2y)^2 + 2y^2 = 3$

$\Rightarrow 3y^2 - 2y - 1 = 0 \Rightarrow y_1 = 1,\ y_2 = -\dfrac{1}{3}$

La recta y la elipse son secantes; los puntos de corte son: $P_1(-1, 1)$ y $P_2\left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

44 **Halla la posición relativa de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.**

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$4(25 - y^2) + 9y^2 = 36 \Rightarrow 100 - 4y^2 + 9y^2 = 36$
$\Rightarrow 5y^2 = -64$

La circunferencia y la elipse no se cortan. Es conveniente reflexionar sobre el hecho de que comparando el eje mayor de la elipse y el radio de la circunferencia se puede llegar a la conclusión de que la elipse es interior a la circunferencia.

45 **Calcula la posición relativa de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 25$ y la recta $3x + 2y - 19 = 0$.**

Se plantea el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 2y - 19 = 0 \end{cases}$$

y se observa que no tiene solución, luego la recta y la circunferencia son exteriores.

46 **Halla la posición relativa de la recta $x + y - 3 = 0$ y la elipse $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.**

Se plantea el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Se obtiene la ecuación:

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

que tiene una única solución:

$$y = 1$$

luego la recta y la elipse son tangentes en el punto $P(2, 1)$.

47 **Dadas las siguientes ecuaciones, identifica de qué cónica se trata e indica sus elementos característicos:**

a) $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 30 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 10x + 6y - 25 = 0$

c) $(x - 5)^2 + \dfrac{(y - 3)^2}{5} = 1$

d) $4x^2 - 3(y + 7)^2 - 12 = 0$

e) $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{2} = 10$

f) $(y - 5)^2 = 6(x - 1)$

a) Circunferencia de centro $C(5, -3)$ y radio 2.

b) No es una circunferencia.

c) Elipse centrada en el punto (5, 3) con el eje mayor vertical $\sqrt{5}$ y el menor 1.

d) Hipérbola centrada en el punto (0, −7) con distancia focal igual a 10 y la distancia entre los vértices $2\sqrt{3}$.

e) Hipérbola centrada en el origen con distancia focal igual a 20 y la distancia entre los vértices $2\sqrt{80} = 8\sqrt{5}$.

f) Parábola con vértice en el punto (1, 5) de parámetro 3.

Evaluación (página 199)

1. **Halla, mediante la definición de lugar geométrico, la ecuación de la mediatriz del segmento formado por los puntos $A(1, 2)$ y $B(4, 5)$.**

Utiliza el programa GeoGebra para comprobar la solución.

Dado $P(x, y)$ perteneciente al lugar geométrico, se verifica que $d(P, A) = d(P, B)$. Entonces:

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2} \Rightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4 = x^2-8x+16+y^2-10y+25 \Rightarrow 6x+6y-36=0$
$\Rightarrow x+y-6=0$

Los pasos para comprobar en GeoGebra son:

- Insertamos los puntos A y B.
- Trazamos el segmento AB.
- Hallamos su punto medio y trazamos la mediatriz que pasa por ese punto.
- La ecuación se encontrará en la Vista Algebraica.
- Otra forma de hacerlo sería utilizando directamente la instrucción Mediatriz.

2. **Calcula, mediante la definición de lugar geométrico, la ecuación de la bisectriz de las rectas**

$$r: 4x - y + 1 = 0$$
$$s: -x + 4y - 4 = 0$$

Comprueba con el programa GeoGebra la solución.

Sea $P(x, y)$ perteneciente al lugar geométrico, se verifica que $d(P, r) = d(P, s)$. Entonces:

$$\frac{|4x-y+1|}{\sqrt{16+1}} = \frac{|-x+4y-4|}{\sqrt{1+16}} = 4x-y+1 = \pm(-x+4y-4) \Rightarrow \begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$$

Los pasos para comprobar en GeoGebra son:

- Trazamos las rectas r y s.
- Hallamos las bisectrices mediante la herramienta Bisectriz.
- En la Vista Algebraica, salen las ecuaciones pedidas.

3. **Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto $P(1, -1)$ tres unidades.**

Verifica con el programa GeoGebra la solución.

Si $Q(x, y)$ pertenece al lugar geométrico, entonces, se verifica que $d(P, Q) = 3$.

$d(P, Q) = 3 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = 3 \Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2 = 9 \Rightarrow x^2+y^2-2x+2y-7=0$

Para hallar la solución en GeoGebra se tendría que construir una circunferencia mediante la herramienta Circunferencia (centro, radio).

4. **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano si la suma de las distancias de los puntos $P(1, 5)$ y $Q(3, 5)$ es de $\sqrt{5}$ unidades.**

Construye mediante GeoGebra el lugar geométrico pedido.

Se toma un punto $A(x, y)$ perteneciente al lugar geométrico, entonces, $d(P, A) + d(Q, A) = \sqrt{5}$. Es decir:

$\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2} + \sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow (4x-13)^2 = 20 \cdot [(x-3)^2+(y-5)^2] \Rightarrow 4x^2+20y^2-16x-200y+511=0$

Los pasos para comprobar en GeoGebra son:

- Situamos los puntos P y Q.
- Con la herramienta Circunferencia(centro, radio) trazamos dos circunferencias de radio 1 y $\sqrt{5}-1$ desde P y Q respectivamente.
- El punto de intersección de ambas circunferencias es un punto perteneciente a la elipse. Con la herramienta Elipse, hallamos la cónica.
- La ecuación se encontrará en la Vista Algebraica.

5. **Clasifica las siguientes cónicas y señala sus elementos característicos.**

a) $x^2 + y^2 = 5$

b) $x^2 + 2y^2 = 4$

c) $x^2 - 3y^2 = 9$

d) $y^2 - 3x = 5$

a) La cónica es una circunferencia de centro $C(0, 0)$ y radio $\sqrt{5}$.

b) Esta cónica es una elipse: $x^2+2y^2=4 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$

- Sus focos son $F_1(-\sqrt{2}, 0)$ y $F_2(\sqrt{2}, 0)$.
- Sus vértices son $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$, $B_1(0, -\sqrt{2})$ y $B_2(0, \sqrt{2})$.
- Su excentricidad es: $e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) La cónica es una hipérbola: $x^2 - 3y^2 = 9 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$

- Los focos son $F_1(-2\sqrt{3}, 0)$ y $F_2(2\sqrt{3}, 0)$ y los vértices son $A'(-3, 0)$ y $A(3, 0)$.
- Su excentricidad es: $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

d) La cónica es una parábola: $y^2 - 3x = 5 \Rightarrow y^2 = 3\left(x + \frac{5}{3}\right) \Rightarrow y^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}\left(x \cdot \frac{5}{3}\right)$

- El foco es $F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$.
- El vértice es $V\left(\frac{5}{3}, 0\right)$.

6. Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0, 6)$, $B(4, 10)$ y $C(8, 6)$. Halla el centro y el radio de dicha circunferencia.

Para que los tres puntos pertenezcan a la circunferencia deben de satisfacer la ecuación: $x^2 + y^2 + mx + my + p = 0$

Por lo que imponiendo las condiciones del enunciado se llega a que la ecuación es $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 36 = 0$ cuyo centro y radio son $C(4, 6)$ y 4.

7. Calcula la recta tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0$ por los puntos:

***a)* $P(0, 4)$**

***b)* $Q(4, 0)$**

a) El sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0 \\ y = mx + 4 \end{cases}$ debe de tener una única solución y por ello el discriminante de $(1 + m^2)x^2 - 8x + 12 = 0$ tiene que ser cero. Los valores necesarios son $m = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Por tanto las rectas tangentes serán:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 4 \text{ y } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 4$$

b) El sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0 \\ y = m(x - 4) \end{cases}$ debe de tener una única solución y por tanto:

$(1 + m^2)x^2 - 8(m^2 + m + 1)x + 16m^2 + 32m + 28 = 0$ tiene que tener el discriminante nulo.

Los valores necesarios son $m = \pm\sqrt{3}$. Por tanto las rectas tangentes serán:

$$y = \sqrt{3}x - 4 \text{ y } y = -\sqrt{3}x - 4$$

8. Halla la ecuación de la elipse centrada en el punto $A(-1, 3)$ con semieje mayor 10 u y excentricidad 0,6.

El centro es $A(-1, 3)$, el semieje mayor es $a = 10$ y $b^2 = a^2 - c^2 = 100 - (0{,}6 \cdot 10)^2$.

Así pues la ecuación quedaría:

$$\frac{(x + 1)^2}{100} + \frac{(y - 3)^2}{64} = 1$$

9. Determina la ecuación de la hipérbola horizontal centrada en el origen con distancia focal 12 u y distancia entre los vértices de 10 u. Calcula además la excentricidad y sus asíntotas.

La distancia focal es $2c$ entonces, $c = 6$. La distancia entre los vértices es $2a$ por lo que $a = 5$. Usando la relación entre los semiejes y semidistancia focal, se tiene que $b^2 = 11$.

Entonces la ecuación quedaría como: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$

Su excentricidad es $e = 1{,}2$ y sus asíntotas serán: $y = \frac{\sqrt{11}}{5}x$ e $y = -\frac{\sqrt{11}}{5}x$

10. Calcula la ecuación de la parábola cuyo foco es $F(0, 2)$ y su directriz es la recta con ecuación $y = -4$.

Usando la definición de lugar geométrico se tendría la ecuación: $\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = |y + 4|$

Simplificando se llega a: $y = \frac{1}{12}x^2 - 1$

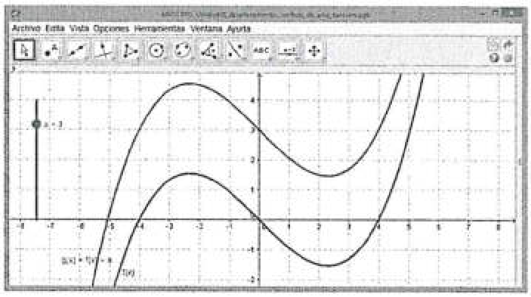
Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Funciones simétricas (página 216)

En este archivo de GeoGebra puede verse representada una función simétrica. El deslizador de color rojo muestra puntos simétricos de la función dibujada. Con el de color verde se puede modificar el exponente del numerador y ver otras funciones simétricas pares e impares.

Desplazamiento vertical de una función (página 224)

En el archivo de GeoGebra aparecen representadas una función y la que resulta de trasladarla verticalmente. En el deslizador de color rojo se puede elegir el valor que determina el desplazamiento para observar la diferencia entre valores positivos y negativos.



Desplazamiento horizontal de una función (página 224)

En el archivo de GeoGebra aparecen representadas una función y la que resulta de trasladarla horizontalmente. En el deslizador de color rojo se puede elegir el valor que determina el desplazamiento para observar la diferencia entre valores positivos y negativos.

Valor absoluto de una función (página 228)

En este archivo de GeoGebra puede verse la representación de una función y al mover el deslizador aparece su valor absoluto.

Actividades (páginas 204/225)

1 **Expresa mediante una función:**

a) **El precio, en función del peso, de una cierta cantidad de café que vale 2 €/kg.**

b) **El coste de una llamada telefónica, si el establecimiento de llamada es de 0,10 € y la tarifa por minuto, de 0,20 €.**

c) **La relación entre la altura y la base de un triángulo cualquiera de 6 cm^2 de área, si la base es la variable dependiente.**

a) $P(x) = 2x$, donde x es el peso del café, en kilogramos.

b) $C(t) = 0{,}10 + 0{,}20t$, donde t es la duración de la llamada, en minutos.

c) $b(h) = \dfrac{12}{h}$, donde h es la altura del triángulo, en centímetros.

2 **En la siguiente tabla se muestran algunos pares ordenados de una aplicación, $f(n)$, de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.**

n	1	2	3	4	5	6
$f(n)$	1	3	5	7	9	11

a) **Halla su expresión analítica.**

b) **Calcula $f(8)$.**

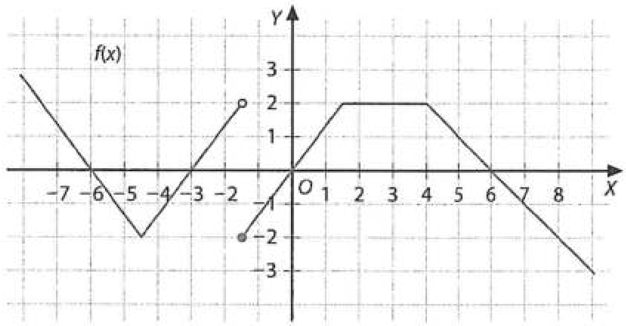
a) $f(n) = 2n - 1$ *b)* $f(8) = 15$

3 **Un coche ha estado circulando a 70 km/h hasta el kilómetro 40 de una carretera comarcal. En ese mismo instante, y en el kilómetro 0 de dicha carretera, otro coche circula a 90 km/h. Si ambos vehículos mantienen su velocidad constante, expresa cómo varía la distancia que los separa en función del tiempo. Cuando el segundo coche vaya 40 km por delante del primero, ¿qué tiempo habrá transcurrido?**

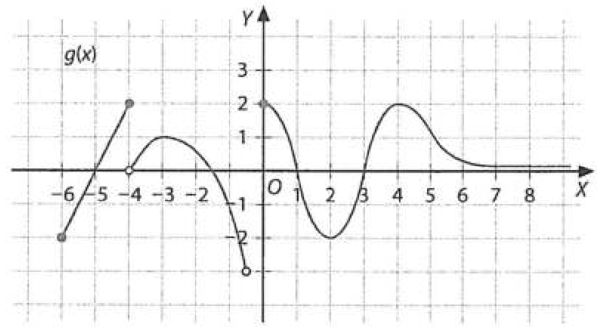
$d = |20t - 40|$; 4 h

4 **A partir de las gráficas, halla los valores de las imágenes y antiimágenes.**

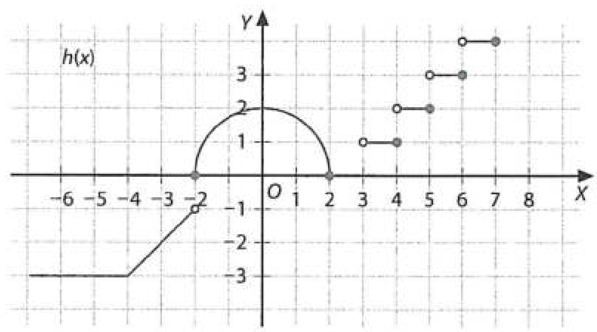
a) $f(2)$, $f(6)$, $f(7)$, $f(-3/2)$, $f(-9/2)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(-2)$



b) $g(-4)$, $g(-1/2)$, $g(0)$, $g^{-1}(2)$, $g^{-1}(-3)$, $g^{-1}(0)$



c) $h(-5)$, $h(-3)$, $h(-2)$, $h(0)$, $h(3)$, $h(5)$, $h^{-1}(-3)$, $h^{-1}(-1)$, $h^{-1}(2)$



a) $f(2) = 2$, $f(6) = 0$, $f(7) = -1$, $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -2$, $f\left(-\dfrac{9}{2}\right) = -2$,

$f^{-1}(0) = \{-6, -3, 0, 6\}$, $f^{-1}(2) = \left\{-\dfrac{15}{2}\right\} \cup \left[\dfrac{3}{2}, 4\right]$,

$f^{-1}(-2) = \left\{-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{3}{2}, 8\right\}$

b) $g(-4) = 2$, $\nexists g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $g(0) = 2$, $g^{-1}(2) = \{-4, 0, 4\}$,

$\nexists g^{-1}(-3)$, $g^{-1}(0) = \left\{-5, -\dfrac{3}{2}, 1, 3\right\}$

c) $h(-5) = -3$, $h(-3) = -2$, $h(-2) = 0$, $h(0) = 2$, $\nexists\, h(3)$, $h(5) = 2$, $h^{-1}(-3) = (-\infty, -4]$, $\nexists h^{-1}(-1)$, $h^{-1}(2) = \{0\} \cup (4, 5]$

5 **Halla el dominio de las siguientes funciones.**

a) $f(x)=2x^3-x-\frac{1}{x}$ ***g)*** $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

b) $f(x)=\frac{x+2}{x^2+2}$ ***h)*** $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ \frac{3}{x-5} & \text{si } x>0 \end{cases}$

c) $f(x)=\frac{2x-1}{x^3-7x^2+10x}$ ***i)*** $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-x}}$

d) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ ***j)*** $f(x)=\frac{|x|}{x}$

e) $f(x)=\sqrt{-2x^2-x+1}$ ***k)*** $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x^2+1}$

f) $f(x)=\frac{\sqrt{3x-5}}{x-2}$ ***l)*** $f(x)=\frac{x^2+x+1}{3x^2-7x+2}$

a) $\mathbb{R}-\{0\}$ *g)* $\mathbb{R}-\{0\}$

b) $\mathbb{R}$ *h)* $\mathbb{R}-\{0, 5\}$

c) $\mathbb{R}-\{0, 2, 5\}$ *i)* $\mathbb{R}-[0, 1]$

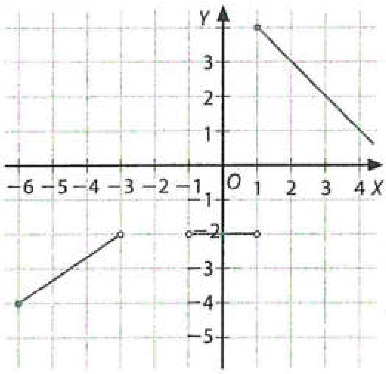
d) $\mathbb{R}-(-1, 1)$ *j)* $\mathbb{R}-\{0\}$

e) $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ *k)* $[-2, +\infty)$

l) $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}, 2\right\}$

f) $\left[\frac{5}{3}, 2\right)\cup(2, +\infty)$

6 **Calcula la expresión analítica de la función representada en la figura, e indica su dominio.**



$$f(x)=\begin{cases} 2x/3 & \text{si } -6\leq x<-3 \\ -2 & \text{si } -1<x<1 \\ 5-x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

Dom $f=[-6,-3)\cup(-1, +\infty)$

7 **Calcula el recorrido de las siguientes funciones.**

a) $f(x)=x^2-1$ ***c)*** $f(x)=-x^2+2x-1$

b) $f(x)=x^2-x$ ***d)*** $f(x)=7$

a) $[-1, +\infty)$ *b)* $[-1/4, +\infty)$ *c)* $(-\infty, 0]$ *d)* $\{7\}$

8 **Fíjate en las representaciones gráficas de las siguientes funciones.**

a) **Determina los intervalos de signo constante.**

b) **Estudia su monotonía y su curvatura, si es posible.**

c) **¿Qué funciones están acotadas?**

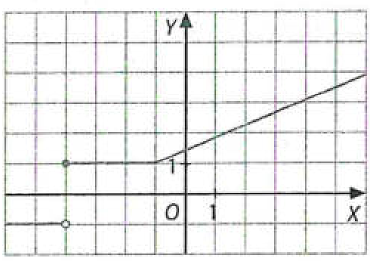


FIGURA 8.30.a.

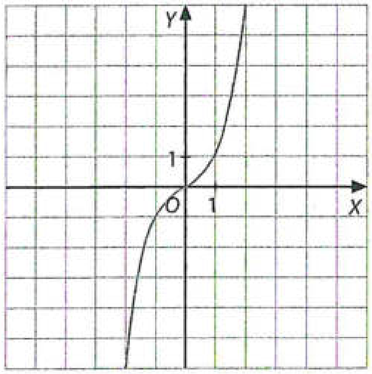


FIGURA 8.30.b.

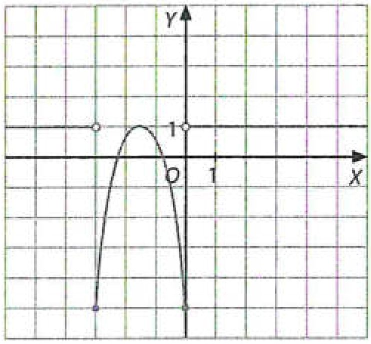


FIGURA 8.30.c.

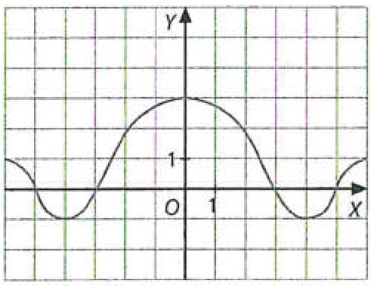


FIGURA 8.30.d.

a) Figura 8.30.a: En $x\in[-4, +\infty)$, $f(x)>0$ y en $x\in(-\infty, 4)$, $f(x)<0$.

Figura 8.30.b: En $x\in(-\infty, 0)$, $f(x)<0$ y en $x\in(0, +\infty)$, $f(x)>0$.

Figura 8.30.c: En $x\in(-\infty,-3)\cup\left(-\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}\right)\cup(0, +\infty)$, $f(x)>0$ y en $x\in\left[-3, -\frac{7}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3}, 0\right]$, $f(x)<0$.

Figura 8.30.d: En $x\in(-6,-5)\cup(-3, 3)\cup(5, 6)$, $f(x)>0$ y en $x\in(-5,-3)\cup(3, 5)$, $f(x)<0$.

b) Figura 8.30.a: $f(x)$ es estrictamente creciente en $[1, +\infty)$.

Figura 8.30.b: $f(x)$ es estrictamente creciente en su dominio. Es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$.

Figura 8.30.c: $f(x)$ es estrictamente creciente en $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$ y estrictamente decreciente en $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$. Es convexa en $(-3, 0)$.

Figura 8.30.d: $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-6,-4)\cup(0, 4)$ y estrictamente creciente en $(-4, 0)\cup(4, 6)$. Es cóncava en $\left(-5, -\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2}, 5\right)$ y convexa en $(-6,-5)\cup\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

c) Figura 8.30.a: No está acotada superiormente, pero sí inferiormente por -1. Figura 8.30.b: No está acotada.

Figura 8.30.c: Está acotada superiormente por 1 e inferiormente por -5. Figura 8.30.d: Está acotada superiormente por 3 e inferiormente por -1.

9 **De las funciones representadas en las figuras, determina:**

a) **Cuál está acotada.** ***b)*** **Si son pares o impares.**

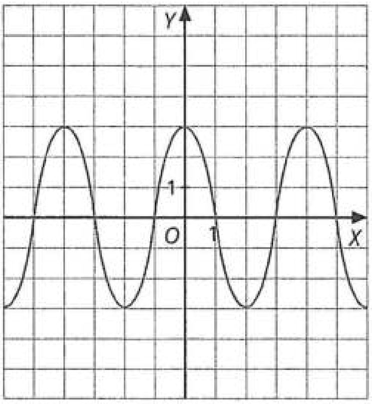


FIGURA 8.31.a.

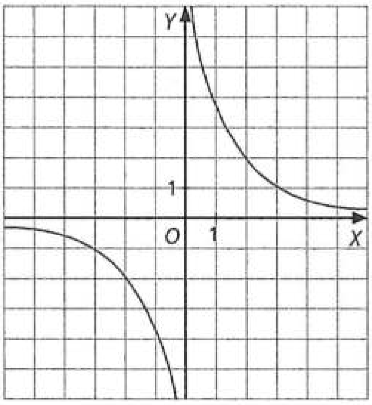


FIGURA 8.31.b.

a) La figura 8.31.a está acotada, $-3 \leq f(x) \leq 3$. La figura 8.31.b no está acotada.

b) La figura 8.31.a es par y la figura 8.31.b es impar.

10 **Determina el período de la función representada en la figura 8.31.a.**

$T = 6$

11 **Determina los intervalos de signo constante de la función** $f(x) = \dfrac{x+1}{-x+2}$.

Cuadro de signos:

	-1		2
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$-x+2$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

$f(x) < 0\ \forall\, x \in (-\infty, -1)$ $\quad f(x) > 0\ \forall\, x \in (-1, 2)$

$f(x) < 0\ \forall\, x \in (2, +\infty)$

12 **Determina el tipo de simetría de la función** $f(x) = x - (4/x)$.

$f(-x) = -x - (4/(-x)) = -x + (4/x) = -(x - (4/x)) = -f(x)$

Por tanto, la function $f(x)$ es impar.

13 **A partir de las funciones** $f(x) = x + 1$ **y** $g(x) = \dfrac{2-x}{3x-6}$, **realiza las siguientes operaciones e indica sus respectivos dominios:**

a) $(f + g)(x)$ ***b)*** $(f \cdot g)(x)$ ***c)*** $(f/g)(x)$

a) $(f + g)(x) = \dfrac{3x+2}{3}$, Dom $(f + g) = \mathbb{R} - \{2\}$

b) $(f \cdot g)(x) = \dfrac{-x-1}{3}$, Dom $(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{2\}$

c) $(f/g)(x) = -3x - 3$, Dom $(f/g) = \mathbb{R} - \{2\}$

14 **Si** $f(x) = \sqrt{x+1}$ **y** $g(x) = x + 1$, **averigua** $(g/f)(x)$ **y su dominio.**

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \sqrt{x+1}$$

$$\text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right) = (-1, +\infty)$$

15 **Dadas las funciones** $f(x) = x^2 - 1$ **y** $g(x) = \sqrt{2x-1}$, **calcula las composiciones** $f \circ g$ **y** $g \circ f$, **y el dominio de cada una.**

$$(f \circ g)(x) = 2x - 2,\ \text{Dom}\,(f \circ g) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{2x^2 - 3},\ \text{Dom}\,(g \circ f) = \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$$

16 **Indica qué tipo de funciones representan las gráficas de las figuras 8.36: inyectivas, suprayectivas o biyectivas.**

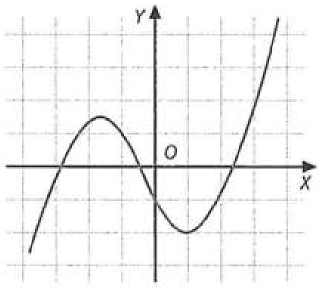


FIGURA 8.36.a.

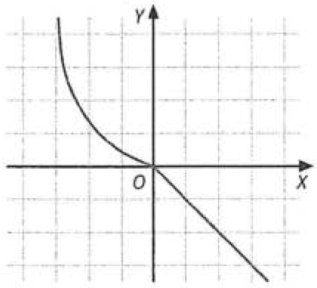


FIGURA 8.36.b.

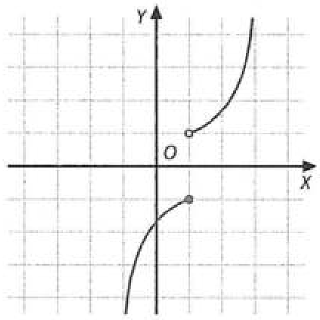


FIGURA 8.36.c.

La función representada en la figura 8.36.a no es inyectiva, pero sí suprayectiva, por tanto, no es biyectiva.

La función de la figura 8.36.b es inyectiva y suprayectiva y, en consecuencia, biyectiva.

La función de la figura 8.36.c es inyectiva, pero no suprayectiva, por tanto, no es biyectiva.

17 **Indica cuáles de estas funciones son inyectivas.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} - 2$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

c) $f(x) = \dfrac{3-4x}{2}$

d) $f(x) = x^3 - 2$

e) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7}{x}$

f) $f(x) = \sqrt{x-1}$

Son inyectivas las funciones correspondientes a los siguientes apartados: *a), c), d), f).*

a) $\dfrac{1}{a} - 2 = \dfrac{1}{b} - 2 \Rightarrow a = b$

c) $\dfrac{3-4a}{2} = \dfrac{3-4b}{2} \Rightarrow a = b$

d) $a^3 - 2 = b^3 - 2 \Rightarrow a = b$

f) $\sqrt{a-1} = \sqrt{b-1} \Rightarrow a = b$

18 **Calcula la función inversa, $f^{-1}(x)$, de las siguientes funciones.**

a) $f(x)=\dfrac{1-3x}{6}$

b) $f(x)=\dfrac{3}{2-2x}$

c) $f(x)=\dfrac{7-x}{x}$

d) $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$

e) $f(x)=\dfrac{3-x}{4+5x}$

a) $f^{-1}(x)=\dfrac{1-6x}{3}$

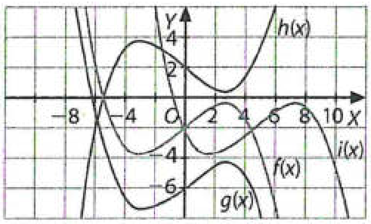
b) $f^{-1}(x)=\dfrac{2x-3}{2x}$

c) $f^{-1}(x)=\dfrac{7}{1+x}$

d) $f^{-1}(x)=x^3+2$

e) $f^{-1}(x)=\dfrac{3-4x}{5x+1}$

19 **A partir de la gráfica de $f(x)$, identifica las funciones representadas.**



$g(x)=f(x)-4$; $h(x)=-f(x)$; $i(x)=f(x-5)$

Ejercicios y problemas (páginas 230/234)

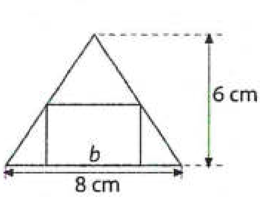
Funciones. Modelización

1 **Averigua la función que permite obtener el volumen de un cubo en función de su diagonal, *d*.**

Siendo x la arista del cubo, su volumen es $V=x^3$.

Como la diagonal de un cubo, d, es, en función de la arista, $d=x\sqrt{3}$, se obtiene que el volumen de un cubo, en función de su diagonal: $V=\dfrac{d^3}{3\sqrt{3}}=\dfrac{d^3\sqrt{3}}{9}$

2 **En un triángulo isósceles se inscribe un rectángulo como se muestra en la figura 8.49. Halla la función que proporciona la superficie del rectángulo en función de su base, *b*. ¿Cuál es el dominio de esta función? ¿Y su recorrido?**



De la semejanza de triángulos se puede obtener la siguiente proporción: $\dfrac{6}{8}=\dfrac{6-h}{b}$, de donde $h=6-\dfrac{3b}{4}$

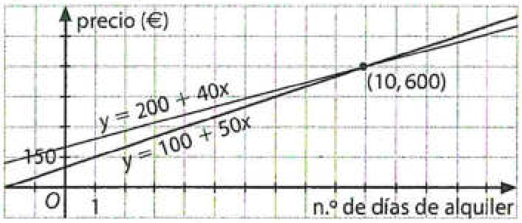
$$A(b)=b\cdot\left(6-\frac{3b}{4}\right)=\frac{-3b^2}{4}+6b$$

Función polinómica de grado 2. Para $b=4$, $S(b)=12$, que corresponde a la superficie máxima que puede tener el rectángulo.

Por lo tanto, Dom $A=(0,8)$, Rec $A=(0,12]$.

3 **Queremos alquilar un apartamento en verano. Una agencia, A, pide 200 € de entrada por costes diversos y 40 € diarios. Otra agencia, B, pide 100 € de entrada y 50 € diarios. Dibuja en un mismo sistema de referencia las gráficas que representan el precio del apartamento en función de los días, y determina a partir de cuántos días de alquiler resulta más económica la oferta de la agencia A.**

A partir de los 10 días.



4 **De entre las siguientes relaciones entre variables que sean funciones indica el dominio y recorrido.**

a) **A todo número real, *x*, se le asigna su inverso.**

b) **A cada número real, *x*, se le asigna un número entero, *z*, tal que $0\le x-z<1$.**

c) **A cada número real, *x*, se le asigna otro número real, *y*, de tal manera que se cumpla $x^2+y^2=4$.**

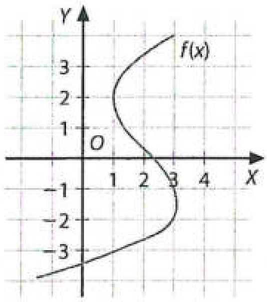
d)

x	−2	−1	0	1	2	3
y	5	5	5	5	5	5

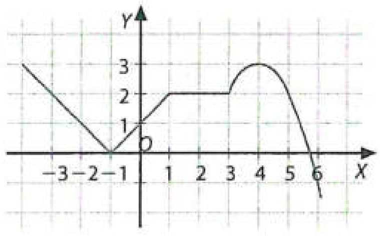
e)

x	3	3	3	3	3	3
y	−10	−7	−4	−1	2	5

f)



g)



a) Es una función. Su dominio y recorrido es $\mathbb{R}-\{0\}$.

b) Es una función que se denomina parte entera de x, $E(x)$. Su dominio son todos los reales, y su recorrido los enteros.

c) No corresponde a una función.

d) La tabla corresponde a una función constante. Como no se dan más indicaciones, hemos de suponer que es una función de dominio discreto.

$f(x)=5$, Dom $f=\{z\in\mathbb{Z}\mid -2\le z\le 3\}$, Rec $f=\{5\}$

e) La tabla no corresponde a una función: para un mismo valor de x existen varias imágenes posibles.

f) La gráfica no corresponde a una función: para un mismo valor de x existen varias imágenes posibles.

g) La gráfica corresponde a una función. Su dominio es $(-\infty,+\infty)$. Su recorrido es $(-\infty,+\infty)$.

5 **Un fabricante de latas de refresco necesita producir latas cilíndricas de 33 cm^3 de volumen. Expresa:**

***a)* La relación entre la altura de la lata y el radio de su base.**

***b)* El área total de la lata en función del radio de la base.**

a) $V = \pi r^2 h$, por tanto, la relación entre la altura y el radio es:

$$h = \frac{33}{\pi r^2}$$

b) $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

Así, el área de la lata es:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{33}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{66}{r}$$

6 **Averigua la función que relaciona el área de un rectángulo con uno de sus lados, sabiendo que su perímetro mide 12 cm. ¿Qué tipo de función es? Represéntala. Halla su dominio y su recorrido. ¿Para qué valores es creciente?**

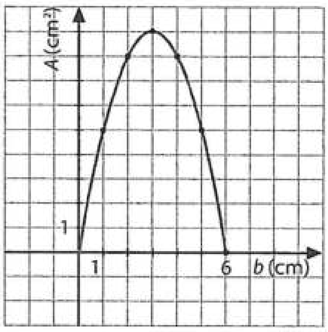
Suponemos un rectángulo de lados a y b, por lo tanto:

$$a + b = 6$$

Como $A = a \cdot b$:

$$A(b) = (6 - b) \cdot b = -b^2 + 6b$$

Es una función cuadrática.



Su dominio es (0, 6).

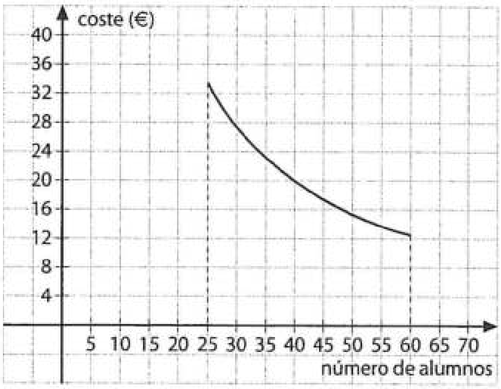
Su recorrido es (0, 9].

Es una función creciente $\forall\, b \in (0, 3)$.

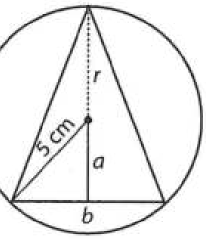
7 **Un centro de estudios alquila un autocar de 60 plazas para realizar una excursión. El alquiler es de 900 €. Por cada alumno que asista, la asociación de padres de la escuela subvenciona la salida con 2,50 €. El número mínimo de asistentes a la salida es de 25 alumnos. ¿Qué función relaciona el precio de la excursión por alumno con el número de alumnos que asistan? Realiza una gráfica que muestre esa relación y determina el dominio de dicha función.**

La función que proporciona el coste por alumno, siendo $25 \le x \le 60$ su dominio, es:

$$C(x) = \left(\frac{900}{x}\right) - 2{,}5$$



8 **En un círculo de 5 cm de radio se inscribe un triángulo isósceles. Halla su área en función de su base, *b*.**



El área de un triángulo es: $\dfrac{b \cdot h}{2}$

Según muestra la figura, la altura del triángulo, h, se puede descomponer como $h = r + a$, siendo a:

$$a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Puesto que el radio vale 5 cm, tenemos que:

$$A(b) = \frac{b \cdot \left[r + \sqrt{r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}\right]}{2} = \frac{b \cdot \left(5 + \sqrt{25 - \frac{b^2}{4}}\right)}{2}$$

El dominio de A es (0, 10].

9 **Halla la expresión que pasa grados centígrados:**

***a)* A grados Kelvin, sabiendo que 0 K corresponden a −273 °C, y 373 K, a 100 °C.**

***b)* A grados Fahrenheit, sabiendo que 32 °F corresponden a 0 °C, y 212 °F, a 100 °C.**

a) Si x corresponde a los grados centígrados que se desean transformar y K a sus equivalentes en grados kelvin, tenemos que:

$$K = x + 273$$

b) Si x corresponde a los grados centígrados que se desean transformar y F a sus equivalentes en Farenheit, tenemos que:

$$F = 32 + \frac{180x}{100} = 32 + \frac{9x}{5}$$

10 **La cantidad de calor que hay que suministrar a un gramo de una sustancia para que esta aumente 1 °C se llama calor específico. Sabiendo que cuando se suministran 3 calorías a un gramo de cinc a 20 °C, la temperatura sube a 52,43 °C, averigua su calor específico y escribe una función que proporcione el incremento de temperatura de una masa cualquiera de cinc en función del aporte de calor.**

Dado que se trata de un gramo de sustancia, dividiendo el calor entre el incremento de temperatura se obtiene el calor específico del cinc:

$$\frac{3 \text{ cal}}{32{,}43 \text{ °C}} = 0{,}0925 \text{ cal/°C}$$

Mediante la definición de calor específico, c_e, se puede deducir que c_e = calor/(masa · incremento de temperatura).

Llamando Q al calor suministrado, y despejando de la fórmula anterior el incremento de temperatura, Δt, que se produce para un gramo de cinc es:

$$\Delta t = \frac{Q}{0{,}0925} = 10{,}81\, Q$$

Para una masa de cinc cualquiera, m:

$$\Delta t = \frac{10{,}81\, Q}{m}$$

11 **En la siguiente tabla se detalla el ahorro que se produce en el intercambio de bombillas, en función de la diferencia de potencia que consumen:**

Intercambio de bombillas	Ahorro (€)
25 W → 5 W	4
40 W → 7 W	6,6
60 W → 11W	9,8
75 W → 15 W	12
100 W → 20 W	16
120 W → 23 W	19,4

¿Qué tipo de función relaciona el ahorro, *A*, con la diferencia de potencia consumida, *D*?

La relación es directamente proporcional. Es una función lineal. Se observa que:

$$\frac{4}{20} = \frac{6,6}{33} = \frac{9,8}{49} = \cdots = 0,2$$

El ahorro que se estima por vatio de potencia consumida es de 0,20 €, por tanto, por un kilovatio será de 200 €.

12 **La longitud de una varilla de metal varía en función de la temperatura a la que se somete. La tabla muestra la relación entre la temperatura y la longitud de dicha varilla, que inicialmente está a 20 °C y mide 35 m de longitud:**

Temperatura (°C)	20	40	60
Longitud (cm)	3 500	3 501,176	3 502,352

Sabiendo que la relación entre la longitud de la varilla y el incremento de temperatura es afín, halla la expresión analítica *L*(*t*). ¿Cuánto medirá la varilla a 80 °C?

La relación es lineal:

$$l(t) = at + b$$

Sustituyendo los datos que proporciona la tabla, se puede obtener y comprobar que:

$l(t) = 0{,}0588\, t + 3\,498{,}824$ $\qquad l(80) = 3\,503{,}528$ cm

La varilla a 80 °C medirá 3 503,528 cm.

13 **La facturación que hace una compañía eléctrica cada dos meses a uno de sus usuarios engloba tres conceptos:**

- ***Facturación de la potencia:* por cada kW contratado y por cada mes, la tarifa es de 2,82 €.**
- ***Consumo:* por cada kWh consumido, la tarifa es de 0,16 €.**
- ***Concepto fijo:* 1,13 € por mes en concepto de equipo de medida.**

Finalmente, al importe se le aplica un 21% de IVA.

Si llamamos *P* a la potencia contratada y *C* al consumo en kWh de dos meses, halla la función que proporciona el importe de la factura bimestral.

***a)* ¿Cuántas variables engloba?**

***b)* Calcula el total de una factura para una potencia contratada de 4,4 kW y un consumo bimestral de 271 kWh.**

a) Como son dos meses el concepto fijo será $2 \cdot 1{,}13$ y la facturación de la potencia $2 \cdot 2{,}82 \cdot P$. Hay que aplicar el IVA para saber cuánto se paga realmente:

$I = (2 \cdot 2{,}82 \cdot P + 0{,}16 \cdot C + 2 \cdot 1{,}13) \cdot 1{,}21$

Esta función engloba dos variables, *P* y *C*.

b) El usuario que tiene contratada una potencia de 4,4 kW y un consumo bimestral de 271 kWh, debe pagar a la compañía eléctrica:

$I = (2 \cdot 2{,}82 \cdot 4{,}4 + 0{,}16 \cdot 271 + 2 \cdot 1{,}13) \cdot 1{,}21 = 85{,}23$ €

14 **Una empresa realiza un estudio comparativo sobre el coste que suponen dos piezas distintas. Estima que el coste en euros de la pieza tipo A, en función del número de miles de piezas, *x*, si el pedido no sobrepasa las 2 000 piezas, viene dado por la expresión:**

$$C_A(x) = -2x^2 + 5x$$

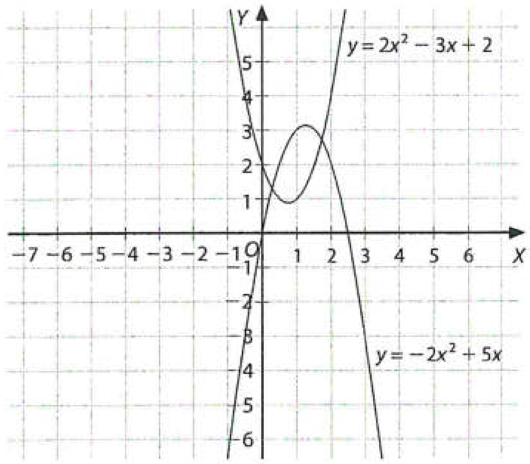
Y el coste de la pieza tipo B en las mismas condiciones es:

$$C_B(x) = 2x^2 - 3x + 2$$

***a)* ¿Para qué número de piezas es menor el coste de la producción de la pieza tipo A?**

***b)* Para un pedido de 2 000 piezas, ¿qué tipo de pieza produce menor coste a la empresa?**

***c)* ¿Cuántas piezas del tipo B producen menor coste?**



Debemos calcular los puntos de intersección de las dos gráficas, es decir, el número de piezas de un tipo u otro que producen a la empresa el mismo coste:

$C_A(x) = C_B(x)$ si $-2x^2 + 5x = 2x^2 - 3x + 2$
$\Rightarrow 4x^2 - 8x + 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$

Resolviendo obtenemos:

$$x = 0{,}293 \text{ y } x = 1{,}707$$

Como *x* viene dado en miles de piezas, la solución será 293 piezas y 1 707 piezas.

a) La pieza tipo A tiene menor coste para un pedido menor de 293 unidades o para un pedido de entre 1 707 y 2 000 unidades (el enunciado especifica que el pedido no sobrepase las 2 000 piezas).

b) Para un pedido de 2 000 piezas es menor el coste de la pieza tipo A, ya que si observamos en la gráfica el valor de $x = 2$ para las dos funciones, es menor en la función tipo A.

c) El mínimo de la función $C_B(x)$ se produce en el vertice de la función:

$$-\frac{b}{2a} = \frac{3}{4} = 0{,}750 \Rightarrow x = 750 \text{ piezas}$$

15 **Un granjero va cerrar un terreno rectangular de 80 m² con una valla. Uno de los lados linda con la carretera, por lo que la valla de este lado es más resistente y cuesta 15 €/m, y el resto de valla está a 10 €/m.**

Expresa, en función del lado que linda con la carretera, *x*, el precio total de la valla.

En primer lugar, $xy = 80$, por lo que $y = \dfrac{80}{x}$.

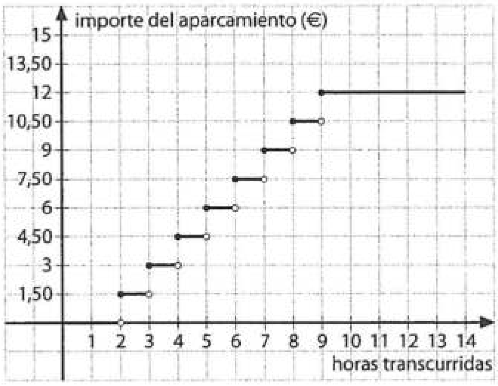
Los dos lados *y*, y un lado *x* cuestan 10 €/m y el otro lado *x*, 15 €/m.

Por tanto:

$$C(x) = \left(x + 2 \cdot \frac{80}{x}\right) \cdot 10 + 15x = 25x + \frac{1\,600}{x}$$

16 **En el aparcamiento de unos grandes almacenes se debe abonar 1,50 € por cada hora o fracción de hora, hasta un máximo de 12 €, siendo las dos primeras horas gratuitas. Representa gráficamente la función que expresa el importe del aparcamiento en función del tiempo transcurrido.**

Se trata de una función escalonada en la que durante las dos primeras horas hay un valor constante, luego para cada intervalo entre una hora y otra toma otro valor constante, hasta las 9 horas y a partir de ahí es constante de valor 12 €.



17 **El servicio de correos de un cierto país tiene las siguientes tarifas para el envío de cartas:**

Hasta 20 g de peso, se paga 0,35 €. Por cada 10 g o fracción de 10 g de exceso de peso, se añaden 0,07 € más.

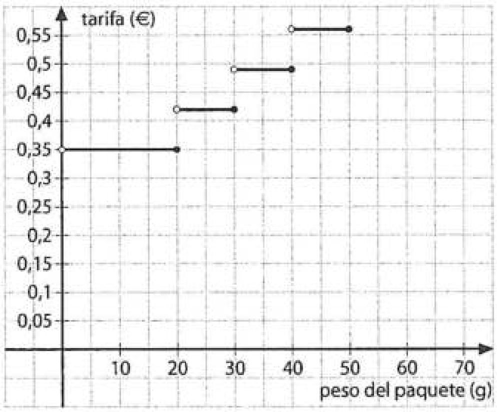
a) **Expresa la relación entre el precio del envío, *y*, y el peso de la carta, *x*, hasta 50 g.**

b) **Representa gráficamente la función.**

a) Se trata de una función definida a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}0{,}35 & \text{si } 0<x\leq 20\\ 0{,}42 & \text{si } 20<x\leq 30\\ 0{,}49 & \text{si } 30<x\leq 40\\ 0{,}56 & \text{si } 40<x\leq 50\end{cases}$$

b)



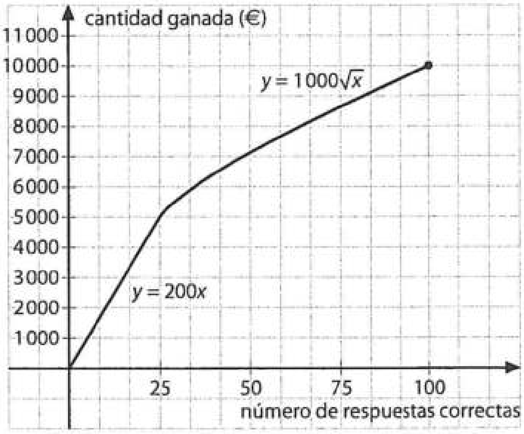
18 **En un concurso, los participantes deben contestar 100 preguntas. En las 25 primeras, se ganan 200 € por cada una que se acierte. A partir de aquí, el premio es, en miles de euros, la raíz cuadrada del número de preguntas acertadas.**

a) **Expresa, mediante una función, la relación entre respuestas correctas y cantidad ganada, y represéntala.**

b) **¿Cuál es su dominio? ¿Y su recorrido?**

c) **¿Cuántas respuestas ha debido acertar un participante que ha ganado 6 082,76 €?**

a) $f(x)=\begin{cases}200x & \text{si } 0\leq x\leq 25\\ 10^3\sqrt{x} & \text{si } 25<x\leq 100\end{cases}$



b) Su dominio es el conjunto de enteros no negativos, n, tal que $0\leq n\leq 100$.

Su recorrido está formado por los números n enteros no negativos, $200n$, si $0\leq n\leq 25$ y el conjunto de números $1\,000\sqrt{n}$ si $25\leq n\leq 100$.

c) Si ha ganado 6 082,76 € ha acertado 37 respuestas.

19 **Una lancha circula, cuando se ha alejado 60 kilómetros del muelle, a una media de 60 km/h. En ese mismo instante, desde el muelle sale otra lancha a una velocidad media de 75 km/h. Ambas mantienen la velocidad media constante. Expresa cómo varía la distancia que las separa en función del tiempo. Cuando la segunda lancha haya adelantado en 45 km a la primera, ¿qué tiempo habrá transcurrido?**

La distancia será: $d(t)=|15t-60|$

Transcurren 7 horas para que la segunda lancha adelante en 45 km a la primera.

20 **El beneficio mensual de un artesano expresado en euros, cuando fabrica y vende *x* objetos, se ajusta a la función $B(x)=-0{,}5x^2+50x-800$, donde $20\leq x\leq 60$.**

a) **Determina el beneficio que obtiene cuando fabrica y vende 20 objetos y 60 objetos, respectivamente.**

b) **¿Cuántos objetos debe fabricar y vender para obtener el máximo beneficio?, ¿a cuánto asciende?**

a) $B(20)=0$ €; $B(60)=400$ €

b) La función beneficio tiene su valor máximo en $x=-\dfrac{b}{2a}=$ $=-\dfrac{50}{-1}=50$, es decir, cuando fabrica y vende 50 objetos su beneficio es máximo y es de $B(50)=450$ €.

21 **Si el precio de la entrada al cine es de 6 €, van 320 personas. Se sabe que si aumenta el precio en 0,25 €, hay 10 espectadores menos. Halla:**

a) **La función que determina el número de espectadores en función del precio de la entrada.**

b) **La función que determina los ingresos del cine en función del precio de la entrada.**

c) **El precio de la entrada para obtener el máximo ingreso.**

a) La función es una recta que pasa por el punto (6, 320) y tiene pendiente $-\dfrac{10}{0{,}25}=-40$, por tanto, siendo e el número de espectadores y x el precio de la entrada:

$$e(x)=320-40(x-6)=560-40x$$

b) Multiplicando espectadores por precio: $I(x)=560x-40x^2$

c) $I(x)$ es una función polinómica de segundo grado, con un máximo en $x=-\dfrac{560}{-80}=7$ €, es decir, los ingresos son máximos cuando el precio de la entrada es de 7 €.

22 El beneficio (en miles de euros) de una empresa por la venta de x unidades de un producto, lo da por la función: $B(x) = -x^2 + 300x - 16\,100$, $50 \leq x \leq 250$.

a) ¿Cuántas unidades habrá vendido si el beneficio que ha obtenido es de 3 900 miles de euros?

b) ¿Cuántas unidades debe vender para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende este beneficio?

c) ¿Cuántas unidades debe vender para no tener pérdidas?

a) $3\,900 = -x^2 + 300x - 16\,100 \Rightarrow x^2 - 300x + 20\,000 = 0$ $\Rightarrow x = 100$ o $x = 200$, puede haber vendido 100 o 200 unidades del producto.

b) Valor máximo en $x = -\dfrac{300}{-2} = 150$ unidades del producto.
$B(150) = 6\,400$ miles de euros es el beneficio máximo.

c) $B(x) \geq 0 \Rightarrow -x^2 + 300x - 16\,100 \geq 0$

$-x^2 + 300x - 16\,100 = -(x - 70)(x - 230)$

Realizamos un cuadro de signos:

	50–70	70–230	230–250
$x - 70$	−	+	+
$x - 230$	−	−	+
$-(x-70)(x-230)$	−	+	−

La empresa no tendrá pérdidas si $70 \leq x \leq 230$.

Dominio y recorrido

23 Halla el dominio de estas funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x+3}$

b) $f(x) = \sqrt{3-x}$

c) $f(x) = 3x + \sqrt{x} - 2$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{6x-1}{\sqrt{x}+1}$

f) $f(x) = \dfrac{6x-1}{\sqrt{x}-1}$

g) $f(x) = \dfrac{2x^3+7}{\sqrt[3]{3x+6}}$

h) $f(x) = \dfrac{7x+5}{(x^2-1)^2}$

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$

j) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-1}}$

k) $f(x) = \dfrac{3x+1}{1-2x}$

l) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x-2x^2}$

m) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}}$

n) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+3}$

ñ) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}}$

o) $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x|}{x}}$

p) $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x|}{x^2}}$

q) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{3-x} & \text{si } x < 3 \\ -7 & \text{si } x = 4 \\ \dfrac{1}{x-10} & \text{si } x > 5 \end{cases}$

a) Dom $f = [-3, +\infty)$

b) Dom $f = (-\infty, 3]$

c) Dom $f = [0, +\infty)$

d) Dom $f = \mathbb{R}$

e) Dom $f = [0, +\infty)$

f) Dom $f = [0, 1) \cup (1, +\infty)$

g) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2\}$

h) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

i) Dom $f = \mathbb{R}$

j) Dom $f = \mathbb{R} - [-1, 1]$

k) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

l) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$

m) Dom $f = (-2, +1]$

n) Dom $f = (-\infty, -3) \cup (-3, -1] \cup [1, +\infty)$

ñ) Dom $f = (-3, +\infty)$

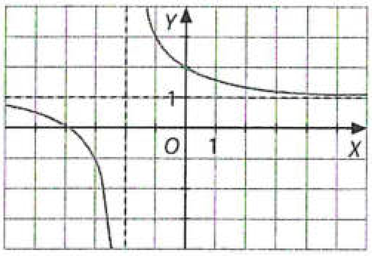
o) Dom $f = (0, +\infty)$

p) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

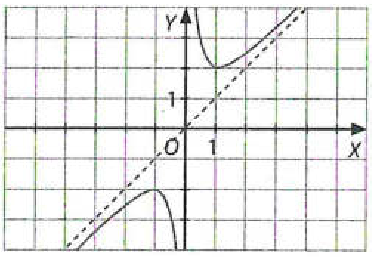
q) Dom $f = (-\infty, 3) \cup \{4\} \cup [5, 10) \cup (10, +\infty)$

24 Averigua el recorrido de estas funciones.

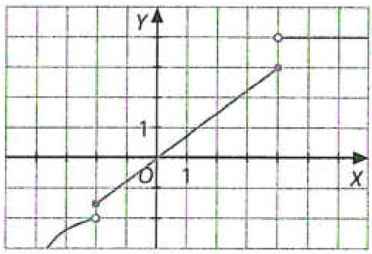
a)



b)



c)



a) Rec $f = \mathbb{R} - \{1\}$

b) Rec $f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

c) Rec $f = (-\infty, -2) \cup [-1{,}5; 3) \cup \{4\}$

25 Averigua el recorrido de estas funciones.

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{-x^2}{2} + \dfrac{3x}{2} + 2$

c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$

d) $f(x) = x^2 - 4x$

e) $f(x) = E(x) + 4$

f) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 4 \\ -x & \text{si } x > 4 \end{cases}$

a) Rec $f = \left[\dfrac{-1}{8}, +\infty\right)$

b) Rec $f = \left(-\infty, \dfrac{25}{8}\right]$

c) Rec $f = \mathbb{R} - \{2\}$

d) Rec $f = [-4, +\infty)$

e) Rec $f = \mathbb{Z}$

f) Rec $f = (-\infty, 4]$

26 ¿Son iguales $f(x) = x + 2$ y $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$? ¿Por qué?

No son iguales porque su dominio no es el mismo.

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$ y $\text{Dom } g = \mathbb{R} - \{2\}$

Representación de funciones

27 Representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = -x + 5$

b) $g(x) = |-x + 5|$

c) $f(x) = 2x + 3$

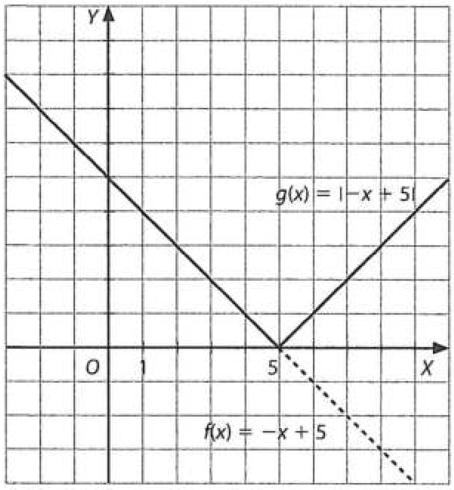
d) $g(x) = |2x + 3|$

e) $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$

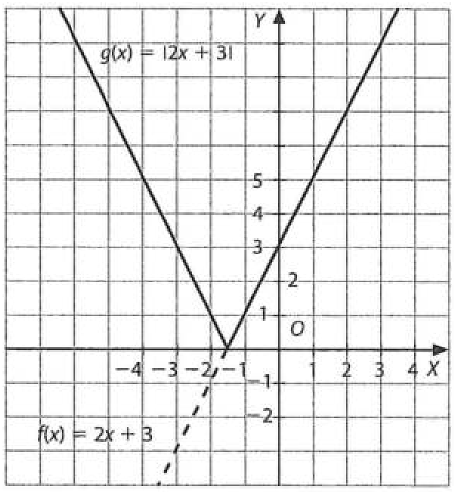
f) $g(x) = |-2x^2 + 5x + 3|$

A partir de $f(x)$ representamos $g(x)$ en cada caso.

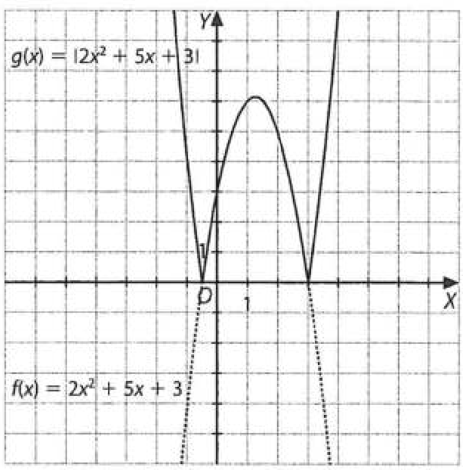
a), b)



c), d)



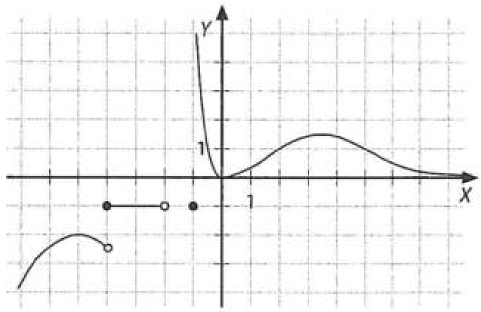
e), f)



28 A partir de la función representada en la figura 8.56, halla:

a) $f(0)$, $f(-2)$, $f(-4)$, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}\left(-\dfrac{5}{2}\right)$

b) Dom f y Rec f



a) $f(0) = 0$, $\nexists f(-2)$, $f(-4) = -1$,

$f^{-1}(1) = \left\{-\dfrac{1}{2}, 2, 5\right\}$, $f^{-1}(-1) = [-4, -2) \cup \{-1\}$,

$f^{-1}\left(-\dfrac{5}{2}\right) = -6$

b) $\text{Dom } f = (-\infty, -2) \cup [-1, +\infty)$,

$\text{Rec } f = (-\infty, -2] \cup \{-1\} \cup [0, +\infty)$

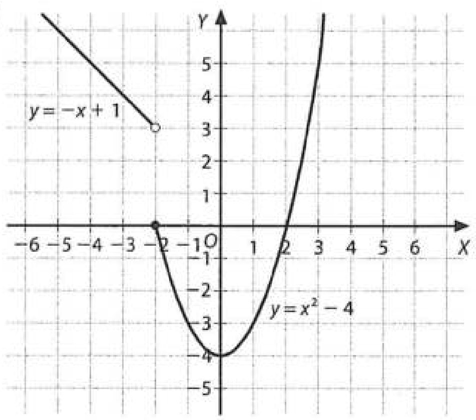
29 Representa las siguientes funciones e indica sus dominios y recorridos.

a) $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < -2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x - 10 & \text{si } x < -1 \\ -1 & \text{si} -1 < x \leq 3 \\ -x^2 - 4x - 6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

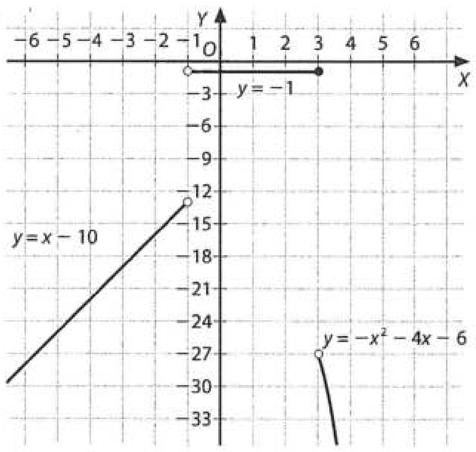
c) $f(x) = |x^2 - 2x|$

a)



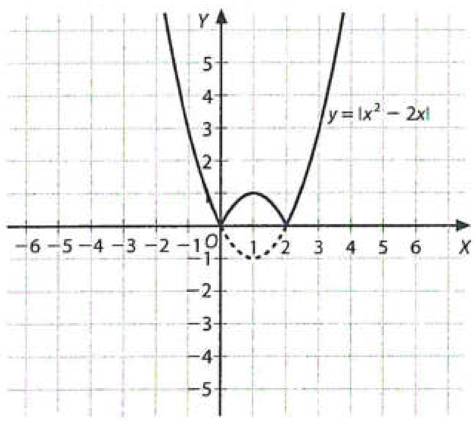
$\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Rec } f = [-4, +\infty)$

b)



$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$, $\text{Rec } f = (-\infty, -11) \cup \{-1\}$

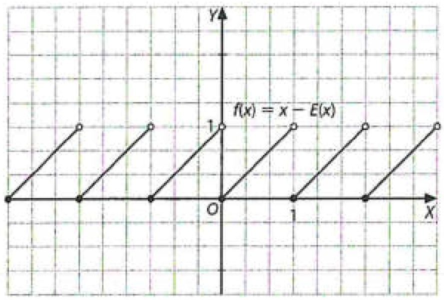
c)



Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = [0, +\infty)$

30 **La función $f(x) = x - E(x)$ es la función que a cada número real x, comprendido en un intervalo $[z, z + 1)$, le hace corresponder $x - z$. Por ejemplo, $f(3{,}25) = 3{,}25 - 3 = 0{,}25$, $f(-3{,}25) = 0{,}75$, $f(0{,}5) = 0{,}5 - 0 = 0{,}5$, $f(-0{,}5) = -0{,}5 + 1 = 0{,}5$. Haz una tabla de valores y realiza su representación gráfica.**

x	$f(x)$
0	0
1	0
1,5	0,5
1,75	0,75
−0,5	0,5
−1	0
−1,5	0,5
−1,75	0,25



Características de las funciones

31 **Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, determina sus intervalos de signo constante.**

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$ y $f(x) = 0$ en $x = 0$, por lo tanto, intervalos de signo constante son:

$(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ y $(0, +\infty)$

$$f(-2) = \frac{4}{-1} < 0 \Rightarrow \forall\, x \in (-\infty, -1),\ f(x) < 0$$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{0{,}25}{0{,}5} > 0 \Rightarrow \forall\, x \in (-1, 0),\ f(x) > 0$$

$$f(1) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \forall\, x \in (0, +\infty),\ f(x) > 0$$

32 **Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x}$, determina sus intervalos de signo constante.**

Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$ y $f(x) = 0$ en $x = -2$ y en $x = 2$, por lo tanto, los intervalos de signo constante son los siguientes:

$(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$

$$f(-3) = \frac{5}{-3} < 0 \Rightarrow \forall\, x \in (-\infty, -2),\ f(x) < 0$$

$$f(-1) = \frac{-3}{-1} > 0 \Rightarrow \forall\, x \in (-2, 0),\ f(x) > 0$$

$$f(1) = \frac{-3}{1} < 0 \Rightarrow \forall\, x \in (0, 2),\ f(x) < 0$$

$$f(3) = \frac{5}{3} > 0 \Rightarrow \forall\, x \in (2, +\infty),\ f(x) > 0$$

33 **Estudia en las funciones que muestran las figuras, los intervalos de signo constante, la monotonía y la curvatura si es posible. ¿Está acotada alguna de las funciones? ¿Hay alguna que presente simetría? ¿Y periodicidad?**

FIGURA 8.57.a.

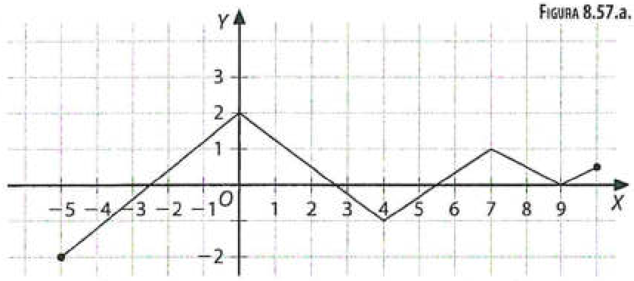


FIGURA 8.57.b.

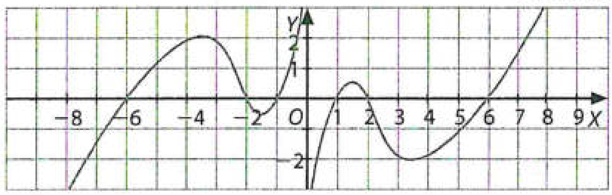


FIGURA 8.57.c.

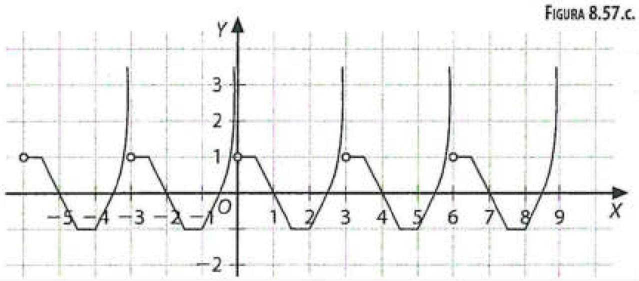


Figura 8.57.a.

- Intervalos de signo constante:
  $f(x) > 0$ en $(-2{,}5; 2{,}5) \cup (5{,}5; 9) \cup (9, 10]$
  $f(x) < 0$ en $[-5; -2{,}5) \cup (2{,}5; 5{,}5)$
- $f(x)$ es estrictamente creciente en $(-5, 0)$, en $(4, 7)$ y en $(9, 10)$.
  $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(0, 4)$ y en $(7, 9)$.
- Función acotada, $|f(x)| \leq 2$, no es simétrica ni periódica.

Figura 8.57.b.

- Intervalos de signo constante:
  $f(x) > 0$ en $(-6, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, 2) \cup (6, +\infty)$
  $f(x) < 0$ en $(-\infty, -6) \cup (-2, -1) \cup (0, 1) \cup (2, 6)$
- $f(x)$ es estrictamente creciente en $(-\infty; -3{,}5)$, en $(-1{,}5; 0)$, en $(0; 1{,}5)$, y en $(3{,}5; +\infty)$.
  $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-3{,}5; -1{,}5)$, y en $(1{,}5; 3{,}5)$.
- Es convexa en $(-\infty, -3) \cup (0; 2{,}5)$ y cóncava en $(-3, 0) \cup (2{,}5; +\infty)$.
- Es una función no acotada, sí es simétrica respecto al origen de coordenadas, y por tanto, impar, y tampoco es periódica.

Figura 8.57.c.

- Intervalos de signo constante:
  Dado que es una función periódica de período $T = 3$:
  $f(x) > 0$ en $(0 + 3k, 1 + 3k) \cup (2{,}5 + 3k, 3 + 3k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.
  $f(x) < 0$ en $(1 + 3k; 2{,}5 + 3k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.
- $f(x)$ es estrictamente creciente en $(2 + 3k, 3 + 3k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
  $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(0{,}5 + 3k; 1{,}5 + 3k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
  $f(x)$ es constante en $(0 + 3k;\ 0{,}5 + 3k)$ en $(1{,}5 + 3k; 2 + 3k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.
- Es cóncava en $(3k - 1, 3k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.
- Es una función no acotada.

Operaciones con funciones

34 **Calcula, en cada caso, $(f+g)(x)$ y su dominio.**

a) $f(x)=x^3+2x^2-x+3,\ g(x)=\sqrt{x^2-4}$

b) $f(x)=\dfrac{3x}{2x+1},\ g(x)=\dfrac{-1}{x-2}$

a) $(f+g)(x)=x^3+2x^2-x+3+\sqrt{x^2-4}$

Dom $(f+g)=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

b) $(f+g)(x)=\dfrac{3x^2-8x-1}{2x^2-3x-2}$

Dom $(f+g)=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-1}{2},2\right\}$

35 **Calcula $(f+g)(x)$ y $(f-g)(x)$, y sus respectivos dominios, siendo $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=\dfrac{1-x}{x+2}$.**

- $(f+g)(x)=\dfrac{-x^2+2x+2}{x^2+2x}$

Dom $(f+g)=\mathbb{R}-\{-2,0\}$

- $(f-g)(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+2x}$

Dom $(f-g)=\mathbb{R}-\{-2,0\}$

36 **Dadas las siguientes funciones definidas a trozos, calcula $(f+g)(x)$ y su dominio.**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2-1} & \text{si } x\le 3\\ x^2-1 & \text{si } x>3\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x<0\\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

La función suma queda determinada en tres intervalos, que son:

$(-\infty,0),\ [0,3]$ y $(3,+\infty)$

$$(f+g)(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{si } x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\\ \dfrac{x+3}{x^2-1} & \text{si } x\in[0,1)\cup(1,3]\\ \dfrac{x^3-x^2-x+2}{x-1} & \text{si } x\in(3,+\infty)\end{cases}$$

Dom $(f+g)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

37 **Calcula, en cada caso, $(f\cdot g)(x)$ y su dominio.**

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{2x},\ g(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$

b) $f(x)=x^2-x-6,\ g(x)=\dfrac{x-2}{2x-6}$

a) $(f\cdot g)(x)=\dfrac{x-1}{2\sqrt{x+1}}$ *b)* $(f\cdot g)=\dfrac{x^2-4}{2}$

Dom $(f\cdot g)=(1,0)\cup(0,+\infty)$ Dom $(f\cdot g)=\mathbb{R}-\{3\}$

38 **Halla $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$, y sus respectivos dominios, a partir de las funciones:**

$$f(x)=\frac{3+x}{x^2-3x}\ \text{ y }\ g(x)=\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$$

- $(f+g)(x)=\dfrac{4x^2-3x-3}{x^3-4x^2+3x}$
- $(f-g)(x)=\dfrac{-2x+1}{x^2-x}$

Dom $(f+g)=\mathbb{R}-\{0,1,3\}$ Dom $(f-g)=\mathbb{R}-\{0,1,3\}$

- $(f/g)(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{3x^2-5x}$

Dom $(f/g)=\mathbb{R}-\left\{0,1,\dfrac{5}{3},3\right\}$

39 **Dadas las funciones definidas a trozos:**

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 \text{ si } x\le 0\\ \sqrt{x} \text{ si } x>0\end{cases}\quad \text{y}\quad g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x} \text{ si } x<0\\ \sqrt{x^3} \text{ si } x\ge 0\end{cases}$$

encuentra la expresión de $(f\cdot g)(x)$ y su dominio.

$$(f\cdot g)(x)=\begin{cases}x \text{ si } x<0\\ 0 \text{ si } x=0\\ x^2 \text{ si } x>0\end{cases}$$

Dom $(f\cdot g)=\mathbb{R}$

40 **A partir de los siguientes pares de funciones, halla $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$, indicando su dominio.**

a) $f(x)=\dfrac{2}{3x},\ g(x)=\dfrac{2x}{3}$

b) $f(x)=\sqrt{x^2+1},\ g(x)=3$

c) $f(x)=2x^2+x-3,\ g(x)=\dfrac{1}{x+1}$

a) - $(f\circ g)(x)=\dfrac{1}{x}$

Dom $(f\circ g)=\mathbb{R}-\{0\}$

- $(g\circ f)(x)=\dfrac{4}{9x}$

Dom $(g\circ f)=\mathbb{R}-\{0\}$

b) - $(f\circ g)(x)=f(3)=\sqrt{10}$

Dom $(f\circ g)=\mathbb{R}$

- $(g\circ f)(x)=3$

Dom $(g\circ f)=\mathbb{R}$

c) $(f\circ g)(x)=\dfrac{-3x^2-5x}{(x+1)^2}$

Dom $f\circ g=\mathbb{R}-\{-1\}$

$(g\circ f)(x)=\dfrac{1}{2x^2+x-2}$

Dom $g\circ f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4},\ \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}\right\}$

41 **Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{2-x}{x+1}$ y $g(x)=\sqrt{2x-1}$, calcula la función compuesta de $f(x)$ y $g(x)$ y su dominio.**

$(g\circ f)(x)=\sqrt{\dfrac{3-3x}{x+1}}$

Dom $(g\circ f)=(-1,1]$

42 **A partir de las funciones $f(x)=2x-x^2$ y $g(x)=\sqrt{x-2}$, halla $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$ y sus respectivos dominios. ¿Qué se observa? ¿Es siempre posible la composición?**

$(f\circ g)(x)=2\sqrt{x-2}-x+2$, Dom $(f\circ g)=[2,+\infty)$

$(g\circ f)(x)=\sqrt{-x^2+2x-2}$, Dom $(g\circ f)=\varnothing$

$(g\circ f)(x)$ no existe, puesto que el recorrido de $f(x)=(-\infty,1]$ no está incluido en el dominio de $g(x)$, que es $[2,+\infty)$.

43 **La función $h(x)=4x^2$ se puede entender como la composición de las funciones $f(x)=2x$ y $g(x)=x^2$ de este modo: $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x)=4x^2=h(x)$.**

Expresa las siguientes funciones como composición de funciones, indicando estas últimas:

a) $h(x)=5\sqrt{x}+5$

b) $h(x)=5x^4+2x^2+6$

a) $f(x)=5x$ y $g(x)=\sqrt{x}+1\Rightarrow h(x)=(f\circ g)(x)$

b) $f(x)=5x^2+2x+6$ y $g(x)=x^2\Rightarrow h(x)=(f\circ g)(x)$

Función inversa

44 **¿Existe función inversa respecto de la composición para las siguientes funciones? Si es así, halla su expresión.**

a) $f(x) = 3x - 2$

b) $f(x) = \dfrac{x-3}{4x}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x+8}$

d) $f(x) = x^2 + 5x$

e) $f(x) = \dfrac{1}{4x+2}$

f) $f(x) = -x - \dfrac{1}{x}$

g) $f(x) = x^2 - 3x + 1$

h) $f(x) = 1 - \dfrac{4}{x}$

a) $f(x)$ es biyectiva, por tanto, tiene inversa:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

b) $f(x)$ es inyectiva: $f^{-1}(x) = \dfrac{-3}{4x-1}$

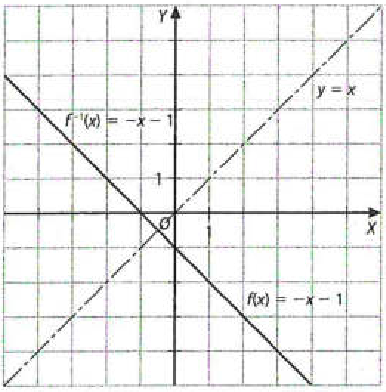
c) $f^{-1}(x) = x^3 - 8$

e) $f(x)$ es inyectiva: $f^{-1}(x) = \dfrac{1-2x}{4x}$

h) $f^{-1}(x) = \dfrac{-4}{x-1}$

Las funciones de los apartados *d), f)* y *g)* no son inyectivas y por tanto no existe su función inversa.

45 **Representa la función $f(x) = -x - 1$ y su inversa.**

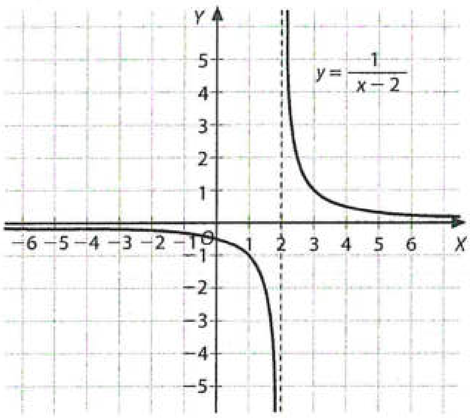


Transformaciones de funciones

46 **A partir de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, representa las siguientes funciones e indica sus dominios y recorridos.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ ***b)*** $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x-2}$ ***c)*** $f(x) = \dfrac{1}{3x}$

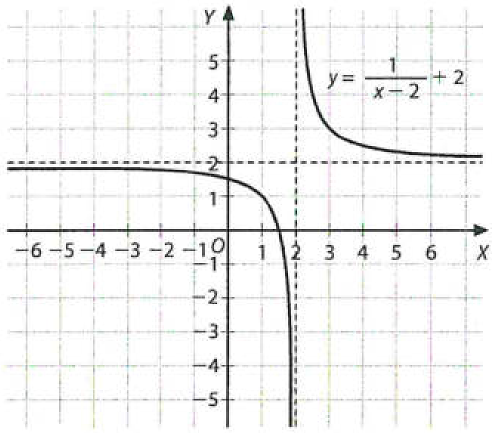
a)



Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

Rec $f = \mathbb{R} - \{0\}$

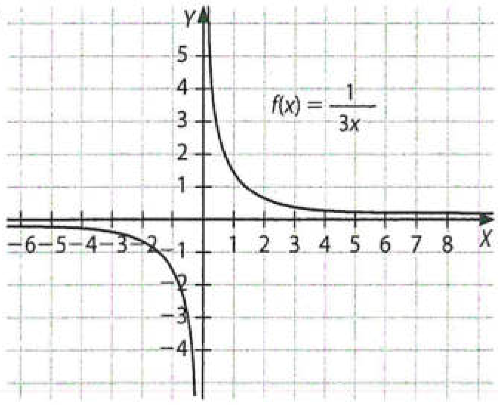
b)



Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

Rec $f = \mathbb{R} - \{2\}$

c)

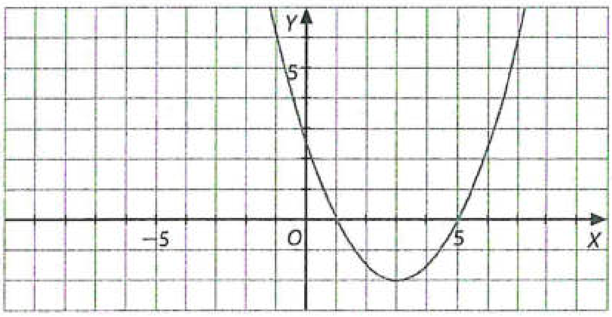


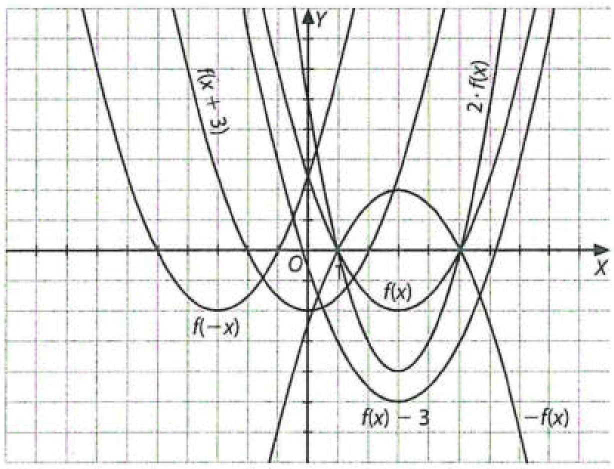
Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

Rec $f = \mathbb{R} - \{0\}$

47 **A partir de la gráfica de la función $f(x)$ de la figura, representa:**

$f(-x)$, $-f(x)$, $f(x+3)$, $f(x) - 3$ y $2 \cdot f(x)$





Ejercicios de aplicación

48 **Consideras las siguientes funciones:**

- $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
- $g(x) = -(x+1)^2$
- $h(x) = x^2 + x + 1$
- $i(x) = -3x^2 - x + 2$

a) **Represéntalas gráficamente, indicando sus ceros, sus vértices y sus ejes de simetría.**

b) **Estudia su signo.**

c) **Indica sus intervalos de monotonía y sus recorridos.**

d) **Escribe las funciones valor absoluto correspondientes a cada una como funciones a trozos, y represéntalas.**

- $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ es una función polinómica de segundo grado, con $a > 0$, por tanto, su representación corresponde a una parábola con las ramas hacia arriba, y su vértice es el punto que separa un intervalo de decrecimiento de otro de crecimiento.

  Dado que el vértice es el punto cuya abscisa es:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4}$$

  En $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$, $f(x)$ es estrictamente decreciente.

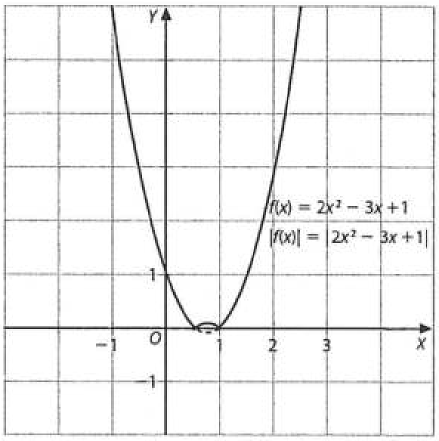
  En $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$, $f(x)$ es estrictamente creciente.

  Su eje de simetría es la recta $x = \frac{3}{4}$.

  Sus ceros son 1 y $\frac{1}{2}$, por lo que $f(x) > 0$ en

  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ y $f(x) < 0$ en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

  Su recorrido es $\left[-\frac{1}{8}, +\infty\right)$.



$$|2x^2 - 3x + 1| = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 \text{ en } \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty) \\ -2x^2 + 3x - 1 \text{ en } \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

- $g(x) = -(x+1)^2$ es una función polinómica de segundo grado, con $a < 0$, por tanto, su representación corresponde a una parábola con la ramas hacia abajo, y su vértice es el punto que separa un intervalo de crecimiento de otro de decrecimiento.

  Dado que el vértice es el punto cuya abscisa es:

$$x = \frac{-b}{2a} = -1$$

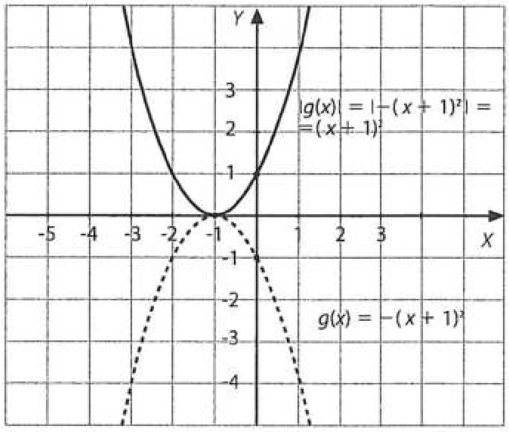
  En $(-\infty, -1)$, $g(x)$ es estrictamente creciente.

  En $(-1, +\infty)$, $g(x)$ es estrictamente decreciente.

  Su eje de simetría es la recta $x = -1$.

  Tiene un cero, -1, por lo que $g(x) < 0$ en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

  Su recorrido es $(-\infty, 0]$.



- $h(x) = x^2 + x + 1$ es una función polinómica de segundo grado, con $a > 0$, por tanto, su representación corresponde a una parábola *con las ramas hacia arriba*, y su vértice es el punto que separa un intervalo de decrecimiento de otro de crecimiento.

  Dado que el vértice es el punto cuya abscisa es:

$$x = -\frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2}$$

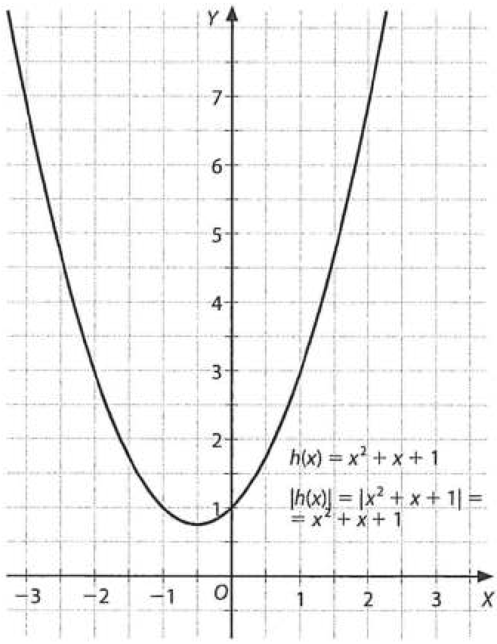
  En $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$, $h(x)$ es estrictamente decreciente.

  En $\left(\frac{-1}{2}, +\infty\right)$, $h(x)$ es estrictamente creciente.

  Su eje de simetría es la recta $x = \frac{-1}{2}$.

  No tiene ceros. Es siempre positiva.

  Su recorrido es $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$.



- $i(x) = -3x^2 - x + 2$ es una función polinómica de segundo grado, con $a < 0$, por tanto, su representación corresponde a una parábola invertida, y su vértice es el punto que separa un intervalo de crecimiento de otro de decrecimiento.

Dado que el vértice es el punto cuya abscisa es

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{6}$$

En $\left(-\infty, \frac{-1}{6}\right)$, $i(x)$ es estrictamente creciente.

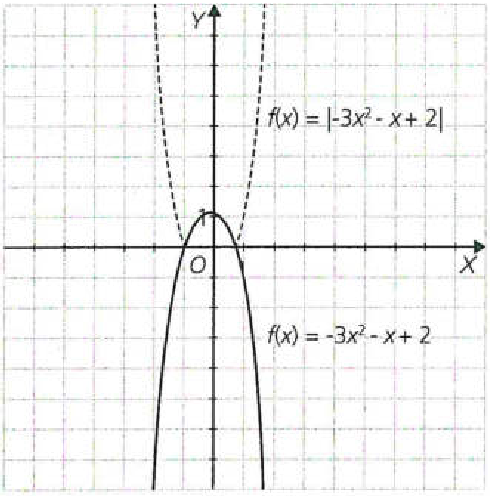
En $\left(\frac{-1}{6}, +\infty\right)$, $i(x)$ es estrictamente decreciente.

Su eje de simetría es la recta $x = \frac{-1}{6}$.

Tiene dos ceros, $\frac{2}{3}$ y -1, por lo que $i(x) < 0$ en:

$\left(-\infty, -1\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ y $i(x) > 0$ en $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$

Su recorrido es $\left(-\infty, \frac{25}{12}\right]$.



49 **Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$:**

a) **Averigua sus ceros.**

b) **Determina sus intervalos de signo constante.**

c) **Esboza una gráfica, completando previamente la siguiente tabla de valores:**

x	−5	−4	−3	−2	−1	1	2	3	4	5
$f(x)$	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

a) $f(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 + 3x - 9) = 0$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$x^2 + 3x - 9 = 0$:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 36}}{2} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = 1{,}85 \text{ y } x = -4{,}85$$

Por tanto, las soluciones serán:

$x = 0$, $x = 1{,}85$ y $x = -4{,}85$

b) Dom $f = \mathbb{R}$ y los ceros de la función son los valores hallados en el apartado anterior, por lo tanto, los intervalos de signo constante son los siguientes:

$(-\infty; -4{,}85)$, $(-4{,}85; 0)$, $(0; 1{,}85)$ y $(1{,}85; +\infty)$

$f(-6) = -54 < 0, \forall x \in (-\infty, -4{,}85), f(x) < 0$

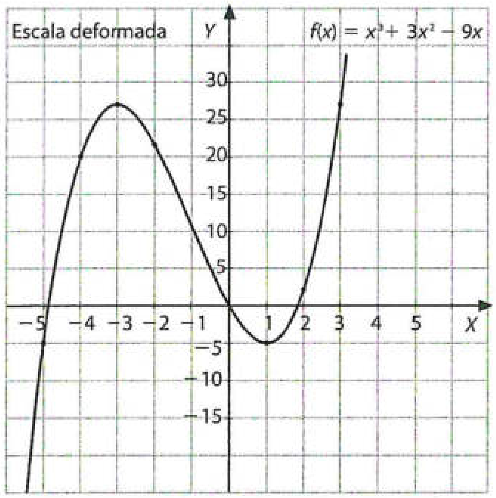
$f(-1) = 11 > 0, \forall x \in (-4{,}85; 0), f(x) > 0$

$f(1) = -5 < 0, \forall x \in (0; 1{,}85), f(x) < 0$

$f(2) = 2 > 0, \forall x \in (1{,}85; +\infty), f(x) > 0$

c)

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	−5	20	27	22	11	0	−5	2	27	76	155



50 **La tarifa del transporte en taxi en cierta localidad depende linealmente de la longitud del trayecto que se efectúe. A un usuario de este servicio, una carrera de 3,6 km le cuesta 7,12 €, y a otro, 8,80 € un trayecto de 5 km. ¿Cuánto vale la bajada de bandera?**

La bajada de bandera cuesta 2,80 €.

51 **De una función lineal se conocen los puntos (−1, 5/2) y (1/4, −3). Halla su expresión analítica. ¿Es una función creciente?**

$f(x) = \frac{-22}{5}x - \frac{19}{10}$. Es una función decreciente.

52 **El porcentaje destinado de I+D del PIB de un determinado país en los años 2008, 2010 y 2012 es la que se indica en la siguiente tabla:**

Año	2008	2010	2012
% I+D del PIB	0,28	0,32	0,47

Mediante interpolación lineal, calcula el porcentaje del PIB destinado de I+D en el año 2009 y realiza una extrapolación para estimar cuánto se destinará en el año 2016.

Con los puntos extremos de la tabla se obtiene la recta $y = 0{,}28 + 0{,}05(x - 2008)$.

En el año 2009, el PIB destinado a I+D fue:

$$y = 0{,}28 + 0{,}05 \cdot 1 = 0{,}33\,\%$$

En el año 2016 podemos suponer que el PIB destinado a I+D será $y = 0{,}28 + 0{,}05 \cdot 8 = 0{,}68\,\%$.

53 **El precio de un viaje en tren es función, entre otras cosas, de los kilómetros recorridos. Recorrer 57 km cuesta 2,21 € y recorrer 68 km vale 2,54 €. Averigua:**

a) **La función afín que expresa el coste del billete en función de los kilómetros recorridos.**

b) **Por extrapolación, el precio del billete cuando la distancia recorrida sea de 500 km.**

c) **Si un billete cuesta 5,93 €, ¿cuántos kilómetros tiene el recorrido?**

a) x es la distancia recorrida, el precio del billete en función de la distancia es: $p(x) = 0{,}03x + 0{,}5$

b) $p(500) = 15{,}50$ €

c) $x = 181$ km

54 **Encuentra una función cuadrática $f(x)$ que tome los valores que muestra la tabla:**

x	0	2	−1
$f(x)$	1,25	−0,75	6,75

$f(x) = 1{,}5x^2 - 4x + 1{,}25$

55 **Expresa el volumen de un cono cualquiera de generatriz 2 dm en función de su altura. ¿Entre qué valores puede oscilar la altura? Indica el dominio de esta función.**

$V(h) = \pi\frac{(4 - h^2)h}{3}$. La altura oscila entre 0 y 2 dm.

Dom $V = (0, 2)$

56 **Si un juguete se vende a 130 € lo compran 1 000 personas. Por cada euro que aumenta (o disminuye) este precio, disminuye (o aumenta), respectivamente, el número de compradores en 50.**

a) **Expresa la función que proporciona el número de juguetes que se venden en función del precio de venta.**

b) **Si el precio de coste de un juguete es de 80 €, calcula el precio, *p*, que proporciona el beneficio total máximo.**

c) **Halla el número de juguetes que se venden si el precio es *p*, y calcula el beneficio máximo.**

a) La función que proporciona el número de juguetes que se venden en función del precio de venta es una recta de pendiente −50 que pasa por el punto (130, 1 000):

$$n(p) = 1\,000 - 50(p - 130) = 7\,500 - 50p$$

b) El beneficio total es el producto de los juguetes vendidos por el beneficio de cada juguete que es $p - 80$:

$$B(p) = (7\,500 - 50p)(p - 80) = -50p^2 + 11\,500p - 600\,000$$

$B(p)$ tiene su valor máximo en $p = -\frac{11\,500}{-100} = 115$ €.

c) Para $p = 115$ € se venden $n(115) = 1\,750$ juguetes, y el beneficio que proporcionan es de $B(115) = 61\,250$ €.

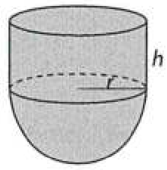
57 **El perímetro de un triángulo isósceles es 6 cm. Expresa el área del triángulo en función de la base, *b*, y determina su dominio.**

$A(b) = \frac{b}{2}\sqrt{9 - 3b}$, Dom $A = (0, 3)$

58 **Expresa el área de un pentágono regular en función de su lado, *l*, y determina su dominio.**

$A(l) = \frac{5l^2}{4\,\mathrm{tg}\,(\pi/5)}$, Dom $A = \mathbb{R}^+$

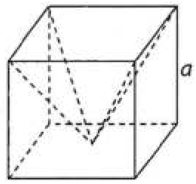
59 **El área de un contenedor formado por una semiesfera de radio *r* y un cilindro abierto de altura *h* es de 32 m². Expresa su volumen en función del radio, y determina su dominio.**



$V(r) = 16r - \frac{1}{3}\pi r^3$, Dom $V = (0, 4)$

60 **En un cubo se instala un depósito en forma de pirámide invertida con la misma base que la cara superior del cubo.**

Determina el área de la cuatro caras del depósito, en función de su volumen.



$A(V) = \sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{9V^2}$, Dom $A = \mathbb{R}^+$

61 **Un almacén tiene forma de prisma recto de base cuadrada y su volumen es 768 m³. Se sabe que la pérdida de calor a través de las paredes laterales es de 100 unidades por m², mientras que por el techo es de 300 unidades por m². La pérdida de calor a través del suelo es despreciable. Expresa la pérdida de calor del almacén en función del lado de su base.**

Si x es el lado de la base e y la altura del almacén:

Calor perdido a través de las paredes: $400xy$

Calor perdido a través del techo: $300x^2$

Calor total perdido: $400xy + 300x^2$

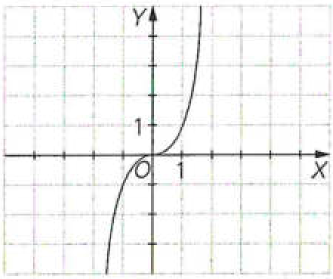
Dado que $V = 768$ m³ $\Rightarrow y = \frac{768}{x^2}$, con lo que el calor perdido en función de x será:

$$C(x) = \frac{307\,200}{x} + 300x^2$$

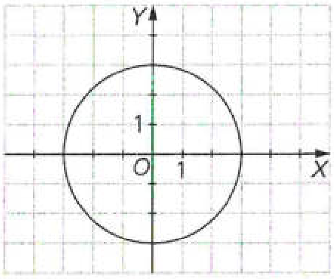
Evaluación (página 235)

1. Determina cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función. Construye una tabla de valores y escribe su expresión analítica.

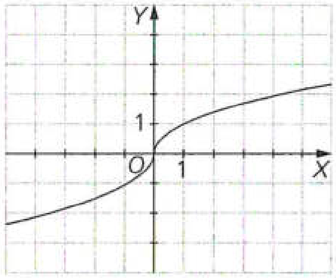
a)



b)



c)



a) Corresponde a la función $y = x^3$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8

b) No corresponde a una función porque existen valores de la x a los que no les corresponde un único valor de la y.

c) Corresponde a la función $y = \sqrt[3]{x}$.

x	-8	-1	0	1	8
$f(x)$	-2	-1	0	1	2

2. Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ *b)* $f(x) = x^2 - 5x$ *c)* $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 9}$ *d)* $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 4}{x}$ *e)* $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

a) $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

b) Es una función polinómica. $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

c) $x^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 3 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

d) $x \neq 0 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

e) $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow \text{Dom } f = [-1, 1]$

3. Estudia el signo de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ *b)* $f(x) = \dfrac{x - 5}{x^2 + 5x + 6}$ *c)* $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}$ *d)* $f(x) = x^2 + 3x + 2$

a) El signo es constante en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

$f(-2) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en $(-\infty, -1)$.

$f(-0{,}5) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(-1, 0)$.

$f(0{,}5) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en $(0, 1)$.

$f(2) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(1, +\infty)$.

b) El signo es constante en los intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, 5)$ y $(5, +\infty)$.

$f(-4) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en $(-\infty, -3)$.

$f(-2{,}5) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(-3, -2)$.

$f(0) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en $(-2, 5)$.

$f(6) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(5, +\infty)$.

c) El signo es constante en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$ y $(4, +\infty)$.

$f(-3) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(-\infty, -2)$.

$f(0) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en $(-2, 1)$.

$f(1{,}5) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(1, 2)$.

$f(3) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en $(2, 4)$.

$f(5) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(4, +\infty)$.

d) El signo es constante en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, +\infty)$.

$f(-3) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en el intervalo $(-\infty, -2)$.

$f(-1{,}5) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en el intervalo $(-2, -1)$.

$f(0) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en el intervalo $(-1, +\infty)$.

4. Estudia la simetría de:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2}$ *b)* $f(x)=x^2-4x$ *c)* $f(x)=\dfrac{x^3-5x}{x^2}$

a) $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-4}{(-x)^2}=\dfrac{x^2-4}{x^2}=f(x)$

Es una función par.

b) $f(-x)=(-x)^2-4\cdot(-x)=x^2+4x; -f(x)=-x^2+4x$

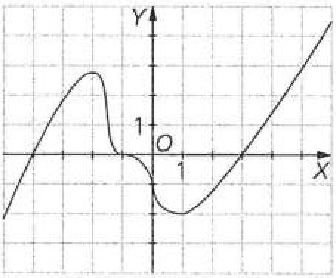
No es par ni impar.

c) $f(-x)=\dfrac{(-x)^3-5(-x)}{(-x)^2}=\dfrac{-x^3+5x}{x^2}=-f(x)$

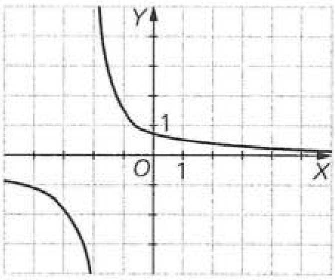
Es una función impar.

5. Determina la monotonía y la curvatura de estas funciones. ¿Alguna de ellas está acotada?

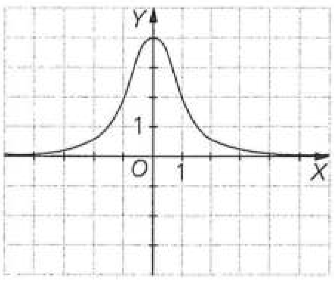
a)



b)



c)



a) Crece en $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-2, 1)$.

Es convexa en el intervalo $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right) \cup (-1, 0)$ y cóncava en $\left(-\dfrac{3}{2}, -1\right) \cup (0, +\infty)$.

No está acotada.

b) Es decreciente en todo su dominio. Es convexa en el intervalo $(-\infty, -2)$ y cóncava en $(-2, +\infty)$. No está acotada.

c) Crece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decrece en el intervalo $(0, +\infty)$. Es cóncava en el intervalo $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$ y convexa en $(-1, 1)$. Está acotada inferiormente por 0 y superiormente por 4.

6. Determina todas las características de estas funciones.

a) $f(x)=x^2-1$ *b)* $f(x)=x^2-3x+2$ *c)* $f(x)=-x^2+x$ *d)* $f(x)=-x^2+4$

Todas las funciones son parábolas.

a) Es positiva en los intervalos $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, y negativa en $(-1, 1)$.

El vértice es el punto $(0, -1)$, y es el mínimo de la función.

Es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.

Los puntos de corte con el eje X son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, y el punto de corte con el eje Y, $(0, -1)$.

Es una función cóncava.

b) Es positiva en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(2, +\infty)$, y negativa en $(1, 2)$.

El vértice es el punto $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$, y es el mínimo de la función.

Es decreciente en $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$ y creciente en $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$.

Los puntos de corte con el eje X son $(1, 0)$ y $(2, 0)$, y el punto de corte con el eje Y, $(0, 2)$.

Es una función cóncava.

c) Es negativa en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(1, +\infty)$, y positiva en $(0, 1)$.

El vértice es el punto $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$, y es el máximo de la función.

Es creciente en $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ y decreciente en $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

Los puntos de corte con el eje X son $(0, 0)$ y $(1, 0)$, y el punto de corte con el eje Y, $(0, 0)$.

Es una función convexa.

d) Es negativa en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$, y positiva en $(-2, 2)$.

El vértice es el punto $(0, 4)$, y es el máximo de la función.

Es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

Los puntos de corte con el eje X son $(-2, 0)$ y $(2, 0)$, y el punto de corte con el eje Y, $(0, 4)$.

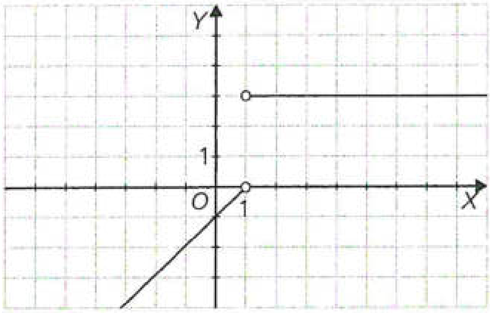
Es una función convexa.

7. Estudia y representa estas funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x<1 \\ 3 & \text{si } x>1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \le -1 \\ -x+2 & \text{si } -1<x<2 \\ x^2-3 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

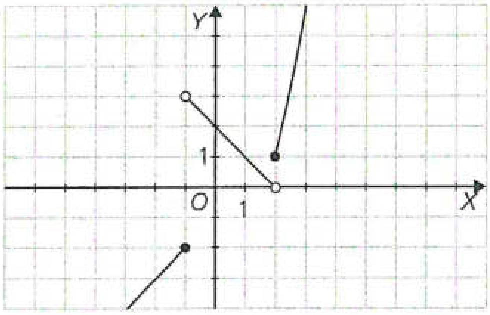
a)



Es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y constante en el intervalo $(1, +\infty)$.

No corta con el eje *X* y el punto de corte con el eje *Y* es $(0, -1)$.

b)



Es creciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 2)$.

No corta con el eje *X* y el punto de corte con el eje *Y* es $(0, 2)$.

Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Límite con el número e (página 255)

En el vídeo se resuelve paso a paso el límite de la sucesión:

$$a_n = \left(\frac{3n-2}{3n+7}\right)^{4n-5}$$

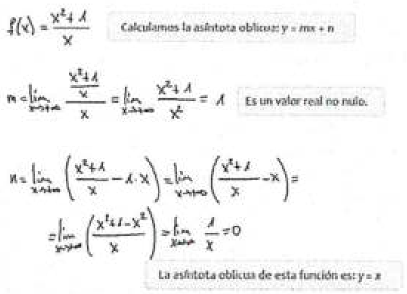
resolviendo la indeterminación del tipo 1^{∞}.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento a seguir para calcular este tipo de límites o para que los alumnos repasen el procedimiento.

Asíntota oblicua (página 256)

En el vídeo se muestra cómo hallar la pendiente y la ordenada de la asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ mediante el cálculo de límites.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento para determinar este tipo de asíntotas o para que los alumnos lo repasen.



Cálculo de parámetros para que una función sea continua (página 271)

En el vídeo se resuelve paso a paso el ejercicio 2.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento a seguir para determinar los valores de a y b para que la función sea continua o para que los alumnos repasen este tipo procedimiento.

Actividades (páginas 239/270)

1 **Dada la sucesión $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{3n+5}{n^2-3}$, calcula los cinco primeros términos.**

Sustituyendo n por los cinco primeros números naturales, del 1 al 5, sucesivamente, se obtiene:

$a_1 = 4$, $a_2 = 11$, $a_3 = -7/3$, $a_4 = 17/13$, $a_5 = -10/11$

2 **Dada la sucesión $a_n = (-n)^3$, calcula el séptimo término.**

Sustituyendo por $n = 7$, se obtiene, $a_7 = -343$

3 **Calcula el término general de las sucesiones siguientes.**

a) **1, 4/3, 6/4, 8/5, …**

b) **0, 3/7, 8/9, 15/11, …**

c) **1/5, 2/9, 4/13, 8/17, …**

a) $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$

b) $a_n = \dfrac{n^2-1}{2n+3}$

c) $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{4n+1}$

4 **Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas.**

a) $-1, -\dfrac{3}{4}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}, \ldots$

b) **5, 3, 1, −1, −3, …**

c) **3, 1, −1, −3, −5, …**

a) La diferencia es $\dfrac{1}{4}$ y $a_1 = -1$, por lo que $a_n = \dfrac{n-5}{4}$

b) La diferencia es -2 y $a_1 = 5$, por lo que $a_n = 7 - 2n$

c) La diferencia es -2 y $a_1 = 3$, por lo que $a_n = 5 - 2n$

5 **Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas.**

a) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8, \ldots$

b) **−3, 3, −3, 3, −3, …**

c) **−4, −12, −36, −108, …**

a) La razón es $\sqrt{2}$ y $a_1 = \sqrt{2}$, por lo que $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n$

b) La razón es -1 y $a_1 = -3$, por lo que $a_n = (-1)^n \cdot 3$

c) La razón es 3 y $a_1 = -4$, por lo que $a_n = -4 \cdot (3)^{n-1}$

6 **¿Cuántos números impares consecutivos a partir de 1 suman 10 201?**

Es una progresión aritmética de primer término 1 y diferencia 2, por lo que:

$$10\,201 = \frac{1+a_n}{2} \cdot n = \frac{1+1+2(n-1)}{2} \cdot n \Rightarrow 10\,201 = n^2$$
$$\Rightarrow n = 101$$

Son 101 números impares consecutivos.

7 **En una progresión aritmética que tiene un número impar de términos, el término central es 42. ¿Qué valor tiene la suma de los términos extremos?**

$2 \cdot 42 = 84$

8 **Sabiendo que en una progresión aritmética $S_{15} = 75$ y la diferencia $d = \dfrac{1}{2}$, calcula a_8.**

$$75 = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 \Rightarrow 10 = a_1 + a_{15} = 2a_8 \Rightarrow a_8 = 5$$

9 **Halla la suma de los 10 primeros términos de una progresión geométrica si $a_2 = 5$ y $a_{15} = \dfrac{45}{2^{13}}$. ¿Cuánto vale la suma de todos sus términos?**

En primer lugar calculamos r:

$$r^{13} = \frac{45}{2^{13}} : 5 = \frac{9}{2^{13}} \Rightarrow r = \frac{\sqrt[13]{9}}{2}$$

Después, se calcula a_1:

$$a_1 = 5 : \frac{\sqrt[13]{9}}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{10}{\sqrt[13]{9}}$$

Sustituyendo en la expresión para la suma de n términos de una progresión geométrica, siendo $n = 10$ y a_1 y r los valores hallados, se obtiene:

$$S_{10} = \frac{a_1(r^{10} - 1)}{r - 1} = 20{,}59$$

Si se desea calcular la suma de todos los términos de esta progresión, basta observar que es una progresión decreciente, puesto que $r < 1$:

$$S = \frac{a_1}{1-r} = 20{,}7$$

10 **La suma de los 9 primeros términos de una progresión geométrica es 19 682 y la razón $r = 3$. Halla los nueve primeros términos de la progresión.**

$S_9 = \dfrac{a_1(r^9 - 1)}{r - 1} \Rightarrow 19\,682 = \dfrac{a_1(3^9 - 1)}{2} \Rightarrow a_1 = 2$, por lo que los términos son: 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1 458, 4 374, 13 122.

11 **Sabiendo que en una progresión geométrica el producto de los 5 primeros términos es $P_5 = 2^{12} \cdot \sqrt{2}$, calcula a_3.**

Puesto que $a_1 \cdot a_5 = a_3^2$, se puede escribir:

$$2\sqrt[12]{2} = \sqrt{(a_3^2)^5} \Rightarrow 2^{25} = a_3^{10} \Rightarrow a_3 = 2^2 \cdot 2^{5/10} = 4\sqrt{2}$$

12 **Determina, calculando algunos de sus términos, qué tipo de sucesión es cada una de las siguientes.**

a) $\dfrac{n+1}{n}$ ***c)*** 2^{-n+1} ***e)*** $(-2)^n$

b) $\dfrac{n^2+2}{n-1}$ ***d)*** $2^{1/n}$ ***f)*** $\left(\dfrac{-1}{n}\right)^n$

Se calculan sus primeros términos y se obtiene:

a) Convergente ***c)*** Convergente ***e)*** Oscilante

b) Divergente ***d)*** Convergente ***f)*** Convergente

13 **Copia y completa la siguiente tabla para la resta de las sucesiones x_n e y_n:**

$-$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$	$a - b$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND

14 **Calcula los términos 100, 1 000 y 10 000 de las siguientes sucesiones.**

a) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ***b)*** $n^{1/n}$ ***c)*** $\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ ***d)*** $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{\frac{2}{n}}$

a) $a_{100} = 2{,}7048$ $a_{1\,000} = 2{,}7169$ $a_{10\,000} = 2{,}7181$

b) $a_{100} = 1{,}0471$ $a_{1\,000} = 1{,}0069$ $a_{10\,000} = 1{,}0009$

c) $a_{100} = 0{,}9559$ $a_{1\,000} = 0{,}9931$ $a_{10\,000} = 0{,}9991$

d) $a_{100} = 0{,}9118$ $a_{1\,000} = 0{,}9863$ $a_{10\,000} = 0{,}9982$

15 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (3n^2 + 10\,000 - n^4)$ ***d)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^6+2n^2}{3n^6+2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} [4n^3 + 2n - (5n^2+4)^2]$ ***e)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+2n+3}{1-n^3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2-2n^5}}{2n^2+6}$ ***f)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3+2n-5}{2n^2+5n-n^3}$

Para salvar la indeterminación podemos escribir:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (-n^4) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} (-25n^4) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{-n^5}{n^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} (-n^3) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{n^6}{3n^6}\right) = \dfrac{1}{3}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4n^2}{-n^3}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-4}{n} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4n^3}{-n^3}\right) = -4$

16 **Calcula los límites de las siguientes sucesiones.**

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{8n^2+2n+3}}{\sqrt[3]{8n^3-5n^2+3}}$

b) $b_n = \dfrac{\sqrt[3]{-3n^3+2n-5}}{\sqrt[3]{2n^2+3}}$

c) $c_n = \dfrac{n-2}{\sqrt[5]{32n^5+8}}$

d) $d_n = \dfrac{\sqrt[6]{n^5+4n^3}}{\sqrt[8]{2n^7+5n^2}}$

Para salvar la indeterminación podemos escribir:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{8n^2}}{\sqrt[3]{8n^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2n\sqrt{2}}{2n} = \sqrt{2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} b_n = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-\sqrt[3]{3}n}{\sqrt[3]{2}n^{2/3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-\sqrt[3]{3}n}{\sqrt[3]{2}} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} c_n = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} d_n = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n^{5/6}}{\sqrt[8]{2}n^{7/8}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[24]{n}} = 0$

17 **Calcula los límites de las sucesiones que tienen los siguientes términos generales.**

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{121n^2+4n-3} - \sqrt{121n^2+19n}}{4}$

b) $b_n = \sqrt{25n^2+4n} - (5n+3)$

c) $c_n = \sqrt{36n^2-1} - \sqrt{36n^2-5n}$

Para salvar la indeterminación podemos escribir:

a) Multiplicando por la expresión conjugada del numerador se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{121n^2+4n-3-121n^2-19n}{4\cdot\left(\sqrt{121n^2+4n-3}+\sqrt{121n^2+19n}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-15n}{4\cdot 22n} = \frac{-15}{88}$$

b) Multiplicando por la expresión conjugada del numerador se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{25n^2+4n-25n^2-30n-9}{\sqrt{25n^2+4n}+5n+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{-26n}{10n} = \frac{-13}{5}$$

c) Multiplicando por la expresión conjugada del numerador se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{36n^2-1-36n^2+5n}{\sqrt{36n^2-1}+\sqrt{36n^2+5n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5n}{12n} = \frac{5}{12}$$

18 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+2}{2n-7}\right)^{n-n^3}$ ***c)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{7n+2}{2n-5}\right)^{\frac{3}{n}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n+3)^{\frac{4n-2}{2n}}$ ***d)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{9n^2+3n-5}}{\sqrt{2n+n^2}}\right)^{\frac{2n}{n+1}}$

Para salvar la indeterminación podemos escribir:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3n}{2n}\right)^{-n^3} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-\infty} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} (2n)^{4n/2n} = (+\infty)^2 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{7n}{2n}\right)^{7/n} = \left(\dfrac{7}{2}\right)^0 = 1$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3n}{n}\right)^{2n/n} = (3)^2 = 9$

19 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+2}{2n-2}\right)^{4n+5}$ *d)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2-1}{5n^2+n}\right)^{2n-2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-7}{3n^2+2n}\right)^{\frac{4n^2+2}{3n-7}}$ *e)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n+4}{6n-3}\right)^{\frac{4n^2+2}{2n}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+7}{3n+2}\right)^{5n-9}$ *f)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+4}{5n-4}\right)^{-n+2}$

Para salvar la indeterminación, en cada caso, podemos escribir:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot(4n+5)\cdot\frac{2}{n-1}}=e^8$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{3n^2+2n}{-2n-7}}\right)^{\frac{3n^2+2n}{-2n-7}\cdot\frac{4n^2+2}{3n-7}\cdot\frac{-2n-7}{3n^2+2n}}=e^{-8/9}=\dfrac{1}{\sqrt[9]{e^8}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{3n}\right)^{5n}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{+\infty}=0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{5n^2+n}{-n-1}}\right)^{\frac{5n^2+n}{-n-1}\cdot(2n-2)\cdot\frac{-n-1}{5n^2+n}}=e^{-2/5}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{e^2}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{6n-3}{7}}\right)^{\frac{6n-3}{7}\cdot\frac{4n^2+2}{2n}\cdot\frac{7}{6n-3}}=e^{7/3}=\sqrt[3]{e^7}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{5n-4}{8}}\right)^{\frac{5n-4}{8}\cdot(-n+2)\cdot\frac{8}{5n-4}}=e^{-8/5}=\dfrac{1}{e\sqrt[5]{e^3}}$

20 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+5n+2}{n^2+1}\right)^{4n}$ *e)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{2n+1}{n+2}\right)^{-n+7}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2-6n}\right)^{n+6}$ *f)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+13}{2n-2}\right)^{\frac{-1}{n}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-4}{2+n}\right)^{1-n^2}$ *g)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2n}{1-2n}\right)^{\frac{4-n^2}{n+2}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+4}{2n-2}-\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1-n^2}{n+4}}$ *h)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n}{n^3+1}\right)^{-2n+3}$

Para salvar la indeterminación, en cada caso, podemos escribir:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{n^2+1}{5n+1}}\right)^{\frac{n^2+n}{5n+1}\cdot 4n\cdot\frac{5n+1}{n^2+1}}=e^{20}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{6n-2}{3}}\right)^{\frac{6n-2}{3}\cdot(n+6)\cdot\frac{3}{6n+2}}=\sqrt{e}$

c) $5^{-\infty}=0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{2n-2}{7}}\right)^{\frac{2n-2}{7}\cdot\frac{1-n^2}{n+4}\cdot\frac{7}{2n-2}}=e^{-7/2}=\dfrac{1}{e^3\sqrt{e}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{n+2}{3}}\right)^{\frac{n+2}{3}\cdot(-n+7)\cdot\frac{3}{n+2}}=e^{-3}=\dfrac{1}{e^3}$

f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=1$

g) $2^{-\infty}=0$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{n^3+1}{n-1}}\right)^{\frac{n^3+1}{n-1}\cdot(-2n+3)\cdot\frac{(n-1)}{n^3+1}}=e^0=1$

21 **Determina los límites en el infinito de las siguientes funciones y escribe la ecuación de sus asíntotas horizontales.**

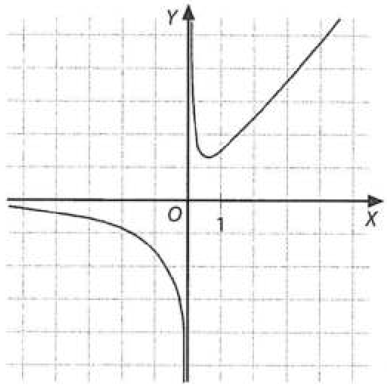


Figura 9.9.

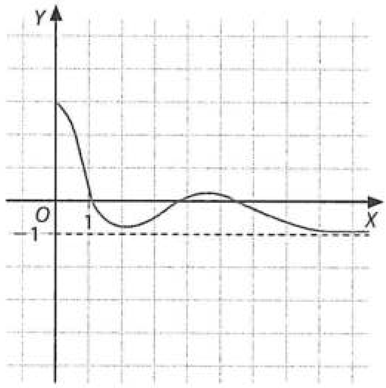


Figura 9.10.

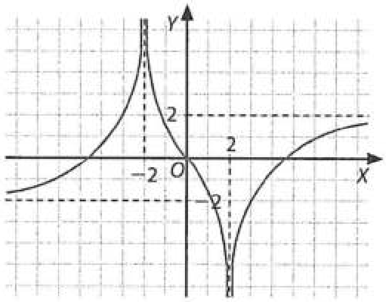


Figura 9.11.

Figura 9.9: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Tiene una asíntota horizontal por la izquierda ($y=0$).

Figura 9.10: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$.

Tiene una asíntota horizontal por la derecha ($y=-1$).

Figura 9.11: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$.

Tiene una asíntota horizontal por la derecha ($y=2$) y otra por la izquierda ($y=-2$).

22 **Calcula la ecuación de las asíntotas horizontales, si las tienen, de las siguientes funciones.**

a) $f(x)=\dfrac{1-2x^2}{x^2-1}$ *c)* $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3}$

b) $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+1}$ *d)* $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-2$, luego, asíntota horizontal $y=-2$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3/2$, luego, asíntota horizontal $y=3/2$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, luego, asíntota horizontal $y=0$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, luego, asíntota horizontal por la izquierda $y=-1$, y por la derecha $y=1$.

23 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x+1}{7x^2} \cdot \dfrac{x^2}{x-1} \right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5}{2} \right)^{\frac{x^3+1}{2x^2}}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{5}{2} \right)^{\frac{x^3+1}{2x^2}}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{2x-3} \right)^{x+1}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^3-5x+1}{3x^3-2x^2+5} \right)^{-x+1}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1} \right)$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2-2} - 2x \right)$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x-2}{3x+1} \right)^{-6x}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2-1}{2x^2-2x+1} \right)^{x+1}$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^4+3} \right)$

Para salvar la indeterminación, en cada caso, podemos escribir:

a) Indeterminación $0 \cdot \infty$

Para resolver el límite, primero multiplicamos y después simplificamos ambas funciones:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{7x^3} = \frac{1}{7}$$

b) Indeterminación ∞/∞

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5}{2} \right)^x = \left(\frac{5}{2} \right)^{+\infty} = +\infty$$

c) Indeterminación ∞/∞

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5}{2} \right)^x = \left(\frac{5}{2} \right)^{-\infty} = 0$$

d) Indeterminación ∞/∞

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x = \left(\frac{1}{2} \right)^{+\infty} = 0$$

e) Indeterminación ∞/∞

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{-x} = \left(\frac{2}{3} \right)^{-\infty} = +\infty$$

f) Indeterminación $\infty - \infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2}$$

g) Indeterminación $\infty - \infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{4x} = 0$$

h) Indeterminación 1^∞

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{-3}} \right)^{\frac{3x-1}{-3} \cdot (-6x) \cdot \frac{-3}{3x-1}} = e^6$$

i) Indeterminación 1^∞

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x^2-2x-1}{-2x-2}} \right)^{\frac{2x^2-2x-1}{-2x-2} \cdot (x+1) \cdot \frac{-2x-2}{2x^2-2x-1}} = \frac{1}{e}$$

j) Indeterminación $\infty - \infty$

$-\infty$

24 Halla lo que se indica en cada apartado.

a) Figura 9.26: Dom f, Rec f, $f(0)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Figura 9.27: Dom f, Rec f, $f(0)$, $f^{-1}(1)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Figura 9.28: Dom f, Rec f, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

e) Figura 9.29: Dom f, Rec f, $f(1)$, $f(3/2)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

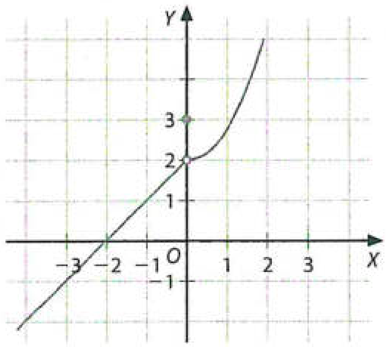


Figura 9.26.

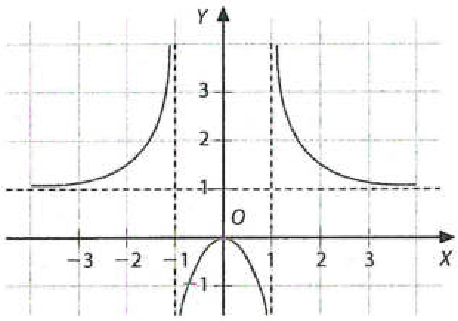


Figura 9.27.

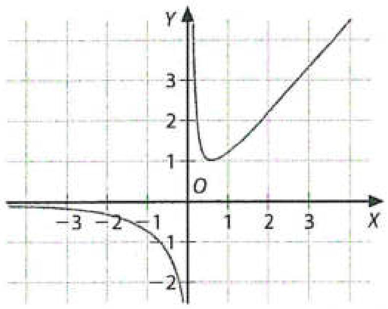


Figura 9.28.

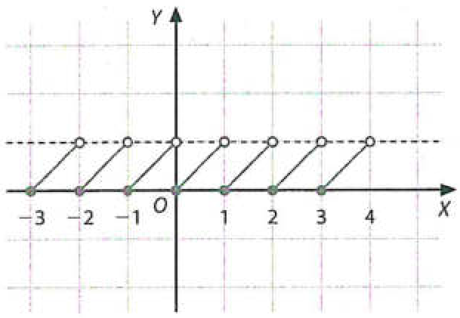


Figura 9.29.

Figura 9.26: Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = \mathbb{R} - \{2\}$, $f(0) = 3$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Figura 9.27: Dom $f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$, Rec $f = \mathbb{R} - (0, 1]$, $f(0) = 0$, $\nexists f^{-1}(1)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Figura 9.28: Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$, Rec $f = \mathbb{R} - [0, 1)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Figura 9.29: Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = [0, 1)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$, $\nexists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$, $\nexists \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

25 **Estudia el límite de las siguientes funciones en los puntos que se indican.**

a) $f(x) = -3x + 5$, en $x = 0$ y en $x = 3$

b) $f(x) = x^3$, en $x = 0$ y en $x = \sqrt{3}$

c) $f(x) = |x - 2|$, en $x = 2$ y en $x = -3$

d) $f(x) = x + E(x)$, en $x = 2$ y en $x = -1$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x - 2}$, en $x = -2$ y en $x = -1$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = -2$, en $x = 2$ y en $x = 4$

g) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq -2 \\ (x + 1)/(x + 3) & \text{si } x > 5 \end{cases}$ en $x = -3$, en $x = -2$ y en $x = 5$

a) $\lim\limits_{x \to 0} (-3x + 5) = 5$, $\lim\limits_{x \to 3} (-3x + 5) = -4$

b) $\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$, $\lim x^3 = \lim\limits_{x \to \sqrt{3}} 3\sqrt{3}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} |x - 2| = 0$, $\lim\limits_{x \to -3} |x - 2| = 5$

d) $\lim\limits_{x \to 2^-} [x + E(x)] = 3$, $\lim\limits_{x \to 2^+} [x + E(x)] = 4$, $\nexists \lim\limits_{x \to 2} [x + E(x)]$

$\lim\limits_{x \to -1^-} [x + E(x)] = -3$, $\lim\limits_{x \to -1^+} [x + E(x)] = -2$,

$\nexists \lim\limits_{x \to -1} [x + E(x)]$

e) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$

f) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 1) = 5$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + 1) = 5$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x + 3) = 5$.

Así, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$.

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (x + 3) = 7$

g) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} (3x - 1) = -10$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - 1) = -7$, $\nexists \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$. Así, $\nexists \lim\limits_{x \to -2} f(x)$.

$\nexists \lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$, así $\nexists \lim\limits_{x \to 5} f(x)$

26 **Construye gráficas que cumplan las siguientes condiciones.**

a) Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = [-1, +\infty)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,

$f(3) = 3$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$, $f^{-1}(0) = \{0, 2\}$

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{0, 2\}$, Rec $f = (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup (3, +\infty)$,

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$,

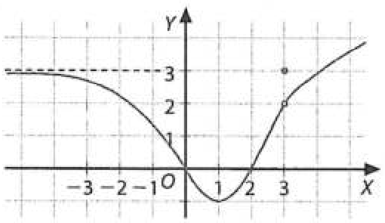
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(Ten en cuenta que $f(x) < 0$ si $x < 0$, $f(x) > 0$ si $x > 0$.)

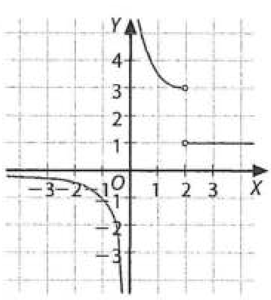
c) Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

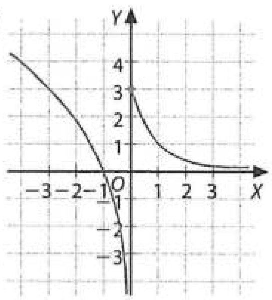
a)



b)



c)



27 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x - 2) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{1}{(x - 2)^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{x + 1}{x^2 - 16} - \dfrac{x}{x - 4}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 1}\right)^{2x+1}$

Para salvar la indeterminación, en cada caso, podemos escribir:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(x - 2 + 1 + \dfrac{1}{x - 2}\right) = \infty$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \left(x^2 - 3x + \dfrac{1}{x^2 - 16}\right) = \infty$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x + 4 - 4}{x(\sqrt{x + 4} - 2)}\right) = \dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{x - 5}{x - 1}\right)^{2x + 1} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$

28 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{x - 4}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{(x - 4)^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 4x}{x - 2}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{(4 + 2x)^3}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} 7^{1/x}$

Para salvar la indeterminación, en cada caso, podemos escribir:

a) ∞

b) $+\infty$

c) $\dfrac{0}{5} = 0$

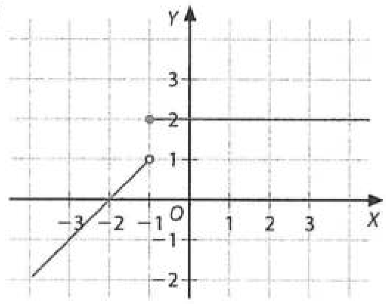
d $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{x}\right) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^3}{8x^3}\right) = \dfrac{1}{8}$

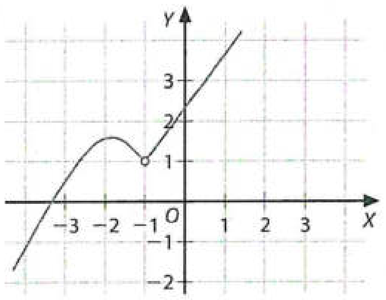
f) $7^0 = 1$

29 **Indica el dominio de continuidad de estas funciones.**

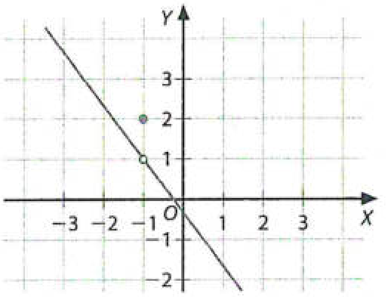
a)



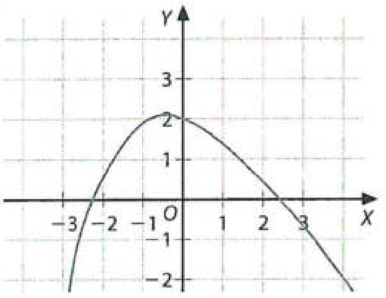
b)



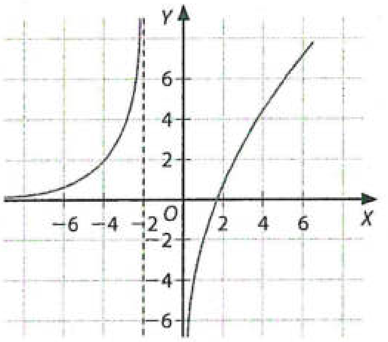
c)



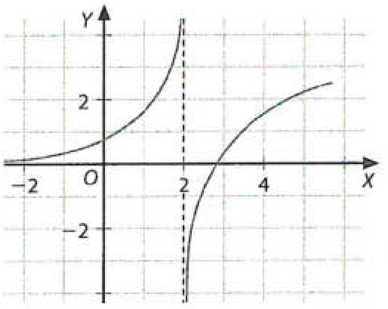
d)



e)



f)



a) Continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

b) Continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

c) Continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

d) Continua en $\mathbb{R}$

e) Continua en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

f) Continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

30 **Clasifica las discontinuidades de las funciones anteriores.**

a) Discontinuidad de salto finito en $x = -1$

b) Discontinuidad evitable en $x = -1$

c) Discontinuidad evitable en $x = -1$

e) Discontinuidades asintóticas en $x = -2$ y $x = 0$

f) Discontinuidad asintótica en $x = 2$

31 **Analiza la continuidad de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = -3x + 5$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = |x - 2|$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

f) $f(x) = x + E(x)$

g) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq -2 \\ \dfrac{x + 1}{x + 3} & \text{si } x > 5 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leq -3 \\ -2x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Continua en $\mathbb{R}$

b) Continua en $\mathbb{R}$

c) Continua en $\mathbb{R}$

d) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2\}$. Puesto que es una función racional es continua en su dominio. En $x = -2$, $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable, puesto que:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} (x + 1) = 3$$

e) Dom $f = \mathbb{R}$. Puesto que:

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5 = \lim_{x \to 2^+} f(x)$, la función es continua en $\mathbb{R}$.

f) Continua en $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. En $x \in \mathbb{Z}$ presenta discontinuidad de salto.

g) Dom $f = (-\infty, -2] \cup (5, +\infty)$. Puesto que las funciones son polinómica y racional, respectivamente en $(-\infty, -2]$ y $(5, +\infty)$, es continua en su dominio.

h) Dom $f = \mathbb{R} - (-3, 2]$. La función es continua en su dominio.

Ejercicios y problemas (páginas 274/278)

Sucesiones. Progresiones aritméticas y geométricas

1 **Calcula el término general de las siguientes sucesiones y di si son convergentes, divergentes u oscilantes.**

a) **3, 7, 11, 15, 19, …**

b) **2, 6, 18, 54, 162, …**

c) **1, 3/2, 2, 5/2, 3, …**

d) **1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, …**

e) **4, 2, 1, 1/2, 1/4, …**

a) $a_n = 4n - 1$, divergente.

b) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, divergente.

c) $a_n = \dfrac{n + 1}{2}$, divergente.

d) $a_n = \dfrac{n}{n + 1}$, convergente.

e) $a_n = 2^{3-n}$, convergente.

2 **Halla el término general de las siguientes sucesiones e indica si son convergentes, divergentes u oscilantes.**

a) **1, 3/4, 5/9, 7/16, …**

b) **2, 5, 10, 17, 26, …**

c) **10, 26, 50, 82, …**

d) **−1/2, 1/5, 3/8, 5/11, …**

e) **−2, 4, −8, 16, …**

a) $a_n = \dfrac{2n - 1}{n^2}$, convergente.

b) $a_n = n^2 + 1$, divergente.

c) $a_n = (2n + 1)^2 + 1$, divergente.

d) $a_n = \dfrac{2n - 3}{3n - 1}$, convergente.

e) $a_n = (-1)^n \cdot 2^n = (-2)^n$, oscilante.

3 **Calcula el término general de cada una de las siguientes sucesiones.**

a) **4, 3, 9/4, 27/16, …** ***d)*** **2, −7/5, 5/4, −13/11, …**

b) **1/16, −1/16, 9/256, −1/64, …** ***e)*** **3,4, 4,5, 5,6, 6,7, …**

c) **3, 2, 35, 46, 57, …**

a) $a_n = 3^{n-1} \cdot 4^{-n+2}$

b) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n^2/4^{n+1}$

c) No tiene un término general.

d) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}(3n+1)}{(3n-1)}$

e) $a_n = (n+2) + \dfrac{(n+3)}{10}$

4 **Dadas las progresiones.**

■ **4, 7, 10, …** ■ **20, 17, 14, …**

Averigua la suma de los n primeros términos de cada sucesión y luego la suma de esas sumas.

$S1_n = \dfrac{3n^2+5n}{2}$ $\quad S2_n = \dfrac{43n-3n^2}{2}$ $\quad S1_n + S2_n = 24n$

5 **Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética y su perímetro es 36 cm. Halla cuánto miden sus lados.**

$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 36 \\ (a_1+2d)^2 = (a_1+d)^2 = a_1^2 \end{cases} \Rightarrow 9, 12 \text{ y } 15 \text{ cm}$

6 **Halla tres números de una progresión aritmética sabiendo que su suma es 6 y la suma de sus cuadrados es $\dfrac{158}{9}$.**

Se plantea un sistema con las dos condiciones:

$a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 6 \Rightarrow a_2 = 2$

$(a_2-d) + a_2^{\,2} + (a_2+d)^2 = \dfrac{158}{9}$

Así $d = \dfrac{5}{3}$ y los términos son: $\dfrac{1}{3}, 2, \dfrac{11}{3}$

7 **Calcula $x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}}$**

$x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}} = 2^{1/2+1/4+1/8+1/16+\ldots}$

El exponente es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $\dfrac{1}{2}$, por tanto el exponente es el valor:

$\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$, con lo que $x = 2^1 = 2$

8 **Se deja caer una bola de goma desde la azotea de un edificio que tiene una altura de 243 metros. Cada vez que toca al suelo, rebota y recorre hacia arriba una distancia igual a las dos terceras partes de la altura desde la que ha caído la última vez.**

a) **¿De qué altura ha caído la bola cuando ha tocado el suelo por sexta vez?**

b) **¿Qué distancia ha recorrido desde que se ha dejado caer hasta que ha tocado al suelo por sexta vez?**

a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \cdot 3^5 = 2^5 = 32$ m

b) $243\left[1 + 2\left(\dfrac{2}{3} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^5\right)\right] = 1\,087$ m.

9 **Un concurso de televisión consiste en proponer al concursante una sucesión de preguntas hasta que de una respuesta incorrecta y quede eliminado. Los premios de cada respuesta se acumulan y son de un euro por la primera, dos por la segunda, cuatro por la tercera y así sucesivamente, en progresión geométrica de razón 2.**

a) **Si se responden diez preguntas correctamente, ¿cuánto dinero se consigue?**

b) **¿Cuál es el mínimo número de preguntas que hay que responder para conseguir 6 000 €?**

a) $S = (1 \cdot 2^{10} - 1)/(2-1) = 1\,023$ €

b) Por tanteo, o tomando logaritmos: $2^{n-1} = 3\,000$, $n = 12{,}55$, luego el mínimo número de preguntas es 13.

Límites de sucesiones

10 **Calcula, a partir de las siguientes sucesiones:**

$a_n = \dfrac{4n^2+3n}{n^2-6n} \qquad b_n = \dfrac{2n+1}{2-7n} \qquad c_n = \dfrac{3n^2+2}{5-n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ ***h)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{c_n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n)$ ***i)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + c_n)$ ***j)*** $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - c_n)$ ***k)*** $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{c_n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{c_n}$ ***l)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot c_n)$ ***m)*** $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n \cdot c_n)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n \cdot c_n)$ ***n)*** $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{1/c_n}$

a) $\lim (a_n + b_n) = 26/7$

b) $\lim (a_n - b_n) = 30/7$

c) $\lim (a_n + c_n) = -\infty$

d) $\lim (b_n - c_n) = +\infty$

e) $\lim (1/c_n) = 0$

f) $\lim (a_n \cdot c_n) = -\infty$

g) $\lim (b_n \cdot c_n) = +\infty$

h) $\lim (b_n/c_n) = 0$

i) $\lim (a_n/b_n) = -14$

j) $\lim (a_n)^{b_n} = \sqrt[7]{1/16}$

k) $\lim (a_n)^{c_n} = 0$

l) $\lim \sqrt{a_n} = 2$

m) $\lim (a_n \cdot b_n \cdot c_n) = +\infty$

n) $\lim (a_n)^{1/c_n} = 1$

11 **Calcula los límites de las siguientes sucesiones.**

a) $a_n = \dfrac{3n^4+2n^5-3n}{6n^4+2n}$ ***d)*** $d_n = \dfrac{-4+n^5+n^8}{3+2n^2-7n^8}$

b) $b_n = \dfrac{2n^2+3n}{6n^3+2n-7}$ ***e)*** $e_n = \dfrac{3n-7}{n^2+1}$

c) $c_n = \dfrac{5n^5-3n^3+1}{-2n^2+3}$ ***f)*** $f_n = \dfrac{(n+3)^2}{n^2+3}$

a) $\lim a_n = \lim [(3n^4 + 2n^5 - 3n)/(6n^4 + 2n)] = +\infty$

b) $\lim b_n = \lim [(2n^2 + 3n)/(6n^3 + 2n - 7)] = 0$

c) $\lim c_n = \lim [(5n^5 - 3n^3 + 1)/(-2n^2 + 3)] = -\infty$

d) $\lim d_n = \lim [(-4 + n^5 + n^8)/(3 + 2n^2 - 7n^8)] = -1/7$

e) $\lim e_n = \lim [(3n - 7)/(n^2 + 1)] = 0$

f) $\lim f_n = \lim [(n + 3)^2/(n^2 + 3)] = 1$

12 Calcula los límites de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \left(\dfrac{10}{3n+3}\right)\cdot(-6n)$

b) $b_n = \left(2+\dfrac{3}{n}\right)\cdot\left(\dfrac{4n+2}{2n-1}\right)\cdot\left(6+\dfrac{1}{n^2}\right)$

c) $c_n = \left(\dfrac{3n-1}{2n+4} - \dfrac{11n+3}{10n^2+5}\right)$

d) $d_n = \left[(n+1)^2 - (n-2)^2\right]$

e) $e_n = \left(\dfrac{5n+1}{7n-4}\right)\cdot\left(\dfrac{7n^2+5}{5n^2-9}\right)$

f) $f_n = \left(\dfrac{n^2}{n^3} + \dfrac{n^3}{n^2}\right)$

a) $\lim a_n = \lim\left[\dfrac{10}{3n+3}\cdot(-6n)\right] = -20$

b) $\lim b_n = \lim\left[\left(2+\dfrac{3}{n}\right)\cdot\left(\dfrac{4n+2}{2n-1}\right)\cdot\left(6+\dfrac{1}{n^2}\right)\right] = 24$

c) $\lim c_n = \lim\left(\dfrac{3n-1}{2n+4} - \dfrac{11n+3}{10n^2+5}\right) = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim d_n = \lim\left[(n+1)^2 - (n-2)^2\right] = +\infty$

e) $\lim e_n = \lim\left(\dfrac{5n+1}{7n-4} - \dfrac{7n^2+5}{5n^2-9}\right) = 1$

f) $\lim f_n = \lim\left(\dfrac{n^2}{n^3} + \dfrac{n^3}{n^2}\right) = +\infty$

13 Calcula los límites de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^3}+n^2+1}{3\sqrt{n^3}+2n^2-7}$

b) $b_n = \dfrac{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{9n}+3\sqrt[3]{n}+5\sqrt[4]{n}}$

c) $c_n = \sqrt[3]{n^4+4} - \sqrt[4]{n^3+3}$

d) $d_n = \sqrt[3]{n^7 - 10^8}$

e) $e_n = \sqrt{13n^2-4} - \sqrt{6n^2+5}$

f) $f_n = \sqrt{13n^2-4} - \sqrt{7n^3+10n}$

a) $\lim\left(\sqrt{n^3}+n^2+1\right)/\left(3\sqrt{n^3}+2n^2-7\right) = 1/2$

b) $\lim\left[\left(2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}\right)/\left(\sqrt{9n}+3\sqrt[3]{n}+5\sqrt[4]{n}\right)\right] = 2/3$

c) $\lim\left(\sqrt[3]{n^4+4} - \sqrt[4]{n^3+3}\right) = +\infty$

d) $\lim\left(\sqrt[3]{n^7-10^8}\right) = +\infty$

e) $\lim\left(\sqrt{13n^2-4} - \sqrt{6n^2+5}\right) = +\infty$

f) $\lim\left(\sqrt{13n^2-4} - \sqrt{7n^3+10n}\right) = -\infty$

14 Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2-2}$

b) $b_n = 1/\left(\sqrt{19n^2} - \sqrt{19n^2+3n}\right)$

c) $c_n = \sqrt{6n^2+3} - (6n+2)$

d) $d_n = \sqrt{16n^2+5} - (4n-9)$

e) $e_n = \left(\sqrt{25n^2+3} - \sqrt{25n^2-5n}\right)/10$

a) $\lim a_n = \lim\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2-2n}\right) = 1$

b) $\lim b_n = \lim\left[1/\left(\sqrt{19n^2} - \sqrt{19n^2+3n}\right)\right] = -2\sqrt{19}/3$

c) $\lim c_n = \lim\left[\sqrt{6n^2+3} - (6n+2)\right] = -\infty$

d) $\lim d_n = \lim\left[\sqrt{16n^2+5} - (4n-9)\right] = 9$

e) $\lim e_n = \lim\left[\left(\sqrt{25n^2+3} - \sqrt{25n^2-5n}\right)/10\right] = 1/20$

15 Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = (3n+2)^{\frac{-3n+2}{2n+3}}$

b) $b_n = \left(\dfrac{6}{6n^2+2}\right)^{\sqrt{(25n^2-5)/n^2}}$

c) $c_n = \left(\dfrac{3n+2}{4n-1}\right)^{3n}$

d) $d_n = \left(10+\dfrac{10}{n}\right)^{10n}$

e) $e_n = \left(\dfrac{3+5/n^5}{6+6/n^6}\right)^{\frac{3n}{2+n}}$

f) $f_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{n-1}}$

a) $\lim a_n = \lim\,(3n+2)^{\frac{-3n+2}{2n+3}} = (+\infty)^{-3/2} = 0$

b) $\lim b_n = \lim\left(\dfrac{6}{6n^2+2}\right)^{\sqrt{(25n^2-5)/n^2}} = 0^5 = 0$

c) $\lim c_n = \lim\left(\dfrac{3n+2}{4n-1}\right)^{3n} = (3/4)^{+\infty} = 0$

d) $\lim d_n = \lim\left(10+\dfrac{10}{n}\right)^{10n} = 10^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim e_n = \lim\left(\dfrac{3+5/n^5}{6+6/n^6}\right)^{\frac{3n}{2+n}} = \dfrac{1}{8}$

f) $\lim f_n = \lim\sqrt{\dfrac{2n+1}{n-1}} = \sqrt{2}$

16 Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2n+1}{n+1}}$

b) $b_n = \left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^{3n-19}$

c) $c_n = \left(n+\dfrac{1}{n^2}\right)^6$

d) $d_n = \dfrac{(-n)^n}{2n^2+3}$

e) $e_n = \left(1-\dfrac{3}{n+1}\right)^{n+7}$

f) $f_n = \left(\dfrac{n^2+7}{2n}\right)^{\frac{3n+7}{2n}}$

a) $\lim a_n = \lim\sqrt[n]{\dfrac{2n+1}{n+1}} = 2^{1/\infty} = 2^0 = 1$

b) $\lim b_n = \lim\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^{3n-19} = 1^{\infty} =$

$$= \lim\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{2n-1}{2}}\right)^{\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2}{2n-1}\cdot(3n-19)} = e^{\lim\frac{6n}{2n}} = e^3$$

c) $\lim c_n = \lim\left(n+\dfrac{1}{n^2}\right)^6 = +\infty$

d) Es una sucesión oscilante, no tiene límite.

e) $\lim e_n = \lim\left(1-\dfrac{3}{n+1}\right)^{n+7} = \dfrac{1}{e^3} = e^{-3}$

f) $\lim f_n = \lim\left(\dfrac{n^2+7}{2n}\right)^{\frac{3n+7}{2n}} = +\infty$

17 Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \left(\dfrac{n^2+7}{n^2}\right)^{2n-7}$

b) $b_n = \left(\dfrac{7n-3}{7n+3}\right)^{n-3}$

c) $c_n = \left(\dfrac{\sqrt{n}}{n+3}\right)^{\frac{-5n}{n+1}}$

d) $d_n = \left(\dfrac{2n}{2n+2}\right)^{n^2}$

e) $e_n = \left(\dfrac{6n+6}{6n-6}\right)^{-n+2}$

f) $f_n = \left(1-\dfrac{5}{n}\right)^{5n+5}$

a) $\lim a_n = \lim\left(\dfrac{n^2+7}{n^2}\right)^{2n-7} = e^0 = 1$

b) $\lim b_n = \lim\left(\dfrac{7n-3}{7n+3}\right)^{n-3} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{e^6}}$

c) $\lim c_n = \lim\left(\dfrac{\sqrt{n}}{n+3}\right)^{\frac{-5n}{n+1}} = \left(\dfrac{1}{\infty}\right)^{-5} = +\infty$

d) $\lim d_n = \lim\left(\dfrac{2n}{2n+2}\right)^{n^2} = e^{-\infty} = 0$

e) $\lim e_n = \lim \left(\dfrac{6n+6}{6n-6}\right)^{-n+2} = e^{-2}$

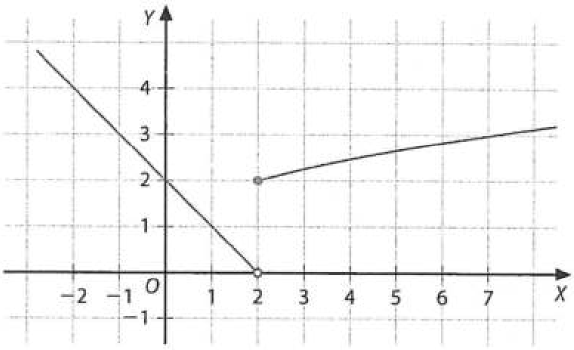
f) $\lim f_n = \lim \left(1 - \dfrac{5}{n}\right)^{5n+5} = \dfrac{1}{e^{25}} = e^{-25}$

Límites de funciones en el infinito

18 Dadas las siguientes funciones, averigua los límites que se indican.

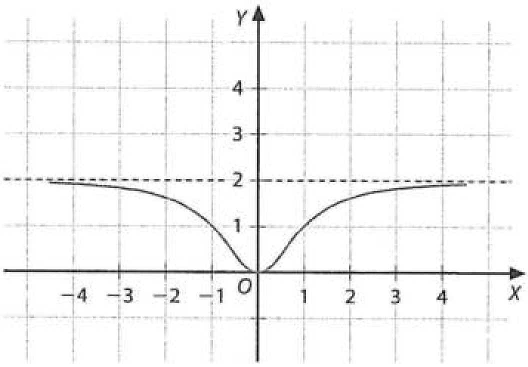
a) $f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x<0 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$



b) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2$ $\nexists \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

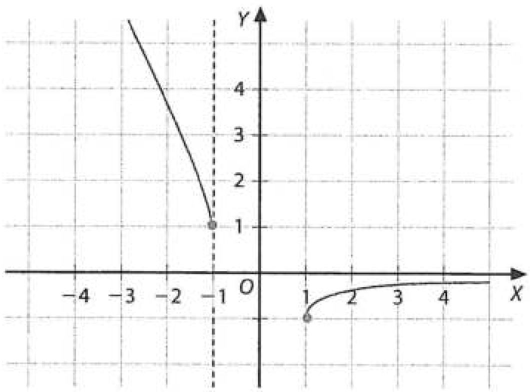
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

19 Averigua los límites que se indican.

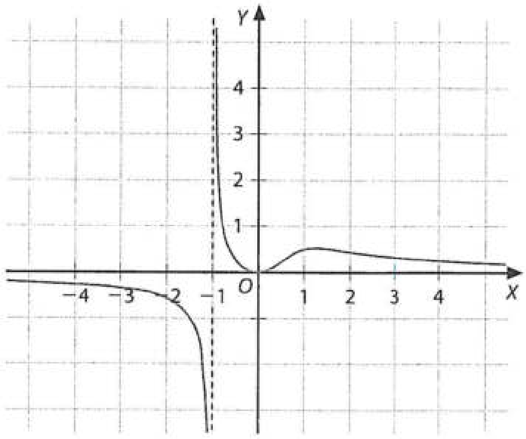
a) $f(x) = \sqrt{x^2-1} - x$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.



b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.



a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 1$ $\nexists \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$

20 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - x^2 + 2x - 5)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 2x + 9)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^5 - 4x^3 - x + 4)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^6 + 3x^3 - 3x + 7)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - x^2 + 2x - 5) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 2x + 9) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^5 - 4x^3 - x + 4) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^6 + 3x^3 - 3x + 7) = +\infty$

21 Calcula el límite de las funciones de la actividad anterior cuando $x \to -\infty$.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2 + 2x - 5) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 2x + 9) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^5 - 4x^3 - x + 4) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^6 + 3x^3 - 3x + 7) = +\infty$

22 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^3+3x-3}{x^2+5x-2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3-5x)^2}{-9x^2-x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3+3x^2+7x-8}{x^4-4x^2+6}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2+5x-1}{3-5x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [(-3x^3 + 3x - 3)/(x^2 + 5x - 2)] = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [(3 - 5x)^2/(-9x^2 - x)] = -25/9$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} [(x^3 + 3x^2 + 7x - 8)/(x^4 - 4x^2 + 6)] = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} [(-x^2 + 5x - 1)/(3 - 5x)] = +\infty$

23 Calcula el límite de las funciones de la actividad anterior cuando $x \to -\infty$.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{-3x^3 + 3x - 3}{x^2 + 5x - 2}\right] = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{(3 - 5x)^2}{-9x^2 - x}\right] = -\dfrac{25}{9}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{x^3 + 3x^2 + 7x - 8}{x^4 - 4x^2 + 6}\right] = 0$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{-x^2 + 5x - 1}{3 - 5x}\right] = -\infty$

24 Calcula los límites de las siguientes funciones.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 4} - \sqrt{3x^2 - 1}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1 - x} - \sqrt{3x - 2}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x + 5} - \sqrt{2x - 5}\right)$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{16x^2 + 4x} - 4x\right)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 4} - \sqrt{3x^2 - 1}\right) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1 - x} - \sqrt{3x - 2}\right)$

$1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$

$3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{2}{3}$

No existe, porque Dom $f = \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$ y no está definida para valores que vayan a $+\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x + 5} - \sqrt{2x - 5}\right) = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{16x^2 + 4x} - 4x\right) = \dfrac{1}{2}$

25 Calcula el límite de las funciones de la actividad anterior cuando $x \to -\infty$.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 4} - \sqrt{3x^2 - 1}\right) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{1 - x} - \sqrt{3x - 2}\right)$

$1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$

$3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{2}{3}$

No existe, porque Dom $f = \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$ y no está definida para valores que vayan a $-\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{2x + 5} - \sqrt{2x - 5}\right)$

$2x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\dfrac{5}{2}$

$2x - 5 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{5}{2}$

No existe, porque Dom $f = \left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$ y no está definida para valores que vayan a $-\infty$.

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{16x^2 + 4x} - 4x\right) = +\infty$

26 Calcula los límites de las siguientes funciones.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{\frac{3x}{x^2 - 1}}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{\frac{3x}{x^2 - 1}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x + 1}{5x - 3}\right)^{-x + 3}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x + 1}{5x - 3}\right)^{-x + 3}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x + 5} - \dfrac{x^2 + 2}{x - 5}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\dfrac{x}{9 + x^2}\right) \cdot \left(\dfrac{3x + x^2}{2x + 1}\right)\right]$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 1}{3x}\right)^{2x + 2}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{x + 3}{3 - 2x^2}\right)^{-x^2}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{x - 1}{2x + 2}\right)^{\frac{3 - x^2}{x}}$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - 1 - \sqrt{4x^2 + 4x + 4}\right)$

k) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x - 1 - \sqrt{4x^2 + 4x + 4}\right)$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 - 1}}{3x}$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 - 1}}{3x}$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{2x}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{3x/(x^2 - 1)} = 2^0 = 1$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{3x/(x^2 - 1)} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{(2x + 1)}{(5x - 3)}\right]^{-x + 3} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-\infty} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{(2x + 1)}{(5x - 3)}\right]^{-x + 3} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{+\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{x^2}{x + 5} - \dfrac{x^2 + 2}{x - 5}\right] = -10$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{x}{9 - x^2}\right] \cdot \left[\dfrac{3x + x^2}{2x + 1}\right] = -\dfrac{1}{2}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 1}{3x}\right)^{2x + 2} = \sqrt[3]{e^2}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[1 - \dfrac{x + 3}{3 - 2x^2}\right]^{-x^2} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{x - 1}{2x + 2}\right]^{\frac{3 - x^2}{x}} = e$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - 1 - \sqrt{4x^2 + 4x + 4}\right) = -2$

k) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x - 1 - \sqrt{4x^2 + 4x + 4}\right) = -\infty$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 - 1}}{3x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 - 1}}{3x} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right)/\sqrt{2x} = 0$

Límites de funciones en un punto

27 Halla los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x-1 & \text{si } x<0\\ (x-1)^2+2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ en $x=0$ y en $x=3$

b) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^2-4x+4}$ en $x=2$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-3x}{x} & \text{si } x<1\\ \dfrac{-x-1}{x} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ en $x=0$ y en $x=1$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x+1} & \text{si } x\leq 3\\ \dfrac{1}{3-x} & \text{si } x>3\end{cases}$ en $x=-1$ y en $x=3$

e) $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1 \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=3 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=6$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)(x+1)}{(x-2)^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-2 \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=-2$

d) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-1 \quad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to -1} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1 \quad \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-\infty \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 3} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to -1}\left(1+\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^x=(0^+)^{-1}=\left(\dfrac{1}{0^+}\right)=+\infty$

28 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x+1}{1-x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-2x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3}{(x+1)^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5-x^3}{x^6}$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^2-x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-4x+8}$

g) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{2x^3-x^2-2x+1}{6x^3+3x^2-3x}$

h) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-9}{2x+1}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2+x}$

j) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+4x}{x^2+2x-1}$

k) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-x^3+2x}{x^3-2x^2-3x}$

l) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{4x^2-1}{2x^3+3x^2-2x}$

a) $\lim\limits_{x\to -1}[(x^3+x^2-x+1)/(1-x)]=1$

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-2x+1}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-2x+1}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-2x+1}=\infty$

c) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}[3/(x+1)^3]=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}[3/(x+1)^3]=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} 3/(x+1)^3=\infty$

d) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}[(x^5-x^3)/x^6]=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}[(x^5-x^3)/x^6]=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(x^5-x^3)/x^6=\infty$

e) $\lim\limits_{x\to -2}[(x^3-2x^2-4x+8)/(x^2-x-2)]=0$

f) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-}\left(\dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-4x+8}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+}\left(\dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-4x+8}\right)=+\infty\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-4x+8}\right)=\infty$

g) $\lim\limits_{x\to 1/2}[(2x^3-x^2-2x+1)/(6x^3+3x^2-3x)]=-1/3$

h) $\lim\limits_{x\to -2}[(x^2-9)/(2x+1)]=5/3$

i) $\lim\limits_{x\to 0}[(x^3-2x^2+x)/(x^2+x)]=1$

j) $\lim\limits_{x\to -2}[(4x^2+4x)/(x^2+2x-1)]=-8$

k) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\dfrac{-x^3+2x}{x^3-2x^2-3x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{-x^3+2x}{x^3-2x^2-3x}\right)=-\infty\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{-x^3+2x}{x^3-2x^2-3x}\right)=\infty$

l) $\lim\limits_{x\to 1/2}[(4x^2-1)/(2x^3+3x^2-2x)]=8/5$

29 Calcula los siguientes límites en los puntos que se indican.

a) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x^2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{-\frac{1}{x^2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{-\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1/3)^{\frac{1}{x-2}}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)^{-x+1}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{1/x^2}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{-1/x^2}=0$

c) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} 2^{1/x}=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} 2^{1/x}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} 2^{1/x}$

d) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} 2^{-1/x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+} 2^{-1/x}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} 2^{-1/x}$

e) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}[2x+(1/3)]^{1/(x-2)}=0\\ \lim\limits_{x\to 2^+}[2x+(1/3)]^{1/(x-2)}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0}[2x+(1/3)]^{1/(x-2)}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)^{-x+1}=1$

30 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3x}{x^2-1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2x+2}{x^2-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{2}{x+1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x+1}{x^2-x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+1}{x^2+2x}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}\right)$

a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3x}{x^2-1}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3x}{x^2-1}\right)=-\infty\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3x}{x^2-1}\right)=\infty$

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2x+2}{x^2-1}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\left(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2x+2}{x^2-1}\right)=+\infty\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2x+2}{x^2-1}\right)=\infty$

c) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{2}{x+1}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{2}{x+1}\right)=-\infty\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{2}{x+1}\right)=\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x+1}{x^2-x}\right)=2$

e) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-}\left(\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+1}{x^2+2x}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+}\left(\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+1}{x^2+2x}\right)=+\infty\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+1}{x^2+2x}\right)=\infty$

f) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}\right)=\infty$

31 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{4x-12}}$ **d)** $\lim\limits_{x\to -2^+}\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-4}}$

a) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{(x^2-4)/(x-2)}=2$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{(x^2-9)/(4x-12)}=\sqrt{3/2}=\sqrt{6}/2$

c) $\lim\limits_{x\to -2^-}(x+2)/\sqrt{x^2-4}=0$

d) $\lim\limits_{x\to -2^+}\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-4}}=+\infty$

32 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^3-2x}{x^2-3x-1}\right)^{2x+5}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+3x+1)^{\frac{-5}{(x-2)^2}}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+1}\right)^{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{2x+2}{x}\right)^{\frac{-1}{x+2}}$

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left[\dfrac{x^3-2x}{x^2-3x-1}\right]=\dfrac{1}{27}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+3x+1)^{-5/(x-2)^2}=0$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\left[\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+1}\right]^{x-2}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\left[\dfrac{2x+2}{x}\right]^{-1/(x+2)}=\sqrt{e}$

Asíntotas

33 Indica el dominio de las funciones de los ejercicios 18 y 19 y calcula analíticamente las asíntotas horizontales y verticales de las funciones representadas, en caso de que las tengan.

Ejercicio 18

a) $f(x)=\begin{cases}-x+2 & x<0\\ \sqrt{x+2} & x\geq 0\end{cases}$

No tiene asíntotas horizontales ni verticales.
$\text{Dom}=\{x\in\mathbb{R}, x<0 \mid \exists(-x+2)\}\cup$
$\cup\{x\in\mathbb{R}, x\geq 0 \mid x+2\geq 0\}=\mathbb{R}$

b) $f(x)=2x^2/(x^2+1)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$, asíntota horizontal en $y=2$.
No tiene asíntotas verticales.
$\text{Dom} f=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+1\neq 0\}=\mathbb{R}$

Ejercicio 19

a) $f(x)=\sqrt{x^2-1}-x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, asíntota horizontal por la derecha $y=0$.
No tiene asíntotas verticales.
$\text{Dom} f=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-1\geq 0\}=\mathbb{R}-(-1,1)$

b) $f(x)=x^2/(x^3+1)$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty$, asíntota vertical en $x=-1$.
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, asíntota horizontal en $y=0$.
$\text{Dom} f=\{x\in\mathbb{R} \mid x^3+1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1\}$

34 Determina la ecuación de todas las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-x}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x+1}$

b) $f(x)=\dfrac{2x}{(4-x)^2}$ **e)** $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-3x+2}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2}{2x^2+5}$ **f)** $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

a) A.V.: $x=0$, $x=1$; A.H.: $y=0$

b) A.V.: $x=4$, $x=1$; A.H.: $y=0$

c) A.H.: $y=1/2$

d) A.V.: $x=-1$, $x=1$; A.H.: $y=x-1$

e) A.V.: $x=1$, $x=2$; A.H.: $y=2$

f) A.V.: $x=1$, $x=-1$; A.H.: $y=1$ cuando x tiende a $+\infty$, e $y=-1$ cuando x tiende a $-\infty$.

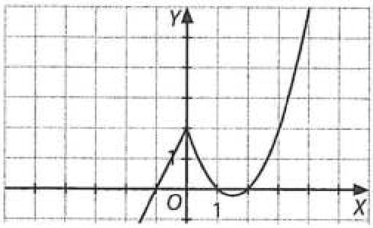
Continuidad de funciones

35 Considera la función:

$$f(x)=\begin{cases}2x+2 & \text{si } x\le 0\\ x^2-3x+2 & \text{si } x>0\end{cases}$$

a) **Dibuja la gráfica.** ***b)*** **Estudia la continuidad.**

a)



b) ■ $\exists\, f(0)=2$

■ $¿\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)?$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+2)=2\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-3x+2)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x)=2$$

■ $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$

Como ya podíamos apreciar en el gráfico, la función es continua en $x=0$.

La función $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x=5$, se evitaría imponiendo $f(5)=15$.

36 **Dada la función:** $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^4-x^3-2x^2}$

a) **Halla el límite en $x\to -1$, en $x\to 2$ y en $x\to 0$.**

b) **Estudia su continuidad y clasifica sus discontinuidades.**

c) **Indica qué valor debería tomar $f(x)$ en $x=-1$ para evitar la discontinuidad.**

d) **Indica sus asíntotas.**

e) **Estudia su signo.**

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+2}{x^4+x^3-2x^2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2(x+1)}{x^2(x+1)(x-2)}=-\dfrac{2}{3}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x+2}{x^4-x^3-2x^2}=-\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x+2}{x^4-x^3-2x^2}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{2x+2}{x^4-x^3-2x^2}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+2}{x^4-x^3-2x^2}=-\infty$$

b) y ***d)*** $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0,-1,2\}$

En $x=0$ d. a. $\Rightarrow x=0$ a. v.

En $x=2$ d. a. $\Rightarrow x=2$ a. v.

En $x=-1$ d. e.

En $y=0$ a. h. puesto que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

c) $f(-1)=-2/3$

e) $x^4-x^3-2x^2=x^2(x^2-x-2)$

$-1 \qquad 0 \qquad 2$

x^2	+	+	+	+
x^2-x-2	+	−	−	+
$x^4-x^3-2x^2$	+	−	−	+

$-1 \qquad 2$

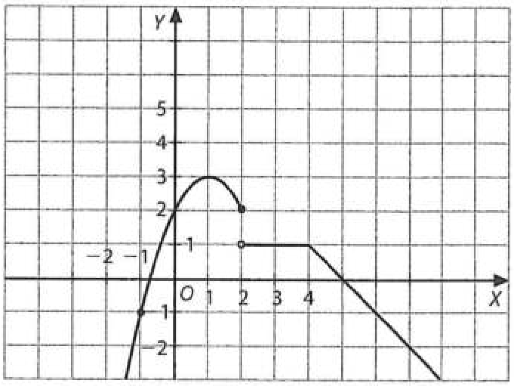
$2x+x$	−	+	+
$x^4-x^3-2x^2$	+	−	+
$\dfrac{2x+2}{x^4-x^3-2x^2}$	−	−	+

37 Estudia la continuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases}-(x-1)^2+3 & \text{si } x\le 2\\ 1 & \text{si } 2<x<4\\ -x+5 & \text{si } x\ge 4\end{cases}$$

a) Represéntala.

b) Clasifica sus discontinuidades, si las tuviera.



En $x=2$, $f(2)=2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2 \qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

En $x=4$, $f(4)=1$

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=1 \qquad \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 4} f(x)=1$

En $x=2$, discontinuidad de salto.

38 **Dada la siguiente función:**

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x\le -2\\ |x-1| & \text{si } -2\le x<2\\ ((1-x)/x)-3 & \text{si } x\ge 2\end{cases}$$

Estudia su continuidad y clasifica sus discontinuidades.

Dom $f=\mathbb{R}$

En $x<2$, f es continua por ser función polinómica.

En $-2<x<2$ f es continua por ser valor absoluto de un polinomio.

En $x>2$ f es continua por ser una función racional continua en $\mathbb{R}-\{0\}$.

$f(-2)=-3$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-3 \qquad \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=3\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to -2} f(x)$

$f(2)=-7/2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1 \qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-7/2\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Continua en $\mathbb{R}-\{-2,2\}$

En $x=-2$ y $x=2$ discontinuidad de salto.

39 **Dada la siguiente función:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x+1} & \text{si } x<0\\[2ex] \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

Estudia su continuidad y clasifica sus discontinuidades.

Dom $f=\mathbb{R}-\{-1,3\}$

$\nexists f(-1)$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty \qquad \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty$

$f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1 \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1 \qquad \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

$\nexists f(3)$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3}=4$

Continua en $\mathbb{R}-\{-1,3\}$ $\quad x=-1$, d. a. $x=3$, d. e.

40 **Estudia la continuidad de la función: $f(x) = 2^{\frac{1}{2-x}}$**
Clasifica sus discontinuidades.

Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2^{1/0^+} = 2^{+\infty} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2^{1/0^-} = 2^{-\infty} = 0\end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

en $x = 2$, d. a.

41 **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \le 1 \\ ax + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determina a para que la función sea continua en todo su dominio.

$f(1) = 2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim (x^2 + 1) = 2 \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim (ax + 3) = a + 3$

Igualando los límites laterales: $2 = a + 3 \Rightarrow a = -1$

42 **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+b}{x-1} & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{4}{x-2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{x^2+1}{ax} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Determina a y b para la función sea continua en todo su dominio.

$f(0) = -b$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{3x+b}{x-1}\right) = -b \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{4}{x-2}\right) = -2$

Igualando los límites laterales: $-b = -2 \Rightarrow b = 2$

$f(1) = \dfrac{2}{a}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{4}{x-2}\right) = -4 \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x^2+1}{ax}\right) = \dfrac{2}{a}$

Igualando los límites laterales: $-4 = \dfrac{2}{a} \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

Ejercicios de aplicación

43 **En los seis primeros meses, desde que abrió, una librería ha ido anotando el número de compradores de cada mes. Este número $N(x)$ se puede ajustar por la función**

$$N(x) = \frac{1\,000x - 600}{x}$$

Siendo x el número del mes contado desde que abrió.

a) **¿Cuántos compradores tuvo en el segundo mes? ¿En qué mes contado desde la apertura tuvo 900 compradores?**

b) **Supongamos que esta fórmula sirve para predecir el número de compradores en el futuro, ¿podemos asegurar que este número siempre irá creciendo? Explica razonadamente tu respuesta.**

a) $N(2) = \dfrac{1000 \cdot 2 - 600}{2} = 700$ compradores

$900 = \dfrac{1\,000x - 600}{x} \Rightarrow x = 6$. En el sexto mes hay 900 compradores.

b) Si calculamos $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1\,000x - 600}{x} = 1\,000$

Como máximo, tendremos 1 000 visitantes.

44 **Tras un estudio demográfico se ha determinado que el número de habitantes de cierta población en los próximos años, vendrá dado por la función:**

$$N(x) = \frac{14\,750x + 3\,750}{2x + 1}$$

a) **¿Cuál es la población actualmente? (año $x = 0$)**

b) **¿Cuál será la población dentro de dos años?**

c) **¿Y dentro de tres años?**

d) **Si se supone que el comportamiento de la población es siempre el mismo, ¿la población crecería indefinidamente o, por el contrario, se estabilizaría? Y si así fuera, ¿en qué valor?**

a) 3 750 habitantes

b) 6 650 habitantes

c) 6 857 habitantes

d) Se estabilizará en el valor 7 375 habitantes.

45 **En un cuadrado de lado 1, se unen los puntos medios de los lados y se forma otro cuadrado, del cual se unen los puntos medios de los lados y se forma otro cuadrado, y así sucesivamente. Calcula la suma de las áreas de todos los cuadrados así formados.**

Las áreas forman una progresión geométrica decreciente, de primer término, 1 y de razón, 1/2.

Por tanto $s = 1/1 - 1/2 = 2$

46 **Representa gráficamente funciones que cumplan las siguientes condiciones.**

a) **Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$, Rec $f = \mathbb{R}$,**

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$,

$f(0) = 0$, $f(x) < 0$ si $x < 0$, $f(x) > 0$ si $x > 0$

b) **Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = [-1, 0) \cup \{2\}$,**

$f(1) = -1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1$,

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

c) **Dom $f = \mathbb{R} - \{3\}$, Rec $f = \mathbb{R}$,**

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

d) **Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$, Rec $f = \mathbb{R}$,**

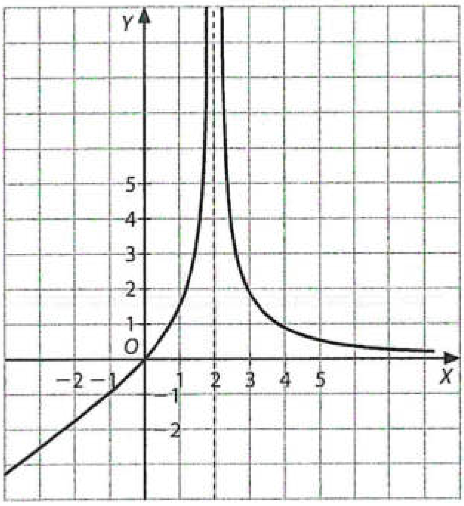
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +3} f(x) = \infty$

e) **Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, Rec $f = \mathbb{R}$,**

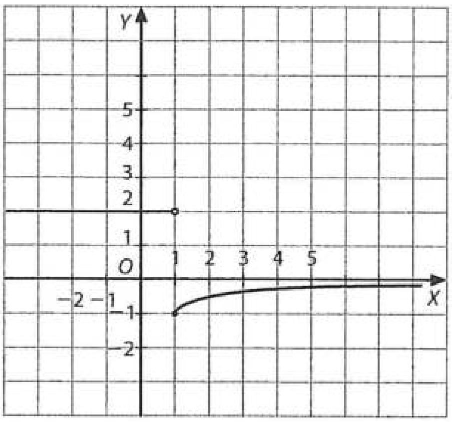
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 0$,

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$

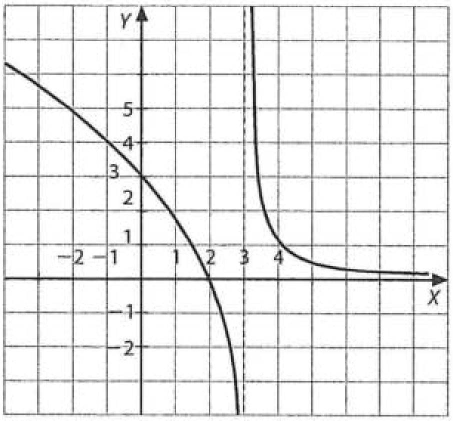
a)



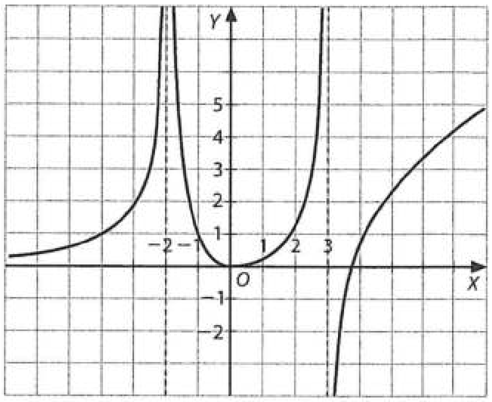
b)



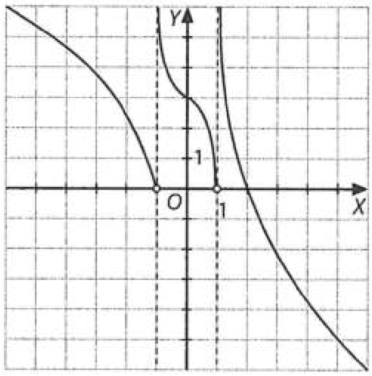
c)



d)



e)



Evaluación (página 279)

1. **Calcula los términos generales y la suma de los 15 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas.**

a) **1, 4, 7, 10, …** ***b)*** **−8, −6, −4, −2, …** ***c)*** $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$ ***d)*** $-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -1, -\frac{2}{3}, \ldots$

a) $a_n = 3n - 2$ $\quad S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{1 + 43}{2} \cdot 15 = 330$

c) $c_n = \frac{1}{2}n$ $\quad S_{15} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{15}{2}}{2} \cdot 15 = 60$

b) $b_n = 2n - 10$ $\quad S_{15} = \frac{-8 + 20}{2} \cdot 15 = 90$

d) $d_n = \frac{1}{3}n - 2$ $\quad S_{15} = \frac{\frac{-5}{3} + 3}{2} \cdot 15 = 10$

2. **Calcula los términos generales y la suma de los 5 primeros términos en cada caso. Si se puede, calcula también la suma de todos los términos de la progresión geométrica.**

a) **1, 2, 4, 8, …** ***b)*** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ ***c)*** $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, \ldots$ ***d)*** **1, 5, 25, 125, …**

a) $a_n = 2^{n-1}$ $\quad S_5 = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} = \frac{1 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 31$

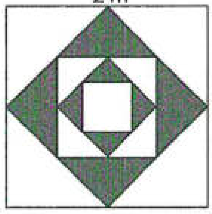
b) $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\quad S_5 = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1{,}9375$ $\quad S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

c) $c_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\quad S_5 = \frac{\frac{-1}{3} \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = -0{,}4979$ $\quad S = \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}$

d) $d_n = 5^{n-1}$ $\quad S_5 = \frac{1 \cdot (5^5 - 1)}{5 - 1} = 781$

3. **Los cuadrados de esta figura se han obtenido uniendo 2 a 2 los puntos medios de los lados consecutivos. Calcula:**

2 m



a) **El término general de la sucesión que forman los lados.**

b) **El término general de la sucesión que forman las áreas.**

c) **La suma de las áreas de los infinitos cuadrados que se generan.**

a) La sucesión es una progresión geométrica de razón $\sqrt{2}/2$. El término general es: $a_n = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

b) $b_n = (a_n)^2 = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n-2} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $S = \dfrac{4}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{\frac{1}{2}} = 8$

4. **Mediante la definición del número e elabora una tabla con el desarrollo de la sucesión, utilizando una hoja de cálculo.**

Construimos la tabla de la siguiente forma:

- En una fila horizontal añadimos los términos de la sucesión y en la siguiente fila, se introduce el valor de la sucesión haciendo referencia a la celda superior.
- Se arrastra hacia la derecha ambas filas para generar tantos términos como se quiera de la sucesión.
- A medida que crece el término, nos aproximamos al valor del número e.

5. **Resuelve estos límites.**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^4-3} - \sqrt{x^4+5x^2}\right)$ ***b)*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-3x} - x\right)$ ***c)*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-3x-\sqrt{x^4+6}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^4-3} - \sqrt{x^4+5x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^4-3} - \sqrt{x^4+5x^2}\right) \dfrac{\sqrt{x^4-3}+\sqrt{x^4+5x^2}}{\sqrt{x^4-3}+\sqrt{x^4+5x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5x^2-3}{\sqrt{x^4-3}+\sqrt{x^4+5x^2}} = \dfrac{-5}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-3x} - x\right) \dfrac{\sqrt{x^2-3x}+x}{\sqrt{x^2-3x}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x}{\sqrt{x^2-3x}+x} = \dfrac{-3}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3x-\sqrt{x^4+6} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-3x-\sqrt{x^4+6}\right) \dfrac{x^2-3x+\sqrt{x^4+6}}{x^2-3x+\sqrt{x^4+6}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x^2-6x^3-6}{x^2-3x+\sqrt{x^4+6}} = -\infty$

6. **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to2} \left(\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}\right)$ ***b)*** $\lim\limits_{x\to-2} \left(\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{(x-2)\cdot(x-3)}{(x-2)\cdot(x+2)} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{(x-3)}{(x+2)} = \dfrac{-1}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \left(\dfrac{20}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4} = -\infty \end{cases}$

7. **Estudia la continuidad de estas funciones y clasifica sus puntos de discontinuidad.**

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+5}$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ ***c)*** $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x<3 \\ x+1 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$ ***d)*** $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-4}$

a) La función es racional, por lo que es continua en todo su dominio. En este caso, como el denominador no se anula nunca, la función no tiene puntos conflictivos. Así pues, la función es continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Esta función es racional, continua en todo su dominio. En este caso, la función es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$. La función tiene una discontinuidad asintótica en dicho punto ya que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \infty$.

c) La función está definida a trozos siendo cada uno un polinomio, así que, habría que estudiar en la continuidad en los puntos de unión. En este caso, la función tiene una discontinuidad de salto finito para $x = 3$. Por tanto, es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

d) La función es racional cuyo dominio son todos los número reales excepto el cuatro. En este caso, para $x = 4$ la función tiene una discontinuidad asintótica ya que $\lim\limits_{x\to4} f(x) = \infty$. Así pues, $f(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{4\}$.

8. **Determina las asíntotas de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ ***c)*** $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$

a)
- La recta $x = 0$ es una asíntota vertical ya que $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \infty$.
- La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal ya que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.

b)
- La recta $x = 1$ es una asíntota vertical ya que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \infty$.
- No tiene una asíntota horizontal ya que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
- La recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua ya que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \infty$ $\quad \lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{f(x)}{x}\right) = 1 \neq 0$ $\quad \lim\limits_{x\to1} (f(x) - x) = 1 \in \mathbb{R}$

c)
- La recta $x = -3$ es una asíntota vertical ya que $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \infty$.
- La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal ya que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

11 DERIVADAS

El estudio de las derivadas será el hilo conductor de la unidad, los alumnos aprenderán a trabajar con ellas y comprobarán su aplicación en la vida cotidiana.

Al inicio de esta unidad se presenta la tasa de variación media que los alumnos conocen de cursos anteriores, así como la tasa de variación instantánea que será el punto de partida para comprender el concepto de derivada de una función en un punto. A continuación, se trabaja en dicho concepto así como en la necesidad de definir derivadas laterales. En ambos casos, se muestran tanto la interpretación geométrica como gráficas que facilitan su comprensión. Es importante que el alumno recuerde los contenidos relativos a límites para poder comprender y utilizar las derivadas.

Se trabaja la determinación de la recta tangente y la recta normal a una curva a partir de las derivadas, así como la relación que existe entre continuidad y derivabilidad. Finalmente, se estudian las funciones derivadas y el cálculo de la derivada de diferentes funciones y de la composición de funciones aplicando la regla de la cadena. Y para terminar se analizan diferentes aplicaciones de la derivada como el estudio de la monotonía y la curvatura de funciones, la representación de funciones y la optimización

La metodología se ha diseñado incluyendo actividades de aprendizaje integradas que permitirán al alumnado avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.

Se desarrolla la **competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)** a lo largo de toda la unidad. A través del conocimiento de las derivadas, se desarrolla en el alumno la capacidad de aplicar el razonamiento lógico-matemático y sus herramientas para describir e interpretar distintas situaciones.

La **competencia digital (CD)** se integra a lo largo de la unidad haciendo partícipes a los alumnos de las ventajas que tiene recurrir a los medios informáticos.

Especial interés tienen las actividades propuestas con GeoGebra a lo largo de los epígrafes, así como las actividades interactivas del *test de autoevaluación* que se encuentra al final de la unidad.

A través de la incorporación del lenguaje matemático a la expresión habitual de los alumnos, se fomenta la **competencia en comunicación lingüística (CL)**. En esta unidad se presentan numerosos conceptos matemáticos que los alumnos han de utilizar correctamente a la hora de resolver actividades y problemas.

La **competencia aprender a aprender (CAA)** se fomenta a través de la autonomía de los alumnos a la hora de resolver problemas. Es fundamental que el profesor incida en las destrezas necesarias para comunicar con eficacia los resultados de la resolución de cualquier actividad, reto o problema.

Las **competencias sociales y cívicas (CSC)** se desarrollan en el área de Matemáticas mediante la aceptación de otros puntos de vista en la resolución de algunos problemas. Es importante que el docente trabaje situaciones que se pueden resolver de diferentes formas, representaciones gráficas de funciones derivadas así como sus características, etcétera; para trabajar con los alumnos que distintas soluciones pueden ser igualmente válidas. El reconocimiento y valoración de las aportaciones ajenas enriquece el aprendizaje.

Temporalización

El tiempo previsto para el desarrollo de la unidad es de tres semanas, aunque deberá adaptarse a las necesidades de los alumnos.

Objetivos

Los objetivos que los alumnos tienen que alcanzar son:

- Manejar el concepto de tasa de variación media y relacionar el concepto de tasa de variación instantánea con el de derivada de una función en un punto.
- Comprender la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.
- Calcular las derivadas laterales de un función en un punto.
- Determinar la recta tangente y la recta normal.
- Establecer la relación entre continuidad y derivabilidad de una función.
- Comprender el concepto de función derivada y calcular la derivada de funciones y de operaciones con funciones.

- Calcular la derivada de la composición de funciones aplicando la regla de la cadena.
- Trabajar con derivadas sucesivas y aplicarlas correctamente en el estudio de propiedades de las funciones como la curvatura.
- Aplicar el cálculo de derivadas en el estudio de la monotonía y la curvatura de funciones, en la representación de funciones y en problemas de optimización.

Atención a la diversidad

Con el fin de atender los distintos ritmos de aprendizaje de los alumnos, se proponen algunas actividades de refuerzo y de ampliación que podrán utilizarse como alternativa o complemento a las que figuran en el libro del alumno.

PROGRAMACIÓN DE LA UNIDAD

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Competencias clave
Tasa de variación Tasa de variación media Tasa de variación instantánea	1. Determinar la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea.	1.1. Calcula la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea.	CMCT CL CAA CSC
Derivada de una función en un punto Interpretación geométrica Derivadas laterales	2. Relacionar el concepto de tasa de variación instantánea con el de derivada de una función en un punto. 3. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto y su interpretación geométrica al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.	2.1. Relaciona el concepto de tasa de variación instantánea con el de derivada de una función en un punto. 3.1. Interpreta geométricamente la derivada de una función en un punto. 3.2. Determina las derivadas laterales de una función en un punto. 3.3. Utiliza medios tecnológicos adecuados para analizar la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto así como las derivadas laterales.	CMCT CD CL CAA
Recta tangente y recta normal	4. Obtener la recta tangente y normal a una función en un punto dado.	4.1. Reconoce la derivada de una función como la pendiente de la recta tangente. 4.2. Determina la recta tangente a una función en un punto dado. 4.3. Relaciona la derivada de una función con la pendiente de la recta normal. 4.4. Determina la recta normal a una función en un punto dado.	CMCT CL CAA
Continuidad y derivabilidad	5. Analizar conjuntamente la continuidad y la derivabilidad de una función.	5.1. Analiza la relación entre continuidad y derivabilidad de una función. 5.2. Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto.	CMCT CL CAA
Función derivada Concepto de función derivada Cálculo de la derivada de algunas funciones Derivada de algunas operaciones con funciones Derivada de la composición de funciones: regla de la cadena Derivadas sucesivas	6. Aplicar el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.	6.1. Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas. 6.2. Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena. 6.3. Extrae e identifica informaciones derivadas del estudio y análisis de funciones logarítmicas en contextos reales. 6.4. Utiliza medios tecnológicos adecuados para calcular derivadas y comprobar los resultados obtenidos.	CMCT CD CL CAA
Aplicaciones de las derivadas Crecimiento y decrecimiento de una función Concavidad y convexidad Representación de funciones Optimización	7. Aplicar el cálculo de derivadas en el estudio de propiedades de las funciones y en situaciones reales.	7.1. Representa y estudia funciones, mediante un estudio completo de sus características usando las propiedades de las derivadas, y los medios tecnológicos adecuados. 7.2. Resuelve problemas sencillos de optimización relacionados con la geometría o propiedades matemáticas e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.	CMCT CD CL CAA

MAPA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD

PARA EL PROFESOR

- **Actividades de refuerzo**
- **Prueba de evaluación**

Unidad

Presentación de la unidad
Repasa lo que sabes

1. Tasa de variación
- Tasa de variación media
- Tasa de variación instantánea

2. Derivada de una función en un punto
- Interpretación geométrica
- Derivadas laterales

3. Recta tangente y recta normal

4. Continuidad y derivabilidad

5. Función derivada
- Concepto de función derivada
- Cálculo de la derivada de algunas funciones
- Derivada de algunas operaciones con funciones
- Derivada de la composición de funciones: regla de la cadena
- Derivadas sucesivas

6. Aplicaciones de las derivadas
- Crecimiento y decrecimiento de una función
- Concavidad y convexidad
- Representación de funciones
- Optimización

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

EVALUACIÓN

PARA EL ALUMNO

- **GeoGebra.** Interpretación geométrica
- **Vídeo.** Regla de la cadena
- **GeoGebra.** Representación gráfica de una función y su derivada
- **Vídeo.** Continuidad y derivabilidad
  Vídeo. Representación de funciones
- **Actividades interactivas.** Test de autoevaluación

Repasa lo que sabes (página 303)

1. Determina la ecuación de la recta de pendiente -3 que pasa por el punto de coordenadas $(2, -1)$.

La ecuación de una recta en forma explícita se puede escribir: $y = mx + n$.

Si una recta tiene de pendiente -3, su ecuación será de la forma $y = -3x + n$, dado que el enunciado afirma que la recta pasa por el punto $(2, -1)$ podemos escribir:

$$-1 = (-3) \cdot 2 + n \Rightarrow n = 5$$

Definitivamente la ecuación de la recta es: $y = -3x + 5$.

2. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva de la función $f(x) = x^2 + 1$ en el punto de abscisa 2, sabiendo que su pendiente es 4.

Si la pendiente es 4, la ecuación de la recta tangente será de la forma: $y = 4x + n$, para determinar el valor de n precisamos un punto de la recta; el punto de tangencia pertenece a la curva y a la recta: $y = 2^2 + 1 = 5$, el punto de tangencia es: $(2, 5)$.

Podemos escribir $5 = 4 \cdot 2 + n \Rightarrow n = -3$.

La ecuación de la recta es: $y = 4x - 3$.

3. Calcula los siguientes límites de funciones.

a) $\displaystyle\lim_{x \to -5}\left(\frac{\sqrt{-1-2x}-3}{x+5}\right)$ *b)* $\displaystyle\lim_{h \to 0}\left(\frac{\frac{1}{(1+h)^2}-1}{h}\right)$

a) $$\lim_{x \to -5}\left(\frac{\sqrt{-1-2x}-3}{x+5}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to -5}\left(\frac{(-1-2x)-9}{(x+5)\cdot(\sqrt{-1-2x}+3)}\right) = \lim_{x \to -5}\left(\frac{-2}{(\sqrt{-1-2x}+3)}\right) = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

b) $$\lim_{h \to 0}\left(\frac{\frac{1}{(1+h)^2}-1}{h}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{1-(1+2h+h^2)}{(1+h)^2\cdot h}\right) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{-2-h}{(1+h)^2}\right) = \frac{-2}{1} = -2$$

4. Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - 2x & \text{si } x \leq 4 \\ \sqrt{x} - 2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

La función es racional, por lo que es continua en todo su dominio.

Para ver el tipo de discontinuidad en los puntos $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ se calculan los límites laterales en dichos puntos:

$$\lim_{x \to 1^+}\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-}\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = -\infty$$

Para el punto $x_1 = 1$ la discontinuidad es asintótica.

$$\lim_{x \to -1^+}\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-}\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = +\infty$$

Para el punto $x_2 = -1$ la discontinuidad es asintótica.

b) La función $g(x)$ es una función definida a trozos compuesta por una función polinómica y una función radical definida en su intervalo positivo. Por consiguiente, la función es continua siempre con la excepción de los puntos de unión, en los que se tiene que estudiar la continuidad.

En este caso:

$$\lim_{x \to 4^+} g(x) = \lim_{x \to 4^+}\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) = 8 - 8 = 0$$

$$\lim_{x \to 4^-} g(x) = \lim_{x \to 4^-}\left(\sqrt{x} - 2\right) = 2 - 2 = 0$$

Así pues, $\lim_{x \to 4} g(x) = 0$ y además $g(4) = 0$, por lo que la función $g(x)$ es continua en $x = 4$.

Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Interpretación geométrica (página 306)

En el archivo de GeoGebra aparece representada una función junto a las secantes que pasan por el punto $(2, f(2))$ y por $(2 + h, f(2 + h))$ y $(2 - h, f(2 - h))$, respectivamente. Moviendo el deslizador se pueden obtener las secantes para distintos valores de h y observar la relación entre las pendientes de las rectas y las tasas de variación media de los intervalos.

Regla de la cadena (página 318)

En el vídeo se calcula la derivada de la función $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento a seguir para hallar la derivada o para que los alumnos repasen el procedimiento.

Representación gráfica de una función y su derivada (página 321)

En el archivo de GeoGebra aparecen las representaciones gráficas de una función y de su función derivada. Se puede observar que cuando esta es positiva, $f(x)$ es creciente; cuando la derivada es negativa, $f(x)$ es decreciente; y cuando la derivada se anula, $f(x)$ tiene puntos singulares. Introduciendo nuevas funciones en la caja de texto se pueden obtener las representaciones de otras funciones y sus derivadas con las que observar estas relaciones.

Continuidad y derivabilidad (página 330)

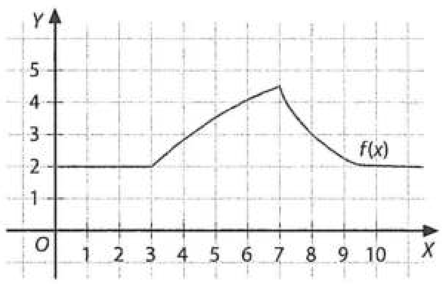
En el vídeo se resuelve paso a paso el ejercicio 2. Puede utilizarse para mostrar el procedimiento a seguir para determinar los valores de a y b para que la función sea continua y derivable o para que los alumnos repasen este procedimiento.

Representación de funciones (página 333)

En el vídeo se resuelve paso a paso el ejercicio 6. Puede utilizarse para mostrar el procedimiento a seguir para representar una función o para que los alumnos repasen este procedimiento.

Actividades (páginas 304/329)

1 **Observa la gráfica de la función representada en la figura, y calcula, de forma aproximada, las tasas de variación media en los intervalos [1, 3], [3, 5], [5, 7], [7, 8], [8, 10] y [10, 11].**



Se aplica la fórmula $\text{TVM}_{[a,b]} = \dfrac{f(b) - f(a)}{a - b}$

$$\text{TVM}_{[1,3]} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\text{TVM}_{[3,5]} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$$

$$\text{TVM}_{[5,7]} = \frac{f(7) - f(5)}{7 - 5} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\text{TVM}_{[7,8]} = \frac{f(8) - f(7)}{8 - 7} = \frac{-1{,}5}{1} = -1{,}5$$

$$\text{TVM}_{[8,10]} = \frac{f(10) - f(8)}{10 - 8} = \frac{-1}{2} = -0{,}5$$

$$\text{TVM}_{[10,11]} = \frac{f(11) - f(10)}{11 - 10} = \frac{0}{1} = 0$$

2 **Calcula la velocidad (en metros por segundo), en el instante $t = 4$, de un móvil cuya ecuación de movimiento es:**

$$s(t) = 3 - 4t + \frac{t^2}{2}$$

$$v(4) = \lim_{h \to 0} \frac{s(4 + h) - s(4)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3 - 4(4 + h) + (4 + h)^2/2) - (3 - 4 \cdot 4 + 4^2/2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2/2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{2} = 0 \Rightarrow v(4) = 0 \text{ m/s}$$

3 **Dada la función $f(x) = 3x^2 - 3x$, averigua $f'(2)$.**

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3(2 + h)^2 - 3(2 + h)) - 3(2^2 - 2)}{2} =$$

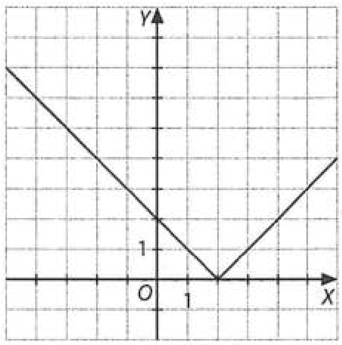
$$= \lim_{h \to 0} (3h + 9) = 9$$

4 **Dada la función $f(x) = 1/x$, averigua $f'(a)$, donde $a \neq 0$. ¿Hay algún punto de la gráfica en que $f'(a) > 0$? ¿Cómo es $f(x)$ en cualquier punto de su dominio?**

Aplicando la definición de derivada en el punto a, se obtiene: $f'(a) = -1/a^2$, esta derivada es siempre negativa para cualquier valor de a; por tanto, la función siempre es decreciente.

5 **¿Existe la derivada en $x = 2$ de la función $f(x) = |x - 2|$? ¿Por qué?**

La representación gráfica de la función $f(x) = |x - 2|$ es la siguiente:



El punto de abscisa $x = 2$ es anguloso, por tanto no existe la derivada de $f(x)$ en $x = 2$.

6 **A partir de la función representada la figura 11.6 (ver página 307 del libro del alumno), determina:**

a) **Los puntos en los que no es derivable.**

b) **Los puntos de derivada nula.**

c) **$f'(-2)$ y $f'(4)$.**

d) **El valor de la pendiente de la recta tangente en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 1$.**

a) La función no es derivable en $x = -1$ y en $x = 2$ porque son puntos angulosos y en $x = 3$ ya que no es continua.

b) La función tiene la derivada nula en $x = 0$, puesto que la tangente es horizontal y en los intervalos $(2, 3) \cup (3, \infty)$ al ser una función constante.

c) $f'(-2) = 1$ y $f'(4) = 0$

d) $f'(-2) = 1$, $f'(0) = 0$ y $f'(1) = -2$, se puede observar en este último caso que la pendiente de la recta tangente es -2 puesto que al avanzar una unidad se bajan dos unidades.

7 **Calcula el valor de la pendiente de la recta tangente a $y = \dfrac{1}{x^2}$ en $x = 2$.**

Obtenemos la derivada de $y = \dfrac{1}{x^2}$ aplicando la definición, así $y' = = \dfrac{-2}{x^3}$.

En $x = 2$ la derivada vale $y' = \dfrac{-1}{4}$; por tanto, la pendiente de la recta tangente es $m = \dfrac{-1}{4}$.

8 **Determina los puntos de tangente horizontal de las funciones:**

a) **$f(x) = 2 + \sqrt{x}$** ***b)*** **$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$**

a) Determinamos la derivada de $f(x)$ aplicando la definición: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, este valor nunca podrá anularse por tanto la función no tiene tangentes horizontales.

b) $f'(x) = 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3/4$.

9 **Calcula el ángulo que forma la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -2x^2 + x$ en $x = 0$ con el semieje positivo de abscisas.**

Determinamos la derivada de $f(x)$, $f'(x) = -4x + 1 \Rightarrow f'(0) = 1$.

Por tanto, la pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es 1 y forma con el semieje positivo de abscisas un ángulo de 45°.

10 **Calcula, si existe, la derivada de la siguiente función en el punto de abscisa $x = 1$.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \\ 2 - x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

En $x = 1$ la función es continua.

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - h - 1}{h} = -1$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{1+h} - 1}{h} = -1$$

$f'(1) = -1$

11 **Calcula si, en el punto de abscisa 2, existe la derivada de la función.**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

No es continua en $x = 2$, por tanto no existe la derivada de f en ese punto.

12 **Determina si la función $f(x) = |x^2 - 1|$ es derivable en $x = -1$ y $x = 1$.**

No es derivable en dichos puntos, puesto que las derivadas laterales en ellos son distintas:

$f'_-(-1) = -2$; $f'_+(-1) = 2$ $\quad f'_-(1) = -2$; $f'_+(1) = 2$

13 **Dada la función $f(x) = (1 - x)^2$, calcula su derivada en el punto de abscisa 1. ¿Qué puedes decir acerca de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto?**

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = 0$$

La recta tangente es horizontal.

14 **Averigua el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de la función $f(x) = x^2 - 1$ en el punto de abscisa $x = 2$. A continuación, escribe la ecuación de dicha recta.**

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 1 - 3}{h} = 4$$

El valor de la pendiente de la recta tangente a la curva $x^2 - 1$ en el punto $x = 2$ es 4, y su ecuación: $y = 4x - 5$.

15 **Calcula la pendiente de la tangente a $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x = 4$. A continuación, escribe la ecuación de dicha recta.**

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \frac{1}{4}$$

$f(4) = 2$

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{x}{4} + 1$$

16 **Averigua en qué punto de la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x$, la pendiente de la recta tangente es 4.**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 2(x+h) - (x^2 - 2x)}{h} = 4$$

$\Rightarrow 2x - 2 = 4 \Rightarrow x = 3$

17 **Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x + 2}$ en el punto de abscisa $x = 2$.**

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \frac{1}{4}$$

$f(2) = 2$

Recta tangente: $y - 2 = \dfrac{1}{4}(x - 2) \Rightarrow y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{2}$

Recta normal: $y - 2 = -4(x - 2) \Rightarrow y = -4x + 10$

18 **Determina si la función $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ es derivable en $x = -1$.**

No es derivable en $x = -1$, ya que no es continua en $x = -1$.

19 **Determina si es derivable en $x = 2$ la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La función f es continua en $x = 2$, pero no es derivable, puesto que $f'_-(2) = 4$ y $f'_+(2) = 1$.

20 **Calcula el valor del parámetro a para que sea derivable en $x = 1/2$ la función:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{a}{x} & \text{si } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Si $a = -\dfrac{2}{9}$, f es continua en $x = \dfrac{1}{2}$, pero no es derivable en $x = \dfrac{1}{2}$. Por lo tanto el punto $\left(\dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$ es un punto anguloso.

21 **Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$

b) $g(x) = 3x^3 - \dfrac{x^2}{3} + \sqrt{2}x - \sqrt{3}$

c) $h(x) = \dfrac{3x^5}{5} - \dfrac{2x^2}{3} + \dfrac{2}{3}$

d) $i(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$

a) $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{x^2}$

b) $g'(x) = 9x^2 - \dfrac{2x}{3} + \sqrt{2}$

c) $h'(x) = 3x^4 - \dfrac{4x}{3}$

d) $i'(x) = -\dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{6}{x^4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2x\sqrt{x}}$

22 **Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x^4 \cdot \ln x$ *c)* $h(x) = \dfrac{3x}{3x - 1}$

b) $g(x) = \sqrt{x} \cdot \cos x$ *d)* $i(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$

a) $f'(x) = x^3 + 4x^3 \cdot \ln x$

b) $g'(x) = \dfrac{\cos x - 2x \cdot \operatorname{sen} x}{2\sqrt{x}}$

c) $h'(x) = \dfrac{-3}{(3x - 1)^2}$

d) $i'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + 1)^2}$

23 **Calcula la derivada de $f(x) = x^4 \ln x$ y halla la pendiente de la recta tangente a la función en $x = 1$.**

La función derivada es $f'(x) = x^3 + 4x^3 \cdot \ln x \Rightarrow f'(1) = 1$.

Luego la pendiente de la recta tangente es $m = 1$.

24 **Calcula la pendiente de la recta tangente a $h(x) = \dfrac{3x}{3x - 1}$ en $x = 1$.**

La función derivada es: $h'(x) = \dfrac{-3}{(3x - 1)^2} \Rightarrow h'(1) = \dfrac{-3}{4}$

Luego la pendiente de la recta tangente es: $m = -\dfrac{3}{4}$

25 **Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 1$, calcula el valor de a para que la pendiente de la recta tangente en $x = 1$ sea $-\dfrac{5}{2}$.**

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + a \Rightarrow -\frac{5}{2} = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

26 **Calcula la derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = e^{2x}$ *e)* $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

b) $f(x) = (x + 1) \cdot 2^{x+1}$ *f)* $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

c) $f(x) = \ln (x + e^{-x})$ *g)* $f(x) = \cos 2x^2$

d) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ *h)* $f(x) = \operatorname{sen} x^2 - \cos x^2$

a) $f'(x) = 2e^{2x}$

b) $f'(x) = 2^{x+1} \cdot [1 + (1 + x) \ln 2]$

c) $f'(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

d) $f'(x) = 2 \cos 2x$

e) $f'(x) = \operatorname{sen} 2x$

f) $f'(x) = 2x \cos x^2$

g) $f'(x) = -4x \operatorname{sen} 2x^2$

h) $f'(x) = 2x (\cos x^2 + \operatorname{sen} x^2)$

27 **Dada la función $f(x) = 3x^2 - x$, calcula $f'(1)$, $f''(-2)$ y $f'''(2)$.**

$f'(1) = 6 \cdot 1 - 1 = 5$, $f''(-2) = 6$, $f'''(2) = 0$

28 **Halla las derivadas sucesivas de la función $f(x) = x^3 - 2$.**

$f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, $f^{4)}(x) = 0$, $f^{5)}(x) = 0\ldots$

$f^{n)}(x) = 0$

29 **Calcula la segunda derivada de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} (x + a)^2 + b & \text{si } x \geq a \\ -(x + a)^2 + b & \text{si } x < a \end{cases}$$

Primero calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x + a) & \text{si } x \geq a \\ -2(x + a) & \text{si } x < a \end{cases}$$

Y ahora podemos calcular la segunda:

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > a \\ -2 & \text{si } x < a \end{cases}$$

30 **Determina la función derivada de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

31 **Determina los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones, indicando, si existen, los puntos de inflexión.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2^{-x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

c) $f(x) = x \cdot e^{x^2}$

d) $f(x) = x - e^x$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x}$

f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

g) $f(x) = x - \sqrt[3]{x^2}$

h) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$, en $(-\pi, \pi)$

a) $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 2^{-x+1} \ln^2 x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

f es siempre cóncava. En $x = 0$ hay un punto anguloso. No es un punto de inflexión.

b) $f''(x) = \dfrac{-2 + x}{e^x}$

f es convexa en $(-\infty, 2)$ y cóncava en $(2, +\infty)$. En $x = 2$ tiene un punto de inflexión.

c) $f''(x) = e^{x^2} (4x^3 + 6x)$

f es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$. En $x = 0$ tiene un punto de inflexión.

d) $f''(x) = -e^x$

f es siempre convexa.

e) $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

f es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$. No existe punto de inflexión.

f) $f''(x) = \dfrac{2 \ln x - 3}{x^3}$

f es convexa en $(0, e^{3/2})$ y cóncava en $(e^{3/2}, +\infty)$. En $x = e^{3/2}$ tiene un punto de inflexión.

g) $f''(x) = \dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x}}$

f es siempre cóncava. En $x = 0$ hay un punto anguloso que no es de inflexión.

h) $f''(x) = -\operatorname{sen} x + \cos x$

f es cóncava en $(-3\pi/4, \pi/4)$, y convexa en $(-\pi, -3\pi/4)$ y $(\pi/4, \pi)$. En $x = -3\pi/4$ y en $x = \pi/4$ tiene puntos de inflexión.

32 **Dada la función $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, determina los extremos relativos y los intervalos de monotonía.**

Determinamos la pendiente de la recta tangente en $x = 3$, $f'(x) = -2x + 3 \Rightarrow f'(3) = -3$.

A continuación calculamos las coordenadas del punto de tangencia: $y = -3^2 + 3 \cdot 3 - 2 = -2$, el punto de tangencia es $(3, -2)$.

La ecuación de la recta tangente será de la forma:

$$y = -3x + n \Rightarrow -2 = -3 \cdot 3 + n \Rightarrow n = 7$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y = -3x + 7$.

33 **Averigua en qué punto de su gráfica la función $f(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$ tiene una recta tangente de pendiente 1/3, y escribe su ecuación.**

Derivamos la función, $f'(x) = \dfrac{3}{(2-x)^2}$, e igualamos $f'(x)$ a $\dfrac{1}{3}$:

$$\frac{3}{(2-x)^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 - 4x - 8 = 0$$

Se resuelve la ecuación y se halla $x = -1$ y $x = 5$. Luego existen dos rectas tangentes de pendiente $\dfrac{1}{3}$.

La ecuación de la recta tangente será de la forma $y = \dfrac{x}{4} + n$.

Determinamos los puntos de tangencia: $(-1, 0)$ y $(5, -2)$.

$$0 = \frac{-1}{3} + n \Rightarrow n = 0{,}235$$

La ecuación de la recta tangente es $y = \dfrac{x}{3} + 0{,}235$.

$$-2 = \frac{5}{3} + n \Rightarrow n = -3{,}235$$

La ecuación de la recta tangente es $y = \dfrac{x}{3} - 3{,}235$.

34 **Halla en qué punto es paralela a la recta $x + 2y - 3 = 0$ la recta tangente a la curva de la función $f(x) = \sqrt{x} - x$.**

La recta $x + 2y - 3 = 0$ tiene de pendiente $-\dfrac{1}{2}$.

Derivamos la función $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1$ e igualamos a $-\dfrac{1}{2}$:

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 1$, el punto pedido es $(1, 0)$.

35 **Halla los puntos críticos de $f(x) = xe^x$.**

Derivamos e igualamos a 0, $f'(x) = e^x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$.

Por tanto, las coordenadas del punto pedido son: $P\left(-1, -\dfrac{1}{e}\right)$

36 **Calcula las rectas tangentes a la función $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 2$ en los puntos de intersección con la recta $y = -2x + 3$.**

Determinamos en primer lugar los puntos de intersección:

$$x^3 + x^2 - 3x + 2 = -2x + 3 \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = -1$$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 3$

$f'(1) = 2$, el punto de tangencia es $(1, 1)$.

La ecuación de la recta tangente será: $1 = 2 \cdot 1 + n \Rightarrow n = -1 \Rightarrow y = 2x - 1$

$f'(-1) = -2$, el punto de tangencia es $(-1, 5)$.

La ecuación de la recta tangente será: $5 = 2 \cdot (-1) + n \Rightarrow n = 7 \Rightarrow y = -2x + 7$

37 **La recta $y = 2x - 3$ es tangente a $f(x) = ax^3 + bx^2 + x - 2$ en $x = 1$. Averigua a y b.**

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$

$f'(1) = 3a + 2b + 1 = 2 \Rightarrow 3a + 2b = 1$

El punto de tangencia pertenece a la recta y a la curva.

$y = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \Rightarrow P(1, -1)$

$-1 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 1 - 2 \Rightarrow a + b = 0$

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -1$

38 **Averigua los intervalos de monotonía de:**

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 1$$

Calculamos la función derivada e igualamos a cero:

$$f'(x) = -6x^2 - 6x + 12 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ y } x = 1$$

Intervalos de monotonía: $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$. Al sustituir un punto de cada uno de los intervalos en la función derivada y observar su signo, obtenemos que la función es creciente en $(-2, 1)$ y decreciente en $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

39 **Determina los extremos relativos de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$.**

$$D(x) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Al derivar la función, $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 2x}{(2x+1)^2}$, e igualarla a cero se obtiene: $x = 0$ y $x = -1$

Intervalos de monotonía:

$(-\infty, -1) \cup \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$.

$-\infty \qquad -1 \qquad -\frac{1}{2} \qquad 0 \qquad +\infty$

$f'(x)$	+	−	−	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

Tenemos un máximo relativo en $(-1, -1)$ y un mínimo relativo en $(0, 0)$.

40 **Averigua los puntos de tangente horizontal de $f(x) = 4x^3 - x^4$. Estudia si son todos extremos relativos, indicando los intervalos de monotonía de la función.**

Los puntos de tangente son los de derivada nula:

$$12x^2 - 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = 3$$

Los intervalos de monotonía son $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$

$-\infty \qquad 0 \qquad 3 \qquad +\infty$

$f'(x)$	+	+	−
$f(x)$	↗	↗	↘

El punto $(0, 0)$ no es un extremo relativo, el punto $(3, 27)$ es un máximo relativo.

41 **Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, indica:**

a) **El dominio.**

b) **Los puntos singulares.**

c) **Los intervalos de monotonía.**

a) Dom $f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

b) Derivamos e igualamos a cero:

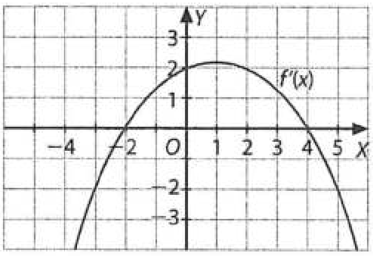
$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \Rightarrow x = e \Rightarrow (e, e)$$

c) $(0, 1) \cup (1, e) \cup (e, +\infty)$

	0 — 1	1 — e	e — $+\infty$
$f'(x)$	−	−	+
$f(x)$	↘	↘	↗

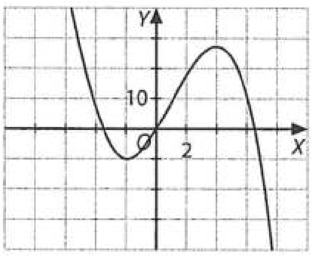
El punto (e, e) es un mínimo relativo.

42 **A partir de la gráfica de $f'(x)$ que se observa en la figura, indica los intervalos de crecimiento de la función $f(x)$ y sus extremos relativos. A continuación, esboza una posible representación de $f(x)$.**



La función es creciente cuando su derivada es positiva, en el intervalo $(-2, 4)$, y decreciente cuando su derivada es negativa, en $\mathbb{R} - [-2, 4]$.

En $x = -2$ la derivada es negativa y la función pasa de ser decreciente a ser creciente; por tanto, tenemos un mínimo relativo. En $x = 4$ hay un máximo relativo.



43 **Representa la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$, indicando:**

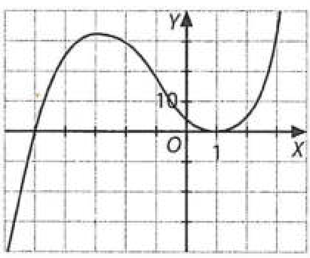
a) **Los puntos de intersección con los ejes.**

b) **Los puntos singulares.**

a) Con el eje X, $y = 0 \Rightarrow 0 = x^3 + 3x^2 - 9x + 5 \Rightarrow x = -5$ y $x = 1$; por tanto, los puntos de intersección son: $(-5, 0)$ y $(1, 0)$.

Con el eje Y, $x = 0 \Rightarrow y = 5$; por lo que el punto de corte es $(0, 5)$.

b) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = -3$ y $x = 1 \Rightarrow (-3, 32)$ y $(1, 0)$



44 **Representa la función $f(x) = \dfrac{-3x + 1}{x - 2}$, indicando:**

a) **El dominio y la continuidad.**

b) **Las ramas infinitas.**

c) **Los puntos de intersección con los ejes.**

d) **Los puntos de tangente horizontal.**

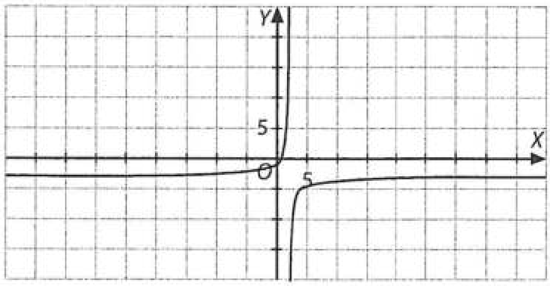
a) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$. Es continua en todo su dominio.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} (-3x + 1)/(x - 2) = -3$

c) Eje X, $y = 0 \Rightarrow 0 = (-3x + 1)/(x - 2) \Rightarrow x = 1/3$; el punto de corte es: $(1/3, 0)$.

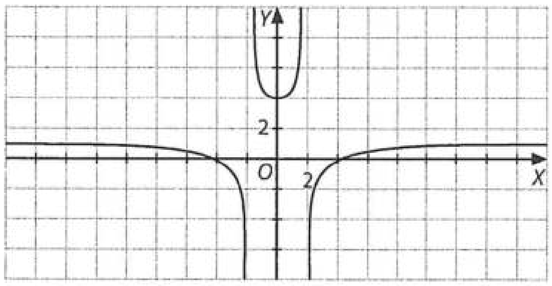
Eje Y, $x = 0 \Rightarrow y = -1/2$, el punto de corte es $(0, -1/2)$.

d) $f'(x) = 5/(x - 2)^2$, la derivada no se anula nunca, por tanto no existen puntos de tangente horizontal.



45 **Construye la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:**

- **Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$**
- **Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$**
- **Asíntota horizontal: $y = 1$**
- **Puntos de intersección con los ejes: $(-4, 0)$, $(4, 0)$ y $(0, 2)$.**
- **Decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y creciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.**



46 **Encuentra dos números cuya suma sea 100 y cuyo producto sea máximo.**

$a + b = 100 \Rightarrow a = 100 - b$

$P = a \cdot b \to P(b) = 100b - b^2$

Se trata de una función de segundo grado, cuyo máximo se encuentra en $b = 50$.

Luego se trata de los números $a = b = 50$.

47 **Se quiere construir un rectángulo con un alambre de longitud, l. ¿Qué dimensiones ha de tener el rectángulo para que su área sea máxima?**

$$2a + 2b = l \Rightarrow a = \frac{l - 2b}{2}$$

$$A = a \cdot b \to A(b) = \frac{lb - 2b^2}{2}$$

Se trata de una función de segundo grado, cuyo máximo se encuentra en $b = \dfrac{-l/2}{-2} = \dfrac{l}{4}$.

Luego $b = a = \dfrac{l}{4}$, es un cuadrado.

48 **Entre todos los triángulos isósceles cuyo perímetro es 36 cm, calcula el que tiene área máxima.**

$$36 = 2a + b \Rightarrow a = 18 - \frac{b}{2}$$

$$A = b \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{4} \Rightarrow A(b) = \sqrt{324b^2 - 18b^3}$$

El valor máximo de la función se alcanza en el mismo punto que en el cuadrado de la función:

$(A^2(b))' = -54b^2 + 648b$

$(A^2(b))' = 0$ si $b = 0$ y $b = 12$ $b = 0$ no tiene sentido.

$(A^2(12))'' = -108 \cdot 12 + 648 = -648$

Como $(A^2(12))''' < 0$, se trata de un máximo.

Para que tenga sentido, el triángulo debe ser equilátero, de lado 12 cm.

Ejercicios y problemas (páginas 334/338)

Tasa de variación media

1 **Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica.**

a) $f(x) = x + 2$ en $[-1, 5]$

b) $f(x) = x^2 + 3$ en $[0, 1]$

c) $f(x) = x^2 + x$ en $[0, 3]$

d) $f(x) = x^3 + 4$ en $[4, 6]$

e) $f(x) = x^2 + x^4$ en $[0, 2]$

f) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ en $[-1, 1]$

g) $f(x) = \log x$ en $[1, 10]$

h) $f(x) = 2^x$ en $[-10, 1]$

i) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ en $[4, 12]$

j) $f(x) = x^2 + 1$ en $[x, x+h]$

k) $f(x) = \sqrt{x^3}$ en $[x, a]$

l) $f(x) = \ln(x-1)$ en $[2, 3]$

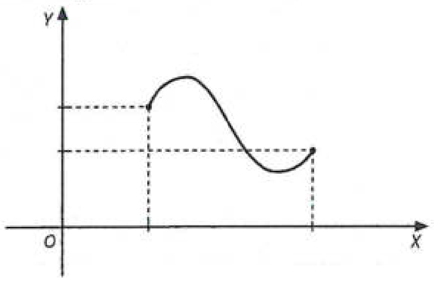
a) 1 *d)* 76 *g)* 1/9 *j)* $2x + h$

b) 1 *e)* 10 *h)* 0,181 7 *k)* $\dfrac{x^2 + ax + a^2}{\sqrt{x^3} + \sqrt{a^3}}$

c) 4 *f)* -1 *i)* 1/4 *l)* ln 2

2 **Si una función tiene una tasa de variación media negativa en un determinado intervalo, ¿puede afirmarse que la función es decreciente en dicho intervalo?**

Si una función tiene una tasa de variación media negativa en un determinado intervalo, no puede afirmarse que en este intervalo sea decreciente, ya que puede presentar intervalos de crecimiento y decrecimiento y tener una tasa de variación media global negativa.



3 **Demuestra que la tasa de variación media de las funciones del tipo $f(x) = ax^2 + k$ es la misma en un determinado intervalo, independientemente del valor de k.**

Sea el intervalo de amplitud h, $(x_0 + h, x_0)$.

$$\text{T.V.M. } [x_0 + h, x_0] = \frac{a(x_0 + h)^2 + k - ax_0^2 - k}{h} =$$

$$= \frac{2ax_0h + ah^2}{h} = 2ax_0 + ah$$

Es decir, el valor de k no interviene en el valor de la tasa de variación media.

Tasa de variación instantánea

4 **Calcula la tasa de variación instantánea utilizando la fórmula: TVI $(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ en las siguientes funciones, en los puntos que se indican.**

a) $f(x) = -x + 2$ en $x = 10$

b) $f(x) = x^2$ en $x = 2$

c) $f(x) = x^2 + 1$ en $x = 0$

d) $f(x) = x^3$ en $x = a$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en $x = a$

f) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = a$

a) -1 *c)* 0 *e)* $\dfrac{-1}{(a+1)^2}$

b) 4 *d)* $3a^2$ *f)* $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

Derivada de una función en un punto

5 **Utilizando la definición de derivada, halla la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican.**

a) $f(x) = (3 - x)/2$ en $x = \sqrt{2}$

b) $f(x) = x^2 + 2x$ en $x = 1$

c) $f(x) = (x - 5)^2$ en $x = 1/2$

d) $f(x) = 1/(x - 2)$ en $x = 0$

e) $f(x) = 1/\sqrt{x}$ en $x = 4$

a) $f'(\sqrt{2}) = -1/2$

b) $f'(1) = 4$

c) $f'(1/2) = -9$

d) $f'(0) = -1/4$

e) $f'(4) = -1/16$

6 **Aplicando la definición de derivada, calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican.**

a) $f(x) = x^3 + x^2$ en $x = 2$

b) $g(x) = x^3 + 3$ en $x = 1$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = -1$

d) $i(x) = \dfrac{x}{3}$ en $x = 5$

e) $j(x) = \dfrac{1}{x+3}$ en $x = -4$

f) $k(x) = \sqrt{x+1}$ en $x = 2$

a) $f'(2) = 16$ *d)* $i'(5) = \dfrac{1}{3}$

b) $g'(1) = 3$ *e)* $j'(-4) = -1$

c) $h'(-1) = -1$ *f)* $k'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

7 **Si existe la derivada de una función en un punto, ¿esta es una función o un número real?**

La derivada de una función en un punto es un número real.

8 **Si en un punto la recta tangente a la función $f(x)$ es paralela al eje de abscisas, ¿qué ocurre con la derivada en ese punto?**

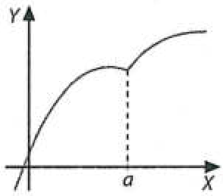
Si la recta tangente es paralela al eje de abscisas, la derivada es nula.

9 **Teniendo en cuenta la gráfica, indica cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta:**

a) $f'(a) = 0$

b) $f'(a)$ no existe.

c) $f(x)$ es continua en a.



La afirmación incorrecta es que $f'(a) = 0$, ya que, dado que a es un punto anguloso de la función, $f'(a)$ no existe.

10 **¿En qué punto no es derivable la función $f(x) = |x+2|$?**

La función $f(x) = |x+2|$ es una función continua en $\mathbb{R}$, cuya expresión se puede desdoblar del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si } x < -2 \\ x+2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

$x = -2$ es el punto de unión de los dos *trozos*, por lo que, para calcular la derivada en este punto, es preciso calcular sus derivadas laterales:

$$f'_-(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(-2+h) - 2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'_+(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2+h+2-0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

La función no es derivable en el punto $x = -2$, ya que, en este punto, las derivadas laterales no coinciden. Por tanto, $\nexists f'(-2)$.

11 **Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(3)$ en las funciones que se indican y di si las funciones son crecientes o decrecientes en dicho punto.**

a) $f(x) = (x+1)^2$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

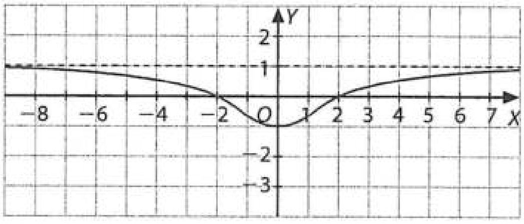
a) $f'(3) = 8 > 0 \Rightarrow f$ es creciente en $x = 3$.

b) $f'(3) = -1 < 0 \Rightarrow g$ es decreciente en $x = 3$.

12 **Observa la gráfica de la función $f(x)$ y di qué valor tienen, aproximadamente:**

a) $f(0)$ ***c)*** $f'(0)$

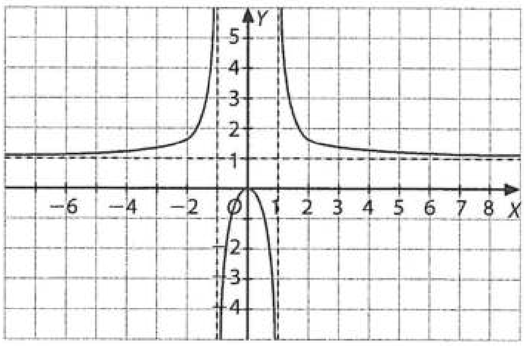
b) x si $f(x) = 0$ ***d)*** $f'(-2)$



a) $f(0) = -1$ ***c)*** $f'(0) = 0$

b) $x = -2, x = 2$ ***d)*** $f'(-2) = -\dfrac{1}{2}$

13 **Observa la representación gráfica de $f(x)$: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$**



Determina:

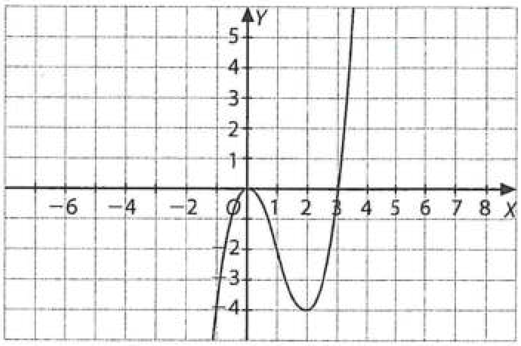
a) $f'(0)$

b) ¿Qué relación existe entre $f'(-3)$ y $f'(3)$?

a) $f'(0) = 0$

b) $f'(-3)$ y $f'(3)$ son iguales pero de signo contrario.

14 **Dada la representación gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2$:**



Determina:

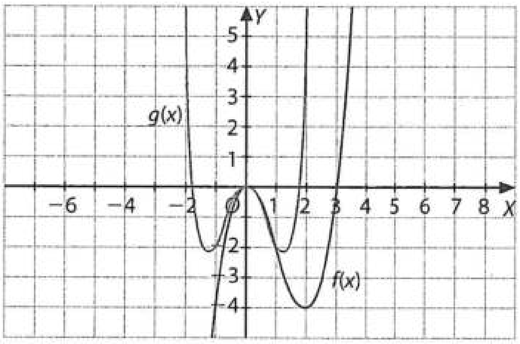
a) **Los puntos de derivada nula.**

b) **Los intervalos de derivada positiva y los intervalos de derivada negativa.**

a) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

b) En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ la derivada es positiva, en $(0, 2)$ la derivada es negativa.

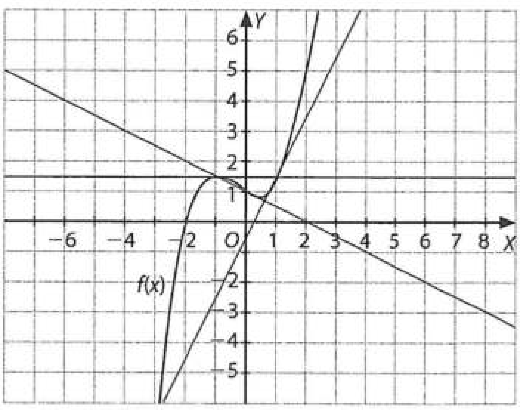
15 **Dadas las representaciones gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2$ y $g(x) = x^4 - 3x^2$:**



A partir de las gráficas, determina la derivada de cada una en $x = -1$.

Es más rápidamente creciente la función $f(x)$, puesto que su recta tangente tiene una pendiente mayor.

16 **A partir de la gráfica de la función $f(x)$, y de las de las tangentes en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$, calcula $f'(-1)$, $f'(0)$ y $f'(1)$.**



$f'(-1) = 0$

$f'(0) = -\dfrac{1}{2}$

$f'(1) = 2$

17 **Averigua en qué puntos no es derivable la siguiente función:**

$$f(x) = |x^2 - x - 2|$$

Dado que $x^2 - x - 2 = (x+1)\cdot(x-2)$, en los puntos $x = -1$ y en $x = 2$ la función no será derivable.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ x^2 - x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(-1) = 2x - 1 = -2 - 1 = -3 \\ f'_+(-1) = -2x + 1 = 2 + 1 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists\, f'(-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(2) = -2x + 1 = -4 + 1 = -3 \\ f'_+(2) = 2x - 1 = 4 - 1 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists\, f'(-2)$$

18 **Explica por qué no es derivable en $x = 0$ la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ -x + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

$f(0) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (x^2+1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (-x+2) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$$

Porque $f(x)$ no es continua en $x = 0$.

19 **Di en qué punto no es derivable la siguiente función definida a trozos:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \ge 2 \\ 4x & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

La función está definida a trozos, es continua puesto que $f(2) = 8$ y los límites laterales, cuando x tiende a 2, son iguales y valen 8, y la derivada existe en todo punto de $\mathbb{R} - \{2\}$.

En el punto $x = 2$, que es el punto de unión de los dos trozos, debe calcularse la derivada, si existe, mediante las derivadas laterales:

$$f'_+(2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8 + 6h^2 + 12h + h^3 - 8}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(6h + 12 + h^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (6h + 12 + h^2) = 12$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(2+h) - 8}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8 + 4h - 8}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8 + 4h - 8}{h} = 4$$

Dado que las derivadas laterales no coinciden, $\nexists\, f'(2)$.

Es aconsejable que los alumnos realicen la representación gráfica para que constaten que se trata de un punto *anguloso*.

20 **Dadas las siguientes funciones, indica en qué puntos no son derivables. Razona por qué.**

a) $f(x) = |x - 3|$

b) $f(x) = |x^2 - 1|$

c) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

a) En $x = 3$

Porque $f(x) = |x - 3| = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ y las derivadas laterales en $x = 3$ no son iguales: por la izquierda es -1 y por la derecha, 1.

También se puede razonar que en $x = 3$ hay un punto anguloso.

b) En $x = 1$ y en $x = -1$

Porque $f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 \le x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ y las derivadas laterales en $x = -1$ y en $x = 1$ no son iguales:

- En $x = -1$, por la izquierda es -2, y por la derecha es 2.
- En $x = 1$, por la izquierda es -2, y por la derecha es 2.

También se puede razonar que en $x = -1$ y en $x = 1$ hay puntos angulosos.

c) En $x = 0$ la función no es continua, por lo que no es derivable en este punto.

d) La función es continua en $x = 0$, pero no es derivable, porque las derivadas laterales no son iguales en $x = 0$: por la izquierda la derivada es 1, por la derecha la derivada es 0.

Se puede razonar a partir de la representación gráfica de la función.

21 **Dada la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

Calcula la ecuación de la recta tangente y normal en $x = 2$.

Recta tangente: $y - 3 = -2(x - 2)$

Recta normal: $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$

Función derivada

22 **¿Es lo mismo derivada de una función en un punto que función derivada?**

No, la derivada de una función en un punto es el valor de la pendiente de la recta tangente a esta función en este punto, y la función derivada es aquella aplicación que asocia a cada valor de x el valor de la derivada de la función en x.

23 **Si la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, ¿es derivable también en $\mathbb{R}$?**

Si la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ no tiene por qué ser derivable. Lo contrario sí que es cierto.

24 **Calcula la función derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = x^3 + 2x$

b) $f(x) = (x+2)^2$

c) $f(x) = x^2 - 5$

d) $f(x) = 2x^3 + 9x^2$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

f) $f(x) = \left(x + 2\sqrt{x}\right)^3$

g) $f(x) = 3\sqrt[5]{x^3} + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{4x}$

h) $f(x) = x\sqrt[3]{x^2} + 7x + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

i) $f(x) = \dfrac{2x^2}{3} + \dfrac{4x}{5} - \dfrac{1}{6}$

j) $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2}$

k) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{3}{x\sqrt{x}}$

l) $f(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}x - x^2 - 3x^3$

m) $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

n) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x^3}$

ñ) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$

o) $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2}$

p) $f(x) = 5\sqrt{x} + \sqrt{5x} - \dfrac{x^3}{\sqrt{x^3}}$

q) $f(x) = \dfrac{\ln x}{7} + \dfrac{2}{x}$

r) $f(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$

s) $f(x) = (2 - 6x)^2$

t) $f(x) = 3x\sqrt{x} - \dfrac{3x}{\sqrt{x}}$

u) $f(x) = 3x \cdot (x^2 - 2)$

v) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

w) $f(x) = \dfrac{x + x^3}{x^2}$

x) $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{x}{2}$

y) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{3}$

z) $f(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{x} - 5}$

a) $f'(x) = 3x^2 + 2$

b) $f'(x) = 2x + 4$

c) $f'(x) = 2x$

d) $f'(x) = 6x^2 + 18x$

e) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{x^4}$

f) $f'(x) = 3x^2 + 15x^{\frac{3}{2}} + 24x + 12x^{\frac{1}{2}}$

g) $f'(x) = \dfrac{9}{5\sqrt[5]{x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{4}{x^2}}$

h) $f'(x) = \dfrac{5\sqrt[3]{x^2}}{3} + 7 - \dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

i) $f'(x) = \dfrac{4x}{3} + \dfrac{4}{5}$

j) $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}$

k) $f'(x) = -\dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{9}{2x^2\sqrt{x}}$

l) $f'(x) = -\dfrac{1}{3} - 2x - 9x^2$

m) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

n) $f'(x) = \dfrac{7x^2\sqrt{x}}{2}$

ñ) $f'(x) = 8x^3 - 6x$

o) $f'(x) = \dfrac{4}{x^3}$

p) $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

q) $f'(x) = \dfrac{1}{7x} - \dfrac{2}{x^2}$

r) $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2} + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

s) $f'(x) = -24 + 72x$

t) $f'(x) = \dfrac{9\sqrt{x}}{2} - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

u) $f'(x) = 9x^2 - 6$

v) $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{3}{x^4}$

w) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

x) $f'(x) = \dfrac{-1}{2x^2} + \dfrac{1}{2}$

y) $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

z) $f'(x) = \dfrac{5\sqrt{x} - 50}{2\left(\sqrt{x} - 5\right)^2}$

25 **Calcula la función derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$

b) $f(x) = (x^2 - x + 1) \cdot e^x$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{e^x}$

d) $f(x) = (x^2 + 3x - 1) \cdot (2x^3 - 1)$

e) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{2x - 1}$

f) $f(x) = \dfrac{3x}{x - 1} + \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

g) $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

h) $f(x) = \dfrac{e^{5x}}{x}$

i) $f(x) = \dfrac{e^{-3x} + 2}{e^{-3x} - 2}$

j) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos 2x}{1 - \operatorname{sen} x}$

k) $f(x) = 3x \cdot \operatorname{sen} x + 4$

l) $f(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$

m) $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^{2x}}$

n) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{3}$

ñ) $f(x) = \dfrac{\ln 4x}{x}$

o) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

p) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$

q) $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen} x$

r) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 1}$

s) $f(x) = e^x \cdot 2x + x^2$

t) $f(x) = \dfrac{e^x}{2^x}$

u) $f(x)=\ln x\cdot \operatorname{sen} x$

v) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$

w) $f(x)=x^3\cdot 3^x$

x) $f(x)=\dfrac{1}{\ln 3x}$

y) $f(x)=e^x\cdot \cos x+2^4$

a) $f'(x)=\dfrac{4\sqrt{x}+3x+2}{2\sqrt{x}\left(2+\sqrt{x}\right)^2}$

b) $f'(x)=e^x\,(x^2+x)$

c) $f'(x)=\dfrac{3x^2-x^3}{e^x}$

d) $f'(x)=10x^4+24x^3-6x^2-2x-3$

e) $f'(x)=\dfrac{-4}{(2x-1)^2}$

f) $f'(x)=\dfrac{-5x^2-6x-5}{(x^2-1)^2}$

g) $f'(x)=\dfrac{-\sqrt{x}}{3x\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{2x\sqrt{x}}$

h) $f'(x)=\dfrac{e^x(5x-1)}{x^2}$

i) $f'(x)=\dfrac{2x^{3x}}{(1-2e^{3x})^2}$

j) $f'(x)=2\cos x$

k) $f'(x)=3(\operatorname{sen} x+x\cos x)$

l) $f'(x)=\dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$

m) $f'(x)=-e^{-2x}(e^x+2)$

n) $f'(x)=\dfrac{\cos x}{3}$

ñ) $f'(x)=\dfrac{1-\ln 4x}{x^2}$

o) $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$

p) $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

q) $f'(x)=2x\operatorname{sen} x+x^2\cos x$

r) $f'(x)=\dfrac{-2x^2-2x-2}{(x^2-1)^2}$

s) $f'(x)=2\,(x\,e^x+e^x+x)$

t) $f'(x)=\dfrac{e^x\,(1-\ln 2)}{2^x}$

u) $f'(x)=\ln x\cdot\cos x+\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

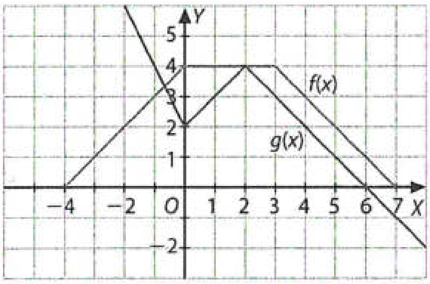
v) $f'(x)=\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}\cdot e^x}$

w) $f'(x)=3^x\cdot x^2\,(x\cdot\ln x+3)$

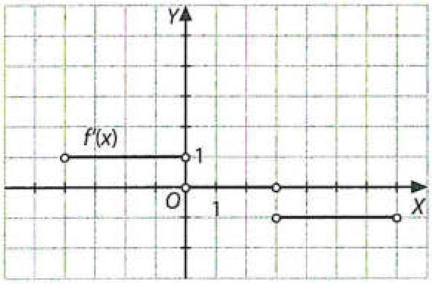
x) $f'(x)=\dfrac{-1}{x\cdot\ln^2 3x}$

y) $f'(x)=e^x\,(\cos x-\operatorname{sen} x)$

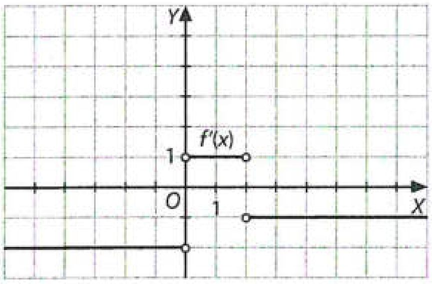
26 **Obtén, a partir de las gráficas de las funciones, las de sus funciones derivadas.**



a)



b)



Aplicaciones de la derivada

27 **Calcula cuál de estas funciones es más rápidamente creciente para $x=2$.**

- $f(x)=6x^3-4x^2-10x+5$
- $g(x)=12x^4-4x+3$

Para saber cuál es más rápidamente creciente para $x=2$, deberemos hallar el valor de la derivada de las dos funciones para $x=2$:

$f'(x)=18x^2-8x-10\Rightarrow f'(2)=46$

$g'(x)=48x^3-4\Rightarrow g'(2)=380$

Tiene la derivada mayor $g(x)$, por tanto, esta es la función más rápidamente creciente.

28 **Dada la función $f(x)=ax^2-3x+5$, calcula el valor de a para que $f'(1)=9$.**

Se calcula, en primer lugar, la derivada de la función:

$f'(x)=2ax-3$

En $x=1$ tenemos: $f'(1)=2a-3$

Si $f'(1)=9$, entonces: $9=2a-3\Rightarrow a=6$

29 **La función $s(t)=30-5t^2$ expresa el espacio que recorre un cuerpo en caída libre en función del tiempo, donde s se mide en metros y t en segundos.**

Calcula la velocidad media de la caída y la velocidad instantánea en $t=2$ s y en el momento de llegar al suelo.

$v_m=-10$ m/s

$v(2)=-20$ m/s

$v(\sqrt{6})=-10\sqrt{6}$ m/s

Los signos negativos indican que en el sistema de referencia la caída tiene velocidad negativa.

30 **Calcula la ecuación correspondiente a la recta tangente a la función $f(x) = 7x^2 + 4x - 7$ en el punto de abscisa $x = 3$.**

$f(x) = 7x^2 + 4x - 7$

$f'(x) = 14x + 4$

En el punto de abscisa 3, $f'(3) = 46$, que es la pendiente de la recta tangente en ese punto.

Calculamos el valor de la ordenada del punto de abscisa 3: $f(3) = 68$

Podemos escribir:

$y - f(3) = f'(3)(x - 3) \Rightarrow y - 68 = 46(x - 3) \Rightarrow y = 46x - 70$

31 **Halla la ecuación de la recta tangente a esta función:**

$$f(x) = 2 + \sqrt{x} \text{ en } x = \frac{3}{4}$$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Por tanto, la ecuación punto-pendiente será:

$y - y_0 = m\,(x - x_0)$, donde $m = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$x_0 = \frac{3}{4}, y_0 = 2 + \sqrt{\frac{3}{4}} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto:

$$y - 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{3}{4}\right)$$

32 **¿En qué punto es paralela la tangente de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - 7x$ a la bisectriz del primer cuadrante? ¿Y a la del segundo?**

Para que la tangente sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante, su pendiente debe ser 1.

$$f'(x) = \frac{x}{2} - 7 \Rightarrow \frac{x}{2} - 7 = 1 \Rightarrow x = 16$$

El punto buscado es $(16, -48)$.

Para que la tangente sea paralela a la bisectriz del segundo cuadrante, su pendiente debe ser -1.

$$f'(x) = \frac{x}{2} - 7 \Rightarrow \frac{x}{2} - 7 = -1 \Rightarrow x = 12$$

El punto buscado es $(12, -48)$.

33 **Calcula el punto de la curva $y = 2 + x + x^2$ en el que la tangente es paralela a la recta $x - y = 0$.**

La curva corresponde a una función polinómica de segundo grado, continua y derivable en $\mathbb{R}$.

La recta $x - y = 0$ tiene pendiente 1; por tanto, buscamos el punto en el que la derivada es 1:

$$y' = 1 + 2x \Rightarrow 1 = 1 + 2x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0, 2)$$

34 **Halla en qué punto es paralela a la recta $3x - y + 2 = 0$ la recta tangente a la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$.**

La pendiente de la recta $3x - y + 2 = 0$ es 3.

La recta tangente, si debe ser paralela a esta recta, deberá tener la misma pendiente:

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow f'(x) = 2x - 6 = 3 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

El punto buscado es $P\left(\dfrac{9}{2}, f\left(\dfrac{9}{2}\right)\right)$, es decir, $P\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{-7}{4}\right)$.

35 **Halla los puntos de tangente horizontal de la gráfica de $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2$.**

$f(x)$ es una función polinómica; por tanto, continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Una recta horizontal tiene pendiente nula, por lo que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 6x$

$f'(x) = 0$ si $x(2x^2 + x - 1) = 0 \Rightarrow x(2x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$ y $x = -1$

Los puntos de tangente horizontal son los de abscisa $x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$ y $x = -1$.

36 **Averigua los puntos en los que la recta tangente a la curva de la función $f(x) = \dfrac{4}{x^2} + x$ cumple:**

a) **Es horizontal.**

b) **Es paralela a la recta $y = 2x + 3$.**

a) La pendiente de una recta horizontal es $m = 0$. Por tanto, hemos de buscar en qué punto, x_0, se cumple que $f'(x_0) = 0$:

$$f'(x) = -\frac{8}{x^3} + 1 \Rightarrow -\frac{8}{x^3} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{8}{x^3} = 1 \Rightarrow x = 2$$

El punto buscado es $P(2, f(2))$, es decir, $P(2, 3)$.

b) La pendiente de la recta dada es $m = 2$. Por tanto, hemos de buscar en qué punto, x_0, se cumple que $f'(x_0) = 2$:

$$f'(x) = \frac{-8}{x^3} + 1 \Rightarrow \frac{-8}{x^3} + 1 = 2 \Rightarrow \frac{8}{x^3} = -1 \Rightarrow x = -2$$

El punto buscado es $P(-2, f(-2))$, es decir, $P(-2, -1)$.

37 **Determina los puntos de la grafica de $f(x) = x^4 - 5x$ en los que la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. Halla las ecuaciones de estas tangentes.**

$f'(x) = 4x^3 - 5$

La pendiente de las tangentes buscadas es -1:

$$-1 = 4x^3 - 5 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

Hay un punto de abscisa 1 en que la tangente es paralela a $y = -x$, $P(1, -1)$.

La recta que pasa por $P(1, -1)$ de pendiente -1 es: $y = -x$

Observa que la tangente buscada es la bisectriz del segundo cuadrante.

38 **Considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$:**

a) **Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.**

b) **¿Existe alguna otra recta tangente a la gráfica de $f(x)$ que sea paralela a la que has hallado? Razona la respuesta y en caso afirmativo, calcula la ecuación.**

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$f(3) = 8$ $\quad$ $f'(3) = 11$

La ecuación de la recta que pasa por $(3, 8)$ de pendiente 11 es:

$$y - 8 = 11(x - 3) \Rightarrow y = 11x - 25$$

b) Buscamos en qué otro punto, $f(x)$ tiene una tangente de pendiente 11:

$f'(x) = 11 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 11 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1$

Cuando $x = -1$, la recta tangente también tiene pendiente 11.

$f(-1) = -4$; es decir, el punto es $(-1, -4)$

Recta que pasa por $(-1, -4)$ y tiene pendiente 11 es la siguiente:

$$y + 4 = 11(x + 1) \Rightarrow y = 11x + 7$$

39 **Averigua la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x} - 2x$ paralela a la recta de ecuación $3x + 2y + 2 = 0$.**

La pendiente de la recta es $\frac{-3}{2}$. Por tanto:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - 2 = \frac{-3}{2} \Rightarrow x = 1$$

Si $x = 1 \Rightarrow y = -1$

La ecuación de la recta que pasa por $(1, -1)$ y tiene pendiente $\frac{-3}{2}$ es $3x + 2y - 1 = 0$.

40 **¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ su recta tangente es paralela a la recta $x - 3y + 1 = 0$?**

La recta $x - 3y + 1 = 0$ tiene pendiente $\frac{1}{3}$. Por tanto:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3$$

$f(3) = \ln 3$

El punto es $(3, \ln 3)$.

41 **¿En qué punto de la curva $y = \ln x$ la recta tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1)$?**

La pendiente de la cuerda es $m = \frac{1 - 0}{e - 1} = \frac{1}{e - 1}$

$$y' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{e - 1} \Rightarrow x = e - 1$$

42 **Averigua en qué otro punto corta a la curva de $f(x)$ la tangente a $f(x) = x^3 - x + 1$ en $x = 1$.**

$f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(1) = 2$

Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$

Por tanto, la ecuación de la recta que pasa por $(1, 1)$ y tiene pendiente $m = 2$ es:

$$y = 2x - 1$$

Para saber el otro punto de intersección resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^3 - x + 1 \end{cases}$$

Al restar la primera ecuación a la segunda, se obtiene la ecuación $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Por Ruffini, se obtiene $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$.

Es decir, la recta corta a la curva en $x = 1$, que es el punto de tangencia, y en $x = -2$.

43 **Determina los puntos en los que la recta tangente a la curva de la función $f(x) = 3x^2 - x$ en $x = -2$ corta a los ejes de coordenadas.**

$f'(x) = 6x - 1 \Rightarrow f'(-2) = -13$

Si $x = -2 \Rightarrow f(-2) = 14$

Por tanto, la ecuación de la recta que pasa por $(-2, 14)$ y tiene pendiente $m = -13$ es:

$$y = -13x - 12$$

Corta a los ejes de coordenadas en $(0, -12)$ y $(-12/13, 0)$.

44 **Calcula en qué punto corta al eje X la recta tangente a la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$ en el punto de abscisa 1. ¿En qué punto corta al eje Y?**

En primer lugar, se calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa 1:

$$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(1) = -2$$

La ecuación de la recta tangente es, pues: $y = -2x + 1$

Para calcular los puntos de corte con el eje de abscisas:

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. El punto de corte es $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Para calcular los puntos de corte con el eje de ordenada: $x = 0 \Rightarrow y = 1$. El punto de corte es $(0, 1)$.

45 **Determina el punto de la curva $f(x) = -2x^2 + x$ en el que la recta tangente forma un ángulo de 135° con el eje de abscisas en sentido positivo.**

Debemos buscar un punto, x_0, tal que $f'(x_0) = -1$.

$$f'(x) = -4x + 1 \Rightarrow -4x + 1 = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Por tanto, el punto buscado es: $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, es decir: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

46 **Dada la curva de ecuación $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$:**

a) **¿En qué punto tiene una recta tangente horizontal?**

b) **¿Es posible que esta curva tenga una tangente paralela a $3x - 3y + 7 = 0$ en algún punto de abscisa negativa?**

a) $f(x)$ es una función racional, continua y derivable en $\mathbb{R}$. Una recta horizontal tiene pendiente nula, por lo que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 16x/(x^2 + 4)^2$

$f'(x) = 0$ si $x = 0$.

$f(x)$ tiene un punto de tangente horizontal en $(0, -1)$.

b) La pendiente de la recta $3x - 3y + 7 = 0$ es $1 > 0$ y para $x < 0$, $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ no tiene una tangente paralela a dicha recta para $x < 0$.

47 **Averigua los puntos en los que la recta tangente a la curva de la función $f(x) = x \ln x$:**

a) **Es horizontal.**

b) **Forma un ángulo de 45° con el eje X en sentido positivo.**

Se calcula la derivada de $f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = 1 + \ln x$.

a) Si la recta tangente debe ser horizontal, la derivada debe ser nula: $1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = 1/e$

b) Si la recta tangente debe formar un ángulo de 45° con el eje positivo de abscisas, la derivada de la función deberá coincidir con la tangente de 45°:

$$1 + \ln x = 1 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

48 **La recta $8x - 4y - 5 = 0$ es tangente a la curva de ecuación $y = x^2 + x - 1$. ¿En qué punto?**

$y' = 2x + 1$

La pendiente de la recta es 2, por lo que $2 = 2x + 1 \Rightarrow x = 1/2$.

Si $x = 1/2 \Rightarrow y = -1/4$. El punto de tangencia es $(1/2, -1/4)$.

49 **Determina la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{-2x}{5 - 5x}$ cuya pendiente es $-\frac{5}{2}$.**

$$y' = \frac{2}{5(1 - x)^2}$$

$$\text{Si } m = -5/2 \Rightarrow \frac{2}{5(1 - x)^2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

En el punto $(3/5, f(3/5))$ la pendiente de la tangente es $-5/2$.

$f(3/5) = -3/5$

Luego la ecuación de la tangente es $y = -3/5 - 5/2(x - 3/5)$ $\Rightarrow 25x + 10y - 9 = 0$.

50 **¿En qué punto la recta que pasa por los puntos $A(0, -1)$ y $B(-1, 1)$ es tangente a la curva $y = \dfrac{x^3}{2} - 2x^2 - 1$?**

La recta que pasa por A y B tiene pendiente -2, y su ecuación es $y = -2x - 1$.

$y' = \dfrac{3x^2}{2} - 4x \Rightarrow \dfrac{3x^2}{2} - 4x = -2 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$ y $x = 2$, en los puntos de la curva con esta abscisa, la tangente tiene pendiente -2.

Si $x = -2/3$, $y = -55/27$; este punto no pertenece a la recta que pasa por A y B.

Si $x = 2$, $y = -5$; este punto sí pertenece a la recta que pasa por A y B.

El punto en que la recta que pasa por A y B es tangente a la curva es $(2, -5)$.

51 **Determina el punto de intersección de las rectas tangentes a las gráficas de estas funciones:**

$$f(x) = \ln x \;\text{ y }\; g(x) = -x^3 + x^2 - 2 \text{ en } x = 1$$

Buscamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \ln x$ en $x = 1$:

$f(1) = 0$, luego el punto es $(1, 0)$.

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $m = f'(1) \Rightarrow m = 1$

La recta que pasa por $(1, 0)$ y tiene pendiente 1 es $y = x - 1$.

Buscamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x) = -x^3 + x^2 - 2$ en $x = 1$:

$g(1) = -2$, luego el punto es $(1, -2)$.

$g'(x) = -3x^2 + 2x$, $m = g'(1) \Rightarrow m = -1$

La recta que pasa por $(1, -2)$ y con pendiente -1 es $y = -x - 1$.

El punto de intersección se halla al resolver el sistema formado por las ecuaciones de las tangentes y se obtiene $P_i(0, -1)$.

52 **Determina la monotonía y la curvatura de estas funciones.**

a) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 5$ ***c)*** $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$

b) $h(x) = 4x^3 - 24x$ ***d)*** $g(x) = x^3 - 3x^2$

a) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 5$ $\quad f'(x) = 6x^2 + 18x - 24$

Se resuelve $f'(x) = 0$, y obtenemos $x_1 = 1$ y $x_2 = -4$. Como la derivada no tiene discontinuidades, los intervalos de monotonía serán:

$$(-\infty, -4), (-4, 1), (1, +\infty)$$

Buscamos el signo de $f'(x)$ en estos intervalos:

- $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -4)$ la función es creciente.
- $f'(x) < 0$ en $(-4, 1)$ la función es decreciente.
- $f'(x) > 0$ en $(1, +\infty)$ la función es creciente.

Para hallar los intervalos de curvatura, se estudia el signo de la segunda derivada. Para ello, en primer lugar, resolvemos $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x + 18 = 0 \Rightarrow x = -3/2$$

Los intervalos de curvatura son $(-\infty, -3/2) \cup (-3/2, +\infty)$ donde la función es convexa y cóncava respectivamente.

b) $h(x) = 4x^3 - 24x$ $\quad h'(x) = 12x^2 - 24$

Hacemos $h'(x) = 0$ y se obtiene: $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_2 = -\sqrt{2}$

Los intervalos de monotonía serán:

$$\left(-\infty, -\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \text{ y } \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$$

En ellos, la función crece, decrece y crece, respectivamente.

Para hallar los intervalos de curvatura, se estudia el signo de la segunda derivada. Para ello, en primer lugar, resolvemos $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 24x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Los intervalos de curvatura son $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ donde la función es convexa y cóncava respectivamente.

c) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

Se resuelve $f'(x) = 0$ dando como solución $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Los intervalos de monotonía son: $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$ donde la función es creciente, decreciente y creciente respectivamente.

Para hallar los intervalos de curvatura, se estudia el signo de la segunda derivada. Para ello, en primer lugar, resolvemos $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3/2$$

Los intervalos de curvatura son $(-\infty, 3/2) \cup (3/2, +\infty)$ donde la función es convexa y cóncava respectivamente.

d) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

Se resuelve $f'(x) = 0$ dando como solución $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$. Los intervalos de monotonía son: $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$ donde la función es creciente, decreciente y creciente respectivamente.

Para hallar los intervalos de curvatura, se estudia el signo de la segunda derivada. Para ello, en primer lugar, resolvemos $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Los intervalos de curvatura son $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ donde la función es convexa y cóncava respectivamente.

53 **Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2$, así como sus puntos máximos y mínimos relativos.**

$f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 6x = 6x(x + 1)(2x - 1)$ $\quad f'(x) = 0$

La función es polinómica, luego derivable en todos sus puntos, y partir de los ceros de $f'(x)$, determinamos los intervalos en que $f'(x)$ tiene signo constante:

	-1	0	$1/2$	
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

$f(x)$ es creciente en $(-1, 0) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

- En $x = -1$ y en $x = \dfrac{1}{2}$, presenta mínimos relativos.
- En $x = 0$ presenta un máximo relativo.

54 **Halla los extremos relativos de la siguiente función polinómica:**

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3$$

$f(x)$ es una función polinómica, por tanto continua y derivable en $\mathbb{R}$. Para hallar los extremos relativos calculamos los puntos singulares:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2$

Estudiamos el signo de $f'(x)$ a los lados de estos puntos:

	-1		0	
$f'(x)$	+	−	+	
$f(x)$	↗	↘	↗	

- En $x = -1$ la función tiene un máximo relativo.
- En $x = 2$ la función tiene un mínimo relativo.

55 **A partir de los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3$ y de su comportamiento en el infinito, representa de manera aproximada su gráfica.**

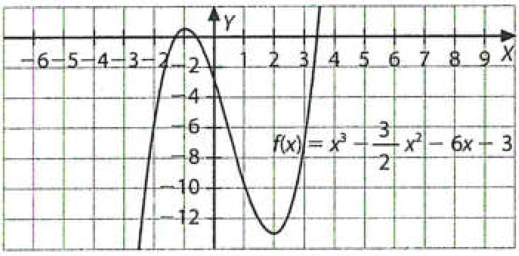
Para hallar los extremos relativos de la función, se deberá igualar a cero su derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ y } x = -1$$

$$f(2) = -13 \text{ y } f(-1) = 1/2$$

Tenemos un extremo en el punto $(2, -13)$ y otro en el punto $(-1, 1/2)$.

Teniendo en cuenta los límites de la función, en $+\infty$ y $-\infty$, podemos representarla de forma aproximada:



56 **Estudia el crecimiento y el decrecimiento de cada una de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x+1}$

a) Dom $f = \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = 12x^2 - 3$

Determinamos el signo de f' en $(-\infty, -1/2)$, $(-1/2, 1/2)$ y $(1/2, +\infty)$, buscando el signo de f' en un punto cualquiera de cada intervalo:

	$-1/2$		$1/2$	
f'	+	−	+	
f	↗	↘	↗	

Luego $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, +\infty)$ y $f(x)$ es decreciente en $(-1/2, 1/2)$.

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{3\}$ $\qquad f'(x) = -3/(x-3)^2$

La derivada es siempre negativa, luego $f(x)$ es decreciente en su dominio.

c) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\qquad f'(x) = (x^2 + 2x + 2)/(x+1)^2$

La derivada es siempre positiva, porque el numerador no se anula y siempre es positivo, el denominador también, luego $f(x)$ es creciente en su dominio.

57 **Determina los extremos relativos de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

b) $f(x) = x\,e^x$

c) $f(x) = x \ln x$

a) Para determinar los extremos relativos, igualamos a cero la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = -1$$

Para determinar si los extremos son máximos o mínimos, estudiaremos los intervalos de monotonía:

$$(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, +\infty)$$

- Intervalo $(-\infty, -1)$: para $x = -2$, $f'(-2) > 0$; en este intervalo la función es creciente.
- Intervalo $(-1, 0)$: para $x = -0{,}5$, $f'(-0{,}5) < 0$; en este intervalo la función es decreciente.
- Intervalo $(0, 1)$: para $x = 0{,}5$, $f'(0{,}5) < 0$; en este intervalo la función es decreciente.
- Intervalo $(1, +\infty)$: para $x = 2$, $f'(2) > 0$; en este intervalo la función es creciente.

En el punto $(-1, -2)$ la función presenta un máximo.

En el punto $(1, 2)$, un mínimo.

b) Para determinar los extremos relativos, igualamos a cero la derivada primera:

$$f'(x) = e^x(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

En el punto $\left(-1, \dfrac{-1}{e}\right)$ la función presenta un extremo relativo. Para determinar si es máximo o mínimo, estudiamos los intervalos de monotonía:

$$(-\infty, -1), (-1, +\infty)$$

- Intervalo $(-\infty, -1)$: para $x = -2$, $f'(-2) < 0$; en este intervalo la función es decreciente.
- Intervalo $(-1, +\infty)$: para $x = 0$, $f'(0) > 0$; en este intervalo la función es creciente.

En el punto $\left(-1, \dfrac{-1}{e}\right)$ la función presenta un mínimo.

c) Para determinar los extremos relativos, igualamos a cero la derivada primera:

$$f'(x) = 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = 1/e$$

Para determinar el tipo de extremo relativo que presenta la función, estudiamos sus intervalos de monotonía:

$$\left(0, \frac{1}{e}\right), \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

- Intervalo $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$: para $x = 0{,}1$, $f'(0{,}1) < 0$, en este intervalo la función es decreciente.
- Intervalo $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$: para $x = e$, $f'(e) > 0$, en este intervalo la función es creciente.

En el punto $\left(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e}\right)$ la función presenta un mínimo.

58 **Representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 4x + 1$

b) $f(x) = x^3 - 3x - 1$

c) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{2-x}{1-x}$

a)
- Ramas infinitas.

$$\lim_{x \to +\infty} (-2x^3 + 5x^2 - 4x + 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-2x^3 + 5x^2 - 4x + 1) = +\infty$$

- Puntos de intersección con los ejes.

Con el eje X. Se debe resolver la ecuación $f(x) = 0$.

Se obtiene $x = 1$ y $x = \dfrac{1}{2}$.

Los puntos de intersección son: $(1, 0)$ y $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Con el eje Y. Se impone $x = 0$ y se obtiene $f(0) = 1$. El punto de intersección con el eje Y es $(0, 1)$.

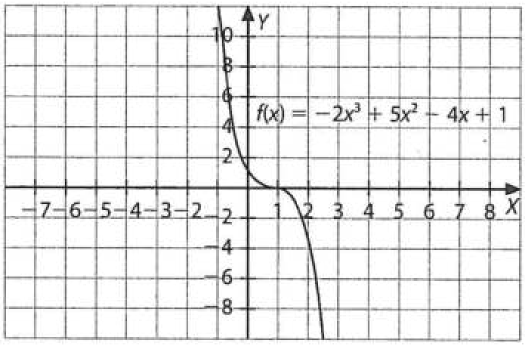
- Puntos de tangente horizontal.

  Igualamos a cero la primera derivada:

  $$f'(x) = -6x^2 + 10x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = \frac{2}{3}$$

  Calculamos sus ordenadas: $f(1) = 0$ y $f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$

  Por tanto, los puntos de tangente horizontal o puntos singulares son: $(1, 0)$ y $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$



b) - Ramas infinitas.

  $$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x - 1) = +\infty$$

  $$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x - 1) = -\infty$$

- Puntos de intersección con los ejes.

  Con el eje X: se debe resolver la ecuación $f(x) = 0$.

  Tratando de obtener las soluciones enteras de la ecuación $x^3 - 3x - 1 = 0$ se observa que no hay soluciones enteras.

  En principio, se deberá tratar de representar la función desconociendo los puntos de corte con el eje X.

  Con el eje Y. Se impone $x = 0$ y se obtiene $f(0) = -1$. El punto de intersección con el eje Y es $(0, -1)$.

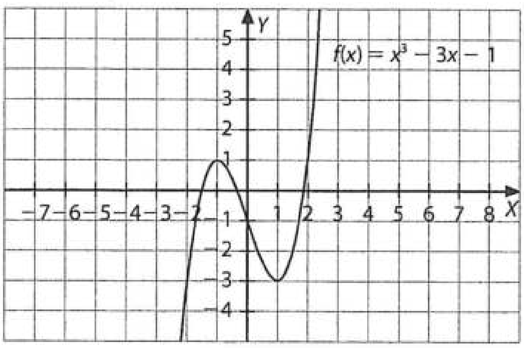
- Puntos de tangente horizontal.

  Igualamos a cero la primera derivada:

  $$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = -1$$

  A continuación calculamos sus ordenadas:

  $f(1) = -3$ y $f(-1) = 1$. Por tanto, los puntos de tangente horizontal o puntos singulares son: $(1, -3)$ y $(-1, 0)$.



c) - Ramas infinitas

  $$\lim_{x \to +\infty} (x^4 + 2x^3 - 2x - 1) = +\infty$$

  $$\lim_{x \to -\infty} (x^4 + 2x^3 - 2x - 1) = +\infty$$

- Puntos de intersección con los ejes.

  Con el eje X. Se debe resolver la ecuación $f(x) = 0$. Se obtiene $x = 1$ y $x = -1$. Luego los puntos de intersección son: $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

  Con el eje Y. Se impone $x = 0$ y se obtiene $f(0) = -1$. El punto de intersección con el eje Y es $(0, -1)$.

- Puntos de tangente horizontal.

  Igualamos a cero la primera derivada:

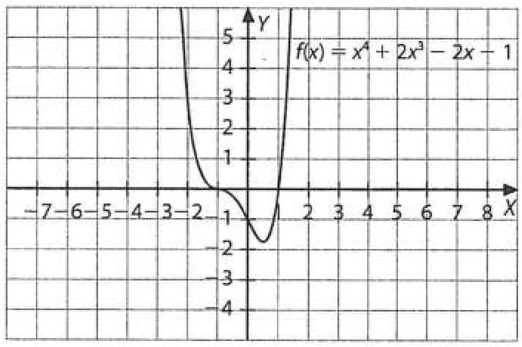
  $$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = -\frac{1}{2} \text{ y } x = 1$$

  A continuación, calculamos sus ordenadas:

  $$f(1) = 0,\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{16} \text{ y } f(-1) = 0$$

  Por tanto, los puntos de tangente horizontal son:

  $$(1, 0), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{16}\right) \text{ y } (-1, 0)$$



d) - Ramas infinitas.

  $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right) = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right) = 1$$

  Tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 1$.

- Puntos de intersección con los ejes.

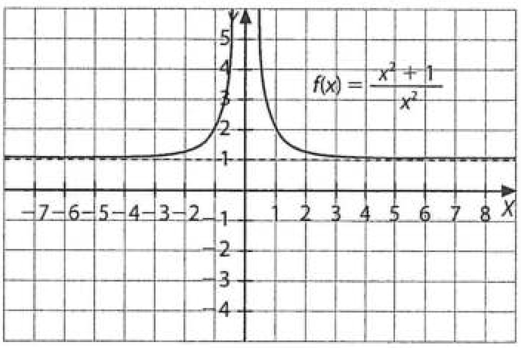
  Con el eje X. Se debe resolver la ecuación $f(x) = 0$. La ecuación no tiene solución, luego la función no corta al eje de las abscisas.

  Con el eje Y. Se impone $x = 0$ y se observa que este valor no pertenece al dominio, luego la función tampoco corta al eje de las ordenadas. Además, este eje de ecuación $x = 0$ es una asíntota vertical.

- Puntos de tangente horizontal.

  Igualamos a cero la primera derivada:

  $f'(x) = \frac{-2x}{x^4} = 0 \Rightarrow x = 0$; pero $x = 0$ no es del dominio de la función, luego no tiene puntos singulares.



e) ▪ Ramas infinitas.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2-x}{1-x}\right)=1 \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2-x}{1-x}\right)=1$$

La recta $y=1$ es una asíntota horizontal. Además $x=1$ no pertenece al dominio de la función y, por tanto, la recta $x=1$ es una asíntota vertical.

▪ Puntos de intersección con los ejes.

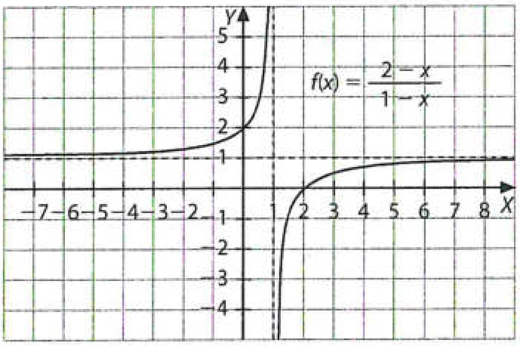
Con el eje *X*. Se debe resolver la ecuación $f(x)=0$. Se obtiene $x=2$. Luego la función corta al eje de las abscisas en el punto $(2, 0)$.

Con el eje *Y*. Se impone $x=0$ y se obtiene $f(0)=2$. El punto de intersección con el eje *Y* es $(0, 2)$.

▪ Puntos de tangente horizontal.

Igualamos a cero la primera derivada:

$f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}=0$. La ecuación anterior no tiene solución y, además, la función derivada es siempre positiva, luego la función es creciente en todo su dominio y, por tanto, no presenta puntos críticos.



Ejercicios de aplicación

59 **Dada la función $f(x)=\dfrac{mx-2}{x-1}$ donde *m* es un parámetro:**

a) Determina para cada valor del parámetro *m* el valor del límite $\lim_{x\to1} f(x)$, si existe.

b) ¿Para qué valores de *m* la derivada de la función *f*(*x*) es positiva para todo valor de *x*?

a) La discontinuidad depende del parámetro *m*:

▪ Si $m=2$, el límite es 2 y la discontinuidad es evitable.

▪ Si $m\neq2$, el límite no existe, la función diverge (infinito), y la discontinuidad es asintótica.

b) Si $m<2$, la derivada de la función $f(x)$ es positiva en su dominio.

60 **Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a las curvas en su punto de intersección: $f(x)=\dfrac{x+1}{2-x}$ y $g(x)=x^2-x-2$**

¿Qué se observa?

Averiguamos su punto de intersección resolviendo el sistema

$\begin{cases} y=\dfrac{x+1}{2-x} \\ y=x^2-x-2 \end{cases}$ y obtenemos $x=-1, y=0$.

Hallamos la ecuación de la tangente a $f(x)$ en $x=-1$:

$$f'(x)=\frac{3}{(2-x)^2}\Rightarrow f'(-1)=\frac{1}{3}$$

La recta que pasa por $(-1, 0)$ y tiene pendiente 1/3 es $y=\frac{1}{3}(x+1)$.

Hallamos la ecuación de la tangente a $g(x)$ en $x=-1$:

$$g'(x)=2x-1\Rightarrow g'(-1)=3$$

La recta que pasa por $(-1, 0)$ y tiene pendiente 3 es $y=-3(x+1)$.

Las dos tangentes son perpendiculares.

61 **Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x)=x^3+3x^2+x$ en los puntos de intersección con la bisectriz del primer cuadrante.**

Hay que determinar los puntos de intersección de la curva de la función con la bisectriz del primer cuadrante:

$\begin{cases} y=x^3+3x^2+x \\ y=x \end{cases}\Rightarrow$ se resuelve el sistema y se obtiene $x=0$ y $x=-3$, por lo que los puntos de intersección son $(0, 0)$ y $(-3, -3)$.

En $x=0$, la pendiente de la tangente será $f'(0)$:

$$f'(x)=3x^2+6x+1\Rightarrow f'(0)=1$$

La ecuación punto-pendiente es $y-0=1\,(x-0)\Rightarrow y=x$.

En $x=-3$, la pendiente de la recta tangente será $f'(-3)$. Como $f'(x)=3x^2+6x+1\Rightarrow f'(-3)=10$:

La ecuación punto pendiente será $y+3=10(x+3)$, es decir, $10x-y+27=0$.

62 **Calcula el área del triángulo que forman los semiejes positivos de coordenadas y la recta que es tangente a la curva $y=\dfrac{x^2}{2}-2x+\dfrac{3}{2}$ en $x=1$.**

En $x=1, y=0$. El punto es $(1, 0)$.

La pendiente de la tangente en $x=1$ es $y'=x-2\Rightarrow m=-1$

La ecuación de la recta que pasa por $(1, 0)$ y tiene pendiente -1 es $y=-x+1$.

La recta corta a los ejes en $(1, 0)$ y $(0, 1)$, por lo que el área del triángulo es $A=1/2\ u^2$.

63 **Calcula una función de segundo grado del tipo:**

$$f(x)=x^2+bx+c$$

sabiendo que su gráfica pasa por el punto de coordenadas (1, 3) y que en el punto de abscisa 2 su tangente tiene pendiente igual a 1.

Si en el punto de abscisa 2 la tangente tiene de pendiente 1, quiere decir que la derivada para $x=2$ es 1:

$$f'(x)=2x+b\Rightarrow 1=4+b\Rightarrow b=-3$$

Si, además, la función pasa por el punto $(1, 3)$, se tiene:

$$f(x)=x^2-3x+c\Rightarrow 3=1-3+c\Rightarrow c=5$$

La función de segundo grado es: $y=x^2-3x+5$

64 **Calcula los valores de *b* y *c* para que la función de ecuación $f(x)=x^2+bx+c$ tenga un extremo relativo en el punto $(-1, -4)$. ¿Qué tipo de extremo es?**

$f'(x)=2x+b$

$f(-1)=4\Rightarrow 4=1-b+c$

$f'(-1)=0\Rightarrow 0=-2+b\Rightarrow b=2, c=5$

Se trata de un mínimo porque es una parábola con el coeficiente del término de segundo grado positivo.

65 **Halla los coeficientes *a*, *b* y *c* de la función de ecuación $f(x)=ax^2+bx+c$, sabiendo que la recta $y=-x+1$ es tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto (1, 0) e $y=f(x)$ corta el eje de ordenadas en $y=3$.**

Pasa por el punto $P(1, 0)$ donde es tangente a una recta con pendiente -1:

$f(1)=0\Rightarrow 0=a+b+c$

$f'(1)=-1\Rightarrow 2a\cdot1+b=-1$

También pasa por el punto $Q(0, 3)$:

$$f(0) = 3 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3$$

Resolviendo el sistema formado por estas 3 ecuaciones, obtenemos: $a = 2, b = -5, c = 3$

66 **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x + a & \text{si } x < 1 \\ bx^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) **Calcula a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 1$.**

b) **Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)$ en $x = 1$.**

a) Si la función debe ser continua, se ha de cumplir que $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = b + 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = 4 + a \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = b + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 + a = b + 1$$

Si $f(x)$ ha de tener derivada en $x = 1$, se debe cumplir que:

$f'_-(x) = 6x^2 + 2 \Rightarrow f'_-(1) = 8$

$f'_+(x) = 2bx \Rightarrow f'_+(1) = 2b \Rightarrow f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow 8 = 2b$

Por tanto, $b = 4$, y $a = b - 3$, es decir: $a = 4 - 3 = 1$

b) Como $f'(1) = 8$, y $f(1) = 5$, la ecuación punto pendiente será $y - 5 = 8(x - 1)$, es decir: $8x - y - 3 = 0$

67 **Halla a y b para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ sea derivable en } \mathbb{R}.$$

Dado que los dos trozos de esta función son polinomios, la función será derivable en $\mathbb{R}$ si:

- Es continua en $\mathbb{R}$, imponemos que lo sea en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2 \Rightarrow a + b = 2$$

- Es derivable en $\mathbb{R}$, imponemos que lo sea en $x = 1$:

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^3 + (1+h)^2}{h} = 4$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{a(1+h) + b - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{a + b + ah - 2}{h} = a$$

$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow a = 5, b = -3$

68 **Halla dos números tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24 y que su producto sea máximo.**

Sean los números x e y, y su producto $P = x \cdot y$.

Como $2x + 3y = 24$, tenemos que $x = \dfrac{24 - 3y}{2}$.

Sustituyendo: $P = \dfrac{(24 - 3y)y}{2} = \dfrac{24y - 3y^2}{2}$

P tiene su valor máximo en $y = 4$, por lo que $x = 6$.

69 **Entre todos los rectángulos de perímetro 36, halla el que tiene área máxima.**

$A = b \cdot h$

Como $36 = 2b + 2h \Rightarrow 18 = b + h \Rightarrow b = 18 - h$

$A = 18h - h^2 \Rightarrow A' = 18 - 2h$

Si $h = 9$, entonces $A' = 0$.

Como $A'' < 0$ siempre, la función área tiene un máximo en $h = 9$.

Por tanto, el rectángulo de mayor área es un cuadrado de lado 9.

70 **De entre todos los triángulos rectángulos de área 1, averigua las dimensiones del que tiene hipotenusa mínima.**

$h = \sqrt{b^2 + c^2}$

Como $A = 1 = \dfrac{b \cdot c}{2} \Rightarrow c = \dfrac{2}{b}$

$h = \sqrt{b^2 + \dfrac{4}{b^2}} = \sqrt{\dfrac{b^4 + 4}{b^2}}$

El radicando debe ser mínimo, por lo que debemos hallar el mínimo de la función h^2. En $(0, +\infty)$ la función es continua y tiende a $+\infty$ en los extremos, por lo que su mínimo absoluto corresponderá a un mínimo relativo:

$(h^2)' = \dfrac{2b^4 - 8}{b^3}$; si $b = \sqrt{2}$, entonces $(h^2)' = 0$.

Para comprobar que es un mínimo no hace falta calcular la derivada segunda: es suficiente observar el signo de la derivada primera para $b = 1$ y para $b = 1{,}5$, y se deduce que es un mínimo. Por tanto, el triángulo rectángulo de hipotenusa mínima con área 1 es el triángulo isósceles cuyos catetos son iguales a $\sqrt{2}$ y cuya hipotenusa es 2.

71 **Determina la mayor área que puede encerrar un triángulo rectángulo cuyo lado mayor mida 1 metro.**

$A = ba/2$

Por el teorema de Pitágoras: $1 = b^2 + a^2$, $a^2 = 1 - b^2$, donde a y b son los catetos.

$$A = \frac{b\sqrt{1 - b^2}}{2} \qquad A' = \frac{\sqrt{1 - b^2}}{2} - \frac{b^2}{2\sqrt{1 - b^2}}$$

Si $A' = 0$ entonces $b = a = \sqrt{2}/2$ y $A = 1/4\ u^2$

Evaluación (página 339)

1. **Calcula la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en el punto $x = 2$.**

a) $f(x) = x^2$ ***b)*** $g(x) = \sqrt{x + 1}$ ***c)*** $h(x) = \dfrac{1}{x}$

a) $\lim_{h \to 2} \dfrac{h^2 - 4}{h - 2} = \lim_{h \to 2} (h + 2) = 4$ ***b)*** $\lim_{h \to 2} \dfrac{\sqrt{h+1} - \sqrt{3}}{h - 2} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}}$ ***c)*** $\lim_{h \to 2} \dfrac{\frac{1}{h} - \frac{1}{2}}{h - 2} = \dfrac{-1}{4}$

2. **Halla la recta tangente y normal a la función $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ en el punto $x = -2$.**

$x = -2 \Rightarrow f(-2) = 3$ $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(-2) = \dfrac{2}{(-2+1)^2} = 2$ Recta tangente: $y - 3 = 2(x + 2)$ Recta normal: $y - 3 = -\dfrac{1}{2}(x + 2)$

3. **Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función:** $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le -1 \\ x & \text{si } -1<x\le -1 \\ -x^2+1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

La función está formada por tres trozos compuestos por polinomios. Así pues, en cada intervalo, la función es continua y derivable. Hay que ver la continuidad y derivabilidad en los puntos de unión. En este caso la función no es continua en esos puntos ya que tiene discontinuidades de salto finito. Por tanto, al no ser continua, tampoco es derivable.

4. **Calcula la función derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x)=3\text{sen}^2(3x)$ *b)* $f(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}$ *c)* $f(x)=e^x\cdot\ln(\text{sen}(x))$ *d)* $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ *e)* $f(x)=e^{x^2}-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *f)* $f(x)=\ln(x^2-1)$

a) $f'(x)=3\cdot 2\cdot\text{sen}(3x)\cdot\cos(3x)\cdot 3=9\cdot\text{sen}(6x)$

b) $f'(x)=\dfrac{-1\cdot[-\text{sen}(x)]}{[\cos(x)]^2}=\dfrac{+\text{sen}(x)}{\cos^2(x)}$

c) $f'(x)=e^x\cdot Ln[\text{sen}(x)]+e^x\cdot\dfrac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$

d) $f'(x)=\dfrac{1}{\dfrac{x}{x+1}}\cdot\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{x^2+x}$

e) $f'(x)=2x\cdot e^{x^2}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}\cdot\dfrac{-1}{x^2}=2x\cdot e^{x^2}+\dfrac{1}{x}$

f) $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}\cdot 2x=\dfrac{2x}{(x^2-1)}$

5. **Estudia la monotonía de las siguientes funciones.**

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ *b)* $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ *c)* $f(x)=x^3-27x$ *d)* $f(x)=x^5-5x$

a) $f'(x)=\dfrac{-2}{x^3}$ $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$ $f'(x)>0, x\in(-\infty,0)\Rightarrow f'(x)$ creciente $f'(x)<0, x\in(0,+\infty)\Rightarrow f(x)$ decreciente

Como la derivada no se anula no hay máximos ni mínimos.

b) $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}$ $D(f)=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ $f'(x)<0, x\in(-\infty,-1)\Rightarrow f(x)$ decreciente $f'(x)<0, x\in(1,+\infty)\Rightarrow f(x)$ creciente

c) $f'(x)=3x^2-27$ $f'(x)<0, x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)\Rightarrow f(x)$ creciente $f'(x)<0, x\in(-3,3)\Rightarrow f(x)$ decreciente

Para $x=-3$ es un máximo de la función y para $x=3$ es un mínimo

d) $f'(x)=5x^4-5$ $f'(x)>0, x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\Rightarrow f(x)$ creciente $f'(x)<0, x\in(-1,1)\Rightarrow f(x)$ decreciente

Para $x=-1$ se tiene un máximo y para $x=1$ un mínimo.

6. **Calcula los puntos de inflexión y estudia la curvatura de esta función:** $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

Se deriva la función dos veces resultando: $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}\Rightarrow f''(x)=\dfrac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

Como la ecuación $f''(x)=0$ no tiene soluciones, la función no tiene puntos de inflexión. Para ver la curvatura se estudia el signo de la segunda derivada: $f''(x)>0, x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\Rightarrow f(x)$ cóncava. $f''(x)<0, x\in(-1,1)\Rightarrow f(x)$ convexa.

7. **Halla una función** $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ **tal que tenga un punto de inflexión en** $x=-1$ **y un extremo relativo en el punto** $P(1,20)$**.**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Hay un punto de inflexión en } x=-1\Rightarrow f''(-1)=0\\ \text{Hay un extremo relativo en } P(1,20)\Rightarrow f'(1)=0 \text{ y } f(1)=20\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}b+c+d=19\\2b+c=-3\\2b=6\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}d=25\\c=-9\Rightarrow f(x)=x^3+3x^2-9x+25\\b=3\end{array}\right.$$

8. **Calcula la base del triángulo isósceles cuyo perímetro mide 8 cm y su área es máxima.**

Planteamos la función a optimizar siendo el lado desigual $2x$ y la altura y: $f(x,y)=\dfrac{2x\cdot y}{2}=x\cdot y$

Si l es el lado igual, tenemos: $2l+2x=8\Rightarrow l=4-x$. Por Pitágoras, se deduce que: $y=\sqrt{(4-x)^2-x^2}$

Sustituyendo en la función obtenemos: $f(x)=x\sqrt{(4-x)^2-x^2}$

Para optimizar esta función se halla la primera derivada, se iguala a cero y se obtiene $x=4/3$. Por tanto, la base mide 8/3 cm.

9. **¿Cuál es el perímetro mínimo que puede tener un sector circular de 25 m² de área?**

La función que calcula el perímetro dependiendo del radio del sector es: $P=2r+\dfrac{2\pi r\alpha}{360}$

La restricción del problema impone que el área del sector valga 25 cm². Así: $25=r^2\pi\dfrac{\alpha}{360}\Rightarrow\alpha=\dfrac{25\cdot 360}{r^2\pi}$

Sustituyendo el valor de α en la función del perímetro se tiene que $f(r)=2r+\dfrac{50}{r}$. Optimizando esta función se obtiene que $r=5$ y por tanto el perímetro es 20 cm.