1 Números reales

LEE Y APRENDE

¿Qué representan los números de los 10 primeros versos?

Los números de los primeros versos son los primeros decimales del número Pi.

¿Qué quiere decir la autora al afirmar *¡Oh, qué corta es la cola del cometa…!*?

La autora considera que la cola de un cometa es pequeña comparada con el número de decimales del número Pi.

ANALIZA Y REFLEXIONA

¿Qué características tiene el número Pi? ¿A qué conjuntos de números pertenece?

El número Pi tiene infinitos decimales que no siguen ningún patrón numérico.

El número Pi pertenece al conjunto de los números irracionales.

¿Conoces algún otro número con las mismas características?

Respuesta libre.

Actividades propuestas

1. Señala si los siguientes números son racionales o irracionales.

a) **5,372 727 272…**
b) **0,127 202 002 000…**
c) **3,545 445 444 5…**
d) **8,666 126 712 67…**

a) Racional
b) Irracional
c) Irracional
d) Racional

2. Indica todos los conjuntos numéricos a los que puedan pertenecer estos números.

$$\frac{3}{5};\quad -\sqrt{2};\ 1{,}2525...;\ 2{,}010010001...;\ -4;\ 0{,}2\widehat{6}$$

Enteros: –4

Racionales: –4; $\frac{3}{5}$; 1,2525…; $0{,}2\widehat{6}$

Irracionales: $-\sqrt{2}$; 2,010010001…

Reales: Todos

3. Di si estas frases son verdaderas o falsas.

a) **Todo número decimal es racional.**

b) **El número $\sqrt{\frac{12}{3}}$ pertenece a $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.**

c) **El número –1 pertenece al intervalo $\left(-\sqrt{25}, -\sqrt[3]{8}\right)$.**

d) **Existe la fracción $\frac{a}{b} = 3{,}414114111411114...$**

a) Verdadera.

b) Verdadera, porque $\sqrt{\frac{12}{3}} = 2$

c) Falsa, porque $\left(-\sqrt{25}, -\sqrt[3]{8}\right) = (-5, -2)$

d) Falsa, porque 3,414114… es un número irracional.

4. Calcula estos valores absolutos.

a) $|-7+2|$

b) $|7-|-9||$

c) $||-5|-|-8||$

d) $||-9|+|2|\cdot|-5||$

a) $|-7+2| = |-5| = 5$

b) $|7-|-9|| = |7-9| = |-2| = 2$

c) $||-5|-|-8|| = |5-8| = |-3| = 3$

d) $||-9|+|2|\cdot|-5|| = |9+2\cdot 5| = |9+10| = |19| = 19$

5. Aproxima $\sqrt{10}$ = 3,162 277 66… con tres cifras significativas y calcula el error absoluto y el error relativo.

3,162 277 66… ≈ 3,16

$$E_A = |3{,}162\,277\,66 - 3{,}16| = 0{,}002\,277\,66 \Rightarrow E_R = \frac{0{,}002\,277\,66}{3{,}162\,277\,66} = 0{,}000\,720\,259 \Rightarrow 0{,}07\ \%$$

6. Actividad resuelta.

7. Encuentra todos los números *x* que verifican estas igualdades.

a) $|x-1| = 2$

b) $|x+2| = 5$

c) $|3-x| = \frac{4}{5}$

a) Como $|x-1| = 2 = d(x, 1)$, se buscan los números que distan 2 unidades de 1.

$x = 1 + 2 = 3$ y $x = 1 - 2 = -1$

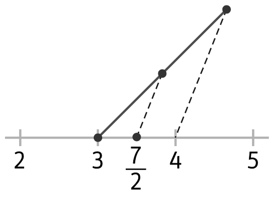
b) Como $|x+2| = |x-(-2)| = 5 = d(x, -2)$, se buscan los números que distan 5 unidades de –2.

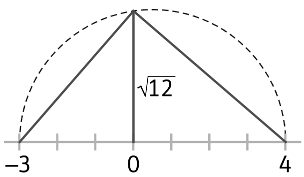
$x = -2 + 5 = 3$ y $x = -2 - 5 = -7$

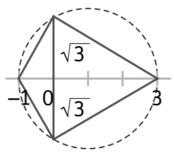
c) Como $|3-x| = \frac{4}{5} = d(3, x) = d(x, 3)$, se buscan los números que distan $\frac{4}{5}$ unidades de 3.

$x = 3 + \frac{4}{5} = \frac{19}{5}$ y $x = 3 - \frac{4}{5} = \frac{11}{5}$

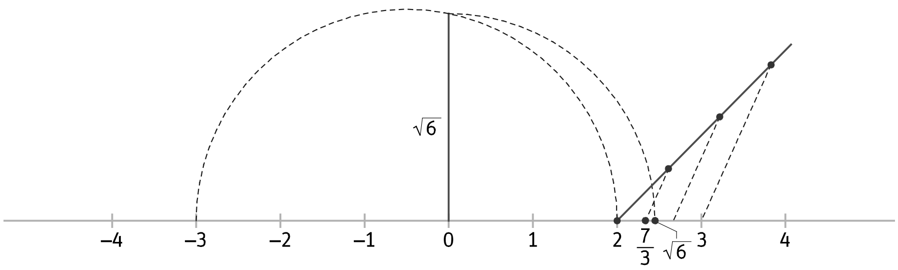
8. Representa en la recta real los números $\frac{7}{2}$, $\sqrt{12}$, $2\sqrt{3}$.







9. ¿Qué es mayor, $\sqrt{6}$ o $\frac{7}{3}$? Para averiguarlo, representa estos números en la recta real.



$\sqrt{6} > \frac{7}{3}$

10. Escribe como semirrectas o intervalos las siguientes desigualdades.

a) $x \geq -3$ | **c)** $x < 7$ y $x > -8$ | **e)** $7 < x$ y $x \geq 9$

b) $-5 \leq x < 7$ | **d)** $8 > x$ | **f)** $x < -3$ y $x \geq 1$

a) $[-3, +\infty)$ | **c)** $(-8, 7)$ | **e)** $[9, +\infty)$

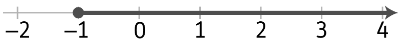
b) $[-5, 7)$ | **d)** $(-\infty, 8)$ | **f)** $\varnothing$

11. Expresa con desigualdades y gráficamente los siguientes intervalos y semirrectas.

a) $[-1, +\infty)$ | **c)** $(-\infty, 3)$

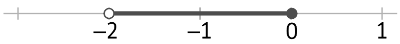
b) $(-2, 0]$ | **d)** $[4, 8]$

a) $[-1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -1\}$



c) $(-\infty, 3) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 3\}$

b) $(-2, 0] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -2 < x \leq 0\}$



d) $[4, 8] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 4 \leq x \leq 8\}$

12. Señala si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

a) $E[1, 2] = [-1, 3]$ | **c)** $E(-2, 3) = (-5, 0)$

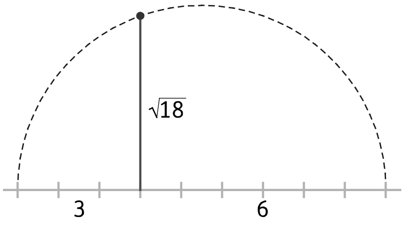
b) $E(0, 1) = [-1, 1]$ | **d)** $E(4, 2) = (3, 5]$

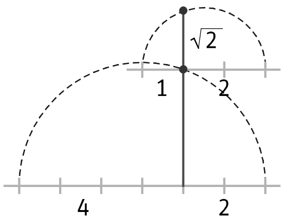
a) Verdadera | **c)** Falsa, porque $E(-2, 3) = (-5, 1)$

b) Falsa porque $E(0, 1) = (-1, 1)$ | **d)** Falsa, porque $E(4, 2) = (2, 6)$

13. En el siglo XII, el matemático indio Bhaskara aseguró que: $\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{18}$

Dibuja un segmento de longitud $\sqrt{8} + \sqrt{2}$ y otro de longitud $\sqrt{18}$, y compruébalo.





14. Responde en cada caso, expresando el resultado como un intervalo y como una desigualdad.

a) ¿Qué números reales están a la vez en los intervalos $(-7, 5]$ y $[-6, 3]$?

b) ¿Qué números enteros están a la vez en las semirrectas $(-\infty, -2]$ y $(-6, +\infty]$?

a) $[-6, 3] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -6 \leq x \leq 3\}$

b) $\{-5, -4, -3, -2\} = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -5 \leq x \leq -2\}$

15. Escribe los siguientes números como potencias cuya base sea un número primo.

a) 8, 125, 243, 1024, 2401

b) $\frac{1}{625}, \frac{1}{343}, \frac{1}{256}, \frac{1}{81}, \frac{1}{32}$

a) $8 = 2^3$; $125 = 5^2$; $243 = 3^5$; $1024 = 2^{10}$; $2401 = 7^4$

b) $\frac{1}{625} = 5^{-4}$; $\frac{1}{343} = 7^{-3}$; $\frac{1}{256} = 2^{-8}$; $\frac{1}{81} = 3^{-4}$; $\frac{1}{32} = 2^{-5}$

16. Haz estas operaciones con potencias.

a) $4^{-3} \cdot 4^2 : (4)^{-1}$ **b)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2$ **c)** $5^{-3}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^2$

a) $4^{-3} \cdot 4^2 : (4)^{-1} = 4^0 = 1$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \left(\frac{2^2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^2 = \frac{2^6}{3^3} \cdot \frac{3^4}{2^6} = 3$

c) $5^{-3}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^2 = 5^{-3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = 5^{-3} \cdot 5^4 = 5$

17. Actividad resuelta.

18. Calcula *x* en cada una de estas igualdades.

a) $2 \cdot 16^2 \cdot 32^{-7} = 2^x$ **c)** $10^{2x} \cdot 10\,000 = 0{,}001$

b) $3 \cdot 27^2 \cdot 9^{-7} = 3^x$ **d)** $100^{2x} \cdot \frac{1}{1000} = 0{,}1^{-2}$

a) $2 \cdot 16^2 \cdot 32^{-7} = 2 \cdot 2^8 \cdot 2^{-35} = 2^{-26} \Rightarrow x = -26$

b) $3 \cdot 27^2 \cdot 9^{-7} = 3 \cdot 3^6 \cdot 3^{-14} = 3^{-7} \Rightarrow x = -7$

c) $10^{2x} \cdot 10\,000 = 0{,}001 \Rightarrow 10^{2x} \cdot 10^4 = 10^{-3} \Rightarrow 10^{2x+4} = 10^{-3} \Rightarrow 2x + 4 = -3 \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$

d) $100^{2x} \cdot \frac{1}{1000} = 0{,}1^{-2} \Rightarrow 10^{4x} \cdot 10^{-3} = 10^2 \Rightarrow 10^{4x-3} = 10^2 \Rightarrow 4x - 3 = 2 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

19. Simplifica al máximo estas expresiones.

a) $\dfrac{4 \cdot \left(10^{-2}\right)^3 \cdot 10^2}{12 \cdot 10^{-3}}$ **b)** $\dfrac{25 \cdot \left(10^2\right)^{-5} \cdot 121}{11 \cdot 75 \cdot 10^{-9}}$

a) $\dfrac{4 \cdot \left(10^{-2}\right)^3 \cdot 10^2}{12 \cdot 10^{-3}} = \dfrac{10^{-6} \cdot 10^2}{3 \cdot 10^{-3}} = \dfrac{1}{30}$

b) $\dfrac{25 \cdot \left(10^2\right)^{-5} \cdot 121}{11 \cdot 75 \cdot 10^{-9}} = \dfrac{5^2 \cdot 10^{-10} \cdot 11^2}{11 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 10^{-9}} = \dfrac{11}{3 \cdot 10} = \dfrac{11}{30}$

20. Expresa como potencia de 10 y opera.

a) $\dfrac{\left(0{,}0001^{-2}\right)^3 \cdot 100^2}{0{,}1 \cdot 10\,000 \cdot 10^{-5}}$ **b)** $\dfrac{\left(0{,}0001^2\right)^{-2} \cdot 10^6}{\left(1000^{-1}\right)^{-5} \cdot 10^{-3}}$

a) $\dfrac{\left(0{,}0001^{-2}\right)^3 \cdot 100^2}{0{,}1 \cdot 10\,000 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{\left(10^{-4}\right)^{-6} \cdot 10^4}{10^{-1} \cdot 10^4 \cdot 10^{-5}} = 10^{30}$

b) $\dfrac{\left(10^{-4}\right)^{-4} \cdot 10^6}{\left(10^3\right)^5 \cdot 10^{-3}} = 10^{10}$

21. Actividad resuelta.

22. ¿Qué es mayor 31^{11} o 17^{14}?

Ayuda: piensa en 16 y 32 y ten en cuenta que $31^{11} < 32^{11}$ y $16^{14} < 17^{14}$.

$31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55} = \dfrac{2^{56}}{2} = \dfrac{\left(2^4\right)^{14}}{2} = \dfrac{16^{14}}{2} < 16^{14} < 17^{14}$

Por tanto, $31^{11} < 17^{14}$

23. Expresa en notación científica.

a) La distancia media de Plutón al Sol: 5 913 500 000 km

b) La masa de un átomo de hidrógeno: 0,000 000 000 000 000 000 000 001 661 g

a) 5 913 500 000 km = $5{,}9135 \cdot 10^{9}$ km

b) 0,000 000 000 000 000 000 000 001 661 gr = $1{,}661 \cdot 10^{-24}$ g

24. Copia en tu cuaderno y completa:

Escritura decimal	Escritura $n \cdot 10^{p}$	Notación científica
25 000 000	●●●	●●●
0,000 0043	●●●	●●●
●●●	$\mathbf{29 \cdot 10^{-3}}$	●●●
●●●	$\mathbf{438 \cdot 10^{5}}$	●●●
●●●	●●●	$\mathbf{3{,}48 \cdot 10^{-4}}$
●●●	●●●	$\mathbf{1{,}3 \cdot 10^{5}}$

Escritura decimal	Escritura $n \cdot 10^{p}$	Notación científica
25 000 000	$25 \cdot 10^{6}$	$2{,}5 \cdot 10^{7}$
0,000 0043	$43 \cdot 10^{-7}$	$4{,}3 \cdot 10^{-6}$
0,029	$\mathbf{29 \cdot 10^{-3}}$	$2{,}9 \cdot 10^{-2}$
43 800 000	$\mathbf{438 \cdot 10^{5}}$	$4{,}38 \cdot 10^{7}$
0,000 348	$348 \cdot 10^{-6}$	$\mathbf{3{,}48 \cdot 10^{-4}}$
130 000	$13 \cdot 10^{4}$	$\mathbf{1{,}3 \cdot 10^{5}}$

25. María tiene que dar la respuesta de una actividad en notación científica, pero el profesor le dice que su respuesta no está bien. ¿Cuál es la respuesta correcta en notación científica?

La respuesta correcta sería $0{,}25 \cdot 10^{16} = 2{,}5 \cdot 10^{15}$.

26. Actividad resuelta.

27. Si $a = 2{,}3 \cdot 10^{8}$, $b = 5{,}1 \cdot 10^{7}$, $c = 4{,}6 \cdot 10^{-5}$, resuelve las siguientes operaciones y escribe el resultado en notación científica.

a) $a + b$ **b)** $a \cdot b$ **c)** $a \cdot c$ **d)** $\dfrac{a}{c}$

a) $a + b = 2{,}3 \cdot 10^{8} + 5{,}1 \cdot 10^{7} = 2{,}3 \cdot 10^{8} + 0{,}51 \cdot 10^{8} = 2{,}81 \cdot 10^{8}$

b) $a \cdot b = (2{,}3 \cdot 10^{8}) \cdot (5{,}1 \cdot 10^{7}) = 11{,}73 \cdot 10^{15} = 1{,}173 \cdot 10^{16}$

c) $a \cdot c = (2{,}3 \cdot 10^{8}) \cdot (4{,}6 \cdot 10^{-5}) = 10{,}58 \cdot 10^{3} = 1{,}058 \cdot 10^{4}$

d) $\dfrac{a}{c} = \dfrac{2{,}3 \cdot 10^{8}}{4{,}6 \cdot 10^{-5}} = 0{,}5 \cdot 10^{13} = 5 \cdot 10^{12}$

28. Actividad interactiva.

29. Calcula mentalmente y escribe en tu cuaderno el valor de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[55]{1}$ **d)** $\sqrt[40]{-1}$ **g)** $\sqrt[5]{32}$

b) $\sqrt[4]{81}$ **e)** $\sqrt[3]{-1000}$ **h)** $\sqrt[4]{0{,}0001}$

c) $-\sqrt[6]{64}$ **f)** $-\sqrt{36}$ **i)** $\sqrt[4]{-81}$

a) 1 **d)** No es real. **g)** 2

b) ±3 **e)** –10 **h)** ±0,1

c) –2 **f)** –6 **i)** No es real.

30. Expresa los siguientes radicales como potencias y simplifícalos.

a) $\sqrt[3]{729}$ **c)** $\sqrt{125}$ **e)** $\sqrt[10]{81}$

b) $\sqrt[4]{1024}$ **d)** $\sqrt[6]{8}$ **f)** $\sqrt[12]{15\,625}$

a) $\sqrt[3]{729}=\left(3^6\right)^{\frac{1}{3}}=3^2=9$ **c)** $\sqrt{125}=\left(5^3\right)^{\frac{1}{2}}=5\sqrt{5}$ **e)** $\sqrt[10]{81}=\left(3^4\right)^{\frac{1}{10}}=3^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{9}$

b) $\sqrt[4]{1024}=\left(2^{10}\right)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{2^5}=4\sqrt{2}$ **d)** $\sqrt[6]{8}=\left(2^3\right)^{\frac{1}{6}}=\sqrt{2}$ **f)** $\sqrt[12]{15\,625}=\left(5^6\right)^{\frac{1}{12}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

31. Calcula el valor de las siguientes potencias.

a) $25^{\frac{3}{2}}$ **c)** $343^{\frac{2}{3}}$ **e)** $16^{0,25}$ **g)** $27^{0,\hat{3}}$

b) $49^{\frac{5}{2}}$ **d)** $125^{\frac{4}{3}}$ **f)** $81^{0,75}$ **h)** $625^{0,25}$

a) $25^{\frac{3}{2}}=\left(5^2\right)^{\frac{3}{2}}=125$ **c)** $343^{\frac{2}{3}}=\left(7^3\right)^{\frac{2}{3}}=49$ **e)** $16^{0,25}=\left(2^4\right)^{\frac{1}{4}}=2$ **g)** $27^{0,\hat{3}}=\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}=3$

c) $49^{\frac{5}{2}}=\left(7^2\right)^{\frac{5}{2}}=16\,807$ **d)** $125^{\frac{4}{3}}=\left(5^3\right)^{\frac{4}{3}}=625$ **f)** $81^{0,75}=\left(3^4\right)^{\frac{3}{4}}=27$ **h)** $625^{0,25}=\left(5^4\right)^{\frac{1}{4}}=5$

32. Expresa como un solo radical.

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4}$ **c)** $\left(\sqrt[5]{3}\right)^4:\sqrt[5]{27}$

b) $\sqrt[4]{4}:\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$ **d)** $\sqrt[3]{\sqrt{512}}\cdot\sqrt[6]{64}$

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{24}$ **c)** $\left(\sqrt[5]{3}\right)^4:\sqrt[5]{27}=\sqrt[5]{3^4}:\sqrt[5]{3^3}=\sqrt[5]{3}$

b) $\sqrt[4]{4}:\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{16}=2$ **d)** $\sqrt[3]{\sqrt{512}}\cdot\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^9}\cdot\sqrt[6]{2^6}=\sqrt[6]{2^{15}}=\sqrt{2^5}=4\sqrt{2}$

33. Aplica las propiedades de los radicales y simplifica las siguientes expresiones.

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{4}}}$ **b)** $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8}}}$ **c)** $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{2^6}}}$ **d)** $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2$

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{4}}}=\sqrt[24]{2^2}=\sqrt[12]{2}$ **b)** $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8}}}=\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[4]{2}$ **c)** $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{2^6}}}=\sqrt[4]{2}$ **d)** $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2=\sqrt[6]{2^{12}}=2^2=4$

34. Explica cómo expresiones tan distintas como $2^{0,5}$, $\sqrt{2}$ y $8^{\frac{1}{6}}$ pueden ser equivalentes.

$8^{\frac{1}{6}}=\left(2^3\right)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{3}{6}}=2^{\frac{1}{2}}=2^{0,5}=\sqrt{2}$

35. Actividad resuelta.

36. Reduce a índice común y ordena de mayor a menor los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[8]{8}$, $\sqrt[6]{6}$

b) $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[10]{20}$

a) $\sqrt[4]{4}=\sqrt[24]{4^6}=\sqrt[24]{2^{12}}=\sqrt[24]{2^4\cdot 4^4}$, $\sqrt[8]{8}=\sqrt[24]{8^3}=\sqrt[24]{2^9}$ y $\sqrt[6]{6}=\sqrt[24]{6^4}=\sqrt[24]{2^4\cdot 3^4}\Rightarrow\sqrt[8]{8}<\sqrt[6]{6}<\sqrt[4]{4}$

b) $\sqrt[5]{5}=\sqrt[10]{25}$ y $\sqrt{2}=\sqrt[10]{32}\Rightarrow\sqrt[10]{20}<\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}$

37. **Escribe las siguientes expresiones de la forma que se indica en cada caso.**

a) **Con radicales:** $x^{\frac{2}{3}}$, $\left(8x^{\frac{1}{3}}\right)^2$ **y** $(3+a)^{\frac{1}{3}}$

b) **Con exponentes fraccionarios:** $\sqrt[3]{2a^2}$, $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$ **y** $\sqrt[3]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

a) $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$, $\left(8x^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8^2x^{\frac{2}{3}} = 64\sqrt[3]{x^2}$ y $(3+a)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3+a}$

b) $\sqrt[3]{2a^2} = (2a^2)^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$ y $\sqrt[3]{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

38. **¿Cuál es el error en esta falsa igualdad?** $\sqrt{-1} = \sqrt[2\cdot 4]{(-1)^4} = \sqrt[8]{1} = 1$

La propiedad fundamental no está bien aplicada en este caso, pues esta solo es válida si el radicando es mayor o igual que cero y, en este caso, no lo es.

39. **Demuestra las propiedades de los radicales utilizando exponentes fraccionarios.**

1. $\sqrt[n]{ab} = (ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3. Si a ≥ 0, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{m\cdot n}} = \sqrt[m\cdot n]{a^m}$

4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

40. **Extrae factores y simplifica al máximo estos radicales.**

a) $\sqrt{3000}$ **b)** $\sqrt[3]{600}$ **c)** $\sqrt[4]{810}$

a) $\sqrt{3000} = \sqrt{10^2\cdot 30} = 10\sqrt{30}$

b) $\sqrt[3]{600} = \sqrt[3]{2^3\cdot 75} = 2\sqrt[3]{75}$

c) $\sqrt[4]{810} = \sqrt[4]{2\cdot 3^4\cdot 5} = 3\sqrt[4]{10}$

41. **Introduce factores dentro de cada radical.**

a) $3\sqrt{5}$ **b)** $4a\sqrt[3]{2a^2}$ **c)** $\dfrac{3}{5}\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}}$

a) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2\cdot 5} = \sqrt{45}$

b) $4a\sqrt[3]{2a^2} = \sqrt[3]{4^3a^3 2a^2} = \sqrt[3]{128a^5}$

c) $\dfrac{3}{5}\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^4\cdot 5}{5^4\cdot 3}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^3}{5^3}} = \sqrt[4]{\dfrac{27}{125}}$

42. **Efectúa las siguientes operaciones.**

a) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{27}$ **b)** $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[5]{392}$ **c)** $\sqrt[4]{2187} : \sqrt{108}$ **d)** $\sqrt{12} : \left(\sqrt[3]{32} : \sqrt[6]{2}\right)$

a) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{27} = \sqrt{2^3\cdot 3^3} = 2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3} = 6\sqrt{6}$

b) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[5]{392} = \sqrt[15]{4^5}\cdot\sqrt[15]{392^3} = \sqrt[15]{2^{10}}\cdot\sqrt[15]{(2^3\cdot 7^2)^3} = \sqrt[15]{2^{10}}\cdot\sqrt[15]{2^9\cdot 7^6} = \sqrt[15]{2^{19}\cdot 7^6} = 2\sqrt[15]{2^4\cdot 7^6} = 2\sqrt[15]{1\,882\,384}$

c) $\sqrt[4]{2187} : \sqrt{108} = \sqrt[4]{2187} : \sqrt[4]{108^2} = \sqrt[4]{3^7} : \sqrt[4]{(2^2\cdot 3^3)^2} = \sqrt[4]{3^7} : \sqrt[4]{2^4\cdot 3^6} = \sqrt[4]{\dfrac{3}{2^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}$

d) $\sqrt{12} : \left(\sqrt[3]{32} : \sqrt[6]{2}\right) = \sqrt[6]{12^3} : \left(\sqrt[6]{32^2} : \sqrt[6]{2}\right) = \sqrt[6]{(2^2\cdot 3)^3} : \left(\sqrt[6]{(2^5)^2} : \sqrt[6]{2}\right) = \sqrt[6]{2^6\cdot 3^3} : \left(\sqrt[6]{2^{10}} : \sqrt[6]{2}\right) = \sqrt[6]{\dfrac{3^3}{2^3}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

43. Opera y simplifica.

a) $\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + 3\sqrt{75}$

b) $3\sqrt{20} - 2\sqrt{80} - \sqrt{45}$

c) $\frac{3}{2}\sqrt{32} + 5\sqrt{18} - \sqrt{2^7}$

d) $-\sqrt{3^5} + \sqrt{3^2 \cdot 2^5} - \sqrt{2}$

a) $\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + 3\sqrt{75} = 2\sqrt{3} - 4\cdot 3\sqrt{3} + 3\cdot 5\sqrt{3} = (2 - 12 + 15)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{20} - 2\sqrt{80} - \sqrt{45} = 3\cdot 2\sqrt{5} - 2\cdot 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = (6 - 8 - 3)\sqrt{5} = -5\sqrt{5}$

c) $\frac{3}{2}\sqrt{32} + 5\sqrt{18} - \sqrt{2^7} = \frac{3}{2}\cdot 4\sqrt{2} + 5\cdot 3\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 13\sqrt{2}$

d) $-\sqrt{3^5} + \sqrt{3^2 \cdot 2^5} - \sqrt{2} = -9\sqrt{3} + 12\sqrt{2} - \sqrt{2} = -9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$

44. Racionaliza y simplifica las siguientes expresiones fraccionarias.

a) $\frac{3}{\sqrt{6}}$

b) $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{12}}$

d) $\frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

e) $\frac{2}{5 - \sqrt{23}}$

f) $\frac{7}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

a) $\frac{3\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\frac{10}{\sqrt[3]{5}} = \frac{10\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}\cdot\left(\sqrt[3]{5}\right)^2} = \frac{10\cdot\sqrt[3]{25}}{5} = 2\sqrt[3]{25}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{12}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt[3]{12}\right)^2}{\sqrt[3]{12}\cdot\left(\sqrt[3]{12}\right)^2} = \frac{\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{12^4}}{\sqrt[3]{12^3}} = \frac{\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{\left(2^2\cdot 3\right)^4}}{12} = \frac{\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{2^8\cdot 3^4}}{12} = \frac{\sqrt[6]{3^7\cdot 2^8}}{12} = \frac{6\sqrt[6]{12}}{12} = \frac{\sqrt[6]{12}}{2}$

d) $\frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \frac{4\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)} = \frac{4\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)}{2} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{7}$

e) $\frac{2}{5 - \sqrt{23}} = \frac{2\left(5 + \sqrt{23}\right)}{\left(5 - \sqrt{23}\right)\cdot\left(5 + \sqrt{23}\right)} = \frac{2\left(5 + \sqrt{23}\right)}{25 - 23} = \frac{2\left(5 + \sqrt{23}\right)}{2} = 5 + \sqrt{23}$

f) $\frac{7}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{7\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)} = \frac{7\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}{3 - 2} = 7\sqrt{3} - 7\sqrt{2}$

45. Calcula el valor de x en la siguiente expresión: $\sqrt{18}\cdot x = \sqrt{50}\cdot x + 7\sqrt{2}$

$\sqrt{18}\cdot x = \sqrt{50}\cdot x + 7\sqrt{2} \Rightarrow 3\sqrt{2}\cdot x = 5\sqrt{2}\cdot x + 7\sqrt{2} \Rightarrow 3\cdot x = 5\cdot x + 7 \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$

46. Si $a = \sqrt{3}\left(1 + \sqrt{6}\right)$ y $b = 3 - \sqrt{6}$ son los catetos de un triángulo rectángulo, halla la hipotenusa.

$h^2 = a^2 + b^2 = \left(\sqrt{3}\left(1 + \sqrt{6}\right)\right)^2 + \left(3 - \sqrt{6}\right)^2 = 3\left(1 + 2\sqrt{6} + 6\right) + \left(9 - 6\sqrt{6} + 6\right) = 3 + 6\sqrt{6} + 18 + 9 - 6\sqrt{6} + 6 = 36 \Rightarrow h = 6$

47. Actividad interactiva.

48. Calcula los logaritmos en base 2 de los siguientes números.

a) **–4**

b) **2**

c) $\frac{1}{8}$

d) **1024**

e) $\sqrt[3]{32}$

f) $8 \cdot 16 \cdot 2^5$

a) $\log_2(-4)$: no existe

b) $\log_2 2 = 1$

c) $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$

d) $\log_2 1024 = \log_2 2^{10} = 10$

e) $\log_2 \sqrt[3]{32} = \log_2 2^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$

f) $\log_2\left(8 \cdot 16 \cdot 2^5\right) = \log_2\left(2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5\right) = \log_2 2^{12} = 12$

49. Sin utilizar la calculadora, halla la primera cifra de los siguientes logaritmos.

a) **log 450**

b) **log 37**

c) **log 0,03**

d) $\log_3 10$

e) $\log_5 75$

f) $\log_2 \frac{1}{3}$

a) Como log 100 = 2 y log 1000 = 3, la primera cifra de log 450 es 2.

b) Como log 10 = 1 y log 100 = 2, la primera cifra de log 37 es 1.

c) Como log 0,1 = $\log\frac{1}{10}$ = –1, la primera cifra de log 0,03 es –1.

d) Como $\log_3 9 = 2$ y $\log_3 27 = 3$, la primera cifra de $\log_3 10$ es 2.

e) Como $\log_5 25 = 2$ y $\log_5 125 = 3$, la primera cifra de $\log_5 75$ es 2.

f) Como $\log_2 \frac{1}{2} = -1$ y $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, la primera cifra de $\log_2 \frac{1}{3}$ es –1.

50. Actividad resuelta.

51. Calcula el valor de *x* en estas igualdades.

a) $\log 1\,000\,000 = x$

b) $\log_x 0{,}5 = -1$

c) $\log(-100) = x$

d) $\log_2 x = 5$

e) $\log_7 \frac{1}{49} = x$

f) $-\frac{1}{3} = \log_{27} x$

a) $x = \log 1\,000\,000 = \log 10^6 = 6$

b) $\log_x 0{,}5 = -1 \Rightarrow \log_x \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow x = 2$

c) log (–100) no existe

d) $\log_2 x = 5 \Rightarrow x = 2^5 = 32$

e) $\log_7 \frac{1}{49} = \log_7 7^{-2} \Rightarrow x = -2$

f) $-\frac{1}{3} = \log_{27} x \Rightarrow x = 27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

52. Actividad resuelta.

53. Tomando log 8 = 0,903, calcula:

a) **log 80**

b) **log 0,8**

c) **log 2**

d) **log 1,25**

e) **log 64**

f) $\log \sqrt[3]{800}$

a) log (80) = log (8 · 10) = log 8 + log 10 = 1,903

b) log 0,8 = log $\frac{8}{10}$ = log 8 – log 10 = –0,097

c) $\log 2 = \log\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = \log 8^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log 8 = 0{,}301$

d) log 1,25 = log $\frac{10}{8}$ = log 10 – log 8 = 0,097

e) log 64 = log 8^2 = 2 · log 8 = 2 · 0,903 = 1, 806

f) $\log\left(\sqrt[3]{800}\right) = \log 8^{\frac{1}{3}} + \log 10^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\log 8 + \frac{2}{3}\log 10 = 0{,}968$

54. Transforma los siguientes logaritmos en sumas y restas de log *A* y log *B*.

a) $\log\frac{\sqrt{B}}{10A}$

b) $\log\frac{B^3}{\sqrt{A}} - \log A^2$

a) $\log\frac{\sqrt{B}}{10A} = \log\sqrt{B} - \log(10A) = \log B^{\frac{1}{2}} - \log 10 - \log A = \frac{1}{2}\log B - 1 - \log A$

b) $\log\frac{B^3}{\sqrt{A}} - \log A^2 = \log B^3 - \log\sqrt{A} - 2\log A = 3\log B - \log A^{\frac{1}{2}} - 2\log A = 3\log B - \frac{1}{2}\log A - 2\log A = 3\log B - \frac{5}{2}\log A$

55. Calcula $2^{\log_2 7}$ y $\log_{19}\sqrt{19}$.

$x = 2^{\log_2 7} \Rightarrow \log_2 x = \log_2 2^{\log_2 7} \Rightarrow \log_2 x = \log_2 7 \cdot \log_2 2 \Rightarrow x = 7$

$\log_{19}\sqrt{19} = \log_{19} 19^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{19} 19 = \frac{1}{2}$

56. Actividad interactiva.

57. Transforma las siguientes expresiones en sumas y restas.

a) $X = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}}$

b) $Y = \frac{a^3\sqrt{b}}{100\sqrt[3]{c}}$

a) $\log X = \log\frac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}} = \log a + \log\left(b^{\frac{2}{3}}\right) - \log\left(a^{\frac{1}{3}}\right) = \log a + \frac{2}{3}\log b - \frac{1}{3}\log a = \frac{2}{3}\log a + \frac{2}{3}\log b$

b) $\log Y = \log\frac{a^3\sqrt{b}}{100\sqrt[3]{c}} = \log a^3 + \log b^{\frac{1}{2}} - \log 100 - \log\sqrt[3]{c} = 3\log a + \frac{1}{2}\log b - 2 - \log c^{\frac{1}{3}} = 3\log a + \frac{1}{2}\log b - 2 - \frac{1}{3}\log c$

58. Calcula el valor de *A* sin usar la calculadora: log *A* = log 8 – 2log 3 + log 16

$\log A = \log 8 - 2\log 3 + \log 16 = \log 8 - \log 3^2 + \log 16 = \log\frac{8\cdot 16}{9} = \log\frac{128}{9}$ luego $A = \frac{128}{9}$

59. Aplicando un cambio de base y usando la calculadora, halla los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 14$

b) $\log_3 32$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 12$

d) $\log_5 10$

a) $\log_2 14 = \frac{\log 14}{\log 2} = 3{,}8074$

b) $\log_3 32 = \frac{\log 32}{\log 3} = 3{,}1546$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 12 = \frac{\log 12}{\log\frac{1}{2}} = -3{,}5850$

d) $\log_5 10 = \frac{\log 10}{\log 5} = 1{,}4307$

60. Halla *x* usando la calculadora para que se cumpla que $3^x = 7$.

$3^x = 7 \Rightarrow \log 3^x = \log 7 \Rightarrow x\log 3 = \log 7 \Rightarrow x = \frac{\log 7}{\log 3} \approx 1{,}77$

61. En una bolsa hay 30 bolas blancas, 20 verdes y 45 negras. Halla el porcentaje de bolas de cada color.

Blancas: $\frac{30}{95} = 0{,}32 \Rightarrow 32\ \%$ Verdes $\frac{20}{95} = 0{,}21 \Rightarrow 21\%$ Negras $\frac{45}{95} = 0{,}47 \Rightarrow 47\ \%$

62. Indica el índice de variación porcentual y el porcentaje de aumento o disminución.

"Las ventas han pasado de 15 000 a 18 000 ejemplares"

$I = \frac{18\,000}{15\,000} = 1{,}2 \Rightarrow$ Aumento del 20 %

63. Indica qué porcentaje aumenta o disminuye una cantidad al multiplicarla por los números siguientes.

a) **0,9** **b)** **1,2** **c)** **0,02** **d)** **2,02**

a) Disminuye un 10 % **b)** Aumenta un 20 % **c)** Disminuye un 98 % **d)** Aumenta un 102 %

64. Halla el capital final en que se convierten 650 € en tres años a un interés simple del 2,25%.

$C_F = 650\left(1 + \frac{2{,}25 \cdot 3}{100}\right) = 693{,}875$ €

65. La población de un país aumenta por término medio un 8 % anual. Si actualmente hay 20 millones de habitantes en dicho país y el ritmo de crecimiento se considera constante, ¿qué población estimas que tendrá dentro de 30 años?

Población en 30 años (en millones) = $20 \cdot (1{,}08)^{30} = 201{,}25$.

Habrá 201,25 millones de habitantes.

66. ¿Qué capital debe depositarse a un interés compuesto del 5 % para convertirse en 10 000 € al cabo de un año?

$10\,000 = C_I(1 + 0{,}05) \Rightarrow C_I = \frac{10\,000}{1+0{,}05} = 9524$ €

67. Un banco ofrece un interés compuesto del 6 % anual en su cuenta de ahorro con la condición de que cada año ingreses 1000 €.

Si aceptas la oferta y retiras tu dinero a los 5 años, ¿cuánto dinero deberá entregarte el banco?

1er año: $1000 \cdot 1{,}06 = 1060$ euros

2º año: $2060 \cdot 1{,}06 = 2183{,}6$ euros

3er año: $3183{,}6 \cdot 1{,}06 = 3374{,}616$ euros

4º año: $4374{,}616 \cdot 1{,}06 = 4637{,}09296$ euros

5º año: $5637{,}09296 \cdot 1{,}06 = 5975{,}32$ euros

68. Halla el capital final en que se convierten 750 € en cuatro años a un interés simple del 12 %. ¿Y si el interés que se aplica es compuesto?

Interés simple: $C_F = 750\left(1 + \frac{12 \cdot 4}{100}\right) = 1110$ €

Interés compuesto: $C_F = 750 \cdot (1 + 0{,}12)^4 = 1180{,}14$ €

69. ¿A qué tanto por ciento anual hay que colocar 50 000 € para que se conviertan en 182 124 euros al cabo de 15 años?

$182\,124 = 50\,000(1 + x)^{15} \Rightarrow x = \sqrt[15]{\frac{182\,124}{50\,000}} - 1 = 0{,}09$

Al 9 % anual

70. Actividad resuelta.

71. ¿Cuántos años debe estar impuesto un capital si a un interés compuesto del 5 % anual se convierte en 1,25 veces el capital depositado inicialmente?

$1{,}25C_I = C_I(1+0{,}05)^t \Rightarrow t = \dfrac{\log 1{,}25}{\log 1{,}05} = 4{,}57$

Cuatro años y medio, aproximadamente

72. ¿A qué tanto por ciento debe colocarse un capital cualquiera para duplicarlo en 15 años?

$2C_I = C_I(1+r)^{15} \Rightarrow r = \sqrt[15]{2} - 1 = 0{,}047$

Debe imponerse al 4,7 %.

73. Halla durante cuántos años se ha colocado un capital de 2800 € a un interés simple del 5 % para obtener al final del periodo 3920 €. ¿Y si se deposita a un interés compuesto del 5 %? ¿Qué observas?

Interés simple: $3920 = 2800\left(1+\dfrac{5\cdot t}{100}\right) \Rightarrow 1{,}4 = 1+\dfrac{5\cdot t}{100} \Rightarrow t = \dfrac{(1{,}4-1)\cdot 100}{5} = 8$ años

Interés compuesto: $3920 = 2800 \cdot (1+0{,}05)^t \Rightarrow 1{,}4 = 1{,}05^t \Rightarrow t = \dfrac{\log 1{,}4}{\log 1{,}05} = 6{,}9$ años

Si se deposita a un interés compuesto se necesitan menos años para obtener el mismo beneficio.

74. Escribe tres fracciones que den lugar a números racionales con desarrollo decimal finito.

Por ejemplo, $\dfrac{3}{2} = 1{,}5$; $\dfrac{7}{4} = 1{,}75$ y $\dfrac{3}{4} = 0{,}75$

75. Escribe dos números irracionales cuya suma sea un número racional y dos números irracionales cuya suma sea otro número irracional.

$\sqrt{2}$ y $5-\sqrt{2}$ son números irracionales y, su suma, $\sqrt{2}+5-\sqrt{2} = 5$ es un número racional.

0,1001000… y 0,2002000…son irracionales y, su suma, 0,1001000… + 0,2002000… = 0,3003000… es irracional.

76. Encuentra un número racional y otro irracional comprendidos entre $\dfrac{17}{26}$ y $\dfrac{18}{26}$.

$\dfrac{17}{26} = \dfrac{34}{52} \cong 0{,}654$ y $\dfrac{18}{26} = \dfrac{36}{52} \cong 0{,}692$

Un número racional comprendido entre $\dfrac{17}{26}$ y $\dfrac{18}{26}$ podría ser $\dfrac{35}{52}$ y uno irracional, 0,6656665666656…

77. Indica todos los conjuntos numéricos a los que puedan pertenecer estos números.

2,4747…; $-\sqrt{9}$; $\dfrac{2}{7}$; $\dfrac{35}{5}$; 12,121121112…; –4; $3{,}0\widehat{5}$

Enteros: $-\sqrt{9}$; $\dfrac{35}{5}$; –4

Irracionales: 12,121121112…

Racionales: $-\sqrt{9}$; $\dfrac{35}{5}$; –4; 2,4747…; $\dfrac{2}{7}$; $3{,}0\widehat{5}$

Reales: Todos

78. En la siguiente cadena de contenidos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, encuentra un número que pertenezca a cada conjunto, pero no a los anteriores.

$1 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\quad -1 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\quad \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

79. Realiza las siguientes operaciones.

a) $\left|7 - |-9|\right|$

b) $\left||-8| - |10|\right|$

c) $\left|-1 + |-7| - |-3|\right|$

d) $\left||-3| + |-2| \cdot |-5|\right|$

e) $\left|-\frac{1}{2} + 3\right|$

f) $|-9| \cdot |5-3| - |-4| : |-2|$

a) $\left|7 - |-9|\right| = |7 - 9| = |-2| = 2$

b) $\left||-8| - |10|\right| = |8 - 10| = |-2| = 2$

c) $\left|-1 + |-7| - |-3|\right| = |-1 + 7 - 3| = |3| = 3$

d) $\left||-3| + |-2| \cdot |-5|\right| = |3 + 2 \cdot 5| = |13| = 13$

e) $\left|-\frac{1}{2} + 3\right| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{6}{2}\right| = \left|\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$

f) $|-9| \cdot |5-3| - |-4| : |-2| = 9 \cdot 2 - 4 : 2 = 18 - 2 = 16$

80. Encuentra todos los valores de *x* que verifican las siguientes igualdades.

a) $|x| = 4$

b) $|x| = -1$

c) $|x + 5| = 2$

d) $|x - 2| = 10$

e) $|5 - x| = \frac{1}{5}$

f) $\left|\frac{5}{2} + x\right| = 3$

a) Como $|x| = 4 = d(x, 0)$, se buscan los números que distan 4 unidades de 0.

$x = 0 + 4 = 4$ y $x = 0 - 4 = -4$

b) No existe ningún número cuyo valor absoluto sea negativo.

c) Como $|x + 5| = |x - (-5)| = 2 = d(x, -5)$, se buscan los números que distan 2 unidades de –5.

$x = -5 + 2 = -3$ y $x = -5 - 2 = -7$

d) Como $|x - 2| = 10 = d(x, 2)$, se buscan los números que distan 10 unidades de 2.

$x = 2 + 10 = 12$ y $x = 2 - 10 = -8$

e) Como $|5 - x| = \frac{1}{5} = d(5, x) = d(x, 5)$, se buscan los números que distan $\frac{1}{5}$ unidades de 5.

$x = 5 + \frac{1}{5} = \frac{26}{5}$ y $x = 5 - \frac{1}{5} = \frac{24}{5}$

f) Como $\left|\frac{5}{2} + x\right| = \left|x + \frac{5}{2}\right| = \left|x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right| = 3 = d\left(x, -\frac{5}{2}\right)$, se buscan los números que distan 3 unidades de $-\frac{5}{2}$.

$x = -\frac{5}{2} + 3 = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{5}{2} - 3 = -\frac{11}{2}$

81. Redondea dejando dos cifras significativas y calcula el error absoluto y el error relativo cometido con la aproximación.

a) 3,140101…

b) $\frac{4}{9}$

c) $\sqrt{35}$

a) $3{,}140\,101\ldots \approx 3{,}1 \Rightarrow E_A = |3{,}140\,101 - 3{,}1| = 0{,}040\,101$ y $E_R = \frac{0{,}040\,101}{3{,}140\,101} = 0{,}012\,8 \Rightarrow 1{,}28\%$

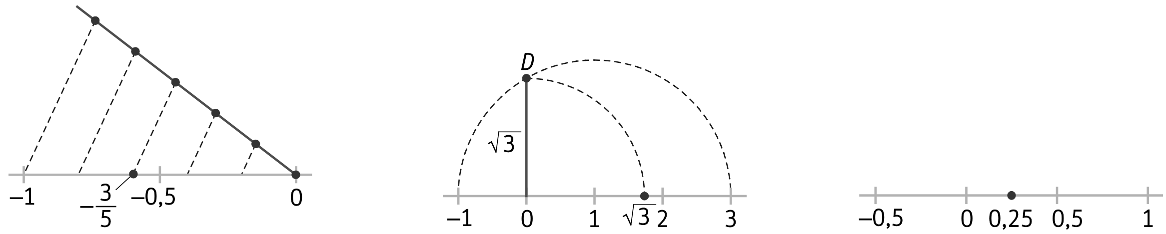
b) $\frac{4}{9} = 0{,}444\ldots \approx 0{,}44 \Rightarrow E_A = |0{,}44\ldots - 0{,}44| = 0{,}004\ldots$ y $E_R = \frac{0{,}004\ldots}{0{,}44\ldots} = 0{,}009 \Rightarrow 0{,}9\%$

c) $\sqrt{35} = 5{,}916\,07\ldots \approx 5{,}9 \Rightarrow E_A = |5{,}916\,07\ldots - 5{,}9| = 0{,}016\,08$ y $E_R = \frac{0{,}016\,08}{5{,}916\,07} = 0{,}002\,7 \Rightarrow 0{,}27\%$

82. Interpreta $|x-2| = |x+1|$ como una igualdad entre distancias y encuentra el único número x que la verifica.

$d(x, 2) = |x-2| = |x+1| = d(x, -1) \Rightarrow x = 0{,}5$

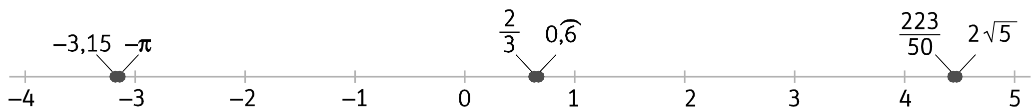
83. Representa en la recta real $-\frac{3}{5}$, $\sqrt{3}$ y 0,25.



84. Representa gráficamente los siguientes números reales y ordénalos de menor a mayor.

$$-\pi; \quad 2\sqrt{5}; \quad \frac{2}{3}; \quad \frac{223}{50}; \quad -3{,}15; \quad 0{,}\widehat{6}$$

Representamos gráficamente los números:



Por tanto, $-3{,}15 < -\pi < \frac{2}{3} = 0{,}\widehat{6} < \frac{223}{50} < 2\sqrt{5}$

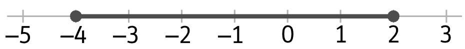
85. ¿Qué intervalo equivale al entorno *E*[3, 7]?

E[3, 7] = [–4, 10]

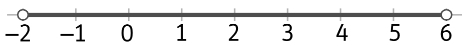
86. Representa estos entornos en la recta e indica los intervalos que determinan, su centro y su radio.

a) ***E*(2, 4)** **b)** ***E*[–1, 3]** **c)** ***E*(3, 1)**

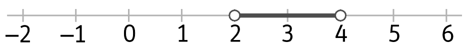
a) *E*(2, 4) = (–2, 6) Centro = 2 y Radio = 4



b) *E*[–1, 3] = [–4, 2] Centro = –1 y Radio = 3

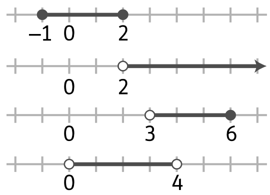


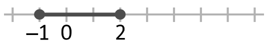
c) *E*(3, 1) = (2, 4) Centro = 3 y Radio = 1

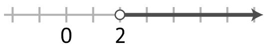


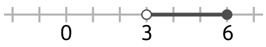
87. Relaciona en tu cuaderno las diferentes expresiones de estos intervalos y semirrectas.

[–1, 2]	$x > 2$	
(2, +∞)	$0 < x < 4$	
(3, 6]	$-1 \leq x \leq 2$	
(0, 4)	$3 < x \leq 6$	



[–1, 2] ⇒ $-1 \leq x \leq 2$ ⇒ 

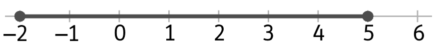
(2, +∞) ⇒ $x > 2$ ⇒ 

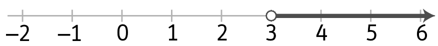
(3, 6] ⇒ $3 < x \leq 6$ ⇒ 

(0, 4) ⇒ $0 < x < 4$ ⇒ 

88. Representa en la recta real el intervalo [–2, 5] y la semirrecta (3, +∞).

Existe algún intervalo de puntos común a ambos? En caso afirmativo, hállalo.



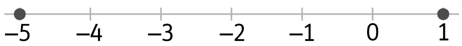


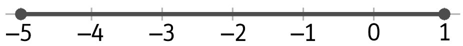
Sí existe intervalo común a ambos: $(3,5]$

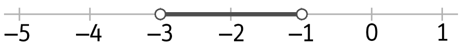
89. Marca en una recta numérica el conjunto de puntos cuya distancia al punto –2 sea:

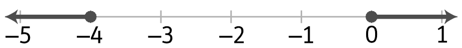
a) Igual a 3 **c) Mayor que 2** **e) No menor que 2**

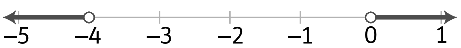
b) Menor que 1 **d) No mayor que 3** **f) Entre 2 y 5**

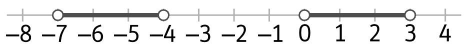
a) 

d) 

b) 

e) 

c) 

f) 

90. Actividad resuelta.

91. Encuentra aquellos números x tales que $|x - 3| < 4$.

Como $|x - 3| < 4 \Rightarrow d(x, 3) < 4$, se buscan los números cuya distancia al 3 es menor que 4.

Los números son los pertenecientes al intervalo (–1, 7).

92. Escribe el intervalo formado por los números x que verifican simultáneamente:

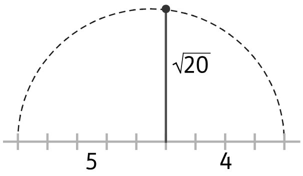
- ***x* está en el entorno abierto de centro 4 y radio 2.**
- $|x - 1| \leq 3$

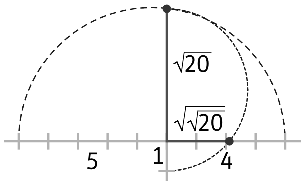
Por la primera condición, x debe estar comprendido entre 2 y 6.

Por la segunda condición, x debe estar comprendido entre 1 + 3 = 4 y 1 – 3 = –2.

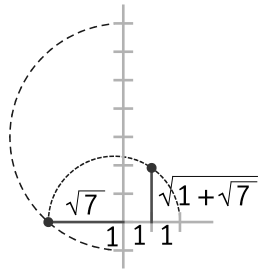
Luego se trata del intervalo (2, 4].

93. Representa en la recta real $\sqrt{20}$ y $\sqrt{\sqrt{20}}$.





94. Representa un segmento que mida $\sqrt{1+\sqrt{7}}$.



95. Realiza estas operaciones con potencias.

a) $9^{-1} \cdot 9^2 : 9^{-3}$ **b)** $\left(\frac{2}{5}\right)^4 : \left(\frac{4}{25}\right)^{-2}$ **c)** $3^{-3} \cdot (9^{-2})^2$

a) $9^{-1} \cdot 9^2 : 9^{-3} = 9^4$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^4 : \left(\frac{4}{25}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^4 : \left(\left(\frac{2}{5}\right)^2\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^4 : \left(\frac{2}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{5}\right)^8$

c) $3^{-3} \cdot (9^{-2})^2 = 3^{-3} \cdot 9^{-4} = 3^{-3} \cdot (3^2)^{-4} = 3^{-3} \cdot 3^{-8} = 3^{-11}$

96. Simplifica al máximo estas expresiones.

a) $\dfrac{12 \cdot 10^{-1} \cdot 20^4}{50 \cdot \left(16^{-2}\right)^{-3}}$ **b)** $\dfrac{\left(18^2\right)^{-2} \cdot 81}{6^3 \cdot 108 \cdot (24)^{-4}}$

a) $\dfrac{12 \cdot 10^{-1} \cdot 20^4}{50 \cdot \left(16^{-2}\right)^{-3}} = \dfrac{3 \cdot 2^2 \cdot 10^{-1} \cdot 2^4 \cdot 10^4}{5 \cdot 10 \cdot \left(2^4\right)^6} = \dfrac{3 \cdot 10^2}{5 \cdot 2^{18}} = \dfrac{3 \cdot 2^2 \cdot 5^2}{5 \cdot 2^{18}} = \dfrac{3 \cdot 5}{2^{16}} = \dfrac{15}{65\,536}$

b) $\dfrac{\left(18^2\right)^{-2} \cdot 81}{6^3 \cdot 108 \cdot (24)^{-4}} = \dfrac{\left(2 \cdot 3^2\right)^{-4} \cdot 3^4}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \left(2^3 \cdot 3\right)^{-4}} = \dfrac{2^3}{3^6} = \dfrac{8}{729}$

97. Escribe en notación científica los siguientes números.

a) 5 182 000 000 000 **c) 835 000 000 000 000**

b)0,000 000 000 369 **d) 0,000 000 000 003 51**

¿Cuál tiene un orden de magnitud superior?

a) $5{,}182 \cdot 10^{12}$ **b)** $3{,}69 \cdot 10^{-10}$ **c)** $8{,}35 \cdot 10^{14}$ **d)** $3{,}51 \cdot 10^{-12}$

Tiene mayor orden de magnitud el número $8{,}35 \cdot 10^{14}$.

98. Si $a = 1{,}4 \cdot 10^5$, $b = 0{,}2 \cdot 10^7$, $c = 3{,}7 \cdot 10^{-5}$, escribe $a \cdot b$, $a \cdot c$, $a + b$ y $\frac{a}{b}$ en notación científica.

$a \cdot b = (1{,}4 \cdot 10^5) \cdot (0{,}2 \cdot 10^7) = 0{,}28 \cdot 10^{12} = 2{,}8 \cdot 10^{11}$

$a \cdot c = (1{,}4 \cdot 10^5) \cdot (3{,}7 \cdot 10^{-5}) = 5{,}18$

$a + b = (1{,}4 \cdot 10^5) + (0{,}2 \cdot 10^7) = 0{,}14 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^6 = 2{,}14 \cdot 10^6$

$$\frac{a}{b} = \frac{1{,}4 \cdot 10^5}{0{,}2 \cdot 10^7} = 7 \cdot 10^{-2}$$

99. ¿A qué exponente hay que elevar 3 para obtener $\left(\frac{1}{3}\right)^{20} + \left(\frac{1}{3}\right)^{20} + \left(\frac{1}{3}\right)^{20}$?

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{20} + \left(\frac{1}{3}\right)^{20} + \left(\frac{1}{3}\right)^{20} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{20} = \frac{3}{3^{20}} = 3^{-19} \Rightarrow \text{Hay que elevar 3 a } -19.$$

100. Calcula el valor de k en cada caso.

a) $\sqrt[3]{k} = \frac{1}{2}$ **b)** $\sqrt[5]{k} = -2$ **c)** $\sqrt[k]{-343} = -7$

a) $k = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ **b)** $k = (-2)^5 = -32$ **c)** $\sqrt[k]{-343} = \sqrt[k]{-7^3} = -7 \Rightarrow k = 3$

101. Actividad resuelta.

102. Ordena de mayor a menor estos números.

a) $3,\ \sqrt{10},\ \sqrt[3]{26}$ **b)** $\sqrt{2},\ \sqrt[4]{5},\ \sqrt[5]{12}$

a) $3 = \sqrt[6]{3^6} = \sqrt[6]{729}$, $\sqrt{10} = \sqrt[6]{10^3} = \sqrt[6]{1000}$ y $\sqrt[3]{26} = \sqrt[6]{26^2} = \sqrt[6]{676} \Rightarrow \sqrt{10} > 3 > \sqrt[3]{26}$

b) $\sqrt{2} = \sqrt[20]{2^{10}} = \sqrt[10]{1024}$, $\sqrt[4]{5} = \sqrt[20]{5^5} = \sqrt[20]{3125}$ y $\sqrt[5]{12} = \sqrt[20]{12^4} = \sqrt[20]{20\,736} \Rightarrow \sqrt[5]{12} > \sqrt[4]{5} > \sqrt{2}$

103. Calcula los valores a, b, c y d en esta igualdad: $\sqrt{10^4 \cdot 14^6 \cdot 81^{12}} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$

$$\sqrt{10^4 \cdot 14^6 \cdot 81^{12}} = \sqrt{2^4 \cdot 5^4 \cdot 2^6 \cdot 7^6 \cdot 3^{48}} = \sqrt{2^{10} \cdot 3^{48} \cdot 5^4 \cdot 7^6} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \Rightarrow a = 5;\ b = 24;\ c = 2;\ d = 3$$

104. Expresa como un solo radical.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4}$ **b)** $\sqrt[4]{3} : \sqrt[3]{2}$ **c)** $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{8}$ **d)** $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{200}$

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[4]{3} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{3^3} : \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{\frac{3^3}{2^4}} = \sqrt[12]{\frac{27}{16}}$

c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{4^2} \cdot \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{200} = \sqrt[3]{\frac{512}{200}} = \sqrt[3]{\frac{2^9}{2^3 \cdot 5^2}} = \sqrt[3]{\frac{2^6}{5^2}} = 4\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$

105. Tres de los siguientes seis números son iguales. ¿Cuáles?

$A = \sqrt{5} + \sqrt{5}$ $B = \frac{\sqrt{500}}{5}$ $C = 2\sqrt{5}\sqrt{5}$ $D = \sqrt{20}$ $E = \sqrt{5}\sqrt{5}$ $F = 10$

$A = \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ $C = 2\sqrt{5}\sqrt{5} = 2 \cdot 5 = 10$ $E = \sqrt{5}\sqrt{5} = 5$

$B = \frac{\sqrt{500}}{5} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$ $D = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$ $F = 10$

A, B y D son iguales, pues valen $2\sqrt{5}$.

106. Opera y simplifica.

a) $2\sqrt{20}+3\sqrt{45}-\sqrt{80}$

b) $4\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{250}$

c) $3\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}-5\sqrt[3]{375}$

d) $\sqrt{27}-2\sqrt{32}+\sqrt{180}$

a) $2\sqrt{20}+3\sqrt{45}-\sqrt{80}=2\sqrt{2^2\cdot 5}+3\sqrt{3^2\cdot 5}-\sqrt{2^4\cdot 5}=4\sqrt{5}+9\sqrt{5}-4\sqrt{5}=9\sqrt{5}$

b) $4\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{250}=4\sqrt[3]{2^4}+5\sqrt[3]{3^3\cdot 2}-2\sqrt[3]{5^3\cdot 2}=8\sqrt[3]{2}+15\sqrt[3]{2}-10\sqrt[3]{2}=13\sqrt[3]{2}$

c) $3\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}-5\sqrt[3]{375}=3\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[3]{2^3\cdot 3}-5\sqrt[3]{5^3\cdot 3}=9\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{3}-25\sqrt[3]{3}=-14\sqrt[3]{3}$

d) $\sqrt{27}-2\sqrt{32}+\sqrt{180}=\sqrt{3^3}-2\sqrt{2^5}+\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5}=3\sqrt{3}-8\sqrt{2}+6\sqrt{5}$

107. Realiza las siguientes operaciones.

a) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[6]{3}$ b) $3\sqrt{50}+2\sqrt{72}-4\sqrt{8}$ c) $\sqrt[3]{9}:\sqrt{12}$ d) $\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\right):\left(\sqrt[3]{3}\right)^2$

a) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[6]{3}=\sqrt[12]{5^3\cdot 3^2}=\sqrt[12]{1125}$

b) $3\sqrt{50}+2\sqrt{72}-4\sqrt{8}=3\sqrt{2\cdot 5^2}+2\sqrt{2^3\cdot 3^2}-4\sqrt{2^3}=15\sqrt{2}+12\sqrt{2}-8\sqrt{2}=19\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{9}:\sqrt{12}=\sqrt[6]{\dfrac{9^2}{12^3}}=\sqrt[6]{\dfrac{3^4}{2^6\cdot 3^3}}=\sqrt[6]{\dfrac{3}{2^6}}=\dfrac{1}{2}\sqrt[6]{3}$

d) $\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\right):(\sqrt[3]{3})^2=\left(\sqrt[12]{3^6}\cdot\sqrt[12]{3^3}\right):\sqrt[12]{3^8}=\sqrt[12]{3}$

108. Opera y simplifica.

a) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{12}\right)^2$

b) $\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{8}\right):\sqrt[3]{4}$

a) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{12}\right)^2=3+12-2\sqrt{36}=3+12-12=3$

b) $\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{8}\right):\sqrt[3]{4}=\left(2^{\frac{-1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{4}}\right):2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{-5}{12}}$

109. Actividad resuelta.

110. Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{8}}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{1000}}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

f) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{8}}=\dfrac{\sqrt[4]{8^3}}{\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{8^3}}=\dfrac{\sqrt[4]{2^9}}{\left(\sqrt[4]{8}\right)^4}=\dfrac{4\cdot\sqrt[4]{2}}{8}=\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{1000}}=\dfrac{5}{\sqrt[4]{10^3}}=\dfrac{5\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{10^4}}=\dfrac{5\sqrt[4]{10}}{10}=\dfrac{\sqrt[4]{10}}{2}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}=\dfrac{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)}{3-7}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2-3}=-2-\sqrt{6}$

f) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{-1}=-3-2\sqrt{2}$

111. Racionaliza y simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$

a) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \dfrac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)^2}{3} = \dfrac{9+6\sqrt{2}}{3} = 3+2\sqrt{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}} = \dfrac{2x+2\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}}{2y} = \dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}$

112. Calcula.

a) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{72}} - \dfrac{10}{\sqrt[3]{375}}$ **b)** $\dfrac{5}{1-\sqrt{2}} + \dfrac{3}{1+\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{72}} - \dfrac{10}{\sqrt[3]{375}} = \dfrac{6}{2\sqrt[3]{3^2}} - \dfrac{10}{5\sqrt[3]{3}} = \dfrac{6\cdot 5\sqrt[3]{3} - 10\cdot 2\sqrt[3]{3^2}}{30} = \dfrac{30\sqrt[3]{3} - 20\sqrt[3]{3^2}}{30} = \dfrac{3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{9}}{3}$

b) $\dfrac{5}{1-\sqrt{2}} + \dfrac{3}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{5\left(1+\sqrt{2}\right)+3\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{5+5\sqrt{2}+3-3\sqrt{2}}{1-2} = \dfrac{8-2\sqrt{2}}{-1} = -8+2\sqrt{2}$

113. Escribe $\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{2}}$ como una expresión que no tenga raíces en el denominador.

$\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{2}} = \dfrac{1+\sqrt[4]{2}}{\left(1-\sqrt[4]{2}\right)\left(1+\sqrt[4]{2}\right)} = \dfrac{1+\sqrt[4]{2}}{1-\sqrt[4]{2^2}} = \dfrac{1+\sqrt[4]{2}}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{\left(1+\sqrt[4]{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2^2}}{-1} = -1-\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{2^3}$

114. Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 32$ **c)** $\log_3 729$ **e)** $\log 1\,000\,000$

b) $\log_2 \dfrac{1}{16}$ **d)** $\log_3 \dfrac{1}{81}$ **f)** $\log \dfrac{1}{1000}$

a) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$ **c)** $\log_3 729 = \log_3 3^6 = 6$ **e)** $\log 1000\,000 = \log 10^6 = 6$

b) $\log_2 \dfrac{1}{16} = \log_2 2^{-4} = -4$ **d)** $\log_3 \dfrac{1}{81} = \log_3 3^{-4} = -4$ **f)** $\log \dfrac{1}{1000} = \log 10^{-3} = -3$

115. Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 \sqrt{8}$ **c)** $\log_3 \sqrt[3]{243}$ **e)** $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{27}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 32$ **d)** $\log \sqrt[5]{100}$ **f)** $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{100}$

a) $\log_2 \sqrt{8} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2}$ **c)** $\log_3 \sqrt[3]{243} = \log_3 3^{\frac{5}{3}} = \dfrac{5}{3}$ **e)** $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{27} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = \log_{\frac{1}{2}} 2^5 = -5$ **d)** $\log \sqrt[5]{100} = \log 10^{\frac{2}{5}} = \dfrac{2}{5}$ **f)** $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{100} = \log_{\frac{1}{10}} \left(\dfrac{1}{10}\right)^{\frac{-2}{3}} = \dfrac{-2}{3}$

116. Completa los huecos mentalmente usando la definición de logaritmo.

a) $\log_2 8 = \bullet$ **b)** $\log_3 \bullet = 4$ **c)** $\log_{\bullet} 125 = 3$

a) $\log_2 8 = 3$ **b)** $\log_3 81 = 4$ **c)** $\log_5 125 = 3$

117. Halla el valor de x en cada caso.

a) $\log_x 16 = -4$ **c)** $\log_{\frac{1}{7}} x = -3$ **e)** $\log_x 125 = 3$

b) $\log_x \frac{1}{16} = -8$ **d)** $\log_{11} 1331 = x$ **f)** $\log_x 25 = 4$

a) $x^{-4} = 16 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $x^{-8} = \frac{1}{16} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3} = x \Rightarrow x = 7^3 = 343$

d) $11^x = 11^3 \Rightarrow x = 3$

e) $x^3 = 5^3 \Rightarrow x = 5$

f) $x^4 = 5^2 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$

118. ¿A qué número hay que elevar 5 para que dé un millón?

$$5^x = 10^6 \Rightarrow x = \log_5 10^6 \Rightarrow x = \frac{\log 10^6}{\log 5} = 8{,}584$$

119. Si log 8 ≈ 0,9031, halla:

a) log 800 **b)** log 2 **c)** log 0,64 **d)** log 40 **e)** log 5 **f)** $\log\sqrt[5]{8}$

a) log 800 = log 8 + log 100 = 2,9031

b) $\log 2 = \frac{1}{3}\log 2^3 = \frac{1}{3}\log 8 = 0{,}301$

c) log 0,64 = log 64 – log 100 = 2log 8 – 2 = –0,1938

d) log 40 = log 10 + log 4 = 1 + 2log 2 = 1,602

e) $\log 40 = \log 8 + \log 5 \Rightarrow \log 5 = \log 40 - \log 8 = 0{,}6989$

f) $\log\sqrt[5]{8} = \frac{1}{5}\log 8 = 0{,}1806$

120. Escribe como un único logaritmo.

a) log 16 – log 3 + log 12

b) log 18 – log 27 – log 2

c) (log 25 + log 4) – (log 8 – log 9

a) $\log 16 - \log 3 + \log 12 = \log\frac{16\cdot 12}{3} = \log 64$

b) $\log 18 - \log 27 - \log 2 = \log\frac{18}{27\cdot 2} = \log\frac{1}{3}$

c) $(\log 25 + \log 4) - (\log 8 - \log 9) = \log\frac{25\cdot 4\cdot 9}{8} = \log\frac{225}{2}$

121. Ordena los siguientes logaritmos aplicando su definición y sus propiedades.

$$\log\sqrt[3]{10};\ \log_2\left(\frac{1}{4}\right)^{-1};\ \ln\sqrt{\frac{1}{e}};\ \log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{3}$$

$\log\sqrt[3]{10} = \frac{1}{3}$; $\log_2\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 2$; $\ln\sqrt{\frac{1}{e}} = -\frac{1}{2}$; $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln\sqrt{\frac{1}{e}} < \log\sqrt[3]{10} < \log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{3} < \log_2\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

122. Expresa $\log\frac{a}{b} + \log\frac{b}{c} + \log\frac{c}{d} - \log\frac{ay}{dx}$ como un solo logaritmo.

$$\log\frac{a}{b} + \log\frac{b}{c} + \log\frac{c}{d} - \log\frac{ay}{dx} = \log\frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}}{\frac{ay}{dx}} = \log\frac{x}{y}$$

123. Utilizando las propiedades de los logaritmos y siendo log $x \approx 0{,}70$ y log $y \approx 1{,}18$, calcula:

a) $\log(x^2 \cdot y)$ **b)** $\log \dfrac{x^3}{y^2}$ **c)** $\log\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y^2}\right)$

a) $\log (x^2 \cdot y) = \log x^2 + \log y = 2 \log x + \log y = 2 \cdot 0{,}70 + 1{,}18 = 2{,}58$

b) $\log \dfrac{x^3}{y^2} = \log x^3 - \log y^2 = 3 \log x - 2 \log y = 3 \cdot 0{,}70 - 2 \cdot 1{,}18 = -0{,}26$

c) $\log\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y^2}\right) = \log\sqrt{x} + \log\sqrt[3]{y^2} = \log x^{\frac{1}{2}} + \log y^{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2}\log x + \dfrac{2}{3}\log y = \dfrac{1}{2}\cdot 0{,}70 + \dfrac{2}{3}\cdot 1{,}18 = 1{,}14$

124. Si $\log_2 A = C$, calcula $\log_8 A$, $2^{\log_2 A}$, y $\log_2 \dfrac{1}{A}$.

$\log_8 A = \dfrac{\log_2 A}{\log_2 8} = \dfrac{\log_2 A}{\log_2 2^3} = \dfrac{C}{3}$ $2^{\log_2 A} = 2^C$ $\log_2 \dfrac{1}{A} = \log_2 A^{-1} = -\log_2 A = -C$

125. Toma logaritmos en estas expresiones.

a) $A = \dfrac{x^2y^3z^5}{t^4}$ **b)** $B = \dfrac{1100x^3y}{t^2}$ **c)** $C = \dfrac{\sqrt{x}yz^2}{10t^3}$

a) $\log A = \log x^2 + \log y^3 + \log z^5 - \log t^4 = 2 \log x + 3 \log y + 5\log z - 4 \log t$

b) $\log B = \log 11 + \log 100 + \log x^3 + \log y - \log t^2 = \log 11 + 2 + 3\log x + \log y - 2\log t$

c) $\log C = \log\sqrt{x} + \log y + \log z^2 - \log 10 - \log t^3 = \dfrac{1}{2}\log x + \log y + 2\log z - 1 - 3\log t$

126. Expresa el segundo miembro de cada igualdad como un solo logaritmo y halla los valores de *A* y *B*.

a) $\log A = 3\log x + 2\log y - 5\log z$ **b)** $\log B = \dfrac{3}{2}\log x + \log y - \dfrac{2}{3}\log z - 2$

a) $\log A = \log x^3 + \log y^2 - \log z^5 \Rightarrow A = \dfrac{x^3y^2}{z^5}$ **b)** $\log B = \log\sqrt{x^3} + \log y - \log\sqrt[3]{z^2} - 2 \Rightarrow B = \dfrac{y\sqrt{x^3}}{100\sqrt[3]{z^2}}$

127. Demuestra las fórmulas de logaritmo de un cociente y logaritmo de una potencia.

Cociente:

$$\left.\begin{array}{l}\log_b M = x \Rightarrow b^x = M\\ \log_b N = y \Rightarrow b^y = N\end{array}\right\} \text{ entonces } \frac{M}{N} = \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$

Y volviendo a usar la definición: $\log_b\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_b b^{x-y} = x - y = \log_b M - \log_b N$

Potencia:

$\log_b M = x \Rightarrow b^x = M \Rightarrow$ entonces $M^r = \left(b^x\right)^r = b^{r\cdot x}$

Y volviendo a usar la definición: $\log_b\left(M^r\right) = r\cdot x = r\cdot\log_b M$

128. ¿Qué números positivos *x* verifican la siguiente igualdad? $(\log_3 x)\cdot(\log_x 5) = \log_3 5$

$\log_3 x \cdot \log_x 5 = \dfrac{\log x}{\log 3}\cdot\dfrac{\log 5}{\log x} = \dfrac{\log 5}{\log 3} = \log_3 5 \Rightarrow$ Todos los números positivos distintos de 1 verifican la igualdad.

129. Actividad resuelta.

130. Despeja *x* en estas dos expresiones.

a) $A = B(1 + C)^x$ **b)** $\log A^x = \log\sqrt{B}$

a) $A = B(1+C)^x \Rightarrow (1+C)^x = \frac{A}{B} \Rightarrow \log(1+C)^x = \log\frac{A}{B} \Rightarrow x\log(1+C) = \log\frac{A}{B} \Rightarrow x = \frac{\log\frac{A}{B}}{\log(1+C)} = \frac{\log A - \log B}{\log(1+C)}$

b) $\log A^x = \log\sqrt{B} \Rightarrow x\log A = \log\sqrt{B} \Rightarrow x = \frac{\log\sqrt{B}}{\log A} = \frac{\frac{1}{2}\log B}{\log A} = \frac{\log B}{2\log A}$

131. Tomando log 2 = 0,30 y log 3= 048, resuelve la ecuación $3^{x+3} = 135$.

$3^{x+3} = 135 \Rightarrow 3^3\cdot 3^x = 135 \Rightarrow 3^x = \frac{135}{3^3} \Rightarrow 3^x = 5 \Rightarrow \log 3^x = \log 5 \Rightarrow x\log 3 = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 3}$

$x = \frac{\log 5}{\log 3} = \frac{\log\frac{10}{2}}{\log 3} = \frac{\log 10 - \log 2}{\log 3} = \frac{1-0,3}{0,48} = 1,458$

132. Actividad resuelta.

133. ¿Qué relación ha de haber entre *p* y *q* para que se cumpla que log (*p* + *q*) = log *p* + log *q*?

$\left.\begin{array}{l}\log(p+q) = \log p + \log q\\ \log(p\cdot q) = \log p + \log q\end{array}\right\} \Rightarrow \log(p+q) = \log(p\cdot q) \Rightarrow p+q = pq \Rightarrow p = pq - q \Rightarrow p = q(p-1) \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$

134. Si log (xy^2) = 1 y log(x^2y) = 1, calcula log (*xy*).

$\log(xy) = \frac{3\log(xy)}{3} = \frac{\log(xy)^3}{3} = \frac{\log(x^3y^3)}{3} = \frac{\log(xy^2\cdot x^2y)}{3} = \frac{\log(xy^2)+\log(x^2y)}{3} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$

135. Di si son ciertas o no estas afirmaciones.

a) **Entre dos números reales siempre hay otro.**

b) **$\log_a x$ nunca es negativo.**

c) **$\log_a x$ existe si *x* es negativo.**

d) **En (–4, –3) hay racionales, pero no enteros.**

e) **$|x| = -x$ para ciertos valores de *x*.**

a) Verdadera **c)** Falsa **e)** Verdadera

b) Falsa **d)** Verdadera

136. ¿Cómo es el número $\sqrt{2}+\sqrt{3}$? ¿Racional o irracional?

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es un número irracional.

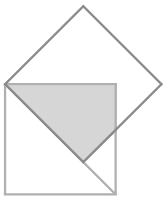
137. Ordena de menor a mayor los números 7^{-50}, 3^{-100} y 2^{-150}.

$\left.\begin{array}{l}3^{-100} = 3^{-50\cdot 2} = (3^2)^{-50} = 9^{-50}\\ 2^{-150} = 2^{-50\cdot 3} = (2^3)^{-50} = 8^{-50}\end{array}\right\} \Rightarrow 9^{-50} < 8^{-50} < 7^{-50} \Rightarrow (3^2)^{-50} < (2^3)^{-50} < 7^{-50} \Rightarrow 3^{-100} < 2^{-150} < 7^{-50}$

138. A, B y C son los vértices de un triángulo tales que $AB = 2\sqrt{5}$, $BC = 3\sqrt{5}$ y $AC = \sqrt{65}$. ¿Qué tipo de triángulo es?

Como $AB^2 = 20$, $BC^2 = 45$ y $AC^2 = 65$, se verifica el teorema de Pitágoras y, por tanto, el triángulo es rectángulo.

139. Dos cuadrados de lado 1 tienen un vértice común y el lado de uno de ellos está sobre la diagonal del otro, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área sombreada?



Por la simetría del dibujo deducimos que el triángulo pequeño de la derecha es rectángulo e isósceles. Así pues, el área de la zona sombreada es el área de medio cuadrado menos el área de un triángulo rectángulo isósceles de lado $\sqrt{2}-1$. Haciendo los cálculos obtenemos que Área = $\frac{1}{2} - \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2} = \sqrt{2}-1$.

140. ¿Cuál es la última cifra de $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 2015^3$?

El cubo de los números que terminan en 0 acaba en 0, el cubo de los números que terminan en 1 acaba en 1, el de los números que terminan en 2 acaba en 8, el de los números que terminan en 3 acaba en 7, el de los números que terminan en 4 acaba en 4, el de los números que terminan en 5 acaba en 5, el de los números que terminan en 6 acaba en 6, el de los números que terminan en 7 acaba en 3, el de los números que terminan en 8 acaba en 2 y el de los números que terminan en 9 acaba en 9. Como del 1 al 2015 hay 201 números que acaban en 0, 202 en 1, 202 en 2, 202 en 3, 202 en 4, 202 en 5, 201 en 6, 201 en 7, 201 en 8 y 201 en 9, la última cifra de la suma será $201 \cdot 0 + 202 \cdot 1 + 202 \cdot 8 + 202 \cdot 7 + 202 \cdot 4 + 202 \cdot 5 + 201 \cdot 6 + 201 \cdot 3 + 201 \cdot 2 + 201 \cdot 9 = 9070$.

Luego la última cifra de $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 2015^3$ será un 0.

141. Completa la igualdad $10^{-3} = 12^{-3} + 15^{-3} + \bullet^{-3}$.

Llamamos x a la cifra buscada.

$$x^{-3} = 10^{-3} - 12^{-3} - 15^{-3} = \frac{1}{10^3} - \frac{1}{12^3} - \frac{1}{15^3} = \frac{1}{2^3 \cdot 5^3} - \frac{1}{2^6 \cdot 3^3} - \frac{1}{3^3 \cdot 5^3} = \frac{2^3 \cdot 3^3 - 5^3 - 2^6}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3} = \frac{27}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3} =$$

$$= \frac{3^3}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3} = \frac{1}{2^6 \cdot 5^3} = \frac{1}{\left(2^2\right)^3 \cdot 5^3} = \left(\frac{1}{2^2 \cdot 5}\right)^3 = \left(\frac{1}{20}\right)^3 = 20^{-3} \Rightarrow x = 20$$

Por tanto, $10^{-3} = 12^{-3} + 15^{-3} + 20^{-3}$

142. Comprueba que $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$ y, utilizando esta expresión, racionaliza $\frac{1}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}$.

$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}}{\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}\right)} = \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}{5 - 2} = \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}{3}$$

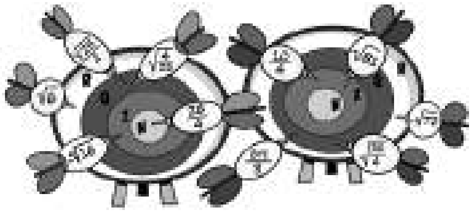
143. Si a, b y c son enteros positivos, ¿qué relación ha de haber entre ellos para que $\sqrt{a + \frac{b}{c}}$ y $a\sqrt{\frac{b}{c}}$ sean el mismo número?

$$\sqrt{a + \frac{b}{c}} = a\sqrt{\frac{b}{c}} \Rightarrow \left(\sqrt{a + \frac{b}{c}}\right)^2 = \left(a\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2 \Rightarrow a + \frac{b}{c} = a^2 \cdot \frac{b}{c} \Rightarrow a = a^2 \cdot \frac{b}{c} - \frac{b}{c} \Rightarrow a = \frac{b}{c}\left(a^2 - 1\right) \Rightarrow \frac{a}{a^2 - 1} = \frac{b}{c}$$

144. Si $\log_b M = \log_c N = 9$, ¿cuál es el valor de $\log_{bc} MN$?

$$\left.\begin{array}{l}\log_b M = 9 \Rightarrow b^9 = M \\ \log_c N = 9 \Rightarrow c^9 = N\end{array}\right\} \Rightarrow \log_{bc} MN = \frac{\log MN}{\log bc} = \frac{\log(b^9 c^9)}{\log bc} = \frac{\log\left[(bc)^9\right]}{\log bc} = \frac{9\log(bc)}{\log bc} = 9$$

145. En la diana de matemáticas, puntúas si clavas el dardo en la franja correspondiente al número del dardo. Estas son las tiradas de Ana y Quique. ¿Quién ha obtenido más puntos?



Ana: cero fallos.

Quique: 2 fallos $\frac{10}{4} \notin \mathbb{Z}$; $\frac{6\pi}{3} \notin \mathbb{Q}$

Gana Ana.

146. Un país invierte el 0,17 % del PIB en ayuda al desarrollo en vez del 0,7 % que recomienda la ONU para erradicar la pobreza. Si el PIB del país es de 2 billones de euros al año, ¿cuánto dinero deja de destinar a ayuda al desarrollo según las indicaciones de la ONU? (Opera en notación científica.)

2 billones = $2 \cdot 10^{12}$ €

Dinero invertido = $\frac{17}{10000} \cdot 2 \cdot 10^{12} = 34 \cdot 10^8$ € $= 3,4 \cdot 10^9$ €

Dinero recomendado = $\frac{7}{1000} \cdot 2 \cdot 10^{12} = 14 \cdot 10^9$ € $= 1,4 \cdot 10^{10}$ €

Dinero no destinado = $1,4 \cdot 10^{10} - 3,4 \cdot 10^9 = 10,6 \cdot 10^9$ € $= 1,06 \cdot 10^{10}$ €

147. Cuando nació Sofía, sus padres depositaron 20 000 euros a su nombre al 10 % de interés compuesto. ¿Cuánto dinero tendrá Sofía cuando cumpla la mayoría de edad?

$C_F = 20\,000 \cdot (1 + 0,1)^{18} = 111\,200$

Al alcanzar la mayoría de edad, Sofía tendrá 111 200 €

148. Un profesor pide a la mitad de sus alumnos que operen $\sqrt[5]{8^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ desarrollando por potencias, y a la otra mitad, por radicales. ¿Qué resultado obtendrá cada mitad de la clase?

Radicales: $\sqrt[5]{8^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt[5]{(2^3)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt[5]{2^6} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[5]{2^6}}{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt[30]{2^{36}}}{\sqrt[30]{2^{20}} \cdot \sqrt[30]{2^{15}}} = \sqrt[30]{\frac{2^{36}}{2^{20} \cdot 2^{15}}} = \sqrt[30]{2}$

Potencias: $\sqrt[5]{8^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 8^{\frac{2}{5}} \cdot 4^{\frac{-1}{3}} \cdot 2^{\frac{-1}{2}} = (2^3)^{\frac{2}{5}} \cdot (2^2)^{\frac{-1}{3}} \cdot 2^{\frac{-1}{2}} = 2^{\frac{6}{5}} \cdot 2^{\frac{-2}{3}} \cdot 2^{\frac{-1}{2}} = 2^{\frac{36}{30}} \cdot 2^{\frac{-20}{30}} \cdot 2^{\frac{-15}{30}} = 2^{\frac{1}{30}}$

Se obtiene el mismo resultado, pues. $\sqrt[30]{2} = 2^{\frac{1}{30}}$.

149. Una cafetería incrementa cada año el precio de un café en un 4 %. Si actualmente cuesta 1,10 €, ¿podrías encontrar la fórmula que relaciona el precio del café con los años transcurridos? ¿Cuánto costará el café dentro de 5 años?

Dentro de un año el precio será $1,10 \cdot 1,04$, dentro de dos años será $1,10 \cdot 1,04^2$, dentro de tres $1,10 \cdot 1,04^3$…
Así, el precio del café dentro de x años, será $1,10 \cdot 1,04^x$.
Aplicando dicha fórmula, dentro de 5 años, el precio del café será $1,10 \cdot 1,04^5 = 1,34$ €.

150. ¿Cuánto tiempo hay que depositar un dinero al 4 % de interés compuesto para triplicarlo?

Sea x el dinero invertido al 4 % anual a interés compuesto.
$3x = x \cdot (1 + 0,04)^t$, donde t son los años que hay que depositar el dinero.

Luego $3 = 1,04^t \Rightarrow \log 3 = \log 1,04^t \Rightarrow \log 3 = t \cdot \log 1,04 \Rightarrow t = \frac{\log 3}{\log 1,04} = 28,01 \Rightarrow$ 28 años, aproximadamente.

151. Las ondas sísmicas producidas por un terremoto son: longitudinales y de propagación rápida, *P*, y transversales y de menor velocidad, *S*. La escala de Richter mide la magnitud de un terremoto como:

$$M = \log A + 3\log(8t) - 2{,}92$$

Donde *A* es la amplitud de las ondas *S* y *t*, el tiempo transcurrido, entre la aparición de las ondas *P* y las *S*.

	t (s)	*A* (mm)	*M*
1	8	15	●
2	15	●	4
3	●	45	7

a) Copia y completa la tabla en tu cuaderno.

b) Calcula la relación entre las amplitudes de dos terremotos de magnitudes 6 y 9. (Supón el mismo valor para *t*.)

a)

	t (s)	*A* (mm)	*M*
1	8	15	3,67
2	15	4,81	4
3	71,2	45	7

b) Magnitud 9: log A = 9 – 3log(8t) + 2,92

Magnitud 6: log A´= 6 – 3log(8t) + 2,92

Restando las expresiones anteriores: $\log A - \log A' = 3 \Rightarrow \log\frac{A}{A'} = 3 \Rightarrow \frac{A}{A'} = 10^3$

152. Dos capitales, uno doble del otro, se colocan a interés compuesto: el menor al 10 %, y el mayor, al 6 %. ¿Al cabo de cuántos años se habrán igualado los capitales finales?

Llamamos x al capital colocado al 10 % y $2x$ al capital colocado al 6 %.

El capital colocado al 10 % se convertirá en $C_F = x(1+0{,}10)^t$ y, el colocado al 6 %, $C_{F'} = 2x(1+0{,}06)^t$.

$x(1+0{,}10)^t = 2x(1+0{,}06)^t \Rightarrow 1{,}1^t = 2\cdot 1{,}06^t \Rightarrow \log 1{,}1^t = \log(2\cdot 1{,}06^t) \Rightarrow t\cdot\log 1{,}1 = \log 2 + t\cdot\log 1{,}06 \Rightarrow$

$t\cdot\log 1{,}1 - t\cdot\log 1{,}06 = \log 2 \Rightarrow t\cdot(\log 1{,}1 - \log 1{,}06) = \log 2 \Rightarrow 0{,}016t = 0{,}301 \Rightarrow t = 18{,}81$. Casi 19 años.

153. Si $D = a^2 + b^2 + c^2$ con *a* y *b* enteros consecutivos y $c = a\cdot b$, $\sqrt{D}$ es:

A. Siempre un entero par.

B. Algunas veces un entero impar, otras no.

C. Siempre un entero impar.

D. Algunas veces un racional, otras no.

Como *a* y *b* son enteros consecutivos, entonces $b = a + 1$.

Luego $D = a^2 + (a+1)^2 + a^2(a+1)^2 = a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^2(a^2 + 2a + 1) = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 = (a^2 + a + 1)^2$.

Como $(a^2 + a + 1)^2 > 0$, entonces $\sqrt{D} = a^2 + a + 1$.

$\sqrt{D} = a^2 + a + 1 = a(a+1) + 1$ y, como $a(a+1)$ es siempre par, entonces $a(a+1) + 1$ es entero impar.

Por tanto, $\sqrt{D}$ es entero impar.

La respuesta correcta es la C.

154. Si x *verifica* que $\frac{1}{x} < 2$ y $\frac{1}{x} > -3$, entonces:

A. $x > \frac{1}{2}$ o $x < -\frac{1}{3}$

B. $-\frac{1}{2} < x < 3$

C. $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$

D. $x > \frac{1}{2}$

Si $x > 0$:

Las condiciones $\frac{1}{x} < 2$ y $\frac{1}{x} > -3$ son equivalentes a $1 < 2x$ y $1 > -3x$, respectivamente; es decir, $\frac{1}{2} < x$ y $x > -\frac{1}{3}$, que, al ser $x > 0$, se reducen a $\frac{1}{2} < x$.

Si $x < 0$:

Las condiciones $\frac{1}{x} < 2$ y $\frac{1}{x} > -3$ son equivalentes a $1 > 2x$ y $1 < -3x$, es decir, $x < \frac{1}{2}$ y $x < -\frac{1}{3}$, que, al ser $x < 0$, se reducen a $x < -\frac{1}{3}$. Así pues, los números x que verifican las desigualdades dadas son los que verifican $x > \frac{1}{2}$ y los que verifican $x < -\frac{1}{3}$.

La respuesta correcta es la A.

155. A = $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ y B = $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ verifican:

A. $A^2 > 1$

B. $A = B$

C. $A < B$

D. $A > B$

$A^2 = \frac{6+2+2\sqrt{12}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ y $B^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Como $A^2 = B^2$ y ambos son positivos, entonces $A = B$.

La respuesta correcta es la B.

156. Si $\log_2 a + \log_2 b \geq 6$, el valor mínimo de $a + b$ es:

A. $2\sqrt{2}$

B. 6

C. $8\sqrt{2}$

D. 16

$\log_2 a + \log_2 b = \log_2 (ab) > 6$, siendo $a, b > 0$.

Por tanto, $ab > 2^6 = 64$.

El valor mínimo de $a + b$ se dará cuando $ab = 64$.

Si dos números tienen producto constante, su suma será mínima cuando sean iguales, es decir, $a + b = 16$.

La respuesta correcta es la D.

Encuentra el error

157. La profesora ha pedido resolver este problema por parejas:

Si *a* y *b* son números reales positivos, simplifica la expresión $E=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+2ab}-\sqrt{a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{a^2+b^2+2ab}+\sqrt{a^2+b^2-2ab}}$

Alicia y Pedro transforman la expresión teniendo en cuenta el cuadrado de un binomio.

$$E=\frac{\sqrt{(a+b)^2}-\sqrt{(a-b)^2}}{\sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{(a-b)^2}}=\frac{a+b-(a-b)}{a+b+a-b}=\frac{2b}{2a}=\frac{b}{a}$$

- **Pedro comprueba con *a* = 5 y *b* = 2 que el resultado es correcto:**

  $\dfrac{\sqrt{5^2+2^2+2\cdot5\cdot2}-\sqrt{5^2+2^2-2\cdot5\cdot2}}{\sqrt{5^2+2^2+2\cdot5\cdot2}+\sqrt{5^2+2^2-2\cdot5\cdot2}}=\dfrac{\sqrt{49}-\sqrt{9}}{\sqrt{49}+\sqrt{9}}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$ **En efecto, obtuvo el resultado esperado** $\dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{5}$

- **Alicia comprueba el resultado con otros valores, a = 5, b = 7.**

  $\dfrac{\sqrt{5^2+7^2+2\cdot5\cdot7}-\sqrt{5^2+7^2-2\cdot5\cdot7}}{\sqrt{5^2+7^2+2\cdot5\cdot7}+\sqrt{5^2+7^2-2\cdot5\cdot7}}=\dfrac{\sqrt{144}-\sqrt{4}}{\sqrt{144}+\sqrt{4}}=\dfrac{10}{14}=\dfrac{5}{7}$ **Pero según esta simplificación que han realizado debería haber obtenido** $\dfrac{b}{a}=\dfrac{7}{5}$.

¿Dónde está el error?

La expresión no es cierta si $b > a$. En este caso $\sqrt{(a-b)^2}=b-a$ y el desarrollo sería:

$$E=\frac{a+b-(b-a)}{a+b+b-a}=\frac{2a}{2b}=\frac{a}{b}$$

PONTE A PRUEBA

¿Como cuánto?

Actividad resuelta

Publicidad engañosa

Un anuncio televisivo propone cuatro tipos de ofertas a los clientes de unos grandes almacenes.

1. Estudia cada una de las ofertas y di cuál es la mejor si quieres comprar 2, 3, 4, 5 o 6 productos iguales.

	2 artículos	3 artículos	4 artículos	5 artículos	6 artículos
Descuento oferta 3 x 2	0 %	33,33 %	25 %	20 %	33,33 %
Descuento oferta 50%	25 %	16,66 %	25 %	20 %	25 %
Descuento oferta 20%	20 %	13,33 %	20 %	16 %	20 %
Descuento oferta 30%	20 %	30 %	22,5 %	18 %	30 %

2. La publicidad da a entender que la oferta descuento 20% es la más conveniente.

a) ¿Es cierto en todos los casos?

b) ¿Qué ventajas puede tener sobre las otras?

a) No es cierto siempre. Por ejemplo, si se compran 3 artículos iguales es la oferta menos conveniente.

b) Esta oferta tiene la ventaja de que se hace un descuento del 20% únicamente comprando dos artículos. Aún así, incluso en este caso, hay otra oferta mejor (50%).

El logaritmo del amoniaco

Las siglas pH significan "potencial de hidrógeno". Se trata de una escala que mide cómo de ácida o básica es una sustancia. Los ácidos fuertes, como el ácido sulfúrico, tienen altas concentraciones de iones de hidrógeno, y las soluciones alcalinas fuertes, como la sosa cáustica, tienen concentraciones bajas. La concentración de una sustancia se expresa como el número de moles por litro. Por ejemplo, el vinagre tiene 0,001 mol/l. Para evitar trabajar con números tan pequeños, en 1909 el químico danés Sørensen construyó una escala logarítmica para medir las concentraciones: el pH. El pH es el opuesto del logaritmo de la concentración de moles de iones de hidrógeno.

$$\text{pH (vinagre)} = -\log 0{,}001 = -\log(10^{-3}) = 3$$

- **Si el pH = 7, se dice que la sustancia es neutra.**
- **Si el pH < 7, es ácida.**
- **Si el pH > 7, es básica.**

Por ejemplo, el pH del amoniaco es 12, y el del vino, 4.

1. La concentración mínima es de 10^{-14} moles/litro. ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar el pH?

El valor máximo que puede tomar el pH es $-\log(10^{-14}) = 14$.

2. Considera el amoniaco, el vino y el vinagre.

a) ¿Cuáles de ellos son básicos y cuáles ácidos?

b) ¿Cuál es la concentración de moles por litro en cada uno de ellos?

c) ¿Cuántas veces es mayor la concentración de iones de hidrógeno en el amoniaco que en el vino?

a) El amoniaco es básico y, el vino y el vinagre, ácidos.

b) La concentración del amoniaco es 10^{-12} moles/litro, la del vino, 10^{-4}, y la del vinagre, 10^{-3}.

c) La concentración del amoniaco es $10^{-4} : 10^{-12} = 10^{8}$ veces mayor que la del vino.

3. **¿Cuántas veces es más ácida una sustancia cuyo pH es 2 que una cuyo pH es 4?**

Como la acidez de la sustancia que tiene pH 2 es 10^{-2} y de la que tiene pH 4 es 10^{-4}, es 100 veces más ácida.

4. **Para el cuerpo humano son corrosivas las sustancias con un pH menor que 3,5, y son cáusticas aquellas con un pH superior a 11,5. Relaciona el pH con las sustancias e indica cuáles no son adecuadas para el cuerpo humano.**

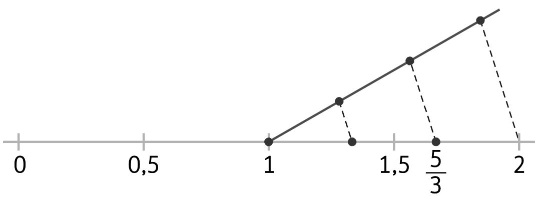
Zumo de limón	Café	Leche	Dentífrico	Lejía
pH = 5	pH = 6,5	pH = 2,3	pH = 9,9	pH = 13

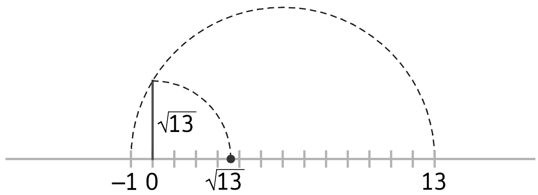
pH limón = 2,3; pH café = 5; pH leche = 6,5; pH dentífrico = 9,9; pH lejía = 13

El amoniaco y la pasta de dientes no son sustancias adecuadas para el cuerpo humano.

AUTOEVALUACIÓN

1. **Representa en la recta real $\frac{5}{3}$ y $\sqrt{13}$. ¿Son racionales o irracionales?**



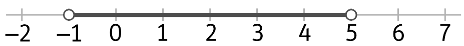


$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$ es racional.

$\sqrt{13}$ es irracional.

2. **Un número real x cumple $|x - 2| < 3$. Describe los posibles valores de x gráficamente, con intervalos y mediante desigualdades.**

$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow x \in (-1, 5) \Leftrightarrow -1 < x < 5 \Leftrightarrow$



3. **Escribe en notación científica el resultado de: $(0{,}26 \cdot 10^{-4}) \cdot (8{,}53 \cdot 10^{9})^2 + 7{,}2 \cdot 10^{13}$**

$(0{,}26 \cdot 10^{-4}) \cdot (8{,}53 \cdot 10^{9})^2 + 7{,}2 \cdot 10^{13} = (0{,}26 \cdot 10^{-4}) \cdot (72{,}7609 \cdot 10^{18}) + 7{,}2 \cdot 10^{13} = 18{,}917834 \cdot 10^{14} + 7{,}2 \cdot 10^{13} =$

$1{,}8917834 \cdot 10^{15} + 0{,}072 \cdot 10^{15} = 1{,}9637834 \cdot 10^{15}$

4. **Realiza las operaciones y simplifica el resultado.**

a) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{3}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{2}$

c) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2}}\right)^4$

d) $4\sqrt{50} - 3\sqrt{128} + 5\sqrt{72}$

a) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{3} = \sqrt[15]{2^5} : \sqrt[15]{3^3} = \sqrt[15]{2^5 \cdot 3^{-3}}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{18}$

c) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2}}\right)^4 = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

d) $4\sqrt{50} - 3\sqrt{128} + 5\sqrt{72} = 20\sqrt{2} - 24\sqrt{2} + 30\sqrt{2} = 26\sqrt{2}$

5. **Opera y simplifica.**

a) $\left(\sqrt{18}-\sqrt{20}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$

b) $2\sqrt{48}-3\sqrt{675}+\sqrt{588}$

c) $\left(\sqrt{12}+\sqrt{3}\right)^2$

d) $\left(2+\sqrt{8}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)$

a) $\left(\sqrt{18}-\sqrt{20}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)=16-5\sqrt{10}$

b) $2\sqrt{48}-3\sqrt{675}+\sqrt{588}=8\sqrt{3}-45\sqrt{3}+14\sqrt{3}=-23\sqrt{3}$

c) $\left(\sqrt{12}+\sqrt{3}\right)^2=12+3+2\sqrt{36}=27$

d) $\left(2+\sqrt{8}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)=6-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}-4=2+4\sqrt{2}$

6. **Calcula el valor de *x* en estas igualdades.**

a) $4^x=(2^{-3})^5$ **b)** $\left(\sqrt{5}\right)^x=25$ **c)** $0{,}001^{-5}\cdot 100^x=0{,}01^5$ **d)** $0{,}25^x=16$

a) $4^x=(2^{-3})^5 \Rightarrow 2^{2x}=2^{-15}\Rightarrow x=-7{,}5$

c) $0{,}001^{-5}\cdot 100^x=0{,}01^5\Rightarrow 10^{15}\cdot 10^{2x}=10^{-10}\Rightarrow x=-12{,}5$

b) $\left(\sqrt{5}\right)^x=25\Rightarrow 5^{\frac{x}{2}}=5^2\Rightarrow x=4$

d) $0{,}25^x=16\Rightarrow 4^{-x}=4^2\Rightarrow x=-2$

7. **Racionaliza estas expresiones.**

a) $\dfrac{4}{\sqrt{8}}$ **b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{12}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{4}{\sqrt{8}}=\dfrac{4\sqrt{8}}{8}=\dfrac{\sqrt{8}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{12}}=\dfrac{\sqrt[3]{12^2}}{12}=\dfrac{2\sqrt[3]{18}}{12}=\dfrac{\sqrt[3]{18}}{6}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}$

8. **Sabiendo que log 2= 0,301…., calcula:**

a) **log 5** **b)** **log 20** **c)** **log 16** **d)** **$\log_5 2$**

a) log 5 = log 10 – log 2= 0,699

c) log 16 = 4log 2 = 1,204

b) log 20 = log 2 + log 10 = 1,301

d) $\log_5 2=\dfrac{\log 2}{\log 5}=\dfrac{0{,}301}{0{,}699}=0{,}431$

9. **Toma logaritmos en la expresión $A=\dfrac{x^3\sqrt[7]{y^2}\,z^{\frac{3}{4}}}{t^2}$.**

$$A=\frac{x^3\sqrt[7]{y^2}\,z^{\frac{3}{4}}}{t^2}\Rightarrow \log A=\log\frac{x^3\sqrt[7]{y^2}\,z^{\frac{3}{4}}}{t^2}\Rightarrow \log A=3\log x+\frac{2}{7}\log y+\frac{3}{4}\log z-2\log t$$

10. **Elimina los logaritmos en la expresión $\log A=\dfrac{1}{5}\log x+\dfrac{2}{9}\log y-8\log z$.**

$$\log A=\frac{1}{5}\log x+\frac{2}{9}\log y-8\log z\Rightarrow \log A=\log\sqrt[5]{x}+\log\sqrt[9]{y^2}-\log z^8\Rightarrow \log A=\log\frac{\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[9]{y^2}}{z^8}\Rightarrow A=\frac{\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[9]{y^2}}{z^8}$$

2 Álgebra

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Realiza las siguientes operaciones con polinomios.

a) $(3x^2 + 2x - 5)(2x^2 + x - 3)$ **b)** $(2x - 3)(-2x^2 + 2) + x(-2x^2 + x + 1)$ **c)** $4(x^3 - x + 3) - 2(x^2 + 3x)(-2x + 5)$

a) $(3x^2 + 2x - 5)(2x^2 + x - 3) = 6x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 4x^3 + 2x^2 - 6x - 10x^2 - 5x + 15 = 6x^4 + 7x^3 - 17x^2 - 11x + 15$

b) $(2x - 3)(-2x^2 + 2) + x(-2x^2 + x + 1) = -4x^3 + 4x + 6x^2 - 6 - 2x^3 + x^2 + x = -6x^3 + 7x^2 + 5x - 6$

c) $4(x^3 - x + 3) - 2(x^2 + 3x)(-2x + 5) = 4x^3 - 4x + 12 + 4x^3 - 10x^2 + 12x^2 - 30x = 8x^3 + 2x^2 - 34x + 12$

4. Calcula los valores de *a* y *b* para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $(3x^2 - 5x + a)(2x^2 + bx) = 6x^4 - 19x^3 + 19x^2 - 6x$

b) $2(x + 3)^2 - 3(x + a) = 2x^2 + bx + 3$

a) $(3x^2 - 5x + a)(2x^2 + bx) = 6x^4 + (3b - 10)x^3 + (2a - 5b)x^2 + abx \Rightarrow \begin{cases} 3b - 10 = -19 \\ 2a - 5b = 19 \\ ab = -6 \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = -3$

b) $2(x + 3)^2 - 3(x + a) = 2x^2 + 9x + (18 - 3a) \Rightarrow \begin{cases} 9 = b \\ 18 - 3a = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 5,\ b = 9$

5. Efectúa las siguientes divisiones.

a) $(3x^3 + 2x^2 + x - 5) : (3x^2 + 2)$

b) $(3x^4 - 2x^2 - x + 4) : (x^2 + x + 2)$

c) $(x^3 - 3x^2 - x + 6) : (2x^3 - 2x + 3)$

a)
$$\begin{array}{rl|l} 3x^3 + 2x^2 + x - 5 & & 3x^2 + 2 \\ \cline{3-3} -3x^3 \qquad - 2x & & x + \frac{2}{3} \\ \hline 2x^2 - x - 5 & & \\ -2x^2 \qquad - \frac{4}{3} & & \\ \hline - x - \frac{19}{3} & & \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rl|l} x^3 - 3x^2 - x + 6 & & 2x^3 - 2x + 3 \\ \cline{3-3} -x^3 \qquad + x - \frac{3}{2} & & \frac{1}{2} \\ \hline - 3x^2 \qquad + \frac{9}{2} & & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rl|l} 3x^4 \qquad - 2x^2 - x + 4 & & x^2 + x + 2 \\ \cline{3-3} -3x^4 - 3x^3 - 6x^2 & & 3x^2 - 3x - 5 \\ \hline -3x^3 - 8x^2 - x & & \\ 3x^3 + 3x^2 + 6x & & \\ \hline -5x^2 + 5x + 4 & & \\ 5x^2 + 5x + 10 & & \\ \hline 10x + 14 & & \end{array}$$

6. Efectúa las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a) $(3x^3 + 2x^2 + x - 5) : (x + 2)$

b) $(3x^4 - 2x^2 - x + 4) : (x + 2)$

c) $(x^3 - 3x^2 - x + 6) : (2x + 3)$

d) $(4x^4 - 3x^2 + 5) : (-x + 5)$

e) $(2x^5 - 12x^3 - 6x^2 - 117) : (x - 3)$

a)

	3	2	1	–5
–2		–6	8	–18
	3	–4	9	–23

Cociente: $3x^2 - 4x + 9$ Resto: –23

b)

	3	0	–2	–1	4
–2		–6	12	–20	42
	3	–6	10	–21	46

Cociente: $3x^3 - 6x^2 + 10x - 21$ Resto: 46

c) Como el divisor no es de la forma $x - a$, antes de aplicar Ruffini se dividen el dividendo y el divisor por 2.

	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3
$-\frac{3}{2}$		$-\frac{3}{4}$	$\frac{27}{8}$	$-\frac{69}{16}$
	$\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{23}{8}$	$-\frac{21}{16}$

Cociente: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{23}{8}$ Resto: $2 \cdot \left(-\frac{21}{16}\right) = -\frac{21}{8}$

d) Como el divisor no es de la forma $x - a$, antes de aplicar Ruffini se cambia el signo al dividendo y al divisor.

	–4	0	3	0	–5
5		–20	–100	–485	–2425
	–4	–20	–97	–485	–2430

Cociente: $-4x^3 - 20x^2 - 97x - 485$ Resto: 2430

e)

	2	0	–12	–6	0	–117
3		6	18	18	36	108
	2	6	6	12	36	–9

Cociente: $2x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 12x + 36$ Resto: –9

7. Utiliza Ruffini para calcular el valor de *a* y *b* que hace que las siguientes divisiones sean exactas.

a) $(2x^3 + 5x^2 - 2x + a) : (x + 3)$

b) $(3x^4 - 5x^2 - ax + 2) : (2x + 3)$

c) $(-6x^4 + x^3 + ax^2 - 16x + 4) : (-3x + 4)$

d) $(4x^4 + 3x^3 - 13x^2 + ax + b) : (x^2 - 2)$

a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & -2 & a \\ -3 & & -6 & 3 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & a-3 \end{array} \qquad a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$$

b)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{a}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & & -\frac{9}{4} & \frac{27}{8} & -\frac{21}{16} & \frac{63+24a}{32} \\ \hline & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{7}{8} & -\frac{21+8a}{16} & \frac{95+24a}{32} \end{array} \qquad \frac{95+24a}{16} = 0 \Rightarrow a = -\frac{95}{24}$$

c)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -\frac{1}{3} & -\frac{a}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & & \frac{8}{3} & \frac{28}{9} & \frac{112-12a}{27} & \frac{1024-48a}{81} \\ \hline & 2 & \frac{7}{3} & \frac{28-3a}{9} & \frac{256-12a}{27} & \frac{916-48a}{81} \end{array} \qquad \frac{48a-916}{27} = 0 \Rightarrow a = \frac{229}{12}$$

d) La división no se puede hacer utilizando Ruffini.

$$\begin{array}{rrrl|l} 4x^4 + 3x^3 & -\,13x^2 & +\,ax & +\,b & x^2 - 2 \\ \cline{5-5} -4x^4 & +\,8x^2 & & & 4x^2 + 3x - 5 \\ \cline{1-2} 3x^3 & -\,5x^2 & +\,ax & & \\ -3x^3 & & +\,6x & & \\ \cline{1-3} & -5x^2 & +\,(a+6)x & +\,b & \\ & 5x^2 & & -\,10 & \\ \cline{2-4} & & (a+6)x & +\,b - 10 & \end{array}$$

Para que el resto sea cero $a = -6$ y $b = 10$

8 y 9. Ejercicios resueltos.

10. Halla, sin hacer la división, el valor de *m* para que el polinomio $2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + 3m$ tenga por resto 12 al dividirlo por $x + 2$.

Por el teorema del resto se tiene: $12 = 2(-2)^4 + 9(-2)^3 + 2(-2)^2 - 6(-2) + 3m = 3m - 20 \Rightarrow m = \frac{32}{3}$

11. Calcula el valor de *k* para que el polinomio:

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 2x + k$ sea divisible por $x - 2$.

b) $P(x) = x^3 - 2x^2 + kx + 4$ sea divisible por $x + 2$.

c) $P(x) = (k - 3)x^3 - 5x + k$ sea divisible por $x + 4$.

d) $P(x) = x^3 - (k - 3)x^2 + (k - 5)x - 3$ sea divisible por $x - 3$.

a) Por el teorema del factor se tiene: $2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + k = 0 \Rightarrow k + 8 = 0 \Rightarrow k = -8$

b) Por el teorema del factor se tiene: $(-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + k \cdot (-2) + 4 = 0 \Rightarrow -2k - 12 = 0 \Rightarrow k = -6$

c) Por el teorema del factor se tiene: $(k - 3) \cdot (-4)^3 - 5 \cdot (-4) + k = 0 \Rightarrow -63k + 212 = 0 \Rightarrow k = \frac{212}{63}$

d) Por el teorema del factor se tiene: $3^3 - (k - 3) \cdot 3^2 + (k - 5) \cdot 3 \cdot - 3 = 0 \Rightarrow -6k + 36 = 0 \Rightarrow k = 6$

12. En cada caso, factoriza el polinomio dado y halla sus raíces entera.

a) $2x^3 + 5x^2 - x - 6$ **c)** $x^4 - 16$ **e)** $6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$ **g)** $x^4 - 3x^3 - 3x + 2$

b) $9x^2 + 12x + 4$ **d)** $x^5 - x^4 - x^2 + x$ **f)** $x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 11x - 6$ **h)** $x^6 - 9x^4$

a)

	2	5	–1	–6
1		2	7	6
	2	7	6	0

Se calculan las raíces del cociente $2x^2 + 7x + 6$: $x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \dfrac{-7 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ x = -2 \end{cases}$

Por tanto, $2x^3 + 5x^2 - x - 6 = 2(x-1)(x+2)(x+\dfrac{3}{2}) = (x-1)(x+2)(2x+3)$. Las raíces enteras son –2 y 1.

b) $x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{144-144}}{18} = \dfrac{-12 \pm 0}{18} = -\dfrac{2}{3}$, así $9x^2 + 12x + 4 = 9\left(x + \dfrac{2}{3}\right)^2 = (3x+2)^2$. No tiene raíces enteras.

c) Usando las igualdades notables: $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$. Las raíces enteras son –2 y 2.

d) Se extrae factor común: $x^5 - x^4 - x^2 + x = x(x^4 - x^3 - x + 1)$. Ahora por Ruffini:

	1	–1	0	–1	1
1		1	0	0	–1
	1	0	0	–1	0

	1	0	0	–1
1		1	1	1
	1	1	1	0

$x^5 - x^4 - x^2 + x = x\,(x-1)^2(x^2 + x + 1)$. Las raíces enteras son 0 y 1.

e)

	6	11	6	1
–1		–6	–5	–1
	6	5	1	0

Se calculan las raíces del cociente $6x^2 + 5x + 1$: $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{12} = \dfrac{-5 \pm 1}{12} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Por tanto, $6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = 6\,(x+1)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{3}\right)$. La raíz entera es –1.

f) Es un ejemplo de polinomio sin raíces enteras y que no se puede factorizar de forma sencilla.

g) Es un ejemplo de polinomio sin raíces enteras y que no se puede factorizar de forma sencilla.

h) Se extrae factor común y se utilizan las identidades notables: $x^6 - 9x^4 = x^4\,(x^2 - 9) = x^4\,(x-3)(x+3)$. Las raíces enteras son –3, 0 y 3.

13. Ejercicio interactivo.

14 a 17. Ejercicios resueltos.

18. Simplifica la expresión: $\dfrac{\left[\dbinom{29}{3} + \dbinom{29}{25}\right]4!}{630}$

$$\frac{\left[\dbinom{29}{3} + \dbinom{29}{25}\right]4!}{630} = \frac{\left[\dbinom{29}{3} + \dbinom{29}{4}\right]4!}{630} = \frac{\dbinom{30}{4}4!}{630} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{630} = 1044$$

19. Desarrolla las siguientes potencias y halla su sexto término.

a) $\left(3-2\sqrt{3}\right)^4$ **b)** $\left(2x+\dfrac{4}{3x}\right)^5$ **c)** $\left(\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^9$ **d)** $\left(3a^2+2ab\right)^8$

a) $\left(3-2\sqrt{3}\right)^4=\binom{4}{0}\cdot 3^4-\binom{4}{1}\cdot 3^3\cdot\left(2\sqrt{3}\right)+\binom{4}{2}\cdot 3^2\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^2-\binom{4}{3}\cdot 3\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^3+\binom{4}{4}\left(2\sqrt{3}\right)^4=$

$=81-4\cdot 27\cdot 2\sqrt{3}+6\cdot 9\cdot 12-4\cdot 3\cdot 24\sqrt{3}+144=873-504\sqrt{3}$. El desarrollo no tiene sexto término.

b) $\left(2x+\dfrac{4}{3x}\right)^5=\binom{5}{0}(2x)^5+\binom{5}{1}(2x)^4\dfrac{4}{3x}+\binom{5}{2}(2x)^3\left(\dfrac{4}{3x}\right)^2+\binom{5}{3}(2x)^2\left(\dfrac{4}{3x}\right)^3+\binom{5}{4}2x\left(\dfrac{4}{3x}\right)^4+\binom{5}{5}\left(\dfrac{4}{3x}\right)^5=$

$=32x^5+\dfrac{320}{3}x^3+\dfrac{1280x}{9}+\dfrac{2560}{27x}+\dfrac{2560}{81x^3}+\dfrac{1024}{243x^5}$. El sexto término del desarrollo es $T_6=\binom{5}{5}\left(\dfrac{4}{3x}\right)^5=\dfrac{1024}{243x^5}$.

c) $\left(\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^9=\binom{9}{0}(\sqrt{2})^9-\binom{9}{1}(\sqrt{2})^8\left(2\sqrt{3}\right)+\binom{9}{2}(\sqrt{2})^7\left(2\sqrt{3}\right)^2-\binom{9}{3}(\sqrt{2})^6\left(2\sqrt{3}\right)^3+\binom{9}{4}(\sqrt{2})^5\left(2\sqrt{3}\right)^4-$

$-\binom{9}{5}(\sqrt{2})^4\left(2\sqrt{3}\right)^5+\binom{9}{6}(\sqrt{2})^3\left(2\sqrt{3}\right)^6-\binom{9}{7}(\sqrt{2})^2\left(2\sqrt{3}\right)^7+\binom{9}{8}(\sqrt{2})\left(2\sqrt{3}\right)^8-\binom{9}{9}\left(2\sqrt{3}\right)^9=16\sqrt{2}-$

$-288\sqrt{3}+3456\sqrt{2}-16128\sqrt{3}+72\,576\sqrt{2}-145\,152\sqrt{3}+290\,304\sqrt{2}-248\,832\sqrt{3}+186\,624\sqrt{2}-41\,472\sqrt{3}=$

$=552\,976\sqrt{2}-451\,872\sqrt{3}$. El sexto término del desarrollo es $T_6=-\binom{9}{5}\left(\sqrt{2}\right)^4\left(2\sqrt{3}\right)^5=-145\,152\sqrt{3}$.

d) $\left(3a^2+2ab\right)^8=\binom{8}{0}(3a^2)^8+\binom{8}{1}(3a^2)^7(2ab)+\binom{8}{2}(3a^2)^6(2ab)^2+\binom{8}{3}(3a^2)^5(2ab)^3+\binom{8}{4}(3a^2)^4(2ab)^4+$

$+\binom{8}{5}(3a^2)^3(2ab)^5+\binom{8}{6}(3a^2)^2(2ab)^6+\binom{8}{7}(3a^2)(2ab)^7+\binom{8}{8}(2ab)^8=6561a^{16}+34\,992a^{15}b+81\,648a^{14}b^2+$

$+108\,864a^{13}b^3+90\,720a^{12}b^4+48\,384a^{11}b^5+16\,128a^{10}b^6+3072a^9b^7+256a^8b^8$.

El sexto término del desarrollo es $T_6=\binom{8}{5}\left(3a^2\right)^3(2ab)^5=48\,384a^{11}b^5$.

20. Halla el término independiente del desarrollo de: $\left(\dfrac{3}{x^2}+5x\right)^{12}$.

$$T_k=\binom{12}{k-1}\left(\frac{3}{x^2}\right)^{13-k}(5x)^{k-1}=\binom{12}{k-1}\frac{3^{13-k}\cdot 5^{k-1}\cdot x^{k-1}}{x^{26-2k}}=\binom{12}{k-1}3^{13-k}\cdot 5^{k-1}\cdot x^{3k-27}$$

El término independiente cumple $3k-27=0\Rightarrow k=9$.

Por tanto, el término independiente es $T_9=\binom{12}{8}3^{13-9}\cdot 5^{9-1}=495\cdot 3^4\cdot 5^8$

21. Calcula el coeficiente de y^2 en el desarrollo: $\left(\dfrac{2y^2}{3}-\dfrac{3}{2y^2}\right)^7$.

$$T_k=(-1)^{k-1}\binom{7}{k-1}\left(\frac{2y^2}{3}\right)^{8-k}\left(\frac{3}{2y^2}\right)^{k-1}=(-1)^{k-1}\binom{7}{k-1}\frac{2^{8-k}\cdot 3^{k-1}\cdot y^{16-2k}}{2^{k-1}\cdot 3^{8-k}\cdot y^{2k-2}}=(-1)^{k-1}\binom{7}{k-1}2^{9-2k}\cdot 3^{2k-9}\cdot y^{-4k+18}$$

El término de y^2 cumple $-4k+18=2\Rightarrow k=4$. Por tanto, el coeficiente de y^2 es $(-1)^3\binom{7}{3}2^{9-8}\cdot 3^{8-9}=-\dfrac{70}{3}$

22. Ejercicio resuelto.

23. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ y $Q(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $P(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + x + 3$ y $Q(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

c) $P(x) = x$, $Q(x) = x^2 - x$ y $R(x) = x^3 - 2x^2 + x$

d) $P(x) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + 1$ y $Q(x) = 12x^3 - 16x^2 + 7x - 1$

e) $P(x) = x^2 - 6x + 8$, $Q(x) = x^2 - 4$ y $R(x) = 2x^2 - 4x$

a) $P(x) = (x-1)(x+2)^2$, $Q(x) = (x-1)^2$

m.c.d.$[P(x), Q(x)] = x - 1$; m.c.m.$[P(x), Q(x)] = (x-1)^2(x+2)^2 = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

b) $P(x) = (x-1)^2(x+1)^2(x+3)$, $Q(x) = (x-1)(x+1)(x+3)$

m.c.d.$[P(x), Q(x)] = (x-1)(x+1)(x+3) = Q(x)$; m.c.m.$[P(x), Q(x)] = (x-1)^2(x+1)^2(x+3) = P(x)$

c) $P(x) = x$, $Q(x) = x(x-1)$, $R(x) = x(x-1)^2$

m.c.d.$[P(x), Q(x), R(x)] = x = P(x)$; m.c.m.$[P(x), Q(x), R(x)] = x(x-1)^2 = R(x)$

d) $P(x) = (2x+1)(2x-1)(3x-1)$, $Q(x) = (2x-1)^2(3x-1)$

m.c.d.$[P(x), Q(x)] = (2x-1)(3x-1) = 6x^2 - 5x + 1$

m.c.m.$[P(x), Q(x)] = (2x+1)(2x-1)^2(3x-1) = 24x^4 - 20x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

e) $P(x) = (x-4)(x-2)$, $Q(x) = (x+2)(x-2)$, $R(x) = 2x(x-2)$

m.c.d.$[P(x), Q(x), R(x)] = x - 2$; m.c.m.$[P(x), Q(x), R(x)] = (x-2)(x+2)2x(x-4) = 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 32x$

24. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 8x + 3}$ **b)** $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$ **c)** $\dfrac{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4}$

a) $\dfrac{2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 8x + 3} = \dfrac{(x+3)(x-1)^2(2x-1)}{(x-1)(x+3)(2x-1)} = x - 1$

b) $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = \dfrac{(x-2)(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-2)^2} = \dfrac{x+3}{x-2}$

c) $\dfrac{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4} = \dfrac{(x-1)^3(x-2)}{(x-1)^2(x-2)^2} = \dfrac{x-1}{x-2}$

25. Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{a^2}{a\cdot b}+\dfrac{a\cdot b^2}{b^4}-a$

b) $\dfrac{6}{2+x}-\dfrac{4}{2-x}+\dfrac{16}{x^2-4}$

c) $\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2+2x+1}\cdot\dfrac{x^2+6x+5}{2x-3}$

d) $(x^2-y^2):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

e) $\dfrac{a+x}{x^2-a^2}\cdot\dfrac{x-a}{x+a}$

f) $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$

g) $\dfrac{\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1-x}{x^2-2x+1}}+\dfrac{x+1}{x}$

h) $1+\dfrac{\dfrac{2x+1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}}$

a) $\dfrac{a^2}{a\cdot b}+\dfrac{a\cdot b^2}{b^4}-a=\dfrac{a^2b^3+a^2b^2-a^2b^4}{ab^4}=\dfrac{a^2b^2\left(b+1-b^2\right)}{ab^4}=\dfrac{ab+a-ab^2}{b^2}$

b) $\dfrac{6}{2+x}-\dfrac{4}{2-x}+\dfrac{16}{x^2-4}=\dfrac{6(x-2)+4(x+2)+16}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{6x-12+4x+8+16}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{10x+12}{x^2-4}$

c) $\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2+2x+1}\cdot\dfrac{x^2+6x+5}{2x-3}=\dfrac{(x-2)(2x-3)}{(x+1)^2}\cdot\dfrac{(x+1)(x+5)}{2x-3}=\dfrac{(x-2)(x+5)}{x+1}=\dfrac{x^2+3x-10}{x+1}$

d) $(x^2-y^2):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{(x-y)(x+y)}{\dfrac{x+y}{xy}}=\dfrac{xy(x-y)(x+y)}{x+y}=x^2y-xy^2$

e) $\dfrac{a+x}{x^2-a^2}\cdot\dfrac{x-a}{x+a}=\dfrac{(a+x)(x-a)}{(x-a)(x+a)^2}=\dfrac{1}{x+a}$

f) $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{x+1}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{2x+1}{x+1}}=1+\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{3x+2}{2x+1}$

g) $\dfrac{\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1-x}{x^2-2x+1}}+\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1}{x+1}:\dfrac{-x}{(x+1)(x-1)}+\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{2}{x}$

h) $1+\dfrac{\dfrac{2x+1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}}=1+\left(\dfrac{2x+1}{x-1}:\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}\right)=1+\dfrac{(x+1)(2x+1)}{x^2+1}=\dfrac{3x^2+3x+2}{x^2+1}$

26 a 28. Ejercicios resueltos.

29. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas.

a) $\frac{2x-3}{4}+\frac{x}{2}-\frac{3x-1}{5}=2x-1$

b) $2(3x-2)+x(x-1)=-4$

c) $(x+1)^3-(x-1)^3=7$

d) $\frac{x^2+1}{2}-\frac{2x-3}{4}+\frac{x^2}{6}=\frac{59}{12}$

e) $6x^4+13x^3-8x^2-17x+6=0$

f) $2x^4-x^3-3x-18=0$

a) $\frac{2x-3}{4}+\frac{x}{2}-\frac{3x-1}{5}=2x-1 \Rightarrow 10x-15+10x-12x+4=40x-20 \Rightarrow -32x=-9 \Rightarrow x=\frac{9}{32}$

b) $2(3x-2)+x(x-1)=-4 \Rightarrow 6x-4+x^2-x+4=0 \Rightarrow x^2+5x=0 \Rightarrow x(x+5)=0 \Rightarrow x=0,\ x=-5$

c) $(x+1)^3-(x-1)^3=7 \Rightarrow x^3+3x^2+3x+1-(x^3-3x^2+3x-1)=7 \Rightarrow 6x^2=5 \Rightarrow x=\sqrt{\frac{5}{6}},\ x=-\sqrt{\frac{5}{6}}$

d) $\frac{x^2+1}{2}-\frac{2x-3}{4}+\frac{x^2}{6}=\frac{59}{12} \Rightarrow 6x^2+6-6x+9+2x^2=59 \Rightarrow 8x^2-6x-44=0 \Rightarrow 4x^2-3x-22=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+352}}{8}=\frac{3\pm 19}{8} \Rightarrow x=\frac{11}{4},\ x=-2$

e) $6x^4+13x^3-8x^2-17x+6=0 \Rightarrow (x-1)(x+2)(2x+3)(3x-1)=0 \Rightarrow x=1,\ x=-2,\ x=-\frac{3}{2},\ x=\frac{1}{3}$

f) $2x^4-x^3-3x-18=0 \Rightarrow (x-2)(x^2+3)(2x+3)=0 \Rightarrow x=2,\ x=-\frac{3}{2}$

30. Escribe una ecuación polinómica de tercer grado tal que una solución sea 2 y la suma y el producto de las otras dos valgan –4 y 5, respectivamente.

$(x-2)(x^2+4x+5)=0 \Rightarrow x^3+2x^2-3x-10=0$

Las soluciones no son todas reales.

31. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^4-17x^2+16=0$

b) $2(x+1)^4-8x^3-8(x+3)+8=0$

c) $3x^4+x^3+73x^2+25x+16=0$

d) $\frac{9}{x^2}=10-x^2$

a) $\left.\begin{array}{l} z=x^2 \\ z^2=x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2-17z+16=0 \Rightarrow z=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{2}=\frac{17\pm 15}{2}=\begin{cases} z=16 \Rightarrow x=4,\ x=-4 \\ z=1 \Rightarrow x=1,\ x=-1 \end{cases}$

b) $2(x+1)^4-8x^3-8(x+3)+8=2x^4+8x^3+12x^2+8x+2-8x^3-8x-24+8=2x^4+12x^2-14=x^4+6x^2-7=0$

$\left.\begin{array}{l} z=x^2 \\ z^2=x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2+6z-7=0 \Rightarrow z=\frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{2}=\frac{-6\pm 8}{2}=\begin{cases} z=1 \Rightarrow x=1,\ x=-1 \\ z=-7 \Rightarrow \text{No tiene solución real} \end{cases}$

c) El polinomio no tiene raíces enteras, por lo que no es sencillo de factorizar y, por tanto, la ecuación no se puede resolver de manera sencilla (de hecho, no tiene raíces reales).

d) $\frac{9}{x^2}=10-x^2 \Rightarrow 9=10x^2-x^4 \Rightarrow x^4-10x^2+9=0$

$\left.\begin{array}{l} z=x^2 \\ z^2=x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2-10z+9=0 \Rightarrow z=\frac{10\pm\sqrt{100+36}}{2}=\frac{10\pm 8}{2}=\begin{cases} z=9 \Rightarrow x=3,\ x=-3 \\ z=1 \Rightarrow x=1,\ x=-1 \end{cases}$

32 a 34. Ejercicios resueltos.

35. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=\frac{7}{8}$ **b)** $\frac{2x}{3}+\frac{2x+3}{x-1}=\frac{11}{3x-3}$ **c)** $\frac{2x}{x-2}+\frac{3x}{x+2}=\frac{6x^2}{x^2-4}$

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=\frac{7}{8}\Rightarrow 8x^2+8x+8=7x^3\Rightarrow (x-2)(7x^2+6x+4)=0\Rightarrow x=2$ La solución es verdadera.

b) $\frac{2x}{3}+\frac{2x+3}{x-1}=\frac{11}{3x-3}\Rightarrow 2x(x-1)+3(2x+3)=11\Rightarrow 2x^2+4x-2=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1+\sqrt{2}\\x_2=-1-\sqrt{2}\end{cases}$ Ambas son verdaderas.

c) $\frac{2x}{x-2}+\frac{3x}{x+2}=\frac{6x^2}{x^2-4}\Rightarrow 2x(x+2)+3x(x-2)=6x^2\Rightarrow x^2+2x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 \text{ Verdadera}\\x=-2 \text{ Falsa}\end{cases}$

36. Encuentra la solución de estas ecuaciones racionales.

a) $\frac{1}{1-\frac{1}{x+1}}=\frac{x+1}{x}$ **b)** $\frac{1+\frac{x+1}{x-1}}{2-\frac{x-1}{x+1}}=2$

a) $\frac{1}{1-\frac{1}{x+1}}=\frac{x+1}{x}\Rightarrow\frac{x+1}{x}=\frac{x+1}{x}$; $x\in\mathbb{R}-\{0,-1\}$, que anulan los denominadores de la ecuación, son soluciones.

b) $\frac{1+\frac{x+1}{x-1}}{2-\frac{x-1}{x+1}}=2\Rightarrow\frac{2x}{x-1}:\frac{x+3}{x+1}=2\Rightarrow\frac{2x^2+2x}{x^2+2x-3}=2\Rightarrow 2x^2+2x=2x^2+4x-6\Rightarrow 2x=6\Rightarrow x=3$

37 y 38. Ejercicios resueltos.

39. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\frac{x-1}{\sqrt{x}}=x-\frac{5}{2}$ **c)** $\sqrt{3(16-x)}-\sqrt{2x-5}=1$ **e)** $\sqrt{1-4x}-2\sqrt{3+x}=\sqrt{3+x}$

b) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5$ **d)** $\sqrt{x-7}+\sqrt{2x}=\sqrt{x+1}$

a) $\frac{x-1}{\sqrt{x}}=x-\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{x-1}{\sqrt{x}}=\frac{2x-5}{2}\Rightarrow 2x-2=(2x-5)\sqrt{x}\Rightarrow(2x-2)^2=\left((2x-5)\sqrt{x}\right)^2\Rightarrow 4x^3-24x^2+33x-4=0\Rightarrow$

$\Rightarrow(x-4)(4x^2-8x+1)=0\Rightarrow x=4;\ x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Falsa); $x=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5\Rightarrow\sqrt{x+4}=5-\sqrt{x-1}\Rightarrow\left(\sqrt{x+4}\right)^2=\left(5-\sqrt{x-1}\right)^2\Rightarrow x+4=25+x-1-10\sqrt{x-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow 10\sqrt{x-1}=20\Rightarrow\sqrt{x-1}=2\Rightarrow x-1=4\Rightarrow x=5$

c) $\sqrt{3(16-x)}-\sqrt{2x-5}=1\Rightarrow\sqrt{48-3x}=1+\sqrt{2x-5}\Rightarrow 48-3x=1+2x-5+2\sqrt{2x-5}\Rightarrow 2\sqrt{2x-5}=-5x+52\Rightarrow$

$\Rightarrow 4(2x-5)=25x^2+2704-520x\Rightarrow 25x^2-528x+2724=0\Rightarrow x=\frac{264+2\sqrt{399}}{25}$ (Falsa); $x=\frac{264-2\sqrt{399}}{25}$

d) $\sqrt{x-7}+\sqrt{2x}=\sqrt{x+1}\Rightarrow x-7+2x+2\sqrt{(x-7)2x}=x+1\Rightarrow\sqrt{2x^2-14x}=4-x\Rightarrow 2x^2-14x=16+x^2-8x\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-6x-16=0\Rightarrow x=8$ (Falsa); $x=-2$ (Falsa) La ecuación no tiene solución.

e) $\sqrt{1-4x}-2\sqrt{3+x}=\sqrt{3+x}\Rightarrow\sqrt{1-4x}=3\sqrt{3+x}\Rightarrow 1-4x=9(3+x)\Rightarrow 1-4x=27+9x\Rightarrow 13x=-26\Rightarrow x=-2$

40. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt[3]{x^2-1}+1=x$ **b)** $\dfrac{\sqrt{3x+7}}{\sqrt[3]{x+1}}=\sqrt[3]{x^2+2x+1}$

a) $\sqrt[3]{x^2-1}+1=x \Rightarrow \sqrt[3]{x^2-1}=x-1 \Rightarrow x^2-1=(x-1)^3 \Rightarrow (x-1)(x+1)-(x-1)^3=0 \Rightarrow (x-1)(x+1-x^2+2x-1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(3x-x^2)=0 \Rightarrow x(x-1)(3-x)=0 \Rightarrow x=0;\ x=1;\ x=3$

b) $\dfrac{\sqrt{3x+7}}{\sqrt[3]{x+1}}=\sqrt[3]{x^2+2x+1} \Rightarrow \sqrt{3x+7}=\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x^2+2x+1} \Rightarrow \sqrt{3x+7}=x+1 \Rightarrow 3x+7=x^2+2x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow x=3;\ x=-2$ (Falsa)

41. Calcula el valor de un número tal que si se le suma una unidad y después se extrae la raíz cuadrada se obtiene el doble que al restarle once unidades y extraer la raíz cuadrada.

Número desconocido: x; $\sqrt{x+1}=2\sqrt{x-11} \Rightarrow x+1=4(x-11) \Rightarrow 3x=45 \Rightarrow x=15$

42 a 44. Ejercicios resueltos.

45. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log(2x+3)-\log(x-1)=2\log 2+2\log 3$ **c)** $\log(4-5x)+\log(2x-2)=\log(2x-x^2)+1$

b) $\log\dfrac{2x-2}{x}=2\log(x-1)-\log x$ **d)** $\dfrac{\log(4-x)}{\log(x+2)}=2$

a) $\log(2x+3)-\log(x-1)=2\log 2+2\log 3 \Rightarrow \log\dfrac{2x+3}{x-1}=\log\left(2^2\cdot 3^2\right) \Rightarrow \dfrac{2x+3}{x-1}=36 \Rightarrow 2x+3=36x-36 \Rightarrow x=\dfrac{39}{34}$

b) $\log\dfrac{2x-2}{x}=2\log(x-1)-\log x \Rightarrow \log[2(x-1)]-\log x=2\log(x-1)-\log x \Rightarrow \log 2+\log(x-1)=2\log(x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log(x-1)=\log 2 \Rightarrow x-1=2 \Rightarrow x=3$

c) $\log(4-5x)+\log(2x-2)=\log(2x-x^2)+1 \Rightarrow \log(4-5x)(2x-2)=\log 10(2x-x^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x-8-10x^2+10x=20x-10x^2 \Rightarrow -2x=8 \Rightarrow x=-4$ (Falsa) La ecuación no tiene solución.

d) $\dfrac{\log(4-x)}{\log(x+2)}=2 \Rightarrow \lg(4-x)=2\log(x+2) \Rightarrow \log(4-x)=\log(x+2)^2 \Rightarrow 4-x=x^2+4x+4 \Rightarrow\Rightarrow x=0;\ x=-5$ (Falsa)

46. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_x 3=\ln\sqrt{3}$ **b)** $\log_3 32+\log_{\frac{1}{3}}(6-x)=\log_{\sqrt{3}} x$

a) $\log_x 3=\ln\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{\ln 3}{\ln x}=\dfrac{\ln 3}{2} \Rightarrow \ln x=2 \Rightarrow x=e^2$

b) $\log_3 32+\log_{\frac{1}{3}}(6-x)=\log_{\sqrt{3}} x \Rightarrow \dfrac{\log 32}{\log 3}+\dfrac{\log(6-x)}{\log\left(\dfrac{1}{3}\right)}=\dfrac{\log x}{\log\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{\log 32}{\log 3}-\dfrac{\log(6-x)}{\log 3}=\dfrac{2\log x}{\log 3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 32-\log(6-x)=2\log x \Rightarrow \log\dfrac{32}{6-x}=\log x^2 \Rightarrow x^2=\dfrac{32}{6-x} \Rightarrow 6x^2-x^3=32 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \ \text{(Falsa)} \end{cases}$

47. Halla el número que cumple que al añadir a su logaritmo decimal el valor del logaritmo decimal de 2, el resultado es 1.

Número desconocido: x

$\log x + \log 2 = 1 \Rightarrow \log 2x = \log 10 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$

48. Calcula el valor de un número sabiendo que el doble de su logaritmo decimal es igual a la suma de los logaritmos decimales de 4 y de 9.

Número desconocido: x

$$2\log x = \log 4 + \log 9 \Rightarrow \log x^2 = \log 36 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -6 \ \ \text{(Falsa)} \end{cases}$$

49 a 51. Ejercicios resueltos.

52. Resuelve las ecuaciones exponenciales.

a) $\dfrac{1}{2^x} = 16^{\frac{x(x-1)}{2}}$ **b)** $3{\cdot}2^x = 2{\cdot}3^x$ **c)** $13^{x^2+2x} - \dfrac{1}{13} = 0$ **d)** $2^{2x^2-3x-5} = 16$

a) $\dfrac{1}{2^x} = 16^{\frac{x(x-1)}{2}} \Rightarrow 2^{-x} = 2^{\frac{4x(x-1)}{2}} \Rightarrow -x = 2x(x-1) \Rightarrow 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x(2x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

b) $3{\cdot}2^x = 2{\cdot}3^x \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x = 1$

c) $13^{x^2+2x} - \dfrac{1}{13} = 0 \Rightarrow 13^{x^2+2x} = 13^{-1} \Rightarrow x^2 + 2x = -1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

d) $2^{2x^2-3x-5} = 16 \Rightarrow 2^{2x^2-3x-5} = 2^4 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 4 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

53. Resuelve las ecuaciones.

a) $2^{x+4} - 8^x = 0$ **b)** $3^{2x} - 3^{x-1} = 3^{x+1} - 1$ **c)** $5^{x+3} - 5^{x-1} - 3120 = 0$ **d)** $2\cdot 10^{2x+4} + 3\cdot 10^{x+2} - 5 = 0$

a) $2^{x+4} - 8^x = 0 \Rightarrow 2^{x+4} - 2^{3x} = 0 \Rightarrow 2^{x+4} = 2^{3x} \Rightarrow x + 4 = 3x \Rightarrow x = 2$

b) Aplicando el cambio de variable $z = 3^x$

$$3^{2x} - 3^{x-1} = 3^{x+1} - 1 \Rightarrow \left(3^x\right)^2 - \frac{1}{3}3^x = 3{\cdot}3^x + 1 = 0 \Rightarrow z^2 - \frac{1}{3}z = 3z + 3 = 0 \Rightarrow 3z^2 - 10z + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \\ 3^x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

c) $5^{x+3} - 5^{x-1} - 3120 = 0 \Rightarrow 5^x \cdot 5^3 - \dfrac{5^x}{5} - 3120 = 0 \Rightarrow \cdot(5^3 - \dfrac{1}{5})5^x = 3120 \Rightarrow 5^x = \dfrac{5\cdot 3120}{5^4 - 1} = 25 \Rightarrow x = 2$

d) Aplicando el cambio de variable $z = 10^x$

$$2{\cdot}10^{2x+4} + 3{\cdot}10^{x+2} - 5 = 0 \Rightarrow 2\cdot 10^4\cdot\left(10^x\right)^2 + 3\cdot 10^2\cdot 10^x - 5 = 0 \Rightarrow 20000z^2 + 300z - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4000z^2 + 60z - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0{,}01 \Rightarrow 10^x = 10^{-2} \Rightarrow x = -2 \\ z = -0{,}025 \Rightarrow 10^x = -0.025 \text{ sin solución real} \end{cases}$$

54. Ejercicio interactivo.

55 a 57. Ejercicios resueltos.

58. Estudia el número de soluciones que tienen los siguientes sistemas lineales y, en los casos en los que existan, hállalas.

a) $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+3z=4 \\ 5x-5y+4z=8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ 3x-y+3z=0 \\ 8x+y+z=-1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ x-y+3z=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2y-z=-1 \\ 5x-y-3z=2 \\ x-y+2z=-2 \end{cases}$

a) $$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+3z=4 \\ 5x-5y+4z=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -5y+7z=4 \\ -10y+14z=8 \end{cases} \Rightarrow_{E_3 \to \frac{E_3}{2}-E_2} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -5y+7z=4 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -5y+7z=4 \end{cases}$$

Infinitas soluciones: $\begin{cases} z=t \\ 5y=7z-4=7t-4 \Rightarrow y=\dfrac{7t-4}{5} \\ x=2z-y=2t-\dfrac{7t-4}{5}=\dfrac{3t+4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3t+4}{5} \\ y=\dfrac{7t-4}{5} \\ z=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

b) $$\begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ 3x-y+3z=0 \\ 8x+y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to 5E_2-3E_1 \\ E_3 \to 5E_3-8E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ -11y+21z=0 \\ -11y+21z=-5 \end{cases} \Rightarrow_{E_3 \to E_3-E_2} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ -11y+21z=0 \\ 0=-5 \end{cases}$$

El sistema no tiene solución.

c) $$\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ x-y+3z=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-E_1 \\ E_3 \to E_3-2E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=0 \\ -4y+5z=0 \\ -4y+5z=0 \end{cases} \Rightarrow_{E_3 \to E_3-E_2} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=0 \\ -4y+5z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=0 \\ -4y+5z=0 \end{cases}$$

Infinitas soluciones: $\begin{cases} y=t \\ 5z=4y=4t \Rightarrow z=\dfrac{4t}{5} \\ x=-3y+2z=-3t+\dfrac{8t}{5}=-\dfrac{7t}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{7t}{5} \\ y=t \\ z=\dfrac{4t}{5} \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

d) Intercambiamos la primera ecuación con la y tercera.

$$\begin{cases} x-y+2z=-2 \\ 5x-y-3z=2 \\ 2y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow_{E_2 \to E_2-5E_1} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=-2 \\ 4y-13z=12 \\ 2y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow_{E_3 \to 2E_3-E_2} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=-2 \\ 4y-13z=12 \\ 11z=-14 \end{cases}$$

Una única solución: $\begin{cases} x=-2-\dfrac{25}{22}+\dfrac{28}{11}=-\dfrac{13}{22} \\ y=3-\dfrac{182}{44}=-\dfrac{25}{22} \\ z=-\dfrac{14}{11} \end{cases}$

59. Resuelve y clasifica en función del número de soluciones los siguientes sistemas lineales.

a) $\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 3x-3y+z=-14 \\ 5x-y-2z=-15 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ 3x-3y-2z=-1 \\ 3x-3y+2z=5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+y-z=11 \\ 2x-2y-z=8 \\ x+y-z=7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ 5x-y-z=13 \\ 4x-2y-3z=14 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 3x-3y+z=-14 \\ 5x-y-2z=-15 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-3E_1 \\ E_3 \to E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ -9y+7z=-20 \\ -11y+8z=-25 \end{cases} \Rightarrow_{E_3 \to 9E_3-11E_2} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ -9y+7z=-20 \\ -5z=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

b) $\begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ 3x-3y-2z=-1 \\ 3x-3y+2z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to 2E_2-3E_1 \\ E_3 \to 2E_3-3E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ -18y-z=-2 \\ -18y+7z=10 \end{cases} \Rightarrow_{E_3 \to E_3-E_2} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ -18y-z=-2 \\ 8z=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{25}{36} \\ y=\dfrac{1}{36} \\ z=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

c) $\begin{cases} 2x+y-z=11 \\ 2x-2y-z=8 \\ x+y-z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-E_1 \\ E_3 \to 2E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z=11 \\ -3y=-3 \\ y-z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

d) $\begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ 5x-y-z=13 \\ 4x-2y-3z=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to 4E_2-5E_1 \\ E_3 \to E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ -9y+21z=27 \\ -3y+2z=9 \end{cases} \Rightarrow_{E_3 \to 3E_3-E_2} \Rightarrow \begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ -9y+21z=27 \\ -15z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=0 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

60 a 62. Ejercicios resueltos.

63. Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 2x+3y^2=22 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+5y=-8 \\ xy-3x=-5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y=0 \\ xy=1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$

Despejaremos en una de las ecuaciones y sustituiremos en la otra:

a) $y=8-2x \Rightarrow 2x+3(8-2x)^2=22 \Rightarrow 2x+192+12x^2-96x=22 \Rightarrow 6x^2-47x+85=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5, \quad y=-2 \\ x=\dfrac{17}{6}, \quad y=\dfrac{7}{3} \end{cases}$

b) $y=\dfrac{-8-2x}{5} \Rightarrow x\cdot\left(\dfrac{-8-2x}{5}\right)-3x=-5 \Rightarrow -8x-2x^2-15x=-25 \Rightarrow 2x^2+23x-25=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1, \quad y=-2 \\ x=-\dfrac{25}{2}, \quad y=\dfrac{17}{5} \end{cases}$

c) $y=-x \Rightarrow -x^2=1 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow$ No tiene soluciones reales.

d) $y=2x-3 \Rightarrow x^2-(2x-3)^2=3 \Rightarrow x^2-4x^2-9+12x=3 \Rightarrow 3x^2-12x+12=0 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=2,\ y=1$

64. Halla la solución de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x+y=11 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{y+1}=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} xy=-3 \\ x^2+2y^2=19 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x^2+3y^2=32 \\ -3x^2+4y^2=-48 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^2-2xy=16-y^2 \\ x^2-y^2=72 \end{cases}$

a) $x=11-y \Rightarrow \dfrac{1}{11-y}+\dfrac{6}{y+1}=1 \Rightarrow y+1+66-6y=11y+11-y^2-y \Rightarrow y^2-15y+56=0 \Rightarrow \begin{cases} y=8,\ \ x=3 \\ y=7,\ \ x=4 \end{cases}$

b) $y=-\dfrac{3}{x} \Rightarrow x^2+\dfrac{18}{x^2}=19 \Rightarrow x^4-19x^2+18=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} z=x^2 \\ z^2=x^4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z^2-19z+18=0 \Rightarrow \begin{cases} z=18 \Rightarrow \begin{cases} x=3\sqrt{2},\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x=-3\sqrt{2},\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ z=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1,\ y=-3 \\ x=-1,\ y=3 \end{cases} \end{cases}$

c) Multiplicando la primera ecuación por 3, la segunda por 2 y sumando obtenemos:

$17y^2=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4,\ \ y=0 \\ x=-4,\ \ y=0 \end{cases}$

d) $x^2-2xy=16-y^2 \Rightarrow x^2-2xy+y^2=16 \Rightarrow (x-y)^2=16 \Rightarrow x-y=\pm 4$

Distinguimos, por tanto, dos casos:

Caso 1: $x-y=4 \Rightarrow x=y+4 \Rightarrow (y+4)^2-y^2=72 \Rightarrow y^2+16+8y-y^2=72 \Rightarrow 8y=56 \Rightarrow y=7,\ x=11$

Caso 2: $x-y=-4 \Rightarrow x=y-4 \Rightarrow (y-4)^2-y^2=72 \Rightarrow y^2+16-8y-y^2=72 \Rightarrow -8y=56 \Rightarrow y=-7,\ x=-11$

65 a 67. Ejercicios resueltos.

68. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales.

a) $\begin{cases} 2^x+5^y=9 \\ 2^{x+2}+5^{y+1}=41 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2^x-2^y=1016 \\ 2^{x-y}=128 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3^x+7^y=16 \\ 3^{x-1}-7^{y+2}=-340 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \dfrac{1}{2^x}+\dfrac{3}{2^y}=\dfrac{x+y}{8} \\ x+y=5 \end{cases}$

a) $u=2^x,\ v=5^y \Rightarrow \begin{cases} 2^x+5^y=9 \\ 2^{x+2}+5^{y+1}=41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x+5^y=9 \\ 4\cdot 2^x+5\cdot 5^y=41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u+v=9 \\ 4u+5v=41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=4 \Rightarrow 2^x=4 \Rightarrow x=2 \\ v=5 \Rightarrow 5^y=5 \Rightarrow y=1 \end{cases}$

b) $2^{x-y}=128 \Rightarrow 2^{x-y}=2^7 \Rightarrow x-y=7 \Rightarrow x=y+7$

$2^x-2^y=1016 \Rightarrow 2^{7+y}-2^y=1016 \Rightarrow 128\cdot 2^y-2^y=1016 \Rightarrow 127\cdot 2^y=1016 \Rightarrow 2^y=8 \Rightarrow y=3,\ x=10$

c) Hacemos el cambio: $u=3^x,\ v=7^y$

$\begin{cases} 3^x+7^y=16 \\ 3^{x-1}-7^{y+2}=-340 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x+7^y=16 \\ \dfrac{3^x}{3}-49\cdot 7^y=-340 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u+v=16 \\ u-147v=-1020 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=9 \Rightarrow 3^x=9 \Rightarrow x=2 \\ v=7 \Rightarrow 7^y=7 \Rightarrow y=1 \end{cases}$

d) $x+y=5 \Rightarrow y=5-x$

$\dfrac{1}{2^x}+\dfrac{3}{2^y}=\dfrac{x+y}{8} \Rightarrow \dfrac{1}{2^x}+\dfrac{3}{2^{5-x}}=\dfrac{5}{8} \Rightarrow \dfrac{1}{2^x}+\dfrac{3}{32}2^x=\dfrac{5}{8} \Rightarrow 32+3\cdot\left(2^x\right)^2=20\cdot 2^x$

Aplicando el cambio de variable $z=2^x$ obtenemos:

$3z^2-20z+32=0 \Rightarrow \begin{cases} z=4 \Rightarrow 2^x=4 \Rightarrow x=2,\ y=3 \\ z=\dfrac{8}{3} \Rightarrow 2^x=\dfrac{8}{3} \Rightarrow x=\log_2\dfrac{8}{3}=3-\log_2 3,\ y=2+\log_2 3 \end{cases}$

69. Halla las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas.

a) $\begin{cases}\log x+3\log y=5\\ \log x-\log y=3\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}\log_3 x=7-\log_3 y\\ x-2y=27\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}3x+2y=64\\ \log x-\log y=1\end{cases}$ **d)** $\begin{cases}\log x^2-2\log y=6\\ 2\log x+\log y^2=2\end{cases}$

a) Restando las ecuaciones se obtiene: $4\log y=2\Rightarrow \log y=\frac{1}{2}\Rightarrow y=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$

Sustituyendo en la segunda ecuación: $\log x-\frac{1}{2}=3\Rightarrow \log x=\frac{7}{2}\Rightarrow x=10^{\frac{7}{2}}=10^3\sqrt{10}=1000\sqrt{10}$

b) $\begin{cases}\log_3 x=7-\log_3 y\\ x-2y=27\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_3(xy)=7\\ x=2y+27\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\cdot y=2187\\ x=2y+27\end{cases}\Rightarrow 2y^2+27y-2187=0\Rightarrow\Rightarrow\begin{cases}y=27,\ x=81\\ y=-40{,}5 \text{ No válida}\end{cases}$

c) $\log x-\log y=1\Rightarrow \log(\frac{x}{y})=1\Rightarrow \frac{x}{y}=10\Rightarrow x=10y$

Sustituyendo en la segunda ecuación: $30y+2y=64\Rightarrow 32y=64\Rightarrow y=2,\ x=20$

d) $\begin{cases}\log x^2-2\log y=6\\ 2\log x+\log y^2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x^2}{y^2}=10^6\\ x^2y^2=10^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=10^6y^2\\ x^2y^2=10^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=10^6y^2\\ 10^6y^4=10^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=10^6y^2\\ y=\frac{1}{10}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=100\\ y=\frac{1}{10}\end{cases}$

70. Comprueba si los números reales indicados pertenecen a la solución de las inecuaciones correspondientes.

a) $x=-2$ de la inecuación $x^3+x^2+x\le 6$

b) $x=\frac{1}{e}$ de la inecuación $x+\ln x\ge 0$

c) $x=-0{,}5$ de la inecuación $2^x+x-2<3^x$

a) Sí forma parte de la solución de la inecuación, ya que $(-2)^3+(-2)^2-2=-8+4-2=-6\le 6$.

b) No forma parte de la solución de la inecuación, ya que $\frac{1}{e}+\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1=\frac{1-e}{e}<0$.

c) Sí forma parte de la solución de la inecuación, ya que $2^{-0{,}5}-0{,}5-2-3^{-0{,}5}=\frac{1}{\sqrt{2}}-2{,}5-\frac{1}{\sqrt{3}}<0$

71. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-2}{8}\le\frac{x}{2}$

b) $2x-3-\frac{x}{2}>x+\frac{3x+1}{6}$

c) $x+2(x+1)+3(x+2)<\frac{x+38}{2}$

d) $\frac{x^2-1}{2}-\frac{3x-2}{3}\le\frac{(x+1)^2}{6}$

a) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-2}{8}\le\frac{x}{2}\Rightarrow 4x-12-x+2\le 4x\Rightarrow -x\le 10\Rightarrow x\ge -10\Rightarrow$ Solución: $x\in[-10,+\infty)$

b) $2x-3-\frac{x}{2}>x+\frac{3x+1}{6}\Rightarrow 12x-18-3x>6x+3x+1\Rightarrow 0>19\Rightarrow$ La inecuación no tiene solución.

c) $x+2(x+1)+3(x+2)<\frac{x+38}{2}\Rightarrow 2x+4x+4+6x+12<x+38\Rightarrow 11x<22\Rightarrow x<2\Rightarrow$ Solución: $x\in(-\infty,2)$

d) $\frac{x^2-1}{2}-\frac{3x-2}{3}\le\frac{(x+1)^2}{6}\Rightarrow 3x^2-3-6x+4\le x^2+2x+1\Rightarrow 2x^2-8x\le 0\Rightarrow 2x(x-4)\le 0$

Solución: $x\in[0,4]$

	$-\infty$ a 0	0 a 4	4 a $+\infty$
x	–	+	+
$x-4$	–	–	+
Polinomio	+	–	+

72. Halla la solución de las siguientes inecuaciones polinómicas.

a) $-2x^3+3x>0$ **c)** $x^3-4x>0$ **e)** $3x(2x-1)+x^2\geq 5x-1$ **g)** $x^4-1>0$

b) $3x^2+x-24\geq 0$ **d)** $x^3+x^2-x-1\leq 0$ **f)** $-x^3-2x^2-x\leq 0$ **h)** $(x-1)(x+4)<-6$

a) $-2x^3+3x>0\Rightarrow x(-2x^2+3)>0\Rightarrow$

$\Rightarrow x\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}x\right)>0$

$-\infty \quad -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad 0 \quad \sqrt{\frac{3}{2}} \quad +\infty$

$x+2$	−	−	+	+
x	−	+	+	+
$x-2$	+	+	+	−
Polinomio	+	−	+	−

Solución: $x\in\left(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\cup\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

e) $3x(2x-1)+x^2\geq 5x-1\Rightarrow (x-1)(7x-1)\geq 0$

$-\infty \quad \frac{1}{7} \quad 1 \quad +\infty$

$7x-1$	−	+	+
$x-1$	−	−	+
Polinomio	+	−	+

Solución: $x\in\left(-\infty,\frac{1}{7}\right]\cup[1,+\infty)$

b) $3x^2+x-24\geq 0\Rightarrow (x+3)(3x-8)\geq 0$

$-\infty \quad -3 \quad \frac{8}{3} \quad +\infty$

$x+3$	−	+	+
$3x-8$	−	−	+
Polinomio	+	−	+

Solución: $x\in(-\infty,-3]\cup\left[\frac{8}{3},+\infty\right)$

f) $-x^3-2x^2-x\leq 0\Rightarrow -x(x+1)^2\leq 0$

$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad +\infty$

$(x+1)^2$	+	+	+
$-x$	+	+	−
Polinomio	+	+	−

Solución: $x\in\{-1\}\cup[0,+\infty)$

c) $x^3-4x>0\Rightarrow x(x-2)(x+2)>0$

$-\infty \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad +\infty$

$x+2$	−	+	+	+
x	−	−	+	+
$x-2$	−	−	−	+
Polinomio	−	+	−	+

Solución: $x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)$

g) $x^4-1>0\Rightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1)>0$

$-\infty \quad -1 \quad 1 \quad +\infty$

$x+1$	−	+	+
$x-1$	−	−	+
x^2+1	+	+	+
Polinomio	+	−	+

Solución: $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

d) $x^3+x^2-x-1\leq 0\Rightarrow (x-1)(x+1)^2\leq 0$

$-\infty \quad -1 \quad 1 \quad +\infty$

$(x+1)^2$	+	+	+
$x-1$	−	−	+
Polinomio	−	−	+

Solución: $x\in(-\infty,1]$

h) $(x-1)(x+4)<-6\Rightarrow (x+1)(x+2)<0$

$-\infty \quad -2 \quad -1 \quad +\infty$

$x+2$	−	+	+
$x+1$	−	−	+
Polinomio	+	−	+

Solución: $x\in(-2,-1)$

73. Resuelve las inecuaciones racionales siguientes.

a) $\dfrac{5x-2}{2x+1} \geq 0$

b) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \geq 0$

c) $\dfrac{4x-5}{4x^2-x-5} < 0$

d) $\dfrac{x^3}{x^2-9} \geq 0$

e) $\dfrac{x^2+4x-5}{x^3-x} \geq 0$

f) $\dfrac{2x+3}{x^3+1} \geq 0$

a) $\dfrac{5x-2}{2x+1} \geq 0$

$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$2x+1$	–	+	+
$5x-2$	–	–	+
Fracción	+	–	+

Solución: $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left[\dfrac{2}{5}, +\infty\right)$

d) $\dfrac{x^3}{x^2-9} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x^3}{(x-3)(x+3)} \geq 0$

$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$x+3$	–	+	+	+
x^3	–	–	+	+
$x-3$	–	–	–	+
Fracción	–	+	–	+

Solución: $x \in (-3, 0] \cup (3, +\infty)$

b) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \geq 0$

$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$x+2$	–	+	+	+	+
$x+1$	–	–	+	+	+
$x-1$	–	–	–	+	+
$x-2$	–	–	–	–	+
Fracción	+	–	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, 1) \cup [2, +\infty)$

e) $\dfrac{x^2+4x-5}{x^3-x} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{(x+5)(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x+5}{x(x+1)} \geq 0$

$-\infty$	-5	-1	0	$+\infty$
$x+5$	–	+	+	+
$x+1$	–	–	+	+
x	–	–	–	+
Fracción	–	+	–	+

Solución: $x \in [-5, -1) \cup (0, +\infty) - \{1\}$

Hay que excluir el valor $x = 1$ de la solución porque es una raíz del denominador y la expresión no está definida para él.

c) $\dfrac{4x-5}{4x^2-x-5} < 0 \Rightarrow \dfrac{4x-5}{(4x-5)(x+1)} < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x+1} < 0$

Observa que $4x-5$ no se puede anular, por lo que se puede simplificar y la solución es $x \in (-\infty, -1)$.

f) $\dfrac{2x+3}{x^3+1} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{2x+3}{(x+1)(x^2-x+1)} \geq 0$

$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	$+\infty$
$2x+3$	–	+	+
$x+1$	–	–	+
x^2-x+1	+	+	+
Fracción	+	–	+

Solución: $x \in \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right] \cup (-1, +\infty)$

74. Ejercicio interactivo.

75 y 76. Ejercicios resueltos.

77. Resuelve los sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x+1 < x+2 \\ 3x-1 \le 4x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-4 > x \\ x > 2x-1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2+2x-3 \ge 0 \\ 2(x-3) > -6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+2} > 0 \\ x^2 \ge 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x+1 < x+2 \\ 3x-1 \le 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \ge -1 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x \in [-1, 1)$

b) $\begin{cases} 3x-4 > x \\ x > 2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x > 4 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow$ Sin solución

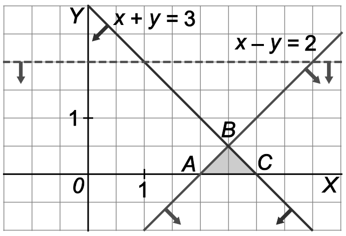
c) $\begin{cases} x^2+2x-3 \ge 0 \\ 2(x-3) > -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)\cdot(x+3) \ge 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x \in [1, +\infty)$

d) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+2} > 0 \\ x^2 \ge 1 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

78. Resuelve los sistemas de inecuaciones:

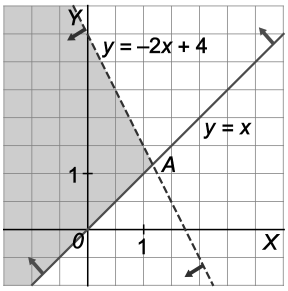
a) $\begin{cases} 0 \le y < 2 \\ x+y \le 3 \\ x-y \ge 2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y < -2x+4 \\ y \ge x \end{cases}$

a)



Vértices $A(2, 0)$ $B(2{,}5 ; 0{,}5)$ $C(3, 0)$

b)



Vértices: $A\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

79 a 91. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Polinomios

92. Simplifica las siguientes expresiones polinómicas.

a) $2(x-2)^2-3(3x+2)-2(3x-2)(3x+2)$

b) $(3x+2)^2+2(2x-3)^2-(2x-5)(x-5)$

c) $(2x^2-2x-13)(3x^2-2x)-3x$

d) $(2x^2-3x+2)(-3x^2+x+1)+(6x-10)x^3$

e) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{5}\right)+\frac{6}{25}$

f) $\left(x^2+4\right)\left(x^2-4\right)(x-2)+2x(x^3-10)x$

g) $(x^3+2x^2+3x+4)(5x-2)$

a) $2(x-2)^2-3(3x+2)-2(3x-2)(3x+2)=2x^2-8x+8-9x-6-18x^2+8=-16x^2-17x+10$

b) $(3x+2)^2+2(2x-3)^2-(2x-5)(x-5)=9x^2+12x+4+8x^2-24x+18-2x^2+10x+5x-25=15x^2+3x-3$

c) $(2x^2-2x-13)(3x^2-2x)-3x=6x^4-4x^3-6x^3+4x^2-39x^2+26x-3x=6x^4-10x^3-35x^2+23x$

d) $(2x^2-3x+2)(-3x^2+x+1)+(6x-10)x^3=-6x^4+2x^3+2x^2+9x^3-3x^2-3x-6x^2+2x+2+6x^4-10x^3=$

$=x^3-7x^2-x+2$

e) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{5}\right)+\frac{6}{25}=x^3+\frac{4}{15}x-\frac{9}{10}x^2-\frac{6}{25}+\frac{6}{25}=x^3-\frac{9}{10}x^2+\frac{4}{15}x$

f) $\left(x^2+4\right)\left(x^2-4\right)(x-2)+2x(x^3-10)x=(x^4-16)(x-2)+2x^5-20x^2=x^5-2x^4-16x+32+2x^5-20x^2=$

$=3x^5-2x^4-20x^2-16x+32$

g) $(x^3+2x^2+3x+4)(5x-2)=5x^4-2x^3+10x^3-4x^2+15x^2-6x+20x-8=5x^4+8x^3+11x^2+14x-8$

93. Demuestra la igualdad algebraica:

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

$(x+y+x)^2=(x+y+z)(x+y+z)=x^2+xy+xz+yx+y^2+yz+zx+zy+z^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

94. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios.

a) $\left(6x^4+7x^3-5x^2-6x-6\right):\left(3x^2+2x+1\right)$

b) $\left(6x^4+7x^3-x^2+11x-8\right):\left(3x^2+x-2\right)$

c) $\left(6x^5-10x^4-15x^3-7x^2+3\right):\left(4x^2-4x-4\right)$

a) Cociente: $2x^2+x-3$

Resto: $-x-3$

b) Cociente: $2x^2+\frac{5}{3}x+\frac{4}{9}$

Resto: $\frac{125x}{9}-\frac{64}{9}$

c) Cociente: $\frac{3}{2}x^3-x^2-\frac{13}{4}x-6$

Resto: $-37x-21$

95. Aplica la regla de Ruffini para resolver las siguientes divisiones.

a) $\left(-3x^3+2x^2+x-3\right):\left(x+\frac{1}{2}\right)$

b) $\left(2x^4+2x^3+2x^2-2\right):(-x+3)$

c) $\left(x^5+2x^3-2x-1\right):(2x+4)$

d) $\left(x^5+3x^4-3x^3-x^2-4x+2\right):(2x+4)$

e) $\left(-2x^4-x^3-2x^2+x+1\right):(2x-3)$

a) Cociente: $-3x^2+\frac{7}{2}x-\frac{3}{4}$

Resto: $-\frac{21}{8}$

b) Cociente: $-2x^3-8x^2-26x-78$

Resto: 232

c) Cociente: $\frac{1}{2}x^4-x^3+3x^2-6x+11$

Resto: -45

d) Cociente: $\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{9}{2}x-11$

Resto: 46

e) Cociente: $-x^3-2x^2-4x-\frac{11}{2}$

Resto: $-\frac{31}{2}$

96. Determina, si existen, las raíces enteras de cada uno de los siguientes polinomios y factorízalos.

a) $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

b) $P(x)=x^3+x^2-5x+3$

c) $P(x)=2x^4-x^3-5x^2+x+3$

d) $P(x)=4x^3-4x^2-11x+6$

e) $P(x)=x^4-4x^2$

f) $P(x)=6x^5+11x^4+3x^3-3x^2-x$

g) $P(x)=x^6-4x^4-x^2+4$

h) $P(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{16}$

a) $P(x)=x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x+2)(x-3)$. Las raíces enteras son $x=1$, $x=-2$ y $x=3$.

b) $P(x)=x^3+x^2-5x+3=(x-1)^2(x+3)$. Las raíces enteras son $x=1$ y $x=-3$.

c) $P(x)=2x^4-x^3-5x^2+x+3=2(x-1)(x+1)^2\left(x-\frac{3}{2}\right)$. Las raíces enteras son $x=1$ y $x=-1$.

d) $P(x)=4x^3-4x^2-11x+6=4(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$. La única raíz entera es $x=2$.

e) $P(x)=x^4-4x^2=x^2(x+2)(x-2)$. Las raíces enteras son $x=0$, $x=-2$ y $x=2$.

f) $P(x)=6x^5+11x^4+3x^3-3x^2-x=6x(x+1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$. Las raíces enteras son $x=0$ y $x=-1$.

g) $P(x)=x^6-4x^4-x^2+4=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x^2+1)$. Las raíces enteras son $x=1$, $x=-1$, $x=2$ y $x=-2$.

h) $P(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{16}=\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+2\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}\right)^2$. No tiene raíces enteras.

97. En cada caso, calcula el m.c.d. y el m.c.m de los polinomios dados.

a) $P(x)=x^2+x-2$ y $Q(x)=x^2+2x-3$

b) $P(x)=2x^2-2$ y $Q(x)=4x-4$

c) $P(x)=x-1$, $Q(x)=2x+2$ y $R(x)=3x^2-3$

d) $P(x)=x^2(x-2)$, $Q(x)=x\cdot\left(x^2-4\right)$ y $R(x)=x^3-2x^2$

a) $P(x)=(x-1)(x+2)\quad Q(x)=(x-1)(x+3)$

$\text{m.c.d.}\left[P(x),\,Q(x)\right]=x-1\qquad \text{m.c.m.}\left[P(x),\,Q(x)\right]=(x-1)(x+2)(x+3)=x^3+4x^2+x-6$

b) $P(x)=2(x-1)(x+1)\quad Q(x)=4(x-1)$

$\text{m.c.d.}\left[P(x),\,Q(x)\right]=2(x-1)=2x-2\qquad \text{m.c.m.}\left[P(x),\,Q(x)\right]=4(x-1)(x+1)=4x^2-4$

c) $P(x)=x-1\quad Q(x)=2(x+1)\quad R(x)=3(x-1)(x+1)$

$\text{m.c.d.}\left[P(x),\,Q(x),\,R(x)\right]=1\qquad \text{m.c.m.}\left[P(x),\,Q(x),\,R(x)\right]=6(x-1)(x+1)=6x^2-6$

d) $P(x)=x^2(x-2)\quad Q(x)=x(x-2)(x+2)\quad R(x)=x^2(x-2)$

$\text{m.c.d.}\left[P(x),\,Q(x),\,R(x)\right]=x(x-2)=x^2-2x\qquad \text{m.c.m.}\left[P(x),\,Q(x),\,R(x)\right]=x^2(x-2)(x+2)=x^4-4x^2$

98. Calcula el valor de k para que $x^3-(3k+2)x^2-3$ entre $x+3$:

a) Sea exacta.

b) Tenga resto 15.

a) Por el teorema del resto se tiene: $0=(-3)^3-(3k+2)(-3)^2-3\Rightarrow 0=-27-27k-18-3\Rightarrow k=-\frac{16}{9}$

b) Por el teorema del resto se tiene: $15=(-3)^3-(3k+2)(-3)^2-3\Rightarrow 15=-27-27k-18-3\Rightarrow k=-\frac{7}{3}$

Números combinatorios. Binomio de Newton

99. Calcula las siguientes operaciones.

a) $\binom{252}{250}$

b) $\binom{25}{3}+\binom{25}{4}$

c) $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$

d) $\binom{n+2}{2}+\binom{n+2}{n-1}$

a) $\binom{252}{250}=\binom{252}{2}=\frac{252\cdot 251}{2\cdot 1}=31626$

b) $\binom{25}{3}+\binom{25}{4}=\binom{26}{4}=\frac{26\cdot 25\cdot 24\cdot 23}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=14\,950$

c) $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=1+4+6+4=15$

d) $\binom{n+2}{2}+\binom{n+2}{n-1}=\binom{n+2}{2}+\binom{n+2}{3}=\binom{n+3}{3}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}=\frac{n^3+6n^2+11n+6}{6}$

100. Simplifica las siguientes expresiones y calcula el resultado.

a) $\dfrac{6!}{5!}+\dfrac{8!}{6!}$ **b)** $\dfrac{n!}{(n-1)!}+\dfrac{(n+2)!}{n!}$ **c)** $\dfrac{\binom{n+3}{n}+\binom{n+2}{n}}{\frac{n+6}{6}}$ **d)** $\dfrac{2^{n-3}(n+2)!}{2^{n-1}\binom{n+2}{2}}$

a) $\dfrac{6!}{5!}+\dfrac{8!}{6!}=6+8\cdot 7=6+56=62$

b) $\dfrac{n!}{(n-1)!}+\dfrac{(n+2)!}{n!}=n+(n+2)(n+1)=n+n^2+3n+2=n^2+4n+2$

c) $\dfrac{\binom{n+3}{n}+\binom{n+2}{n}}{\frac{n+6}{6}}=\dfrac{\binom{n+3}{3}+\binom{n+2}{2}}{\frac{n+6}{6}}=\dfrac{\frac{n^3+6n^2+11n+6}{6}+\frac{n^2+3n+2}{2}}{\frac{n+6}{6}}=\dfrac{n^3+6n^2+11n+6+3n^2+9n+6}{n+6}=$

$=\dfrac{n^3+9n^2+20n+12}{n+6}=\dfrac{(n+1)(n+2)(n+6)}{n+6}=(n+1)(n+2)=n^2+3n+2$

d) $\dfrac{2^{n-3}(n+2)!}{2^{n-1}\binom{n+2}{2}}=\dfrac{2^{n-3-n+1}(n+2)!}{\frac{(n+2)!}{2!n!}}=2^{-2}\cdot 2\cdot n!=\dfrac{n!}{2}$

101. Desarrolla los binomios siguientes.

a) $(2+x)^4$ **c)** $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x^2}\right)^5$ **e)** $\left(1+2\sqrt{2}\right)^2$ **g)** $\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)^4$

b) $\left(2-\dfrac{x}{3}\right)^3$ **d)** $\left(2x^2-\dfrac{3}{x}\right)^6$ **f)** $\left(2-3\sqrt{3}\right)^3$ **h)** $\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^3$

a) $(2+x)^4=\binom{4}{0}2^4+\binom{4}{1}2^3x+\binom{4}{2}2^2x^2+\binom{4}{3}2x^3+\binom{4}{4}x^4=16+32x+24x^2+8x^3+x^4$

b) $\left(2-\dfrac{x}{3}\right)^3=\binom{3}{0}2^3-\binom{3}{1}2^2\cdot\dfrac{x}{3}+\binom{3}{2}2\left(\dfrac{x}{3}\right)^2-\binom{3}{3}\left(\dfrac{x}{3}\right)^3=8-4x+\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{1}{27}x^3$

c) $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x^2}\right)^5=\binom{5}{0}\left(\dfrac{x}{2}\right)^5+\binom{5}{1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^4\cdot\dfrac{2}{x^2}+\binom{5}{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^2+\binom{5}{3}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^3+\binom{5}{4}\cdot\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^4+\binom{5}{5}\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^5=$

$=\dfrac{x^5}{32}+5\cdot\dfrac{x^4}{16}\cdot\dfrac{2}{x^2}+10\cdot\dfrac{x^3}{8}\cdot\dfrac{4}{x^4}+10\cdot\dfrac{x^2}{4}\cdot\dfrac{8}{x^6}+5\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{16}{x^8}+\dfrac{32}{x^{10}}=\dfrac{x^5}{32}+\dfrac{5x^2}{8}+\dfrac{5}{x}+\dfrac{20}{x^4}+\dfrac{40}{x^7}+\dfrac{32}{x^{10}}$

d) $\left(2x^2-\dfrac{3}{x}\right)^6=\binom{6}{0}(2x^2)^6-\binom{6}{1}(2x^2)^5\cdot\dfrac{3}{x}+\binom{6}{2}(2x^2)^4\left(\dfrac{3}{x}\right)^2-\binom{6}{3}(2x^2)^3\left(\dfrac{3}{x}\right)^3+\binom{6}{4}(2x^2)^2\left(\dfrac{3}{x}\right)^4-\binom{6}{5}2x^2\left(\dfrac{3}{x}\right)^5+\binom{6}{6}\left(\dfrac{3}{x}\right)^6=$

$=64x^{12}-576x^9+2160x^6-4320x^3+4860-\dfrac{2916}{x^3}+\dfrac{729}{x^6}$

e) $\left(1+2\sqrt{2}\right)^2=1+4\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2=9+4\sqrt{2}$

f) $\left(2-3\sqrt{3}\right)^3=8-3\cdot 2^2\cdot 3\sqrt{3}+3\cdot 2\cdot(3\sqrt{3})^2-(3\sqrt{3})^3=8-36\sqrt{3}+162-81\sqrt{3}=170-117\sqrt{3}$

g) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)^4=\left(\dfrac{2+\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^4=\left(\dfrac{4}{\sqrt{2}}\right)^4=\dfrac{256}{4}=64$

h) $\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^3=\left(5\sqrt{2}\right)^3-3\left(5\sqrt{2}\right)^2 2\sqrt{3}+35\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^3=250\sqrt{2}-300\sqrt{3}+180\sqrt{2}-24\sqrt{3}=$

$=430\sqrt{2}-324\sqrt{3}$

Fracciones algebraicas

102. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-x^2-8x+12}$ **c)** $\dfrac{x^4-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$ **e)** $\dfrac{xy-3y+x-3}{xy-3y}$

b) $\dfrac{-2x^4+5x^3-5x+2}{2x^4+7x^3+3x^2-8x-4}$ **d)** $\dfrac{x^3-y^3}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)}$ **f)** $\dfrac{x^2y+y^2x+x^2-y^2}{x^2y-xy^2+x^2y^2}$

a) $\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-x^2-8x+12}=\dfrac{(x-1)(x-2)^2}{(x+3)(x-2)^2}=\dfrac{x-1}{x+3}$

b) $\dfrac{-2x^4+5x^3-5x+2}{2x^4+7x^3+3x^2-8x-4}=\dfrac{-(x+1)(x-1)(x-2)(2x-1)}{(x-1)(x+2)^2(2x+1)}=-\dfrac{(x+1)(x-2)(2x-1)}{(x+2)^2(2x+1)}=\dfrac{-2x^3+3x^2+3x-2}{2x^3+9x^2+12x+4}$

c) $\dfrac{x^4-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}=\dfrac{x+1}{x-1}$

d) $\dfrac{x^3-y^3}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)}=\dfrac{(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}{(x-y)(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)}=\dfrac{1}{x+y}$

e) $\dfrac{xy-3y+x-3}{xy-3y}=\dfrac{x(y+1)-3(y+1)}{y(x-3)}=\dfrac{(y+1)(x-3)}{y(x-3)}=\dfrac{y+1}{y}$

f) $\dfrac{x^2y+y^2x+x^2-y^2}{x^2y-xy^2+x^2y^2}=\dfrac{xy(x+y)+(x-y)(x+y)}{xy(x-y+xy)}=\dfrac{(xy+x-y)(x+y)}{xy(x-y+xy)}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}$

103. Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones algebraicas y simplifica los resultados al máximo.

a) $\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x^2}{x+1}$ **c)** $\dfrac{2x^2-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-3}+\dfrac{12x}{9-x^2}$

b) $\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{2x-1}{x+5}-\dfrac{50}{x^2-25}$ **d)** $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{3x-10}{x^2-6x+8}-\dfrac{2x-7}{x-4}$

a) $\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}+\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{x^2+1+x^3+x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^3+2x^2+1}{(x+1)^2}$

b) $\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{2x-1}{x+5}-\dfrac{50}{x^2-25}=\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{2x-1}{x+5}-\dfrac{50}{(x-5)(x+5)}=\dfrac{x(x+5)-(2x-1)(x-5)-50}{(x-5)(x+5)}=\dfrac{-x^2+16x-55}{(x-5)(x+5)}=$

$=\dfrac{-(x-11)(x-5)}{(x-5)(x+5)}=\dfrac{11-x}{x+5}$

c) $\dfrac{2x^2-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-3}+\dfrac{12x}{9-x^2}=\dfrac{2x^2-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-3}-\dfrac{12x}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{(2x^2-x)(x-3)+2x(x+3)-12x}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{2x^3-5x^2-3x}{(x+3)(x-3)}=$

$=\dfrac{x(x-3)(2x+1)}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{2x^2+x}{x+3}$

d) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{3x-10}{x^2-6x+8}-\dfrac{2x-7}{x-4}=\dfrac{(x-4)(x-2)+(3x-10)(x-3)-(2x-7)(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-2)}=\dfrac{-2x^3+21x^2-72x+80}{(x-3)(x-4)(x-2)}=$

$=\dfrac{(x-4)^2(-2x+5)}{(x-3)(x-4)(x-2)}=\dfrac{-2x^2+13x-20}{x^2-5x+6}$

104. Realiza los siguientes productos y cocientes de fracciones algebraicas y simplifica al máximo los resultados.

a) $\frac{x^2-1}{x+3}\cdot\frac{x^2-4}{x-1}\cdot\frac{x^2-9}{x+2}$

b) $\frac{3x^2y}{x-y}\cdot\frac{x^2-y^2}{6xy^2(x+y)}$

c) $\frac{x^3-x}{2x-4}:\frac{4x+4}{3x-6}$

d) $\frac{1}{x-y}:\frac{1}{x^2+y^2-2xy}$

a) $\frac{x^2-1}{x+3}\cdot\frac{x^2-4}{x-1}\cdot\frac{x^2-9}{x+2}=\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-1)(x+2)}=(x+1)(x-2)(x-3)=x^3-4x^2+x+6$

b) $\frac{3x^2y}{x-y}\cdot\frac{x^2-y^2}{6xy^2(x+y)}=\frac{3x^2y(x-y)(x+y)}{(x-y)6xy^2(x+y)}=\frac{x}{2y}$

c) $\frac{x^3-x}{2x-4}:\frac{4x+4}{3x-6}=\frac{x(x-1)(x+1)3(x-2)}{2(x-2)4(x+1)}=\frac{3x(x-1)}{8}=\frac{3x^2-3x}{8}$

d) $\frac{1}{x-y}:\frac{1}{x^2+y^2-2xy}=\frac{(x-y)^2}{x-y}=x-y$

Ecuaciones polinómicas

105. Resuelve estas ecuaciones de primer grado.

a) $2x-2(3x-1)+4(2x-5)-10=8x$

b) $2x-\frac{3x-1}{3}=x+\frac{1}{3}$

c) $\frac{3x-1}{4}-2x=\frac{2x-\frac{7}{4}}{2}-(3x-1)$

d) $\frac{x+10}{2}+\frac{2(x-2)}{5}=\frac{5x-15}{3}$

e) $\frac{2x}{3}-\frac{x-2}{12}+\frac{x+3}{2}=2x-\frac{1}{6}$

a) $2x-2(3x-1)+4(2x-5)-10=8x \Rightarrow 2x-6x+2+8x-20-10=8x \Rightarrow -4x=28 \Rightarrow x=-7$

b) $2x-\frac{3x-1}{3}=x+\frac{1}{3} \Rightarrow 6x-3x+1=3x+1 \Rightarrow 0x=0 \Rightarrow$ Todos los números reales son solución.

c) $\frac{3x-1}{4}-2x=\frac{2x-\frac{7}{4}}{2}-(3x-1) \Rightarrow 3x-1-8x=4x-\frac{7}{2}-12x+4 \Rightarrow 3x=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

d) $\frac{x+10}{2}+\frac{2(x-2)}{5}=\frac{5x-15}{3} \Rightarrow 15x+150+12x-24=50x-150 \Rightarrow -23x=-276 \Rightarrow x=12$

e) $\frac{2x}{3}-\frac{x-2}{12}+\frac{x+3}{2}=2x-\frac{1}{6} \Rightarrow 8x-x+2+6x+18=24x-2 \Rightarrow 11x=22 \Rightarrow x=2$

106. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas.

a) $4x^2-7x-2=0$

b) $-7x^2+12x-5=0$

c) $x(2x-1)-3x(x+1)=0$

d) $\frac{x(x-1)}{15}+\frac{(x-6)^2}{5}+\frac{(x+2)^2}{3}=\frac{(3x-2)(3x-4)}{15}$

e) $x^4-x^3-5x^2-x-6=0$

f) $6x^3-7x^2-14x+15=0$

g) $x^4-125x^2+484=0$

a) $4x^2-7x-2=0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{8}=\frac{7\pm 9}{8}\Rightarrow x=2,\ x=-\frac{1}{4}$

b) $-7x^2+12x-5=0 \Rightarrow\Rightarrow x=\frac{-12\pm\sqrt{144-140}}{-14}=\frac{-12\pm 2}{-14}\Rightarrow x=\frac{5}{7},\ x=1$

c) $x(2x-1)-3x(x+1)=0\Rightarrow 2x^2-x-3x^2-3x=0\Rightarrow -x^2-4x=0\Rightarrow -x(x+4)=0\Rightarrow x=0\quad x=-4$

d) $x^2-x+3(x^2+36-12x)+5(x^2+4+4x)=9x^2-18x+8\Rightarrow 9x^2-17x+128=9x^2-18x+8\Rightarrow x=-120$

e) $x^4-x^3-5x^2-x-6=0\Rightarrow (x+2)(x-3)(x^2+1)=0\Rightarrow x=-2,\ x=3$

f) $6x^3-7x^2-14x+15=0\Rightarrow 6(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{3}\right)=0\Rightarrow x=1,\ x=-\frac{3}{2},\ x=\frac{5}{3}$

g) $x^4-125x^2+484=0\Rightarrow \left.\begin{matrix} z=x^2\\ z^2=x^4\end{matrix}\right\}\Rightarrow z^2-125z+484=0\Rightarrow z=\frac{125\pm\sqrt{15625-1936}}{2}=\frac{125\pm 117}{2}=\begin{cases} z=121\Rightarrow x=11,\ x=-11\\ z=4\Rightarrow x=2,\ x=-2\end{cases}$

Ecuaciones racionales e irracionales

107. Resuelve las ecuaciones racionales siguientes.

a) $2x-\frac{12}{2-x}=7+\frac{11x+11}{9}$

b) $\frac{4}{x}+\frac{4}{x+2}=3$

c) $\frac{x+9}{x}-\frac{5+x}{x+2}=\frac{12x+12}{x^2+2x}$

d) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x^2-a^2}$

e) $\frac{x+1}{x-1}=\frac{4x+12}{3x+3}$

f) $\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+1}{x+2}=\frac{9}{20}$

g) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=x+\frac{7}{6}$

a) $2x-\frac{12}{2-x}=7+\frac{11x+11}{9}\Rightarrow 9(2-x)2x-108=63(2-x)+(2-x)(11x+11)\Rightarrow 7x^2-88x+256=0\Rightarrow x=8,\ x=\frac{32}{7}$

b) $\frac{4}{x}+\frac{4}{x+2}=3\Rightarrow 4(x+2)+4x=3x(x+2)\Rightarrow 3x^2-2x-8=0\Rightarrow x=2,\ x=-\frac{4}{3}$

c) $\frac{x+9}{x}-\frac{5+x}{x+2}=\frac{12x+12}{x^2+2x}\Rightarrow (x+9)(x+2)-x(5+x)=12x+12\Rightarrow -6x+6=0\Rightarrow x=1$

d) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x^2-a^2}\Rightarrow x+a+x-a=1\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

e) $\frac{x+1}{x-1}=\frac{4x+12}{3x+3}\Rightarrow (x+1)(3x+3)=(4x+12)(x-1)\Rightarrow x^2+2x-15=0\Rightarrow x=3,\ x=-5$

f) $\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+1}{x+2}=\frac{9}{20}\Rightarrow 20(x+2)^2-20(x+1)^2=9(x+1)(x+2)\Rightarrow 9x^2-13x-42=0\Rightarrow x=3,\ x=-\frac{14}{9}$

g) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2-1}=x+\frac{7}{6}\Rightarrow 6\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)+6x^2=6x^2\left(x^2-1\right)+7x(x^2-1)\Rightarrow 7x^3-12x^2-7x+6=0\Rightarrow x=2, x=\frac{-1\pm\sqrt{22}}{7}$

108. Resuelve estas ecuaciones irracionales.

a) $2-3\sqrt{x}=-x$ **c)** $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=5$ **e)** $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{7x-3}$

b) $3x+\sqrt{2x-2}=2\sqrt{2x-2}+23$ **d)** $3\sqrt{3x-1}=2\sqrt{3(2x-1)}$ **f)** $\dfrac{2\sqrt{x}}{4+\sqrt{x-5}}=\dfrac{4-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}}$

a) $2-3\sqrt{x}=-x \Rightarrow 3\sqrt{x}=x+2 \Rightarrow 9x=x^2+4x+4 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=4,\ x=1$

b) $3x+\sqrt{2x-2}=2\sqrt{2x-2}+23 \Rightarrow 3x-23=\sqrt{2x-2} \Rightarrow 9x^2-138x+529=2x-2 \Rightarrow\Rightarrow x=9,\ x=\dfrac{59}{9}$ (Falsa)

c) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=5 \Rightarrow \sqrt{x+1}=5-\sqrt{2x+3} \Rightarrow x+1=25+2x+3-10\sqrt{2x+3} \Rightarrow 10\sqrt{2x+3}=x+27 \Rightarrow$

$\Rightarrow 200x+300=x^2+729+54x \Rightarrow x^2-146x+429=0 \Rightarrow x=143$ (Falsa), $x=3$

d) $3\sqrt{3x-1}=2\sqrt{3(2x-1)} \Rightarrow 9(3x-1)=4\cdot 3(2x-1) \Rightarrow 3x=-3 \Rightarrow x=-1$ (Falsa). La ecuación no tiene solución.

e) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{7x-3} \Rightarrow x+5+x+2\sqrt{x^2+5x}=7x-3 \Rightarrow 2\sqrt{x^2+5x}=5x-8 \Rightarrow 4x^2+20x=25x^2+64-80x \Rightarrow$

$\Rightarrow 21x^2-100x+64=0 \Rightarrow x=4,\ x=\dfrac{16}{21}$ (Falsa)

f) $\dfrac{2\sqrt{x}}{4+\sqrt{x-5}}=\dfrac{4-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}} \Rightarrow 2\sqrt{x^2-5x}=21-x \Rightarrow 4x^2-20x=441+x^2-42x \Rightarrow\Rightarrow x=9,\ x=-\dfrac{49}{3}$ (Falsa)

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

109. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $2\log(2x-2)-\log(x-1)=1$ **d)** $3\log_x 2+\log_x 4=-5$ **g)** $\log_x 25+\log_{x^2}\dfrac{1}{5}=\log_{\sqrt{5}} x$

b) $\log(65-x^3)=3\log(5-x)$ **e)** $\log\sqrt{7x+51}-1=\log 9-\log\sqrt{2x+67}$

c) $\log 10^{\sqrt{20x+320}}=10\sqrt{x}$ **f)** $\log_3(x-1)-\log_3(x+2)=1-\log_3(x+6)$

a) $2\log(2x-2)-\log(x-1)=1 \Rightarrow \log\dfrac{(2x-2)^2}{x-1}=\log 10 \Rightarrow \dfrac{(2x-2)^2}{x-1}=10 \Rightarrow \dfrac{4(x-1)^2}{x-1}=10 \Rightarrow 4(x-1)=10 \Rightarrow x=\dfrac{7}{2}$

b) $\log(65-x^3)=3\log(5-x) \Rightarrow \log(65-x^3)=\log(5-x)^3 \Rightarrow 65-x^3=(5-x)^3 \Rightarrow 65-x^3=125-75x+15x^2-x^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 15x^2-75x+60=0 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=4,\ x=1$

c) $\log 10^{\sqrt{20x+320}}=10\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{20x+320}=10\sqrt{x} \Rightarrow 20x+320=100x \Rightarrow x=4$

d) $3\log_x 2+\log_x 4=-5 \Rightarrow \log_x(2^3\cdot 4)=-5 \Rightarrow x^{-5}=32=2^5=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

e) $\log\sqrt{7x+51}-1=\log 9-\log\sqrt{2x+67} \Rightarrow \log\dfrac{\sqrt{7x+51}}{10}=\log\dfrac{9}{\sqrt{2x+67}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{7x+51}}{10}=\dfrac{9}{\sqrt{2x+67}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 14x^2+571x+3417=8100 \Rightarrow 14x^2+571x-4683=0 \Rightarrow x=7,\ x=-\dfrac{669}{14}$ (Falsa)

f) $\log_3(x-1)-\log_3(x+2)=1-\log_3(x+6) \Rightarrow \log_3\dfrac{x-1}{x+2}=\log_3\dfrac{3}{x+6} \Rightarrow \dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{3}{x+6} \Rightarrow x^2+5x-6=3x+6 \Rightarrow$

$x^2+2x-12=0 \Rightarrow x=-1+\sqrt{13},\ x=-1-\sqrt{13}$ (Falsa)

g) $\log_x 25+\log_{x^2}\dfrac{1}{5}=\log_{\sqrt{5}} x \Rightarrow \dfrac{\log 25}{\log x}+\dfrac{\log\frac{1}{5}}{\log x^2}=\dfrac{\log x}{\log\sqrt{5}} \Rightarrow \dfrac{2\log 5}{\log x}-\dfrac{\log 5}{2\log x}=\dfrac{2\log x}{\log 5} \Rightarrow \dfrac{3\log 5}{2\log x}=\dfrac{2\log x}{\log 5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(\log 5)^2=4(\log x)^2 \Rightarrow \log x=\dfrac{\sqrt{3}\log 5}{2}=\log\sqrt{5^{\sqrt{3}}} \Rightarrow x=\sqrt{5^{\sqrt{3}}}$

110. Resuelve estas ecuaciones exponenciales.

a) $4^{x^2+1}=2^{5x+5}$

b) $4^{(x-2)^2}=262144$

c) $9^x+5\cdot3^x-24=0$

d) $3^{x+2}+9^{x-1}=90$

e) $9^x+3^{2x-1}+3^{x-1}=111$

f) $2^{2x-4}-5\cdot2^{x-3}+1=0$

g) $9^{x+2}+3^{x+3}-810=0$

h) $\sqrt[x]{27}=3^{x+2}$

i) $49^{\frac{x-5}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{7^{x-1}}}$

a) $4^{x^2+1}=2^{5x+5}\Rightarrow 2^{2(x^2+1)}=2^{5x+5}\Rightarrow 2x^2+2=5x+5\Rightarrow 2x^2-5x-3=0\Rightarrow x=3,\ x=-\dfrac{1}{2}$

b) $4^{(x-2)^2}=262\,144\Rightarrow 4^{(x-2)^2}=4^9\Rightarrow (x-2)^2=9\Rightarrow\begin{cases}x-2=3\Rightarrow x=5\\x-2=-3\Rightarrow x=-1\end{cases}$

c) Aplicando el cambio $z=3^x\Rightarrow 9^x+5\cdot3^x-24=0\Rightarrow z^2+5z-24=0\Rightarrow\begin{cases}z=3\Rightarrow 3^x=3\Rightarrow x=1\\z=-8\Rightarrow 3^x=-8 \text{ sin solución real}\end{cases}$

d) Aplicando el cambio de variable $z=3^x$

$$3^{x+2}+9^{x-1}=90\Rightarrow 9z+\frac{z^2}{9}=90\Rightarrow z^2+81z-810=0\Rightarrow\begin{cases}z=9\Rightarrow 3^x=9\Rightarrow x=2\\z=-90\Rightarrow 3^x=-90 \text{ sin solución real}\end{cases}$$

e) Aplicando el cambio de variable $z=3^x$

$$9^x+3^{2x-1}+3^{x-1}=111\Rightarrow z^2+\frac{z^2}{3}+\frac{z}{3}=111\Rightarrow 4z^2+z-333=0\Rightarrow\begin{cases}z=9\Rightarrow 3^x=9\Rightarrow x=2\\z=-\dfrac{37}{4}\Rightarrow 3^x=-\dfrac{37}{4} \text{ sin solución real}\end{cases}$$

f) Aplicando el cambio de variable $z=2^x$

$$2^{2x-4}-5\cdot2^{x-3}+1=0\Rightarrow\frac{z^2}{16}-\frac{5z}{8}+1=0\Rightarrow z^2-10z+16=0\Rightarrow\begin{cases}z=8\Rightarrow 2^x=8\Rightarrow x=3\\z=2\Rightarrow 2^x=2\Rightarrow x=1\end{cases}$$

g) Con el cambio $z=3^x\Rightarrow 9^{x+2}+3^{x+3}-810=0\Rightarrow 3z^2+z-30=0\Rightarrow\begin{cases}z=3\Rightarrow 3^x=3\Rightarrow x=1\\z=-\dfrac{10}{3}\Rightarrow 3^x=-\dfrac{10}{3} \text{ sin solución real}\end{cases}$

h) $\sqrt[x]{27}=3^{x+2}\Rightarrow 3^{\frac{3}{x}}=3^{x+2}\Rightarrow\dfrac{3}{x}=x+2\Rightarrow x^2+2x-3=0\Rightarrow x=1,\ x=-3$

i) $49^{\frac{x-5}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{7^{x-1}}}\Rightarrow 7^{\frac{2x-10}{3}}=7^{\frac{1-x}{2}}\Rightarrow\dfrac{2x-10}{3}=\dfrac{1-x}{2}\Rightarrow 4x-20=3-3x\Rightarrow 7x=23\Rightarrow x=\dfrac{23}{7}$

Sistemas de ecuaciones

111. Resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases}y=\dfrac{x+1}{2}+3\\y=2x+10\end{cases}$

b) $\begin{cases}2(2x+y)-3(3x-2y)=-34\\\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=2\end{cases}$

a) $\begin{cases}y=\dfrac{x+1}{2}+3\\y=2x+10\end{cases}\Rightarrow\dfrac{x+1}{2}+3=2x+10\Rightarrow x+1+6=4x+20\Rightarrow 3x=-13\Rightarrow x=-\dfrac{13}{3},\ y=\dfrac{4}{3}$

b) $\begin{cases}2(2x+y)-3(3x-2y)=-34\\\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x+2y-9x+6y=-34\\3x-2y=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-5x+8y=-34\\3x-2y=12\end{cases}\Rightarrow x=2,\ y=-3$

112. Indica si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son compatibles o incompatibles y calcula, según el caso, todas sus soluciones.

a) $\begin{cases} x+3y-2z=6 \\ 2x+3y-2z=8 \\ 4x+2y-6z=6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 3x-2y+z=7 \\ 5x+2y-5z=1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ 2x-4y+3z=-2 \\ 4x-y+6z=-4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ 2x-3y+5z=6 \\ 5x-3y+8z=6 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+3y-2z=6 \\ 2x+3y-2z=8 \\ 4x+2y-6z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=6 \\ -3y+2z=-4 \\ -10y+2z=-18 \end{cases} \Rightarrow \underset{E_3 \to E_3-E_2}{} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=6 \\ -3y+2z=-4 \\ -7y=-14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

b) $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 3x-2y+z=7 \\ 5x+2y-5z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-3E_1 \\ E_3 \to E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=3 \\ -8y+10z=-2 \\ -8y+10z=-14 \end{cases} \Rightarrow \underset{E_3 \to E_3-E_2}{} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=3 \\ -8y+10z=-2 \\ 0=-12 \end{cases}$

Sistema incompatible. No tiene solución.

c) $\begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ 2x-4y+3z=-2 \\ 4x-y+6z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-E_1 \\ E_3 \to E_3-2E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ -5y+5z=-10 \\ -3y+10z=-20 \end{cases} \Rightarrow \underset{E_3 \to 5E_3-3E_2}{} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ -5y+5z=-10 \\ 35z=-70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

d) $\begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ 2x-3y+5z=6 \\ 5x-3y+8z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ -9y+9z=18 \\ -18y+18z=36 \end{cases} \Rightarrow \underset{E_3 \to E_3-2E_2}{} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ -9y+9z=18 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ -y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t-2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$ Sistema compatible indeterminado

113. Estudia la compatibilidad de estos sistemas y halla, en su caso, sus soluciones.

a) $\begin{cases} x+2y-2z=4 \\ 2x+5y-2z=10 \\ 4x+9y-6z=18 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+2y-z=-5 \\ 5x-y+2z=11 \\ 6x+y+z=5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x+2y-2z=15 \\ x+y-z=7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+3y-2z=4 \\ 2x+2y+z=3 \\ 3x+2y+z=5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+2y-2z=4 \\ 2x+5y-2z=10 \\ 4x+9y-6z=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \\ y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \underset{E_3 \to E_3-E_2}{} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6t \\ y=2-2t \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$ Sistema compatible indeterminado

b) $\begin{cases} x+2y-z=-5 \\ 5x-y+2z=11 \\ 6x+y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-5E_1 \\ E_3 \to E_3-6E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=-5 \\ -11y+7z=36 \\ -11y+7z=35 \end{cases} \Rightarrow \underset{E_3 \to E_3-E_2}{} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=-5 \\ -11y+7z=36 \\ 0=-1 \end{cases}$

Sistema incompatible. No tiene solución.

c) $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x+2y-2z=15 \\ x+y-z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to 2E_2-3E_1 \\ E_3 \to 2E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ y-7z=30 \\ y-3z=14 \end{cases} \Rightarrow \underset{E_3 \to E_3-E_2}{} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ y-7z=30 \\ 4z=-16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-4 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

d) $\begin{cases} x+3y-2z=4 \\ 2x+2y+z=3 \\ 3x+2y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-3E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=4 \\ -4y+5z=-5 \\ -7y+7z=-7 \end{cases} \Rightarrow \underset{E_3 \to 4E_3-7E_2}{} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=4 \\ -4y+5z=-5 \\ -7z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

114. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones de segundo grado.

a) $\begin{cases} x-6y=-6 \\ 2x^2+y^2=76 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3xy-2x^2=-26 \\ 4x+5y=-7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+\dfrac{y}{2}=15 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+4y=10 \\ x^2+3xy=-8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x^2+5y^2=20 \\ 4x^2-y^2=-4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2-2(x-y)^2=36 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=5 \end{cases}$

a) $x=6y-6 \Rightarrow 2(6y-6)^2+y^2=76 \Rightarrow 73y^2-144y-4=0 \Rightarrow \begin{cases} y=2,\ x=6 \\ y=-\dfrac{2}{73},\ x=-\dfrac{450}{73} \end{cases}$

b) $y=-\dfrac{4x+7}{5} \Rightarrow -3x\cdot\dfrac{4x+7}{5}-2x^2=-26 \Rightarrow -22x^2-21x+130=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{65}{22},\ y=\dfrac{53}{55} \\ x=2,\ y=-3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+\dfrac{y}{2}=15 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+y=30 \\ 2y+3x=xy \end{cases}$

$y=30-6x \Rightarrow 60-12x+3x=30x-6x^2 \Rightarrow 2x^2-13x+20=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4,\ y=6 \\ x=\dfrac{5}{2},\ y=15 \end{cases}$

d) $y=\dfrac{5-x}{2} \Rightarrow x^2+3x(\dfrac{5-x}{2})=-8 \Rightarrow x^2-15x-16=0 \Rightarrow \begin{cases} x=16,\ y=-\dfrac{11}{2} \\ x=-1,\ y=3 \end{cases}$

e) Multiplicando la segunda ecuación por 5 y sumándole la primera obtenemos:

$23x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0,\ y=2 \\ x=0,\ y=-2 \end{cases}$

f) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=5 \Rightarrow 3x+2y=30 \Rightarrow y=15-\dfrac{3}{2}x$

$x^2-2\left(\dfrac{5}{2}x-15\right)^2=36 \Rightarrow 23x^2-300x+972=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{162}{23},\ y=\dfrac{102}{23} \\ x=6,\ y=6 \end{cases}$

115. Resuelve los siguientes sistemas exponenciales y logarítmicos.

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 4^x + 9^y = 85 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y = 33 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 2\log(x-2) + 3\log(y+2) = 2 \\ 4\log(x-2) + 5\log(y+2) = -1 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 15\cdot 5^x - 6^{y+1} = 339 \\ 3\cdot 5^{x+1} + 2\cdot 6^{y+2} = 807 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x + 2\cdot 3^{y+1} = 8 \\ 5\cdot 2^{x-1} + 9^y = 6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3^x + 3^{y+1} = 18 \\ x - y = -1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} \log x^2 + \log y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 2^{x-24} = 4^y \end{cases}$

a) Hacemos el cambio: $u = 2^x$, $v = 3^y$: $\begin{cases} u + v = 11 \\ u^2 + v^2 = 85 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2,\ v = 9 \Rightarrow x = 1,\ y = 2 \\ u = 9,\ v = 2 \Rightarrow x = \dfrac{\log 9}{\log 2},\ y = \dfrac{\log 2}{\log 3} \end{cases}$

b) Hacemos el cambio: $u = 2^x$, $v = 3^y$: $\begin{cases} u + 6v = 8 \\ \dfrac{5}{2}u + v^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2,\ v = 1 \Rightarrow x = 1,\ y = 0 \\ u = -76,\ v = 14 \text{ sin solución real} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 33 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 33 \\ \log \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 33 \\ \dfrac{x}{y} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 33 \\ x = 10y \end{cases} \Rightarrow x = 30,\ y = 3$

d) $x = y - 1 \Rightarrow 3^{y-1} + 3^{y+1} = 18 \Rightarrow \dfrac{3^y}{3} + 3\cdot 3^y = 18 \Rightarrow \dfrac{10}{3}3^y = 18 \Rightarrow 3^y = \dfrac{27}{5} \Rightarrow y = \dfrac{\log \dfrac{27}{5}}{\log 3} = 3 - \dfrac{\log 5}{\log 3},\ x = 2 - \dfrac{\log 5}{\log 3}$

e) Hacemos el cambio: $u = \log(x-2)$, $v = \log(y+2)$

$$\begin{cases} 2u + 3v = 2 \\ 4u + 5v = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -\dfrac{13}{2} \Rightarrow \log(x-2) = -\dfrac{13}{2} \Rightarrow x = 2 + 10^{-\frac{13}{2}} \\ v = 5 \Rightarrow \log(y+2) = 5 \Rightarrow y = 10^5 - 2 \end{cases}$$

f) $\begin{cases} \log x^2 + \log y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2y^2 = 100 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5,\ y = 2 \quad x = -5,\ y = 2 \quad x = 2,\ y = 5 \quad x = -2,\ y = 5 \\ x = 5,\ y = -2 \quad x = -5,\ y = -2 \quad x = 2,\ y = -5 \quad x = -2,\ y = -5 \end{cases}$

g) Hacemos el cambio: $u = 5^x$, $v = 6^y$: $\begin{cases} 15u - 6v = 339 \\ 15u + 72v = 807 \end{cases} \Rightarrow u = 25,\ v = 6 \Rightarrow x = 2,\ y = 1$

h) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 2^{x-24} = 4^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 10 \\ 2^{x-24} = 2^{2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10y \\ x - 24 = 2y \end{cases} \Rightarrow x = 30,\ y = 3$

Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

116. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado.

a) $3x + 3(2x-5) - 4(x-2) \le 2 - x$ **c)** $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x+2}{4} + \dfrac{x-3}{18} \ge -\dfrac{8}{9}$

b) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x-1}{6} > 1 - \dfrac{2x-5}{2}$ **d)** $\dfrac{2x-3}{4} - \dfrac{x}{2} \le 2(x-1) - \dfrac{35}{4}$

a) $3x + 3(2x-5) - 4(x-2) \le 2 - x \Rightarrow 3x + 6x - 15 - 4x + 8 \le 2 - x \Rightarrow 6x \le 9 \Rightarrow x \le \dfrac{3}{2} \Rightarrow$ Solución: $x \in \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$

b) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x-1}{6} > 1 - \dfrac{2x-5}{2} \Rightarrow 3x - x + 1 > 6 - 6x + 15 \Rightarrow 8x > 20 \Rightarrow x > \dfrac{5}{2} \Rightarrow$ Solución: $x \in \left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$

c) $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x+2}{4} + \dfrac{x-3}{18} \ge -\dfrac{8}{9} \Rightarrow 12x + 12 - 9x - 18 + 2x - 6 \ge -32 \Rightarrow 5x \ge -20 \Rightarrow x \ge -4 \Rightarrow$ Solución: $x \in [-4, +\infty)$

d) $\dfrac{2x-3}{4} - \dfrac{x}{2} \le 2(x-1) - \dfrac{35}{4} \Rightarrow 2x - 3 - 2x \le 8x - 8 - 35 \Rightarrow 40 \le 8x \Rightarrow x \ge 5 \Rightarrow$ Solución: $x \in [5, +\infty)$

117. Calcula las soluciones de las inecuaciones polinómicas siguientes.

a) $x^2 + x - 12 \geq 0$

b) $-2x^2 + 3x > 0$

c) $4x^2 - 1 \leq 0$

d) $6x^2 + x - 1 < 0$

e) $x^3 - 4x \leq 0$

f) $x^3 - 3x - 2 < 0$

g) $x^2 - 1 \geq 0$

h) $x^3 - 7x + 6 \leq 0$

a) $x^2 + x - 12 \geq 0 \Rightarrow (x+4)(x-3) \geq 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x = -4$ y $x = 3$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x \in (-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$

b) $-2x^2 + 3x > 0 \Rightarrow x(-2x+3) > 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x = 0$ y $x = \frac{3}{2}$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$

c) $4x^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow (2x+1)(2x-1) \leq 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

d) $6x^2 + x - 1 < 0 \Rightarrow (3x-1)(2x+1) < 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{3}$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

e) $x^3 - 4x \leq 0 \Rightarrow x(x+2)(x-2) \leq 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x \in (-\infty, -2] \cup [0, 2]$

f) $x^3 - 3x - 2 < 0 \Rightarrow (x+1)^2(x-2) < 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x = -1$ y $x = 2$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x \in (-\infty, 2)$

g) $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) \geq 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x = -1$ y $x = 1$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

h) $x^3 - 7x + 6 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)(x+3) \leq 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x = -3$, $x = 1$ y $x = 2$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x \in (-\infty, -3] \cup [1, 2]$

118. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales.

a) $\dfrac{5x-2}{2x+1} \le 0$

b) $\dfrac{3x-1}{5-10x} > 0$

c) $\dfrac{x^2-1}{x+2} \le 0$

d) $\dfrac{x^3-1}{4-x^2} \le 0$

e) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} > 0$

f) $\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+5x^2+3x-9} < 0$

g) $\dfrac{x-8}{3-x} \le -4-x$

h) $\dfrac{4x^3-4x-x+1}{x^2+2x+1} \le 0$

a) $\dfrac{5x-2}{2x+1} \le 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-\dfrac{1}{2}$ y $x=\dfrac{2}{5}$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{5}\right]$

b) $\dfrac{3x-1}{5-10x} > 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=\dfrac{1}{3}$ y $x=\dfrac{1}{2}$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$

c) $\dfrac{x^2-1}{x+2} \le 0 \Rightarrow \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+2} \le 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-2$, $x=-1$ y $x=1$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, 1]$

d) $\dfrac{x^3-1}{4-x^2} \le 0 \Rightarrow \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(2-x)(2+x)} \le 0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{(x-2)(x+2)} \ge 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-2$, $x=1$ y $x=2$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in (-2, 1] \cup (2, +\infty)$

(Observemos que x^2+x+1 es siempre positivo)

e) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} > 0 \Rightarrow \dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-3)} > 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=1$, $x=2$, $x=3$ y $x=4$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$

f) $\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+5x^2+3x-9} < 0 \Rightarrow \dfrac{(x+3)(x-1)^2}{(x+3)^2(x-1)} < 0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{x+3} < 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-3$ y $x=1$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in (-3, 1)$

g) $\dfrac{x-8}{3-x} \le -4-x \Rightarrow \dfrac{x-8}{3-x}+4+x \le 0 \Rightarrow \dfrac{4-x^2}{3-x} \le 0 \Rightarrow \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-3} \le 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-2$, $x=2$ y $x=3$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in (-\infty, -2] \cup [2, 3)$

h) $\dfrac{4x^3-4x^2-x+1}{x^2+2x+1} \le 0 \Rightarrow \dfrac{(x-1)(2x+1)(2x-1)}{(x+1)^2} \le 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-1$, $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{1}{2}$ y $x=1$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es:

$x \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$

119. Resuelve los sistemas de inecuaciones con una incógnita:

a) $\begin{cases} 2x+3(x-1)<7 \\ 3x+2\le x+6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x-3)^2+1\ge 0 \\ x^2-11x+28<0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3(x-3)-2x\le -3 \\ 2x-3<x+3 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-\dfrac{x}{2}<2 \\ 2x+3(x-1)>x+2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x+3(x-1)<7 \\ 3x+2\le x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x<10 \\ 2x\le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x\le 2 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x\in(-\infty,\ 2)$

b) Observemos que la primera inecuación siempre es cierta, por tanto:

$\begin{cases} (x-3)^2+1\ge 0 \\ x^2-11x+28<0 \end{cases} \Rightarrow (x-7)(x-4)<0 \Rightarrow$ Solución: $x\in(4,\ 7)$

c) $\begin{cases} -3(x-3)-2x\le -3 \\ 2x-3<x+3 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x\le -12 \\ x<6 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{12}{5} \\ x<6 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x\in\left[\dfrac{12}{5},\ 5\right]$

d) $\begin{cases} 2x-\dfrac{x}{2}<2 \\ 2x+3(x-1)>x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{4}{3} \\ x>\dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x\in\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{4}{3}\right)$

120. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas:

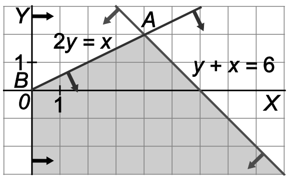
a) $\begin{cases} x+y\le 6 \\ 2y\le x \\ x\ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y<2 \\ x>y-2 \\ x>0 \quad y>0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-4\ge 0 \\ x-6\le 0 \\ 3\le y\le 5 \end{cases}$

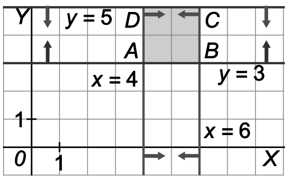
d) $\begin{cases} 3x+4y\ge 12 \\ -3x+4y\le 4 \\ x-4\le 0 \end{cases}$

a)



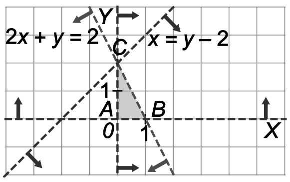
Vértices: $A(4,\ 2)$ $B(0,\ 0)$

c)



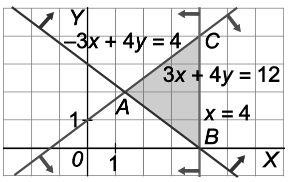
Vértices: $A(4,\ 3)$ $B(6,\ 3)$ $C(6,\ 5)$ $D(4,\ 5)$

b)



Vértices: $A(0,\ 0)$ $B(1,\ 0)$ $C(0,\ 2)$

d)



Vértices: $A\left(\dfrac{4}{3},\ 2\right)$ $B(4,\ 0)$ $C(4,\ 4)$

Síntesis

121. Opera y simplifica.

a) $\frac{1}{xy}+\frac{a}{xz}+\frac{a^2}{yz}$ **c)** $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$ **e)** $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}+\frac{a^2}{a^2-b^2}$ **g)** $\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x+1}}:\frac{x+1}{x+2}$

b) $\left(x+\frac{(x-1)^2}{2-x}\right)\cdot\frac{2-x}{2}$ **d)** $\frac{x-\frac{x^2}{x-y}}{y-\frac{y^2}{x+y}}$ **f)** $\left(a^2-b^2\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ **h)** $\frac{1+\frac{x-2}{x+2}}{\frac{x+2}{x-2}-1}$

a) $\frac{1}{xy}+\frac{a}{xz}+\frac{a^2}{yz}=\frac{z+ay+a^2x}{xyz}$

b) $\left(x+\frac{(x-1)^2}{2-x}\right)\cdot\frac{2-x}{2}=\frac{2x-x^2+x^2-2x+1}{2-x}\cdot\frac{2-x}{2}=\frac{1}{2-x}\cdot\frac{2-x}{2}=\frac{1}{2}$

c) $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x^2-1}{x^2}}=\frac{(x+1)x^2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{x}{x-1}$

d) $\frac{x-\frac{x^2}{x-y}}{y-\frac{y^2}{x+y}}=\frac{\frac{x^2-xy-x^2}{x-y}}{\frac{xy+y^2-y^2}{x+y}}=\frac{-xy(x+y)}{xy(x-y)}=\frac{y+x}{y-x}$

e) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}+\frac{a^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2+a^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{4ab+a^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{4ab+a^2}{a^2-b^2}$

f) $\left(a^2-b^2\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=(a-b)(a+b):\frac{b+a}{ab}=(a-b)ab=a^2b-ab^2$

g) $\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x+1}}:\frac{x+1}{x+2}=\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x+2}{x+1}}:\frac{x+1}{x+2}=\frac{\frac{(x+1)(x+2)}{x}}{\frac{(x+1)(x+2)}{x+1}}=\frac{x+1}{x}$

h) $\frac{1+\frac{x-2}{x+2}}{\frac{x+2}{x-2}-1}=\frac{\frac{x+2+x-2}{x+2}}{\frac{x+2-x+2}{x-2}}=\frac{2x(x-2)}{4(x+2)}=\frac{x^2-2x}{2x+4}$

122. Racionaliza, opera y simplifica la expresión: $\dfrac{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}+2\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}-2\sqrt{a}}}{\frac{2a}{1-4a^2}}$

$$\frac{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}+2\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}-2\sqrt{a}}}{\frac{2a}{1-4a^2}}=\frac{\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{2}-2\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{2}+2\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{2}-2\sqrt{a}\right)}-\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{2}+2\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{2}-2\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{2}+2\sqrt{a}\right)}}{\frac{2a}{1-4a^2}}=\frac{\frac{\sqrt{2a}-2a}{2-4a}-\frac{\sqrt{2a}+2a}{2-4a}}{\frac{2a}{1-4a^2}}=\frac{\frac{-4a}{2-4a}}{\frac{2a}{1-4a^2}}=$$

$$=\frac{\frac{-2a}{1-2a}}{\frac{2a}{(1-2a)(1+2a)}}=\frac{-2a(1-2a)(1+2a)}{2a(1-2a)}=-1-2a$$

123. Calcula el término que se indica en cada uno de los siguientes desarrollos.

a) El quinto término de $(2 + x)^8$ **b)** El tercer término de $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{x}\right)^6$ **c)** El último término de $(2a^2b - 3a)^{37}$

a) $T_5 = \binom{8}{4}\cdot 2^4 \cdot x^4 = 70\cdot 16\cdot x^4 = 1120x^4$

c) $T_{38} = -\binom{37}{37}(3a)^{37} = -450\ 283\ 905\ 890\ 997\ 363a^{37}$

b) $T_3 = \binom{6}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{3}{x}\right)^2 = 15\cdot\frac{16}{81}\cdot\frac{9}{x^2} = \frac{80}{3x^2}$

124. Dado el polinomio $P(x) = -3x^3 + x^2 - 2x + k$, calcula el valor de k para que sea divisible por $x - 2$.

Por el teorema del resto tenemos: $P(2) = 0 \Rightarrow -3\cdot 2^3 + 2^2 - 2\cdot 2 + k = 0 \Rightarrow -24 + k = 0 \Rightarrow k = 24$

125. Resuelve la ecuación: $\binom{x}{2} - 2x = \binom{x-2}{2} - 1$

$\binom{x}{2} - 2x = \binom{x-2}{2} - 1 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{2} - 2x = \frac{(x-2)(x-3)}{2} - 1 \Rightarrow x^2 - x - 4x = x^2 - 5x + 6 - 2 \Rightarrow 0 = 4$

La ecuación no tiene solución.

126. Sea el polinomio $P(x) = 2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + ax + b$. Calcula el valor de a y b para que sea divisible por $x^2 + x + 6$.

Se efectúa la división y se obtiene: cociente: $2x^2 - 23$ y resto: $(23 + a)x + (b + 138)$. Por tanto:

$$\begin{cases} 23 + a = 0 \\ b + 138 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -23,\ b = -138$$

127. Sea el polinomio $P(x) = 2x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + ax + b$, halla el valor de a y b para que:

- **El polinomio sea divisible por $x - 1$.**
- **El valor numérico en $x = -1$ valga -12.**

Por el teorema del resto se tiene $P(1) = 0$, por otro lado, $P(-1) = -12$, por tanto:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2 + 3 - 3 + a + b = 0 \\ -2 - 2 - 3 - 3 - a + b = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = -1$$

128. Calcula la expresión de $P(x)$ sabiendo que $P(2x + 1) = 8x^2 + 14x$.

$P(x)$ es un polinomio de segundo grado. Podemos escribir: $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Se tiene que:

$$P(2x+1) = a(2x+1)^2 + b(2x+1) + c = a(4x^2 + 4x + 1) + 2bx + b + c = 4ax^2 + (4a + 2b)x + (a + b + c)$$

Por tanto:

$$\begin{cases} 4a = 8 \\ 4a + 2b = 14 \Rightarrow a = 2,\ b = 3,\ c = -5 \Rightarrow P(x) = 2x^2 + 3x - 5 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

129. a) Calcula la suma y el producto de las soluciones de la ecuación $x^2+3x+c=0$.

b) Calcula el valor de c para que el producto de la soluciones de la ecuación anterior valga –18.

a) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-3$, $x_1x_2=\frac{c}{a}=c$ **b)** Por el apartado anterior $c=-18$

130. Halla la expresión de un polinomio de tercer grado que verifique que:

***P*(0) = 0** ***P*(1) = 0** ***P*(–1) = 2** ***P*(–2) = –6**

Sea $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ el polinomio buscado. Se tiene que:

$$\begin{cases}P(0)=d\\P(1)=a+b+c+d\\P(-1)=-a+b-c+d\\P(-2)=-8a+4b-2c+d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=0\\a+b+c+d=0\\-a+b-c+d=2\\-8a+4b-2c+d=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=0\\a+b+c=0\\-a+b-c=2\\-8a+4b-2c=-6\end{cases}$$

Sumando la segunda ecuación con la tercera obtenemos: $2b=2\Rightarrow b=1$.

Restándole a la cuarta ecuación el doble de la tercera obtenemos: $-6a+2b=-10\Rightarrow -6a+2=-10\Rightarrow a=2$.

Finalmente, despejando de la segunda ecuación obtenemos: $c=-3$.

131. a) Compara las soluciones de la ecuación de segundo grado $3x^2-4x-4=0$ con las de la ecuación $-4x^2-4x+3=0$.

b) Demuestra que las soluciones de la ecuación $x^2+bx+2=0$ son inversas de las de la ecuación $2x^2+bx+1=0$.

c) Demuestra que las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ son inversas de las de la ecuación $cx^2+bx+a=0$.

a) $3x^2-4x-4=0\Rightarrow x=\frac{4\pm 8}{6}\Rightarrow x=2,\ x=-\frac{2}{3}$; $-4x^2-4x+3=0\Rightarrow x=\frac{4\pm 8}{-8}\Rightarrow x=-\frac{3}{2},\ x=\frac{1}{2}$

Las soluciones de una ecuación son inversas de las de la otra.

b) $x^2+bx+2=0\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-8}}{2}$; $2x^2+bx+1=0\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-8}}{4}$

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-8}}{2}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-8}}{4}=\frac{(-b)^2-(b^2-8)}{8}=\frac{b^2-b^2+8}{8}=\frac{8}{8}=1$$

De la misma forma: $\frac{-b-\sqrt{b^2-8}}{2}\cdot\frac{-b+\sqrt{b^2-8}}{4}=\frac{(-b)^2-(b^2-8)}{8}=\frac{b^2-b^2+8}{8}=\frac{8}{8}=1$

Las soluciones de una ecuación son inversas de las de la otra.

c) $ax^2+bx+2=0\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ab}}{2a}$; $cx^2+bx+a=0\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4ac}=\frac{4ac}{4ac}=1$$

Las soluciones son inversas una de la otra.

Y de la misma forma se comprueba la otra pareja de soluciones.

132. a) La ecuación polinómicas de tercer grado $ax^3+bx^2+cx+d=0$ tiene por raíces x_1, x_2 y x_3. Calcula, en función de *a*, *b*, *c* y *d*, los valores de:

i) $x_1+x_2+x_3$ **ii)** $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ **iii)** $x_1x_2x_3$

b) Calcula tres números tales que la suma sea 3, la suma de los tres productos de dos de ellos sea –6 y el producto de los tres sea –8.

a) $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=a\left[x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3\right]$

Igualando coeficientes obtenemos: $x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a}$ y $x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}$.

b) Por el apartado anterior, tomando $a=1$, los números buscados son las soluciones de la ecuación de tercer grado $x^3-3x^2-6x+8=0$, por tanto, los números son $x_1=1$, $x_2=4$ y $x_3=-2$.

133. Calcula el conjunto de números reales que cumplen la siguiente condición: $|x-2|\le|x-6|$. Para ello:

a) Calcula el punto que equidista de 2 y de 6

b) Razona cuáles son los puntos que están más cerca de 2 que de 6.

a) El punto que equidista de 2 y de 6 es 4.

b) $|x-2|$ representa la distancia del punto *x* al punto 2 y $|x-6|$ representa la distancia del punto *x* al punto 6.

Por tanto, se buscan los puntos cuya distancia a 2 sea más pequeña que su distancia a 6. Éstos son los puntos menores que 4, es decir, la solución es $x\in(-\infty, 4]$

CUESTIONES

134. Para cada caso, escribe una ecuación de segundo grado que cumpla:

a) Que no tenga ninguna solución real.

b) Que tenga una única solución real doble.

c) Que la suma de las raíces sea 7, y el producto, –60.

d) Que el producto de las raíces sea el doble que su suma.

a) $x^2+1=0$ **b)** $x^2-2x+1=0$ **c)** $x^2-7x-60=0$ **d)** $x^2-x+2=0$

135. Escribe dos polinomios diferentes que tengan las mismas raíces:

a) Si son del mismo grado.

b) Si tienen diferente grado.

a) $P(x)=x^2-4$, $Q(x)=2x^2-8$ **b)** $P(x)=x$, $Q(x)=x^3+x$

136. Demuestra que la ecuación $x^2+(2\lambda-1)x-\lambda=0$ tiene dos soluciones reales diferentes para cualquier valor del parámetro λ.

El discriminante de la ecuación es $\Delta=b^2-4ac=(2\lambda-1)^2+4\lambda=4\lambda^2+1$.

Es siempre estrictamente positivo, por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes.

137. Dada la ecuación de segundo grado $\lambda x^2+(2+2\lambda)x+\lambda=0$ dependiente del parámetro λ, se pide:

a) Calcular los valores de λ para que la ecuación tenga dos soluciones reales distintas.

b) Calcular los valores de λ para que la ecuación tenga una única solución real doble.

a) Calcular los valores de λ para que la ecuación no tenga ninguna solución real.

El discriminante de la ecuación es $\Delta=b^2-4ac=(2\lambda+2)^2-4\lambda^2=8\lambda+4$. Por tanto:

a) Si $\lambda>-\frac{1}{2}$ la ecuación tiene dos soluciones reales.

b) Si $\lambda=-\frac{1}{2}$ la ecuación tiene una única solución real doble.

c) Si $\lambda<-\frac{1}{2}$ la ecuación no tiene solución real.

138. Un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas.

a) ¿Puede ser incompatible? Pon un ejemplo.

b) ¿Puede ser compatible indeterminado? Pon un ejemplo.

c) ¿Puede ser compatible determinado? Pon un ejemplo.

a) $\begin{cases}x+y+z=1\\x+y+z=0\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}x+y+z=1\\x+y+2z=1\end{cases}$ **c)** No puede ser compatible determinado.

139. a) A la hora de resolver una ecuación racional en el que la incógnita aparece en algún denominador, puede obtenerse alguna solución falsa. ¿Cuál es la razón?

b) A la hora de resolver una ecuación irracional puede obtenerse alguna solución falsa. ¿Cuál es la razón?

a) Al quitar denominadores se puede estar introduciendo soluciones que anulen dicho denominador y sean falsas por no estar definida la división entre cero.

b) Al elevar al cuadrado los dos miembros de una ecuación, se pueden introducir soluciones falsas ya que dichos miembros podrían ser iguales en valor absoluto pero con diferente signo.

140. Con la ayuda del desarrollo del binomio $(1+1)^n$, demuestra que se verifica la igualdad:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}1^n\cdot1^0+\binom{n}{1}1^{n-1}\cdot1+\binom{n}{2}1^{n-2}\cdot1^2+\ldots+\binom{n}{n}1^0\cdot1^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$$

141. a) ¿Cuáles son las condiciones que deben verificar los coeficientes b y c del polinomio $P(x)=x^2+bx+c$ para que sea un cuadrado perfecto?

b) ¿Cuáles son las condiciones que deben verificar los coeficientes a, b y c del polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$ para que sea un cuadrado perfecto?

a) $P(x)$ debe tener una única solución real. Por tanto, $b^2-4c=0$ y $P(x)=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$

b) $P(x)$ debe tener una única solución real. Por tanto, $b^2-4ac=0$ y $P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\sqrt{a}x+\frac{b\sqrt{a}}{2a}\right)^2$

142. Calcula, en función de *a*, *b* y *c*, la suma de las inversas de las soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

143. Demuestra que se cumple: $\log_x A = \log_{x^2} A^2$

$$\log_{x^2} A^2 = \frac{\log A^2}{\log x^2} = \frac{2\log A}{2\log x} = \frac{\log A}{\log x} = \log_x A$$

PROBLEMAS

144. Si se divide un número por 5 y por 13 y se suman los cocientes, el resultado es 72. Halla dicho número.

Sea x el número desconocido: $\frac{x}{5} + \frac{x}{13} = 72 \Rightarrow 13x + 5x = 4680 \Rightarrow x = \frac{4680}{18} = 260$

145. Si sumamos cuatro números impares consecutivos obtenemos como resultado 72. ¿Cuáles son estos números?

Sean x, $x + 2$, $x + 4$, $x + 6$ los números buscados. Se tiene que:

$x + x + 2 + x + 4 + x + 6 = 72 \Rightarrow 4x + 12 = 72 \Rightarrow x = \frac{60}{4} = 15$. Por tanto, los números buscados son: 15, 17, 19 y 21.

146. La suma de un número positivo más el valor de su raíz cuadrada coincide con el triple de dicho número. ¿De qué número de trata?

Sea x el número desconocido: $x + \sqrt{x} = 3x \Rightarrow \sqrt{x} = 2x \Rightarrow x = 4x^2 \Rightarrow x(4x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$

147. La suma de un número de dos cifras más el que resulta al invertirlas es 99. ¿Cuánto vale la suma de las dos cifras de ese número?

Sea $[xy]_{10)} = 10x + y$ el número desconocido. El número invertido será $[yx]_{10)} = 10y + x$.

Se tiene que: $10x + y + 10y + x = 99 \Rightarrow 11x + 11y = 99 \Rightarrow x + y = 9 \Rightarrow$ Las dos cifras suman 9.

148. a) Encuentra un número de tres cifras tales que la suma de los cuadrados de las dos cifras extremas es 65 y que si a dicho número se le añaden 297 unidades, el número que resulta se escribe al revés que el buscado.

b) ¿Cuántos números de este tipo hay?

a) Suponiendo que el número buscado es $[xyz]_{10)} = 100x + 10y + z$ tenemos:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 65 \\ 100x + 10y + z + 297 = 100z + 10y + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = 65 \\ x - z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 7 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \text{ (No valida)} \end{cases} \\ z = -4 \text{ (No valida)} \end{cases}$$

Por tanto, un número que cumple las condiciones es 407.

b) El resultado no depende de y, por tanto, hay 10 posibles soluciones: 407, 417, 427, 437, 447, 457, 467, 477, 487 y 497.

149. Tres números están en progresión aritmética. Su suma vale 57 y la suma de sus cuadrados vale 1181. Calcula los tres números.

Sean los números buscados: $x-a$, x, $x+a$.

Tenemos: $x-a+x+x+a=57 \Rightarrow 3x=57 \Rightarrow x=19$

Por otra parte: $(19-a)^2+19^2+(19+a)^2=1181 \Rightarrow 2a^2=98 \Rightarrow a^2=49 \Rightarrow \begin{cases} a=7 \\ a=-7 \end{cases}$

En ambos casos, los números buscados son 12, 19 y 26.

150. De un número de tres cifras sabemos que su suma es 12, que la cifra de las unidades es igual a la semisuma de las cifras de las centenas y de las decenas, y, por último, que el número que resulta al invertir las cifras del buscado es 198 unidades más pequeño que este. ¿De qué número se trata?

Suponiendo que el número buscado es $[xyz]_{10)}=100x+10y+z$ y que, por tanto, el número que resulta al invertir sus cifras es $[zyx]_{10)}=100z+10y+x$, podemos escribir:

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ x+y-2z=0 \\ 99x-99z=198 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ x+y-2z=0 \\ x-z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow$$ El número buscado es el 624.

151. Se consideran los números $A=u^2+v^2$, $B=u^2-v^2$ y $C=2uv$ donde u y v son números enteros positivos.

a) Comprueba que para cualesquiera valores de u y v, los números A, B y C forman una terna pitagórica, es decir, que A, B y C pueden ser los lados de un triángulo rectángulo. ¿Cuáles son los catetos y cuál la hipotenusa?

b) Con la ayuda del apartado anterior, calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus longitudes son números enteros que suman 90 y que la suma de las longitudes de sus catetos vale 49.

c) Calcula tres números enteros que formen terna pitagórica, que sumen 132 y tales que la hipotenusa mida una unidad más que uno de los catetos.

a) La hipotenusa debe ser A, el número más grande, y los catetos B y C.

Comprobemos que se verifica el teorema de Pitágoras:

$$A^2=(u^2+v^2)^2=u^4+v^4+2u^2v^2=u^4+v^4-2u^2v^2+4u^2v^2=(u^2-v^2)^2+(2uv)^2=B^2+C^2$$

b) La hipotenusa vale $90-49=41$.

$41=25+16=5^2+4^2 \Rightarrow u=5,\ v=4 \Rightarrow A=41,\ B=9$ y $C=40$

c) $$\begin{cases} A+B+C=132 \\ A=B+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2+v^2+u^2-v^2+2uv=132 \\ u^2+v^2=2uv+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u^2+2uv=132 \\ 2uv=u^2+v^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2+uv=66 \\ (u-v)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2+uv=66 \\ u=1+v \end{cases} \Rightarrow$$

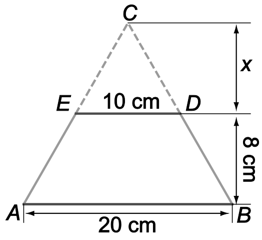
$\Rightarrow u=6,\ v=5 \Rightarrow A=61,\ B=11$ y $C=60$

152. Un padre tiene 48 años, y su hijo, 15. ¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea justo el doble de la del hijo?

Sean x los años que han de pasar: $48+x=2(15+x) \Rightarrow 48+x=30+2x \Rightarrow x=18$

Dentro de 18 años, la edad del padre será el doble de la del hijo.

153. Las bases de un trapecio miden 10 y 20 cm, respectivamente, y la altura, 8. Calcula la altura del triángulo que resulta al prolongar los dos lados no paralelos del trapecio.



La superficie del trapecio es: $S_T = \frac{(20+10)\cdot 8}{2} = 120 \text{ cm}^2$

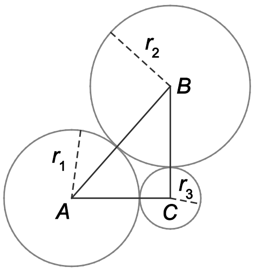
La superficie del triángulo *CED* es: $S_{CED} = \frac{10x}{2} = 5x$

La superficie del triángulo *ABC* es: $S_{ABC} = \frac{20(x+8)}{2} = 10x + 80$

Por tanto, se tiene que: $10x + 80 - 5x = 120 \Rightarrow 5x = 120 - 80 = 40 \Rightarrow x = \frac{40}{5} = 8$

La altura del triángulo *ABC* es $8 + 8 = 16$ cm

154. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 27 y 36 cm. Tomando como centro cada uno de los vértices del triángulo se trazan tres circunferencias de forma que son tangentes exteriores dos a dos.



Calcula los radios de las tres circunferencias.

El valor de la hipotenusa es $\sqrt{36^2 + 27^2} = 45$ cm, por tanto:

$$\begin{cases} r_1 + r_3 = 27 \\ r_2 + r_3 = 36 \\ r_1 + r_2 = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 18 \text{ cm} \\ r_2 = 27 \text{ cm} \\ r_3 = 9 \text{ cm} \end{cases}$$

155. Tres números están en progresión geométrica y su producto vale 1728. Si al número central se le añaden 8 unidades, los tres números pasan a estar en progresión aritmética. ¿Cuáles son estos tres números?

Sean $\frac{x}{r}$, x y rx los números buscados: $\frac{x}{r} \cdot x \cdot rx = 1728 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1728} = 12$

Como $\frac{12}{r}$, 20 y $12r$ están en progresión aritmética, tenemos:

$$12r - 20 = 20 - \frac{12}{r} \Rightarrow 12r^2 - 40r + 12 = 0 \Rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 3 \\ r = \frac{1}{3} \end{cases}$$

En ambos casos, los números buscados son 4, 12 y 36.

156. Las medidas de los cinco ángulos de un pentágono están en progresión aritmética. Calcúlalos sabiendo que el segundo más pequeño mide 88º.

Los ángulos son $88 - d$, 88, $88 + d$, $88 + 2d$ y $88 + 3d$.

Como la suma de los ángulos de un pentágono es $(5 - 2)\cdot 180º = 540º$, tenemos:

$$88 - d + 88 + 88 + d + 88 + 2d + 88 + 3d = 540 \Rightarrow d = 20$$

Por tanto, los ángulos valen 68º, 88º, 108º, 128º y 148º.

157. Hace cinco años, la edad de una madre era el triple de la de su hijo, y dentro de diez solo será el doble. Halla las edades actuales de ambos.

Sean $3x$ y x las edades de hace cinco años.

Las edades actuales son $3x + 5$ y $x + 5$, y las edades dentro de 10 años son $3x + 15$ y $x + 15$.

Por tanto, se tiene: $3x+15=2(x+15)\Rightarrow x=15$

La edad actual de la madre es 50 años, y la del hijo, 20.

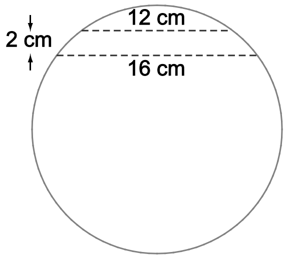
158. Un grupo de amigos debe pagar un total de 360 € por una reserva para un fin de semana en una casa rural. En el último momento cuatro amigos confirman que no podrán asistir, por lo que el resto del grupo deberá abonar, cada uno, 4,5 € más por la reserva. ¿Cuántos amigos disfrutarán del fin de semana en la casa rural? ¿Cuánto dinero aportará cada uno de los amigos?

Se x el número de amigos inicial e y el dinero que aporta, al principio, cada uno de ellos:

$$\begin{cases} xy=360 \\ (x-4)(y+4{,}5)=360 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=360 \\ 4{,}5x-4y=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=18 \end{cases}$$

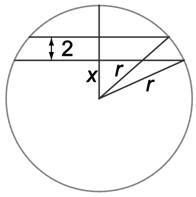
Finalmente, van 16 amigos a la casa rural y cada uno paga 22,5 €.

159. Las dos cuerdas paralelas dibujadas en la circunferencia de la figura miden 12 y 16 cm. La distancia entre ellas es de 2 cm.



Halla el radio de la circunferencia

Aplicando el teorema de Pitágoras:



$$\left.\begin{array}{l} 8^2+x^2=r^2 \\ 6^2+(2+x)^2=r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 64+x^2=36+4+x^2+4x \Rightarrow 4x=24 \Rightarrow x=6 \text{ cm}.$$

Por tanto, $r^2=64+36=100\Rightarrow r=10$ cm.

160. Si se disminuye en 10 cm el lado de un cuadrado, su área disminuye en 400 cm^2. ¿Cuál es el tamaño original del cuadrado?

Sea x el lado del cuadrado original. Su área es x^2.

Se tiene: $(x-10)^2=x^2-400\Rightarrow x^2-20x+100=x^2-400\Rightarrow 20x=500\Rightarrow x=25$ cm.

161. Dos ciudades *A* y *B*, unidas por una carretera, distan 111 km. Desde la ciudad *A* hacia la *B* sale un coche a 72 km/h y desde *B* sale hacia *A* otro coche a 76 km/h. ¿Cuánto tardarán en encontrarse?

Si los coches tardan t horas en encontrarse, en esas t horas el primer coche habrá recorrido x km y el segundo coche 111 – x. por tanto:

$$\frac{x}{72}=\frac{111-x}{76}\Rightarrow 76x=7992-72x\Rightarrow 148x=7992\Rightarrow x=\frac{7992}{148}=54 \text{ km}.$$

El tiempo que tardarán en encontrarse será: $\frac{54}{72}=0{,}75$ horas = 45 minutos.

162. Desde un punto *A* sale una moto con velocidad 72 km/h. Diez minutos después sale, desde el mismo punto y a su encuentro, un coche con velocidad constante de 90 km/h. ¿Cuánto tardará en darle alcance?

Si tarda t horas en alcanzarle tenemos: $72\left(t+\frac{1}{6}\right)=90t \Rightarrow 72t+12=90t \Rightarrow t=\frac{2}{3}$ horas $=40$ minutos.

163. Se consideran tres barras homogéneas de metal compuestas de la siguiente forma:

Primera barra: 30 g de oro, 45 de plata y 75 de cobre.

Segunda barra: 60 g de oro, 30 de plata y 135 de cobre.

Tercera barra: 45 g de oro, 60 de plata y 75 de cobre.

¿Qué cantidad deberá tomarse de cada una de las barras para obtener otra que contenga 64,5 g de oro, 69 de plata y 136,5 de cobre?

En la primera barra se verifica que $\frac{30}{150}=\frac{2}{10}$ es oro, $\frac{45}{150}=\frac{3}{10}$ es plata y $\frac{75}{150}=\frac{5}{10}$ es cobre.

En la segunda se verifica que $\frac{60}{225}=\frac{4}{15}$ es oro, $\frac{30}{225}=\frac{2}{15}$ es plata y $\frac{135}{225}=\frac{9}{15}$ es cobre.

En la tercera se verifica que $\frac{45}{180}=\frac{3}{12}$ es oro, $\frac{60}{180}=\frac{4}{12}$ es plata y $\frac{75}{180}=\frac{5}{12}$ es cobre.

Supongamos que tomamos x g de la barra primera, y de la segunda y z de la tercera. Se puede escribir el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases}\frac{2}{10}x+\frac{4}{15}y+\frac{3}{12}z=64{,}5\\ \frac{3}{10}x+\frac{2}{15}y+\frac{4}{12}z=69\\ \frac{5}{10}x+\frac{9}{15}y+\frac{5}{12}z=136{,}5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}12x+16y+15z=3870\\ 18x+8y+20z=4140\\ 30x+36y+25z=8190\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=90\\ y=90\\ z=90\end{cases}$$

Por tanto, se deberán tomar 90 g de cada una de las barras.

164. Halla tres enteros consecutivos tales que al sumar los cuadrados de los dos primeros se obtenga el cuadrado del tercero.

Sean x, $x+1$ y $x+2$ los números buscados:

$x^2+(x+1)^2=(x+2)^2 \Rightarrow x^2+x^2+2x+1=x^2+4x+4 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=-1,\ x=3$

Por tanto hay dos posibles soluciones: –1, 0 y 1 o 3, 4 y 5.

165. Se sabe que una cierta población de insectos se incrementa en un 9 % cada semana. Calcula el tiempo que ha de pasar para que la población se multiplique por cinco.

Sea P el número inicial de insectos. Al cabo de una semana se tendrán $P\cdot 1{,}09$. Al cabo de t semanas se tendrán $P\cdot 1{,}09^t$ insectos. Por tanto:

$5P=P\cdot 1{,}09^t \Rightarrow 1{,}09^t=5 \Rightarrow t=\frac{\log 5}{\log 1{,}09}=18{,}676$ semanas $\simeq 131$ días.

166. Si se colocan 5000 € a un 5 % de interés compuesto anual con capitalización anual, ¿cuánto tiempo tarda en aumentar en un 50 %? ¿Y si la capitalización es mensual?

$1{,}5C=C\cdot 1{,}05^t \Rightarrow 1{,}05^t=1{,}5 \Rightarrow t=\frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}05}=8{,}31$ años.

Si la capitalización es mensual tenemos:

$1{,}5C=C\cdot(1+\frac{0{,}05}{12})^{12t} \Rightarrow 1{,}004167^{12t}=1{,}5 \Rightarrow t=\frac{\log 1{,}5}{12\cdot\log 1{,}004167}=8{,}13$ años.

167. En un concurso de matemáticas se propone una prueba de 25 preguntas. Cada una de ellas tiene 5 posibles respuestas de las que solo una es verdadera. Por cada respuesta acertada se obtienen 5 puntos; si se responde de forma errónea se obtienen 0 puntos, y si se deja una pregunta sin respuesta, se obtienen 2.

a) Escribe la expresión algebraica que determina la puntuación de un concursante llamando *x* al número de respuestas acertadas, e *y* al número de respuestas incorrectas.

b) Si de un concursante se sabe que ha obtenido 80 puntos, ¿cómo puede deducirse el número de respuestas acertadas, erróneas y no contestadas? Da dos ejemplos posibles.

c) En dos de las preguntas no contestadas, ese mismo concursante dudaba entre dos de las cinco opciones. ¿Qué puntuación habría obtenido en el caso de haberlas contestado de manera correcta?

a) La expresión algebraica que da la puntuación es: $P(x,y)=5x+2(25-x-y)=5x+50-2x-2y=3x-2y+50$.

b) Si el concursante ha obtenido 80 puntos, se tiene que:

$$3x-2y+50=80\Rightarrow 3x-2y=30\Rightarrow y=\frac{3x-30}{2}\Rightarrow y=\frac{3x}{2}-15$$

Dos posibles ejemplos pueden ser:

$x=10\Rightarrow y=0$, es decir, acierta 10 preguntas y no contesta ninguna de las otras 15.

$x=12\Rightarrow y=3$, es decir, acierta 12 preguntas, falla 3 y no contesta 10.

c) Habría obtenido 6 puntos más, es decir, 86 puntos.

168. Se han comprado un determinado número de discos DVD vírgenes por una cantidad total de 17,25 €. Si se hubieran comprado discos de una calidad superior, cuyo precio es 0,40 € más caro por unidad, se deberían haber adquirido 8 menos para que el precio total no variase. ¿Cuántos discos se han comprado?

Sea *x* el número de discos adquiridos. El precio de cada uno es de $\frac{17{,}25}{x}$ euros.

Si se comprasen discos de una calidad superior, el precio de cada disco sería $\left(\frac{17{,}25}{x}+0{,}4\right)$.

Por tanto, se tiene que:

$$\left(\frac{17{,}25}{x}+0{,}4\right)(x-8)=17{,}25\Rightarrow 17{,}25+0{,}4x-\frac{138}{x}-3{,}2=17{,}25\Rightarrow 0{,}4x^2-3{,}2x-138=0\Rightarrow\Rightarrow\begin{cases}x=23\\ x=-15\text{ (No válida)}\end{cases}$$

Se han comprado 23 discos.

169. Para participar en las próximas competiciones locales de atletismo se deben pasar dos pruebas. En la primera se elimina al 60 % de los participantes, y en la segunda, a las dos terceras partes de los que quedan.

¿Cuántos participantes se apuntaron en un principio si después de las dos pruebas quedan 10 atletas para competir en la final?

Sea *x* el número de participantes iniciales.

Después de la primera prueba quedan 0,4*x*. Después de la segunda prueba quedan $\frac{0{,}4x}{3}$.

Por tanto, $\frac{0{,}4x}{3}=10\Rightarrow x=75$.

Se apuntaron 75 participantes.

170. Un comerciante adquiere dos tipos de café para tostar, moler y, posteriormente, mezclar. El de mayor calidad tiene un precio de 9 €/kg, mientras que por el otro pagó 7,50€ por cada kilo. El comerciante quiere obtener una mezcla que salga a 8,40 €/kg.

¿Cuál deberá ser la proporción de los dos tipos de café?

Sea x la cantidad de café de mayor calidad en un kg de mezcla e y la cantidad del otro café en un kg de mezcla, tenemos:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 9x + 7,5y = 8,4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,6 \\ y = 0,4 \end{cases}$$

Por tanto, hay que mezclar 0,6 kg de café de mayor calidad por cada 0,4 kg del otro, es decir, hay que mezclar 3 kg de café de mejor calidad por cada 2 kg del otro.

171. Un almacenista trabaja con tres tipos de televisores. Cada televisor del primer tipo le cuesta 180 €, el del segundo tipo, 90 €, y el del tercer tipo, 30 €. Un pedido de 105 unidades tiene un importe total de 9600 €. Determina el número de televisores pedidos de cada clase sabiendo que el número de televisores del segundo tipo es el doble que los del primer y tercer tipo juntos.

Sean x el número de televisores del primer tipo e y el número de televisores del tercer tipo. El número de televisores del segundo tipo es $2(x + y)$.

Por tanto:

$$\begin{cases} x + 2(x + y) + y = 105 \\ 180x + 90 \cdot 2(x + y) + 30y = 9600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 105 \\ 360x + 210y = 9600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 35 \\ 12x + 7y = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 20 \end{cases}$$

Se pidieron 15 televisores del primer tipo, 70 del segundo y 20 del tercero.

172. Entre las 6 h y 9 h de la tarde la velocidad media contratada de bajada de archivos disminuye en 80 kB/s mientras que de 6 h a 9 h de la mañana, esta velocidad media se ve incrementada en 100 kB/s. Andrés se ha bajado un archivo en dos etapas. Por la mañana se ha bajado la primera parte del archivo de 12400 kB y por la tarde se ha bajado los restantes 11264 kB. En total, la bajada del archivo completo ha precisado exactamente de un minuto. ¿Cuál es la velocidad media de bajada contratada?

Sea v kB/s la velocidad media de bajada contratada. Se bajan 12400 kB con una velocidad de $v + 100$ y 11264 kB con velocidad $v - 80$. El tiempo total invertido es 60 segundos, por tanto:

$$\frac{12400}{v+100} + \frac{11264}{v-80} = 60 \Rightarrow 60v^2 - 22464v - 614400 = 0 \Rightarrow v = \frac{22464 \pm 25536}{2} = 11232 \pm 12768$$

La única solución que tiene sentido es $v = 11232 + 12768 = 24000$ kB/s.

173. Un ciclista está realizando un trayecto a favor del viento. En un primer tramo, el viento le ayuda a razón de 1 km/h, y en un segundo tramo, le ayuda a razón de 2 km/h. El ciclista lleva una velocidad propia constante en todo el recorrido y tarda 2 horas y 36 minutos en hacer los 40 km. Posteriormente, en un mapa topográfico, el ciclista observa que los tramos están en proporción 3 a 2. Calcula la velocidad propia del ciclista.

Sea x la velocidad del ciclista. Sean y, $40 - y$ las longitudes de los tramos. El tiempo que el ciclista tarda en realizar el total del trayecto es: $\frac{y}{x+1} + \frac{40-y}{x+2} = 2,6$.

La relación de los tramos es: $\frac{y}{40-y} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2y = 120 - 3y \Rightarrow y = 24$.

Por tanto, $\frac{24}{x+1} + \frac{16}{x+2} = 2,6 \Rightarrow 2,6x^2 - 32,2x - 58,8 = 0 \Rightarrow x = \frac{32,2 \pm 40,6}{5,2}$.

La única solución que tiene sentido es $x = \frac{32,2 + 40,6}{5,2} = 14$ km/h.

PARA PROFUNDIZAR

174. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^2+y^2+2xy-z^2$

b) $4x^2-9y^2-4z^2+12yz$

c) $4-9x^2-25y^2+30xy$

d) x^3-y^3

e) x^3+y^3

a) $x^2+y^2+2xy-z^2=(x+y)^2-z^2=(x+y-z)(x+y+z)$

b) $4x^2-9y^2-4z^2+12yz=4x^2-(3y-2z)^2=(2x+3y-2z)(2x-3y+2z)$

c) $4-9x^2-25y^2+30xy=4-(3x-5y)^2=(2+3x-5y)(2-3x+5y)$

d) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

e) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

175. Factoriza el polinomio $x^4+2x^3+4x^2+3x+2$ sabiendo que es el producto de dos polinomios irreducibles de segundo grado y que el coeficiente de primer grado del primero de los factores es 1.

$$x^4+2x^3+4x^2+3x+2=(x^2+x+a)(x^2+bx+c)=x^4+(b+1)x^3+(a+b+c)x^2+(c+ab)x+ac$$

$$\begin{cases} b+1=2 \\ a+b+c=4 \\ c+ab=3 \\ ac=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow P(x)=(x^2+x+1)(x^2+2x+1)$$

176. Resuelve las siguientes ecuaciones con valores absolutos.

a) $x-1+|-3x-3|=-3$

b) $2x-|x^2-1|=-2$

c) $|x-1|+|x+1|=1$

d) $|x^2-1|-2|x^2-9|=-7$

a) $x-1+|-3x-3|=-3 \Rightarrow \begin{cases} x-1-3x-3=-3 & \text{si } x\le -1 \\ x-1+3x+3=-3 & \text{si } x>-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} & \text{si } x\le -1 \\ x=-\dfrac{5}{4} & \text{si } x>-1 \end{cases} \Rightarrow$ No tiene solución.

b) $2x-|x^2-1|=-2 \Rightarrow \begin{cases} 2x-x^2+1=-2 & \text{si } x>1 \text{ o } x<-1 \\ 2x+x^2-1=-2 & \text{si } -1\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x-3=0 & \text{si } x>1 \text{ o } x<-1 \\ x^2+2x+1=0 & \text{si } -1\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow x=-1,\ x=3$

c) $|x-1|+|x+1|=1 \Rightarrow \begin{cases} -x+1-x-1=1 & \text{si } x<-1 \\ -x+1+x+1=1 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ x-1+x+1=1 & \text{si } x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x=1 & \text{si } x<-1 \\ 2=1 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ 2x=1 & \text{si } x>1 \end{cases} \Rightarrow$ No tiene solución

d) $|x^2-1|-2|x^2-9|=-7 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1-2x^2+18=-7 & \text{si } x<-3 \\ x^2-1+2x^2-18=-7 & \text{si } -3\le x\le -1 \\ -x^2+1+2x^2-18=-7 & \text{si } -1<x<1 \\ x^2-1+2x^2-18=-7 & \text{si } 1\le x\le 3 \\ x^2-1-2x^2+18=-7 & \text{si } x>3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=24 & \text{si } x<-3 \\ x^2=4 & \text{si } -3\le x\le -1 \\ x^2=10 & \text{si } -1<x<1 \\ x^2=4 & \text{si } 1\le x\le 3 \\ x^2=24 & \text{si } x>3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\sqrt{24},\ x=-\sqrt{24},\ x=2,\ x=-2$

177. Estudia si este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es compatible.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y^2 - z^2 = -4} \\ \boldsymbol{xy + xz + yz = -5} \\ \boldsymbol{x + y + z = 2} \end{cases}$$

Como $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$, tenemos:

$2^2 = z^2 - 4 + z^2 + 2\cdot(-5) \Rightarrow z^2 = 9 \Rightarrow z = 3,\ \ z = -3$

Suponiendo que $z = 3$, el sistema queda:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy + 3x + 3y = -5 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

Como $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, tenemos: $1 = 5 + 2xy \Rightarrow xy = -2$ y el sistema queda:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 3x + 3y = -3 \\ x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1,\ y = -2,\ z = 3 \\ x = -2,\ y = 1,\ z = 3 \end{cases}$$

Como el sistema tiene, al menos, dos soluciones, es compatible.

De hecho el sistema no tiene más soluciones, si suponemos que $z = -3$, el sistema queda:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy - 3x - 3y = -5 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Como $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, tenemos: $25 = 5 + 2xy \Rightarrow xy = 10$ y el sistema queda:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 3x + 3y = 15 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{No tiene solución.}$$

178. Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve el siguiente sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 3y - 2z + 2w = 12} \\ \boldsymbol{2x - 2y - z + w = 5} \\ \boldsymbol{3x + y - 2z - 4w = 16} \\ \boldsymbol{3x - 3z - 3w = 15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z + 2w = 12 \\ 2x - 2y - z + w = 5 \\ 3x + y - 2z - 4w = 16 \\ 3x - 3z - 3w = 15 \end{cases} \underset{\substack{E_2 \to E_2 - 2E_1 \\ E_3 \to E_3 - 3E_1 \\ E_4 \to E_4 - 3E_1}}{\Rightarrow} \begin{cases} x + 3y - 2z + 2w = 12 \\ -8y + 3z - 3w = -19 \\ -8y + 4z - 10w = -20 \\ -9y + 3z - 9w = -21 \end{cases} \underset{\substack{E_3 \to E_3 - E_2 \\ E_4 \to 8E_4 - 9E_2}}{\Rightarrow} \begin{cases} x + 3y - 2z + 2w = 12 \\ -8y + 3z - 3w = -19 \\ z - 7w = -1 \\ -3z - 45w = 3 \end{cases}$$

$$\underset{E_4 \to E_4 + 3E_3}{\Rightarrow} \begin{cases} x + 3y - 2z + 2w = 12 \\ -8y + 3z - 3w = -19 \\ z - 7w = -1 \\ -66w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -1 \\ w = 0 \end{cases}$$

3 Trigonometría

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Expresa en radianes las siguientes medidas angulares.

a) 30º
b) 60º
c) 200º
d) 330º

a) $30^\circ = \dfrac{30^\circ \pi}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{6}$ rad

b) $60^\circ = \dfrac{60^\circ \pi}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{3}$ rad

c) $200^\circ = \dfrac{200^\circ \pi}{180^\circ} = \dfrac{10\pi}{9}$ rad

d) $330^\circ = \dfrac{330^\circ \pi}{180^\circ} = \dfrac{11\pi}{6}$ rad

4. Halla la medida en grados de los siguientes ángulos.

a) $\dfrac{7\pi}{3}$ rad
b) $\dfrac{3\pi}{2}$ rad
c) 4 rad
d) 4π rad

a) $\dfrac{7\pi}{3}\text{ rad} = \dfrac{7\pi \cdot 180^\circ}{3\pi} = 420^\circ$

b) $\dfrac{3\pi}{2}\text{ rad} = \dfrac{3\pi \cdot 180^\circ}{2\pi} = 270^\circ$

c) $4\text{ rad} = \dfrac{4 \cdot 180^\circ}{\pi} = 229^\circ\ 11'$

d) $4\pi\text{ rad} = \dfrac{4\pi \cdot 180^\circ}{\pi} = 720^\circ$

5. Determina las razones trigonométricas de los ángulos de un triángulo cuyos lados miden 6, 8 y 10 cm, respectivamente.

Se trata de un triángulo rectángulo, pues verifica el teorema de Pitágoras: $10^2 = 6^2 + 8^2$

$\text{sen } \hat{A} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ $\quad \cos \hat{A} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$ $\quad \text{tg } \hat{A} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

$\text{sen } \hat{B} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$ $\quad \cos \hat{B} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ $\quad \text{tg } \hat{B} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

6. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de estos triángulos.

a) $\hat{A} = 90º$, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm **b)** $\hat{B} = 90º$, $b = 15$ cm, $c = 12$ cm **c)** $\hat{C} = 90º$, $b = 12$ cm, $c = 20$ cm

a) $a = \sqrt{10^2 + 12^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$ cm

$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61}$ $\cos\hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61}$ $\text{tg}\,\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61}$ $\cos\hat{C} = \frac{b}{a} = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61}$ $\text{tg}\,\hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

b) $a = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9$ cm

$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ $\cos\hat{A} = \frac{c}{b} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ $\text{tg}\,\hat{A} = \frac{a}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ $\cos\hat{C} = \frac{a}{b} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ $\text{tg}\,\hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

c) $a = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{256} = 16$ cm

$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ $\cos\hat{A} = \frac{b}{c} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ $\text{tg}\,\hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ $\cos\hat{B} = \frac{a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ $\text{tg}\,\hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

7. Calcula las razones inversas del ángulo menor en el triángulo rectángulo cuyos catetos midan 5 y 10 cm.

Hipotenusa: $a = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$ cm. El ángulo de menor amplitud es el opuesto al cateto menor, por tanto:

$\text{cosec}\,\alpha = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$ $\sec\alpha = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\text{cotg}\,\alpha = \frac{10}{5} = 2$

8. Ejercicio resuelto.

9. Halla los ángulos reducidos y las razones trigonométricas de estos ángulos.

a) 3990º **b)** 9π **c)** 25200º **d)** $\frac{121\pi}{4}$

a) Se calcula el ángulo reducido: $3990º : 360º = 11{,}08\widehat{3}$ y $0{,}08\widehat{3} \cdot 360º = 30º$

$\text{sen}\,3990º = \text{sen}\,30º = \frac{1}{2}$ $\cos 3990º = \cos 30º = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\text{tg}\,3990º = \text{tg}\,30º = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) Se calcula el ángulo reducido: $9\pi : 2\pi = 4{,}5$ rad y $0{,}5 \cdot 2\pi = \pi$ rad

$\text{sen}\,9\pi = \text{sen}\,\pi = 0$ $\cos 9\pi = \cos\pi = -1$ $\text{tg}\,9\pi = \text{tg}\,\pi = 0$

c) Se calcula el ángulo reducido: 25 200º : 360º = 70 y 0 · 360º = 0º

$\text{sen}\,25\,200º = \text{sen}\,0º = 0$ $\cos 25\,200º = \cos 0º = 1$ $\text{tg}\,25\,200º = \text{tg}\,0º = 0$

d) Se calcula el ángulo reducido: $\frac{121\pi}{4} : 2\pi = 15{,}125$ rad y $0{,}125 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$ rad

$\text{sen}\frac{121\pi}{4} = \text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\frac{121\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\text{tg}\frac{121\pi}{4} = \text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$

10. Halla el signo de todas las razones trigonométricas de:

a) 120º **c)** 256º **e)** 315º

b) –70º **d)** 800º **f)** –460º

α	120º	–70º	256º	800º	315º	–460º
Cuadrante	II	IV	III	I	IV	III
$\text{sen}\,\alpha$ y $\text{cosec}\,\alpha$	+	–	–	+	–	–
$\cos\alpha$ y $\sec\alpha$	–	+	–	+	+	–
$\text{tg}\,\alpha$ y $\text{cotg}\,\alpha$	–	–	+	+	–	+

11. Para los siguientes ángulos, indica el signo de todas sus razones trigonométricas.

a) $\frac{3\pi}{4}$ **c)** $\frac{4\pi}{3}$ **e)** $-\frac{9\pi}{4}$

b) $\frac{11\pi}{3}$ **d)** $-\frac{7\pi}{6}$ **f)** $-\frac{5\pi}{3}$

α	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{9\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{3}$
Cuadrante	II	IV	III	II	IV	I
$\text{sen}\,\alpha$ y $\text{cosec}\,\alpha$	+	–	–	+	–	+
$\cos\alpha$ y $\sec\alpha$	–	+	–	–	+	+
$\text{tg}\,\alpha$ y $\text{cotg}\,\alpha$	–	–	+	–	–	+

12 y 13. Ejercicios resueltos.

14. Calcula el valor de las siguientes razones trigonométricas reduciéndolas al primer cuadrante.

a) sen 150º **d)** tg 330º **g)** sen 240º

b) cos 225º **e)** cosec 135º **h)** cotg 300º

c) sen 840º **f)** tg 1800º **i)** sec 2295º

a) $\text{sen } 150^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$

d) $\text{tg } 330^\circ = -\text{tg } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

g) $\text{sen } 240^\circ = -\text{ sen } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\text{cosec } 135^\circ = \frac{1}{\text{sen}\,45^\circ} = \sqrt{2}$

h) $\text{cotg } 300^\circ = -\frac{1}{\text{tg } 60^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\text{sen } 840^\circ = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\text{tg } 1800^\circ = \text{tg } 0^\circ = 0$

i) $\sec 2295^\circ = -\frac{1}{\cos 45^\circ} = -\sqrt{2}$

15. Calcula, en función de *h*, sen 303º sabiendo que cos 33º = *h*.

$\text{sen } 303^\circ = -\text{sen } 57^\circ = -\text{sen } (90^\circ - 33^\circ) = -\cos 33^\circ = -h$

16. Calcula el valor exacto de:

a) sen $\frac{3\pi}{4}$ **b)** sen $\frac{11\pi}{6}$ **c)** sen $\frac{4\pi}{3}$ **d)** sen $\frac{5\pi}{6}$

a) $\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}=\text{sen}\,\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}=-\text{sen}\,\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}=-\text{sen}\,\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

d) $\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}=\text{sen}\,\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

17. Ejercicio interactivo.

18 y 19. Ejercicios resueltos.

20. Calcula las restantes razones de α sabiendo que:

a) La cotangente de un ángulo $\alpha<90^\circ$ vale $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $\sec\alpha=-5$ y $90^\circ<\alpha<180^\circ$

c) $\text{cosec}\,\alpha=-2$ y $\alpha\in\text{III}$

a) Al ser un ángulo del primer cuadrante, todas las razones son positivas. Tenemos:

$$\text{cotg}\,\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \text{tg}\,\alpha=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$$1+\text{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha\Rightarrow\sec\alpha=\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}=\sqrt{1+3}=2\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\text{sen}\,\alpha=\cos\alpha\,\text{tg}\,\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\text{cosec}\,\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas. Tenemos:

$$\sec\alpha=-5\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{1}{5}$$

$$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\text{sen}\,\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{\sqrt{24}}{5}=\frac{2\sqrt{6}}{5}\Rightarrow\text{cosec}\,\alpha=\frac{5}{2\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=-2\sqrt{6}\Rightarrow\text{cotg}\,\alpha=-\frac{1}{2\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{12}$$

c) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, el seno, coseno, cosecante y secante son negativas, y el resto de razones, positivas. Tenemos:

$$\text{cosec}\,\alpha=-2\Rightarrow\text{sen}\,\alpha=-\frac{1}{2}$$

$$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos\alpha=-\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sec\alpha=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\text{cotg}\,\alpha=\sqrt{3}$$

21. Calcula la razón pedida en cada caso.

a) $\text{sen}\,\alpha$, si $\text{tg}\,\alpha = -3$ y $\alpha \in \text{II}$ **b)** $\text{tg}\,\alpha$, si $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ y $\alpha \in \text{IV}$ **c)** $\cos\alpha$, si $\text{cotg}\,\alpha = 5$ y $\alpha \in \text{III}$

a) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno es positivo. Tenemos:

$$1+\text{cotg}^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\text{cotg}^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{9}}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

b) Al ser un ángulo del cuarto cuadrante, la tangente es negativa. Tenemos:

$$1+\text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1} = -\sqrt{\frac{25}{16}-1} = -\sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{3}{4}$$

c) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, el coseno es negativo. Tenemos:

$$1+\text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\text{tg}^2\alpha}} = -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{25}}} = -\sqrt{\frac{25}{26}} = -\frac{5\sqrt{26}}{26}$$

22 a 24. Ejercicios resueltos.

25. Transforma 15º y $\frac{5\pi}{12}$ rad en una suma o diferencia de ángulos y calcula sus razones trigonométricas.

$15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$: $$\text{sen}\,15^\circ = \text{sen}(60^\circ - 45^\circ) = \text{sen}60^\circ\cos45^\circ - \cos60^\circ\,\text{sen}\,45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos60^\circ\cos45^\circ + \text{sen}\,60^\circ\,\text{sen}\,45^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg}\,15^\circ = \text{tg}(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\text{tg}\,60^\circ - \text{tg}\,45^\circ}{1+\text{tg}\,60^\circ\,\text{tg}\,45^\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}-4}{2} = 2-\sqrt{3}$$

$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$: $$\text{sen}\frac{5\pi}{12} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \text{sen}\frac{\pi}{4}\text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg}\frac{5\pi}{12} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\text{tg}\frac{\pi}{4}+\text{tg}\frac{\pi}{6}}{1-\text{tg}\frac{\pi}{4}\text{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2+\sqrt{3}$$

26. Calcula tg 75º a partir del seno y del coseno.

$75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$: $$\text{sen}\,75^\circ = \text{sen}(45^\circ + 30^\circ) = \text{sen}45^\circ\cos30^\circ + \cos45^\circ\,\text{sen}\,30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos45^\circ\cos30^\circ - \text{sen}\,45^\circ\,\text{sen}\,30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg}\,75^\circ = \frac{\text{sen}\,75^\circ}{\cos75^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = 2+\sqrt{3}$$

27. Demuestra que $\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$.

$$\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\alpha\cos\frac{3\pi}{2}+\cos\alpha\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}=\operatorname{sen}\alpha\cdot 0+\cos\alpha\cdot(-1)=-\cos\alpha$$

28 y 29. Ejercicios resueltos.

30. Determina el valor del seno, el coseno y la tangente de los ángulos 120º y $\frac{4\pi}{3}$ rad.

$$\operatorname{sen}120^\circ=\operatorname{sen}(2\cdot 60^\circ)=2\operatorname{sen}60^\circ\cos 60^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\cos(2\cdot 60^\circ)=\cos^2 60^\circ-\operatorname{sen}^2 60^\circ=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}120^\circ=\operatorname{tg}(2\cdot 60^\circ)=\frac{2\operatorname{tg}60^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 60^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2}=-\sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}=\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)=2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3}=\cos\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)=\cos^2\frac{2\pi}{3}-\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{1-\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{3}$$

31. Desarrolla las expresiones de cos 3α y de tg 3α en función de las razones trigonométricas del ángulo α.

$$\cos 3\alpha=\cos(\alpha+2\alpha)=\cos\alpha\cos 2\alpha-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}2\alpha=\cos\alpha\left(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\right)-\operatorname{sen}\alpha\cdot 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=$$

$$=\cos^3\alpha-\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha-2\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+2\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha+2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha\left(3-\operatorname{tg}^2\alpha\right)}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

32. Si α es un ángulo del segundo cuadrante y sen $\alpha=\frac{3}{5}$, calcula las razones de $\frac{\alpha}{2}$.

El ángulo $\frac{\alpha}{2}$ es del primer cuadrante, por tanto sus razones trigonométricas son positivas. Tenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos\alpha=-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}}=\sqrt{9}=3$$

33. Calcula sen 32º suponiendo que sen 8º = 0,14.

$$\text{sen}\,8^\circ = 0{,}14 \Rightarrow \cos 8^\circ = \sqrt{1-\text{sen}^2 8^\circ} = \sqrt{1-0{,}14^2} = 0{,}99$$

$$\text{sen}\,16^\circ = \text{sen}(2\cdot 8^\circ) = 2\text{sen}\,8^\circ\cos 8^\circ = 2\cdot 0{,}14\cdot 0{,}99 = 0{,}2772 \Rightarrow \cos 16^\circ = \sqrt{1-\text{sen}^2 16^\circ} = 0{,}9608$$

$$\text{sen}\,32^\circ = \text{sen}(2\cdot 16^\circ) = 2\text{sen}\,16^\circ\cos 16^\circ = 2\cdot 0{,}2772\cdot 0{,}9608 \simeq 0{,}5327$$

34 y 35. Ejercicios resueltos.

36. Transforma en productos.

a) sen 55º + sen 15º **b)** sen 75º – sen 35º **c)** cos 125º + cos 85º **d)** cos 220º – cos 20º

a) $\text{sen}\,55^\circ + \text{sen}\,15^\circ = 2\,\text{sen}\frac{55^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{55^\circ-15^\circ}{2} = 2\,\text{sen}\,35^\circ\cos 20^\circ$

b) $\text{sen}\,75^\circ - \text{sen}\,35^\circ = 2\cos\frac{75^\circ+35^\circ}{2}\text{sen}\frac{75^\circ-35^\circ}{2} = 2\cos 55^\circ\,\text{sen}\,20^\circ$

c) $\cos 125^\circ + \cos 85^\circ = 2\cos\frac{125^\circ+85^\circ}{2}\cos\frac{125^\circ-85^\circ}{2} = 2\cos 105^\circ\cos 20^\circ$

d) $\cos 220^\circ - \cos 20^\circ = -2\,\text{sen}\frac{220^\circ+20^\circ}{2}\text{sen}\frac{220^\circ-20^\circ}{2} = -2\,\text{sen}\,120^\circ\,\text{sen}\,100^\circ$

37. Expresa en forma de sumas o diferencias.

a) sen 80º sen40º **b)** cos 25º cos 10º

a) $80^\circ = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 40^\circ = \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ;\ \hat{B} = 40^\circ$

$$\text{sen}\,80^\circ\,\text{sen}\,40^\circ = \frac{1}{2}\cdot 2\text{sen}\frac{120^\circ+40^\circ}{2}\text{sen}\frac{120^\circ-40^\circ}{2} = -\frac{1}{2}\left(\cos 120^\circ - \cos 40^\circ\right)$$

b) $25^\circ = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 10^\circ = \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 35^\circ;\ \hat{B} = 15^\circ$

$$\cos 25^\circ\cos 10^\circ = \frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{35^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{35^\circ-15^\circ}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos 35^\circ + \cos 15^\circ\right)$$

38. Comprueba que cos 75º + cos 45º = cos 15º.

$$\cos 75^\circ + \cos 45^\circ = 2\cos\frac{75^\circ+45^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-45^\circ}{2} = 2\cos 60^\circ\cos 15^\circ = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 15^\circ = \cos 15^\circ$$

39. Simplifica la siguiente expresión: $\mathbf{\dfrac{\cos 2x + \cos x}{\text{sen}\,2x + \text{sen}\,x}}$

$$\frac{\cos 2x + \cos x}{\text{sen}\,2x + \text{sen}\,x} = \frac{2\cos\frac{2x+x}{2}\cos\frac{2x-x}{2}}{2\,\text{sen}\frac{2x+x}{2}\cos\frac{2x-x}{2}} = \frac{\cos\frac{3x}{2}}{\text{sen}\frac{3x}{2}} = \text{cotg}\frac{3x}{2}$$

40. Calcula el valor de: $\mathbf{\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{12} - 2\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8}}$

$$\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{12} - 2\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}}{2} - 2\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8} = 2\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{24} - 2\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8} = 0$$

41. Ejercicio interactivo.

42 a 46. Ejercicios resueltos.

47. Resuelve las siguientes ecuaciones y da los resultados en grados y en radianes.

a) $\operatorname{sen} x = 1$ **b)** $2\cos x + 1 = 0$ **c)** $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0$

a) El seno de un ángulo vale 1 en 90º, 450º, 810º, etc.

Por tanto $x = 90º + 360º k$ con $k \in \mathbb{Z}$ o, en radianes, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

b) $2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120º + 360º k = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ x = 240º + 360º k = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

c) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30º + 180º k = \frac{\pi}{6} + \pi k \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

48. Resuelve las ecuaciones trigonométricas indicando las soluciones comprendidas en el intervalo [0, 2π].

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$ **b)** $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0$

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 135º = \frac{3\pi}{4} \text{ rad} \\ x = 315º = \frac{7\pi}{4} \text{ rad} \end{cases}$

b) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0º = 0 \text{ rad} \\ x = 180º = \pi \text{ rad} \\ x = 360º = 2\pi \text{ rad} \end{cases} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60º = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \\ x = 300º = \frac{5\pi}{3} \text{ rad} \end{cases} \end{cases}$

49. Resuelve, dando las soluciones en el intervalo [0, 2π].

a) $\operatorname{sen} 6x - 2\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x = 0$ **b)** $2\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x$

a) $\operatorname{sen}6x - 2\operatorname{sen}4x + \operatorname{sen}2x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\frac{8x}{2}\cos\frac{4x}{2} - 2\operatorname{sen}4x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}4x\cos 2x - 2\operatorname{sen}4x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\operatorname{sen}4x(\cos 2x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}4x = 0 \Rightarrow 4x = 0º + 180º k \Rightarrow x = 0º + 45º k \\ \cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = 0º + 360º k \Rightarrow x = 0º + 180º k \end{cases}$ con $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Y si nos ceñimos al intervalo, $x = 0º$; $x = 45º$; $x = 90º$; $x = 135º$; $x = 180º$; $x = 225º$; $x = 270º$; $x = 315º$; $x = 360º$

b) $2\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow 1 = 4\cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x = 60º$; $x = 120º$; $x = 240º$; $x = 300º$

50. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones en el intervalo [0, 2π].

a) $\begin{cases} \mathrm{tg}(x+y)=\sqrt{3} \\ x+2y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathrm{sen}\,x-\mathrm{sen}\,y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \mathrm{sen}\,x+\mathrm{sen}\,y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} \mathrm{tg}(x+y)=\sqrt{3} \\ x+2y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x+2y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k \\ y=\dfrac{\pi}{6}-\pi k \end{cases}\ k\in\mathbb{Z}$

La única solución en el intervalo [0, 2π] es $x=\dfrac{\pi}{6},\ y=\dfrac{\pi}{6}$.

b) Haciendo el cambio $u=\mathrm{sen}\,x$, $v=\mathrm{sen}\,y$ tenemos:

$$\begin{cases} u-v=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ u+v=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ v=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{sen}\,x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \mathrm{sen}\,y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones en el intervalo [0, 2π]: $x=\dfrac{\pi}{3},\ y=\dfrac{\pi}{6}$; $x=\dfrac{2\pi}{3},\ y=\dfrac{\pi}{6}$; $x=\dfrac{\pi}{3},\ y=\dfrac{5\pi}{6}$ y $x=\dfrac{2\pi}{3},\ y=\dfrac{5\pi}{6}$

51 a 54. Ejercicios resueltos.

55. Calcula la longitud del lado *c* de un triángulo *ABC* sabiendo que *a* = 10 cm, $\hat{A}=45^\circ$ y $\hat{B}=100^\circ$.

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\mathrm{sen}\,\hat{A}}=\frac{c}{\mathrm{sen}\,\hat{C}}\Rightarrow c=\frac{a\,\mathrm{sen}\,\hat{C}}{\mathrm{sen}\,\hat{A}}=\frac{10\,\mathrm{sen}\,35^\circ}{\mathrm{sen}\,45^\circ}=8{,}11\ \text{cm}$$

56. Dado un triángulo *ABC* con *a* = 12 cm, *b* = 15 cm y $\hat{C}=35^\circ$.

a) ¿Cuál es la longitud del lado *c*?

b) ¿Cuál es su área?

a) Aplicando el teorema del coseno:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}=12^2+15^2-2\cdot12\cdot15\cos35^\circ=74{,}105\Rightarrow c=8{,}61\ \text{cm}$$

b) Área: $A=\dfrac{1}{2}ab\,\mathrm{sen}\,\hat{C}=\dfrac{1}{2}\cdot12\cdot15\,\mathrm{sen}\,35^\circ=51{,}62\ \text{cm}^2$

57. Resuelve los siguientes triángulos y calcula sus áreas.

a) $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$, $a = 8$ dm

b) $\hat{A} = 80^\circ$, $a = 10$ m, $b = 5$ m

c) $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $c = 20$ cm

d) $\hat{A} = 75^\circ$, $b = 8$ mm, $c = 12$ mm

a) $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 60^\circ$

Aplicando el teorema del seno dos veces:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow b = \frac{a\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{8\operatorname{sen}40^\circ}{\operatorname{sen}80^\circ} = 5{,}22 \text{ dm}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow c = \frac{a\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{8\operatorname{sen}60^\circ}{\operatorname{sen}80^\circ} = 7{,}04 \text{ dm}$$

Área: $A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5{,}22\cdot \operatorname{sen}60^\circ = 18{,}1 \text{ dm}^2$

b) Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{a} = \frac{5\operatorname{sen}80^\circ}{10} \simeq 0{,}492 \Rightarrow \hat{B} = 29^\circ\ 29'\ 55{,}34''$$

(La posibilidad $\hat{B} = 150^\circ\ 31'\ 40''$ no es válida)

$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 70^\circ\ 30'\ 4{,}66''$

Aplicando el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} = 10^2 + 5^2 - 2\cdot 10\cdot 5\cos 70^\circ\ 30'\ 4{,}66'' = 91{,}621 \Rightarrow c \simeq 9{,}57 \text{ m}$$

Área: $A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5\cdot \operatorname{sen}70^\circ\ 30'\ 4{,}66'' \simeq 23{,}57 \text{ m}^2$

c) Aplicando el teorema del coseno dos veces:

$$\cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{15^2 + 20^2 - 10^2}{2\cdot 15\cdot 20} = 0{,}875 \Rightarrow \hat{A} = 28^\circ\ 57'\ 18''$$

$$\cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{10^2 + 20^2 - 15^2}{2\cdot 10\cdot 20} = 0{,}6875 \Rightarrow \hat{B} = 46^\circ\ 34'\ 3''$$

$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 104^\circ\ 28'\ 39''$

Área: $A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 15\cdot \operatorname{sen}104^\circ 28' 39'' = 72{,}62 \text{ cm}^2$

d) Aplicando el teorema del coseno dos veces:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} = 8^2 + 12^2 - 2\cdot 8\cdot 12\cos 75^\circ = 158{,}307 \Rightarrow a = 12{,}58 \text{ mm}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{12{,}58^2 + 12^2 - 8^2}{2\cdot 12{,}58\cdot 12} = 0{,}789 \Rightarrow \hat{B} = 37^\circ\ 53'\ 42''$$

$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 67^\circ\ 6'\ 18''$

Área: $A = \frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12\cdot \operatorname{sen}75^\circ = 46{,}36 \text{ mm}^2$

58. Ejercicio interactivo.

59 a 71. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Medida de ángulos

72. Copia y completa las siguientes tablas.

Grados	30º		60º	
Radianes		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$

Grados	210º		240º	
Radianes		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$

Grados		135º		180º
Radianes	$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	

Grados		315º		360º
Radianes	$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{6}$	

Grados	30º	45º	60º	90º
Radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Grados	210º	225º	240º	270º
Radianes	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$

Grados	120º	135º	150º	180º
Radianes	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Grados	300º	315º	330º	360º
Radianes	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

73. Pasa de grados a radianes.

a) 585º **b)** 450º **c)** 76º 52′ 30″ **d)** 382º 30′

a) $585^\circ = \frac{585^\circ\pi}{180^\circ} = \frac{13\pi}{4}$ rad

b) $450^\circ = \frac{450^\circ\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{2}$ rad

c) $76^\circ 52' 30'' = \frac{76{,}875^\circ\pi}{180^\circ} = \frac{41\pi}{96}$ rad

d) $382^\circ 30' = \frac{382{,}5^\circ\pi}{180^\circ} = \frac{17\pi}{8}$ rad

74. Los siguientes ángulos están en radianes, pásalos a grados.

a) $\frac{41\pi}{3}$ rad **b)** 13π rad **c)** $\frac{11\pi}{12}$ rad **d)** 5 rad

a) $\frac{41\pi}{3}\text{ rad} = \frac{41\pi\cdot 180^\circ}{3\pi} = 2460^\circ$

b) $13\pi\text{ rad} = \frac{13\pi\cdot 180^\circ}{\pi} = 2340^\circ$

c) $\frac{11\pi}{12}\text{ rad} = \frac{11\pi\cdot 180^\circ}{12\pi} = 165^\circ$

d) $5\text{ rad} = \frac{5\cdot 180^\circ}{\pi} = 286^\circ\, 28'\, 44''$

Razones trigonométricas

75. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos.

a) $\hat{A} = 90^\circ$, $a = 29$ cm, $b = 20$ cm

b) $\hat{B} = 90^\circ$, $a = 65$ cm, $c = 72$ cm

a) $c = \sqrt{29^2 - 20^2} = \sqrt{441} = 21$ cm

$\operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{20}{29}$ $\quad \cos\hat{B} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{21}{29}$ $\quad \operatorname{tg}\hat{B} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{20}{21}$

$\operatorname{sen}\hat{C} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{21}{29}$ $\quad \cos\hat{C} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{20}{29}$ $\quad \operatorname{tg}\hat{C} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{21}{20}$

b) $b = \sqrt{65^2 + 72^2} = \sqrt{9409} = 97$ cm

$\operatorname{sen}\hat{A} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{65}{97}$ $\quad \cos\hat{A} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{72}{97}$ $\quad \operatorname{tg}\hat{A} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{65}{72}$

$\operatorname{sen}\hat{C} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{72}{97}$ $\quad \cos\hat{C} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{65}{97}$ $\quad \operatorname{tg}\hat{C} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{72}{65}$

76. Indica los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas completas más el ángulo restante.

a) 2345º **b)** –1500º **c)** $\dfrac{46\pi}{3}$ rad **d)** $-\dfrac{52\pi}{7}$ rad

a) 2345º = 6 · 360º + 185º = 6 vueltas + 185º

b) –1500º = –5 · 360º + 300º = –5 vueltas + 300º

c) $\dfrac{46\pi}{3}$ rad $= 7 \cdot 2\pi + \dfrac{4\pi}{3} = 7$ vueltas $+ \dfrac{4\pi}{3}$ rad

d) $-\dfrac{52\pi}{7}$ rad $= -4 \cdot 2\pi + \dfrac{4\pi}{7} = -4$ vueltas $+ \dfrac{4\pi}{7}$ rad

77. Utiliza la calculadora para hallar el valor de las siguientes razones trigonométricas. Aproxima los resultados a las milésimas.

a) sen 36º **b)** tg 331º **c)** cotg 111º **d)** sen 25º 40′ **e)** sec 126º 33′ **f)** cotg 121º 22′ 45″

a) sen 36º = 0,588

b) tg 331º = –0,554

c) cotg 111º = –0,384

d) sen 25º 40′ = 0,433

e) sec 126º 33′ = –1,679

f) cotg 121º 22′ 45″ = –0,610

78. Utiliza la calculadora para hallar el valor de las siguientes razones trigonométricas. Aproxima los resultados a las milésimas. Ten en cuenta que todos los ángulos están dados en radianes.

a) $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}$ **b)** cosec 2 **c)** $\cos\dfrac{3\pi}{7}$ **d)** sec 3 **e)** $\operatorname{tg}\dfrac{21\pi}{5}$ **f)** cotg 2,75

a) $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12} = 0{,}259$

b) cosec 2 = 1,100

c) $\cos\dfrac{3\pi}{7} = 0{,}223$

d) sec 3 = –1,010

e) $\operatorname{tg}\dfrac{21\pi}{5} = 0{,}727$

f) cotg 2,75 = –2,422

79. Calcula, de forma exacta, el valor de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 240º **d)** sen 1215º **g)** $\text{tg}\ \frac{7\pi}{3}$ **j)** cotg 225º

b) cos 135º **e)** cosec 330º **h)** $\sec\ \frac{5\pi}{3}$ **k)** $\text{sen}\ \frac{7\pi}{4}$

c) cos(–600º) **f)** tg 300º **i)** sec 120º **l)** $\text{tg}(-15\pi)$

a) $\text{sen}\,240^\circ = -\text{sen}\,60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos(-600^\circ) = \cos 600^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

d) $\text{sen}\,1215^\circ = \text{sen}\,135^\circ = \text{sen}\,45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\text{cosec}\,330^\circ = -\text{cosec}\ 30^\circ = -2$

f) $\text{tg}\,300^\circ = -\text{tg}\ 60^\circ = -\sqrt{3}$

g) $\text{tg}\frac{7\pi}{3} = \text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

h) $\sec\frac{5\pi}{3} = \sec\frac{\pi}{3} = 2$

i) $\sec 120^\circ = -\sec 60^\circ = -2$

j) $\text{cotg}\ 225^\circ = \text{cotg} 45^\circ = 1$

k) $\text{sen}\frac{7\pi}{4} = -\text{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

l) $\text{tg}(-15\pi) = -\text{tg}\,15\pi = -\text{tg}\,\pi = 0$

80. Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que:

a) Es un ángulo del primer cuadrante y $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

b) Pertenece al segundo cuadrante y $\text{sen}\,\alpha = 0{,}25$

c) $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ y $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{2}$

d) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ y $\sec\alpha = \sqrt{2}$

e) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ y $\text{cotg}\,\alpha = -3$

f) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ y $\text{cosec}\,\alpha = -\frac{5}{2}$

a) Al ser un ángulo del primer cuadrante, todas las razones son positivas. Tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{3}{2}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

b) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas. Tenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha = 0,25 = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = 4$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \sec\alpha = -\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = -\sqrt{15}$$

c) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, la tangente y la cotangente son positivos, y el resto de razones, negativas. Tenemos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = -\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -\sqrt{1+2} = -\sqrt{3} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = -\frac{3}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

d) Al ser un ángulo del cuarto cuadrante, el coseno y la secante son positivos, y el resto de razones, negativas. Tenemos:

$$\sec\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = -\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -1 \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = -1$$

e) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas. Tenemos:

$$\operatorname{cotg}\alpha = -3 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = -\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -\sqrt{1+\frac{1}{9}} = -\frac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

f) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, la tangente y la cotangente son positivos, y el resto de razones, negativas. Tenemos:

$$\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{5}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{4}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5} \Rightarrow \sec\alpha = -\frac{5}{\sqrt{21}} = -\frac{5\sqrt{21}}{21}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

81. Calcula, en función de *h*, el valor de cada una de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 123º, siendo sen 57º = *h*.
b) cos 220º, siendo tg 40º = *h*.
c) tg 260º, siendo sen 80º = *h*.
d) cos 250º, siendo sen 110º = *h*.
e) cos 247º, siendo sen 113º = *h*.
f) cosec 701º, siendo cotg 199º = *h*.
g) tg 290º, siendo sen 110º = *h*.
h) sen 83º, siendo cos 7º = *h*.
i) sec 203º, siendo cotg 67º = *h*.

a) $\operatorname{sen}123^\circ = \operatorname{sen}57^\circ = h$

b) $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos 220^\circ = -\sqrt{\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 220^\circ}} = -\sqrt{\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 40^\circ}} - \sqrt{\dfrac{1}{1+h^2}}$

c) $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}260^\circ = \sqrt{\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}^2 260^\circ}-1} = \sqrt{\dfrac{1}{1-(-\operatorname{sen}80^\circ)^2}-1} = \sqrt{\dfrac{1}{1-h^2}-1} =$

$= \sqrt{\dfrac{h^2}{1-h^2}} = \dfrac{h}{\sqrt{1-h^2}}$

d) $\cos 250^\circ = \cos 110^\circ = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 110^\circ} = -\sqrt{1-h^2}$

e) $\cos 247^\circ = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 247^\circ} = -\sqrt{1-(-\operatorname{sen}113^\circ)^2} = -\sqrt{1-h^2}$

f) $\operatorname{cosec}701^\circ = \operatorname{cosec}341^\circ = -\operatorname{cosec}19^\circ = \operatorname{cosec}199^\circ = -\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 199^\circ} = -\sqrt{1+h^2}$

g) $\operatorname{tg}290^\circ = \operatorname{tg}110^\circ = \sqrt{\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}^2 110^\circ}-1} = \sqrt{\dfrac{1}{1-h^2}-1} = \sqrt{\dfrac{h^2}{1-h^2}} = \dfrac{h}{\sqrt{1-h^2}}$

h) $\operatorname{sen}83^\circ = \cos 7^\circ = h$

i) $\sec 203^\circ = -\sec 23^\circ = \dfrac{-1}{\cos 23^\circ} = \dfrac{-1}{\operatorname{sen}67^\circ} = -\operatorname{cosec}67^\circ = -\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 67^\circ} = -\sqrt{1+h^2}$

82. Determina la razón trigonométrica que se indica en cada caso, expresándola en función de *h*.

a) $\operatorname{cosec}\dfrac{23\pi}{5}$, sabiendo que $\operatorname{cotg}\dfrac{3\pi}{5} = -h^2$.
b) $\sec 305^\circ$, sabiendo que $\operatorname{cotg}55^\circ = \dfrac{1}{h}$.
c) tg 348º, sabiendo que cos 192º $= -h^2$.

a) $\operatorname{cosec}\dfrac{23\pi}{5} = \operatorname{cosec}\dfrac{3\pi}{5} = \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\dfrac{3\pi}{5}} = \sqrt{1+h^4}$

b) $\sec 305^\circ = \dfrac{1}{\cos 305^\circ} = \dfrac{1}{\cos 55^\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 55^\circ}}} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 55^\circ} = \sqrt{1+h^2}$

c) $\operatorname{tg}348^\circ = -\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 348^\circ}-1} = -\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 12^\circ}-1} = -\sqrt{\dfrac{1}{(-\cos 192^\circ)^2}-1} = -\sqrt{\dfrac{1}{h^4}-1} = -\dfrac{\sqrt{1-h^4}}{h^2}$

83. Sabiendo que sen $\alpha = h$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula en función de *h*:

a) sen (90º – α)
b) tg (1080º – α)

a) 90º – α es también un ángulo del primer cuadrante $\Rightarrow$ sen (90º – α) = cos $\alpha = \sqrt{1-h^2}$

b) 1080º = 3 · 360º $\Rightarrow$ tg (1080º – α) = tg (–α) = – tg $\alpha = \dfrac{-h}{\sqrt{1-h^2}}$

84. Para un ángulo α del primer cuadrante, que cumple que tg $\alpha = h$, calcula en función de h:

a) sen (90º – α) **b)** cotg (1080º – α)

a) sen (90º – α) = cos α = $\sqrt{\dfrac{1}{1+tg^2\alpha}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+h^2}}$

b) cotg (1080º – α) = cotg (–α) = –cotg α = $-\dfrac{1}{h}$

85. Sabiendo que cosec $x = -\dfrac{7}{4}$, calcula:

a) sen (810º – x) **b)** sec $\left(\dfrac{17\pi}{2}-x\right)$

Observemos que x está en el tercer o cuarto cuadrante, por tanto, 810º – x y $\dfrac{17\pi}{2}-x$ están en el segundo o tercer cuadrante, por lo que no se puede saber el signo de cos x.

a) $\text{sen}(810º-x)=\text{sen}(90º-x)=\cos x=\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}=\pm\sqrt{1-\dfrac{1}{\text{cosec}^2 x}}=\pm\dfrac{\sqrt{33}}{7}$

b) $\sec\left(\dfrac{17\pi}{2}-x\right)=\sec\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}=\dfrac{1}{\text{sen}\,x}=\text{cosec}\,x=-\dfrac{7}{4}$

86. Demuestra que tg (270º – x) = cotg x.

tg (270º – x) = tg (180º + 90º – x) = tg (90º – x)= cotg x.

87. Desarrolla, en función de sen α y cos α, las expresiones de sen 4α, cos 4α y tg 4α.

$\text{sen}\,4\alpha=\text{sen}(2\cdot2\alpha)=2\,\text{sen}\,2\alpha\cos2\alpha=2\cdot2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\cdot\left(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha\right)=4\,\text{sen}\,\alpha\cos^3\alpha-4\,\text{sen}^3\alpha\cos\alpha$

$\cos4\alpha=\cos(2\cdot2\alpha)=\cos^2 2\alpha-\text{sen}^2 2\alpha=\left(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha\right)^2-(2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)^2=\cos^4\alpha+\text{sen}^4\alpha-6\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$

$\text{tg}\,4\alpha=\dfrac{\text{sen}\,4\alpha}{\cos4\alpha}=\dfrac{4\,\text{sen}\,\alpha\cos^3\alpha-4\,\text{sen}^3\alpha\cos\alpha}{\cos^4\alpha+\text{sen}^4\alpha-6\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}$

88. Si $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ y $\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$ y, siendo $\text{sen}\,\alpha=0,4$ y $\cos\beta=-0,5$, calcula:

a) $\text{sen}(\alpha-\beta)$ **b)** $\cos(\alpha+\beta)$ **c)** $\text{tg}(\alpha+\beta)$

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}=-0,917$ y $\text{sen}\,\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-0,866$

a) $\text{sen}(\alpha-\beta)=\text{sen}\,\alpha\cos\beta-\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta=-0,4\cdot0,5-0,917\cdot0,866=-0,994$

b) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta=0,917\cdot0,5+0,4\cdot0,866=0,805$

c) $\text{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta}{1-\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}=\dfrac{-\dfrac{0,4}{0,917}+\dfrac{0,866}{0,5}}{1+\dfrac{0,4}{0,917}\cdot\dfrac{0,866}{0,5}}=0,738$

89. Sabiendo que tg $\alpha = 3$, calcula las razones trigonométricas del ángulo 2α si α es un ángulo:

a) Del primer cuadrante

b) Del tercer cuadrante

a) Al ser tg α >1, 45º < α < 90º y por tanto, 2α pertenece al segundo cuadrante. Tenemos:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\text{tg}^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \qquad \text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \frac{1}{10} - \frac{9}{10} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5} = -0{,}8$$

$$\text{tg}\,2\alpha = \frac{\text{sen}\,2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{3}{4} = -0{,}75$$

b) Al ser tg α >1, 225º < α < 270º y, por tanto, 2α pertenece al segundo cuadrante y se obtienen los mismos valores del apartado anterior para las razones de 2α.

90. Calcula el valor de la tangente de α, sabiendo que es un ángulo del primer cuadrante y que $\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \text{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{8}{9}-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{8}}{7}$$

91. Calcula, de forma exacta, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) 15º

b) 7º 30′

a)
$$\text{sen}\,15^\circ = \text{sen}\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \cos\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\text{tg}\,15^\circ = \frac{\text{sen}\,15^\circ}{\cos 15^\circ} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}} = 2-\sqrt{3}$$

b)
$$\text{sen}\,7^\circ 30' = \text{sen}\left(\frac{15^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 15^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

$$\cos 7^\circ 30' = \cos\left(\frac{15^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 15^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

$$\text{tg}\,7^\circ 30' = \frac{\text{sen}\,7^\circ\,15'}{\cos 7^\circ\,15'} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2}{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}} = \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

92. Si $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ y 90º < α < 180º, calcula las razones trigonométricas de $\frac{\alpha}{2}$.

$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$ $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{\sqrt{30}}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{5}$$

93. Transforma en producto las siguientes sumas de razones trigonométricas.

a) sen 48º + sen 32º **c)** $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$ **e)** cos 23º – cos 57º

b) cos 200º + cos 40º **d)** sen 105º – sen 25º **f)** $\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{9}$

a) $\operatorname{sen}48^\circ + \operatorname{sen}32^\circ = 2\operatorname{sen}\frac{48^\circ+32^\circ}{2}\cos\frac{48^\circ-32^\circ}{2} = 2\operatorname{sen}40^\circ\cos 8^\circ$

b) $\cos 200^\circ + \cos 40^\circ = 2\cos\frac{200^\circ+40^\circ}{2}\cos\frac{200^\circ-40^\circ}{2} = 2\cos 120^\circ\cos 80^\circ$

c) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{5} = 2\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{5}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}$

d) $\operatorname{sen}105^\circ - \operatorname{sen}25^\circ = 2\cos\frac{105^\circ+25^\circ}{2}\operatorname{sen}\frac{105^\circ-25^\circ}{2} = 2\cos 65^\circ\operatorname{sen}40^\circ$

e) $\cos 23^\circ - \cos 57^\circ = -2\operatorname{sen}\frac{23^\circ+57^\circ}{2}\operatorname{sen}\frac{23^\circ-57^\circ}{2} = -2\operatorname{sen}40^\circ\operatorname{sen}(-17^\circ) = 2\operatorname{sen}40^\circ\operatorname{sen}17^\circ$

f) $\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{9} = -2\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{9}}{2}\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{9}}{2} = -2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9}\operatorname{sen}\frac{\pi}{9}$

94. Transforma en suma los siguientes productos de razones trigonométricas.

a) 2 sen 33º cos 11º **b)** cos 95º cos 38º **c)** sen 50º cos 75º **d)** sen 119º sen 25º

a) $33^\circ = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 11^\circ = \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 44^\circ;\ \hat{B} = 22^\circ$, luego 2 sen 33º cos 11º = sen 44º + sen 22º

b) $95^\circ = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 38^\circ = \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 133^\circ;\ \hat{B} = 57^\circ$ **, luego** cos 95º cos 38º = $\frac{1}{2}(\cos 133^\circ + \cos 57^\circ)$

c) $50^\circ = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 75^\circ = \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 125^\circ;\ \hat{B} = -25^\circ$ **, luego:**

sen 50º cos 75º = $\frac{1}{2}(\operatorname{sen}125^\circ + \operatorname{sen}(-25^\circ)) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}125^\circ - \operatorname{sen}25^\circ)$

d) $119^\circ = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 25^\circ = \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 144^\circ;\ \hat{B} = 94^\circ$ **, luego** sen 119º sen 25º = $-\frac{1}{2}(\cos 144^\circ - \cos 94^\circ)$

95. Expresa las siguientes sumas como productos.

a) sen 4α + sen 2α

b) sen 3α – sen α

c) cos 6α + cos 4α

d) cos 8α – cos 2α

a) $\operatorname{sen}4\alpha+\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\frac{4\alpha+2\alpha}{2}\cos\frac{4\alpha-2\alpha}{2}=2\operatorname{sen}3\alpha\cos\alpha$

b) $\operatorname{sen}3\alpha-\operatorname{sen}\alpha=2\cos\frac{3\alpha+\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{3\alpha-\alpha}{2}=2\cos2\alpha\operatorname{sen}\alpha$

c) $\cos6\alpha+\cos4\alpha=2\cos\frac{6\alpha+4\alpha}{2}\cos\frac{6\alpha-4\alpha}{2}=2\cos5\alpha\cos\alpha$

d) $\cos8\alpha-\cos2\alpha=-2\operatorname{sen}\frac{8\alpha+2\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{8\alpha-2\alpha}{2}=-2\operatorname{sen}5\alpha\operatorname{sen}3\alpha$

96. Demuestra que:

a) $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\alpha}$

b) $\operatorname{cotg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta+1}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}$

a) $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\frac{1}{\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\frac{1-\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{cotg}\beta}}{\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{cotg}\beta}}=\frac{\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta}}{\frac{\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta}}=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\alpha}$

b) $\operatorname{cotg}(\alpha-\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=\frac{1}{\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\frac{1+\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{cotg}\beta}}{\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}-\frac{1}{\operatorname{cotg}\beta}}=\frac{\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta+1}{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta}}{\frac{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta}}=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta+1}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}$

97. Desarrolla las siguientes expresiones.

a) sen $(\alpha+\beta+\gamma)$

b) cos $(\alpha+\beta-\gamma)$

c) sen $(2\alpha+\beta)$

d) cos $(\alpha-2\beta)$

a) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)=\operatorname{sen}(\alpha+(\beta+\gamma))=\operatorname{sen}\alpha\cos(\beta+\gamma)+\cos\alpha\operatorname{sen}(\beta+\gamma)=$

$=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\gamma-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma=$

$=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma$

b) $\cos(\alpha+\beta-\gamma)=\cos(\alpha+(\beta-\gamma))=\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\beta-\gamma)=$

$=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma+\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma=$

$=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma+\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma$

c) $\operatorname{sen}(2\alpha+\beta)=\operatorname{sen}2\alpha\cos\beta+\cos2\alpha\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}\beta$

d) $\cos(\alpha-2\beta)=\cos\alpha\cos2\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}2\beta=\cos\alpha(\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2\beta)+2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta=$

$=\cos\alpha\cos^2\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}^2\beta+2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

Identidades trigonométricas

98. Demuestra las siguientes identidades trigonométricas.

a) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-1}=\cos\alpha$ **b)** $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha$ **c)** $\dfrac{1+\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha$ **d)** $\sec^2\alpha-1=\operatorname{tg}^2\alpha$

a) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-1}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}-1}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{(\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}=\cos\alpha$

b) $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\operatorname{sen}^2\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\operatorname{sen}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha$

c) $\dfrac{1+\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{1+\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha$

d) $\sec^2\alpha-1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1=\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$

99. Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas.

a) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha$

b) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha=\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$

d) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\operatorname{tg}2\alpha$

e) $\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta=\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$

f) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta)^2=4\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

g) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2}=\operatorname{tg}2\alpha$

h) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}-\dfrac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{tg}\alpha$

a) $\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha\left(\dfrac{2}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-1\right)=\operatorname{tg}\alpha\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\dfrac{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\operatorname{tg}\alpha\dfrac{\dfrac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha}$

b) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$

d) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=2\operatorname{tg}2\alpha$

e) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)=\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta=$

$\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\beta-(1-\operatorname{sen}^2\alpha)\operatorname{sen}^2\beta=\operatorname{sen}^2\alpha(\cos^2\beta+\operatorname{sen}^2\beta)-\operatorname{sen}^2\beta=\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta$

f) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta)^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta+2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=$

$=2-2\left(\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=2-2\left(1-2\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

g) La expresión es equivalente a la demostrada en el apartado d.

h) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}-\dfrac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\dfrac{1-\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}-\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\dfrac{2\operatorname{sen}^2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}-\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{tg}\alpha$

100. Simplifica las expresiones trigonométricas dadas.

a) $(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)^2$

b) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta)$

c) $\operatorname{sen}2\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha)$

d) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$

e) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

a) $(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)^2=\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha-2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=2$

b) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\dfrac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$

c) $\operatorname{sen}2\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{1}{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}\right)=2$

d) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\cos\alpha}+1\right)=\dfrac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}\left(\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}+1\right)=$

$=\dfrac{(1-\operatorname{sen}\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)}{1-\operatorname{sen}\alpha}\left(\dfrac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}+1\right)=(1+\operatorname{sen}\alpha)(2+\cos\alpha)$

e) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\dfrac{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}-\dfrac{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=$

$=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\dfrac{(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}=1-\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=2\operatorname{sen}^2\alpha$

101. Simplifica las siguientes expresiones utilizando las fórmulas de transformación de sumas en productos.

a) $\dfrac{\operatorname{sen}8\alpha+\operatorname{sen}2\alpha}{2\cos3\alpha}$

b) $\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$

c) $\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}5\alpha-\operatorname{sen}3\alpha}$

d) $\dfrac{\cos2\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha+\operatorname{sen}\alpha}$

a) $\dfrac{\operatorname{sen}8\alpha+\operatorname{sen}2\alpha}{2\cos3\alpha}=\dfrac{2\operatorname{sen}5\alpha\cos3\alpha}{2\cos3\alpha}=\operatorname{sen}5\alpha$

b) $\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}=\dfrac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}}$

c) $\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}5\alpha-\operatorname{sen}3\alpha}=\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha}{2\cos4\alpha\operatorname{sen}\alpha}=\dfrac{1}{\cos4\alpha}$

d) $\dfrac{\cos2\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha+\operatorname{sen}\alpha}=\dfrac{2\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\cos\frac{3\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3\alpha}{2}}=\operatorname{cotg}\dfrac{3\alpha}{2}$

102. Demuestra que $\cos x=\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)-\operatorname{sen}^4\left(\frac{x}{2}\right)$.

$\cos^4\left(\dfrac{x}{2}\right)-\operatorname{sen}^4\left(\dfrac{x}{2}\right)=\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1-\cos x}{2}\right)^2=\dfrac{1+\cos^2x+2\cos x}{4}-\dfrac{1+\cos^2x-2\cos x}{4}=\cos x$

Ecuaciones trigonométricas

103. Con ayuda de la calculadora, halla la medida en grados del ángulo α del primer cuadrante tal que:

a) sen $\alpha = 0{,}345$ **c)** $\cos\alpha = 0{,}553$ **e)** $\sec\alpha = 0{,}442$

b) cosec $\alpha = 0{,}3$ **d)** tg $\alpha = 0{,}25$ **f)** cotg $\alpha = 0{,}01$

a) sen $\alpha = 0{,}345 \Rightarrow \alpha = 20^\circ\, 10'\, 54''$

b) cosec $\alpha = 0{,}3 \Rightarrow$ No existe ningún ángulo

c) $\cos\alpha = 0{,}553 \Rightarrow \alpha = 56^\circ\, 25'\, 37''$

d) tg $\alpha = 0{,}25 \Rightarrow \alpha = 14^\circ\, 2'\, 10''$

e) $\sec\alpha = 0{,}442 \Rightarrow$ No existe ningún ángulo

f) cotg $\alpha = 0{,}01 \Rightarrow \alpha = 89^\circ\, 25'\, 37''$

104. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en grados.

a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ **d)** $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **g)** $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **e)** $\cos x = -\frac{1}{2}$ **h)** $\operatorname{sen} x = 0$

c) $\operatorname{tg} x = 1$ **f)** $1 + \cos x = 0$ **i)** $\operatorname{tg} x = 0$

a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$

c) $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 45^\circ + 180^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

d) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 225^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$

e) $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120^\circ + 360^\circ k \\ x = 240^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$

f) $1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

g) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 150^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 150^\circ + 180^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

h) $\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

i) $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

105. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en radianes.

a) $\operatorname{sen} 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\operatorname{tg} 3x = -1$ **d)** $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = 0$ **e)** $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$ **f)** $\operatorname{tg}\frac{3x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

a) $\operatorname{sen} 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \\ 4x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}k \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k \end{cases}$

b) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 2x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \pi k \\ x = \frac{7\pi}{8} + \pi k \end{cases}$

c) $\operatorname{tg} 3x = -1 \Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ 3x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases}$

d) $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \pi k \Rightarrow x = 2\pi k$

e) $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{x}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi + 6\pi k \\ x = 4\pi + 6\pi k \end{cases}$

f) $\operatorname{tg}\frac{3x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ \frac{3x}{4} = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10\pi}{9} + \frac{8\pi k}{3} \\ x = \frac{22\pi}{9} + \frac{8\pi k}{3} \end{cases}$

106. Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\text{sen } x = \cos x$

b) $\text{sen } 2x - \text{sen } x = 0$

c) $\text{sen } x - \sqrt{3} \cos x = 0$

d) $\text{sen } x + \cos x = \sqrt{2}$

a) $\text{sen}\, x = \cos x \Rightarrow \text{tg}\, x = 1 \Rightarrow x = 45° + 180° k$

b) $\text{sen}\, 2x - \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}\, x \cos x - \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow x = 180° k \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60° + 360° k \\ x = 300° + 360° k \end{cases} \end{cases}$

c) $\text{sen}\, x - \sqrt{3} \cos x = 0 \Rightarrow \text{tg}\, x = \sqrt{3} \Rightarrow x = 60° + 180° k$

d) $\text{sen} x + \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow (\text{sen} x + \cos x)^2 = 2 \Rightarrow 1 + 2\,\text{sen}\, x \cos x = 2 \Rightarrow 2\,\text{sen}\, x \cos x = 1 \Rightarrow \text{sen}\, 2x = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = 90° + 360° k \Rightarrow x = 45° + 180° k$

Al elevar al cuadrado aparecen soluciones falsas con k impar. La solución es $x = 45° + 360° k$ con $k = 0, 1, 2...$

107. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo [0º, 360º].

a) $\text{tg } x + \text{cotg } x = 5$

b) $\text{tg } 2x = \text{cotg } x$

c) $8\cos 2x = 8\cos x - 9$

d) $2\text{sen}^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x$

a) $\text{tg}\, x + 4\,\text{cotg}\, x = 5 \Rightarrow \text{tg}\, x + \dfrac{4}{\text{tg}\, x} = 5 \Rightarrow \text{tg}^2 x + 4 = 5\,\text{tg}\, x \Rightarrow \text{tg}^2 x - 5\,\text{tg}\, x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{tg}\, x = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 75°\ 57'\ 50'' \\ x = 255°\ 57'\ 50'' \end{cases} \\ \text{tg}\, x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45° \\ x = 225° \end{cases} \end{cases}$

b) $\text{tg}\, 2x = \text{cotg}\, x \Rightarrow \dfrac{2\,\text{tg}\, x}{1 - \text{tg}^2 x} = \dfrac{1}{\text{tg}\, x} \Rightarrow 2\,\text{tg}^2 x = 1 - \text{tg}^2 x \Rightarrow \text{tg}^2 x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \text{tg}\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° \\ x = 210° \end{cases} \\ \text{tg}\, x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 150° \\ x = 330° \end{cases} \end{cases}$

c) $8\cos 2x = 8\cos x - 9 \Rightarrow 8\cos^2 x - 8\,\text{sen}^2 x - 8\cos x + 9 = 0 \Rightarrow 8\cos^2 x - 8 + 8\cos^2 x - 8\cos x + 9 = 0 \Rightarrow$

$16\cos^2 x - 8\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 75°\ 31'\ 21'' \\ x = 284°\ 28'\ 39'' \end{cases}$

d) $2\,\text{sen}^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x \Rightarrow 2\,\text{sen}^2 x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = 4\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60° \\ x = 300° \end{cases} \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120° \\ x = 240° \end{cases} \end{cases}$

108. Halla, para el intervalo [0, 2π], las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 0$ **b)** $\cos 2x - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x - \cos x$ **c)** $2\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0$

a) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x\left(1+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi \\ 1+\dfrac{1}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow \text{Sin solución real} \end{cases}$

b) $\cos 2x - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x - \cos x \Rightarrow \cos 2x + \cos x = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x \Rightarrow 2\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 2\operatorname{sen}\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\dfrac{x}{2}\left[\cos\dfrac{3x}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{3x}{2}\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \pi,\ x = 3\pi \text{ (No vale pues } 3\pi \notin [0, 2\pi]) \\ \cos\dfrac{3x}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\dfrac{3x}{2} = 1 \Rightarrow \dfrac{3x}{2} = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3x}{2} = \dfrac{5\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6},\ x = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$

c) $2\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x\left(2+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{6},\ x = \dfrac{7\pi}{6} \end{cases}$

109. Calcula, para las ecuaciones propuestas, las soluciones pertenecientes al intervalo [−π, π].

a) $\cos 3x = 1 + \cos 2x$ **c)** $\cos 5x + \cos 3x = \cos x$

b) $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 6x = 0$ **d)** $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x = 2$

a) $\cos 3x = 1 + \cos 2x \Rightarrow \cos(2x + x) = 1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \cos 2x \cos x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{senx} = 2\cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^3 x - \operatorname{sen}^2 x \operatorname{cosx} - 2\operatorname{sen}^2 x \operatorname{cosx} = 2\cos^2 x \Rightarrow \cos x\left(\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x - 2\cos x\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x\left(\cos^2 x - 3 + 3\cos^2 x - 2\cos x\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{\pi}{2} \\ 4\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0 \Rightarrow \cos x = -0{,}6514 \Rightarrow x = 2{,}28,\ x = -2{,}28 \end{cases}$

b) $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 6x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\dfrac{9x}{2}\cos\dfrac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{9x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -\dfrac{2\pi}{9},\ x = \dfrac{2\pi}{9} \\ \cos\dfrac{3x}{2} = 0 \Rightarrow x = \pi,\ x = -\dfrac{\pi}{3},\ x = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

c) $\cos 5x + \cos 3x = \cos x \Rightarrow 2\cos 4x \cos x = \cos x \Rightarrow \cos x(2\cos 4x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2},\ x = -\dfrac{\pi}{2} \\ \cos 4x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{12},\ x = \dfrac{\pi}{12},\ x = -\dfrac{\pi}{12},\ x = -\dfrac{5\pi}{12} \end{cases}$

d) $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x = 2 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$

110. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas en el intervalo [0, 360º].

a) $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \dfrac{5}{4} \\ \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ x - y = \pi \end{cases}$

a) $$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \dfrac{5}{4} \\ \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 y = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm 1 \\ \cos^2 y = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ,\ y = 45^\circ \\ x = 90^\circ,\ y = 135^\circ \\ x = 90^\circ,\ y = 225^\circ \\ x = 90^\circ,\ y = 315^\circ \\ x = 270^\circ,\ y = 45^\circ \\ x = 270^\circ,\ y = 135^\circ \\ x = 270^\circ,\ y = 225^\circ \\ x = 270^\circ,\ y = 315^\circ \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow \cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = 45^\circ \Rightarrow x - y = 90^\circ \\ \dfrac{x-y}{2} = 315^\circ \Rightarrow x - y = 630^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 90^\circ \\ x - y = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 90^\circ,\ \ y = 0^\circ$$

c) $$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)) = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)) = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \\ \operatorname{sen}(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 30^\circ \\ x - y = 0^\circ \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x + y = 150^\circ \\ x - y = 180^\circ \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x + y = 390^\circ \\ x - y = -180^\circ \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x + y = 510 \\ x - y = -180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15^\circ,\ y = 15^\circ \\ x = 75^\circ,\ y = 75^\circ \\ x = 285^\circ,\ y = 105^\circ \\ x = 105^\circ,\ y = 285^\circ \\ x = 165^\circ,\ y = 345^\circ \\ x = 345^\circ,\ y = 165^\circ \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ x - y = \pi \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x - \pi) = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4},\ y = \frac{\pi}{4}$$

111. Halla todas las soluciones de la siguiente ecuación: $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + 4\cos^3 x = 0$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + 4\cos^3 x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\frac{4x}{2}\cos\frac{2x}{2} + 4\cos^3 x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} 2x \cos x + 4\cos^3 x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos x\left(\operatorname{sen} 2x + 2\cos^2 x\right) = 0 \Rightarrow\Rightarrow 2\cos x\left(2\operatorname{sen} x \cos x + 2\cos^2 x\right) = 0 \Rightarrow 4\cos^2 x\left(\operatorname{sen} x + \cos x\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 135^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases} \Rightarrow x = 135^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

112. Resuelve este sistema en el intervalo [0, 2π]: $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1 \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases}$

Elevando al cuadrado las ecuaciones y sumando miembro a miembro los resultados:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y + 2(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \cos x \cos y) = 2 \Rightarrow 1 + 1 + 2\cos(x - y) = 2 \Rightarrow \cos(x - y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = y + \dfrac{\pi}{2} \\ y - x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y = x + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Sustituyendo la primera condición en la primera ecuación:

$$\operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen} y = 1 \Rightarrow \cos y + \operatorname{sen} y = 1 \Rightarrow \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = 1 - \operatorname{sen} y \Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 y = 1 + \operatorname{sen}^2 y - 2\operatorname{sen} y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 y - 2\operatorname{sen} y = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} y(\operatorname{sen} y - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} y = 0 \Rightarrow y = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} y = 1 \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{2},\ x = \pi \text{ (Falsa)} \end{cases}$$

De la misma forma, sustituyendo la segunda condición, se obtiene también la solución $x = 0,\ y = \dfrac{\pi}{2}$.

Resolución de triángulos

113. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.

a) $\hat{A} = 90^\circ$, $a = 25$ mm, $c = 14$ mm

b) $\hat{B} = 90^\circ$, $a = 28$ cm, $c = 45$ cm

c) $\hat{C} = 90^\circ$, $\hat{A} = 20^\circ$, $a = 12$ dm

d) $\hat{B} = 90^\circ$, $\hat{A} = 15^\circ$, $b = 15$ m

a) $b = \sqrt{25^2 - 14^2} = 20{,}71$ mm $\quad \operatorname{sen}\hat{C} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{14}{25} \Rightarrow \hat{C} = 34^\circ\ 3'\ 21''$ $\quad \hat{B} = 90^\circ - \hat{C} = 55^\circ\ 56'\ 39''$

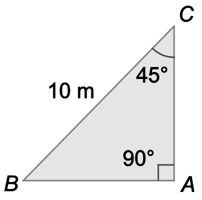
c) $\hat{B} = 90^\circ - \hat{A} = 70^\circ$ $\quad \operatorname{sen}\hat{A} = \dfrac{12}{c} \Rightarrow c = 35{,}09$ dm $\quad \operatorname{tg}\hat{A} = \dfrac{12}{b} \Rightarrow b = 32{,}97$ dm

d) $\hat{C} = 90^\circ - \hat{A} = 75^\circ$ $\quad \operatorname{sen}\hat{A} = \dfrac{a}{15} \Rightarrow a = 3{,}88$ m $\quad \cos\hat{A} = \dfrac{c}{15} \Rightarrow c = 14{,}49$ m

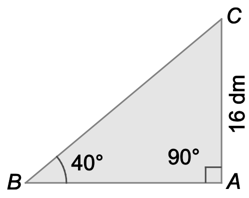
114. Calcula el área de cada uno de estos triángulos rectángulos.

a) $\hat{A} = 90^\circ$, $a = 73$ mm, $c = 55$ mm

b)



c)



a) $b = \sqrt{73^2 - 55^2} = 48 \Rightarrow$ Área: $S = \dfrac{55 \cdot 48}{2} = 1320$ mm^2

b) $b = c$; $c = 10\operatorname{sen} 45^\circ = 5\sqrt{2}$ m $\Rightarrow$ Área: $S = \dfrac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 25$ m^2

c) $c = \dfrac{16}{\operatorname{tg} 40^\circ} = 19{,}07$ dm $\Rightarrow$ Área: $S = \dfrac{19{,}07 \cdot 16}{2} = 152{,}56$ dm^2

115. Resuelve los siguientes triángulos.

a) $b = 20$ cm, $c = 28$ cm, $\hat{C} = 40^{\circ}$

b) $a = 41$ cm, $b = 9$ cm, $c = 40$ cm

c) $a = 3$ cm, $\hat{B} = 30^{\circ}$, $c = 5$ cm

d) $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $\hat{C} = 35^{\circ}$

e) $a = 30$ cm, $\hat{B} = 30^{\circ}$, $\hat{C} = 50^{\circ}$

f) $b = 25$ cm, $\hat{B} = 55^{\circ}$, $\hat{C} = 65^{\circ}$

a) $\dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{b\operatorname{sen}\hat{C}}{c} = \dfrac{20\cdot\operatorname{sen}40^{\circ}}{28} = 0,459 \Rightarrow \hat{B} = 27^{\circ}19'\,21''$

$\hat{A} = 180^{\circ} - \hat{B} - \hat{C} = 112^{\circ}\,40'\,39''$

$\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow a = \dfrac{c\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \dfrac{28\cdot\operatorname{sen}112^{\circ}\,40''\,39''}{\operatorname{sen}40^{\circ}} = 40,2\ \text{cm}$

b) $\cos\hat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{9^2+40^2-41^2}{2\cdot 9\cdot 40} = 0 \Rightarrow \hat{A} = 90^{\circ}$

$\cos\hat{B} = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{41^2+40^2-9^2}{2\cdot 40\cdot 41} = 0,9756 \Rightarrow \hat{B} = 12^{\circ}\ 40'\ 58''$

$\hat{C} = 180^{\circ} - \hat{A} - \hat{B} = 77^{\circ}\ 19'\ 2''$

c) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 30^{\circ} = 8,0192 \Rightarrow b = 2,83\ \text{cm}$

$\cos\hat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{2,83^2+5^2-3^2}{2\cdot 2,83\cdot 5} = 0,8484 \Rightarrow \hat{A} = 31^{\circ}\ 57'\ 43''$

$\hat{C} = 180^{\circ} - \hat{A} - \hat{B} = 118^{\circ}\ 2'\ 17''$

d) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} = 12^2 + 15^2 - 2\cdot 12\cdot 15\cdot\cos 35^{\circ} = 74,1053 \Rightarrow c = 8,61\ \text{cm}$

$\cos\hat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{15^2+8,61^2-12^2}{2\cdot 15\cdot 8,61} = 0,6006 \Rightarrow \hat{A} = 53^{\circ}\ 5'\ 14''$

$\hat{B} = 180^{\circ} - \hat{A} - \hat{C} = 91^{\circ}\ 54'\ 46''$

e) $\hat{A} = 180^{\circ} - \hat{B} - \hat{C} = 100^{\circ}$

$\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow c = \dfrac{a\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{30\operatorname{sen}50^{\circ}}{\operatorname{sen}100^{\circ}} = 23,34\ \text{cm}$

$\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow b = \dfrac{a\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{30\operatorname{sen}30^{\circ}}{\operatorname{sen}100^{\circ}} = 15,23\ \text{cm}$

f) $\hat{A} = 180^{\circ} - \hat{B} - \hat{C} = 60^{\circ}$

$\dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow c = \dfrac{b\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{25\operatorname{sen}65^{\circ}}{\operatorname{sen}55^{\circ}} = 27,66\ \text{cm}$

$\dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} \Rightarrow a = \dfrac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{25\operatorname{sen}60^{\circ}}{\operatorname{sen}55^{\circ}} = 26,43\ \text{cm}$

116. Calcula el área de cada uno de estos triángulos.

a) $\hat{A} = 80°$, $b = 25$ cm, $c = 16$ cm

b) $\hat{A} = 70°$, $\hat{B} = 40°$, $c = 20$ cm

c) $a = 16$ cm, $b = 25$ cm, $c = 15$ cm

d) $\hat{A} = 66°$, $a = 15$ cm, $c = 20$ cm

e) $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $\hat{C} = 35°$

a) $A = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \hat{A} = 196{,}96 \text{ cm}^2$

b) $\hat{C} = 70°$, por tanto, el triángulo es isósceles y $a = 20$ cm

$A = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} \hat{B} = 128{,}56 \text{ cm}^2$

c) $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0{,}792 \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = 0{,}6105$

$A = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \hat{A} = 114{,}47 \text{ cm}^2$

d) $\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c \operatorname{sen} \hat{A}}{a} = 1{,}218 > 1$

No existe tal triángulo

e) $A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \hat{C} = 43{,}02 \text{ cm}^2$

117. Halla el área de los dos triángulos que verifican que $\hat{A} = 45°$, $a = 6$ cm y $c = 7{,}5$ cm.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c \operatorname{sen} \hat{A}}{a} = 0{,}8839 \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 62°\ 6'\ 59'',\ \hat{B} = 72°\ 53'\ 1'' \\ \hat{C} = 117°\ 53'\ 1'',\ \hat{B} = 17°\ 6'\ 59'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} \hat{B} = 21{,}5 \text{ cm}^2 \\ A = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} \hat{B} = 6{,}62 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

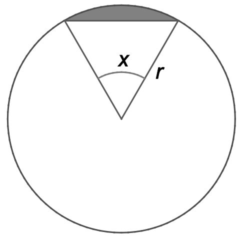
Síntesis

118. Si la suma de dos ángulos α y β es igual, en radianes, a $\frac{\pi}{3}$, calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}$$

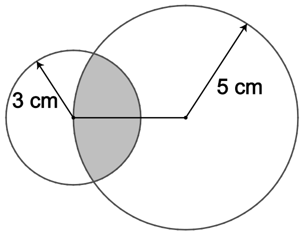
$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta} = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

119. a) Demuestra que el área del segmento circular de la figura se puede calcular mediante la expresión:



$$A=\frac{r^2}{2}(x-\operatorname{sen}x)$$

b) Calcula el área de la zona sombreada.



a) Área del sector circular: $A_1=\frac{\pi r^2 x}{360^\circ}$ Área del triángulo: $A_2=\frac{1}{2}r^2\operatorname{sen}x$

Área del segmento circular: $A=A_1-A_2=\frac{\pi r^2 x}{360^\circ}-\frac{1}{2}r^2\operatorname{sen}x=\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi x}{180^\circ}-\operatorname{sen}x\right)$

Considerando los ángulos dados en radianes, la expresión queda: $A=\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi x}{\pi}-\operatorname{sen}x\right)=\frac{r^2}{2}(x-\operatorname{sen}x)$

b) Aplicando la expresión anterior para calcular el área de los dos segmentos circulares que se forman en ambas circunferencias.

Área del segmento circular de la circunferencia de radio $r_1=5$ cm:

$$\cos\hat{A}_1=\frac{5^2+5^2-3^2}{2\cdot5\cdot5}=0{,}82\Rightarrow\hat{A}_1=34{,}92^\circ\Rightarrow\alpha_1=2\hat{A}_1=69{,}84^\circ=1{,}22\text{ rad}\Rightarrow A_1=\frac{r_1^2}{2}(\alpha_1-\operatorname{sen}\alpha_1)=3{,}51\text{ cm}^2$$

Área del segmento circular de la circunferencia de radio $r_2=3$ cm:

$$\cos\hat{A}_2=\frac{3^2+5^2-5^2}{2\cdot3\cdot5}=0{,}3\Rightarrow\hat{A}_2=72{,}54^\circ\Rightarrow\alpha_2=2\hat{A}_2=145{,}08^\circ=2{,}53\text{ rad}\Rightarrow A_2=\frac{r_2^2}{2}(\alpha_2-\operatorname{sen}\alpha_2)=8{,}8\text{ cm}^2$$

Por tanto, el área de la zona sombreada es $A=A_1+A_2=12{,}31\text{ cm}^2$.

120. a) Halla una fórmula que permita calcular el área de un rombo conociendo las medidas de su lado y de uno de sus ángulos.

b) ¿Cuál es el área de un rombo de 15 cm de lado si uno de sus ángulos mide 40°?

c) Calcula los ángulos de un rombo sabiendo que su lado mide 4 cm y su área 8 cm^2.

a) Un rombo de lado *x* y uno de sus ángulos α se puede dividir en dos triángulos isósceles iguales de área

$A=\frac{1}{2}x^2\operatorname{sen}\alpha$, por tanto, el área del rombo es $A_R=2A=x^2\operatorname{sen}\alpha$.

b) $A_R=15^2\operatorname{sen}40^\circ=144{,}63\text{ cm}^2$.

c) $8=4^2\operatorname{sen}\alpha\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow$ Los ángulos del rombo son 30º y 150º.

121. a) Demuestra que $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

b) Con ayuda de la fórmula anterior y el teorema del coseno, demuestra que en un triángulo de lados *a*, *b* y c se verifica:

$$\cos\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

con *p* el valor del semiperímetro del triángulo $p = \frac{a+b+c}{2}$.

a) $1+\cos\alpha = 1+\cos^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

b) $2\cos^2\frac{\hat{A}}{2} = 1+\cos\hat{A} = 1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2p(p-a)}{bc} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

122. Sabiendo que $\text{tg}\frac{\alpha}{2} = t$:

a) Calcula $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ y $\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}$ en función de *t*.

b) Con la ayuda de las fórmulas del ángulo doble, calcula $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$ y $\text{tg}\,\alpha$ en función de *t*.

c) Calcula en función de *t* las siguientes expresiones:

i) $\frac{1}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha}$ **ii)** $\frac{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha}$ **iii)** $\frac{\text{tg}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}$

a) $1+\text{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \sec^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1+\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{1+t^2}$ y $\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$

b) $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2t}{1-t^2}$

c) i) $\frac{1}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \frac{t^2+1}{-t^2+2t+1}$

ii) $\frac{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha} = \frac{\frac{2t}{t^2+1}-\frac{1-t^2}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \frac{\frac{t^2+2t-1}{t^2+1}}{\frac{-t^2+2t+1}{t^2+1}} = \frac{t^2+2t-1}{-t^2+2t+1}$

iii) $\frac{\text{tg}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha} = \frac{\frac{2t}{1-t^2}}{\frac{t^2+2t-1}{t^2+1}} = \frac{2t\left(t^2+1\right)}{\left(1-t^2\right)\left(t^2+2t-1\right)}$

CUESTIONES

123. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de sen α, cos α, tg α, cosec α, sec α y cotg α?

El valor mínimo de sen α y cos α es –1 y el valor máximo es 1.

El valor mínimo y máximo del resto de valores no está definido, tg α y cotg α pueden tomar cualquier valor, sec α y cosec α pueden tomar cualquier valor salvo los pertenecientes al intervalo (–1, 1).

124. Indica el número de soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = 3$

b) $\cos^n x = 10$ siendo n cualquier número natural.

a) No tiene solución, pues el valor máximo del sen x y del cos x es 1, con lo cual su suma nunca puede ser 3.

b) No tiene solución, pues el valor máximo del cos x es 1, con lo cual su potencia nunca puede ser 10.

125. Indica todos los ángulos positivos y menores que 360º tales que su tangente coincida con su cotangente.

La tangente coincide con la cotangente para aquellos ángulos en que su valor es 1 y –1. Luego, los ángulos positivos menores de 360º que satisfacen dicha condición son 45º, 135º, 225º y 315º.

126. ¿Cuánto vale la siguiente diferencia?

$$\operatorname{sen}(5\pi - \alpha) - \cos(\alpha + 8\pi)$$

$$\operatorname{sen}(5\pi - \alpha) - \cos(\alpha + 8\pi) = \operatorname{sen} 5\pi \cos\alpha - \cos 5\pi \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha \cos 8\pi + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} 8\pi =$$

$$= \operatorname{sen}\pi \cos\alpha - \cos\pi \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha \cos 2\pi + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} 2\pi = \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha$$

PROBLEMAS

127. Un globo está sujeto a una cuerda de 10 m de longitud. Debido a la acción del viento, el globo se ha desplazado de la vertical del punto de amarre y se encuentra a una altura de 8 m. Calcula la inclinación de la cuerda respecto de la línea de tierra.

Sea α la inclinación buscada, tenemos: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{8}{10} \Rightarrow \alpha = 53^\circ\ 7'\ 48''$.

128. En cierta ciudad, en el mediodía del solsticio de verano, los rayos solares tienen una inclinación de 73º 3′. Calcula la longitud de la sombra de un edificio de 52 m de altura.

Sea x la longitud de la sombra, tenemos: $\operatorname{tg} 73^\circ\ 3' = \dfrac{52}{x} \Rightarrow x = 15{,}85$ m.

129. Una señal de tráfico indica que la pendiente de un tramo de carretera es del 8 %, lo que quiere decir que en un desplazamiento horizontal de 100 m se realiza un ascenso de 8 m de altura.

a) ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal?

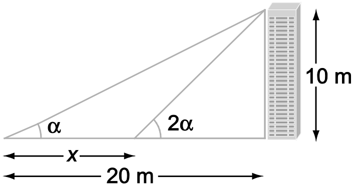
b) ¿Cuántos metros hay que recorrer para ascender 125 m?

a) Sea α el ángulo buscado, tenemos: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{8}{100} \Rightarrow \alpha = 4^\circ\ 34''\ 26''$

b) Sea x el recorrido pedido, tenemos: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{125}{x} \Rightarrow x = 1567{,}5$ m

130. Desde un cierto punto que dista 20 m del pie de una torre de 10 m de altura, vemos el punto más alto de ella bajo un cierto ángulo.

¿Qué distancia debemos recorrer hacia la torre para verlo con un ángulo que sea el doble del anterior?



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{10}{20};\quad \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = \frac{10}{20-x} \Rightarrow 4x = 50 \Rightarrow x = 12{,}5 \text{ m}$$

131. Desde un punto del suelo se ve la copa de un pino bajo un ángulo de 42º. Si nos alejamos 2,5 m hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie del pino, vemos la copa bajo un ángulo de 24º.

Calcula la altura del pino.

Sea h la altura del pino y x la distancia del pie del pino al primer punto. Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}42^\circ = \dfrac{h}{x}\\ \operatorname{tg}24^\circ = \dfrac{h}{2{,}5+x}\end{array}\right\} \Rightarrow h = x\operatorname{tg}42^\circ = 0{,}9x \Rightarrow 0{,}445 = \frac{0{,}9x}{2{,}5+x} \Rightarrow 1{,}1125 + 0{,}445x = 0{,}9x \Rightarrow x = 2{,}45 \text{ m} \Rightarrow h = 2{,}2 \text{ m}$$

132. Dos coches, con velocidades constantes respectivas de 90 y 80 km/h, viajan por una carretera que se bifurca en dos que forman un ángulo de 82º y son rectas. Si llegan a la vez a la bifurcación y cada coche toma una de las ramas, ¿qué distancia habrá entre ellos cuando lleven 15 minutos de viaje?

Sean e_1 y e_2 los espacios recorridos por los dos coches en 15 min = 0,25 h y sea x la distancia buscada, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}e_1 = 90\cdot 0{,}25 = 22{,}5 \text{ km}\\ e_2 = 80\cdot 0{,}25 = 20 \text{ km}\end{array}\right\} \Rightarrow x = \sqrt{22{,}5^2 + 20^2 - 2\cdot 22{,}5\cdot 20\cos 82^\circ} = 27{,}95 \text{ km}$$

133. Dos coches parten a la vez de un cruce del que salen dos carreteras: una en dirección norte y otra en dirección nornordeste. Uno de los coches toma la primera de ellas con una velocidad de 70 km/h, y el otro la segunda con una velocidad de 90 km/h, ambas constantes.

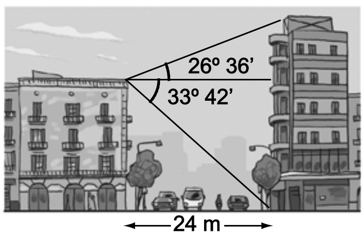
¿A qué distancia se encontrarán al cabo de 30 minutos?

El ángulo que forman las dos carreteras es $\alpha = 22^\circ\ 30'$.

Sean e_1 y e_2 los espacios recorridos por los dos coches en 30 min = 0,5 h y sea x la distancia buscada, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}e_1 = 70\cdot 0{,}5 = 35 \text{ km}\\ e_2 = 90\cdot 0{,}5 = 45 \text{ km}\end{array}\right\} \Rightarrow x = \sqrt{35^2 + 45^2 - 2\cdot 35\cdot 45\cos\alpha} = 18{,}43 \text{ km}$$

134. Calcula la altura de los dos edificios de la figura.

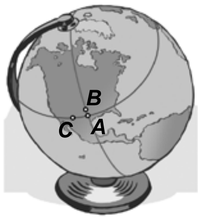


Sea x la altura del primer edificio e y la del segundo. Tenemos:

$$\operatorname{tg}33^\circ 42' = \frac{x}{24} \Rightarrow x = 24\operatorname{tg}33^\circ 42' = 16 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg}26^\circ 36' = \frac{y-x}{24} \Rightarrow y - x = 24\operatorname{tg}26^\circ 36' = 12 \text{ m} \Rightarrow y = 12 + 16 = 28 \text{ m}$$

135. Dos ciudades, *A* y *B*, están situadas sobre el mismo meridiano de la esfera terrestre, mientras que la ciudad *C* se encuentra en el mismo paralelo que *A*. La latitud de *A* es de $\alpha = 40º$ Norte.



a) Si la ciudad *B* está 150 km al norte de *A*, calcula su latitud sabiendo que el radio de la Tierra es de unos 6370 km.

b) Si la ciudad *C* está situada sobre el mismo paralelo, a 30º al oeste de *A*, ¿qué distancia separa estas dos ciudades?

a) Recordemos que la longitud de un arco de amplitud α grados y de una circunferencia de radio *r* es $L = \dfrac{\pi r \alpha}{180º}$:

$$\alpha + \beta = \frac{180º L}{\pi r} = \frac{180º\left[\dfrac{\pi \cdot 40º \cdot 6370}{180º} + 150\right]}{6370\pi} = 41º\ 21'$$

b) Se calcula en primer lugar el radio del paralelo correspondiente: $\operatorname{sen} 50º = \dfrac{r}{6370} \Rightarrow r = 4879{,}7$ km

$$L = \frac{\pi r \alpha}{180º} = 2555 \text{ km}$$

136. Un avión vuela entre dos ciudades, *A* y *B*, que distan 75 km entre sí. Las visuales desde *A* y *B* hasta el avión forman con la horizontal ángulos de 36º y 12º de amplitud, respectivamente.

Calcula la altura a la que vuela el avión y las distancias a las que se encuentra de *A* y de *B*, suponiendo que el avión y las ciudades están sobre el mismo plano vertical.

Sean x_A, x_B las distancias del avión a *A* y *B*, respectivamente, y *h* la altura del avión, tenemos:

$$\frac{x_B}{\operatorname{sen} 36º} = \frac{75}{\operatorname{sen} 132º} \Rightarrow x_B = 59 \text{ km} \qquad \frac{x_A}{\operatorname{sen} 12º} = \frac{75}{\operatorname{sen} 132º} \Rightarrow x_A = 21 \text{ km} \qquad h = x_B \cdot \operatorname{sen} 12º = 12{,}3 \text{ km}$$

137. Calcula el área de un pentágono regular si su perímetro coincide con el de un cuadrado que tiene 144 cm² de área.

El lado del cuadrado mide $\sqrt{144} = 12$ cm, por tanto, el perímetro del pentágono es 48 cm, es decir, cada lado del pentágono mide 9,6 cm. Si a_p es la apotema, tenemos $\operatorname{tg} 36º = \dfrac{4{,}8}{a_p} \Rightarrow a_p = 6{,}61$ cm y por tanto, el área del pentágono es $\dfrac{48 \cdot 6{,}61}{2} = 158{,}54$ cm^2.

138. Calcula los radios y las áreas de las circunferencias inscrita y circunscrita a un octógono regular de 5 cm de lado.

Calculamos el radio de la circunferencia circunscrita: $\operatorname{sen} \dfrac{360º}{16} = \dfrac{2{,}5}{R} \Rightarrow R = 6{,}53$ cm.

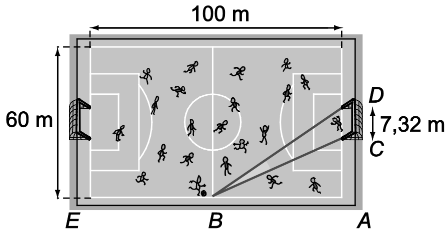
Calculamos el radio de la circunferencia inscrita: $\operatorname{tg} \dfrac{360º}{16} = \dfrac{2{,}5}{r} \Rightarrow r = 6{,}04$ cm.

Por tanto, el área de la circunferencia circunscrita es $A_1 = \pi R^2 = 134$ cm^2 y el de la circunferencia inscrita es $A_2 = \pi r^2 = 114$ cm^2.

139. Calcula el área del paralelogramo cuyos lados miden 10 y 15 cm, respectivamente, si uno de sus ángulos mide 35º.

El paralelogramo se puede dividir en dos triángulos iguales de área $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 15\cdot \operatorname{sen} 35^\circ$, por tanto, el área del paralelogramo es $10\cdot 15\cdot \operatorname{sen} 35^\circ = 86{,}04\ \text{cm}^2$.

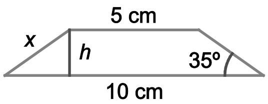
140. Calcula el ángulo de tiro del jugador que está situado en el punto *B* del campo.



$$\begin{cases} \operatorname{tg}\widehat{CBA} = \dfrac{26{,}34}{50} = 0{,}5268 \Rightarrow \widehat{CBA} = 27^\circ\ 46'\ 49'' \\ \operatorname{tg}\widehat{DBA} = \dfrac{33{,}66}{50} = 0{,}6732 \Rightarrow \widehat{DBA} = 33^\circ\ 56'\ 54'' \end{cases} \Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{DBA} - \widehat{CBA} = 6^\circ\ 10'\ 5''$$

141. Las bases de un trapecio isósceles miden 10 y 5 cm, respectivamente. El ángulo que forma la base mayor con cada uno de los lados no paralelos es de 35º. Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio.

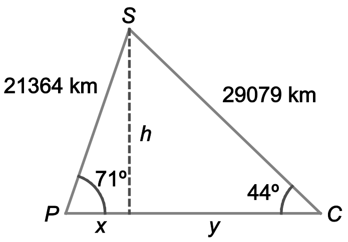
$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{h}{2{,}5} \Rightarrow h = 1{,}75\ \text{cm}$$



$$\cos 35^\circ = \frac{2{,}5}{x} \Rightarrow x = 3{,}05\ \text{cm} \Rightarrow P = 21{,}1\ \text{cm}$$

$$A = \frac{(10+5)\cdot 1{,}75}{2} = 13{,}13\ \text{cm}^2$$

142. Desde un satélite GPS se establece la posición de un coche respecto de un punto de referencia fijo en la Tierra. Las distancias desde el punto fijo y el coche al satélite son 21 364 y 29 079 km, respectivamente. Si la línea que une el punto fijo con el satélite forma un ángulo con el suelo de 71º, y la que une el coche con el satélite, 44º, ¿qué distancia separa al coche del punto fijo? ¿A qué altura está el satélite?

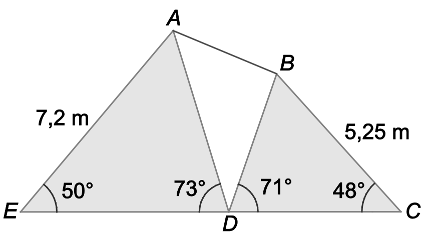


Observemos el dibujo, tenemos:

$$h = 21364\cdot \operatorname{sen} 71^\circ = 20200\ \text{km}$$

$$x + y = 21364\cdot \cos 71^\circ + 29079\cdot \cos 44^\circ = 27873{,}12\ \text{km}$$

143. Calcula la distancia entre los puntos *A* y *B*.

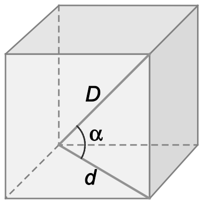


$$\frac{AD}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{7{,}2}{\operatorname{sen} 73^\circ} \Rightarrow AD = 5{,}77\ \text{m}$$

$$\frac{BD}{\operatorname{sen} 48^\circ} = \frac{5{,}25}{\operatorname{sen} 71^\circ} \Rightarrow BD = 4{,}13\ \text{m}$$

$$AB^2 = 5{,}77^2 + 4{,}13^2 - 2{,}\cdot 5{,}77\cdot 4{,}13\cos\left(180^\circ - 73^\circ - 71^\circ\right) = 11{,}79 \Rightarrow AB = 3{,}43\ \text{m}$$

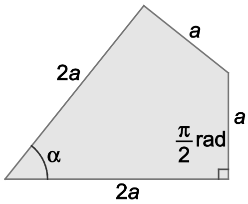
144. Calcula el ángulo α que forman la diagonal del cubo y la diagonal de una cara del mismo.



Sea a la arista del cubo, $D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$ y $d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, por tanto, tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{d}{D} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \alpha = 35^\circ\ 15'\ 52''$$

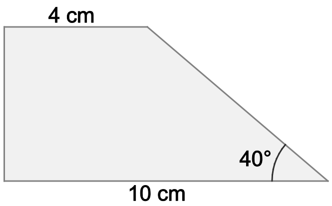
145. Calcula la amplitud del ángulo α de la figura.



La figura se puede dividir en dos triángulos iguales, ya que tienen los tres lados iguales, por tanto:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 26^\circ\ 33'\ 54'' \Rightarrow \alpha = 53^\circ\ 7'\ 48''$$

146. Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio de la figura.



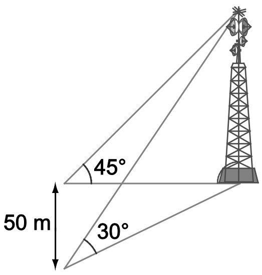
Altura: $h = 6\operatorname{tg} 40^\circ = 5{,}03$ cm

Lado restante: $x = 6\cos 40^\circ = 4{,}6$ cm

Perímetro: 23,63 cm

Área: $\frac{10+4}{2} \cdot 5{,}03 = 35{,}21\ \text{cm}^2$

147. Un hombre que está situado al oeste de una emisora de radio observa que su ángulo de elevación es de 45º. Camina 50 m hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de 30º. Halla la altura de la antena.



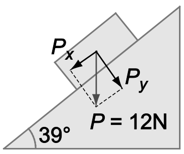
La distancia inicial a la antena es igual a su altura h, ya que el ángulo en el primer punto es de 45º.

Desde el segundo punto, la distancia a la antena es $\frac{h}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3}h$.

Al ser el triángulo del suelo rectángulo tenemos:

$$h^2 + 50^2 = \left(\sqrt{3}h\right)^2 = 3h^2 \Rightarrow h^2 = 1250 \Rightarrow h = 35{,}36 \text{ m}$$

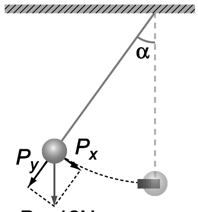
148. Calcula las componentes p_x y p_y de la fuerza $\vec{P}$ de la figura.



$$p_x = P\operatorname{sen}\alpha = 12\operatorname{sen}39^\circ = 7{,}55 \text{ N}$$

$$p_y = P\cos\alpha = 12\cos 39^\circ = 9{,}32 \text{ N}$$

149. Calcula, en función de α, las componentes p_x y p_y de la fuerza $\vec{P}$ en el siguiente péndulo. Halla el valor de la fuerza para el caso en que α = 30º.



$p_x = P \operatorname{sen} \alpha = 12 \operatorname{sen} 30^\circ = 6 \text{ N}$

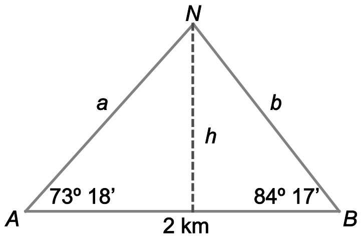
$p_y = P \cos \alpha = 12 \cos 30^\circ = 10{,}39 \text{ N}$

150. Dos personas que están separadas por 2 km de distancia, ven, sobre su plano vertical y en el mismo momento, una nube bajo ángulos de 73º 18′ y 84º 17′, respectivamente.

Calcula la altura de la nube y la distancia de la misma a cada uno de los observadores.

Hay dos posibles interpretaciones del problema.

Si la nube está situada entre los dos observadores, tenemos:

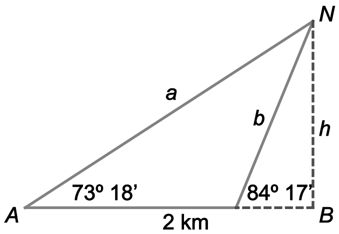


$$\frac{b}{\operatorname{sen} 73^\circ 18'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 22^\circ\ 25'} \Rightarrow b = 5{,}02 \text{ km}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 84^\circ 17'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 22^\circ\ 25'} \Rightarrow a = 5{,}22 \text{ km}$$

$$h = b \operatorname{sen} 84^\circ\ 17' = 5 \text{ km}$$

Si la nube está situada a un mismo lado de los dos observadores, tenemos



$$\frac{b}{\operatorname{sen} 73^\circ\ 18'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 10^\circ\ 59'} \Rightarrow b = 10{,}05 \text{ km}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 95^\circ\ 43'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 10^\circ\ 59'} \Rightarrow a = 10{,}45 \text{ km}$$

$$h = b \operatorname{sen} 84^\circ\ 17' = 10 \text{ km}$$

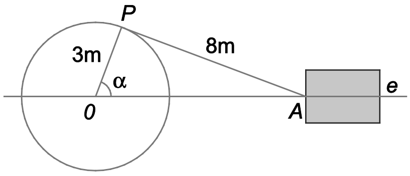
151. Determina, en función del número de lados, las áreas de los polígonos regulares de n lados inscritos y circunscritos, respectivamente, a una circunferencia de 10 cm de radio.

Área del polígono inscrito. $A = n\frac{1}{2}10^2 \operatorname{sen}\frac{360^\circ}{n} = 50n \operatorname{sen}\frac{360^\circ}{n}$

El lado del polígono circunscrito mide $2 \cdot 10 \cdot \operatorname{tg}\frac{360^\circ}{2n} = 20 \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$, por tanto, el área del polígono circunscrito es:

$$A = \frac{n \cdot 20 \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} \cdot 10}{2} = 100n \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$$

152.La máquina que representa la figura transforma un movimiento con trayectoria circular en un movimiento con trayectoria recta.



a) Calcula la distancia que separa a *O* de *A* cuando:

i) $\alpha = 0$ rad **ii)** $\alpha = \pi$ rad **iii)** $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ rad

b) Halla una expresión que relacione la distancia *OA* con el ángulo α.

c) Comprueba que la relación hallada se corresponde con los valores calculados en el apartado a).

d) Calcula la distancia *OA* cuando:

i) $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ rad **ii)** $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$ rad **iii)** $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}$ rad **iv)** $\alpha = \dfrac{11\pi}{6}$ rad

a) **i)** $\alpha = 0 \Rightarrow OA = 8 + 3 = 11$ m **ii)** $\alpha = \pi \Rightarrow OA = 8 - 3 = 5$ m **iii)** $\alpha = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow OA = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55} = 7{,}42$ m

b) Aplicando el teorema del coseno tenemos:

$$AP^2 = OA^2 + OP^2 - 2\cdot OA\cdot OP\cos\alpha \Rightarrow 64 = OA^2 + 9 - 6\cdot OA\cos\alpha \Rightarrow OA^2 - 6\cos\alpha OA - 55 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OA = \frac{6\cos\alpha \pm \sqrt{36\cos^2\alpha - 4\cdot 1\cdot(-55)}}{2} = 3\cos\alpha \pm \sqrt{9\cos^2\alpha + 55}$$

c) $\alpha = 0 \Rightarrow OA = 3\cos 0 \pm \sqrt{9\cos^2 0 + 55} = 3 \pm \sqrt{9 + 55} = 3 \pm 8 \Rightarrow \begin{cases} OA = 3 - 8 = -5 \text{ Imposible} \\ OA = 3 + 8 = 11 \text{ m} \end{cases}$

De igual manera, eliminando las soluciones imposibles tenemos:

$$\alpha = \pi \Rightarrow OA = 3\cos\pi + \sqrt{9\cos^2\pi + 55} = -3 + \sqrt{9 + 55} = -3 + 8 = 5 \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow OA = 3\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{9\cos^2\frac{\pi}{2} + 55} = 0 + \sqrt{0 + 55} = \sqrt{55} = 7{,}42 \text{ m}$$

d) Como antes, eliminando las soluciones imposibles, tenemos:

i) $\alpha = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow OA = 3\cos\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{9\cos^2\dfrac{\pi}{6} + 55} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\dfrac{27}{4} + 55} = 10{,}46$ m

ii) $\alpha = \dfrac{5\pi}{6} \Rightarrow OA = 3\cos\dfrac{5\pi}{6} + \sqrt{9\cos^2\dfrac{5\pi}{6} + 55} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\dfrac{27}{4} + 55} = 5{,}26$ m

iii) $\alpha = \dfrac{7\pi}{6} \Rightarrow OA = 3\cos\dfrac{7\pi}{6} + \sqrt{9\cos^2\dfrac{7\pi}{6} + 55} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\dfrac{27}{4} + 55} = 5{,}26$ m

iv) $\alpha = \dfrac{11\pi}{6} \Rightarrow OA = 3\cos\dfrac{11\pi}{6} + \sqrt{9\cos^2\dfrac{11\pi}{6} + 55} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\dfrac{27}{4} + 55} = 10{,}46$ m

153. **a)** Demuestra que en cualquier triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, se verifica que: $\operatorname{sen} 2\hat{B} = \operatorname{sen} 2\hat{C}$

b) Demuestra que cualquier triángulo *ABC* que verifique la igualdad anterior es isósceles o rectángulo.

a) $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow 2\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{C} \Rightarrow \operatorname{sen} 2\hat{B} = \operatorname{sen}(180^\circ - 2\hat{C}) = \operatorname{sen} 2\hat{C}$

b) $\operatorname{sen} 2\hat{B} = \operatorname{sen} 2\hat{C} \Rightarrow \begin{cases} 2\hat{B} = 2\hat{C} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \text{ Triángulo isósceles} \\ 2\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{C} \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \text{ Triángulo rectángulo} \end{cases}$

154. Prueba que si los ángulos de un triángulo verifican que $\cos\hat{A}+\cos\hat{B}=\operatorname{sen}\hat{C}$, entonces el triángulo es rectángulo. ¿Cuál es el ángulo recto?

$$\cos\hat{A}+\cos\hat{B}=\operatorname{sen}\hat{C}\Rightarrow 2\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow 2\cos\frac{180^\circ-\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos\left(90^\circ-\frac{\hat{C}}{2}\right)\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow 2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=\dfrac{\hat{C}}{2}\Rightarrow\hat{A}=\hat{B}+\hat{C}=90^\circ\Rightarrow\text{ Triángulo rectángulo en } A\\ \dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=-\dfrac{\hat{C}}{2}\Rightarrow\hat{B}=\hat{A}+\hat{C}=90^\circ\Rightarrow\text{ Triángulo rectángulo en } B\end{cases}$$

155. Enunciado Si $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ son los tres ángulos de un triángulo cualquiera, calcula el valor de la expresión:

$$\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{B}+\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{C}+\operatorname{cotg}\hat{B}\operatorname{cotg}\hat{C}$$

$$-\operatorname{cotg}\hat{C}=\operatorname{cotg}(180^\circ-\hat{C})=\operatorname{cotg}(\hat{A}+\hat{B})=\frac{1}{\operatorname{tg}(\hat{A}+\hat{B})}=\frac{1-\operatorname{tg}\hat{A}\operatorname{tg}\hat{B}}{\operatorname{tg}\hat{A}+\operatorname{tg}\hat{B}}=\frac{\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{B}-1}{\operatorname{cotg}\hat{A}+\operatorname{cotg}\hat{B}}$$

Por tanto, $\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{B}-1=-\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{C}-\operatorname{cotg}\hat{B}\operatorname{cotg}\hat{C}$ y la expresión vale 1.

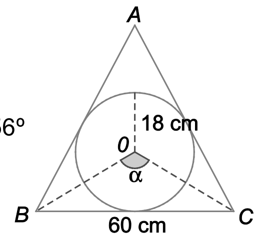
156. El radio de la circunferencia inscrita a un triángulo isósceles mide 18 cm. Resuelve el triángulo sabiendo que su base mide 60 cm.

$OB=\sqrt{18^2+30^2}=35$ cm

Aplicando el teorema del coseno al triángulo *OBC* tenemos:

$$\cos\alpha=\frac{35^2+35^2-60^2}{2\cdot 35\cdot 35}=-0,4694\Rightarrow\alpha=118^\circ\Rightarrow\hat{B}=\hat{C}=2\cdot 31^\circ=62^\circ\Rightarrow\hat{A}=180^\circ-2\cdot 62^\circ=56^\circ$$

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}62^\circ}=\frac{60}{\operatorname{sen}56^\circ}\Rightarrow AB=AC=\frac{60\operatorname{sen}62^\circ}{\operatorname{sen}56^\circ}=63,9\text{ cm}$$

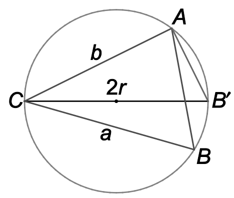


PARA PROFUNDIZAR

157. Para el triángulo de la figura y la circunferencia circunscrita a él demuestra la afirmación dada en cada caso.

a) Se cumple la relación: $r=\dfrac{a}{2\operatorname{sen}\hat{A}}=\dfrac{b}{2\operatorname{sen}\hat{B}}=\dfrac{c}{2\operatorname{sen}\hat{C}}$ (Ten en cuenta la relación entre los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{B}'$)

b) El área del triángulo se puede calcular como: $A=\dfrac{abc}{4r}$

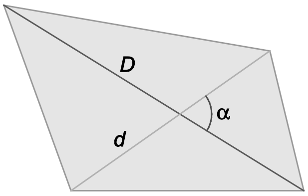


a) $\hat{B}=\hat{B}'$, ya que ambos son ángulos inscritos a la misma circunferencia y determinan el mismo arco.

$$\operatorname{sen}\hat{B}=\frac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{a}\text{ y }\operatorname{sen}\hat{B}'=\frac{b}{2r}\Rightarrow\frac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{a}=\frac{b}{2r}\Rightarrow r=\frac{a}{2\operatorname{sen}\hat{A}}\Rightarrow r=\frac{a}{2\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{2\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{c}{2\operatorname{sen}\hat{C}}$$

b) $A=\dfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C}=\dfrac{1}{2}ab\dfrac{c}{2r}=\dfrac{abc}{4r}$

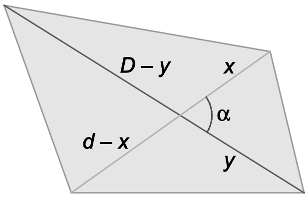
158. Observa la siguiente figura.



a) Si las diagonales de un cuadrilátero miden *d* y *D* unidades lineales, respectivamente, y forman un ángulo α, demuestra que el área de dicho cuadrilátero puede calcularse con la fórmula: $A = \frac{1}{2} dD \operatorname{sen} \alpha$

b) Calcula el área de un cuadrilátero cuyas diagonales forman un ángulo de 80º si miden 4 y 5 cm, respectivamente.

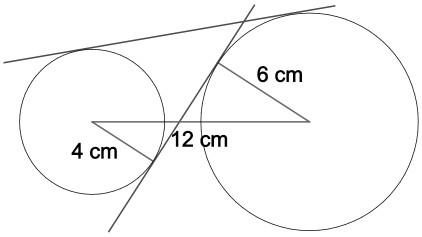
a) El cuadrilátero se puede dividir en cuatro triángulos, como $\operatorname{sen}\alpha(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ se puede escribir:



$$A = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\left[xy + x(D-y) + y(d-x) + (D-y)(d-x)\right] = \frac{1}{2} dD \operatorname{sen}\alpha$$

b) $A = \frac{1}{2} Dd \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} 4 \cdot 5 \operatorname{sen} 80^\circ = 9{,}85 \text{ cm}^2$

159. Considera las dos circunferencias coplanarias de la figura.



Calcula la inclinación sobre la recta que une los centros de:

a) la tangente común exterior.

b) la tangente común interior.

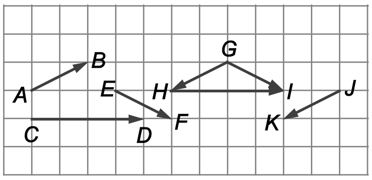
a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{6-4}{12} \Rightarrow \alpha = 9^\circ\ 35'\ 39''$

b) $\operatorname{sen}\beta = \frac{6+4}{12} \Rightarrow \beta = 56^\circ\ 26'\ 34''$

4 Vectores

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.



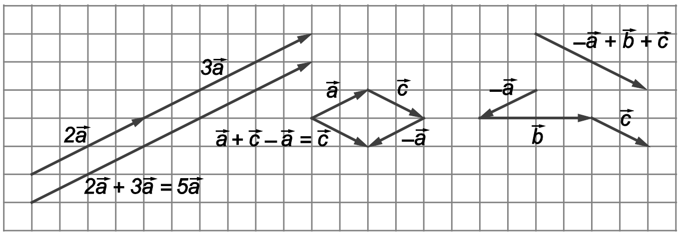
2. a) Indica tres parejas de vectores equipolentes.

b) Representa: $-2\overrightarrow{JK}+3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{JK}$ y $\overrightarrow{JK}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{GI}$

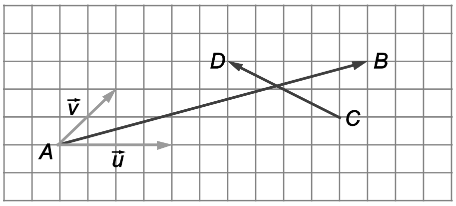
a) Son equipolentes las parejas: $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{GI}$, $\overrightarrow{GH}$ y $\overrightarrow{JK}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{HI}$

b) Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ los vectores libres cuyos representantes son $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ respectivamente. Tenemos

$-2\overrightarrow{JK}+3\overrightarrow{AB}=2\vec{a}+3\vec{a}=5\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{JK}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{a}=\vec{c}$ y $\overrightarrow{JK}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{GI}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

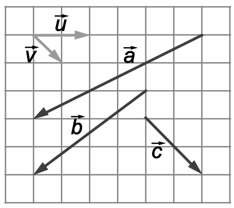


3. Expresa $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ en función de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



$\overrightarrow{AB}=2\vec{u}+\frac{3}{2}\vec{v}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CD}=-\frac{3}{2}\vec{u}+\vec{v}$

4. Ejercicio resuelto.



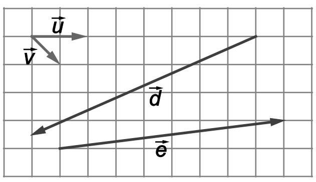
5. a) Halla las coordenadas de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ respecto de la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$.

b) Representa y calcula las coordenadas de los vectores $\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{e}=\vec{c}-\vec{a}$.

a) $\vec{a}=-\frac{9}{2}\vec{u}+3\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{b}=-\frac{7}{2}\vec{u}+3\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{c}=2\vec{v}$

b) $\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}=\frac{1}{2}\left(-\frac{9}{2}\vec{u}+3\vec{v}\right)+\left(-\frac{7}{2}\vec{u}+3\vec{v}\right)=-\frac{23}{4}\vec{u}+\frac{7}{2}\vec{v}=\left(-\frac{23}{4},\frac{9}{2}\right)$

$\vec{e}=\vec{c}-\vec{a}=2\vec{v}-\left(-\frac{9}{2}\vec{u}+3\vec{v}\right)=\frac{9}{2}\vec{u}-\vec{v}=\left(\frac{9}{2},-1\right)$



6. **a)** Comprueba que los vectores $\vec{u} = (2, -3)$ y $\vec{v} = (3, 6)$ forman una base de V^2.

b) Calcula las coordenadas del vector $\vec{w} = \left(6, -\frac{11}{2}\right)$ respecto de la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$.

a) $\frac{2}{3} \neq \frac{-3}{6} \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de V^2.

b) $\left(6, -\frac{11}{2}\right) = a \cdot (2, -3) + b \cdot (3, 6) \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 6 \\ -3a + 6b = -\frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{5}{2},\ b = \frac{1}{3}$

Las coordenadas de $\vec{w}$ respecto de la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ son $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{3}\right)$

7 a 10. **Ejercicios resueltos.**

11. **Halla el punto medio del segmento comprendido entre los puntos *A*(7, 12) y *B*(33, –10).**

$M\left(\frac{7+33}{2}, \frac{12-10}{2}\right) = M(20, 1)$

12. **Comprueba si los puntos *P*, *Q* y *R* están alineados o forman triángulo en los siguientes casos:**

a) $P(0, 3)$, $Q(1, 1)$ y $R(2, -1)$ **b)** $P(-3, 0)$, $Q(2, 1)$ y $R(6, 2)$ **c)** $P(-1, 0)$, $Q\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ y $R\left(0, \frac{3}{2}\right)$

a) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (1, 1) - (0, 3) = (1, -2) \\ \overrightarrow{PR} = (2, -1) - (0, 3) = (2, -4) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} \Rightarrow P, Q$ y R están alineados.

b) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (2, 1) - (-3, 0) = (5, 1) \\ \overrightarrow{PR} = (6, 2) - (-3, 0) = (9, 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5}{9} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow P, Q$ y R no están alineados, forman un triángulo.

c) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) - (-1, 0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \\ \overrightarrow{PR} = \left(0, \frac{3}{2}\right) - (-1, 0) = \left(1, \frac{3}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \Rightarrow P, Q$ y R están alineados.

13. **Calcula los valores de *a* y *b* para que los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ sean equipolentes sabiendo que: *P*(*a* + 4, –*b*), Q(*a* + 1, *b*), *R*(4, –1) y *S*(*a*, *b*).**

$\overrightarrow{PQ} \approx \overrightarrow{RS} \Rightarrow (a + 1 - a - 4, b + b) = (a - 4, b + 1) \Rightarrow \begin{cases} -3 = a - 4 \\ 2b = b + 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 1$

14. **Calcula el valor de *k* para que los puntos *A*(4, –1), *B*(–1, 2) y *C*(*k*, *k* + 1) estén alineados.**

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1-4, 2+1) = (-5, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (k-4, k+1+1) = (k-4, k+2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-5}{k-4} = \frac{3}{k+2} \Rightarrow -5k - 10 = 3k - 12 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$

15. Halla el vértice *D* del paralelogramo *ABCD* si *A*(2, 3), *B*(1, –1) y *C*(–3, 0).

Para que *ABCD* sea un paralelogramo basta con que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ sean equipolentes, por tanto, si $D(d_1, d_2)$ tenemos:

$$\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{DC} \Rightarrow (-1, -4) = (-3 - d_1, -d_2) \Rightarrow \begin{cases} -1 = -3 - d_1 \\ -4 = -d_2 \end{cases} \Rightarrow d_1 = -2,\ d_2 = 4 \Rightarrow D(-2, 4)$$

16. Ejercicio resuelto.

17. Si $\vec{u} = (-4, 3)$ y $\vec{v} = (2, -1)$, halla: $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \qquad |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = -4 \cdot 2 + 3(-1) = -11$$

18. Calcula, en función de *k*, el módulo de $\vec{v} = (k, -k)$ y $\vec{w} = (k+1, k-1)$ y su producto escalar.

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{k^2 + (-k)^2} = \sqrt{2k^2} = |k|\sqrt{2} \qquad |\vec{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = \sqrt{(k+1)^2 + (k-1)^2} = \sqrt{2k^2 + 2}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 = k(k+1) - k(k-1) = 2k$$

19. Calcula los valores de *k* para que el ángulo formado por $\vec{v} = (k, -k)$ y $\vec{w} = (k+1, k-1)$ sea de 45º.

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2k}{|k|\sqrt{2} \cdot \sqrt{2k^2 + 2}} = \frac{2k}{|2k|\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{k^2 + 1}} \Rightarrow \sqrt{2k^2 + 2} = \pm 2 \Rightarrow 2k^2 + 2 = 4 \Rightarrow k = 1,\ k = -1$$

Si $k = 1$, $\alpha = 45^\circ$; si $k = -1$, $\alpha = 135^\circ$

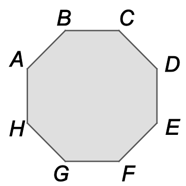
20. Ejercicio interactivo.

21 a 34. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Vectores fijos y vectores libres en el plano

35. La siguiente figura representa un octógono regular.



a) Indica dos vectores equipolentes cuyos orígenes y extremos sean vértices diferentes del octógono.

b) Indica dos vectores equipolentes cuyos orígenes y extremos sean vértices no consecutivos del octógono.

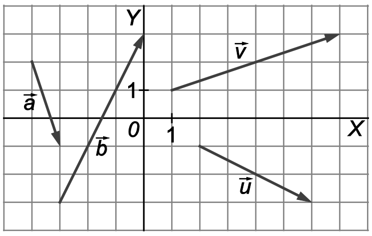
c) Indica dos vectores cuyos orígenes y extremos sean vértices diferentes del octógono y tales que tengan el mismo módulo y la misma dirección pero diferente sentido.

d) Indica dos vectores cuyos orígenes y extremos sean vértices del octógono y tales que tengan el mismo módulo y diferente dirección.

e) Indica dos vectores cuyos orígenes y extremos sean vértices del octógono y tales que tengan diferente módulo igual dirección y diferente sentido.

a) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{FE}$ **b)** $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{GE}$ **c)** $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{EH}$ **d)** $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ **e)** $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DG}$

36. Expresa los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en función de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

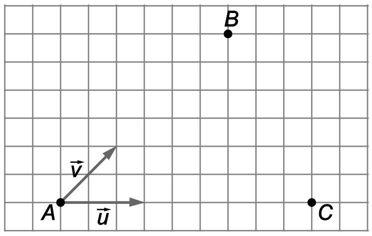


Respecto de la base canónica tenemos: $\vec{a} = (1, -3)$, $\vec{b} = (3, 6)$, $\vec{u} = (4, -2)$ y $\vec{v} = (6, 2)$

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{u} + a_2 \cdot \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 4a_1 + 6a_2 \\ -3 = -2a_1 + 2a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{a} = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$$

$$\vec{b} = b_1 \cdot \vec{u} + b_2 \cdot \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 4b_1 + 6b_2 \\ 6 = -2b_1 + 2b_2 \end{cases} \Rightarrow b_1 = -\frac{3}{2},\ b_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \vec{b} = -\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$$

37. Halla las coordenadas de $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CB}$ en la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$.



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 3\vec{u} - 3\vec{v} \text{ y } \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = -3\vec{u} + 3\vec{v}$$

Dependencia lineal

38. Decide si las siguientes parejas de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes o linealmente dependientes. ¿En qué casos los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base de V^2?

a) $\vec{u} = (-4, 2)$ y $\vec{v} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ **b)** $\vec{u} = (16, 32)$ y $\vec{v} = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ **c)** $\vec{u} = (2, -16)$ y $\vec{v} = (-1, -8)$

a) $\dfrac{-4}{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{-\frac{1}{3}} = -6 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes y, por tanto, no forman una base de V^2.

b) $\dfrac{16}{-\frac{1}{4}} = \dfrac{32}{-\frac{1}{2}} = -64 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes y, por tanto, no forman una base de V^2.

c) $\dfrac{2}{-1} \neq \dfrac{-16}{-8} \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de V^2.

39. Expresa, en cada caso, el vector $\vec{a}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $\vec{a} = (-12, -2)$, $\vec{u} = (4, -3)$ y $\vec{v} = (-1, -2)$

b) $\vec{a} = \left(-\frac{1}{2}, -5\right)$, $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -3\right)$ y $\vec{v} = (1, -2)$

c) $\vec{a} = \left(\frac{3}{4}, -\frac{7}{6}\right)$, $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ y $\vec{v} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{6}\right)$

a) $\vec{a} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} -12 = 4a_1 - a_2 \\ -2 = -3a_1 - 2a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -2,\ a_2 = 4 \Rightarrow \vec{a} = -2\vec{u} + 4\vec{v}$

b) $\vec{a} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a_1 + a_2 \\ -5 = -3a_1 - 2a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 3,\ a_2 = -2 \Rightarrow \vec{a} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$

c) $\vec{a} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2 \\ -\frac{7}{6} = -\frac{1}{3}a_1 - \frac{5}{6}a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = 1 \Rightarrow \vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$

Operaciones con coordenadas

40. Realiza las siguientes operaciones con coordenadas de vectores.

a) $2\left[2(-1, 3)-3\left[(-2, 0)-3(4, -3)\right]\right]-3(1, -2)$

b) $2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{3}\left(2, -\frac{3}{4}\right)$

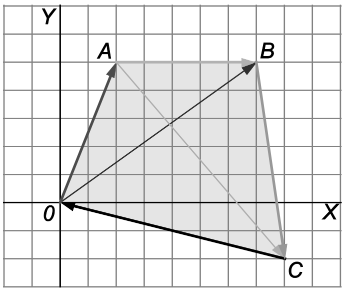
c) $2\left(2-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{4}\right)-2(2, -3)-\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$

a) $2\left[2(-1, 3)-3\left[(-2, 0)-3(4, -3)\right]\right]-3(1, -2)=2(40, -21)-(3, -6)=(77, -36)$

b) $2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{3}\left(2, -\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}\right)=\left(0, -\frac{11}{20}\right)$

c) $2\left(2-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{4}\right)-2(2, -3)-\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)=\left(\frac{10}{3}, \frac{3}{2}\right)-(4, -6)-\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{7}{6}, \frac{69}{10}\right)$

41. En la siguiente figura:



a) Calcula las coordenadas de los vectores libres de representantes: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

b) Comprueba que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}$ es el vector nulo.

c) Calcula las coordenadas de $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}$.

$A(2, 5)$, $B(7, 5)$, $C(8, -2)$ y $O(0, 0)$, por tanto:

a) $\overrightarrow{OA}=(2, 5)$, $\overrightarrow{AB}=(5, 0)$, $\overrightarrow{BC}=(1, -7)$, $\overrightarrow{CO}=(-8, 2)$, $\overrightarrow{OB}=(7, 5)$ y $\overrightarrow{AC}=(6, -7)$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=(2, 5)+(5, 0)+(1, -7)+(-8, 2)=(0, 0)$

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(2, 5)+(5, 0)=(7, 5)$ y $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}=(2, 5)+2(5, 0)-3(1, -7)=(9, 26)$

42. Calcula las coordenadas del origen *A* de un vector cuyo extremo es *B*(–2, 4) y que es equipolente al vector $\overrightarrow{CD}$, siendo *C*(5, –1) y *D*(–2, –2).

$\overrightarrow{CD}=(-7, -1)$, si $A(a_1, a_2)$: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow(-2-a_1, 4-a_2)=(-7, -1)\Rightarrow\begin{cases}-2-a_1=-7\\4-a_2=-1\end{cases}\Rightarrow a_1=5,\ a_2=5\Rightarrow A(5, 5)$

43. Dados los puntos *A*(–1, 4), *B*(2, 2) y *C*(–3, 5), calcula:

a) Las coordenadas del punto *D* tal que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

b) Las coordenadas del punto *D* tal que $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}$

c) Las coordenadas del punto *D* tal que $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$

d) Las coordenadas del punto *D* tal que $\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{AC}$

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow(3, -2)=(d_1+3, d_2-5)\Rightarrow\begin{cases}d_1+3=3\\d_2-5=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1=0\\d_2=3\end{cases}\Rightarrow D(0, 3)$

b) $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow(2-d_1, 2-d_2)=(-2, 1)\Rightarrow\begin{cases}2-d_1=-2\\2-d_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1=4\\d_2=1\end{cases}\Rightarrow D(4, 1)$

c) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}\Rightarrow(3, -2)=(3d_1+9, 3d_2-15)\Rightarrow\begin{cases}3d_1+9=3\\3d_2-15=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1=-2\\d_2=\frac{13}{3}\end{cases}\Rightarrow D\left(-2, \frac{13}{3}\right)$

d) $\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{AC}\Rightarrow(2-d_1, 2-d_2)=(4, -2)\Rightarrow\begin{cases}2-d_1=4\\2-d_2=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1=-2\\d_2=4\end{cases}\Rightarrow D(-2, 4)$

44. Dados los puntos *A*(2, –3), *B*(1, –4) y *C*(–1, –2), calcula las coordenadas de los vectores:

a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$

b) $\vec{v} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{CB}$

c) $\vec{w} = 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

d) $\vec{x} = 3\left(\vec{u} - \vec{v}\right) + 5\vec{v}$

a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = (-2, -2) + (-9, 3) + (-2, 2) = (-13, 3)$

b) $\vec{v} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{CB} = \left(2, -\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right) = (4, -2)$

c) $\vec{w} = 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = (-26, 6) + (2, -1) = (-24, 5)$

d) $\vec{x} = 3\left(\vec{u} - \vec{v}\right) + 5\vec{v} = 3\vec{u} + 2\vec{v} = (-39, 9) + (8, -4) = (-31, 5)$

45. Calcula, si es que existe, el valor de *k* para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $(2, -3 + k) = 3(3, -1) + 7(-1, -3)$

b) $(1, -6) = 4(k, 2) - 3(1, 3 - k)$

c) $\left(\frac{2}{3} + k, \frac{k}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{3}, k\right) + k(2, -3)$

a) $(2, -3 + k) = 3(3, -1) + 7(-1, -3) \Rightarrow (2, -3 + k) = (2, -24) \Rightarrow -3 + k = -24 \Rightarrow k = -21$

b) $(1, -6) = 4(k, 2) - 3(1, 3 - k) \Rightarrow (1, -6) = (4k - 3, -1 + 3k) \Rightarrow \begin{cases} 4k - 3 = 1 \Rightarrow k = 1 \\ -1 + 3k = -6 \Rightarrow k = -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow$ No existe ningún valor de *k* para el que se cumpla la igualdad.

c) $\left(\frac{2}{3} + k, \frac{k}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{3}, k\right) + k(2, -3) \Rightarrow \left(\frac{2}{3} + k, \frac{k}{2}\right) = \left(\frac{2}{3} + 2k, 2k - 3k\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} + k = \frac{2}{3} + 2k \\ \frac{k}{2} = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 0 \end{cases} \Rightarrow k = 0$

46. Calcula los valores de *x* y de *y* para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $(13, -8) = 5(x, -1) + 3(1, y)$

b) $(x, y) = -2(-1, -1 - x) + 4(-y, 3)$

c) $\left(x, \frac{y}{4}\right) = \frac{x}{2}\left(2, -\frac{1}{2}\right) + 3(x, y)$

a) $(13, -8) = 5(x, -1) + 3(1, y) \Rightarrow \begin{cases} 13 = 5x + 3 \\ -8 = -5 + 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

b) $(x, y) = -2(-1, -1 - x) + 4(-y, 3) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 4y \\ y = 2 + 2x + 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y = 2 \\ -2x + y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 2 \end{cases}$

c) $\left(x, \frac{y}{4}\right) = \frac{x}{2}\left(2, -\frac{1}{2}\right) + 3(x, y) \Rightarrow \begin{cases} x = x + 3x \\ \frac{y}{4} = -\frac{x}{4} + 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

47. Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores.

a) $\vec{u}=(3,\,3)$ **c)** $\vec{u}=(-20,\,-21)$ **e)** $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},\,-4\right)$

b) $\vec{u}=(12,\,-5)$ **d)** $\vec{u}=\left(3,\,-\sqrt{3}\right)$ **f)** $\vec{u}=\left(-\sqrt{2},\,-\sqrt{2}\right)$

a) $\vec{u}=(3,\,3)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\\ \arg(\vec{u})=\text{arctg}\,1=\frac{\pi}{4}\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al primer cuadrante.

b) $\vec{u}=(12,\,-5)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{12^2+(-5)^2}=\sqrt{169}=13\\ \arg(\vec{u})=\text{arctg}\left(-\frac{5}{12}\right)=5{,}89\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al cuarto cuadrante.

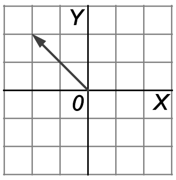
c) $\vec{u}=(-20,\,-21)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{(-20)^2+(-21)^2}=\sqrt{841}=29\\ \arg(\vec{u})=\text{arctg}\left(\frac{21}{20}\right)=3{,}95\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al tercer cuadrante.

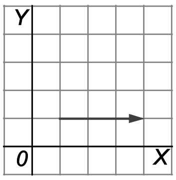
d) $\vec{u}=\left(3,\,-\sqrt{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\\ \arg(\vec{u})=\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{11\pi}{6}\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al cuarto cuadrante.

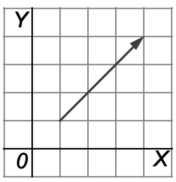
e) $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},\,-4\right)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-4)^2}=\sqrt{\frac{65}{4}}=\frac{\sqrt{65}}{2}\\ \arg(\vec{u})=\text{arctg}(-8)=4{,}84\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al cuarto cuadrante.

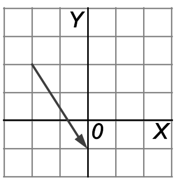
f) $\vec{u}=\left(-\sqrt{2},\,-\sqrt{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4}=2\\ \arg(\vec{u})=\text{arctg}\,1=\frac{5\pi}{4}\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al tercer cuadrante.

48. Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores.

a) 

b) 

c) 

d) 

a) $\vec{a}=(-2,\,2)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\\ \arg(\vec{a})=\text{arctg}(-1)=\frac{3\pi}{4}\text{ rad}\end{cases}$

c) $\vec{c}=(3,\,3)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{c}|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\\ \arg(\vec{c})=\text{arctg}\,1=\frac{\pi}{4}\text{ rad}\end{cases}$

b) $\vec{b}=(3,\,0)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{b}|=\sqrt{3^2+0^2}=\sqrt{9}=3\\ \arg(\vec{b})=\text{arctg}\,0=0\text{ rad}\end{cases}$

d) $\vec{d}=(2,\,-3)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{d}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}\\ \arg(\vec{d})=\text{arctg}\left(-\frac{3}{2}\right)=5{,}3\text{ rad}\end{cases}$

49. Calcula los lados de los triángulos *ABC* en cada caso.

a) $A(2, -1)$, $B(-1, 5)$ y $C(-1, -1)$ **b)** $A(3, -1)$, $B(-2, 3)$ y $C(5, 5)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-3, 6)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, 0)$ y $\overrightarrow{BC} = (0, -6)$

$$a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6,\ b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3 \text{ y } c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

b) $\overrightarrow{AB} = (-5, 4)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 6)$ y $\overrightarrow{BC} = (7, 2)$

$$a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53},\ b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ y } c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

50. Clasifica los siguientes triángulos, de los que conocemos sus vértices, según sus lados.

a) $A(-3, 0)$, $B(0, 1)$ y $C(1, -2)$ **b)** $A(1, 2)$, $B(2, 4)$ y $C(4, 1)$ **c)** $A(0, 0)$, $B(3, -1)$ y $C\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)$

a) $\overrightarrow{AB} = (3, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (4, -2)$ y $\overrightarrow{BC} = (1, -3)$

$$a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10},\ b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ y } c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Es un triángulo isósceles.

b) $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (3, -1)$ y $\overrightarrow{BC} = (2, -3)$

$$a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13},\ b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} = 2\sqrt{5} \text{ y } c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

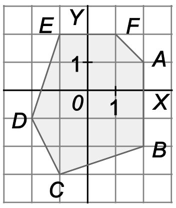
Es un triángulo escaleno.

c) $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)$ y $\overrightarrow{BC} = \left(\frac{\sqrt{3}-3}{2}, \frac{3\sqrt{3}+1}{2}\right)$

$$a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}+1}{2}\right)^2} = \sqrt{10},\ b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} = \sqrt{10} \text{ y } c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10}$$

Es un triángulo equilátero.

51. Calcula la medida de los lados del hexágono de la figura.



$A(2, 1)$, $B(2, -2)$, $C(-1, -3)$, $D(-2, -1)$, $E(-1, 2)$ y $F(1, 2)$, por tanto:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0+9} = 3$ $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ $|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{4+0} = 2$ $|\overrightarrow{FA}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Producto escalar

52. Calcula el producto escalar de:

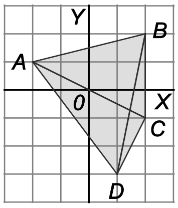
a) $\vec{u} = (3, 4)$ y $\vec{v} = (2, 5)$ **b)** $\vec{u} = (-2, 4)$ y $\vec{v} = (2, -1)$ **c)** $\vec{u} = (-3, -4)$ y $\vec{v} = (2, 0)$ **d)** $\vec{u} = (-1, -3)$ y $\vec{v} = (1, 3)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 + 20 = 26$ **b)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 - 4 = -8$ **c)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 0 = -6$ **d)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 - 9 = -10$

53. Halla el módulo de la proyección ortogonal del vector $\vec{u} = (2, -1)$ sobre el vector $\vec{v} = (1, -4)$.

$$|\text{proy}_{\vec{v}}\, \vec{u}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{6}{\sqrt{17}} = \frac{6\sqrt{17}}{17}$$

54. Calcula los productos escalares que se indican, si los vectores vienen determinados por la figura.



a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ **c)** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DA}$

b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BA}$ **d)** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(4,1)\cdot(0,-3)=0-3=-3$

b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BA}=(-1,-2)\cdot(-4,-1)=4+2=6$

c) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DA}=(4,-2)\cdot(-3,4)=-12-8=-20$

d) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=(4,-2)\cdot(1,5)=4-10=-6$

55. Calcula el valor o los valores de *k* para que se verifiquen las siguientes igualdades.

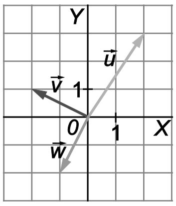
a) $(2,k)\cdot(-1,3)=-2$ **b)** $(3,-k)\cdot(2,-1)=4k$ **c)** $\left(5,-\frac{k}{2}\right)\cdot(k,-k)=6k$

a) $(2,k)\cdot(-1,3)=-2\Rightarrow -2+3k=-2\Rightarrow k=0$

b) $(3,-k)\cdot(2,-1)=4k\Rightarrow 6+k=4k\Rightarrow k=2$

c) $\left(5,-\frac{k}{2}\right)\cdot(k,-k)=6k\Rightarrow 5k+\frac{k^2}{2}=6k\Rightarrow k^2-2k=0\Rightarrow k(k-2)=0\Rightarrow\begin{cases}k=0\\k=2\end{cases}$

56. Dados los vectores de la figura, resuelve las operaciones que se indican.



a) $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

b) $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)+\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\vec{w}$

c) $\vec{v}\cdot\left(2\vec{u}-3\vec{w}\right)+\left(-3\vec{w}+2\vec{u}\right)\cdot\vec{v}$

$\vec{u}=(2,3)$, $\vec{v}=(-2,1)$ y $\vec{w}=(-1,-2)$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=-1-8=-9$

b) $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)+\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\vec{w}=(2,3)\cdot(-3,-1)+(0,4)\cdot(-1,-2)=-9-8=-17$

c) $\vec{v}\cdot\left(2\vec{u}-3\vec{w}\right)+\left(-3\vec{w}+2\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=(-2,1)\cdot(7,12)+(7,12)\cdot(-2,1)=-2-2=-4$

Vectores paralelos y vectores perpendiculares

57. a) Escribe todos los vectores paralelos al vector libre de coordenadas $\vec{u}=(2,-3)$.

b) Escribe todos los vectores perpendiculares al vector libre de coordenadas $\vec{u}=(2,-3)$.

c) Halla un vector paralelo a $\vec{u}=(2,-3)$ y unitario.

d) Halla un vector perpendicular a $\vec{u}=(2,-3)$ y unitario.

a) $(2t,-3t)$ con $t\in\mathbb{R}$

b) $(3t,2t)$ con $t\in\mathbb{R}$

c) $\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{-3}{\sqrt{13}}\right)=\left(\frac{2\sqrt{13}}{13},\frac{-3\sqrt{13}}{13}\right)$

d) $\left(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\right)=\left(\frac{3\sqrt{13}}{13},\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$

58. Para cada caso, calcula todos los vectores unitarios que tienen la misma dirección que el vector $\vec{u}$. ¿Cuáles de ellos tienen también el mismo sentido?

a) $\vec{u}=(10,-24)$ **b)** $\vec{u}=(-2{,}7;\,-3{,}6)$ **c)** $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},\,4\right)$

a) $\vec{u}=(10,-24)\Rightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{10}{\sqrt{10^2+(-24)^2}},\,\dfrac{-24}{\sqrt{10^2+(-24)^2}}\right)=\left(\dfrac{10}{26},\,\dfrac{-24}{26}\right)=\left(\dfrac{5}{13},\,\dfrac{-12}{13}\right)\\ \left(\dfrac{-10}{\sqrt{10^2+(-24)^2}},\,\dfrac{24}{\sqrt{10^2+(-24)^2}}\right)=\left(\dfrac{-10}{26},\,\dfrac{24}{26}\right)=\left(\dfrac{-5}{13},\,\dfrac{12}{13}\right)\end{cases}$

El primero de ellos tiene el mismo sentido que $\vec{u}$.

b) $\vec{u}=(-2{,}7;\,-3{,}6)\Rightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{-2{,}7}{4{,}5};\,\dfrac{-3{,}6}{4{,}5}\right)=(-0{,}6;\,-0{,}8)\\ \left(\dfrac{2{,}7}{4{,}5};\,\dfrac{3{,}6}{4{,}5}\right)=(0{,}6;\,0{,}8)\end{cases}$. El primero de ellos tiene el mismo sentido que $\vec{u}$.

c) $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{2},\,4\right)\Rightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{65}}{2}},\,\dfrac{4}{\frac{\sqrt{65}}{2}}\right)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{65}},\,\dfrac{8}{\sqrt{65}}\right)\\ \left(-\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{65}}{2}},\,-\dfrac{4}{\frac{\sqrt{65}}{2}}\right)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{65}},\,-\dfrac{8}{\sqrt{65}}\right)\end{cases}$. El primero de ellos tiene el mismo sentido que $\vec{u}$.

59. Calcula las coordenadas de un vector paralelo al $\overrightarrow{AF}$ y de módulo 10, siendo *A*(–1, 3) y *F*(–4, 7).

$\overrightarrow{AF}=(-3,\,4)$, los vectores paralelos a $\overrightarrow{AF}$ son de la forma $(-3t,\,4t)$ con $t\in\mathbb{R}$. Así: $\left|(-3t,\,4t)\right|=10\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{9t^2+16t^2}=10\Rightarrow 5|t|=10\Rightarrow t=\pm 2$. Por tanto, existen dos posibles soluciones: $(-6,\,8)$ y $(6,\,-8)$.

60. Determina un vector perpendicular a $\vec{u}=(-5,\,12)$ y que tenga el mismo módulo que $\vec{u}$. ¿Cuántas soluciones hay?

Hay dos vectores perpendiculares a $\vec{u}$ y con su mismo módulo: $(12,\,5)$ y $(-12,\,-5)$.

Ángulo de dos vectores

61. Calcula el ángulo que forman en cada caso los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $\vec{u}=(3,4)$ y $\vec{v}=(5,12)$ **c)** $\vec{u}=(-1,2)$ y $\vec{v}=(1,-2)$ **e)** $\vec{u}=(2,-1)$ y $\vec{v}=(1,2)$

b) $\vec{u}=(20,-21)$ y $\vec{v}=(-1,1)$ **d)** $\vec{u}=(1,-1)$ y $\vec{v}=(2,2)$ **f)** $\vec{u}=(0,2)$ y $\vec{v}=(3,-1)$

a) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{63}{\sqrt{25}\sqrt{169}}=\dfrac{63}{65}\Rightarrow\alpha=14{,}25^\circ$

b) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{-41}{\sqrt{841}\sqrt{2}}=-\dfrac{41}{29\sqrt{2}}=-\dfrac{41\sqrt{2}}{58}\Rightarrow\alpha=178{,}6^\circ$

c) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=-1\Rightarrow\alpha=180^\circ$

d) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{0}{\sqrt{2}\sqrt{8}}=0\Rightarrow\alpha=90^\circ$

e) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{0}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=0\Rightarrow\alpha=90^\circ$

f) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{10}}=-\dfrac{2}{2\sqrt{10}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\alpha=108{,}43^\circ$

62. Halla el valor de *m* para que los vectores $\vec{u}=(m,1)$ y $\vec{v}=(-2,3)$ forman un ángulo de:

a) 30º **b)** 135º **c)** 90º **d)** 0º

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{-2m+3}{\sqrt{m^2+1}\sqrt{13}}=\frac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}$$

a) $\dfrac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow -4m+6=\sqrt{39m+39}\Rightarrow 16m^2+36-48m=39m+39\Rightarrow 16m^2-87m-3=0\Rightarrow$

$\Rightarrow m=\dfrac{87+\sqrt{7761}}{32}$ (Falsa), $m=\dfrac{87-\sqrt{7761}}{32}$

b) $\dfrac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 4m-6=\sqrt{26m+26}\Rightarrow 16m^2+36-48m=26m+26\Rightarrow 16m^2-74m+10=0\Rightarrow$

$\Rightarrow m=\dfrac{37+\sqrt{1209}}{16}$, $m=\dfrac{37-\sqrt{1209}}{16}$ (Falsa)

c) $\dfrac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}=0\Rightarrow -2m+3=0\Rightarrow m=\dfrac{3}{2}$

d) $\dfrac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}=1\Rightarrow -2m+3=\sqrt{13m+13}\Rightarrow 4m^2+9-12m=13m+13\Rightarrow 4m^2-25m-4=0\Rightarrow$

$\Rightarrow m=\dfrac{25+\sqrt{689}}{8}$ (Falsa), $m=\dfrac{25-\sqrt{689}}{8}$

63. Calcula los ángulos del triángulo de vértices *ABC*.

a) *A*(1, 3), *B*(2, 1) y *C*(4, 1) **b)** *A*(3, 1), *B*(0, 5) y *C*(4, 3)

a) $\overrightarrow{AB}=(1,-2)$ y $\overrightarrow{AC}=(3,-2)\Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{7}{\sqrt{65}}=\dfrac{7\sqrt{65}}{65}\Rightarrow \hat{A}=29{,}74°$

$\overrightarrow{BA}=(-1,2)$ y $\overrightarrow{BC}=(2,0)\Rightarrow \cos\hat{B}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{-2}{2\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow \hat{B}=116{,}57°$

$\overrightarrow{CA}=(-3,2)$ y $\overrightarrow{CB}=(-2,0)\Rightarrow \cos\hat{C}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{6}{2\sqrt{13}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\Rightarrow \hat{C}=33{,}69°$

b) $\overrightarrow{AB}=(-3,4)$ y $\overrightarrow{AC}=(1,2)\Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{5}{5\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow \hat{A}=63{,}43°$

$\overrightarrow{BA}=(3,-4)$ y $\overrightarrow{BC}=(4,-2)\Rightarrow \cos\hat{B}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{20}{10\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\Rightarrow \hat{B}=26{,}57°$

$\overrightarrow{CA}=(-1,-2)$ y $\overrightarrow{CB}=(-4,2)\Rightarrow \cos\hat{C}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=0\Rightarrow \hat{C}=90°$

64. Clasifica los siguientes triángulos según los ángulos.

a) *A*(1, 3), *B*(3, 0) y *C*(–2, 1) **b)** *A*(1, 3), *B*(–2, 1) y *C*(2, –1) **c)** *A*(1, 3), *B*(–2, 1) y *C*(4, 0)

a) $\overrightarrow{AB}=(2,-3)$ y $\overrightarrow{AC}=(-3,-2)\Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=0\Rightarrow \hat{A}=90°$. Triángulo rectángulo en *A*.

b) $\overrightarrow{AB}=(-3,-2)$ y $\overrightarrow{AC}=(1,-4)\Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{5}{\sqrt{221}}=\dfrac{5\sqrt{221}}{221}\Rightarrow \hat{A}=70{,}35°$

$\overrightarrow{BA}=(3,2)$ y $\overrightarrow{BC}=(4,-2)\Rightarrow \cos\hat{B}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{8}{2\sqrt{65}}=\dfrac{4\sqrt{65}}{65}\Rightarrow \hat{B}=60{,}26°$

$\overrightarrow{CA}=(-1,4)$ y $\overrightarrow{CB}=(-4,2)\Rightarrow \cos\hat{C}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{12}{2\sqrt{85}}=\dfrac{6\sqrt{85}}{85}\Rightarrow \hat{C}=49{,}4°$

Triángulo acutángulo.

c) $\overrightarrow{AB}=(-3,-2)$ y $\overrightarrow{AC}=(3,-3)\Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-3}{3\sqrt{26}}=-\dfrac{\sqrt{26}}{26}\Rightarrow \hat{A}=101{,}31°$. Triángulo obtusángulo.

65. Calcula los ángulos del cuadrilátero cuyos vértices son *A*(2, 2), *B*(2, 4), *C*(–1, 1) y *D*(–1, –1).

Observemos que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(0,2)$, por lo que se trata de un paralelogramo, con lo que $\hat{A}=\hat{C}$ y $\hat{B}=\hat{D}=180°-\hat{A}$.

Por tanto: $\cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{-6}{6\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \hat{A}=\hat{C}=135°$ y $\hat{B}=\hat{D}=45°$.

Síntesis

66. Dados los vectores $\vec{u} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ y $\vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, calcula:

a) Los módulos de ambos vectores.

b) El producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

c) El ángulo que forman los dos vectores.

d) Halla el módulo de la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y la de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

e) Compara los cocientes $\dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ y $\dfrac{|proy_{\vec{u}}\vec{v}|}{|proy_{\vec{v}}\vec{u}|}$.

f) Halla el ángulo que forman $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}$.

g) Halla las coordenadas de $\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}$ y $\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}$.

a) $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$ $\qquad$ $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 6\cdot(-4) + (-8)\cdot 3 = -48$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = -\dfrac{24}{25} \Rightarrow \alpha = 163{,}74^\circ$

d) $|proy_{\vec{v}}\vec{u}| = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \dfrac{48}{5} = 9{,}6$ $\qquad$ $|proy_{\vec{u}}\vec{v}| = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|} = \dfrac{48}{10} = 4{,}8$

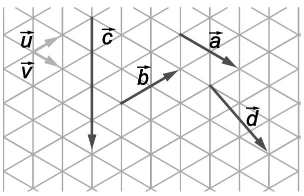
e) Son iguales: $\dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} = \dfrac{proy_{\vec{u}}\vec{v}}{proy_{\vec{v}}\vec{u}} = 0{,}5$

f) $\vec{u}+\vec{v} = 2\vec{i} - 5\vec{j} \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{52}{10\sqrt{29}} = \dfrac{26\sqrt{29}}{145} \Rightarrow \beta = 15{,}07^\circ$

g) Como α es obtuso, $proy_{\vec{v}}\vec{u}$ tiene sentido opuesto a $\vec{v}$ y $proy_{\vec{v}}\vec{u}$ tiene sentido opuesto a $\vec{u}$. Así:

$\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u} = |\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}|\cdot\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\dfrac{192}{25}, -\dfrac{144}{25}\right)$ $\qquad$ $\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v} = |\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}|\cdot\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(-\dfrac{288}{100}, \dfrac{384}{100}\right)$

67. Calcula las coordenadas de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ respecto de la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.



$\vec{a} = 2\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{b} = 2\vec{u}$ $\qquad$ $\vec{c} = -4\vec{u} + 4\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{d} = -\vec{u} + 3\vec{v}$

68. Halla un vector $\vec{v}$ de módulo 5 sabiendo que $\vec{u}\cdot\vec{v} = -14$, siendo $\vec{u} = (6, 8)$.

Si $\vec{v} = (a, b)$, tenemos:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ 6a + 8b = -14 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-7-4b}{3} \Rightarrow \left(\frac{-7-4b}{3}\right)^2 + b^2 = 25 \Rightarrow 25b^2 + 56b - 176 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{44}{25}, \; a = -\dfrac{117}{25} \\ b = -4, \; a = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = \left(-\dfrac{117}{25}, \dfrac{44}{25}\right) \\ \vec{v} = (3, -4) \end{cases}$$

69. Calcula el vértice *D* del paralelogramo *ABCD*, siendo *A*(–3, 4), *B*(–2, –4) y *C*(3, –2). Calcula el punto donde se cortan las diagonales del paralelogramo.

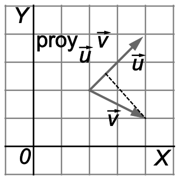
Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. Este punto de corte será, por tanto, el punto medio del segmento *AC*:

$$M\left(\frac{-3+3}{2},\ \frac{4-2}{2}\right)=M(0,\ 1)$$

Si $D(d_1, d_2)$ es el cuarto vértice del paralelogramo, se deberá verificar que el punto medio del segmento *BD* es *M*:

$$\left(\frac{-2+d_1}{2},\ \frac{-4+d_2}{2}\right)=(0,\ 1)\Rightarrow d_1=2,\ d_2=6\Rightarrow D(2,\ 6)$$

70. Dados los vectores de la figura:



a) Calcula las coordenadas del vector proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

b) Descompón $\vec{v}$ como suma de dos vectores: uno de igual dirección que $\vec{u}$ y otro perpendicular a $\vec{u}$.

$\vec{u}=(2,\ 2)$ y $\vec{u}=(2,\ -1)$

a) $\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}$ tiene el mismo sentido que $\vec{u}$, por tanto:

$$\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}=\left|\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}\right|\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|^2}\vec{u}=\frac{2}{8}\vec{u}=\frac{1}{4}\vec{u}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

b) Todos los vectores que llevan la dirección de $\vec{u}$ son de la forma $(t,\ t)$ con $t\in\mathbb{R}$ y todos los vectores que llevan la dirección perpendicular a $\vec{u}$ son de la forma $(-s,\ s)$ con $s\in\mathbb{R}$, por tanto, tenemos:

$$\vec{v}=(t,\ t)+(-s,\ s)\Rightarrow\begin{cases}t-s=2\\t+s=-1\end{cases}\Rightarrow t=\frac{1}{2},\ s=-\frac{3}{2}\Rightarrow\vec{v}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$$

71. Calcula el valor de *m* para que los puntos del plano *A*(1, 2), *B*(–2, m – 2) y *C*(3, –m) estén alineados.

$$\overrightarrow{AB}=(-3,\ m-4)\ \text{y}\ \overrightarrow{AC}=(2,\ -m-2)\Rightarrow\frac{2}{-3}=\frac{-m-2}{m-4}\Rightarrow 2m-8=3m+6\Rightarrow m=-14$$

72. Calcula las coordenadas del extremo *B* de un vector cuyo origen es *A*(2, 3) y que es equipolente al vector $\overrightarrow{CD}$, siendo *C*(–2, 3) y *D*(0, –4).

Si $B(b_1,\ b_2)$ tenemos: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow(b_1-2,\ b_2-3)=(2,\ -7)\Rightarrow b_1=4,\ b_2=-4\Rightarrow B(4,\ -4)$

73. El baricentro de un triángulo es el punto donde se cortan sus tres medianas y está situado a doble distancia del vértice que del punto medio del lado opuesto. Calcula las coordenadas del baricentro del triángulo *A*(–3, 3), *B*(2, 1), *C*(–2, –1).

El punto medio del lado *CB* es el origen: $\left(\frac{2-2}{2},\ \frac{1-1}{2}\right)=O(0,\ 0)$, por tanto, si el baricentro es $G(g_1,\ g_2)$, tenemos:

$$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GO}\Rightarrow(g_1+3,\ g_2-3)=2\cdot(-g_1,\ -g_2)\Rightarrow\begin{cases}g_1+3=-2g_1\\g_2-3=-2g_2\end{cases}\Rightarrow g_1=-1,\ g_2=1\Rightarrow G(-1,\ 1)$$

74. De los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se sabe que $|\vec{u}|^2 = 13$, $|\vec{v}| = 10$ y $\vec{u}\cdot\vec{v} = -9$.

a) Halla el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Halla el ángulo que forman $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$.

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{-9}{10\sqrt{13}} \Rightarrow \alpha = 104{,}45°$

b) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} - |\vec{v}|^2 = -105$

$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 95$ $\qquad$ $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 131$

$\cos\beta = \dfrac{(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})}{|\vec{u}+\vec{v}||\vec{u}-\vec{v}|} = \dfrac{-105}{\sqrt{12445}} \Rightarrow \beta = 160{,}26°$

75. Sean los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})-(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{v} = 31$ y $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 37$. Halla el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

$\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})-(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{v} = 31 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v} = 31 \Rightarrow |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2 = 31$

$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 37 \Rightarrow |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 37$. Por tanto, $31 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} = 37 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 3$

CUESTIONES

76. Indica, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) El vector nulo es linealmente dependiente con cualquier otro vector del plano.

b) Si dos vectores no nulos tienen la misma dirección entonces su producto escalar coincide con el producto de sus módulos.

c) $|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}|+|\vec{v}|$

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA} = \vec{0}$

a) Verdadero. El vector nulo se puede escribir como el producto de cualquier vector por el número 0.

b) Falso. Solo es verdadero si tienen también el mismo sentido; si tienen diferente sentido el producto escalar es el producto de los módulos multiplicado por –1.

c) Falso. Si $\vec{u} = (1, 0)$ y $\vec{v} = (0,1)$ entonces $|\vec{u}+\vec{v}| = |(1, 1)| = \sqrt{2}$ y $|\vec{u}|+|\vec{v}| = 1+1 = 2$

d) Verdadero. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

77. Da un ejemplo de tres vectores no nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tales que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean linealmente independientes, $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean también linealmente independientes, pero $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

$\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1)$ y $\vec{w} = (0, 2)$

78. Demuestra que si $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$ entonces los puntos *A* y *D* son el mismo.

$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Rightarrow A \equiv D$

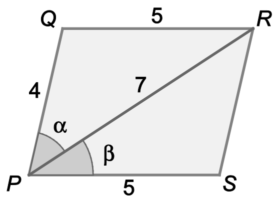
PROBLEMAS

79. El paralelogramo *PQRS* verifica que *PQ* = 4 cm, *PR* = 7 cm y *PS* = 5 cm.

a) Calcula $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{SP}$ y $\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{PR}$.

b) Calcula los ángulos del paralelogramo.

Aplicando el teorema del coseno en los triángulos *PQR* y *PRS*:



$$\cos\alpha = \frac{16+49-25}{56} = \frac{5}{7} \Rightarrow \alpha = 44{,}42^\circ$$

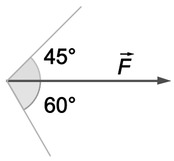
$$\cos\beta = \frac{25+49-16}{70} = \frac{29}{35} \Rightarrow \alpha = 34{,}05^\circ$$

a) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} = 4\cdot 7\cdot\cos\alpha = 4\cdot 7\cdot\frac{5}{7} = 20$ $\qquad$ $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{SP} = 7\cdot 4\cdot\cos(\alpha+\beta) = 5{,}6$

$\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{PR} = 5\cdot 7\cdot\cos\beta = 5\cdot 7\cdot\frac{29}{35} = 29$ $\qquad$ $\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{PR} = 5\cdot 7\cdot\cos\beta = 29$

b) $\alpha+\beta = 78{,}47^\circ$ y $180^\circ - (\alpha+\beta) = 101{,}53^\circ$

80. Descompón una fuerza $\vec{F}$ de 15 Newton en otras dos que formen con ella ángulos de 45º y 60º.



$$\begin{cases} \left|\vec{F_2}\right|^2 = \left|\vec{F_1}\right|^2 + \left|\vec{F}\right|^2 - 2\cdot\left|\vec{F_1}\right|\cdot\left|\vec{F}\right|\cdot\cos 45^\circ \\ \left|\vec{F_1}\right|^2 = \left|\vec{F_2}\right|^2 + \left|\vec{F}\right|^2 - 2\cdot\left|\vec{F_2}\right|\cdot\left|\vec{F}\right|\cdot\cos 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\vec{F_2}\right|^2 = \left|\vec{F_1}\right|^2 + 225 - 15\cdot\sqrt{2}\cdot\left|\vec{F_1}\right| \\ \left|\vec{F_1}\right|^2 = \left|\vec{F_2}\right|^2 + 225 - 15\cdot\left|\vec{F_2}\right| \end{cases}$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera:

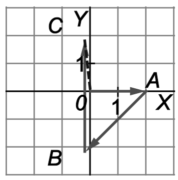
$$\left|\vec{F_2}\right|^2 = \left|\vec{F_2}\right|^2 + 225 - 15\cdot\left|\vec{F_2}\right| + 225 - 15\sqrt{2}\cdot\left|\vec{F_1}\right| \Rightarrow 15\left|\vec{F_2}\right| + 15\sqrt{2}\left|\vec{F_1}\right| = 450 \Rightarrow \left|\vec{F_2}\right| + \sqrt{2}\left|\vec{F_1}\right| = 30 \Rightarrow \left|\vec{F_2}\right| = 30 - \sqrt{2}\left|\vec{F_1}\right|$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\left(30 - \sqrt{2}\left|\vec{F_1}\right|\right)^2 = \left|\vec{F_1}\right|^2 + 225 - 15\cdot\sqrt{2}\cdot\left|\vec{F_1}\right| \Rightarrow 900 + 2\left|\vec{F_1}\right|^2 - 60\sqrt{2}\left|\vec{F_1}\right| = \left|\vec{F_1}\right|^2 + 225 - 15\cdot\sqrt{2}\cdot\left|\vec{F_1}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\vec{F_1}\right|^2 - 45\sqrt{2}\left|\vec{F_1}\right| + 675 = 0 \Rightarrow \left|\vec{F_1}\right| = \frac{45\sqrt{2} - 15\sqrt{6}}{2} = 13{,}45\text{ N},\ \left|\vec{F_2}\right| = 30 - \sqrt{2}\left|\vec{F_1}\right| = 10{,}98\text{ N}$$

81. Jorge realiza una excursión en tres etapas. En la primera se dirige hacia el Este y anda 2 km. En la segunda sigue andando 3 km pero esta vez en dirección Sudoeste. Finalmente, anda 4 km en dirección Norte. ¿Qué distancia le separa del punto de partida al finalizar la excursión? Realiza, usando vectores, un esquema del trayecto seguido.

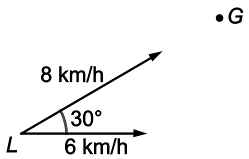


Si se considera el sistema de referencia de la figura, el trayecto de Jorge es $O \to A \to B \to C$:

$$O(0,\ 0),\ A(2,\ 0),\ B(2+3\cos 225^\circ,\ +3\,\text{sen}\,225^\circ) = \left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2},\ \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } C\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2},\ \frac{8-3\sqrt{2}}{2}\right)$$

La distancia del punto de salida es, por tanto: $\left|\overrightarrow{OC}\right| = \sqrt{\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{8-3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{29-18\sqrt{2}} = 1{,}88$ km

82. Lola está paseando a su perra Lúa. En un momento dado, en el que se encuentran en el punto *L*, la perra ve un gato situado en *G* y tira hacia él con una velocidad de 8 km/h y con una dirección de 30º sobre la dirección de paseo, tal y como muestra la figura. Por su parte Lola tira con una velocidad de 6 km/h en la dirección de su paseo.



Calcula el vector velocidad resultante dando su módulo y dirección.

Tomando el sistema de referencia centrado en *L* y con ejes la dirección del paseo y su perpendicular, se pueden escribir vectorialmente las velocidades de Lola y Lúa como $\vec{a} = (6, 0)$ y $\vec{b} = (8\cos 30º, 8\,\text{sen}\,30º) = \left(4\sqrt{3}, 4\right)$, respectivamente.

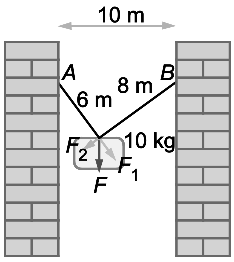
Por tanto, la velocidad resultante es $\vec{a} + \vec{b} = \left(6 + 4\sqrt{3}, 4\right)$, con módulo $\sqrt{\left(6 + 4\sqrt{3}\right)^2 + 16} = 13{,}53$ km/h y dirección 17,19º respecto de la horizontal.

83. Los módulos de dos vectores valen 15 y 12 unidades de longitud respectivamente. El módulo de la suma de dichos vectores es 8 unidades de longitud. Calcula el producto escalar de los vectores y el ángulo que forman.

$$\left|\vec{u} + \vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \left|\vec{v}\right|^2 \Rightarrow 64 = 225 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 144 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -152{,}5$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|} = \frac{-152{,}5}{15 \cdot 12} = -0{,}8472 \Rightarrow \alpha = 147{,}91º$$

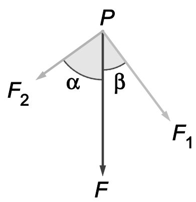
84. Una pesa está suspendida en una cuerda sujeta a dos puntos *A* y *B* de igual altura y ubicados en dos paredes que distan 10 m, tal y como muestra la figura.



La cuerda tiene una longitud de 14 m y la pesa está situada a 6 m de *A* y 8 m de *B*.

La masa de la pesa es de 10 kg y, por tanto, la fuerza que ejerce es *F* =98 N.

Calcula los valores de las fuerzas F_1 y F_2 en los que se descompone la fuerza *F*. ¿Qué interpretación puedes dar a estas fuerzas? Calcula los ángulos que forman con la fuerza *F*.



El triángulo *ABP* es rectángulo en *P* ya que $10^2 = 6^2 + 8^2$, por tanto:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3},\ \text{tg}\,\beta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},\ \text{sen}\,\alpha = \cos\beta = \frac{4}{5} \text{ y } \cos\alpha = \text{sen}\,\beta = \frac{3}{5}$$

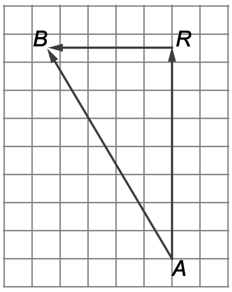
$$\left|\vec{F_1}\right| = 98 \cdot \cos\beta = 98 \cdot \frac{4}{5} = 78{,}4 \text{ N},\ \left|\vec{F_2}\right| = 98 \cdot \cos\alpha = 98 \cdot \frac{3}{5} = 58{,}8 \text{ N},\ \alpha = 53{,}13º \text{ y } \beta = 36{,}87º$$

85. Un coche viaja a 100 km/h durante 45 minutos en dirección Norte hasta llegar a una rotonda donde realiza un giro de 270º. En la nueva carretera, circula durante 30 minutos a una velocidad de 90 km/h.

a) Usando vectores, dibuja un esquema de la situación.

b) Indica cuál es el módulo, dirección y sentido del vector desplazamiento total, siendo su origen el punto donde se inicia el recorrido y su extremo el punto donde se acaba.

a)

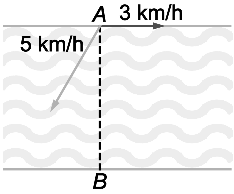


b) $AR = 100 \cdot 0{,}75 = 75$ km, $RB = 90 \cdot 0{,}5 = 45$ km

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{75^2 + 45^2} = 87{,}46 \text{ km}$$

$$\widehat{BAR} = \text{arctg}\,\frac{45}{75} = 30{,}96^\circ$$

86. Daniel quiere cruzar un río de una orilla a otra y de forma perpendicular a ambas. Daniel consigue nadar con una velocidad de 5 km/h pero la corriente del río lleva una velocidad de 3 km/h.

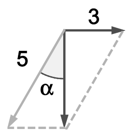


a) ¿En qué dirección debe nadar para conseguir llegar al punto *B* situado justo enfrente del punto de salida *A*?

b) ¿Cuál será la velocidad resultante?

c) ¿Qué pasaría si la velocidad que consigue Daniel fuese menor que la velocidad de la corriente?

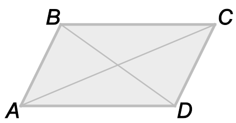
a) $\alpha = \text{arcsen}\,\frac{3}{5} \simeq 36{,}87^\circ$, Daniel debe nadar con 36,87º respecto de la perpendicular al río.



b) La velocidad resultante será $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ km/h

c) No existiría ninguna dirección con la que Daniel consiguiese llegar al punto *B* situado justo enfrente del punto de salida *A*, ya que el arcsen no estaría definido en este caso.

87. Dado el paralelogramo *ABCD* demuestra que la suma de los cuadrados de las dos diagonales es igual al doble de la suma de los cuadrados de dos lados consecutivos del paralelogramo. Para ello, ayúdate del cálculo vectorial y demuestra que $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AD}\right|^2$.

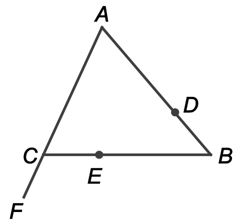


Aplicando las fórmulas de ejercicio resuelto 27:

$$\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AD}\right|^2$$

PARA PROFUNDIZAR

88. En la figura adjunta, del triangulo *ABC* se consideran los puntos *D*, *E* y *F* sobre las rectas que contienen sus lados, de forma que: $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{EC}$ y $3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$.



Demuestra que *D*, *E* y *F* están alineados. Para ello:

a) Escoge una base conveniente y escribe los vectores $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{ED}$ como combinación lineal de los vectores de la base.

b) Con ayuda del apartado anterior, relaciona los vectores $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{ED}$.

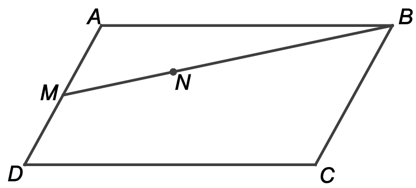
a) Se toma la base $\left\{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right\}$, así:

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{EC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

b) Los vectores $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{ED}$ son iguales por lo que *D*, *E* y *F* están alineados

89. En la figura:



- ***ABCD* es un paralelogramo.**
- ***M* es el punto medio del segmento *AD*.**
- $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NM}$

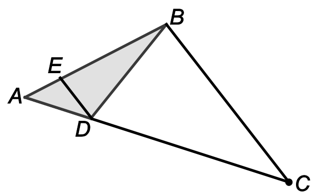
Demuestra que los puntos *C*, *N* y *A* están alineados.

En la base $\left\{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}\right\}$ tenemos: *A*(0, 1), *B*(1, 1), *C*(1, 0), *D*(0, 0) y $M\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Por tanto, si $N(n_1, n_2)$: $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NM} \Rightarrow (n_1 - 1, n_2 - 1) = (-2n_1, 1 - 2n_2) \Rightarrow n_1 = \frac{1}{3}, n_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow N\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

De este modo, $\overrightarrow{CN} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y $\overrightarrow{CA} = (-1, 1)$ son proporcionales, por lo que *C*, *N* y *A* están alineados.

90. En la figura:



- ***ABC* es un triángulo cualquiera.**
- $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AD}$

Demuestra que las rectas *BC* y *ED* son paralelas.

En la base $\left\{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right\}$ tenemos *A*(0, 0), *B*(0, 1), *C*(4, 0), *D*(1, 0) y $E\left(0, \frac{1}{4}\right)$. Por tanto, $\overrightarrow{BC} = (4, -1)$ y $\overrightarrow{ED} = \left(1, -\frac{1}{4}\right)$ son proporcionales, es decir, las rectas *BC* y *ED* son paralelas.

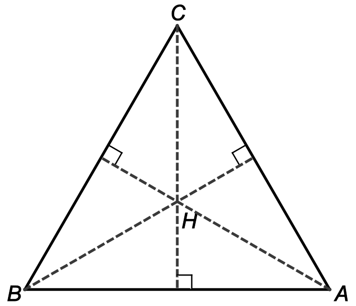
91. Con la ayuda del cálculo vectorial, demuestra el teorema del coseno en un triángulo ABC. Para ello, utiliza el producto escalar.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}}\right) + \left|\overrightarrow{CB}\right|^2 \Rightarrow c^2 = b^2 + 2ba\cos\left(180^\circ - \hat{C}\right) + a^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ba\cos\hat{C}$$

92. Con la ayuda del cálculo vectorial, demuestra que las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto.

Consideremos un triángulo *ABC* y sus alturas trazadas desde *A* y *B*, que se cortarán en un punto *H*. Queremos probar que *H* también pertenece a la altura trazada desde *C*.



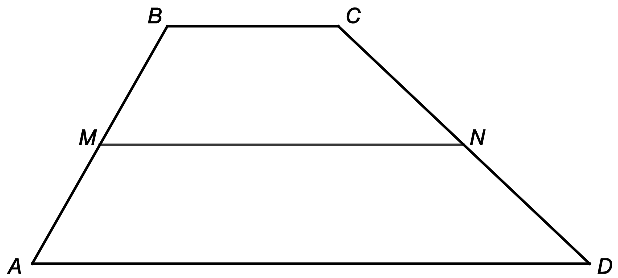
Para ello observemos que $\overrightarrow{AH}$ y $\overrightarrow{BC}$ son perpendiculares, igual que lo son $\overrightarrow{BH}$ y $\overrightarrow{AC}$, y basta demostrar que también lo son $\overrightarrow{CH}$ y $\overrightarrow{AB}$, es decir, que $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BH}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}+0=$$

$$=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HB}\right)=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{HA}=0$$

93. Demuestra que la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralela a las bases.

Consideremos un trapecio *ABCD* con lados no paralelos *AB* y *CD*, y sean *M* y *N* los respectivos puntos medios de estos lados.



Tenemos:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

Y, como $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ son paralelos, se concluye que $\overrightarrow{MN}$ también es paralelo a estos dos vectores.

5 Geometría analítica

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Comprueba si los puntos *A*(–2, 3), *B*(2, –3) y *C*(–2, 5) pertenecen o no a la recta que pasa por *P*(–2, 6) y tiene como vector director $\vec{v} = (0, -3)$. Calcula dos puntos más de esta recta.

La recta que pasa por *P*(–2, 6) y tiene como vector director $\vec{v} = (0, -3)$, que es paralelo al eje *Y*, es la recta vertical $r: x = -2$, por lo que únicamente los puntos cuya abscisa sea –2 pertenecen a la recta, es decir, *A* y *C* pertenecen a *r* pero *B* no.

4. Calcula las ecuaciones de las rectas paralelas a los ejes que pasan por el punto *A*(–3, 5).

La recta paralela al eje *X* que pasa por *A* es $y = 5$, y la recta paralela al eje *Y* que pasa por *A* es $x = -3$.

5. Indica dos puntos y el vector director de la recta *r*: $8x + y = 7$.

Dos puntos de la recta son, por ejemplo, *A*(1, –1) y *B*(0, 7), el vector director es $\overrightarrow{AB} = (-1, 8)$.

6. En cada caso, calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos:

a) *A*(2, –5) y *B*(1, –3)

b) *A*(–2, –4) y *B*(3, –2)

a) El vector director es $\overrightarrow{AB} = (-1, 2)$ y la recta pasa por *A*(2, –5). Por tanto:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+5}{2} \Rightarrow 2x - 4 = -y - 5 \Rightarrow 2x + y + 1 = 0$$

b) El vector director es $\overrightarrow{AB} = (5, 2)$ y la recta pasa por *A*(–2, –4). Por tanto:

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y+4}{2} \Rightarrow 2x + 4 = 5y + 20 \Rightarrow 2x - 5y - 16 = 0$$

7. Halla el valor de *k* para que la recta que pasa por los puntos A(2, –1) y B(3, *k*) pase por el punto C(0, –4).

C pertenece a la recta que pasa por *A* y *B* si y sólo si los vectores $\overrightarrow{AB} = (1, k+1)$ y $\overrightarrow{AC} = (-2, -3)$ son proporcionales. Por tanto:

$$\frac{1}{-2} = \frac{k+1}{-3} \Rightarrow -2k - 2 = -3 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

8. Halla *k* para que: $r: (k+5)x - (3+k)y = 1 - k$ pase por *P*(2, 3).

Sustituyendo las coordenadas de *P* en la ecuación de la recta tenemos $2(k+5) - 3(3+k) = 1 - k \Rightarrow 0 = 0$, por tanto, el punto *P* pertenece a *r* para cualquier valor real de *k*.

9 a 11. Ejercicios resueltos.

12. Indica un vector director y otro normal de la recta de ecuación $-3x + 2y - 4 = 0$.

Un vector normal es $\vec{n} = (-3, 2)$ y un vector director es $\vec{u} = (2, 3)$.

13. Halla un vector director y otro normal de la recta que pasa por el punto $A\left(-2, \frac{1}{3}\right)$ y por el origen de coordenadas.

Vector director: $\overline{OA} = \left(-2, \frac{1}{3}\right) \simeq (-6, 1)$ Vector normal: $\vec{n} = (1, 6)$

14. Una recta tiene como vector normal a $\vec{n} = (2, -3)$ y pasa por el punto $A(-1, 2)$. Escribe su ecuación general.

La ecuación general es de la forma $2x - 3y + k = 0$. Como la recta pasa por A, ha de ser $-2 - 6 + k = 0 \Rightarrow k = 8$.

Por tanto, la ecuación general de la recta es $2x - 3y + 8 = 0$.

15. Halla la ecuación normal de la recta que pasa por $P(1, -3)$ y es perpendicular a la que pasa por $A(0, 2)$ y $B(-1, 0)$.

La recta tiene vector director $\overrightarrow{AB} = (-1, -2) \approx (1, 2)$ y pasa por el punto P, por tanto, su ecuación normal es:

$(x - 1) + 2(y + 3) = 0$ o $x + 2y + 5 = 0$.

16. Escribe la ecuación de la recta perpendicular a $3x - 6y = 1$ y que pasa por el punto $A(-3, 2)$

Todas las perpendiculares a $3x - 6y = 1$ son de la forma $6x + 3y + k = 0$.Obligando a que A pertenezca a la perpendicular tenemos $-18 + 6 + k = 0 \Rightarrow k = 12$ y, por tanto, la ecuación de la recta perpendicular es

$6x + 3y + 12 = 0 \Rightarrow 2x + y + 4 = 0$.

17. Halla la ecuación de la recta perpendicular a $5x + 4y - 3 = 0$ que corta a la recta $6(x - 1) - (y - 1) = 0$ en $x = 1$.

Todas las rectas perpendiculares a $5x + 4y - 3 = 0$ son de la forma $4x - 5y + k = 0$. Obligando a que corte a $6(x - 1) - (y - 1) = 0$ en $x = 1$, es decir, a que pase por el punto $(1, 1)$ tenemos $4 - 5 + k = 0 \Rightarrow k = 1$. Por tanto, la ecuación de la recta perpendicular es $4x - 5y + 1 = 0$.

18. Halla la ecuación de la recta perpendicular al segmento de extremos $A(0, -2)$ y $B(1, 4)$ y que pasa por el punto $C(3, 0)$.

La recta tiene vector normal $\overrightarrow{AB} = (1, 6)$ y pasa por el punto C, por tanto, su ecuación es:

$1(x - 3) + 6(y - 0) = 0 \Rightarrow x + 6y - 3 = 0$

19. Considera el triángulo de vértices $A(5, 3)$, $B(7, -1)$ y $C(1, -1)$. Halla la altura correspondiente al vértice A.

La altura correspondiente al vértice A pasa por este punto y es perpendicular a $\overrightarrow{BC} = (-6, 0) \simeq (1, 0)$, por tanto su ecuación es $(x - 5) + 0(y - 3) = 0 \Rightarrow x = 5$.

20. Ejercicio resuelto.

21. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto *A*(–2, 4) y tiene de pendiente $m = \frac{1}{2}$.

La ecuación de la recta es de la forma $y = \frac{1}{2}x + n$. Como pasa por *A*: $4 = -1 + n \Rightarrow n = 5$. Por tanto, la ecuación es $y = \frac{x}{2} + 5 \Rightarrow x - 2y + 10 = 0$.

22. Indica el vector director y la pendiente de las siguientes rectas:

a) $-2x + y + 7 = 0$ **b)** $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$ **c)** $y = 5x - 3$ **d)** $x + 4 = \frac{y-1}{2}$

a) Vector director: $\vec{u} = (1, 2)$. Pendiente: $m = \frac{2}{1} = 2$.

b) Vector director: $\vec{u} = (3, -1)$. Pendiente: $m = -\frac{1}{3}$.

c) Vector director: $\vec{u} = (1, 5)$. Pendiente: $m = 5$.

d) Vector director: $\vec{u} = (1, 2)$. Pendiente: $m = \frac{2}{1} = 2$.

23. Calcula la ecuación de la recta que tiene doble pendiente que la bisectriz del primer y tercer cuadrantes y que pasa por el origen de coordenadas.

La pendiente es $m = 2$ y pasa por *O*(0, 0), por tanto, la ecuación es $y = 2x$.

24. Halla la ecuación punto–pendiente de la recta que pasa por el punto *A*(–2, 5) y forma un ángulo de 120º con la parte positiva del eje *X*.

La pendiente es $m = -\sqrt{3}$ y pasa por *A*, por tanto, la ecuación es $y - 5 = -\sqrt{3}\left(x + 2\right)$.

25. Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de la recta que pasa por los puntos:

a) *A*(–1, 5) y *B*(2, –2) **b)** *A*(1, 2) y *B*(2, –1) **c)** *A*(0, –5) y *B*(5, 0) **d)** *A*(–1, –4) y *B*(2, –4)

Sea $y = mx + n$ la ecuación explícita de la recta, donde *m* es la pendiente y *n* es la ordenada en el origen. Los puntos dados han de verificar la ecuación, por lo que se tiene:

a) $\begin{cases} -m + n = 5 \\ 2m + n = -2 \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{7}{3},\ n = \frac{8}{3}$

c) $\begin{cases} n = -5 \\ 5m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1,\ n = -5$

b) $\begin{cases} m + n = 2 \\ 2m + n = -1 \end{cases} \Rightarrow m = -3,\ n = 5$

d) $\begin{cases} -m + n = -4 \\ 2m + n = -4 \end{cases} \Rightarrow m = 0,\ n = -4$

26. Halla la ecuación explícita y la punto–pendiente de la recta que pasa por *A*(0, 5) y es perpendicular a $3x + 5y + 2 = 0$.

La recta buscada tiene vector director $\vec{u} = (3, 5)$, por tanto, tiene pendiente $m = \frac{5}{3}$, además pasa por *A*, con lo que su ecuación punto–pendiente es $y - 5 = \frac{5}{3}x$ y su ecuación explícita es $y = \frac{5}{3}x + 5$.

27. Ejercicio interactivo.

28 a 30. Ejercicios resueltos.

31. Indica, en cada caso, si las rectas *r* y *s* son paralelas o secantes y, en este último caso, obtén el punto de intersección:

a) $r:\begin{cases} x = 2-4t \\ y = 3+2t \end{cases}$ $s:\begin{cases} x = 2s \\ y = -s \end{cases}$

b) $\begin{cases} r: 2x+5y-5=0 \\ s: 3x-5y+5=0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2-4t = 2s \\ 3+2t = -s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t+s=1 \\ 2t+s=-3 \end{cases}$ Como el sistema es incompatible, las dos rectas son paralelas.

b) $\frac{2}{3} \neq \frac{5}{-5} \Rightarrow$ Son rectas secantes. Calculamos el punto de corte: $\begin{cases} 2x+5y-5=0 \\ 3x-5y+5=0 \end{cases} \Rightarrow x=0,\ y=1 \Rightarrow P(0,\ 1)$

32. Calcula la ecuación de la recta paralela a la recta *r*: 2*x* + *y* + 1= 0 y que pasa por el punto de intersección de las rectas *s*: *x* − *y* + 5 = 0 y *t*: *x* + *y*+ 1 = 0.

Se calcula el punto de intersección de *s* y *t* :

$\begin{cases} x-y+5=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Rightarrow x=-3,\ y=2 \Rightarrow P(-3,\ 2)$

El haz de rectas paralelas a *r* tiene ecuación $2x+y+K=0$. Como la recta buscada pasa por *P*, se tiene:

$-6+2+K=0 \Rightarrow K=4$. Por tanto, la ecuación de la recta buscada es $2x+y+4=0$.

33. Halla la ecuación del haz cuyo vértice es *P*(−5, 4).

$\{y-4=m(x+5),\ m\in\mathbb{R}\} \cup \{x=-5\}$

34 y 35. Ejercicios resueltos.

36. Calcula *k* para que la distancia entre las rectas 5*x* + 12*y* − *k* = 0 y 5*x* + 12*y* + 15 = 0 sea 2.

Observemos que las rectas dadas son paralelas. Tenemos:

$d(r,\ s)=2 \Rightarrow \frac{|-k-15|}{\sqrt{5^2+12^2}}=2 \Rightarrow |-k-15|=26 \Rightarrow \begin{cases} -15-k=26 \\ -15-k=-26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-41 \\ k=11 \end{cases}$

37. Comprueba si los siguientes triángulos son equiláteros, isósceles o escalenos:

a) *A*(−2, 1), *B*(0, 3) y *C*(3, 7)

b) $A\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ y $C\left(1,\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

a) $d(A,\ B)=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ u, $d(B,\ C)=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ u y $d(C,\ A)=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}$ u

Por tanto, se trata de un triángulo escaleno.

b) $d(A,\ B)=\sqrt{1^2+0^2}=1$ u, $d(B,\ C)=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ u y $d(C,\ A)=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ u

Por tanto, se trata de un triángulo equilátero.

38. Calcula el área del triángulo determinado por *O*(0, 0) y las intersecciones de la recta $x + 2y = 4$ con los ejes.

El triángulo tiene por vértices *O*(0, 0),*A*(0, 2) y *B*(4, 0).

El área del triángulo es $A = \dfrac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}$ con: base $= d(O, B) = 4$ u , altura $= d(O, A) = 2$ u

Por tanto, $A = \dfrac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \dfrac{4\cdot 2}{2} = 4\ \text{u}^2$

39. Calcula la medida de las alturas del triángulo de vértices *A*(4, 1),*B*(–1, 3) y *C*(0, 4).

$AB: 2x + 5y - 13 = 0$, $BC: x - y + 4 = 0$ y $AC: 3x + 4y - 16 = 0$, por tanto, las alturas miden:

$h_{AB} = d(C,\ AB) = \dfrac{|20 - 13|}{\sqrt{4 + 25}} = \dfrac{7}{\sqrt{29}} = \dfrac{7\sqrt{29}}{29}$ u $\qquad h_{BC} = d(A,\ BC) = \dfrac{|4 - 1 + 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \dfrac{7}{\sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ u

$h_{AC} = d(B,\ AC) = \dfrac{|-3 + 12 - 16|}{\sqrt{9 + 16}} = \dfrac{7}{5}$ u

40. Halla la distancia del punto *C*(10, 0) a la recta que pasa por *A*(–2, 3) y *B*(2, 2). ¿Cuál es la posición relativa de *A*, *B* y *C*?

La recta *AB* tiene vector director $\overrightarrow{AB} = (4, -1)$ y pasa por *A*, su ecuación es: $\dfrac{x + 2}{4} = \dfrac{y - 3}{-1} \Rightarrow x + 4y - 10 = 0$.

$d(C, AB) = \dfrac{|10 - 10|}{\sqrt{1 + 16}} = 0$ u , lo que significa que *C* pertenece a la recta *AB*, es decir, *A*, *B* y *C* están alineados.

41. Ejercicio resuelto.

42. Calcula el ángulo que forman las rectas:

a) *r*: $3x - 4y = 0$ y *s*: $2x + 2y + 3 = 0$

b) *r*: $y = x - 5$ y *s*: $y = 2x + 2$

a) Vectores normales: $\overrightarrow{n_r} = (3, -4)$ y $\overrightarrow{n_s} = (2, 2)$. Luego: $\cos\alpha = \cos\widehat{(r, s)} = \dfrac{|\overrightarrow{n_r}\cdot\overrightarrow{n_s}|}{|\overrightarrow{n_r}|\cdot|\overrightarrow{n_s}|} = \dfrac{2}{10\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \alpha = 81{,}87^\circ$

b) Las pendientes son $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$, por tanto, $\text{tg}\alpha = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\dfrac{1 - 2}{1 + 2}\right| = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 18{,}43^\circ$.

43. Calcula el ángulo formado por *r*: $4x + 2y - 7 = 0$ y el eje *Y*.

Los vectores normales son $\overrightarrow{n_1} = (4, 2)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1, 0)$, luego $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 26{,}57^\circ$

44. Calcula la recta perpendicular a *r* :$x + y - 3 = 0$ y que pasa por el punto *P*(–3, 3).

La pendiente de la recta *r* es $m = -1$, por tanto, la pendiente de una recta perpendicular a ella es $m' = 1$.

Así, la ecuación de la recta buscada es $y - 3 = x + 3 \Rightarrow y = x + 6$

45 y 46. Ejercicios resueltos.

47. Calcula el simétrico de *P*(–2, 3) respecto del punto *M*(1, –4).

Sea *P*′(*a, b*) el punto buscado,*M* es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$. Por tanto:

$$\left(\frac{-2+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right) = (1, -4) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-2+a}{2} = 1 \\ \dfrac{3+b}{2} = -4 \end{cases} \Rightarrow a = 4,\ b = -11 \Rightarrow P'(4, -11)$$

48. Halla la recta simétrica del eje de ordenadas respecto de *y* = *x* + 1.

Calculamos el punto *Q* de intersección de ambas rectas ya que es el único invariante por la simetría: *Q*(0, 1)

Para calcular la recta simétrica indicada basta con determinar el simétrico *P*′ de otro punto cualquiera, *P*, del eje de ordenadas, ya que la recta buscada quedará determinada por los puntos *Q* y *P*′.

Tomando *P*(0, –1), la recta perpendicular a $y = x + 1$ que pasa por *P* es $y = -x - 1$.

Ambas rectas se cortan en *M*(–1, 0) y *M* debe ser el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, por lo que *P*′(–2, 1).

Por lo tanto, la recta simétrica buscada es la que pasa por *Q* y *P*′, cuya ecuación es $y = 1$.

49. Determina el triángulo simétrico del *k*(4, 0), *B*(–1, 6) y *C*(–1, –1) respecto de la simetría central con centro el origen de coordenadas.

El simétrico de un punto *P*(*a*, *b*) respecto de la simetría central con centro *O*(0, 0) es *P*′(–*a*, –*b*).

Por tanto, los vértices del triángulo simétrico son*A*′(–4, 0), *B*′(1, –6) y *C*′(1, 1).

50. Encuentra el triángulo simétrico del*A*(3, 0), *B*(0, 3) y *P*(–2, –2) respecto de la simetría axial con eje la recta *y* = *x*.

El simétrico de un punto *P*(*a*, *b*) respecto de la simetría axial con eje la recta $y = x$ es *P*′(*b*, *a*).

Por tanto, los vértices del triángulo simétrico son *A*′(0, 3), *B*′(3, 0) y *C*′(–2, –2).

51. Halla el extremo *B* del segmento $\overline{AB}$ siendo *A*(2, 1) y sabiendo que la mediatriz del segmento es *r* : *x* + 2*y* – 9 = 0.

Sea *B*(*a*, *b*), como la mediatriz es perpendicular a $\overrightarrow{AB} = (a-2, b-1)$, este vector debe ser proporcional a $\overrightarrow{n_r} = (1, 2)$. Además, el punto medio del segmento $\overline{AB}$ debe pertenecer a *r*, por tanto:

$$\begin{cases} \dfrac{a-2}{1} = \dfrac{b-1}{2} \\ \dfrac{2+a}{2} + 2\dfrac{1+b}{2} - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 3 \\ a + 2b = 14 \end{cases} \Rightarrow a = 4,\ b = 5 \Rightarrow B(4, 5)$$

52. Ejercicio interactivo.

53. Halla la mediatriz del segmento de extremos *A*(–1, 3) y *B*(5, –3).

Los puntos *P*(*x*, *y*) de la mediatriz verifican: $d(A,X) = d(B,X) \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 \Rightarrow x - y - 2 = 0$$

54. Halla el punto de la recta *r*: *x* – 3*y* – 11 = 0 que equidista de los puntos *A*(–2, 3) y *B*(6, –1).

Los puntos que equidistan de *A* y *B* pertenecen a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, de ecuación:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-6)^2+(y+1)^2}\Rightarrow x^2+4x+4+y^2-6y+9=x^2-12x+36+y^2+2y+1\Rightarrow 2x-y-3=0$$

Por tanto, el punto *P* buscado es la intersección de la mediatriz con $r:\begin{cases}x-3y-11=0\\2x-y-3=0\end{cases}\Rightarrow P\left(-\dfrac{2}{5},-\dfrac{19}{5}\right)$

55. Dadas las rectas *r*: *x* – 3*y* + 4 = 0 y *s*: *x* + *y* = 0, obtén sus bisectrices, comprueba que se cortan en el punto de intersección de *r* y *s* y que son perpendiculares.

Los puntos *P*(*x*, *y*) de las bisectrices verifican:

$$d(P,r)=d(P,s)\Rightarrow\frac{|x-3y+4|}{\sqrt{10}}=\frac{|x+y|}{\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{x-3y+4}{\sqrt{10}}=\pm\frac{x+y}{\sqrt{2}}\Rightarrow\begin{cases}b_1:\left(\sqrt{5}-1\right)x+\left(\sqrt{5}+3\right)y-4=0\\b_2:\left(\sqrt{5}+1\right)x+\left(\sqrt{5}-3\right)y+4=0\end{cases}$$

El punto de corte de las rectas es: $\begin{cases}x-3y+4=0\\x+y=0\end{cases}\Rightarrow x=-1,\ y=1\Rightarrow P(-1\quad 1)$

P verifica la ecuación de cada una de las bisectrices: $\begin{cases}\left(\sqrt{5}-1\right)(-1)+\left(\sqrt{5}+3\right)\cdot 1-4=-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}+3-4=0\\\left(\sqrt{5}+1\right)(-1)+\left(\sqrt{5}-3\right)\cdot 1+4=-\sqrt{5}-1+\sqrt{5}-3+4=0\end{cases}$

Los vectores normales a b_1 y b_2 son, respectivamente, $\vec{n_1}=\left(\sqrt{5}-1,\sqrt{5}+3\right)$ y $\vec{n_2}=\left(\sqrt{5}+1,\sqrt{5}-3\right)$, que verifican $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=5-1+5-9=0$, por lo que ambas bisectrices son perpendiculares.

56. Halla los puntos de la recta *r* :*y* = –*x* + 6 que equidistan de las rectas *s*: 3*x* – *y* = 1 y *t* : 3*x* + *y* = 5.

Los puntos que equidistan de *s* y *t* son los pertenecientes a sus bisectrices, de ecuaciones:

$$\frac{|3x-y-1|}{\sqrt{10}}=\frac{|3x+y-5|}{\sqrt{10}}\Rightarrow 3x-y-1=\pm(3x+y-5)\Rightarrow\begin{cases}b_1:y=2\\b_2:x=1\end{cases}$$

Los puntos buscados son, por tanto, los puntos de corte de *r* con cada una de las bisectrices: $P_1(4,2)$ y $P_2(1,5)$.

57. Dado el triángulo de vértices *A*(5, 1), *B*(3, 7) y *C*(–2, 3):

a) Calcula el circuncentro. **b)** Calcula el incentro. **c)** Calcula el baricentro.

a) El circuncentro, *T*, es el punto de corte de las mediatrices del triángulo. Por tanto:

$$\begin{cases}\sqrt{(5-x)^2+(1-y)^2}=\sqrt{(3-x)^2+(7-y)^2}\\\sqrt{(5-x)^2+(1-y)^2}=\sqrt{(-2-x)^2+(3-y)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4x+12y=32\\-14x+4y=-13\end{cases}\Rightarrow x=\frac{71}{38},\ y=\frac{125}{38}\Rightarrow T\left(\frac{71}{38},\frac{125}{38}\right)$$

b) El incentro, *I*, es es punto de corte de las bisectrices interiores del triángulo. Por tanto:

Recta *AB*: $3x+y-16=0$ Recta *BC*: $4x-5y+23=0$ Recta *AC*: $2x+7y-17=0$

$$\begin{cases}\dfrac{|3x+y-16|}{\sqrt{10}}=\dfrac{|4x-5y+23|}{\sqrt{41}}\\\dfrac{|3x+y-16|}{\sqrt{10}}=\dfrac{|2x+7y-17|}{\sqrt{53}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3\sqrt{53}+2\sqrt{10})x+(\sqrt{53}+7\sqrt{10})y=17\sqrt{10}+16\sqrt{53}\\(3\sqrt{41}+4\sqrt{10})x+(\sqrt{41}-5\sqrt{10})y=16\sqrt{41}-23\sqrt{10}\end{cases}\Rightarrow I(2{,}06;\ 3{,}82)$$

c) El baricentro, *G*, es el punto de corte de las mediatrices del triángulo. Por tanto:

Punto medio de *AB*: $M_1(4,4)$ Punto medio de *BC*: $M_2\left(\dfrac{1}{2},5\right)$

$$\begin{cases}CM_1:x-6y+20=0\\AM_2:8++9y-49=0\end{cases}\Rightarrow x=2,\ y=\frac{11}{3}\Rightarrow T\left(2,\frac{11}{3}\right)$$

58 a 65. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Ecuaciones de la recta

66. Para cada una de las siguientes rectas, indica si los puntos *P*(–2, 1) y *Q*(3, –1) pertenecen o no a ellas y calcula un punto más de cada una:

a) $r_1:(x,\ y)=(7,\ -2)+\lambda(4,\ -1)$ **b)** $r_2:\begin{cases}x=-2+\lambda\\ y=1+2\lambda\end{cases}$ **c)** $r_3: 2x+5y=1$ **d)** $r_4:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{5}$

a) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en la ecuación, se tiene:

$$(-2,\ 1)=(7,\ -2)+\lambda(4,\ -1)\Rightarrow\begin{cases}-2=7+4\lambda\\ 1=-2-\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-\dfrac{9}{4}\\ \lambda=-3\end{cases}\Rightarrow P\notin r_1$$

$$(3,\ -1)=(7,\ -2)+\lambda(4,\ -1)\Rightarrow\begin{cases}3=7+4\lambda\\ -1=-2-\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-1\\ \lambda=-1\end{cases}\Rightarrow Q\in r_1$$

Para calcular un punto más, basta dar valor a λ, por ejemplo, tomando $\lambda=0$ obtenemos el punto *R*(7, –2)

b) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en las ecuaciones, se tiene:

$$\begin{cases}-2=-2+\lambda\\ 1=1+2\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=0\end{cases}\Rightarrow P\in r_2 \qquad \begin{cases}3=-2+\lambda\\ -1=1+2\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=5\\ \lambda=-1\end{cases}\Rightarrow Q\notin r_2$$

Para calcular un punto más, basta dar valor a λ, por ejemplo, tomando $\lambda=1$ obtenemos el punto *R*(–1, 3)

c) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en la ecuación, se tiene:

$2(-2)+5\cdot1=1\Rightarrow P\in r_3$ $\quad 2\cdot3+5(-1)=1\Rightarrow Q\in r_3$ Otro punto de la recta es, por ejemplo, *R*(–7, 3)

d) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en la ecuación, se tiene:

$$\frac{-2+1}{2}\neq\frac{1-2}{5}\Rightarrow P\notin r_4 \qquad \frac{3+1}{2}\neq\frac{-1-2}{5}\Rightarrow Q\notin r_4$$

67. Obtén la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de cada una de las siguientes rectas.

a) La recta que pasa por el punto *P*(–3, 1) y lleva la dirección del vector $\vec{u}=(-1,\ -2)$.

b) La recta que pasa por los puntos *A*(2, –3) y *B*(1, 4).

c) La recta que tiene como uno de sus vectores de dirección el $\vec{u}=(-3,\ 3)$ y corta a la parte positiva del eje de abscisas en un punto que dista 3 unidades del origen de coordenadas.

d) La recta que tiene como vector director el $\vec{u}=(2,\ -5)$ y corta a la parte negativa del eje de abscisas en un punto que dista 2 unidades del origen de coordenadas.

e) La recta que tiene por dirección la del vector $\vec{u}=(3,\ 7)$ y corta a la parte negativa del de abcisas en un punto que dista 2 unidades a la izquierda del origen de coordenadas.

a) E. vectorial: $r:(x,\ y)=(-3,\ 1)+\lambda(-1,\ -2)$ E. paramétricas: $r:\begin{cases}x=-3-\lambda\\ y=1-2\lambda\end{cases}$

b) Vector director: $\overline{AB}=(-1,\ 7)$ E. vectorial: $r:(x,\ y)=(2,\ -3)+\lambda(-1,\ 7)$ E. paramétricas: $r:\begin{cases}x=2-\lambda\\ y=-3+7\lambda\end{cases}$

c) E. vectorial: $r:(x,\ y)=(3,\ 0)+\lambda(-3,\ 3)$ E. paramétricas: $r:\begin{cases}x=3-3\lambda\\ y=3\lambda\end{cases}$

d) E. vectorial: $r:(x,\ y)=(-2,\ 0)+\lambda(2,\ -5)$ E. paramétricas: $r:\begin{cases}x=-2+2\lambda\\ y=-5\lambda\end{cases}$

e) E. vectorial: $r:(x,\ y)=(-2,\ 0)+\lambda(3,\ 7)$ E. paramétricas: $r:\begin{cases}x=-2+3\lambda\\ y=7\lambda\end{cases}$

68. Para cada una de las siguientes rectas, determina la ecuación continua y la ecuación general.

a) Pasa por el punto $A(-3, -4)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (1, -2)$.

b) Pasa por los puntos $P(2, -5)$ y $Q(5, 1)$.

c) Pasa por el origen de coordenadas y por el punto $B(-3, 4)$.

d) Pasa por el origen de coordenadas y por el punto medio del segmento de extremos $M(1, -3)$ y $N(5, 2)$.

e) Pasa por el punto $P(-2, 7)$ y es perpendicular al segmento de extremos $M(-1, -3)$ y $N(0, 4)$.

a) Ecuación continua: $\frac{x+3}{1} = \frac{y+4}{-2}$ Ecuación general: $-2x - 6 = y + 4 \Rightarrow 2x + y + 10 = 0$

b) Ecuación continua: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{6}$ Ecuación general: $6x - 12 = 3y + 15 \Rightarrow 2x - y - 9 = 0$

c) Ecuación continua: $\frac{x}{-3} = \frac{y}{4}$ Ecuación general: $4x + 3y = 0$

d) El punto medio del segmento $\overline{MN}$ es $P\left(3, -\frac{1}{2}\right)$

Ecuación continua: $\frac{x}{3} = \frac{y}{-\frac{1}{2}}$ Ecuación general: $-\frac{1}{2}x = 3y \Rightarrow x + 6y = 0$

e) Vector normal: $\vec{n} = \overrightarrow{MN} = (1, 7)$ Vector director: $\vec{u} = (7, -1)$

Ecuación continua: $\frac{x+2}{7} = \frac{y-7}{-1}$ Ecuación general: $-x - 2 = 7y - 49 \Rightarrow x + 7y - 47 = 0$

69. Halla un vector director y otro normal a cada una de las siguientes rectas.

a) $r: -2x + 3y = 5$

b) $s: x - \frac{3}{2}y + 1 = 0$

c) Pasa por los puntos $A(2, -5)$ y $B(-5, -1)$.

d) Pasa por $O(0, 0)$ y por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ con $A(2, 6)$ y $B(-2, -4)$.

e) Mediatriz del segmento de extremos $P(3, 5)$ y $Q(5, 2)$.

a) Vector normal: $\vec{n} = (-2, 3)$ Vector director: $\vec{u} = (3, 2)$

b) Vector normal: $\vec{n} = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$ Vector director: $\vec{u} = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$

c) Vector director: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-7, 4)$ Vector normal: $\vec{n} = (4, 7)$

d) El punto medio del segmento es $M(0, 1)$

Vector director: $\vec{u} = \overrightarrow{MO} = (0, -1)$ Vector normal: $\vec{n} = (1, 0)$

e) Vector normal: $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} = (2, -3)$ Vector director: $\vec{u} = (3, 2)$

70. Obténlas ecuaciones de los lados del triángulo de vértices *P*(1, 3), *Q*(–4, 0) y *R*(–2, –1). Para cada lado, halla un vector de dirección y otro normal.

Lado *PQ*. Un vector de dirección es $\vec{u} = \overline{PQ} = (-5, -3)$. Un vector normal es $\vec{n} = (3, -5)$.

La ecuación es $\dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{y-3}{-3} \Rightarrow -3x+3 = -5y+15 \Rightarrow 3x-5y+12 = 0$

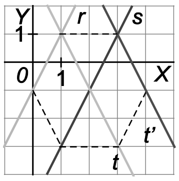
Lado *QR*. Un vector de dirección es $\vec{u} = \overline{QR} = (2, -1)$. Un vector normal es $\vec{n} = (1, 2)$.

La ecuación es $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y-0}{-1} \Rightarrow -x-4 = 2y \Rightarrow x+2y+4 = 0$

Lado *PR* .Un vector de dirección es $\vec{u} = \overline{PR} = (-3, -4)$. Un vector normal es $\vec{n} = (4, -3)$.

La ecuación es $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-3}{-4} \Rightarrow -4x+4 = -3y+9 \Rightarrow 4x-3y+5 = 0$

71. Halla las ecuaciones punto-pendiente de las rectas *r*, *s*, *t* y *t ′* de la figura.



La recta *r* pasa por P_1 (1, 1) y tiene pendiente $m_1 = 2$, así, su ecuación punto- pendiente es $y-1 = 2(x-1)$.

La recta *s* pasa por P_2 (3, 1) y tiene pendiente $m_2 = 2$, así, su ecuación punto- pendiente es $y-1 = 2(x-3)$.

La recta *t* pasa por P_3 (1, 1) y tiene pendiente $m_3 = -2$, así, su ecuación punto- pendiente es $y-1 = -2(x-1)$.

La recta *t ′* pasa por P_4 (3, 1) y tiene pendiente $m_4 = -2$, así, su ecuación punto- pendiente es $y-1 = -2(x-3)$.

72. Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas:

a) $r: y = -2x+3$ **b)** $s: 4x+3y-6 = 0$ **c)** $t: \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}y - 1 = 0$ **d)** $w: \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+5}{3}$

e) La recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene de pendiente $m = -2$.

f) La recta que pasa por *P*(–4 ,3) y es paralela a *r*: $x - y + 3 = 0$.

a) La recta pasa por *P*(0, 3), vector director $\vec{u} = (1, -2)$.Las ecuaciones son: $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3-2\lambda \end{cases}$

b) La recta pasa por *P*(0, 2), vector normal $\vec{n} = (4, 3)$ y director $\vec{u} = (-3, 4)$.Las ecuaciones son: $s: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 2+4\lambda \end{cases}$

c) La recta pasa por *P*(2, 0), vector normal $\vec{n} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right) \simeq (2, 3)$ y director $\vec{u} = (-3, 2)$. Ecuaciones: $t: \begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

d) La recta pasa por *P*(4, –5), vector director $\vec{u} = (2, 3)$. Las ecuaciones son: $w: \begin{cases} x = 4+2\lambda \\ y = -5+3\lambda \end{cases}$

e) La recta pasa por *O*(0, 0), vector director $\vec{u} = (1, -2)$. Las ecuaciones son: $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \end{cases}$

f) La recta pasa por *P*(–4 ,3), vector normal $\vec{n} = (1, -1)$ y director $\vec{u} = (1, 1)$.Las ecuaciones son: $r: \begin{cases} x = -4+\lambda \\ y = 3+\lambda \end{cases}$

73. Determina la ecuación normal y la ecuación general de la recta que tiene a $\vec{n}=(-1, 3)$ como vector normal y pasa por el origen de coordenadas.

La ecuación normal es $-1(x-0)+3(y+0)=0$.

La ecuación general es $-x+3y=0$.

74. Encuentra la ecuación normal y la ecuación general de la recta que tiene a $\vec{n}=(2, 4)$ como vector normal y pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ siendo $A(0, -2)$ y $B(-3, 0)$.

El punto medio del segmento AB es $M\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$

La ecuación normal es $2\left(x+\frac{3}{2}\right)+4(y+1)=0$

La ecuación general es $2x+4y+7=0$

75. Calcula la pendiente de las siguientes rectas:

a) $r: y=-2x+3$

b) $r: 2x-3y+5=0$

c) $r: -\frac{3}{2}x+\frac{1}{5}y-5=0$

d) Recta que pasa por los puntos $P(-1, 2)$ y $Q(1, 3)$.

e) Recta que pasa por los puntos $P(1, a)$ y $Q(1, 3a)$.

f) Recta cuyo vector director es $\vec{u}=(-3, 5)$.

g) Recta cuyo vector normal es $\vec{n}=(2, -7)$.

h) $r: \begin{cases} x=-3+5\lambda \\ y=-1+2\lambda \end{cases}$

a) $m=-2$

b) $2x-3y+5=0 \Rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3} \Rightarrow m=\frac{2}{3}$

c) $-\frac{3}{2}x+\frac{1}{5}y-5=0 \Rightarrow y=\frac{15}{2}x+25 \Rightarrow m=\frac{15}{2}$

d) El vector director es $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(2, 1)$, por tanto, la pendiente es $m=\frac{1}{2}$

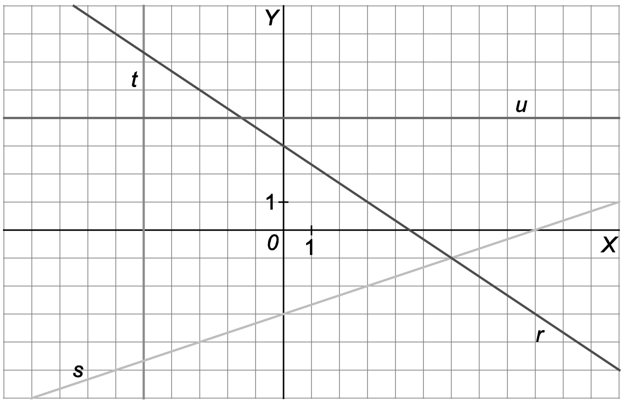
e) El vector director es $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(0, 2a)$, la recta es vertical si $a\neq 0$ (si $a=0$ no hay recta) y por tanto, como $m=\frac{2a}{0}$ tiene pendiente infinita.

f) $m=-\frac{5}{3}$

g) El vector director es $\vec{u}=(7, 2)$, por tanto, la pendiente es $m=\frac{2}{7}$

h) El vector director es $\vec{u}=(5, 2)$, por tanto, la pendiente es $m=\frac{2}{5}$

76. Indica el valor de las pendientes y de las ordenadas en el origen de las rectas de la figura y determina, para cada una de ellas, su ecuación general.



Recta *r* :

$m = -\frac{2}{3},\ n = 3 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 3 \Rightarrow 2x + 3y - 9 = 0$

Recta *s*:

$m = \frac{1}{3},\ n = -3 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - 3 \Rightarrow x - 3y - 9 = 0$

Recta *t*:

$m = \infty$, no tiene ordenada en el origen $\Rightarrow x + 5 = 0$

Recta *u*: $m = 0,\ n = 4 \Rightarrow y - 4 = 0$

77. Halla la ecuación explícitade la recta que pasa por el punto *P*(–2, –5) y forma con la parte positiva del eje de ordenadas un ángulo de 60º.

La recta forma un ángulo de 30º con la parte positive del eje de abscisas, por lo que su pendiente es $m = \text{tg}\ (30º) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

La ecuación explícita es: $y + 5 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3} - 15}{3}$

78. Determina la ecuación de la recta paralela a la bisectriz del primer cuadrante que pasa por el punto *P*(–6, –7).

La pendiente es $m = 1$, por tanto, la ecuación es: $y + 7 = x + 6 \Rightarrow y = x - 1$

79. Obtén la ecuación normal de la recta que pasa por el punto *P*(3, –1) y tiene por vector director $\vec{v} = (-2, 3)$.

La recta tiene vector normal $\vec{n} = (3, 2)$, por tanto, su ecuación normal es: $3(x - 3) + 2(y + 1) = 0$

80. Obténlas ecuaciones explícitas de las rectas siguientes.

a) Pasa por *A*(–1, 2) y tiene pendiente $m = 2$.

b) Pasa por los puntos *A*(–1, 3) y *B*(2, 4).

c) Pasa por *A*(2, 3) y forma con la parte derecha del eje de abscisas un ángulo de 30º.

d) Pasa por *A*(–2, 5) y forma con la parte izquierda del eje de abscisas un ángulo de 120º.

a) $y - 2 = 2(x + 1) \Rightarrow y = 2x + 4$

b) El vector director es $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3, 1)$, la ecuación explícita es: $\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 3}{1} \Rightarrow x + 1 = 3y - 9 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

c) La pendiente es $m = \text{tg}\ (30º) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, la ecuación explícita es: $y - 3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{9 - 2\sqrt{3}}{3}$

d) La recta forma un ángulo de 60º con la parte derecha del eje de abscisas, por lo que tiene pendiente $m = \text{tg}\ (60º) = \sqrt{3}$, por tanto, la ecuación explícita es: $y - 5 = \sqrt{3}(x + 2) \Rightarrow y = \sqrt{3}x + \left(2\sqrt{3} + 5\right)$.

81. Determina las ecuaciones paramétricas, la ecuación general y la ecuación explícita de la recta *r* en los siguientes casos.

a) Pasa por el punto $P(-3, 6)$ y es paralela a la recta de ecuación $-2x + 3y - 5 = 0$.

b) Corta a los ejes coordenados en los puntos $P(0, -3)$ y $Q(-1, 0)$.

c) Corta al eje de abscisas en el punto $P(2, 0)$ y pasa por el punto $Q(-2, 2)$.

a) La recta tiene vector director $\vec{u} = (3, 2)$, por tanto:

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 6 + 2\lambda \end{cases}$

Ecuación general: $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-6}{2} \Rightarrow 2x + 6 = 3y - 18 \Rightarrow 2x - 3y + 24 = 0$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{2}{3}x + 8$

b) La recta tiene vector director $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-1, 3)$, por tanto:

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \end{cases}$

Ecuación general: $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+3}{3} \Rightarrow 3x + y + 3 = 0$

Ecuación explícita: $y = -3x - 3$

c) La recta tiene vector director $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-4, 2)$, por tanto:

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

Ecuación general: $\dfrac{x-2}{-4} = \dfrac{y}{2} \Rightarrow 2x + 4y - 4 = 0$

Ecuación explícita: $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$

Posiciones relativas de rectas

82. Indica la pendiente de todas las rectas paralelas a la recta que pasa por los puntos *P*(1, 2) y *Q*(–1, –7).

Las rectas tienen vector director $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-2, -9)$, por tanto, tienen pendiente $m = \dfrac{9}{2}$.

83. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto *P*(2, 6) y es paralela a $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

La recta buscada tiene vector director $\vec{u} = (2, -1)$, por tanto, su ecuación es:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{-1} \Rightarrow -x + 2 = 2y - 12 \Rightarrow x + 2y - 14 = 0$$

84. Estudia las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas.

a) $r:\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \end{cases}$ $s:\begin{cases} x = \dfrac{3+t}{2} \\ y = \dfrac{1-t}{2} \end{cases}$

b) $r: 3x-2y = 7$ $s: 2x-3y = 8$

c) $r: x+y = 7$ $s: -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{2} = 0$

d) $r:\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -2-2\lambda \end{cases}$ $s: 4x+y-8 = 0$

e) $r: y = -2x+3$ $s: y = \frac{x}{2}$

f) $r: 2x-y-5 = 0$ $s: -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - 5 = 0$

a) Los vectores directores son $\overrightarrow{u_r} = (1, -1)$ y $\overrightarrow{u_s} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Como son proporcionales y el punto $P(1, 1)$ pertenece a ambas rectas, las rectas son coincidentes.

b) $\frac{3}{2} \neq \frac{-2}{-3} \Rightarrow$ Las rectas son secantes.

c) La ecuación de *s* se puede escribir como $x + y - 7 = 0$, que es la misma ecuación de *r*, por lo que las rectas son coincidentes.

d) Los vectores directores son $\overrightarrow{u_r} = (1, -2)$ y $\overrightarrow{u_s} = (-1, 4)$. Como no son proporcionales, las rectas son secantes.

e) Las pendientes son $m_r = -2$ y $m_s = \frac{1}{2}$. Como son distintas, las rectas son secantes, y como $m_r \cdot m_s = -1$ son perpendiculares.

f) $\dfrac{2}{-\frac{2}{3}} = \dfrac{-1}{\frac{1}{3}} \neq \dfrac{-5}{-5} \Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

85. Calcula el punto de intersección de los siguientes pares de rectas secantes.

a) $r:\begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 1+\lambda \end{cases}$ $s:\begin{cases} x = 1-4\mu \\ y = 2+2\mu \end{cases}$

b) $r: 2x-5y = -\frac{23}{2}$ $s: 3x-4y = -12$

c) $r: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ $s: -\frac{x}{8} + \frac{2y}{3} + \frac{3}{2} = 0$

d) $r:\begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = -2+2\lambda \end{cases}$ $s: 2x-y-6 = 0$

a) $\begin{cases} 2-3\lambda = 1-4\mu \\ 1+\lambda = 2+2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\lambda + 4\mu = -1 \\ \lambda - 2\mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1,\ \mu = -1 \Rightarrow$ El punto de intersección es $P(5, 0)$

b) $\begin{cases} 2x-5y = -\dfrac{23}{2} \\ 3x-4y = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-10y = -23 \\ 3x-4y = -12 \end{cases} \Rightarrow x = -2,\ y = \frac{3}{2} \Rightarrow$ El punto de intersección es $P\left(-2, \frac{3}{2}\right)$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1 \\ -\dfrac{x}{8} + \dfrac{2y}{3} + \dfrac{3}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y = 6 \\ -3x+16y = -36 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{28}{9},\ y = -\frac{5}{3} \Rightarrow$ El punto de intersección es $P\left(\frac{28}{9}, -\frac{5}{3}\right)$

d) $2(2-3\lambda) + 2 - 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow -8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$ El punto de intersección es $P(2, -2)$

86. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas *r*: 2*x* − 3*y* + 1 = 0 y *s*: 4*x* + *y* − 3 = 0 y corta al eje de abscisas en el punto *P*(4, 0).

$\begin{cases} 2x-3y+1 = 0 \\ 4x+y-3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{7},\ y = \frac{5}{7} \Rightarrow$ *r* y *s* se cortan en el punto $Q\left(\frac{4}{7}, \frac{5}{7}\right)$. El vector director de la recta buscada es $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{24}{7}, \frac{5}{7}\right) \simeq (-24, 5)$, por tanto, su ecuación es: $\frac{x-4}{-24} = \frac{y-0}{5} \Rightarrow 5x - 20 = -24y \Rightarrow 5x + 24y - 20 = 0$

87. Encuentra la ecuación de las siguientes rectas paralelas a una dada.

a) Paralela a $2x+5y-5=0$ y que pasa por el punto $A(-2, 6)$.

b) Paralela al eje de abscisas y que pasa por el punto $A(-1, 4)$.

c) Paralela al eje de ordenadas y que pasa por le punto $A(-1, 4)$.

d) Paralela a $r: 2x-y+12=0$ y que pasa por el origen de coordenadas.

e) Paralela a $r:\begin{cases} x=-1+3t \\ y=5+t \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-2, 4)$.

f) Paralela a $r:\begin{cases} x=-2+2t \\ y=1 \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-2, -2)$.

g) Paralela a la bisectriz del primer cuadrante y que tiene ordenada en el origen igual a 5.

a) La recta es de la forma $2x+5y+k=0$. Como pasa por A, ha de ser $-4+30+k=0 \Rightarrow k=-26$. Por tanto, la ecuación buscada es $2x+5y-26=0$.

b) La recta es $y=4$.

c) La recta es $x=-1$.

d) La recta es de la forma $2x-y+k=0$. Como pasa por (0, 0) tenemos $k=0$. Luego la ecuación es $2x-y=0$.

e) La recta tiene vector director $\vec{u}=(3, 1)$, así, su ecuación es: $\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{1} \Rightarrow x+2=3y-12 \Rightarrow x-3y+14=0$.

f) La recta tiene la misma dirección que la dada, luego $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow y=-2$.

g) La pendiente de la recta es $m = 1$ y la ordenada en el origen $n = 5$. Luego la recta es $y = x + 5$.

88. Obtén la ecuación de las siguientes rectas.

a) Perpendicular a $x - 2y - 3 = 0$ y que pasa por el punto $A(2, -1)$.

b) Perpendicular al eje de abscisas y que pasa por el punto $A(-4, 8)$.

c) Perpendicular al eje de ordenadas y que pasa por el punto $A(-1, 3)$.

d) Perpendicular a r: $3x - 3y + 1 = 0$ y que pasa por el origen de coordenadas.

e) Perpendicular a $r:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=5+t \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-1, 0)$.

f) Perpendicular al segmento $\overline{AB}$ con $A(-1, -3)$ y $B(2, -5)$ y que pasa por $P(-3, 2)$.

a) La recta tiene vector director $\vec{u}=(1, -2)$, así, su ecuación es: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2} \Rightarrow -2x+4=y+1 \Rightarrow 2x+y-3=0$.

b) La recta es vertical y pasa por A, por tanto, su ecuación es: $x = -4$.

c) La recta es horizontal y pasa por A, por tanto, su ecuación es: $y = 3$.

d) La recta tiene vector director $\vec{u}=(3, -3)$, así, su ecuación es: $\frac{x}{3}=\frac{y}{-3} \Rightarrow 3x+3y=0 \Rightarrow x+y=0$.

e) La recta tiene vector normal $\vec{n}=(2, 1)$, así, su ecuación es: $2(x+1)+1(y-0) \Rightarrow 2x+y+2=0$.

f) La recta tiene vector normal $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(3, -2)$, así, su ecuación es: $3(x+3)-2(y-2) \Rightarrow 3x-2y+13=0$.

89. En cada caso, calcula el valor del parámetro *k* para que las rectas tengan la posición relativa indicada.

a) $r: x - ky + 1 = 0$; $s: kx - 4y - 3 = 0$, paralelas.

b) $r: kx - 2y - 4k = 0$; $s: x - 3y - 4 = 0$, coincidentes.

c) $r: 2kx + 5y - 1 = 0$; $s: 3x - ky + 2 = 0$, paralelas.

a) Ha de verificarse que $\frac{1}{k} = \frac{-k}{-4} \neq \frac{1}{-3} \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$.

b) Ha de verificarse que $\frac{k}{1} = \frac{-2}{-3} = \frac{-4k}{-4} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$.

c) Ha de verificarse que $\frac{2k}{3} = \frac{5}{-k} \neq \frac{-1}{2} \Rightarrow 2k^2 = -15 \Rightarrow$ Imposible, luego no pueden ser paralelas.

90. Halla para qué valor de *b*, la recta $x - by = -4b - 1$ es coincidente con la recta que pasa por los puntos *P*(–1, 4) y *Q*(2, 3).

La recta dada debe pasar por *P* y *Q*, luego $\begin{cases} -1 - 4b = -4b - 1 \\ 2 - 3b = -4b - 1 \end{cases} \Rightarrow b = -3$, así, la recta es $x + 3y - 11 = 0$.

91. Halla el valor de *k* para que sean paralelas las rectas $r: (2k - 2)x - y + 2k = 0$ y $s: (k - 1)x + (k + 1)y - 17 = 0$. Para los valores hallados, obtén la ecuación de la recta paralela a *r* y *s* que pasa por el origen de coordenadas.

Para que sean paralelas tiene que suceder que $\frac{2k-2}{k-1} = \frac{-1}{k+1} \Rightarrow 2k^2 + k - 3 = 0 \Rightarrow k = 1,\ k = -\frac{3}{2}$.

En el primer caso la recta paralela que pasa por el origen es $y = 0$, en el segundo caso es $5x + y = 0$.

92. Dadas las rectas:

$r: (k - 1)x - 2y + 2k = 0$ $s: (3k - 4)x + y + k^2 = 0$

Encuentra los valores de *k* para que sean perpendiculares. Para los valores hallados, calcula el punto de intersección de las rectas.

Los vectores directores de las rectas son $\vec{u_r} = (2,\ k-1)$ y $\vec{u_s} = (1,\ 4-3k)$, que han de ser perpendiculares. Así:

$$2 + (k-1)(4-3k) = 0 \Rightarrow -3k^2 + 7k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{3},\ k = 2$$

Para $k = \frac{1}{3}$, $\begin{cases} r: \frac{-2}{3}x - 2y + \frac{2}{3} = 0 \\ s: -3x + y + \frac{1}{9} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 27x - 9y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{15}, y = \frac{13}{45}$. El punto de intersección es $P\left(\frac{2}{15}, \frac{13}{45}\right)$.

Para $k = 2$, $\begin{cases} r: x - 2y + 4 = 0 \\ s: 2x + y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x + 2y = -8 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-12}{5}, y = \frac{4}{5}$. El punto de intersección es $P\left(-\frac{12}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

93. Halla los valores de *m* y *n* para que sean perpendiculares las rectas $r: x - my + 2n = 0$ y $s: 2mx + ny + 1 = 0$, sabiendo que el punto *P*(0, 2) pertenece a la recta *r*. Para los valores hallados, encuentra el punto de intersección de *r* y *s*.

Los vectores directores de las rectas son $\vec{u_r} = (m,\ 1)$ y $\vec{u_s} = (-n,\ 2m)$, que han de ser perpendiculares. Así:

$$\begin{cases} -mn + 2m = 0 \\ -2m + 2n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = n = 0 \text{ Imposible} \\ m = n = 2 \end{cases}$$

El punto *P* de intersección es: $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 4x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1,\ y = \frac{3}{2} \Rightarrow P\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

Haz de rectas

94. Calcula la ecuación del haz de rectas secantes de vértice el punto *P*(–2, 3). Encuentra la recta de este haz que tiene pendiente $m = -\frac{1}{2}$.

La ecuación del haz es $y - 3 = m(x+2)$. Si $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow 2y - 6 = -x - 2 \Rightarrow x + 2y - 4 = 0$.

95. Determina la ecuación del haz determinado por las rectas secantes *r*: *y* = 2*x* – 3 y *s*: *y* = 3*x* – 5 y halla su vértice y la recta de este haz que pasa por el punto *P*(–2, 2).

La ecuación del haz es: $2x - y - 3 + \lambda(3x - y - 5) = 0$. Vértice: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 3x - 5 \end{cases} \Rightarrow x = 2,\ y = 1 \Rightarrow V(2, 1)$

Si la recta pasa por *P*, se tiene que $-4 - 2 - 3 + \lambda(-6 - 2 - 5) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{9}{13}$. Por tanto, la recta buscada es:

$$2x - y - 3 - \frac{9}{13}(3x - y - 5) = 0 \Rightarrow 26x - 13y - 39 - 27x + 9y + 45 = 0 \Rightarrow x + 4y - 6 = 0$$

96. Halla la ecuación del haz determinado por las rectas secantes *r* : 2*x* + *y* = 0 y *s* : 3*x* – 2*y* = 0 y calcula su vértice y la recta de este haz que tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$.

La ecuación del haz es: $2x + y + \lambda(3x - 2y) = 0$. Vértice: $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = 0 \Rightarrow V(0, 0)$

La recta buscada tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$ y pasa por *V*, por tanto, su ecuación es: $y = -\frac{2}{3}x \Rightarrow 2x + 3y = 0$.

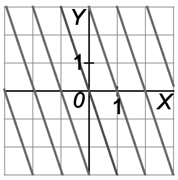
97. Escribe, en una sola ecuación dependiente de un parámetro, todas las rectas paralelas a la recta de ecuación *r* : –2*x* + 3*y* – 5 = 0 y elige, de entre ellas, la que pasa por *P*(–1, 3).

Todas las rectas paralelas a la dada son de la forma $-2x + 3y + K = 0$.

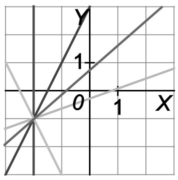
De ellas, la que pasa por *P* verifica $2 + 9 + K = 0 \Rightarrow K = -11$, por tanto, su ecuación es: $-2x + 3y - 11 = 0$.

98. Determina las ecuaciones de los haces de las siguientes figuras.

a)



b)



Halla en cada uno de los haces anteriores la recta que pasa por el punto *P*(–1, –2)

a) Es un haz de rectas paralelas de pendiente $m = -3$, por tanto, su ecuación es: $3x + y + K = 0$.

De ellas, la que pasa por *P* verifica $-3 - 2 + K = 0 \Rightarrow K = 5$, por tanto, su ecuación es: $3x + y + 5 = 0$.

b) Es un haz de rectas secantes de vértice *V*(–2, –1), por tanto, su ecuación es: $y + 1 = m(x+2)$.

De ellas, la que pasa por *P* verifica $-2 + 1 = m(-1+2) \Rightarrow m = -1$, por tanto, su ecuación es:

$y + 1 = -(x+2) \Rightarrow x + y + 3 = 0$.

99. Encuentra la expresión que representa a todas las rectas que tienen pendiente $m = -2$ y di cuál de ellas pasa por el origen de coordenadas.

Las rectas con pendiente $m = -2$ son de la forma $y = -2x + n$. La que pasa por el origen tiene ecuación $y = -2x$.

100. Escribe, en una sola ecuación dependiente de un parámetro, todas las rectas perpendiculares a $r: 3x - 2y + 12 = 0$ y elige, de entre ellas, la que pasa por $P(1, -1)$.

La pendiente de r es $m = \frac{3}{2}$, por tanto, las rectas perpendiculares a r tienen pendiente $m = -\frac{2}{3}$, es decir, son de la forma $y = -\frac{2}{3}x + n$. La que pasa por P verifica $-1 = -\frac{2}{3} + n \Rightarrow n = -\frac{1}{3}$, por tanto su ecuación es: $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

Distancias y ángulos

101. Calcula la distancia entre los puntos A y B:

a) $A(2, -3)$ y $B(-2, 5)$

b) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ y $B\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}\right)$

c) $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

d) $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$ y $B\left(\frac{3}{5}, -3\right)$

a) $d(A, B) = \sqrt{(-2-2)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ u

b) $d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ u

c) $d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ u

d) $d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-3 + \frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{1609}{900}} = \frac{\sqrt{1609}}{30}$ u

102. Halla la distancia del punto $P(2, -3)$ al punto de intersección de las rectas $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \end{cases}$ y $s: 2x + y - 3 = 0$.

Punto de intersección A: $2 - 1 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow A(1, 1)$. Por tanto, $d(A, P) = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$ u

103. Halla el perímetro del romboide determinado por las siguientes rectas.

a) $x + 4y - 9 = 0$ **b)** $x - y - 4 = 0$ **c)** $x + 4y - 6 = 0$ **d)** $x - y + 6 = 0$

Observemos que a y c son paralelas, igual que b y d, por tanto, es un paralelogramo. Los vértices son:

$\begin{cases} x + 4y - 9 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5,\ y = 1 \Rightarrow A(5, 1)$

$\begin{cases} x + 4y - 6 = 0 \\ x - y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{18}{5},\ y = \frac{12}{5} \Rightarrow C\left(-\frac{18}{5}, \frac{12}{5}\right)$

$\begin{cases} x + 4y - 9 = 0 \\ x - y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -3,\ y = 3 \Rightarrow B(-3, 3)$

$\begin{cases} x + 4y - 6 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{22}{5},\ y = \frac{2}{5} \Rightarrow D\left(\frac{22}{5}, \frac{2}{5}\right)$

El perímetro es $2(d(A, B) + d(B, C)) = 2\left(\sqrt{64+4} + \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{9}{25}}\right) = 2\left(2\sqrt{17} + \frac{3}{5}\sqrt{2}\right) \simeq 18{,}19$ u

104. Halla la distancia del punto *P*(–4, 3) al punto medio del segmento de extremos *A*(1, –3) y *B*(–1, 2).

El punto medio del segmento es $M\left(0,\, -\frac{1}{2}\right)$, por tanto, $d(P,\, M) = \sqrt{16 + \frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{113}}{2}$ u

105. Calcula la distancia del punto *P* a la recta *r* en los siguientes casos.

a) $P(-3, 4)$ r: $2x + 3y - 5 = 0$ **c)** $P\left(\frac{1}{2},\, -3\right)$ r: $2x - 2y = -3$

b) $P(0, -2)$ r: $y = -2x + 5$ **d)** $P(1, -2)$ $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases}$

e) $P(-1, 0)$ y r es la recta que pasa por los puntos $A\left(\frac{1}{2},\, -3\right)$ y $B\left(-2,\, \frac{1}{2}\right)$

f) $P(3, -2)$ y r es la recta que forma un ángulo de 45º con el eje positivo de abscisas y que tiene ordenada en el origen igual a –2.

a) $d(P,\, r) = \frac{|2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$ u

b) $d(P,\, r) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$ u

c) $d(P,\, r) = \frac{\left|2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot (-3) + 3\right|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{8}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ u

d) $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} \Rightarrow -x + 1 = y + 2 \Rightarrow x + y + 1 = 0 \Rightarrow d(P,\, r) = \frac{|1 - 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 0$

e) $\frac{x - \frac{1}{2}}{-2 - \frac{1}{2}} = \frac{y + 3}{\frac{1}{2} + 3} \Rightarrow 14x + 10y + 23 = 0 \Rightarrow d(P,\, r) = \frac{|14 \cdot (-1) + 10 \cdot 0 + 23|}{\sqrt{14^2 + 10^2}} = \frac{9}{\sqrt{296}} = \frac{9\sqrt{74}}{148}$ u

f) La pendiente de r es $m = 1$, y la ordenada en el origen es $n = -2$, por tanto, su ecuación es $y = x - 2 \Rightarrow x - y - 2 = 0$ y $d(P,\, r) = \frac{|3 + 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ u

106. Comprueba que los siguientes pares de rectas son paralelas y calcula, en cada caso, la distancia que las separa.

a) $r: 2x - y = 7$ s: $2x - y = 8$ **b)** $r: 2x - 3y - 2 = 0$ $s: -\frac{2}{3}x + y - 2 = 0$ **c)** $r: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = \frac{3 - t}{2} \end{cases}$

a) $\frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-7}{-8} \Rightarrow$ Son paralelas y $d(r,\, s) = \frac{|-7 + 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ u

b) s: $-\frac{2}{3}x + y - 2 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 6 = 0$. $\frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} \neq \frac{-2}{6} \Rightarrow$ Son paralelas y $d(r,\, s) = \frac{|-2 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{8}{\sqrt{13}} = \frac{8\sqrt{13}}{13}$ u

c) $r: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x - 2}{2} = \frac{y - 3}{-1} \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$ $s: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = \frac{3 - t}{2} \end{cases} \Rightarrow x - 3 = 3 - 2y \Rightarrow x + 2y - 6 = 0$

$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} \neq \frac{-8}{-6} \Rightarrow$ Son paralelas y $d(r,\, s) = \frac{|-8 + 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ u

107. Calcula las medidas de sus tres lados y clasifica los siguientes triángulos.

a) $A(3, 2)$, $B(5, -4)$ y $C(1, -2)$ **b)** $A(3, 5)$, $B(-1, -1)$ y $C(5, -3)$ **c)** $A(0, 1)$, $B(0, 2)$ y $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

a) $d(A, B) = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ u $d(B, C) = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ u

$d(A, C) = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ u   Es un triángulo isósceles.

b) $d(A, B) = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ u $d(B, C) = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ u

$d(A, C) = \sqrt{2^2 + (-8)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ u   Es un triángulo escaleno.

c) $d(A, B) = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ u $d(B, C) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$ u

$d(A, C) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$ u   Es un triángulo equilátero.

108. Calcula el perímetro y el área del triángulo de vértices: *A*(–2, 2), *B*(5, –1) y *C*(3, 4)

$d(A, B) = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{58}$ u, $d(B, C) = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$ u y $d(A, C) = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ u.

Por tanto, el perímetro es $P = \sqrt{58} + 2\sqrt{29}$ u.

La altura del triángulo es la distancia del vértice *C* a la recta determinada por el segmento *AB*, de ecuación:

$$\frac{x+2}{7} = \frac{y-2}{-3} \Rightarrow -3x - 6 = 7y - 14 \Rightarrow 3x + 7y - 8 = 0$$

Por tanto, la altura es $d(C, AB) = \frac{|3\cdot(-3) + 4\cdot(-7) + 8|}{\sqrt{3^2 + 7^2}} = \frac{29}{\sqrt{58}} = \frac{\sqrt{58}}{2}$ u y el área es $S = \frac{\sqrt{58}\cdot\frac{\sqrt{58}}{2}}{2} = \frac{58}{4} = \frac{29}{2}$ u^2

109. Calcula las coordenadas de los vértices y el perímetro del triángulo determinado por las rectas:

$$r: x - 3y + 1 = 0$$
$$s: 3x - 2y - 4 = 0$$
$$t: 2x + y + 2 = 0$$

Los vértices del triángulo son:

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 3x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2,\ y = 1 \Rightarrow A(2, 1) \qquad \begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1,\ y = 0 \Rightarrow B(-1, 0)$$

$$\begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = -2 \Rightarrow C(0, -2)$$

Por tanto, el perímetro es $P = d(A,B) + d(B,C) + d(C,A) = \sqrt{9+1} + \sqrt{1+4} + \sqrt{4+9} = \sqrt{10} + \sqrt{5} + \sqrt{13}$ u

110. Calcula el ángulo que forman las rectas:

a) $r: 3x + y = 1$ y $s: x - y = 3$

b) $r: x - 2y - 2 = 0$ y $s: -x - y - 2 = 0$

c) $r: y = -x + 2$ y $s: y = -\dfrac{1}{2} - 3x$

d) $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$

e) $r: 2x - y - 7 = 0$ y $s: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$

a) Los vectores normales son $\overrightarrow{n_1} = (3, 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1, -1)$, luego $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \dfrac{2}{\sqrt{10}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 63{,}43°$

b) Los vectores normales son $\overrightarrow{n_1} = (1, -2)$ y $\overrightarrow{n_2} = (-1, -1)$, luego $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \alpha = 71{,}57°$

c) Las pendientes son $m_1 = -1$ y $m_2 = -3$, luego $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{|m_1 - m_2|}{|1 + m_1 m_2|} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26{,}57°$

d) Los vectores directores son $\overrightarrow{u_1} = (2, -2)$ y $\overrightarrow{u_2} = (-2, 1)$. Luego $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|} = \dfrac{6}{\sqrt{8}\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \alpha = 18{,}43°$

e) Los vectores normales son $\overrightarrow{n_1} = (2, -1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1, 0)$. Luego $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 26{,}57°$

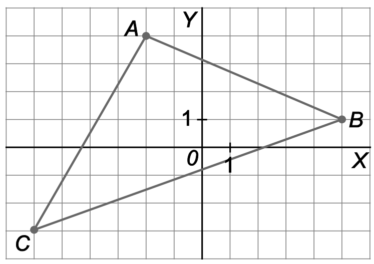
111. Calcula el área y el perímetro del cuadrilátero que forman las rectas *r* : 3*x* + 4*y* = 12 y *s* : 5*x* + 6*y* = 30 con los ejes coordenados.

Los vértices del cuadrilátero son *A*(4, 0), *B*(6, 0), *C*(0, 5) y *D*(0, 3).

El perímetro es $P = d(A,B) + d(B,C) + d(C,D) + d(D,A) = \sqrt{4+0} + \sqrt{36+25} + \sqrt{0+4} + \sqrt{16+9} = 9 + \sqrt{61}$ u .

El área se calcula restando las áreas de los triángulos rectángulos *OBC* y *OAD*: $S = 15 - 6 = 9$ u^2 .

112. Halla el perímetro del triángulo formado por los puntos medios de los lados del triángulo de la figura.



A(–2, 4), *B*(5, 1) y *C*(–6, –3), de modo que los puntos medios de los lados son $M_1\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$, $M_2\left(-\dfrac{1}{2}, -1\right)$ y $M_3\left(-4, \dfrac{1}{2}\right)$y, por tanto, el perímetro pedido es:

$$P = d(M_1, M_2) + d(M_2, M_3) + d(M_3, M_1) = \sqrt{4 + \frac{49}{4}} + \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{121}{4} + 4} = \frac{\sqrt{65} + \sqrt{58} + \sqrt{137}}{2} \text{ u}$$

Otra forma de hacerlo sería:

$$P = \frac{1}{2}\text{Perímetro}(ABC) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{7^2 + (-3)^2} + \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2} + \sqrt{(-11)^2 + (-4)^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\sqrt{58} + \sqrt{65} + \sqrt{137}\right]$$

113. Calculando las medidas de sus tres ángulos, clasifica los siguientes triángulos.

a) $A(5, 3)$, $B(1, 2)$ y $C(7, 0)$ **b)** $A(1, 2)$, $B(-4, -3)$ y $C(2, -1)$ **c)** $A(-2, 8)$, $B(-6, 1)$ y $C(0, 4)$

a) $\overrightarrow{AB}=(-4,-1)$ y $\overrightarrow{AC}=(2,-3)\Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{17}\sqrt{13}}=-\dfrac{5\sqrt{221}}{221}\Rightarrow\hat{A}=109{,}65^{\circ}$

$\overrightarrow{BA}=(4,1)$ y $\overrightarrow{BC}=(6,-2)\Rightarrow \cos\hat{B}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{22}{\sqrt{17}\sqrt{40}}=\dfrac{11\sqrt{170}}{170}\Rightarrow\hat{B}=32{,}47^{\circ}$

$\overrightarrow{CA}=(-2,3)$ y $\overrightarrow{CB}=(-6,2)\Rightarrow \cos\hat{C}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{18}{\sqrt{13}\sqrt{40}}=\dfrac{9\sqrt{130}}{130}\Rightarrow\hat{C}=37{,}87^{\circ}$

Es un triángulo obtusángulo.

b) $\overrightarrow{AB}=(-5,-5)$ y $\overrightarrow{AC}=(1,-3)\Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{10}{\sqrt{50}\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\hat{A}=63{,}43^{\circ}$

$\overrightarrow{BA}=(5,5)$ y $\overrightarrow{BC}=(6,2)\Rightarrow \cos\hat{B}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{40}{\sqrt{50}\sqrt{40}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\hat{B}=26{,}57^{\circ}$

$\overrightarrow{CA}=(-1,3)$ y $\overrightarrow{CB}=(-6,-2)\Rightarrow \cos\hat{C}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{0}{\sqrt{10}\sqrt{40}}=0\Rightarrow\hat{C}=90^{\circ}$

Es un triángulo rectángulo.

c) $\overrightarrow{AB}=(-4,-7)$ y $\overrightarrow{AC}=(2,-4)\Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{20}{\sqrt{65}\sqrt{20}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}\Rightarrow\hat{A}=56{,}31^{\circ}$

$\overrightarrow{BA}=(4,7)$ y $\overrightarrow{BC}=(6,3)\Rightarrow \cos\hat{B}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{45}{\sqrt{65}\sqrt{45}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\Rightarrow\hat{B}=33{,}69^{\circ}$

$\overrightarrow{CA}=(-2,4)$ y $\overrightarrow{CB}=(-6,-3)\Rightarrow \cos\hat{C}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{0}{\sqrt{20}\sqrt{45}}=0\Rightarrow\hat{C}=90^{\circ}$

Es un triángulo rectángulo.

114. Calcula las coordenadas de los vértices y la medida de los ángulos del triángulo determinado por las siguientes rectas. Clasifícalo según sus lados y según sus ángulos.

$$\boldsymbol{r: 3x+2y-3=0}$$

$$\boldsymbol{s: 2x-y-2=0}$$

$$\boldsymbol{t: x+2y+9=0}$$

Los vértices del triángulo son:

$\begin{cases}3x+2y-3=0\\2x-y-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\Rightarrow A(1,0)$ $\begin{cases}3x+2y-3=0\\x+2y+9=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=-\dfrac{15}{2}\end{cases}\Rightarrow B\left(6,-\dfrac{15}{2}\right)$

$\begin{cases}2x-y-2=0\\x+2y+9=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-4\end{cases}\Rightarrow C(-1,-4)$

Los vectores normales son: $\vec{n}_r=(3,2)$, $\vec{n}_s=(2,-1)$, $\vec{n}_t=(1,2)$

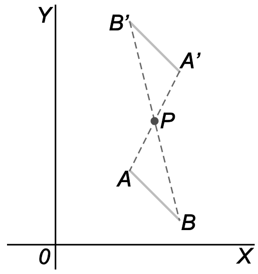
Las rectas s y t son perpendiculares pues: $2\cdot1+(-1)2=0\Rightarrow\hat{C}=90^{\circ}$

Los otros ángulos son: $\cos\hat{A}=\dfrac{\vec{n}_r\cdot\vec{n}_s}{|\vec{n}_r||\vec{n}_s|}=\dfrac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}}\Rightarrow\hat{A}=60{,}26^{\circ}$ $\cos\hat{B}=\dfrac{\vec{n}_r\cdot\vec{n}_t}{|\vec{n}_r||\vec{n}_t|}=\dfrac{7}{\sqrt{13}\sqrt{5}}\Rightarrow\hat{B}=29{,}74^{\circ}$

Por tener los ángulos distintos es escaleno, además, es un triángulo rectángulo.

Puntos y rectas simétricos

115. Calcula las coordenadas de los extremos del segmento simétrico del $\overline{AB}$ respecto de la simetría central de centro *P* siendo: *A*(2, 3), *B*(4, 1) y *P*(3, 5).



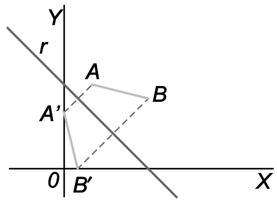
P ha de ser el punto medio de *A* y *A*′, luego, si $A'(a_1, a_2)$, tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{2+a_1}{2}=3 \Rightarrow a_1=4 \\ \dfrac{3+a_2}{2}=5 \Rightarrow a_2=7 \end{cases} \Rightarrow A'(4, 7)$$

Análogamente, *P*ha de ser el punto medio de *B* y *B*′, luego si $B'(b_1, b_2)$, tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{4+b_1}{2}=3 \Rightarrow b_1=2 \\ \dfrac{1+b_2}{2}=5 \Rightarrow b_2=9 \end{cases} \Rightarrow B'(2, 9)$$

116. Calcula las coordenadas de los extremos del segmento simétrico del $\overline{AB}$ respecto de la simetría axial de eje *r* siendo: *A*(1, 3), $B\left(3, \dfrac{5}{2}\right)$ y *r* : *x* + *y* = 3.



La recta que pasa por *A* y *A*′es perpendicular a *r*, por tanto, es de la forma $x-y+k=0$ y, como pasa por *A*, se tiene $1-3+k=0 \Rightarrow k=2$, con lo que la ecuación de la recta *AA*′ es $x-y+2=0$.

El punto de intersección de esta recta y *r* es: $\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{5}{2} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

M es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$, luego, si $A'(a_1, a_2)$, tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{1+a_1}{2}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow a_1=0 \\ \dfrac{3+a_2}{2}=\dfrac{5}{2} \Rightarrow a_2=2 \end{cases} \Rightarrow A'(0, 2)$$

Siguiendo un proceso análogo para el punto *B* se tiene:

$$BB' : x-y+k=0 \Rightarrow 3-\frac{5}{2}+k=0 \Rightarrow k=-\frac{1}{2} \Rightarrow x-y-\frac{1}{2}=0$$

Punto de intersección: $\begin{cases} x-y-\dfrac{1}{2}=0 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{7}{4},\ y=\dfrac{5}{4} \Rightarrow N\left(\dfrac{7}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$

Calculo de $B'(b_1, b_2)$: $\begin{cases} \dfrac{3+b_1}{2}=\dfrac{7}{4} \Rightarrow a_1=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\frac{5}{2}+b_2}{2}=\dfrac{5}{4} \Rightarrow a_2=0 \end{cases} \Rightarrow B'\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

117. Dada las rectas $r: x - 4y + 2 = 0$ y $s: 2x - 3y = -4$:

a) Calcula su punto de corte.

b) Demuestra que el punto $P(1, 2)$ pertenece a s y calcula su simétrico respecto de la recta r.

c) Calcula la ecuación de la simétrica de la recta s respecto de la recta r.

a) El punto de corte es: $\begin{cases} x - 4y + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(-2, 0)$

b) P verifica la ecuación de s. En efecto: $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 = 2 - 6 + 4 = 0 \Rightarrow P \in s$.

La recta perpendicular a r que pasa por P es: $4x + y + k = 0 \Rightarrow 4 + 2 + k = 0 \Rightarrow k = -6 \Rightarrow 4x + y - 6 = 0$.

Dicha recta corta a r en el punto: $\begin{cases} 4x + y - 6 = 0 \\ x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M = \left(\dfrac{22}{17}, \dfrac{14}{17}\right)$

M es el punto medio de P y su simétrico $P'(a, b)$, luego: $\begin{cases} \dfrac{1+a}{2} = \dfrac{22}{17} \Rightarrow a = \dfrac{27}{17} \\ \dfrac{2+b}{2} = \dfrac{14}{17} \Rightarrow b = -\dfrac{6}{17} \end{cases} \Rightarrow P'\left(\dfrac{27}{17}, -\dfrac{6}{17}\right)$

c) La recta pasa por Q y P', por tanto su ecuación es: $\dfrac{x+2}{61} = \dfrac{y}{-6} \Rightarrow -6x - 12 = 61y \Rightarrow 6x + 61y + 12 = 0$.

Lugares geométricos

118. Dados los puntos $A(1, 4)$, $B(-3, 0)$ y $C(3, -2)$:

a) Determina las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

b) Halla las coordenadas del punto que equidista de A, B y C.

a) Mediatriz del segmento $\overline{AB}$:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + 6x + 9 + y^2 \Rightarrow x + y - 1 = 0$$

Mediatriz del segmento $\overline{AC}$:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 \Rightarrow x - 3y + 1 = 0$$

Mediatriz del segmento $\overline{BC}$:

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 \Rightarrow 3x - y - 1 = 0$$

b) El punto que equidista de A, B y C, el circuncentro, se obtiene como punto de intersección de las mediatrices:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2} \Rightarrow T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

119. Halla las bisectrices de las rectas $r: 3x - 2y = -2$ y $s: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$ y comprueba que son perpendiculares.

Ecuación general de la recta s. $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{2} = y - 1 \Rightarrow x - 2y + 2 = 0$

Ecuaciones de las bisectrices:

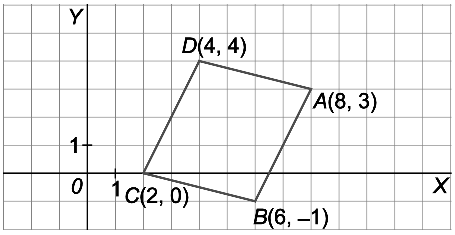
$$\frac{|3x - 2y + 2|}{\sqrt{13}} = \frac{|x - 2y + 2|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{3x - 2y + 2}{\sqrt{13}} = \pm\frac{x - 2y + 2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \begin{cases} b_1: \left(3\sqrt{5} - \sqrt{13}\right)x + \left(2\sqrt{13} - 2\sqrt{5}\right)y + \left(2\sqrt{5} - 2\sqrt{13}\right) = 0 \\ b_2: \left(3\sqrt{5} + \sqrt{13}\right)x - \left(2\sqrt{13} + 2\sqrt{5}\right)y + \left(2\sqrt{5} + 2\sqrt{13}\right) = 0 \end{cases}$$

Los vectores normales y, por tanto, las bisectrices, son perpendiculares, ya que:

$$\left(3\sqrt{5} - \sqrt{13},\ 2\sqrt{13} - 2\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{5} + \sqrt{13},\ -2\sqrt{13} - 2\sqrt{5}\right) = 45 - 13 - 52 + 20 = 0$$

Síntesis

120. Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí. Calcula las ecuaciones de las diagonales de la figura, y comprueba si se trata o no de un rombo.



La diagonal *AC* tiene vector director $\overrightarrow{AC} = (-6, -3) \simeq (2, 1)$ y pasa por *A*, por lo que su ecuación es:

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y-3}{1} \Rightarrow x-8 = 2y-6 \Rightarrow x-2y-2=0$$

La diagonal *BD* tiene vector director $\overrightarrow{BD} = (-2, 5)$ y pasa por *B*, por lo que su ecuación es:

$$\frac{x-6}{-2} = \frac{y+1}{5} \Rightarrow 5x-30 = -2y-2 \Rightarrow 5x+2y-28=0$$

No se trata de un rombo, ya que las diagonales no son perpendiculares. En efecto, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 12-15 = -3 \neq 0$

121. Dado el triángulo de vértices: *A*(1, 3), *B*(–1, 2) y *C*(0, –3)

a) Calcula las coordenadas del baricentro.

b) Halla las ecuaciones de dos alturas y las coordenadas del ortocentro.

c) Obtén las ecuaciones de dos mediatrices y las coordenadas del circuncentro.

d) Calcula el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

e) Encuentra la ecuación de la recta de Euler y comprueba que el baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados.

a) El baricentro es $G\left(0, \frac{2}{3}\right)$

b) La altura por *A* es perpendicular a $\overrightarrow{BC} = (1, -5)$, así, su ecuación es: $1(x-1)-5(y-3) \Rightarrow x-5y+14=0$.

La altura por *B* es perpendicular a $\overrightarrow{AC} = (-1, -6)$, así, su ecuación es: $-1(x+1)-6(y-2) \Rightarrow x+6y-11=0$.

El ortocentro es el punto de intersección de estas alturas: $H\left(-\frac{29}{11}, \frac{25}{11}\right)$

c) Mediatriz del lado *AB*: $\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} \Rightarrow 4x+2y-5=0$

Mediatriz del lado*AC*: $\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y+3)^2} \Rightarrow 2x+12y-1=0$

El circuncentro es el punto de intersección de estas mediatrices: $T\left(\frac{29}{22}, -\frac{3}{22}\right)$

d) El radio de la circunferencia circunscrita es $d(T, A) = \sqrt{\left(\frac{29}{22}-1\right)^2 + \left(-\frac{3}{22}-3\right)^2} = \sqrt{\frac{2405}{242}} \approx 3{,}15$ u

e) $\overline{GH} = \left(-\frac{29}{11}, \frac{53}{33}\right)$ y $\overline{GH} = \left(\frac{29}{22}, -\frac{53}{66}\right)$ son proporcionales, por tanto, el baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados. La recta que pasa por ellos es la recta de Euler, de ecuación:

$$\frac{x-0}{-\frac{29}{11}} = \frac{y-\frac{2}{3}}{\frac{53}{33}} \Rightarrow 53x+87y-58=0$$

122. Halla las bisectrices interiores del triángulo de vértices *A*(2, 3), *B*(–1, 2) y *C*(3, 0). Calcula las coordenadas del incentro y el radio de la circunferencia inscrita.

Bisectriz interior por *A*: $2x-y-1=0$

Bisectriz interior por *B*: $\left(\sqrt{2}-1\right)x+\left(2\sqrt{2}+3\right)y-\left(7+3\sqrt{2}\right)=0$

Bisectriz interior por *C*: $\left(3+\sqrt{2}\right)x+\left(1+2\sqrt{2}\right)y-\left(9+3\sqrt{2}\right)=0$

El incentro es el punto de intersección de dos bisectrices: $I\left(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}-1\right)$

El radio de la circunferencia inscrita es $d(I,AB)=\dfrac{\left|\sqrt{2}-3(2\sqrt{2}-1)+7\right|}{\sqrt{10}}=\dfrac{10-5\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\simeq 0{,}93$ u (La recta *AB* tiene ecuación $x-3y+7=0$)

123. Dado el triángulo de vértices *A*(–3, 2), *B*(3, –4) y *C*(3, 5), y los puntos exteriores *D*(5, –3) y *E*(5, 3),

a) Demuestra que el segmento $\overline{BD}$ es paralelo al lado $\overline{AC}$ y mide la tercera parte de éste.

b) Demuestra que el segmento $\overline{CE}$ es paralelo al lado $\overline{AB}$ y mide la tercera parte de éste.

c) Si *M* es el punto medio de D y E y *G* es el baricentro del triángulo, demuestra que *A*, *G* y *M* están alineados.

d) Comprueba que *G* es el punto medio de *A* y *M*.

a) $\overrightarrow{BD}=(2,\ 1)$ y $\overrightarrow{AC}=(6,\ 3)$ verifican que $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{BD}$, por lo queel segmento $\overline{BD}$ es paralelo al lado $\overline{AC}$ y mide la tercera parte de éste.

b) $\overrightarrow{CE}=(2,\ -2)$ y $\overrightarrow{AB}=(6,\ -6)$ verifican que $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CE}$, por lo queel segmento $\overline{CE}$ es paralelo al lado $\overline{AB}$ y mide la tercera parte de éste.

c) *M*(5, 0) y *G*(1, 1) $\Rightarrow \overrightarrow{AG}=(4,\ -1)$ y $\overrightarrow{AM}=(8,\ -2)$ son proporcionales, por lo que *A*, *G* y *M* están alineados.

d) Como $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AG}$, *G* es el punto medio de *A* y *M*.

124. Dado el cuadrilátero de vértices *A*(1, 1), *B*(5, 2), *C*(3, 3) y $D\left(1,\ \frac{5}{2}\right)$:

a) Demuestra que se trata de un trapecio.

b) Calcula el punto donde se cortan las diagonales.

c) Comprueba que la recta que une los puntos medios de los dos lados no paralelos es paralela a las bases del trapecio.

a) Los lados *AB* y *DC* son paralelos, ya que los vectores $\overrightarrow{AB}=(4,\ 1)$ y $\overrightarrow{DC}=\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ son proporcionales.

Los lados *AD* y *BC* no son paralelos, ya que los vectores $\overrightarrow{AD}=\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$ y $\overrightarrow{BC}=(-2,\ 1)$ no son proporcionales.

Por tanto, el cuadrilátero es un trapecio de bases *AB* y *DC*.

b) La diagonal *AC* tiene ecuación: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}\Rightarrow x-y=0$ y la *BD*: $\dfrac{x-5}{-4}=\dfrac{y-2}{\frac{1}{2}}\Rightarrow x+8y-21=0$.

Punto de corte: $\begin{cases} x-y=0 \\ x+8y-21=0 \end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{7}{3},\ y=\dfrac{7}{3}\Rightarrow P\left(\dfrac{7}{3},\ \dfrac{7}{3}\right)$

c) $R\left(1,\ \frac{7}{4}\right)$ y $S\left(4,\ \frac{5}{2}\right)$ son los puntos medios de *AD* y *BC*, respectivamente.La recta *RS* es paralela a los lados *AB* y *DC*, ya que los vectores $\overrightarrow{AB}=(4,\ 1)$, $\overrightarrow{DC}=\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ y $\overrightarrow{RS}=\left(3,\ \frac{3}{4}\right)$ son proporcionales.

125. Se considera el cuadrilátero de vértices:*A*(–5, 0), *B*(3, 2), *C*(5, –8) y *D*(–7, –6)

a) Calcula la medida de las dos diagonales.

b) Comprueba que los puntos medios de los lados forman un paralelogramo.

c) Calcula el perímetro del paralelogramo.

d) Comprueba que el perímetro hallado coincide con la suma de las dos diagonales del cuadrilátero inicial.

a) $d(A,C)=\sqrt{10^2+8^2}=\sqrt{164}=2\sqrt{41}$ u $\qquad d(B,D)=\sqrt{(-10)^2+(-8)^2}=\sqrt{164}=2\sqrt{41}$ u

b) Punto medio del lado *AB*: $M_1(-1,1)$ $\qquad$ Punto medio del lado *BC*: $M_2(4,-3)$

Punto medio del lado *CD*: $M_3(-1,-7)$ $\qquad$ Punto medio del lado DA: $M_4(-6,-3)$

Como $\overrightarrow{M_1M_4}=\overrightarrow{M_2M_3}=(-5,-4)$, $M_1M_2M_3M_4$ es un paralelogramo.

c) El perímetro es $2d(M_1,M_2)+2d(M_2,M_3)=2\sqrt{5^2+(-4)^2}+2\sqrt{(-5)^2+(-4)^2}=4\sqrt{41}$ u

d) La suma de las diagonales es $d(A,C)+d(B,D)=4\sqrt{41}$, que coincide con el perímetro del paralelogramo.

126. Calcula las coordenadas de los vértices del triángulo *ABC* sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son: *M*(–2, 2), *N*(5, 3) y *P*(2, –2).

Sean $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ y $C(c_1, c_2)$. Se debe verificar que:

$$\begin{cases}\dfrac{a_1+b_1}{2}=-2\\ \dfrac{a_1+c_1}{2}=5\\ \dfrac{b_1+c_1}{2}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+b_1=-4\\ a_1+c_1=10\\ b_1+c_1=4\end{cases}\Rightarrow a_1=1,\ b_1=-5,\ c_1=9 \qquad \begin{cases}\dfrac{a_2+b_2}{2}=2\\ \dfrac{a_2+c_2}{2}=3\\ \dfrac{b_2+c_2}{2}=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2+b_2=4\\ a_2+c_2=6\\ b_2+c_2=-4\end{cases}\Rightarrow a_2=7,\ b_2=-3,\ c_2=-1$$

Por tanto,*A*(1, 7), *B*(–5, –3) y *C*(9, –1).

127. Halla el punto de la recta *r* : 2*x* + *y* + 1 = 0 que equidista de los puntos *A*(2, 2) y *B*(–2, 4).

El punto buscado será la intersección de la recta *r* con la mediatriz del segmento *AB*.

La mediatriz del segmento *AB* es: $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}\Rightarrow 2x-y+3=0$.

El punto de intersección es: $\begin{cases}2x+y+1=0\\ 2x-y+3=0\end{cases}\Rightarrow x=-1,\ y=1\Rightarrow P(-1,1)$

128. Calcula los puntos de la recta *r*: *x*+*y*– 3 = 0 que están a distancia 1 del punto *P*(1, 1).

Los puntos de la recta son de la forma $(t,3-t)$, para que estén a distancia 1 de *P* se debe verificar:

$\sqrt{(t-1)^2+(2-t)^2}=1\Rightarrow 2t^2-6t+4=0\Rightarrow\begin{cases}t=2\\ t=1\end{cases}$ Se obtienen así dos soluciones, *A*(2, 1) y *B*(1, 2).

129. Determina las rectas que pasan por el punto *P*(1, 2) y que forman con la bisectriz del primer y tercer cuadrantes un ángulo de 45º.

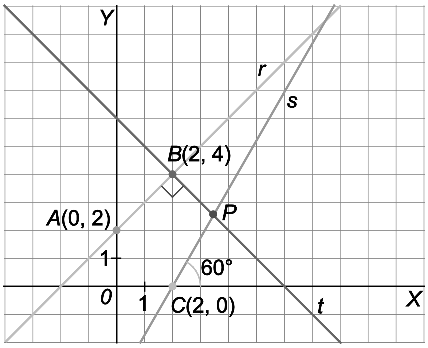
Las rectas no verticales buscadas son del tipo $y-2=m(x-1)$.

Como la pendiente de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes es 1, tenemos:

$\operatorname{tg}45^\circ=\left|\dfrac{m-1}{1+m}\right|\Rightarrow\dfrac{m-1}{m+1}=\pm1\Rightarrow\begin{cases}m-1=m+1\Rightarrow 0=2\text{ Imposible}\\ m-1=-m-1\Rightarrow m=0\end{cases}$. Por tanto, la recta buscada es $y-2=0\Rightarrow y=2$.

Además, la recta vertical $x=1$ también forma un ángulo de 45º con la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

130. A partir de la información de la figura, calcula:



a) Las ecuaciones de las rectas *r*, *s* y *t*.

b) El punto *P* de intersección entre *s* y *t*.

c) El punto *P′* simétrico de *P* respecto de la recta *r*.

d) El punto *C′* simétrico de *C* respecto de la recta *r*.

e) El perímetro del cuadrilátero *PCC′P′*.

f) La ecuación de la recta *s′* simétrica de *s* respecto de la recta *r*.

g) El ángulo que forman *s* y *t*.

h) La recta paralela a *s* que pasa por *B*.

i) Las rectas que pasan por el punto *D*(–1, 3) y forman un ángulo de 30º con la recta *r*.

a) $r: \frac{x-0}{2} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow x - y + 2 = 0$ $s: y - 0 = \text{tg}\,60º(x-2) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ $t: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-4}{2} \Rightarrow x + y - 6 = 0$

b) $\begin{cases} y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{(6+2\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{1-3} = 2\sqrt{3} \\ y = 6 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow P\left(2\sqrt{3},\ 6-2\sqrt{3}\right)$.

c) La perpendicular a *r* por *P* es *t*, que corta a *r* en *B*. Por tanto, *B* debe ser el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, con lo que $P'\left(4-2\sqrt{3},\ 2+2\sqrt{3}\right)$.

d) La perpendicular a *r* por *C* tiene ecuación $x + y - 2 = 0$ y corta a *r* en el punto *A*, con lo que *A* debe ser el punto medio del segmento $\overline{CC'}$ y, por tanto, $C'(-2, 4)$.

e) $d(P,C) + d(C,C') + d(C',P') + d(P',P) = \sqrt{\left(2-2\sqrt{3}\right)^2 + \left(-6+2\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{(-4)^2 + 4^2} + \sqrt{\left(6-2\sqrt{3}\right)^2 + \left(-2+2\sqrt{3}\right)^2} +$

$+\sqrt{\left(-4+4\sqrt{3}\right)^2 + \left(4-4\sqrt{3}\right)^2} = 8\sqrt{3} + 4\sqrt{6} - 8 \simeq 15{,}65$ u

f) La recta buscada pasa por *P′* y *C′*, por tanto, su ecuación es:

$$\frac{x+2}{6-2\sqrt{3}} = \frac{y-4}{-2-2\sqrt{3}} \Rightarrow \left(2+2\sqrt{3}\right)x + \left(6-2\sqrt{3}\right)y + \left(-20+12\sqrt{3}\right) = 0$$

g) Los vectores normales de *s* y *t* son, respectivamente, $\vec{n_1} = \left(\sqrt{3},\ -1\right)$ y $\vec{n_2} = (1,\ 1)$, por tanto, el ángulo que forman es: $\cos\alpha = \frac{\left|\sqrt{3}-1\right|}{2\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \alpha = 75º$

h) Como la pendiente de *s* es $m = \sqrt{3}$, la recta paralela a *s* que pasa por *B* tiene ecuación:

$$y - 4 = \sqrt{3}(x-2) \Rightarrow y = \sqrt{3}x + \left(4-2\sqrt{3}\right)$$

i) La recta *r* tiene pendiente 1, luego forma un ángulo de 45º con la parte positiva del eje de abscisas. Las rectas que forman un ángulo de 30º con la recta *r* tienen que formar, por tanto, ángulos de 15º o de 75º con la parte positiva del eje de abscisas.

Por tanto, sus pendientes han de ser $m_1 = \text{tg}\,15º = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2-\sqrt{3}$ y $m_2 = \text{tg}\,75º = \frac{\text{tg}\,30º + \text{tg}\,45º}{1-\text{tg}\,30º\,\text{tg}\,45º} = 2+\sqrt{3}$.

De este modo, las rectas buscadas tienen ecuación:

$y - 3 = \left(2-\sqrt{3}\right)(x+1) \Rightarrow y = \left(2-\sqrt{3}\right)x + \left(5-\sqrt{3}\right)$ $\quad y - 3 = \left(2+\sqrt{3}\right)(x+1) \Rightarrow y = \left(2+\sqrt{3}\right)x + \left(5+\sqrt{3}\right)$

131. Halla las coordenadas de los puntos de la recta *r* : $x + 2y - 2 = 0$ y que distan 2 unidades de la recta *s* : $4x - 3y + 13 = 0$.

Los puntos de *r* son de la forma $(2-2t,\ t)$, para que disten 2 unidades de *s* deben verificar:

$$\frac{|4\cdot(2-2t)-3t+13|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 2 \Rightarrow 21-11t = \pm 10 \Rightarrow \begin{cases} 21-11t = 10 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow P_1(0,\ 1) \\ 21-11t = -10 \Rightarrow t = \dfrac{31}{11} \Rightarrow P_2\left(-\dfrac{40}{11}, \dfrac{31}{11}\right) \end{cases}$$

132. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas:

$$r: \begin{cases} x = -3+5\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 7-7\lambda \\ y = 4\lambda + 6 \end{cases}$$

y que forma un ángulo de 45º con la recta que une los puntos *A*(0, 5) y *B*(5, 0).

El punto de intersección de las rectas es el *P*(7, 6), que se obtiene para $\lambda = 2$ en la primera recta y $\lambda = 0$ en la segunda.

La recta que une *A* y *B* es $y = -x + 5$, que forma 45º con los ejes de coordenadas. Por tanto hay dos soluciones al problema planteado: La recta horizontal que pasa por *P*, de ecuación $y = 6$, y la recta vertical que pasa por *P*, de ecuación $x = 7$.

CUESTIONES

133. ¿Existe algún valor de *a* para el que los puntos *O*(0, 0), *A*(1, 1) y *B*(1, *a*) pertenezcan a una misma recta?

Para que los puntos *A*, *B* y *C* pertenezcan a una misma recta es necesario y suficiente que los vectores $\overrightarrow{OA} = (1,\ 1)$ y $\overrightarrow{OB} = (1,\ a)$ tengan la misma dirección, es decir, sean proporcionales. Por tanto:

$\frac{1}{1} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow$ Para $a = 1$, los puntos *O*, *A* y *B* están alineados, de hecho, *A* y *B* son iguales.

134. a) Indica un vector de dirección y otro normal a la recta que tiene por ecuación explícita: $y = mx + n$

b) Indica un vector de dirección y otro normal de la recta que tiene por ecuación punto–pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$

a) Vector de dirección $\vec{u} = (1,\ m)$ Vector normal $\vec{n} = (m,\ -1)$

b) Vector de dirección $\vec{u} = (1,\ m)$ Vector normal $\vec{n} = (m,\ -1)$

135. Indica, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) Si la distancia de un punto a una recta es cero entonces obligatoriamente el punto está contenido en la recta.

b) Si la ecuación general de una recta no tiene término independiente entonces el origen de coordenadas pertenece a la recta.

c) La expresión $Ax + By + C = 0$ representa siempre una recta independientemente de los valores reales de *A*, *B* y *C*.

a) Cierta, si la recta es $r: Ax + By + C = 0$ y el punto es $P(a, b)$, al ser $d(P, r) = 0$, se verifica que $|Aa + Bb + C| = 0 \Rightarrow Aa + Bb + C = 0$, lo que significa que *P* verifica la ecuación de *r*, es decir, *P* pertenece a la recta.

b) Cierta, si la recta es $r: Ax + By = 0$, claramente el origen de coordenadas *O*(0, 0) verifica la ecuación de *r*, es decir, pertenece a *r*.

c) Falsa. Si $A = B = 0$ la expresión no representa a ninguna recta.

136. Indica el lugar geométrico de los puntos del plano tales que:

a) Equidistan de dos rectas paralelas

b) La distancia a una recta fija sea 3 unidades de longitud.

c) Equidistan de los tres vértices de un triángulo.

d) Equidistan de los tres lados de un triángulo.

a) La recta paralela a ambas y que está a igual distancia de una y de otra.

b) Dos rectas paralelas a la dada (una a cada lado)y que estén a distancia 3 de ella.

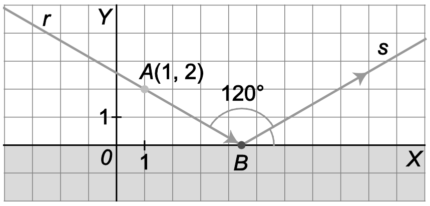
c) El circuncentro del triángulo (punto de intersección de las tres mediatrices).

d) El incentro del triángulo (punto de intersección de las tres bisectrices).

PROBLEMAS

137. Un rayo de luz *r*, que pasa por el punto *A*(1, 2), incide sobre el eje de abscisas y se refleja formando con él un ángulo de 30º.

Halla las ecuaciones de los rayos incidente y reflejado.



El rayo incidente pasa por *A* y forma con el eje de abscisas un ángulo de 150º, por tanto su pendiente es $m = \text{tg}150º = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y su ecuación es de la forma $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + n$.

Como debe pasar por *A*, tenemos: $2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + n \Rightarrow n = \frac{6+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6+\sqrt{3}}{3}$

Para calcular la ecuación del rayo reflejado observemos que el rayo incidente corta el eje de abscisas en $B\left(1+2\sqrt{3},\ 0\right)$, por tanto, el rayo reflejado pasa por *B* y forma con el eje de abscisas un ángulo de 30º, con lo que su pendiente es $m = \text{tg}30º = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y su ecuación es de la forma $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + n$.

Como debe pasar por *B*, tenemos: $0 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1+2\sqrt{3}\right) + n \Rightarrow n = -\frac{6+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{6+\sqrt{3}}{3}$

138. Calcula el valor de *k* para que el área del triángulo de vértices *A*(4, 3), *B*(6, –3) y *C*(6, *k*) sea 20 u².

La recta que pasa por *A* y por *B* tiene por ecuación: $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-3}{3} \Rightarrow 3x - 12 = -y + 3 \Rightarrow 3x + y - 15 = 0$.

La altura por *C* mide $h = d(C, AB) = \frac{|18+k-15|}{\sqrt{10}} = \frac{|3+k|}{\sqrt{10}}$ u y la base mide $d(A,B) = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ u, por tanto, tenemos: $S = \pm\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\frac{3+k}{\sqrt{10}} = \pm(3+k) = 20 \Rightarrow \begin{cases} 3+k = 20 \Rightarrow k = 17 \\ -3-k = 20 \Rightarrow k = -23 \end{cases}$

139. Los vértices opuestos de un cuadrado son los puntos *A*(0, 3) y *C*(4, 0).

a) ¿Cuáles son las coordenadas de los otros dos vértices?

b) ¿Cuál es el área del cuadrado?

a) La diagonal del cuadrado está sobre la recta *AC*: $3x + 4y - 12 = 0$.

La diagonal mide $d(A,C) = \sqrt{25} = 5$ u y su punto medio es $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

Sea *P*(*a*, *b*) uno de los vértices, *MP* es perpendicular a *AC*, luego es de la forma $(3\lambda, 4\lambda)$.

Además, $d(M,P) = \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{(3\lambda)^2 + (4\lambda)^2} = \frac{5}{2} \Rightarrow 5|\lambda| = \frac{5}{2} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$

Obtenemos así los dos vértices faltantes:

$$\overrightarrow{MP} = \left(a-2,\ b-\frac{3}{2}\right) = (3\lambda,\ 4\lambda) \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{7}{2},\ b = \frac{7}{2} \Rightarrow B\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) \\ \lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2} \Rightarrow D\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

b) Aplicando el teorema de Pitágoras se calcula la longitud del lado del cuadrado: $2l^2 = 5^2 \Rightarrow l = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ u.

Por tanto el área del cuadrado es $S = l^2 = \frac{25}{2}$ u^2

140. En el paralelogramo de vértices *ABCD*, se conocen las coordenadas de los puntos *A*(0, 3), *B*(1, 0) y *C*(6, 1). Calcula la medida de sus diagonales y el ángulo que forman.

Si $D(a, b)$ tenemos: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (1, -3) = (6-a, 1-b) \Rightarrow a = 5,\ b = 4 \Rightarrow D(5, 4)$

Las diagonales miden: $d(A,C) = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ u y $d(B,D) = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ u

El ángulo que forman es: $\cos\alpha = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}}\right) = \frac{|24-8|}{2\sqrt{10}\,4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 63{,}43^{\circ}$

141. Del cuadrado *ABCD*, se conocen las coordenadas del punto *A*(8, 7) y que los puntos *B* y *C* pertenecen a la recta de ecuación $3x - 4y = 19$.

a) ¿Cuáles son las coordenadas de los otros tres vértices?

b) Halla el perímetro y el área del cuadrado.

a) *AB* es perpendicular a $3x - 4y = 19$ y pasa por *A*, por tanto, su ecuación es: $4x + 3y - 53 = 0$

Estas dos rectas se cortan en *B*: $\begin{cases} 3x - 4y - 19 = 0 \\ 4x + 3y - 53 = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{269}{25}, \frac{83}{25}\right)$

Los puntos de la recta $3x - 4y = 19$ son de la forma $\left(\frac{269}{25} + 4\lambda, \frac{83}{25} + 3\lambda\right)$. Por otra parte, $d(B,C) = d(A,B)$, por tanto tenemos dos posibilidades para el vértice *C*:

$$\sqrt{(4\lambda)^2 + (3\lambda)^2} = \sqrt{\left(\frac{69}{25}\right)^2 + \left(-\frac{92}{25}\right)^2} \Rightarrow 5|\lambda| = \frac{23}{5} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{23}{25} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \left(\frac{361}{25}, \frac{152}{25}\right) \\ C_2 = \left(\frac{177}{25}, \frac{14}{25}\right) \end{cases}$$

Por último, el vértice D_1 (asociado a C_1) es el simétrico de *B* respecto del punto medio M_1 de AC_1:

$$M_1 = \left(\frac{561}{50}, \frac{327}{50}\right) \Rightarrow D_1\left(\frac{292}{25}, \frac{244}{25}\right)$$

Análogamente se obtiene el vértice D_2 asociado a C_2: $M_2 = \left(\frac{377}{50}, \frac{189}{50}\right) \Rightarrow D_2\left(\frac{108}{25}, \frac{106}{25}\right)$

b) Aunque obtenemos dos posibles cuadrados en el apartado anterior, en ambos la longitud del lado es $l = d(A,B) = \frac{23}{5}$ u, por tanto el perímetro es $P = 4l = \frac{92}{5}$ u y el área es $S = l^2 = \frac{529}{25}$ u^2.

142. Calcula el valor de *k* para que la recta $x + y = k$ forme con los ejes coordenados un triángulo que verifique que su área es 5 u^2.

La recta corta a los ejes coordenados en $(k, 0)$ y $(0, k)$. El área del triángulo será, por tanto, $\frac{k^2}{2}$. Así, $k = \pm\sqrt{10}$.

143. Calcula el área del triángulo de vértices los puntos de corte de las rectas dadas.

$$r: x + 3y = 14$$

$$s: 3x - 5y = 4$$

$$t: 2x - y = -7$$

Los vértices del triángulo son:

$$\begin{cases} x + 3y = 14 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{41}{7}, \frac{19}{7}\right) \quad \begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \Rightarrow B\left(-\frac{39}{7}, -\frac{29}{7}\right) \quad \begin{cases} x + 3y = 14 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \Rightarrow C(-1, 5)$$

La longitud de la base es $d(A,B) = \sqrt{\frac{8704}{49}} = \frac{16\sqrt{34}}{7}$ u y la altura es $d(C,AB) = \frac{|-3 - 25 - 4|}{\sqrt{34}} = \frac{16\sqrt{34}}{17}$ u, por tanto, el área del triángulo *ABC* es $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{16\sqrt{34}}{7} \cdot \frac{16\sqrt{34}}{17} = \frac{256}{7}$ u^2.

144. Calcula las rectas que pasan por el punto *P*(1, 2) y que determinan con los ejes coordenados un triángulo de área 4,5 u^2.

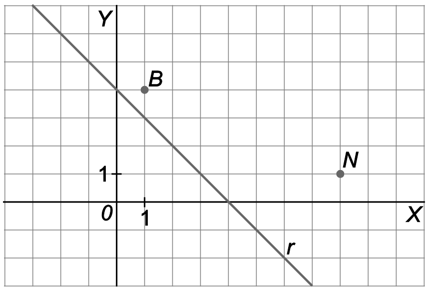
Las rectas que pasan por P son de la forma $y-2=m(x-1)\Rightarrow y=mx+2-m$. Cortan a los ejes en los puntos $(0,\,2-m)$ y $\left(\dfrac{m-2}{m},\,0\right)$.

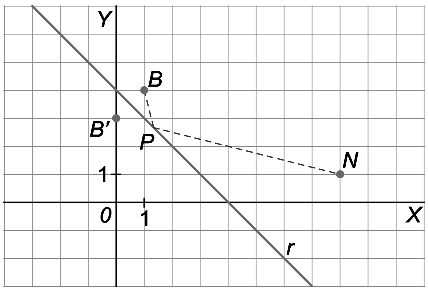
Tenemos:

$$\frac{(2-m)\dfrac{m-2}{m}}{2}=\frac{9}{2}\Rightarrow -m^2+4m-4=9m\Rightarrow m^2+5m+4=0\Rightarrow \begin{cases} m=-4\Rightarrow y=-4x+6\\ m=-1\Rightarrow y=-x+3\end{cases}$$

Hay, por tanto, dos soluciones.

145. Construye el camino que debe seguir la bola *B*(1, 4) para que llegue al punto *N*(8, 1) después de chocar en la banda $r: x+y-4=0$.





El simétrico de B respecto de r es $B'(0,\,3)$.

El punto de choque M es el punto de intersección de las rectas $B'N$ y r:

$B'N$: $\dfrac{x}{8}=\dfrac{y-3}{-2}\Rightarrow -x=4y-12\Rightarrow x+4y-12=0$

$$\begin{cases} x+4y-12=0\\ x+y-4=0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{4}{3},\ y=\frac{8}{3}\Rightarrow P\left(\frac{4}{3},\,\frac{8}{3}\right).$$

Camino: $\overline{BP}-\overline{PN}$

146. Dados los puntos *A*(4, 0), *M*(6, 2) y *N*(2, 4), calcula los vértices *B* y *C* del triángulo *ABC* de forma que *M* sea el punto medio del lado $\overline{AB}$ y *N* el punto medio del lado $\overline{AC}$.

Si $B(b_1,\,b_2)$ y $C(c_1,\,c_2)$, tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{4+b_1}{2}=6\\ \dfrac{0+b_2}{2}=2\end{cases}\Rightarrow b_1=8,\ b_2=4\Rightarrow B(8,\,4) \qquad \begin{cases} \dfrac{4+c_1}{2}=2\\ \dfrac{0+c_2}{2}=4\end{cases}\Rightarrow c_1=0,\ c_2=8\Rightarrow C(0,\,8)$$

147. El vértice *B* que determina el ángulo desigual de un triángulo isósceles, *ABC*, está situado en el punto (1, 2). Sabiendo que el vértice *A* tiene por coordenadas (1, 7) y que el vértice *C* está en la recta $x-y+1=0$, calcula las coordenadas del vértice *C*.

El punto C es de la forma $(t-1,\,t)$. Como el triángulo es isósceles, tenemos:

$$d(A,B)=d(B,C)\Rightarrow\sqrt{0^2+5^2}=\sqrt{(t-1-1)^2+(t-2)^2}\Rightarrow 5=\pm\sqrt{2}(t-2)\Rightarrow t=\frac{4\pm5\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\begin{cases} C\left(\dfrac{2+5\sqrt{2}}{2},\,\dfrac{4+5\sqrt{2}}{2}\right)\\ C\left(\dfrac{2-5\sqrt{2}}{2},\,\dfrac{4-5\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

148. Determina las ecuaciones de los lados de un triángulo que cumple las siguientes condiciones:

I. Tiene un vértice en *A*(2, –7).

II. La recta $3x + y + 11 = 0$ es la altura relativa al vértice *B*.

III. La recta $x + 2y + 7 = 0$ es la mediana correspondiente al vértice *C*.

La recta *AC* es perpendicular a $3x + y + 11 = 0$, luego es de la forma $x - 3y + k = 0$.

Como pasa por *A*, ha de ser $k = -23$ y, por tanto, *AC*: $x - 3y - 23 = 0$.

Para conocer *C* basta calcular el punto de intersección de $x - 3y - 23 = 0$ y la altura $x + 2y + 7 = 0$, obteniéndose:

$$\begin{cases} x - 3y - 23 = 0 \\ x + 2y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5,\ y = -6 \Rightarrow C(5, -6)$$

El vértice $B(a, b)$ pertenece a la altura $3x + y + 11 = 0$, por lo que se ha de cumplir $3a + b + 11 = 0$.

Por otra parte el punto medio del lado *AB*, $M\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b-7}{2}\right)$, pertenece a la mediana $x + 2y + 7 = 0$, por lo que se cumplirá la ecuación $\frac{a+2}{2} + 2 \cdot \frac{b-7}{2} + 7 = 0 \Rightarrow a + 2b + 2 = 0$.

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas para *a* y *b*, encontramos las coordenadas del punto *B*:

$$\begin{cases} 3a + b + 11 = 0 \\ a + 2b + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -4,\ b = 1 \Rightarrow B(-4, 1)$$

Las ecuaciones de los otros dos lados se calculan ahora de forma inmediata obteniéndose:

AB: $4x + 3y + 13 = 0$ y *BC*: $7x + 9y + 19 = 0$.

149. Calcula las ecuaciones de una recta que pasa por el punto *P*(3, –1) y forma triángulos isósceles con las rectas $r: x - 2y = 0$ y $s: 2x + y = 0$.

Las pendientes de *r* y *s* valen $\frac{1}{2}$ y –2 por lo que son perpendiculares. Por tanto, la recta buscada forma un ángulo de 45º con cada una de las rectas dadas.

Observemos que hay dos rectas que cumplen esta condición, la bisectriz de *r* y *s* y la recta buscada.

Si *m* es la pendiente de la recta buscada, tomando, por ejemplo, *s*, tenemos:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \left|\frac{-2 - m}{1 - 2m}\right| \Rightarrow -2 - m = \pm(1 - 2m) \Rightarrow m = 3,\ m = -\frac{1}{3}$$

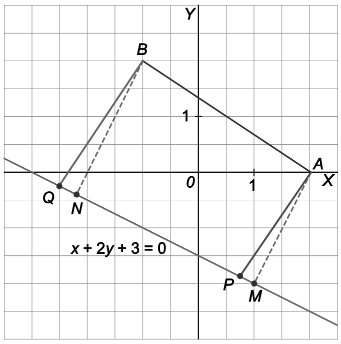
Para cualquiera de estos valores, el ángulo formado con *r* es también 45º.

Obtenemos así las dos rectas predichas, $y + 1 = 3(x - 3) \Rightarrow y = 3x - 10$ y $y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow x + 3y = 0$.

La segunda pasa por el punto de corte, *O*(0, 0), de *r* y *s*, por lo que es la bisectriz de *r* y *s*, es decir, la ecuación buscada es $y = 3x - 10$.

150. Un trapecio rectángulo tiene dos vértices en los puntos *A*(2, 0) y *B*(–1, 2). Los dos vértices restantes están sobre la recta $x + 2y + 3 = 0$. Halla sus coordenadas. ¿Cuántas soluciones hay?

Como $\overline{AB} = (-3, 2)$, el lado *AB* no es paralelo a la recta $x + 2y + 3 = 0$ sobre la que están los otros dos vértices.



Caso 1: Los ángulos rectos del trapecio corresponden a los vértices *A* y *B*.

Las rectas perpendiculares a *AB* son de la forma $-3x + 2y + k = 0$.

La que pasa por *A* es $-3x + 2y + 6 = 0$. Su intersección con la recta $x + 2y + 3 = 0$ es uno de los vértices buscados:

$$\begin{cases} -3x+2y+6=0 \\ x+2y+3=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{3}{4},\ y=-\frac{15}{8} \Rightarrow P\left(\frac{3}{4}, -\frac{15}{8}\right)$$

La que pasa por *B* es $-3x + 2y - 7 = 0$. Su intersección con la recta $x + 2y + 3 = 0$ es el otro vértice:

$$\begin{cases} -3x+2y-7=0 \\ x+2y+3=0 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{5}{2},\ y=\Rightarrow Q\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

Caso 2: Los ángulos rectos se encuentran sobre la recta $x + 2y + 3 = 0$.

El vector normal de la recta y por tanto el vector director de los lados es: $\vec{n} = (1,\ 2)$

La recta que pasa por $A(2, 0)$ y que es perpendicular a $x + 2y + 3 = 0$ es:

$$(x, y) = (2, 0) + (1, 2)\lambda \Rightarrow y = 2x - 4$$

La recta que pasa por $B(-1, 2)$ y que es perpendicular a $x + 2y + 3 = 0$ es:

$$(x, y) = (-1, 2) + (1, 2)\lambda \Rightarrow y = 2x + 4$$

Los vértices son:

$$\begin{cases} x+2y+3=0 \\ y=2x-4 \end{cases} \Rightarrow x=1,\ \ y=-2 \Rightarrow M(1, -2)$$

$$\begin{cases} x+2y+3=0 \\ y=2x+4 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{11}{5},\ \ y=-\frac{2}{5} \Rightarrow N\left(-\frac{11}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

151. Del rombo *ABCD*, se conocen las coordenadas de los puntos *A*(2, 3) y *C*(–2, –5). Sabiendo que su área es 20 u^2, halla los vértices *B* y *D* y el perímetro del rombo.

La ecuación de *AC* es $2x - y - 1 = 0$ y el punto medio de *AC* es *M*(0, –1).

Como *BD* es perpendicular a *AC* y pasa por *M*, tenemos *BD*: $x + 2y + 2 = 0$. De este modo, *B* es de la forma $(-2-2b, b)$ y *C* es de la forma $(-2-2d, d)$.

Para calcular *b* y *d* observemos que la diagonal *AC* mide $\sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ u, por tanto, como el área es 20 u^2, la diagonal *BD* mide $2\sqrt{5}$ u.

Además, el punto medio de *BD*es *M*, por tanto, tenemos:

$$\begin{cases} \sqrt{(-2d+2b)^2+(d-b)^2} = 2\sqrt{5} \\ \left(-2-b-d, \dfrac{b+d}{2}\right) = (0, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5(d-b)^2} = 2\sqrt{5} \\ b+d=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d-b=\pm 2 \\ b+d=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0,\ d=-2 \\ b=-2,\ d=0 \end{cases}$$

Los vértices son *B*(2, –2) y *D*(–2, 0), el perímetro es $P = 4d(A,B) = 20$ u.

152. Dadas las rectas *r* : *x* – 2*y* = 2 y *s* : 2*x* – *y* + 6 = 0, halla todas las rectas que pasen por el punto *P*(1, 1) y que formen con *r* y *s* ángulos iguales.

Las rectas que pasan por *P* son de la forma: $y-1=m(x-1)\Rightarrow mx-y+1-m=0$.

Ángulo con *r*: $\cos\alpha=\dfrac{|m+2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+m^2}}$ Ángulo con *s*: $\cos\alpha=\dfrac{|2m+1|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+m^2}}$

Por tanto: $\begin{cases} m+2=2m+1\Rightarrow m=1\Rightarrow a_1\equiv x-y=0 \\ m+2=-2m-1\Rightarrow m=-1\Rightarrow -x-y+2=0\Rightarrow a_2\equiv x+y-2=0\end{cases}$

153. Los puntos *A*(–2, 2) y *C*(3, 1) son vértices opuestos de un rombo *ABCD*. Sabiendo que el vértice *B* pertenece al eje de abscisas, calcula las coordenadas de los vértices *B* y *D* y el área del rombo.

La diagonal *BD* está contenida en la recta perpendicular a la recta $AC: x+5y-8=0$ que pasa por $M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$, punto medio de la diagonal *AC*.

Por tanto, la diagonal *BD* está contenida en la recta $5x-y-1=0$.

La intersección de dicha recta con el eje de abscisas es el vértice $B\left(\dfrac{1}{5},0\right)$.

El vértice $D(a,b)$ verifica: $\overline{BD}=2\overline{BM}\Rightarrow\left(a-\dfrac{1}{5},b\right)=\left(\dfrac{3}{5},3\right)\Rightarrow a=\dfrac{4}{5},\ b=3\Rightarrow D\left(\dfrac{4}{5},3\right)$.

Las diagonales del rombo miden $d(A,C)=\sqrt{26}$ u y $d(B,D)=\sqrt{\dfrac{234}{25}}=\dfrac{3\sqrt{26}}{5}$ u, por tanto, el área del rombo es $S=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{26}\cdot\dfrac{3\sqrt{26}}{5}=\dfrac{39}{5}$ u^2.

154. El lado desigual de un triángulo isósceles es el segmento $\overline{AB}$, con *A*(3, 1) y *B*(1, 2). Calcula las coordenadas del vértice *C* del triángulo, sabiendo que su área es de 4 u^2.

$d(A,B)=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$ u, por tanto, la altura del triángulo verifica: $4=\dfrac{1}{2}\sqrt{5}h\Rightarrow h=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ u.

C es el punto que situado en la perpendicular a *AB* por su punto medio y que dista de *AB* $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ u:

$AB:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}\Rightarrow -x+3=2y-2\Rightarrow x+2y-5=0$, y el punto medio de $\overline{AB}$ es $M\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$.

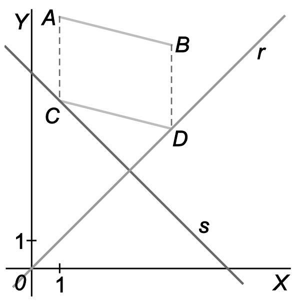
La recta perpendicular es $2x-y-\dfrac{5}{2}=0$ y sus puntos son de la forma $\left(t,2t-\dfrac{5}{2}\right)$. Imponiendo que disten $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ u de la recta *AB* tenemos:

$$\frac{8\sqrt{5}}{5}=\frac{\left|t+2\left(2t-\frac{5}{2}\right)-5\right|}{\sqrt{1+4}}\Rightarrow|5t-10|=8\Rightarrow\begin{cases} t=\dfrac{18}{5}\Rightarrow C_1\left(\dfrac{18}{5},\dfrac{47}{10}\right)\\ t=\dfrac{2}{5}\Rightarrow C_2\left(\dfrac{2}{5},-\dfrac{17}{10}\right)\end{cases}$$

Por tanto, hay dos soluciones.

PARA PROFUNDIZAR

155. Dadas las rectas $r: x - y = 0$ y $s: x + y - 7 = 0$ y el segmento de extremos $A(1,\ 9)$ y $B(5,\ 8)$, calcula las coordenadas de los extremos de un segmento $\overline{CD}$ de la misma longitud que $\overline{AB}$, paralelo a él y tal que el punto *C* pertenezca a la recta *s* y el punto *D* a la *r*.



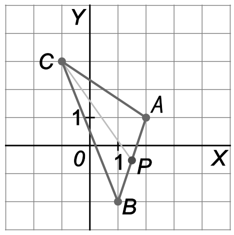
Los puntos de *r* son de la forma $D(d,\ d)$ y los puntos de *s* son de la forma $C(c,\ 7–c)$.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ pueden ser iguales u opuestos, por tanto:

$$\begin{cases} d - c = 4 \\ d - 7 + c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d - c = 4 \\ d + c = 6 \end{cases} \Rightarrow c = 1,\ d = 5 \Rightarrow C(1,\ 6) \text{ y } D(5,\ 5)$$

$$\begin{cases} d - c = -4 \\ d - 7 + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d - c = -4 \\ d + c = 8 \end{cases} \Rightarrow c = 6,\ d = 2 \Rightarrow C(6,\ 1) \text{ y } D(2,\ 2)$$

156. Dado el triángulo $A(2,\ 1)$, $B(1,\ –2)$ y $C(–1,\ 3)$



a) Calcula el punto *P*, intersección de la bisectriz del ángulo *C* con el lado opuesto $\overline{AB}$.

b) Demuestra que $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

a) $AB: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{-3} \Rightarrow 3x - y - 5 = 0$ $\quad AC: \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-1}{2} \Rightarrow 2x + 3y - 7 = 0$

$BC: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-3}{5} \Rightarrow 5x + 2y - 1 = 0$

Bisectriz interior del ángulo *C*:

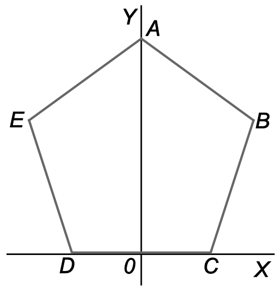
$$\frac{2x+3y-7}{\sqrt{13}} = -\frac{5x+2y-1}{\sqrt{29}} \Rightarrow \left(2\sqrt{29} + 5\sqrt{13}\right)x + \left(3\sqrt{29} + 2\sqrt{13}\right)y - 7\sqrt{29} - \sqrt{13} = 0$$

Al resolver el sistema formado por las rectas bisectriz y *AB* se obtiene el punto: $P\left(\dfrac{45 - \sqrt{377}}{16},\ \dfrac{55 - 3\sqrt{377}}{16}\right)$

b) En efecto, al realizar el cálculo se obtiene $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{\sqrt{377}}{29}$.

157. Calcula, de forma exacta, las coordenadas de los vértices del pentágono regular de la figura sabiendo que su lado mide 2 unidades.

Comprueba que el cociente entre la distancia de *D* a *B* y la distancia de *D* a *C* es el número áureo $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.



El ángulo interior de un pentágono regular vale $\dfrac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$.

$C(1,\ 0)$, $D(–1,0)$

Por el teorema del coseno: $DB = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 108^\circ} = \sqrt{8 + 8\cos 72^\circ}$

Teniendo en cuenta que las longitudes de *DA* y *DB* son iguales, tenemos: $A\left(0,\ \sqrt{DA^2 - 1^2}\right) = \left(0,\ \sqrt{7 + 8\cos 72^\circ}\right)$

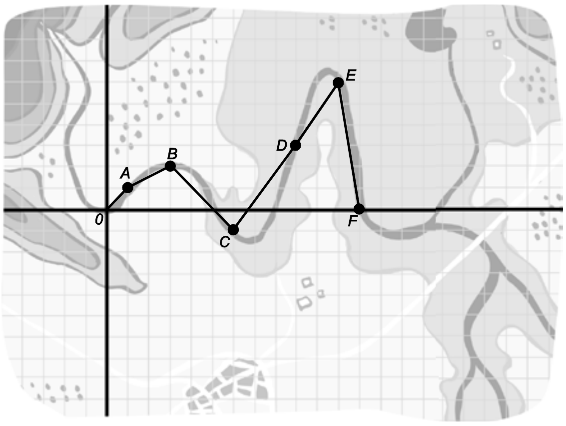
$B\left(-1 + \sqrt{8 + 8\cos 72^\circ} \cdot \cos 36^\circ,\ \sqrt{8 + 8\cos 72^\circ} \cdot \operatorname{sen} 36^\circ\right)$ $E\left(1 - \sqrt{8 + 8\cos 72^\circ} \cdot \cos 36^\circ,\ \sqrt{8 + 8\cos 72^\circ} \cdot \operatorname{sen} 36^\circ\right)$

$$\frac{DB}{DC} = \frac{\sqrt{8 + 8\cos 72^\circ}}{2} = \sqrt{2 + 2\cos 72^\circ} = 1{,}618033989... = \Phi$$

ENTORNO MATEMÁTICO

A vueltas con el río

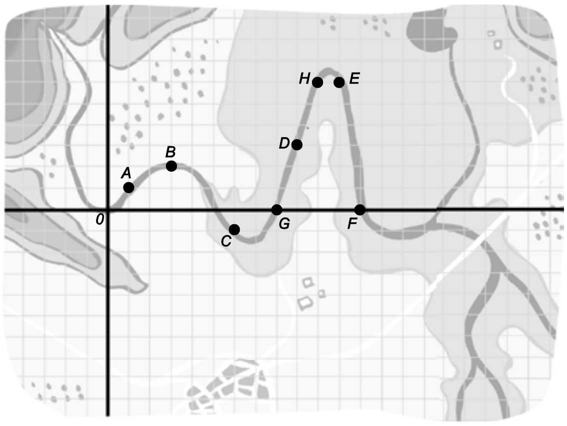
Dentro de unos días, la clase de Antonio y Juana va a salir de excursión al campo. Aprovechando esta circunstancia y con el propósito de hacer la clase de matemáticas más animada, la profesora propone un concurso por equipos: ¿quién puede dar la mejor aproximación a la longitud que separa a las dos puntos O y F del cauce de un río?



Para ello proporciona un boceto del río de la zona de acampada, calcado de un plano a escala obtenido de una página de mapas de Internet. Para facilitar la tarea, inserta un par de ejes coordenados de forma que el origen de coordenadas es el punto *O*. La cuadrícula está formada por cuadrados de 20 m de lado.

Rápidamente y con intención de demostrar que son los más rápidos a la hora de resolver problemas y, por tanto, merecedores de ganar el concurso, el equipo de Antonio, idea el siguiente método:

Elegirá cinco puntos del cauce que junto con *O* y con *F* formarán una línea poligonal *OA*–*AB*–*BC*–*CD*–*DE*–*EF*. La longitud de esta poligonal se aproximará a la longitud del cauce del río.



Tras exponer su idea a la clase, la profesora confirma que el método parece adecuado pero indica que cree que la aproximación, tal vez debido a la rapidez con la que ha sido elaborada, no es muy buena y que habría que mejorarla.

Basándose en la misma idea, el equipo de Juana, tras reflexionar un poco más, propone colocar dos puntos más *G* y *H* de forma que la nueva poligonal se ajuste mejor a la línea del cauce.

a) Calcula la aproximación que obtiene el equipo de Antonio.

b) Calcula la aproximación que obtiene el equipo de Juana.

c) Añade algún punto más y obtén la nueva aproximación.

a) $O(0, 0)$, $A(1,1)$, $B(3, 2)$, $C(6, -1)$, $D(9, 3)$, $E(11, 6)$ y $F(12, 0)$

La poligonal mide $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{18}+\sqrt{25}+\sqrt{13}+\sqrt{37}\simeq 22{,}58$ u , por tanto, el equipo de Antonio obtiene 451,6 m.

b) Añadiendo los puntos $G(8,0)$ y $H(10, 6)$ la poligonal mide $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{18}+\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{10}+\sqrt{1}+\sqrt{37}\simeq 23{,}54$ u , por lo que el equipo de Juana obtiene 470,8 m.

c) Añadiendo, por ejemplo, $I(4{,}5;\ 1)$ y $J(7{,}5;\ -1)$ obtenemos como aproximación $20\cdot 23{,}98 = 479{,}6$ m.

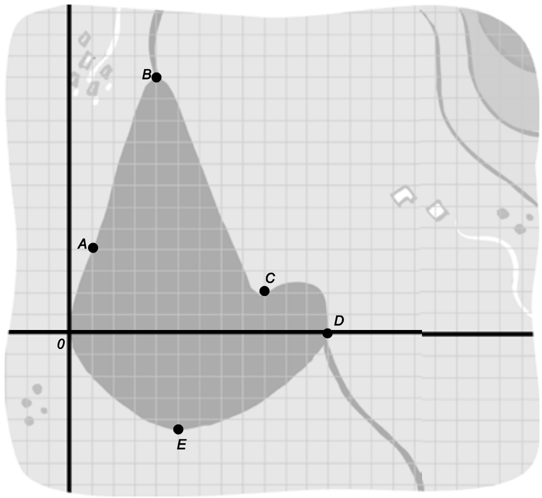
¿Piraguas en la laguna?

En la zona en la que van a acampar, el río desemboca en una laguna y los profesores del colegio están pensando si alquilar o no unas piraguas para practicar piragüismo. Como la actividad, además de cara, conlleva riesgos (y no sólo el de algún alumno en remojo), solo lo harán si la laguna es lo suficientemente grande como para que la experiencia merezca la pena y no una charca en la que dar un par de paladas.

La profesora propone un nuevo reto a los equipos: calcular aproximaciones de la superficie de dicha laguna.

De nuevo proporciona a los equipos un esquema con los límites de la superficie que se quiere calcular. Los cuadros de la cuadrícula en este caso tienen por lado 4m.

En este caso, el más rápido es el equipo de Juana, que propone considerar los puntos *O*, *A*, *B*, *C*, *D* y *E* del perímetro del lago y calcular el área del polígono formado por ellos mediante triangulación.



a) Calcula el área de los triángulos *ABC*, *OAC*, *OCD* y *ODE* de la figura utilizando los métodos de la geometría analítica.

b) Utiliza alguna aplicación de geometría dinámica para obtener el área de los triángulos anteriores y añade algunos puntos más para mejorar la aproximación.

a) $O(0, 0)$, $A(1, 4)$, $B(4, 12)$, $C(9, 2)$, $D(12, 0)$ y $E(5; -4{,}5)$

$$ABC: \begin{cases} \text{base: } d(A,C) = \sqrt{64+3} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \text{ u} \\ AC\text{: } x + 4y - 17 = 0 \\ \text{altura: } h = d(B, AC) = \dfrac{|4 + 4\cdot 12 - 17|}{\sqrt{17}} = \dfrac{35}{\sqrt{17}} = \dfrac{35\sqrt{17}}{17} \text{ u} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{17}\cdot\frac{35\sqrt{17}}{17} = 35 \text{ u}^2$$

$$OAC: \begin{cases} \text{base: } d(O,A) = \sqrt{17} \text{ u} \\ OA: 4x - y = 0 \\ \text{altura: } h = d(C, OA) = \dfrac{|36-2|}{\sqrt{17}} = \dfrac{34}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17} \text{ u} \end{cases} \Rightarrow S_2 = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{17}\cdot 2 = 17 \text{ u}^2$$

$$OCD: \begin{cases} \text{base: } d(O,D) = 12 \text{ u} \\ \text{altura: } h = 2 \text{ u} \end{cases} \Rightarrow S_3 = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 2 = 12 \text{ u}^2 \quad \overset{\Delta}{ODE}: \begin{cases} \text{base: } d(O,D) = 12 \text{ u} \\ \text{altura: } h = 4{,}5 \text{ u} \end{cases} \Rightarrow S_4 = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 4{,}5 = 27 \text{ u}^2$$

El equipo de Juana obtiene $S \simeq S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 35 + 17 + 12 + 27 = 91 \text{ u}^2 \Rightarrow 91\cdot 4^2 = 1456 \text{ m}^2$

b) La superficie se aproxima a $103 \text{ u}^2 \Rightarrow 103\cdot 16 = 1648 \text{ m}^2$

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula en cada caso la ecuación de la recta.

a) Paralela a la recta $s: 2x+3y=5$ y que pasa por $P(0,-3)$.

b) Perpendicular a la recta $s: 4x-3y+5=0$ y que pasa por el punto $P(1, 1)$.

c) De dirección la del vector $\overrightarrow{AB}$ con $A(2, 4)$ y $B(-1,3)$ y que pasa por el punto de intersección de las rectas $5x+y-20=0$ e $y=x+2$.

a) Las rectas paralelas a *s* son de la forma $2x+3y+K=0$, la que pasa por *P* es:

$-9+K=0 \Rightarrow K=9 \Rightarrow 2x+3y+9=0$

b) Las rectas perpendiculares a *s* son de la forma $3x+4y+K=0$, la que pasa por *P* es:

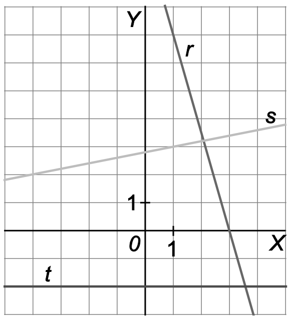
$3+4+K=0 \Rightarrow K=-7 \Rightarrow 3x+4y-7=0$

c) Calculamos el punto de intersección:

$$\begin{cases} 5x+y-20=0 \\ y=x+2 \end{cases} \Rightarrow x=3,\ y=5 \Rightarrow P(3, 5)$$

Como $\overrightarrow{AB}=(-3, -1)$, la recta buscada tiene ecuación: $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y-5}{-1} \Rightarrow x-3y+12=0$

2. Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de las rectas *r*, *s* y *t* que aparecen en la figura. Indica un vector de dirección de cada una de ellas.



La recta *r* pasa por los puntos (3, 0) y (1, 7), por tanto, un vector director es $\vec{u_r}=(-2, 7)$, su ecuación es $r: 7x+2y-21=0$, su pendiente es $m_r=-\dfrac{7}{2}$ y su ordenada en el origen es $n_r=\dfrac{21}{2}$.

La recta *s* pasa por los puntos (1, 3) y (–4, 2), por tanto, un vector director es $\vec{u_s}=(5, 1)$, su ecuación es $s: x-5y+14=0$, su pendiente es $m_s=\dfrac{1}{5}$ y su ordenada en el origen es $n_s=\dfrac{14}{5}$.

La recta *t* es la recta horizontal $t: y=-2$, con vector director $\vec{u_t}=(1, 0)$, pendiente $m_t=0$ y ordenada en el origen $n_t=-2$.

3. Calcula la ecuación de la recta paralela a $x+y=0$ y que forma con los ejes coordenados un triángulo de 30 u^2. ¿Hay una única solución?

La recta debe tener por ecuación $x+y=k$, por lo que corta a los ejes en los puntos $A(k, 0)$ y $B(0, k)$.

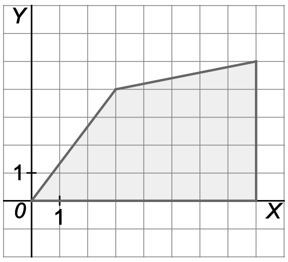
El área del triángulo *OAB* será $S=\dfrac{k^2}{2}=30 \Rightarrow k^2=60 \Rightarrow k=\pm\sqrt{60}=\pm2\sqrt{15}$

Por tanto, hay dos soluciones: $\begin{cases} x+y=\sqrt{60} \\ x+y=-\sqrt{60} \end{cases}$

4. Calcula el punto simétrico de *P*(5,–2) respecto del punto intersección de las rectas $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}$.

El punto de intersección de las rectas es *Q*(2, 1), por tanto, si *P*′(*a*, *b*) es el simétrico de *P*, tenemos que *Q* debe ser el punto medio de *PP*′, con lo que: $\begin{cases} \dfrac{5+a}{2} = 2 \\ \dfrac{-2+b}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1,\ b = 4 \Rightarrow P' = (-1,\ 4)$

5. Calcula el área del cuadrilátero de la figura.



Los vértices del cuadrilátero son *O*(0, 0), *A*(3, 4), *B*(8, 5) y *C*(8, 0).

Área del triángulo *OAC*: $S_1 = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{d(A,C) \cdot d(A,OC)}{2} = \dfrac{8 \cdot 4}{2} = 16\ \text{u}^2$

Área del triángulo *ACB*: $S_2 = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{d(B,C) \cdot d(A,BC)}{2} = \dfrac{5 \cdot 5}{2} = \dfrac{25}{2}\ \text{u}^2$

Área del cuadrilátero: $S = S_1 + S_2 = \dfrac{57}{2}\ \text{u}^2$

6. Dado el triángulo de vértices *A*(–3, 2),*B*(1,4) y *C*(2,–1), calcula:

a) Los ángulos

b) Las coordenadas de su ortocentro

c) La ecuación de la bisectriz del ángulo A

a) $AB: \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-2}{2} \Rightarrow x - 2y + 7 = 0 \quad AC: \dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-2}{-3} \Rightarrow 3x + 5y - 1 = 0 \quad BC: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{-5} \Rightarrow 5x + y - 9 = 0$

Ángulo *A*: $\cos\hat{A} = \dfrac{|3-10|}{\sqrt{5}\sqrt{34}} = \dfrac{7}{\sqrt{170}} = \dfrac{7\sqrt{170}}{170} \Rightarrow \hat{A} = 57{,}53º$

Ángulo *B*: $\cos\hat{B} = \dfrac{|5-2|}{\sqrt{5}\sqrt{26}} = \dfrac{3}{\sqrt{130}} = \dfrac{3\sqrt{130}}{130} \Rightarrow \hat{B} = 74{,}74º$

Ángulo *C*: $\cos\hat{C} = \dfrac{|15+5|}{\sqrt{34}\sqrt{26}} = \dfrac{20}{2\sqrt{221}} = \dfrac{10\sqrt{221}}{221} \Rightarrow \hat{C} = 47{,}73º$

b) Altura por *A*: $x - 5y + K = 0 \Rightarrow -3 - 10 + K = 0 \Rightarrow K = 13 \Rightarrow x - 5y + 13 = 0$

Altura por *B*: $5x - 3y + K = 0 \Rightarrow 5 - 12 + K = 0 \Rightarrow K = 7 \Rightarrow 5x - 3y + 7 = 0$

Ortocentro: $\begin{cases} x - 5y + 13 = 0 \\ 5x - 3y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{2}{11},\ y = \dfrac{29}{11} \Rightarrow H\left(\dfrac{2}{11}, \dfrac{29}{11}\right)$

c) $\dfrac{x - 2y + 7}{\sqrt{5}} = \dfrac{3x + 5y - 1}{\sqrt{34}} \Rightarrow \left(\sqrt{34} - 3\sqrt{5}\right)x - \left(2\sqrt{34} + 5\sqrt{5}\right)y + 7\sqrt{34} - \sqrt{5} = 0$

7. **Dados la recta $r : x + y - 1 = 0$ y los punto $A(4,–4)$ y $B(5,–1)$, calcula el punto intersección de la mediatriz del segmento *AB* con la recta perpendicular a *r* y que pasa por *A*.**

Mediatriz del segmento *AB:* $\sqrt{(x-4)^2 + (y+4)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2} \Rightarrow x + 3y + 3 = 0$

Perpendicular a *r* por *A*: $x - y + K = 0 \Rightarrow 4 + 4 + K = 0 \Rightarrow K = -8 \Rightarrow x - y - 8 = 0$

Punto de intersección: $\begin{cases} x + 3y + 3 = 0 \\ x - y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{21}{4},\ y = -\frac{11}{4} \Rightarrow P\left(\frac{21}{4}, -\frac{11}{4}\right)$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. **Las rectas $r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$:**

A. Son paralelas.

B. Son secantes y se cortan en el punto *Q*(2, 3).

C. Son secantes y se cortan en el punto *R*(1, 1).

D. Son la misma recta.

$r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-2} \Rightarrow 2x - y - 1 = 0 \quad s : \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{\frac{1}{2}} = y - 1 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$

La respuesta correcta es D.

2. **La proyección ortogonal del segmento de extremos *A*(1, 5) y *B*(3, 5) sobre la recta $y - x = 0$ mide:**

A. 2 u **B.** $2\sqrt{2}$ u **C.** $\sqrt{2}$ u **D.** Ninguna de las anteriores.

Las recta perpendiculares a $x - y = 0$ son de la forma $x + y + K = 0$, la que pasa por *A* es $x + y - 6 = 0$ y la que pasa por B es $x + y - 8 = 0$. Intersecando estas rectas con $x - y = 0$ obtenemos los extremos *A′* y *B′* de la proyección ortogonal del segmento *AB*. Así, *A′*(3, 3) y *B′*(4, 4), con lo que $d(A', B') = \sqrt{2}$, la respuesta C.

3. **El área del triángulo determinado por el origen de coordenadas y las intersecciones de la recta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ con los ejes coordenados es:**

A. $A = ab$ **B.** $A = \frac{ab}{2}$ **C.** $A = 2ab$ **D.** $A = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}$

Los puntos de intersección son (*a*, 0) y (0, *b*), por tanto, el área del triángulo es $A = \frac{ab}{2}$, la respuesta B.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Se consideran los puntos del plano $A(a, 1)$, $B(a-1, 4)$ y $C(-1, a)$.

A. Para $a=-2$ los puntos están alineados.

B. Para $a=\frac{1}{2}$, ABC es un triángulo rectángulo en A.

C. Para $a=2$, ABC es un triángulo isósceles.

D. Para $a=-2$, B es el punto medio del segmento AC.

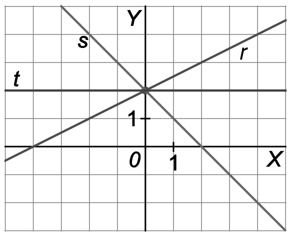
Se observa que $\overrightarrow{AB}=(-1, 3)$, $\overrightarrow{AC}=(-1-a, a-1)$, $\overrightarrow{BC}=(-a, a-4)$ y el punto medio de AC es $\left(\frac{a-1}{2}, \frac{1+a}{2}\right)$.

Si $a=-2$ se tiene que $\overrightarrow{AB}=(-1, 3)$ y $\overrightarrow{AC}=(1, -3)$ son proporcionales, por lo que la respuesta A es correcta, pero el punto medio de AC, $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ no coincide con B, por lo que la respuesta D es incorrecta.

Si $a=\frac{1}{2}$ se tiene que $\overrightarrow{AB}=(-1, 3)$ y $\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ son perpendiculares, por lo que la respuesta B es correcta.

Si $a=2$ se tiene que $\overrightarrow{AB}=(-1, 3)$ y $\overrightarrow{AC}=(-3, -1)$ tienen la misma longitud, pero es distinta de la longitud de $\overrightarrow{BC}=(-2, -2)$, por lo que la respuesta C también es correcta.

5. Para r, s y t, sean m_r, m_s y m_t las pendientes y n_r, n_s y n_t las ordenadas en el origen.



A. $m_r=2, m_s=-2$ y $m_t=0$

B. $m_r=\frac{1}{2}, m_s=-1$ y $m_t=0$

C. $m_t=1$ y $n_t=2$

D. $m_r=\frac{1}{2}$ y $n_r=2$

$m_r=\frac{1}{2}, m_s=-1, m_t=0$ y $n_r=n_s=n_t=2$, por tanto, las respuestas correctas son B y D.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Se considera el haz de rectas $2x-y+\lambda(x+y-3)=0$ de vértice el punto (1, 2) y se consideran las afirmaciones:

1. La ecuación de la recta *r* se obtiene al sustituir algún valor real de λ en la expresión del haz.

2. La recta *r* pasa por el punto (1, 2)

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. Nada de lo anterior.

La ecuación del haz representa todas las rectas que pasan por (1, 2) salvo la recta $x+y-3=0$, por tanto, la relación correcta es B.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Para calcular la ecuación de una única recta *s* paralela a la recta *r* y que diste de ella *k* u se dan los siguientes datos:

1. La ecuación general de *r* es $3x - 4y + 3 = 0$.

2. $k = 3$ u

3. La ordenada en el origen de *r* es mayor que la de *s*.

A. El dato 1 es innecesario.

B. El dato 2 es innecesario.

C. El dato 3 es innecesario.

D. Ningún dato es innecesario.

Obviamente necesitamos los datos 1 y 2, pero sólo con estos datos podemos encontrar dos rectas paralelas a *r* que disten de ella *k* u, una a cada lado de *r*. Para que haya una única solución también necesitamos el dato 3, por tanto, la respuesta correcta es D.

6 Cónicas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Comprueba que la ecuación $3x^2+3y^2-6x+12y-14=0$ representa una circunferencia y determina su radio.

Tenemos $3x^2+3y^2-6x+12y-14=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x+4y-\frac{14}{3}=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=\frac{29}{3}$, ecuación de una circunferencia de centro $C(1, -2)$ y radio $r=\sqrt{\frac{29}{3}}$.

3. Estudia si el punto *P* es interior, exterior o perteneciente a la circunferencia $x^2+y^2-10x=0$.

a) $P(2, 4)$ **b)** $P(2, 2)$ **c)** $P(2, 5)$

La circunferencia tiene centro $C(5, 0)$ y radio $r=\sqrt{25}=5$.

a) $d(P, C)=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5=r \Rightarrow P$ pertenece a la circunferencia.

b) $d(P, C)=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}<r \Rightarrow P$ es interior a la circunferencia.

c) $d(P, C)=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}>r \Rightarrow P$ es exterior a la circunferencia.

4. Indica la posición relativa de la recta $3x+4y=25$ respecto de la circunferencia $x^2+y^2-6x+8y-25=0$.

La circunferencia tiene centro $C(3, -4)$ y radio $r=\sqrt{9+16+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

La distancia del centro *C* a la recta es $\frac{|9-16-25|}{\sqrt{9+16}}=\frac{32}{5}<r$, por tanto, la recta y la circunferencia son secantes.

5. Estudia la posición relativa de cada pareja de circunferencias.

a) $x^2+y^2=25$ y $2x^2+2y^2+3y-3=0$ **b)** $x^2+y^2+2x-16=0$ y $x^2+y^2+5x+3y-9=0$

a) La primera circunferencia tiene centro $C_1(0, 0)$ y radio $r_1=\sqrt{25}=5$, la segunda tiene centro $C_2\left(0, -\frac{3}{4}\right)$ y radio $r_2=\sqrt{\frac{33}{16}}=\frac{\sqrt{33}}{4}$. Como $d(C_1, C_2)=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$, tenemos $d(C_1, C_2)<r_1-r_2$ y, por tanto, la segunda circunferencia es interior a la primera.

b) La primera circunferencia tiene centro $C_1(-1, 0)$ y radio $r_1=\sqrt{17}$, la segunda tiene centro $C_2\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ y radio $r_2=\sqrt{\frac{35}{2}}$. Como $d(C_1, C_2)=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, tenemos $r_2-r_1<d(C_1, C_2)<r_2+r_1$ y, por tanto, las circunferencias son secantes.

6 y 7. Ejercicios resueltos.

8. En cada caso, halla la posición relativa entre el punto y la circunferencia $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

a) $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ **b)** $Q\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ **c)** $R\left(\frac{8}{5}, \frac{1}{5}\right)$ **d)** $P\left(2, \frac{1}{4}\right)$

a) $Pot_{Cf}(P)=1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot 1-2\cdot\frac{3}{2}+1=-\frac{3}{4}$. *P* es interior a la circunferencia.

b) $Pot_{Cf}(Q)=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}-2\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}+1=0$. *Q* pertenece a la circunferencia.

c) $Pot_{Cf}(R)=\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2-2\cdot\frac{8}{5}-2\cdot\frac{1}{5}+1=0$. *R* pertenece a la circunferencia.

d) $Pot_{Cf}(S)=2^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-2\cdot 2-2\cdot\frac{1}{4}+1=\frac{9}{16}$. *S* es exterior a la circunferencia.

9. Estudia la posición relativa del punto $P(m+1, m)$ respecto de las siguientes circunferencias, en función de los valores de *m*.

a) De centro el origen de coordenadas y radio 5

b) $(x-3)^2+(y+1)^2=9$

c) $x^2+y^2-2x+4y-4=0$

d) $9x^2+9y^2+36x-54y+117=9$

a) La ecuación de la circunferencia es $x^2+y^2=25$, por tanto, $Pot_{Cf}(P)=(m+1)^2+m^2-25=2m^2+2m-24$

P es exterior a la circunferencia si $2m^2+2m-24>0 \Rightarrow m\in(-\infty, -4)\cup(3, +\infty)$

P pertenece a la circunferencia si $2m^2+2m-24=0 \Rightarrow m=-4,\ m=3$

P es interior a la circunferencia si $2m^2+2m-24<0 \Rightarrow m\in(-4, 3)$

b) $Pot_{Cf}(P)=(m+1-3)^2+(m+1)^2-9=2m^2-2m-4$

P es exterior a la circunferencia si $2m^2-2m-4>0 \Rightarrow m\in(-\infty, -1)\cup(2, +\infty)$

P pertenece a la circunferencia si $2m^2-2m-4=0 \Rightarrow m=-1,\ m=2$

P es interior a la circunferencia si $2m^2-2m-4<0 \Rightarrow m\in(-1, 2)$

c) $Pot_{Cf}(P)=(m+1)^2+m^2-2(m+1)+4m-4=2m^2+4m-5$

P es exterior a la circunferencia si $2m^2+4m-5>0 \Rightarrow m\in\left(-\infty, \frac{-2-\sqrt{14}}{2}\right)\cup\left(\frac{-2+\sqrt{14}}{2}, +\infty\right)$

P pertenece a la circunferencia si $2m^2+4m-5=0 \Rightarrow m=\frac{-2-\sqrt{14}}{2},\ m=\frac{-2+\sqrt{14}}{2}$

P es interior a la circunferencia si $2m^2+4m-5<0 \Rightarrow m\in\left(\frac{-2-\sqrt{14}}{2}, \frac{-2+\sqrt{14}}{2}\right)$

d) Simplificando la ecuación, $x^2+y^2+4x-6y+12=0$ y $Pot_{Cf}(P)=(m+1)^2+m^2+4(m+1)-6m+12=2m^2+17$, por tanto, *P* es exterior a la circunferencia para cualquier valor de *m*.

10. Ejercicio resuelto.

11. Calcula el eje radical de las circunferencias y comprueba que es perpendicular a la recta que pasa por los centros.

a) $C_1: x^2+y^2=9$ y $C_2: x^2+y^2-4x+2y+1=0$

b) $C_1: 12x^2+12y^2=27$ y $C_2: x^2+y^2+6x-6y+14=0$

c) $C_1: x^2+y^2-4x-2y=20$ y $C_2: (x-4)^2+(y-3)^2=4$

a) Eje radical: $4x-2y-10=0 \Rightarrow 2x-y-5=0$

Los centros son, respectivamente, $C_1(0, 0)$ y $C_2(2, -1)$, por tanto, la recta que los une es $x+2y=0$, perpendicular al eje radical.

b) Eje radical: $\begin{cases} 12x^2+12y^2-27=0 \\ 12x^2+12y^2+72x-72y+168=0 \end{cases} \Rightarrow 72x-72y+195=0 \Rightarrow 24x-24y+65=0$

Los centros son, respectivamente, $C_1(0, 0)$ y $C_2(-3, 3)$, por tanto, la recta que los une es $x+y=0$, perpendicular al eje radical.

c) Eje radical: $\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y-20=0 \\ x^2+y^2-8x-6y+21=0 \end{cases} \Rightarrow 4x+4y-41=0$

Los centros son, respectivamente, $C_1(2, 1)$ y $C_2(4, 3)$, por tanto, la recta que los une es $x-y-1=0$, perpendicular al eje radical.

12. Sean $(x-2)^2+(y-4)^2=20$ y $(x-11)^2+(y-1)^2=50$. Halla los puntos de corte de ambas circunferencias y comprueba que pertenecen al eje radical de las mismas.

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-4)^2=20 \\ (x-11)^2+(y-1)^2=50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x-8y=0 \\ x^2+y^2-22x-2y+72=0 \end{cases} \Rightarrow 18x-6y-72=0 \Rightarrow 3x-y-12=0 \Rightarrow y=3x-12$$

El eje radical es $y=3x-12$, además, sustituyendo esta ecuación en, por ejemplo, la primera ecuación, obtenemos los puntos de corte, que, obviamente, cumplirán la ecuación del eje radical y, por tanto, pertenecerán al mismo.

$$x^2+(3x-12)^2-4x-8(3x-12)=0 \Rightarrow 10x^2-100x+240=0 \Rightarrow x^2-10x+24=0 \Rightarrow \begin{cases} x=6,\ y=6 \Rightarrow P(6, 6) \\ x=4,\ y=0 \Rightarrow Q(4, 0) \end{cases}$$

13. Dadas las siguientes circunferencias:

$$C_1: x^2+(y-1)^2=4 \qquad C_2: x^2+y^2-8x-2y+16=0 \qquad C_3: x^2+y^2+2x-2y+1=0$$

a) Halla los ejes radicales de todas las posibles parejas entre las circunferencias dadas.

b) Razona si existe centro radical y, en su caso, hállalo.

a) Eje radical de C_1 y C_2: $8x-19=0 \Rightarrow x=\dfrac{19}{8}$ Eje radical de C_1 y C_3: $2x+4=0 \Rightarrow x=-2$

Eje radical de C_2 y C_3: $-10x+15=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$

b) Los ejes radicales son rectas paralelas y, por tanto, no se cortan. No hay centro radical. También podríamos haber comprobado que los centros $C_1(0, 1)$, $C_2(4, 1)$ y $C_3(-1, 1)$ están alineados, ya que pertenecen a la recta $y=1$, por lo que no existe centro radical.

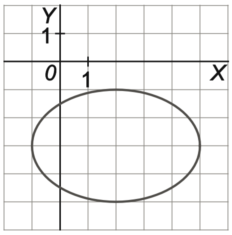
14. Ejercicio interactivo.

15 y 16. Ejercicios resueltos.

17. Dibuja e indica los elementos de las siguientes elipses.

a) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$ **b)** $x^2+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

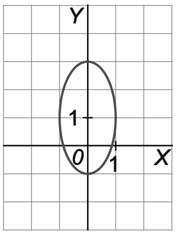
a) $a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$



Centro: $C(2, -3)$ Focos: $F\left(2+\sqrt{5}, -3\right)$, $F'\left(2-\sqrt{5}, -3\right)$

Vértices: $A(5, -3)$, $A'(-1, -3)$, $B(2, -1)$, $B'(2, -5)$

b) $a=2$, $b=1$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$



Centro: $C(0, 1)$ Focos: $F\left(0, 1+\sqrt{3}\right)$, $F'\left(0, 1-\sqrt{3}\right)$

Vértices: $A(0, 3)$, $A'(0, -1)$, $B(-1, 1)$, $B'(1, 1)$

18. Halla la ecuación reducida de una elipse centrada en el origen, si un foco es *F*(12, 0) y su semieje mayor vale 13.

$a=13$, $c=d(O, F)=12$ y $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25}=5$. Por tanto, la ecuación es $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$.

19. Halla la ecuación de la elipse de centro (3, 4), $e=0{,}5$ y *F*(8, 4).

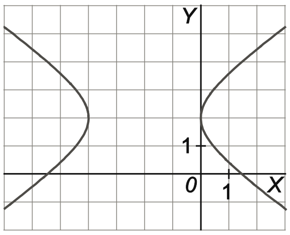
$c=d(C, F)=5$, $e=\frac{c}{a}\Rightarrow a=10$ y $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$. Por tanto, la ecuación es $\frac{(x-3)^2}{100}+\frac{(y-4)^2}{75}=1$.

20 y 21. Ejercicios resueltos.

22. Dibuja e indica los elementos de las siguientes hipérbolas.

a) $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{2}=1$ **b)** $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

a) $a=2$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6}$, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

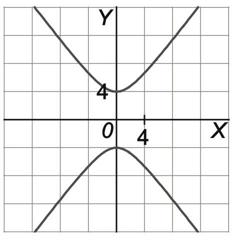


Centro: $C(-2, 2)$ Focos: $F\left(-2+\sqrt{6}, 2\right)$, $F'\left(-2-\sqrt{6}, 2\right)$

Vértices: $A(0, 2)$, $A'(-4, 2)$

Asíntotas: $y-2=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+2)$, $y-2=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+2)$

b) $a=4$, $b=3$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25}=5$, $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$



Centro: $C(0, 0)$ Focos: $F(0, 5)$, $F'(0, -5)$ Vértices: $A(0, 4)$, $A'(0, -4)$

Asíntotas: $y=\frac{4}{3}x$, $y=-\frac{4}{3}x$

23. Halla la ecuación canónica de las siguientes hipérbolas:

a) Hipérbola con excentricidad 1,5 y semieje $a = 4$. **b)** Hipérbola con foco en $F(2, 0)$ y que pasa por $P(2, 3)$

a) $a = 4$, $e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 6$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, por tanto, la ecuación es $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$.

b) $c = 2$, por tanto, la ecuación es de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4 - a^2} = 1$. Imponiendo que la hipérbola pasa por P tenemos:

$$\frac{4}{a^2} - \frac{9}{4 - a^2} = 1 \Rightarrow 16 - 4a^2 - 9a^2 = 4a^2 - a^4 \Rightarrow a^4 - 17a^2 + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16,\ b^2 = -12 \\ a^2 = 1,\ b^2 = 3 \end{cases}$$

Obviamente la primera posibilidad no es válida, por tanto, la ecuación es $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$.

24. Ejercicio resuelto.

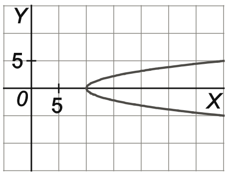
25. Calcula las coordenadas del foco y del vértice, las ecuaciones del eje y de la directriz y dibuja las siguientes parábolas.

a) $x - 10 = y^2$ **b)** $y^2 + 4y = 2 - 3x$ **c)** $x^2 + 6y + 13 = -5$ **d)** $x^2 - 4x = 6y - 28$

a) $x - 10 = y^2 \Rightarrow y^2 = x - 10$, parábola con apertura a la derecha.

Vértice: $V(10, 0)$ Eje: $y = 0$ $p = \frac{1}{2}$

Directriz: $x = \frac{39}{4}$ Foco: $F\left(\frac{41}{4}, 0\right)$

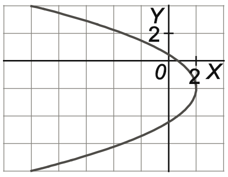


b) $y^2 + 4y = 2 - 3x \Rightarrow (y + 2)^2 - 4 = 2 - 3x \Rightarrow (y + 2)^2 = -3(x - 2)$,

parábola con apertura hacia la izquierda.

Vértice: $V(2, -2)$ Eje: $y = -2$ $p = \frac{3}{2}$

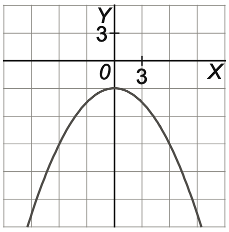
Directriz: $x = \frac{11}{4}$ Foco: $F\left(\frac{5}{4}, -2\right)$



c) $x^2 + 6y + 13 = -5 \Rightarrow x^2 = -6(y + 3)$, apertura hacia abajo.

Vértice: $V(0, -3)$ Eje: $x = 0$ $p = 3$

Directriz: $y = -\frac{3}{2}$ Foco: $F\left(0, -\frac{9}{2}\right)$

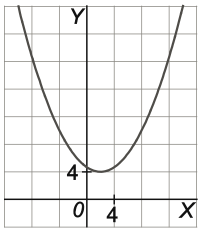


d) $x^2 - 4x = 6y - 28 \Rightarrow (x - 2)^2 - 4 = 6y - 28 \Rightarrow (x - 2)^2 = 6(y - 4)$,

apertura hacia arriba.

Vértice: $V(2, 4)$ Eje: $x = 2$ $p = 3$

Directriz: $y = \frac{5}{2}$ Foco: $F\left(2, \frac{11}{2}\right)$



26. Encuentra la ecuación de una parábola, sabiendo que tiene su vértice en el punto (2, 4), y que su directriz es la recta $y = 2$.

$\frac{p}{2} = d(V, d) = 2 \Rightarrow p = 4$, por tanto, la ecuación es $(x - 2)^2 = 8(y - 4) \Rightarrow y = \frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} + \frac{9}{2}$.

27. Ejercicio interactivo.

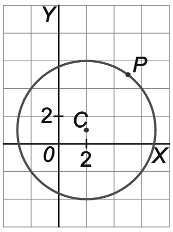
28 a 35. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

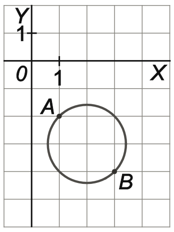
Circunferencia

36. Calcula la ecuación de las siguientes circunferencias.

a)



b)



c) De centro, $C(2, -3)$, y pasa por el punto $P(5, 1)$.

d) De centro, el punto $C(5, -2)$, y tangente al eje de abscisas.

e) Pasa por los puntos $A(3, 2)$ y $B(1, -2)$, y tiene su centro en la recta $r: 3x - y = 6$.

f) Pasa por el punto $A(3, 4)$, su radio vale $r = 5$ y su centro se encuentra en el eje de abscisas.

g) El centro es $C(3, 6)$ y es tangente a la bisectriz del primer cuadrante.

h) Pasa por $A(7, -3)$, $B(5, 1)$ y $C(2, -8)$.

a) Centro $C(2, 1)$ y pasa por $P(5, 5)$. El radio es $d(C, P) = \sqrt{25} = 5$, y la ecuación, $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

b) $A(1, -2)$ y $B(3, -4)$ son diametralmente opuestos, por tanto, el centro será el punto medio, $C(2, -3)$, y el radio, la mitad de $d(A, B)$, es decir, $\sqrt{2}$. La ecuación es $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$.

c) $r = d(C, P) = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

d) El radio es la distancia del punto C a la recta $y = 0$, es decir, $r = 2$. La ecuación es $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0$.

e) El centro es la intersección de la mediatriz del segmento AB y la recta r.

Mediatriz de AB: $d(X, A) = d(X, B) \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} \Rightarrow x + 2y - 2 = 0$

Centro: $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow C(2, 0)$ Radio: $r = d(A, C) = \sqrt{5}$

Ecuación: $(x-2)^2 + y^2 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$

f) El centro será de la forma $C(a, 0)$, así, $d(A, C) = 5 \Rightarrow (3-a)^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow (3-a)^2 = 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 - a = 3 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \text{ Ecuación: } x^2 + y^2 = 25 \\ 3 - a = -3 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow \text{ Ecuación: } (x-6)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0 \end{cases}$$

g) El radio es la distancia del punto C a la recta $y = x$, es decir, $r = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

La ecuación es $(x-3)^2 + (y-6)^2 = \dfrac{9}{2} \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 12x - 24y + 81 = 0$.

h) $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \Rightarrow \begin{cases} 49 + 9 + 7A - 3B + C = 0 \\ 25 + 1 + 5A + B + C = 0 \\ 4 + 64 + 2A - 8B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -4 \\ B = 6 \\ C = -12 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

37. Halla la ecuación de la circunferencia que pasando por el punto *P*(2, 9) es tangente a los dos ejes de coordenadas.

El centro es de la forma $C(r, r)$ donde *r* es el radio, por tanto la ecuación es $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2-2rx-2ry+r^2=0$. Imponiendo que pase por el punto *P* tenemos:

$$4+81-4r-18r+r^2=0 \Rightarrow r^2-22r+85=0 \Rightarrow \begin{cases} r=17 \Rightarrow \text{ Ecuación: } x^2+y^2-34x-34y+289=0 \\ r=5 \Rightarrow \text{ Ecuación: } x^2+y^2-10x-10y+25=0 \end{cases}$$

38. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto *C*(1, 4) y es tangente a la recta $3x+4y-4=0$.

$$r=\frac{|3+16-4|}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{5}=3 \Rightarrow (x-1)^2+(y-4)^2=9 \Rightarrow x^2+y^2-2x-8y+8=0.$$

39. Determina el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos *A*(0, 0), *B*(0, 2) y *C*(2, 4).

A partir de la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ tenemos:

$$\begin{cases} F=0 \\ 4+2E+F=0 \\ 4+16+2D+4E+F=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F=0 \\ 4+2E=0 \Rightarrow E=-2 \\ 20+2D+4(-2)=0 \Rightarrow D=-6 \end{cases} \Rightarrow \text{Ec. Circunferencia: } x^2+y^2-6x-2y=0$$

Así: $C(c_1, c_2)=\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \Rightarrow C(3, 1)$ y $r=\sqrt{\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

40. Dada la circunferencia $4x^2+4y^2-24x+4y+33=0$, calcula la ecuación de otra concéntrica con ella y cuyo radio mida la mitad.

La circunferencia dada tiene centro $C\left(3, -\frac{1}{2}\right)$ y radio $r=\sqrt{9+\frac{1}{4}-\frac{33}{4}}=1$, por tanto, la ecuación buscada es:

$$(x-3)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x^2+y^2-6x+y+9=0$$

41. Confirma si las siguientes ecuaciones representan una circunferencia. En caso afirmativo, dibújalas e indica el centro y el valor del radio.

a) $x^2+y^2-4x+6y+9=0$ **c)** $2x^2+2y^2-6x=0$ **e)** $2x^2+2y^2-2x+6y-3=0$

b) $x^2+y^2-2x+2y+3=0$ **d)** $x^2+y^2+2x+2y=0$

a) $C(2, -3)$ y $r=\sqrt{4+9-9}=2$

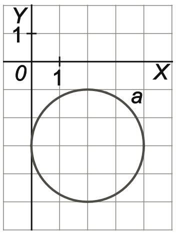
b) $C(1, -1)$ y $r=\sqrt{1+1-3}=\sqrt{-1}$ no es real.

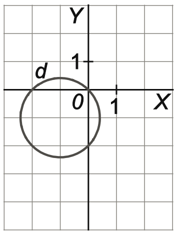
No representa una circunferencia.

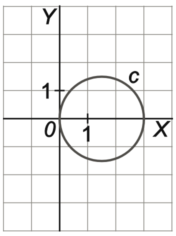
c) $C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y $r=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

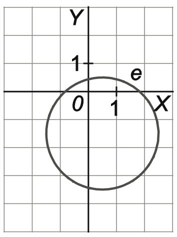
d) $C(-1, -1)$ y $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

e) $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ y $r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+\frac{3}{2}}=2$









42. Halla la posición relativa de cada punto y de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

a) $A(5, 5)$ **b)** $B(3, 3)$ **c)** $C(-4, 3)$

a) $Pot_{Cf}(A) = 25 + 25 - 20 - 10 - 20 = 0$. El punto *A* pertenece a la circunferencia.

b) $Pot_{Cf}(B) = 9 + 9 - 12 - 6 - 20 = -20$. El punto *B* es interior a la circunferencia.

c) $Pot_{Cf}(C) = 16 + 9 + 16 - 6 - 20 = 15$. El punto *B* es exterior a la circunferencia.

43. Calcula la máxima y la mínima distancia del punto *P*(5, 2) a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$.

$Pot_{Cf}(P) = 25 + 4 + 30 + 16 = 75$, así, el punto es exterior a la circunferencia.

Por tanto, la recta que une *P* con el centro *C* cortará a la circunferencia primero a una distancia *x* y después a una distancia *x* + 2*r* que serán la distancia mínima y máxima buscadas.

Como $C(-3, -4)$ y $r = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, tenemos:

$x(x+2r) = 75 \Rightarrow x^2 + 10x - 75 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -15 \text{ no válida} \end{cases} \Rightarrow$ La distancia mínima es 5, y la máxima, 15.

44. Para cada caso, estudia la posición relativa de la recta con la circunferencia que se indica.

a) $2x - y + 1 = 0$ con $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.

b) $x - 2 = 0$ con $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$.

c) $x + 7y = 30$ con $x^2 + y^2 - 10x = 0$.

d) $y = -3$ con $2x^2 + 2y^2 - 14x + 2y + 21 = 0$.

a) La circunferencia tiene centro $C(2, -3)$ y radio $r = \sqrt{4+9-9} = 2$.

La distancia del centro *C* a la recta es $\dfrac{|4+3+1|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{8\sqrt{5}}{5} > r$, por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

b) La circunferencia tiene centro $C(1, -1)$ y radio $r = \sqrt{1+1-1} = 1$.

La distancia del centro *C* a la recta es $\dfrac{|1-2|}{\sqrt{1}} = 1 = r$, por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

c) La circunferencia tiene centro $C(5, 0)$ y radio $r = \sqrt{25} = 5$.

La distancia del centro *C* a la recta es $\dfrac{|5-30|}{\sqrt{1+49}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} < r$, por tanto, la recta es secante a la circunferencia.

d) La circunferencia tiene centro $C\left(\dfrac{7}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ y radio $r = \sqrt{\dfrac{49}{4} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{21}{2}} = \sqrt{2}$.

La distancia del centro *C* a la recta es $\dfrac{\left|-\dfrac{1}{2}+3\right|}{\sqrt{1}} = \dfrac{5}{2} > r$, por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

45. Estudia la posición relativa de la circunferencia $2x^2+2y^2-6x-6y+7=0$ con cada una de las siguientes circunferencias.

a) $x^2+y^2=\frac{1}{4}$

b) $2x^2+2y^2=5$

c) $8x^2+8y^2-16x-24y-25=0$

d) $x^2+y^2-2x-3y+3=0$

e) $x^2+y^2-3y+2=0$

f) $x^2+y^2-3x-3y+4=0$

La circunferencia $2x^2+2y^2-6x-6y+7=0$ tiene centro $C_1\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ y radio $r_1=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}}=1$.

a) La circunferencia $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ tiene centro $C_2=(0,\,0)$ y radio $r_2=\frac{1}{2}$.

Como $d(C_1,\,C_2)=\frac{3\sqrt{2}}{2}>r_1+r_2=\frac{3}{2}$, las circunferencias son exteriores.

b) La circunferencia $2x^2+2y^2=5$ tiene centro $C_2=(0,\,0)$ y radio $r_2=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Como $r_2-r_1=\frac{\sqrt{10}-2}{2}<d(C_1,\,C_2)=\frac{3\sqrt{2}}{2}<r_1+r_2=\frac{2+\sqrt{10}}{2}$, las circunferencias son secantes.

c) La circunferencia $8x^2+8y^2-16x-24y-25=0$ tiene centro $C_2=\left(1,\,\frac{3}{2}\right)$ y radio $r_2=\sqrt{\frac{51}{8}}=\frac{\sqrt{102}}{4}$.

Como $d(C_1,\,C_2)=\frac{1}{2}<r_2-r_1=\frac{\sqrt{102}-4}{4}$, la primera circunferencia es interior a la segunda.

d) La circunferencia $x^2+y^2-2x-3y+3=0$ tiene centro $C_2=\left(1,\,\frac{3}{2}\right)$ y radio $r_2=\frac{1}{2}$.

Como $d(C_1,\,C_2)=\frac{1}{2}=r_1-r_2$, las circunferencias son tangentes interiores.

e) La circunferencia $x^2+y^2-3y+2=0$ tiene centro $C_2=\left(0,\,\frac{3}{2}\right)$ y radio $r_2=\frac{1}{2}$.

Como $d(C_1,\,C_2)=\frac{3}{2}=r_1+r_2=\frac{3}{2}$, las circunferencias son tangentes exteriores.

f) La circunferencia $x^2+y^2-3x-3y+4=0$ tiene centro $C_1\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ y radio $r_2=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, por tanto, las circunferencias son concéntricas estando $x^2+y^2-3x-3y+4=0$ en el interior de $2x^2+2y^2-6x-6y+7=0$.

46. Calcula la potencia de cada punto respecto de la circunferencia indicada y señala su posición relativa.

a) $P(1,\,3)$ y $8x^2+8y^2-79x-32y+95=0$

b) $P(1,\,–1)$ y $2x^2+2y^2-x=0$

c) $P(5,\,3)$ y $x^2+y^2-7x-8y=0$

a) $Pot_{Cf}(P)=8+72-79-96+95=0$. El punto pertenece a la circunferencia.

b) $Pot_{Cf}(P)=2+2-1=3$. El punto es exterior a la circunferencia.

c) $Pot_{Cf}(P)=25+9-35-24=-25$. El punto *es* interior a la circunferencia.

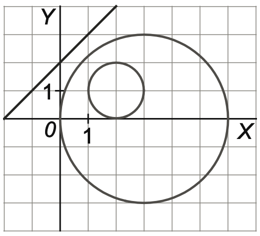
47. Calcula el eje radical de las siguientes parejas de circunferencias y representa gráficamente la situación en cada caso.

a) $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ y $x^2+y^2-6x=0$

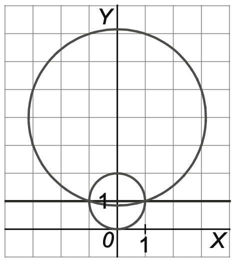
b) $x^2+y^2-8y+6=0$ y $2x^2+2y^2-4y=0$

c) $4x^2+4y^2-4x-8y+1=0$ y $4x^2+4y^2-4x-24y+1=0$

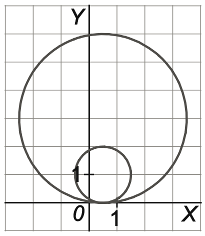
a) Eje radical: $\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+4=0 \\ x^2+y^2-6x=0 \end{cases} \Rightarrow 2x-2y+4=0 \Rightarrow x-y+2=0$.



b) Eje radical: $\begin{cases} x^2+y^2-8y+6=0 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases} \Rightarrow 6y-6=0 \Rightarrow y=1$.



c) Eje radical: $\begin{cases} 4x^2+4y^2-4x-8y+1=0 \\ 4x^2+4y^2-4x-24y+1=0 \end{cases} \Rightarrow 16y=0 \Rightarrow y=0$.



48. Halla el centro radical de las circunferencias siguientes:

$$\boldsymbol{C_1: x^2+y^2=16 \qquad C_2: x^2+y^2-2x+4y-4=0 \qquad C_3: x^2+y^2+6x-6y+14=0}$$

Eje radical de C_1 y C_2: $x-2y-6=0$

Eje radical de C_1 y C_3: $x-y+5=0$

Centro radical: $\begin{cases} x-2y=6 \\ x-y=-5 \end{cases} \Rightarrow x=-16,\ y=-11 \Rightarrow P(-16, -11)$

49. Calcula las tangentes a las circunferencias siguientes en el punto dado.

a) $x^2+y^2=26$ en $P(-1, 5)$

b) $3x^2+3y^2-4x+17y+23=0$ en $P(1, -2)$

La tangente en un punto *P* es perpendicular al segmento *CP*, donde *C* es el centro de la circunferencia.

a) $C(0, 0)$, luego $\overrightarrow{CP}=(-1, 5)$ y la ecuación de la tangente es: $-1(x+1)+5(y-5)=0 \Rightarrow x-5y+26=0$.

b) $C\left(\frac{2}{3}, -\frac{17}{6}\right)$, luego $\overrightarrow{CP}=\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$ y la ecuación de la tangente es: $\frac{1}{3}(x-1)+\frac{5}{6}(y+2)=0 \Rightarrow 2x+5y+8=0$.

50. Dada la circunferencia $(x+3)^2+(y-1)^2=25$, calcula las ecuaciones de sus tangentes paralelas a la recta $3x+4y-16=0$.

Las ecuaciones buscadas serán de la forma $3x+4y+K=0$, para que sean tangentes a la circunferencia, la distancia del centro a la recta debe coincidir con el radio, así:

$$\frac{|-9+4+K|}{\sqrt{9+16}}=5\Rightarrow|K-5|=25\Rightarrow\begin{cases}K-5=25\Rightarrow K=30\Rightarrow 3x+4y+30=0\\ K-5=-25\Rightarrow K=-20\Rightarrow 3x+4y-20=0\end{cases}$$

51. Calcula las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-4x+4y-17=0$ que sean perpendiculares a la recta de ecuación $3x-4y=14$.

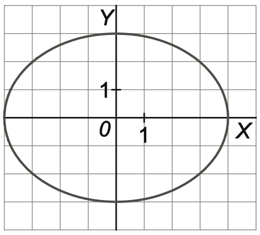
Las ecuaciones buscadas serán de la forma $4x+3y+K=0$, para que sean tangentes a la circunferencia, la distancia del centro a la recta debe coincidir con el radio, así, como $C(2, -2)$ y $r=\sqrt{4+4+17}=5$, tenemos:

$$\frac{|8-6+K|}{\sqrt{25}}=5\Rightarrow|2+K|=25\Rightarrow\begin{cases}2+K=25\Rightarrow K=23\Rightarrow 4x+3y+23=0\\ 2+K=-25\Rightarrow K=-27\Rightarrow 4x+3y-27=0\end{cases}$$

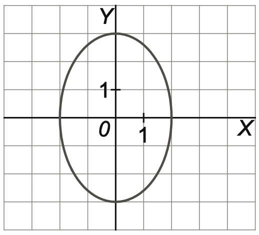
Elipse

52. Para cada una de las elipses, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y calcula el valor de la excentricidad. Escribe su ecuación.

a)



b)



a) $a=4$, $b=3$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{7}$, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

Vértices: $A(4, 0)$, $A'(-4, 0)$, $B(0, 3)$, $B'(0, -3)$

Focos: $F\left(\sqrt{7}, 0\right)$, $F'\left(-\sqrt{7}, 0\right)$

Ecuación: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

b) $a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Vértices: $A(0, 3)$, $A'(0, -3)$, $B(2, 0)$, $B'(-2, 0)$

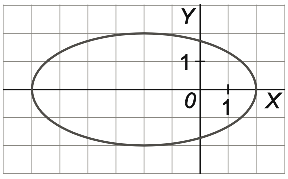
Focos: $F\left(0, \sqrt{5}\right)$, $F'\left(0, -\sqrt{5}\right)$

Ecuación: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

53. Dada la elipse $x^2+4y^2+4x-12=0$, dibújala, y calcula el centro, los semiejes, la semidistancia focal, los focos, los vértices y la excentricidad. ¿Cuál es la ecuación de la elipse que tiene los mismos elementos pero cuyo centro es el origen de coordenadas?

$$x^2+4y^2+4x-12=0 \Rightarrow (x+2)^2+4y^2=16 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$a=4\ ,\ b=2\ ,\ c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\ ,\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Centro: (–2, 0) Focos: $F\left(-2+2\sqrt{3},\ 0\right)$, $F'\left(-2-2\sqrt{3},\ 0\right)$ Vértices: $A(2, 0)$, $A'(-6, 0)$, $B(-2, 2)$, $B'(-2, -2)$

Ecuación reducida: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

54. Calcula la ecuación de las siguientes elipses. (Salvo indicación, el centro es el origen).

a) $a=5$, $c=3$

b) Los radios vectores de un punto miden 7 y 3, y $c=4$.

c) Foco, $F(3, 0)$, y vértice, $A(4, 0)$

d) Vértices, $A(6, 0)$ y $B(0, 3)$

e) Foco, $F'(-2, 0)$, y excentricidad, $e=0,4$

f) Pasa por los puntos $P(1, 2)$ y $Q(-2, 0)$.

g) Pasa por $P(5, 0)$ y su excentricidad es $e=\frac{3}{5}$.

h) Foco, $F'(0, 2)$, y semieje mayor, $a=3$

i) Centro, el punto $C(-2, 1)$, $a=13$ y $b=5$

a) $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{16}=4 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

b) $2a=7+3 \Rightarrow a=5,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{9}=3 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

c) $a=4,\ c=3,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{7} \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

d) $a=6,\ b=3 \Rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$

e) $c=2,\ a=\frac{c}{e}=5,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{21} \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$

f) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \\ \frac{4}{a^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$

g) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{25}{a^2}=1 \Rightarrow a=5,\ c=a\cdot e=3,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{16}=4 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

h) $c=2,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5} \Rightarrow \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$

i) $\frac{(x+2)^2}{169}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$

55. Para cada una de las siguientes elipses, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y calcula el valor de la excentricidad. Dibújalas.

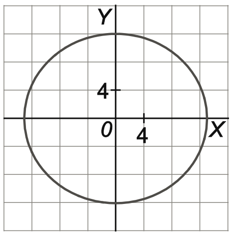
a) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$ **c)** $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{(y-5)^2}{8}=1$ **e)** $2(x-1)^2+y^2=2$

b) $16x^2+25y^2=400$ **d)** $\dfrac{(x-3)^2}{10}+\dfrac{(y+2)^2}{6}=1$ **f)** $9x^2+y^2-18x+6y+9=0$

a) $a=13$, $b=12$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25}=5$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{13}$

Vértices: $A(13, 0)$, $A'(-13, 0)$, $B(0, 12)$, $B'(0, -12)$

Focos: $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$

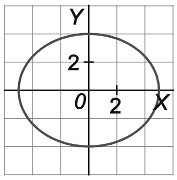


b) $16x^2+25y^2=400 \Rightarrow \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

$a=5$, $b=4$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9}=3$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5}$

Vértices: $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$, $B(0, 4)$, $B'(0, -4)$

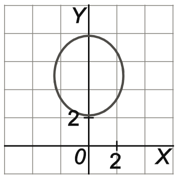
Focos: $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$



c) $a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$

Vértices: $A\left(0, 5+2\sqrt{2}\right)$, $A'\left(0, 5-2\sqrt{2}\right)$, $B\left(\sqrt{6}, 5\right)$, $B'\left(-\sqrt{6}, 5\right)$

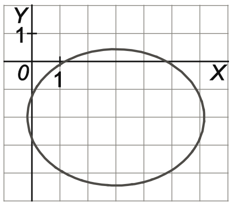
Focos: $F\left(0, 5+\sqrt{2}\right)$, $F'\left(0, 5-\sqrt{2}\right)$



d) $a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4}=2$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

Vértices: $A\left(3+\sqrt{10}, -2\right)$, $A'\left(3-\sqrt{10}, -2\right)$, $B\left(3, -2+\sqrt{6}\right)$, $B'\left(3, -2-\sqrt{6}\right)$

Focos: $F(5, -2)$, $F'(1, -2)$

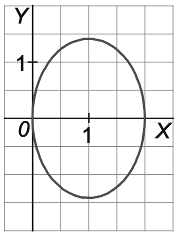


e) $2(x-1)^2+y^2=2 \Rightarrow (x-1)^2+\dfrac{y^2}{2}=1$

$a=\sqrt{2}$, $b=1$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{1}=1$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vértices: $A\left(1, \sqrt{2}\right)$, $A'\left(1, -\sqrt{2}\right)$, $B(2, 0)$, $B'(0, 0)$

Focos: $F(1, 1)$, $F'(1, -1)$

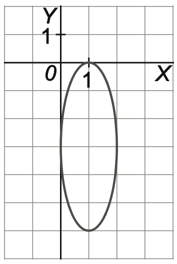


f) $9x^2+y^2-18x+6y+9=0 \Rightarrow 9(x-1)^2+(y+3)^2=9 \Rightarrow (x-1)^2+\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$

$a=3$, $b=1$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Vértices: $A(1, 0)$, $A'(1, -6)$, $B(0, -3)$, $B'(2, -3)$

Focos: $F\left(1, -3+2\sqrt{2}\right)$, $F'\left(1, -3-2\sqrt{2}\right)$



Hipérbola

56. Halla la ecuación de las siguientes hipérbolas. (Salvo indicación, el centro es el origen).

a) $a = 3$, $c = 5$

b) Semidistancia focal 5 y los radios vectores de un punto miden 10 y 2 .

c) Foco, $F(4, 0)$, y vértice, $A(2, 0)$

d) Vértices, $A(6, 0)$ y $B(0, 3)$

e) Foco, $F'(-6, 0)$, y excentricidad, $e = 1{,}25$

f) Pasa por los puntos $P(3, 0)$ y $Q(5, -3)$.

g) Pasa por $P(2, 0)$ y su excentricidad es $e = 1{,}5$.

h) Pasa por $P(15, 4)$, y su distancia focal vale $2\sqrt{90}$.

i) Centro, $C(2, -3)$, $a = 8$ y $c = 10$

a) $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

b) $2a = 10 - 2 \Rightarrow a = 4,\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

c) $a = 2,\ c = 4,\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$

d) $a = 6,\ b = 3 \Rightarrow \dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

e) $c = 6;\ a = \dfrac{c}{e} = \dfrac{24}{5};\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{36 - \dfrac{576}{25}} = \dfrac{18}{5} \Rightarrow \dfrac{x^2}{\frac{576}{25}} - \dfrac{y^2}{\frac{324}{25}} = 1$

f) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{a^2} = 1 \\ \dfrac{25}{a^2} - \dfrac{9}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{\frac{81}{16}} = 1$

g) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{4}{a^2} = 1 \Rightarrow a = 2,\ c = a \cdot e = 3,\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$

h) $\begin{cases} \dfrac{225}{a^2} - \dfrac{16}{b^2} = 1 \\ a^2 + b^2 = c^2 = 90 \end{cases} \Rightarrow a = 9,\ b = 3 \Rightarrow \dfrac{x^2}{81} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

i) $b = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{64} - \dfrac{(y+3)^2}{36} = 1$

57. Encuentra la ecuación de la hipérbola que tiene por focos los puntos $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$ y que pasa por el punto $P\left(8, 5\sqrt{3}\right)$.

$$c = 3 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{64}{a^2} - \dfrac{75}{b^2} = 1 \\ a^2 + b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{64}{9 - b^2} - \dfrac{75}{b^2} = 1 \Rightarrow b^4 + 130b^2 - 675 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 5 \Rightarrow a^2 = 4 \\ b^2 = -135 \Rightarrow \text{No válida} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$$

58. Calcula la ecuación de una hipérbola si un foco es el punto $F(0, 10)$ y una asíntota la recta $y = x$.

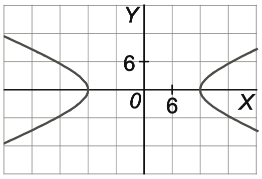
Tenemos $a = b$ y $c^2 = a^2 + b^2 = 100$, por tanto, $a^2 = b^2 = 50$ y la ecuación de la hipérbola es $\dfrac{x^2}{50} - \dfrac{y^2}{50} = 1$.

59. Para cada una de las siguientes hipérbolas, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y calcula las ecuaciones de las asíntotas y el valor de la excentricidad. Dibújalas.

a) $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1$ **c)** $\dfrac{(x+1)^2}{8}-\dfrac{(y-2)^2}{6}=1$ **e)** $4y^2-x^2=4$

b) $36x^2-64y^2=2304$ **d)** $\dfrac{y^2}{225}-\dfrac{x^2}{64}=1$ **f)** $2(y+1)^2-x^2=2$

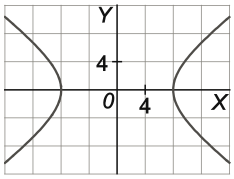
a) $a=12$, $b=5$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=13$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{13}{12}$



Vértices: $A(12, 0)$, $A'(-12, 0)$ Focos: $F(13, 0)$, $F'(-13, 0)$

Asíntotas: $y=\dfrac{5}{12}x$, $y=-\dfrac{5}{12}x$

b) $36x^2-64y^2=2304 \Rightarrow \dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$

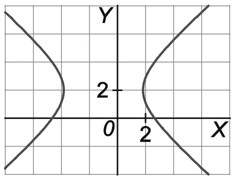


$a=8$, $b=6$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=10$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{10}{8}$

Vértices: $A(8, 0)$, $A'(-8, 0)$ Focos: $F(10, 0)$, $F'(-10, 0)$

Asíntotas: $y=\dfrac{3}{4}x$, $y=-\dfrac{3}{4}x$

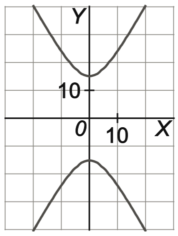
c) $a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{14}$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$



Vértices: $A\left(-1+\sqrt{8}, 2\right)$, $A'\left(-1-\sqrt{8}, 2\right)$ Focos: $F\left(-1+\sqrt{14}, 2\right)$, $F'\left(-1-\sqrt{14}, 2\right)$

Asíntotas: $y=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}x \Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$, $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

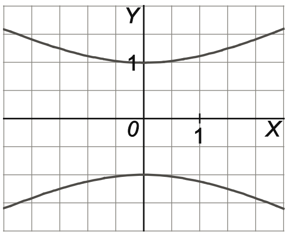
d) $a=15$, $b=8$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=17$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{17}{15}$



Vértices: $A(0, 15)$, $A'(0, -15)$ Focos: $F(0, 17)$, $F'(0, -17)$

Asíntotas: $x=\dfrac{8}{15}y$, $x=-\dfrac{8}{15}y$

e) $4y^2-x^2=4 \Rightarrow y^2-\dfrac{x^2}{4}=1$

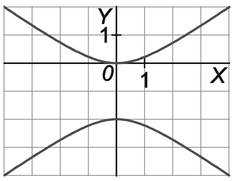


$a=1$, $b=2$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$, $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}$

Vértices: $A(0, 1)$, $A'(0, -1)$ Focos: $F\left(0, \sqrt{5}\right)$, $F'\left(0, -\sqrt{5}\right)$

Asíntotas: $x=2y$, $x=-2y$

f) $2(y+1)^2-x^2=2 \Rightarrow (y+1)^2-\dfrac{x^2}{2}=1$



$a=1$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}$, $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{3}$

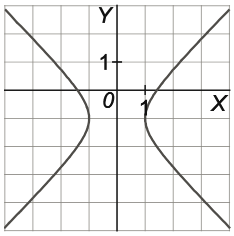
Vértices: $A(0, 0)$, $A'(0, -2)$ Focos: $F\left(0, -1+\sqrt{5}\right)$, $F'\left(0, -1-\sqrt{5}\right)$

Asíntotas: $x=\sqrt{2}(y+1)$, $x=-\sqrt{2}(y+1)$

60. Dada la hipérbola $x^2 - y^2 - 2y - 2 = 0$, dibújala, y calcula el centro, los semiejes, la semidistancia focal, los focos, los vértices y la excentricidad. ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola que tiene los mismos elementos pero cuyo centro es el origen?

$x^2 - y^2 - 2y - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - (y+1)^2 = 1$

$a = 1,\ b = 1,\ c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2},\ e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$



Centro: $C(0, -1)$

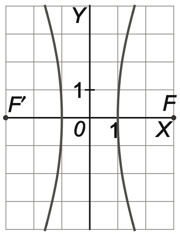
Vértices: $A(1, -1)$, $A'(-1, -1)$

Focos: $F\left(\sqrt{2}, -1\right)$, $F'\left(-\sqrt{2}, -1\right)$

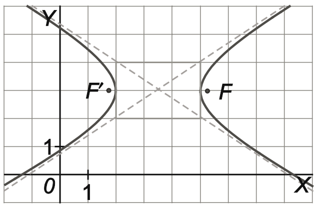
Ecuación reducida: $x^2 - y^2 = 1$

61. Para cada una de las hipérbolas, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y el valor de la excentricidad. Halla su ecuación y las de sus asíntotas.

a)



b)



a) $a = 1,\ c = 3,\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},\ e = \frac{c}{a} = 3$

Ecuación: $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$

Vértices: $A(1, 0)$, $A'(-1, 0)$

Focos: $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$

Asíntotas: $y = 2\sqrt{2}x$, $y = -2\sqrt{2}x$

b) $a = \frac{3}{2},\ b = 1,\ c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{13}}{2},\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Ecuación: $\dfrac{\left(x - \frac{7}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} - (y-3)^2 = 1$

Vértices: $A(5, 3)$, $A'(2, 3)$

Focos: $F\left(\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{13}}{3}, 3\right)$, $F'\left(\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{13}}{3}, 3\right)$

Asíntotas: $y - 3 = \frac{2}{3}\left(x - \frac{7}{2}\right)$, $y - 3 = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{7}{2}\right)$

Parábola

62. Calcula la ecuación de las siguientes parábolas. (En *c*, *d*, *e* y *f*, el vértice es el origen).

a) Foco, $F(2, 0)$, y directriz, $x = 6$

b) Foco, $F(0, 4)$, y directriz, $y = 1$

c) Parámetro, $p = 2$ y abierta hacia la derecha

d) Parámetro, $p = 4$ y abierta hacia la izquierda

e) Parámetro, $p = 6$ y abierta hacia arriba

f) Parámetro, $p = 8$ y abierta hacia abajo

g) Vértice, $V(-2, 1)$, y directriz, $y = -2$

h) Vértice, $V(-2, -2)$, y foco, $F(-2, -6)$

i) Vértice, $V(0, 1)$, y directriz, $x = 7$

a) Abierta hacia la izquierda, $V(4, 0)$, $p = 4 \Rightarrow y^2 = -8(x-4)$

b) Abierta hacia arriba, $V\left(0, \frac{5}{2}\right)$, $p = 3 \Rightarrow x^2 = 6\left(y - \frac{5}{2}\right)$

c) $y^2 = 4x$

d) $y^2 = -8x$

e) $x^2 = 12y$

f) $x^2 = -16y$

g) Abierta hacia arriba, $p = 6 \Rightarrow (x+2)^2 = 12(y-1)$

h) Abierta hacia abajo, $p = 8 \Rightarrow (x+2)^2 = -16(y+2)$

i) Abierta hacia la izquierda, $p = 14 \Rightarrow (y-1)^2 = -28x$

63. Para las siguientes parábolas, halla el vértice, el foco y la ecuación de la directriz.

a) $y^2 = 10x$ **b)** $x^2 = 2y$ **c)** $(y-1)^2 = 8(x-1)$ **d)** $x^2 = -3y$

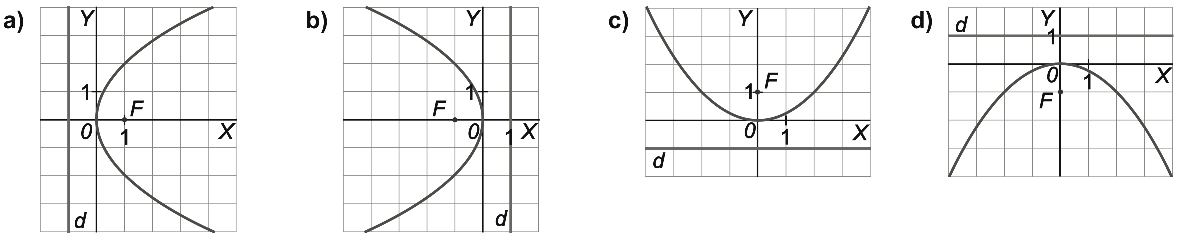
a) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ Directriz: $x = -\frac{5}{2}$

b) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$ Directriz: $y = -\frac{1}{2}$

c) Vértice: $V(1, 1)$ Foco: $F(3, 1)$ Directriz: $x = -1$

d) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F\left(0, -\frac{3}{4}\right)$ Directriz: $y = \frac{3}{4}$

64. Para cada una de las siguientes parábolas, calcula su vértice, su foco y su directriz, el valor del parámetro *p* y su ecuación reducida.



a) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F(1, 0)$ Directriz: $x = -1$ Parámetro: $p = 2$ Ecuación: $y^2 = 4x$

b) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F(-1, 0)$ Directriz: $x = 1$ Parámetro: $p = 2$ Ecuación: $y^2 = -4x$

c) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F(0, 1)$ Directriz: $y = -1$ Parámetro: $p = 2$ Ecuación: $x^2 = 4y$

d) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F(0, -1)$ Directriz: $y = 1$ Parámetro: $p = 2$ Ecuación: $x^2 = -4y$

65. Halla el vértice, el foco y la ecuación de la directriz en cada una de las siguientes parábolas.

a) $y^2-4y-2x+2=0$ **b)** $x^2-2x-y+1=0$ **c)** $y^2-4y-6x-5=0$

a) $y^2-4y-2x+2=0\Rightarrow(y-2)^2=2(x+1)$

Vértice: $V(-1, 2)$ Foco: $F\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ Directriz: $x=-\frac{3}{2}$

b) $x^2-2x-y+1=0\Rightarrow(x-1)^2=y$

Vértice: $V(1, 0)$ Foco: $F\left(1, \frac{1}{4}\right)$ Directriz: $y=-\frac{1}{4}$

c) $y^2-4y-6x-5=0\Rightarrow(y-2)^2=6\left(x+\frac{3}{2}\right)$

Vértice: $V\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ Foco: $F(0, 2)$ Directriz: $x=-3$

Síntesis

66. Calcula el valor de *m* para que el eje radical de las circunferencias dadas sea el eje de abscisas.

$$C_1: x^2+y^2-mx-6y=0 \qquad C_2: 2x^2+2y^2-8x+y=0$$

$$\begin{cases}x^2+y^2-mx-6y=0\\2x^2+2y^2-8x+y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x^2+2y^2-2mx-12y=0\\2x^2+2y^2-8x+y=0\end{cases}\Rightarrow(2m-8)x+13y=0$$

Para que el eje radical sea el eje de abscisas debe verificarse que $2m-8=0\Rightarrow m=4$.

67. Halla los siguientes lugares geométricos.

a) Puntos del plano que equidistan de las rectas paralelas $r: x+y=5$ y $s: x+y=9$.

b) Puntos del plano cuya distancia al origen de coordenadas es el doble que la distancia al punto (2, 0).

c) Puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$ es 40.

d) Puntos del plano cuya distancia al punto $A(4, 0)$ es el doble que la distancia a la recta $x=1$.

Sea $X(x, y)$ un punto genérico del lugar geométrico solicitado:

a) $d(X,r)=d(X,s)\Rightarrow\frac{|x+y-5|}{\sqrt{2}}=\frac{|x+y-9|}{\sqrt{2}}\Rightarrow\begin{cases}x+y-5=x+y-9\Rightarrow-5=-9 \text{ No válida}\\x+y-5=-x-y+9\Rightarrow x+y=7\end{cases}$

Se obtiene la recta paralela a *r* y *s* que “está entre ambas”.

b) $d(X, O)=2d\left(X, (2,0)\right)\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}\Rightarrow x^2+y^2=4(x-2)^2+4y^2\Rightarrow3x^2-16x+3y^2+16=0$

Se obtiene la circunferencia de centro $C\left(\frac{8}{3}, 0\right)$ y radio $r=\frac{4}{3}$.

c) $\left(d(X, P)\right)^2+\left(d(X, Q)\right)^2=40\Rightarrow(x+4)^2+y^2+(x-4)^2+y^2=40\Rightarrow x^2+y^2=4$

Se obtiene la circunferencia de centro $C(0, 0)$ y radio $r=2$.

d) $d(X, A)=2d(X, x=1)\Rightarrow\sqrt{(x-4)^2+y^2}=2\cdot\frac{|x-1|}{\sqrt{1}}\Rightarrow(x-4)^2+y^2=4(x-1)^2\Rightarrow3x^2-y^2-12=0$.

Se obtiene la hipérbola de centro $C(0, 0)$ y semiejes $a=2$ y $b=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

68. Halla, en función del parámetro positivo *a*, la posición relativa de la circunferencia de ecuación $(x-2)^2+y^2=a$ y la recta de ecuación $y=x$.

La circunferencia tiene centro $C(2, 0)$ y radio $r=\sqrt{a}$. La distancia del centro a la recta es $\frac{|2+0+0|}{\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, por tanto, si $a=2$, la recta es tangente, si $a>2$, es secante, y si $a<2$, es exterior a la circunferencia.

69. Dados los puntos *A*(2, 3) y *B*(6, 1), halla la ecuación y describe el lugar geométrico de los puntos *P*(*x*, *y*) del plano tales que el triángulo *APB* es rectángulo en *P*.

Los vectores $\overrightarrow{AP}=(x-2,\ y-3)$ y $\overrightarrow{BP}=(x-6,\ y-1)$ deben ser perpendiculares, por tanto:

$(x-2)(x-6)+(y-3)(y-1)=0 \Rightarrow x^2+y^2-8x-4y+15=0 \Rightarrow (x-4)^2+(y-2)^2=5$

Se trata de una circunferencia de centro $C(4, 2)$ y radio $r=\sqrt{5}$.

70. Identifica cada una de las siguientes cónicas y establece sus elementos más importantes.

a) $x^2-4x-4y=0$

b) $x^2+y^2+6x-10y+33=0$

c) $9x^2-4y^2-24y-72=0$

d) $3x^2+4y^2-18x+16y+31=0$

e) $25x^2-144y^2+288y-3744=0$

a) $x^2-4x-4y=0 \Rightarrow (x-2)^2=4(y+1)$. Parábola abierta hacia arriba con vértice $V(2, -1)$.

b) $x^2+y^2+6x-10y+33=0 \Rightarrow (x+3)^2+(y-5)^2=1$. Circunferencia de centro $C(-3, 5)$ y radio $r=1$.

c) $9x^2-4y^2-24y-72=0 \Rightarrow 9x^2-4(y+3)^2=36 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{9}=1$. Hipérbola de centro $C(0, -3)$ y semiejes $a=2$ y $b=3$.

d) $3x^2+4y^2-18x+16y+31=0 \Rightarrow 3(x-3)^2+4(y+2)^2=12 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{3}=1$. Elipse de centro $C(3, -2)$ y semiejes $a=2$ y $b=\sqrt{3}$.

e) $25x^2-144y^2+288y-3744=0 \Rightarrow 25x^2-144(y-1)^2=3600 \Rightarrow \frac{x^2}{144}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$. Hipérbola de centro $C(0, 1)$ y semiejes $a=12$ y $b=5$.

71. Calcula los puntos de intersección de las siguientes parejas de cónicas y verifica los resultados observando sus gráficas.

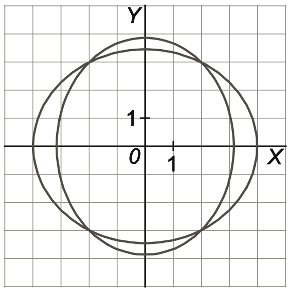
a) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ con $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{15}=1$

b) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ con $x^2+y^2-6x-1=0$

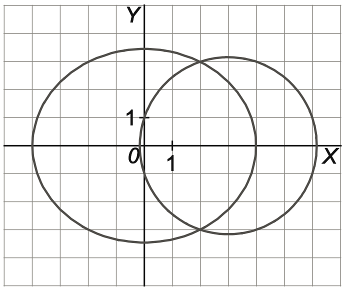
c) $9x^2-4y^2=36$ con $x^2+y^2=43$

d) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{64}=1$ con $y^2-36x+144=0$

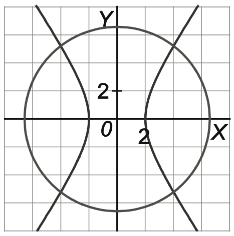
a) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1\\ \dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{15}=1\end{cases} \Rightarrow P_1(2,\,3),\ P_2(-2,\,3),\ P_3(2,\,-3),\ P_2(-2,\,-3)$



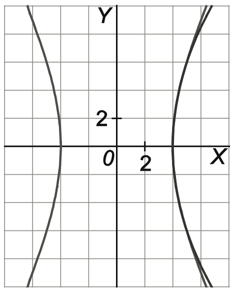
b) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1\\ x^2+y^2-6x-1=0\end{cases} \Rightarrow P_1(2,\,3),\ P_2(2,\,-3)$



c) $\begin{cases}9x^2-4y^2=36\\ x^2+y^2=43\end{cases} \Rightarrow P_1\left(4,\,3\sqrt{3}\right),\ P_2\left(4,\,-3\sqrt{3}\right),\ P_3\left(-4,\,3\sqrt{3}\right),\ P_4\left(-4,\,-3\sqrt{3}\right)$



d) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{64}=1\\ y^2-36x+144=0\end{cases} \Rightarrow P_1(4,\,0),\ P_2(5,\,6),\ P_3(5,\,-6)$



72. ¿Para qué valores del parámetro *k* la ecuación $\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{16-k}=1$ representa una elipse? Comprueba que todas esas elipses tienen los mismos focos.

La ecuación representa un elipse si $\begin{cases}25-k>0\\ 16-k>0\end{cases} \Rightarrow k<16$.

En este caso tendríamos $a^2=25-k$ y $b^2=16-k$, con lo que $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9}=3$ y los focos son $F(3,\,0)$ y $F'(-3\,,\,0)$.

73. Se considera una varilla $\overline{AB}$ de longitud 1. El extremo *A* de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación: $x^2+y^2-4x-2y+1=0$; manteniéndose la varilla tangente a la circunferencia en todo momento.

a) Determina el lugar geométrico descrito por el extremo *B* de la varilla.

b) Obtén la ecuación de dicho lugar geométrico.

a) La circunferencia tiene centro *C*(2, 1) y radio $r=2$. Observemos que *CAB* es un triángulo rectángulo en *A*, por lo que la distancia entre *C* y *B* se mantiene constante e igual a $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, de este modo, el punto *B* describe una circunferencia de centro *C* y radio $\sqrt{5}$.

b) $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

74. Sean *A*(1, 1) y *B*(–1, 1) dos puntos del plano.

a) Determina las ecuaciones de todas las circunferencias que pasan por A y B razonando dónde están sus centros.

b) De entre las circunferencias del apartado anterior hallar:

I) El centro y el radio de la que es tangente a la recta $y=x$.

II) Los centros de las que tienen por radio 5.

a) Los centros de las circunferencias deben pertenecer a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ ya que los puntos de esta recta equidistan de *A* y *B*. Como la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es el eje ordenadas, los centros de las circunferencias son de la forma *C*(0, *c*) y, por tanto, el radio correspondiente es $r=\sqrt{1+(1-c)^2}$.

De este modo, las ecuaciones de las circunferencias que pasan por *A* y *B* son de la forma $x^2+(y-c)^2=1+(1-c)^2 \Rightarrow x^2+y^2-2yc+2c-2=0$.

b) I) El punto *A* pertenece a la circunferencia y a la tangente, por tanto debe ser el punto de tangencia. Así:

$$d(C,\ y=x)=r \Rightarrow \frac{|c|}{\sqrt{2}}=\sqrt{1+(1-c)^2} \Rightarrow \frac{c^2}{2}=1+(1-c)^2 \Rightarrow c^2-4c+4=0 \Rightarrow c=2$$

Por tanto, el centro y el radio de la circunferencia buscada son, respectivamente, *C*(0, 2) y $r=\sqrt{2}$.

II) $$r=\sqrt{1+(1-c)^2}=5 \Rightarrow (1-c)^2=24 \Rightarrow \begin{cases} c_1=1+\sqrt{24}=1+2\sqrt{6} \Rightarrow C_1\left(0,\ 1+2\sqrt{6}\right) \\ c_2=1-\sqrt{24}=1-2\sqrt{6} \Rightarrow C_2\left(0,\ 1-2\sqrt{6}\right) \end{cases}$$

CUESTIONES

75. Indica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) La excentricidad de una circunferencia es 0.

b) Una circunferencia es una elipse en la que los dos semiejes miden igual.

c) Si $a<b$, la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ representa una elipse cuyo eje mayor está contenido en el eje *Y*.

d) La ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ representa una hipérbola cuyo eje real está contenido en el eje *Y*.

a) Verdadero, $e=\frac{c}{a}=\frac{0}{r}=0$.

b) Verdadero, $a=b=r$.

c) Verdadero.

d) Verdadero, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.

76. Indica para qué valores de *a* la ecuación $y^2 + ay + x = 0$ representa una parábola.

$y^2 + ay + x = 0 \Rightarrow \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = -\left(x - \frac{a^2}{4}\right)$. Para cualquier valor real de a la ecuación representa una parábola abierta hacia la izquierda de vértice $V\left(\frac{a^2}{4}, -\frac{a}{2}\right)$ y directriz $x = \frac{a^2+1}{4}$.

77. Indica los puntos del plano desde los que se puede trazar al menos una tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

Se puede trazar al menos una tangente desde cualquier punto que no sea interior a la circunferencia.

PROBLEMAS

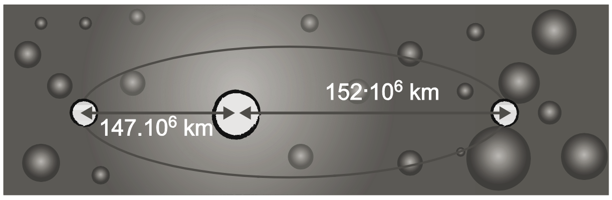
78. La máxima distancia que separa a la Tierra de la Luna es de 63 veces el radio terrestre. La excentricidad de la elipse de la órbita es muy baja, aproximadamente, *e* = 0,0678.

Calcula la distancia mínima, en kilómetros, que puede separar a la Tierra de la Luna. Considera que el radio terrestre mide aproximadamente 6357 km.

La distancia máxima y mínima de entre la Luna y la Tierra es, respectivamente, $a + c$ y $a - c$. Por tanto:

$$\begin{cases} a + c = 63 \cdot 6357 = 400\,491 \\ \frac{c}{a} = 0{,}0678 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 375\,062 \\ c = 25\,429 \end{cases} \Rightarrow a - c = 349\,633 \text{ km}.$$

79. La Tierra gira alrededor del Sol describiendo una elipse en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. El punto en el que la distancia entre la Tierra y el Sol es máxima se denomina afelio, y el punto donde es mínima, perihelio.



Con los datos de la figura, calcula la excentricidad de la órbita de la Tierra e interprétala.

$$\begin{cases} a + c = 152 \cdot 10^6 \\ a - c = 147 \cdot 10^6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 149{,}5 \cdot 10^6 \\ c = 2{,}5 \cdot 10^6 \end{cases} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = 0{,}0167.$$

La órbita es una elipse muy poco achatada, es casi una circunferencia.

80. Halla la longitud de una circunferencia que pasa por el origen de coordenadas y por el punto (2, 4) y tiene su centro en la recta determinada por los puntos (7, 2) y (3, –2).

El centro *C* de la circunferencia debe ser la intersección de la recta determinada por (7, 2) y (3, –2) y la mediatriz del segmento de extremos *O*(0, 0) y el punto (2, 4).

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(5,\ 0),\ r = \sqrt{(2-5)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Por tanto, la longitud de la circunferencia es $2\pi r = 10\pi$ u.

81. Calcula las ecuaciones de las circunferencias circunscrita e inscrita al triángulo de vértices *A*(0, 1), *B*(3, –3) y *C*(4, 4).

<u>Circunferencia circunscrita</u>:

Observemos que se trata de un triángulo isósceles y rectángulo en *A*.

Por tanto, el circuncentro estará situado en el punto medio de la hipotenusa *BC*, $T\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Así, la ecuación de la circunferencia circunscrita es $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$.

<u>Circunferencia inscrita</u>:

Bisectriz del ángulo *A*: $AT: \frac{x}{7}=\frac{y-1}{-1} \Rightarrow x+7y=7$

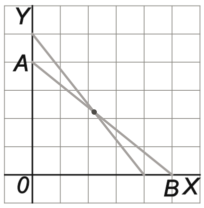
Bisectriz del ángulo *C*: $\frac{3x-4y+4}{5}=-\frac{7x-y-24}{5\sqrt{2}} \Rightarrow (3\sqrt{2}+7)x-(4\sqrt{2}+1)y+4\sqrt{2}-24=0$

Incentro: $\begin{cases} x+7y=7 \\ (3\sqrt{2}+7)-(4\sqrt{2}+1)y+4\sqrt{2}-24=0 \end{cases} \Rightarrow I\left(7-\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Radio: $5-\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Ecuación: $\left(x-7+\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(5-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$

82. Un segmento *AB* de longitud 5 unidades se desliza de forma que el extremo *A* siempre está sobre el eje de ordenadas, y el extremo *B*, sobre el de abscisas.



a) Determina el lugar geométrico que describe el centro del segmento a lo largo de su deslizamiento.

b) Calcula el lugar geométrico que describe el punto del segmento que dista 2 unidades de *A* y 3 de *B*.

Sean *A*(0, *a*) y *B*(*b*, 0), de forma que $a^2+b^2=25$, y sea *X*(*x*, *y*) un punto genérico del lugar geométrico pedido.

a) $\begin{cases} x=\frac{a}{2} \\ y=\frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2x \\ b=2y \end{cases} \Rightarrow 4x^2+4y^2=25$. Circunferencia de centro el origen y radio $\frac{5}{2}$.

b) $\begin{cases} x=\frac{2b}{5} \\ y=\frac{3a}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{5x}{2} \\ a=\frac{5y}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{25y^2}{9}+\frac{25x^2}{4}=25 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. Elipse de centro el origen, $a=3$, $b=2$ y eje mayor situado en el eje de ordenadas.

83. Cuando se chuta un balón, la trayectoria que describe el mismo es una parábola que depende del ángulo con el que se golpea el balón y de la velocidad inicial con que se lanza el mismo.

Un jugador *A* ha golpeado un balón hacia su compañero *B* y ha conseguido las siguientes distancias.

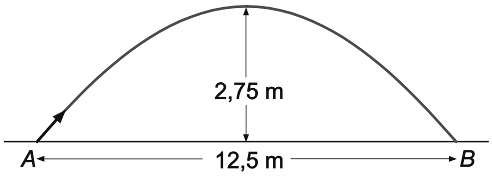
- **Altura máxima alcanzada por el balón: 2,75 m.**
- **Distancia hasta el punto donde el balón ha botado: 12,5 m.**

Con estos datos:

a) Escribe la ecuación de la trayectoria tomando una referencia adecuada.

b) Indica las coordenadas del foco y del vértice, y la ecuación de la directriz.

c) Si el jugador *B* se encuentra a 5 m del *A*, ¿a qué altura pasa el balón por su vertical?



a) Tomando como origen el punto *A* la ecuación es de la forma $(x-6,25)^2=-2p(y-2,75)$.

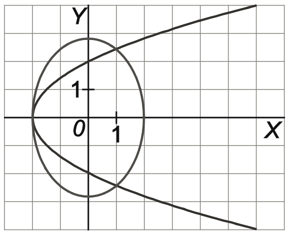
Como debe pasar por el origen, tenemos: $6,25^2=2p\cdot 2,75 \Rightarrow p=7,1 \Rightarrow (x-6,25)^2=-14,2(y-2,75)$

b) Vértice: *V*(6,25; 2,75) Foco: *F*(6,25; –0,8) Directriz: $y=6,3$

c) $x=5 \Rightarrow (5-6,25)^2=-14,2(y-2,75) \Rightarrow y=2,64$ m

PARA PROFUNDIZAR

84. Halla las longitudes de las cuerdas comunes a la parábola $y^2=2x+4$ y la elipse $2x^2+y^2=8$.

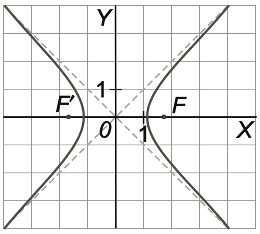


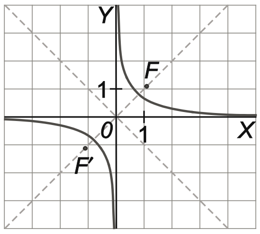
$$\begin{cases} y^2=2x+4 \\ 2x^2+y^2=8 \end{cases} \Rightarrow 2x^2+2x+4=8 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1,\ y=\pm\sqrt{6} \\ x=-2,\ y=0 \end{cases}$$

Los puntos comunes de las cónicas son: $A\left(1,\sqrt{6}\right)$, $B\left(1,-\sqrt{6}\right)$ y $C(-2,0)$.

Las longitudes de las cuerdas serán, por tanto: $d(A,B)=2\sqrt{6}$ u, $d(A,C)=\sqrt{15}$ u y $d(B,C)=\sqrt{15}$ u.

85. Al girar una hipérbola equilátera, $x^2 - y^2 = a^2$, 45º según lo mostrado en las siguientes figuras, las asíntotas de la hipérbola coinciden con los ejes de coordenadas. Demuestra, utilizando las nuevas coordenadas de los focos y la definición de hipérbola como lugar geométrico, que, respecto de estos nuevos ejes, la ecuación de la hipérbola se escribe en la forma $xy = \frac{a^2}{2}$.





Como $c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$, las coordenadas de los nuevos focos serán $F(a, a)$ y $F'(-a, -a)$.

Por la definición de hipérbola:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} - \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} = 2a + \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} \Rightarrow$$

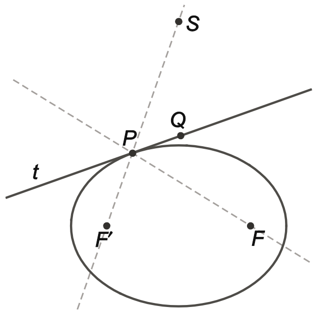
$$x^2 + y^2 - 2xa - 2ya + 2a^2 = 4a^2 + x^2 + y^2 + 2xa + 2ya + 2a^2 + 4a\sqrt{x^2 + y^2 + 2xa + 2ya + 2a^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2xa + 2ya + 2a^2} = -x - y - a \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xa + 2ya + 2a^2 = x^2 + y^2 + a^2 + 2xy + 2ax + 2ay \Rightarrow$$

$$2xy = a^2 \Rightarrow xy = \frac{a^2}{2}.$$

86. Demuestra que la bisectriz exterior de los radios vectores de un punto de una elipse es la tangente a la misma en ese punto y calcula la tangente a $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ en el punto $P\left(3, \frac{16}{5}\right)$.

Consideremos la elipse de la figura, sea P uno de sus puntos y t la bisectriz exterior de los radio vectores PF y PF'.



Comprobemos que P es el único punto de intersección de t con la elipse, lo que probará que t es la tangente a la elipse por P. Para ello, consideremos S punto simétrico de F respecto a t y Q cualquier otro punto de t, entonces:

$$d(Q, F) + d(Q, F') = d(Q, S) + d(Q, F') > d(S, F') = d(P, S) + d(P, F') =$$

$$= d(P, F) + d(P, F') = 2a \Rightarrow Q \text{ no pertenece a la elipse.}$$

Para calcular la tangente a $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ en el punto P observemos en primer lugar que, efectivamente, P es un punto de la elipse, ya que verifica la ecuación.

Los focos de la elipse son $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$, por tanto:

Recta PF: $\frac{x-3}{0} = \frac{y}{\frac{16}{5}} \Rightarrow x = 3$ Recta PF': $\frac{x+3}{6} = \frac{y}{\frac{16}{5}} \Rightarrow 8x - 15y + 24 = 0$

Bisectriz exterior (tangente a la elipse en P): Debe tener pendiente negativa, así,

$$x - 3 = \frac{8x - 15y + 24}{\sqrt{8^2 + 15^2}} \Rightarrow 17x - 51 = 8x - 15y + 24 \Rightarrow 9x + 15y - 75 = 0 \Rightarrow 3x + 5y - 25 = 0$$

87. De forma semejante a lo que ocurre en la elipse, la tangente a una hipérbola en uno de sus puntos es una de las dos bisectrices de sus radios vectores. Calcula la ecuación de la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ en el punto $P\left(5, \frac{9}{4}\right)$. Calcula también la recta normal a la curva en ese punto.

Observemos que P pertenece a la hipérbola, ya que cumple su ecuación.

Los focos son $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$, por tanto:

Recta PF: $\frac{x-5}{0}=\frac{y}{\frac{9}{4}} \Rightarrow x=5$ Recta PF': $\frac{x+5}{10}=\frac{y}{\frac{9}{4}} \Rightarrow \overline{FP} \equiv 9x-40y+45=0$

La bisectriz adecuada es, en este caso, la que tiene pendiente positiva:

$$x-5=-\frac{9x-40y+45}{\sqrt{9^2+40^2}} \Rightarrow 41x-205=-9x+40y-45 \Rightarrow 5x-4y-16=0$$

La recta normal será la otra bisectriz de los radios vectores en ese punto:

$$x-5=\frac{9x-40y+45}{\sqrt{9^2+40^2}} \Rightarrow 41x-205=9x-40y+45 \Rightarrow 16x+20y-125=0$$

88. Los tres tipos de cónicas se pueden definir todos a la vez de la siguiente manera: “Una cónica es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente de distancias a un punto fijo llamado foco y a una recta fija llamada directriz es constante”.

- **Si la constante es menor que la unidad, la cónica es una elipse.**
- **Si la constante es igual a la unidad, la cónica es una parábola.**
- **Si la constante es mayor que la unidad, la cónica es una hipérbola.**

Comprueba lo anterior hallando:

a) El lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente de distancias al punto $F(3, 0)$ y a la recta $x=\frac{25}{3}$ es 0,6.

b) El lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente de distancias al punto $F(5, 0)$ y a la recta $x=\frac{16}{5}$ es 1,25.

a) $\frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\left|x-\frac{25}{3}\right|}=\frac{3}{5} \Rightarrow \left(5\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right)^2=(3x-25)^2 \Rightarrow 25\left(x^2-6x+9+y^2\right)=9x^2-150x+625 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16x^2+25y^2=400 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Ecuación de una elipse.

b) $\frac{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}{\left|x-\frac{16}{5}\right|}=\frac{5}{4} \Rightarrow \left(4\sqrt{(x-5)^2+y^2}\right)^2=(5x-16)^2 \Rightarrow 16\left(x^2-10x+25+y^2\right)=25x^2-160x+256 \Rightarrow$

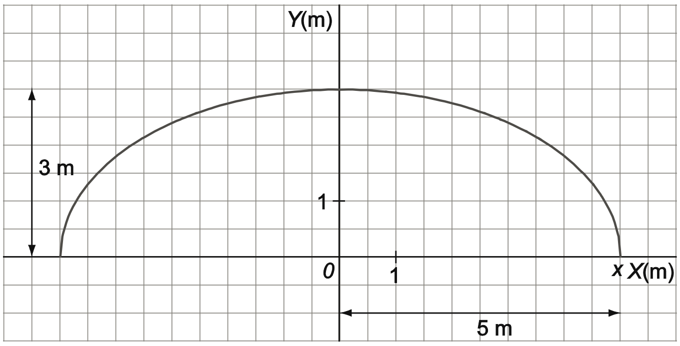
$\Rightarrow 9x^2-16y^2=144 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Ecuación de una hipérbola.

ENTORNO MATEMÁTICO

El lugar adecuado para un cotilla

Elena y Eloísa están en el metro conversando animadamente mientras llega el tren. El techo de la estación tiene forma elíptica tal y como muestra el dibujo y las amigas están, curiosamente, colocadas justo en uno de los focos (*F*) de la sección elíptica.

Luis, un amigo de ellas un poco cotilla, quiere enterarse de la conversación y como este curso está estudiando las secciones cónicas en la clase de matemáticas, sabe que para escuchar bien lo que dicen debe colocarse en el otro foco (*F'*), de la elipse.



a) Suponiendo las distancias y el sistema de referencia que se indican en el dibujo, escribe la ecuación de la sección elíptica. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos donde se encuentran Eloísa, Elena y Luis?

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto $\left(4, \frac{9}{5}\right)$, sabiendo que coincide con una de las bisectrices de los radios vectores de la elipse que pasan por ese punto.

c) Comprueba que los ángulos que forman los radios vectores del punto anterior con la tangente hallada son iguales.

a) Ecuación: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ Focos: $F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$

b) Los radio vectores son $PF: x=4$ y $PF': \frac{x+4}{8}=\frac{y}{9/5} \Rightarrow 9x-40y+36=0$.

Las bisectrices de los radios vectores son $\frac{9x-40y+36}{41}=\pm(x-4)$. Como la pendiente debe ser negativa, la bisectriz que nos interesa es $9x-40y+36=41(x-4) \Rightarrow 4x+5y-25=0$.

c) Ángulo formado por *PF* y la tangente: $\cos\alpha_1=\frac{|4|}{\sqrt{1}\sqrt{16+25}}=\frac{4}{\sqrt{41}} \Rightarrow \alpha_1=51{,}34°$

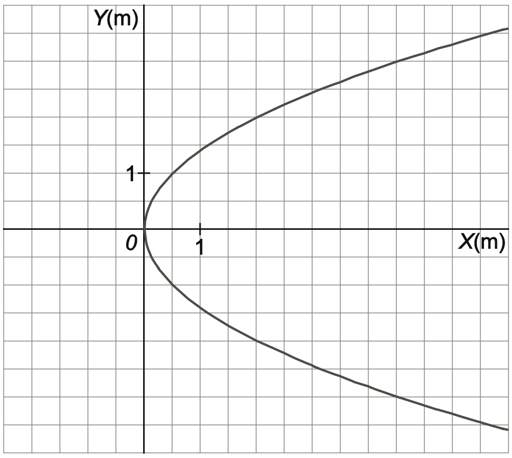
Ángulo formado por *PF'* y la tangente: $\cos\alpha_2=\frac{|9\cdot 4-40\cdot 5|}{\sqrt{81+1600}\sqrt{16+25}}=\frac{164}{41\sqrt{41}}=\frac{4}{\sqrt{41}} \Rightarrow \alpha_2=51{,}34°$

Los faros de los coches

Las secciones de los faros de los coches tienen forma parabólica ya que estas cónicas gozan de la propiedad de que todos los rayos rebotados de rayos que parten de su foco, salen en dirección siempre paralela al eje de la curva.

En la gráfica inferior aparece la sección de un faro de un coche con forma parabólica $y^2 = 2x$. La bombilla está situada en el foco *F* y emite rayos en todas las direcciones.

Comprueba que la dirección de cualquier rayo rebotado es paralela al eje de la parábola. Para ello:



a) Calcula las coordenadas del foco.

b) Considera, por ejemplo, el punto *S*(2, 2) de la parábola y halla la tangente a la elipse en dicho punto. Utiliza el hecho de que la tangente y la parábola tienen un único punto en común.

c) Comprueba que son iguales los ángulos que forma la tangente con la recta *FS* y la $y = 2$.

d) Con la ayuda de un programa de geometría dinámica comprueba que esta propiedad se verifica para todos los puntos de la parábola. ¿Te parece conveniente que las secciones de los faros de los coches tengan forma parabólica?

a) $F\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

b) La tangente en *S*(2, 2) será de la forma $y - 2 = m(x - 2)$ con $m \neq 0$. El sistema formado por las ecuaciones de la tangente y de la parábola debe tener solución única, así:

$$\begin{cases} y - 2 = m(x-2) \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow m^2(x^2 - 4x + 4) + 4m(x-2) + 4 = 2x \Rightarrow m^2x^2 - (4m^2 - 4m + 2)x + (4m^2 - 8m + 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (4m^2 - 4m + 2)^2 - 4m^2(4m^2 - 8m + 4) = 0 \Rightarrow 16m^2 - 16m + 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y - 2 = \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow x - 2y + 2 = 0$.

c) *FS*: $\dfrac{x-2}{\frac{3}{2}} = \dfrac{y-2}{2} \Rightarrow 4x - 3y - 2 = 0$

Ángulo formado por la tangente y *FS*: $\cos\alpha_1 = \dfrac{|4+6|}{\sqrt{1+4}\sqrt{16+9}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha_1 = 26{,}57°$

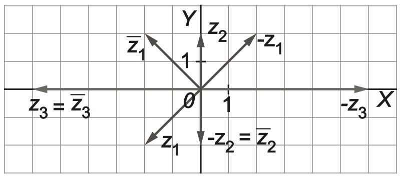
Ángulo formado por la tangente y la recta $y = 2$: $\cos\alpha_2 = \dfrac{|-2|}{\sqrt{1+4}\sqrt{1}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha_2 = 26{,}57°$

7 Números complejos

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Representa gráficamente los números $z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = 2i$ y $z_3 = -6$. Halla su módulo y su argumento. Haz lo mismo con sus respectivos conjugados y opuestos.



$|z_1| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $\qquad$ $\text{tg}\,\alpha_1 = \dfrac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow \text{Arg}\,z_1 = \alpha_1 = 225^\circ$

$|z_2| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$ $\qquad$ $\text{Arg}\,z_2 = 90^\circ$

$|z_3| = \sqrt{(-6)^2 + 0^2} = 6$ $\qquad$ $\text{Arg}\,z_3 = 180^\circ$

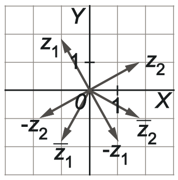
$|\overline{z_1}| = |-z_1| = |z_1| = 2\sqrt{2}$ $\qquad$ $|\overline{z_2}| = |-z_2| = |z_2| = 2$ $\qquad$ $|\overline{z_3}| = |-z_3| = |z_3| = 6$

$\text{Arg}\,\overline{z_1} = 360^\circ - \text{Arg}\,z_1 = 135^\circ$ $\qquad$ $\text{Arg}\,\overline{z_2} = 360^\circ - \text{Arg}\,z_2 = 270^\circ$ $\qquad$ $\text{Arg}\,\overline{z_3} = 360^\circ - \text{Arg}\,z_3 = 180^\circ$

$\text{Arg}(-z_1) = \text{Arg}\,z_1 - 180^\circ = 45^\circ$ $\qquad$ $\text{Arg}(-z_2) = \text{Arg}\,z_2 + 180^\circ = 270^\circ$ $\qquad$ $\text{Arg}(-z_3) = \text{Arg}\,z_3 - 180^\circ = 0^\circ$

3. Dados $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ y $z_2 = \sqrt{3} + i$, represéntalos gráficamente y halla su módulo y su argumento. Haz lo mismo con sus respectivos conjugados y opuestos.

$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$ $\qquad$ $\text{tg}\,\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \text{Arg}\,z_1 = \alpha_1 = 120^\circ$



$|z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$ $\qquad$ $\text{tg}\,\alpha_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{Arg}\,z_2 = \alpha_2 = 30^\circ$

$|\overline{z_1}| = |-z_1| = |z_1| = 2$ $\qquad$ $|\overline{z_2}| = |-z_2| = |z_2| = 2$

$\text{Arg}\,\overline{z_1} = 360^\circ - \text{Arg}\,z_1 = 240^\circ$ $\qquad$ $\text{Arg}\,\overline{z_2} = 360^\circ - \text{Arg}\,z_2 = 330^\circ$

$\text{Arg}(-z_1) = \text{Arg}\,z_1 + 180^\circ = 300^\circ$ $\qquad$ $\text{Arg}(-z_2) = \text{Arg}\,z_2 + 180^\circ = 210^\circ$

4. Ejercicio resuelto.

5. Si $z_1 = -1+\sqrt{3}i$ y $z_2 = \sqrt{3}+i$, halla el módulo y el argumento de los números:

a) $z_1 z_2$ **b)** z_1^2 **c)** $\dfrac{z_1}{z_2}$ **d)** z_2^{-1}

a) $z_1 z_2 = \left(-1+\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3}+i\right) = -\sqrt{3} - i + 3i + \sqrt{3}i^2 = -2\sqrt{3} + 2i$

$|z_1 z_2| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = 4$ $\quad \text{tg}\,\alpha = \dfrac{2}{-2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{Arg}\left(z_1 z_2\right) = \alpha = 150°$

b) $z_1^2 = \left(-1+\sqrt{3}i\right)^2 = 1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$

$\left|z_1^2\right| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = 4$ $\quad \text{tg}\,\alpha = \dfrac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{Arg}\left(z_1^2\right) = 240°$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)} = \dfrac{-\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}i^2}{3+1} = \dfrac{4i}{4} = i$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$ $\quad \text{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = 90°$

d) $z_2^{-1} = \dfrac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{4}i$

$\left|z_2^{-1}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{1}{2}$ $\quad \text{tg}\,\alpha = \dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{Arg}\left(z_2^{-1}\right) = \alpha = 330°$

6. Determina qué número real a sitúa el afijo del complejo $(2+i)(a-i)$ en la bisectriz del primer y tercer cuadrante. ¿Cuáles son su módulo y su argumento?

$(2+i)(a-i) = 2a - 2i + ai - i^2 = (2a+1) + (a-2)i$. Para que el afijo esté en la bisectriz del primer y tercer cuadrante, la parte real e imaginaria deben coincidir, por tanto, $2a+1 = a-2 \Rightarrow a = -3$.

El número complejo resulta ser $-5-5i$, de módulo $\sqrt{(-5)^2+(-5)^2} = 5\sqrt{2}$ y argumento $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{-5}{-5} = 1 \Rightarrow \alpha = 225°$.

7. Demuestra las propiedades 2, 4 y 6 de las operaciones con complejos conjugados.

Las demostraciones son directas sin más que escribir los complejos y sus conjugados en forma binómica y operar:

Propiedad 2: $z - \overline{z} = 2i\,\text{Im}\,z$

$z - \overline{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi = 2i\,\text{Im}\,z$

Propiedad 4: $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$\overline{z_1 - z_2} = \overline{(a+bi)-(c+di)} = \overline{(a-c)+(b-d)i} = (a-c)-(b-d)i = (a-bi)-(c-di) = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

Propiedad 6: $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}};\ z_2 \neq 0$

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}\right)} = \overline{\left(\dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1\overline{z_2}}}{|z_2|^2} = \dfrac{\overline{z_1}z_2}{|z_2|^2} = \dfrac{\overline{z_1}z_2}{\overline{z_2}z_2} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, en donde se ha aplicado la propiedad 3 y 5.

8. Opera y escribe en forma binómica estos complejos:

a) $(1+i)(3-2i)$ **b)** $2i(3+4i)$ **c)** $\frac{1+i}{i}$ **d)** $\frac{2-3i}{4+2i}$ **e)** $\frac{2}{1+i}-\frac{3}{1-i}$ **f)** $\frac{1}{4+3i}\cdot\frac{1+i}{i}$

a) $(1+i)(3-2i)=3-2i+3i-2i^2=5+i$

b) $2i(3+4i)=6i+8i^2=-8+6i$

c) $\frac{1+i}{i}=\frac{(1+i)i}{i^2}=\frac{i+i^2}{-1}=1-i$

d) $\frac{2-3i}{4+2i}=\frac{(2-3i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}=\frac{8-4i-12i+6i^2}{16+4}=\frac{2-16i}{20}=\frac{1}{10}-\frac{4}{5}i$

e) $\frac{2}{1+i}-\frac{3}{1-i}=\frac{2(1-i)-3(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-2i-3-3i}{1+1}=\frac{-1-5i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$

f) $\frac{1}{4+3i}\cdot\frac{1+i}{i}=\frac{1+i}{-3+4i}=\frac{(1+i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}=\frac{-3-4i-3i-4i^2}{9+16}=\frac{1-7i}{25}=\frac{1}{25}-\frac{7}{25}i$

9. Calcula *a* para que $\frac{a+2i}{5+12i}$ sea imaginario puro.

$$\frac{a+2i}{5+12i}=\frac{(a+2i)(5-12i)}{(5+12i)(5-12i)}=\frac{5a-12ai+10i-24i^2}{25+144}=\frac{24+5a}{169}+\frac{10-12a}{169}i\Rightarrow\frac{24+5a}{169}=0\Rightarrow a=-\frac{24}{5}$$

10. Escribe en forma binómica $1+i+i^2+i^3+...+i^{100}$.

$$1+i+i^2+i^3+...+i^{100}=\frac{i^{101}-1}{i-1}=\frac{i^{4\cdot25+1}-1}{i-1}=\frac{i-1}{i-1}=1$$

11 a 13. Ejercicios resueltos.

14. Utilizando la forma polar, prueba que el inverso del complejo *z* es $z^{-1}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Si $z=r_\alpha$, tenemos $\frac{\overline{z}}{|z|^2}=\frac{r_{-\alpha}}{r^2_{0^\circ}}=\left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha-0^\circ}=\left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}$ y $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1_{0^\circ}}{r_\alpha}=\left(\frac{1}{r}\right)_{0^\circ-\alpha}=\left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}$, por tanto, z^{-1} y $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ coinciden.

15. Expresa en las tres formas habituales los complejos:

a) $(1+i)^2$ **b)** $\frac{1}{i}$ **c)** i^7+i^{17} **d)** $\frac{1}{2}(1+i)\left(1+i^{-4}\right)$

a) $(1+i)^2=1+i^2+2i=2i=2_{90^\circ}=2(\cos 90^\circ+i\,\text{sen}\,90^\circ)$

b) $\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i=1_{270^\circ}=1(\cos 270^\circ+i\,\text{sen}\,270^\circ)$

c) $i^7+i^{17}=i^3+i^1=-i+i=0$, no tiene forma polar ni trigonométrica.

d) $1+i^{-4}=1+\frac{1}{i^4}=1+\frac{1}{1}=2\Rightarrow\frac{1}{2}(1+i)\left(1+i^{-4}\right)=1+i=\sqrt{2}_{45^\circ}=\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\,\text{sen}\,45^\circ)$

16. Resuelve las operaciones indicadas para los complejos: $z_1 = 2_{60°}$, $z_2 = -1+i$ y $z_3 = 2(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$.

a) $z_1 z_2 z_3$ b) $\dfrac{z_1 \overline{z_2}}{z_3}$ c) $z_3^{\,4}$ d) $z_2^{\,-2}$

$z_1 = 2_{60°}$, $z_2 = -1+i = \sqrt{2}_{135°}$ y $z_3 = 2(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°) = 2_{210°}$

a) $z_1 z_2 z_3 = 2_{60°} \cdot \sqrt{2}_{135°} \cdot 2_{210°} = \left(4\sqrt{2}\right)_{405°} = \left(4\sqrt{2}\right)_{45°} = 4\sqrt{2}(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°) = 4\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i\right) = 4 + 4i$

b) $\dfrac{z_1 \overline{z_2}}{z_3} = \dfrac{2_{60°} \cdot \sqrt{2}_{-135°}}{2_{210°}} = \sqrt{2}_{-285°} = \sqrt{2}_{75°} = \sqrt{2}(\cos 75° + \operatorname{sen} 75°) = \sqrt{2}\left[\cos(45° + 30°) + i \operatorname{sen}(45° + 30°)\right] =$

$= \sqrt{2}\left[(\cos 45° \cos 30° - \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30°) + i(\operatorname{sen} 45° \cos 30° + \cos 45° \operatorname{sen} 30°)\right] =$

$= \sqrt{2}\left[\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2}\right) + i\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2}\right)\right] = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} i$

c) $z_3^{\,4} = (2_{210°})^4 = 16_{840°} = 16_{120°} = 16(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) = 16\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right) = -8 + 8\sqrt{3} i$

d) $z_2^{\,2} = \left(\sqrt{2}_{135°}\right)^2 = 2_{270°} \Rightarrow z_2^{\,-2} = \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{1_{0°}}{2_{270°}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{-270°} = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{90°} = \dfrac{1}{2} i$

17. Escribe en forma polar $z = -2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$.

$z = -2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = 2(-\cos 30° - i \operatorname{sen} 30°) = 2(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°) = 2_{210°}$

También podríamos haber observado que z es el opuesto de $2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = 2_{30°}$ y, por tanto, $z = 2_{180° + 30°} = 2_{210°}$.

18. Expresa en forma polar todos los complejos z que cumplen:

a) $(2z+3)(iz+5) = 0$ c) $3\overline{z} = 1+i$ e) $\dfrac{z}{z-2i} = 1+i$

b) $2 + 3iz = 4iz + 9$ d) $(1+2i)z = 3-5i$ f) $2z + i\overline{z} = 1$

a) $(2z+3)(iz+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2z+3 = 0 \Rightarrow z = -\dfrac{3}{2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)_{180°} \\ iz+5 = 0 \Rightarrow z = -\dfrac{5}{i} = -\dfrac{5i}{i^2} = 5i = 5_{90°} \end{cases}$

b) $2 + 3iz = 4iz + 9 \Rightarrow iz = -7 \Rightarrow z = -\dfrac{7}{i} = 7i = 7_{90°}$

c) $3\overline{z} = 1+i \Rightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} i \Rightarrow z = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} i = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)_{315°}$

d) $(1+2i)z = 3-5i \Rightarrow z = \dfrac{3-5i}{1+2i} = \dfrac{(3-5i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{-7-11i}{5} = -\dfrac{7}{5} - \dfrac{11}{5} i = \left(\sqrt{\dfrac{34}{5}}\right)_{237{,}53°}$

e) $\dfrac{z}{z-2i} = 1+i \Rightarrow z = (1+i)z - 2i(1+i) \Rightarrow iz = -2+2i \Rightarrow z = \dfrac{-2+2i}{i} = 2+2i = \left(2\sqrt{2}\right)_{45°}$

f) $2z + i\overline{z} = 1 \Rightarrow 2(a+bi) + i(a-bi) = 1 \Rightarrow (2a+b) + (2b+a)i = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2a+b = 1 \\ a+2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{2}{3},\ b = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} i = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)_{333{,}43°}$

19. Halla todos los números reales x e y tales que $\frac{x+yi}{x-yi} = x - yi$. Expresa en forma polar y trigonométrica $x+yi$ y $x-yi$.

$$\frac{x+yi}{x-yi} = x - yi \Rightarrow x + yi = (x-yi)^2 = x^2 + y^2 i^2 - 2xyi = (x^2 - y^2) - 2xyi \Rightarrow \begin{cases} x = x^2 - y^2 \\ y = -2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,\ y = 0 \\ x = 1,\ y = 0 \\ x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{1}{2},\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Se obtiene, por tanto, cuatro posibilidades para $z = x + yi$ y $\overline{z} = x - yi$:

$z = \overline{z} = 0$, que no tiene forma polar ni trigonométrica.

$z = \overline{z} = 1 = 1_{0^\circ} = 1(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ)$

$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1_{120^\circ} = 1(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$ y $\overline{z} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1_{240^\circ} = 1(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$

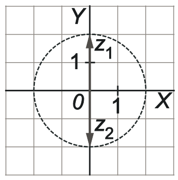
$z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1_{240^\circ} = 1(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$ y $\overline{z} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1_{120^\circ} = 1(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$

20 y 21. Ejercicios resueltos.

22. Calcula las raíces quintas de $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ expresando el resultado en forma polar.

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1_{60^\circ} \Rightarrow \sqrt[5]{1_{60^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[5]{1} = 1$ y $\beta = \frac{60^\circ + 360^\circ k}{5} = 12^\circ + 72^\circ k\ (k = 0, 1, 2, 3, 4)$, así, las raíces quintas de $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ son $z_1 = 1_{12^\circ}$, $z_2 = 1_{84^\circ}$, $z_3 = 1_{156^\circ}$, $z_4 = 1_{228^\circ}$ y $z_5 = 1_{300^\circ}$.

23. Calcula y representa gráficamente las raíces cuadradas de –4.

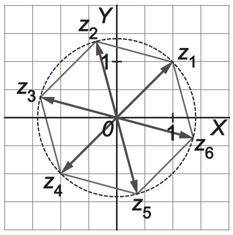


$-4 = 4_{180^\circ} \Rightarrow \sqrt{4_{180^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt{4} = 2$ y $\beta = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{2} = 90^\circ + 180^\circ k\ (k = 0, 1)$, por tanto, las raíces cuadradas de –4 son $z_1 = 2_{90^\circ} = 2i$ y $z_2 = 2_{270^\circ} = -2i$.

24. Halla los números complejos z que cumplen que: $z = \sqrt[4]{-16}$

$-16 = 16_{180^\circ} \Rightarrow \sqrt[4]{16_{180^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[4]{16} = 2$ y $\beta = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{4} = 45^\circ + 90^\circ k\ (k = 0, 1, 2, 3)$, por tanto, obtenemos cuatro soluciones: $z_1 = 2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z_2 = 2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z_3 = 2_{225^\circ} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ y $z_4 = 2_{315^\circ} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

25. Si una raíz sexta de *z* es 1 + *i*, calcula y representa gráficamente las otras cinco raíces sextas de *z*.



Tenemos $z=(1+i)^6=\left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^6=8_{270^\circ}$, por tanto, las raíces sextas de *z* son de la forma s_β con $s=\sqrt[6]{8}=\sqrt{2}$ y $\beta=\dfrac{270^\circ+360^\circ k}{6}=45^\circ+60^\circ k\ (k=0,1,2,3,4,5)$, obtenemos así las raíces sextas de *z*: $z_1=\sqrt{2}_{45^\circ}=1+i$, $z_2=\sqrt{2}_{105^\circ}$, $z_3=\sqrt{2}_{165^\circ}$, $z_4=\sqrt{2}_{225^\circ}$, $z_5=\sqrt{2}_{285^\circ}$ y $z_6=\sqrt{2}_{345^\circ}$.

Podemos resolver el problema de manera más simple recordando que si $1+i=\sqrt{2}_{45^\circ}$ es una raíz sexta de *z*, las otras cinco raíces se obtienen multiplicando $\sqrt{2}_{45^\circ}$ por 1_{60°, 1_{120°, 1_{180°, 1_{240° y 1_{300°, obteniéndose el mismo resultado que con el método anterior.

26. Un vértice de un octógono regular inscrito en una circunferencia centrada en el origen es el punto *A*(12, 5). Calcula los vértices adyacentes.

El ángulo central de un octógono regular es $\dfrac{360^\circ}{8}=45^\circ$, así, para encontrar los vértices adyacentes pedidos, basta girar el vértice *A* respecto del origen de coordenadas 45º y –45º.

Es decir, basta multiplicar $12+5i$ por $1_{45^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ y $1_{-45^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, siendo los vértices adyacentes los afijos de los números que se obtienen. De este modo:

$$(12+5i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{7\sqrt{2}}{2}+\frac{17\sqrt{2}}{2}i\Rightarrow \text{Vértice: }\left(\frac{7\sqrt{2}}{2},\frac{17\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$(12+5i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{17\sqrt{2}}{2}-\frac{7\sqrt{2}}{2}i\Rightarrow \text{Vértice: }\left(\frac{17\sqrt{2}}{2},-\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$$

27. Demuestra que si $k=cn+r$ con $r=0, 1, 2, \ldots, n-1$ entonces las razones trigonométricas del ángulo $\dfrac{\alpha+360^\circ k}{n}$ coinciden con las del $\dfrac{\alpha+360^\circ r}{n}$.

Observemos que ambos ángulos se diferencian en un múltiplo de 360º, por lo que sus razones trigonométricas coincidirán.

En efecto: $\dfrac{\alpha+360^\circ k}{n}-\dfrac{\alpha+360^\circ r}{n}=\dfrac{360^\circ(k-r)}{n}=\dfrac{360^\circ cn}{n}=360^\circ c$.

28. Ejercicio interactivo.

29 y 30. Ejercicios resueltos.

31. Resuelve las siguientes ecuaciones dando las soluciones en forma binómica.

a) $x^2+ix+1=0$ **b)** $x^2+2ix-1=0$ **c)** $x^4+x^2+1=0$ **d)** $x^3-x^2-x-2=0$

a) $x^2+ix+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-i\pm\sqrt{i^2-4}}{2}=\dfrac{-i\pm\sqrt{-5}}{2}=\dfrac{-i\pm\sqrt{5}i}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}i \\ x_2=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}i \end{cases}$

b) $x^2+2ix-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-2i\pm\sqrt{4i^2+4}}{2}=-i$

c) Haciendo el cambio $z=x^2$ tenemos $z^2+z+1=0 \Rightarrow z=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\begin{cases} z_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=1_{120^\circ} \\ z_2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=1_{240^\circ} \end{cases}$

Deshaciendo el cambio, haciendo las raíces cuadradas de z_1 y z_2, obtenemos las soluciones $x_1=1_{60^\circ}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_2=1_{240^\circ}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_3=1_{120^\circ}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ y $x_4=1_{300^\circ}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

d) Al ser una ecuación polinómica con coeficientes reales, para cada solución su conjugada también será solución, por tanto, una de las tres soluciones es un número real. Probando los divisores del término independiente obtenemos como solución $x_1=2$ y $x^3-x^2-x-2=(x-2)(x^2+x+1)$, por lo que las otras dos soluciones se obtienen resolviendo $x^2+x+1=0 \Rightarrow x_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ x_3=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

32. Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} ix-(1+i)y=3 \\ (2+i)x+iy=4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2+4y^2=-1 \\ x-2y=2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} ix-(1+i)y=3 \\ (2+i)x+iy=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i^2x-(1+i)iy=3i \\ (1+i)(2+i)x+(1+i)iy=4(1+i) \end{cases}$

Sumando las ecuaciones tenemos: $-x+(1+3i)x=3i+4+4i \Rightarrow 3ix=4+7i \Rightarrow x=\dfrac{4+7i}{3i}=\dfrac{7}{3}-\dfrac{4}{3}i$.

Sustituyendo en la segunda ecuación: $(2+i)\left(\dfrac{7}{3}-\dfrac{4}{3}i\right)+iy=4 \Rightarrow \dfrac{18}{3}-\dfrac{1}{3}i+iy=4 \Rightarrow iy=-2+\dfrac{1}{3}i \Rightarrow y=\dfrac{1}{3}+2i$.

b) $x-2y=2 \Rightarrow x=2+2y$

$(2+2y)^2+4y^2=-1 \Rightarrow 8y^2+8y+5=0 \Rightarrow y=\dfrac{-8\pm\sqrt{-96}}{16}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}i \Rightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{4}i,\ x=1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i \\ y=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{4}i,\ x=1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}i \end{cases}$

33. Factoriza completamente en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ los polinomios:

a) $P(x)=x^3-2x^2+9x-18$ **b)** $Q(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-4$

a) $P(x)=(x-2)(x^2+9)$ en $\mathbb{R}$ $P(x)=(x-2)(x+3i)(x-3i)$ en $\mathbb{C}$

b) $Q(x)=(x+2)(x-2)(x^2+x+1)$ en $\mathbb{R}$ $Q(x)=(x+2)(x-2)\left(x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ en $\mathbb{C}$

34. Determina los números reales *b* y *c* sabiendo que una raíz del polinomio $P(z)=2z^3+bz^2-4z+c$ es $1-i$.

$$P(1-i)=0\Rightarrow 2(1-i)^3+b(1-i)^2-4(1-i)+c=0\Rightarrow -4-4i+2bi-4+4i+c=0\Rightarrow \begin{cases}-8+c=0\\2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=0\\c=8\end{cases}$$

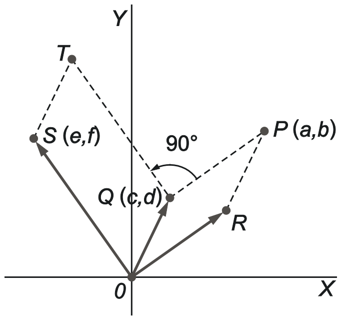
35. Ejercicio interactivo.

36 a 43. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Los números complejos

44. Sean los números complejos señalados en la figura.



a) Halla su forma binómica.

b) Calcula su módulo.

c) Determina su argumento.

d) ¿Hay algún par que sean conjugados entre sí?

Identificamos puntos y vectores con el número complejo correspondiente.

a) $P=a+bi$, $Q=c+di$ y $S=e+fi$. Observemos que R se obtiene trasladando P según el vector $-\overrightarrow{OQ}$, por tanto, $R=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$. Análogamente, T se obtiene trasladando S según el vector $\overrightarrow{OQ}$, por tanto, $T=(e+fi)+(c+di)=(e+c)+(f+d)i$

b) $|P|=\sqrt{a^2+b^2}$, $|Q|=\sqrt{c^2+d^2}$, $|R|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$, $|S|=\sqrt{e^2+f^2}$ y $|T|=\sqrt{(e+c)^2+(f+d)^2}$

c) $\text{Arg}\,P=\text{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right)$, hay que tomar la solución del primer cuadrante.

$\text{Arg}\,Q=\text{arctg}\left(\dfrac{d}{c}\right)$, hay que tomar la solución del primer cuadrante.

$\text{Arg}\,R=\text{arctg}\left(\dfrac{b-d}{a-c}\right)$, hay que tomar la solución del primer cuadrante.

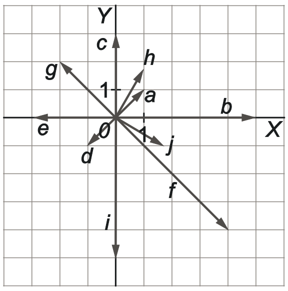
$\text{Arg}\,S=\text{arctg}\left(\dfrac{f}{e}\right)=90^\circ+\text{Arg}\,R$ $\quad$ $\text{Arg}\,T=\text{arctg}\left(\dfrac{f+d}{e+c}\right)=90^\circ+\text{Arg}\,R=\text{Arg}\,S$

e) Si hubiera algún par conjugados entre sí serían simétricos respecto del eje *X*, lo que no ocurre.

45. Representa los siguientes números complejos y, sin ningún cálculo, obtén sus argumentos.

a) $1+i$ **c)** $3i$ **e)** -3 **g)** $-2+2i$ **i)** $-5i$

b) 5 **d)** $-1-i$ **f)** $4-4i$ **h)** $1+\sqrt{3}i$ **j)** $\sqrt{3}-i$



a) $\text{Arg}(1+i)=45º$

b) $\text{Arg}(5)=0º$

c) $\text{Arg}(3i)=90º$

d) $\text{Arg}(-1-i)=225º$

e) $\text{Arg}(-3)=180º$

f) $\text{Arg}(4-4i)=315º$

g) $\text{Arg}(-2+2i)=135º$

h) $\text{Arg}\left(1+\sqrt{3}i\right)=60º$

i) $\text{Arg}(-5i)=270º$

j) $\text{Arg}\left(\sqrt{3}-i\right)=330º$

46. Sean los números complejos: $z_1=-2+i$ **,** $z_2=1+4i$ **,** $z_3=-3-2i$ **,** $z_4=-5i$ **,** $z_5=4$ **,** $z_6=2-3i$ **.**

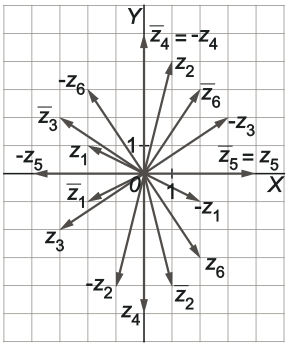
a) Represéntalos junto con sus opuestos y conjugados.

b) Halla su módulo y su argumento.

c) Determina el módulo y el argumento de sus opuestos.

d) Determina el módulo y el argumento de sus conjugados.

a)



b) $|z_1|=\sqrt{5}$, $|z_2|=\sqrt{17}$, $|z_3|=\sqrt{13}$, $|z_4|=5$, $|z_5|=4$ y $|z_6|=\sqrt{13}$

$\text{Arg}\,z_1=\text{arctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=153{,}43º$, $\text{Arg}\,z_2=\text{arctg}(4)=75{,}96º$, $\text{Arg}\,z_3=\text{arctg}\left(\dfrac{2}{3}\right)=213{,}69º$, $\text{Arg}\,z_4=270º$,

$\text{Arg}\,z_5=0º$ y $\text{Arg}\,z_6=\text{arctg}\left(-\dfrac{3}{2}\right)=303{,}69º$

c) El módulo de cada opuesto coincide con el módulo del número complejo del que es opuesto y los argumentos se diferencian en 180º:

$|-z_1|=|z_1|=\sqrt{5}$, $|-z_2|=|z_2|=\sqrt{17}$, $|-z_3|=|z_3|=\sqrt{13}$, $|-z_4|=|z_4|=5$, $|-z_5|=|z_5|=4$ y $|-z_6|=|z_6|=\sqrt{13}$

$\text{Arg}(-z_1)=\text{Arg}(z_1)+180º=333{,}43º$, $\text{Arg}(-z_2)=\text{Arg}(z_2)+180º=225{,}96º$, $\text{Arg}(-z_3)=\text{Arg}(z_3)-180º=33{,}69º$

$\text{Arg}(-z_4)=\text{Arg}(z_4)-180º=90º$, $\text{Arg}(-z_5)=\text{Arg}(z_5)+180º=180º$ y $\text{Arg}(-z_6)=\text{Arg}(z_6)-180º=123{,}69º$

d) El módulo de cada conjugado coincide con el módulo del número complejo del que es conjugado y los argumentos suman 360º:

$\left|\overline{z_1}\right|=|z_1|=\sqrt{5}$, $\left|\overline{z_2}\right|=|z_2|=\sqrt{17}$, $\left|\overline{z_3}\right|=|z_3|=\sqrt{13}$, $\left|\overline{z_4}\right|=|z_4|=5$, $\left|\overline{z_5}\right|=|z_5|=4$ y $\left|\overline{z_6}\right|=|z_6|=\sqrt{13}$

$\text{Arg}\left(\overline{z_1}\right)=360º-\text{Arg}(z_1)=206{,}57º$, $\text{Arg}\left(\overline{z_2}\right)=360º-\text{Arg}(z_2)=314{,}04º$, $\text{Arg}\left(\overline{z_3}\right)=360-\text{Arg}(z_3)=146{,}31º$,

$\text{Arg}\left(\overline{z_4}\right)=360º-\text{Arg}(z_4)=90º$, $\text{Arg}\left(\overline{z_5}\right)=360º-\text{Arg}(z_5)=360º=0º$ y $\text{Arg}\left(\overline{z_6}\right)=360º-\text{Arg}(z_6)=56{,}31º$

47. Escribe en la forma $a+bi$, con a y b reales, los siguientes números complejos:

a) $z = 12-3i-4(-5+8i)$

b) $z = \left(3+i\sqrt{5}\right)\left(3-i\sqrt{5}\right)$

c) $z = (4+3i)^2$

d) $z = (2+i)^2(1-2i)$

e) $z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

f) $z = \frac{5+15i}{1+2i}$

g) $z = \frac{3-6i}{3+i}+\frac{4}{3-4i}$

h) $z = \frac{1-2i}{5+3i}+\left(\frac{3}{1-i}\right)^2$

i) $z = \left(\frac{4-6i}{2-3i}\right)\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right)$

a) $z = 12-3i-4(-5+8i) = 12-3i+20-32i = 32-35i$

b) $z = \left(3+i\sqrt{5}\right)\left(3-i\sqrt{5}\right) = 9-5i^2 = 9+5 = 14$

c) $z = (4+3i)^2 = 16+9i^2+24i = 16-9+24i = 7+24i$

d) $z = (2+i)^2(1-2i) = \left(4+i^2+4i\right)(1-2i) = (3+4i)(1-2i) = 3-6i+4i-8i^2 = 11-2i$

e) $z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i^2+i\right) = -i$

f) $z = \frac{5+15i}{1+2i} = \frac{(5+15i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5-10i+15i-30i^2}{1+4} = \frac{35+5i}{5} = 7+i$

g) $z = \frac{3-6i}{3+i}+\frac{4}{3-4i} = \frac{(3-6i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}+\frac{4(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3-21i}{10}+\frac{12+16i}{25} = \frac{3}{10}-\frac{21}{10}i+\frac{12}{25}+\frac{16}{25}i = \frac{39}{50}-\frac{73}{50}i$

h) $z = \frac{1-2i}{5+3i}+\left(\frac{3}{1-i}\right)^2 = \frac{(1-2i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)}+\left(\frac{3(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^2 = \frac{-1-13i}{34}+\left(\frac{3+3i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{34}-\frac{13}{34}i+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}i^2+\frac{9}{2}i =$

$= -\frac{1}{34}+\frac{70}{17}i$

i) $z = \left(\frac{4-6i}{2-3i}\right)\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right) = \left(\frac{2(2-3i)}{2-3i}\right)\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right) = 2\frac{(1+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = 2\frac{9+7i}{13} = \frac{18}{13}+\frac{14}{13}i$

48. Si $z_1 = 3+2i$, $z_2 = -1+3i$ y $z_3 = 1-i$, calcula:

a) $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

b) $\mathrm{Im}\left(z_1-2z_2+\frac{1}{2}z_3\right)$

a) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{-1+3i} = \frac{(3+2i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} = \frac{3-11i}{10} = \frac{3}{10}-\frac{11}{10}i \Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{3}{10}$

b) $z_1-2z_2+\frac{1}{2}z_3 = 3+2i+2-6i+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i = \frac{11}{2}-\frac{9}{2}i \Rightarrow \mathrm{Im}\left(z_1-2z_2+\frac{1}{2}z_3\right) = -\frac{9}{2}$

49. Justifica que $(1+i)^8$ es un número real positivo.

$(1+i)^2 = 2i \Rightarrow (1+i)^8 = (2i)^4 = 16i^4 = 16$

Otra posible respuesta sería:

$\mathrm{Arg}(1+i) = 45^\circ \Rightarrow \mathrm{Arg}\left((1+i)^8\right) = 8\cdot 45^\circ = 360^\circ = 0^\circ \Rightarrow (1+i)^8$ es un número real positivo.

50. Para cada complejo $z = x + iy$, definimos el complejo $Z = z^2 - z$. Prueba que $\operatorname{Re} Z = x^2 - y^2 - x$ y que $\operatorname{Im} Z = y(2x - 1)$.

$$Z = (x+iy)^2 - (x+iy) = x^2 + i^2y^2 + 2xyi - x - iy = (x^2 - y^2 - x) + y(2x-1)i \Rightarrow \operatorname{Re} Z = x^2 - y^2 - x,\ \operatorname{Im} Z = y(2x-1)$$

51. Resuelve las ecuaciones siguientes de incógnita *z*.

a) $(1+i)z = 3 - i$

b) $2z + 1 - i = iz + 2$

c) $(2z+1-i)(z+3) = 0$

d) $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$

a) $(1+i)z = 3-i \Rightarrow z = \dfrac{3-i}{1+i} = \dfrac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{2-4i}{2} = 1-2i$

b) $2z+1-i = iz+2 \Rightarrow (2-i)z = 1+i \Rightarrow z = \dfrac{1+i}{2-i} = \dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{1+3i}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$

c) $(2z+1-i)(z+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2z+1-i = 0 \Rightarrow z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i \\ z+3 = 0 \Rightarrow z = -3 \end{cases}$

d) $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i \Rightarrow z+1 = 2iz - 2i \Rightarrow (1-2i)z = -1-2i \Rightarrow z = \dfrac{-1-2i}{1-2i} = \dfrac{(-1-2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{3-4i}{5} = \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i$

52. Considera el polinomio: $P(z) = z^3 + (-2+3i)z^2 + (13-i)z - 6 - 10i$

¿Son los números complejos *i*, 3 y $1+i$ raíces de $P(z)$?

$P(i) = i^3 + (-2+3i)i^2 + (13-i)i - 6 - 10i = -i + 2 - 3i + 13i + 1 - 6 - 10i = -3 - i \neq 0 \Rightarrow$ *i* no es raíz de *P*.

$P(3) = 3^3 + (-2+3i)\cdot 3^2 + (13-i)\cdot 3 - 6 - 10i = 27 - 18 + 27i + 39 - 3i - 6 - 10i = 42 + 14i \neq 0 \Rightarrow$ 3 no es raíz de *P*.

$P(1+i) = (1+i)^3 + (-2+3i)(1+i)^2 + (13-i)(1+i) - 6 - 10i = -2 + 2i - 4i - 6 + 14 + 12i - 6 - 10i = 0 \Rightarrow 1+i$ es raíz de *P*.

53. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones de incógnitas z_1 y z_2:

a) $\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 2 - 5i \\ z_1 - z_2 = -2 + i \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 5 + 2i \\ -z_1 + z_2 = 1 - 2i \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2iz_1 + z_2 = 2i \\ 3z_1 - iz_2 = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3z_1 + 2iz_2 = 3 + 11i \\ z_1 - (i-1)z_2 = -3 + 5i \end{cases}$

a) Sumando las ecuaciones tenemos $4z_1 = -4i \Rightarrow z_1 = -i$ y, sustituyendo, $-i - z_2 = -2 + i \Rightarrow z_2 = 2 - 2i$.

b) Restando las ecuaciones tenemos $4z_1 = 4 + 4i \Rightarrow z_1 = 1 + i$ y, sustituyendo, $-1 - i + z_2 = 1 - 2i \Rightarrow z_2 = 2 - i$.

c) Multiplicando la primera ecuación por i y sumándole la segunda ecuación tenemos $z_1 = -1$ y, sustituyendo, $-2i + z_2 = 2i \Rightarrow z_2 = 4i$.

d) Restándole a la primera ecuación el triple de la segunda tenemos

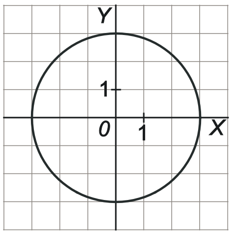
$(-3+5i)z_2 = 12 - 4i \Rightarrow z_2 = \dfrac{12-4i}{-3+5i} = \dfrac{(12-4i)(-3-5i)}{(-3+5i)(-3-5i)} = \dfrac{-56-48i}{34} = -\dfrac{28}{17} - \dfrac{24}{17}i$ y, sustituyendo,

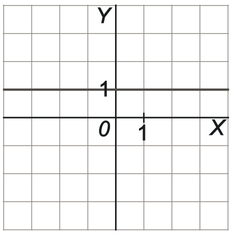
$z_1 - (i-1)\left(-\dfrac{28}{17} - \dfrac{24}{17}i\right) = -3 + 5i \Rightarrow z_1 - \dfrac{52}{17} + \dfrac{4}{17}i = -3 + 5i \Rightarrow z_1 = \dfrac{1}{17} + \dfrac{81}{17}i$.

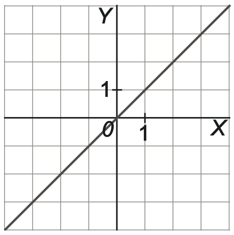
54. En cada uno de los casos siguientes, representa el conjunto de afijos de los números complejos *z* que verifican las siguientes condiciones:

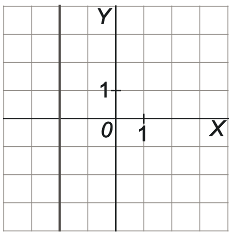
a) $|z| = 3$ **c)** $\mathrm{Im}\,z = 1$ **e)** $\mathrm{Re}\,z = \mathrm{Im}\,z$

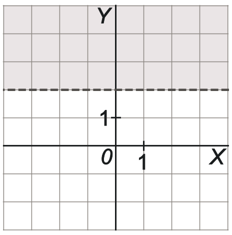
b) $\mathrm{Re}\,z = -2$ **d)** $\mathrm{Im}\,z > 2$ **f)** $\mathrm{Re}\,z < -1$

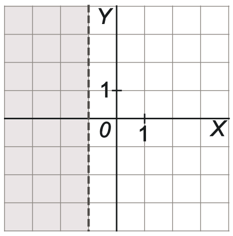
a)


c)


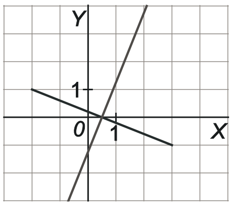
e)


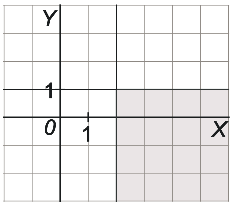
b)


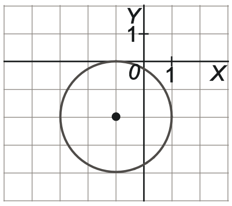
d)


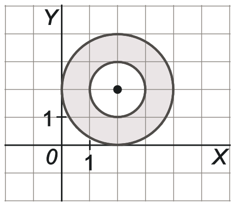
f)


55. Escribe la condición que cumplen los números complejos cuyos afijos se encuentran en la región representada en cada caso.

a)


b)


c)


d)


a) $|z-(3-i)| = |z-(-2+i)|$ **c)** $|z-(-1-2i)| = 2$

b) $\mathrm{Re}\,z \geq 2$ e $\mathrm{Im z} \leq 1$ **d)** $1 \leq |z-(2+2i)| \leq 2$

56. Escribe en función de $\overline{z}$ el conjugado de los complejos *w* siguientes.

a) $w = 2+3z$ **b)** $w = (1+iz)(1+2z)$ **c)** $w = \dfrac{1+iz}{3+z}$ **d)** $w = z^3 + 2iz^2 + 1 - 3i$

a) $\overline{w} = 2+3\overline{z}$ **b)** $\overline{w} = (1-i\overline{z})(1+2\overline{z})$ **c)** $\overline{w} = \dfrac{1-i\overline{z}}{3+\overline{z}}$ **d)** $\overline{w} = \overline{z}^3 - 2i\overline{z}^2 + 1 + 3i$

57. Sea $z = x + iy$ y $w = iz + \overline{z} - z - 2i$.

a) Comprueba que $w - \overline{w} = 2i(x-2y-2)$.

b) Demuestra que la afirmación "el afijo de *w* está sobre el eje de abscisas" es equivalente a "el afijo de *z* está en la recta $2y = x-2$".

a) $\overline{w} = -i\overline{z} + z - \overline{z} + 2i \Rightarrow w - \overline{w} = i\left(z+\overline{z}\right) + 2\left(\overline{z}-z\right) - 4i = 2i\,\mathrm{Re}\,z - 4i\,\mathrm{Im}\,z - 4i = 2i\left(\mathrm{Re}\,z - 2\mathrm{Im}\,z - 2\right) = 2i\left(x-2y-2\right)$

b) Si el afijo de *w* está sobre el eje de abscisas tenemos $w = \overline{w}$ y, por tanto, $x-2y-2=0$, es decir, el afijo de *z* está en la recta $2y = x-2$. Recíprocamente, si el afijo de *z* está en la recta $2y = x-2$ tenemos $w - \overline{w} = 0$, es decir, $w = \overline{w}$ y, por tanto, el afijo de *w* está sobre el eje de abscisas.

58. Determina todos los complejos *z* que hagan que $\dfrac{iz}{z-2}$ sea un número imaginario puro.

Si $z = a + bi$ tenemos $\dfrac{iz}{z-2} = \dfrac{-b+ai}{(a-2)+bi} = \dfrac{(-b+ai)\left((a-2)-bi\right)}{\left((a-2)+bi\right)\left((a-2)-bi\right)} = \dfrac{2b+(b^2+a^2-2a)i}{(a-2)^2+b^2}$, que será imaginario puro si y solo si $b = 0$, por tanto, los complejos *z* buscados son los números reales.

Formas polar y trigonométrica. Operaciones

59. Escribe en forma polar los complejos siguientes.

a) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

b) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

c) $z = 4 - 4i$

d) $z = -2i$

e) $z = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$

f) $z = \dfrac{4}{1-i}$

g) $z = -2\left(\cos 150^\circ + i\,\mathrm{sen}\,150^\circ\right)$

h) $z = \sqrt{2}\left(-\cos 45^\circ - i\,\mathrm{sen}\,45^\circ\right)$

i) $z = \cos 60^\circ + i\,\mathrm{sen}\,30^\circ$

j) $z = \mathrm{sen}(\alpha+\pi) + i\cos(\pi-\alpha)$

a) $|z| = \sqrt{4+12} = 4,\ \mathrm{Arg}\,z = \mathrm{arctg}\sqrt{3} = 60^\circ \Rightarrow z = 4_{60^\circ}$

b) $|z| = \sqrt{2+2} = 2,\ \mathrm{Arg}\,z = \mathrm{arctg}(-1) = 135^\circ \Rightarrow z = 2_{135^\circ}$

c) $|z| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2},\ \mathrm{Arg}\,z = \mathrm{arctg}(-1) = 315^\circ \Rightarrow z = \left(4\sqrt{2}\right)_{315^\circ}$

d) $|z| = \sqrt{0+4} = 2,\ \mathrm{Arg}\,z = 270^\circ \Rightarrow z = 2_{270^\circ}$

e) $|z| = \sqrt{\dfrac{1}{16}+\dfrac{3}{16}} = \dfrac{1}{2},\ \mathrm{Arg}\,z = \mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = 120^\circ \Rightarrow z = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{120^\circ}$

f) $z = \dfrac{4}{1-i} = \dfrac{4_{0^\circ}}{\sqrt{2}_{315^\circ}} = \left(\dfrac{4}{\sqrt{2}}\right)_{0^\circ-315^\circ} = \left(2\sqrt{2}\right)_{-315^\circ} = \left(2\sqrt{2}\right)_{45^\circ}$

g) *z* es el opuesto de 2_{150°, por tanto, $z = 2_{150^\circ+180^\circ} = 2_{330^\circ}$.

h) *z* es el opuesto de $\sqrt{2}_{45^\circ}$, por tanto, $z = \sqrt{2}_{45^\circ+180^\circ} = \sqrt{2}_{225^\circ}$.

i) $z = \cos 60^\circ + i\,\mathrm{sen}\,30^\circ = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{45^\circ}$

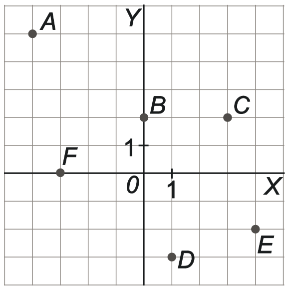
j) $z = \mathrm{sen}(\alpha+\pi) + i\cos(\pi-\alpha) = -\mathrm{sen}\alpha - i\cos\alpha = 1_\beta$, donde $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha} = \mathrm{cotg}\,\alpha$, por tanto, $\beta = 90^\circ - \alpha$ o $\beta = 270^\circ - \alpha$.

Observemos que el primer caso no es posible, ya que entonces la parte real de *z* sería $\cos(90^\circ-\alpha) = \mathrm{sen}\,\alpha$, que no coincide con $\mathrm{sen}(\alpha+\pi) = -\mathrm{sen}\alpha$ salvo que $\alpha = 0^\circ$.

Así, debe ser $z = 1_{270^\circ-\alpha}$, y, en efecto, $1_{270^\circ-\alpha} = \cos(270^\circ-\alpha) + i\,\mathrm{sen}(270^\circ-\alpha) = -\cos(90^\circ-\alpha) - i\,\mathrm{sen}(90^\circ-\alpha) =$

$-\mathrm{sen}\alpha - i\cos\alpha = z$.

60. Escribe en forma binómica, polar y trigonométrica los números complejos cuyos afijos se señalan en la figura.



$A = -4 + 5i = \sqrt{41}_{128,66^\circ} = \sqrt{41}\left(\cos 128,66^\circ + i \operatorname{sen} 128,66^\circ\right)$

$B = 2i = 2_{90^\circ} = 2\left(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ\right)$

$C = 3 + 2i = \sqrt{13}_{33,69^\circ} = \sqrt{13}\left(\cos 33,69^\circ + i \operatorname{sen} 33,69^\circ\right)$

$D = 1 - 3i = \sqrt{10}_{288,43^\circ} = \sqrt{10}\left(\cos 288,43^\circ + i \operatorname{sen} 288,43^\circ\right)$

$E = 4 - 2i = \left(2\sqrt{5}\right)_{333,43^\circ} = 2\sqrt{5}\left(\cos 333,43^\circ + i \operatorname{sen} 333,43^\circ\right)$

$F = -3 = 3_{180^\circ} = 3\left(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ\right)$

61. Escribe en forma trigonométrica el complejo: $z = \dfrac{3-7i}{2+5i}$.

$$z = \frac{3-7i}{2+5i} = \frac{(3-7i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \frac{-29-29i}{29} = -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ\right)$$

62. Dados los complejos: $z_1 = \sqrt{2}(1+i)$ y $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$.

a) Escribe z_1 y z_2 en forma trigonométrica.

b) Si $w = \dfrac{z_1}{z_2}$, escribe w en forma binómica y trigonométrica y deduce el valor exacto de cos 75º y sen 75º.

a) $z_1 = \sqrt{2}(1+i) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2\left(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ\right)$ $\quad z_2 = 1\left(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ\right)$

b) $w = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2\left(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ\right)}{1\left(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ\right)} = 2\left(\cos(-285^\circ) + i \operatorname{sen}(-285^\circ)\right) = 2\left(\cos 75^\circ + i \operatorname{sen} 75^\circ\right)$

$$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i}{1} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$$

Por tanto se deduce que $2\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ y $2\operatorname{sen} 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

63. Si $z = \sqrt{3} - i$, calcula z^2, $\left|z^2\right|$ y $|z|^2$.

$z = \sqrt{3} - i = 2_{330^\circ} \Rightarrow z^2 = 4_{660^\circ} = 4_{300^\circ}$, $\left|z^2\right| = 4$ y $|z|^2 = 2^2 = 4$

64. Si $z = \sqrt{6}+\sqrt{2}-i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, escribe en forma binómica los complejos z^2, z^6, z^9 y z^{12}.

Se escribe *z* en forma polar:

$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6+2+2\sqrt{12}+6+2-2\sqrt{12}} = \sqrt{16} = 4$, por otra parte, en el ejercicio 62 se ha probado que $\text{sen}\,75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ y $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, de donde $\text{tg}\,75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$. Así, si $\text{Arg}\,z = \alpha$, se tiene $\text{tg}\,\alpha = -\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\text{tg}\,75°} = -\text{cotg}\,75° \Rightarrow \alpha = 345°$, por tanto, $z = 4_{345°}$.

De este modo:

$$z^2 = \left(4_{345°}\right)^2 = 16_{690°} = 16_{330°} = 16\left(\cos 330° + i\,\text{sen}\,330°\right) = 16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = 8\sqrt{3}-8i$$

$$z^6 = \left(4_{345°}\right)^6 = 4096_{2070°} = 4096_{270°} = -4096i$$

$$z^9 = \left(4_{345°}\right)^9 = \left(2^{18}\right)_{3105°} = \left(2^{18}\right)_{225°} = 2^{18}\left(\cos 225° + i\,\text{sen}\,225°\right) = 2^{18}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2^{17}\sqrt{2}-2^{17}\sqrt{2}i$$

$$z^{12} = \left(z^6\right)^2 = \left(-4096i\right)^2 = \left(-2^{12}i\right)^2 = 2^{24}i^2 = -2^{24}$$

65. Calcula el siguiente número complejo: $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$.

$1+i\sqrt{3} = 2_{60°}$ y $1+i = \sqrt{2}_{45°}$, por tanto, $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \dfrac{2_{60°}}{\sqrt{2}_{45°}} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)_{15°} = \sqrt{2}_{15°}$ y $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30} = \left(\sqrt{2}_{15°}\right)^{30} = \left(2^{15}\right)_{450°} =$

$= \left(2^{15}\right)_{90°} = 2^{15}i$

66. Decide los valores del entero *n* para que el complejo $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ sea:

a) Un número real **b)** Un número real positivo **c)** Un número imaginario puro

$$\sqrt{3}+i = 2_{30°} \Rightarrow \left(\sqrt{3}+i\right)^n = \left(2_{30°}\right)^n = \left(2^n\right)_{30°n}$$

a) $30°n = 180°k \Rightarrow n = 6k$ para algún entero *k*.

b) $30°n = 360°k \Rightarrow n = 12k$ para algún entero *k*.

c) $30°n = 90° + 180°k \Rightarrow n = 3+6k$ para algún entero *k*.

67. Resuelve la siguiente ecuación: $2z-(1+i)\overline{z} = -1+5i$.

Sea $z = a+bi$:

$$2(a+bi)-(1+i)(a-bi) = -1+5i \Rightarrow 2a+2bi-a+bi-ai-b = -1+5i \Rightarrow (a-b)+(3b-a)i = -1+5i \Rightarrow \begin{cases} a-b=-1 \\ -a+3b=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=-1 \\ -a+3b=5 \end{cases} \Rightarrow a=1,\ b=2 \Rightarrow z = 1+2i$$

Otra manera de resolver la ecuación es tomar conjugados, obteniendo un sistema lineal con incógnitas z y $\overline{z}$.

68. **a)** Determina el conjunto de los afijos de los complejos z tales que $|z-1| = |\bar{z}+1|$.

b) Sea n un entero positivo. Encuentra los complejos z tales que $(z-1)^n = (\bar{z}+1)^n$.

a) Si $z = a+bi$ tenemos:

$$|z-1| = |\bar{z}+1| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2} \Rightarrow (x-1)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow x^2+1-2x = x^2+1+2x \Rightarrow x = 0$$

Por tanto, los complejos buscados son los imaginarios puros, es decir, los afijos son el eje Y.

b) Tomando módulos y usando el apartado previo deducimos que z debe ser imaginario puro, digamos $z = bi$.

Entonces $z-1 = -1+bi$ y $\bar{z}+1 = 1-bi$ son opuestos, con lo que si $\text{Arg}(z-1) = \alpha$ tendremos $\text{Arg}(\bar{z}+1) = 180^\circ + \alpha$ y, por tanto, $n\alpha = 180^\circ n + n\alpha \Rightarrow 180^\circ n = 0^\circ \Rightarrow n$ par.

En conclusión, si n es impar la ecuación no tiene solución, y si n es par, las soluciones son los complejos imaginarios puros.

Radicación de números complejos

69. **Resuelve las siguientes ecuaciones y escribe sus soluciones en forma binómica.**

a) $z^3 - i = 0$ **c)** $z^4 + 1 = 0$ **e)** $z^6 - 1 = 0$

b) $z^6 - 64 = 0$ **d)** $z^4 + 81 = 0$ **f)** $z^4 - 81 = 0$

a) $z^3 - i = 0 \Rightarrow z = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1_{90^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[3]{1} = 1$ y $\beta = \dfrac{90^\circ + 360^\circ k}{3} = 30^\circ + 120^\circ k \; (k = 0, 1, 2)$, así:

$z_1 = 1_{30^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, $z_2 = 1_{150^\circ} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ y $z_3 = 1_{270^\circ} = -i$.

b) $z^6 - 64 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64_{0^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[6]{64} = 2$ y $\beta = \dfrac{0^\circ + 360^\circ k}{6} = 60^\circ k \; (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$, así:

$z_1 = 2_{0^\circ} = 2$, $z_2 = 2_{60^\circ} = 1+\sqrt{3}i$, $z_3 = 2_{120^\circ} = -1+\sqrt{3}i$, $z_4 = 2_{180^\circ} = -2$, $z_5 = 2_{240^\circ} = -1-\sqrt{3}i$ y $z_6 = 2_{300^\circ} = 1-\sqrt{3}i$.

c) $z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1_{180^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[4]{1} = 1$ y $\beta = \dfrac{180^\circ + 360^\circ k}{4} = 45^\circ + 90^\circ k \; (k = 0, 1, 2, 3)$, obteniendo:

$z_1 = 1_{45^\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = 1_{135^\circ} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_3 = 1_{225^\circ} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ y $z_4 = 1_{315^\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

d) $z^4 + 81 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81_{180^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[4]{81} = 3$ y $\beta = \dfrac{180^\circ + 360^\circ k}{4} = 45^\circ + 90^\circ k \; (k = 0, 1, 2, 3)$, así:

$z_1 = 3_{45^\circ} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = 3_{135^\circ} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$, $z_3 = 3_{225^\circ} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$ y $z_4 = 3_{315^\circ} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$.

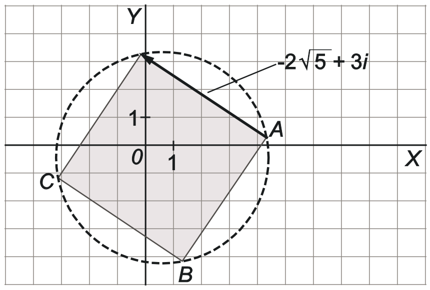
e) $z^6 - 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1_{0^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[6]{1} = 1$ y $\beta = \dfrac{0^\circ + 360^\circ k}{6} = 60^\circ k \; (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$, obteniendo:

$z_1 = 1_{0^\circ} = 1$, $z_2 = 1_{60^\circ} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = 1_{120^\circ} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4 = 1_{180^\circ} = -1$, $z_5 = 1_{240^\circ} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ y $z_6 = 1_{300^\circ} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

f) $z^4 - 81 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{81_{0^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[4]{81} = 3$ y $\beta = \dfrac{0^\circ + 360^\circ k}{4} = 90^\circ k \; (k = 0, 1, 2, 3)$, por tanto:

$z_1 = 3_{0^\circ} = 3$, $z_2 = 3_{90^\circ} = 3i$, $z_3 = 3_{180^\circ} = -3$ y $z_4 = 3_{270^\circ} = -3i$.

70. A partir de los datos de la figura, calcula de forma exacta y razonada, la forma binómica de los afijos correspondientes a los vértices del cuadrado que se representa.



Se identifican puntos y vectores con el complejo correspondiente.

Calculando en primer lugar el centro de la circunferencia se observa que los puntos $P=-1+3i$ y $Q=2-4i$ son los extremos de un diámetro, por lo que el centro será el punto medio del segmento *PQ*, $R=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

Haciendo una traslación que lleve el punto *R* al origen de coordenadas *O*, es decir, una traslación de vector $\overrightarrow{RO}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ los puntos *A*, *B*, *C* y *D* se trasforman en los puntos *A'*, *B'*, C' y *D'*, vértices de un cuadrado centrado en *O*, por tanto, $D'=iA'$, $C'=iD'=-A'$ y $B'=iC'=-D'$. Además, $D'=-2\sqrt{5}+3i+A'$, por tanto:

$iA'=-2\sqrt{5}+3i+A'\Rightarrow(-1+i)A'=-2\sqrt{5}+3i\Rightarrow A'=\frac{-2\sqrt{5}+3i}{-1+i}=\frac{2\sqrt{5}+3}{2}+\frac{2\sqrt{5}-3}{2}i$, $\quad D'=-\frac{2\sqrt{5}-3}{2}+\frac{2\sqrt{5}+3}{2}i$,

$C'=-\frac{2\sqrt{5}+3}{2}-\frac{2\sqrt{5}-3}{2}i$ y $B'=\frac{2\sqrt{5}-3}{2}-\frac{2\sqrt{5}+3}{2}i$.

Finalmente, deshaciendo la traslación anterior, obtenemos $A=\left(\sqrt{5}+2\right)+\left(\sqrt{5}-2\right)i$, $D=\left(2-\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}+1\right)i$, $C=-\left(1+\sqrt{5}\right)+\left(1-\sqrt{5}\right)i$ y $B=\left(\sqrt{5}-1\right)-\left(\sqrt{5}-2\right)i$.

71. Si $P\left(\sqrt{3},1\right)$ es un vértice de un hexágono regular inscrito en la circunferencia centrada en el origen y de radio 2, calcula los restantes de las dos formas siguientes.

a) Multiplicando $z=\sqrt{3}+i$ por determinados números complejos.

b) Calculando las raíces sextas de $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

a) Los restantes vértices se obtienen girando *P* 60º reiteradamente respecto del origen de coordenadas, es decir, multiplicando $z=\sqrt{3}+i=2_{30^\circ}$ por 1_{60°, 1_{120°, 1_{180°, 1_{240° y 1_{300°, obteniéndose los puntos:

$2_{30^\circ}\cdot 1_{60^\circ}=2_{90^\circ}=2i\Rightarrow(0,\,2)$, $2_{30^\circ}\cdot 1_{120^\circ}=2_{150^\circ}=-\sqrt{3}+i\Rightarrow\left(-\sqrt{3},\,1\right)$, $2_{30^\circ}\cdot 1_{180^\circ}=2_{210^\circ}=-\sqrt{3}-i\Rightarrow\left(-\sqrt{3},\,-1\right)$,

$2_{30^\circ}\cdot 1_{240^\circ}=2_{270^\circ}=-2i\Rightarrow(0,\,-2)$ y $2_{30^\circ}\cdot 1_{300^\circ}=2_{330^\circ}=\sqrt{3}-i\Rightarrow\left(\sqrt{3},\,-1\right)$

b) Los vértices del hexágono son los afijos de las raíces sextas de $\left(\sqrt{3}+i\right)^6=\left(2_{30^\circ}\right)^6=64_{180^\circ}$, es decir, son los afijos de los complejos s_β con $s=\sqrt[6]{64}=2$ y $\beta=\frac{180^\circ+360^\circ k}{6}=30^\circ+60^\circ k$ $(k=0,1,2,3,4,5)$:

$2_{30^\circ}=\sqrt{3}+i\Rightarrow P\left(\sqrt{3},\,1\right)$, $\quad 2_{90^\circ}=2i\Rightarrow(0,\,2)$, $\quad 2_{150^\circ}=-\sqrt{3}+i\Rightarrow\left(-\sqrt{3},\,1\right)$, $\quad 2_{210^\circ}=-\sqrt{3}-i\Rightarrow\left(-\sqrt{3},\,-1\right)$,

$2_{270^\circ}=-2i\Rightarrow(0,\,-2)$ y $2_{330^\circ}=\sqrt{3}-i\Rightarrow\left(\sqrt{3},\,-1\right)$

72. Encuentra los números reales *a* y *b* para que se cumpla la relación $(a+bi)^2 = i$ de dos formas:

a) Calculando las raíces cuadradas de *i*.

b) Desarrollando $(a+bi)^2$.

a) $a+bi=\sqrt{i}=\sqrt{1_{90^\circ}}=1_{\frac{90^\circ+360^\circ k}{2}}=1_{45^\circ+180^\circ k}=\begin{cases} k=0\Rightarrow 1_{45^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\Rightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{2},\ b=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ k=1\Rightarrow 1_{225^\circ}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\Rightarrow a=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ b=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

b) $(a+bi)^2=a^2+b^2i^2+2abi=\left(a^2-b^2\right)+2abi\Rightarrow\begin{cases}a^2-b^2=0\\2ab=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\pm b\\2ab=1\end{cases}$

Si $a=b$ obtenemos $2a^2=1\Rightarrow a^2=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, es decir, obtenemos dos soluciones, $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $a=b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si $a=-b$ obtenemos $-2a^2=1$, que no tiene solución real.

73. Sea *z* un número complejo.

a) Calcula los números reales, *a*, *b*, *c*, para que se verifique la igualdad: $z^3+8=(z+2)(az^2+bz+c)$.

b) Halla de dos formas distintas las raíces cúbicas de –8.

a) $(z+2)(az^2+bz+c)=az^3+(2a+b)z^2+(c+2b)z+2c\Rightarrow a=1,\ 2a+b=0,\ c+2b=0,\ 2c=8\Rightarrow a=1,\ b=-2,\ c=4$

b) $\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8_{180^\circ}}=s_\beta$, con $s=\sqrt[3]{8}=2$ y $\beta=\frac{180^\circ+360^\circ k}{3}=60^\circ+120^\circ k\ (k=0,1,2)$, por tanto, las raíces cúbicas de –8 son $2_{60^\circ}=1+\sqrt{3}i$, $2_{180^\circ}=-2$ y $2_{300^\circ}=1-\sqrt{3}i$.

Otra manera de calcular las raíces cúbicas de –8 es observar que son las soluciones de $z^3+8=0$, es decir, según el apartado anterior, $z+2=0\Rightarrow z=-2$ y $z^2-2z+4=0\Rightarrow z=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}i}{2}=1\pm\sqrt{3}i$.

74. a) Justifica que $(1+i)^6=-8i$.

b) Considera la ecuación $z^2=-8i$:

i) Deduce del aparado a) una solución de la ecuación.

ii) Deduce del apartado a) una solución de $z^3=-8i$.

a) $(1+i)^6=\left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^6=8_{270^\circ}=-8i$

b) i) Según el apartado a), una solución es $z=(1+i)^3=\left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^3=\left(2\sqrt{2}\right)_{135^\circ}=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-2+2i$.

ii) Según el apartado a), una solución es $z=(1+i)^2=2i$.

Teorema fundamental del álgebra. Raíces de una ecuación polinómica

75. Calcula las raíces de los siguientes polinomios.

a) $x^4 - x^3 + 9x^2 - 9x$

b) $x^4 + 26x^2 + 25$

c) $x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 35x^2 + 12x + 60$

d) $x^5 + x^4 + 25x^3 + 25x^2 + 144x + 144$

a) $x^4 - x^3 + 9x^2 - 9x = x\left(x^3 - x^2 + 9x - 9\right)$, por tanto una raíz es $x = 0$ y las otras tres son las raíces del polinomio $x^3 - x^2 + 9x - 9$.

Al ser $x^3 - x^2 + 9x - 9$ un polinomio con coeficientes reales, para cada raíz su conjugada también será raíz, por tanto, una de las tres raíces es un número real. Probando los divisores del término independiente obtenemos como raíz $x = 1$ y $x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x-1)(x^2+9)$, por lo que las otras dos raíces se obtienen resolviendo $x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x = 3i,\ x = -3i$.

b) Resolvemos $x^4 + 26x^2 + 25 = 0$ haciendo el cambio $z = x^2$:

$$z^2 + 26z + 25 = 0 \Rightarrow z = \frac{-26 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-26 \pm 24}{2} = \begin{cases} z = -1 \\ z = -25 \end{cases}.$$

Deshaciendo el cambio obtenemos las cuatro raíces $x = i$, $x = -i$, $x = 5i$ y $x = -5i$.

c) Al ser $x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 35x^2 + 12x + 60$ un polinomio con coeficientes reales, para cada raíz su conjugada también será raíz, por tanto, una de las cinco raíces es un número real. Probando los divisores del término independiente obtenemos como raíz $x = -5$ y $x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 35x^2 + 12x + 60 = (x+5)(x^4 + 7x^2 + 12)$, por lo que las otras cuatro raíces se obtienen resolviendo $x^4 + 7x^2 + 12 = 0$.

Haciendo el cambio $z = x^2$ tenemos $z^2 + 7z + 12 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-7 \pm 1}{2} = \begin{cases} z = -3 \\ z = -4 \end{cases}$.

Deshaciendo el cambio obtenemos las cuatro raíces restantes: $x = \sqrt{3}i$, $x = -\sqrt{3}i$, $x = 2i$ y $x = -2i$.

d) Al ser $x^5 + x^4 + 25x^3 + 25x^2 + 144x + 144$ un polinomio con coeficientes reales, para cada raíz su conjugada también será raíz, por tanto, una de las cinco raíces es un número real. Probando los divisores del término independiente obtenemos como raíz $x = -1$ y $x^5 + x^4 + 25x^3 + 25x^2 + 144x + 144 = 0 = (x+1)(x^4 + 25x^2 + 144)$, por lo que las otras cuatro raíces se obtienen resolviendo $x^4 + 25x^2 + 144 = 0$.

Haciendo el cambio $z = x^2$ tenemos $z^2 + 25z + 144 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-25 \pm \sqrt{49}}{2} = \dfrac{-25 \pm 7}{2} = \begin{cases} z = -9 \\ z = -16 \end{cases}$.

Deshaciendo el cambio obtenemos las cuatro raíces restantes: $x = 3i$, $x = -3i$, $x = 4i$ y $x = -4i$.

76. a) Resuelve en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.

b) Si representamos por z_1 la solución en las que la parte imaginaria es positiva y por z_2 la otra solución, escribe en forma polar z_1, z_2 y $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$.

a) $$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0 \Rightarrow z = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}i}{2} = \begin{cases} z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{cases}$$

b) $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2_{45^\circ}$, $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2_{315^\circ}$ y $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2 = \left(\dfrac{2_{45^\circ}}{2_{315^\circ}}\right)^2 = \left(1_{-270^\circ}\right)^2 = \left(1_{90^\circ}\right)^2 = 1_{180^\circ}$

77. **a)** Escribe en forma polar las soluciones de la ecuación: $z^2 - 2z + 2 = 0$.

b) Deduce del aparatado anterior las soluciones de la ecuación: $(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$.

a) $z^2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} z = 1 + i = \sqrt{2}_{45^\circ} \\ z = 1 - i = \sqrt{2}_{315^\circ} \end{cases}$

b) Por el apartado anterior $-iz + 3i + 3 = 1 + i$ o $-iz + 3i + 3 = 1 - i$, obtenemos, por tanto, dos soluciones:

$-iz + 3i + 3 = 1 + i \Rightarrow iz = 2 + 2i \Rightarrow z = \dfrac{2 + 2i}{i} = 2 - 2i$ y $-iz + 3i + 3 = 1 - i \Rightarrow iz = 2 + 4i \Rightarrow z = \dfrac{2 + 4i}{i} = 4 - 2i$.

78. **Para cada número complejo *z* escribimos:**

$$P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$$

a) Obtén $P(1+i)$.

b) Demuestra que si z_0 es solución de la ecuación $P(z) = 0$, entonces $z_0 \neq 0$ y $\dfrac{1}{z_0}$ también es solución de dicha ecuación.

c) Obtén las cuatro soluciones de la ecuación $P(z) = 0$.

a) $P(1+i) = (1+i)^4 - 3(1+i)^3 + \dfrac{9}{2}(1+i)^2 - 3(1+i) + 1 = -4 - 3(-2+2i) + \dfrac{9}{2}2i - 3(1+i) + 1 = 0$

b) Si $P(z_0) = 0$ no puede ser $z_0 = 0$, ya que $P(0) = 1$.

Además, si $P(z_0) = 0$ tenemos $P\left(\dfrac{1}{z_0}\right) = \dfrac{1}{z_0^4} - \dfrac{3}{z_0^3} + \dfrac{9}{2z_0^2} - \dfrac{3}{z_0} + 1 = \dfrac{1 - 3z_0 + \frac{9}{2}z_0^2 - 3z_0^3 + z_0^4}{z_0^4} = \dfrac{P(z_0)}{z_0^4} = 0$.

c) Según los apartados anteriores $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ son soluciones, además, como se trata de una ecuación polinómica con coeficientes reales, el conjugado de cualquier solución también será solución, por lo que las dos raíces restantes son $z_3 = 1 - i$ y $z_4 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

79. **Sea *z* un número complejo.**

a) Desarrolla el producto: $(z^2 - 6z + 13)(z^2 + 4z + 13)$

b) Resuelve en $\mathbb{C}$: $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 26z + 169 = 0$

c) Si representamos por z_1 la solución en la que las partes real e imaginaria son positivas, demuestra que las otras soluciones de dicha ecuación son: $\overline{z_1}$, $z_1 i$ y $-\overline{z_1} i$

a) $(z^2 - 6z + 13)(z^2 + 4z + 13) = z^4 + 4z^3 + 13z^2 - 6z^3 - 24z^2 - 78z + 13z^2 + 52z + 169 = z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 26z + 169$

b) $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 26z + 169 = 0 \Rightarrow (z^2 - 6z + 13)(z^2 + 4z + 13) = 0 \Rightarrow z^2 - 6z + 13 = 0$ o $z^2 + 4z + 13 = 0$.

De $z^2 - 6z + 13 = 0$ obtenemos dos soluciones $z = \dfrac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{6 \pm 4i}{2} = \begin{cases} z = 3 + 2i \\ z = 3 - 2i \end{cases}$

De $z^2 + 4z + 13 = 0$ obtenemos las otras dos soluciones $z = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{-4 \pm 6i}{2} = \begin{cases} z = -2 + 3i \\ z = -2 - 3i \end{cases}$

c) $z_1 = 3 + 2i$, por tanto, $\overline{z_1} = 3 - 2i$, $z_1 i = -2 + 3i$ y $-\overline{z_1} i = -2 - 3i$.

80. **a)** Resuelve la ecuación $z^2+z+1=0$ y deduce las soluciones de la ecuación $z^3-1=0$.

b) Si designamos por *w* al número complejo $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

i) Calcula w^2, w^3 y w^{2000}.

ii) Calcula $S=1+w+w^2+...+w^{2000}$.

a) $z^2+z+1=0 \Rightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\begin{cases} z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

$z^3-1=0 \Rightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0 \Rightarrow z=1,\ z^2+z+1=0 \Rightarrow z=1,\ z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) **i)** Observemos que $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ es una de las soluciones de $z^2+z+1=0$ y $z^3-1=0$, por tanto,

$w^2=-w-1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w^3=1$ y $w^{2000}=w^{1998}w^2=\left(w^3\right)^{666}w^2=w^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

ii) Observemos que la suma $1+w+w^2=0$ se repite 667 veces en los 2001 sumandos de *S*, por tanto,

$S=667(1+w+w^2)=0$.

81. **Considera la ecuación $z^2-4z+a=0$ donde *a* es un número complejo. Determina el valor de *a* para que el número complejo $2+i$ sea solución de dicha ecuación y, sin hacer ningún calculo más, escribe la otra solución de dicha ecuación.**

Si $2+i$ es solución de la ecuación, tenemos $(2+i)^2-4(2+i)+a=0 \Rightarrow 3+4i-8-4i+a=0 \Rightarrow a=5$.

Como los coeficientes de la ecuación son reales, si $2+i$ es una solución, su conjugado, $2-i$ es la otra solución.

82. **Para cada número complejo *z*: $P(z)=z^4-10z^3+38z^2-90z+261$**

a) Si *b* es un número real, escribe en función de *b* las partes real e imaginaria de $P(ib)$.

b) Deduce que la ecuación $P(z)=0$ admite como soluciones dos números que son imaginarios puros.

c) Encuentra los números reales α y β para los que: $P(z)=(z^2+9)(z^2+\alpha z+\beta)$.

d) Resuelve la ecuación $P(z)=0$.

a) $P(ib)=b^4+10b^3i-38b^2-90bi+261=\left(b^4-38b^2+261\right)+\left(10b^3-90b\right)i$, por tanto, $\mathrm{Re}\left[P(ib)\right]=b^4-38b^2+261$ e $\mathrm{Im}\left[P(ib)\right]=10b^3-90b$.

b) Si $b=3$ o $b=-3$ tenemos $\mathrm{Re}\left[P(ib)\right]=\mathrm{Im}\left[P(ib)\right]=0$, por tanto $z=3i$ y $z=-3i$ son soluciones de $P(z)=0$.

c) $(z^2+9)(z^2+\alpha z+\beta)=z^4+\alpha z^3+\left(\beta+9\right)z^2+9\alpha z+9\beta \Rightarrow \alpha=-10,\ \beta=29$

d) $P(z)=0 \Rightarrow (z^2+9)(z^2-10z+29)=0 \Rightarrow z^2+9=0$ o $z^2-10z+29=0$. De $z^2+9=0$ obtenemos las soluciones ya encontradas en b), $z=3i$ y $z=-3i$, de $z^2-10z+29=0$ encontramos las dos soluciones restantes, $z=5+2i$ y $z=5-2i$.

CUESTIONES

83. Si z es un número complejo tal que $|1+iz|=|1-iz|$, ¿puedes asegurar que z es un número real?

Si $z=a+bi$ tenemos $|1+iz|=|1-iz| \Rightarrow \sqrt{(1-y)^2+x^2}=\sqrt{(1+y)^2+x^2} \Rightarrow (1-y)^2=(1+y)^2 \Rightarrow -2y=2y \Rightarrow y=0$, por lo que, efectivamente, z es un número real.

84. Justifica que si $z \neq 0$ y $z+\frac{1}{z}=1$, entonces $\text{Re}\, z=\frac{1}{2}$.

$z+\frac{1}{z}=1 \Rightarrow z^2+1=z \Rightarrow z^2-z+1=0 \Rightarrow z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, en cualquier caso, $\text{Re}\, z=\frac{1}{2}$.

85. Si z es real, ¿es cierto que $|z|=z$?

No, sólo es cierto si $z > 0$.

86. Para cualquier complejo z, ¿se verifica que $\text{Re}(z^4)=4\,\text{Re}\, z$?

No, por ejemplo, si $z=i$ tenemos $\text{Re}(z^4)=1$ y $4\,\text{Re}\, z=0$.

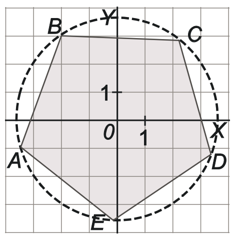
87. Si $z-\overline{z}$ es un número real, ¿qué puedes decir de z?

Recordemos que $z-\overline{z}=2i\,\text{Im}\, z$, por tanto, si es un número real debe ser $\text{Im}\, z=0$, es decir, z es real.

88. Un polinomio de grado 3, ¿puede tener las tres raíces imaginarias puras?

Sí, por ejemplo, el polinomio $P(z)=(z-i)(z+i)(z-2i)=z^3-2iz^2+z-2i$. La respuesta sería negativa si quisiéramos que además los coeficientes fueran reales, ya que entonces una de las raíces debería ser real.

89. Observa la figura y razona si los afijos correspondientes a los vértices del pentágono pueden corresponder a las raíces quintas de un número real.



Las raíces quintas de un número real positivo tienen como argumento $\frac{0°+360°k}{5}=72°k\ (k=0, 1, 2, 3, 4)$ y las raíces quintas de un número real negativo tienen como argumento $\frac{180°+360°k}{5}=36°+72°k\ (k=0, 1, 2, 3, 4)$. En ninguno de los casos se corresponden con los argumentos de los vértices del pentágono de la figura, por tanto, estos no pueden ser las raíces quintas de un número real.

90. ¿Es cierto que si $z^4 = 1$, entonces $z = 1$ o $z = -1$?

Si $z^4 = 1$, z es una de las raíces cuartas de 1, pero no necesariamente $z = 1$ o $z = -1$, también podría ser $z = i$ o $z = -i$.

91. Justifica que si $w = 2iz$, entonces $\left|\frac{w}{z}\right| = 2$ y $\text{Arg}\left(\frac{w}{z}\right) = 90^\circ$.

$\frac{w}{z} = \frac{2iz}{z} = 2i$, por tanto, $\left|\frac{w}{z}\right| = |2i| = 2$ y $\text{Arg}\left(\frac{w}{z}\right) = \text{Arg}(2i) = 90^\circ$.

92. Si $\left|\frac{w}{z}\right| = 2$ y $\text{Arg}\left(\frac{w}{z}\right) = 90^\circ$, ¿es necesario que $w = 2iz$?

Sí es necesario, ya que si $\left|\frac{w}{z}\right| = 2$ y $\text{Arg}\left(\frac{w}{z}\right) = 90^\circ$ entonces $\frac{w}{z} = 2_{90^\circ} = 2i$, es decir, $w = 2iz$.

93. ¿Es cierto que si *n* es un entero positivo, el complejo $z = \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2}$ es un número real?

No, de hecho, z es siempre imaginario puro, ya que $(1+i)^n$ y $(1-i)^n$ son conjugados, por lo tanto, $z = \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2} = \frac{2i\,\text{Im}\left[(1+i)^n\right]}{2} = i\,\text{Im}\left[(1+i)^n\right]$.

PROBLEMAS

94. Sean *a*, *b*, *c*, *d* números reales. Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$:

a) Calcula el módulo z_1z_2 de dos formas diferentes y demuestra que $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

b) Demuestra que 34 · 122 puede escribirse como la suma de dos cuadrados de números enteros.

a) $|z_1z_2| = |z_1||z_2| = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}$

$z_1z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \Rightarrow |z_1z_2| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}$

Por tanto, $\sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} \Rightarrow (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

b) $34 \cdot 122 = (5^2 + 3^2)(11^2 + 1^2) = (5 \cdot 11 - 3 \cdot 1)^2 + (5 \cdot 1 + 3 \cdot 11)^2 = 52^2 + 38^2$

95. **a)** Demuestra que el polinomio $P(z)=2z^4+3z^2+3\sqrt{3}z+9$ admite una raíz de la forma $\alpha(1+i)$ siendo α un número real. Determina el valor de α.

b) Demuestra que: $P(z)=2(z-\alpha(1+i))(z-\alpha(1-i))\left(z^2-\sqrt{3}z+3\right)$.

c) Escribe en forma polar todas las raíces de $P(z)$.

a) $P[\alpha(1+i)]=2[\alpha(1+i)]^4+3[\alpha(1+i)]^2+3\sqrt{3}[\alpha(1+i)]+9=\left(-8\alpha^4+3\sqrt{3}\alpha+9\right)+\left(6\alpha^2+3\sqrt{3}\alpha\right)i$

La parte imaginaria se anula si $\alpha=0$ o $\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, en el primer caso la parte real no se anula, pero sí en el segundo, ya que $-8\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4+3\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+9=-\dfrac{9}{2}-\dfrac{9}{2}+9=0\Rightarrow-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+i)$ es una raíz de $P(z)$ y $\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Al ser los coeficientes de $P(z)$ números reales, también $\alpha(1-i)$ es raíz de $P(z)$, con lo que se tendrá $P(z)=2(z-\alpha(1+i))(z-\alpha(1-i))\left(z^2+bz+c\right)$. Para calcular b y c, en vez de multiplicar e identificar coeficientes, es mejor dividir $P(z)$ entre $2(z-\alpha(1+i))(z-\alpha(1-i))=2z^2+2\sqrt{3}z+3$ para obtener que $z^2+bz+c=z^2-\sqrt{3}z+3$, lo que demuestra b).

c) Las raíces de $P(z)$ son $z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+i)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)_{225^\circ}$, $z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-i)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)_{135^\circ}$ y

$$z^2-\sqrt{3}z+3=0\Rightarrow z=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-9}}{2}=\frac{\sqrt{3}\pm3i}{2}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i=\sqrt{3}_{60^\circ}\\[2mm]\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}i=\sqrt{3}_{300^\circ}\end{cases}.$$

96. En cada uno de los casos siguientes, halla el conjunto de afijos de los *z* que verifican las condiciones dadas:

a) $|z-2|=3$ **d)** $|z+4i+iz|=1$ **g)** $|z-3i|=|\overline{z}+1|$

b) $|z-1|=|z+2i|$ **e)** $|z+i|=1$ **h)** $|z-1+i|=2$

c) $|\overline{z}+i|=\sqrt{2}$ **f)** $|z|=|2+z|$ **i)** $|\overline{z}-1+i|=2$

a) Puntos cuya distancia al punto (2, 0) es 3, es decir, la circunferencia de centro (2, 0) y radio 3.

b) Puntos que equidistan de (1, 0) y de (0, –2), es decir, la mediatriz del segmento de extremos (1, 0) y (0, –2).

c) $|\overline{z}+i|=\left|\overline{\overline{z}+i}\right|=|z-i|$, luego la condición dada equivale a $|z-i|=\sqrt{2}$, que representa la circunferencia de centro (0, 1) y radio $\sqrt{2}$.

d) $|z+4i+iz|=|z(1+i)+4i|=\left|(1+i)\left(z+\dfrac{4i}{1+i}\right)\right|=|1+i||z+2+2i|=\sqrt{2}|z+2+2i|$, luego la condición dada equivale a $|z+2+2i|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, que representa la circunferencia de centro (–2, –2) y radio $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

e) Circunferencia de centro (0, –1) y radio 1.

f) Mediatriz del segmento de extremos (0, 0) y (–2, 0).

g) $|\overline{z}+1|=|z+1|$, luego la condición dada equivale a $|z-3i|=|z+1|$, que representa la mediatriz del segmento de extremos (0, 3) y (–1, 0).

h) Circunferencia de centro (1, –1) y radio 2.

i) $|\overline{z}-1+i|=\left|\overline{\overline{z}-1+i}\right|=|z-1-i|$, luego la condición dada equivale a $|z-1-i|=2$, que representa la circunferencia de centro (1, 1) y radio 2.

97. Para todo número complejo $z \neq 1$, se considera el siguiente complejo $w = \frac{z+1}{z-1}$.

Demuestra que $|z| = 1 \Leftrightarrow w$ es imaginario puro.

Pongamos $z = a + bi$, entonces $w = \frac{(a+1)+bi}{(a-1)+bi} = \frac{[(a+1)+bi][(a-1)-bi]}{[(a-1)+bi][(a-1)-bi]} = \frac{(a^2+b^2-1)-2bi}{(a-1)^2+b^2}$.

Si $|z| = 1 \Rightarrow a^2+b^2 = 1 \Rightarrow a^2+b^2-1 = 0 \Rightarrow w = -\frac{2b}{(a-1)^2+b^2}i$ es imaginario puro.

Recíprocamente, si w es imaginario puro, tenemos $\frac{a^2+b^2-1}{(a-1)^2+b^2} = 0 \Rightarrow a^2+b^2-1 = 0 \Rightarrow a^2+b^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$.

98. Para cada número complejo $z \neq 2i$ consideramos el número complejo $w = \frac{z+1}{z-2i}$. Determina el conjunto de los afijos de los z tales que:

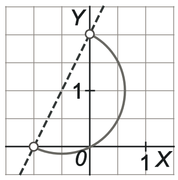
a) w es imaginario puro. **b)** w es un número real. **c)** $\text{Arg}\, w = \frac{\pi}{2}$ **d)** $\text{Arg}\, w = \frac{\pi}{4}$

Pongamos $z = x + yi$, entonces $w = \frac{(x+1)+yi}{x+(y-2)i} = \frac{[(x+1)+yi][x-(y-2)i]}{[x+(y-2)i][x-(y-2)i]} = \frac{(x^2+y^2+x-2y)+(2x-y+2)i}{x^2+(y-2)^2}$.

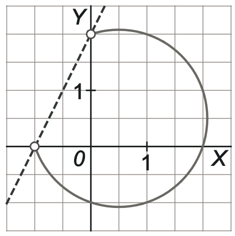
a) Si w es imaginario puro tenemos $x^2+y^2+x-2y = 0$, ecuación de la circunferencia de centro $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ y radio $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

b) Si w es un número real tenemos $2x-y+2 = 0$, ecuación de la recta que pasa por los puntos (0, 2) y (–1, 0).

c) Si $\text{Arg}\, w = \frac{\pi}{2}$, w es imaginario puro y su parte real es positiva, es decir, los afijos buscados son los puntos (x, y) de la circunferencia hallada en a) que además cumplen $2x-y+2 > 0$, es decir, forman el arco de circunferencia representados en la figura.

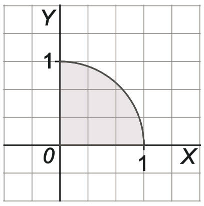


d) Si $\text{Arg}\, w = \frac{\pi}{4}$, la parte real e imaginaria de w coinciden y son positivas, es decir, los afijos buscados son los puntos (x, y) que cumplen $x^2+y^2+x-2y = 2x-y+2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2+y^2-x-y-2 = 0$ y, además, $2x-y+2 > 0$, es decir, forman el arco de circunferencia representados en la figura, de centro $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio $r = \sqrt{\frac{5}{2}}$

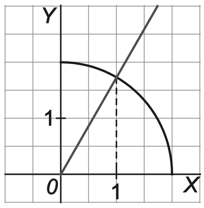


99. *Expresa en forma polar los afijos que están en las zonas coloreadas (excluidas las fronteras).

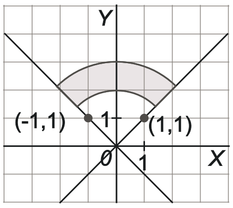
a)



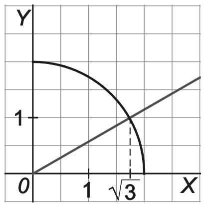
c)



b)



d)



a) r_{α} con $0 < r < 1$ y $0° < \alpha < 90°$

b) $1_{45°}$, $1_{135°}$ y r_{α} con $2 < r < 3$ y $45° < \alpha < 135°$

c) $r_{60°}$ con $r > 0$

d) $r_{30°}$ con $r > 2$

100. Al plantearle a un estudiante que resolviera la ecuación $(1+i)z-(3+2i)\overline{z}=1+5i$, el estudiante respondió así:

"Si $z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi$, por lo que:

$$(1+i)z=(3+2i)(a-bi)+1+5i$$

de donde $z=\dfrac{5a-b+6}{2}+\dfrac{4-a-5b}{2}i$, con lo que, dando a *a* y *b* cualesquiera valores reales, obtenemos infinitos complejos *z* soluciones de dicha ecuación".

a) ¿Qué puedes decir sobre la respuesta del estudiante?

b) Prosigue sus cálculos y halla la respuesta correcta.

a) La respuesta es incorrecta, ya que $z=\dfrac{5a-b+6}{2}+\dfrac{4-a-5b}{2}i$ debe ser precisamente $z=a+bi$, por lo que no vale cualquier par (a, b) sino aquellos que verifiquen $\dfrac{5a-b+6}{2}=a$ y $\dfrac{4-a-5b}{2}=b$.

b) Continuando el razonamiento anterior:

$$\begin{cases}\dfrac{5a-b+6}{2}=a\\[2ex]\dfrac{4-a-5b}{2}=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a-b=-6\\a+7b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{19}{11}\\[2ex]b=\dfrac{19}{11}\end{cases}\Rightarrow z=-\frac{19}{11}+\frac{19}{11}i$$

PARA PROFUNDIZAR

101. Si el afijo de $z=x+iy$ está alineado con los afijos de *i* y de *iz*, ¿qué relación existe entre *x* e *y*?

$z=x+iy\Rightarrow iz=-y+ix$ y nos piden la relación entre x e y sabiendo que los puntos $A(x,\ y)$, $B\ (0,\ 1)$ y $C\ (-y,\ x)$ están alineados.

De este modo, $\dfrac{-x}{-y-x}=\dfrac{1-y}{x-y}\Rightarrow x^2+y^2-x-y=0$, es decir, ($x$, y) son las coordenadas de un punto de la circunferencia de centro $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ y radio $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

102. Si z y w son dos números complejos cualesquiera, demuestra que $|z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$ e interpreta geométricamente el resultado.

$$|z+w|^2=(z+w)\left(\overline{z+w}\right)=(z+w)\left(\overline{z}+\overline{w}\right)=z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w}=|z|^2+z\overline{w}+w\overline{z}+|w|^2$$

$$|z-w|^2=(z-w)\left(\overline{z-w}\right)=(z-w)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)=z\overline{z}-z\overline{w}-w\overline{z}+w\overline{w}=|z|^2-z\overline{w}-w\overline{z}+|w|^2$$

Sumando se obtiene $|z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$

Como $|z-w|$ representa la distancia entre los afijos de z y w y $|z+w|$ representa la distancia entre los afijos de z y $-w$, $|z+w|^2+|z-w|^2$ representa la suma de los cuadrados de las diagonales del paralelogramo cuyos lados son $|z|$ y $|w|$. Así pues, en cualquier paralelogramo la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los cuatro lados.

103. Encuentra los menores enteros positivos m y n que verifican que $\left(1+i\sqrt{3}\right)^m=(1-i)^n$.

$$1+i\sqrt{3}=2_{60^\circ}\Rightarrow\left(1+i\sqrt{3}\right)^m=\left(2^m\right)_{60^\circ m}\ \text{ y }\ 1-i=\sqrt{2}_{315^\circ}\Rightarrow(1-i)^n=\left(\sqrt{2}^n\right)_{315^\circ n}$$

Para que ambos números sean iguales debe verificarse que $2^m=\sqrt{2}^n\Rightarrow n=2m$ y que $315^\circ n-60^\circ m$ sea múltiplo de 360º, es decir, $630^\circ m-60^\circ m=570^\circ m$ debe ser múltiplo de 360º, el menor entero para el que esto sucede es $m=12$ y, por tanto, $n=24$.

104. Si z_1 y z_2 son dos números complejos de módulo 1, demuestra que $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}$ es un número real no negativo.

Como $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}=\dfrac{z_1^{\,2}+z_2^{\,2}+2z_1z_2}{z_1z_2}=\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}+2$, basta demostrar que $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ es un número real mayor o igual que –2.

Para ello observemos que $\dfrac{z_1}{z_2}$ y $\dfrac{z_2}{z_1}$ son dos números complejos inversos y de módulo 1, por lo que deben ser conjugados, pongamos $\dfrac{z_1}{z_2}=w$ y $\dfrac{z_2}{z_1}=\overline{w}$, así $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=2\operatorname{Re}w$ es un número real.

Por otra parte, como w tiene módulo 1, tenemos $\operatorname{Re}w\ge-1$, por lo que $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=2\operatorname{Re}w\ge-2$.

105. Demuestra que para cualquier entero positivo n se verifican estas dos igualdades:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-...=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\qquad\qquad\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-...=2^{\frac{n}{2}}sen\frac{n\pi}{4}$$

Sea el número complejo $z=1+i=\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$. Por un lado, $z^n=\left(\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}\right)^n=\left(\sqrt{2}^n\right)_{\frac{n\pi}{4}}=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

Por otra parte, desarrollando por el binomio de Newton:

$$z^n=(1+i)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}i+\binom{n}{2}i^2+\binom{n}{3}i^3+\binom{n}{4}i^4+...+\binom{n}{n}i^n=\left[\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-...\right]+\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-...\right]i$$

Igualando las partes reales e imaginarias de ambas expresiones obtenemos las igualdades deseadas:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-...=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\qquad\qquad\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-...=2^{\frac{n}{2}}sen\frac{n\pi}{4}$$

106. Si z no es 1 y verifica la ecuación $z^3 = 1$, calcula $(1 - z + z^2)(1 + z - z^2)$.

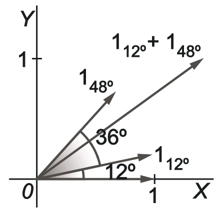
Como $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$, si $z^3 = 1$ y $z \neq 1$ tendemos $z^2 + z + 1 = 0$, por tanto, $1 - z + z^2 = -2z$ y $1 + z - z^2 = -2z^2$, con lo que $(1 - z + z^2)(1 + z - z^2) = 4z^3 = 4$.

107. Calcula la parte imaginaria del complejo:

$$z = (\cos 12^\circ + i \operatorname{sen} 12^\circ + \cos 48^\circ + i \operatorname{sen} 48^\circ)^6$$

Queremos calcular la parte imaginaria de $z = (1_{12^\circ} + 1_{48^\circ})^6$, para ello, observemos que $48^\circ - 12^\circ = 36^\circ$, por lo que el argumento de $1_{12^\circ} + 1_{48^\circ}$ es $12^\circ + \frac{36^\circ}{2} = 30^\circ$ (ver figura).

Por tanto, $1_{12^\circ} + 1_{48^\circ} = r_{30^\circ}$ y $z = (r_{30^\circ})^6 = (r^6)_{180^\circ}$, con lo que $\operatorname{Im} z = 0$.



108. Sea $z_0 = \cos 72^\circ + i \operatorname{sen} 72^\circ$.

a) Comprueba que z_0 es raíz del polinomio $P(z) = z^5 - 1$.

b) Prueba la relación:

$$\left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)^2 + \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) - 1 = 0$$

c) Comprueba que $z_0 + \frac{1}{z_0} = 2\cos 72^\circ$ y demuestra que $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

d) Construye un pentágono regular utilizando solamente el compás y una regla no graduada, basándote en los resultados de los apartados anteriores.

a) $z_0 = \cos 72^\circ + i \operatorname{sen} 72^\circ = 1_{72^\circ} \Rightarrow P(z_0) = z_0^5 - 1 = 1_{360^\circ} - 1 = 1 - 1 = 0$

b) Como $P(z) = z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ y $z_0 \neq 1$, tenemos $z_0^4 + z_0^3 + z_0^2 + z_0 + 1 = 0$.

Como $z_0 \neq 0$ podemos dividir por z_0^2 para obtener:

$$z_0^2 + z_0 + 1 + \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0^2} = 0 \Rightarrow z_0^2 + \frac{1}{z_0^2} + z_0 + \frac{1}{z_0} + 1 = 0 \Rightarrow \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)^2 + \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) - 1 = 0$$

c) Como $|z_0| = 1$ tenemos $\frac{1}{z_0} = \overline{z_0}$ y, por tanto, $z_0 + \frac{1}{z_0} = (\cos 72^\circ + i \operatorname{sen} 72^\circ) + (\cos 72^\circ - i \operatorname{sen} 72^\circ) = 2\cos 72^\circ$.

De este modo, según el apartado anterior, $2\cos 72^\circ$ es la solución positiva de la ecuación $z^2 + z - 1 = 0$, es decir, $2\cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, de donde $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

d) Una vez que tenemos que $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ y, dado que el ángulo central en un pentágono regular es $\alpha = 72^\circ$, tomando como un vértice del pentágono regular el punto $A(1, 0)$, la construcción de un vértice adyacente es inmediata sin más que construir con el compás $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$ y posteriormente $\sqrt{5} - 1$ sobre el eje X.

Dividiendo este último segmento en cuatro partes iguales, levantamos una perpendicular por la primera división y el punto donde corte a la circunferencia centrada en el origen y radio 1 es el vértice buscado.

ENTORNO MATEMÁTICO

Peleas matemáticas

Hoy en clase, Iván y Sara han tenido una fuerte discusión porque ambos decían haber resuelto antes un difícil problema de geometría. El profesor ve que su alta competitividad puede eclipsar su talento para las matemáticas y, a pesar de que a ellos no les hace ninguna gracia, les propone un ejercicio:

Estamos trabajando con números que son una herramienta fundamental en multitud de campos científicos y técnicos. En sus inicios, produjeron una amarga pelea entre dos grandes matemáticos del renacimiento italiano: Cardano y Tartaglia que, a pesar de su ingenio, no supieron reconocer en el otro a un matemático equiparable a ellos. Quiero que reflexionéis sobre esto y que trabajéis sobre el siguiente problema:

Un buen ejemplo de la utilidad de estos números, que llamamos imaginarios, es la resolución de la ecuación cúbica $x^3 + px = q$ que Tartaglia enunció así:

"Para resolver la ecuación $x^3 + px = q$, halla dos números cuya resta sea q y cuyo producto sea $\left(\frac{p}{3}\right)^3$. La solución será la diferencia de las raíces cúbicas de ambos."

En efecto, dados dos números cualesquiera u y v, tenemos que:

$$u^3 - v^3 = (u-v)^3 + 3(u-v)^2 v + 3(u-v)v^2$$

Extrayendo factor común y operando resulta:

$$u^3 - v^3 = (u-v)^3 + 3(u-v)v\left[(u-v)+v\right] = (u-v)^3 + 3(u-v)uv$$

y llamando $x = u - v$, se llega a $x^3 + 3uvx = u^3 - v^3$, que se parece mucho a nuestra ecuación. Basta elegir u y v con la condición: $\begin{cases} 3uv = p \\ u^3 - v^3 = q \end{cases}$. De esta manera, $x = u - v$ será la solución buscada.

Vuestra tarea es revisar el método de Tartaglia, aplicarlo a la resolución de la ecuación $x^3 - 15x = 4$, identificar esos números imaginarios y explicar a vuestros compañeros como lo habéis manejado.

¿Eres capaz de resolver el problema que han planteado a Iván y Sara?

Se quiere resolver el sistema $\begin{cases} 3uv = -15 \\ u^3 - v^3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} uv = -5 \\ u^3 - v^3 = 4 \end{cases}$, para ello, se despeja en la primera ecuación $v = -\frac{5}{u}$ y se sustituye en la segunda para obtener $u^3 - \left(-\frac{5}{u}\right)^3 = 4 \Rightarrow u^3 + \frac{125}{u^3} = 4$.

Llamando $z = u^3$ tenemos $z + \frac{125}{z} = 4 \Rightarrow z^2 - 4z + 125 = 0$ y es al resolver esta ecuación cuando aparecen los números complejos, ya que las soluciones son $z = 2 + 11i$ y $z = 2 - 11i$.

Tomando, por ejemplo, $z = 2 + 11i$ (si se tomara $z = 2 - 11i$ el resultado final sería el mismo), se tiene $u^3 = 2 + 11i$, con lo que se pueden calcular las tres raíces cúbicas de $2 + 11i$, u_1, u_2 y u_3, calcular los correspondientes $v_1 = -\frac{5}{u_1}$, $v_2 = -\frac{5}{u_2}$ y $v_3 = -\frac{5}{u_3}$ y encontrar así las tres soluciones $x_1 = u_1 - v_1$, $x_2 = u_2 - v_2$ y $x_3 = u_3 - v_3$.

Para simplificar los cálculos basta observar que $|2 + 11i| = \sqrt{125} = 5^{\frac{3}{2}}$, por lo que las raíces cúbicas de $2 + 11i$ tienen módulo $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$. Así, si u es una de estas raíces cúbicas, tendremos $v = -\frac{5}{u} = -\frac{5\overline{u}}{|u|^2} = -\overline{u}$ y $u - v = u + \overline{u} = 2\mathrm{Re}(u)$.

Esto prueba, en particular, que las tres soluciones de $x^3 - 15x = 4$ van a ser reales.

Solo se necesita encontrar una raíz cúbica u_1 de $2+11i$, ya que entonces se tendrá $u_2 = u_1 \cdot 1_{120^\circ} = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)u_1$ y $u_3 = u_2 \cdot 1_{240^\circ} = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)u_1$.

Se calcula por tanto una raíz cúbica u_1 de $2+11i$, para ello sea $\alpha = \text{Arg}(2+11i)$ el ángulo del primer cuadrante tal que $\text{tg}\,\alpha = \frac{11}{2}$ ($\alpha \simeq 79{,}695^\circ$), entonces $u_1 = \sqrt{5}_{\frac{\alpha}{3}} = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\alpha}{3} + i\,\text{sen}\frac{\alpha}{3}\right) = 2+i$.

Estos cálculos, que son los que hay que realizar con más cuidado si se desea obtener la respuesta correcta, se pueden evitar si se tiene en cuenta que $z_1 = 2+i$ es una raíz cúbica de $2+11i$, ya que $(2+i)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 \cdot i + 3\cdot 2^2 \cdot i^2 + i^3 = 2+11i$.

Las soluciones de $x^3 - 15x = 4$ son, por tanto: $x_1 = 2\,\text{Re}\,u_1 = 2\,\text{Re}(2+i) = 4$, $x_2 = 2\,\text{Re}\,u_2 = 2\,\text{Re}\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+i)\right] = -2-\sqrt{3}$ y $x_3 = 2\,\text{Re}\,u_3 = 2\,\text{Re}\left[\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+i)\right] = -2+\sqrt{3}$.

El conjunto más bello de las matemáticas

Ana está preocupada, tiene que estudiar para el examen de matemáticas y debe hacer una composición para la asignatura de dibujo, pero no sabe si le va a dar tiempo. De camino al instituto se lo comenta a su compañero Javier, un "friki" de los ordenadores. Sorprendentemente, Javier se echa a reír y le dice "no te preocupes, puedes hacer las dos cosas a la vez". Ana cree que se está riendo de ella y está a punto de dejarle con la palabra en la boca, pero Javier comenta: "Lo digo en serio, se pueden conseguir gráficos espectaculares utilizando los números complejos que tienes que estudiar para mates". Y comienza a explicarle como hacerlo:

A partir de un número complejo z debes hacer dos sucesiones: $\begin{cases} z_1 = z \\ z_{n+1} = z_n^{\,2} + z \end{cases}$, y la que forman sus módulos $|z_1|, |z_2|, |z_3|, \ldots$

Para un número inicial z, puede ocurrir que la sucesión de módulos esté acotada o no lo esté. En el primer caso z pertenece al llamado conjunto de Mandelbrot y su afijo correspondiente se colorea de negro. En el segundo caso, z no pertenece a dicho conjunto y el punto no se colorea.

Por ejemplo, para $z = 1$ la sucesión de los módulos es 1, 2, 5, 26, 677,… que no es acotada y, por tanto, el punto (1, 0) es blanco. Sin embargo, si se toma $z = -1$, la sucesión de módulos es 1, 0, 1, 0, 1,… que sí es acotada y el afijo de z, (–1, 0), es negro. Repitiendo este proceso para un número suficiente de puntos iniciales llegarías a la figura de la derecha.

Si quieres dibujos con distintas tonalidades, como el de la izquierda, puedes dar una coloración distinta según la velocidad a la que crecen los módulos de los términos de la sucesión. En la figura, los valores de z para los que la sucesión crece más rápido son de un rojo más intenso que aquellos que llevan a un crecimiento más lento.

Ana decide hacer un gráfico con el conjunto de Mandelbrot. Ayúdala hallando los tres primeros términos de la sucesión para $z = 1+2i$, $z = 3i$ y $z = -1-2i$ y decide cuál de ellos tendrá un rojo más oscuro en la representación.

Si $z = 1+2i$ obtenemos $|z_1| = |1+2i| = \sqrt{5}$, $|z_2| = |-2+6i| = \sqrt{40}$ y $|z_3| = |-31-22i| = \sqrt{1445}$

Si $z = 3i$ obtenemos $|z_1| = |3i| = \sqrt{9}$, $|z_2| = |-9+3i| = \sqrt{90}$ y $|z_3| = |72-51i| = \sqrt{7785}$

Si $z = -1-2i$ obtenemos $|z_1| = |-1-2i| = \sqrt{5}$, $|z_2| = |-4+2i| = \sqrt{20}$ y $|z_3| = |11-18i| = \sqrt{445}$

Ninguna de las tres sucesiones está acotada, la que crece más rápido y se representará con un rojo más intenso es la correspondiente a $z = 3i$, la que crece más despacio y se representará con un rojo menos intenso es la correspondiente a $z = -1-2i$.

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Escribe en forma binómica el complejo $z=\dfrac{4-i}{1+2i}$.

$$z=\frac{4-i}{1+2i}=\frac{(4-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{2-9i}{5}=\frac{2}{5}-\frac{9}{5}i$$

2. Calcula el módulo y el argumento de $z=\dfrac{-1+i}{-3\sqrt{3}+3i}$.

$-1+i=\sqrt{2}_{135^\circ}$ y $-3\sqrt{3}+3i=6_{150^\circ}$, por tanto, $z=\dfrac{\sqrt{2}_{135^\circ}}{6_{150^\circ}}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)_{-15^\circ}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)_{345^\circ}$, es decir, el módulo de z es $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ y su argumento es 345º.

3. Si $z=x+iy$, calcula en términos de x e y el conjugado de: $w=\dfrac{1-z}{1+i}$.

$$w=\frac{1-x-iy}{1+i}=\frac{(1-x-iy)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(1-x-y)-(1-x+y)}{2}=\frac{1-x-y}{2}-\frac{1-x+y}{2}i\Rightarrow\overline{w}=\frac{1-x-y}{2}+\frac{1-x+y}{2}i$$

4. Determina el conjunto M de los afijos de los $z=x+iy$ tales que $w=iz^2-(1+i)z+1$ es un número real.

Tenemos $w=i(x+iy)^2-(1+i)(x+iy)+1=(-2xy-x+y+1)+(x^2-y^2-x-y)i$, por tanto, w será un número real si $x^2-y^2-x-y=0\Rightarrow(x+y)(x-y-1)=0$, es decir, el conjunto M está formado por los puntos de las rectas $x+y=0$ y $x-y-1=0$.

5. Si $z_1=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{4}$ y $z_2=1-i$, escribe en forma trigonométrica z_1, z_2 y $\dfrac{z_1}{z_2}$.

$z_1=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{330^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos 330^\circ+i\,\text{sen}\,330^\circ\right)$, $z_2=\left(\sqrt{2}\right)_{315^\circ}=\sqrt{2}\left(\cos 315^\circ+i\,\text{sen}\,315^\circ\right)$ y $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{1}{2}\left(\cos 15^\circ+i\,\text{sen}\,15^\circ\right)$.

6. Escribe, en forma polar, las raíces cúbicas de *i*.

$i=1_{90^\circ}$, por tanto, las raíces cúbicas de son $z_1=1_{30^\circ}$, $z_2=1_{150^\circ}$ y $z_3=1_{270^\circ}$.

7. Describe el conjunto de los números complejos *z* tales que $|z-i|=\sqrt{10}$.

Es una circunferencia de centro (0, 1) y radio $\sqrt{10}$.

8. **Desarrolla el producto $(z^2+2z-3)(z^2+2z+5)$ y resuelve la ecuación $z^4+4z^3+6z^2+4z=15$.**

$(z^2+2z-3)(z^2+2z+5)=z^4+4z^3+6z^2+4z-15$, por tanto, las soluciones de $z^4+4z^3+6z^2+4z=15$ son las soluciones de $z^2+2z-3=0$ y $z^2+2z+5=0$, es decir, $z=1$, $z=-3$, $z=-1+2i$ y $z=-1-2i$.

9. **Si un vértice de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia centrada en el origen es el punto $A\left(6,\ \frac{7}{4}\right)$, calcula los otros dos.**

Los otros dos vértices se obtienen girando *A* respecto del origen 120º y 240º, es decir, son los afijos de los complejos que se obtienen al multiplicar $6+\frac{7}{4}i$ por $1_{60°}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ y por $1_{120°}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Así:

$$\left(6+\frac{7}{4}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(-3-\frac{7\sqrt{3}}{8}\right)+\left(3\sqrt{3}-\frac{7}{8}\right)i\Rightarrow B\left(-3-\frac{7\sqrt{3}}{8},\ 3\sqrt{3}-\frac{7}{8}\right)$$

$$\left(6+\frac{7}{4}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(-3+\frac{7\sqrt{3}}{8}\right)+\left(-3\sqrt{3}-\frac{7}{8}\right)i\Rightarrow C\left(-3+\frac{7\sqrt{3}}{8},\ -3\sqrt{3}-\frac{7}{8}\right)$$

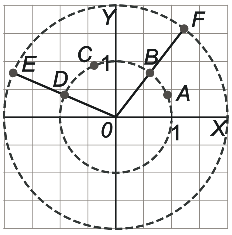
10. **Si $q(z)=2z^2-12z+26$, ¿puedes afirmar que para todo $z\in\mathbb{C}$ se verifica que $q(z)$ es siempre positivo como ocurre con $p(x)=2x^2-12x+26$ si *x* es cualquier número real?**

No, ya que $q(z)$ puede tomar valores complejos, por ejemplo, $q(i)=2i^2-12i+26=24-12i$, y para estos números no tiene sentido hablar de si son positivos o negativos.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. **El producto de los números complejos cuyos afijos son los puntos *A* y *C* del dibujo es el complejo de afijo:**



A. *E* **B.** *B* **C.** *F* **D.** *D*

Como *A* y *C* tienen módulo 1, su producto tendrá también módulo 1 y el argumento del producto será la suma de los argumentos de *A* y *C*, es decir, la respuesta correcta es D.

2. **Si $S=\{z\in\mathbb{C}$ tales que $(3+4i)z\in\mathbb{R}\}$, los afijos de *z* constituyen:**

A. Un triángulo equilátero
B. Una circunferencia
C. Una recta
D. Una parábola

Si $z=x+iy$ tenemos $(3+4i)z=(3+4i)(x+iy)=(3x-4y)+(3y+4x)i$, que será un número real si $3y+4x=0$, es decir, la respuesta correcta es C.

3. El valor de $(1+i)^{20}-(1-i)^{20}$ es:

A. 0 **B.** –1 **C.** –*i* **D.** *i*

$(1+i)^{20}-(1-i)^{20}=\left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^{20}-\left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^{20}=\left(2^{10}\right)_{900^\circ}-\left(2^{10}\right)_{6300^\circ}=\left(2^{10}\right)_{180^\circ}-\left(2^{10}\right)_{180^\circ}=0$, es decir, la respuesta correcta es A.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Si z_0 es una solución de la ecuación $z^2-(1+i)=0$, entonces:

A. $|z_0|^2=2$

B. $|z_0|^2=\sqrt{2}$

C. $(\mathrm{Re}\,z_0)^2-(\mathrm{Im}\,z_0)^2=1$

D. $\overline{z_0}$ también es solución de dicha ecuación.

Como z_0 es una raíz cuadrada de $1+i=\sqrt{2}_{45^\circ}$, tenemos que $z_0=\sqrt[4]{2}_{\frac{45^\circ}{2}}$ o $z_0=\sqrt[4]{2}_{\frac{45^\circ}{2}+180^\circ}$.

En ambos casos, $|z_0|^2=\sqrt{2}$, es decir, A es falsa y B verdadera. Además, al ser $\cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right)=-\cos\left(\frac{45^\circ}{2}+180^\circ\right)$ y $\mathrm{sen}\left(\frac{45^\circ}{2}\right)=\mathrm{sen}\left(\frac{45^\circ}{2}+180^\circ\right)$, en los dos casos el valor de $(\mathrm{Re}\,z_0)^2-(\mathrm{Im}\,z_0)^2$ es el mismo, en concreto $(\mathrm{Re}\,z_0)^2-(\mathrm{Im}\,z_0)^2=\left(\sqrt[4]{2}\cos\frac{45^\circ}{2}\right)^2-\left(\sqrt[4]{2}\,\mathrm{sen}\frac{45^\circ}{2}\right)^2=\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{45^\circ}{2}-\mathrm{sen}^2\frac{45^\circ}{2}\right)=\sqrt{2}\cos 45^\circ=1$, por lo que C también es cierta.

Finalmente, D es falsa, ya que las dos soluciones de la ecuación, $\sqrt[4]{2}_{\frac{45^\circ}{2}}$ y $\sqrt[4]{2}_{\frac{45^\circ}{2}+180^\circ}$ no son conjugadas.

5. Para cada entero positivo *n* consideremos el número complejo $z_n=(1+i\sqrt{3})^n-(1-i\sqrt{3})^n$. Entonces, para cualquier valor de *n* podemos asegurar que:

A. z_n es un número real.

B. z_n es un número imaginario puro.

C. $z_n=2^n$

D. $z_n=-\overline{z_n}$

Como $1+i\sqrt{3}$ y $1-i\sqrt{3}$ son conjugados, también lo son $(1+i\sqrt{3})^n$ y $(1-i\sqrt{3})^n$ y, por tanto, z_n es un número imaginario puro, es decir, A y C son falsas y B verdadera.

Por otro lado, $\overline{z_n}=\overline{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n-\left(1-i\sqrt{3}\right)^n}=\left(\overline{1+i\sqrt{3}}\right)^n-\left(\overline{1-i\sqrt{3}}\right)^n=\left(1-i\sqrt{3}\right)^n-\left(1+i\sqrt{3}\right)^n=-z_n$, es decir, D también es verdadera.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. **Considera la ecuación $P(z)=0$, donde $P(z)$ es un polinomio de grado tres con coeficientes reales y las dos afirmaciones siguientes:**

1. **$2-3i$ es solución de dicha ecuación.**

2. **$-2+3i$ es solución de dicha ecuación.**

Entonces:

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

Si se verifica 1, entonces $2+3i$ también será solución de la ecuación y la tercera solución será un número real, por lo que no se cumple 2.

Análogamente, si se verifica 2, entonces $-2-3i$ también será solución de la ecuación y la tercera solución será un número real, por lo que no se cumple 1.

Es decir, la relación correcta es D.

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Sea $P(z)=z^3+az^2+bz+c$ un polinomio con coeficientes reales. Para determinar los números *a*, *b* y *c* nos dan los siguientes datos:**

1. **$z_1=2+i$ es una raíz de $P(z)$.**

2. **$c=5a+20$.**

3. **Si z_1, z_2 y z_3 son las raíces de $P(z)$ entonces $(z_1z_2z_3)^2=100$.**

4. Una de las raíces es un número positivo.

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. Puede eliminarse el dato 4.

El dato 2 se deduce del dato 1, por lo que puede eliminarse. En efecto, si $z_1=2+i$ es una raíz de $P(z)$ tenemos:

$$P(z_1)=0 \Rightarrow (2+i)^3+a(2+i)^2+b(2+i)+c=0 \Rightarrow (2+3a+2b+c)+(11+4a+b)i=0 \Rightarrow \begin{cases} 2+3a+2b+c=0 \\ 11+4a+b=0 \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por 2 y restándole la primera ecuación obtenemos $c=5a+20$.

Veamos que los datos 1, 3 y 4 permiten calcular *a*, *b* y *c*. En efecto:

Como los coeficientes de $P(z)$ son reales, por el dato 1 las soluciones serán $2+i$, $2-i$ y *r* real. Del dato 3 deducimos que $\left[(2+i)(2-i)r\right]^2=100 \Rightarrow 25r^2=100 \Rightarrow r^2=4$, con lo que, según el dato 4, $r=2$.

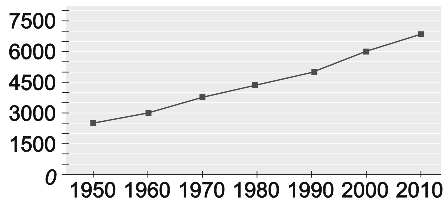
Por tanto, $P(z)=(z-2-i)(z-2+i)(z-2)=z^3-6z^2+13z-10$, es decir, $a=-6$, $b=13$ y $c=-10$.

8 Funciones, límites y continuidad

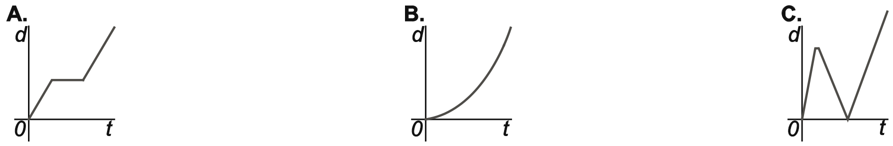
EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Dibuja la gráfica de la función que refleja la población mundial de la tabla de la página anterior.



4. Las siguientes gráficas representan la distancia a casa en función del tiempo. ¿Cuál de ellas refleja mejor la siguiente situación: "Salí de casa y tuve que volver al darme cuenta de que había olvidado el atlas"?



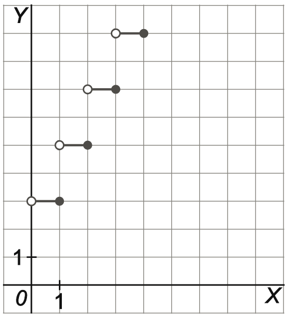
La gráfica que mejor refleja la situación es la c.

5. La tarifa de un aparcamiento es de 3 € la primera hora más 2 € por cada hora o fracción adicional. Representa de todas las formas posibles la función que da el precio del estacionamiento durante las seis horas que puede estar aparcado un coche.

Fórmula

$$f(t)=\begin{cases} 3 & \text{si } 0<t\le 1 \\ 5 & \text{si } 1<t\le 2 \\ 7 & \text{si } 2<t\le 3 \\ 9 & \text{si } 3<t\le 4 \\ 11 & \text{si } 4<t\le 5 \\ 13 & \text{si } 5<t\le 6 \end{cases}$$

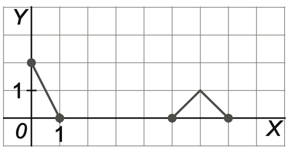
Gráfica



Tabla

Tiempo (en horas)	(0,1]	(1,2]	(2,3]	(3,4]	(4,5]	(5,6]
Precio (en euros)	3	5	7	9	11	13

6. Dibuja una posible gráfica para una función *f* siendo $D(f)=[0,1]\cup[5,7]$ y $R(f)=[0,2]$.



Respuesta abierta, por ejemplo, la representada en la gráfica.

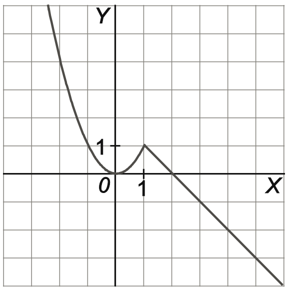
7. Dibuja la gráfica de estas funciones.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 1 \\ -x+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

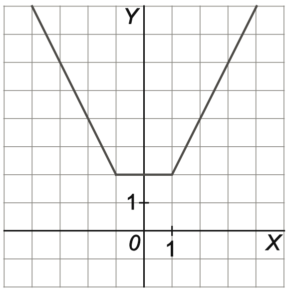
c) $f(x)=x+[x]$, $[x]$ indica la "parte entera de x"

b) $f(x)=|x+1|+|x-1|$

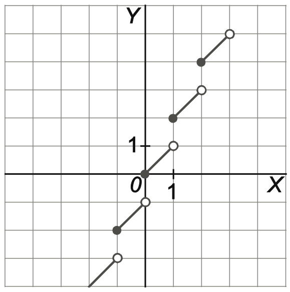
a)



b)

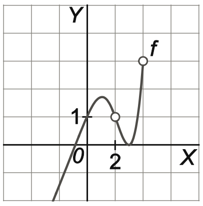


c)

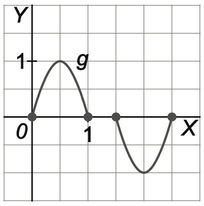


8. Halla el dominio y el recorrido de las funciones:

a)



e)



b) $f(x)=x^2+1$

f) $f(x)=\sqrt{x^2+x+2}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x-6}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

d) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$

h) $f(x)=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x^2-1}$

a) $D(f)=(-\infty,\ 2)\cup(2,\ 4)$ y $R(f)=(-\infty,\ 3)$.

b) $D(f)=\mathbb{R}$. Como $x^2\ge 0$, $R(f)=[1,\ +\infty)$.

c) $D(f)=\mathbb{R}-\{6\}$. Como la ecuación $a=\dfrac{1}{x-6}$ tiene solución si $a\ne 0$, $R(f)=\mathbb{R}-\{0\}$.

d) Para que exista la raíz debe ser $x^2-2x\ge 0$, por tanto, $D(f)=(-\infty,\ 0]\cup[2,\ +\infty)$.Como x^2-2x puede tomar cualquier valor real, $R(f)=[0,\ +\infty)$.

e) $D(f)=[0,\ 1]\cup[1{,}5;\ 2{,}5]$ y $R(f)=[-1,\ 1]$.

f) Como x^2+x+2 es siempre positivo, $D(f)=\mathbb{R}$. Como $x^2+x+2=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$, $R(f)=\left[\dfrac{\sqrt{7}}{2},\ +\infty\right)$.

g) $D(f)=(0,\ +\infty)$ y $R(f)=(0,\ +\infty)$.

h) Para que exista la raíz debe ser $1-x^2\ge 0$ y $x^2-1\ge 0$, por tanto, $D(f)=\{-1,\ 1\}$ y $R(f)=\{0\}$.

9. Sean las funciones $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$, $g(x)=\sqrt{x+3}$ y $h(x)=x^2-4$. Halla la expresión y el dominio de:

a) $\dfrac{g}{h}$ **b)** $f\circ g$ **c)** $g\circ f$ **d)** $f\circ g\circ h$

Observemos que: $D(f)=\mathbb{R}$, $D(g)=[-3,+\infty)$ y $D(h)=\mathbb{R}$

a) $\left(\dfrac{g}{h}\right)(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2-4}$, $D\left(\dfrac{g}{h}\right)=[-3,+\infty)-\{-2,2\}$

b) $(f\circ g)(x)=f\left(\sqrt{x+3}\right)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x+2}$, $D(f\circ g)=[-3,+\infty)-\{-2\}$

c) $(g\circ f)(x)=g\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)=\sqrt{\dfrac{3x^2+x-3}{x^2-1}}$, $D(g\circ f)=\left(-\infty,\dfrac{-1-\sqrt{37}}{6}\right]\cup(-1,1)\cup\left[\dfrac{-1+\sqrt{37}}{6},+\infty\right)$

d) $(f\circ g\circ h)(x)=(f\circ g)\left(x^2-4\right)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-2}$, $D(f\circ g\circ h)=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)-\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$

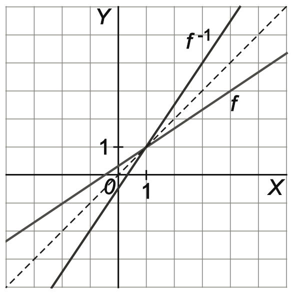
10. Obtén el dominio de la función inversa de $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$.

$D(f^{-1})=R(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

11. Calcula la inversa de $f(x)=\dfrac{2x+1}{3}$, dibuja las gráficas de f y f^{-1} y comprueba que $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$.

$$y=\frac{2x+1}{3}\Rightarrow x=\frac{3y-1}{2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3x-1}{2}$$

Ambas funciones son rectas y sus gráficas son las que se ven en la figura.



$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left(\frac{3x-1}{2}\right)=\frac{2\cdot\frac{3x-1}{2}+1}{3}=x$$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left(\frac{2x+1}{3}\right)=\frac{3\cdot\frac{2x+1}{3}-1}{2}=x$$

12. Sea $f(x)=x^5-x+1$. Usa la calculadora y aproxima $f^{-1}(10)$.

$f(1)=1$ y $f(2)=31$, por tanto, $f^{-1}(10)$ está entre 1 y dos. Realizando mejores aproximaciones tenemos $f(1{,}5)\simeq 7{,}09$; $f(1{,}6)\simeq 9{,}89$; $f(1{,}61)\simeq 10{,}21$ y $f(1{,}605)\simeq 10{,}05$, por tanto, $f^{-1}(10)$ está entre 1,6 y 1,605.

13. Ejercicio interactivo.

14. Ejercicio resuelto.

15. Para cada función, haz una tabla de valores adecuada para obtener los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 7}\sqrt[5]{5x-3}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}\,3x}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

a)

x	0,99	0,999	1,001	1,01
$f(x)$	0,5025126	0,50025013	0,49975012	0,49751244

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$

b)

x	6,99	6,999	7,001	7,01
$f(x)$	1,9993746	1,9999375	2,0000625	2,00062461

$\lim\limits_{x\to 7}\sqrt[5]{5x-3}=2$

c)

x	3,99	3,999	4,001	4,01
$f(x)$	3,9974984	3,99974998	4,00024998	4,00249844

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=4$

d)

x	-0,01	-0,001	0,001	0,01
$f(x)$	3,0009003	3,000009	3,000009	3,00090032

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}\,3x}{x}=3$

e)

x	1,99	1,999	2,001	2,01
$f(x)$	1,4000357	1,41279899	1,41562742	1,42832069

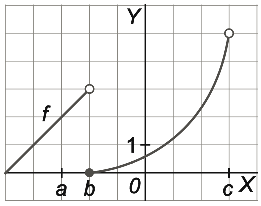
$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2-2}=\sqrt{2}$

f)

x	7,99	7,999	8,001	8,01
$f(x)$	11,994999	11,9995	12,0005	12,0049986

$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=12$

16. Dada la función de la figura, calcula $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ y los límites laterales y el límite de f en a, b y c.

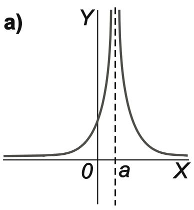


$f(a)=2$, $f(b)=0$ y $f(c)$ no existe.

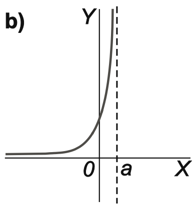
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ no existe, $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=5$, $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ no existe y $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ no existe.

17. Halla $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ en estas funciones.

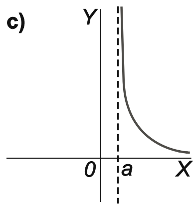
a)



b)



c)



a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ no existe.

c) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ no existe, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$.

18. Dados los siguientes límites, estima su valor utilizando una tabla de valores o su gráfica.

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x+1}{(x+1)^4}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 5^+} \frac{x+1}{(5-x)^3}$

b) $\lim\limits_{x\to 7^-} \frac{x+2}{7-x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x}{x-3}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x}{(x-4)^2}$

En todos los caso el denominador se acerca a cero y el numerador no. Así pues, la función se hará muy grande en valor absoluto. Solo debemos decidir qué signo tendrá.

a) Si x se aproxima a 2 por su izquierda, el numerador es positivo y el denominador negativo, por tanto, $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$.

b) Si x se aproxima a 7 por su izquierda, el numerador y el denominador son positivos, por tanto, $\lim\limits_{x\to 7^-} \frac{x+2}{7-x} = +\infty$.

c) Si x se aproxima a –1, tanto por su izquierda como por su derecha, el numerador es negativo y el denominador positivo, por tanto, $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x+1}{(x+1)^4} = -\infty$.

d) Si x se aproxima a 3 por su derecha, el numerador y el denominador son positivos, por tanto, $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x}{x-3} = +\infty$.

e) Si x se aproxima a 5 por su derecha, el numerador es positivo y el denominador negativo, por tanto, $\lim\limits_{x\to 5^+} \frac{x+1}{(5-x)^3} = -\infty$.

f) Si x se aproxima a 4, tanto por su izquierda como por su derecha, el numerador y el denominador son positivos, por tanto, $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x}{(x-4)^2} = +\infty$.

19. Ejercicio resuelto.

20. Estima el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x^2+1}$ **d)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^3+3x^2}{2x^3+8}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5x+1}{3x-2}$ **e)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^4+x+1}{x^3+x^2+x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{1+7^x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x+1}{6x^3+2x-3}$

a) $\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$, que, por ejemplo, para $x = 1000$ vale $0{,}001000999 \simeq 0$. Así, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0$.

b) $\frac{5x+1}{3x-2} = \frac{\frac{5x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{3x}{x}-\frac{2}{x}} = \frac{5+\frac{1}{x}}{3-\frac{2}{x}}$, que, por ejemplo, para $x = 1000$ vale $\frac{5{,}001}{2{,}998} \simeq \frac{5}{3}$ .Así, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5x+1}{3x-2} = \frac{5}{3}$.

c) Tomando $x = 1000$ se tiene $\frac{1}{1+7^{1000}} \simeq \frac{1}{7^{1000}} \simeq 0$ .Así, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{1+7^x} = 0$.

d) $\dfrac{3x^3+3x^2}{2x^3+8}=\dfrac{\dfrac{3x^3}{x^3}+\dfrac{3x^2}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{2x^3}{x^3}+\dfrac{8}{x^3}}=\dfrac{3+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{2+\dfrac{8}{x^3}}$, que, por ejemplo, para $x=1000$ vale $\dfrac{3{,}003000001}{2{,}000000008}\simeq\dfrac{3}{2}$. Así, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3+3x^2}{2x^3+8}=\dfrac{3}{2}$.

e) $\dfrac{x^4+x+1}{x^3+x^2+x+1}=\dfrac{\dfrac{x^4}{x^3}+\dfrac{x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{x+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}$, que, por ejemplo, para $x=-1000$ vale $\dfrac{-1000{,}000001001}{0{,}998998999}\simeq-1000{,}000001\simeq-1000$, así, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+x+1}{x^3+x^2+x+1}=-\infty$.

f) $\dfrac{3x+1}{6x^3+2x-3}=\dfrac{\dfrac{3x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{2x}{x^3}-\dfrac{3}{x^3}}=\dfrac{\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}$, que, por ejemplo, para $x=-1000$ vale, $\dfrac{-0{,}000003001}{0{,}999998003}\simeq-0{,}000003001\simeq0$, así, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+1}{6x^3+2x-3}=0$.

21. Estima los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x-7}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+1}{3x^7-1}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x}{2^x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2x}{7x^2+1}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7^{-x}}{2}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{2^{-x}}$

a) $\dfrac{2x}{x-7}=\dfrac{2}{1-\dfrac{7}{x}}$, que, por ejemplo, para $x=-1000$ vale aproximadamente 2, así $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x-7}=2$.

b) $\dfrac{2x^5+1}{3x^7-1}=\dfrac{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^7}}{3-\dfrac{1}{x^7}}$, que, por ejemplo, para $x=-1000$ vale aproximadamente 0, así, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+1}{3x^7-1}=0$.

c) $\dfrac{3^x}{2^x}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-x}$, que, por ejemplo, para $x=-1000$ vale aproximadamente 0, así, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x}{2^x}=0$.

d) $\dfrac{x^3-2x}{7x^2+1}=\dfrac{x-\dfrac{2}{x}}{7+\dfrac{1}{x^2}}$, que, por ejemplo, para $x=1000$ vale aproximadamente $\dfrac{1000}{7}$, así, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2x}{7x^2+1}=+\infty$.

e) $\dfrac{7^{-x}}{2}=\dfrac{1}{2\cdot7^x}$, que, por ejemplo, para $x=1000$ vale aproximadamente 0, así, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7^{-x}}{2}=0$.

f) $\dfrac{3^x}{2^{-x}}=3^x\cdot2^x=6^x$, que, por ejemplo, para $x=1000$ vale $6^{1000}\simeq10^{750}$, así, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{2^{-x}}=+\infty$.

22. Calcula $\lim_{x\to 2} f(x)$ en los siguientes casos.

a) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x^3-2x}{x^2+x-6}$

a) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{0}{4}=0$

b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-5)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-5)}{(x+2)}=-\dfrac{3}{4}$

c) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)}{(x+1)}=\dfrac{0}{3}=0$

d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x}{x^2+x-6}$, el numerador tiende a 4 y el denominador a 0, por lo que la función se hace muy grande en valor absoluto cuando x tiende a 2. Estudiando el signo de la función cuando x se acerca a 2 por la izquierda y por la derecha tenemos:

$\lim_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-2x}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-2x}{(x-2)(x+3)}=-\infty$ y $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{x^3-2x}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2^+}\dfrac{x^3-2x}{(x-2)(x+3)}=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x}{x^2+x-6}$ no existe.

23. Sabiendo que $\lim_{x\to a} f(x)=3$ y $\lim_{x\to a} g(x)=0$, calcula los límites en $x=a$ de fg, $f:g$, f^g y g^f.

$\lim_{x\to a}(fg)(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)=3\cdot 0=0$

$\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, el numerador tiende a 3 y el denominador a 0, por lo que $\dfrac{f}{g}$ se hace arbitrariamente grande en valor absoluto cerca de $x=a$. Habría que estudiar el signo de $\dfrac{f}{g}$ cuando x se acerca a 2 por la izquierda y por la derecha, es decir, determinar los límites laterales. Si los límites laterales existen y coinciden, $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ existirá y su valor coincidirá con el de los límites laterales, en caso contrario $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ no existirá.

$\lim_{x\to a}\left(f^g\right)(x)=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^{\lim_{x\to a}g(x)}=3^0=1$

$\lim_{x\to a}\left(g^f\right)(x)=\left(\lim_{x\to a}g(x)\right)^{\lim_{x\to a}f(x)}=0^3=0$ si $g(x)\geq 0\ \ \forall x\in E(a,\varepsilon)$. Por ejemplo, no existe $\lim_{x\to a}\left[-(x-a)^2\right]^{x-a+3}$.

24. Calcula:

a) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3}$ **b)** $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x+6}$

a) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3}=-\dfrac{1}{2}$, ya que el numerador y el denominador tienen el mismo grado.

Si se quiere ser más riguroso: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x}-2}=\dfrac{1-0+0}{0-0-2}=-\dfrac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x+6}=0$, ya que el "grado" del "numerador" es menor que el grado del denominador.

Si se quiere ser más riguroso: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x+6}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt{x-2}}{x}}{\dfrac{x+6}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{2}{x}}}{1+\dfrac{6}{x}}=\dfrac{0}{1}=0$

25 y 26. Ejercicios resueltos.

27. Determina el mayor conjunto de números reales donde sean continuas las siguientes funciones.

a) $f(x)=x^2-1$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

c) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$

d) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

e) $f(x)=[x]$

f) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-7x+12}$

g) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2+1}$

h) $f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x<1\\ 0 & \text{si } x=1\\ x+1 & \text{si } x>1\end{cases}$

a) La función es continua en $\mathbb{R}$ por ser una función polinómica.

b) La función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$ por ser una función racional y anularse el denominador en $x=1$.

c) La función es continua en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ por ser una función racional y anularse el denominador en $x=-1$ y $x=1$.

d) La función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$,pues la función $|x|$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y el denominador se anula en $x=0$.

e) La función es continua en $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$, ya que la función parte entera "salta" en los números enteros.

f) La función es continua en $\mathbb{R}-\{3, 4\}$ por ser una función racional y anularse el denominador en $x=3$ y $x=4$.

g) La función es continua en $\mathbb{R}$ por ser una función racional y el denominador no se anula en ningún número real.

h) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to1} f(x)=2$, pero $f(x)=0\neq 2$, por tanto la función es discontinua en $x=1$ y continua en el resto por estar definida por polinomios. Así, la función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$.

28. En cada caso, halla qué valor debe tener la función en el punto indicado para que sea continua en él.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, en $x=1$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$, en $x=2$

a) Como $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$ debe ser $f(1)=2$.

b) Como $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{3}{4}$ debe ser $f(2)=\dfrac{3}{4}$.

29. Halla el valor de *k* que hace *f* continua en *x* = 1.

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} & \text{si } x\neq 1 \text{ y } x\neq 2\\ 2k+1 & \text{si } x=1\end{cases}}$$

Como $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$, debe ser $f(1)=-2$ y, por tanto, $k=-\dfrac{3}{2}$.

30. Ejercicio interactivo.

31 y 32. Ejercicios resueltos.

33. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-9}$

b) $f(x)=\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}$

c) $f(x)=\dfrac{2x+5}{3x}$

d) $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{x}$

a) Asíntotas verticales:

Como el dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-3,\ 3\}$, puede tener asíntotas verticales en $x=-3$ y $x=3$.

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{2x-1}{x^2-9}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{2x-1}{x^2-9}=+\infty$, por tanto, $x=-3$ es asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x-1}{x^2-9}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x-1}{x^2-9}=+\infty$, por tanto, $x=3$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales:

Tiene la misma asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$, ya que el grado del numerador es menor o igual al del denominador.

De hecho:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-1}{x^2-9}=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-1}{x^2-9}=0$, por lo que $y=0$ es asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$.

Asíntotas oblicuas:

No tiene por tener horizontales, o porque el grado del numerador no es uno más que el del denominador.

b) Asíntotas verticales:

Como el dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-2,\ -1\}$, puede tener asíntotas verticales en $x=-2$ y $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=+\infty$, por tanto, $x=-2$ es asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=+\infty$, por tanto, $x=-1$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales:

No tiene asíntotas horizontales, ya que el grado del numerador no es menor o igual al del denominador.

De hecho:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=+\infty$

Asíntotas oblicuas:

Tiene la misma asíntota oblicua en $+\infty$ y $-\infty$, ya que el grado del numerador es uno más que el del denominador.

De hecho, dividiendo, tenemos $f(x)=\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=(3x-7)+\dfrac{15x+17}{x^2+3x+2}$ y, por tanto, la recta $y=3x-7$ es una asíntota oblicua en $+\infty$ y $-\infty$.

c) Asíntotas verticales:

Como el dominio de la función es $\mathbb{R}-\{0\}$, puede tener asíntotavertical en $x=0$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+5}{3x}=-\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+5}{3x}=+\infty$, por tanto, $x=0$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales:

Tiene la misma asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$, ya que el grado del numerador es menor o igual al del denominador.

De hecho:

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x+5}{3x}=\frac{2}{3}$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x+5}{3x}=\frac{2}{3}$, por lo que $y=\frac{2}{3}$ es asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$.

Asíntotas oblicuas:

No tiene por tener horizontales, o porque el grado del numerador no es uno más que el del denominador.

d) Asíntotas verticales:

Como el dominio de la función es $\mathbb{R}-\{0\}$, puede tener asíntota vertical en $x=0$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{4x^2+1}{x}=-\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^2+1}{x}=+\infty$, por tanto, $x=0$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales:

No tiene asíntotas horizontales, ya que el grado del numerador no es menor o igual al del denominador.

De hecho:

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^2+1}{x}=-\infty$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{4x^2+1}{x}=+\infty$

Asíntotas oblicuas:

Tiene la misma asíntota oblicua en $+\infty$ y $-\infty$, ya que el grado del numerador es uno más que el del denominador.

De hecho, dividiendo, tenemos $f(x)=\frac{4x^2+1}{x}=4x+\frac{1}{x}$ y, por tanto, la recta $y=4x$ es una asíntota oblicua en $+\infty$ y $-\infty$.

34. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x^2+2}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x}{x^3-1}$ **c)** $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ **d)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x+3}}$

a) Asíntotas verticales:Como el dominio de la función es $\mathbb{R}$, no puede tener asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales:Tiene la misma asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$, ya que el grado del numerador es menor o igual al del denominador.

De hecho, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$, por lo que $y=3$ es asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$.

Asíntotas oblicuas: No tiene por tener horizontales, o porque grad (numerador) $\neq$ 1 +grad(denominador).

b) Asíntotas verticales:Como el dominio de la función es $\mathbb{R}-\{1\}$, puede tener asíntota vertical en $x=1$.

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$, por tanto, $x=1$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales:Tiene la misma asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$, ya que grado del numerador es menor o igual al del denominador.

De hecho, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, por lo que $y=0$ es asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$.

Asíntotas oblicuas: No tiene por tener horizontales, o porque grad(numerador)$\neq$ 1 + grad(denominador).

c) Asíntotas verticales:Como el dominio de la función es $\mathbb{R}$, no puede tener asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, por tanto no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas:Para calcular las asíntotas oblicuas se debe tener cuidado con los signos.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(-x)^2+3}}{-x}=\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{\frac{x^2+3}{x^2}}=-\sqrt{1}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+3}{x^2}}=\sqrt{1}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$$

La recta $y=-x$ es asíntota oblicua en $-\infty$ y la recta $y=x$ lo es en $+\infty$.

d) El dominio de la función es $(-\infty,-3)\cup[1,+\infty)$

Asíntotas verticales:Como $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=0$, $x=-3$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x^3+3x^2}}=1$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+3}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+3}}-x\right)\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+3}}+x\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+3}}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-1}{x+3}-x^2}{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+3}}+x\right)}=-\frac{3}{2}$$

La recta $y=x-\dfrac{3}{2}$ es asíntota oblicua en $+\infty$ y análogamente, la recta $y=-x+\dfrac{3}{2}$ es asíntota oblicua en $-\infty$.

35. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \dfrac{3n^2+5}{2n^2-3}$ **c)** $\dfrac{1+n}{1+n^2}$ **e)** $\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

b) $\dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}+2}$ **d)** $\dfrac{4n^3}{2-n^2}$ **f)** $\dfrac{\sqrt{n+5}}{n-5}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+5}{2n^2-3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+\frac{5}{n^2}}{2-\frac{3}{n^2}} = \dfrac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{1+\frac{2}{\sqrt{n}}} = 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+n}{1+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+1} = 0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3}{2-n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n}{\frac{2}{n^2}-1} = -\infty$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2} = 0$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+5}}{n-5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}}{1-\frac{5}{n}} = 0$

36. ¿Son convergentes las siguientes sucesiones? En caso de serlo, ¿a qué número convergen?

a) $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ **b)** $a_n = \dfrac{1+2^n}{1+3^n}$ **c)** $a_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{1+\sqrt[3]{n}}$ **d)** $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

a) Convergente, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$

b) Convergente, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2^n}{1+3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1} = 0$

c) No convergente, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+1}{1+\sqrt[3]{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[6]{n^3}+1}{1+\sqrt[6]{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[6]{n}+\frac{1}{\sqrt[6]{n^2}}}{\frac{1}{\sqrt[6]{n^2}}+1} = +\infty$.

Se podría decir que es convergente a $+\infty$.

d) La sucesión es decreciente y acotada inferiormente, por tanto es convergente:

$a_{n+1}-a_n = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} - \dfrac{n^2}{2^n} = \dfrac{-n^2+2n+1}{2^{n+1}} = \dfrac{2-(n-1)^2}{2^{n+1}} < 0$ si $n>2$ y, claramente, $a_n > 0$ para todo n.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$

37. Halla sucesiones que cumplan las siguientes condiciones.

a) Es creciente y está acotada superiormente.

b) Es creciente y no está acotada superiormente.

c) No es creciente, pero sí está acotada superiormente.

d) No es creciente ni está acotada superiormente.

a) $a_n = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$ **b)** $a_n = n$ **c)** $a_n = (-1)^n$ **d)** $a_n = (-1)^n n$

38. a) Demuestra que es creciente y acotada superiormente, y, por tanto, es convergente la sucesión: $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

b) Halla su límite.

a) $a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{3}{(n+3)(n+2)} > 0$ y $a_n = \frac{2n+1}{n+2} < \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} \le 2 + 1 = 3$.

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 2$

39. Ejercicio resuelto.

40. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(2n - \sqrt{4n^2-1}\right)$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-5n}\right)$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n} - \sqrt{n^2+n}\right)$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4-n^2+1} - n^2\right)$

f) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n} - \sqrt{5n}\right)$

g) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n-2} - n\right)$

h) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-8} - \sqrt{n}\right)$

i) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-6n+2} - 3n + 1\right)$

j) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-12} - 3n\right)$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(2n - \sqrt{4n^2-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2n - \sqrt{4n^2-1}\right)\left(2n + \sqrt{4n^2-1}\right)}{2n + \sqrt{4n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n + \sqrt{4n^2-1}} = 0$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-5n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-5n}\right)\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-5n}\right)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-5n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-5n}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{5}{n}}} = \frac{5}{2}$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n} - \sqrt{n^2+n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2-3n} - \sqrt{n^2+n}\right)\left(\sqrt{n^2-3n} + \sqrt{n^2+n}\right)}{\sqrt{n^2-3n} + \sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-4n}{\sqrt{n^2-3n} + \sqrt{n^2+n}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{-4}{\sqrt{1-\frac{3}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} = -2$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4-n^2+1}-n^2\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^4-n^2+1}-n^2\right)\left(\sqrt{n^4-n^2+1}+n^2\right)}{\sqrt{n^4-n^2+1}+n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^2+1}{\sqrt{n^4-n^2+1}+n^2}=-\dfrac{1}{2}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{5n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{5n}\right)\left(\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{5n}\right)}{\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{5n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-8n}{\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{5n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-8}{\sqrt{1-\frac{3}{n}}+\sqrt{\frac{5}{n}}}=+\infty$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n-2}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+4n-2}-n\right)\left(\sqrt{n^2+4n-2}+n\right)}{\sqrt{n^2+4n-2}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-2}{\sqrt{n^2+4n-2}+n}=2$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-8}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n-8}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n-8}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n-8}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-8}{\sqrt{n-8}+\sqrt{n}}=0$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-6n+2}-3n+1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{9n^2-6n+2}-3n+1\right)\left(\sqrt{9n^2-6n+2}+3n-1\right)}{\sqrt{9n^2-6n+2}+3n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{9n^2-6n+2}+3n-1}=0$

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-12}-3n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{9n^2-12}-3n\right)\left(\sqrt{9n^2-12}+3n\right)}{\sqrt{9n^2-12}+3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-12}{\sqrt{9n^2-12}+3n}=0$

41. Halla los límites de las sucesiones.

a) $a_n=\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n+5}$

b) $b_n=\left(\dfrac{n+8}{n+7}\right)^{-2+n}$

c) $c_n=\left(\dfrac{n+1}{n+7}\right)^{n}$

d) $d_n=\left(\dfrac{n-2}{n-3}\right)^{2n}$

e) $e_n=\left(\dfrac{n^2+3n+1}{n^2+3n}\right)^{n+1}$

f) $f_n=\left(\dfrac{2n^2+n+5}{2n^2+3}\right)^{\frac{n^2+3}{n+1}}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n+5}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)^{n+5}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^{\frac{2(n+5)}{n+1}}=e^2$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+8}{n+7}\right)^{-2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+7}\right)^{-2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n+7}\right)^{n+7}\right]^{\frac{n-2}{n+7}}=e^1=e$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+7}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+7}{n+1}\right)^{-n}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{6}{n+7}\right)^{-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{n+7}{6}}\right)^{\frac{n+7}{6}}\right]^{\frac{-6n}{n+7}}=e^{-6}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n-3}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-3}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n-3}\right)^{n-3}\right]^{\frac{2n}{n-3}}=e^2$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3n+1}{n^2+3n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2+3n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2+3n}\right)^{n^2+3n}\right]^{\frac{n+1}{n^2+3n}}=e^0=1$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+5}{2n^2+3}\right)^{\frac{n^2+3}{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n+2}{2n^2+3}\right)^{\frac{n^2+3}{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{2n^2+3}{n+2}}\right)^{\frac{2n^2+3}{n+2}}\right]^{\frac{n^2+3}{n+1}\cdot\frac{n+2}{2n^2+3}}=e^{1/2}=\sqrt{e}$

42. Ejercicio interactivo.

43 a 52. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Concepto de función. Dominio y recorrido.

53. Obtén el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ **e)** $f(x)=\sqrt{(x-1)(2x+3)}$ **g)** $f(x)=1+\sqrt{\dfrac{3-x}{5-x}}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$ **f)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$ **h)** $f(x)=1+\sqrt{\dfrac{5-x}{3-x}}$

a) $D(f)=\mathbb{R}$, ya que el denominador no se anula en ningún número real.

b) $D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$, ya que el denominador se anula en $x=1$.

c) $D(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$, ya que el denominador se anula en $x=-2$.

d) $D(f)=\mathbb{R}-\{-2,\ 2\}$, ya que el denominador se anula en $x=-2$ y $x=2$.

e) Debe ser $(x-1)(2x+3)\geq 0$, por tanto, $D(f)=\left(-\infty,\ -\dfrac{3}{2}\right]\cup[1,\ +\infty)$.

f) Debe ser $(x-1)(2x+3)>0$, por tanto, $D(f)=\left(-\infty,\ -\dfrac{3}{2}\right)\cup(1,\ +\infty)$.

g) Debe ser $\dfrac{3-x}{5-x}\geq 0$, por tanto, $D(f)=(-\infty,\ 3]\cup(5,\ +\infty)$.

h) Debe ser $\dfrac{5-x}{3-x}\geq 0$, por tanto, $D(f)=(-\infty,\ 3)\cup[5,\ +\infty)$.

54. Determina el dominio de las funciones siguientes.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x\leq 0\\ \sqrt{2x+1} & \text{si } x>0\end{cases}$ **c)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x\leq 2\\ \sqrt{2x+1} & \text{si } x>2\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x\leq -2\\ \sqrt{2x+1} & \text{si } x>-2\end{cases}$ **d)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x\leq -1\\ \sqrt{2x+1} & \text{si } x>5\end{cases}$

Observemos que $g(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ no está definida si $x=1$ y $h(x)=\sqrt{2x+1}$ sólo está definida si $x\in\left[-\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$, así:

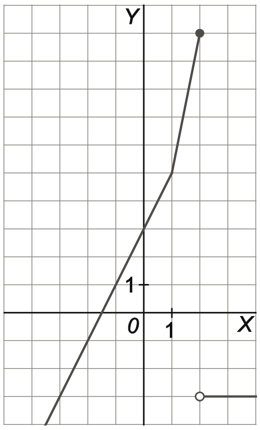
a) $D(f)=\mathbb{R}$ **c)** $D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

b) $D(f)=\mathbb{R}-\left(-2,\ -\dfrac{1}{2}\right)=(-\infty,\ -2]\cup\left[-\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$ **d)** $D(f)=(-\infty,\ -1]\cup[5,\ +\infty)$

Formas de definir una función

55. Representa la gráfica de la función:

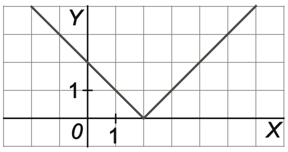
$$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x<1 \\ x^2+2x+2 & \text{si} \quad 1\le x\le 2 \\ -3 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$



La gráfica de $f_1(x)=2x+3$ es una recta que pasa por los puntos (0, 3) y (1, 5). La gráfica de $f_2(x)=x^2+2x+2$ es una parábola con vértice en (–1, 1) y que pasa por (1, 5) y (2, 10). La gráfica de $f_3(x)=-3$ es la recta horizontal $y=-3$.

56. Dibuja la gráfica de $f(x)=|2-x|$.

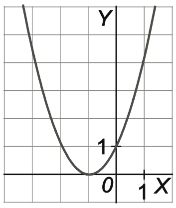
$$f(x)=|2-x|=\begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x\le 2 \\ x-2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$



57. Representa gráficamente la función que se corresponde con los datos de la siguiente tabla y busca una expresión analítica para dicha función.

x	–2	0	1	3
y	1	1	4	16

Como $f(-2)=f(0)$ podemos pensar que se trata de una parábola con eje de simetría en $x=-1$, es decir, una expresión de la forma $f(x)=a(x+1)^2+b$. Imponiendo que pase por (0, 1) y (1, 4) obtendríamos $f(x)=(x+1)^2$, que también verifica que $f(3)=16$, por lo que la expresión es válida.



58. Escribe la expresión analítica de las funciones definidas por los siguientes enunciados.

a) A cada número real se le asigna el triple de su cuadrado menos el doble de su cubo.

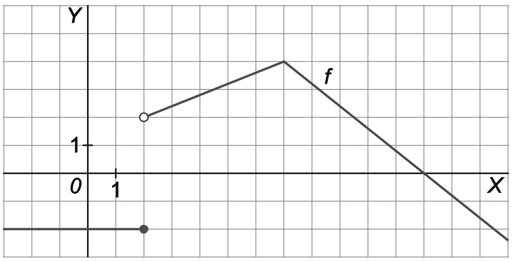
b) A cada número natural se le asocia la raíz cuadrada negativa de la suma de su cuadrado con él mismo.

c) Un comercial cobra un fijo de 500 € al mes más un 2% de la facturación que haya obtenido durante dicho mes. Escribe la función que da el sueldo del comercial en función de dicha facturación mensual.

d) En una clase se tiene un diccionario por cada alumno, un atlas por cada dos alumnos, y un ordenador, por cada tres. Se pide la función que da el número total de materiales de apoyo que hay en la clase en función del número de alumnos de la misma.

a) $f(x)=3x^2-2x^3$ **b)** $f(n)=-\sqrt{n^2+n}$ **c)** $f(x)=500+0{,}02x$ **d)** $f(x)=x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}$

59. Encuentra una expresión analítica de la función cuya gráfica es la siguiente.



$$f(x)=\begin{cases} -2 & \text{si} \quad x\le 2 \\ \dfrac{2x+6}{5} & \text{si} \quad 2<x<7 \\ \dfrac{-4x+48}{5} & \text{si} \quad x\ge 7 \end{cases}$$

Operaciones con funciones

60. Definimos dos funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\frac{1}{x-2}$. Demuestra que $(f\circ g)(x)=x-2$ y justifica que el dominio de esta función no sea $\mathbb{R}$.

$(f\circ g)(x)=f\left(\frac{1}{x-2}\right)=x-2$. Como $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$ y $D(g)=\mathbb{R}-\{2\}$, la composición no está definida en $x=2$ ni en los puntos donde se anule *g*. Puesto que la función *g* no se anula en ningún valor, $D(f\circ g)=\mathbb{R}-\{2\}$.

61. A partir de $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=\sqrt{2x-4}$, $h(x)=\frac{1}{x^2-4}$ y $t(x)=1-x^2$, calcula las funciones siguientes y halla sus dominios.

a) $(f-t)(x)$ **d)** $(g\circ t)(x)$ **g)** $f^{-1}(x)$ **j)** $t^{-1}(x)$

b) $\left(\frac{f}{h}\right)(x)$ **e)** $(fh)(x)$ **h)** $g^{-1}(x)$ **k)** $(h\circ g\circ t)(x)$

c) $(h\circ g)(x)$ **f)** $\left(\frac{f}{t}\right)(x)$ **i)** $h^{-1}(x)$ **l)** $(t\circ t\circ g)(x)$

a) $(f-t)(x)=f(x)-t(x)=2x^2-x-3$. Como $D(f)=D(t)=\mathbb{R}$, $D(f-t)=\mathbb{R}$.

b) $\left(\frac{f}{h}\right)(x)=\frac{f(x)}{h(x)}=(x^2-x-2)(x^2-4)$. El dominio de $\frac{f}{h}$ está formado por los valores para los que existen *f* y *h* y, además, no anulan a *h*. Por tanto, aunque la expresión de $\frac{f}{h}$ sea polinómica, $D\left(\frac{f}{h}\right)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

c) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h\left(\sqrt{2x-4}\right)=\frac{1}{2x-8}$. Tenemos $D(g)=[2,+\infty)$, pero si $2x-4=4$, es decir, si $x=4$, no existe $(h\circ g)(x)$, por tanto, $D(h\circ g)=[2,4)\cup(4,+\infty)$.

d) $(g\circ t)(x)=g(t(x))=g\left(1-x^2\right)=\sqrt{-2x^2-2}$. Al ser siempre negativo $-2x^2-2$; $D(g\circ t)=\varnothing$.

e) $(fh)(x)=f(x)h(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$ y $D(fh)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

f) $\left(\frac{f}{t}\right)(x)=\frac{f(x)}{t(x)}=\frac{x^2-x-2}{1-x^2}$ y $D\left(\frac{f}{h}\right)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

g) Al no ser *f*(*x*) inyectiva, no tiene inversa.

h) $y=\sqrt{2x-4}\Rightarrow x=\frac{y^2+4}{2}\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{x^2+4}{2}$ y $D(g^{-1})=R(g)=[0,+\infty)$.

i) Al no ser *j*(*x*) inyectiva, no tiene inversa.

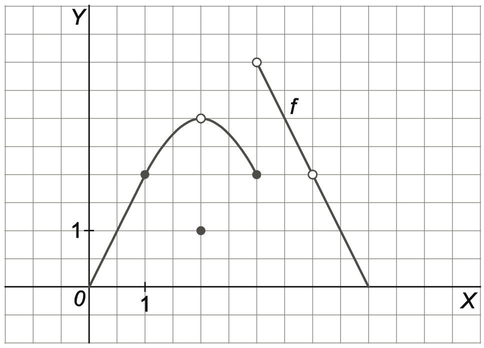
j) Al no ser *t*(*x*) inyectiva, no tiene inversa.

k) El dominio de esta función es vacío, ya que *g*(*x*) sólo está definida si $x\geq 2$ pero el recorrido de *t* es $(-\infty,1]$.

l) $(t\circ t\circ g)(x)=t(t(g(x)))=t\left(t\left(\sqrt{2x-4}\right)\right)=t(-2x+5)=1-(-2x+5)^2$ y $D(t\circ t\circ g)=D(g)=[2,+\infty)$ pese a que la expresión de $t\circ t\circ g$ es polinómica.

Límite de una función en un punto

62. Analiza la siguiente gráfica que representa una función *f*(*x*) y calcula:



a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ **e)** $\lim_{x\to 4} f(x)$ **i)** $f(2)$

b) $\lim_{x\to 1} f(x)$ **f)** $\lim_{x\to 5} f(x)$ **k)** $f(3)$

c) $\lim_{x\to 2} f(x)$ **g)** $f(0)$ **k)** $f(4)$

d) $\lim_{x\to 3} f(x)$ **h)** $f(1)$ **l)** $f(5)$

a) $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ **d)** $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe. **g)** $f(0)=0$ **j)** $f(3)=2$

b) $\lim_{x\to 1} f(x)=2$ **e)** $\lim_{x\to 4} f(x)=2$ **h)** $f(1)=2$ **k)** $f(4)$ no existe.

c) $\lim_{x\to 2} f(x)=3$ **f)** $\lim_{x\to 5} f(x)=0$ **i)** $f(2)=1$ **l)** $f(5)=0$

63. Con ayuda de tu calculadora obtén, si existen, los límites siguientes.

a) $\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{3x+2}$ **c)** $\lim_{x\to 0}(x^2-4x-5)$ **e)** $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$

b) $\lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x-3}$ **d)** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ **f)** $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x}$

a) $\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{3x+2}=2$ **c)** $\lim_{x\to 0}(x^2-4x-5)=-5$ **e)** $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ no existe

b) $\lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x-3}$ no existe **d)** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}=0$ **f)** $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x}=-1$

Límites infinitos y en el infinito. Cálculo de límites

64. Calcula estos límites.

a) $\lim_{x\to +\infty}\left(x^3-3x^2+25x\right)$ **e)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{3}{x^2+5}$

b) $\lim_{x\to -\infty}\left(x^3-3x^2+25x\right)$ **f)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{-x}{x^2-4}$

c) $\lim_{x\to +\infty}\left(-5x^2+7x-3\right)$ **g)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3}{7x-2}$

d) $\lim_{x\to -\infty}\left(-5x^2+7x-3\right)$ **h)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{5-x}{x+5}$

a) $\lim_{x\to +\infty}\left(x^3-3x^2+25x\right)=\lim_{x\to +\infty}\left[x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{25}{x^2}\right)\right]=+\infty$ **e)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{3}{x^2+5}=0$

b) $\lim_{x\to -\infty}\left(x^3-3x^2+25x\right)=-\infty$ **f)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{-x}{x^2-4}=0$

c) $\lim_{x\to +\infty}\left(-5x^2+7x-3\right)=-\infty$ **g)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3}{7x-2}=+\infty$

d) $\lim_{x\to -\infty}\left(-5x^2+7x-3\right)=-\infty$ **h)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{5-x}{x+5}=-1$

65. Calcula los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2}{2x+5}$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5-x}{x+5}$ **e)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^2+5}$ **g)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+1}{4x^2-3}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-3}{7x-2}$ **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-2x}{x^2+1}$ **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x^2-4}$ **h)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3-x^2}{x^5+x^2}$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2}{2x+5}=\dfrac{3}{2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5-x}{x+5}=-1$ **e)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^2+5}=0$ **g)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+1}{4x^2-3}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-3}{7x-2}=-\infty$ **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-2x}{x^2+1}=0$ **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x^2-4}=0$ **h)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3-x^2}{x^5+x^2}=0$

66. Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+5}{\sqrt{4x^2-x+2}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3-3x^2}-3}{2x+1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+3x^2}}{x+5}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-6}{\sqrt[5]{x^{13}-x^5}}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+5}{\sqrt{4x^2-x+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}$, ya que el grado del numerador es igual al "grado" del denominador.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3-3x^2}-3}{2x+1}=\dfrac{\sqrt[3]{8}}{2}=1$, ya que el "grado" del numerador es igual al grado del denominador.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+3x^2}}{x+5}=+\infty$, ya que el "grado" del numerador es mayor que el grado del denominador.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-6}{\sqrt[5]{x^{13}-x^5}}=0$, ya que el grado del numerador es menor que el "grado" del denominador.

67. Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3x}-\dfrac{3}{2x+1}\right)$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3x}-\dfrac{3}{2x+1}\right)=0-0=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x(x+1)}=1$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}=+\infty$

68. Calcula los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de las funciones siguientes.

a) $f(x)=\sqrt{x-5}$

b) $f(x)=\dfrac{|x|}{2-x}$

a) El límite en $-\infty$ no existe pues la función solo está definida si $x \geq 5$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-5}=+\infty$.

b) $f(x)=\dfrac{|x|}{2-x}=\begin{cases}\dfrac{-x}{2-x} & \text{si } x<0\\ \dfrac{x}{2-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$, así $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{2-x}=1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2-x}=-1$

69. Halla, si existen, estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-3}{x^2-2x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-1}{x^2-x}$

c) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-1}{x^2-x}$

d) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{x^2+4x-1}{x^2-6x+8}$

f) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^3-50}{x^2+10x+25}$

g) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

h) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

l) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-3}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-3}{(x-1)^2}=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{x^2+4x-1}{x^2-6x+8}=\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{x^2+4x-1}{(x-4)(x-2)}=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^3-50}{x^2+10x+25}=\dfrac{75}{100}=\dfrac{1}{4}$

g) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x(x^3-3)}{x^2(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3}{x(x-2)}$ no existe, pues el signo del cociente cambia si la aproximación a 2 es por la derecha o por la izquierda.

h) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^3-3}{x(x-2)}=+\infty$

i) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^3-3}{x(x-2)}=-\infty$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=-\infty$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=+\infty$

l) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-3}{x(x-2)}$ no existe, pues el signo del cociente cambia según sea la aproximación a derecha o por la izquierda.

70. En caso de existir, calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}$ g) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{9-x^2}$ j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}$ e) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x^2-9}$ h) $\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{9-x^2}$ k) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2+x-90}{\sqrt{x}-3}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ l) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x}$

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=\dfrac{10}{2}=5$

b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=\dfrac{0}{12}=0$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=\dfrac{-2}{2}=-1$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+3)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{x-1}=-3$

e) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x^2-9}=\sqrt{16}=4$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}+1=2$

g) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{9-x^2}$ no existe, ya que la raíz está definida sólo si $x\in[-3,3]$.

h) $\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{9-x^2}=0$

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$

j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$

k) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2+x-90}{\sqrt{x}-3}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(x-9)(x+10)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(x-9)(x+10)\left(\sqrt{x}+3\right)}{x-9}=\lim\limits_{x\to 9}(x+10)\left(\sqrt{x}+3\right)=114$

l) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x}=\dfrac{-2}{-1}=2$

71. Efectúa el límite $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ en el que *f* es la función $f(x)=x^2-3x$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-3(x+h)-(x^2-3x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-3h}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h-3)=2x-3$$

72. Calcula $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(-x^2-x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{-x^2-x-1}=\frac{3}{-3}=-1$$

73. Si existen, halla los siguientes límites en la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-2} & \text{si } x<1\\ 2x-1 & \text{si } 1\le x<4\\ \sqrt{x}+x+1 & \text{si } x\ge 4\end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ **g)** $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **h)** $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ **i)** $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x-2}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe, pues no coinciden los límites laterales.

c) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x-2}=-1$

d) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-1)=1$

e) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)=5$

f) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}(\sqrt{x}+x+1)=7$

g) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(2x-1)=7$

h) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=7$, pues $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=7$

i) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=\lim\limits_{x\to 5}(\sqrt{x}+x+1)=6+\sqrt{5}$

Continuidad de una función

74. *La función $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$ no está definida para $x=1$ ni para $x=-1$.

a) Estudia su continuidad.

b) ¿Qué valores hay que adjudicar a $f(1)$ y $f(-1)$ para que la función *f* sea continua en $\mathbb{R}$?

a) La función es continua en $\mathbb{R}-\{-1, 1\}$.

b) Tenemos $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-1)(x+1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}(x+3)=2$ y $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+3)=4$, por tanto, debemos definir $f(1)=4$ y $f(-1)=2$.

Observemos que los límites anteriores prueban, además, que las discontinuidades en $x=-1$ y $x=1$ son evitables.

75. Encuentra el mayor conjunto de números reales donde sean continuas las siguientes funciones.

a) $f(x)=2x^3-5x$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$

c) $f(x)=\dfrac{3x+7}{x-2}$

d) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2x-5}$

e) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^3-4x}$

f) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+5x+4}$

g) $f(x)=\sqrt{x^2+x+5}$

h) $f(x)=\sqrt{9x^2-4}$

i) $f(x)=\sqrt{2x^2+3x-8}$

j) $f(x)=\sqrt{x-x^3}$

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R}$

c) $\mathbb{R}-\{2\}$

d) $\mathbb{R}-\left\{-1-\sqrt{6},\ -1+\sqrt{6}\right\}$

e) $\mathbb{R}-\{-2,\ 0,\ 2\}$

f) $\mathbb{R}-\{-4,\ -1\}$.

g) $\mathbb{R}$.

h) $\left(-\infty,\ -\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[\dfrac{2}{3},\ +\infty\right)$

i) $\left(-\infty,\ \dfrac{-3-\sqrt{73}}{4}\right]\cup\left[\dfrac{-3+\sqrt{73}}{4},\ +\infty\right)$

j) $(-\infty,\ -1]\cup[0,\ 1]$

76. Investiga para qué valores reales son continuas las siguientes funciones y clasifica las posibles discontinuidades que encuentres.

a) $f(x)=\begin{cases}2x+6 & \text{si } x<1\\ x+7 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}2x+6 & \text{si } x<1\\ x-7 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+6}{x} & \text{si } x<1\\ x+7 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

d) $f(x)=5-|2x-6|$

e) $f(x)=|x+1|-|x+5|$

f) $f(x)=|x^2-3x-10|$

g) $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$

a) Las expresiones que definen la función son continuas, por tanto, debemos estudiar qué ocurre en los extremos de los intervalos de definición.

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=8$, la función es continua en $\mathbb{R}$.

b) Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=8$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-6$, la función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$ y tiene una discontinuidad de salto finito en $x=1$.

c) La función no está definida si $x=0$, además $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=8$, por tanto, es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$.

d) La función es continua en $\mathbb{R}$.

e) La función es continua en $\mathbb{R}$.

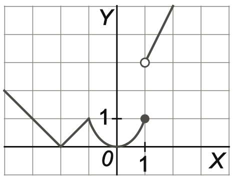
f) La función es continua en $\mathbb{R}$.

g) La función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$, ya que en $x=0$ no está definida.

77. Estudia la continuidad de la función y dibújala.

$$f(x)=\begin{cases}|x+2| & \text{si } x\le -1\\ x^2 & \text{si } -1<x\le 1\\ 2x+1 & \text{si } x>1\end{cases}$$

Como cada una de las expresiones que definen f son funciones continuas, debemos ver qué ocurre en los extremos de los intervalos de definición:

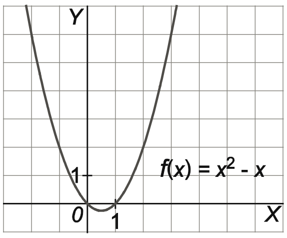


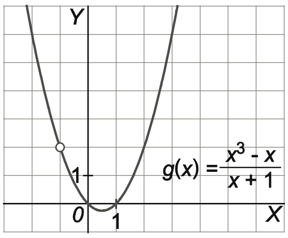
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}|x+2|=1$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x^2=1$, por tanto, es continua en $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+1)=3$, por tanto, tiene una discontinuidad de salto finito en $x=1$.

Resumiendo, la función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$.

78. Como se observa en la figura, al dibujar la gráfica de las funciones $f(x)=x^2-x$ y $g(x)=\dfrac{x^3-x}{x+1}$ se obtiene la misma gráfica para ambas.





Sin embargo, dichas funciones no son iguales. Indica sus diferencias haciendo un estudio de lo que ocurre en el punto de abscisa $x=-1$.

Las funciones no son iguales, ya que $D(f)=\mathbb{R}$ y $D(g)=\mathbb{R}-\{-1\}$.

Sin embargo, en $x=-1$ tenemos:

$$\lim_{x\to -1} g(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-x}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x^2-x)=\lim_{x\to -1} f(x)$$

En el resto de puntos, obviamente ambas funciones coinciden.

79. Determinar *a* y *b* para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si } x<0\\ ax+b & \text{si } 0\le x\le 3\\ x-5 & \text{si } x>3\end{cases}$$

Los únicos puntos donde podría no ser continua son los de abscisas $x=0$ y $x=3$. Para que f sea continua en ellos los límites laterales deben ser iguales. Por tanto:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1=b\\ 3a+b=-2\end{cases}\Rightarrow a=-1,\ b=1.$$

Para estos valores coincide el valor de la función en los puntos considerados con los límites calculados, por lo que la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

80. En cada caso, calcula los valores de *m* y *n* para que las funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x)=\begin{cases}3 & \text{si } x\le 0\\ mx+n & \text{si } 0<x<2\\ -1 & \text{si } x\le 2\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}3mx-1 & \text{si } x\le -1\\ nx^2-4m & \text{si } -1<x\le 3\\ n+2 & \text{si } x>3\end{cases}$

a) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3=n\\ 2m+n=-1\end{cases}\Rightarrow m=-2,\ n=3$

b) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3m-1=n-4m\\ 9n-4m=n+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m-n=1\\ -4m+8n=2\end{cases}\Rightarrow m=\dfrac{5}{2},\ n=\dfrac{3}{2}$

Asíntotas

81. Calcula todas las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=x^3+3x^2-1$

b) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$

c) $f(x)=\dfrac{3}{x+5}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$

e) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

f) $f(x)=\dfrac{x^3+2x+7}{x^2+x+1}$

g) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}}$

h) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$

i) $f(x)=2x-3+\dfrac{5}{x-4}$

j) $f(x)=x-\dfrac{x^2}{x-3}$

a) No tiene asíntotas.

b) La recta $y=2$ es asíntota horizontal en $-\infty$ y $+\infty$.

c) La recta $y=0$ es asíntota horizontal en $-\infty$ y $+\infty$ y la recta $x=-5$ es asíntota vertical.

d) La recta $y=1$ es asíntota horizontal en $-\infty$ y $+\infty$ y la recta $x=3$ es asíntota vertical.

e) La recta $x=-1$ es asíntota vertical y la recta $y=x-1$ es asíntota oblicua en $-\infty$ y $+\infty$.

f) La recta $y=x-1$ es asíntota oblicua en $-\infty$ y $+\infty$.

g) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}}=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, por lo que la recta $x=0$ es asíntota vertical (solo por la derecha, ya que $D(f)=(0,+\infty)$) y, como $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$, la recta $y=x$ es asíntota oblicuaen $+\infty$.

h) La recta $y=x$ es asíntota oblicua en $+\infty$, ya que, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}=1$ y

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}{\sqrt{x^2+3}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$. De igual manera se comprueba que la recta $y=-x$ es asíntota oblicua en $-\infty$.

i) La recta $x=4$ es asíntota vertical y la recta $y=2x-3$ es asíntota oblicua en $-\infty$ y $+\infty$.

j) La recta $y=-3$ es asíntota horizontal en $-\infty$ y $+\infty$ y la recta $x=3$ es asíntota vertical.

82. Sea la función $f(x) = a + \dfrac{b}{x+c}$ con *a*, *b* y *c* números reales. Calcúlalos sabiendo que:

- **La gráfica de *f* presenta en $-\infty$ una asíntota horizontal de ecuación $y = 2$.**
- **La gráfica de *f* presenta en $x = 1$ una asíntota vertical.**
- **El punto (6, 3) pertenece a la gráfica de *f*.**

La primera condición nos dice que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, por tanto, $a = 2$.

Por la segunda condición, el denominador de $f(x) = \dfrac{ax + (ac+b)}{x+c}$ se tiene que anular si $x = 1$, por tanto, $c = -1$.

Finalmente, la tercera condición nos dice que $f(6) = 3$, es decir, $a + \dfrac{b}{6+c} = 3 \Rightarrow 2 + \dfrac{b}{6-1} = 3 \Rightarrow b = 5$.

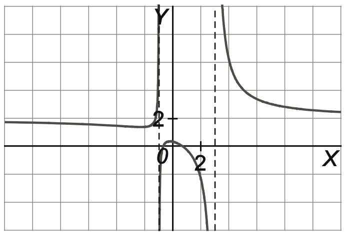
83. Halla las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{1-2x^2}{3+2x-x^2}$ y esboza su gráfica.

Las asíntotas verticales pueden estar en $x = -1$ y $x = 3$, que son los valores que anulan el denominador.

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$, por lo que la recta $x = -1$ es asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$, por lo que la recta $x = 3$ es asíntota vertical.

Como los grados del numerador y denominador coinciden, tiene una asíntota horizontal en $-\infty$ y $+\infty$, de ecuación $y = 2$.



84. El denominador de la función $f(x) = \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}$ se anula para dos valores: $x = -1$ y $x = 5$, y sin embargo, solo tiene una asíntota vertical. Explica por qué.

Como $f(x) = \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5} = \dfrac{(x-5)(x-2)}{(x-5)(x+1)} = \dfrac{x-2}{x+1}$ si $x \neq 5$, la función tiene una única asíntota vertical $x = -1$.

Sucesiones de números reales. Límites

85. Demuestra que la sucesión $a_n = \dfrac{2n-1}{3n+2}$ es creciente y acotada superiormente y halla su límite.

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{2n+1}{3n+5} - \dfrac{2n-1}{3n+2} = \dfrac{(2n+1)(3n+2)-(2n-1)(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)} = \dfrac{7}{(3n+5)(3n+2)} > 0$ para todo *n*, por lo que la sucesión es creciente, además, $\dfrac{2n-1}{3n+2} < \dfrac{2n+2}{3n+3} = \dfrac{2(n+1)}{3(n+1)} = \dfrac{2}{3}$ para todo *n*, por lo que también está acotada superiormente.

Su límite es: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{3n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \dfrac{2}{3}$

86. **a)** Enuncia un resultado similar al de las sucesiones crecientes y acotadas superiormente para sucesiones decrecientes.

b) Compruébalo para la sucesión $a_n = \dfrac{1-n^2}{n^2+5n+6}$.

a) si a_n es una sucesión decreciente y acotada inferiormente, entonces en convergente.

b) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{-5n-4}{n^3+9n^2+26n+14} < 0$ para todo$n$, por lo que la sucesión es decreciente.

Además, tenemos, $a_n = \dfrac{1-n^2}{n^2+5n+6} = -1 + \dfrac{5n+7}{n^2+5n+6} > -1$ para todo$n$, por lo que también es acotada inferiormente.

Por tanto, la sucesión es convergente, de hecho, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-n^2}{n^2+5n+6} = -1$.

87. **Investiga si la sucesión $a_n = \dfrac{5-n}{10-3n}$ es creciente, o decreciente, y acotada y, en su caso, calcula su límite.**

si$n$> 3 tenemos $a_{n+1} - a_n = \dfrac{5}{(3n-7)(3n-10)} > 0$ y $\dfrac{5-n}{10-3n} = \dfrac{n-5}{3n-10} < \dfrac{1}{3}$, es decir, la sucesión es creciente y acotada superiormente, por lo que converge.

De hecho, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-n}{10-3n} = \dfrac{1}{3}$.

88. **Sabiendo que:**

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -2$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} d_n = -\infty$

calcula los límites de las siguientes sucesiones.

a) $a_n + b_n$

b) $b_n d_n$

c) $c_n d_n$

d) $\dfrac{a_n}{b_n}$

e) $a_n + d_n$

f) $\dfrac{c_n}{d_n}$

g) $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)^{d_n}$

h) $a_n^{\,b_n}$

i) $a_n^{\,-b_n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n d_n) = -\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (c_n d_n)$ indeterminado

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = -\dfrac{2}{3}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + d_n) = -\infty$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{c_n}{d_n}\right) = 0$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)^{d_n}$ no existe.

h) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\,b_n} = -8$ si existe la función.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{\,a_n} = \dfrac{1}{9}$

89. Determina el valor de los siguientes límites.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{n}-\frac{2+n}{1+n}\right)$ **c)** $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+7n-5}}{2n-9}$ **e)** $\lim_{n\to\infty}\frac{3-n}{5+n}$

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{(2-7n)(8n-3)}{(2n-1)^2}$ **d)** $\lim_{n\to\infty}\left(3n-5\sqrt{n}\right)$ **f)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-2n\right)$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{n}-\frac{2+n}{1+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1+n)^2-n(2+n)}{n(1+n)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n(1+n)}\right)=0$

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{(2-7n)(8n-3)}{(2n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-56n^2+37n-6}{4n^2-4n+1}=-\frac{56}{4}=-14$

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+7n-5}}{2n-9}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(3n-5\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3n-5\sqrt{n}\right)\left(3n+5\sqrt{n}\right)}{3n+5\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2-25n}{3n+5\sqrt{n}}=+\infty$

e) $\lim_{n\to\infty}\frac{3-n}{5+n}=-1$

f) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-2n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-2n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+2n\right)}{\sqrt{n^2+3n}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2+3n}{\sqrt{n^2+3n}+2n}=-\infty$

90. Halla los límites siguientes.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-3}\right)$ **c)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5}-n\right)$ **e)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^4+5n^2+-3}-2n^2\right)$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+3}\right)$ **d)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-6}-n^2\right)$ **f)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3-n+1}-3n^2\right)$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-3}\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-3}\right)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-3}}=\frac{2}{1+1}=1$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+3}\right)\left(\sqrt{n-3}+\sqrt{n+3}\right)}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-6}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+3}}=0$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-5}-n\right)\left(\sqrt{n^2-5}+n\right)}{\sqrt{n^2-5}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-5}{\sqrt{n^2-5}+n}=0$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-6}-n^2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-6}-n^2\right)\left(\sqrt{n^2-6}+n^2\right)}{\sqrt{n^2-6}+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^4+n^2-6}{\sqrt{n^2-6}+n^2}=-\infty$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^4+5n^2-3}-2n^2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^4+5n^2-3}-2n^2\right)\left(\sqrt{4n^4+5n^2-3}+2n^2\right)}{\sqrt{4n^4+5n^2-3}+2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-3}{\sqrt{4n^4+5n^2+-3}+2n^2}=\frac{5}{2}$

f) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3-n+1}-3n^2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^3-n+1}-3n^2\right)\left(\sqrt{n^3-n+1}+3n^2\right)}{\sqrt{n^3-n+1}+3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-9n^4+n^3-n+1}{\sqrt{n^3-n+1}+3n^2}=-\infty$

91. Calcula, si existen, los siguientes límites.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{n-1}{(n+1)^2}\right)^{\frac{n+1}{n}}$ **c)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+3n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{n+3}}$ **e)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{6n+3}\right)^{n}$ **g)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-3}\right)^{n^2+3n}$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n-2}$ **d)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-5}{2n^2+n}\right)^{\frac{n^2-3n}{n+2}}$ **f)** $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-2n}$ **h)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}-3}{\sqrt{n}+4}\right)^{-5\sqrt{n}-1}$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{n-1}{(n+1)^2}\right)^{\frac{n+1}{n}}=3^1=3$, ya que la base converge a 3 y el exponente a 1.

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n-2}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}\right]^{\frac{n-2}{n+3}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n+3}}=e^1=e$.

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+3n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n-1}{n^2-n+3}\right)^{-\frac{n^2+1}{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n-4}{n^2-n+3}\right)^{-\frac{n^2+1}{n+3}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-n+3}{4n-4}}\right)^{\frac{n^2-n+3}{4n-4}}\right]^{\frac{4n-4}{n^2-n+3}\cdot\left(-\frac{n^2+1}{n+3}\right)}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^3+4n^2+4n-4}{n^3+2n^2+9}}=e^{-4}$$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-5}{2n^2+n}\right)^{\frac{n^2-3n}{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n}{2n^2-5}\right)^{-\frac{n^2-3n}{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+5}{2n^2-5}\right)^{-\frac{n^2-3n}{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2-5}{n+5}}\right)^{\frac{2n^2-5}{n+5}}\right]^{\frac{n+5}{2n^2-5}\left(-\frac{n^2-3n}{n+2}\right)}=$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3-2n^2-15n}{2n^3+3n^2+2n}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{6n+3}\right)^{n}=0$, ya que la base converge a $\frac{1}{2}$ y el exponente a $+\infty$.

f) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{-2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}\right]^{\frac{2n}{2n-1}}=$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1}}=e^1=e$$

g) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-3}\right)^{n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2-3}\right)^{n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-3}{4}}\right)^{\frac{n^2-3}{4}}\right]^{\frac{4(n^2+3n)}{n^2-3}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{4(n^2+3n)}{n^2-3}}=e^4$

h) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}-3}{\sqrt{n}+4}\right)^{-5\sqrt{n}-1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+4}{\sqrt{n}-3}\right)^{5\sqrt{n}+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{\sqrt{n}-3}\right)^{5\sqrt{n}+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{\sqrt{n}-3}{7}}\right)^{\frac{\sqrt{n}-3}{7}}\right]^{\frac{35\sqrt{n}+7}{\sqrt{n}-3}}=$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{35\sqrt{n}+7}{\sqrt{n}-3}}=e^{35}$$

Síntesis

92. Estudia razonadamente las asíntotas y la continuidad de la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

Tenemos $D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$ y la función es continua en su dominio.

La recta $x=-1$ es una asíntota vertical:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^3}{(x+1)^2}=-\infty \text{ y } \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^3}{(x+1)^2}=-\infty .$$

No tiene asíntotas horizontales, ya que el grado del numerador es mayor que el del numerador, o, más formalmente:

$\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{(x+1)^2}=-\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{(x+1)^2}=+\infty$, por lo que no tiene asíntotas horizontales.

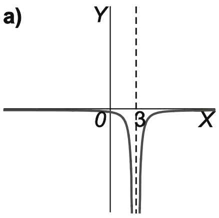
Sí tiene asíntota oblicua, ya que el grado del numerador es uno más que el del denominador.

Dividiendo tenemos:

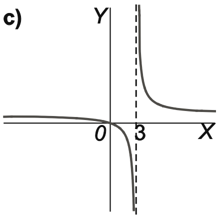
$\displaystyle f(x)=\frac{x^3}{x^2+2x+1}=x-2+\frac{4x+2}{x^2+2x+1}$, con lo que la recta $y=x-2$ es asíntota oblicua en $-\infty$ y $+\infty$.

93. A continuación se muestra el comportamiento de cuatro gráficas en torno a su asíntota vertical $x=3$.

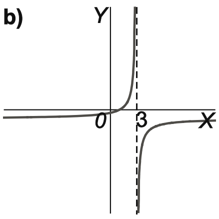
a)



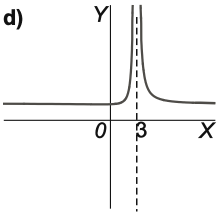
c)



b)



d)



Asocia cada una de ellas con una de estas funciones:

I. $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$

II. $h(x)=\dfrac{-2}{(x-3)^2}$

III. $g(x)=\dfrac{x-1}{(x-3)^2}$

IV. $j(x)=\dfrac{1-x}{x-3}$

I con c, ya que $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$.

II con a, ya que $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} h(x)=-\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} h(x)=-\infty$.

III con d, ya que $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} g(x)=+\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} g(x)=+\infty$.

IV con b, ya que $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} j(x)=+\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} j(x)=-\infty$.

94. Completa la siguiente tabla (*f* y *g* son funciones reales de variable real).

Formulación analítica	Interpretación gráfica
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$	***
***	La gráfica de *f* pasa por el origen de coordenadas.
Si $x \in [-1, 3]$, entonces $f(x) < g(x)$	***
***	*f* y *g* se cortan en el punto de abscisa $x = 4$
La ecuación $f(x) = -6$ no tiene solución.	***
***	La recta $y = 1$ corta a la gráfica de *g* en los puntos (–5, 1) y (1, 1).

Formulación analítica	Interpretación gráfica
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$	Tiene una asíntota vertical en $x = 2$ y por su izquierda la gráfica decrece.
$f(0) = 0$	La gráfica de *f* pasa por el origen de coordenadas.
Si $x \in [-1, 3]$, entonces $f(x) < g(x)$	La gráfica de *g* está por encima de la de *f* si $x \in [-1, 3]$.
$f(4) = g(4)$	*f* y *g* se cortan en el punto de abscisa $x = 4$.
La ecuación $f(x) = -6$ no tiene solución	La gráfica no corta a la recta $y = -6$.
$g(-5) = 1$ y $g(1) = 1$	La recta $y = 1$ corta a la gráfica de *g* en los puntos (–5, 1) y (1, 1).

95. Sea *f* la función definida por $f(x) = \dfrac{x+3}{|x|-3}$. ¿Cuál es el dominio de *f*? Calcula los límites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Estudia los límites $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$.

El dominio de *f* es $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{x-3} = 1 \text{ y } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{-x-3} = -1.$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x+3}{x-3} = +\infty \text{ y } \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x+3}{x-3} = -\infty.$$

96. Calcula los números *a*, *b* y *c*, sabiendo que la recta $y = 2x - 3$ es una asíntota oblicua de la función:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1}$$

$f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + 1} = ax + (b - a) + \dfrac{a - b + c}{x + 1}$, así $y = ax + (b - a)$ es la asíntota oblicua, por lo que $a = 2$, $b = -1$ y c, en principio, puede tomar cualquier valor.

Pero observemos que si $c = -3$, $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x + 1} = 2x - 3$ si $x \neq -1$, es decir, su gráfica es una recta con un agujero y, aunque en rigor, la recta $y = 2x - 3$ es asíntota de esta función, no se suele considerar como tal.

En resumen: $a = 2$, $b = -1$, $c \neq -3$.

97. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-12x^2 + 7x + 1}{(2x+1)(1-4x)}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + 3x}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{x^3+1}}{(2x+1)^3}$

d) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x - 3}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x + a} - \sqrt{x}\right)$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + x}\right)$

h) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x-1}$

j) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{x-1}$

k) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x+1}\right)$

l) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x-1}{x+1}$

m) $\lim\limits_{x \to 5^+} \left(\dfrac{2x}{x+5}\right)^{\frac{1}{x-5}}$

n) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x + 3x - 1}{(x+1)^2}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-12x^2 + 7x + 1}{(2x+1)(1-4x)} = \dfrac{-12}{-8} = \dfrac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + 3x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(2x - \sqrt{4x^2+3x}\right)\left(2x + \sqrt{4x^2+3x}\right)}{2x + \sqrt{4x^2+3x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x}{2x + \sqrt{4x^2+3x}} = -\dfrac{3}{4}$

c) Dividiendo numerador y denominador por x^3 tenemos: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{x^3+1}}{(2x+1)^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)^3} = \dfrac{1}{8}$.

d) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x - 3} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \dfrac{2}{2} = 1$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+ax} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+ax} - x\right)\left(\sqrt{x^2+ax} + x\right)}{\sqrt{x^2+ax} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax}{\sqrt{x^2+ax} + x} = \dfrac{a}{2}$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+x}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+x}\right)}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x+2}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+x}} = +\dfrac{1}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-5)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-5)=-3$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{\frac{2(x-1)}{x}}=e^2$

j) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{x-1}=4^2=16$

k) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x+1}\right)=-\infty$

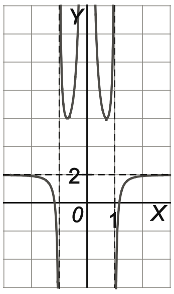
l) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-1}{x+1}$ no existe porque $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x-1}{x+1}\neq\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x-1}{x+1}$.

m) $\lim\limits_{x\to 5^+}\left(\dfrac{2x}{x+5}\right)^{\frac{1}{x-5}}=\lim\limits_{x\to 5^+}\left(1+\dfrac{x-5}{x+5}\right)^{\frac{1}{x-5}}=\lim\limits_{x\to 5^+}\left(\left(1+\dfrac{1}{\frac{x+5}{x-5}}\right)^{\frac{x+5}{x-5}}\right)^{\frac{x-5}{(x-5)(x+5)}}=e^{\frac{1}{10}}$

n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x+3x-1}{(x+1)^2}=0$

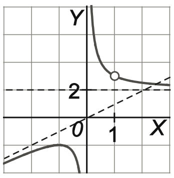
98. Esboza el dibujo de la gráfica de una función que cumpla todas las condiciones siguientes.

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ **y** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$
- **Asíntota horizontal** $y=2$ **en** $-\infty$
- **Asíntota vertical en** $x=1$



99. Haz el dibujo aproximado de una función que tenga las siguientes características.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$
- **Si** $x>0$ **,** $f(x)>2$
- **Tiene como asíntota oblicua a la recta** $y=x$
- **Tiene una discontinuidad evitable en (1, 3)**



CUESTIONES

100. Determina si las expresiones $f(x)=\sqrt{(x-1)(x-3)}$ y $g(x)=\sqrt{x-1}\sqrt{x-3}$ corresponden a la misma función.

No es la misma función, $D(f)=(-\infty,\ 1]\cup[3,\ +\infty)$ y $D(g)=[3,\ +\infty)$.

101. ¿Es verdad que si no existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ni $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ entonces tampoco existe $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$?

No, no es cierto. Por ejemplo, $a_n=(-1)^n n$ y $b_n=3-(-1)^n n$ no lo cumplen.

102. Sean dos funciones *f* y *g* definidas en $\mathbb{R}$ cuyas gráficas coinciden para todos los valores del intervalo [1, 3] pero luego no coinciden, ¿es verdad o mentira que dichas funciones no pueden ser ambas funciones polinómicas?

Es cierto que no pueden ser polinómicas pues una función polinómica de grado n queda unívocamente determinada por su valor en n + 1 números y estas funciones coinciden en infinitos números.

103. Si la sucesión a_n es convergente y tiene infinitos términos positivos e infinitos términos negativos, entonces, ¿ha de ser su límite necesariamente cero?

Sí, pues si su límite fuera positivo (o negativo) a partir de un cierto valor de n los términos de la sucesión tendrían que estar "cerca" de su límite, por lo tanto, serían positivos (o negativos) todos los términos salvo una cantidad finita de ellos.

104. Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Si $x=a$ no pertenece al dominio de *f*, entonces no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ".

Falso, por ejemplo si $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$ y $a=1$, la afirmación es falsa.

105. Si la función *f* es un cociente de polinomios y el denominador se anula en $x=3$ entonces, ¿será la recta $x=3$ una asíntota vertical de $y=f(x)$ en todos los casos?

No, porque podría ser que el numerador también se anulara en x = 3 y entonces la función podría tener una discontinuidad evitable, que es lo que sucede, por ejemplo, con la función $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$.

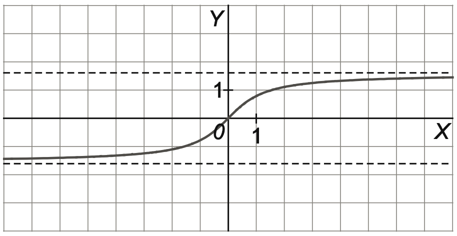
106. Si $x=a$ es una asíntota vertical de $y=f(x)$, ¿es verdadero o es falso que entonces el número *a* no está en el dominio de *f*?

Falso, por ejemplo, si $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 3 & \text{si } x=0\end{cases}$ y $a=0$, la afirmación es falsa.

107. Para la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2+1} & \text{si } x\notin\mathbb{Z}\\ 3 & \text{si } x\in\mathbb{Z}\end{cases}$, ¿es verdadero o es falso que la recta $y=0$ sea una asíntota horizontal de $f(x)$?

No, no es cierto, para que la recta $y=0$ sea una asíntota horizontal debe cumplirse que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ y, en este caso, no existe dicho límite.

108. ¿Puede expresarse la función cuya gráfica es la de la figura con un cociente de polinomios?



No, la gráfica de la figura presenta dos asíntotas horizontales y si una curva es cociente de polinomios solo puede tener una asíntota horizonatal, ya que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k$, entonces $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=k$.

109. Si $y=a$ es una asíntota horizontal de $y=f(x)$, entonces, ¿es posible que el valor de a pertenezca al recorrido de la función?

Es posible, por ejemplo, sucede con $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x>0\end{cases}$ y $a=0$.

PROBLEMAS

110. Una empresa produce ratones inalámbricos en grandes cantidades. Atendiendoa los gastos de puesta en marcha de la maquinaria, al salario de sus trabajadores y a otros factores, se ha llegado a la conclusión de que producir *p* ratones tiene un coste total, en euros, de *C*(*p*) = 10*p* + 100 000.

a) Encuentra la expresión de la función C_m que nos da el precio unitario medio de un ratón al fabricar *p* unidades.

b) Calcula $C_m(10)$ y $C_m(1000)$. ¿A qué es debido que haya tanta diferencia entre un coste y otro?

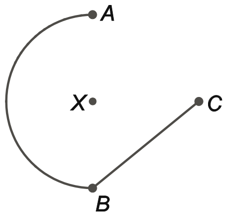
c) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} C_m(p)$ y da una interpretación económica al resultado.

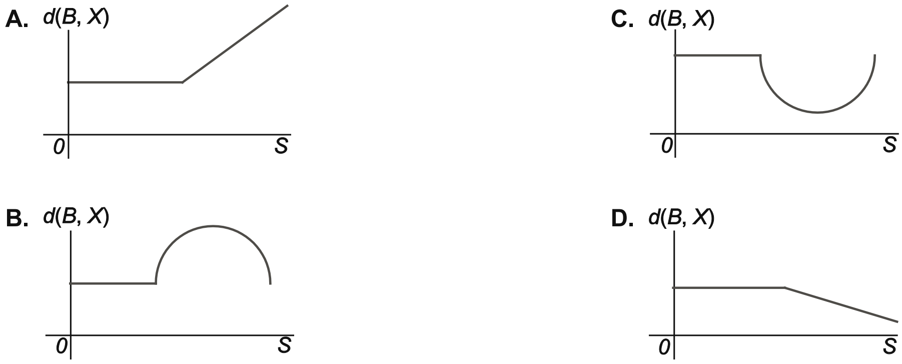
a) $C_m(p)=\dfrac{C(p)}{p}=10+\dfrac{100\,000}{p}$

b) $C_m(10)=10\,010$ € y $C_m(1000)=110$ €, la diferencia estriba en que una componente importante del precio de producción de *p* ratones, 100000 €, es independiente del número de éstos.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} C_m(p)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(10+\dfrac{100\,000}{p}\right)=10$ €, cuando *p* se hace grande el precio unitario medio se aproxima a 10 €, ya que el otro sumando, debido a gasto de puesta en marcha de maquinaria, etc., se va amortizando al haber mucha producción.

111. Un barco navega del punto *A* hasta el punto *B*, describiendo una semicircunferencia centrada en una isla *X*. Luego navega en línea recta desde *B* a *C*. ¿Cuál de las siguientes gráficas muestra la distancia del barco a la isla, según la distancia recorrida?





En la primera parte del viaje se mantiene a igual distancia de la isla, después se va acercando y luego alejando, por lo que la gráfica es la C.

112. La longitud *l* (cm) de una barra metálica varía con la temperatura T (°C) de acuerdo a la función:

$$l(T) = 30,5 + 0,025T$$

Determina para qué rango de temperaturas la longitud se mantiene a menos de 1 mm de 30 cm.

$30 - 0,1 \le l(T) \le 30 + 0,1 \Rightarrow 29,9 \le 30,5 + 0,025T \le 30,1 \Rightarrow -0,6 \le 0,025T \le -0,4 \Rightarrow -24ºC \le T \le -16ºC$,

113. El franqueo de las cartas varía según su peso, como se indica en la tabla.

Peso (g)	Precio (€)
Hasta 20	0,34
Hasta 50	0,38
Hasta 100	0,54
Hasta 200	0,84
Hasta 350	1,50
Hasta 1000	2,85
Hasta 2000	3,60

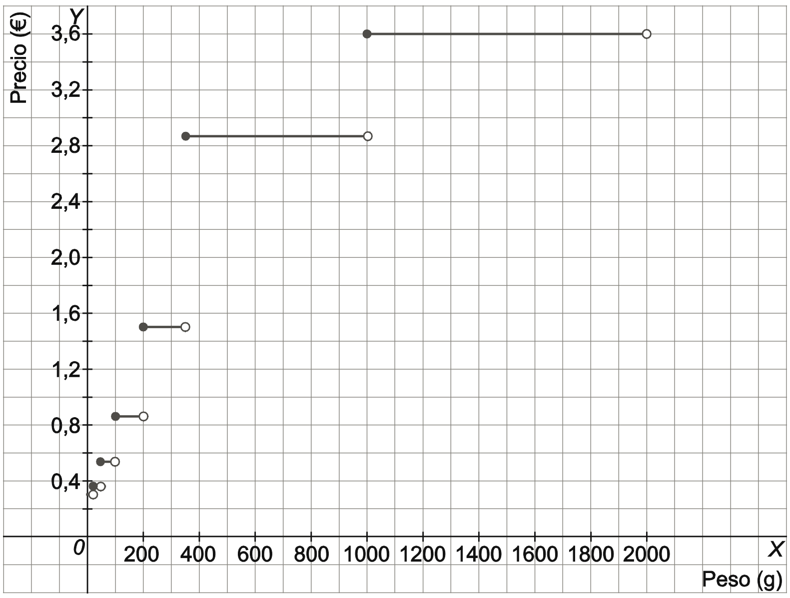
a) ¿Cuánto costaría franquear una carta de 145 g?

b) Represente la gráfica de la función que nos indica el precio del franqueo según el peso de la carta. Elige adecuadamente la escala de los ejes para que se refleje toda la información.

c) ¿Es continua dicha función? ¿Cómo se llaman este tipo de funciones?

a) Un carta de 145 g constaría 0,84 €.

b)



c) No es continua. Es una función a trozos.

114. Tres parejas de una especie en peligro de extinción se introducen en un parque natural para intentar su recuperación. Los estudios indican que la población, *n*, aumentará de acuerdo a la función:

$$n(t)=6+\frac{300t^2}{t^2+100}$$

donde *t* es el tiempo en años.

a) La población crítica a partir de la cual se considera que la repoblación ha tenido éxito se logra cuando se superan los 50 ejemplares. Calcula cuándo se alcanza dicho nivel crítico.

b) ¿Cuál es el comportamiento de la población para $t=10$, 20, 40 y 60 años? ¿Qué conclusiones se pueden sacar de estos resultados?

a) $n(t)=50\Rightarrow\frac{300t^2}{t^2+100}=44\Rightarrow t^2=\frac{4400}{256}\Rightarrow t=4{,}15$ años.

b) $n(10)=156$, $n(20)=246$, $n(40)=288{,}35$ y $n(60)=297{,}89$. La población tiende a estabilizarse, siendo su valor límite $\lim\limits_{t\to+\infty}n(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(6+\frac{300t^2}{t^2+100}\right)=306$ ejemplares.

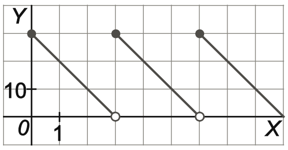
115. El número de ordenadores que tiene en *stock* una pequeña empresa viene dado por la fórmula

$$N(t)=10\left(3\left[\frac{t+3}{3}\right]-t\right)$$

donde el tiempo, *t*, se mide en semanas. Esboza la gráfica de la función y estudia su continuidad. ¿Cada cuánto tiempo debe reponer su mercancía la empresa?

La función es discontinua en $t=3k$ si $k\in\mathbb{N}$ y periódica de periodo 3.

Debe reponer producto cada tres semanas.



PARA PROFUNDIZAR

116. Halla el valor de *a* para que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+5}{4x+3}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi}\right)^{ax^2}$$

$$\left(\frac{4x+5}{4x+3}\right)^x=\left(1+\frac{2}{4x+3}\right)^x=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{4x+3}{2}}\right)^{\frac{4x+3}{2}}\right]^{\frac{2x}{4x+3}}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+5}{4x+3}\right)^x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

$$\left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi}\right)^{ax^2}=\left(\frac{4x^2+\pi}{4x^2+1}\right)^{-ax^2}=\left(1+\frac{\pi-1}{4x^2+1}\right)^{-ax^2}=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{4x^2+1}{\pi-1}}\right)^{\frac{4x^2+1}{\pi-1}}\right]^{-\frac{(\pi-1)ax^2}{4x^2+1}}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi}\right)^{ax^2}=e^{-\frac{(\pi-1)a}{4}}$$

Por tanto, $e^{\frac{1}{2}}=e^{-\frac{(\pi-1)a}{4}}\Rightarrow\frac{1}{2}=-\frac{(\pi-1)a}{4}\Rightarrow a=-\frac{2}{\pi-1}$.

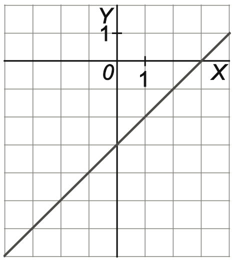
117. El término *n*-ésimo de una sucesión es $a_n = \dfrac{2^n n^n}{n!}$. Escribe el término a_{n+1} y calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

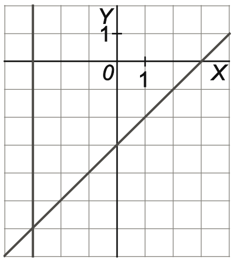
$a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$, por lo que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{2^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n n^n}{n!}} = 2\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = 2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2e$.

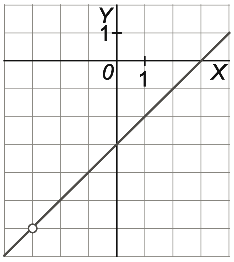
118. Dibuja el conjunto de puntos del plano (*x*, *y*) que verifica cada una de las siguientes igualdades.

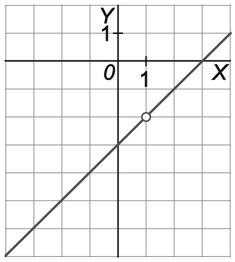
a) $y = x - 3$ **b)** $(x+3)y = x^2 - 9$ **c)** $y = \dfrac{x^2-9}{x+3}$ **d)** $y = \dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$

¿Corresponden todas a la gráfica de una función?

a)


b)


c)


d)


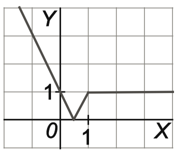
La curva del apartado b no corresponde la gráfica de una función, ya que si $x = -3$, *y* puede tomar cualquier valor.

119. Dibuja la gráfica de la función:

$$y = \left| x - \sqrt{(x-1)^2} \right|$$

Como $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$, tenemos que dibujar la gráfica de

$$y = \left| x - |x-1| \right| = \begin{cases} |2x-1| & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$



120. Determina de las siguientes afirmaciones cuáles son siempre ciertas y cuáles pueden ser falsas.

a) Si $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$, debe haber un número *c* en (1, 2) tal que $f(c) = 0$.

b) Si *f* es continua en [1, 2] y hay un número *c* en (1, 2) tal que $f(c) = 0$, entonces $f(1)$ y $f(2)$ deben ser de diferente signo.

c) Si *f* es continua en [1, 2] y nunca se anula en (1, 2), entonces $f(1)$ y $f(2)$ tienen el mismo signo.

a) Si *f* no es continua, no es necesariamente cierta. Sí es cierta si *f* es continua.

b) No tiene por qué ser cierta. Ejemplo: $f(x) = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2$.

c) Es verdadera, pues si *f*(1) y *f*(2) tuvieran distinto signo, al ser la función continua, debería cortar el eje de abscisas entre los puntos (1, *f*(1)) y (2, *f*(2)), en contradicción con el enunciado.

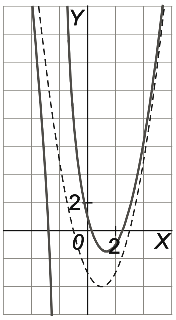
121. Todas las asíntotas estudiadas en este capítulo son líneas rectas. Hay otras curvas a las que se aproxima la gráfica de f cuando x se aleja del origen. Son las llamadas "ramas parabólicas". Veamos un ejemplo:

a) Con ayuda de una calculadora gráfica o un ordenador, representa en una misma pantalla las curvas de ecuaciones $f(x)=\dfrac{x^3-7x+2}{x+2}$ y $g(x)=x^2-2x-3$.

b) A la vista del apartado anterior haz una conjetura sobre a qué curva se aproxima la función.

c) Demuestra que tu conjetura es cierta calculando los límites $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-g(x))$.

d) Por último, divide el numerador de f entre su denominador y comenta el resultado obtenido.

a) 

b) $f(x)$ se aproxima a $g(x)$ cuando x se aleja del origen.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3-7x+2}{x+2}-\left(x^2-2x-3\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{x+2}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^3-7x+2}{x+2}-\left(x^2-2x-3\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8}{x+2}=0$

d) $\dfrac{x^3-7x+2}{x+2}=x^2-2x-3+\dfrac{8}{x+2}$, con lo que $f(x)$ se aproxima a $g(x)$ cuando x se aleja del origen.

De igual manera, en cualquier cociente de polinomios $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ con grado $g\le$ grado f, al hacer la división nos va a dar de cociente un polinomio $c(x)$ y de resto un polinomio $r(x)$ con grado r<grado g, así $\dfrac{f(x)}{g(x)}-c(x)=\dfrac{r(x)}{g(x)}$, con lo que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}-c(x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}-c(x)\right]=0$, es decir, la curva $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ se va a aproximar, cuando x se aleja del origen, a la curva $y=c(x)$.

122. a) Si $g(x)=3x+2$ y $h(x)=9x^2+12x+1$, encuentra una función f tal que $f\circ g=h$.

b) Si $g(x)=2x-3$ y $h(x)=x^2+1$, encuentra una función f tal que $f\circ g=h$.

a) Como $h(x)=(3x+2)^2-3$, tenemos: $f\circ g=h\Rightarrow f(g(x))=h(x)\Rightarrow f(3x+2)=(3x+2)^2-3\Rightarrow f(x)=x^2-3$

b) $f\circ g=h\Rightarrow f(g(x))=h(x)\Rightarrow f(2x-3)=x^2+1$, esta afirmación será correcta si $f(x)=\left(\dfrac{x+3}{2}\right)^2+1$, pues $f(2x-3)=\left(\dfrac{2x-3+3}{2}\right)^2+1=x^2+1$.

123. Pon un ejemplo de dos funciones f y g tales que no existan $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ ni $\lim\limits_{x\to1}g(x)$, pero sí exista $\lim\limits_{x\to1}(f(x)+g(x))$.

$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ 1 & \text{si } x\ge1\end{cases}$ y $g(x)=-f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ -1 & \text{si } x\ge1\end{cases}$

124. Si existen $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to1}(f(x)+g(x))$, ¿puede asegurarse que existe $\lim\limits_{x\to1}g(x)$?

Sí, pues $g(x)=(f(x)+g(x))-f(x)$ y si existe el límite de dos funciones, también existe el límite de la diferencia de esas funciones.

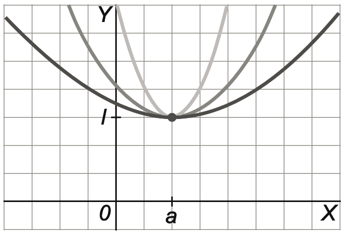
125. Si $f(x) = g(x)$ salvo en 2009 puntos, ¿qué puedes decir de los límites de ambas funciones en $x = 5$?

Podemos afirmar que existe el límite de una de ellas solamente si existe el de la otra y, en caso de existir, serán iguales.

126. a) Comprueba gráficamente que si *f*, *g* y *h* son tres funciones tales que $f(x) \le h(x) \le g(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ entonces $\lim\limits_{x\to a} h(x) = l$

b) Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$

a)



b) Como $-x^2 \le x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \le x^2$, y $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$,

tenemos $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = 0$.

127. Calcula las asíntotas oblicuas, si existen, de:

a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

b) $f(x) = 2x + 2^{-x}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = -1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 0$

Por tanto, la recta $y = x$ es asíntota oblicua por la derecha y la recta $y = -x$ lo es por la izquierda.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-2^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{2^{-x}}{x}\right) = 2$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-2^{-x}-2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2^{-x}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-2^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{2^{-x}}{x}\right) = +\infty$ Por tanto, la recta $y = 2x$ es asíntota oblicua por la derecha.

128. En cada caso, dibuja los puntos del plano (*x*, *y*) con $x \ge 0$ que verifican las condiciones:

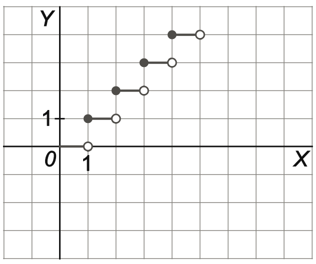
a) $y = [x]$

b) $y = \frac{1}{[x]}$

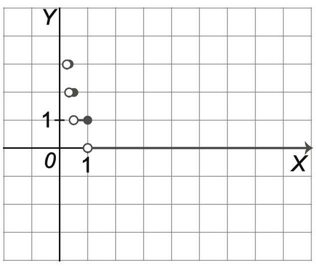
c) $y = \left[\frac{1}{x}\right]$

d) $y = \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}$

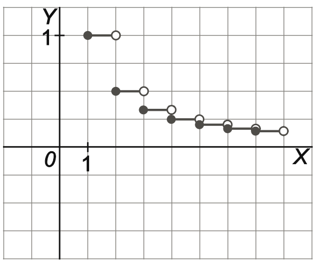
a)



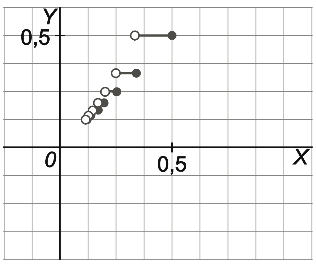
c)



b)



d)



129. ¿Hay algún número *c* para el que exista el siguiente límite?

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+4x+cx+2c}{x^2+x-2}$$

Calcula *c* y el límite correspondiente.

Como el denominador se anula en $x=1$, para que exista dicho límite el numerador también se debe anular en $x=1$, por tanto, $2+4+c+2c=0$. Así $c=-2$ y $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+2x-4}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x^2+x-2)}{x^2+x-2}=2$.

ENTORNO MATEMÁTICO

Epidemia en clase

En un centro educativo, todos los cursos a la vuelta de Navidades suelen darse unos cuantos casos de gripe, que se contagian unos alumnos a otros, sin mayores consecuencias y que, en la mayoría de los casos, remiten tras algunos días de fiebre y toses.

Este año, doña Ana Lisis, profesora de matemáticas ha preparado un modelo para estudiar la propagación y la evolución de la gripe estacional. Su idea es que sus alumnos lo apliquen y trabajen sobre él, especialmente un grupo de cuatro amigos que cayeron enfermos a la vez el pasado curso, y cuya convalecencia se alargó sospechosamente durante casi dos semanas, causando la envidia de sus compañeros. El 16 de enero, Ana entra en clase y les dice a los chicos: "Anteayer cayó enfermo el primer griposo de este año. Con la experiencia de otros años puedo afirmar que el porcentaje de alumnos enfermos *t* días después de haberse detectado el primer caso viene dado por la función:

$$p(t)=\frac{50t}{t^2+49}$$

Eduardo, Luis, Juan y Miguel, dada vuestra amplia experiencia en esta enfermedad, aplicaréis el modelo y controlaréis el número de compañeros afectados. Tendréis que hacer un informe y contestar a estas preguntas:

a) ¿Cuál será el porcentaje de contagiados en los diez primeros días a partir del día uno, 14 de enero?

b) ¿A partir de qué día empezará a remitir la epidemia?

c) A la larga, ¿habrá aún estudiantes enfermos?"

Eduardo mira a sus amigos y se empieza a poner colorado, y no de fiebre precisamente. ¿Puedes intentar ayudar a los "elegidos"?

a) $p(10)=\frac{500}{100+49}\simeq 3{,}36$ %

b) Representando la gráfica o haciendo una tabla de valores se observa que la epidemia empieza a remitir a partir del séptimo día.

c) A la larga no hay estudiantes enfermos, ya que $\lim_{t\to+\infty}p(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{50t}{t^2+49}=0$.

Ciudad inmunda

Los medios de comunicación han dado a una ciudad, de manera satírica y algo cruel, el apelativo de "Ciudad Inmunda" debido a la contaminación que tiene. Se estima que, de no poner remedio, la concentración de contaminantes en la ciudad evolucionará según la ecuación $h(t) = 5,4 + 0,6t^2$ con t en años.

Haz, al igual que se hizo en el estudio citado, las predicciones siguientes:

a) Representa la cantidad de polución en función del tiempo.

b) Al final del primer año, ¿cuántas partículas/m^3 habrá en "Ciudad Inmunda"?

c) Si el número de partículas/m^3 supera el valor de 10, se llegaría a un estado de alerta total incompatible con la vida. En ese momento, o se toman medidas drásticas o los ciudadanos podrían morir. ¿En qué año se llegaría a esta catástrofe? (Toma como año inicial el actual).

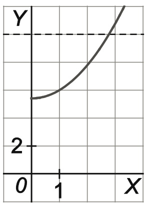
El alcalde don Gris Plomizo muy preocupado por mejorar las perspectivas y la reputación de su ciudad decide poner en marcha un plan de limpieza, cuyo coste en euros por habitante y año se estima dado por la función $c(t) = \dfrac{10 + 0,1t^2}{0,01\left(1 + 2t^2\right)}$.

d) ¿Cuánto dinero por habitante habrá que invertir el primer año?

e) ¿En cuántos años el coste por habitante será menor de 10 euros?

f) ¿Cuál será el coste a largo plazo, por habitante y año, del plan de emergencia?

a)



b) Al finalizar el primer año habrá $h(1) = 6$ partículas/m^3.

c) $h(t) \geq 10 \Rightarrow 5,4 + 0,6t^2 \geq 10 \Rightarrow t \geq 2.77$, es decir, si tomamos como año inicial 2015 la concentración letal se alcanzaría a finales de 2018.

d) El primer año hay que invertir $c(1) \approx 336,67$ € por habitante.

e) $c(t) < 10 \Rightarrow \dfrac{10 + 0,1t^2}{0,01\left(1 + 2t^2\right)} < 10 \Rightarrow 10 + 0,1t^2 < 0,1 + 0,2t^2 \Rightarrow t > 9.95$, es decir, en, aproximadamente, 10 años el coste por habitante se reduce a menos de 10 €.

f) El coste a largo plazo será de $\lim\limits_{t \to +\infty} c(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{10 + 0,1t^2}{0,01\left(1 + 2t^2\right)} = \dfrac{0,1}{0,02} = 5$ € por habitante y año.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 3}$.

Debe ser $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, por tanto, $D(f) = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

2. Dadas las funciones $f(x)=5x^2-3x$ y $g(x)=\sqrt{x-1}$ halla la expresión y el dominio de $f\circ g$, $g\circ f$ y $\frac{g}{f}$.

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\sqrt{x-1}\right)=5x-5-3\sqrt{x-1}$ y $D(f\circ g)=[1,+\infty)$.

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(5x^2-3x\right)=\sqrt{5x^2-3x-1}$ y $D(g\circ f)=\left(-\infty,\dfrac{3-\sqrt{29}}{10}\right]\cup\left[\dfrac{3+\sqrt{29}}{10},+\infty\right)$

$\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{5x^2-3x}$ y $D\left(\dfrac{g}{f}\right)=[1,+\infty)$.

3. Calcula, si $f(x)=\sqrt{3x^2-x+2}$ y $g(x)=\sqrt{3x^2+1}$, los límites en $-\infty$ y $+\infty$ de las funciones $f-g$ y $\frac{f}{g}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2-x+2}-\sqrt{3x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{3x^2-x+2}-\sqrt{3x^2+1}\right)\left(\sqrt{3x^2-x+2}+\sqrt{3x^2+1}\right)}{\sqrt{3x^2-x+2}+\sqrt{3x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{3x^2-x+2}+\sqrt{3x^2+1}}=\frac{-1}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2-x+2}-\sqrt{3x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+x+2}-\sqrt{3x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{3x^2+x+2}+\sqrt{3x^2+1}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2-x+2}}{\sqrt{3x^2+1}}=1$ y $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2-x+2}}{\sqrt{3x^2+1}}=1$.

4. Indica si la siguiente función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\frac{1}{2|x|-x+1}$$

Tenemos $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{-3x+1} & \text{si } x\le 0\\[2mm] \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x>0\end{cases}$

El denominador de la primera expresión se anula en $x=\dfrac{1}{3}$ y el de la segunda en $x=-1$, por tanto, solo hay que comprobar si es continua en $x=0$. Como $\displaystyle\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)=1$ la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

5. Comprueba que la recta $y=-4x$ es una asíntota de la gráfica de $f(x)=\sqrt{x^2+4}-3x$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}-3x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}+3x}{-x}=-4$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-3x+4x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{\sqrt{x^2+4}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}=0$$

Por tanto, la recta $y=-4x$ es asíntota oblicua por la izquierda.

6. ¿Es la recta $x = 2$ una asíntota vertical de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$?

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$. Por tanto, la recta $x = 2$ no es asíntota vertical.

7. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 & \text{si } 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+15}} & \text{si } \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \\ \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Comprueba si es continua en $x = 1$.

b) Calcula el valor de a para que sea continua en $x = \dfrac{1}{2}$.

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\left(\sqrt{x+3} - 2\right)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \dfrac{1}{4}$,

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+15}} = \dfrac{1}{4}$ y $f(1) = \dfrac{1}{4}$, por tanto, la función es continua en $x = 1$.

b) Como $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+16}} = 0$ y $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} (ax+3) = \dfrac{a}{2} + 3$, debe ser $a = -6$.

8. Calcula las asíntotas de la función $f(x) = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{x}\right)^5$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{x}\right)^5 = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{x}\right)^5 = -\infty$, por tanto, $x = 0$ es asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{x}\right)^5 = \dfrac{1}{243}$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{x}\right)^5 = \dfrac{1}{243}$, por tanto, $y = \dfrac{1}{243}$ es asíntota horizontal en $-\infty$ y $+\infty$.

9. Escribe dos sucesiones que no tengan límite pero que su suma sí lo tenga.

Por ejemplo $a_n = (-1)^n n$ y $b_n = 3 - (-1)^n n$.

10. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2 + 1}{n^2 - 2n + 1}\right)^{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-2n+1}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{2n}{n^2-2n+1}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{x\to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2-2n+1}{2n}}\right)^{\frac{n^2-2n+1}{2n}}\right]^{\frac{2n\sqrt{n}}{n^2-2n+1}} = e^0 = 1$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. ¿Cuántas de las siguientes funciones tienen como eje de simetría una recta vertical?

$$f(x) = 1 + |x - 4| \qquad g(x) = (x-1)^2 + 2 \qquad h(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

La recta $x = 4$ es un eje de simetría de la gráfica de *f*, pues $f(-x+4) = f(x+4)$. La recta $x = 1$ es un eje de simetría de *g* pues $g(-x+1) = g(x+1)$. La función *h* no tiene ejes de simetría verticales, de hecho, es simétrica con respecto al origen, pues $h(-x) = h(x)$. Por tanto, la respuesta correcta es C.

2. Si $f(x) = ax^4 - bx^2 + x + 5$ y $f(-3) = 2$, $f(3)$ es igual a

A. 8 **B.** –2 **C.** 1 **D.** 3

$f(-3) = 2 \Rightarrow 91a - 9b - 3 + 5 = 2 \Rightarrow 91a - 9b = 0$ y, por tanto, $f(3) = 91a - 9b + 3 + 5 = 8$, la respuesta A.

3. En una de las cuatro funciones siguientes, la recta $x = 5$ no es una asíntota vertical:

A. $f(x) = \dfrac{1}{(x-5)^2}$

B. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-5} & \text{si } x > 5 \\ 2 & \text{si } x \le 5 \end{cases}$

C. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 7x + 10}$

D. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x - 5}$

La respuesta correcta es D pues $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x-5} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(x-5)(x+2)}{x-5} = \lim\limits_{x\to 5}(x+2) = 7$ y en el resto de los casos o bien el límite a la izquierda o el límite a la derecha (o ambos) es infinito.

4. Sea a_n una sucesión en la que ningún término es cero, entonces es cierto que:

A. Si a_n está acotada, entonces es convergente.

B. Si a_n es convergente $\Rightarrow b_n = \sqrt[3]{a_n^{\,2} + 1}$ es convergente.

C. Si a_n es creciente, entonces es convergente.

D. Si a_n es convergente, entonces es creciente o es decreciente.

La respuesta correcta es B, ya que si a_n converge a *a*, b_n converge a $\sqrt[3]{a^2 + 1}$.

El resto de respuestas son falsas, por ejemplo, $a_n = (-1)^n$ contradice A, $a_n = n$ contradice C y $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ contradice D.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

5. **Dada la función $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$, entonces:**

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

B. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=1$

C. La recta $y=x+1$ es asíntota de la gráfica de *f* en $-\infty$.

D. La recta $y=x-1$ es asíntota de la gráfica de *f* en $-\infty$.

A es falsa, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}}{-x}=-1$.

B es verdadera, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}=\dfrac{2}{2}=1$.

C y D son falsas, ya que, según los límites anteriores, la asíntota en $-\infty$ es $y=-x+1$.

6. **Sean *f* y *g* funciones definidas en $[1,+\infty)$**

A. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

B. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

C. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

D. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

A es falsa, un contraejemplo es $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$.

B es falsa, un contraejemplo es $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

C es falsa, un contraejemplo es $f(x)=3$ y $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

D es falsa, un contraejemplo es $f(x)=3$ y $g(x)=x$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

7. **Sea *f* una función continua en el intervalo [1, 5]. Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones siguientes:**

1. **Existe algún número *c* en (1, 5) con $f(c)=0$.**

2. $\left(f(1)\right)^3\left(f(5)\right)^7<0$

A. $1\Rightarrow 2$ pero $2\not\Rightarrow 1$

B. $2\Rightarrow 1$ pero $1\not\Rightarrow 2$

C. $1\Leftrightarrow 2$

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

La condición 2 implica que *f*(1) y *f*(5) tienen signos distintos y por tanto se debe verificar 1. En cambio el recíproco no es cierto, por ejemplo, si $f(x)=(x-3)^2$, se verifica 1 pero no 2. Por tanto, la relación correcta es B.

9 Derivadas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Para la función $f(x)=\sqrt{x+4}$, calcula su tasa de variación media en los intervalos [0; 1], [0; 0,1] y [0; 0,01]. ¿Puedes dar una estimación de su tasa de variación instantánea en el punto x = 0?

$TVM\,f[0;\,1]=\dfrac{\sqrt{5}-2}{1-0}\simeq 0{,}236068$ $\quad TVM\,f[0;\,0{,}1]=\dfrac{\sqrt{4{,}1}-2}{0{,}1-0}\simeq 0{,}248457$ $\quad TVM\,f[0;\,0{,}01]=\dfrac{\sqrt{4{,}01}-2}{0{,}01-0}\simeq 0{,}249844$

Parece que la tasa de variación instantánea en $x=0$ será 0,25.

4. Obtén la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos indicados y representa gráficamente las funciones y las rectas obtenidas. ¿Responden las rectas obtenidas a la idea intuitiva de tangente?

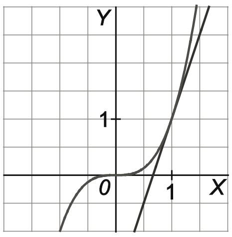
a) $f(x)=x^3$, en $P(1,\,1)$

b) $f(x)=x^2+5x-2$, en $x=-2$

c) $f(x)=\sqrt{x+2}$, en $x=2$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, en $x=2$

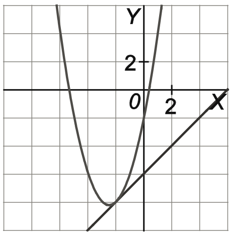
a) La pendiente de la recta tangente es:



$$m=f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3+3h^2+3h}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+3h+3)=3$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y-1=3(x-1)\Rightarrow y=3x-2$

b) La pendiente de la recta tangente es:

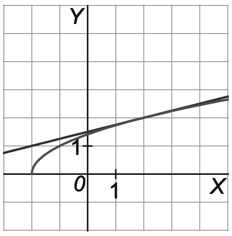


$$m=f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(-2+h)^2+5(-2+h)-2+8}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+h}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(h+1)=1$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y+8=x+2\Rightarrow y=x-6$

c) La pendiente de la recta tangente es:

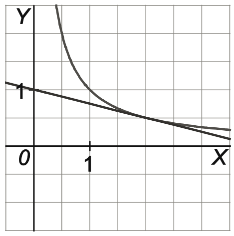


$$m=f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+h}-2\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+h}-2\right)\left(\sqrt{4+h}+2\right)}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\frac{1}{4}$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y-2=\dfrac{1}{4}(x-2)\Rightarrow y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$

d) La pendiente de la recta tangente es:



$$m = f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{2h(2+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + 1$

En todos los casos las rectas obtenidas responden a la idea de recta tangente a una curva.

5. Sea f una función derivable en 2 tal que $f(2) = 3$ y $f'(2) = -5$. ¿Es $y = -5x + 3$ la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$?

No, la tangente en el punto de abscisa $x = 2$ es $y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y - 3 = -5(x-2) \Rightarrow y = -5x + 13$.

6. Sea la tabla de valores de una función *f*.

x	1	1,97	2	2,02	2,2	3,99	4	4,01
$f(x)$	2,5	6,905	7	7,059	7,5	8,98	9	9,2

a) Utiliza esta tabla para aproximar $f'(2)$.

b) A la vista de los valores de la tabla, ¿crees que exista $f'(4)$? Justifica tu respuesta.

a) Tomamos los distintos valores de h para los que conocemos $f(2+h)$, con h pequeño, tenemos:

$$h = -0{,}03 \Rightarrow \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{f(1{,}97) - f(2)}{-0{,}03} = \frac{6{,}905 - 7}{-0{,}03} = 3{,}1\widehat{6} \simeq 3$$

$$h = 0{,}02 \Rightarrow \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{f(2{,}02) - f(2)}{0{,}02} = \frac{7{,}059 - 7}{0{,}02} = 2{,}95 \simeq 3$$

Por tanto, $f'(2) \simeq 3$.

b) Tomamos los distintos valores de h para los que conocemos $f(4+h)$, con h pequeño, tenemos:

$$h = -0{,}01 \Rightarrow \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{f(3{,}99) - f(4)}{-0{,}01} = \frac{8{,}98 - 9}{-0{,}01} = 2$$

$$h = 0{,}01 \Rightarrow \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{f(4{,}01) - f(4)}{0{,}01} = \frac{9{,}2 - 9}{0{,}01} = 20$$

Por tanto, $f'(4)$ parece no existir.

7. El espacio en metros recorrido por un móvil está dado por:

$$\boldsymbol{f(t) = 50 - \frac{1}{t+5}}\textbf{, con } \boldsymbol{t} \textbf{ en segundos.}$$

a) ¿Cuánto espacio ha recorrido en el instante $t = 10$ s?

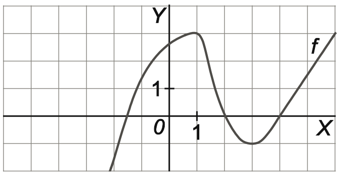
b) ¿Cuál es la velocidad del objeto en ese mismo instante?

a) Ha recorrido $f(10) = 50 - \frac{1}{15} \approx 49{,}93$ m.

b) La velocidad viene dada por el valor de la derivada:

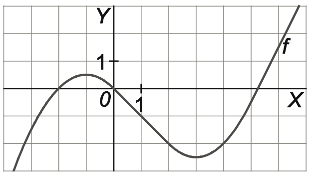
$$f'(10) = \lim_{h \to 0} \frac{f(10+h) - f(10)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{15} - \frac{1}{h+15}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{15h(h+15)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{15(h+15)} = \frac{1}{225} \text{ m/s}.$$

8. Observa la gráfica de $y = f(x)$ y calcula, aproximadamente $f'(-1)$, $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$ y $f'(5)$.



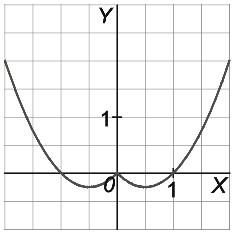
$f'(-1) \simeq \dfrac{3}{2}$ $f'(1) = 0$ $f'(2) \simeq -2$ $f'(3) = 0$ $f'(5) \simeq \dfrac{3}{2}$

9. Dibuja la gráfica de una función $y = f(x)$ para la que: $f'(-2) = 1$, $f'(-1) = 0$, $f'(0) = -1$, $f'(3) = 0$ y $f'(5) = 2$.



Respuesta abierta, por ejemplo la de la imagen.

10. Dibuja la gráfica de $f(x) = x^2 - |x|$. ¿Crees que tiene tangente en el origen? Intenta obtener $f'(0)$.



Observando la gráfica se observa que no tiene tangente en el origen, ya que en este punto tiene "un pico". Más formalmente, si se intenta calcular $f'(0)$, que sería la tangente de la recta tangente en el origen, se obtiene:

$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h}$, que depende del signo de h, ya que:

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h^2 + h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} h + 1 = 1$ y $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^2 - h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} h - 1 = -1$

Por tanto, $f'(0)$ no existe y no existe la tangente en el origen.

11. Ejercicio interactivo.

12. Ejercicio resuelto.

13. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \le 1 \\ -x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) ¿Es f continua en $x = 1$? **b)** Comprueba que no existe $f'(1)$. **c)** ¿Existe recta tangente en $P(1, f(1))$?

a) Calculemos los límites laterales en $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(x^2 + 1\right) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (-x + 3) = 2$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2 = f(1)$, es decir, la función es continua en $x = 1$.

b) Calculemos las derivadas laterales en $x = 1$:

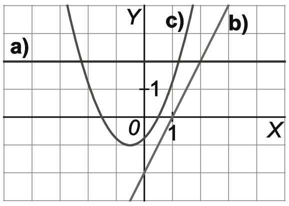
$$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2 + 1 - 2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (h + 2) = 2$$

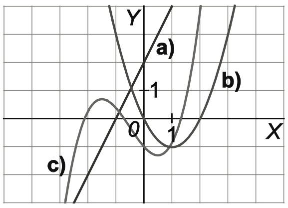
$$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-(1+h) + 3 - 2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h}{h} = -1$$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en $x = 1$.

c) Puesto que no existe $f'(1)$, no hay tangente en $P(1, f(1))$.

14. Observa las tres funciones representadas en la figura y, en cada caso, esboza la gráfica de $y = f'(x)$ a partir de la de $y = f(x)$.





15. Ejercicio resuelto.

16. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \sqrt{3}$ **c)** $f(x) = (x^2+1)^2$ **e)** $f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{4} - \frac{1}{6}$

b) $f(x) = x^4 - 3x$ **d)** $f(x) = 5x^4 + 2x^3 + 7x^2$ **f)** $f(x) = (3x^3 - 2x^2 - x + 1)^2$

a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = 4x^3 - 3$

c) $f'(x) = 2(x^2+1)2x = 4x^3 + 4x$

d) $f'(x) = 20x^3 + 6x^2 + 14x$

e) $f'(x) = 2x^2 - 3x + \frac{5}{4}$

f) $f'(x) = 2(3x^3 - 2x^2 - x + 1)(9x^2 - 4x - 1) = 54x^5 - 60x^4 - 8x^3 + 30x^2 - 6x - 2$

17. Si $f'(0) = 2$, $g'(0) = -1$, $f(0) = 7$ y $g(0) = 3$, calcula la pendiente de la tangente en el punto $x = 0$ de:

a) $s(x) = 2f(x) - 3g(x)$ **b)** $p(x) = \left(f(x) + x\right)^2$

a) $s'(x) = 2f'(x) - 3g'(x) \Rightarrow m = s'(0) = 2f'(0) - 3g'(0) = 7$

b) $p'(x) = 2\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right) \Rightarrow m = p'(0) = 2\left(f(0)+0\right)\left(f'(0)+1\right) = 42$

18. Calcula las derivadas de orden siete y ocho de:

$$\boldsymbol{f(x) = x^7 - 384x^6 + 1115x^5 - 20x^4 + 701x^3 + 3x - 4321}$$

$f^{vii}(x) = 7! = 5040$ y $f^{viii}(x) = 0$

En general, la derivada de orden *n* de una función polinómica de grado *n* es igual a *n*!, y las derivadas superiores son iguales a 0.

19. Ejercicio resuelto.

20. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = (2x-7)(5-3x)$ **c)** $f(x) = (x^4+3x^2)(2-6x-x^2)$ **e)** $f(x) = \sqrt{2x^3-x^2+5x-3}$

b) $f(x) = (x^3-x)^2(3x^2-1)$ **d)** $f(x) = x^2(x+3)(5x^2-x)$ **f)** $f(x) = (x^4+8)^2\sqrt{x-1}$

a) $f'(x) = 2(5-3x)+(2x-7)(-3) = -12x+31$

b) $f'(x) = 2(x^3-x)(3x^2-1)(3x^2-1)+(x^3-x)^2 6x = 24x^7-42x^5+20x^3-2x$

c) $f'(x) = (4x^3+6x)(2-6x-x^2)+(x^4+3x^2)(-6-2x) = -6x^5-30x^4-4x^3-54x^2+12x$

d) $f'(x) = 2x(x+3)(5x^2-x)+x^2(5x^2-x)+x^2(x+3)(10x-1) = 25x^4+56x^3-9x^2$

e) $f'(x) = \dfrac{6x^2-2x+5}{2\sqrt{2x^3-x^2+5x-3}}$

f) $f'(x) = 2(x^4+8)(4x^3)\sqrt{x-1}+(x^4+8)^2\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{4(x^4+8)(4x^3)(x-1)+(x^4+8)^2}{2\sqrt{x-1}} =$

$= \dfrac{17x^8-16x^7+144x^4-128x^3+64}{2\sqrt{x-1}}$

21. Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ **c)** $f(x) = \left(\dfrac{1}{x-3}\right)^2$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^3-x+3}{x^2+2x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+5}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^3-x}{x^2+1}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}\sqrt{x}$

a) $f'(x) = \dfrac{0\cdot(x-3)-1\cdot1}{(x-3)^2} = -\dfrac{1}{(x-3)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{(x^2+5)-x\cdot2x}{(x^2+5)^2} = \dfrac{-x^2+5}{(x^2+5)^2}$

c) $f'(x) = 2\left(\dfrac{1}{x-3}\right)\left(-\dfrac{1}{(x-3)^2}\right) = -\dfrac{2}{(x-3)^3}$

d) $f'(x) = \dfrac{(3x^2-1)(x^2+1)-(x^3-x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4+4x^2-1}{(x^2+1)^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{(3x^2-1)(x^2+2x-1)-(x^3-x+3)(2x+2)}{(x^2+2x-1)^2} = \dfrac{x^4+4x^3-2x^2-6x-5}{(x^2+2x-1)^2}$

f) $f'(x) = \dfrac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)^2}\sqrt{x}+\dfrac{x-2}{x-1}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}+\dfrac{x-2}{2\sqrt{x}(x-1)} = \dfrac{2x+(x-1)(x-2)}{2\sqrt{x}(x-1)^2} = \dfrac{x^2-x+2}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$

22. Dada $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, calcula $f'(x)$ y $f''(x)$.

$f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{4(x^2+1)^2-4x\cdot2(x^2+1)\cdot2x}{(x^2+1)^4} = \dfrac{4(x^2+1)-4x\cdot2\cdot2x}{(x^2+1)^3} = \dfrac{4(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}$

23 y 24. Ejercicios resueltos.

25. Copia y completa la siguiente tabla.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$	$(f\circ g)(x)$	$(f\circ g)'(x)$
0	1	1	2	5		
1	4	3	0	1		
2	–1	2	–1	3		
3	2	0	4	2		

Aplicando la regla de la cadena tenemos $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$, por tanto:

$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(1)=4$ y $(f\circ g)'(0)=f'(g(0))\,g'(0)=f'(1)\,g'(0)=0\cdot 5=0$

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(3)=2$ y $(f\circ g)'(1)=f'(g(1))\,g'(1)=f'(3)\,g'(1)=4\cdot 1=4$

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(2)=-1$ y $(f\circ g)'(2)=f'(g(2))\,g'(2)=f'(2)\,g'(2)=-1\cdot 3=-3$

$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(0)=1$ y $(f\circ g)'(3)=f'(g(3))\,g'(3)=f'(0)\,g'(3)=2\cdot 2=4$

De este modo, la tabla completa quedaría:

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$	$(f\circ g)(x)$	$(f\circ g)'(x)$
0	1	1	2	5	4	0
1	4	3	0	1	2	4
2	–1	2	–1	3	–1	–3
3	2	0	4	2	1	4

26. Sean $f(x)=x^2+x$ y $g(x)=2x+7$, calcula $(f\circ g)'(-1)$ y $(g\circ f)'(-1)$.

$f'(x)=2x+1$ y $g'(x)=2$, por tanto:

$(f\circ g)'(-1)=f'(g(-1))g'(-1)=f'(5)g'(-1)=22$ y $(g\circ f)'(-1)=g'(f(-1))\cdot f'(-1)=g'(0)\cdot f'(-1)=-2$

27. Aplicando la regla de la cadena, calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=(x-1)^5$

b) $f(x)=(3x+2)^4$

c) $f(x)=(x^3-2x^2+x-3)^6$

d) $f(x)=\sqrt{x^3-2}$

e) $f(x)=\sqrt{2x^3+x^2}$

f) $f(x)=\sqrt{x^3-x}$

a) $f'(x)=5(x-1)^4\cdot 1=5(x-1)^4$

b) $f'(x)=4(3x+2)^3\cdot 3=12(3x+2)^3$

c) $f'(x)=6(x^3-2x^2+x-3)^5(3x^2-4x+1)$

d) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^3-2}}\cdot 3x^2=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3-2}}$

e) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2x^3+x^2}}(6x^2+2x)=\dfrac{3x^2+x}{\sqrt{2x^3+x^2}}$

f) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^3-x}}(3x^2-1)=\dfrac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}}$

28. Utilizando las reglas de derivación de operaciones y la regla de la cadena, halla las derivadas de las funciones siguientes.

a) $f(x)=(2x^2-1)(x^3+4x-2)^4$ **b)** $f(x)=(x^2-1)\sqrt{5x-4}$ **c)** $f(x)=\left(\frac{3x-4}{x}\right)^2$

d) $f(x)=\left(\frac{\sqrt{x}}{2x-1}\right)^3$

a) $f'(x)=4x\left(x^3+4x-2\right)^4+\left(2x^2-1\right)\cdot 4\left(x^3+4x-2\right)^3\left(3x^2+4\right)=4\left(x^3+4x-2\right)^3\left(7x^4+9x^2-2x-4\right)$

b) $f'(x)=2x\sqrt{5x-4}+\left(x^2-1\right)\frac{5}{2\sqrt{5x-4}}=\frac{4x(5x-4)+5\left(x^2-1\right)}{2\sqrt{5x-4}}=\frac{25x^2-16x-5}{2\sqrt{5x-4}}$

c) $f'(x)=2\left(\frac{3x-4}{x}\right)\left(\frac{3x-(3x-4)}{x^2}\right)=\frac{8(3x-4)}{x^3}$

d) $f'(x)=3\left(\frac{\sqrt{x}}{2x-1}\right)^2\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x-1)-\sqrt{x}\cdot 2}{(2x-1)^2}=\frac{3x}{(2x-1)^2}\cdot\frac{2x-1-4x}{2\sqrt{x}\,(2x-1)^2}=\frac{-3x(2x+1)}{2\sqrt{x}(2x-1)^4}$

29. Utilizando la regla de la cadena calcula las siguientes derivadas.

a) $f(x)=\sqrt{(3x-5)^5-1}$ **b)** $f(x)=\left(\sqrt{x^2-x}\right)^3$ **c)** $f(x)=\frac{(x^3+2x)^4-1}{(x^3+2x)^3}$ **d)** $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{(3x-1)^2}$

a) $f'(x)=\frac{5(3x-5)^4\cdot 3}{2\sqrt{(3x-5)^5-1}}=\frac{15\,(3x-5)^4}{2\sqrt{(3x-5)^5-1}}$

b) $f'(x)=3\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2\cdot\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}=\frac{3}{2}\left(\sqrt{x^2-x}\right)(2x-1)$

c) $$f'(x)=\frac{\left[4\left(x^3+2x\right)^3\left(3x^2+2\right)\right]\left(x^3+2x\right)^3-\left[\left(x^3+2x\right)^4-1\right]\left[3\left(x^3+2x\right)^2\left(3x^2+2\right)\right]}{\left[\left(x^3+2x\right)^3\right]^2}=$$

$$=\frac{\left(x^3+2x\right)^2\left[4\left(x^3+2x\right)^4\left(3x^2+2\right)-3\left(\left(x^3+2x\right)^4-1\right)\left(3x^2+2\right)\right]}{\left(x^3+2x\right)^6}=$$

$$=\frac{4\left(x^3+2x\right)^4\left(3x^2+2\right)-3\left(x^3+2x\right)^4\left(3x^2+2\right)+3\left(3x^2+2\right)}{\left(x^3+2x\right)^4}=3x^2+2+\frac{3\left(3x^2+2\right)}{\left(x^3+2x\right)^4}$$

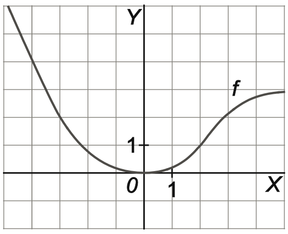
Otro modo:

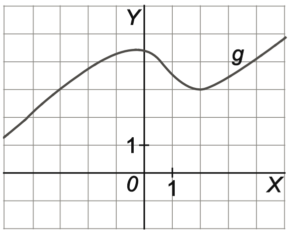
$$f(x)=\frac{(x^3+2x)^4-1}{(x^3+2x)^3}=x^3+2x-\frac{1}{(x^3+2x)^3}\Rightarrow f'(x)=3x^2+2-\frac{-3(x^3+2x)^2(3x^2+2)}{(x^3+2x)^6}=3x^2+2+\frac{3\left(3x^2+2\right)}{\left(x^3+2x\right)^4}$$

d) $$f'(x)=\frac{\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}-1\right)(3x-1)^2-\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\cdot 2\,(3x-1)\cdot 3}{(3x-1)^4}=$$

$$=\frac{(3x-1)\left[(2x+1)(3x-1)-2\sqrt{x^2+x}\,(3x-1)-12\left(x^2+x\right)+12x\sqrt{x^2+x}\right]}{2\sqrt{x^2+x}\,(3x-1)^4}=\frac{\left(-6x^2-11x-1\right)+(6x+2)\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}\ (3x-1)^3}$$

30. Sean f y g las funciones dadas en las gráficas de la figura y sea $h(x)=(f\circ g)(x)$.





a) Calcula $h(-3)$ y $h(2)$.

b) Estima $f'(-3), f'(2), g'(-3), g'(2)$.

c) ¿Cuál es el signo de $h'(-3)$? Explica cómo lo obtienes.

d) Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y=h(x)$ en $P(2, h(2))$.

a) $h(-3)=f(g(-3))=f(3)=2$ y $h(2)=f(g(2))=f(3)=2$

b) $f'(-3)=-\dfrac{3}{2}, f'(2)=1, g'(-3)=1$ y $g'(2)=0$

c) $h'(-3)=f'(g(-3))g'(-3)=f'(3)g'(-3)=f''(3)$, que debe ser positivo, ya que la recta tangente a f en $x=3$ es creciente y, por tanto, tiene pendiente positiva.

d) Como $h'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(3)g'(2)=0$, la ecuación de la recta tangente es $y-h(2)=h'(2)(x-2)\Rightarrow y=2$.

31. Ejercicio interactivo.

32 y 33. Ejercicios resueltos.

34. Comprueba, usando la derivada de la función inversa, que la derivada de $f(x)=\sqrt{x}$ es la que ya conoces.

Tomando $g(x)=x^2$ se tiene $f(x)=g^{-1}(x)$, luego: $f'(x)=\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}=\dfrac{1}{g'(f(x))}=\dfrac{1}{2f(x)}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

35. Calcula las derivadas de las inversas de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x)=x^3+x+1$ en el punto $x=11$.

b) $f(x)=x+\sqrt{x+5}$ en el punto $x=-3$.

a) Sea $g(x)=f^{-1}(x)$, tenemos $g'(11)=\dfrac{1}{f'(g(11))}$.

Para calcular $g(11)$ resolvamos la ecuación $f(x)=11\Rightarrow x^3+x+1=11\Rightarrow x^3+x-10=0\Rightarrow x=2$. Por otra parte, $f'(x)=3x^2+1$, con lo que $g'(11)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{13}$.

b) Sea $g(x)=f^{-1}(x)$, tenemos $g'(-3)=\dfrac{1}{f'(g(-3))}$.

Para calcular $g(-3)$ resolvamos la ecuación $f(x)=-3\Rightarrow x+\sqrt{x+5}=-3\Rightarrow \sqrt{x+5}=-3-x\Rightarrow$

$\Rightarrow x+5=9+x^2+6x\Rightarrow x^2+5x+4=0\Rightarrow x=-1$ (Falsa), $x=-4$. Por otra parte, $f'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}$, con lo que $g'(-3)=\dfrac{1}{f'(-4)}=\dfrac{2}{3}$.

36. Halla, para el punto $x = 1$, el valor de de la derivada de la inversa de la función $f(x) = x - \sqrt{x+5}$.

Sea $g(x) = f^{-1}(x)$, tenemos $g'(1) = \dfrac{1}{f'(g(1))}$.

Para calcular $g(1)$ resolvamos la ecuación $f(x) = 1 \Rightarrow x - \sqrt{x+5} = 1 \Rightarrow x - 1 = \sqrt{x+5} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1$ (Falsa), $x = 4$ .Por otra parte, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}$, con lo que $g'(1) = \dfrac{1}{f'(4)} = \dfrac{6}{5}$.

37. Deduce la derivada de la función: $f(x) = 5 + \sqrt{3x-2}$.

Calcula la ecuación de la tangente a la curva en el punto de abscisa 34.

Consideremos la función $g(x) = \dfrac{(x-5)^2 + 2}{3}$ y observemos que $(g \circ f)(x) = x$ .Derivando esta expresión tenemos $g'(f(x))\, f'(x) = 1$, con lo que $f'(x) = \dfrac{1}{g'(f(x))}$ .Como $g'(x) = \dfrac{2(x-5)}{3}$, obtenemos $f'(x) = \dfrac{3}{2(f(x)-5)} = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}$.

La tangente pedida tiene ecuación $y - f(34) = f'(34)(x-34) \Rightarrow y - 15 = \dfrac{3}{20}(x-34) \Rightarrow y = \dfrac{3}{20}x + \dfrac{99}{10}$.

38. Ejercicio resuelto.

39. Obtén las derivadas de las funciones siguientes.

a) $f(x) = \sqrt{x} - 4\sqrt{x^3}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{x^2}$

d) $f(x) = 3\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{x^3} - x^2 - 2x$

e) $f(x) = \sqrt[4]{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + x + 1$

f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[5]{x^3}}$

a) $f(x) = \sqrt{x} - 4\sqrt{x^3} = x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4\cdot\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 6\sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} = x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 2\cdot\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{x^2} = \dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{x^2} = x^{-\frac{7}{4}} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{7}{4}x^{-\frac{11}{4}} = -\dfrac{7}{4\sqrt[4]{x^{11}}} = -\dfrac{7}{4x^2\sqrt[4]{x^3}}$

d) $f(x) = 3\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{x^3} - x^2 - 2x = 3x^{\frac{1}{5}} + x^{\frac{3}{4}} - x^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3}{5}x^{-\frac{4}{5}} + \dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} - 2x - 2 = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^4}} + \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}} - 2x - 2$

e) $f(x) = \sqrt[4]{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + x + 1 = x^{\frac{1}{4}} - 3x^{\frac{2}{3}} + x + 1 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} - 2x^{-\frac{1}{3}} + 1 = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} + 1$

f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[5]{x^3}} = \dfrac{x}{x^{\frac{3}{5}}} = x^{\frac{2}{5}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

40. ¿Existe algún punto en la gráfica de $y=\sqrt[5]{x}$ en la que la tangente sea paralela a la recta $3x-y=0$?

La pendiente de la recta dada es 3, por tanto, nos preguntamos si la ecuación $\left(\sqrt[5]{x}\right)'=3$ tiene solución.

Derivando tenemos: $\left(\sqrt[5]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{5}}\right)'=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\Rightarrow\left(\sqrt[5]{x}\right)'=3\Rightarrow\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}=3\Rightarrow 15\sqrt[5]{x^4}=1\Rightarrow 15^5x^4=1\Rightarrow$

$\Rightarrow x^4=\frac{1}{15^5}$, que tiene dos soluciones, $x=\sqrt[4]{\frac{1}{15^5}}=\frac{1}{15\sqrt[4]{15}}$ y $x=-\sqrt[4]{\frac{1}{15^5}}=-\frac{1}{15\sqrt[4]{15}}$.

Por tanto, sí existe algún punto en la gráfica de $y=\sqrt[5]{x}$, de hecho existen dos, en los que la tangente es paralela a la recta $3x-y=0$. Estos dos puntos son los de abscisa $x=\frac{1}{15\sqrt[4]{15}}$ o $x=-\frac{1}{15\sqrt[4]{15}}$.

41. Dada la función $f(x)=\sqrt[3]{6x-3}$:

a) Halla $f'(1)$, $f^{-1}(x)$ y su derivada $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

b) Calcula $\left(f^{-1}\right)'(f(1))$ y compáralo con $f'(1)$. ¿Es el resultado que esperabas?

c) Obtén $f^{-1}(2)$.

a) $f(x)=\sqrt[3]{6x-3}=(6x-3)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(6x-3)^{-\frac{2}{3}}\cdot 6=\frac{2}{\sqrt[3]{(6x-3)^2}}\Rightarrow f'(1)=\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$

$y=\sqrt[3]{6x-3}\Rightarrow y^3=6x-3\Rightarrow x=\frac{y^3+3}{6}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x^3+3}{6}$

$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{3x^2}{6}=\frac{x^2}{2}$

b) $\left(f^{-1}\right)'(f(1))=\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt[3]{3}\right)=\frac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}{2}=\frac{\sqrt[3]{9}}{2}=\frac{1}{f'(1)}$ como tenía que ocurrir.

c) $f^{-1}(2)=\frac{2^3+3}{6}=\frac{11}{6}$

42 y 43. Ejercicios resueltos.

44. Halla la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\ln\left(x^3-2x+1\right)$

b) $f(x)=\log_2\left(3x^2-1\right)$

c) $f(x)=\sqrt{x}\ln\left(7x^2\right)$

d) $f(x)=5x\log_5 x^4$

e) $f(x)=x\ln x$

f) $f(x)=\sqrt{\ln x}$

a) $f'(x)=\frac{3x^2-2}{x^3-2x+1}$ con $x\in D(f)$

b) $f'(x)=\frac{6x}{\ln 2\left(3x^2-1\right)}$ con $x\in D\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

c) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(7x^2\right)+\sqrt{x}\frac{14x}{7x^2}=\frac{\ln\left(7x^2\right)}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{4+\ln\left(7x^2\right)}{2\sqrt{x}}$

d) $f'(x)=5\log_5 x^4+5x\frac{4x^3}{\ln 5\cdot x^4}=5\log_5 x^4+\frac{20}{\ln 5}$

e) $f'(x)=\ln x+x\frac{1}{x}=1+\ln x$

f) $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

45. Deriva estas funciones usando derivación logarítmica.

a) $f(x)=x^x$ **c)** $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}$ **e)** $f(x)=x^{x^2}$

b) $f(x)=x^{\ln x}$ **d)** $f(x)=x^{2x+1}$ **f)** $f(x)=x^{\sqrt{x}}$

a) $f(x)=x^x \Rightarrow \ln f(x)=x\ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+1 \Rightarrow f'(x)=f(x)(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$

b) $f(x)=x^{\ln x} \Rightarrow \ln f(x)=(\ln x)^2 \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{2\ln x}{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2\ln x\cdot f(x)}{x}=\dfrac{2\ln x\cdot x^{\ln x}}{x}=2\ln x\cdot x^{\ln x-1}$

c) $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln f(x)=\sqrt{x}\,\ln\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{x}}{2}\ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{\ln x}{4\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{2x}=\dfrac{\ln x}{4\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2+\ln x}{4\sqrt{x}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)=f(x)\cdot\dfrac{2+\ln x}{4\sqrt{x}}=\sqrt{x}^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{2+\ln x}{4\sqrt{x}}=\dfrac{(2+\ln x)\sqrt{x}^{\sqrt{x}-1}}{4}$

d) $f(x)=x^{2x+1} \Rightarrow \ln f(x)=(2x+1)\ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=2\ln x+\dfrac{2x+1}{x} \Rightarrow f'(x)=f(x)\left(2\ln x+\dfrac{2x+1}{x}\right)=\left(2\ln x+\dfrac{2x+1}{x}\right)x^{2x+1}$

e) $f(x)=x^{x^2} \Rightarrow \ln f(x)=x^2\ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=2x\ln x+\dfrac{x^2}{x}=2x\ln x+x=x(2\ln x+1) \Rightarrow f'(x)=x(2\ln x+1)f(x)=$

$=x(2\ln x+1)x^{x^2}=(2\ln x+1)x^{x^2+1}$

f) $f(x)=x^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln f(x)=\sqrt{x}\ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=f(x)\cdot\dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}=\dfrac{x^{\sqrt{x}}(2+\ln x)}{2\sqrt{x}}$

46 y 47. Ejercicios resueltos.

48. Obtén la derivada de estas funciones.

a) $f(x)=e^{3x^3-5x+1}$ **b)** $f(x)=e^x\left(x^2-7x-3\right)$

c) $f(x)=\dfrac{e^{x^3}+x^3}{x}$ **d)** $f(x)=\sqrt{x}e^x$

a) $f'(x)=e^{3x^3-5x+1}\left(9x^2-5\right)$

b) $f'(x)=e^x\left(x^2-7x-3\right)+e^x(2x-7)=e^x\left(x^2-5x-10\right)$

c) $f'(x)=\dfrac{\left(e^{x^3}3x^2+3x^2\right)x-\left(e^{x^3}+x^3\right)}{x^2}=\dfrac{e^{x^3}\left(3x^3-1\right)+2x^3}{x^2}$

d) $f'(x)=\dfrac{e^x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}e^x=e^x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)=\dfrac{e^x(1+2x)}{2\sqrt{x}}$

49. Para las siguientes funciones, calcula para qué valores de *x* se anula, en cada caso, su derivada.

a) $f(x)=e^{x^2-6x}$ **b)** $f(x)=e^{-x^2+5x-6}$ **c)** $f(x)=e^{x^3-x}$ **d)** $f(x)=e^{\sqrt{x^2-4}}$

a) $f'(x)=e^{x^2-6x}(2x-6)$, por tanto, $f'(x)=0 \Rightarrow 2x-6=0 \Rightarrow x=3$

b) $f'(x)=e^{-x^2+5x-6}(-2x+5)$, por tanto, $f'(x)=0 \Rightarrow -2x+5=0 \Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$

c) $f'(x)=e^{x^3-x}(3x^2-1)$, por tanto, $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-1=0 \Rightarrow x^2=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

d) $f'(x)=e^{\sqrt{x^2-4}}\left(\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}\right)=\dfrac{xe^{\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{x^2-4}}$, por tanto, $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$ y como $D(f)=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$, la derivada no sea nula para ningún valor del $D(f)$.

50. Deriva las funciones siguientes.

a) $f(x)=7^{2x}$ **d)** $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$ **g)** $f(x)=e^{7x}\sqrt{x}$ **j)** $f(x)=e^x \ln x$

b) $f(x)=2^{\sqrt{x}}$ **e)** $f(x)=3^{x^3-x}$ **h)** $f(x)=\dfrac{2^x-x}{3^x}$ **k)** $f(x)=\ln\left(\sqrt{e^x}\right)$

c) $f(x)=9^{\sqrt[3]{x}+1}$ **f)** $f(x)=x-8^{-x^4}$ **i)** $f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^{e^x}$ **l)** $f(x)=\dfrac{xe^x}{\ln x}$

a) $f'(x)=7^{2x}\ln 7\cdot 2=2\ln 7\cdot 7^{2x}$

b) $f'(x)=2^{\sqrt{x}}\ln 2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2^{\sqrt{x}}\ln 2}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x)=9^{\sqrt[3]{x}+1}\ln 9\cdot\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{9^{\sqrt[3]{x}+1}\ln 9}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}\cdot x-e^{-x}}{x^2}=\dfrac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$

e) $f'(x)=3^{x^3-x}\ln 3\cdot(3x^2-1)$

f) $f'(x)=1-8^{-x^4}\ln 8\cdot(-4x^3)=1+4\ln 8\cdot x^3\cdot 8^{-x^4}$

g) $f'(x)=7e^{7x}\sqrt{x}+e^{7x}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{(14x+1)e^{7x}}{2\sqrt{x}}$

h) $f'(x)=\dfrac{(2^x\ln 2-1)3^x-(2^x-x)3^x\cdot\ln 3}{3^{2x}}=\dfrac{3^x\left[2^x(\ln 2-\ln 3)-1+\ln 3\cdot x\right]}{3^{2x}}=\dfrac{2^x(\ln 2-\ln 3)-1+\ln 3\cdot x}{3^x}$

i) $f'(x)=\left(\sqrt{2}\right)^{e^x}\ln\sqrt{2}\cdot e^x=\ln\sqrt{2}\cdot e^x\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{e^x}$

j) $f'(x)=e^x\ln x+e^x\dfrac{1}{x}=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{e^x(x\ln x+1)}{x}$

k) $f(x)=\ln\left(\sqrt{e^x}\right)=\ln e^{\frac{x}{2}}=\dfrac{x}{2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}$

l) $f'(x)=\dfrac{(e^x+xe^x)\ln x-xe^x\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{e^x\left[(1+x)\ln x-1\right]}{(\ln x)^2}$

51 y 52. Ejercicios resueltos.

53. Obtén la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\operatorname{sen}\left(x^2+e^{2x}\right)$ **c)** $f(x)=\operatorname{sen}\left(5x^2-2x+1\right)$ **e)** $f(x)=x\cos(3x-2)$

b) $f(x)=\sqrt{\cos x}$ **d)** $f(x)=\operatorname{tg}^2(2x)$ **f)** $f(x)=\dfrac{x+\operatorname{sen} x}{\cos(4x)}$

a) $f'(x)=\left(2x+2e^{2x}\right)\cos\left(x^2+e^{2x}\right)$

b) $f'(x)=\dfrac{-\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}}$

c) $f'(x)=(10x-2)\cos\left(5x^2-2x+1\right)$

d) $f'(x)=2\operatorname{tg}(2x)\cdot\dfrac{2}{\cos^2(2x)}=\dfrac{4\operatorname{sen}(2x)}{\cos^3(2x)}$

e) $f'(x)=\cos(3x-2)+x(-\operatorname{sen}(3x-2))\cdot 3=\cos(3x-2)-3x\operatorname{sen}(3x-2)$

f) $f'(x)=\dfrac{(1+\cos x)\cos(4x)-(x+\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen}(4x))\cdot 4}{\cos^2(4x)}=\dfrac{(1+\cos x)\cos(4x)+4(x+\operatorname{sen} x)\operatorname{sen}(4x)}{\cos^2(4x)}$

54. Halla la recta tangente a la curva $f(x)=\operatorname{sen} x$ en el origen.

$f'(x)=\cos x$, por tanto, la ecuación de la recta tangente en el origen es $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=x$.

55. ¿En qué puntos la recta tangente a la función $f(x)=\operatorname{tg}(2x)$ está menos inclinada que la bisectriz del primer cuadrante?

Queremos encontrar los puntos en los que $|f'(x)|<1$.

Como $f'(x)=\dfrac{2}{\cos^2(2x)}$, esta condición equivale a $2<\cos^2(2x)$, que no tiene solución, ya que $\cos^2(2x)\le 1$ para cualquier x.

Por tanto, no existen puntos que cumplan la condición requerida.

56. Encuentra los puntos con abscisa en $[0, 2\pi]$ para los que la tangente a la curva $f(x)=\operatorname{sen} x+\cos x$ es horizontal.

Queremos encontrar los puntos en $[0, 2\pi]$ que verifiquen que $f'(x)=0$.

Como $f'(x)=\cos x-\operatorname{sen} x$, tenemos: $f'(x)=0\Rightarrow \operatorname{sen} x=\cos x\Rightarrow \operatorname{tg} x=1\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4},\ x=\dfrac{5\pi}{4}$.

Por tanto, los puntos buscados son $A\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y $B\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

57. Calcula la derivada de las siguientes funciones aplicando la regla de la cadena.

a) $f(x) = \text{arcsen}\left(e^x\right)$

b) $f(x) = \text{arctg}\left(1+x^2\right)$

c) $f(x) = \sqrt{\arccos x}$

d) $f(x) = \ln\left(\text{sen}\, x + \text{arcsen}\, x\right)$

a) $f'(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

b) $f'(x) = \dfrac{2x}{1+\left(1+x^2\right)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2\sqrt{\arccos x}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{\left(1-x^2\right)\arccos x}}$

d) $f'(x) = \dfrac{\cos x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\text{sen}\, x + \text{arcsen}\, x}$

58. Halla en qué puntos la recta tangente a la función arco tangente es horizontal.

Como la derivada de la función arco tangente es $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, no existe ningún punto en el que la derivada se anule, es decir, no existe ningún punto con tangente horizontal.

59. Deriva y simplifica todo lo que puedas la función $f(x) = \text{arctg}(x) + \text{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$. Observemos que obtenemos el resultado esperado, ya que $\text{arctg}(x)$ y $\text{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ son siempre arcos complementarios, es decir $f(x) = \text{arctg}(x) + \text{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, por lo que $f'(x) = 0$.

60. Calcula la derivada del arcocotangente.

$\text{arcctg}(x) = \text{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow \text{arcctg}(x) = \dfrac{\pi}{2} - \text{arctg}(x)$, por tanto, la derivada de $f(x) = \text{arcctg}(x)$ es $f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

61. Ejercicio interactivo.

62. Ejercicio resuelto.

63. *Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si $f'(x_0) \leq 0$, entonces *f* es decreciente en x_0.

b) Si $f'(x_0) > 0$, entonces *f* es creciente en x_0.

c) Si *f* es decreciente en x_0, entonces $f'(x_0) \leq 0$.

a) Falsa, x_0 podría ser un máximo o un mínimo relativo. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, tenemos que $f'(0) = 0$ y *f* tiene un mínimo relativo $x = 0$, por lo que en este punto no crece ni decrece.

b) Verdadera, si $f'(x_0) > 0$, entonces la recta tangente en $P(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente positiva, luego *f* es creciente en ese punto.

c) Si $\exists f'(x_0)$ entonces es verdadero, pues si *f* es decreciente en x_0, entonces la recta tangente en $P(x_0, f(x_0))$ es horizontal, es decir, tiene pendiente cero, o es decreciente, es decir, tiene pendiente negativa, en cualquier caso $f'(x_0) \leq 0$.

64. ¿Es creciente la función $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ en el punto $P(0, 1)$?

$f'(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow f'(0) = 0$, la derivada en el punto no nos proporciona información sobre el crecimiento en dicho punto, por tanto, debemos estudiar el signo de la derivada a la derecha e izquierda de $x = 0$.

Como $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$ se anula si $x = 0$ o $x = \frac{2}{3}$ los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f* quedan determinados por la tabla adjunta, de donde deducimos que en el punto *P* la función tiene un máximo relativo, por lo que no es creciente, ni decreciente, en dicho punto.

	$-\infty$ 0	0 $\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$ $+\infty$
x	−	+	+
$3x - 2$	−	−	+
f'	+	−	+
f	↗	↘	↗

65. Señala las abscisas de todos los puntos donde es posible que la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$ presente un máximo o un mínimo relativo.

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x+1)(x-1)$ se anula si $x = 0$, $x = -1$ o $x = 1$, siendo estas las abscisas de los posibles máximo o mínimos relativos.

Si deseamos saber si realmente son máximos o mínimos relativos estudiamos los intervalos de crecimiento de *f*, determinados por la tabla adjunta. Así, en $x = -1$ hay un máximo relativo, en $x = 1$ un mínimo relativo y en $x = 0$ la función es decreciente.

	$-\infty$ −1	−1 0	0 1	1 $+\infty$
$x + 1$	−	+	+	+
x^2	+	+	+	+
$x - 1$	−	−	−	+
f'	+	−	−	+
f	↗	↘	↘	↗

66. *Determina los máximos y mínimos relativos, así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -2x^2 + 8x$ **c)** $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ **e)** $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x + 2$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ **d)** $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$ **f)** $f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 24x + 1$

a) $f'(x) = -4x + 8$ se anula si $x = 2$, es positiva si $x < 2$ y negativa si $x > 2$, por tanto, la función es creciente en $(-\infty, 2)$, decreciente en $(2, +\infty)$ y tiene un máximo relativo en $x = 2$.

Hemos resuelto el apartado en la forma general pero, como la gráfica es una parábola, podemos estudiar los intervalos de crecimiento, los extremos y representar la gráfica sin necesidad de estudiar el signo de la derivada.

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ se anula si $x = 1$ o $x = 3$.

En la tabla adjunta se determinan los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de la función: es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, decreciente en $(1, 3)$, con un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

	$-\infty \quad 1$	$1 \quad 3$	$3 \quad +\infty$
$x-1$	−	+	+
$x-3$	−	−	+
f'	+	−	+
f	↗	↘	↗

c) $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x+1)(x-1)$ se anula si $x = 0$, $x = -1$ o $x = 1$.

En la tabla adjunta se determinan los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de la función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, decreciente en $(-1, 1)$, con un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

	$-\infty \quad -1$	$-1 \quad 0$	$0 \quad 1$	$1 \quad +\infty$
$x+1$	−	+	+	+
x^2	+	+	+	+
$x-1$	−	−	−	+
f'	+	−	−	+
f	↗	↘	↘	↗

d) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$ se anula si $x = 0$, $x = -1$ o $x = 1$.

En la tabla adjunta se determinan los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de la función: es creciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$, decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$, con mínimos relativos en $x = -1$ y $x = 1$ y un máximo relativo en $x = 0$.

	$-\infty \quad -1$	$-1 \quad 0$	$0 \quad 1$	$1 \quad +\infty$
$x+1$	−	+	+	+
x	−	−	+	+
$x-1$	−	−	−	+
f'	−	+	−	+
f	↘	↗	↘	↗

e) $f'(x) = 6x^2 - 30x - 36 = 6(x-6)(x+1)$ se anula si $x = 6$ o $x = -1$.

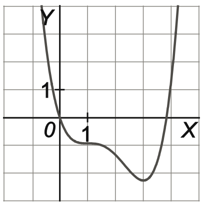
En la tabla adjunta se determinan los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de la función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (6, +\infty)$, decreciente en $(-1, 6)$, con un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 6$.

	$-\infty \quad -1$	$-1 \quad 6$	$6 \quad +\infty$
$x+1$	−	+	+
$x-6$	−	−	+
f'	+	−	+
f	↗	↘	↗

f) $f'(x) = 12x^3 + 24x^2 + 12x + 24 = 12(x+2)(x^2+1)$ se anula si $x = -2$. Como $x^2 + 1$ es siempre positivo, la derivada es positiva si $x > -2$ y negativa si $x < -2$, por tanto, la función es creciente en $(-2, +\infty)$, decreciente en $(-\infty, -2)$ y tiene un mínimo relativo en $x = -2$.

67. *Dibuja una posible gráfica para $y = f(x)$ sabiendo que se cumple:

$f'(x) \le 0$ en $(-\infty, 3)$; $f'(x) > 0$ en $(3, +\infty)$; $f'(1) = 0$ y $f'(3) = 0$.



68 y 69. Ejercicios resueltos.

70. Calcula el valor máximo y mínimo de:

a) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+10}$ en el intervalo $[0,\ 4]$

b) $f(x)=x^2-3x$ en el intervalo $[2,\ 5]$

c) $f(x)=x^3-3x^2$ en el intervalo $[-1,\ 4]$

d) $f(x)=x^3+4x^2+x-6$ en el intervalo $[-3,\ 4]$

e) $f(x)=3x^5-25x^3+60x$ en el intervalo $[-5,\ 2]$

f) $f(x)=x^4-x^2+1$ en el intervalo $[-2,\ 2]$

En todos los apartados se procede siguiendo la misma pauta: se calcula la derivada de la función; la igualamos a cero y resolvemos dicha ecuación, teniendo en cuenta únicamente las soluciones que pertenezcan al correspondiente intervalo abierto; calculamos el valor de la función en los extremos del intervalo y en los calculados previamente; la imagen mayor será el máximo y la menor será el mínimo.

a) $f'(x)=\dfrac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+10}}=0\Rightarrow 2x-6=0\Rightarrow x=3$, que pertenece al intervalo $(0,\ 4)$.

$f(0)=\sqrt{10}$, $f(3)=1$ y $f(4)=\sqrt{2}$, por tanto, el valor máximo de la función en el intervalo dado es $\sqrt{10}$ (se alcanza en $x=0$) y el valor mínimo es 1 (se alcanza en $x=3$).

b) $f'(x)=2x-3=0\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$, pero no pertenece al intervalo $(2,\ 5)$.

$f(2)=-2$ y $f(5)=10$, por tanto, el valor máximo de la función en el intervalo dado es 10 (se alcanza en $x=5$) y el valor mínimo es –2 (se alcanza en $x=2$).

c) $f'(x)=3x^2-6x=0\Rightarrow x=0,\ x=2$, ambos valores pertenecen al intervalo $(-1,\ 4)$.

$f(-1)=-4$, $f(0)=0$, $f(2)=-4$ y $f(4)=16$, por tanto, el valor máximo de la función en el intervalo dado es 16 (se alcanza en $x=4$) y el valor mínimo es –4 (se alcanza en $x=-1$ y $x=2$).

d) $f'(x)=3x^2+8x+1=0\Rightarrow x=\dfrac{-4-\sqrt{13}}{3}\simeq-2{,}535,\ x=\dfrac{-4+\sqrt{13}}{3}\simeq-0{,}131$, ambos valores pertenecen al intervalo $(-3,\ 4)$.

$f(-3)=0$, $f\left(\dfrac{-4-\sqrt{13}}{3}\right)=\dfrac{-70+26\sqrt{13}}{27}\approx0{,}879$, $f\left(\dfrac{-4+\sqrt{13}}{3}\right)=\dfrac{-70-26\sqrt{13}}{27}\approx-6{,}065$ y $f(4)=126$, por tanto, el valor máximo de la función en el intervalo dado es 126 (se alcanza en $x=4$) y el valor mínimo es $\dfrac{-70-26\sqrt{13}}{27}$ (se alcanza en $x=\dfrac{-4+\sqrt{13}}{3}$).

e) $f'(x)=15x^4-75x^2+60=0\Rightarrow x=-2,\ x=-1,\ x=1,\ x=2$, todas las soluciones, salvo la última, pertenecen al intervalo $(-5{,}2)$.

$f(-5)=-6550$, $f(-2)=-16$, $f(-1)=-38$, $f(1)=38$ y $f(2)=16$, por tanto, el valor máximo de la función en el intervalo dado es 38 (se alcanza en $x=1$) y el valor mínimo es –6550 (se alcanza en $x=-5$).

f) $f'(x)=4x^3-2x=0\Rightarrow x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ x=0,\ x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, todas las soluciones pertenecen al intervalo $(-2,\ 2)$.

$f(-2)=13$, $f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$, $f(0)=1$, $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$ y $f(2)=13$, por tanto, el valor máximo de la función en el intervalo dado es 13 (se alcanza en $x=-2$ y $x=2$) y el valor mínimo es $\dfrac{3}{4}$ (se alcanza en $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$).

71. Halla dos números reales positivos cuya suma sea 20 y de forma que la suma del cuadrado del mayor y del doble del menor sea mínima.

Sean $0 \le x \le y$ los números buscados. La función que queremos minimizar es $S = y^2 + (2x)^2 = y^2 + 4x^2$, esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $x + y = 20$, que nos permite despejar una de las variables, por ejemplo *y*, sustituyéndola en la expresión de *S*:

$$y = 20 - x \Rightarrow S = (20 - x)^2 + 4x^2 = 5x^2 - 40x + 400$$

Además, como $0 \le x \le y$, debe cumplirse que $x \in [0, 10]$.

De este modo, debemos minimizar la función $S(x) = 5x^2 - 40x + 400$ en el intervalo $[0, 10]$.

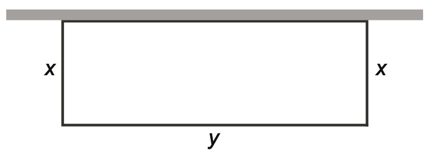
$S'(x) = 10x - 40 = 0 \Rightarrow x = 4$, que pertenece al intervalo $(0, 10)$.

$S(0) = 400$, $S(4) = 320$ y $S(10) = 500$

Por tanto, el mínimo se alcanza en $x = 4$, es decir, los números buscados son $x = 4$ e $y = 16$.

72. Queremos delimitar una parcela rectangular para hacer una huerta y disponemos de 200 m de alambre. Solamente tenemos que utilizar alambre para tres lados de la parcela, pues para el cuarto aprovechamos un muro. Calcula las dimensiones de la parcela de área máxima.

Sean *x* e *y* los lados del rectángulo (ver figura). La función que se quiere maximizar es $A = xy$, esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $2x + y = 200$, que permite despejar *y*, sustituyéndola en la expresión de *A*:



$y = 200 - 2x \Rightarrow A = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$

Además, *x* e *y* deben ser positivos, por lo que *x* debe estar en el intervalo $[0, 100]$.

De este modo, se quiere maximizar la función $A(x) = 200x - 2x^2$ en el intervalo $[0, 100]$.

$A'(x) = 200 - 4x = 0 \Rightarrow x = 50$, que pertenece al intervalo $(0, 100)$.

$A(0) = 0$, $A(50) = 500$ y $A(100) = 0$, por tanto, el área máxima es de 500 m^2, que se alcanza para $x = 50$ m e $y = 100$ m.

73. Los beneficios de una fábrica de camisetas dependen del número de unidades producido cada día según la función $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ donde x indica miles de camisetas producidas al día y $f(x)$ miles de euros. Si las limitaciones de personal y máquinas obligan a producir entre 2000 y 2500 camisetas, ¿cuántas debe producir diariamente para obtener máximos beneficio?

Puesto que *x* indica miles de camisetas, debemos maximizar $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ en el intervalo $[2; 2{,}5]$.

$f'(x) = -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$, que no pertenece al intervalo $(2; 2{,}5)$.

$f(2) = 3$ y $f(2{,}5) = 3{,}75$, por tanto, el beneficio máximo, 3750 €, se alcanza produciendo 2500 camisetas diarias.

74. Ejercicio resuelto.

75. Estudia la curvatura de las siguientes funciones.

a) $f(x) = -2x^2 + 8x$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

c) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

d) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

a) $f'(x) = -4x + 8 \Rightarrow f''(x) = -4$

Como la segunda derivada es siempre negativa, la función es cóncava hacia abajo ($\cap$)en $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$

Si $x < 2$, $f''(x) < 0$ y, por tanto, *f* es cóncava hacia abajo ($\cap$) en $(-\infty, 2)$.

Si $x > 2$, $f''(x) > 0$ y, por tanto, *f* es cóncava hacia arriba ($\cup$) en $(2, +\infty)$.

c) $f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 4 = 12\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ se anula si $x = -\frac{\sqrt{3}}{3} = x_1$ o $x = \frac{\sqrt{3}}{3} = x_2$. En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, obteniéndose que *f* es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

	$-\infty$ x_1	x_2	$+\infty$
$x - x_1$	–	+	+
$x - x_2$	–	–	+
f''	+	–	+
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$

d) $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 \Rightarrow f''(x) = 60x^3 - 30x = 60x\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

se anula si $x = 0$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = x_1$ o $x = \frac{\sqrt{2}}{2} = x_2$. En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, obteniéndose que *f* es cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

	$-\infty$ x_1	0	x_2	$+\infty$
$x - x_1$	–	+	+	+
x	–	–	+	+
$x - x_2$	–	–	–	+
f''	–	+	–	+
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

76. Estudia la curvatura y determina la abscisa de los puntos de inflexión de $f(x)$ sabiendo que:

$$f''(x) = (x+1)(x-3)^2(x-7)$$

La segunda derivada se anula si $x = -1$, $x = 3$ o $x = 7$. En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, obteniéndose que *f* es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1, 7)$, siendo los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 7$ los puntos de inflexión.

	$-\infty$ -1	3	7	$+\infty$
$x + 1$	–	+	+	+
$(x-3)^2$	+	+	+	+
$x - 7$	–	–	–	+
f''	+	–	–	+
f	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cup$

77. Halla la ecuación de la recta tangente a $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ en su punto de inflexión de abscisa positiva.

Si $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, tenemos $f'(x) = \dfrac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ y $f''(x) = \dfrac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} =$

$= \dfrac{-2x(x^2+1) - 4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} = \dfrac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$.

De este modo, el punto de inflexión de abscisa positiva tiene por abscisa la solución positiva de la ecuación $2x^3 - 6x = 0$, es decir, $x = \sqrt{3}$, y la recta tangente en dicho punto de inflexión tiene ecuación $y - f(\sqrt{3}) = f'(\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) \Rightarrow y - \dfrac{\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{1}{8}(x-\sqrt{3}) \Rightarrow y = -\dfrac{1}{8}x + \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

78. ¿Tiene algún punto de inflexión la gráfica de $f(x) = x^2 + \cos x + 1$?

$f'(x) = 2x - \operatorname{sen} x \Rightarrow f''(x) = 2 - \cos x$, como $f''(x)$ no se anula nunca, la gráfica de *f* no tienen puntos de inflexión.

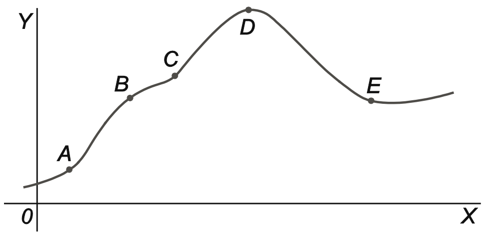
79. Ejercicio interactivo.

80 a 89. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Derivada de una función en un punto. Función derivada

90. Considera la gráfica de la figura y contesta, en cada caso, entre qué pareja de puntos consecutivos se cumple la condición dada:



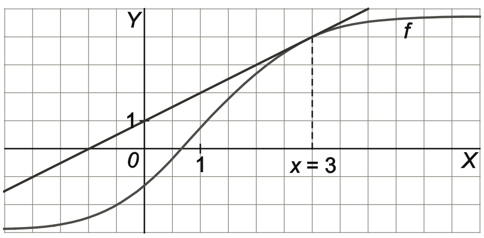
a) La tasa de variación media es negativa.

b) La tasa de variación media es máxima.

c) La tasa de variación media es más próxima a cero.

a) Entre *D* y *E* **b)** Entre *A* y *B* **c)** Entre *B* y *C*

91. Halla la derivada de $f(x)$ en $x = 3$.



La pendiente de la recta tangente es 1 (observemos que las escalas de los ejes son distintas), por tanto, $f'(3) = 1$.

92. Aplicando la definición, halla las siguientes derivadas en los puntos indicados.

a) $f(x) = 2x^2 - 3x$, $x = -1$ y $x = 2$

b) $f(x) = x^3 + x - 5$, $x = 0$ y $x = 5$

c) $f(x) = x^2 - 5$, $x = -2$ y $x = 2$

a) $f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(-1+h)^2 - 3(-1+h) - 5}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h^2 - 7h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2h - 7) = -7$

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(2+h)^2 - 3(2+h) - 2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h^2 + 5h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2h + 5) = 5$

b) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3 + h - 5 + 5}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3 + h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h^2 + 1) = 1$

$f'(5) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(5+h)^3 + (5+h) - 5 - 125}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3 + 15h^2 + 76h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h^2 + 15h + 76) = 76$

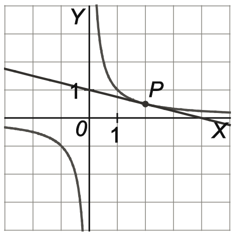
c) $f'(-2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-2+h)^2 - 5 + 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 - 4h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h - 4) = -4$

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^2 - 5 + 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 + 4h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h + 4) = 4$

93. Aplicando la definición de derivada, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el punto $P\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$. Dibuja en un mismo sistema de ejes la curva y la tangente obtenida.

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{2h(2+h)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{2(2+h)} = -\dfrac{1}{4}$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}(x - 2) \Rightarrow y = -\dfrac{1}{4}x + 1$.



94. Calcula la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ trazada desde el punto $P(0, -1)$.

Suponiendo que el punto de tangencia es $Q(a, a^2)$, la pendiente de la tangente será $2a$, ya que si $f(x) = x^2$ tenemos $f'(x) = 2x$.

Por otro lado, como la recta tangente pasa por P y Q, su pendiente será $\dfrac{a^2 + 1}{a}$, con lo que:

$\dfrac{a^2 + 1}{a} = 2a \Rightarrow a^2 + 1 = 2a^2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1, a = -1$.

Los puntos de tangencia son, por tanto, $Q_1(1, 1)$ y $Q_2(-1, 1)$, y las respectivas rectas tangentes son $y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$ e $y - 1 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x - 1$.

95. Halla en qué puntos la recta tangente a la curva $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ es horizontal y calcula, en cada caso, la ecuación de dicha tangente.

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$

La pendiente de la recta tangente en los puntos buscados es 0, por tanto, sus abscisas verifican $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3,\ x = \dfrac{1}{3}$.

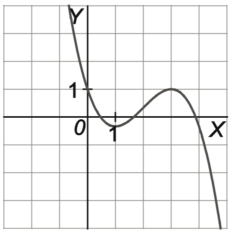
Así, los puntos buscados son $A(3, -11)$ y $B\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{41}{27}\right)$, y las respectivas rectas tangentes son $y = -11$ e $y = -\dfrac{41}{27}$.

96. Dibuja una posible gráfica para $y = f(x)$ si tienes estos datos sobre la derivada:

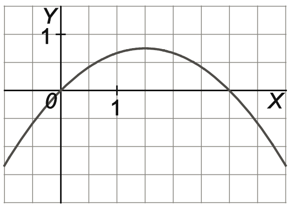
$f'(x) > 0$ en el intervalo (1, 3)

$f'(x) < 0$ para $x < 1$ y para $x > 3$

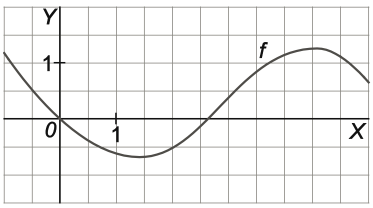
$f'(x) = 0$ para $x = 1$ y para $x = 3$



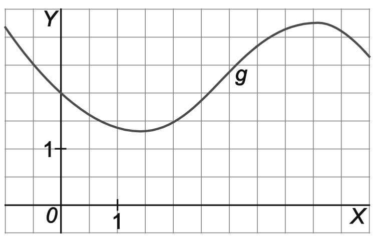
97. Dibuja aproximadamente la gráfica de una función f para la que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f(3) = 0$ y $f'(3) = -1$.



98. Si la gráfica de una función f es la de la figura, dibuja aproximadamente la gráfica de una función g tal que $g(0) = 2$ y $g'(x) = f'(x)$ para todo x.



La gráfica de la función g se obtiene trasladando la gráfica de la función f dos unidades hacia arriba.



99. Sea *f* una función para la que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=0$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, cuáles pueden ser falsas y cuáles son con certeza falsas?

a) $f'(2)=2$

b) $f(2)=0$

c) *f* es continua en $x=0$.

d) *f* es discontinua en $x=2$.

a) Falsa.

Por definición, si $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=0$ tenemos que *f* es derivable en $x=2$ y $f'(2)=0$.

b) Puede ser cierta o falsa.

Por ejemplo, si $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x$ tenemos que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=0$ y $f(2)=-2$, sin embargo, si $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x+2$ tenemos que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=0$ y $f(2)=0$.

c) Puede ser cierta o falsa.

Por ejemplo, si $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \dfrac{1}{2}x^2-2x & \text{si } x\ge 0\end{cases}$ tenemos que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=0$ y *f* es continua en $x=0$, sin embargo, si $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x<0\\ \dfrac{1}{2}x^2-2x & \text{si } x\ge 0\end{cases}$ tenemos que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=0$ y *f* no es continua en $x=0$.

d) Falsa.

Como hemos visto en el apartado a), si $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=0$ tenemos que *f* es derivable en $x=2$ y por tanto *f* es continua en $x=2$.

100. Aplicando la definición, calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=5x^2-4x+1$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

c) $f(x)=\sqrt{x-2}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

a) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left[5(x+h)^2-4(x+h)+1\right]-\left[5x^2-4x+1\right]}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5h^2+10xh-4h}{h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}(5h+10x-4)=10x-4$

b) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2+1}-\dfrac{1}{x^2+1}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x^2+1)-\left((x+h)^2+1\right)}{h\left((x+h)^2+1\right)(x^2+1)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h^2-2hx}{h\left((x+h)^2+1\right)(x^2+1)}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h-2x}{\left((x+h)^2+1\right)(x^2+1)}=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

c) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{(x+h)-2}-\sqrt{x-2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{(x+h)-2}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{(x+h)-2}+\sqrt{x-2}\right)}{h\left(\sqrt{(x+h)-2}+\sqrt{x-2}\right)}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h\left(\sqrt{(x+h)-2}+\sqrt{x-2}\right)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{(x+h)-2}+\sqrt{x-2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$

d) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+h}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}==\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}=\dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$

Derivadas de las operaciones con funciones

101. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-5x^4+12x^3}{2}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{3x+2}$

c) $f(x)=\left(\dfrac{3x-2}{7-9x}\right)^2$

d) $f(x)=\sqrt{x^9}\,4x^5$

e) $f(x)=\dfrac{x^5\sqrt{x}}{x^{-3}\left(x^2\right)^5}$

f) $f(x)=\dfrac{3}{x^5}+\sqrt{3}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}$

h) $f(x)=(3x-1)^2(1-4x)$

a) $f'(x)=\dfrac{2x-20x^3+36x^2}{2}=x-10x^3+18x^2$

b) $f'(x)=\dfrac{2x(3x+2)-x^2\cdot 3}{(3x+2)^2}=\dfrac{3x^2+4x}{(3x+2)^2}$

c) $f'(x)=2\left(\dfrac{3x-2}{7-9x}\right)\left(\dfrac{3(7-9x)-(3x-2)(-9)}{(7-9x)^2}\right)=\dfrac{6(3x-2)}{(7-9x)^3}$

d) $f(x)=\sqrt{x^9}\,4x^5=4x^{\frac{19}{2}}\Rightarrow f'(x)=4\cdot\dfrac{19}{2}x^{\frac{17}{2}}=38x^8\sqrt{x}$

e) $f(x)=\dfrac{x^5\sqrt{x}}{x^{-3}\left(x^2\right)^5}=\dfrac{x^{\frac{11}{2}}}{x^7}=x^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

f) $f(x)=\dfrac{3}{x^5}+\sqrt{3}=3x^{-5}+\sqrt{3}\Rightarrow f'(x)=-15x^{-6}=-\dfrac{15}{x^6}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}=x^{-3}+x^{-2}\Rightarrow f'(x)=-3x^{-4}-2x^{-3}=-\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{2}{x^3}$

h) $f'(x)=2(3x-1)\cdot 3\cdot(1-4x)+(3x-1)^2\cdot(-4)=2(3x-1)(3-12x-6x+2)=2(3x-1)(5-18x)$

102. Aplicando la regla de la cadena, calcula las derivadas de las funciones siguientes.

a) $f(x)=\left(3x^3-5x+2\right)^3$ **d)** $f(x)=\sqrt{1-x^4}$ **g)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+x}{x^2}$

b) $f(x)=\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^3$ **e)** $f(x)=\left(3x^2-x\right)^{-4}$ **h)** $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x}$ **f)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2}}$

a) $f'(x)=3\left(3x^3-5x+2\right)^2\left(9x^2-5\right)$

b) $f'(x)=3\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^2\left(\dfrac{(x-1)-(x+3)}{(x-1)^2}\right)=\dfrac{-12(x+3)^2}{(x-1)^4}$

c) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}x-\sqrt{x^2-3}}{x^2}=\dfrac{3}{x^2\sqrt{x^2-3}}$

d) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^4}}\left(-4x^3\right)=\dfrac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$

e) $f'(x)=-4\left(3x^2-x\right)^{-5}(6x-1)=\dfrac{-4(6x-1)}{\left(3x^2-x\right)^5}$

f) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x^2-(x+1)2x}{x^4}}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2}}}=\dfrac{-x^2-2x}{2x^4\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2}}}=\dfrac{-x-2}{2x^2\sqrt{x+1}}$

g) $f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)x^2-\left(\sqrt{x}+x\right)2x}{x^4}=\dfrac{\dfrac{x\left(1+2\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}-2\sqrt{x}-2x}{x^3}=\dfrac{\sqrt{x}\left(1+2\sqrt{x}\right)-4\sqrt{x}-4x}{2x^3}=\dfrac{-3\sqrt{x}-2x}{2x^3}$

h) $f'(x)=\sqrt{x^2-1}+x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$

103. Halla la ecuación de la recta paralela a $y=x-2$ que es tangente a la parábola $y=4x^2-x+3$.

Si $x=a$ es la abscisa del punto de tangencia, debe cumplirse que $f'(a)=1\Rightarrow 8a-1=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{4}$.Por tanto, la recta tangente buscada es $y-f\left(\dfrac{1}{4}\right)=f'\left(\dfrac{1}{4}\right)\left(x-\dfrac{1}{4}\right)\Rightarrow y-3=x-\dfrac{1}{4}\Rightarrow y=x+\dfrac{11}{4}$.

104. Halla la derivada de la inversa de la función $f(x)=x^3+\sqrt[3]{x}$ en el punto $x=2$.

Si *g* es la inversa de *f* tenemos $g'(2)=\dfrac{1}{f'(g(2))}$.

Para calcular $g(2)$ resolvamos la ecuación $f(x)=2\Rightarrow x^3+\sqrt[3]{x}=2\Rightarrow x=1$. Por otra parte, $f'(x)=3x^2+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, con lo que $g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{3}{10}$.

105. De dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ sabemos que:

1. $g(x) > 0$ **para todo** x **y** $(f \circ g)(x) = x$

2. $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ **para todo** $x > 0$

a) Si $g(0) = 1$, calcula $g'(0)$.

b) Calcula $g'(x)$ en función de $g(x)$.

$$(f \circ g)(x) = x \Rightarrow f'(g(x))g'(x) = 1 \Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow g'(x) = g(x)$$

a) $g'(0) = g(0) = 1$

b) $g'(x) = g(x)$

Derivadas de las funciones elementales

106. Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x) = \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{2}{3}}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} + \left(\dfrac{1}{x}\right)^{-3}$

a) $f'(x) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \dfrac{\left(x^2+1\right) - x \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x}}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} + \left(\dfrac{1}{x}\right)^{-3} = (2x-1)^{\frac{1}{3}} + x^3 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 + 3x^2 = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}} + 3x^2$

107. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt[3]{x^2+4}}$ **en el punto** $x = 2$.

$$f(x) = \frac{6}{\sqrt[3]{x^2+4}} = 6\left(x^2+4\right)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = -2\left(x^2+4\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot 2x = \frac{-4x}{\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^4}}$$

La ecuación de la recta tangente es $y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y - 3 = -\dfrac{1}{2}(x-2) \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}x + 4$.

108. Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$

b) $f(x)=e^{x^2-5x+2}$

c) $f(x)=2^{-2x^3+x^2-4}$

d) $f(x)=\sqrt{e^{5x-1}}$

e) $f(x)=3^{-\sqrt{x^2-x}}$

f) $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^{-x}}$

g) $f(x)=\ln\left(x^2+4x-1\right)$

h) $f(x)=\ln\sqrt{x^2-5x}$

i) $f(x)=\ln^2(6x+4)$

j) $f(x)=\log_5\left(x^4-x^2\right)$

k) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

l) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-4}{2x+1}\right)$

a) $f'(x)=e^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

b) $f'(x)=e^{x^2-5x+2}(2x-5)$

c) $f'(x)=2^{-2x^3+x^2-4}\cdot\ln 2\cdot\left(-6x^2+2x\right)$

d) $f(x)=\sqrt{e^{5x-1}}=e^{\frac{5x-1}{2}}\Rightarrow f'(x)=e^{\frac{5x-1}{2}}\cdot\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}\sqrt{e^{5x-1}}$

e) $f'(x)=3^{-\sqrt{x^2-x}}\ln 3\cdot\dfrac{-(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x}}=\dfrac{-\ln 3(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x}}3^{-\sqrt{x^2-x}}$

f) $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^{-x}}=e^x\ln x\Rightarrow f'(x)=e^x\ln x+e^x\cdot\dfrac{1}{x}=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$

g) $f'(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+4x-1}$

h) $f(x)=\ln\sqrt{x^2-5x}=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2-5x\right)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x-5}{2(x^2-5x)}$

i) $f'(x)=2\ln(6x+4)\cdot\dfrac{6}{6x+4}=\dfrac{6\ln(6x+4)}{3x+2}$

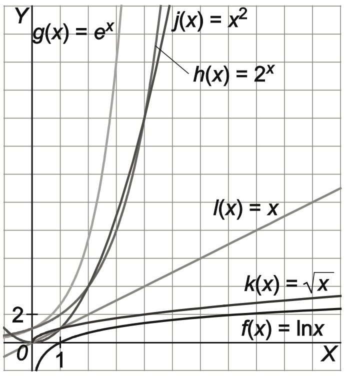
j) $f'(x)=\dfrac{4x^3-2x}{\ln 5\left(x^4-x^2\right)}=\dfrac{4x^2-2}{\ln 5\left(x^3-x\right)}$ con $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

k) $f'(x)=\dfrac{\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$

l) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-4}{2x+1}\right)=\ln(x-4)-\ln(2x+1)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{2}{2x+1}=\dfrac{9}{(x-4)(2x+1)}$

109. Las siguientes funciones tienen en común que sus límites en $+\infty$ son $+\infty$. Con ayuda de la calculadora haz una tabla de valores y representa sobre los mismos ejes estas funciones y a continuación ordénalas según su crecimiento, de mayor a menor.

$f(x) = \ln x$	$g(x) = e^x$	$h(x) = 2^x$
$j(x) = x^2$	$k(x) = \sqrt{x}$	$l(x) = x$



Como se observa en las gráficas, para valores grandes de x, las funciones ordenadas de mayor a menor crecimiento son $g(x) = e^x$, $h(x) = 2^x$, $j(x) = x^2$, $l(x) = x$, $k(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = \ln x$.

110. ¿Cuál es el valor mínimo que puede tomar la función $f(x) = 2^{x^2-2x}$?

El valor mínimo de f se alcanza cuando se alcanza el valor mínimo de su exponente, que a su vez se alcanza en el vértice de la parábola $y = x^2 - 2x$, es decir, cuando $x = 1$. Por tanto, el valor mínimo de f es $f(1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

111. Halla las asíntotas y estudia el signo de la función $f(x) = e^x + \ln x$, para $x \in (0, +\infty)$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, así que no hay asíntotas horizontales. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, por lo que $y = 0$ es una asíntota vertical.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ (véase el ejercicio 109), por lo que no hay asíntotas oblicuas.

No podemos calcular de manera exacta los puntos de corte de la gráfica de f con el eje X, por lo que no podemos determinar exactamente el signo de f, pero como $f'(x) = e^x + \frac{1}{x} > 0$ en $(0, +\infty)$, f es creciente, por tanto, no puede tener más de un punto de corte con el eje X. Además, como f es continua, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, es seguro que tendrá un punto de corte con el eje X, digamos en $x = a$, siendo f negativa en $(0, a)$ y positiva en $(a, +\infty)$.

Aunque no podemos calcular con exactitud el valor de a, podemos aproximarlo observando que $f(0,2) \simeq -0,388$ y $f(0,3) \simeq 0,146$, es decir, $a \in (0,2; 0,3)$.

112. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\left(x^2-3x\right)^{x^2}$

b) $f(x)=(x+\ln x)^{\sqrt{x}}$

c) $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

d) $f(x)=\left(e^x+x\right)^x$

a) $\ln f(x)=x^2\ln\left(x^2-3x\right)\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2x\ln\left(x^2-3x\right)+x^2\dfrac{2x-3}{x^2-3x}=2x\ln\left(x^2-3x\right)+\dfrac{2x^3-3x^2}{x^2-3x}\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)=\left(x^2-3x\right)^{x^2}\left[2x\ln\left(x^2-3x\right)+\dfrac{2x^3-3x^2}{x^2-3x}\right]=\left(x^2-3x\right)^{x^2}\left[2x\ln\left(x^2-3x\right)+\dfrac{2x^2-3x}{x-3}\right]$

b) $\ln f(x)=\sqrt{x}\ln(x+\ln x)\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x+\ln x)+\sqrt{x}\,\dfrac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln x}=\dfrac{\ln(x+\ln x)}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}\,(x+1)}{x(x+\ln x)}\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)=(x+\ln x)^{\sqrt{x}}\left[\dfrac{\ln(x+\ln x)}{2\sqrt{x}}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x}\,(x+\ln x)}\right]$

c) $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=x^{-\frac{1}{x}}\Rightarrow\ln f(x)=-\dfrac{1}{x}\ln x\Longrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x^2}\ln x-\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x^2}(\ln x-1)\Rightarrow f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{x^2}(\ln x-1)$

d) $\ln f(x)=x\ln\left(e^x+x\right)\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\ln\left(e^x+x\right)+x\cdot\dfrac{e^x+1}{e^x+x}\Rightarrow f'(x)=\left(e^x+x\right)^x\left[\ln\left(e^x+x\right)+\dfrac{x\left(e^x+1\right)}{e^x+x}\right]$

113. Halla la derivada de estas funciones.

a) $f(x)=\operatorname{sen}\left(3x^2-x\right)$

b) $f(x)=\cos(\ln x+5x)$

c) $f(x)=\cos^5\left(x^5+1\right)^5$

d) $f(x)=\operatorname{tg}\left(2x^2+x\right)$

e) $f(x)=\cos\left(\sqrt{x}+4x^3\right)$

f) $f(x)=\operatorname{sen}^3\left(x^2-4\right)$

g) $f(x)=x^3\operatorname{sen}\left(x^2\right)$

h) $f(x)=e^{-x}\operatorname{sen}\left(x^3\right)$

i) $f(x)=\operatorname{cotg}\left(x^3-5\right)$

j) $f(x)=\operatorname{tg}(\cos x)$

k) $f(x)=x^2\operatorname{tg}\left(x^3\right)$

l) $f(x)=\operatorname{cotg}(\ln x)$

a) $f'(x)=\cos\left(3x^2-x\right)\cdot(6x-1)=(6x-1)\cos\left(3x^2-x\right)$

b) $f'(x)=-\operatorname{sen}(\ln x+5x)\cdot\left(\dfrac{1}{x}+5\right)=-\left(\dfrac{1}{x}+5\right)\operatorname{sen}(\ln x+5x)$

c) $f'(x)=5\cos^4\left(x^5+1\right)^5\left[-\operatorname{sen}\left(x^5+1\right)^5\right]\left[5\left(x^5+1\right)^4\cdot5x^4\right]=-125x^4\left(x^5+1\right)^4\operatorname{sen}\left(x^5+1\right)^5\cos^4\left(x^5+1\right)^5$

d) $f'(x)=\dfrac{4x+1}{\cos^2\left(2x^2+x\right)}$

e) $f'(x)=-\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}+4x^3\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+12x^2\right)=-\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+12x^2\right)\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}+4x^3\right)$

f) $f'(x)=3\operatorname{sen}^2\left(x^2-4\right)\cos\left(x^2-4\right)\cdot2x=6x\operatorname{sen}^2\left(x^2-4\right)\cos\left(x^2-4\right)$

g) $f'(x)=3x^2\operatorname{sen}\left(x^2\right)+x^3\cos\left(x^2\right)\cdot2x=3x^2\operatorname{sen}\left(x^2\right)+2x^4\cos\left(x^2\right)$

h) $f'(x)=-e^{-x}\operatorname{sen}\left(x^3\right)+e^{-x}\cos\left(x^3\right)\cdot3x^2=-e^{-x}\operatorname{sen}\left(x^3\right)+3x^2e^{-x}\cos\left(x^3\right)$

i) Observemos que si $F(x)=\operatorname{cotg}(f(x))=\operatorname{tg}^{-1}(f(x))$, derivando tenemos:

$$F'(x)=-\operatorname{tg}^{-2}(f(x))\cdot\frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}=-\frac{f'(x)}{\operatorname{tg}^2(f(x))\cos^2(f(x))}=-\frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2(f(x))}$$

De este modo, $f'(x)=-\dfrac{3x^2}{\operatorname{sen}^2\left(x^3-5\right)}$

j) $f'(x)=\dfrac{-\operatorname{sen}x}{\cos^2(\cos x)}$

k) $f'(x)=2x\operatorname{tg}\left(x^3\right)+x^2\dfrac{3x^2}{\cos^2\left(x^3\right)}=2x\operatorname{tg}\left(x^3\right)+\dfrac{3x^4}{\cos^2\left(x^3\right)}$

l) Aplicando la fórmula deducida en el apartado i) tenemos $f'(x)=-\dfrac{\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}^2(\ln x)}=-\dfrac{1}{x\operatorname{sen}^2(\ln x)}$

114. Escribe la expresión más simplificada de la derivada de la función $f(x)=\ln\left(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)$.

$$f(x)=\ln\left(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)=\ln(\cos 2x)\Rightarrow f'(x)=\frac{-2\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}=-2\operatorname{tg}2x \text{ con } x\in\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$$

115. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\operatorname{arcsen}\left(x-e^{-x}\right)$

b) $f(x)=\arccos\left(2x-\sqrt{x}\right)$

c) $f(x)=\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

d) $f(x)=\arccos(1-\ln x)$

e) $f(x)=\operatorname{arctg}(3x-1)$

f) $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

a) $f'(x)=\dfrac{1+e^{-x}}{\sqrt{1-\left(x-e^{-x}\right)^2}}$

b) $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(2x-\sqrt{x}\right)^2}}\cdot\left(2-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

c) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{(x+1)^2}}}\cdot\dfrac{(x+1)-x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$

d) $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-\ln x)^2}}\cdot\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{x\sqrt{1-(1-\ln x)^2}}$

e) $f'(x)=\dfrac{3}{1+(3x-1)^2}$

f) $f'(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1+x}{1-x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}\cdot\dfrac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{1-x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot\dfrac{2}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{2(1-x)}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

116. ¿Existe algún punto de la gráfica de $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+\text{sen}\,x}{1-\text{sen}\,x}}$ con tangente horizontal?

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+\text{sen}\,x}{1-\text{sen}\,x}} = \frac{1}{2}\left[\ln(1+\text{sen}\,x) - \ln(1-\text{sen}\,x)\right] \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos x}{1+\text{sen}\,x} - \frac{-\cos x}{1-\text{sen}\,x}\right] = \frac{\cos x}{1-\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\cos x}$$

La derivada de f no se anula nunca, por lo que no existen puntos en su gráfica con tangente horizontal.

Aplicaciones de la derivada primera. Optimización

117. Encuentra los máximos y mínimos relativos de estas funciones, indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento y esboza su gráfica.

a) $p(x) = x^2 - 5x + 12$

b) $r(x) = 2x^3 - 3x^2$

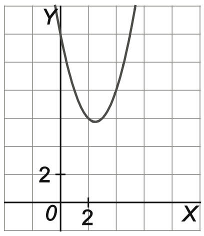
c) $t(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

d) $q(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

e) $s(x) = (x-3)(x+2)$

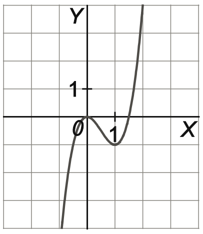
f) $u(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

a) $p'(x) = 2x - 5$ se anula si $x = \dfrac{5}{2}$, es negativa si $x < \dfrac{5}{2}$ y positiva si $x > \dfrac{5}{2}$. Por tanto, q es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$ y creciente en $\left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$. Además tiene un mínimo relativo (de hecho absoluto) en $x = \dfrac{5}{2}$.



b) $r'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ se anula si $x = 0$ o $x = 1$.

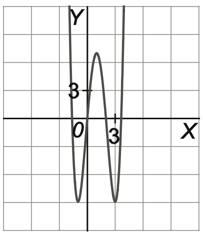
En la tabla adjunta se determinan los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de la función: es creciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, decreciente en $(0, 1)$, con un máximo relativo en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 1$.



	$-\infty$ a 0	0 a 1	1 a $+\infty$
x	−	+	+
$x-1$	−	−	+
r'	+	−	+
r	↗	↘	↗

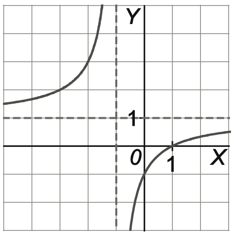
c) $t'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 = 4(x+1)(x-1)(x-3)$ se anula si $x = -1$, $x = 1$ o $x = 3$.

En la tabla adjunta se determinan los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de la función: es creciente en $(-1, 1) \cup (3, +\infty)$, decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, 3)$, con mínimos relativos en $x = -1$ y $x = 3$ y un máximo relativo en $x = 1$.



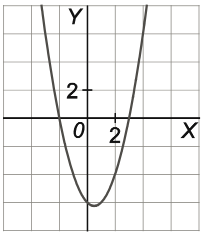
	$+\infty$ a -1	-1 a 1	1 a 3	3 a $+\infty$
$x+1$	−	+	+	+
$x-1$	−	−	+	+
$x-3$	−	−	−	+
t'	−	+	−	+
t	↘	↗	↘	↗

d) $q'(x) = \dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ es positiva si $x \neq -1$, por tanto q es creciente en su dominio $\mathbb{R} - \{-1\}$, con lo que no tiene extremos relativos.



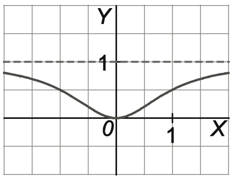
Para representar la gráfica observemos que $y = 1$ es asíntota horizontal y $x = -1$ es asíntota vertical.

e) $s'(x) = (x+2)+(x-3) = 2x-1$ se anula si $x = \dfrac{1}{2}$, es negativa si $x < \dfrac{1}{2}$ y positiva si $x > \dfrac{1}{2}$.



Por tanto, s es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$. Además tiene un mínimo relativo (de hecho absoluto) en $x = \dfrac{1}{2}$.

f) $u'(x) = \dfrac{2x\left(1+x^2\right) - x^2 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$ se anula si $x = 0$, es negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$. Por tanto, u es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. Además, tiene un mínimo relativo (de hecho absoluto) en $x = 0$.



Para representar la gráfica observemos que $y = 1$ es asíntota horizontal.

118. Calcula qué valores deben tener las constantes *a*, *b*, *c* y *d*para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo relativo en el punto $P(-2, -3)$, un máximo relativo para $x = 1$ y además $f(0) = -1$.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Como f tiene un mínimo relativo en P tenemos $f(-2) = -3$ y $f'(-2) = 0$; como tiene un máximo relativo en $x = 1$ tenemos $f'(1) = 0$, finalmente, $f(0) = -1$, con lo cual obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f(-2) = -3 \\ f'(-2) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = -3 \\ 12a - 4b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ d = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{5},\ b = -\frac{3}{10},\ c = \frac{6}{5},\ d = -1$$

Por tanto, tenemos $f(x) = -\dfrac{1}{5}x^3 - \dfrac{3}{10}x^2 + \dfrac{6}{5}x - 1$.

119. Halla los valores de las constantes *a*, *b* y *c*que hacen que la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por el punto *P*(–1, 20) y tenga un máximo relativo en *Q*(3, 12).

$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$

Las condiciones del enunciado nos dan el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f(-1) = 20 \\ f(3) = 12 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b + c = 20 \\ 9a + 3b + c = 12 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = -3,\ c = \frac{33}{2}$$

Por tanto, tenemos $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + \dfrac{33}{2}$.

120. Halla los puntos de la parábola $y = x^2$ de abscisa no negativa que estén más cerca del punto $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

Pongamos que el punto buscado es $P(x, y)$ con $x > 0$. La función que queremos minimizar es $D = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2}$, esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $y = x^2$, que nos permite sustituir la variable y en la expresión de D, obteniendo $D = \sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2}$.

De este modo, debemos minimizar la función $D(x) = \sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2}$ en el intervalo $[0, +\infty)$.

$D'(x) = \dfrac{2x + 2\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)2x}{2\sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2}} = 0 \Rightarrow 2x + 2\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)2x = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = -1, x = 0, x = 1$, pero solo $x = 1$ pertenecen al intervalo $(0, +\infty)$.

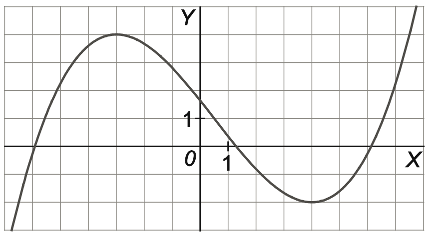
$D(0) = \frac{3}{2}$, $D(1) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} D(x) = +\infty$, por lo que la distancia mínima es $\frac{\sqrt{5}}{2}$, que se alcanza en el punto de la parábola $P(1, 1)$.

121. Esboza la gráfica de una función que tenga las tres características siguientes:

I. $f'(x) > 0$ si $x < -3$ o si $x > 4$

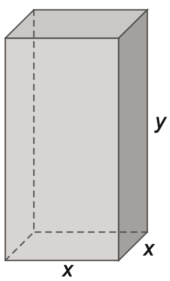
II. $f'(x) < 0$ si $-3 < x < 4$

III. $f(-3) = 4$ y $f(4) = -2$



122. Halla las dimensiones de una caja sin tapa en forma de paralelepípedo de base cuadrada y de 192 cm^2 de área total para que el volumen sea máximo.

Sean x e y las dimensiones de la caja, como se muestra en la figura.



La función que queremos maximizar es $V = x^2y$, esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $x^2 + 4xy = 192$, que nos permite despejar una variable y sustituir en la expresión de V:

$$x^2 + 4xy = 192 \Rightarrow y = \frac{192 - x^2}{4x} \Rightarrow V = \frac{192x - x^3}{4}$$

Además, x e y deben ser positivos, por lo que x debe estar en el intervalo $\left[0, \sqrt{192}\right] = \left[0, 8\sqrt{3}\right]$.

De este modo, debemos maximizar la función $V(x) = \dfrac{192x - x^3}{4}$ en el intervalo $\left[0, 8\sqrt{3}\right]$.

$V'(x) = \dfrac{192 - 3x^2}{4} = 0 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = -8, x = 8$, pero solo $x = 8$ pertenece al intervalo $\left(0, 8\sqrt{3}\right)$.

$V(0) = 0$, $V(8) = 256$ y $V(8\sqrt{3}) = 0$, por lo que el volumen máximo es 256 cm^3, que se alcanza cuando las dimensiones de la caja son $x = 8$ cm e $y = 4$ cm.

123. De todas las rectas que pasan por *P*(1, 4), calcula la ecuación de la que determina con los semiejes positivos un triángulo de área mínima.

Sean *Q*(*x*, 0) y *R*(0, *y*) los puntos de corte de la recta con los ejes. Queremos minimizar la función $A = \frac{xy}{2}$, esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe una relación de ligadura, ya que los puntos *Q*, *P* y *R* están alineados, es decir, tenemos $\frac{-x}{1-x} = \frac{y}{4} \Rightarrow 4x + y - xy = 0$, que nos permite despejar una de las variables y sustituir en la expresión de *A*:

$$4x + y - xy = 0 \Rightarrow y = \frac{4x}{x-1} \Rightarrow A = \frac{2x^2}{x-1}$$

Además, *x* e *y* deben ser positivos, por lo que *x* debe pertenecer al intervalo $(1, +\infty)$.

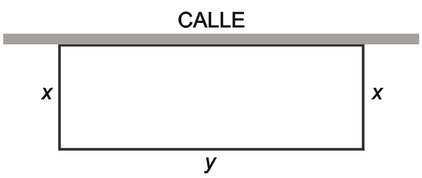
De este modo, queremos minimizar la función $A(x) = \frac{2x^2}{x-1}$ en el intervalo $(1, +\infty)$.

$A'(x) = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$, solo $x = 2$ pertenece al intervalo $(1, +\infty)$.

$\lim_{x \to 1^+} A(x) = +\infty$, $A(2) = 8$ y $\lim_{x \to +\infty} A(x) = +\infty$, por tanto, el área mínima, 8 u^2, se alcanza cuando *Q*(2, 0) y *R*(0, 8), es decir, la ecuación de la recta buscada es $y = -4x + 8$.

124. Queremos delimitar una parcela rectangular de 700 m^2 de superficie. La valla que utilizamos en el lado que da a la calle vale 40 euros el metro lineal y la valla de los otros tres lados vale 16 euros el metro lineal. Por razones obvias ningún lado de la parcela debe medir menos de un metro. Calcula las dimensiones de la parcela para que la valla sea la más barata posible.

Sean *x* e *y* los lados del rectángulo, siendo *y* el lado que da a la calle (ver figura). La función que queremos minimizar es $C = 32x + 56y$, esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $xy = 700$, que nos permite despejar *y*, sustituyéndola en la expresión de *A*:



$$xy = 700 \Rightarrow y = \frac{700}{x} \Rightarrow C = 32x + \frac{39200}{x}$$

Además, *x* e *y* deben ser al menos 1, por lo que *x* debe estar en el intervalo $[1, 700]$.

De este modo, queremos minimizar la función $C(x) = 32x + \frac{39200}{x}$ en el intervalo $[1, 700]$.

$C'(x) = 32 - \frac{39200}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1225 \Rightarrow x = -35,\ x = 35$, solo $x = 35$ pertenece al intervalo $(1, 700)$.

$C(1) = 39232,\ C(35) = 2240$ y $C(700) = 22456$, por tanto, el coste mínimoes de 2240 €, que se alcanza cuando $x = 35$ m e $y = 20$ m.

Aplicaciones de la derivada segunda

125. Calcula las abscisas de los puntos de inflexión de $f(x)$ si $f''(x) = (x-2)(x-4)^2(x+5)$.

Los posibles puntos de inflexión son los de abscisa $x = 2$, $x = 4$ o $x = -5$.

Como f'' solo cambia de signo al pasar por $x = 2$ y $x = -5$, estas son las abscisas de los puntos de inflexión de *f*.

126. Determina la posición de los puntos de inflexión de las siguientes funciones indicando, en su caso, si son o no de tangente horizontal.

a) $f(x)=x^4-x^2$

b) $f(x)=x^5+3x^3-1$

c) $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x$

d) $f(x)=e^{-x^2}$

e) $f(x)=\cos^3 x$

f) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

a) $f'(x)=4x^3-2x \Rightarrow f''(x)=12x^2-2=12\left(x+\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\left(x-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ se anula si $x=-\frac{\sqrt{6}}{6}$ o $x=\frac{\sqrt{6}}{6}$ y cambia de signo al pasar por estos valores, por tanto, estas son las abscisas de los puntos de inflexión, pero en ellos la tangente no es horizontal, ya que $f'\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\neq 0$ y $f'\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\neq 0$.

b) $f'(x)=5x^4+9x^2 \Rightarrow f''(x)=20x^3+18x=2x(10x^2+9)$ se anula si $x=0$ y cambia de signo al pasar por este valor, con lo que en $x=0$ tenemos un punto de inflexión, además $f'(0)=0$, por lo que la tangente es horizontal.

c) $f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12 \Rightarrow f''(x)=12x^2-24x-4=4\left(x-\frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$ se anula si $x=\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$ o $x=\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ y cambia de signo al pasar por estos valores, por tanto, estas son las abscisas de los puntos de inflexión, pero en ellos la tangente no es horizontal, ya que f' no se anula en estos valores.

d) $f'(x)=-2xe^{-x^2} \Rightarrow f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=\left(4x^2-2\right)e^{-x^2}=4\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-x^2}$ se anula si $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ o $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y cambia de signo al pasar por estos valores, por tanto, estas son las abscisas de los puntos de inflexión, pero en ellos la tangente no es horizontal, ya que f' no se anula en estos valores.

e) $f'(x)=-3\cos^2 x\,\mathrm{sen}\,x \Rightarrow f''(x)=6\cos x\,\mathrm{sen}^2 x-3\cos^3 x=3\cos x\left(2\mathrm{sen}^2 x-\cos^2 x\right)=3\cos x\left(3\mathrm{sen}^2 x-1\right)$

f'' se anula si $\cos x=0$ o $\mathrm{sen}\,x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, es decir, llamando α al ángulo del primer cuadrante tal que $\mathrm{sen}\,\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ($\alpha\simeq 0{,}615$ rad) tenemos que f'' se anula si $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\alpha+\pi k$ o $x=-\alpha+\pi k$ para algún entero *k*. Al pasar por todos estos valores f'' cambia de signo, ya que $\left(3\mathrm{sen}^2 x-1\right)$ se puede factorizar en factores lineales en sen *x*, por lo que todos estos puntos son puntos de inflexión, ahora bien, solo si $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ para algún entero *k* la tangente es horizontal, ya que en los demás valores f' no se anula.

f) $f'(x)=\dfrac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2} \Rightarrow f''(x)=\dfrac{-2\left(x^2+1\right)^2+2x\cdot 2\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\dfrac{6x^2-2}{\left(x^2+1\right)^3}=\dfrac{6\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$ se anula si $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ o $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ y cambia de signo al pasar por estos valores, por tanto, estas son las abscisas de los puntos de inflexión, pero en ellos la tangente no es horizontal, ya que f' no se anula en estos valores.

127. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, calcula la ecuación de la recta tangente en su punto de inflexión.

$f'(x) = 3x^2 - 6x$ y $f''(x) = 6x - 6$

La derivada segunda se anula si $x = 1$ y cambia de signo al pasar por este valor, con lo que es el punto de inflexión, así, la tangente buscada es $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y + 1 = -3(x-1) \Rightarrow y = -3x + 2$.

Síntesis

128. En cada caso, halla los valores de *a* y *b* para que *f* sea derivable en todo $\mathbb{R}$

a) $f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < -2 \\ x^2 - bx + 1 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x \leq 2 \\ x^3 + ax + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) El único punto donde la función podría no ser derivable es en $x = -2$. Para que *f* sea derivable en dicho punto una condición necesaria (no suficiente) es que sea continua en él, además las derivadas laterales deben ser iguales. Por tanto:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) \\ f'(-2^-) = f'(-2^+) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 + 2b + 1 \\ 0 = -4 - b \end{cases} \Rightarrow a = -3,\ b = -4$$

b) El único punto donde la función podría no ser derivable es en $x = 2$. Para que *f* sea derivable en dicho punto una condición necesaria es que sea continua en él, además las derivadas laterales deben ser iguales. Por tanto:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \\ f'(2^-) = f'(2^+) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 8 + 2a + 2 \\ 2a = 12 + a \end{cases} \Rightarrow a = 12,\ b = -14$$

129. Sean *f* y *g* dos funciones tales que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f'(x) = g(x)$ y $g'(x) = -f(x)$.

Considera la función $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$, calcula $h'(x)$ y utiliza el resultado obtenido para probar que $f^2(x) + g^2(x) = 1$ sea cual sea *x*.

$h'(x) = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0$ para todo *x*, por tanto $h(x)$ es constante.

Así, como $h(0) = 1$, tenemos $h(x) = 1$ para todo *x*, es decir, $f^2(x) + g^2(x) = 1$ para todo *x*.

130. Calcula la derivada de todas estas funciones.

a) $f(x) = x\ln(x) - x$
e) $f(x) = -\ln(\cos x)$
i) $f(x) = 2\,\text{sen}\,x\cos x$

b) $f(x) = e^{\text{sen}^2 x} + e^{\cos^2 x}$
f) $f(x) = \text{arcsen}\,e^x$
j) $f(x) = \dfrac{\cos x}{e^x}$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
g) $f(x) = (\text{sen}\,x)^{e^x}$
k) $f(x) = \left(e^x\right)^{\text{sen}\,x}$

d) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
h) $f(x) = \ln(\text{tg}\,x)$
l) $f(x) = \text{sen}\sqrt{\ln(\cos x)}$

a) $f'(x) = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$

b) $f'(x) = e^{\text{sen}^2 x} \cdot 2\,\text{senx}\cos x + e^{\cos^2 x} \cdot 2\cos x(-\text{sen}\,x) = 2\,\text{senx}\cos x\left(e^{\text{sen}^2 x} - e^{\cos^2 x}\right) = \text{sen}\,2\text{x}\left(e^{\text{sen}^2 x} - e^{\cos^2 x}\right)$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2}{1-x^2}$ con $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

d) $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

e) $f'(x) = -\dfrac{-\text{sen}\,x}{\cos x} = \text{tg}\,x$ con $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$

f) $f'(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

g) $\ln f(x) = e^x \ln(\text{sen}\,x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = e^x \ln(\text{sen}\,x) + e^x \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} \Rightarrow f'(x) = (\text{sen}\,x)^{e^x} e^x \left(\ln(\text{sen}\,x) + \text{cotg}\,x\right)$

h) $f'(x) = \dfrac{1}{\text{tg}\,x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\text{sen}\,x\cos x} = \dfrac{2}{\text{sen}\,2x}$ con $x \in \left(k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$

i) $f(x) = 2\,\text{sen}\,x\cos x = \text{sen}\,2x \Rightarrow f'(x) = 2\cos 2x$

j) $f'(x) = \dfrac{-\text{sen}\,x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x}{e^{2x}} = -\dfrac{\text{sen}\,x + \cos x}{e^x}$

k) $f(x) = \left(e^x\right)^{\text{sen}\,x} = e^{x\,\text{sen}\,x} \Rightarrow f'(x) = e^{x\,\text{sen}\,x}\left(\text{sen}\,x + x\cos x\right)$

l) La función $f(x) = \text{sen}\sqrt{\ln\cos x}$ solo existe en punots aislados $x = 2k\pi$ y no se puede derivar.

131. Halla un punto de la curva $y = \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}$ en el que la recta tangente forme un ángulo de 45º con la horizontal.

Si $f(x) = \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$, buscamos un punto con $f'(x) = 1 \Rightarrow \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 1 \Rightarrow x = 1$, por tanto, el punto buscado es $P\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$.

132. Halla los máximos y mínimos de la función $f(x) = e^{x^2}$.

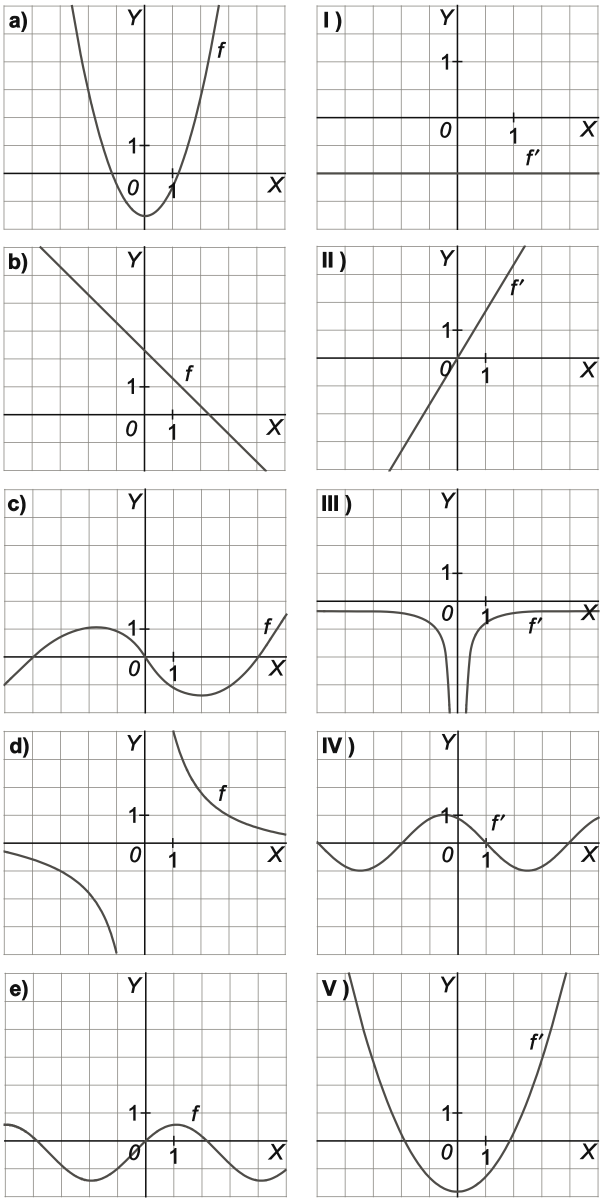
El enunciado no especifica si debemos calcular los máximos y mínimos relativos o absolutos así que calcularemos ambos.

$f'(x) = 2xe^{x^2}$ se anula si $x = 0$, es negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$, por tanto $x = 0$ es un mínimo relativo, de hecho absoluto, ya que el mínimo valor de de *f* se alcanza cuando el exponente x^2 es mínimo, es decir, si $x = 0$.

Como la derivada no se anula en otro valor distinto de $x = 0$, la función no tiene máximos relativos, ni por tanto absolutos, ya que como la función es derivable en $\mathbb{R}$, la derivada se anularía en cualquier máximo absoluto.

Otra manera de probar que no hay máximos absolutos es observar que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

133. Empareja cada una de estas gráficas con las gráficas de su correspondiente derivada.



La gráfica de la derivada de la función representada en a) debe pasar por el punto *A*(0, 0), ya que la función tiene mínimo en dicho punto. La única gráfica que cumple esto es la II.

La función representada en b) es una recta, por tanto,su derivada debe ser constante, luego es la I.

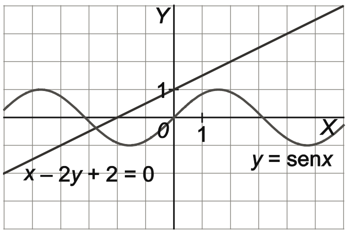
La función representada en c) tiene un máximo a la izquierda del cero y un mínimo a la derecha, luego su derivada debe cortar al eje de abscisas en esos dos puntos. Así pues es la V.

La función representada en d) no tiene extremos relativos, por tanto, su derivada no corta al eje *X*, luego es la III.

Por último, la función representada en e) queda emparejada con la IV.

Observemos que también podríamos habernos fijado en los intervalos de crecimiento y decrecimiento para emparejar las gráficas.

134. Encuentra todas las rectas tangentes a la curva $y = \operatorname{sen} x$ que sean paralelas a la recta indicada en la figura.



La recta indicada tiene pendiente $m = \frac{1}{2}$, luego si $f(x) = \operatorname{sen} x$ debe verificarse $f'(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$.

Por tanto, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ o $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ para algún entero k.

En el primer caso la recta tangente es:

$$y - f\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3} - 2\pi k\right) \Rightarrow y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3} - 2\pi k\right) \text{ para algún entero } k.$$

En el segundo caso la recta tangente es:

$$y - f\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3} - 2\pi k\right) \Rightarrow y + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3} - 2\pi k\right) \text{ para algún entero } k.$$

135. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$ y $g(x) = \ln(x + 8)$, halla la función $g \circ f$ y su derivada.

A partir de la de la expresión $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1}\right) = \ln\left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8\right)$, derivándola:

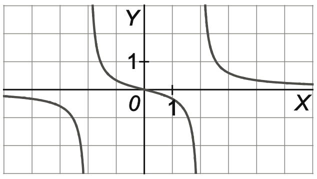
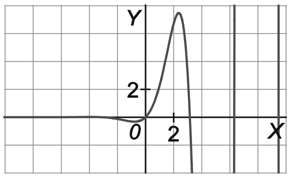
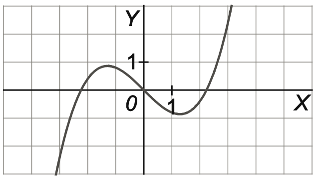
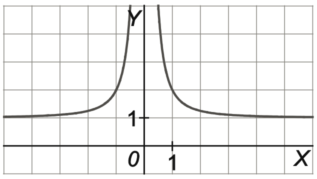
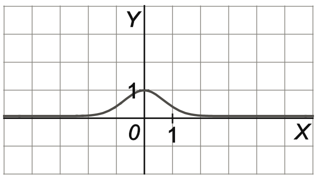
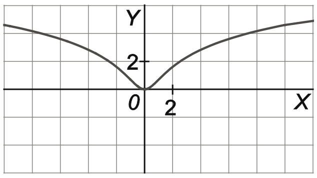
$$(g \circ f)'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8} \cdot \frac{1}{3}\left(x^2 + x + 1\right)^{-\frac{2}{3}}(2x + 1) = \frac{2x + 1}{3\left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8\right)\sqrt[3]{\left(x^2 + x + 1\right)^2}} = \frac{2x + 1}{3\left(x^2 + x + 1 + 8\sqrt[3]{\left(x^2 + x + 1\right)^2}\right)}$$

De otro modo, usando la regla de la cadena: $f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + 1\right)^{-\frac{2}{3}}(2x + 1) = \frac{2x + 1}{3\sqrt[3]{\left(x^2 + x + 1\right)^2}}$ y $g'(x) = \frac{1}{x + 8}$, por tanto, $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8} \cdot \frac{2x + 1}{3\sqrt[3]{\left(x^2 + x + 1\right)^2}} = \frac{2x + 1}{3\left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8\right)\sqrt[3]{\left(x^2 + x + 1\right)^2}}$.

136. Explica con claridad por qué la función $f(x) = \cos 2x - 4x$ no tiene extremos relativos.

Si la función tuviera extremos relativos, la derivada se anularía en ellos, pero $f'(x) = -2\operatorname{sen} 2x - 4$ no se anula nunca, ya que $-2\operatorname{sen} 2x - 4 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 2x = -2$ no tiene solución.

137. Asocia cada función de la izquierda con su correspondiente gráfica de la derecha.

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$	
$f(x)=e^{-x^2}$	
$f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$	
$f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$	
$f(x)=e^x senx$	
$f(x)=\dfrac{x^3}{5}-x$	

La función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$ es par y su dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$, su gráfica es la cuarta. Observemos, además, que $x=0$ es asíntota vertical de f, $y=1$ es asíntota horizontal y su derivada $f'(x)=\dfrac{-2}{x^3}$ es positiva si $x<0$ y negativa si $x>0$, es decir, f es creciente en $(-\infty,\ 0)$ y decreciente en $(0,\ +\infty)$.

La función $f(x)=e^{-x^2}$ es par, siempre es positiva y $f(0)=1$, por lo que su gráfica es la quinta. Esta elección se confirma observando que $x=0$ es asíntota horizontal de f o estudiando el signo de $f'(x)=-2xe^{-x^2}$ para determinar los intervalos de crecimiento y extremos de f.

La función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ es impar y su dominio es $\mathbb{R}-\{-2,\ 2\}$, por lo que su gráfica es la primera. Esta elección se confirma estudiando las asíntotas f o el signo de $f'(x)=\dfrac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$.

La función es $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$ es par, por lo que, por descarte, su gráfica debe ser la sexta, lo que se puede confirmar estudiando el signo de $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

La función $f(x)=\dfrac{x^3}{5}-x$ es impar, por lo que, por descarte, su gráfica debe ser la tercera, lo que se puede confirmar estudiando el signo de $f'(x)=\dfrac{3x^2}{5}-1$.

Por último, la gráfica de la función $f(x)=e^x senx$ es la segunda, lo que de nuevo se puede confirmar estudiando el signo de su derivada.

138. Se considera la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{2+\text{sen } x-\cos x}}$$

Calcula sus extremos relativos y/o absolutos en el intervalo $[-\pi,\ \pi]$.

$f'(x)=-\dfrac{\cos x+\text{sen } x}{(2+\text{sen } x-\cos x)^2}=0\Rightarrow \text{sen } x=-\cos x\Rightarrow \text{tg } x=-1$, que, en el intervalo $(-\pi,\ \pi)$, solo se verifica si $x=-\dfrac{\pi}{4}$ o $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

$f(-\pi)=f(\pi)=\dfrac{1}{3}$, $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ y $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$, por lo que, en el intervalo $[-\pi,\ \pi]$, la función alcanza su máximo absoluto en $x=-\dfrac{\pi}{4}$ y su mínimo absoluto en $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

Estos serán también un máximo y mínimo relativos, respectivamente, y no existe ningún otro valor donde f pueda presentar un extremo local, ya que la derivada no se anula en ningún otro valor distinto de los anteriores.

139. Sea la función $f(x)=x^2e^{\frac{x}{1000}}$. Calcula sus máximos y mínimos en el intervalo cerrado $[-3000,\ 3000]$.

$f'(x)=2xe^{\frac{x}{1000}}+\frac{x^2}{1000}e^{\frac{x}{1000}}=x\left(\frac{x}{1000}+2\right)e^{\frac{x}{1000}}$ se anula si $x=0$ o $x=-2000$ y ambos valores pertenecen al intervalo $(-3000,\ 3000)$.

Como f' es positiva si $x<-2000$, negativa si $-2000<x<0$ y positiva si $x>0$, $x=-2000$ es un máximo realtivo y $x=0$ es un mínimo relativo.

Como $f(-3000)=9\cdot10^6e^{-3}$, $f(3000)=9\cdot10^6e^{3}$, $f(-2000)=4\cdot10^6e^{-2}$ y $f(0)=0$, el máximo absoluto de f en el intervalo $[-3000,\ 3000]$ se alcanza en $x=3000$ y el mínimo absoluto en $x=0$.

140. Calcular $f'(0)$ sabiendo que $f(x)=[g(x)]^{\cos x}$ y que $g(0)=g'(0)=e$.

$$\ln f(x)=\cos x\ln g(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-\operatorname{sen}x\ln g(x)+\cos x\frac{g'(x)}{g(x)}\Rightarrow f'(x)=[g(x)]^{\cos x}\left(-\operatorname{sen}x\ln g(x)+\frac{g'(x)\cos x}{g(x)}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(0)=e^1\left(-0\cdot\ln e+\frac{e\cdot1}{e}\right)=e$$

141. Sea la función $f(x)=\operatorname{sen}e^x$. Calcula la derivada de $(f\circ f)(x)$.

Podemos obtener en primer lugar $(f\circ f)(x)$ y después derivar:

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\operatorname{sen}e^x\right)=\operatorname{sen}\left(e^{\operatorname{sen}e^x}\right)\Rightarrow f'(x)=\cos\left(e^{\operatorname{sen}e^x}\right)\cdot e^{\operatorname{sen}e^x}\cdot\cos e^x\cdot e^x$$

También podemos usar la regla de la cadena:

Como $f'(x)=\cos e^x\cdot e^x=e^x\cos e^x$ tenemos $(f\circ f)'(x)=f'(f(x))f'(x)=e^{\operatorname{sen}e^x}\cdot\cos\left(e^{\operatorname{sen}e^x}\right)\cdot e^x\cdot\cos e^x$

142. Considera las funciones definidas para $x\geq0$:

$$f(x)=\operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ \text{y}\ g(x)=\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

a) Calcula $f'(x)$ y $g'(x)$, y exprésalas del modo más simplificado posible.

b) Compara los resultados y deduce justificadamente la diferencia entre $f(x)$ y $g(x)$.

a) $$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=-\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=-\frac{1}{1+x^2}$$

b) Según el apartado anterior $f(x)+g(x)$ es constante, ya que $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)=0$. Como $f(0)+g(0)=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ obtenemos que $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$.

CUESTIONES

143. Comprueba la veracidad de la afirmación "Para cualquier función f que verifique que $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=2$, resulta que $\lim_{h\to 0} f(3+h)=f(3)$"

La afirmación es verdadera, ya que si $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=2$ tenemos que f es derivable en $x=3$, de hecho $f'(3)=2$, así pues *f* es continua en $x=3$ y, por ello, $\lim_{h\to 0} f(3+h)=f(3)$.

144. De las siguientes afirmaciones determina cuáles son verdaderas y cuáles no.

a) Si $f(3)>g(3)$ entonces $f'(3)\geq g'(3)$.

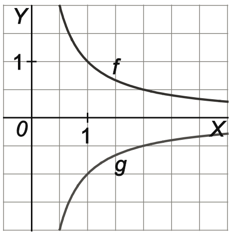
b) Si $f(2)=0$ entonces $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=0$.

c) Si *f* y *g* son derivables en todos los puntos de su dominio y $f(x)g(x)=x$, entonces no hay ningún valor para el que se anulen simultáneamente $f'(x)$ y $g'(x)$.

d) Cualquier función polinómica de grado superior a 2 presenta algún punto de inflexión.

e) Si $f''(a)=0$ entonces *f* tiene un punto de inflexión en $x=a$.

a) Falsa, como se muestra en la figura, $f(3)>g(3)$, sin embargo f' es negativa (*f* es decreciente) y g' es positiva (*g* es creciente), por lo que $f'(3)<g'(3)$.



b) Falsa, el límite $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ es $f'(2)$ y, obviamente, $f(2)=0$ no implica necesariamente $f'(2)=0$, basta tomar, por ejemplo, $f(x)=x-2$.

c) Verdadera, derivando los dos miembros de $f(x)g(x)=x$ tenemos $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=1$, de donde se deduce que $f'(x)$ y $g'(x)$ no pueden anularse simultáneamente.

d) Falsa, $f(x)=x^4$ nos sirve de contraejemplo.

e) Falsa, nos sirve el mismo contraejemplo del apartado anterior, $f''(0)=0$ pero $x=0$ no es un punto de inflexión de *f*.

145. Justifica que si $f'(x)>0$ para cualquier número real, entonces la función $g(x)=f(f(x))$ es creciente en $\mathbb{R}$.

La derivada de $g(x)=f(f(x))$ es $g'(x)=f'(f(x))f'(x)$, que es positiva para cualquier *x*, por tanto *g* es creciente.

146. Razona si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes.

a) Si $f'(x) < 0$ para cualquier número real *x*, entonces la función $g(x) = f(f(x))$ es decreciente en $\mathbb{R}$.

b) Hay funciones para las que $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ y $f(x) < 0$ para cualquier número real *x.*

c) Hay funciones para las que $f''(x) > 0$ pero $f'(x) < 0$ para cualquier número real *x.*

d) Si *f* y *g* son funciones derivables en $\mathbb{R}$ con $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, $f(x) > g(x)$ en (a, b) entonces existe $c \in (a, b)$ con $f'(c) = g'(c)$.

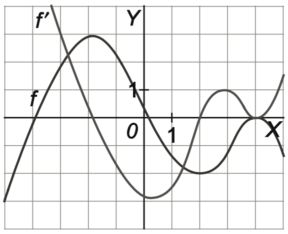
a) Falsa. De hecho, si $f'(x) < 0$ para cualquier número real *x*, entonces la función $g(x) = f(f(x))$ es creciente en $\mathbb{R}$, ya que $g'(x) = f'(f(x))f'(x)$ es positiva por ser producto de dos números negativos.

b) Falsa. Pensemos en el punto $(0, f(0))$, su tangente es $y - f(0) = f'(0)x \Rightarrow y = f'(0)x + f(0)$, y como $f''(x) > 0$ la gráfica de *f* está por encima de esta tangente, es decir, $f(x) \geq f'(0)x + f(0)$ para cualquier número real *x*. Pero esto no es posible, ya que al ser $f'(0) > 0$, $f'(0)x + f(0)$ será positivo a partir de un determinado valor de *x*, lo que implicaría que $f(x) > 0$ a partir de un determinado valor de *x*.

c) Verdadera. Por ejemplo, la función $f(x) = e^{-x}$.

d) Verdadera. De hecho, es innecesario asumir que $f(x) > g(x)$ en (a, b). En efecto, consideremos la función $h(x) = f(x) - g(x)$, continua y derivable, con $h(a) = h(b) = 0$. Esta función alcanzará máximo y mínimo absoluto en el intervalo $[a, b]$. Si alcanza alguno de ellos en un valor $c \in (a, b)$ tendremos que $h'(c) = 0$; en caso contrario alcanza el máximo y mínimo absolutos en *a* y *b*, de donde se deduce que $h(x) = 0$ para cualquier $x \in [a, b]$, por lo que $h'(x) = 0$ para cualquier $x \in [a, b]$. En cualquier caso encontramos algún valor $c \in (a, b)$ con $h'(c) = 0$, es decir, con $f'(c) = g'(c)$.

147. Observa las figuras siguientes y justifica si, tal y como se indica, pueden corresponder a una función y a su derivada.



Las gráficas no pueden corresponder a una función y a su derivada, ya que a la derecha de $x = 4$ se observa que *f* es decreciente y f' es positiva, lo que no es posible.

PROBLEMAS

148. Se llama recta normal a una curva en un punto de la misma a la perpendicular a la tangente a la curva en dicho punto. Calcula la recta normal a la gráfica de la función $y = \ln x$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Si $f(x) = \ln x$, la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$ es $m = f'(2) = \frac{1}{2}$, por tanto, la pendiente de la recta normal es $-\frac{1}{m} = -2$, con lo que su ecuación es $y - f(2) = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 4 + \ln 2$.

149. Un malabarista lanza verticalmente una pelota. Su ecuación del movimiento es $s(t) = -6t^2 + 48t$ [t se mide en segundos, y $s(t)$, en centímetros]. Se pide:

a) ¿Con qué velocidad inicial se lanza la pelota?

b) ¿En qué instante la pelota empieza a descender?

c) ¿Cuál es la altura máxima a la que llega?

d) ¿Cuánto tiempo está la pelota en movimiento?

e) ¿Qué velocidad lleva la pelota en los instantes $t = 3$ y $t = 7$? ¿Por qué son de distinto signo?

a) La velocidad de la pelota en un instante t viene dada por $s'(t) = -12t + 48$, con lo que la velocidad inicial es $s'(0) = 48$ cm/seg.

b) La pelota comienza a descender cuando su velocidad se anula, o cuando llega a su máxima altura si se prefiere, es decir, cuando $s'(t) = 0 \Rightarrow -12t + 48 = 0 \Rightarrow t = 4$ seg.

c) $s(4) = 96$ cm.

d) Como la pelota tarda lo mismo en subir que en bajar, está en movimiento 8 segundos.

e) La velocidad en el instante $t = 3$ es $s'(3) = 12$ cm/seg y en el instante $t = 7$ es $s'(7) = -36$ cm/seg. Son de distinto signo porque en el instante $t = 3$ la pelota está subiendo y en el instante $t = 7$ está bajando.

150. Una partícula se mueve sobre un eje según la siguiente ecuación de movimiento: $s(t) = 4t^2 - 8t - 3$, donde t indica el tiempo en segundos, y $s(t)$, la distancia orientada, en metros, al origen.

a) ¿Dónde está situada la partícula en el momento de empezar a moverse?

b) Estudia la posición de la partícula en los instantes $t = 1$ y $t = 5$.

c) ¿En qué instante la partícula se detiene y cambia el sentido de su movimiento?

a) $s(0) = -3$, es decir, la partícula está a 3 metros a la izquierda del origen.

b) $s(1) = -7$ y $s(5) = 57$, es decir, en el instante $t = 1$ la partícula está a 7 metros a la izquierda del origen y en el instante $t = 5$ está a 57 metros a la derecha del origen.

c) La partícula se detiene cuando su velocidad es 0 y cambia el sentido de su movimiento cuando su velocidad cambia de signo. Como la velocidad viene dada por $s'(t) = 8t - 8$, en el instante $t = 1$ la partícula se detiene y cambia el sentido de su movimiento.

151. Halla los valores de la constante k para los que las rectas tangentes a las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = (x - k)x$ en el punto de abscisa $x = 1$ son:

a) Paralelas

b) Perpendiculares

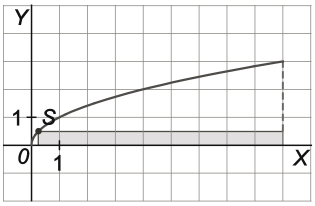
Las pendientes de las rectas tangentes en el punto de abscisa $x = 1$ son, respectivamente, $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(1) = 3$ y $g'(x) = 2x - k \Rightarrow g'(1) = 2 - k$.

a) Si las tangentes son paralelas, entonces $f'(1) = g'(1) \Rightarrow 3 = 2 - k \Rightarrow k = -1$.

b) Si las tangentes son perpendiculares, entonces $f'(1)\, g'(1) = -1 \Rightarrow 3(2 - k) = -1 \Rightarrow k = \frac{7}{3}$.

152. Dibuja la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $x = 9$, $y = 0$ y calcula las dimensiones del rectángulo inscrito de lados paralelos a los ejes y que tenga:

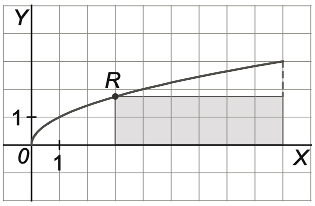
a) Máxima área **b)** Máximo perímetro



a) Calculemos el área del rectángulo en función de la abscisa x del punto $R\left(x, \sqrt{x}\right)$. Como la base del rectángulo es $9 - x$ y la altura es $\sqrt{x}$, el área es $A(x) = (9 - x)\sqrt{x}$ con $x \in [0, 9]$.

$A'(x) = -\sqrt{x} + \dfrac{(9 - x)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{9 - 3x}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x = 3$, que pertenece al intervalo $(0, 9)$.

$A(0) = A(9) = 0$ y $A(3) = 6\sqrt{3}$, por lo que el área máxima es $6\sqrt{3}$ u^2, que se alcanza cuando $R\left(3, \sqrt{3}\right)$, es decir, cuando el rectángulo tiene base 6 u y altura $\sqrt{3}$ u.

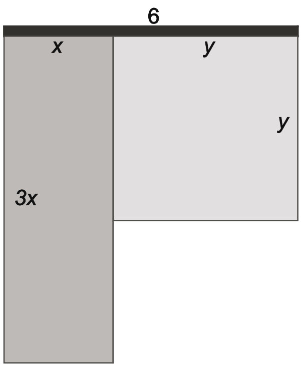


b) Calculemos el perímetro en función de la abscisa x del punto $S\left(x, \sqrt{x}\right)$. Como la base del rectángulo es $9 - x$ y la altura es $\sqrt{x}$, el perímetro es $P(x) = 2\left(9 - x + \sqrt{x}\right)$ con $x \in [0, 9]$.

$P'(x) = 2\left(-1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}$, que pertenece al intervalo $(0, 9)$.

$P(0) = 18$, $P\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{37}{2}$ y $P(9) = 6$, por lo que el perímetro máximo es $\dfrac{37}{2} = 18{,}5$ u, que se alcanza cuando $S\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$, es decir, cuando el rectángulo tiene base $\dfrac{35}{4}$ u y altura $\dfrac{1}{2}$ u.

153. Un artista ha adquirido un listón de 6 m de largo del que quiere colgar dos grandes telas rectangulares, una a continuación de la otra y que ocupen todo el listón: la primera ha de ser naranja, y el lado que está sobre el listón debe ser un tercio del lado que cuelga; la otra será verde y debe tener forma de cuadrado. ¿Qué dimensiones deben tener las telas para que su superficie sea la mínima posible?



Sean x e y las longitudes de los lados sobre el listón de la tela naranja y la tela verde respectivamente.

La función que queremos minimizar es $A(x) = 3x^2 + y^2$, esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $x + y = 6$, que nos permite despejar y, sustituyéndola en la expresión de A:

$$y = 6 - x \Rightarrow A = 3x^2 + (6 - x)^2 = 4x^2 - 12x + 36$$

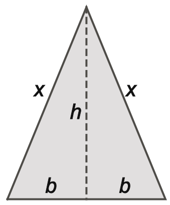
Además, x debe estar en el intervalo $[0, 6]$.

De este modo, queremos minimizar la función $A(x) = 4x^2 - 12x + 36$ en el intervalo $[0, 6]$.

$A'(x) = 8x - 12 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$, que pertenece al intervalo $(0, 6)$.

$A(0) = 36$, $A\left(\dfrac{3}{2}\right) = 27$ y $A(6) = 108$, por tanto, la superficie mínima es de 27 m^2, que se alcanza cuando $x = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ m e $y = 4{,}5$ m, es decir, cuando la tela naranja tiene dimensiones 1,5 x 4,5 metros y la verde 4,5 x 4,5 metros.

154. Encuentra la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 50 cm que tenga la mayor área posible.



Llamemos x, x y $2b$ a los lados del triángulo y h a su altura.

La función que queremos maximizar es $A=\dfrac{2bh}{2}=bh$,esta función depende de dos variables, pero tenemos las relaciones:

$$2x+2b=50\Rightarrow b=25-x$$

$$x^2=h^2+b^2=h^2+(25-x)^2\Rightarrow h=\sqrt{x^2-(25-x)^2}=\sqrt{50x-625}$$

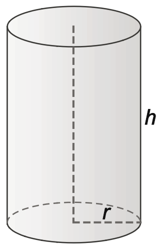
Además, x, b y $h$deben ser positivos.

De este modo, queremos maximizar la función $A(x)=(25-x)\sqrt{50x-625}$ en el intervalo $\left[12{,}5;\ 25\right]$.

$A'(x)=-\sqrt{50x-625}+(25-x)\dfrac{50}{2\sqrt{50x-625}}=\dfrac{1250-75x}{\sqrt{50x-625}}=0\Rightarrow\ x=\dfrac{50}{3}$, que pertenece al intervalo $\left(12{,}5;\ 25\right)$.

$A(12{,}5)=A(25)=0$ y $A\left(\dfrac{50}{3}\right)=\dfrac{625\sqrt{3}}{9}\simeq 120{,}28$, por tanto, el área máxima se alcanza cuando el triángulo es un triángulo equilátero de lado $\dfrac{50}{3}$ cm (con lo que la altura es $\dfrac{25\sqrt{3}}{3}$ cm).

155. Una lata cilíndrica de cierto refresco tiene un volumen de 333 cm^3. La chapa utilizada para las bases es doble de cara que la utilizada para la cara lateral. Calcula las dimensiones de la lata para que el coste de fabricación sea el menor posible.



Llamemos r al radio de la base y h a la altura de la lata.

Teniendo en cuenta que el área lateral es $2\pi rh$, que el área de cada base es πr^2 y que la chapa de las bases cuesta el doble que la chapa lateral, queremos minimizar la función $C=2\pi rh+4\pi r^2$.

Esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $\pi r^2 h=333$, que nos permite despejar h y sustituir en la expresión de C:

$$h=\frac{333}{\pi r^2}\Rightarrow C=\frac{666}{r}+4\pi r^2$$

Además $r>0$, por lo que queremos minimizar la función $C(r)=\dfrac{666}{r}+4\pi r^2$ en el intervalo $\left(0,+\infty\right)$.

$C'(r)=-\dfrac{666}{r^2}+8\pi r=0\Rightarrow r^3=\dfrac{333}{4\pi}\Rightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{333}{4\pi}}\simeq 2{,}98$, que pertenece al intervalo $\left(0,+\infty\right)$.

Como $\lim\limits_{r\to 0^+}A(r)=\lim\limits_{r\to+\infty}A(r)=+\infty$, el mínimo de la función se alcanza cuando $r=\sqrt[3]{\dfrac{333}{4\pi}}\simeq 2{,}98$ cm y $h=2\sqrt[3]{\dfrac{666}{\pi}}\simeq 11{,}93$ cm, es decir, el coste de fabricación es el menor posible si las latas tienen 3cm de radio y 12 cm de altura aproximadamente.

156. La página de un libro tiene un área de 600 cm². Si los cuatro márgenes miden 2 cm, calcula las dimensiones de la página para que la parte impresa sea la mayor posible.

Si x e y son las dimensiones de la página, queremos maximizar la función $A=(x-4)(y-4)$.

Esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $xy=600$, que nos permite despejar y sustituir en la expresión de A:

$$y=\frac{600}{x}\Rightarrow A=(x-4)\left(\frac{600}{x}-4\right)=-4x-\frac{2400}{x}+616$$

Además, $x-4$ e $y-4$ son positivos, por lo que queremos maximizar la función $A(x)=(x-4)\left(\frac{600}{x}-4\right)$ en el intervalo [4, 150].

$A'(x)=-4+\frac{2400}{x^2}=0\Rightarrow x^2=600\Rightarrow x=-10\sqrt{6},\ x=10\sqrt{6}$, pero solo $x=10\sqrt{6}$ pertenece al intervalo (4, 150).

$A(4)=A(150)=0$ y $A\left(10\sqrt{6}\right)\simeq 420{,}04$, por tanto, la parte impresa tiene el mayor tamaño posible cuando la hoja es cuadrada de lado $x=10\sqrt{6}$ cm.

157. Un meteorito se mueve, en un cierto sistema de referencia, según una trayectoria dada por la curva $y=\dfrac{x}{x+3}$. Desde el punto $A(5, 1)$ se lanza en línea recta una sonda para que intercepte al meteorito cuando ambos tengan velocidades paralelas.

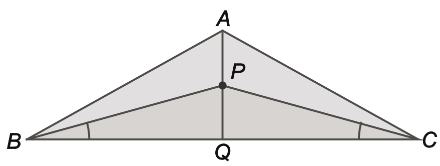
Calcula la ecuación de la trayectoria de la sonda. (Fíjate que el problema equivale a calcular la recta tangente a la curva que sigue el meteorito desde el punto de partida de la sonda).

La trayectoria es la recta que pasa por $A(5, 1)$ y $B\left(b, \frac{b}{b+3}\right)$ y es tangente a $f(x)=\frac{x}{x+3}$ en el punto de abscisa $x=b$.

Por tanto, se debe cumplir que $f'(b)=\dfrac{\frac{b}{b+3}-1}{b-5}\Rightarrow\dfrac{3}{(b+3)^2}=-\dfrac{3}{(b+3)(b-5)}$ y, como $b+3\neq 0$, obtenemos $b-5=-(b+3)\Rightarrow b=1$, con lo que la ecuación de la trayectoria es $y-1=\frac{3}{16}(x-5)\Rightarrow y=\frac{3}{16}x+\frac{1}{16}$.

158. En un triángulo isósceles ABC con $AB=AC$, $BC=4$ y de altura sobre BC igual a 1, ¿dónde debemos escoger un punto de dicha altura para que la suma de las tres distancias a los vértices sea mínima?

Sea Q el pie de la altura sobre BC y llamemos $x=PQ$, queremos minimizar la función $S(x)=1-x+2\sqrt{x^2+4}$ en el intervalo [0, 1].



$S'(x)=-1+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}=0\Rightarrow\sqrt{x^2+4}=2x\Rightarrow x^2+4=4x^2\Rightarrow x^2=\dfrac{4}{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (Falsa), $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, pero este valor no pertenece al intervalo (0, 1), por lo que el mínimo se alcanza en uno de los extremos del intervalo.

Como $S(0)=5$ y $S(1)=2\sqrt{5}$, el mínimo se alcanza si $x=1$, es decir, si $P=A$.

159. Halla a y b para que la función $f(x) = a\ln x + bx^2 + x$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 2$. ¿Qué tipo de extremos son (máximos o mínimos)?

La derivada $f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1$ se anula cuando $x = 1$ y $x = 2$, por tanto, tenemos:

$$\begin{cases} a + 2b + 1 = 0 \\ \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{2}{3},\ b = -\frac{1}{6} \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}\ln x - \frac{1}{6}x^2 + x$$

Para verificar que tipo de extremos son usaremos la segunda derivada $f''(x) = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$:

$f''(1) = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow$ en $x = 1$ hay un mínimo relativo.

$f''(2) = -\frac{1}{6} < 0 \Rightarrow$ en $x = 2$ hay un máximo relativo.

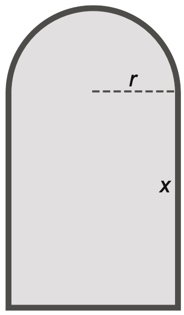
160. Sea la función $f(x) = \operatorname{sen} x$. Calcula sus primeras derivadas $f', f'', f''', \dots$ y deduce una fórmula para encontrar su derivada enésima.

$f'(x) = \cos x$ $\quad f''(x) = -\operatorname{sen} x$ $\quad f'''(x) = -\cos x$ $\quad f^{iv}(x) = \operatorname{sen} x$

Las derivadas se van repitiendo en bloques de cuatro, es decir,

$$f^{n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } n = 4k \\ \cos x & \text{si } n = 4k+1 \\ -\operatorname{sen} x & \text{si } n = 4k+2 \\ -\cos x & \text{si } n = 4k+3 \end{cases}$$

161. Se considera una ventana en la que la parte inferior es un rectángulo, y la superior, un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es 6 metros, calcula las dimensiones de la parte rectangular para que entre un máximo de luz.



Llamemos x a la altura del rectángulo y r al radio del semicírculo.

Para que entre la máxima luz, la superficie de la ventana debe ser máxima, es decir, queremos maximizar la función $A = 2rx + \frac{\pi r^2}{2}$. Esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $\pi r + 2x + 2r = 6$, que nos permite despejar y sustituir en la expresión de A:

$$x = 3 - \frac{2+\pi}{2}r \Rightarrow A = 2r\left(3 - \frac{2+\pi}{2}r\right) + \frac{\pi r^2}{2} = 6r - 2r^2 - \frac{\pi}{2}r^2 = 6r - \left(\frac{4+\pi}{2}\right)r^2$$

Además, x y r deben ser positivos, por lo que queremos maximizar la función $A(r) = 6r - \left(\frac{4+\pi}{2}\right)r^2$ en el intervalo $\left[0, \frac{6}{2+\pi}\right]$.

$A'(r) = 6 - 2\left(\frac{4+\pi}{2}\right)r = 0 \Rightarrow r = \frac{6}{4+\pi}$, que pertenece al intervalo $\left(0, \frac{6}{2+\pi}\right)$.

$A(0) = 0$, $A\left(\frac{6}{2+\pi}\right) = \frac{18\pi}{(2+\pi)^2} \simeq 2{,}139$ y $A\left(\frac{6}{4+\pi}\right) = \frac{18}{4+\pi} \simeq 2{,}52$, por tanto, el máximo de luz entra cuando $r = \frac{6}{4+\pi} \simeq 0{,}84$ m y $x = 3 - \frac{2+\pi}{2}r = 3 - \frac{2+\pi}{2}\cdot\frac{6}{4+\pi} = \frac{3(4+\pi) - 3(2+\pi)}{4+\pi} = \frac{6}{4+\pi} = r \simeq 0{,}84$, es decir, el rectángulo de la ventana debe tener doble base ($2r$) que altura (r).

162. Considera la curva $y = \frac{1}{x}$. Demuestra que en cualquier punto, el segmento de recta tangente limitado por los ejes de coordenadas tiene como punto medio el punto de tangencia.

La recta tangente al punto $P\left(a, \frac{1}{a}\right)$ tiene ecuación $y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a) \Rightarrow y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$, que corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A\left(0, \frac{2}{a}\right)$ y $B(2a, 0)$, con lo que el punto medio del segmento AB es $\left(\frac{0+2a}{2}, \frac{\frac{2}{a}+0}{2}\right) = \left(a, \frac{1}{a}\right) = P$, como queríamos demostrar.

163.* Entre 0 ºC y 30 ºC, el volumen *V* (en centímetros cúbicos) de *i* kg de agua a una temperatura *T* se expresa aproximadamente por la fórmula

$$\boldsymbol{V(T) = i\left(999{,}82 - 0{,}081654T + 0{,}009591T^2 - 0{,}00007675T^3\right)}$$

Encuentra la temperatura a la que el agua tiene densidad máxima.

Como densidad $= \frac{\text{masa}}{\text{volumen}}$, queremos maximizar la función

$$d(T) = \frac{1}{999{,}82 - 0{,}081654T + 0{,}009591T^2 - 0{,}00007675T^3}$$

en el intervalo [0, 30], o lo que es lo mismo, minimizar la función

$$f(T) = 999{,}82 - 0{,}081654T + 0{,}009591T^2 - 0{,}00007675T^3$$

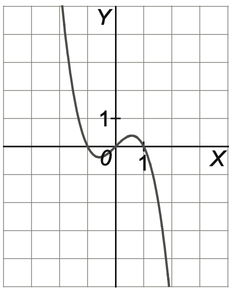
en dicho intervalo.

$f'(T) = -0{,}081654 + 2\cdot 0{,}009591T - 3\cdot 0{,}00007675T^2 = 0$ tienecomo soluciones $T \simeq 78{,}81$ y $T \simeq 4{,}5$, el mínimo se alcanza en $T \simeq 4{,}5$ o en los extremos. Como $f(0) = 999{,}82$; $f(30) = 1003{,}9$ y $f(4{,}5) = 999{,}64$ luego el mínimo se alcanza en *T*= 4,5 ºC, es decir, la máxima densidad del agua se da a 4,5 ºC.

PARA PROFUNDIZAR

164. Esboza la gráfica de la función $f(x) = x - x^3$ obteniendo previamente los elementos que consideres más significativos y encontrando la ecuación de la recta tangente en *P*(–1, 0).

Una segunda recta que pasa por *P* es también tangente a dicha curva en *Q*(*a*, *b*). Calcula la ecuación de esa recta.



Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.

$f(x) = 0 \Rightarrow x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1+x)(1-x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -1,\ x = 1$, por lo que la gráfica de f corta al eje de abscisas en los puntos (–1, 0), (0, 0) y (1, 0).

Estudiemos los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f estudiando el signo de f':

$f'(x) = 1 - 3x^2$ se anula si $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ o $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; es negativa, f es decreciente, si $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ yes positiva, f es creciente, si $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Además, en el punto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ hay un mínimo relativo y en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ un máximo relativo.

Se estudiala curvatura y los puntos de inflexión de *f*a partir del signo de f'' :

$f''(x) = -6x$ se anula si $x = 0$; es negativa, *f* está por debajo de la tangente, si $x \in (0, +\infty)$ y es positiva, *f* está por encima de la tangente, si $x \in (-\infty, 0)$. Además, en el punto (0, 0) hay un punto de inflexión.

La tangente en el punto *P*(–1, 0) es $y - 0 = f'(-1)(x+1) \Rightarrow y = -2x - 2$.

La otra recta pedida también será de la forma $y - 0 = m(x+1) \Rightarrow y = mx + m$. Para que sea tangente a *f* en *Q*(*a*, *b*) se debe verificar que $x = a$ es solución doble de la ecuación $x - x^3 = m(x+1) \Rightarrow x^3 + (m-1)x + m = 0$.

Como $x = -1$ también es solución de esta ecuación, obtenemos $x^3 + (m-1)x + m = (x+1)(x^2 - x + m) = 0$ y $x = a$ debe ser solución doble de la ecuación $x^2 - x + m = 0$, con lo que su discriminante debe ser nulo, es decir, $1 - 4m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$ y, por tanto, la ecuación de la recta es $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$. Además, obtenemos que $a = \frac{1}{2}$ y $b = f(a) = \frac{3}{8}$, es decir, $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$.

165. La ecuación de movimiento de un móvil viene dada por la función:

$$s(t) = Ae^{kt} + Be^{-kt} \quad (s \text{ en metros y } t \text{ en segundos})$$

donde *A*, *B* y *k* son constantes. Demuestra que la aceleración es proporcional al espacio y calcula la constante de proporcionalidad.

La aceleración viene dada por la segunda derivada de la función de movimiento: $a(t) = s''(t)$.

$s'(t) = kAe^{kt} - kBe^{-kt} \Rightarrow s''(t) = k^2Ae^{kt} + k^2Be^{-kt} = k^2s(t)$, así pues, $a(t)$ es proporcional a $s(t)$ con constante de proporcionalidad k^2 .

166. Un profesor un poco despistado propone a sus estudiantes que encuentren una función definida en el intervalo (0, 2) tal que:

$$f'(x) = 1, \text{ si } 0 < x \le 1 \quad f'(x) = 2, \text{ si } 1 < x < 2$$

y que además pase por el punto (1, 3). Los estudiantes intentan calcularla y se llevan una sorpresa. Intenta explicar qué es lo que ocurre.

La función debería ser $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 2x+1 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$, pero esta función no es derivable en $x = 1$, ya que las derivadas laterales no coinciden.El profesor debería haber dicho $f'(x) = 1$ si $0 < x < 1$ y $f'(x) = 2$ si $1 < x < 2$.

167. Estudia si es posible encontrar valores para *a*, *b* y *c* de forma que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x \le 1 \\ ax+b & \text{si } 1 < x \le 2 \\ ax^2 - c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solo hay que estudiar qué ocurre en $x = 1$ y $x = 2$, en el resto del dominio la función es derivable.Para que *f* sea derivable en $x = 1$ y $x = 2$, una condición necesaria (no suficiente) es que sea continua en estos puntos, es decir, los límites laterales deben coincidir. Además, las derivadas laterales en estos puntos deben coincidir. Por tanto:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) \\ f'(1^-) = f'(1^+) \\ \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) \\ f'(2^-) = f'(2^+) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = a+b \\ 1 = a \\ 2a+b = 4a-c \\ a = 4a \end{cases} \Rightarrow \text{ No hay solución}$$

No hay valores de *a*, *b* y *c* que hagan que *f* sea derivable en $\mathbb{R}$.

168. Halla los dos puntos en los que la curva $y = x^4 - 2x^2 - x$ tiene la misma tangente.

Sean $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ los dos puntos de la curva con tangente común $y = mx + n$, entonces la ecuación $x^4 - 2x^2 - x = mx + n$ tiene dos soluciones dobles $x = a$ y $x = b$, es decir:

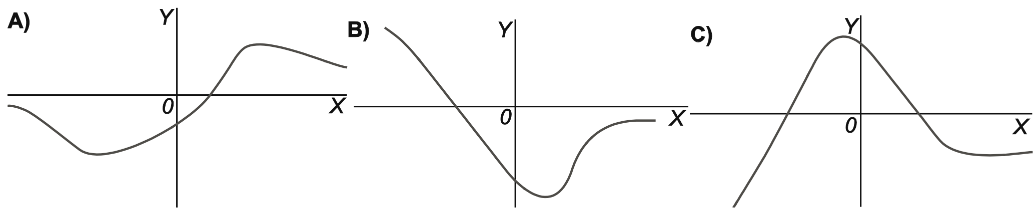
$$x^4 - 2x^2 - (1+m)x - n = (x-a)^2(x-b)^2 = x^4 - 2(a+b)x^3 + (a^2+b^2+4ab)x^2 - 2ab(a+b)x + a^2b^2$$

Identificando coeficientes se obtiene:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a^2+b^2+4ab=-2 \\ 2ab(a+b)=1+m \\ a^2b^2=-n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1,\ b=-1,\ m=-1,\ n=-1 \\ a=-1,\ b=1,\ m=-1,\ n=-1 \end{cases}$$

Por tanto, la tangente común es $y = -x - 1$ y los puntos de tangencia son $A(-1, 0)$ y $B(1, -2)$.

169. Las gráficas *A*, *B* y *C* representan a una función *f*, a su derivada f' y a otra función *F* tal que $F' = f$. Asocia cada gráfica a *f*, f' y *F*.



Analizando el crecimiento y decrecimiento de cada gráfica y sus extremos relativos se concluye que la gráfica de *F* es la representada en B, la gráfica de *f* es la representada en A y la gráfica de f' la representada en C.

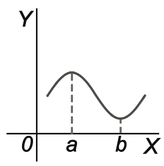
170. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable, y *a* y *b*, dos soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$ tales que entre ellas no hay ninguna otra solución de esa ecuación. Razona si puede ocurrir cada una de las siguientes posibilidades para la ecuación $f(x) = 0$.

a) Entre *a* y *b* no tiene ninguna solución.

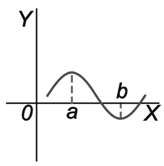
b) Entre *a* y *b* tiene una única solución.

c) Entre *a* y *b* tiene dos o más soluciones.

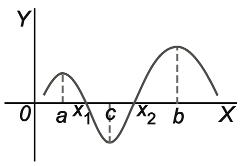
a) Es posible



b) Es posible



c) No es posible, ya que entre dos soluciones x_1 y x_2 de $f(x) = 0$ existiría algún valor $x = c$ en el que habría un máximo o mínimo relativo, con lo que $f'(c) = 0$

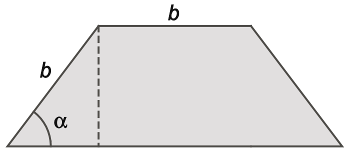


171. Calcula $\lim_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\pi} + t\right)^2 - \operatorname{sen} \pi}{t}$.

Nota: Aplica la definición de derivada en un punto de una determinada función.

Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen} x^2$, su derivada en el punto $x = \sqrt{\pi}$ es precisamente el límite que nos piden calcular, por tanto, como $f'(x) = 2x \cos x^2$, el límite pedido es $2\sqrt{\pi} \cos \pi = -2\sqrt{\pi}$.

172. De todos los trapecios que tienen tres lados iguales, encuentra aquel que tiene área máxima. (Ayuda: toma como variable el ángulo que forma la base mayor con uno de los lados oblicuos.)



Obtengamos el área en función del ángulo α. Llamando b a la longitud de cada uno de los tres lados iguales, la altura de dicho trapecio es $b\,\text{sen}\,\alpha$ y la base mayor es $b+2b\cos\alpha$.

El área del trapecio es $A(\alpha)=\dfrac{(b+2b\cos\alpha+b)\,b\,\text{sen}\,\alpha}{2}=b^2(1+\cos\alpha)\,\text{sen}\,\alpha=$

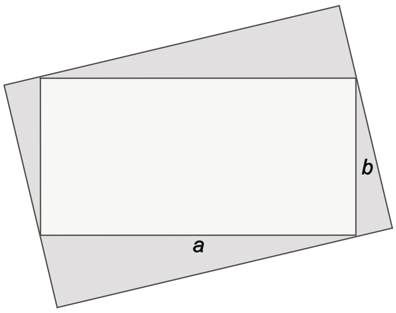
$=b^2(\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)=b^2\left(\text{sen}\,\alpha+\dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{2}\right)$, función que depende solo de α, ya que suponemos b fijado.

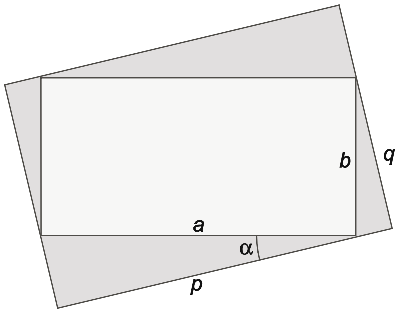
Por tanto, queremos maximizar $A(\alpha)=b^2\left(\text{sen}\,\alpha+\dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{2}\right)$ en el intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$A'(\alpha)=b^2(\cos\alpha+\cos 2\alpha)=0\Rightarrow\cos\alpha=-\cos 2\alpha\Rightarrow\alpha+2\alpha=\pi\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, que pertenece al intervalo $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$A(0)=0$, $A\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}b^2$ y $A\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=b^2$, por tanto, el área máxima se obtiene cuando $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, es decir, cuando el trapecio es la mitad de un hexágono regular.

173. Un rectángulo de dimensiones *a* y *b* se inscribe en otro como indica la figura. Halla las dimensiones de este último para que su área sea máxima.





Calculemos las dimensiones del rectángulo exterior en función de los números fijos a y b y del ángulo variable α. Tenemos $p=a\cos\alpha+b\,\text{sen}\alpha$ y $q=b\cos\alpha+a\,\text{sen}\alpha$, con lo que queremos maximizar la función $A(\alpha)=(a\cos\alpha+b\,\text{sen}\alpha)(b\cos\alpha+a\,\text{sen}\alpha)=ab+(a^2+b^2)\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha=$

$=ab+\dfrac{a^2+b^2}{2}\text{sen}2\alpha$ en el intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$A(0)=A\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=ab$ y $A\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=ab+\dfrac{a^2+b^2}{2}=\dfrac{(a+b)^2}{2}$, por tanto, el rectángulo exterior de área máxima se alcanza cuando $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, es decir, cuando el rectángulo exterior es un cuadrado de lado $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

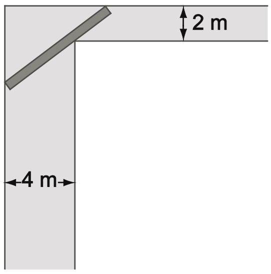
174. Observa que si f es derivable y corta en dos puntos el eje horizontal, es seguro que entre ellos va a haber algún valor que anule la derivada. Partiendo de este hecho, demuestra que la función $f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$ solo corta dos veces el eje horizontal.

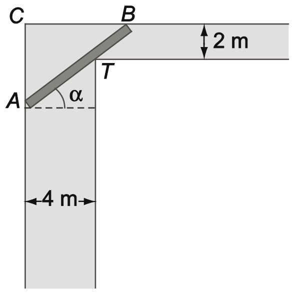
La derivada $f'(x) = 2x - \operatorname{sen} x - x\cos x + \operatorname{sen} x = x(2 - \cos x)$ solo se anula si $x = 0$, por tanto, la gráfica de f corta al eje horizontal como máximo dos veces.

Por otra parte, como f es continua, $f(-\pi) = \pi^2 + 1 > 0$, $f(0) = -1 < 0$ y $f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0$, la gráfica de f corta al eje horizontal al menos una vez en el intervalo $(-\pi, 0)$ y al menos otra en el intervalo $(0, \pi)$.

De este modo, la gráfica de f corta al eje horizontal exactamente dos veces.

175. Un túnel en forma de codo está formado por dos pasillos perpendiculares de anchuras 2 y 4 metros. ¿Cuál es la longitud máxima que puede tener un listón de madera para pasarlo horizontalmente a través del túnel?





Sea α el ángulo que forma con AC el listón más corto de los que no pueden pasar horizontalmente por el codo.

Tenemos $AB = AT + TB = \dfrac{4}{\cos\alpha} + \dfrac{2}{\operatorname{sen}\alpha}$, por tanto, queremos minimizar la función $f(\alpha) = \dfrac{4}{\cos\alpha} + \dfrac{2}{\operatorname{sen}\alpha}$ en el intervalo $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$f'(\alpha) = \dfrac{4\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{2\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}^3\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, siendo la única solución en el intervalo $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ el valor $\alpha_0 \simeq 0{,}671$ rad.

$\lim\limits_{\alpha\to 0^+} f(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to \frac{\pi}{2}^-} f(\alpha) = +\infty$ y $f(\alpha_0) \simeq 8{,}32$, por tanto, el listón más corto que no pasa por el codo del pasillo mide 8,32 metros, siendo esta longitud la máxima posible para un que un listón pase el codo.

176. Definamos la función f como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Calcula $f'(0)$. ¿Es continua la función $f'(x)$ en $x = 0$?

$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h\operatorname{sen}\dfrac{1}{h} = 0$, pues $\operatorname{sen}\dfrac{1}{h}$ es acotada y $\lim\limits_{h\to 0} h = 0$.

Si $x \neq 0$ tenemos $f'(x) = 2x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} + x^2\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 2x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$, con lo que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ no existe, ya que $\lim\limits_{x\to 0} 2x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$ pero $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ no existe. Por tanto, $f'(x)$ no es continua en $x = 0$.

ENTORNO MATEMÁTICO

¡Fuego!

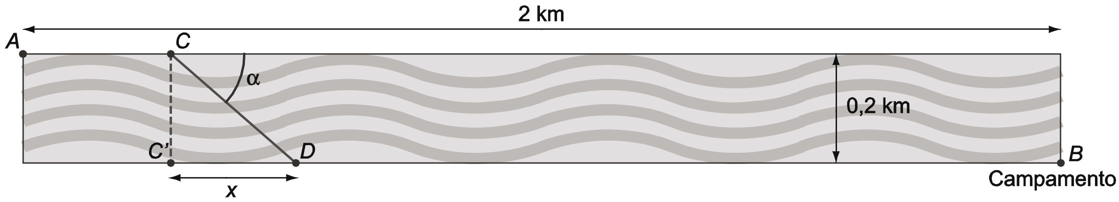
Lucía, Fernando, Montse, Dimitri y Teófilo "el cenizo", como le llaman sus amigos, han salido de excursión y se han instalado en un refugio a la orilla de un río de 200 m de ancho.

El día es particularmente caluroso, por lo que han decidido salir a dar un paseo y bañarse antes de comer. Tras seguir la orilla en línea recta cerca de 2 km andando, deciden meterse en el agua y cruzar a nado hacia la orilla contraria. Eso sí, la decisión cuenta con el voto en contra de Teófilo que advierte "seguro que si cruzamos nos pasa algo".

Una vez en la orilla Montse dice de pronto: "algo se está chamuscando en la casa" y, en efecto, ven como desde la zona en la que se encuentra el refugio sale una columna de humo denso y negro.

Pretenden llegar lo antes posible para sofocarlo y no tener que dormir al raso. Sabiendo que aproximadamente pueden nadar a 4 km/h y correr a 10 km/h, ¿qué trayectoria deben seguir en su carrera para salvar su refugio?

Observemos el siguiente esquema de la situación.



Independientemente del punto C por donde deciden atravesar el río, para nadar hasta D, los amigos corren $2 - C'D = 2 - x$ km y nadan $CD = \sqrt{0,2^2 + x^2} = \sqrt{0,04 + x^2}$ km, por tanto, tardarán $\frac{2-x}{10} + \frac{\sqrt{0,04 + x^2}}{4}$ horas en regresar al campamento.

Así pues, queremos minimizar la función $f(x) = \frac{2-x}{10} + \frac{\sqrt{0,04 + x^2}}{4}$ en el intervalo $[0, 2]$.

Derivando tenemos:

$$f'(x) = -\frac{1}{10} + \frac{2x}{8\sqrt{0,04 + x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{0,04 + x^2} = 2,5x \Rightarrow 5,25x^2 = 0,04 \Rightarrow x^2 = \frac{0,04}{5,25} = \frac{4}{525},$$

cuya única solución en el intervalo (0, 2) es $x = \frac{2}{5\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{105} \simeq 0,087$.

Como $f(0) = 0,25$, $f(2) \simeq 0,502$ y $f\left(\frac{2\sqrt{21}}{105}\right) \simeq 0,246$, los amigos deben atravesar el río de modo que salgan del mismo 87 metros más cerca del campamento y, de este modo, llegaran al campamento en el menor tiempo posible, aproximadamente 0,246 h = 14,76 minutos.

Puesto que el punto donde comienzan a nadar no influye, podrían empezar atravesando el río para salir 87 m más cerca del campamento y luego correr hasta el mismo, o bien correr 2 □0,087 =1,913 km y atravesar el río para salir del mismo ya en el campamento.

Si deseamos dar la solución calculando el ángulo α respecto a la orilla con el que deben atravesar el río, tenemos $\operatorname{tg}\alpha = \frac{0,2}{0,087} \Rightarrow \alpha \simeq 66,5^{\circ}$.

Auxilio marítimo

A Miguel no le gusta nada el mar y este verano, en el colmo del fastidio, sus padres han decidido alquilar un velero para navegar alrededor de las Canarias. Ya llevan dos días en el barco y mientras sus hermanos Iván y Raquel no paran de bañarse y ayudar a sus padres, él no hace otra cosa que contar el número de veces que ha vomitado. Decide ir a la nevera a comer algo y cuando entra en la cocina nota que sus pies chapotean en el agua. Antes de dar la voz de alarma piensa: "lo que me faltaba, ahora tendré que ponerme el salvavidas y echarme al agua".

Al oír la alerta su padre conecta la radio para enviar la señal de socorro. Si el velero viaja hacia el oeste con una velocidad de 15 km/h, la radio tiene un alcance de 92 km y el tiempo estimado para el hundimiento es de 2 horas, ¿podrá recibirla antes de que se hunda el barco, un crucero que se encuentra a 100 km de distancia en dirección oeste y viaja hacia el norte con una velocidad de 30 km/h?

Consideremos un sistema de coordenadas donde el origen sea la posición original del velero, la dirección Oeste – Este sea el eje*X* y la dirección Sur – Norte el eje *Y*.

Así, al principio tenemos situado al velero en el punto *V*(0, 0) y al crucero en el punto *C*(□100, 0). Trascurridas *t* horas, el velero estará en el punto $V'(-15t, 0)$ y el crucero en el punto $C(-100, 30t)$, por lo que la distancia, en km, entre las embarcaciones viene dada por la función $d(t)=\sqrt{(30t)^2+(15t-100)^2}=5\sqrt{45t^2-120t+400}$.

Calculemos el mínimo de esta función en el intervalo [0, 2]:

$$d'(t)=\frac{5(90t-120)}{2\sqrt{45t^2-120t+400}}=0\Rightarrow t=\frac{120}{90}=\frac{4}{3}$$, que pertenece al intervalo [0, 2].

$$d(0)=5\sqrt{400}=100,\ d\left(\frac{4}{3}\right)=5\sqrt{320}\simeq 89{,}44 \text{ y } d(2)=5\sqrt{340}\simeq 92{,}2$$

Por tanto, la distancia mínima entre el velero y el crucero se da pasadas 1 hora y 20 mintuos, y es de 89,44 km, por lo que la señal de socorro se recibirá a tiempo (seguramente antes del tiempo calculado).

Si deseamos calcular el momento en que se recibirá en el crucero la señal de socorro, observemos que esto sucede en el primer instante en que $d(t)=92$, resolviendo esta ecuación tenemos:

$$d(t)=92\Rightarrow 5\sqrt{45t^2-120t+400}=92\Rightarrow 25\left(45t^2-120t+400\right)=8464\Rightarrow 375t^2-1000t+512=0,$$

cuyas soluciones son $t=\dfrac{100-4\sqrt{145}}{75}\simeq 0{,}69$ y $t=\dfrac{100+4\sqrt{145}}{75}\simeq 1{,}98$.

Por tanto, el crucero recibe la señal trascurridas 0,69 h.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula los puntos de corte con los ejes de la tangente a la curva $y=\dfrac{1}{x-1}$ en el punto *P*(2, 1). Si *A* y *B* son dichos puntos, ¿qué relación hay entre las longitudes de los segmento *AP* y *PB*?

Si $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, la tangente es *P* es $y-1=f'(2)(x-2)$. Como $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$, la tangente en *P* es $y-1=-(x-2)\Rightarrow y=-x+3$, que corta a los ejes en los puntos *A*(0, 3) y *B*(3, 0), por tanto, $AP=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ y $PB=\sqrt{2}$, es decir, *AP* es el doble de *PB*.

2. Si $h(x)=\sqrt{4+3f(x)}$ con $f(1)=7$ y $f'(1)=4$, calcula $h'(1)$.

$$h'(x)=\frac{3f'(x)}{2\sqrt{4+3f(x)}}\Rightarrow h'(1)=\frac{3f'(1)}{2\sqrt{4+3f(1)}}=\frac{6}{5}$$

3. ¿Para qué valores de *r* la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación $y'' + 5y' - 6y = 0$?

$y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rx}$

$y'' + 5y' - 6y = 0 \Rightarrow \left(r^2 + 5r - 6\right)e^{rx} = 0 \Rightarrow r^2 + 5r - 6 = 0 \Rightarrow r = 1,\ r = -6$

4. Calcula la ecuación de la tangente a la curva $y = \dfrac{2}{1+e^{-x}}$ en el punto de ordenada 1.

El punto de ordenada 1 verifica $\dfrac{2}{1+e^{-x}} = 1 \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow x = 0$

Así, si $f(x) = \dfrac{2}{1+e^{-x}}$ tenemos que la ecuación de la recta tangente buscada es $y - 1 = f'(0)(x-0)$, con $f'(x) = \dfrac{2e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$, es decir, la recta tangente es $y - 1 = \dfrac{1}{2}x \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

5. ¿Qué relación existe entre las derivadas de las funciones $f(x) = \cos^2 x$ y $g(x) = \text{sen}^2\, x$?

Como $g(x) + f(x) = \text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$, derivando obtenemos $g'(x) + f'(x) = 0 \Rightarrow g'(x) = -f'(x)$.

Idéntico resultado obtenemos si derivamos directamente *f* y *g*, ya que $f'(x) = -2\cos x\, \text{sen}\, x$ y $g'(x) = 2\,\text{sen}\, x \cos x$.

6. Encuentra todos los puntos del intervalo $[0, 2\pi]$ en los que la gráfica de la función $f(x) = 2\,\text{sen}\, x + \text{sen}^2\, x$ tiene tangente horizontal.

$f'(x) = 2\cos x + 2\,\text{sen}\, x \cos x = 2\cos x(1 + \text{sen}\, x)$

Las soluciones de $f'(x) = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ son $x = \dfrac{\pi}{2}$ y $x = \dfrac{3\pi}{2}$, siendo estos los puntos con tangente horizontal en dicho intervalo.

7. Indica en qué puntos del intervalo $[0, 2\pi]$ es la siguiente función creciente.

$$f(x) = x - 2\,\text{sen}\, x$$

Estudiemos el signo de f' en el intervalo $[0, 2\pi]$.

En dicho intervalo $f'(x) = 1 - 2\cos x$ se anula si $x = \dfrac{\pi}{3}$ o $x = \dfrac{5\pi}{3}$, es positiva si $x \in \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$ y negativa si $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$.

Por tanto, *f* es creciente en $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$ y decreciente en $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$.

8. ¿En qué intervalo es cóncava hacia abajo la curva $y = e^{-x^2}$?

$$y = e^{-x^2} \Rightarrow y' = -2xe^{-x^2} \Rightarrow y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right) = 4e^{-x^2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

y''' se anula si $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ o $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, es positiva si $x \in \left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ y negativa si $x \in \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Por tanto, la curva es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

9. ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la gráfica de una función polinómica de 3.er grado?

Al tratarse de una función polinómica de 3.er grado, su derivada será una función polinómica de 1.er grado, por lo que la ecuación $f''(x) = 0$ siempre tendrá una única solución en la que cambia el signo de f'', de donde sigue que siempre tendrá un único punto de inflexión.

10. Determina los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = \ln\sqrt{x^3 + 1}$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \cdot \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} = \frac{3x^2}{2x^3+2} \text{ y } f''(x) = \frac{6x\left(2x^3+2\right) - 3x^2 \cdot 6x^2}{\left(2x^3+2\right)^2} = \frac{-6x^4 + 12x}{\left(2x^3+2\right)^2}$$

f' se anula si $x = 0$, pero no cambia de signo al pasar por este punto, f' es positiva tanto a su derecha como a la izquierda de $x = 0$, por lo que no existen extremos relativos.

f'' se anula si $-6x^4 + 12x = 0 \Rightarrow -6x\left(x^3 - 2\right) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \sqrt[3]{2}$. Como cambia de signo al pasar por estos puntos, ya que pasa de negativa a positiva al pasar por $x = 0$, y de positiva a negativa, al pasar por $x = \sqrt[3]{2}$, tenemos puntos de inflexión en los puntos $A(0, 0)$ y $B\left(\sqrt[3]{2}, \ln\sqrt{3}\right)$.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 1$ es creciente en $\mathbb{R}$ …

A. … para cualquier valor de *a*.

b) … siempre que $a > 3$.

C. … solo si $a = 4$.

D. … solo si $-3 \le a \le 3$.

Si f es creciente en $\mathbb{R}$ entonces $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3 \ge 0$ para todo número real *x*, es decir, la parábola $y = 3x^2 + 2ax + 3$ no puede cortar dos veces al eje de abscisas, con lo que el discriminante de la ecuación $3x^2 + 2ax + 3 = 0$ es menor o igual a 0.

Por tanto, $4a^2 - 36 \le 0 \Rightarrow a^2 \le 9 \Rightarrow -3 \le a \le 3$, la respuesta D.

2. Una recta tangente a lacurva $y = -x^3 + 26x$ es:

A. $y = -27$ **B.** $x - y - 54 = 0$ **C.** $x + y - 54 = 0$ **D.** $x - y - 48 = 0$

Si $f(x) = -x^3 + 26x$ entonces $f'(x) = -3x^2 + 26$.

Observemos las pendientes de las rectas dadas para comprobar la veracidad de cada respuesta.

Si la respuesta correcta es A, cuya pendiente es 0, la abscisa del punto de tangencia verificaría $f'(x) = 0$, es decir:

$$-3x^2 + 26 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{26}{3} \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{26}{3}},\ x = \sqrt{\frac{26}{3}},$$

Pero en ninguno de estos puntos la recta tangente coincide con la dada en A.

Si la respuesta correcta es B o D, cuyas pendientes son 1, la abscisa del punto de tangencia verificaría $f'(x) = 1$, es decir:

$$-3x^2 + 26 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{25}{3} \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{25}{3}} = -\frac{5\sqrt{3}}{3},\ x = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3},$$

Pero en ninguno de estos puntos la recta tangente coincide con la dadas en B o D.

Si la respuesta correcta es C, cuya pendienteses –1, la abscisa del punto de tangencia verificaría $f'(x) = -1$, es decir:

$$-3x^2 + 26 = -1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -3,\ x = 3.$$

En el primer caso la recta tangente no coincide con la dada en C, pero sí en el segundo caso, la recta tangente en $x = 3$ coincide con la dada en C, por tanto, la respuesta correcta es C.

3. Si la cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene su punto de inflexión en (3, –2) y un extremo relativo en (5, 1), el otro extremo relativo se alcanza en:

A. (1, –5) **B.** (–5, –1) **C.** (7, 4) **D.** (8, –1)

Toda cúbica es simétrica respecto de su punto de inflexión, por tanto, el otro extremo relativo es el simétrico del punto (5, 1) respecto de (3, –2), es decir, la respuesta A.

Para demostrar nuestra afirmación observemos que si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es una función cúbica, tenemos $f''(x) = 6ax + 2b$, por lo que el punto de inflexión tiene abscisa $x = -\frac{b}{3a}$ y basta comprobar que $f\left(-\frac{b}{3a} - x\right) = f\left(-\frac{b}{3a} + x\right)$ para cualquier valor *x*.

Alternativamente, podríamos haber resuelto el sistema lineal:

$$\begin{cases} f(3) = -2 \\ f(5) = 1 \\ f'(3) = 0 \\ f''(5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27a + 9b + 3c + d = -2 \\ 125a + 25b + 5c + d = 1 \\ 27a + 6b + c = 0 \\ 30a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{3}{16},\ b = \frac{45}{16},\ c = -\frac{189}{16},\ d = \frac{211}{16}$$

y, sabiendo que $x = 5$ es solución de la ecuación de segundo grado $f'(x) = 0$, encontrar la otra solución, obteniéndose $x = 1$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Sea f la función definida en $(-\infty, 1]$ por $f(x) = 2x\sqrt{1-x}$ y T la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$, entonces:**

A. Si $x < 1$, $f'(x) = \dfrac{2-3x}{\sqrt{1-x}}$

B. Si $x < 1$, $f(x) \le \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

C. La recta *T* viene dada por $y = 2x$.

D. La gráfica de *f* verifica que a veces está por encima y a veces está por debajo de *T*.

$f'(x) = 2\sqrt{1-x} + 2x\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{1-x} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-2x-x}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-3x}{\sqrt{1-x}}$ si $x < 1$, por lo que A es correcta.

Para comprobar B calculamos el valor del máximo absoluto de $f: f'(x) = 0 \Rightarrow 2-3x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ y $f(1) = 0$, por tanto, el valor máximo de *f* es $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$, por lo que B es correcta.

La ecuación de *T* es $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y = 2x$, por lo que C también es correcta.

Por último, para comprobar D, observemos que:

Si $0 \le x \le 1$ tenemos $\sqrt{1-x} \le 1 \Rightarrow 2x\sqrt{1-x} \le 2x$

Si $x < 0$ tenemos $\sqrt{1-x} \ge 1 \Rightarrow 2x\sqrt{1-x} \le 2x$

Por tanto, la gráfica de *f* nunca está por encima de *T*, por lo que D es incorrecta.

5. **Si $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$, entonces:**

A. $f(0) = 1$

B. $f'(0) = 1$

C. $f''(0) = 1$

D. La gráfica de *f* no tiene punto de inflexión en $\left[\dfrac{\pi}{4}, 2\pi\right]$

$f'(x) = e^{\operatorname{sen} x}\cos x \Rightarrow f''(x) = e^{\operatorname{sen} x}\cdot\cos^2 x - e^{\operatorname{sen} x}\cdot\operatorname{sen} x = e^{\operatorname{sen} x}\left(\cos^2 x - \operatorname{sen} x\right) = -e^{\operatorname{sen} x}\left(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1\right)$

$f(0) = 1$, por lo que A es correcta. $f'(0) = 1$, por lo que B es correcta. $f''(0) = 1$, por lo que C es correcta.

Para verificar D observemos que f'' se anula si $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (la otra solución no es posible, ya que $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1$).

Esta ecuación tiene una solución $x_0 = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ en el intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4}, 2\pi\right]$, de hecho, x_0 es un ángulo entre $\dfrac{3\pi}{4}$ y π, además,

si $\dfrac{\pi}{4} \le x < x_0$ tenemos $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 < 0 \Rightarrow f''(x) > 0$

si $x_0 < x \le 2\pi$ tenemos $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 > 0 \Rightarrow f''(x) < 0$

por lo que tenemos un punto de inflexión en $x = x_0$ y D es incorrecta.

6. **Sea *f* una función, definida en todo $\mathbb{R}$, que admite segunda derivada; *L* su gráfica; T_1 la recta de ecuación $y = x + 1$; T_2 la recta de ecuación $y = 1 - x$. Entonces:**

A. Si T_1 es tangente a *L* en el punto de abscisa $x = 1$, entonces $f'(1) = 1$.

B. Si T_1 es tangente a *L* en el punto de abscisa $x = 1$, entonces $f(1) = 1$.

C. Si T_1 es tangente a *L* en el punto de abscisa $x = 1$ y T_2 es tangente a *L* en el punto de abscisa $x = 3$, entonces existe $a \in (1, 3)$ tal que $f'(a) = 0$.

D. Si T_1 es tangente a *L* en el punto de abscisa $x = 1$ y T_2 es tangente a *L* en el punto de abscisa $x = 3$, entonces *f* admite un máximo relativo en un punto $b \in [1, 3]$.

A es correcta, ya que la pendiente de T_1 es 1.

B es incorrecta, ya que la ordenada de T_1 en $x = 1$ es $y = 2$, así que $f(1) = 2$.

C nos dice que $f'(1) = 1$ y $f'(3) = -1$, con lo que, al ser f' continua (existe $a \in (1, 3)$ tal que $f'(a) = 0$), C es correcta.

D nos dice que $f'(1) = 1$ y $f'(3) = -1$, y como $\exists f'' \Rightarrow f'$ es continua. Como $f'(a) = 0$ y *f* pasa de creciente a decreciente en algún punto $a \in (1, 3)$. D es correcta.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

7. **Supón que *f* es una función derivable en $\mathbb{R}$. Considera las dos afirmaciones siguientes:**

1. $f'(2) = 0$, $f''(2) \geq 0$

2. ***f* presenta un máximo relativo en $x = 2$.**

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. 1 y 2 se excluyen entre sí

D. Nada de lo anterior

$1 \not\Rightarrow 2$, ya que podría ocurrir que $f'(2) = 0$, $f''(2) > 0$, con lo que en $x = 2$ habría un mínimo relativo. $2 \not\Rightarrow 1$, ya que si en $x = 2$ hay un máximo relativo, $f'(2) = 0$ pero podría ser $f''(2) < 0$, como sucede, por ejemplo, si $f(x) = -(x-2)^2$. Por tanto, ni A ni B son correctas.

Tampoco es correcta C, por ejemplo, si $f(x) = -(x-2)^4$ se verifican 1 y 2.

Así, la relación correcta es D.

10 Funciones elementales

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Encuentra los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones y estudia su signo.

a) $f(x)=6x-5$ **b)** $f(x)=\frac{(x-3)(x+2)}{x+1}$ **c)** $f(x)=x^2+3x-4$ **d)** $f(x)=\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-2}$

a) Cortes con el eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow 6x-5=0\Rightarrow x=\frac{5}{6}\Rightarrow P_1\left(\frac{5}{6},\ 0\right)$; Corte con el eje *Y*: $f(0)=-5\Rightarrow P_2(0,\ -5)$

Signo de $f(x)$:

	$-\infty$ … $\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$ … $+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$

f es positiva en $\left(\frac{5}{6},\ +\infty\right)$ y negativa en $\left(-\infty,\ \frac{5}{6}\right)$.

b) Cortes con el eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow(x-3)(x+2)=0\Rightarrow x=-2,\ x=3\Rightarrow P_1(-2,\ 0),\ P_2(3,\ 0)$

Corte con el eje *Y*: $f(0)=-6\Rightarrow P_3(0,\ -6)$

Signo de $f(x)$:

	$-\infty$ … -2	-2 … -1	-1 … 3	3 … $+\infty$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

f es positiva en $(-2,\ -1)\cup(3,\ +\infty)$ y negativa en $(-\infty,\ -2)\cup(-1,\ 3)$.

c) Cortes con el eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow x^2+3x-4=0\Rightarrow x=-4,\ x=1\Rightarrow P_1(-4,\ 0),\ P_2(1,\ 0)$

Corte con el eje *Y*: $f(0)=-4\Rightarrow P_3(0,\ -4)$

Signo de $f(x)$: $f(x)=(x+4)(x-1)$

	$-\infty$ … -4	-4 … 1	1 … $+\infty$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

f es positiva en $(-\infty,\ -4)\cup(1,\ +\infty)$ y negativa en $(-4,\ 1)$.

d) Cortes con el eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow x^3-2x^2-5x+6=0\Rightarrow x=-2,\ x=1,\ x=3\Rightarrow P_1(-2,\ 0),\ P_2(1,\ 0),\ P_3(3,\ 0)$

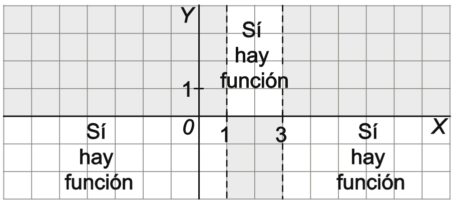
Corte con el eje *Y*: $f(0)=-3\Rightarrow P_4(0,\ -3)$

Signo de $f(x)$: $f(x)=\frac{(x+2)(x-1)(x-3)}{x-2}$

	$-\infty$ … -2	-2 … 1	1 … 2	2 … 3	3 … $+\infty$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

f es positiva en $(-\infty,\ -2)\cup(1,\ 2)\cup(3,\ +\infty)$ y negativa en $(-2,\ 1)\cup(2,\ 3)$.

3. Escribe la expresión analítica de una función que cumpla lo señalado en la siguiente gráfica.



Una posible solución es $f(x) = -(x-1)(x-3) = -x^2 + 4x - 3$.

4. Estudia si las siguientes funciones son pares o impares, o si no presentan ninguna de estas simetrías.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

b) $f(x) = |x|$

c) $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

a) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = f(x) \Rightarrow$ Función par

b) $f(-x) = |-x| = |x| = f(x) \Rightarrow$ Función par

c) $f(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x) = -x^5 + 2x^3 - x = -f(x) \Rightarrow$ Función impar

d) $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^3 + 1} = \dfrac{1}{-x^3 + 1}$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es ni par ni impar.

5. a) Escribe una función polinómica en la que todos los exponentes que aparezcan sean pares y estudia su simetría.

b) Haz lo mismo para una función polinómica con todos sus exponentes impares.

c) ¿Por qué crees que se usan los términos *funciones par* e *impar*?

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$, la función es par.

b) $f(x) = x^5 + x^3 + 2x$, la función es impar.

c) Cualquier función polinómica con todos los exponentes pares será par, y si los exponentes son todos impares será impar.

6. Ejercicio interactivo.

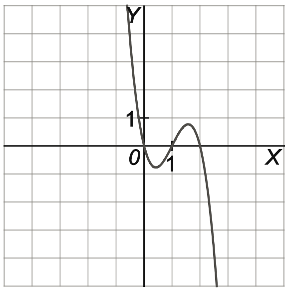
7. Ejercicio resuelto.

8. **Esboza las gráfica de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = -2x(x^2 - 3x + 2)$ **c)** $f(x) = x^3 - 25x$ **e)** $f(x) = x^4 - 2x^2$

b) $f(x) = x^3 - 7x + 6$ **d)** $f(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$ **f)** $f(x) = x^4 - 16$

a) Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje *Y*: $f(0) = 0 \Rightarrow (0,\ 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

Cortes con el eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow -2x(x^2 - 3x + 2) = -2x(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = 2 \Rightarrow (0,\ 0),\ (1,\ 0)$ y $(2,\ 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

Signo: La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es positiva o negativa.

	$-\infty$ a 0	0 a 1	1 a 2	2 a $+\infty$
$-2x$	+	−	−	−
$x-1$	−	−	+	+
$x-2$	−	−	−	+
$f(x)$	+	−	+	−

Simetría

$f(-x) = 2x(x^2 + 3x + 2)$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es ni par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = -6x^2 + 12x - 4 = -6\left(x - 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ se anula si

$x = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = x_1$ o $x = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3} = x_2$.

	$-\infty$ a x_1	x_1 a x_2	x_2 a $+\infty$
$x - x_1$	−	+	+
$x - x_2$	−	−	+
$f'(x)$	−	+	−
$f(x)$	↘	↗	↘

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, además, en $(x_1,\ f(x_1)) \simeq (0{,}42;\ -0{,}77)$ hay un mínimo relativo y en $(x_2,\ f(x_2)) \simeq (1{,}58;\ 0{,}77)$ hay un máximo relativo.

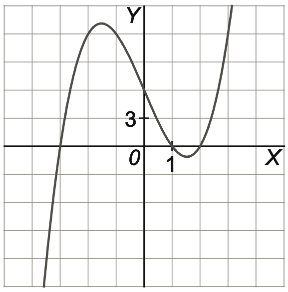
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = -12x + 12 = -12(x-1)$ se anula si $x = 1$.

	$-\infty$ a 1	1 a $+\infty$
$f''(x)$	+	−
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, además, en (1, 0) hay un punto de inflexión.

b) Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje *Y*: $f(0) = 6 \Rightarrow (0,\ 6)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

Cortes con el eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1,\ x = 2,\ x = -3 \Rightarrow (-3,\ 0),\ (1,\ 0)$ y $(2,\ 0)$.

Signo: La tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es positiva o negativa.

	$-\infty$ a -3	-3 a 1	1 a 2	2 a $+\infty$
$x+3$	−	+	+	+
$x-1$	−	−	+	+
$x-2$	−	−	−	+
$f(x)$	−	+	−	+

Simetría

$f(-x) = -x^3 + 7x + 6$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es ni par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 3x^2 - 7 = 3\left(x + \frac{\sqrt{21}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{21}}{3}\right)$ se anula si $x = -\frac{\sqrt{21}}{3} = x_1$ o $x = \frac{\sqrt{21}}{3} = x_2$

	$-\infty$ a x_1	x_1 a x_2	x_2 a $+\infty$
$x - x_1$	$-$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, además, obtenemos que en $(x_1, f(x_1)) \simeq (-1{,}53;\ 13{,}13)$ hay un máximo relativo y en $(x_2, f(x_2)) \simeq (1{,}53;\ -1{,}13)$ hay un mínimo relativo.

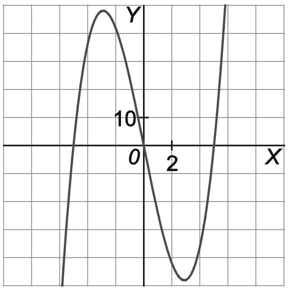
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 6x$ se anula si $x = 0$.

	$-\infty$ a 0	0 a $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

En la tabla se determinan los intervalos en los que f es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, además, en (0, 6) hay un punto de inflexión.

c) Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow (0,\ 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 25x = x(x+5)(x-5) = 0 \Rightarrow$

$x = 0,\ x = -5,\ x = 5 \Rightarrow$ (–5, 0), (0, 0) y (5, 0) son los puntos de corte con el eje X.

Signo: La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que f es positiva o negativa.

	$-\infty$ a -5	-5 a 0	0 a 5	5 a $+\infty$
$x+5$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Simetría

$f(-x) = -x^3 + 25x = -f(x)$, la función es impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 3x^2 - 25 = 3\left(x + \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$ se anula si $x = -\frac{5\sqrt{3}}{3} = x_1$ o $x = \frac{5\sqrt{3}}{3} = x_2$.

	$-\infty$ a x_1	x_1 a x_2	x_2 a $+\infty$
$x - x_1$	$-$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, además, en $(x_1, f(x_1)) \simeq (-2{,}87;\ 48{,}11)$ hay un máximo relativo y en $(x_2, f(x_2)) \simeq (2{,}87;\ -48{,}11)$ hay un mínimo relativo.

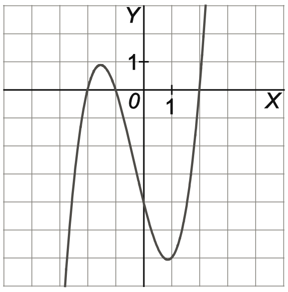
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 6x$ se anula si $x = 0$.

	$-\infty$ a 0	0 a $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

En la tabla se determinan los intervalos en los que f es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, además, obtenemos que en (0, 0) hay un punto de inflexión.

d) Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



<u>Puntos de corte con los ejes y signo</u>

Corte con el eje *Y*: $f(0) = -4 \Rightarrow (0, -4)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

Cortes con el eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x+1) = (x+2)(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow$

$x = -2,\ x = 2,\ x = -1 \Rightarrow$ $(-2, 0)$, $(-1, 0)$ y $(2, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

Signo: La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es positiva o negativa.

$-\infty \quad -2 \quad -1 \quad 2 \quad +\infty$

$x+2$	−	+	+	+
$x+1$	−	−	+	+
$x-2$	−	−	−	+
$f(x)$	−	+	−	+

<u>Simetría</u>

$f(-x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es ni par ni impar.

<u>Límites en el infinito</u>

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

<u>Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos</u>

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 4 = 3\left(x - \dfrac{-1-\sqrt{13}}{3}\right)\left(x - \dfrac{-1+\sqrt{13}}{3}\right)$ se anula si $x = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{3} = x_1$ o $x = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{3} = x_2$.

$-\infty \quad x_1 \quad x_2 \quad +\infty$

$x - x_1$	−	+	+
$x - x_2$	−	−	+
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, además, en $(x_1, f(x_1)) \simeq (-1{,}54;\ 0{,}88)$ hay un máximo relativo y en $(x_2, f(x_2)) \simeq (0{,}87;\ -6{,}06)$ hay un mínimo relativo.

<u>Curvatura y puntos de inflexión</u>

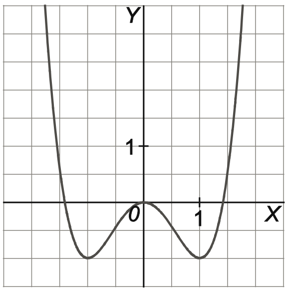
$f''(x) = 6x + 2$ se anula si $x = -\dfrac{1}{3}$.

$-\infty \quad 0 \quad +\infty$

$f''(x)$	−	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, además, en $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{70}{27}\right)$ hay un punto de inflexión.

e) Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



<u>Puntos de corte con los ejes y signo</u>

Corte con el eje *Y*: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

Cortes con el eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 = x^2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow$

$x = 0,\ x = -\sqrt{2},\ x = \sqrt{2} \Rightarrow \left(-\sqrt{2}, 0\right)$, $(0, 0)$ y $\left(\sqrt{2}, 0\right)$

Signo: La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es positiva o negativa.

$-\infty \quad -\sqrt{2} \quad 0 \quad \sqrt{2} \quad +\infty$

$x+\sqrt{2}$	−	+	+	+
x^2	+	+	+	+
$x-\sqrt{2}$	−	−	−	+
$f(x)$	+	−	−	+

<u>Simetría</u>

$f(-x) = x^4 - 2x^2 = f(x)$, la función es par.

<u>Límites en el infinito</u>

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$ se anula si $x = -1$, $x = 0$ o $x = 1$.

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, además, en $(-1, -1)$ hay un mínimo relativo, en (0, 0) un máximo relativo y en $(1, -1)$ un mínimo relativo.

	$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a $+\infty$
$x+1$	−	+	+	+
x	−	−	+	+
$x-1$	−	−	−	+
$f''(x)$	−	+	−	+
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

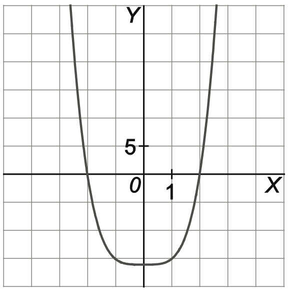
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 12x^2 - 4 = 12\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ se anula si $x = -\frac{\sqrt{3}}{3} = x_1$ o $x = \frac{\sqrt{3}}{3} = x_2$.

En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, además, en $(x_1, f(x_1)) \simeq (-0{,}58; -0{,}56)$ y $(x_2, f(x_2)) \simeq (0{,}58; -0{,}56)$ hay puntos de inflexión.

	$-\infty$ a x_1	x_1 a x_2	x_2 a $+\infty$
$x - x_1$	−	+	+
$x - x_2$	−	−	+
$f''(x)$	+	−	+
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

f) Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje *Y*: $f(0) = -16 \Rightarrow (0, -16)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

Cortes con el eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 16 = (x^2+4)(x+2)(x-2) = 0 \Rightarrow$

$x = -2$, $x = 2 \Rightarrow$ (−2, 0) y (2, 0) son los puntos de corte con el eje *X*.

Signo: La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es positiva o negativa.

	$-\infty$ a -2	-2 a 2	2 a $+\infty$
x^2+4	+	+	+
$x+2$	−	+	+
$x-2$	−	−	+
$f(x)$	+	−	+

Simetría

$f(-x) = x^4 - 16 = f(x)$, la función es par.

Límites en el infinito

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 4x^3$ se anula si $x = 0$.

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, además, en $(0, -16)$ hay un mínimo relativo.

	$-\infty$ a 0	0 a $+\infty$
$f'(x)$	−	+
$f(x)$	↘	↗

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 12x^2$ se anula si $x = 0$.

En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, además, no hay puntos de inflexión.

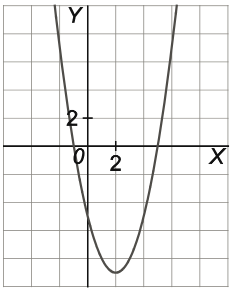
	$-\infty$ a 0	0 a $+\infty$
$f''(x)$	+	+
$f(x)$	$\cup$	$\cup$

9. Haz el estudio completo de las siguientes funciones polinómicas y dibuja sus gráficas.

a) $f(x) = x^2 - 4x - 5$ **c)** $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1$ **e)** $f(x) = x^4 - x^2 + 2$

b) $f(x) = -x^2 + 9$ **d)** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ **f)** $f(x) = x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 1$

a) La gráfica es una parábola cóncava hacia arriba $(\cup)$ con un mínimo absoluto en su vértice $x_v = \frac{4}{2} = 2$ ($y_v = -9$) y eje de simetría la recta $x = 2$.

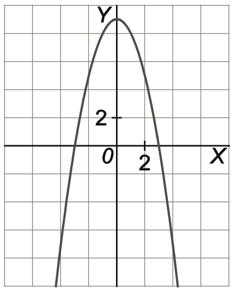


Punto de corte con el eje *Y*: (0, –5) ; y con el eje *X*: (–1, 0) y (5, 0).

Haciendo una tabla de valores se puede hacer un esbozo de la gráfica.

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	0	–5	–8	–9	–8	–5	0

b) La gráfica es una parábola cóncava hacia abajo $(\cap)$ con un máximo absoluto en su vértice $x_v = \frac{0}{-2} = 0$ ($y_v = 9$) y eje de simetría la recta $x = 0$.

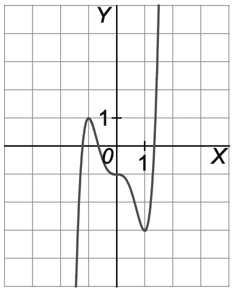


Punto de corte con el eje *Y*: (0, 9) y con el eje *X*:(–3, 0) y (3, 0).

Haciendo una tabla de valores se puede hacer un esbozo de la gráfica.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0	5	8	9	8	5	0

c) Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje *Y*: $f(0) = -1 \Rightarrow (0, -1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

Cortes con el eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow 3x^5 - 5x^3 - 1 = 0$, la ecuación no tiene raíces enteras, por lo que no se pueden determinar con exactitud los puntos de corte y al no poder calcular con precisión los puntos de corte con el eje *X*, tampoco se puede hacer un estudio riguroso del signo.

Simetría

$f(-x) = -3x^5 + 5x^3 - 1$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es ni par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x+1)(x-1)$ se anula si $x = 0$, $x = -1$ o $x = 1$.

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, además, obtenemos que en $(-1, 1)$ hay un máximo relativo y en $(1, -3)$ un mínimo relativo.

$-\infty$ -1 0 1 $+\infty$

$x+1$	–	+	+	+
x^2	+	+	+	+
$x-1$	–	–	–	+
$f'(x)$	+	–	–	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 60x^3 - 30x = 60x\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ se anula si $x = 0$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = x_1$ o $x = \frac{\sqrt{2}}{2} = x_2$.

$-\infty$ x_1 0 x_2 $+\infty$

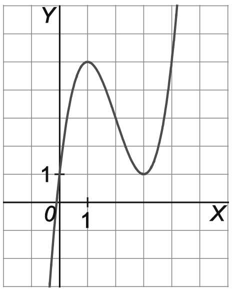
$x - x_1$	–	+	+	+
x	–	–	+	+
$x - x_2$	–	–	–	+
$f''(x)$	–	+	–	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, además, en $(x_1, f(x_1)) \simeq (-0{,}71;\ 0{,}24)$, $(0, -1)$ y $(x_2, f(x_2)) \approx (0{,}71;\ -2{,}24)$ hay puntos de inflexión.

Este ejemplo sirve para ilustrar que, en ocasiones, no se puede hacer un estudio preciso de alguna de las propiedades de una función, pero eso no impide esbozar su gráfica a partir de la información que sí se puede obtener.

En este caso, los datos obtenidos permiten concluir que la gráfica de *f* corta al eje *X* en dos puntos, y, aunque no se pueda calcular con exactitud estos dos puntos, se puede hacerlaproximadamente. Del mismo modo, los datos obtenidos permiten hacer un estudio del signo de *f*, quizás no preciso, pero símuy aproximado.

d) Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje *Y*: $f(0)=1 \Rightarrow (0,\,1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

Cortes con el eje *X*: $f(x)=0 \Rightarrow x^3-6x^2+9x+1=0$, la ecuación no tiene raíces enteras, por lo que no se pueden determinar con exactitud los puntos de corte ni tampoco hacer un estudio riguroso del signo.

Simetría

$f(-x)=-x^3-6x^2-9x+1$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es ni par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$ se anula si $x=1$ o $x=3$.

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.En (1, 5) hay un máximo relativo y en (3, 1) un máximo relativo.

	$-\infty$ 1	1 3	3 $+\infty$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=6x-12=6(x-2)$ se anula si $x=2$.

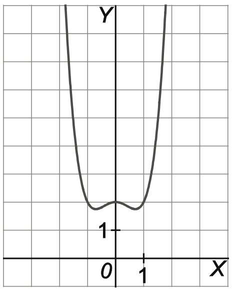
En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$. En(2, 3)hay un punto de inflexión.

	$-\infty$ 2	2 $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Como en el apartado anterior, no podremos hacer un estudio preciso de alguna de las propiedades de una función, pero eso no nos impide esbozar su gráfica a partir de la información que sí podemos obtener.

Alternativamente, se podría hacer un esbozo de la gráfica de $f(x)$ dibujando previamente la gráfica de $g(x)=x^3-6x^2+9x$ y trasladándola una unidad hacia arriba.

e) Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje *Y*: $f(0)=2 \Rightarrow (0,\,2)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

Cortes con el eje *X*: $f(x)=0 \Rightarrow x^4-x^2+2=0$, es una ecuación bicuadrada sin soluciones reales, por lo que no hay puntos de corte con el eje *X*.

Signo: La función es positiva en $\mathbb{R}$.

Simetría

$f(-x)=x^4-x^2+2=f(x)$, la función es ni par.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 4x^3 - 2x = 4x\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ se anula si $x = 0$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = x_1$ o $x = \frac{\sqrt{2}}{2} = x_2$.

$-\infty$ x_1 0 x_2 $+\infty$

$x - x_1$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. En $(x_1, f(x_1)) \simeq (-0{,}71; 1{,}75)$ hay un mínimo relativo, en (0, 2) un máximo relativo y en $(x_2, f(x_2)) \simeq (0{,}71; 1{,}75)$ un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

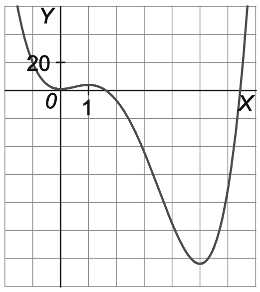
$f''(x) = 12x^2 - 2 = 12\left(x + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)\left(x - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ se anula si $x = -\frac{\sqrt{6}}{6} = x_3$ o $x = \frac{\sqrt{6}}{6} = x_4$.

$-\infty$ x_3 x_4 $+\infty$

$x - x_3$	$-$	$+$	$+$
$x - x_4$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

En la tabla se determinan los intervalos en los que f es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$. En $(x_3, f(x_3)) \simeq (-0{,}41; 1{,}86)$ y $(x_4, f(x_4)) \simeq (0{,}41; 1{,}86)$ hay puntos de inflexión.

f) Es una función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje Y: $f(0) = 1 \Rightarrow (0, 1)$ es el punto de corte con el eje Y.

Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 1 = 0$, la ecuación no tiene raíces enteras, por lo que no se puede determinar con exactitud los puntos de corte ni hacer un estudio riguroso del signo.

Simetría

$f(-x) = x^4 + 8x^3 + 10x^2 + 1$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es ni par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 20x = 4x(x-1)(x-5)$ se anula si $x = 0$, $x = 1$ o $x = 5$.

$-\infty$ 0 1 5 $+\infty$

x	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.En (0, 1) hay un mínimo relativo, en (1, 4) un máximo relativo y en (5, –124) un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 12x^2 - 48x + 20 = 12\left(x - \frac{6 - \sqrt{21}}{3}\right)\left(x - \frac{6 + \sqrt{21}}{3}\right)$ se anula si $x = \frac{6 - \sqrt{21}}{3} = x_1$ o $x = \frac{6 + \sqrt{21}}{3} = x_2$.

$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$

$x - x_1$	$-$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

En la tabla se determinan los intervalos en los que f es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, además, obtenemos que en $(x_1, f(x_1)) \simeq (0{,}47; 2{,}44)$ y $(x_2, f(x_2)) \simeq (3{,}53; -70{,}88)$ hay puntos de inflexión.

Alternativamente, podríamos hacer un esbozo de la gráfica de $f(x)$ dibujando previamente la gráfica de $g(x) = x^4 - 8x^3 + 10x^2$ y trasladándola una unidad hacia arriba.

10. Escribe una función polinómica de tercer grado que presente a la vez las tres propiedades siguientes:

I. Es simétrica respecto del origen.

II. Tiene un máximo relativo en el punto (1, 2).

III. Tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

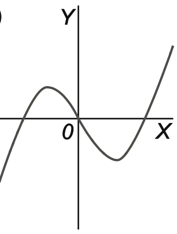
De la condición I se deduce que la función es de la forma $f(x) = ax^3 + bx$.

De la condición II: $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1,\ b = 3$.

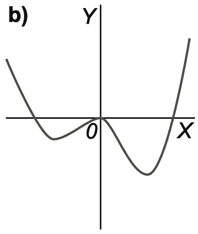
Por tanto, la función es $f(x) = -x^3 + 3x$, siendo la condición III redundante, ya que es consecuencia de la condición I, cualquier función polinómica de tercer grado que sea simétrica respecto del origen debe tener un punto de inflexión en $x = 0$.

11. Las gráficas siguientes son de funciones polinómicas. Deduce en cada caso cuál es su mínimo grado posible y el signo del coeficiente de mayor grado.

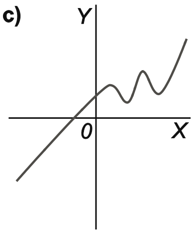
a)



b)



c)



a) Grado 3 y coeficiente principal positivo

b) Grado 4 y coeficiente principal positivo

c) Grado 5 y coeficiente principal positivo

12. Escribe una función polinómica de tercer grado, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $b \neq 0$ sin extremos relativos.

Sirve cualquier función de tercer grado $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $b \neq 0$ y tal que su derivada $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ no tenga raíces reales o tenga una raíz real doble, es decir, tal que $4b^2 - 12ac \leq 0$. Por ejemplo, $f(x) = x^3 + x^2 + x$.

13. Escribe una función polinómica de tercer grado que tenga un máximo y un mínimo relativos.

Sirve cualquier función de tercer grado $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que su derivada $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ tenga dos raíces reales, es decir, tal que $4b^2 - 12ac > 0$. Por ejemplo, $f(x) = x^3 + x^2$.

14. ¿Es posible encontrar una función polinómica de tercer grado que no tenga ningún punto de inflexión?

No, la segunda derivada de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es $f''(x) = 6ax + 2b$, que cambia se signo en $x = -\dfrac{b}{3a}$, por lo que la función tiene un punto de inflexión.

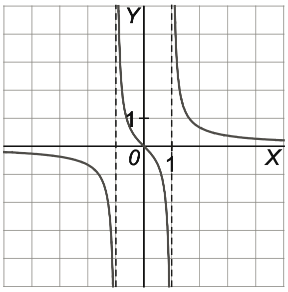
15. Ejercicio resuelto.

16. Realiza un estudio de estas funciones racionales.

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ **e)** $f(x)=\dfrac{x^4-2x^2}{x^2-1}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-9}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-1}$ **f)** $f(x)=\dfrac{9x^2}{x^2+x-2}$

a) Dominio y continuidad



El denominador se anula si $x=-1$ o $x=1$, así, $D(f)=\mathbb{R}-\{-1, 1\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)=0\Rightarrow(0, 0)$

Eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0, 0)$

Signo: La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es positiva o negativa.

	$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a $+\infty$
$x+1$	−	+	+	+
x	−	−	+	+
$x-1$	−	−	−	+
$f(x)$	−	+	−	+

Simetría

$f(-x)=-f(x)\Rightarrow$ la función es impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$, la recta $x=-1$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$, la recta $x=1$ es una asíntota vertical.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, la recta $y=0$ es una asíntota horizontal.

Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=-\dfrac{1+x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$ es negativa para $x\in D(f)$, por lo que *f* es decreciente y no tiene extremos relativos.

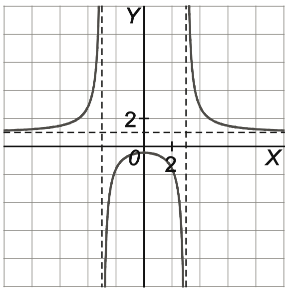
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3}=\dfrac{2x(x^2+3)}{(x+1)^3(x-1)^3}$ se anula si $x=0$.

En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba o hacia abajo. En(0, 0)hay un punto de inflexión.

	$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a $+\infty$
$(x+1)^3$	−	+	+	+
x	−	−	+	+
$(x-1)^3$	−	−	−	+
$f''(x)$	−	+	−	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

b) Dominio y continuidad



El denominador se anula si $x=-3$ o $x=3$, así, $D(f)=\mathbb{R}-\{-3, 3\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)=-\dfrac{4}{9}\Rightarrow\left(0, -\dfrac{4}{9}\right)$

Eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow x^2+4=0$ no tiene solución, la gráfica no corta al eje *X*.

Signo: La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es positiva o negativa.

	$-\infty$ a -3	-3 a 3	3 a $+\infty$
$x+3$	−	+	+
$x-3$	−	−	+
$f(x)$	+	−	+

Simetría

$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$, la recta $x=-3$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$, la recta $x=3$ es una asíntota vertical.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$, la recta $y=1$ es una asíntota horizontal.

Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \dfrac{-26x}{\left(x^2-9\right)^2}$ se anula si $x=0$, es positiva (*f* es creciente) en $(-\infty, -3)\cup(-3, 0)$ y es negativa (*f* es decreciente) en $(0, 3)\cup(3, +\infty)$.

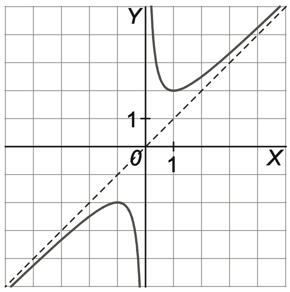
Por tanto, (0, 0) es un máximo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \dfrac{78x^2+234}{\left(x^2-9\right)^3}$ no se anula para ningún valor, es positiva (*f* cóncava hacia arriba) en $(-\infty, -3)\cup(3, +\infty)$ y es negativa (*f* cóncava hacia abajo) en $(-3, 3)$.

No hay puntos de inflexión.

c) Dominio y continuidad



El denominador se anula si $x=0$, así, $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)$ no está definido, la gráfica no corta al eje *Y*.

Eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2+1=0$ no tiene solución, e la gráfica no corta al eje *X*.

Signo: La función es negativa en $(-\infty, 0)$ y positiva en $(0, +\infty)$.

Simetría

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ la función es impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to -0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, la recta $x=0$ es una asíntota vertical.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$, por tanto, la recta $y=x$ es asíntota oblicua.

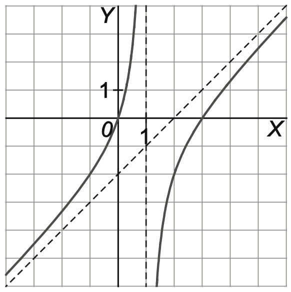
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$ se anula si $x=-1$ o $x=1$, es positiva (*f* es creciente) en $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$ y es negativa (*f* es decreciente) en $(-1, 0)\cup(0, 1)$. Por tanto, (–1, –2) es un máximo relativo y (1, 2) un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$ no se anula para ningún valor, es positiva (*f* cóncava hacia arriba) en $(0, +\infty)$ y es negativa (*f* cóncava hacia abajo) en $(-\infty, 0)$. No hay puntos de inflexión.

d) Dominio y continuidad



El denominador se anula si $x = 1$, así, $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 3 \Rightarrow (0, 0)$ y $(3, 0)$

Signo: La tabla determina los intervalos en los que f es positiva o negativa.

	$-\infty$ a 0	0 a 1	1 a 3	3 a $+\infty$
x	−	+	+	+
$x-1$	−	−	+	+
$x-3$	−	−	−	+
$f(x)$	−	+	−	+

Simetría

$f(-x)$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es ni par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas: $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x-1} = x - 2 - \dfrac{2}{x-1}$, por tanto, la recta $y = x - 2$ es asíntota oblicua.

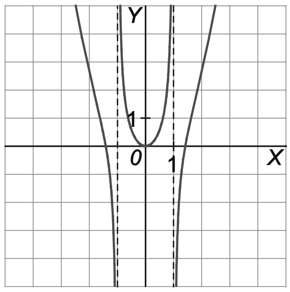
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$ es positiva para $x \in D(f)$, por lo que f es creciente y no tiene extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \dfrac{-4}{(x-1)^3}$ no se anula para ningún valor, es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(-\infty, 1)$ y es negativa (f cóncava hacia abajo) en $(1, +\infty)$. No hay puntos de inflexión.

e) Dominio y continuidad



El denominador se anula si $x = -1$ o $x = 1$, así, $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2} \Rightarrow \left(-\sqrt{2}, 0\right)$, $(0, 0)$ y $\left(\sqrt{2}, 0\right)$

Signo: La tabla etermina los intervalos en los que f es positiva o negativa.

	$-\infty$ a $-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$ a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$ a $+\infty$
$x+\sqrt{2}$	−	+	+	+	+	+
$x+1$	−	−	+	+	+	+
$x-1$	−	−	−	−	+	+
$x+\sqrt{2}$	−	−	−	−	−	+
$f(x)$	+	−	+	+	−	+

Simetría

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas: No tiene porque no cumple la condición de los grados.

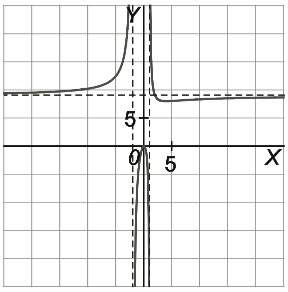
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{2x\left(x^4-2x^2+2\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=0\Rightarrow x=0$. Es positiva ($f$ es creciente) en $(0,1)\cup(1,+\infty)$ y es negativa (f es decreciente) en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$.Por tanto, (0, 0) es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{2x^6-6x^4-4}{(x^2-1)^3}$, no podemos determinar con exactitud cuando se anula f'', por lo que no se puede determinar de manera rigurosa la curvatura ni los puntos de inflexión.

f) Dominio y continuidad



El denominador se anula si $x=-2$ o $x=1$, así, $D(f)=\mathbb{R}-\{-2,1\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=0\Rightarrow(0,0)$ Eje X: $f(x)=0\Rightarrow 9x^2=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,0)$

Signo: La tabla determina los intervalos en los que f es positiva o negativa.

	$-\infty$ a -2	-2 a 0	0 a 1	1 a $+\infty$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Simetría

$f(-x)\neq f(x)$ y $f(-x)\neq -f(x)$ la función no es ni par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=-\infty$, la recta $x=-2$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$, la recta $x=1$

Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=9$, la recta $y=9$

Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{9x(x-4)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$ se anula si $x=0$ o $x=4$.

	$-\infty$ a -2	-2 a 0	0 a 1	1 a 4	4 a $+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↗	↘	↘	↗

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento. (0, 0) es un máximo relativo y (4, 8) un mínimo relativo.

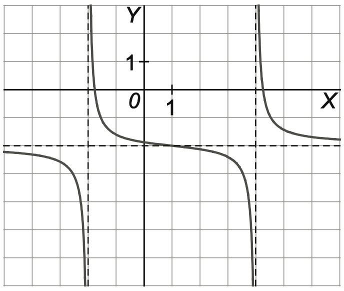
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{-18x^3+108x^2+72}{(x^2+x-2)^3}$, no se puede determinar con exactitud cuando se anula, por lo que no se puede determinar de manera rigurosa la curvatura ni los puntos de inflexión.

17. Representa una función racional que cumpla que:

- **Sus asíntotas sean las rectas $x=-2$, $x=4$ e $y=-2$.**
- **Su derivada no se anule nunca y sea negativa en todos los puntos en que está definida.**

¿Cuántas veces se anula una función con estas propiedades?



Comenzamos dibujando las asíntotas y después trazamos una función decreciente que se pegue a ellas.

La función debe cortar exactamente dos veces al eje de abscisas luego la función se anula dos veces.

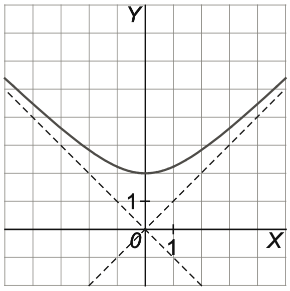
18 y 19. Ejercicios resueltos.

20. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones radicales realizando antes el estudio completo de las mismas.

a) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ **b)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

a) Dominio y continuidad

$D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2+4\geq 0\}=\mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=2\Rightarrow(0,\ 2)$; Eje$X$: $f(x)=0\Rightarrow x^2+4=0$, no tiene solución real, no corta al eje X.

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría

$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: No tiene. Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas: en $+\infty$: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}=1$ y $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{\sqrt{x^2+4}+x}=0$

Por tanto, $y=x$ es asíntota oblicua y como la función es par, también $y=-x$ es asíntota oblicua.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ se anula si $x=0$, es positiva (f creciente) si $x>0$ y negativa (f decreciente) si $x<0$.

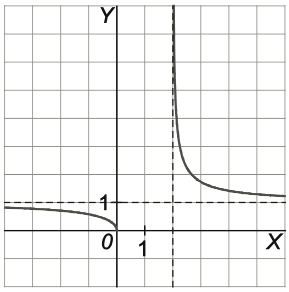
(0, 2) es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$ es siempre positiva en el dominio de f, así que la función es cóncava hacia arriba.

b) Dominio y continuidad

$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{x}{x-2}\geq 0\right\}=(-\infty,\ 0]\cup(2,\ +\infty)$. Es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje$Y$: $f(0)=0\Rightarrow(0,\ 0)$ Eje X: $f(x)=0\Rightarrow\dfrac{x}{x-2}=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,\ 0)$

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty\Rightarrow x=2$. Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1\Rightarrow y=1$. Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=-\dfrac{1}{(x-2)^2\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}}<0$, por lo que f es decreciente en su dominio y no tiene extremos relativos.

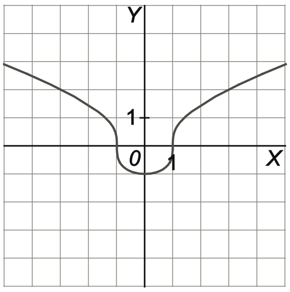
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{(2x-1)}{x(x-2)^3\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}}$ es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(2,\ +\infty)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(-\infty,\ 0)$. No hay puntos de inflexión.

21. Estudia las funciones radicales siguientes y dibuja sus gráficas.

a) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ **b)** $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x-2}}$

a) Dominio y continuidad



$D(f)=\mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=-1\Rightarrow(0,-1)$. Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow(-1,0)$ y $(1,0)$

Signo: f es positiva en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y negativa en $(-1,1)$.

Simetría: $f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: No tiene. Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x^3}}=0$ y, de igual manera, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

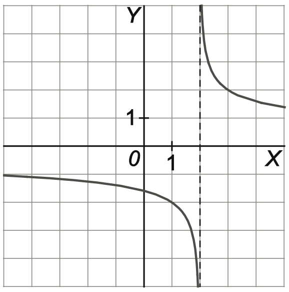
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{2x\sqrt[3]{x^2-1}}{3(x^2-1)}$, como $\sqrt[3]{x^2-1}$ y x^2-1 tienen el mismo signo para cualquier valor de x, f' se anula si $x=0$, es positiva (f creciente) en $(0,+\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-\infty,0)$. $(0, 0)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{(-2x^2-6)\sqrt[3]{x^2-1}}{9(x^2-1)^2}$ es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(-1,1)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Aunque f'' no está definida en $x=-1$ y $x=1$, $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, hay puntos de inflexión.

b) Dominio y continuidad



$D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=\dfrac{2}{\sqrt[3]{-2}}=-\sqrt[3]{4}\Rightarrow\left(0,-\sqrt[3]{4}\right)\simeq(0;-1{,}59)$

Eje X: $f(x)=0$ no tiene solución, por tanto, la función no corta el eje X.

Signo: f es positiva en $(2,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,2)$.

Simetría: La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty\Rightarrow x=2$. Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$.

Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{-2}{3(x-2)\sqrt[3]{x-2}}<0$ si $x\neq2$, por lo que f es decreciente en su dominio y no tiene extremos relativos.

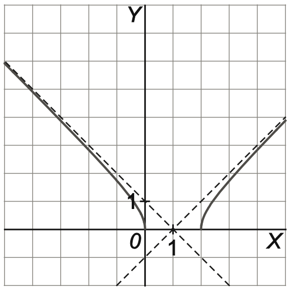
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{8}{9(x-2)^2\sqrt[3]{x-2}}$ es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(2,+\infty)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(-\infty,2)$. No hay puntos de inflexión.

22. Realiza el estudio completo y representa:

a) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ **b)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x}}$

a) Dominio y continuidad



$D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2-2x\geq 0\}=(-\infty,\,0]\cup[2,+\infty)$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=0\Rightarrow(0,\,0)$ Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x=0,\ x=2\Rightarrow(0,\,0)$ y $(2,\,0)$

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: No tiene. Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas:

En $+\infty$: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x^2}}=1$ y

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)}{\sqrt{x^2-2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}+x}=\frac{-2}{2}=-1.$$

Por tanto, $y=x-1$ es asíntota oblicua.

En $-\infty$: $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{-x}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+2x}{x^2}}=-1$ y

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=1$$

Por tanto, $y=-x+1$ es asíntota oblicua.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

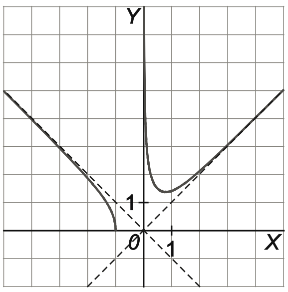
$f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ es positiva (f creciente) en $(2,+\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-\infty,\,0)$.

No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{-1}{x(x-2)\sqrt{x^2-2x}}$ es negativa en $D(f)$,la función es cóncava hacia abajo y no tiene puntos de inflexión.

b) Dominio y continuidad



$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}: \dfrac{x^3+1}{x}\geq 0\right\}=(-\infty,\,-1]\cup(0,+\infty)$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definido, la función no corta al eje Y.

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow\dfrac{x^3+1}{x}=0\Rightarrow x^3=-1\Rightarrow x=-1\Rightarrow(-1,\,0)$

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 0$. Horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas:

En $+\infty$: $m = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3+1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x^3+1}{x^3}} = 1$ y

$$n = \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3+1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x^3+1}{x}} - x\right)\left(\sqrt{\frac{x^3+1}{x}} + x\right)}{\sqrt{\frac{x^3+1}{x}} + x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x\left(\sqrt{\frac{x^3+1}{x}} + x\right)} = 0$$

Por tanto, $y = x$ es asíntota oblicua.

En $-\infty$: $m = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3+1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{-x^3+1}{-x}}}{-x} = -\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x^3-1}{x^3}} = -1$ y

$$n = \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3+1}{x}} + x\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{\frac{-x^3+1}{-x}} - x\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} - x\right)\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} + x\right)}{\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} + x} = 0$$

Por tanto, $y = -x$ es asíntota oblicua.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \dfrac{2x^3-1}{2x^2\sqrt{\frac{x^3+1}{x}}} = 0$ si $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2} = x_1$ es positiva (f creciente) en $(x_1, +\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-\infty, -1) \cup (0, x_1)$. Por tanto, el punto $(x_1, f(x_1)) \simeq (0{,}79; 1{,}37)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

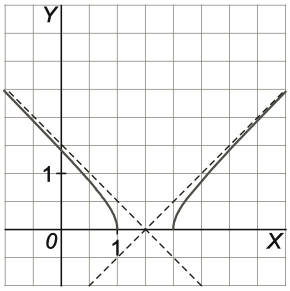
$f''(x) = \dfrac{3(4x^3+1)}{4x^3(x^3+1)\sqrt{\frac{x^3+1}{x}}}$ es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(0, +\infty)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(-\infty, -1)$. No hay puntos de inflexión.

23. Realiza un estudio completo de las siguientes funciones radicales y dibuja sus gráficas.

a) $f(x)=\sqrt{(x-2)(x-1)}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

a) Dominio y continuidad

$D(f)=\{x\in\mathbb{R}:(x-2)(x-1)\geq 0\}=(-\infty,\,1]\cup[2,\,+\infty)$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=\sqrt{2}\Rightarrow\left(0,\,\sqrt{2}\right)$. Eje X: $f(x)=0\Rightarrow(x-2)(x-1)=0\Rightarrow(1,0)$ y $(2,0)$

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría: La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: No tiene.Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas:

En $+\infty$: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x}=1$ y $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)=-\dfrac{3}{2}$, $y=x-\dfrac{3}{2}$ es asíntota oblicua.

En $-\infty$: $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x}=-1$ y $n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}+x\right)=\dfrac{3}{2}$, $y=-x+\dfrac{3}{2}$ es asíntota oblicua.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

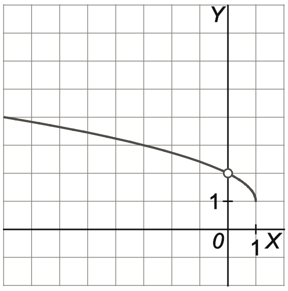
$f'(x)=\dfrac{2x-3}{2\sqrt{(x-2)(x-1)}}$ es positiva (f creciente) en $(2,\,+\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-\infty,\,1)$. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{-1}{4\left(\sqrt{(x-2)(x-1)}\right)^3}$ es negativa en $D(f)$, la función es cóncava hacia abajo y no tiene puntos de inflexión.

b) Dominio y continuidad

$D(f)=\{x\in\mathbb{R}:1-x\geq 0,\,1-x\neq 1\}=(-\infty,\,1]-\{0\}$. La función es continua en su dominio, en $x=0$ tiene una discontinuidad evitable.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje Y: $f(0)$ no está definido, la función no corta al eje Y.

Cortes con el eje X: $f(x)=0$ no tiene solución, la función no corta al eje X.

Signo: f nunca es negativa en su dominio.

Simetría: La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: El único punto donde podría tener una asíntota vertical es $x=0$, pero tenemos

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}=2$ por lo que en este punto hay una discontinuidad evitable.

Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}=+\infty$

Oblicuas: No tiene, ya que $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}=0$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{-2\sqrt{1-x}-x+2}{2(x-2)\sqrt{1-x}-4x+4}$, el numerador se anula si $x=0$, pero f' no está definida en este valor, ya que el denominador también se anula. La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

	$-\infty$ 0	0 1
$f'(x)$	–	–
$f(x)$	↘	↘

Observemos que f es decreciente su dominio y no tiene extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

Debido a la complejidad de su estudio no calcularemos f'' (resulta ser negativa en el dominio de f).

Aún sin el estudio de la curvatura, disponemos que información suficiente para esbozar la gráfica de f.

24. Ejercicio resuelto.

25. Determina el dominio de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas.

a) $f(x)=a^{\sqrt{x^2-1}}$

b) $f(x)=a^{\frac{x}{x+2}}$

c) $f(x)=a^{\sqrt[3]{\frac{x}{x^2+1}}}$

d) $f(x)=\log_a\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

e) $f(x)=\log_a\sqrt[3]{1-x^2}$

f) $f(x)=\log_a\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}\right)$

a) La función está definida si $x^2-1\geq 0$. Así pues, $D(f)=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

b) La función está definida si $x+2\neq 0$. Así pues, $D(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$.

c) La función está definida para cualquier valor de x. Así pues, $D(f)=\mathbb{R}$.

d) La función está definida si $\dfrac{x-1}{x+1}>0$. Así pues, $D(f)=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

e) La función está definida si $1-x^2>0$. Así pues, $D(f)=(-1,1)$.

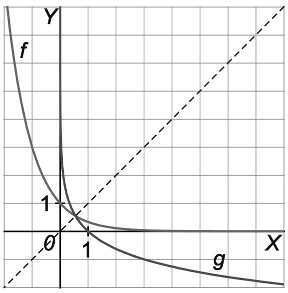
f) La función está definida si $\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}>0$. Como se toma la raíz positiva, la función está definida si $x>0$ y $1-x>0$. Así pues, $D(f)=(0,1)$.

26. En cada caso, representa cada par de funciones.

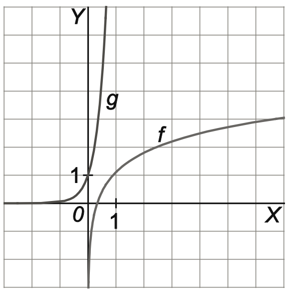
a) $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ y $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}x$

b) $f(x)=\ln 3x$ y $g(x)=e^{3x}$

a)



b)

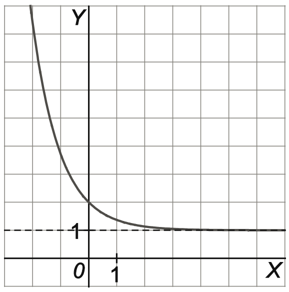


27. Realiza un estudio completo de las siguientes funciones y dibuja sus gráficas:

a) $f(x) = e^{-x} + 1$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$ **e)** $f(x) = \ln(x+1)$ **g)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

b) $f(x) = x^2 e^x$ **d)** $f(x) = e^{-x^2}$ **f)** $f(x) = \ln(x^2-1)$ **h)** $f(x) = x \ln x$

a) Dominio y continuidad



$D(f) = \mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = 2 \Rightarrow (0,\ 2)$

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow e^{-x} + 1 = 0 \Rightarrow e^{-x} = -1$, no tiene solución, no corta el eje X.

Signo: La función es siempre positiva.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: No tiene.Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, la recta $y = 1$ es asíntota horizontal en $+\infty$.

Oblicuas: No tiene.

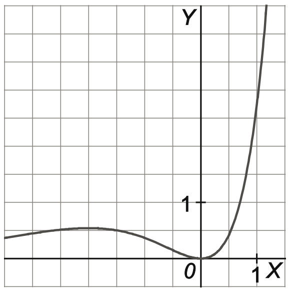
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = -e^{-x}$ es negativa (f decreciente) en $\mathbb{R}$. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = e^{-x}$ es positiva ($f$cóncava hacia arriba) en $\mathbb{R}$. No hay puntos de inflexión.

b) Dominio y continuidad



$D(f) = \mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

EjY: $f(0) = 0 \Rightarrow (0,\ 0)$. Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 e^x = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,\ 0)$

Signo: $f \geq 0$ en $\mathbb{R}$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: No tiene.Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal en $-\infty$.

Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

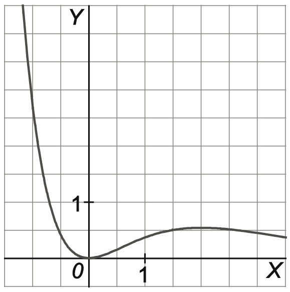
$f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$ se anula si $x = -2$ o $x = 0$, es positiva (f creciente) en $(-\infty,\ -2) \cup (0,\ +\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-2,\ 0)$. El punto $(-2,\ 4e^{-2}) \simeq (-2;\ 0{,}54)$ es un máximo relativo y (0, 0) es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$ se anula si $x = -2-\sqrt{2}$ o $x = -2+\sqrt{2}$, es positiva ($f$cóncava hacia arriba) en $\left(-\infty,\ -2-\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+\sqrt{2},\ +\infty\right)$ y negativa ($f$cóncava hacia abajo)en $\left(-2-\sqrt{2},\ -2+\sqrt{2}\right)$.

Por tanto, los puntos $\left(-2-\sqrt{2},\ f\left(-2-\sqrt{2}\right)\right) \simeq (-3{,}41;\ 0{,}38)$ y $\left(-2+\sqrt{2},\ f\left(-2+\sqrt{2}\right)\right) \simeq (-0{,}59;\ 0{,}19)$ son puntos de inflexión.

c) No es necesario hacer el estudio de la función si observamos que $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{e^{-x}}=x^2e^x$ es la función del apartado anterior, por lo que la gráfica de f es la simétrica respecto del eje Y de la gráfica del apartado anterior. Si se quisiera resolver, se haría de manera análoga alapartado anterior.



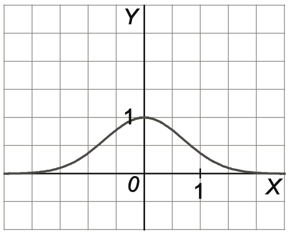
d) Dominio y continuidad

$D(f)=\mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=1\Rightarrow(0,\ 1)$. Eje X: $f(x)=0\Rightarrow e^{-x^2}=0$,no tiene solución, no corta el eje X.

Signo: La función es siempre positiva.



Simetría

$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: No tiene.Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$

Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=-2xe^{-x^2}=0$ si $x=0$, es positiva (f creciente) en $(-\infty,\ 0)$ y negativa (f decreciente) en $(0,\ +\infty)$.

Por tanto, el punto (0, 1) es un máximo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

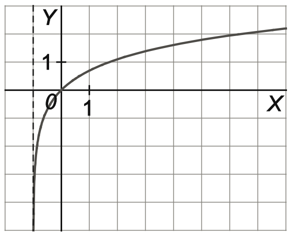
$f''(x)=\left(4x^2-2\right)e^{-x^2}=0$ si $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ o $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, es positiva ($f$cóncava hacia arriba) en $\left(-\infty,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$

y negativa ($f$cóncava hacia abajo)en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Por tanto, los puntos $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\simeq(-0{,}71;\ 0{,}61)$ y $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\simeq(0{,}71;\ 0{,}61)$ son puntos de inflexión.

e) Dominio y continuidad

$D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x+1>0\}=(-1,\ +\infty)$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=0\Rightarrow(0,\ 0)$. Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x+1=1\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,\ 0)$

Signo: f es negativa en $x\in(-1{,}0)$ y positiva en $x\in(0{,}+\infty)$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: La recta $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty\Rightarrow x=-1$ .Horizontales: No tiene. Oblicuas: No tiene.

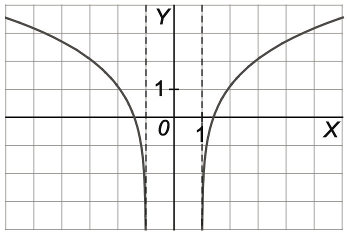
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$ es positiva (f creciente) en el dominio de f. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}$ es negativa ($f$cóncava hacia abajo) en el dominio de f. No hay puntos de inflexión.

f) Dominio y continuidad



$D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2-1>0\}=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)$ no está definida, la función no corta el eje *Y*.

Eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow x^2-1=1\Rightarrow x=-\sqrt{2},\ x=\sqrt{2}\Rightarrow\left(-\sqrt{2},0\right)$ y $\left(\sqrt{2},0\right)$

Signo: La tabla determina los intervalos en que *f* es positiva o negativa.

	$-\infty$ — $-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$ — -1	-1 — 1	1 — $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$ — $+\infty$
$f(x)$	$+$	$-$	$\nexists$	$-$	$+$

Simetría

$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: Las rectas $x=-1$ e $x=1$ son asíntotas verticales, ya que $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$.

Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Oblicuas: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

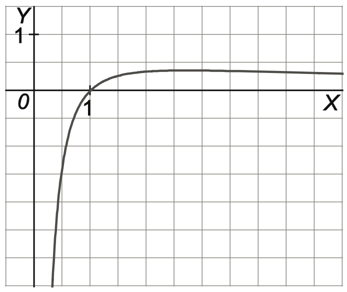
$f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$ es positiva (*f* creciente) en $(1,+\infty)$ y negativa (*f* decreciente) en $(-\infty,-1)$. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\frac{-2x^2-2}{\left(x^2-1\right)^2}$ es negativa (*f* cóncava hacia abajo) en el dominio de *f*. No hay puntos de inflexión.

g) Dominio y continuidad

$D(f)=(0,+\infty)$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)$ no está definida, la función no corta el eje *Y*.

Eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow\ln x=0\Rightarrow x=1\Rightarrow(1,0)$

Signo: *f* es negativa en $x\in(0,1)$ y positiva en $x\in(1,+\infty)$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty\Rightarrow x=0$. Horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\Rightarrow y=0$. Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow x=e$. La tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es creciente o decreciente. $\left(e,e^{-1}\right)$ es un máximo relativo.

	0 — e	e — $+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

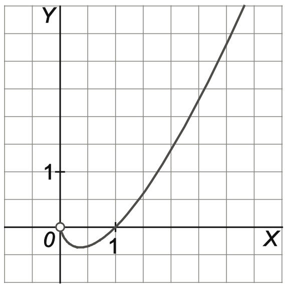
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}=0\Rightarrow2\ln x-3=0\Rightarrow\ln x=\frac{3}{2}\Rightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$. La tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba o hacia abajo o decreciente. El punto $\left(e^{\frac{3}{2}},\frac{3e^{-\frac{3}{2}}}{2}\right)$ es un punto de inflexión.

	0 — $e^{\frac{3}{2}}$	$e^{\frac{3}{2}}$ — $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

h) Dominio y continuidad

$D(f) = (0, +\infty)$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definida, la función no corta el eje Y.

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0)$

Signo: f es negativa en $x \in (0, 1)$ y positiva en $x \in (1, +\infty)$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, no hay asíntotas verticales.

Horizontales: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, no hay asíntotas horizontales.

Oblicuas: No hay asíntotas oblicuas, ya que $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 1 + \ln x$ se anula si $x = e^{-1}$. La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

	0 — e^{-1}	e^{-1} — $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

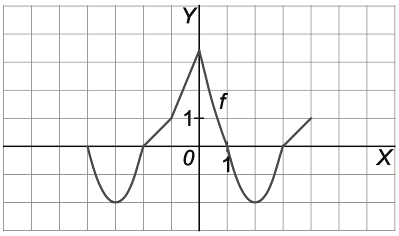
Además, el punto $(e^{-1}, -e^{-1})$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \frac{1}{x}$ es positiva (f cóncava hacia arriba) en el dominio de f. No hay puntos de inflexión.

28. Ejercicio interactivo.

29. La siguiente gráfica corresponde a una función periódica de período 5 en el intervalo [–4, 4].



a) ¿En qué puntos del intervalo [–10, 15] cortará f al eje X?

b) Estudia el signo de la función en el intervalo [–6, 8].

c) Indica los máximos y mínimos relativos de la función en el intervalo [10, 20].

a) La función corta al eje X en los puntos de abscisa $x = 1 + 5k$ y $x = 3 + 5k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Por tanto, en el intervalo [–10, 15], la función corta al eje X en los puntos de abscisa $x = -9$, $x = -7$, $x = -4$, $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$, $x = 6$, $x = 8$, $x = 11$ y $x = 13$.

b) En ese intervalo la función es positiva en $[-6, -4) \cup (-2, 1) \cup (3, 6)$ y negativa en $(-4, -2) \cup (1, 3) \cup (6, 8)$.

c) Tiene máximos relativos en $A(10, 3)$, $B(15, 3)$ y $C(20, 3)$ y mínimos relativos en $D(12, -2)$ y $E(17, -2)$.

30. Estudia la periodicidad de estas funciones y dibuja sus gráficas (recuerda que [*x*] significa “parte entera de *x*”).

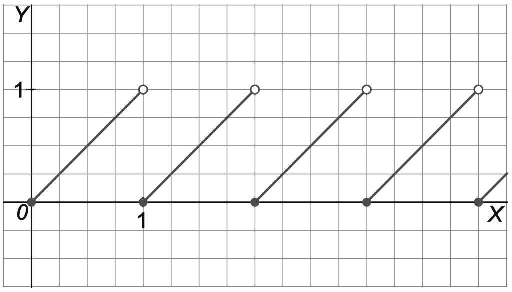
a) $f(x) = x - [x]$ para $x \geq 0$

b) $f(x) =$ ”parte decimal de *x*” para $x \geq 0$

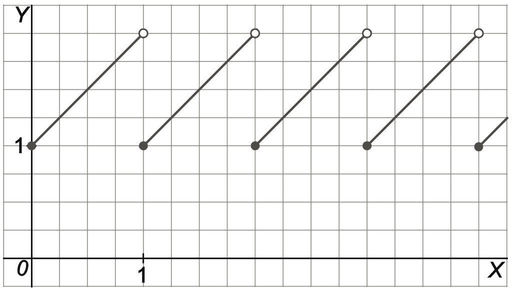
c) $f(x) = x + 1 - [x]$ para $x \geq 0$

d) $f(x) = x -$ ”parte decimal de *x*” para $x \geq 0$

a) La función tiene período 1.

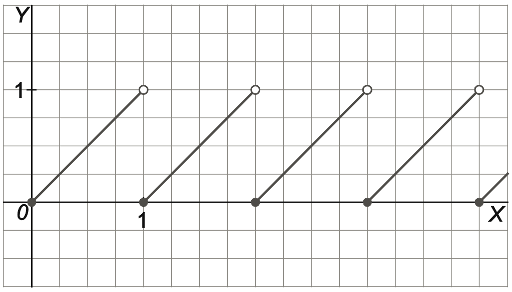


c) La función tiene período 1.

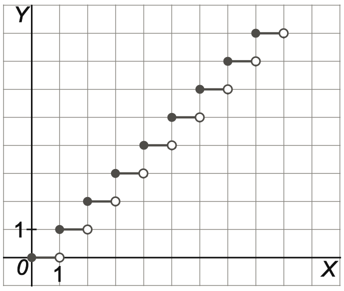


b) Es la misma función del apartado anterior.

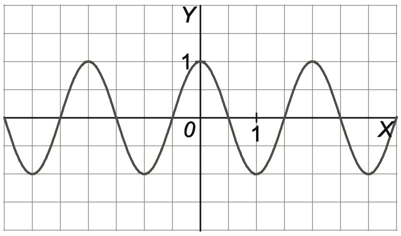
La función tiene período 1.



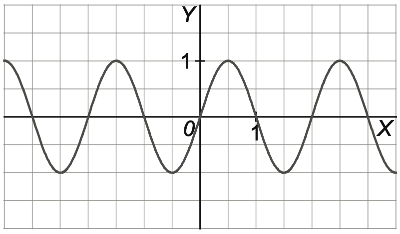
d) La función no es periódica.



31. Representa la gráfica de una función periódica y par.



32. Representa la gráfica de una función impar y periódica.



33. Demuestra que si una función es periódica, de período *T*, se verifica que $f(x+3T) = f(x)$.

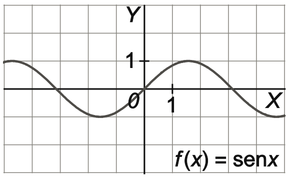
$$f(x+3T) = f((x+2T)+T) = f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x)$$

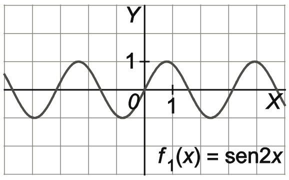
34. Ejercicio resuelto.

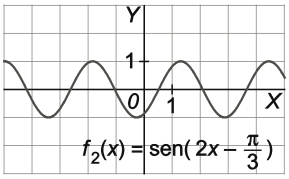
35. Dibuja la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y a partir de ella, dibuja la gráfica de: $g(x) = 3\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

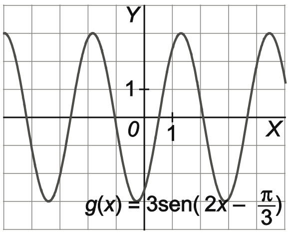
$$f(x) = \operatorname{sen} x \rightarrow \begin{pmatrix}\text{se comprime}\\ \text{horizontalmente}\end{pmatrix} \rightarrow f_1(x) = \operatorname{sen} 2x \rightarrow \begin{pmatrix}\text{se traslada}\\ \text{a la derecha}\end{pmatrix} \rightarrow f_2(x) = \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \begin{pmatrix}\text{se dilata}\\ \text{verticalmente}\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow g(x) = 3\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$







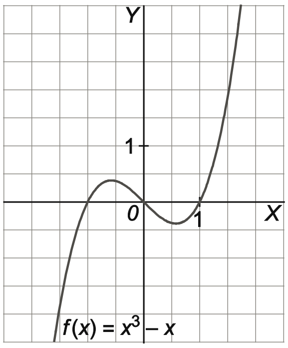


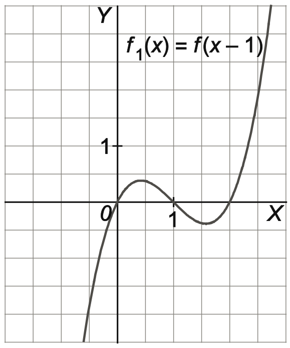
36. A partir de la gráfica de $f(x) = x^3 - x$, dibuja la gráfica de $g(x) = 3 - |f(x-1)|$.

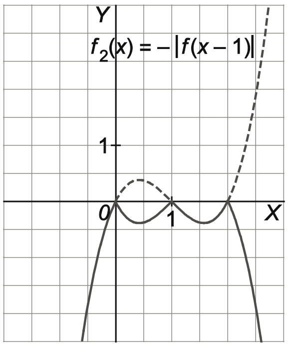
En primer lugar trasladamos la gráfica de $f(x)$ una unidad a la derecha para obtener la gráfica de $f_1(x) = f(x-1)$.

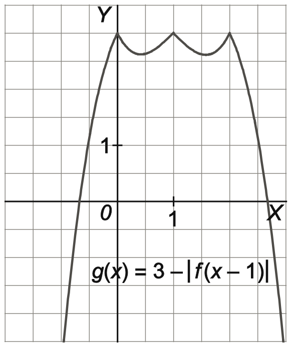
Después reflejamos respecto del eje Xlas zonas en que la gráfica de $f_1(x)$ está por encima del eje X para obtener la gráfica de $f_2(x) = -|f_1(x)| = -|f(x-1)|$.

Finalmente, trasladamos la gráfica de $f_2(x)$ tres unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $g(x) = 3 + f_2(x) = 3 - |f(x-1)|$.









37. Ejercicio interactivo.

38 a 48. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Puntos de corte con los ejes y signo de *f*

49. Para las siguientes funciones, determina el dominio, calcula los puntos de corte con los ejes y estudia el signo según los valores que tome la variable independiente a los largo del dominio. Esboza la gráfica de la función.

a) $f(x) = -x^2 + 5x + 14$

b) $f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$

c) $f(x) = (x^2+2x)(x-1)^2(x-3)$

d) $f(x) = x(x^2+2)(x^2-1)$

e) $f(x) = \dfrac{x(x^2-9)}{(x+1)(x-1)}$

f) $f(x) = \dfrac{(x-1)(x^2+9)}{3(x^2+1)}$

g) $f(x) = \dfrac{x(x-5)^2}{(x+1)^2(x-1)}$

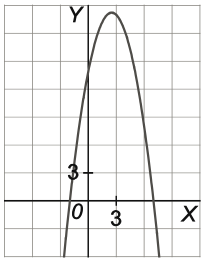
h) $f(x) = \dfrac{(x^2-9)x}{x+3}$

a) Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$

Cortes: Eje Y: $f(0) = 14 \Rightarrow A(0, 14)$

Eje$X$: $f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 5x + 14 = 0 \Rightarrow x = -2,\ x = 7 \Rightarrow B(-2, 0)$ y $C(7, 0)$

Signo: $f(x) = -(x+2)(x-7) \Rightarrow f$ es positiva en $(-2, 7)$ y negativa en $(-\infty, -2) \cup (7, +\infty)$.

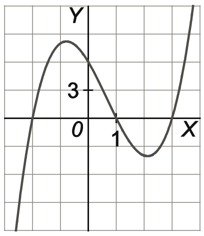


b) Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$

Cortes: Eje Y: $f(0) = 6 \Rightarrow A(0, 6)$

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -2,\ x = 1,\ x = 3 \Rightarrow B(-2,\ 0),\ C(1,\ 0)$ y $D(3, 0)$

Signo: $f(x) = (x+2)(x-1)(x-3) \Rightarrow$ positiva en $(-2, 1) \cup (3, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, -2) \cup (1, 3)$



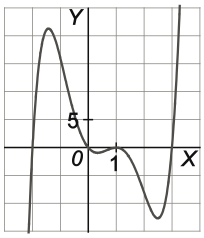
c) Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$

Cortes: Eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow A(0, 0)$

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow (x^2+2x)(x-1)^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = -2,\ x = 0,\ x = 1,\ x = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(-2, 0),\ A(0, 0),\ C(1, 0)$ y $D(3, 0)$

Signo: $f(x) = x(x+2)(x-1)^2(x-3) \Rightarrow f$ es positiva en $(-2, 0) \cup (3, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, 3)$.

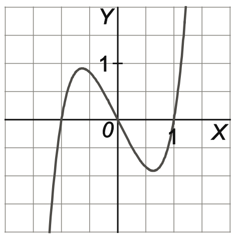


d) Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$

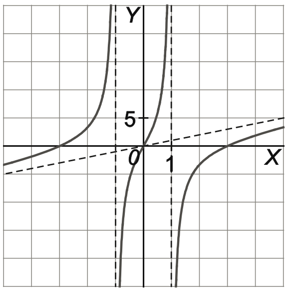
Cortes: Eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow A(0, 0)$

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x(x^2+2)(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 0,\ x = 1 \Rightarrow B(-1,\ 0),\ A(0,\ 0)$ y $C(1, 0)$

Signo: $f(x) = x(x^2+2)(x+1)(x-1) \Rightarrow f$ es positiva en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.



e) Dominio: $D(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$



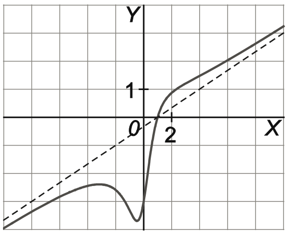
Cortes: Eje Y: $f(0)=0 \Rightarrow A(0,0)$

Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow x\left(x^2-9\right)=0 \Rightarrow x=-3,\ x=0,\ x=3 \Rightarrow B(-3,0),\ A(0,0)$ y $C(3,0)$

Signo: $f(x)=\dfrac{x(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow f$ es positiva en $(-3,-1)\cup(0,1)\cup(3,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,-3)\cup(-1,0)\cup(1,3)$.

Para esbozar la gráfica basta observar que la función es impar, las rectas $x=-1$, $x=1$ son asíntotas verticales y la recta $y=x$ es asíntota oblicua.

f) Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$



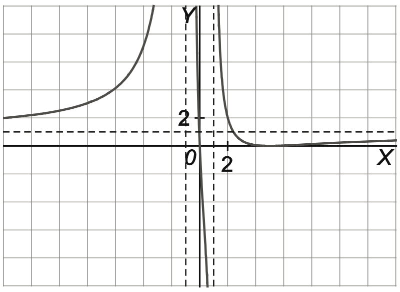
Cortes: Eje Y: $f(0)=-3 \Rightarrow A(0,-3)$

Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow (x-1)\left(x^2+9\right)=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow B(1,0)$

Signo: $f(x)=\dfrac{(x-1)\left(x^2+9\right)}{3\left(x^2+1\right)} \Rightarrow f$ es positiva en $(1,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,1)$.

Para esbozar la gráfica basta observar que la recta $y=\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{3}$ es asíntota oblicua.

g) Dominio: $D(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$



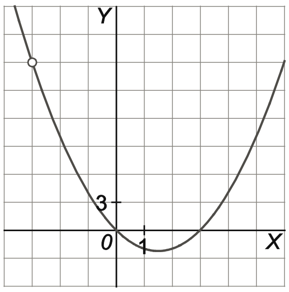
Cortes: Eje Y: $f(0)=0 \Rightarrow A(0,0)$

Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow x(x-5)^2=0 \Rightarrow x=0,\ x=5 \Rightarrow A(0,0)$ y $B(5,0)$

Signo: $f(x)=\dfrac{x(x-5)^2}{(x+1)^2(x-1)} \Rightarrow f$ es negativa en $(0,1)$ y positiva en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(1,5)\cup(5,+\infty)$.

Para esbozar la gráfica basta observar que las rectas $x=-1$, $x=1$ son asíntotas verticales y la recta $y=1$ es asíntota horizontal.

h) Observemos que si $x\neq-3$ tenemos $f(x)=(x-3)x$, por lo que la gráfica de f es una parábola a la que se le quita el punto $(-3,18)$.



Dominio: $D(f)=\mathbb{R}-\{-3\}$

Cortes: Eje Y: $f(0)=0 \Rightarrow A(0,0)$

Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow \left(x^2-9\right)x=0 \Rightarrow x=-3$ (no válido), $x=0,\ x=3 \Rightarrow$ $A(0,0)$ y $B(3,0)$

Signo: $f(x)=\dfrac{(x+3)(x-3)x}{x+3}=x(x-3)$ si $x\neq-3$, f es positiva en $(-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(3,+\infty)$ y negativa en $(0,3)$.

50. Calcula los puntos de corte con los ejes de la función $f(x)=x^2+2x+2+\dfrac{10}{x-3}$. Halla su dominio y estudia su signo, según los valores que tome la variable independiente a los largo del dominio.

[Nota: escribe la función dada como cociente de dos polinomios]

$$f(x)=x^2+2x+2+\frac{10}{x-3}=\frac{(x-3)(x^2+2x+2)+10}{x-3}=\frac{x^3-x^2-4x+4}{x-3}=\frac{(x-1)(x+2)(x-2)}{x-3}$$

Dominio: $D(f)=\mathbb{R}-\{3\}$

Cortes: Eje Y: $f(0)=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow A\left(0,-\dfrac{4}{3}\right)$

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow(x-1)(x+2)(x-2)=0\Rightarrow x=-2,\ x=1,\ x=2\Rightarrow B(-2,0),\ C(1,0)$ y $D(2,0)$

Signo: f es positiva en $(-\infty,-2)\cup(1,2)\cup(3,+\infty)$ y negativa en $(-2,1)\cup(2,3)$.

Simetría

51. Estudia si las siguientes funciones tienen simetría respecto del eje *Y* o respecto del origen de coordenadas.

a) $f(x)=\dfrac{1}{|x^2+1|}$

b) $f(x)=x(x-1)(x+1)$

c) $f(x)=x^2-3x$

d) $f(x)=x^2(x^2-1)(x^2+1)$

e) $f(x)=\dfrac{x^4+x}{2x+1}$

f) $f(x)=\dfrac{x^4(x^2-9)}{(x+1)(x-1)}$

g) $f(x)=x^2|x|$

h) $f(x)=\dfrac{x^3}{|x|-x^2}$

i) $f(x)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$

j) $f(x)=\cos\left(\dfrac{x^4+1}{x}\right)$

a) $f(-x)=\dfrac{1}{|(-x)^2+1|}=\dfrac{1}{|x^2+1|}=f(x)\Rightarrow$ la función es par, es decir, simétrica respecto del eje *Y*.

b) $f(-x)=-x(-x-1)(-x+1)=-x(x+1)(x-1)=-f(x)\Rightarrow$ la función es impar, es decir, simétrica respecto del origen de coordenadas.

c) $f(-x)=x^2+3x$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es par ni impar.

d) $f(-x)=x^2(x^2-1)(x^2+1)=f(x)\Rightarrow$ la función es par, es decir, simétrica respecto del eje *Y*.

e) $f(-x)=\dfrac{x^4-x}{-2x+1}$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es par ni impar.

f) $f(-x)=\dfrac{x^4(x^2-9)}{(-x+1)(-x-1)}=\dfrac{x^4(x^2-9)}{(x-1)(x+1)}=f(x)\Rightarrow$ la función es par, es decir, simétrica respecto del eje *Y*.

g) $f(-x)=x^2|x|=f(x)\Rightarrow$ la función es par, es decir, simétrica respecto del eje *Y*.

h) $f(-x)=\dfrac{-x^3}{|x|-x^2}=-f(x)\Rightarrow$ la función es impar, es decir, simétrica respecto del origen de coordenadas.

i) $f(-x)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{-x}{x^2+1}\right)=\operatorname{sen}\left(-\dfrac{x}{x^2+1}\right)=-\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)=-f(x)\Rightarrow$ la función es impar, es decir, simétrica respecto del origen de coordenadas.

j) $f(-x)=\cos\left(\dfrac{x^4+1}{-x}\right)=\cos\left(-\dfrac{x^4+1}{x}\right)=\cos\left(\dfrac{x^4+1}{x}\right)=f(x)\Rightarrow$ la función es par, es decir, simétrica respecto del eje *Y*.

Funciones polinómicas

52. Una parábola corta los ejes en los puntos (–1, 0), (5, 0) y (0, –10). ¿Cuál es su vértice?

Como una parábola es simétrica con respecto a la recta vertical que pasa por el vértice (el eje), la abscisa del vértice será el punto medio entre las abscisas de los puntos de corte con el eje *X*, así, $x_V = \dfrac{5-1}{2} = 2$.

Por otro lado, la parábola es de la forma $f(x) = a(x+1)(x-5)$, con lo que $f(0) = -10 \Rightarrow -5a = -10 \Rightarrow a = 2$, es decir, la parábola es $f(x) = 2(x+1)(x-5) = 2x^2 - 8x - 10$ y la ordenada del vértice es $y_V = f(2) = -18$.

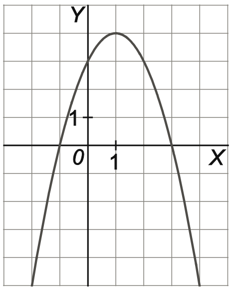
Por tanto, las coordenadas del vértice son $V = (2, -18)$.

53. Haz un estudio completo de las parábolas dadas por:

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

b) $f(x) = x^2 + 7x + 10$

a) Es una parábola cóncava hacia abajo $(\cap)$ con un máximo absoluto en su vértice $x_v = \dfrac{-2}{-2} = 1$ ($y_v = 4$) y eje de simetría la recta $x = 1$.

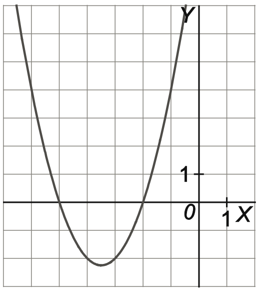


El punto de corte con el eje *Y* es (0, 3) y los puntos de corte con el eje *X* son (–1, 0) y (3, 0).

Haciendo una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–5	0	3	4	3	0	–5

b) La gráfica es una parábola cóncava hacia arriba $(\cup)$ con un mínimo absoluto en su vértice $x_v = -\dfrac{7}{2}$ ($y_v = -\dfrac{9}{4}$) y eje de simetría la recta $x = -\dfrac{7}{2}$.



El punto de corte con el eje *Y* es (0, 10) y con el eje *X* son (–5, 0) y (–2, 0).

Haciendo una tabla de valores:

x	–6	–5	–4	$-\frac{7}{2}$	–3	–2	–1
y	4	0	–2	$-\frac{9}{4}$	–2	0	4

54. Realiza un estudio completo de las siguientes funciones polinómicas y esboza sus gráficas.

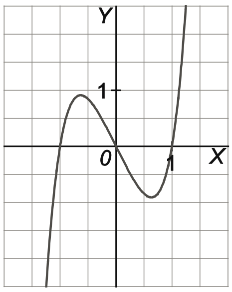
a) $f(x) = x(x^2+2)(x^2-1)$

b) $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x$

c) $f(x) = x^6 - 9x^4 - 16x^2 + 144$

d) $f(x) = (x+3)^2(x-2)^2$

a) Función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow x(x^2+2)(x^2-1) = x(x^2+2)(x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow$ (–1, 0), (0, 0) y (1, 0)

Signo: La tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es positiva o negativa.

	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
$x+1$	–	+	+	+
x	–	–	+	+
$x-1$	–	–	–	+
x^2+2	+	+	+	+
$f(x)$	–	+	–	+

Simetría

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ la función es impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 2$ se anula si $x = -\dfrac{\sqrt{10}}{5} = x_1$ o $x = \dfrac{\sqrt{10}}{5} = x_2$.

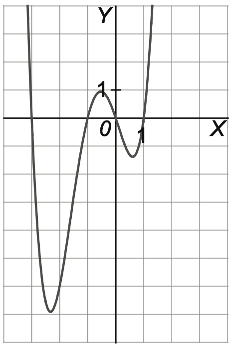
En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. En $(x_1, f(x_1)) \simeq (-0,63;\ 0,91)$ hay un máximo relativo y en $(x_2, f(x_2)) \simeq (0,63;\ -0,91)$ hay un mínimo relativo.

	$-\infty$ x_1	x_1 x_2	x_2 $+\infty$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 20x^3 + 6x$ se anula si $x = 0$, es positiva (f es cóncava hacia arriba) en $(0, +\infty)$ y negativa (f es cóncava hacia abajo) en $(-\infty, 0)$. El punto (0, 0) es un punto de inflexión.

b) Función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x = 0 \Rightarrow (x+3)(x+1)x(x-1) = 0 \Rightarrow (-3,\ 0),\ (-1,\ 0),$ $(0, 0)$ y $(1, 0)$

Signo: f es positiva en $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y negativa en $x \in (-3, -1) \cup (0, 1)$.

Simetría

La función no es ni par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

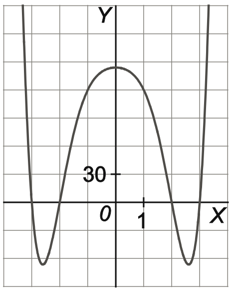
$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 2x - 3 = 0$ no tiene raíces enteras, no se puede determina con exactitud los extremos relativos ni los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ahora bien, hay como mucho tres extremos relativos. Además, como $f'(-3) = -24 < 0$, $f'(-1) = 4 > 0$, $f'(0) = -3 < 0$ y $f'(1) = 8 > 0$, habrá un mínimo relativo con abscisa $x = x_1 \in (-3, -1)$, un máximo relativo con abscisa $x = x_2 \in (-1, 0)$ y otro mínimo relativo con abscisa $x = x_3 \in (0, 1)$, siendo f creciente en $(x_1, x_2) \cup (x_3, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, x_1) \cup (x_2, x_3)$.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 12x^2 + 18x - 2 = 0$ si $x = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{105}}{12} = x_4$ o $x = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{105}}{12} = x_5$, es positiva ($f$ es cóncava hacia arriba) en $(-\infty, x_4) \cup (x_5, +\infty)$ y negativa (f es cóncava hacia abajo) en (x_4, x_5). Por tanto, los puntos $(x_4, f(x_4)) \simeq (-1,6;\ -3,52)$ y $(x_5, f(x_5)) \simeq (0,1;\ -0,32)$ son puntos de inflexión.

c) Función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = 144 \Rightarrow (0, 144)$

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)(x^2+4) = 0 \Rightarrow (-3, 0), (-2, 0), (2, 0)$ y $(3, 0)$

Signo: f es positiva en $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 2) \cup (3, +\infty)$ y negativa en $x \in (-3, -2) \cup (2, 3)$.

Simetría

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ la función es par.

Límites en el infinito

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 6x^5 - 36x^3 - 32x = x(6x^4 - 36x^2 - 32) = 0 \Rightarrow x = 0$,

$x = -\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{129}}{3}} = x_1$ y $x = \sqrt{\dfrac{9+\sqrt{129}}{3}} = x_2$.

	$-\infty$ — x_1	x_1 — 0	0 — x_2	x_2 — $+\infty$
$f'(x)$	–	+	–	+
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*. En $(x_1, f(x_1)) \simeq (-0{,}61; -66{,}53)$ y $(x_2, f(x_2)) \simeq (0{,}61; -66{,}53)$ hay sendos mínimos relativos y en (0, 0) hay un máximo relativo.

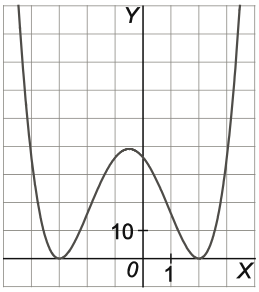
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 30x^4 - 108x^2 - 32 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{\dfrac{27+\sqrt{969}}{15}} = x_3$ y $x = \sqrt{\dfrac{27+\sqrt{969}}{15}} = x_4$.

En la tabla se determinan los intervalos donde *f* es cóncava hacia arriba o hacia abajo.En $(x_3, f(x_3)) \simeq (-1{,}97; 5{,}03)$ y $(x_4, f(x_4)) \simeq (1{,}97; 5{,}03)$ hay sendos puntos de inflexión.

	$-\infty$ — x_3	x_3 — x_4	x_4 — $+\infty$
$f''(x)$	+	–	+
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

d) Función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0) = 36 \Rightarrow (0, 36)$

Eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow (x+3)^2(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = -3,\ x = 2 \Rightarrow (-3, 0)$ y$(2, 0)$

Signo: *f* es positiva en $(-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$, nunca es negativa.

Simetría

La función no es par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 22x - 12$ se anula si $x = -3$, $x = -\dfrac{1}{2}$ o $x = 2$.

	$-\infty$ — -3	-3 — $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ — 2	2 — $+\infty$
$f'(x)$	–	+	–	+
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*. En (–3, 0) y (2, 0) hay sendos mínimos relativos y en $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{625}{16}\right) \simeq (-0{,}5; 39{,}06)$ hay un máximo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 12x^2 + 12x - 22 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3-5\sqrt{3}}{6} = x_1$ o $x = \dfrac{-3+5\sqrt{3}}{6} = x_2$

	$-\infty$ — x_1	x_1 — x_2	x_2 — $+\infty$
$f''(x)$	+	–	+
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

En la tabla se determinan los intervalos donde *f* es cóncava hacia arriba o hacia abajo. En $(x_1, f(x_1)) \simeq (-1{,}94; 17{,}36)$ y $(x_2, f(x_2)) \simeq (0{,}94; 17{,}36)$ hay sendos puntos de inflexión.

55. Esboza la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 36x + 5$

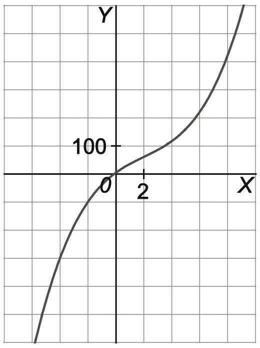
b) $f(x) = 9x^4 - 17x^3 - 46x^2 + 35x + 4$

c) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 12x + 5$

d) $f(x) = -4(x-1)^2(x-3)^2$

e) $f(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$

a) La ecuación $x^3 - 6x^2 + 36x + 5 = 0$ no es sencilla de resolver, ya que no tiene raíces enteras. Se estudia y esboza la gráfica de $g(x) = x^3 - 6x^2 + 36x$, obteniendo la gráfica de $f(x)$ trasladandor la de $g(x)$ 5 unidades hacia arriba.



Función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $g(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Eje *X*: $g(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 36x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 6x + 36\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Signo: La función *g* es negativa en $(-\infty, 0)$ y positiva en $(0, +\infty)$.

Simetría

La función no es ni par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

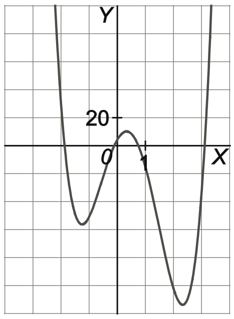
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$g'(x) = 3x^2 - 12x + 36$ es siempre positiva, por tanto *g* es creciente en $\mathbb{R}$ y no tiene extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$g''(x) = 6x - 12$ se anula si $x = 2$, es positiva (*g* cóncava hacia arriba) en $(2, +\infty)$ y negativa (*g* cóncava hacia abajo) en $(-\infty, 2)$. (2, 56) es un punto de inflexión.

b) En este caso, no es sencillo resolver ni $9x^4 - 17x^3 - 46x^2 + 35x + 4 = 0$ ni $9x^4 - 17x^3 - 46x^2 + 35x = 0$, por lo que no sedispone de información precisa sobre los puntos de corte con el eje *X* ni sobre el signo de *f*.



Función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0) = 4 \Rightarrow (0, 4)$

Eje *X*: Como $f(-1) = -51$, $f(0) = 4$ y $f(1) = -15$, habrá un punto de corte en el intervalo $(-1, 0)$ y otro en $(0, 1)$. Además, como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, hay otros dos puntos de corte, uno a la izquierda de –1 y otro a la derecha de 1. Como la función tiene grado 4, estos son todos los puntos de corte.

[NOTA: Se puede ser más preciso calculando más valores de *f*, uno de los puntos de corte está en $(-2, -1)$ y el otro en $(3, 4)$]

Signo: No se puede determinar con precisión, pero lamando $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ a las abscisas de los puntos de corte con el eje *X* se tiene que *f* es positiva en $(-\infty, x_1) \cup (x_2, x_3) \cup (x_4, +\infty)$ y negativa en $(x_1, x_2) \cup (x_3, x_4)$.

Simetría

La función no es ni par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 36x^3 - 51x^2 - 92x + 35 = 0$ si $x = -\frac{5}{4}$, $x = \frac{1}{3}$ o $x = \frac{7}{3}$

	$-\infty \quad -\frac{5}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

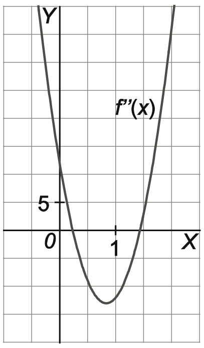
En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*. En $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{14\,451}{256}\right) \simeq (-1{,}25; -56{,}5)$ y $\left(\frac{7}{3}, -\frac{3077}{27}\right) \simeq (2{,}33; -113{,}96)$ hay sendos mínimos relativos y en $\left(\frac{1}{3}, \frac{271}{27}\right) \simeq (0{,}33; 10{,}04)$ hay un máximo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 108x^2 - 102x - 92 = 0$ si $x = \frac{17 - \sqrt{1393}}{36} = x_5$ o $x = \frac{17 + \sqrt{1393}}{36} = x_6$, es positiva (*f* cóncava hacia arriba) en $(-\infty, x_5) \cup (x_6, +\infty)$ y negativa (*f* cóncava hacia abajo) en (x_5, x_6).

Así, $(x_5, f(x_5)) \simeq (-0{,}56; -26{,}45)$ y $(x_6, f(x_6)) \simeq (1{,}51; -59{,}68)$ son puntos de inflexión.

c) Es este caso no es fácil obtener los ceros de la función (cortes con el eje *X*), ni siquiera los ceros de la derivada, $f'(x) = 12x^3 - 30x^2 + 12x + 12$. Así que se trabajará a partir de $f''(x) = 36x^2 - 60x + 12$.

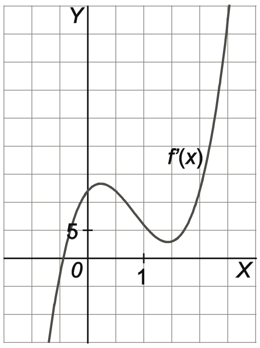


La gráfica de f'' es una parábola cóncava hacia arriba $(\cup)$ con un mínimo absoluto en su vértice $x_v = \frac{60}{72} = \frac{5}{6} \simeq 0{,}83$ ($y_v = -13$) y eje de simetría la recta $x = \frac{5}{6}$.

El punto de corte con el eje *Y* es (0, 12) y los puntos de corte con el eje *X* son $\left(\frac{5 - \sqrt{13}}{6}, 0\right) \simeq (0{,}23; 0)$ y $\left(\frac{5 + \sqrt{13}}{6}, 0\right) \simeq (1{,}43; 0)$.

Haciendo una tabla de valores se esboza la gráfica de f'' y conocida esta, la de f' :

Como es una función polinómica su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas, además, $f'(0) = 12$, por lo que corta al eje *Y* en el punto (0, 12). Por otra parte, f' no es par ni impar, $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.

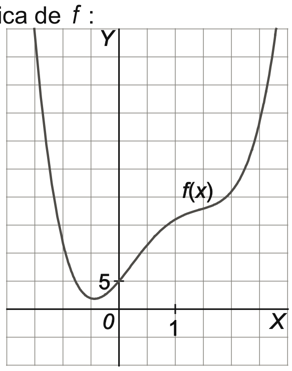


Llamando $x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$ y $x_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$, f' será creciente en $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ y decreciente en (x_1, x_2), por lo que tendrá un máximo relativo en $(x_1, f'(x_1)) \simeq (0{,}23; 13{,}32)$ y un mínimo relativo en $(x_2, f'(x_2)) \simeq (1{,}43; 2{,}9)$.

De estos datos se deduce que f' tiene un único punto de corte con el eje *X*, además, como $f'(-1) = -42 < 0$ y $f'(0) = 12 > 0$, la abscisa de dicho punto de corte, x_3, verifica $-1 < x_3 < 0$, siendo f' positiva en $(x_3, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, x_3)$.

La segunda derivada de f', $f'''(x) = 72x - 60$, se anula si $x = \frac{5}{6}$, es positiva (f' cóncava hacia arriba) en $\left(\frac{5}{6}, +\infty\right)$ y negativa (f' cóncava hacia abajo) en $\left(-\infty, \frac{5}{6}\right)$. $\left(\frac{5}{6}, f'\left(\frac{5}{6}\right)\right) \simeq (0{,}83; 8{,}11)$ es un punto de inflexión.

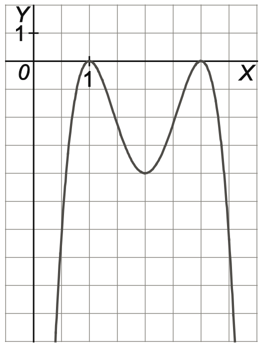
Con esta información se esboza la gráfica de f' y, a partir de ella, finalmente la gráfica de f :



Al ser una función polinómica su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas. Como $f(0) = 5$, corta al eje *Y* en el punto (0, 5). *f* no es par ni impar y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

La función *f* será creciente en $(x_3, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, x_3)$, presentando un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = x_3$. La función *f* será cóncava hacia arriba en $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ y hacia abajo en (x_1, x_2), por lo que tendrá puntos de inflexión en $(x_1, f(x_1)) \simeq (0{,}23; 13{,}32)$ y $(x_2, f(x_2)) \simeq (1{,}43; 2{,}9)$.

d) Función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=-36 \Rightarrow (0,-36)$

Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow -4(x-1)^2(x-3)^2=0 \Rightarrow x=1,\ x=3 \Rightarrow$ (1, 0) y (3, 0)

Signo: La función es negativa en $\mathbb{R}-\{1,3\}$, nunca es positiva.

Simetría

La función no es par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=-4\left[2(x-1)(x-3)^2+2(x-1)^2(x-3)\right]=-8(x-1)(x-3)(2x-4)=$

$=-16(x-1)(x-3)(x-2)$ se anula si $x=1$, $x=2$ o $x=3$.

	$-\infty$ 1	1 2	2 3	3 $+\infty$
$f'(x)$	+	−	+	−
$f(x)$	↗	↘	↗	↘

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*. En (1, 0) y (3, 0) hay sendos máximos relativos y en (2, –4) hay un mínimo relativo.

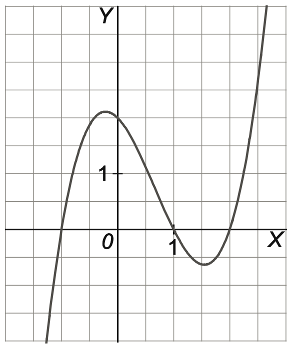
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=-48x^2+192x-196=0 \Rightarrow x=\dfrac{6-\sqrt{3}}{3}=x_1$ o $x=\dfrac{6+\sqrt{3}}{3}=x_2$

	$-\infty$ x_1	x_1 x_2	x_2 $+\infty$
$f''(x)$	−	+	−
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

En la tabla se determinan los intervalos donde *f* es cóncava hacia arriba o hacia abajo. En $(x_1, f(x_1)) \simeq (1{,}42; -1{,}78)$ y $(x_2, f(x_2)) \simeq (2{,}58; -1{,}78)$ hay sendos puntos de inflexión.

e) Función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=2 \Rightarrow (0,2)$

Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x-2)=0 \Rightarrow$ (–1, 0), (1, 0) y (2, 0)

Signo: *f* es negativa en $x\in(-\infty,-1)\cup(1,2)$ y positiva en $x\in(-1,1)\cup(2,+\infty)$

Simetría

La función no es par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=3x^2-4x-1$ se anula si $x=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}=x_1$ o $x=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}=x_2$.

	$-\infty$ x_1	x_1 x_2	x_2 $+\infty$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.Además, $(x_1, f(x_1)) \simeq (-0{,}22; 2{,}11)$ es un máximo relativo y $(x_2, f(x_2)) \simeq (1{,}55; -0{,}63)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=6x-4$ se anula si $x=\dfrac{2}{3}$, es positiva (*f* cóncava hacia arriba) en $\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$ y negativa (*f* cóncava hacia abajo) en $\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right)$. $\left(\dfrac{2}{3}, f\left(\dfrac{2}{3}\right)\right)=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{20}{27}\right)\simeq(0{,}67; 0{,}74)$ es un punto de inflexión.

Funciones racionales

56. Encuentra las asíntotas de estas funciones.

a) $f(x)=\dfrac{-6x^2}{x^2+1}$

b) $g(x)=\dfrac{x^5}{x^4+1}$

c) $h(x)=\dfrac{x}{x^3+8}$

d) $k(x)=\dfrac{x^2+x}{x^3+x^2-2x-2}$

a) Asíntotas verticales: Observemos que $D(f)=\mathbb{R}$, por tanto, no tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x^2}{x^2+1}=-6$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-6x^2}{x^2+1}=-6$, la recta $y=-6$ es asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: No tiene.

b) Asíntotas verticales: Observemos que $D(g)=\mathbb{R}$, por tanto, no tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5}{x^4+1}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5}{x^4+1}=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: Sí tiene, ya que cumple la condición de los grados. Dividiendo tenemos $x^5=x(x^4+1)-x\Rightarrow$

$\Rightarrow g(x)=\dfrac{x^5}{x^4+1}=x-\dfrac{x}{x^4+1}$, por lo que la recta $y=x$ es asíntota oblicua.

c) Asíntotas verticales: Observemos que $D(h)=\mathbb{R}-\{-2\}$, por lo que puede tener una asíntota vertical en $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x}{x^3+8}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x}{x^3+8}=-\infty$, la recta $x=-2$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^3+8}=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^3+8}=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: No tiene.

d) Asíntotas verticales: Observemos que $D(k)=\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{2},\,-1,\,\sqrt{2}\right\}$, por lo que puede tener asíntotas verticales en $x=-\sqrt{2}$, $x=-1$ y $x=\sqrt{2}$.

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^-}k(x)=\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^-}\dfrac{x(x+1)}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)(x+1)}=\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^-}\dfrac{x}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^+}k(x)=\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^+}\dfrac{x}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}=+\infty\end{array}\right.\Rightarrow x=-\sqrt{2}\text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-}k(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-}\dfrac{x}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+}k(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+}\dfrac{x}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}=+\infty\end{array}\right.\Rightarrow x=\sqrt{2}\text{ es asíntota vertical.}$$

En cambio, $x=-1$ no es asíntota vertical, de hecho, en $x=-1$ la función presenta una discontinuidad evitable, ya que $\lim\limits_{x\to-1}k(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}=1$.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x}{x^3+x^2-2x-2}=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x}{x^3+x^2-2x-2}=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal.

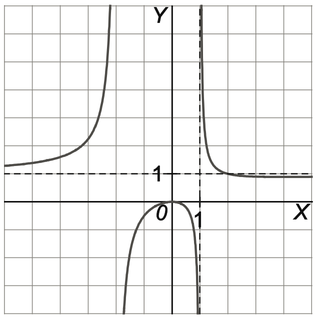
Asíntotas oblicuas: No tiene.

57. Realiza un estudio completo de las siguientes funciones racionales y esboza, en cada caso, su gráfica.

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x-2}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$ **e)** $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4x+4}$ **g)** $f(x)=\dfrac{5}{x^4-x^2}$

b) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ **f)** $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-4}$ **h)** $f(x)=\dfrac{-2x^3}{x+2}$

a) Dominio y continuidad



El denominador se anula si $x=-2$ o $x=1$, así, $D(f)=\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)=0\Rightarrow(0,\,0)$ Eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0\Rightarrow\ (0,\,0)$

Signo: *f* es positiva en $x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ y negativa en $x\in(-2,0)\cup(0,1)$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=-\infty$, la recta $x=-2$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$, la recta $x=1$

Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, la recta $y=1$, que corta a la curva en $\dfrac{x^2}{x^2+x-2}=1\Rightarrow x=2\Rightarrow P(2,1)$

Oblicuas: No tiene.

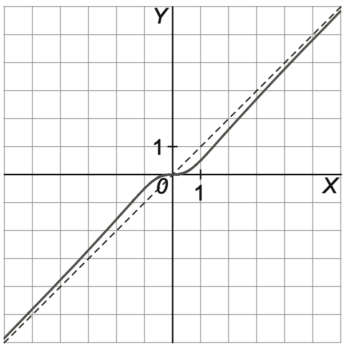
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{x^2-4x}{\left(x^2+x-2\right)^2}$ se anula si $x=0$ o $x=4$, es positiva (*f* creciente) en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(4,+\infty)$ y es negativa (*f*decreciente) en $(0,1)\cup(1,4)$.(0, 0) es un máximo relativo y $\left(4,\dfrac{8}{9}\right)\simeq(4;\,0{,}89)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{-2x^3+12x^2+8}{\left(x^2+x-2\right)^3}$, al no determinar con exactitud cuando se anula f'', no se puede determinar de manera rigurosa la curvatura ni los puntos de inflexión.

b) Dominio y continuidad



El denominador no se anula, $D(f)=\mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)=0\Rightarrow(0,\,0)$. Eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow x^3=0\Rightarrow x=0\Rightarrow\ (0,\,0)$

Signo: La función es positiva en $(0,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,0)$.

Simetría

$f(-x)=-f(x)\Rightarrow$ la función es impar.

Asíntotas

Verticales: No tiene. Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Oblicuas: Cumple la condición de los grados. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}=x-\dfrac{x}{x^2+1}$, $y=x$ es la asíntota oblicua.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ se anula si $x = 0$ y es positiva (*f* es creciente) si $x \neq 0$. No hay extremos relativos.

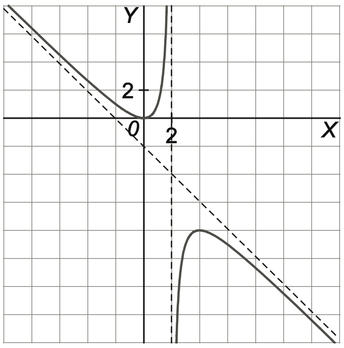
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \dfrac{-2x^3 + 6x}{\left(x^2+1\right)^3}$ se anula si $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ o $x = \sqrt{3}$, es positiva (*f* cóncava hacia arriba) en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$ y negativa (*f* cóncava hacia abajo) en $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

Así, los puntos $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right) \simeq (-1{,}73; -1{,}3)$ y $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right) \simeq (1{,}73; 1{,}3)$ son puntos de inflexión.

c) Dominio y continuidad

El denominador se anula si $x = 2$, así, $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Eje*X*: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Signo: La función es positiva en $(-\infty, 2)$ y negativa en $(2, +\infty)$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Oblicuas: Sí tiene porque cumple la condición de los grados. Dividiendo tenemos $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x} = -x - 2 + \dfrac{4}{2-x}$, por lo que $y = -x - 2$ es la asíntota oblicua.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \dfrac{-x^2 + 4x}{(2-x)^2}$ se anula si $x = 0$ o $x = 4$, es positiva (*f* creciente) en $(0, 2) \cup (2, 4)$ y negativa (*f* decreciente) en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$. Por tanto, (0, 0) es un mínimo relativo y (4, –8) un máximo relativo.

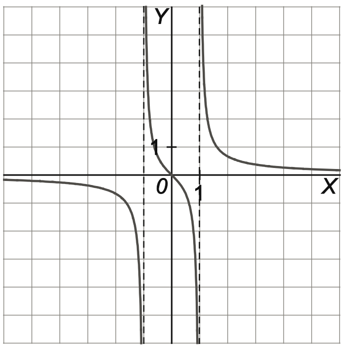
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \dfrac{8}{(2-x)^3}$ es positiva (*f* cóncava hacia arriba) en $(-\infty, 2)$ y negativa (*f* cóncava hacia abajo) en $(2, +\infty)$.

No hay puntos de inflexión.

d) Dominio y continuidad

El denominador se anula si $x=-1$ o $x=1$, así, $D(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.



La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)=0 \Rightarrow (0,\ 0)$ Eje *X*: $f(x)=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,\ 0)$

Signo: *f* es positiva en $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$ y negativa en $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

Simetría

$f(-x)=-f(x) \Rightarrow$ la función es impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty \Rightarrow x=-1$. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty \Rightarrow x=1$

Horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$, la recta $y=0$ es una asíntota horizontal.

Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{-x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2}$ es negativa (*f* decreciente) en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$. No hay extremos relativos.

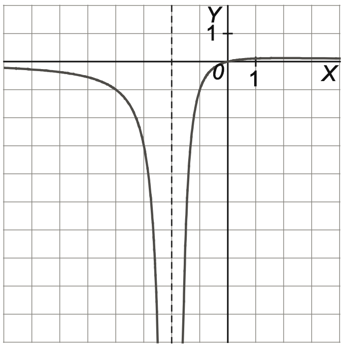
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3}$ se anula si $x=0$. En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba o hacia abajo. En (0, 0) hay un punto de inflexión.

	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

e) Dominio y continuidad

El denominador se anula si $x=-2$, así, $D(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$.



La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)=0 \Rightarrow (0,\ 0)$. Eje *X*: $f(x)=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,\ 0)$

Signo: *f* es positiva en $(0,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty \Rightarrow x=-2$ Horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$

Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

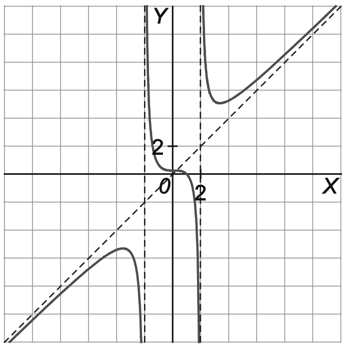
$f'(x)=\dfrac{-x+2}{(x+2)^3}$ se anula si $x=2$, es positiva (*f* creciente) en $(-2,2)$ y negativa (*f* decreciente) en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$. El punto $\left(2,\dfrac{1}{8}\right)=(2;\ 0{,}125)$ es un máximo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{2x-8}{(x+2)^4}=0 \Rightarrow x=4$, es positiva (*f* es cóncava hacia arriba) en $(4,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,-2)\cup(-2,4)$. El punto $\left(4,\dfrac{1}{9}\right)\simeq(4;\ 0{,}11)$ es un punto de inflexión.

f) Dominio y continuidad

$D(f)=\mathbb{R}-\{-2,\ 2\}$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)=(0;\ 0{,}25)$ Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x^3-1=0\Rightarrow\ (1,\ 0)$

Signo: *f* es positiva en $(-2,1)\cup(2,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,-2)\cup(1,2)$.

Simetría: La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=+\infty\Rightarrow x=-2$. $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty\Rightarrow x=2$

Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Oblicuas: Dividiendo tenemos $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-4}=x+\dfrac{4x-1}{x^2-4}$, por lo que $y=x$ es la asíntota oblicua.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

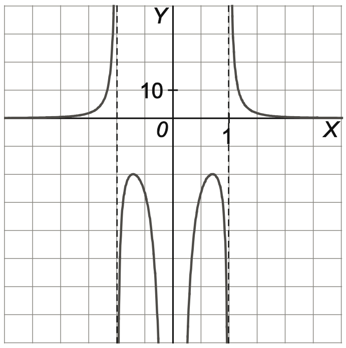
$f'(x)=\dfrac{x^4-12x^2+2x}{\left(x^2-4\right)^2}$, no se puede determinar con exactitud cuando se anula f' (salvo $x=0$), por lo que no se puede determinar de manera rigurosa los intervalos de crecimiento y decrecimiento ni los extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{8x^3-6x^2+96x-8}{\left(x^2-4\right)^3}$, no se puede determinar con exactitud cuando se anula f'' por lo que no se puede determinar de manera rigurosa la curvatura ni los puntos de inflexión.

g) Dominio y continuidad

$D(f)=\mathbb{R}-\{-1,\ 0,\ 1\}$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definido, la gráficano corta al eje Y.

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow 5=0$ no tiene solución, la gráfica no corta al eje X.

Signo: *f* es positiva en $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y negativa en $x\in(-1,0)\cup(0,1)$.

Simetría: $f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty\Rightarrow x=-1$. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty\Rightarrow x=0$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty\Rightarrow x=1$

Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\Rightarrow y=0$ Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{-20x^2+10}{x^3\left(x^2-1\right)^2}$, se anula si $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=x_1$ o $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=x_2$.

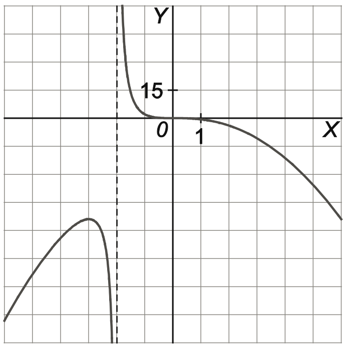
	$-\infty$ a -1	-1 a x_1	x_1 a 0	0 a x_2	x_2 a 1	1 a $+\infty$
$f'(x)$	+	+	−	+	−	−
$f(x)$	↗	↗	↘	↗	↘	↘

En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es creciente o decreciente. $(x_1,\ f(x_1))\simeq(-0{,}71;\ -20)$ y $(x_2,\ f(x_2))\simeq(0{,}71;\ -20)$ son máximos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{100x^4-90x^2+30}{x^4\left(x^2-1\right)^3}$ no se anula, por lo que no hay puntos de inflexión. La segunda derivada es positiva (*f* cóncava hacia arriba) en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y negativa (*f* cóncava hacia abajo) en $(-1,0)\cup(0,1)$.

h) Dominio y continuidad



El denominador se anula si $x=-2$, así, $D(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=0\Rightarrow(0,\ 0)$

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x=0\Rightarrow$ (0, 0)

Signo: La función es positiva en $(-2,\ 0)$ y negativa en $(-\infty,\ -2)\cup(0,\ +\infty)$.

Simetría

La funciónno es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=-2$ es una asíntota vertical.

Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Oblicuas: No tiene, ya que no cumple la condición de los grados.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{-4x^2(x+3)}{(x+2)^2}$, se anula si $x=-3$ o $x=0$.

	$-\infty$ — -3	-3 — -2	-2 — 0	0 — $+\infty$
$f'(x)$	+	–	–	–
$f(x)$	↗	↘	↘	↘

En la tabla se determinanlos intervalos de crecimiento y decrecimiento. (–3, –54) es un máximo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

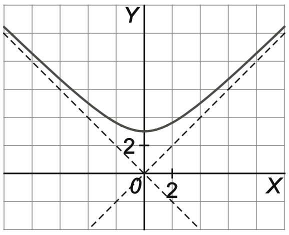
$f''(x)=\dfrac{-4x(x^2+6x+12)}{(x+2)^3}$ se anula si $x=0$, es positiva es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(-2,\ 0)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(-\infty,\ -2)\cup(0,\ +\infty)$. El punto (0, 0) es un punto de inflexión.

Funciones radicales

58. Haz el estudio completo y dibuja la gráfica de las siguientes funciones radicales.

a) $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ **b)** $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

a) Dominio y continuidad



$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2+9\geq 0\right\}=\mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=3\Rightarrow(0,\ 3)$.

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x^2+9=0$, no tiene solución real, no corta al eje X.

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría

$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: No tiene. Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}=1$ y $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)\left(\sqrt{x^2+9}+x\right)}{\sqrt{x^2+9}+x}=0$

$y=x$ es la asíntota oblicua por la derecha, y al ser f par, $y=-x$ lo es por la izquierda.

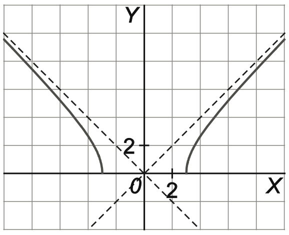
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=0\Rightarrow x=0$, es positiva ($f$ creciente) si $x>0$ y negativa (f decreciente) si $x<0$. (0, 3) es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\frac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$ es siempre positiva en el dominio de f, así que la función es cóncava hacia arriba.

b) Dominio y continuidad



$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2-9\geq 0\right\}=(-\infty,\ -3]\cup[3,\ +\infty)$. Es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definido, no corta al eje Y.

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x^2-9=0\Rightarrow(-3,\ 0)$ y $(3,\ 0)$.

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría

$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: No tiene. Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}=1$ y $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)}{\sqrt{x^2-9}+x}=0$

$y=x$ es la asíntota oblicua por la derecha, y al ser f par, $y=-x$ lo es por la izquierda.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}=0$ si $x=0\notin D(f)$, es positiva (f creciente) si $x>3$ y negativa (f decreciente) si $x<3$. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\frac{-9}{(x^2-9)\sqrt{x^2-9}}$ es siempre negativa en el dominio de f, así que la función es cóncava hacia abajo.

59. Halla el dominio de estas funciones.

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}$

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt[3]{x}}{x-2}$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+3}$

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$

a) $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}: x+2\geq 0,\ x\neq 0\right\}=\left[-2,\ 0\right)\cup\left(0,\ +\infty\right)$

b) $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}: x+6\geq 0,\ x\neq 2\right\}=\left[-6,\ 2\right)\cup\left(2,\ +\infty\right)$

c) $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2-1\geq 0,\ x\neq -3\right\}=\left(-\infty,\ -3\right)\cup\left(-3,\ -1\right]\cup\left[1,\ +\infty\right)$

d) $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2+1\geq 0,\ x^2\neq 1\right\}=\mathbb{R}-\left\{-1,\ 1\right\}$

60. Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

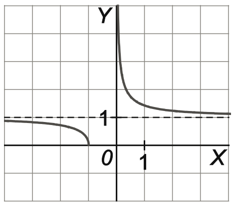
b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-1}}$

c) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}$

d) $f(x)=\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}}$

a) Dominio y continuidad

$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}: \dfrac{x+1}{x}\geq 0\right\}=\left(-\infty,\ -1\right]\cup\left(0,\ +\infty\right)$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)$ no está definido, no corta al eje *Y*.

Eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow(-1,\ 0)$

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales:La recta $x=0$ es asíntota vertical, ya que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, la recta $y=1$ es asíntota horizontal.

Oblicuas: No tiene.

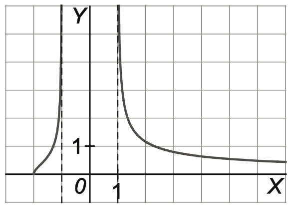
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{-1}{2x^2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}}$ es negativa (*f* decreciente) en el dominio de *f*. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{4x+3}{4x^3\left(x+1\right)\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}}$ se anula en $x=-\dfrac{3}{4}$ (que no pertenece al dominio de *f*), es positiva (*f* cóncava hacia arriba) en $\left(0,\ +\infty\right)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $\left(-\infty,\ -1\right)$. No hay puntos de inflexión.

b) Dominio y continuidad



$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{x+2}{x^2-1}\geq 0\right\}=[-2,-1)\cup(1,+\infty)$. Es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definido, no corta al eje Y. Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x+2=0\Rightarrow(-2,0)$

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: Las rectas $x=-1$ y $x=1$ son asíntotas verticales, ya que $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

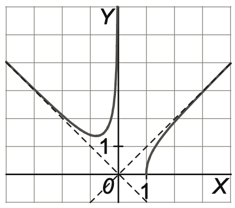
$f'(x)=-\dfrac{x^2+4x+1}{2\left(x^2-1\right)^2\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-1}}}$ se anula si $x=-2-\sqrt{3}$ o $x=-2+\sqrt{3}$ (que no pertenecen al dominio de f),es positiva (f creciente) en $(-2,-1)$ y negativa (f decreciente) en $(1,+\infty)$. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

Debido a su complejidad, no calculamos f'', con la información disponible se hace un esbozo de la gráfica de f.

c) Dominio y continuidad

$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{x^3-1}{x}\geq 0\right\}=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definido, no corta al eje Y. Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x^3-1=0\Rightarrow(1,0)$

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty\Rightarrow x=0$. Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Oblicuas: En $+\infty$: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}}{x}=1$ y $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}-x\right)=0$

$y=x$ es asíntota oblicua por la derecha.

En $-\infty$: $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}}{x}=-1$ y $n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{-x^3-1}{-x}}-x\right)=0$

$y=-x$ es asíntota oblicua por la izquierda.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{2x^3+1}{2x^2\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}}$ se anula si $x=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}=x_1$,es positiva ($f$ creciente) en $(x_1,+\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-\infty,-1)\cup(0,x_1)$. $(x_1,f(x_1))\simeq(-0{,}79;\,1{,}37)$ es un mínimo relativo.

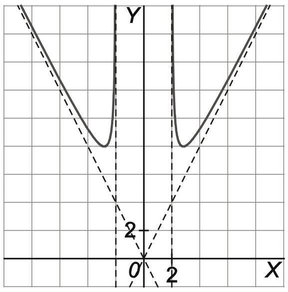
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)\neq 0$ en el dominio, es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(-\infty,-1)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(0,+\infty)$. No hay puntos de inflexión.

d) Dominio y continuidad

$D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2-4>0\}=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo



Eje Y: $f(0)$ no está definido, no corta al eje Y.

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow 2x^2=0\Rightarrow x=0$, pero este valor no pertenece al dominio de f, por lo que no corta al eje X.

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría

$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: Las rectas $x=-2$ y $x=2$ son asíntotas verticales, ya que $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$.

Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Oblicuas:

En $+\infty$: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}=2$ y

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}}-2x\right)\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}}+2x\right)}{\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}}+2x\right)}=0$$

Por tanto, $y=2x$ es asíntota oblicua por la derecha.

En $-\infty$: Como la función es par $y=-2x$ es asíntota oblicua por la izquierda.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{2x^3-16x}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$ se anula si $x=0$ (que no pertenece al dominio de f), $x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ o $x=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2}$.

En la tabla se determinan los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

	$-\infty$ a $-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$ a -2	-2 a 2	2 a $2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$ a $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$\dots$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗	$\nexists$	↘	↗

Los puntos $(-2\sqrt{2}, 8)\approx(-2{,}83; 8)$ y $(2\sqrt{2}, 8)\approx(2{,}83; 8)$ son mínimos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

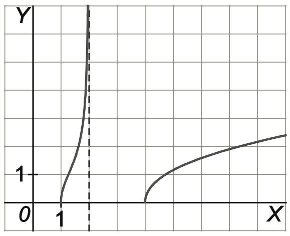
$f''(x)=\dfrac{8x^4+64}{(x^2-4)^2\sqrt{x^2-4}}$ es positiva (f cóncava hacia arriba) en el dominio de f. No hay puntos de inflexión.

61. Dibuja la gráfica de la siguiente función radical.

$$f(x)=\sqrt{\frac{(x-1)(x-4)}{x-2}}$$

Dominio y continuidad

$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{(x-1)(x-4)}{x-2}\geq 0\right\}=[1,2)\cup[4,+\infty)$. La función es continua en sudominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)$ no está definido, no corta al eje *Y*.

Eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow(x-1)(x-4)=0\Rightarrow x=1,\ x=4\Rightarrow$ (1, 0) y (4, 0)

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: La recta $x=2$ es asíntota vertical, ya que $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=+\infty$.

Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Oblicuas: No tiene, ya que $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-4)}{x-2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2-5x+4}{x^3-2x^2}}=0$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{x^2-4x+6}{2(x-2)^2\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-4)}{x-2}}}$ no se anula, ya que x^2-4x+6 no tiene raíces reales, de hecho f' es positiva (*f* creciente) en el dominio de *f*, por lo que no hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{-x^4+8x^3-36x^2+88x-68}{4(x-1)(x-2)^3(x-4)\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-4)}{x-2}}}$, el numerador no tiene raíces enteras, por lo que no es posible determinar con exactitud la curvatura de *f* ni sus puntos de inflexión, aunque con la información obtenida anteriormentese puede deducir que debe haber un punto de inflexión con abscisa $x_1\in(1,2)$.

Funciones exponenciales y logarítmicas

62. Dadas las funciones $f(x)=\log_2(x^2-16)$ y $g(x)=\log_2(6x)$, estudia su dominio y encuentra las coordenadas del punto de corte entre ellas.

$D(f)=\{x\in\mathbb{R}:x^2-16>0\}=(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$ y $D(g)=\{x\in\mathbb{R}:6x>0\}=(0,+\infty)$.

Puntos de corte: $f(x)=g(x)\Rightarrow\log_2(x^2-16)=\log_2(6x)\Rightarrow x^2-16=6x\Rightarrow x^2-6x-16=0\Rightarrow x=-2,\ x=8$.

La primera solución no es válida, ya que no pertenece ni al dominio de *f* ni al de *g*, la segunda solución sí pertenece a ambos dominios, y proporciona las coordenadas del punto de corte $P(8,\log_2 48)$.

63. Realiza el estudio completo de las siguientes funciones y esboza su gráfica.

a) $f(x)=(1+x)e^x$

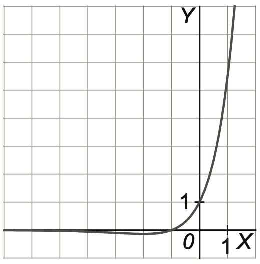
b) $f(x)=\log_2 e^{5x}$

c) $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$

d) $f(x)=x^2\ln x$

e) $f(x)=\ln x^2$

f) $f(x)=\log_3\left(\dfrac{x^2-4}{x}\right)$



a) Dominio y continuidad

$D(f)=\mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=1\Rightarrow(0,1)$ es el punto de corte con el eje Y.

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow(1+x)e^x=0\Rightarrow 1+x=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow(-1,0)$

Signo: La función es positiva en $(-1,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,-1)$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: No tiene.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal por la izquierda.

Oblicuas: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=(x+2)e^x=0$ si $x=-2$, es positiva (f creciente) en $(-2,+\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-\infty,-2)$.

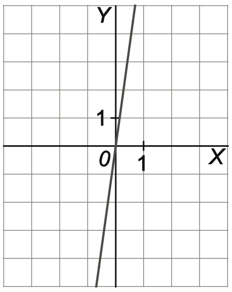
Por tanto, el punto $(-2,-e^{-2})$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=(x+3)e^x$ se anula si $x=-3$, es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(-3,+\infty)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(-\infty,-3)$.

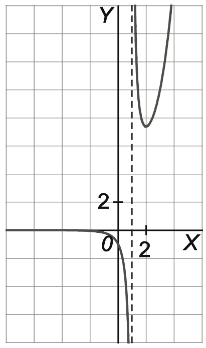
Por tanto, el punto $(-3,2e^{-3})$ es un punto de inflexión.

b) Observemos que no es necesario hacer el estudio de las propiedades dela función, ya que la gráfica de $f(x)=\log_2 e^{5x}=5x\log_2 e=\dfrac{5}{\ln 2}x$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas y con pendiente $m=\dfrac{5}{\ln 2}\simeq 7{,}21$, por tanto su gráfica es la adjunta.



c) Dominio y continuidad

$D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)=-1\Rightarrow(0,\,-1)$ Eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow e^x=0$

Signo: La función es positiva en $(1,\,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,\,1)$.

Simetría: La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: La recta $x=1$ es asíntota vertical, ya que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal por la izquierda.

Oblicuas: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)}=0$ si $x=2$, es positiva (*f* creciente) en $(2,\,+\infty)$ y negativa (*f* decreciente) en $(-\infty,\,1)\cup(1,\,2)$.

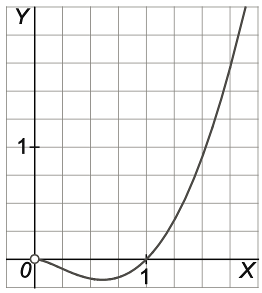
Por tanto, el punto $(2,\,e^2)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{(x^2-4x+5)e^x}{(x-1)^3}$ no se anula, ya que el numerador no tiene raíces reales, es positiva (*f* cóncava hacia arriba) en $(1,\,+\infty)$ y negativa (*f* cóncava hacia abajo) en $(-\infty,\,1)$. No hay puntos de inflexión.

d) Dominio y continuidad

$D(f)=(0,\,+\infty)$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)$ no está definida, no corta el eje *Y*. Eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow \ln x=0\Rightarrow(1,\,0)$

Signo: La función es positiva en $(1,\,+\infty)$ y negativa en $(0,\,1)$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: No hay, ya que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$. Horizontales: No hay, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Oblicuas: No hay asíntotas oblicuas, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=x(1+2\ln x)$ se anula si $x=0$ (que no pertenece al dominio de *f*) o $x=e^{-\frac{1}{2}}$. *f* es decreciente en $x\in\left(0,\,e^{-\frac{1}{2}}\right)$ y creciente en $x\in\left(e^{-\frac{1}{2}},\,+\infty\right)$. El punto $\left(e^{-\frac{1}{2}},\,-\dfrac{e^{-1}}{2}\right)$ es un mínimo relativo.

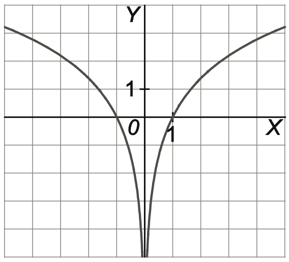
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=3+2\ln x$ se anula si $x=e^{-\frac{3}{2}}$. *f* es cóncava hacia arriba en $x\in\left(e^{-\frac{3}{2}},\,+\infty\right)$ o hacia abajo si $x\in\left(0,\,e^{-\frac{3}{2}}\right)$.

El punto $\left(e^{-\frac{3}{2}},\,-\dfrac{3e^{-3}}{2}\right)$ es un punto de inflexión.

e) Dominio y continuidad

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definida, la función no corta el eje Y.

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow \ln x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1,\ x = 1 \Rightarrow$ (–1, 0) y (1, 0)

Signo: f es positiva en $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y negativa en $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Simetría: $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: La recta $x = 0$ es asíntota vertical, ya que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

Horizontales: No hay, ya que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Oblicuas: No hay, ya que $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

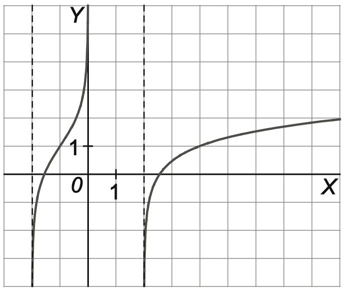
$f'(x) = \frac{2}{x}$ es positiva (f creciente) en $(0, +\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-\infty, 0)$. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \frac{2}{x^2}$ es negativa en el dominio de f, la función es cóncava hacia abajo y no presenta puntos de inflexión.

f) Dominio y continuidad

$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 4}{x} > 0 \right\} = (-2, 0) \cup (2, +\infty)$. Continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definida, la gráfica no corta el eje Y.

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4}{x} = 1 \Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} = x_1,\ x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} = x_2 \Rightarrow$

$(x_1, 0) \simeq (-1{,}56; 0)$ y $(x_2, 0) \simeq (2{,}56; 0)$

Signo: La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que f es positiva o negativa.

	–2	x_1	0	2	x_2	$+\infty$
$f(x)$	–	+	$\not\exists$	–	+	

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: Las rectas $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$, ya que $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$.

Horizontales: No tiene, ya que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Oblicuas: No tiene, ya que $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \frac{x^2 + 4}{x(x^2 - 4)}$ es positiva (f creciente) en el dominio de f. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \frac{-x^4 - 16x^2 + 16}{x^2 (x^2 - 4)^2}$ no se anula en el dominio de f

	–2	x_3	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	–	+	…	–	
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\not\exists$	$\cap$	

La tabla determina los intervalos en los que f es cóncava hacia arriba o hacia abajo. $(x_3, f(x_3)) \simeq (-0{,}97; 1{,}15)$ es un punto de inflexión.

64. Dada la función $f(x)=\log_2(8x-4)-\log_2(x+3)$, estudia sus características.[Nota: expresa $f(x)$ en función de un solo logaritmo.]

$f(x)=\log_2(8x-4)-\log_2(x+3)=\log_2\left(\dfrac{8x-4}{x+3}\right)$ en el dominio de la función.

Dominio y continuidad

$D(f)=\{x\in\mathbb{R}:8x-4>0 \text{ y } x+3>0\}=\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definido, la gráfica no corta el eje Y.Eje$X$: $f(x)=0\Rightarrow\dfrac{8x-4}{x+3}=1\Rightarrow 8x-4=x+3\Rightarrow(1,0)$

Signo: f es positiva si $x\in(1,+\infty)$ y negativa si $x\in\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)=-\infty\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Oblicuas: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ln_2 8=3$, $y=3$ es una asíntota horizontal por la derecha.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{7}{(x+3)(2x-1)\ln 2}$ es positiva ($f$creciente) en el dominio de f. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{-28x-35}{(x+3)^2(2x-1)^2\ln 2}$ se anula si $x=-\dfrac{5}{4}$, que no pertenece al dominio de f,es negativa (f cóncava hacia abajo) en $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. No hay puntos de inflexión.

65. Encuentra las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\ln\dfrac{2x}{2-x}$

b) $f(x)=x^2e^{-x}$

a) Asíntotas verticales

$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{2x}{2-x}>0\right\}=(0,2)$, por lo que puede presentar asíntotas verticales en $x=0$ o $x=2$.

En $x=0$ tenemos $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\dfrac{2x}{2-x}\right)=-\infty$, por tanto, la recta $x=0$ es asíntota vertical.

En $x=2$ tenemos $\lim\limits_{x\to2^-}\ln\left(\dfrac{2x}{2-x}\right)=+\infty$, por tanto, la recta $x=2$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales

No tiene, ya que no se puede calcular los límites en $-\infty$ y $+\infty$.

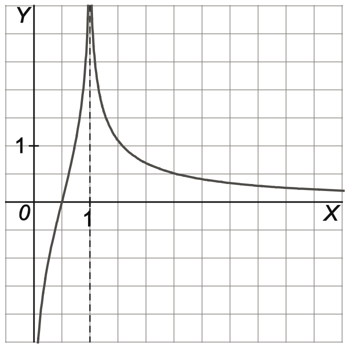
b) Asíntotas verticales

$D(f)=\mathbb{R}$, por lo que no tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{-x}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$, por tanto, la recta $y=0$ es asíntota horizontal por la derecha.

66. Dada la función $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{|x-1|}\right)$, estudia su dominio, sus puntos de corte con los ejes, su signo y sus asíntotas, y dibuja su gráfica.



Dominio: $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{x}{|x-1|}>0\right\}=(0,1)\cup(1,+\infty)$

Puntos de corte:

Eje Y: $f(0)$ no está definido, la gráfica no corta el eje Y.

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow\dfrac{x}{|x-1|}=1\Rightarrow x=|x-1|\Rightarrow\begin{cases}x=x-1\Rightarrow \text{Sin solución}\\ x=-x+1\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\left(\dfrac{1}{2},0\right)$

Signo: La función es positiva en $\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$ y negativa en $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

Asíntotas:

Verticales: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\dfrac{x}{|1-x|}\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\ln\left(\dfrac{x}{|1-x|}\right)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\dfrac{x}{|1-x|}\right)=+\infty$, las rectas $x=0$ y $x=1$ son asíntotas verticales.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x}{|x-1|}\right)=\ln1=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Oblicuas: No tiene.

Funciones trigonométricas y sus inversas

67. Halla los puntos de corte con los ejes y el período de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\operatorname{sen}x+\cos x$

b) $g(x)=\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}2x$

c) $h(x)=\operatorname{sen}(x+\pi)-\cos(x-\pi)$

d) $i(x)=\operatorname{sen}^2 x$

a) Corte con el eje Y: $f(0)=1$, luego corta al eje Y en el punto (0, 1)

Corte con el eje X: $f(x)=0\Rightarrow\operatorname{sen}x+\cos x=0\Rightarrow\operatorname{sen}x=-\cos x\Rightarrow\operatorname{tg}x=-1\Rightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, luego corta al eje X en los puntos de la forma $\left(\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,\ 0\right)$ para $k\in\mathbb{Z}$.

Período: El período es $T=2\pi$

b) Corte con el eje Y: $g(0)=0$, luego corta al eje Y en el punto (0, 0)

Corte con el eje X: $g(x)=0\Rightarrow\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}2x=0\Rightarrow\operatorname{sen}x-2\operatorname{sen}x\cos x=0\Rightarrow\operatorname{sen}x(1-2\cos x)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}x=0\Rightarrow x=k\pi\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}\end{cases}$, $k\in\mathbb{Z}$, luego corta al eje X en los puntos de la forma $(k\pi,\ 0)$, $\left(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ 0\right)$ y $\left(-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ 0\right)$ para $k\in\mathbb{Z}$.

Período: El período es $T=2\pi$

c) Corte con el eje *Y*: $i(0)=0$, luego corta al eje *Y* en el punto (0, 1)

Corte con el eje *X*: $h(x)=0 \Rightarrow \text{sen}(x+\pi)-\cos(x-\pi)=0 \Rightarrow -\text{sen}\,x+\cos x=0 \Rightarrow \text{sen}\,x=\cos x \Rightarrow \text{tg}\,x=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, luego corta al eje *X* en los puntos de la forma $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,\ 0\right)$ para $k\in\mathbb{Z}$.

Período: El período es $T=2\pi$

d) Corte con el eje *Y*: $f(0)=1$, luego corta al eje *Y* en el punto (0, 0)

Corte con el eje *X*: $i(x)=0 \Rightarrow \text{sen}^2\,x=0 \Rightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, luego corta al eje *X* en los puntos de la forma $(k\pi,\ 0)$ para $k\in\mathbb{Z}$.

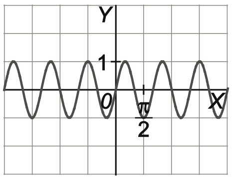
Período: El período es $T=\pi$, ya que $i(x+\pi)=\text{sen}^2(x+\pi)=(-\text{sen}\,x)^2=\text{sen}^2\,x=i(x)$.

68. Representa las gráficas de las siguientes funciones trigonométricas. Para ello, determina primero su período *T* y estudia las funciones en un intervalo de anchura *T*.

a) $f(x)=\text{sen}\,3x$ **c)** $f(x)=\text{cotg}\,2x$ **e)** $f(x)=\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

b) $f(x)=5\cos x$ **d)** $f(x)=2+3\cos\left(\frac{x}{4}\right)$ **f)** $f(x)=2\sec x$

a) Dominioy continuidad: $D(f)=\mathbb{R}$ y *f* es continua en él.



Simetría: La función es impar.

Período: Como la función seno es periódica de período 2π, la función *f* es periódica de período $T=\frac{2\pi}{3}$, por lo que, en lo que sigue, nos centraremos en el estudio de la función en el intervalo $\left[0,\ \frac{2\pi}{3}\right)$.

Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje *Y*: $f(0)=0 \Rightarrow$ (0, 0) es elpunto de corte con el eje *Y*.

Cortes con el eje *X* dentro del período: $f(x)=0 \Rightarrow \text{sen}\,3x=0 \Rightarrow x=0,\ x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow (0,\ 0)$ y $\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

Signo: La función es positiva en $\left(0,\ \frac{\pi}{3}\right)$ y negativa en $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right)$.

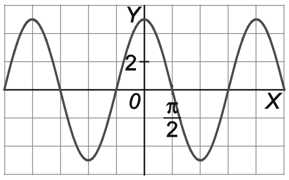
Asíntotas: No tiene

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=3\cos 3x$ se anula si $x=\frac{\pi}{6}$ o $x=\frac{\pi}{2}$, es positiva (*f* creciente) en $\left(0,\ \frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3}\right)$ y negativa (*f* decreciente) en $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right)$. Por tanto, el punto $\left(\frac{\pi}{6},\ 1\right)$ es un máximo relativo y $\left(\frac{\pi}{2},\ -1\right)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=-9\,\text{sen}\,3x=-9f(x)$ se anula si $x=0$ o $x=\frac{\pi}{3}$, es positiva (*f* cóncava hacia arriba) en $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right)$ y negativa (*f* cóncava hacia abajo) en $\left(0,\ \frac{\pi}{3}\right)$. Por tanto, los puntos de corte con el eje *X* son puntos de inflexión.



b) Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}$ y es f continua en él.

Simetría: La función espar.

Periodo: La función es periódica de período $T=2\pi$, por lo que basta estudiar la función en el intervalo $[0,\ 2\pi)$.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=5\Rightarrow\ (0,\ 5)$

Eje X dentro del período: $f(x)=0\Rightarrow\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2},\ 0\right)$

Signo: La función es positiva en $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$ y negativa en $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

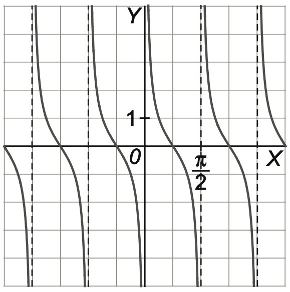
Asíntotas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=-5\operatorname{sen}x$ se anula si $x=0$ o $x=\pi$, es positiva (f creciente) en $(\pi,\ 2\pi)$ y negativa (f decreciente) en $(0,\ \pi)$. El punto $(0,\ 5)$ es un máximo relativo y $(\pi,\ -5)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=-5\cos x=-f(x)$ se anula si $x=\frac{\pi}{2}$ o $x=\frac{3\pi}{2}$, es positiva (f cóncava hacia arriba) en $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$. Los puntos de corte con el eje X son puntos de inflexión.



c) $f(x)=\operatorname{cotg}2x=\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}2x}$

Dominio y continuidad: La función no está definida si $2x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$, por tanto, $D(f)=\mathbb{R}-\left\{\frac{k\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}$ y f es continua en él.

Simetría: La función es impar.

Período: Como la función cotangente es periódica de período π, la función f es periódica de periodo $T=\frac{\pi}{2}$, por lo que basta estudiar la función en el intervalo $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, el 0 se excluye del intervalo ya que no pertenece al dominio de la función, perose estudiará el $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ para comprobar la existencia o no de una asíntota vertical.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no esta definido, no corta el eje Y. Eje X dentro del período: $f(x)=0\Rightarrow\cos 2x=0\Rightarrow\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$

Signo: La función es positiva en $\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ y negativa en $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Asíntotas: Las recta $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$ son asíntotas verticales, ya que $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=-\infty$

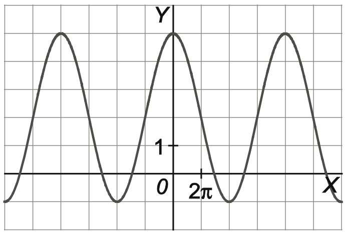
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\frac{-2}{\operatorname{sen}^2 2x}$ es negativa (f decreciente) en $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, no hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\frac{8\operatorname{cotg}2x}{\operatorname{sen}^2 2x}$ se anula si $x=\frac{\pi}{4}$, es positiva (f cóncava hacia arriba) en $\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$. Los puntos de corte con el eje X son puntos de inflexión.

d) <u>Dominioy continuidad</u>: $D(f) = \mathbb{R}$ y f es continua en él.



<u>Simetría</u>: La función es par.

<u>Periodo</u>: Como la función coseno es periódica de período 2π, la función f es periódica de periodo $T = 8\pi$, por lo que basta estudiar la función en el intervalo $[0, 8\pi)$.

<u>Puntos de corte con los ejes y signo</u>

Eje Y: $f(0) = 5 \Rightarrow (0, 5)$

Eje X dentro del período: $f(x) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{4}\right) = -\frac{2}{3} \Rightarrow x \simeq 9{,}2;\ x = 15{,}9 \Rightarrow (9{,}2;\ 0)$ y $(15{,}9;\ 0)$

Signo: La función es positiva en $(0;\ 9{,}2) \cup (15{,}9;\ 8\pi)$ y negativa en $(9{,}2;\ 15{,}9)$.

<u>Asíntotas</u>: No tiene.

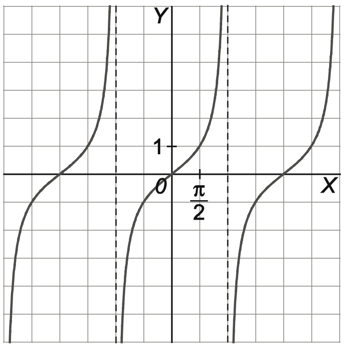
<u>Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos</u>

$f'(x) = -\frac{3}{4}\text{sen}\left(\frac{x}{4}\right)$ se anula si $x = 0$ o $x = 4\pi$, es positiva (f creciente) en $(4\pi, 8\pi)$ y negativa (f decreciente) en $(0, 4\pi)$. El punto $(0, 5)$ es un máximo relativo y $(4\pi, -1)$ es un mínimo relativo.

<u>Curvatura y puntos de inflexión</u>

$f''(x) = -\frac{3}{16}\cos\left(\frac{x}{4}\right)$ se anula si $x = 2\pi$ o $x = 6\pi$, es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(2\pi, 6\pi)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(0, 2\pi) \cup (6\pi, 8\pi)$. Los puntos $(2\pi, 2)$ y $(4\pi, 2)$ son puntos de inflexión.

e) <u>Dominio y continuidad</u>: La función no está definida si $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, por tanto, $D(f) = \mathbb{R} - \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ y f es continua en él.



<u>Simetría</u>: La función es impar.

<u>Período</u>: La función tangente es periódica de período π;f es periódica de período $T = 2\pi$, por lo que basta estudiar la función en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Se elige este intervalo teniendo en cuenta el dominio de f,y seexcluye $-\pi$ del mismo ya que no pertenece al dominio de la función, pero se estudiará el $\lim\limits_{x \to -\pi^+} f(x)$ para comprobar la existencia o no de una asíntota vertical.

<u>Puntos de corte con los ejes y signo</u>

Eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$ .Eje X dentro del período: $f(x) = 0 \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Signo: La función es positiva en $(0, \pi)$ y negativa en $(-\pi, 0)$.

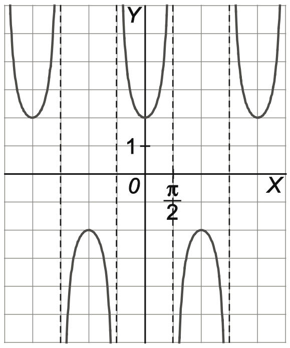
<u>Asíntotas</u>: Las rectas $x = -\pi$ y $x = \pi$ son asíntotas verticales, pues $\lim\limits_{x \to -\pi^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\pi^-} f(x) = +\infty$.

<u>Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos</u>

$f'(x) = \dfrac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ es positiva (f decreciente) en $(-\pi, \pi)$, no hay extremos relativos.

<u>Curvatura y puntos de inflexión</u>

$f''(x) = \dfrac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ se anula si $x = 0$, es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(0, \pi)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(-\pi, 0)$. Por tanto, (0, 0) es un punto de inflexión.



f) $f(x) = 2\sec x = \dfrac{2}{\cos x}$

Dominio y continuidad:

La función no está definida si $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi = \dfrac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, por tanto, $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{(2k+1)\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ y f es continua en él.

Simetría: La función es par.

Período: La función es periódica de período $T = 2\pi$, por lo que, en lo que sigue, nos centraremos en el estudio de la función en el intervalo $[0, 2\pi)$, observemos que en dicho intervalo la función no está definida en $x = \dfrac{\pi}{2}$ y $x = \dfrac{3\pi}{2}$, puntos donde habrá que verificar la existencia de posibles asíntotas verticales.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = 2 \Rightarrow (0, 2)$

Eje X dentro del período: $f(x) = 0$ no tiene solución, no corta el eje X.

Signo: La función es positiva en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ y negativa en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Asíntotas:

La rectas $x = \dfrac{\pi}{2}$ y $x = \dfrac{3\pi}{2}$ son asíntotas verticales, ya que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \dfrac{2\,\text{sen}\,x}{\cos^2 x}$ se anula si $x = 0$ o $x = \pi$, es positiva (f creciente) en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ y negativa (f decreciente) en $\left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Por tanto, (0, 2) es un máximo relativo y $(\pi, -2)$ un mínimo relativo.

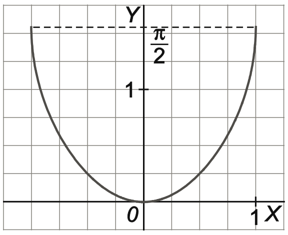
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \dfrac{2\left(1 + \text{sen}^2\,x\right)}{\cos^3 x}$ no se anula, es positiva (f cóncava hacia arriba) en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$. No hay puntos de inflexión.

69. Estudia y representa las siguientes funciones trigonométricas inversas.

a) $f(x)=\text{arcsen}(x^2)$ **b)** $f(x)=\text{arctg}(1+x^2)$ **c)** $f(x)=\arccos\left(\dfrac{x}{x^2-2}\right)$ **d)** $f(x)=\text{arcsen}\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$

a) Dominio y continuidad



$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:-1\le x^2\le 1\right\}=[-1,1]$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=\text{arcsen}\,0=0\Rightarrow$ (0, 0). Eje X: $f(x)=0\Rightarrow\text{arcsen}(x^2)=0\Rightarrow x^2=0\Rightarrow(0,0)$

Signo: Como $x^2>0$ si $x\ne 0$, el recorrido de la función es $R(f)=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, así, la función es positiva salvo en $x=0$.

Simetría: $f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas: No tiene.

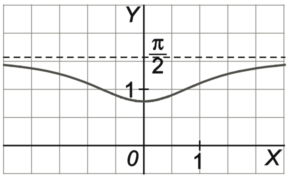
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}=0$ si $x=0$, es positiva (f creciente) en $(0,1)$ y negativa (f decreciente) en $(-1,0)$. Por tanto, $(0,0)$ es un mínimo relativo, además $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ y $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ son máximos absolutos (observa que f' no está definida en estos valores).

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{2\left(1+x^4\right)}{\left(1-x^4\right)\sqrt{1-x^4}}$ es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(-1,1)$. No hay puntos de inflexión.

b) Dominio y continuidad



$D(f)=\mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=\text{arctg}\,1=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow\text{arctg}\left(1+x^2\right)=0\Rightarrow 1+x^2=0$ no tiene solución, no corta el eje X.

Signo: Puesto que $1+x^2$ es siempre positivo, el recorrido de la función es $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$, así, la función es positiva.

Simetría: $f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas: La recta $y=\dfrac{\pi}{2}$ es asíntota horizontal, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

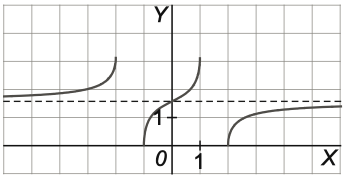
$f'(x)=\dfrac{2x}{1+\left(1+x^2\right)^2}=0$ si $x=0$, es positiva (f creciente) en $(0,+\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-\infty,0)$.

$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{-6x^4-4x^2+4}{\left(x^4+2x^2+1\right)^2}=0$ si $x=-\dfrac{\sqrt{-3+3\sqrt{7}}}{3}=x_1$ y $x=\dfrac{\sqrt{-3+3\sqrt{7}}}{3}=x_2$, f'' es positiva (f cóncava hacia arriba) en (x_1,x_2) y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$. Los puntos $(x_1,f(x_1))\simeq(-0{,}75;1)$ y $(x_2,f(x_2))\simeq(0{,}75;1)$ son puntos de inflexión.

c) Dominio y continuidad



$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:-1\le\dfrac{x}{x^2-2}\le 1\right\}=(-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[1,+\infty)$.

La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ Eje X: $f(x)=0\Rightarrow\arccos\left(\dfrac{x}{x^2-2}\right)=0\Rightarrow\dfrac{x}{x^2-2}=1\Rightarrow(-1,0)$ y $(2,0)$

Signo: Como el recorrido de la función arcocoseno es $[0,\pi]$, la función f es positiva en todo su dominio salvo en $x=-1$ y $x=2$.

Simetría

La función no es par ni impar, pero sí verifica que $f(-x)=\arccos\left(-\dfrac{x}{x^2-2}\right)=\pi-\arccos\left(\dfrac{x}{x^2-2}\right)=\pi-f(x)$.

Asíntotas

La recta $y=\dfrac{\pi}{2}$ es asíntota horizontal, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$.

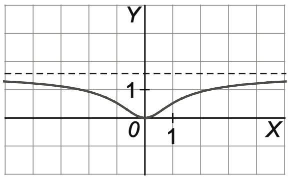
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{x^2+2}{(x^2-2)^2\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{x^2-2}\right)^2}}$ es positiva (f creciente) en el dominio de f. No hay extremos relativos, aunque los puntos $(-2,\pi)$ y $(1,\pi)$ son máximos absolutos y los puntos $(-1, 0)$ y $(2, 0)$ son mínimos absolutos.

Curvatura y puntos de inflexión

Por la complejidad de su estudio, no se calcula f'', pues hay información suficiente para esbozar la gráfica de f.

d) Dominio y continuidad



$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:-1\le\dfrac{x^2}{x^2+1}\le 1\right\}=\mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=\operatorname{arcsen}0=0\Rightarrow(0,0)$

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)=0\Rightarrow\dfrac{x^2}{x^2+1}=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,0)$

Signo: Como $0<\dfrac{x^2}{x^2+1}<1$ si $x\ne 0$, $R(f)=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, así, la función es positiva salvo en $x=0$.

Simetría

$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

La recta $y=\dfrac{\pi}{2}$ es asíntota horizontal, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\operatorname{arcsen}1=\dfrac{\pi}{2}$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)\sqrt{2x^2+1}}$ se anula si $x=0$, es positiva (f creciente) en $(0,+\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-\infty,0)$. Por tanto, $(0, 0)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

Por la complejidad de su estudio, no se calcula f'', pues hay información suficiente para esbozar la gráfica de f.

Funciones construidas a partir de otras

70. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ y, a partir de ella, las gráficas de las siguientes funciones.

a) $g(x) = |x^2 - 6x + 8|$ **b)** $h(x) = |x|^2 - 6|x| + 8$

La gráfica de *f* es una parábola cóncava hacia arriba $(\cup)$ con un mínimo absoluto en su vértice $x_v = \frac{6}{2} = 3$ ($y_v = -1$) y eje de simetría la recta $x = 3$.

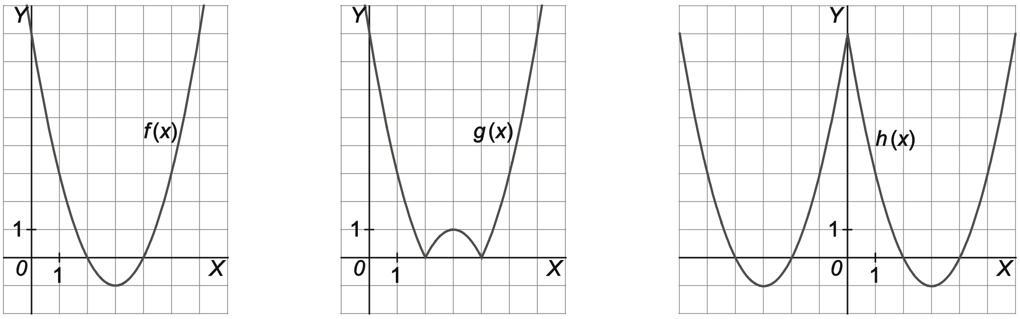
El punto de corte con el eje *Y* es (0, 8) y los puntos de corte con el eje *X* son (2, 0) y (4, 0).

Finalmente, haciendo una tabla de valores tomando abscisas a ambos lados del eje de simetría, podemos hacer un esbozo de la gráfica.

a) La gráfica de *g* se obtiene reflejando respecto del eje *X* las zonas donde *f* es negativa, es decir, las zonas donde la gráfica de *f* esta por debajo del eje X.

b) Observemos que *h* es par, así, basta dibujar su gráfica cuando $x \geq 0$ y reflejarla respecto del eje *Y*, pero si $x \geq 0$ la gráfica de *h* y *f* coinciden, así, la gráfica de *h* se obtiene reflejando respecto del eje *Y* la zona de la gráfica de *f* que está a la derecha del eje *Y*.

De este modo obtenemos las siguientes gráficas:



71. Investiga qué trasformación hay que aplicar a la función $f(x) = x^2 + 6x + 5$ para que se convierta en una función par.

La gráfica de *f* es una parábola, por tanto, es simétrica respecto de su eje, $x = -3$. Para trasformarla en una función par basta trasformar su eje en el eje *Y*, es decir, basta trasladarla 3 unidades hacia la derecha, por tanto, hay que tomar la función $g(x) = f(x-3)$.

En efecto, la función $g(x) = f(x-3) = (x-3)^2 + 6(x-3) + 5 = x^2 - 4$ es par.

72. Representa en tu calculadora gráfica u ordenador la función $f(x) = 2^x$ y, sobre los mismos ejes, representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2^{x-3}$

b) $f(x) = 2^x + 2$

c) $f(x) = 2^x - 1$

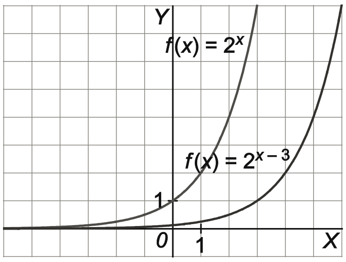
d) $f(x) = 2^{x+1}$

e) $f(x) = 2^{x-2} + 3$

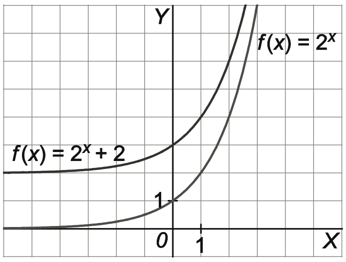
f) $f(x) = 2^{x-1} - 2$

Indica cuál es la traslación que trasforma la gráfica de $f(x) = 2^x$ en cada una de las anteriores.

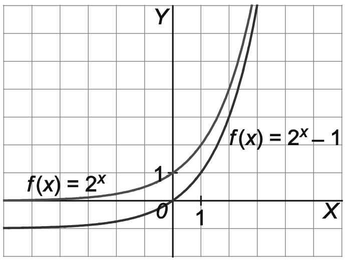
a) Traslación de la gráfica de $f(x) = 2^x$ tres unidades a la derecha.



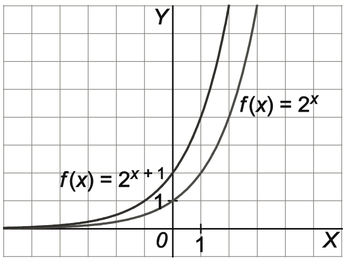
b) Traslación de la gráfica de $f(x) = 2^x$ dos unidades hacia arriba.



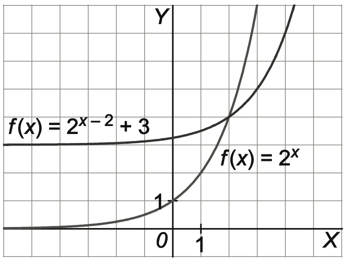
c) Traslación de la gráfica de $f(x) = 2^x$ una unidad hacia abajo.



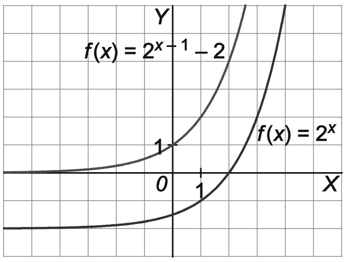
d) Traslación de la gráfica de $f(x) = 2^x$ una unidad a la izquierda.



e) Traslación de la gráfica de $f(x) = 2^x$ dos unidades a la derecha y tres hacia arriba.



f) Traslación de la gráfica de $f(x) = 2^x$ una unidad a la derecha y dos hacia abajo.



73. Calcula el período de las siguientes funciones trigonométricas.

a) $f(x) = \operatorname{sen} 4x$ **c)** $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{8}\right)$ **e)** $f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{tg} 2x$

b) $f(x) = \cos(5x + \pi)$ **d)** $f(x) = \operatorname{cotg} 2x$ **f)** $f(x) = \cos x \cos 2x$

a) $f(x) = \operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen}(4x + 2\pi) = \operatorname{sen}\left(4\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right) = f\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, el período es $T = \dfrac{\pi}{2}$.

b) $f(x) = \cos(5x + \pi) = \cos(5x + \pi + 2\pi) = \cos\left(5\left(x + \dfrac{2\pi}{5}\right) + \pi\right) = f\left(x + \dfrac{2\pi}{5}\right)$, el período es $T = \dfrac{2\pi}{5}$.

c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{8}\right) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{8} + \pi\right) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x + 8\pi}{8}\right) = f(x + 8\pi)$, el período es $T = 8\pi$.

d) $f(x) = \operatorname{cotg} 2x = \operatorname{cotg}(2x + \pi) = \operatorname{cotg}\left(2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right) = f\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, el período es $T = \dfrac{\pi}{2}$.

e) $f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{tg} 2x = \operatorname{sen}(x + 2\pi)\operatorname{tg}(2x + 4\pi) = \operatorname{sen}(x + 2\pi)\operatorname{tg}(2(x + 2\pi)) = f(x + 2\pi)$, el período es $T = 2\pi$.

f) $f(x) = \cos x \cos 2x = \cos(x + 2\pi)\cos(2x + 4\pi) = \cos(x + 2\pi)\cos(2(x + 2\pi)) = f(x + 2\pi)$, el período es $T = 2\pi$.

74. A partir de la gráfica del seno de *x*, dibuja la gráfica de estas funciones.

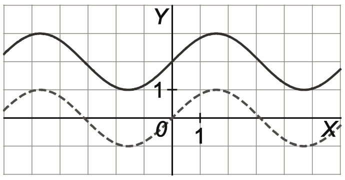
a) $f(x) = \operatorname{sen} x + 2$ **d)** $f(x) = \operatorname{sen}(x - 2)$ **g)** $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ **j)** $f(x) = \operatorname{sen} 2x$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x - 2$ **e)** $f(x) = -\operatorname{sen} x$ **h)** $f(x) = \operatorname{sen}|x|$

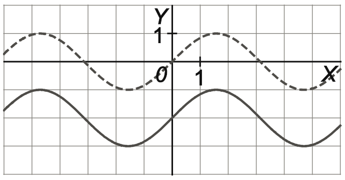
c) $f(x) = \operatorname{sen}(x + 2)$ **f)** $f(x) = \operatorname{sen}(-x)$ **i)** $f(x) = 2\operatorname{sen} x$

En cada apartado representamos la función pedida junto con la función seno de *x*.

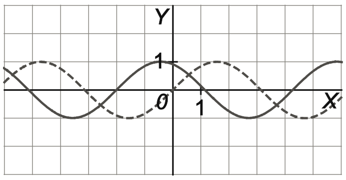
a)



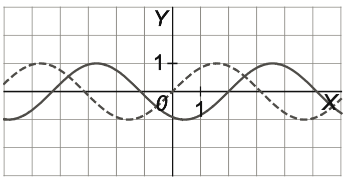
b)



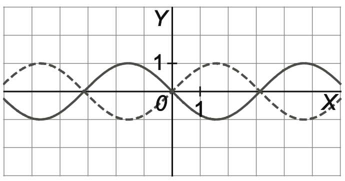
c)



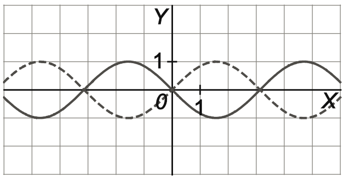
d)



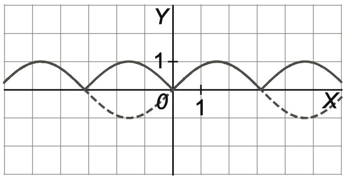
e)



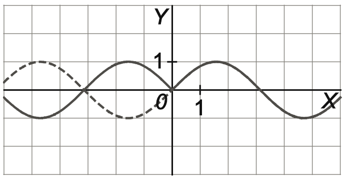
f)



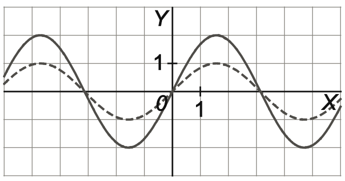
g)



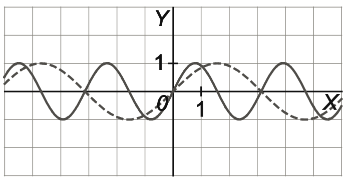
h)



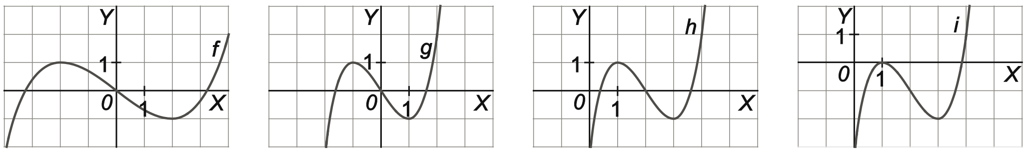
i)



j)



75. Determina la relación que existe entre las funciones representadas en la siguiente sucesión de gráficas, partiendo de la gráfica de *f*.



La gráfica de g se obtiene a partir de la de f comprimiéndola horizontalmente un factor 2, por tanto, $g(x) = f(2x)$.

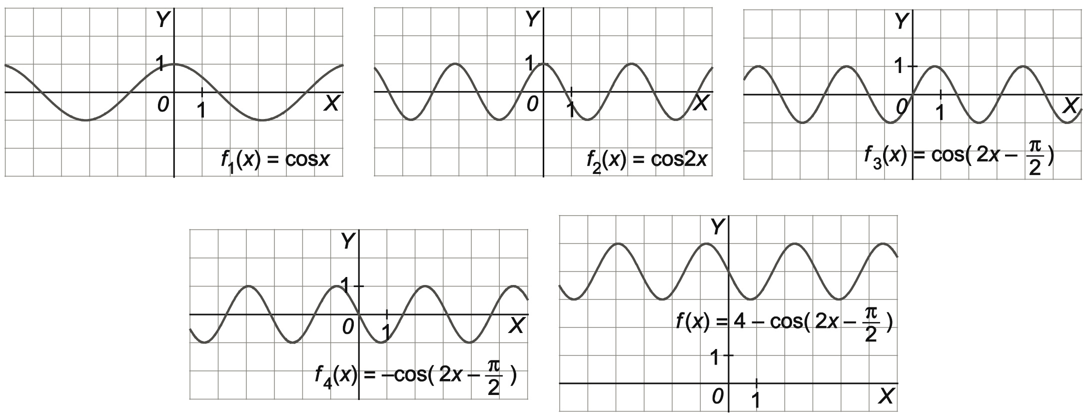
La gráfica de h se obtiene a partir de la de g trasladándola hacia la derecha 2 unidades, por tanto, $h(x) = g(x-2) = f(2x-4)$.

La gráfica de i se obtiene a partir de la de h trasladándola hacia abajo 1 unidad, por tanto, $i(x) = h(x) - 1 = g(x-2) - 1 = f(2x-4) - 1$.

76. Determina qué trasformaciones hay que aplicar a la función coseno para convertirla en la función $f(x) = 4 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$. Esboza la gráfica de la función utilizando el resultado.

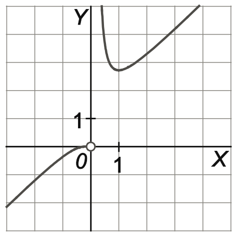
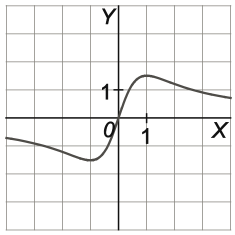
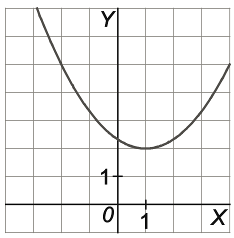
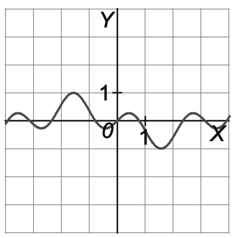
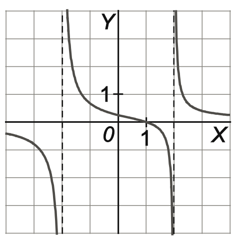
$$f_1(x) = \cos x \rightarrow \begin{pmatrix}\text{se comprime}\\ \text{horizontalmente}\\ \text{un factor 2}\end{pmatrix} \rightarrow f_2(x) = \cos 2x \rightarrow \begin{pmatrix}\text{se traslada}\\ \text{a la derecha}\\ \frac{\pi}{4}\ \text{unidades}\end{pmatrix} \rightarrow f_3(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \begin{pmatrix}\text{se refleja}\\ \text{respecto}\\ \text{del eje } X\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow f_4(x) = -\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \begin{pmatrix}\text{se traslada}\\ \text{hacia arriba}\\ \text{4 unidades}\end{pmatrix} \rightarrow f(x) = 4 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$



CUESTIONES

77. En la siguiente lista, asocia las funciones de la columna izquierda a las gráficas de la columna derecha y justifica tu elección:

$f(x)=\dfrac{3x}{1+x^2}$	
$g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$	
$h(x)=\operatorname{sen} x\cos 2x$	
$j(x)=xe^{\frac{1}{x}}$	
$k(x)=\dfrac{(x-1)^2}{3}+2$	

$f(x)$ se asocia con la segunda gráfica, pues $y=0$ es asíntota horizontal y no tiene asíntotas verticales.

$g(x)$ se asocia con la última gráfica, pues $y=0$ es asíntota horizontal y $x=-2$, $x=2$ son asíntotas verticales.

$h(x)$ se asocia con la cuarta gráfica, pues es periódica.

$j(x)$ se asocia con la primera gráfica, ya que no está definida en $x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} j(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} j(x)=+\infty$.

$k(x)$ se asocia con la tercera gráfica, ya que es una parábola.

78. Justifica que si *P*(*x*) es un polinomio de grado impar con coeficientes reales, entonces la ecuación $P(x)=0$ siempre tiene al menos una solución real.

La función $y=P(x)$ es una función polinómica, por tanto, tiene dominio $\mathbb{R}$ y es continua. Además, como el polinomio tiene grado impar, $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=+\infty$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=-\infty$. En cualquier caso, la grafica debe cortar al menos una vez al eje *X*, lo que equivale a que la ecuación $P(x)=0$ tiene al menos una solución real.

79. Justifica que si *P*(*x*) es un polinomio de grado par con coeficientes reales, entonces la ecuación $P(x)=0$ puede no tener soluciones reales.

Basta considerar como ejemplo el polinomio $P(x)=x^{2n}+1$ para cualquier entero positivo *n*.

80. Demuestra que si una función polinómica corta tres veces al eje horizontal, debe tener al menos un máximo y un mínimo relativos.

Al ser una función polinómica, tanto la función como su derivada son continuas en todo $\mathbb{R}$.

Cada vez que la función corta al eje *X* cambia de signo. Supongamos que la función corta al eje *X* en los puntos de abscisa $x_1<x_2<x_3$, entonces la función será positiva en $(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ x_3)$ y negativa en $(x_1,\ x_2)\cup(x_3,\ +\infty)$ (o viceversa).

Por tanto, en x_1 y x_3 será decreciente ($f'(x_1)<0$ y $f'(x_3)<0$) y en x_2 será creciente ($f'(x_2)>0$).Luego la función derivada, que es continua, cambia de signo entre x_1 y x_2 y otra vez entre x_2 y x_3, por tanto, habrá un mínimo entre x_1 y x_2 y un máximo entre x_2 y x_3.

81. Sean las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=\operatorname{sen} x$. Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y explica por qué.

a) $g\circ f$ es una función periódica de período 2π.

b) $f\circ g$ es una función periódica de período 2π.

a) $(g\circ f)(x)=\operatorname{sen}\left(e^x\right)$ no es periódica de período 2π, ya que, por ejemplo, $(g\circ f)(0)=\operatorname{sen}1\simeq 0{,}84$ no coincide con $(g\circ f)(2\pi)=\operatorname{sen}\left(e^{2\pi}\right)\simeq 0{,}99$ ..

b) $(f\circ g)(x)=e^{\operatorname{sen} x}$ sí es periódica de período 2π, ya que $(f\circ g)(x+2\pi)=e^{\operatorname{sen}(x+2\pi)}=e^{\operatorname{sen} x}=(f\circ g)(x)$.

PROBLEMAS

82. Un editor sabe que, para la primera edición de un determinado libro, la función oferta es $f_o(p)=282p-422$, mientras que la función demanda viene dada por la expresión $f_d(p)=14\,362-422p$

a) ¿Cuántos ejemplares debe poner a la venta de la primera edición para alcanzar el equilibrio de mercado? Determina cual es el precio al que debe vender el libro.

b) ¿Qué ocurrirá si decide poner el libro a la venta por 15 €? ¿Y si lo pone a 25 €?

a) El equilibrio de mercado se alcanza cuando $f_o(p)=f_d(p)$, es decir, cuando $282p-422=14\,362-422p\Rightarrow$

$\Rightarrow p=21$.Por tanto, debe poner a la venta $f_o(21)=5500$ ejemplares a un precio de 21 € cada ejemplar.

b) Si pone el libro a la venta por 15 € tenemos $f_o(15)=3808$ ejemplares y $f_d(15)=8032$ ejemplares, es decir, se demandan más ejemplares de los que se fabrican, hay un exceso de demanda.

Si pone el libro a la venta por 25 € tenemos $f_o(25)=6628$ ejemplares y $f_d(25)=3812$ ejemplares, es decir, se ofertan más ejemplares de los que se demandan, hay un exceso de oferta.

83. La tabla adjunta muestra el número de conejos, *C*, que hay en un criadero al cabo de *t* meses.

t	0	1	2	3	4	5
C	25	43	75	130	226	391

a) ¿Responde la población de conejos a una función exponencial? ¿Por qué?

b) Encuentra dicha función.

c) ¿Cuánto tiempo, aproximadamente, se necesita para doblar en cualquier momento la población de conejos?

d) ¿Al cabo de cuánto tiempo, aproximadamente, se llegará a una población de 1000 conejos?

e) Si la capacidad del criadero es de 2000 animales y las ventas son, como máximo, de 500 conejos al día, determina en cuánto tiempo se habrá llegado a la saturación de las instalaciones.

a) Sí sigue una ley exponencial, ya que los cocientes de C para valores de t igualmente espaciados son prácticamente constantes: $\frac{43}{25}=1{,}72$ $\frac{75}{43}=1{,}74$ $\frac{130}{75}=1{,}73$ $\frac{226}{130}=1{,}74$ $\frac{391}{226}=1{,}73$

b) $C(t)=C(0)\cdot 1{,}73^t=25\cdot 1{,}73^t$

c) Sea $C(t)$ la población de conejos en el tiempo t, queremos calcular el tiempo T que tiene que pasar para que $c(T+t)=2c(t)$:

$$c(t+T)=2c(t)\Rightarrow 25\cdot 1{,}73^{t+T}=2\cdot 25\cdot 1{,}73^t\Rightarrow 1{,}73^T=2\Rightarrow T\log 1{,}73=\log 2\Rightarrow T=\frac{\log 2}{\log 1{,}73}\simeq 1{,}26 \text{ meses}$$

d) $C(t)=1000\Rightarrow 25\cdot 1{,}73^t=1000\Rightarrow 1{,}73^t=40\Rightarrow t\log 1{,}73=\log 40\Rightarrow t=\frac{\log 40}{\log 1{,}73}\simeq 6{,}73$ meses.

e) Cada mes se vende, como máximo, $30\cdot 500=15000$ conejos. La saturación se producirá el mes en el que el número total de conejos supere los $2000+15000=17000$ conejos. Por tanto:

$$C(t)=17000\Rightarrow 25\cdot 1{,}73^t=17000\Rightarrow 1{,}73^t=680\Rightarrow t\log 1{,}73=\log 680\Rightarrow t=\frac{\log 680}{\log 1{,}73}\simeq 11{,}9$$

Es decir, las instalaciones se saturan a los 12 meses.

84. En los países anglosajones se utilizaba una escala de temperaturas diferentes de la de Celsius: la Fahrenheit. Las temperaturas expresadas en ambas escalas, Celsius (*C*) y Fahrenheit (*F*), se relacionan según la función: $C(F)=\frac{5}{9}(F-32)$

a) ¿Cuántos grados Celsius son 41 ºF?

b) ¿Cuántos grados Fahrenheit son –3 ºC?

c) Halla la función inversa de $C(F)$ que permite pasar de Celsius a Fahrenheit.

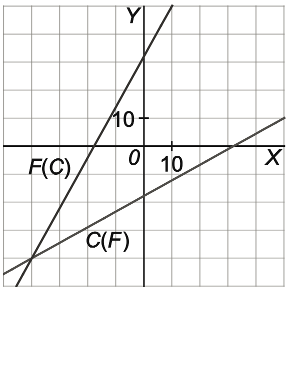
d) Representa, sobre los mismos ejes, la gráfica de la función $C(F)$ y su inversa calculando previamente sus puntos de corte con los ejes.

a) $C(41)=\frac{5}{9}(41-32)=5$ ºC

b) $C(F)=-3\Rightarrow \frac{5}{9}(F-32)=-3\Rightarrow F=26{,}6$ ºF

c) $C=\frac{5}{9}(F-32)\Rightarrow F=\frac{9}{5}C+32\Rightarrow F(C)=\frac{9}{5}C+32$

d) La función $C(F)$ corta a los ejes en los puntos $\left(0,-\frac{160}{9}\right)$ y $(32, 0)$. La función $F(C)$ corta a los ejes en los puntos $(0, 32)$ y $\left(-\frac{160}{9}, 0\right)$. Las gráficas son las rectas adjuntas.



85. La ley de enfriamiento de Newton establece que un objeto caliente se enfría siguiendo una ley exponencial según la expresión: $T(t) = T_{amb} + (T_0 - T_{amb})e^{-kt}$, donde $T(t)$ es la temperatura del objeto después de haber trascurrido t minutos; T_{amb}, la temperatura ambiente; T_0, la temperatura inicial del cuerpo; y k, una constante que depende de la naturaleza del objeto.

Una taza de café en una habitación a 20 ºC se enfría de 80 ºC a 60 ºC en 3 minutos. ¿Cuánto tardará en enfriarse a 30 ºC? ¿Y en alcanzar la temperatura ambiente?

Valor de k: $60 = 20 + (80-20)e^{-3k} \Rightarrow \frac{2}{3} = e^{-3k} \Rightarrow k = \frac{\ln\frac{2}{3}}{-3} \simeq 0{,}14$

Tiempo que tarda en enfriarse a 30 ºC: $30 = 20 + (80-20)e^{-0{,}14t} \Rightarrow \frac{1}{6} = e^{-0{,}14t} \Rightarrow k = \frac{\ln\frac{1}{6}}{-0{,}14} \simeq 12{,}8$ minutos

Tiempo que tarda en enfriarse a 20 ºC: $20 = 20 + (80-20)e^{-0{,}14t} \Rightarrow 0 = e^{-0{,}14t}$ no tiene solución, por tanto, el café nunca llegará a alcanzar la temperatura ambiente.

86. La población de bacterias que crece en un cultivo depende del tiempo, *t*, en minutos, y viene dada por la función $N(t) = \frac{10^9}{1+10^4e^{-t}}$.

a) ¿Cuál es la población inicial ($t = 0$)?

b) Comprueba que la población es siempre positiva, crece a medida que pasa el tiempo y tiende a estabilizarse en un valor.

a) $N(0) = \frac{10^9}{1+10^4} \simeq 99\,990$ bacterias.

b) El numerador y el denominador de la función son positivos, luego la población de bacterias siempre es positiva.

Como e^{-t} disminuye cuando t aumenta, el denominador disminuye con el tiempo y, por tanto, la población aumenta. La población tiende a estabilizarse en $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = 10^9$ bacterias.

87. Las perdidas o ganancias (*y*) en millones de euros de una empresa fundada hace medio año vienen dadas por la expresión $y = \frac{t}{t+3}$ donde *t* es el tiempo expresado en años y el valor $t = 0$ corresponde al momento actual.

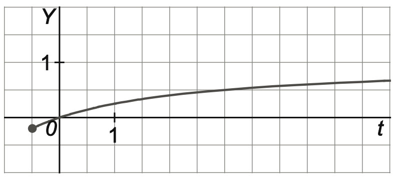
a) Representa gráficamente la función.

b) Calcula la ganancia máxima previsible en el futuro, si existe, y el momento en que se producirá.

c) Halla para qué tiempo las ganancias igualan a las pérdidas que se produjeron en la fundación de la empresa.

d) Razona si tendría sentido aplicar esta misma función al caso de una empresa fundada hace tres años.

a) Según las condiciones dadas, la gráfica sólo tiene sentido si $t \geq -\frac{1}{2}$.



b) $y' = \frac{3}{(t+3)^2}$ es positiva si $t \neq 3$, por tanto, la función es creciente, por lo que no existe ganancia máxima, aunque, como $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{t+3} = 1$, las ganancias aumentaran cada vez más acercándose, pero no alcanzando nunca, el millón de euros.

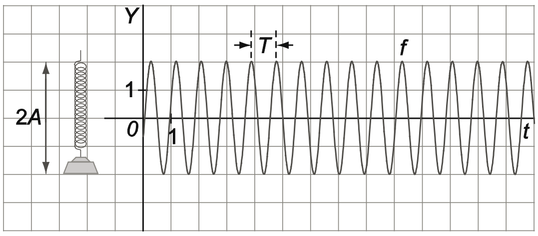
c) Las pérdidas iniciales fueron $\frac{1}{7}$ millones de euros, por tanto, las ganancias igualarán a las pérdidas iniciales cuando $\frac{t}{t+3} = \frac{1}{7} \Rightarrow 7t = t+3 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$, es decir, medio año después de la fundación de la empresa.

d) No tendría sentido, ya que la función no está definida si $t = -3$.

88. **La posición del móvil en un movimiento vibratorio armónico simple es: $y(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \phi_0)$ donde A, ω y ϕ_0 son constantes con $\omega > 0$.**

La amplitud (A) es la máxima separación entre la partícula y la posición de equilibrio.

El período (T) es el tiempo que emplea la partícula en recorrer una oscilación completa y la frecuencia (f) es el número de oscilaciones que realiza por unidad de tiempo.



La función $y(t) = 4\cos(7t - 2)$, donde t se mide en segundos e $y(t)$ en centímetros, describe el movimiento de un muelle al separarlo de su posición de equilibrio. Halla la amplitud, el período y la frecuencia, así como la posición inicial del muelle y para $t = 1$ s.

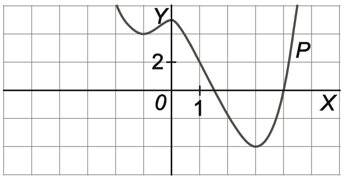
Amplitud: $A = 4$ cm. Período: $y(t) = 4\cos(7t-2) = 4\cos(7t - 2 + 2\pi) = 4\cos\left(7\left(t + \frac{2\pi}{7}\right) - 2\right) = y\left(t + \frac{2\pi}{7}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{7} \simeq 0{,}9$ s.Frecuencia: $f = \frac{1}{T} = \frac{7}{2\pi} \simeq 1{,}11$ oscilaciones por segundo.

Posición inicial: $y(0) = 4\cos(-2) \simeq -1{,}66$ cm. Posición para $t = 1$ s: $y(1) = 4\cos(5) \simeq 1{,}13$ cm.

PARA PROFUNDIZAR

89. **Sea la gráfica de $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$.**



Entre los siguientes números, ¿cuál es el menor?

a) $P(-1)$

b) El producto de las raíces de $P(x)$.

c) El producto de las raíces no reales de $P(x)$.

d) La suma de los coeficientes de $P(x)$.

e) La suma de las raíces reales de $P(x)$.

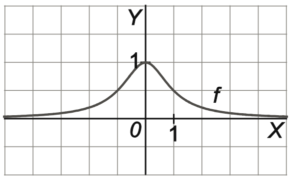
f) $P(0)P(1)$

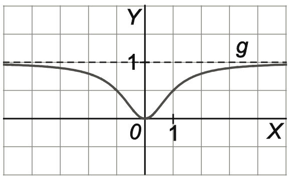
g) $P(0) + P(1)$

$P(-1) = 4$;el producto de todas las raíces de un polinomio es su término independiente, en este caso es $P(0) = 5$; el producto de las raíces reales es $1{,}5 \cdot 4 = 6$, por tanto, el de las raíces no reales es $\frac{5}{6}$; la suma de los coeficientes es $P(1) = 2$; la suma de las raíces reales es $1{,}5 + 4 = 5{,}5$; $P(0)P(1) = 5 \cdot 2 = 10$; $P(0) + P(1) = 5 + 2 = 7$.

Por tanto, el número más pequeño es el producto de las raíces no reales de $P(x)$, $\frac{5}{6}$.

90. **Si la gráfica de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es la que se muestra en el primer recuadro, encuentra una fórmula para la función cuya gráfica es la del segundo recuadro.**



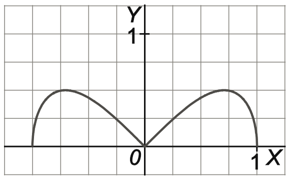


La segunda gráfica se obtiene a partir de la primera en dos pasos. Primero hacemos el simétrico de la gráfica de f respecto del eje X, es decir, es la gráfica de $-f(x)$. Después desplazamos la gráfica resultante una unidad hacia arriba, es decir, la función buscada es $1 - f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$.

91. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sqrt{x^2-x^4}$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{1+|x-1|}+\dfrac{1}{1+|x-4|}$

a) Dominio y continuidad



$D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2-x^4\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}: x^2(1-x^2)\geq 0\}==\{x\in\mathbb{R}: 1-x^2\geq 0\}=[-1,1]$.

La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)=0\Rightarrow(0,0)$

Eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow x^2-x^4=0\Rightarrow x^2(x+1)(x-1)=0\Rightarrow x=0,\ x=-1,\ x=1\Rightarrow(-1,0),\ (0,0)$ y $(1,0)$

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría: $f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

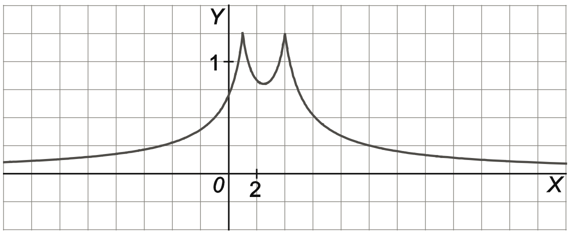
$f'(x)=\dfrac{x-2x^3}{\sqrt{x^2-x^4}}$, se anula si $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ o $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, observemos que el numerador también se anula si $x=0$, pero en este valor también se anula el denominador, por lo que $f'(0)$ no está definido, aún así hay que incluir este valor en el estudio del signo de f', ya que puede haber un cambio de signo al pasar por él. Realizando la correspondiente tabla de signos se obtiene que f' es positiva (f creciente) en $\left(-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y negativa (f decreciente) en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$. Por tanto, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ son máximos relativos (de hecho absolutos) y $(-1,0)$, $(0,0)$ y $(1,0)$ son mínimos absolutos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{x^2(2x^2-3)}{(1-x^2)\sqrt{x^4-x^2}}$ es negativa en el dominio de f (salvo en $x=0$, donde no está definida), ya que $2x^2-3<0$ si $-1\leq x\leq 1$, luego la función es cóncava hacia abajo y no tiene puntos de inflexión.

b) $$f(x)=\frac{1}{1+|x-1|}+\frac{1}{1+|x-4|}=\begin{cases}\dfrac{1}{1+1-x}+\dfrac{1}{1+4-x} & \text{si } x\leq 1\\ \dfrac{1}{1+x-1}+\dfrac{1}{1+4-x} & \text{si } 1<x<4\\ \dfrac{1}{1+x-1}+\dfrac{1}{1+x-4} & \text{si } x\geq 4\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{7-2x}{(2-x)(5-x)} & \text{si } x\leq 1\\ \dfrac{5}{x(5-x)} & \text{si } 1<x<4\\ \dfrac{2x-3}{x(x-3)} & \text{si } x\geq 4\end{cases}$$

Realizando un estudio, que incluya al menos el estudio del dominio, puntos de corte, signo y asíntotas, de las funciones racionales $f_1(x)=\dfrac{7-2x}{(2-x)(5-x)}$, $f_2(x)=\dfrac{5}{x(5-x)}$ y $f_3(x)=\dfrac{2x-3}{x(x-3)}$ y restringiendo el dibujo de sus gráficas al correspondiente intervalo de definición se puede hacer un esbozo de la gráfica de f.



92. Se definen las funciones coseno hiperbólico, cosh *x*, y seno hiperbólico, senh *x*, en la forma:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Por ejemplo, una cadena que cuelga sujeta por sus extremos adopta la forma de un coseno hiperbólico conocido como catenaria.

a) Determina el dominio, el signo, los cortes con los ejes y los límites en el infinito de estas dos funciones.

b) Prueba que $\cosh x$ es una función par y que $\operatorname{senh} x$ es una función impar.

c) Demuestra la relación: $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

d) Representa gráficamente las funciones $\cosh x$ y $\operatorname{senh} x$.

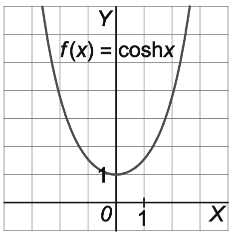
a) Estudiemos primero la función $f(x) = \cosh x$, su dominio es $\mathbb{R}$, corta la eje *Y* en el punto (0, 1), no corta al eje *X* (ya que $f(x) = 0 \Rightarrow e^x + e^{-x} = 0 \Rightarrow e^x = -e^{-x}$ no tiene solución), es siempre positiva, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$.

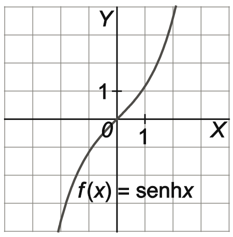
Estudiemos ahora la función $f(x) = \operatorname{senh} x$, su dominio es $\mathbb{R}$, corta la eje *Y* en el punto (0, 0), corta al eje *X* en el punto (0, 0) (ya que $f(x) = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow x = -x \Rightarrow x = 0$), es positiva si $x > 0$ y negativa si $x < 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$.

b) $\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$ y $\operatorname{senh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\operatorname{senh} x$.

c) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{2+2}{4} = 1$

d)





ENTORNO MATEMÁTICO

Un refresco no muy frío

Después de un intenso partido de fútbol, un grupo de amigos compran refrescos en la máquina que hay a la entrada del vestuario. Aunque sus colegas hacen bromas de ello, a Manuel le gusta tomar agua. Para su sorpresa, cuando cae la botella está parcialmente congelada. Los demás se parten de risa y le dicen que pida un cuchillo y un tenedor para tomarla, pero él aguanta las bromas y decide dejarla en unbanco del vestuario pensando: “seguro que mientras de ducho y me visto el hielo se habrá derretido del todo y el agua tendrá una temperatura adecuada para beberla”. Entonces, Quique, el listillo de la clase, le comenta: “hombre, el termómetro del vestuario marca 30 ºC y la ley de enfriamiento de los cuerpos de Newton dice que la temperatura, en grados centígrados, después de *t* minutos viene dada por la función $f(t)=30-Ae^{-kt}$ donde *A* y *k* son constantes. Si calculáramos los valores de *A* y *k*, podríamos estimar en cuánto tiempo podrás beber el agua”.

a) Manuel entra en la ducha, cuando el hielo ya se ha deshecho y el agua está a 0 ºC. Si tarda 20 minutos en estar aseado y vestido y entonces el agua está a unos 5 ºC, ¿podrá, con la ayuda de Quique, calcular los valores de *A* y *k* y saber cuánto tiempo debe esperar para que el agua alcance los 10 ºC y así poder bebérsela?

b) Suponiendo que dejara en la botella una parte del agua a 10 ºC, ¿qué habría pasado con la temperatura si alguien la encontraraal cabo de 1000 años?

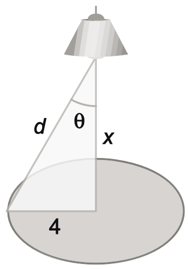
a) Como $f(0)=0$ y $f(20)=5$, secalculan*A* y *k* resolviendo el sistema $\begin{cases}30-A=0\\30-Ae^{-20k}=5\end{cases}$, de donde se obtiene $A=30$ y

$e^{-20k}=\frac{5}{6}\Rightarrow -20k=\ln\left(\frac{5}{6}\right)\Rightarrow k=\frac{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}{-20}\simeq 0{,}009$, luego $f(t)=30-30e^{-0{,}009t}$.Ahora, para saber cuando el agua estará a 10 ºC, se resuelve la ecuación $f(t)=10\Rightarrow 30-30e^{-0{,}009t}=10\Rightarrow e^{-0{,}009t}=\frac{2}{3}\Rightarrow -0{,}009t=\ln\left(\frac{2}{3}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow t=\frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{-0{,}009}\approx 45{,}05$ minutos, es decir, Manuel deberá esperar unos 25 minutos para beberse el agua.

b) Como 10 000 años son muchos minutos se puede saber quéocurrirá calculando $\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(30-30e^{-0{,}009t}\right)=30$, es decir, el agua alcanzará la temperatura del vestuario.

La lámpara colgante



A Eva no le gusta la oscuridad y siempre intenta tener mucha luz en su habitación. Después de protestar mucho a sus padres porque la lámpara de su mesa de estudio da poca luz, consigue que su padre compre una nueva lámpara más potente para el techo del cuarto: “me sale más barato cambiar la lámpara que los analgésicos contra el dolor de cabeza que me producen tus quejas”.

Dicho y hecho, así es que Eva y su jaquecoso padre deciden que la nueva lámpara esté sobre la perpendicular de la pequeña mesa circular de Eva, que tiene 8 dm de diámetro.

La lámpara que han elegido tiene un largo cable para poder ser regulada en altura.

El padre de Eva, lector asiduo de “Bricomatemática”, ha deducido que la iluminación producida por la lámpara en cada punto del borde de la mesa es directamente proporcional al coseno del ángulo θ e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la bombilla.

¿A qué altura de la mesa hay que colocar la lámpara para maximizar la iluminación de la mesa?

AYUDA: La función que da la iluminación es $f=\frac{\cos\theta}{d^2}$ y a partir del teorema de Pitágoras y la trigonometría se pueden hallar los valores del coseno y la distancia en función de *x*.

$d^2 = 16 + x^2$ y $\cos\theta = \dfrac{x}{d} = \dfrac{x}{\sqrt{16+x^2}}$, así, podemos escribir la iluminación como $f(x) = \dfrac{x}{\left(\sqrt{16+x^2}\right)^3}$.

Para encontrar el máximo de esta función cuando $x \geq 0$ se deriva e iguala a 0:

$$f'(x) = \frac{16-2x^2}{\left(\sqrt{16+x^2}\right)^5} = 0 \Rightarrow x = -2\sqrt{2} \text{ (No válida)}, \ x = 2\sqrt{2}$$

Además f' cambia de signo, pasando de ser positiva a ser negativa cuando pasa por el valor $x = 2\sqrt{2}$, por lo que es un máximo relativo, es decir, hay que colgar la lámpara a $2\sqrt{2} \simeq 2{,}83$ dm de la mesa.

NOTA: Solo se ha probado que $x = 2\sqrt{2}$ es un máximo relativo, si se desea confirmar que, de hecho, es absoluto, basta observar que $f(0) = 0$, $f\left(2\sqrt{2}\right) > 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, lo que tiene perfecto sentido físico, ya que si colocamos la lámpara pegada a la mesa o infinitamente alejada de ella, la iluminación se reduce a 0.

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Determina el signo y la simetría de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x-1}$ **b)** $g(x) = x^2 - 4$

$D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, $D(g) = \mathbb{R}$ y $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x+2)(x-2)}{x-1} = (x+2)(x-2) = g(x)$ si $x \neq 1$

La función g es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y negativa en $(-2, 2)$, por tanto, la función f es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y negativa en $(-2, 1) \cup (1, 2)$.

La función g es par, ya que $g(-x) = g(x)$. La función f también cumple $f(-x) = f(x)$ si $x \neq 1$, pero como $f(-1) = -3$ y $f(1)$ no está definido, la función no es par.

2. ¿Cuántas asíntotas tiene la gráfica de la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} e^x - \dfrac{5}{4} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 8} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$?

Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, por tanto, hay que comprobar la posible existencia de asíntotas verticales en $x = 2$ y $x = 0$ (donde la función cambia de expresión).

La recta $x = 2$ no es asíntota vertical, ya que $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 8} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{(x-1)(x-2)}{2(x+2)(x-2)} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{x-1}{2(x+2)} = \dfrac{1}{8}$.

La recta $x = 0$ no es asíntota vertical, ya que $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \left(e^x - \dfrac{5}{4}\right) = -\dfrac{1}{4}$ y $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 8} = -\dfrac{1}{4}$.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x - \dfrac{5}{4}\right) = -\dfrac{5}{4}$, por tanto, la recta $y = -\dfrac{5}{4}$ es la asíntota horizontal en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 8} = \dfrac{1}{2}$, por tanto, la recta $y = \dfrac{1}{2}$ es la asíntota horizontal en $+\infty$.

Asíntotas oblicuas: No puede tener, ya que tiene horizontales.

Por tanto, la gráfica tiene únicamente dos asíntotas, ambas horizontales.

3. **Determina los máximos y mínimos de $f(x)=x^4-x^2+5$.**

$$f'(x)=4x^3-2x=0\Rightarrow x=0,\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se puede estudiar el signo de la derivada para determinar si estos puntos son máximos o mínimos, pero es mucho más sencillo usar la segunda derivada.

$f''(x)=12x^2-2$, como $f''(0)=-2<0$ y $f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4>0$, se obtiene que el punto (0, 5) es un máximo y los puntos $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{19}{4}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{19}{4}\right)$ son mínimos.

4. **Determina todas las asíntotas de la función racional: $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-9}$**

Asíntotas verticales:

Como $D(f)=\mathbb{R}-\{-3,3\}$, las posibles asíntotas verticales son $x=-3$ y $x=3$. Resulta más sencillo el estudio si se obeserva que $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-9}=\dfrac{x(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{x(x-2)}{x+3}$ si $x\neq 3$, así:

La recta $x=-3$ sí es asíntota vertical, ya que $\lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{x(x-2)}{x+3}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-9}=$ $=\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{x(x-2)}{x+3}=+\infty$ .La recta $x=3$ no es asíntota vertical, ya que $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x(x-2)}{x+3}=\dfrac{1}{2}$.

Asíntotas horizontales:

No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-9}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-9}=+\infty$

Asíntotas oblicuas:

Sí tiene, ya que cumple la condición de los grados, dividiendo tenemos $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-9}=x-5+\dfrac{15x-45}{x^2-9}$,por tanto, la recta $y=x-5$ es la asíntota oblicua.

5. **Calcula las asíntotas horizontales, si existen, de la función $f(x)=\dfrac{x^2+e^x}{e^{2x}}$.**

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+e^x}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+e^{-x}}{e^{-2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}\left(x^2+e^{-x}\right)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+e^x}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{e^{2x}}+\dfrac{1}{e^x}\right)=0$, por tanto, la recta $y=0$ es asíntota horizontal por la derecha y no hay asíntota horizontal por la izquierda.

6. **Demuestra que si $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ es la función $f(x)=x\,\mathrm{tg}\,x$, entonces $f(x)$ es no negativa en su dominio y su derivada es $f'(x)=\dfrac{2x+\mathrm{sen}\,2x}{2\cos^2 x}$.**

En el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ tanto x como tg x son negativas, mientras que en $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ambas son positivas, por lo que, en cualquier caso, su producto es positivo. Además $f(0)=0$, lo que prueba que $f(x)$ es no negativa en su dominio.

$$f'(x)=\mathrm{tg}x+x\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\mathrm{sen}x}{\cos x}+\frac{x}{\cos^2 x}=\frac{\mathrm{sen}x\cos x+x}{\cos^2 x}=\frac{2\mathrm{sen}x\cos x+2x}{2\cos^2 x}=\frac{\mathrm{sen}2x+2x}{2\cos^2 x}.$$

7. Si f y g son funciones polinómicas tales que $f(x)=g(x)$ para todos los números x de un cierto intervalo $[a, b]$, ¿puede existir algún número real c para el que $f(c)\neq g(c)$?

No puede existir tal número real. El polinomio $P(x)=f(x)-g(x)$ tiene infinitas raíces (todos los números del intervalo $[a, b]$), por tanto debe ser el polinomio nulo, $P(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, por tanto $f(x)=g(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

8. ¿Tiene asíntotas verticales u horizontales la función $f(x)=\ln\left(e^x+1\right)$?

Como $e^x+1>1$ para todo $x\in\mathbb{R}$, el dominio de f es $\mathbb{R}$ y, por tanto, no hay asíntotas verticales.

La recta $y=0$ es asíntota horizontal por la izquierda, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e^x+1\right)=\ln 1=0$.

No hay asíntota horizontal por la derecha, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^x+1\right)=+\infty$.

9. Sea f la función definida en $(0, +\infty)$ por la fórmula $f(x)=2x+3-\ln x$. Señala las afirmaciones correctas:

a) f es creciente.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=3$

c) f tiene una asíntota oblicua.

d) La gráfica de f siempre está por debajo de la recta $y=2x+3$.

a) Falsa. $f'(x)=2-\dfrac{1}{x}$ es negativa en el intervalo $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, por lo que en este intervalo la función es decreciente.

b) Falsa, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+3-\ln x)=+\infty$

c) Falsa, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{\ln x}{x}\right)=2$ pero $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(3-\ln x)=-\infty$.

d) Falsa. $f(x)-(2x+3)=-\ln x$ es negativa en el intervalo (0, 1), por lo que en este intervalo la función está por debajo de la recta.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Considera la función $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$. Entonces:

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

B. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

C. f no es derivable en $x=0$.

D. f tiene un máximo absoluto en $\mathbb{R}$.

A y B son falsas, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}-xe^x=-\infty$.

$f'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\dfrac{1-x}{e^x}$, con lo que C es falsa, ya que f' está definida si $x=0$, de hecho, $f'(0)=1$.

D es verdadera, ya que f' es positiva si $x<1$ y negativa si $x>1$, por lo que la función f es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$, lo que implica que en el punto de abscisa $x=1$ hay un máximo absoluto que es $f(1)=\dfrac{1}{e}$.

2. **Si $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$, entonces:**

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

B. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

C. *f* tiene un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$.

D. *f* es derivable en $\mathbb{R}$.

A y B son falsas, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{(x-1)^2}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{(x-1)^2}=+\infty$.

$f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$ no está definida si $x=1$, por tanto D es falsa.

C es verdadera, ya que *f ′* es negativa si $x<1$ y positiva si $x>1$, por lo que la función *f* es decreciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(1,+\infty)$, lo que implica que en el punto de abscisa $x=1$ hay un mínimo absoluto, aunque $f'(1)$ no esté definido. El mínimo es $f(1)=0$

3. **Si $f(x)=x-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x$, entonces:**

A. Existe un número real *M* tal que $f(x)\le M$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

B. Existe un número real *T* tal que $T\le f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

C. La gráfica de *f* corta al eje *X* en un punto de abscisa positiva.

D. La gráfica de *f* corta solo una vez al eje horizontal.

Como $-1\le \operatorname{sen} x\le 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\le\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2}\le -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\le\frac{1}{2}\Rightarrow x-\frac{1}{2}\le x-\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\le x+\frac{1}{2}\Rightarrow x-\frac{1}{2}\le f(x)\le x+\frac{1}{2}$ para todo $x\in\mathbb{R}$, A y B son falsas, ya que, por ejemplo, si A fuera verdadera, tendríamos que $x-\frac{1}{2}\le M\Rightarrow x\le M+\frac{1}{2}$ para todo $x\in\mathbb{R}$, lo que es obviamente falso.

Observemos que $f'(x)=1-\frac{1}{2}\cos x$ es positiva para todo $x\in\mathbb{R}$, por lo que *f* es creciente, con lo que cortará al eje *X* como máximo en un punto. Como $f(0)=0$ tenemos que C es falsa y D verdadera.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^{x-1}}$. Entonces:**

A. *f* es continua en $\mathbb{R}$.

B. *f* es creciente en $\mathbb{R}$.

C. $y=e$ es asíntota horizontal de *f*.

D. Si $x>0$, $f'(x)<e$.

El denominador de *f* no se anula nunca, por lo que $D(f)=\mathbb{R}$ y *f* es continua en su dominio, con lo que A es verdadera.

$f'(x)=\dfrac{e^x e^{x-1}-\left(e^x-1\right)e^{x-1}}{e^{2(x-1)}}=\dfrac{e^{2x-1}-e^{2x-1}+e^{x-1}}{e^{2(x-1)}}=\dfrac{e^{x-1}}{e^{2(x-1)}}=\dfrac{1}{e^{x-1}}$ es positiva para todo $x\in\mathbb{R}$, por lo que B es cierta. Además, $f'(x)=\dfrac{1}{e^{x-1}}<\dfrac{1}{e^{-1}}=e$ si $x>0$, por lo que D también es verdadera.

Finalmente, C también es verdadera, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{e^{x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e-\dfrac{1}{e^{x-1}}\right)=e$.

5. **Sea** $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}}$**. Entonces:**

A. f es continua en $\mathbb{R}$.

B. La gráfica de f no tiene asíntotas.

C. La recta $y=x-2$ es asíntota de la gráfica de f.

D. La recta $y=x+2$ es asíntota de la gráfica de f.

$x^2+4x+5>0$ para todo x, por lo que $D(f)=\mathbb{R}$ y f es continua en su dominio, es decir, A es verdadera.

La recta $y=x-2$ es la asíntota oblicua por la derecha de la gráfica de f, con lo que C será verdadera y, por tanto, B falsa: $m_\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x\sqrt{x^2+4x+5}}=1$

$$n_\infty=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x\sqrt{x^2+4x+5}}{\sqrt{x^2+4x+5}}\right)=-2,$$

Finalmente, D es falsa, ya que, de ser cierta, la recta $y=x+2$ (de pendiente 1) debería ser la asíntota oblicua por la izquierda, pero, de existir dicha asíntota, su pendiente sería

$$m_{-\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(-x)}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-x\sqrt{x^2-4x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}=-1.$$

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. **Considera la parábola** $f(x)=px-x^2$**. Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones siguientes:**

1. La recta $y=2x$ es la tangente en el origen.

2. Si $x>2$, entonces $f(x)<0$.

A. $1\Rightarrow 2$ pero $2\not\Rightarrow 1$ **B.** $2\Rightarrow 1$ pero $1\not\Rightarrow 2$ **C.** $1\Leftrightarrow 2$ **D.** Nada de lo anterior.

La recta tangente a la parábola en el origen es $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=px$, por tanto, si 1 es cierta deduciríamos que $p=2$, con lo que $f(x)=2x-x^2=x(2-x)$ y 2 sería cierta, es decir, $1\Rightarrow 2$.

En cambio $2\not\Rightarrow 1$, ya que, por ejemplo, si $p=1$ se verifica 2 pero no 1.

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Para calcular los máximos y mínimos relativos de la función** $f(x)=e^{x^3+ax^2+bx+c}$**, nos dan los siguientes datos:**

1. El valor de a

2. El valor de b

3. El valor de c

En estas circunstancias puede eliminarse:

A. El dato 1

B. El dato 2

C. Puede eliminarse el dato 3

D. No puede eliminarse ningún dato

La función es derivable en todo $\mathbb{R}$, por tanto, para calcular las abscisas de los máximos y mínimos relativos bastaría estudiar el signo de $f(x)=e^{x^3+ax^2+bx+c}\left(3x^2+2ax+b\right)$, pero como $e^{x^3+ax^2+bx+c}$ es positivo, bastaría estudiar el signo de $3x^2+2ax+b$, por lo que podría eliminarse el dato 3.

Ahora bien, si no basta con conocer la abscisa de los extremos relativos y tambiénse quiere conocer su ordenada en el origen, no se puede eliminar ningún dato. Respuesta D.

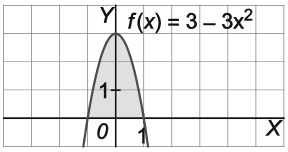
11 Integración

EJERCICIOS PROPUESTOS

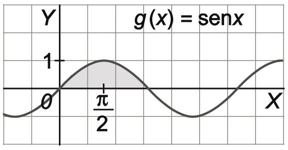
1. Ejercicio resuelto.

2. Calcula el área de las regiones sombreadas.

a)



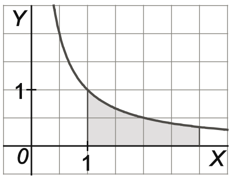
b)



a) La función $F(x) = 3x - x^3$ verifica $F'(x) = f(x)$, por tanto, el área pedida es $F(1) - F(-1) = 2 - (-2) = 4$ u^2.

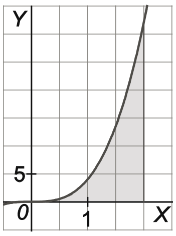
b) La función $G(x) = -\cos x$ verifica $G'(x) = g(x)$, por tanto, el área pedida es $G(\pi) - G(0) = 1 - (-1) = 2$ u^2.

3. Halla el área del recinto limitado por el eje de abscisas, la curva $y = \frac{1}{x}$ y las rectas verticales $x = 1$, $x = 3$.



$F(x) = \ln x$ verifica $F'(x) = \frac{1}{x}$, por tanto, el área pedida es $F(3) - F(1) = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$ u^2.

4. Calcula el área de la zona limitada por la gráfica de $y = 4x^3$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.



$F(x) = x^4$ verifica $F'(x) = 4x^3$, por tanto, el área pedida es $F(2) - F(0) = 16 - 0 = 16$ u^2.

5 a 8. Ejercicios resueltos.

9. Halla las primitivas de las funciones siguientes.

a) $f(x)=2x^5-3x^3+2x-1$ **c)** $f(x)=\frac{x}{4}-1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}$ **e)** $f(x)=3^x-\frac{4}{\sqrt{x}}$ **g)** $f(x)=\sqrt[3]{x}-\cos x$

b) $f(x)=3x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$ **d)** $f(x)=-3e^x$ **f)** $f(x)=5\,\text{sen}\,x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **h)** $f(x)=\frac{4}{1+x^2}-\frac{3\cos x}{5}$

a) $\int\left(2x^5-3x^3+2x-1\right)dx=\frac{x^6}{3}-\frac{3x^4}{4}+x^2-x+C$

b) $\int\left(3x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)dx=x^3+\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+C$

c) $\int\left(\frac{x}{4}-1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx=\int\left(\frac{x}{4}-1+3x^{-1}-2x^{-2}\right)dx=\frac{x^2}{8}-x+3\ln|x|-2\frac{x^{-1}}{-1}+C=\frac{x^2}{8}-x+3\ln|x|+\frac{2}{x}+C$

d) $\int -3e^x\,dx=-3e^x+C$

e) $\int\left(3^x-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(3^x-4x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{3^x}{\ln 3}-4\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{3^x}{\ln 3}-8\sqrt{x}+C$

f) $\int\left(5\,\text{sen}\,x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=-5\cos x-\text{arcsen}\,x+C$

g) $\int\left(\sqrt[3]{x}-\cos x\right)dx=\int\left(x^{\frac{1}{3}}-\cos x\right)dx=\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-\text{sen}\,x+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}-\text{sen}\,x+C$

h) $\int\left(\frac{4}{1+x^2}-\frac{3\cos x}{5}\right)dx=4\,\text{arctg}\,x-\frac{3\,\text{sen}\,x}{5}+C$

10. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int\left(2x^4-3x^2+1\right)dx$ **c)** $\int\frac{\sqrt{x}-x^3+2x}{x^2}dx$ **e)** $\int\left(\cos x-2^x+x^2\right)dx$

b) $\int\left(x^3-\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)dx$ **d)** $\int\sqrt[3]{\sqrt{x^7}}\,dx$ **f)** $\int\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2e^x}{7}\right)dx$

a) $\int\left(2x^4-3x^2+1\right)dx=\frac{2x^5}{5}-x^3+x+C$

b) $\int\left(x^3-\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)dx=\int\left(x^3-x^{-2}+x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{x}+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+C$

c) $\int\frac{\sqrt{x}-x^3+2x}{x^2}dx=\int\left(x^{-\frac{3}{2}}-x+2x^{-1}\right)dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}-\frac{x^2}{2}+2\ln|x|+C=-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{x^2}{2}+2\ln|x|+C$

d) $\int\sqrt[3]{\sqrt{x^7}}\,dx=\int x^{\frac{7}{6}}\,dx=\frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}}+C=\frac{6\sqrt[6]{x^{13}}}{13}+C$

e) $\int\left(\cos x-2^x+x^2\right)dx=\text{sen}\,x-\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{x^3}{3}+C$

f) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2e^x}{7}\right)dx=3\,\text{arcsen}\,x-\frac{2e^x}{7}+C$

11. Halla las primitivas de la función $f(x) = 5 + \text{tg}^2 x + 2\cos x$.

$$\int \left(5 + \text{tg}^2 x + 2\cos x\right) dx = \int \left(4 + 1 + \text{tg}^2 x + 2\cos x\right) dx = 4x + \text{tg}\, x + 2\,\text{sen}\, x + C$$

12. Ejercicio resuelto.

13. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\displaystyle\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}}\,dt$ **c)** $\displaystyle\int (x^2+1)^{20} 5x\,dx$ **e)** $\displaystyle\int \frac{e^s}{1+e^{2s}}\,ds$

b) $\displaystyle\int \frac{e^{2s}}{1+e^{2s}}\,ds$ **d)** $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln t)}{t}\,dt$ **f)** $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}}\,dt = \frac{1}{2}\int \left(t^2+2t+3\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(t+1)dt = \frac{1}{2}\,\frac{\left(t^2+2t+3\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{t^2+2t+3} + C$

b) $\displaystyle\int \frac{e^{2s}}{1+e^{2s}}\,ds = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2s}}{1+e^{2s}}\,ds = \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2s}\right) + C$

c) $\displaystyle\int (x^2+1)^{20} 5x\,dx = \frac{5}{2}\int (x^2+1)^{20} 2x\,dx = \frac{5}{2}\,\frac{(x^2+1)^{21}}{21} + C = \frac{5}{42}(x^2+1)^{21} + C$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln t)}{t}\,dt = \int \cos(\ln t) \cdot \frac{1}{t}\,dt = \text{sen}(\ln t) + C$

e) $\displaystyle\int \frac{e^s}{1+e^{2s}}\,ds = \int \frac{e^s}{1+\left(e^s\right)^2}\,ds = \text{arctg}\, e^s + C$

f) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}\,dx = \text{arcsen}\, x^2 + C$

14. Halla las primitivas de las funciones siguientes.

a) $f(x) = \text{sen}\, x \cos^4 x$ **b)** $f(x) = \dfrac{\cos x}{\text{sen}^3 x}$ **c)** $f(x) = \text{tg}(3x+2)$ **d)** $f(x) = \text{cotg}\, x$

a) $\displaystyle\int \text{sen}\, x \cos^4 x\,dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + C$

b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\text{sen}^3 x}\,dx = \int \text{sen}^{-3} x \cos x\,dx = \frac{\text{sen}^{-2} x}{-2} + C = -\frac{1}{2\,\text{sen}^2 x} + C$

c) $\displaystyle\int \text{tg}(3x+2)\,dx = \int \frac{\text{sen}(3x+2)}{\cos(3x+2)}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3\,\text{sen}(3x+2)}{\cos(3x+2)}\,dx = -\frac{1}{3}\ln\left|\cos(3x+2)\right| + C$

d) $\displaystyle\int \text{cotg}\, x\,dx = \int \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}\,dx = \ln\left|\text{sen}\, x\right| + C$

15. Ejercicio interactivo.

16. Ejercicio resuelto.

17. Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{-1}^{1} x\left(x^2-1\right)dx$ **b)** $\int_{0}^{1} \cos x\, dx$ **c)** $\int_{0}^{3}\left(2x^4-3x+\sqrt{x}\right)dx$ **d)** $\int_{-1}^{1}\left(4e^x-x\right)dx$

a) $\int_{-1}^{1} x\left(x^2-1\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3-x\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=0$

b) $\int_{0}^{1}\cos x\, dx=\left[\operatorname{sen} x\right]_0^1=\operatorname{sen}1-\operatorname{sen}0=\operatorname{sen}1$

c) $\int_{0}^{3}\left(2x^4-3x+\sqrt{x}\right)dx=\left[\frac{2x^5}{5}-\frac{3x^2}{2}+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^3=\left(\frac{486}{5}-\frac{27}{2}+\frac{2\sqrt{27}}{3}\right)-0=\frac{837}{10}+2\sqrt{3}$

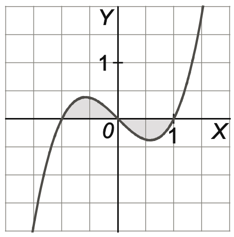
d) $\int_{-1}^{1}\left(4e^x-x\right)dx=\left[4e^x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\left(4e-\frac{1}{2}\right)-\left(4e^{-1}-\frac{1}{2}\right)=4e-\frac{4}{e}=\frac{4e^2-4}{e}$

18. Calcula el área encerrada por el eje X, la gráfica de $f(x)=x\left(x^2-1\right)$ y las rectas verticales $x=-1$ y $x=1$.

Al dibujar el recinto se observa que un trozo está por debajo del eje *X* y otro por encima.

Como la función es simétrica respecto del origen, ya que $f(-x)=-f(x)$, el área pedida es:

$$2\int_{-1}^{0} x\left(x^2-1\right)dx=2\int_{-1}^{0}\left(x^3-x\right)dx=2\cdot\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=2\cdot\left[0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\ \text{u}^2.$$



19. Ejercicio interactivo.

20. Ejercicio resuelto.

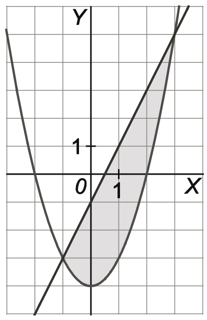
21. Calcula el área encerrada entre las curvas $f(x)=x^2-4$ y $g(x)=2x-1$.

Se calculan los puntos de corte de las funciones:

$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-4=2x-1\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x=-1,\ x=3$

En el intervalo [–1, 3] tenemos $g(x)\geq f(x)$, por tanto, el área pedida es:

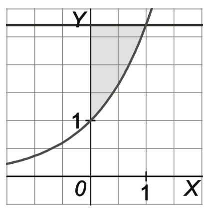
$$A=\int_{-1}^{3}\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_{-1}^{3}\left(-x^2+2x+3\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{3}=9-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{32}{3}\ \text{u}^2$$



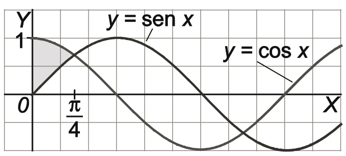
22. Calcula el área de la región limitada por el eje *Y*, la recta $y=e$ y la curva $y=e^x$.

Como la curva $y=e^x$ y la recta $y=e$ se cortan si $x=1$, el recinto es el mostrado en la figura. Como en dicho recinto la recta está por encima de la curva, el área pedida es:

$$A=\int_{0}^{1}\left(e-e^x\right)dx=\left[ex-e^x\right]_0^1=0-(-1)=1\ \text{u}^2$$



23. Calcula el área sombreada en la figura.



El área es $A=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos x-\operatorname{sen} x\right)dx=\left[\operatorname{sen} x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1\ \text{u}^2$

24. Calcula el área encerrada entre las curvas $f(x) = x(x-1)(x-2)$ y $g(x) = x(x-1)$.

Se calculan los puntos de corte de las funciones:

$f(x) = g(x) \Rightarrow x(x-1)(x-2) = x(x-1) \Rightarrow x(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = 3$

En el intervalo [0, 1]se cumple que $f(x) \geq g(x)$, mientras que en [1, 3] $g(x) \geq f(x)$, por tanto:

$$A = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx + \int_1^3 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^1 \left(x^3 - 4x^2 + 3x\right)dx + \int_1^3 \left(-x^3 + 4x^2 - 3x\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}\ \text{u}^2.$$

25. En cada caso, calcula el espacio neto recorrido por el móvil cuya velocidad se proporciona, en el intervalo de tiempo considerado.

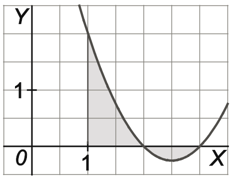
a) $v(t) = t^2 - 5t + 6\ (\text{ms}^{-1})$ en $t \in [1, 3]$ (s)

b) $v(t) = 19{,}6 - 9{,}8t\ (\text{ms}^{-1})$ en $t \in [0, 3]$ (s)

c) $v(t) = 2\cos t\ (\text{ms}^{-1})$ en $t \in [0, 2\pi]$ (s)

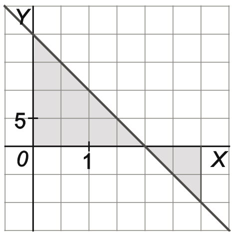
El espacio neto es igual al área encerrada entre la función velocidad y el eje X en el intervalo considerado.

a) La función corta al eje X si $v(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t = 2,\ t = 3$, y ambos valores pertenecen al intervalo [1, 3]. Como $v(t) \geq 0$ si $1 \leq t \leq 2$ y $v(t) \leq 0$ si $2 \leq t \leq 3$, el espacio neto recorrido es:



$$e = \int_1^2 \left(t^2 - 5t + 6\right)dt - \int_2^3 \left(t^2 - 5t + 6\right)dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 6t\right]_1^2 - \left[\frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 6t\right]_2^3 = \frac{5}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right) = 1\ \text{m}$$

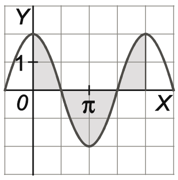
b) La función corta al eje X si $v(t) = 0 \Rightarrow 19{,}6 - 9{,}8t = 0 \Rightarrow t = 2$, que pertenece al intervalo [0, 3]. Como $v(t) \geq 0$ si $0 \leq t \leq 2$ y $v(t) \leq 0$ si $2 \leq t \leq 3$, el espacio neto recorrido es:



$$e = \int_0^2 (19{,}6 - 9{,}8t)\,dt - \int_2^3 (19{,}6 - 9{,}8t)\,dt = \left[19{,}6t - \frac{9{,}8t^2}{2}\right]_0^2 - \left[19{,}6t - \frac{9{,}8t^2}{2}\right]_2^3 =$$

$$= 19{,}6 - (-4{,}9) = 24{,}5\ \text{m}.$$

c) La función corta al eje X si $v(t) = 0 \Rightarrow \cos t = 0$, cuyas soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$ son $t = \frac{\pi}{2}$ y $t = \frac{3\pi}{2}$. El espacio neto recorrido es 4 veces el área encerrada por la función y el eje X en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, es decir: $e = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\,dt = 4\left[2\,\text{sen}\,t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\ \text{m}$.

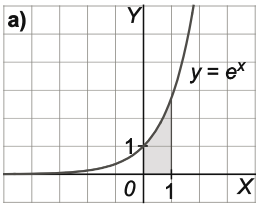


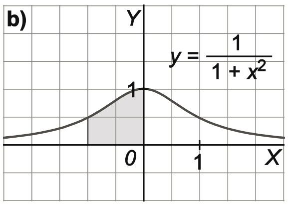
26 a 33. Ejercicios resueltos.

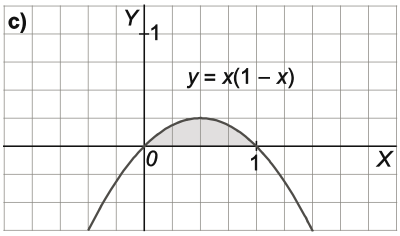
EJERCICIOS

Área bajo una curva. Teorema fundamental del cálculo

34. Calcula el área de las siguientes regiones.





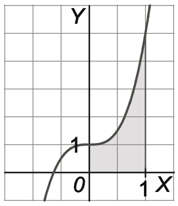


a) La función $F(x)=e^x$ verifica $F'(x)=f(x)$, por tanto, el área pedida es $F(1)-F(0)=e-1$ u^2.

b) La función $F(x)=\operatorname{arctg} x$ verifica $F'(x)=f(x)$, por tanto, el área pedida es $F(0)-F(-1)=0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$ u^2.

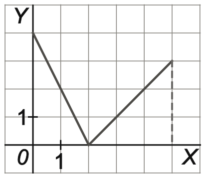
c) La función $F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ verifica $F'(x)=f(x)$, por tanto, el área pedida es $F(1)-F(0)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{1}{6}$ u^2.

35. Calcula el área de la región limitada por el eje de abscisas, el eje de ordenadas, la curva $y=4x^3+1$ y la recta $x=1$.



La función $F(x)=x^4+x$ verifica $F'(x)=f(x)$, por tanto, el área pedida es $F(1)-F(0)=2-0=2$ u^2.

36. Obtén la función $F(x):[0,5]\to\mathbb{R}$, tal que $F(x)$ mida el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)=\begin{cases}-2x+4 & \text{si } 0\le x\le 2\\ x-2 & \text{si } 2<x\le 5\end{cases}$, el eje horizontal y la vertical que pasa por el punto de abscisax. Debes distinguir entre 0 ≤x ≤ 2 y 2 ≤x≤ 5. Calcula también la derivada de la función $F(x)$.



Si $0\le x\le 2$, la forma más cómoda de calcular el valor $F(x)$ es restar áreas de triángulos:

$$F(x)=4-\frac{1}{2}(2-x)(-2x+4)=4-(2-x)^2$$

Si $2<x\le 5$, se obtiene $F(x)$ sumando áreas de triángulos: $F(x)=4+\frac{1}{2}(x-2)(x-2)=4+\frac{1}{2}(x-2)^2$

De este modo: $F(x)=\begin{cases}4-(2-x)^2 & \text{si } 0\le x\le 2\\ 4+\dfrac{(x-2)^2}{2} & \text{si } 2<x\le 5\end{cases}\Rightarrow F'(x)=\begin{cases}2(2-x) & \text{si } 0\le x<2\\ x-2 & \text{si } 2<x\le 5\end{cases}$, además $F'(2^-)=F'(2^+)=0$,

por tanto: $F'(x)=\begin{cases}2(2-x) & \text{si } 0\le x\le 2\\ x-2 & \text{si } 2<x\le 5\end{cases}=\begin{cases}-2x+4 & \text{si } 0\le x\le 2\\ x-2 & \text{si } 2<x\le 5\end{cases}=f(x)$ como afirma el teorema fundamental del cálculo.

Primitiva. Integral indefinida

37. Halla la función cuya derivada es la constante $k=5$, y corta al eje de ordenadas en el punto $y=3$.

La función buscada, $F(x)$, es una primitiva de $f(x)=5$, es decir, $F(x)=\int 5\,dx=5x+C$. Como, además, debe cortar al eje de ordenadas en $y=3$, obtenemos $C=3\Rightarrow F(x)=5x+3$.

38. Halla la función cuadrática tal que su derivada es la recta $y = 4x + 5$ y pasa por el punto (–1, 3).

La función buscada, $F(x)$, es una primitiva de $f(x) = 4x + 5$, es decir, $F(x) = \int (4x+5)\,dx = 2x^2 + 5x + C$. Como, además, ha de pasar por el punto (–1, 3), obtenemos: $F(-1) = 3 \Rightarrow 2 - 5 + C = 3 \Rightarrow C = 6 \Rightarrow F(x) = 2x^2 + 5x + 6$.

39. Calcula una función f que pase por el origen y cuya derivada sea $f'(x) = \sqrt{x} + 2x\sqrt{x}$.

La función f es una primitiva de $f'(x)$, es decir, $f(x) = \int \left(\sqrt{x} + 2x\sqrt{x}\right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C =$

$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + C$. Como, debe pasar por el origen: $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{4}{5}\sqrt{x^5}$

40. La derivada del producto dice que si $F(x) = f(x)g(x)$ entonces $F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Basándose en esto, se puede calcular la siguiente integral:

$$\int \left(2x\cos x - x^2 \operatorname{sen} x\right) dx = x^2 \cos x + C$$

ya que, en este caso, $f(x) = x^2$ y $g(x) = \cos x$ y la integral es el producto $F(x) = f(x)g(x)$.

Siguiendo el resultado anterior, identifica las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en los siguientes casos y calcula estas integrales:

a) $\int \left(2xe^x + x^2e^x\right) dx$ **c)** $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx$ **e)** $\int \left(e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x\right) dx$

b) $\int (1 + \ln x)\,dx$ **d)** $\int \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + (\ln x)\cos x\right) dx$ **f)** $\int \left(e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x\right) dx$

a) $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x \Rightarrow \int \left(2xe^x + x^2e^x\right) dx = \int \left(x^2e^x\right)' dx = x^2e^x + C$.

b) $\int (1 + \ln x)\,dx = \int \left(x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x\right) dx = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx$ con $f(x) = x$ y $g(x) = \ln x$, por tanto, tenemos $\int (1 + \ln x)\,dx = x\ln x + C$.

c) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \ln x \Rightarrow \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx = \int \left(\sqrt{x}\ln x\right)' dx = \sqrt{x}\ln x + C$

d) $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow \int \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + (\ln x)\cos x\right) dx = \int (\ln x \cdot \operatorname{sen} x)'\,dx = \ln x \cdot \operatorname{sen} x + C$

e) $f(x) = e^x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow \int \left(e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x\right) dx = \int \left(e^x \operatorname{sen} x\right)' dx = e^x \operatorname{sen} x + C$

f) $\int \left(e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x\right) dx = \int \left(-e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x\right) dx = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx$ con $f(x) = e^x$ y $g(x) = -\cos x$, por tanto, tenemos $\int \left(e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x\right) dx = -e^x \cos x + C$.

41. Calcula la función que tiene por derivada $f'(x) = x + 1$ y corta a la bisectriz del primer cuadrante en el punto de abscisa –2.

$f(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$, además $f(-2) = -2$, por tanto: $2 - 2 + C = -2 \Rightarrow C = -2 \Rightarrow f(x) = f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 2$.

42. Halla dos funciones que tengan por derivada $f'(x)=3x^2+4x+2$ de tal forma que cada una de ellas pase por una de las intersecciones de la curva $y=x^2+1$ con la recta $y=x+3$.

Las funciones buscadas son primitivas de $f'(x)$, es decir, son de la forma $f(x)=x^3+2x^2+2x+C$.

Los puntos de intersección de $y=x^2+1$ con $y=x+3$ son: $x^2+1=x+3 \Rightarrow x=-1,\ x=2 \Rightarrow P_1(-1,\ 2)$ y $P_2(2,\ 5)$

Las funciones son: $f_1(-1)=2 \Rightarrow C=3 \Rightarrow f_1(x)=x^3+2x^2+2x+3$ y $f_2(2)=5 \Rightarrow C=-15 \Rightarrow f_2(x)=x^3+2x^2+2x-15$

Primitivas inmediatas

43. Identifica cada una de las primitivas siguientes con una de la tabla de primitivas inmediatas y a continuación, resuélvelas.

a) $\int\left(3x^3-2x^2+x-1\right)dx$

b) $\int\left(\frac{x^2}{3}-5x+\frac{2}{5}\right)dx$

c) $\int\left(\frac{1}{x}+2\right)dx$

d) $\int(3x-5)^2\,dx$

e) $\int\left(x^6+4x^2+4x\right)\left(6x^2+3\right)dx$

f) $\int\frac{x}{1+x^4}\,dx$

g) $\int\frac{x^3-5x^2+3}{x}\,dx$

h) $\int\frac{x^4+2x^2-1}{2\sqrt{x}}\,dx$

i) $\int\frac{6x}{9x^4+12x^2+5}\,dx$

j) $\int x^3\sqrt[4]{x^5}\,dx$

k) $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

l) $\int x\left(x^2-1+\sqrt[3]{x^2-1}\right)dx$

a) Tipo 1: $\int\left(3x^3-2x^2+x-1\right)dx=\frac{3x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+C$

b) Tipo 1: $\int\left(\frac{x^2}{3}-5x+\frac{2}{5}\right)dx=\frac{x^3}{9}-\frac{5x^2}{2}+\frac{2x}{5}+C$

c) Tipos 1 y 2: $\int\left(\frac{1}{x}+2\right)dx=\ln|x|+2x+C$

d) Tipo 1: $\int(3x-5)^2\,dx=\frac{1}{3}\int 3(3x-5)^2\,dx=\frac{1}{3}\frac{(3x-5)^3}{3}+C=\frac{(3x-5)^3}{9}+C$

e) Tipo 1: $\int\left(x^6+4x^2+4x\right)\left(6x^2+3\right)dx=\int\left(6x^8+3x^6+24x^4+24x^3+12x^2+12x\right)dx=$

$=\frac{2x^9}{3}+\frac{3x^7}{7}+\frac{24x^5}{5}+6x^4+4x^3+6x^2+C$

f) Tipo 9: $\int\frac{x}{1+x^4}\,dx=\int\frac{x}{1+\left(x^2\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+\left(x^2\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x^2\right)+C$

g) Tipos 1 y 2: $\int\frac{x^3-5x^2+3}{x}\,dx=\int\left(x^2-5x+\frac{3}{x}\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+3\ln|x|+C$

h) Tipo 1: $\int\frac{x^4+2x^2-1}{2\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{2}\int x^{\frac{7}{2}}\,dx+\int x^{\frac{3}{2}}\,dx-\frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{x^{\frac{9}{2}}}{9}+\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}-x^{\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{9}\sqrt{x^9}+\frac{2}{5}\sqrt{x^5}-\sqrt{x}+C$

i) Tipo 9: $\int\frac{6x}{9x^4+12x^2+5}\,dx=\int\frac{6x}{1+\left(3x^2+2\right)^2}\,dx=\operatorname{arctg}\left(3x^2+2\right)+C$

j) Tipo 1: $\int x^3\sqrt[4]{x^5}\,dx=\int x^{\frac{17}{4}}\,dx=\frac{4}{21}x^{\frac{21}{4}}+C=\frac{4\sqrt[4]{x^{21}}}{21}+C=\frac{4x^5\sqrt[4]{x}}{21}+C$

k) Tipo 1: $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\int\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}x\,dx=\frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}2x\,dx=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{1+x^2}+C$

l) Tipo 1: $\int x\left(x^2-1+\sqrt[3]{x^2-1}\right)dx=\int\left(x^3-x+x\sqrt[3]{x^2-1}\right)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int 2x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}\,dx=$

$=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}\left(x^2-1\right)^{\frac{4}{3}}+C=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}{8}+C$

44. Para cada una de las primitivas siguientes, identifícalas con una de la tabla de primitivas inmediatas y resuélvelas.

a) $\int \operatorname{sen} 2x\, dx$

b) $\int \left(\operatorname{sen} x + \frac{2}{1+x^2} \right) dx$

c) $\int \operatorname{tg}(3x)\, dx$

d) $\int x e^{x^2}\, dx$

e) $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx$

f) $\int x^2 5^{x^3-1}\, dx$

g) $\int \sqrt{\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi)} \cos\alpha\, d\alpha$

h) $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

i) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\, dx$

j) $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

k) $\int e^{2x} \sqrt[7]{e^{2x}+1}\, dx$

l) $\int \frac{\cos x}{3\operatorname{sen}^4 x}\, dx$

a) Tipo 5: $\int \operatorname{sen} 2x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\operatorname{sen} 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

b) Suma de primitivas de tipo 5 y 9: $\int \left(\operatorname{sen} x + \frac{2}{1+x^2} \right) dx = -\cos x + 2\operatorname{arctg} x + C$

c) Tipo 2: $\int \operatorname{tg}(3x)\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)}\, dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)}\, dx = -\frac{1}{3}\ln|\cos(3x)| + C$

d) Tipo 3: $\int x e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int 2x e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

e) Tipo 1: $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx = -\int \cos^3 x(-\operatorname{sen} x)\, dx = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$

f) Tipo 4: $\int x^2 5^{x^3-1}\, dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 5^{x^3-1}\, dx = \frac{5^{x^3-1}}{3\ln 5} + C$

g) Tipo 1: $\int \sqrt{\operatorname{sen}(\alpha+2\pi)} \cos\alpha\, d\alpha = \int \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} \alpha \cdot \cos\alpha\, d\alpha = \frac{2\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \alpha}{3} + C = \frac{2\sqrt{\operatorname{sen}^3 \alpha}}{3} + C$

h) Tipo 9: $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx = \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) + C$

i) Tipo 1: $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C$

j) Tipo 2: $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx = \int \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx = \ln\left|1+\operatorname{sen}^2 x\right| + C$

k) Tipo 1: $\int e^{2x}\sqrt[7]{e^{2x}+1}\, dx = \frac{1}{2}\int \left(e^{2x}+1\right)^{\frac{1}{7}} 2e^{2x}\, dx = \frac{7\left(e^{2x}+1\right)^{\frac{8}{7}}}{16} + C = \frac{7}{16}\sqrt[7]{\left(e^{2x}+1\right)^8} + C =$

l) Tipo 1: $\int \frac{\cos x}{3\operatorname{sen}^4 x}\, dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}^{-4} x \cos x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{-3} x}{9} + C = -\frac{1}{9\operatorname{sen}^3 x} + C$

Integral definida. Regla de Barrow

45. Determina la función definida en todo $\mathbb{R}$ por $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabiendo que presenta un mínimo relativo en el punto (2, –4) y que $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx = 45$.

Se sabe que: $f(2) = -4 \Rightarrow 4a + 2b + c = -4$, $f'(2) = 0 \Rightarrow 4a + b = 0$ y $\int_{-3}^{0} f(x)dx = 45 \Rightarrow \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{-3}^{0} = 45 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\left(-9a + \frac{9b}{2} - 3c\right) = 45 \Rightarrow 6a - 3b + 2c = 30$.

Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -4 \\ 4a + b = 0 \\ 6a - 3b + 2c = 30 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{19}{13},\ b = -\frac{76}{13},\ c = \frac{24}{13} \Rightarrow f(x) = \frac{19}{13}x^2 - \frac{76}{13}x + \frac{24}{13}$$

46. ¿Cuánto debe valer el parámetro *a* en la función $f(x) = x - a\,\mathrm{sen}\,x$ si se sabe que $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 0$.

$\int_0^{\pi} f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2} + a\cos x\right]_0^{\pi} = \left(\frac{\pi^2}{2} - a\right) - a = \frac{\pi^2}{2} - 2a$, por tanto, tenemos: $\frac{\pi^2}{2} - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{\pi^2}{4}$.

47. Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_1^3 \frac{3x-1}{\sqrt{x}}dx$ c) $\int_0^{3\pi} \cos\frac{b}{2}db$ e) $\int_0^1 x(1+x^2)^{20}dx$

b) $\int_0^2 e^{u+3}du$ d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec t\,\mathrm{tg}\,t\,dt$ f) $\int_0^2 (1+x^2)\sqrt{x}\,dx$

a) $\int_1^3 \frac{3x-1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^3\left(3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \left[2\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x}\right]_1^3 = \left(6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right) - (2-2) = 4\sqrt{3}$

b) $\int_0^2 e^{u+3}du = \left[e^{u+3}\right]_0^2 = e^5 - e^3$

c) $\int_0^{3\pi} \cos\frac{b}{2}db = 2\int_0^{3\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{b}{2}db = 2\left[\mathrm{sen}\frac{b}{2}\right]_0^{3\pi} = 2\left(\mathrm{sen}\frac{3\pi}{2} - \mathrm{sen}\,0\right) = -2$

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec t\,\mathrm{tg}\,t\,dt = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} -\mathrm{sen}\,t\cos^{-2}t\,dt = \left[\frac{1}{\cos t}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$

e) $\int_0^1 x(1+x^2)^{20}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x(1+x^2)^{20}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(1+x^2)^{21}}{21}\right]_0^1 = \frac{2^{21}-1}{42}$

f) $\int_0^2 (1+x^2)\sqrt{x}\,dx = \int_0^2\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{2}}\right)dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2}{7}\sqrt{x^7}\right]_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{16\sqrt{2}}{7} = \frac{76\sqrt{2}}{21}$

48. Si f' es continua y $f(1) = 2$, ¿cuál es el valor de $f(7)$ sabiendo que $\int_1^7 f'(x)\,dx = 3$?

$\int_1^7 f'(x)dx = f(7) - f(1) = f(7) - 2$, por tanto: $f(7) - 2 = 3 \Rightarrow f(7) = 5$

49. **Si $f(x) = x + |1-x|$, halla el valor de: $\int_{-2}^{2} f(x)dx$**

$$f(x) = \begin{cases} x+1-x & \text{si} \quad x<1 \\ x-1+x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x<1 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$, por tanto, se tiene:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{1} 1dx + \int_{1}^{2} (2x-1)\,dx = [x]_{-2}^{1} + \left[x^2 - x\right]_{1}^{2} = [1-(-2)] + \left[(4-2)-(1-1)\right] = 5$$

50. **Calcula:**

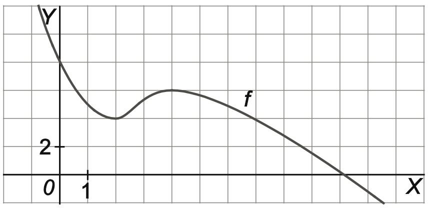
a) $\int_{-\pi}^{2\pi} |\text{sen}\, x|\, dx$

b) $\int \left(x^4 + 4x^2 + 4x\right)\left(4x^2 + 5\right) dx$

a) $\int_{-\pi}^{2\pi} |\text{sen}\, x|\, dx = 3\int_{0}^{\pi} \text{sen}\, x\, dx = 3[-\cos x]_{0}^{\pi} = 3\left(1-(-1)\right) = 6$

b) $\int \left(x^4 + 4x^2 + 4x\right)\left(4x^2 + 5\right) dx = \int \left(4x^6 + 21x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 20x\right) dx = \frac{4x^7}{7} + \frac{21x^5}{5} + 4x^4 + \frac{20x^3}{3} + 10x^2 + C$

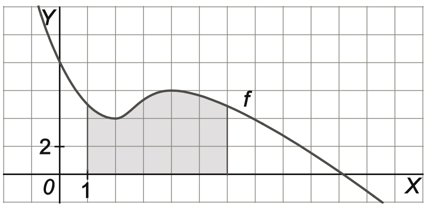
51. **Si la gráfica de $f(x)$ es la de la figura:**



¿Cuál de los siguientes números es la mejor aproximación para $\int_{1}^{6} f(x)\, dx$?

a) –24 **b)** 9 **c)** 26 **d)** 38

La integral coincide con el área de la figura sombreada.



Como cada cuadrito de la cuadrícula representa 2 u^2 y hay 10 cuadritos enteros y 5 trozos no enteros,el área supera las 20 u^2 pero es inferior a 30 u^2, por lo que la respuesta correcta es 26 u^2.

Aplicaciones de la integral

52. ***Calcula el área limitada por cada grupo de curvas.**

a) $y = 5x - x^2$
$y = x$

b) $y = |x|$
$y = 2 - x^2$

c) $y = -x^2 + 2x + 1$
$y = -2$

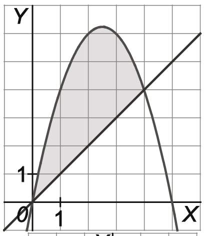
d) $y = \sqrt{x} \quad y = \dfrac{1}{x}$
$y = 0 \quad x = 2$

e) $y = \text{sen}\, x$
$y = x(x - \pi)(x - 2\pi)$

f) $y = x + 3 \quad y = -3x$
$y = x^2 - 2x - 1$

a) Puntos de corte: $5x - x^2 = x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 4$

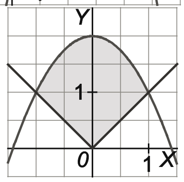
$$A = \int_0^4 \left(5x - x^2 - x\right) dx = \int_0^4 \left(4x - x^2\right) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}\ \text{u}^2$$



b) Por simetría, podemos calcular el área del recinto con $x \geq 0$ y multiplicarla por 2.

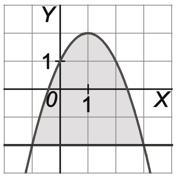
Puntos de corte: Si $x \geq 0 \Rightarrow x = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$A = 2\int_0^1 \left(2 - x^2 - x\right) dx = 2\left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{3}\ \text{u}^2$$



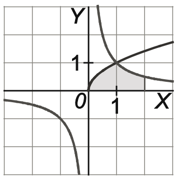
c) Puntos de corte: $-x^2 + 2x + 1 = -2 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 3$

$$A = \int_{-1}^3 \left(-x^2 + 2x + 1 - (-2)\right) dx = \int_{-1}^3 \left(-x^2 + 2x + 3\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^3 = \frac{32}{3}\ \text{u}^2$$



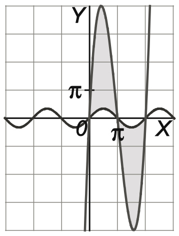
d) Puntos de corte en el intervalo [0, 2]: $\sqrt{x} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = 1$

$$A = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx + \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1 + \left[\ln|x|\right]_1^2 = \frac{2}{3} + \ln 2\ \text{u}^2.$$



e) Las curvas se cortan si $x = 0$, $x = \pi$ o $x = 2\pi$, delimitando dos recintos de igual área.

$$A = 2\int_0^{\pi} \left(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x - \text{sen}\, x\right) dx = 2\left[\frac{x^4}{4} - \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \cos x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{2} - 4\ \text{u}^2.$$

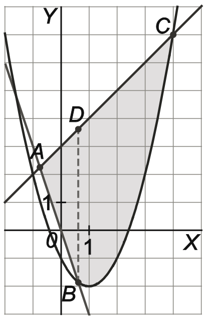


f) Como se observa en la figura, las curvas delimitan varios recintos, pero solo uno de ellos está limitado por las gráficas de las tres curvas, el triángulo mixtilíneo *ABC*, que se divide a su vez en dos recintos, el triángulo *ABD* y el triángulo mixtilíneo *BCD*.

Las abscisas de estos puntos son:

A: $x + 3 = -3x \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{4}$ *B*: $-3x = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

C: $x + 3 = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

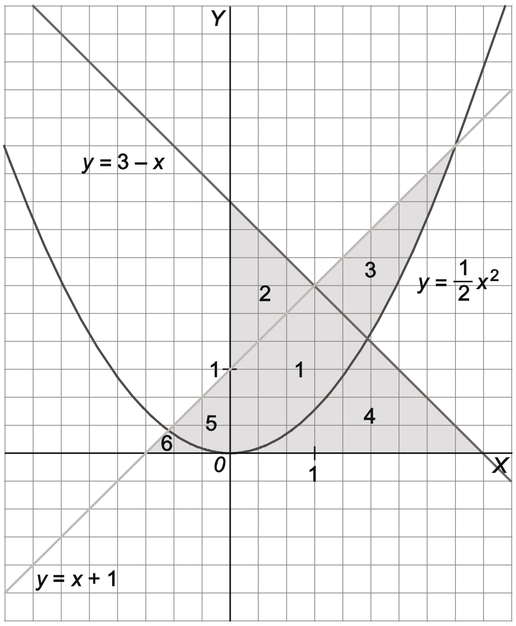


$$A = \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} (x + 3 - (-3x))\, dx + \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{4} \left(x + 3 - (x^2 - 2x - 1)\right) dx =$$

$$= \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} (4x + 3)\, dx + \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{4} \left(-x^2 + 3x + 4\right) dx = \left[2x^2 + 3x\right]_{-\frac{3}{4}}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{4} =$$

$$= \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \left(-\frac{9}{8}\right)\right) + \left(\frac{56}{3} - \frac{11 + 11\sqrt{5}}{12}\right) = \frac{489 - 10\sqrt{5}}{24}\ \text{u}^2$$

53. Calcula el área de las regiones numeradas de 1 a 6 en el siguiente dibujo.



Región 1: $\int_0^1\left(x+1-\frac{1}{2}x^2\right)dx+\int_1^{\sqrt{7}-1}\left(3-x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+x-\frac{x^3}{6}\right]_0^1+\left[3x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_1^{\sqrt{7}-1}=$

$=\left(\frac{4}{3}-0\right)+\left(\frac{7\sqrt{7}-10}{3}-\frac{7}{3}\right)=\frac{7\sqrt{7}-13}{3}\ \text{u}^2\simeq 1{,}84\ \text{u}^2$

Región 2: $\int_0^1\left[3-x-(x+1)\right]dx=\int_0^1(2-2x)\,dx=\left[2x-x^2\right]_0^1=1-0=1\ \text{u}^2$

Región 3: $\int_1^{\sqrt{7}-1}\left[x+1-(3-x)\right]dx+\int_{\sqrt{7}-1}^{1+\sqrt{3}}\left(x+1-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left[x^2-2x\right]_1^{\sqrt{7}-1}+\left[\frac{x^2}{2}+x-\frac{x^3}{6}\right]_{\sqrt{7}-1}^{1+\sqrt{3}}=$

$=\left(11-4\sqrt{7}-(-1)\right)+\left(\frac{3\sqrt{3}+4}{3}-\frac{20-5\sqrt{7}}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}+5\sqrt{7}-16}{3}\ \text{u}^2\simeq 0{,}81\ \text{u}^2$

Región 4: $\int_0^{\sqrt{7}-1}\frac{1}{2}x^2\,dx+\int_{\sqrt{7}-1}^{3}(3-x)\,dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{\sqrt{7}-1}+\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_{\sqrt{7}-1}^{3}=\left(\frac{5\sqrt{7}-11}{3}-0\right)+\left(\frac{9}{2}-\left(4\sqrt{7}-7\right)\right)=$

$=\frac{47-14\sqrt{7}}{6}\ \text{u}^2\simeq 1{,}66\ \text{u}^2$

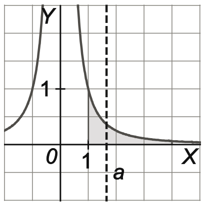
Región 5: $\int_{1-\sqrt{3}}^{0}\left[x+1-\frac{1}{2}x^2\right]dx=\left[\frac{x^2}{2}+x-\frac{x^3}{6}\right]_{1-\sqrt{3}}^{0}=0-\left(\frac{4}{3}-\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{4}{3}\ \text{u}^2\approx 0{,}4\ \text{u}^2$

Región 6: $\int_{-1}^{1-\sqrt{3}}(x+1)\,dx+\int_{1-\sqrt{3}}^{0}\frac{1}{2}x^2\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1-\sqrt{3}}+\left[\frac{x^3}{6}\right]_{1-\sqrt{3}}^{0}=\left(-2\sqrt{3}+3-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)+\left(0-\left(\frac{5}{3}-\sqrt{3}\right)\right)=$

$=\frac{11}{6}-\sqrt{3}\ \text{u}^2\simeq 0{,}1\ \text{u}^2$

54. Halla el número *a* para el que la recta *x*=*a* divida en dos partes de igual área la región limitada por el eje *X*, la curva $y=\frac{1}{x^2}$ y las rectas *x*= 1 y *x*= 4.

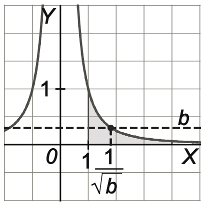
Se quiere calcular *a* para que $\int_1^a \frac{1}{x^2}dx=\int_a^4 \frac{1}{x^2}dx$, con lo que:



$$\int_1^a \frac{1}{x^2}dx=\int_a^4 \frac{1}{x^2}dx \Rightarrow \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a=\left[-\frac{1}{x}\right]_a^4 \Rightarrow -\frac{1}{a}+1=-\frac{1}{4}+\frac{1}{a}\Rightarrow \frac{2}{a}=\frac{5}{4}\Rightarrow a=\frac{8}{5}$$

55. Halla el número *b* para el que la recta $y=b$ divida en dos partes de igual área a la región del problema anterior.

El área en cuestión es $\int_1^4 \frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^4=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$ u^2, por tanto, hay queencontrar *b*tal que la recta $y=b$ divida la región en dos subregiones de área $\frac{3}{8}$ u^2.

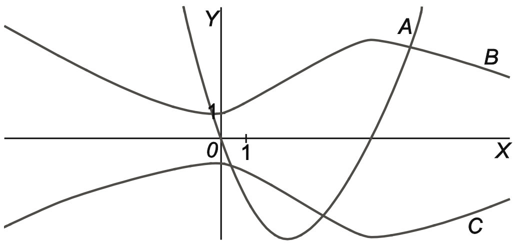


Subregión superior: El área de esta subregión se puede calcular restándole a $\int_1^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{b}}}=-\sqrt{b}+1$ el área de un rectángulo de base $\frac{1}{\sqrt{b}}-1$ y altura *b*.

$1-\sqrt{b}-\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-1\right)b=\frac{3}{8}\Rightarrow 2\sqrt{b}=b+\frac{5}{8}\Rightarrow 4b=b^2+\frac{5}{4}b+\frac{25}{64}\Rightarrow b^2-\frac{11}{4}b+\frac{25}{64}=0$, de donde se obtienen dos soluciones, de las que solo tiene sentido $b=\frac{11-4\sqrt{6}}{8}\simeq 0{,}15$.

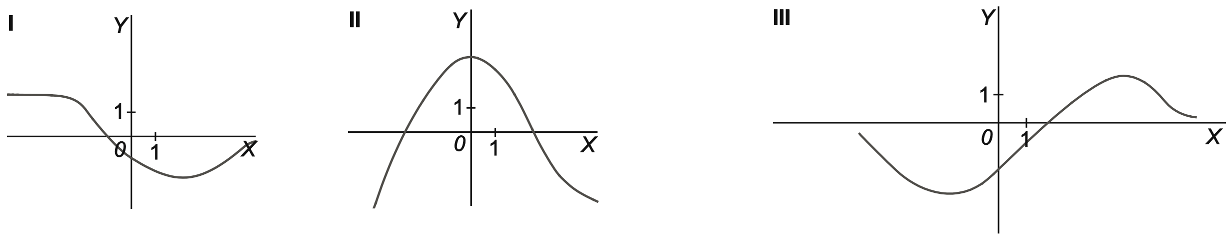
Síntesis

56. Considera las tres gráficas de la figura. Si la gráfica *A* es la de cierta función *f*, ¿cuál de las otras dos es la gráfica de una primitiva de *f* ?



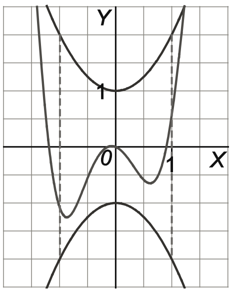
La gráfica de la primitiva de *f* es *C*, porque cuando esta función crece, *f* es positiva y cuando decrece, *f* es negativa.

57. Las gráficas I, II y III corresponden, no necesariamente por este orden a las de una función *f* derivable, su función derivada *f* ' y una primitiva *F* de *f*. Identifica cada gráfica justificando tu elección.



Cuando la III crece la II es positiva y cuando III decrece, la II es negativa. Cuando la II crece la I es positiva y cuando II decrece, la I es negativa.Es decir, *F* es la III, *f* es la II y f' es la I.

58. De una función $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ se sabe que para cada x de dicho intervalo se cumple que $|f(x)|\le 1+x^2$. De los números –3; –2; –1; 2,5; 2,75, ¿cuáles pueden ser el valor de la integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$?



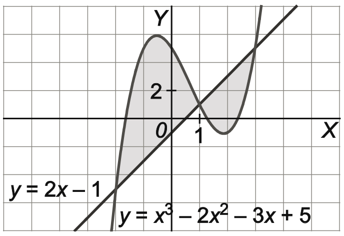
Del enunciado, $-\left(1+x^2\right)\le f(x)\le 1+x^2$ si $-1\le x\le 1$, es decir, la gráfica de f presenta una situación como la de la figura.

Como $\int_{-1}^{1}\left(1+x^2\right)dx=\left[x+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}$ y $\int_{-1}^{1}-\left(1+x^2\right)dx=-\frac{8}{3}$, el valor de la integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ debe estar entre estos números, así, el valor de la integral puede ser–2; –1 o 2,5.

59. Calcula el valor de a para que se cumpla: $\int_0^a 3x^2\,dx=2\int_a^1 3x^2\,dx$

$$\int_0^a 3x^2\,dx=2\int_a^1 3x^2\,dx\Rightarrow\left[x^3\right]_0^a=2\left[x^3\right]_a^1\Rightarrow a^3=2\left(1-a^3\right)\Rightarrow 3a^3=2\Rightarrow a=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

60. Calcula el área encerrada por las curvas de la figura.



Las curvas se cortan si:

$2x-1=x^3-2x^2-3x+5\Rightarrow x^3-2x^2-5x+6=0\Rightarrow x=-2,\ x=1,\ x=3$.

El área pedida es:

$$\int_{-2}^{1}\left[\left(x^3-2x^2-3x+5\right)-(2x-1)\right]dx+\int_1^3\left[(2x-1)-\left(x^3-2x^2-3x+5\right)\right]dx=$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx+\int_1^3-\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{1}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x\right]_1^3=$$

$$=\left(\frac{37}{12}+\frac{38}{3}\right)-\left(-\frac{9}{4}-\frac{37}{12}\right)=\frac{253}{12}\ \text{u}^2.$$

61. Supón que f es una función continua y que $\int_0^1 f(x)\,dx=2$, $\int_0^2 f(x)\,dx=1$ y $\int_2^4 f(x)\,dx=7$.

a) Calcula $\int_0^4 f(x)\,dx$, $\int_1^2 f(x)\,dx$ y $\int_1^4 f(x)\,dx$.

b) Explica por qué f debe ser negativa en algún punto del intervalo [0, 2].

c) Explica por qué $f(x)\ge 3{,}5$ para al menos un valor del intervalo [2, 4].

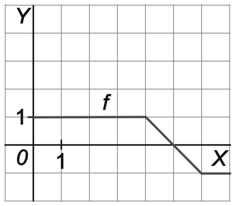
a) $\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^4 f(x)\,dx=8$ $\qquad$ $\int_1^2 f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx=-1$

$\int_1^4 f(x)\,dx=\int_0^4 f(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx=6$

b) Se prueba que f debe ser negativa en algún punto del intervalo [1, 2], de donde, en particular, se deduce lo que pide el enunciado. Si fuera $f(x)\ge 0$ en [1, 2], $\int_1^2 f(x)\,dx\ge 0$, en contradicción con el apartado anterior.

c) Si fuera $f(x)<3{,}5$ para todos los puntos del intervalo [2, 4]: $\int_2^4 f(x)\,dx<2\cdot 3{,}5=7$, en contradicción con el enunciado.

62. La figura siguiente representa la gráfica de una función $f:[0,7]\to\mathbb{R}$.



Sea $F:[0,7]\to\mathbb{R}$ la función definida por $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

a) Calcula $F(4)$ y $F(7)$.

b) Dibuja la gráfica de $F(x)$ explicando cómo lo haces.

a) Como F es positiva entre 0 y 4, $F(4)$ es el área comprendida entre la función fy el eje X, desde $x=0$ hasta $x=4$. Como esta región es un rectángulo de 4 u^2 de área, $F(4)=4$.

Para calcular $F(7)$ hay que tener en cuenta que entre 0 y 7 la función f tiene tramos negativos, determinando con el eje X regiones cuyas áreas habrá que restar. En concreto, $F(7)$ será el área de un rectángulo de base 4 y altura 1, más el área de un triángulo de base 1 y altura 1, menos el área de un triángulo de base 1 y altura 1, menos el área de un cuadrado de lado 1, es decir, $F(7)=4+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1=3$.

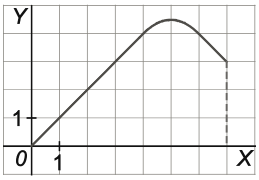
b) Como $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } 0\le x<4\\ 5-x & \text{si } 4\le x\le 6\\ -1 & \text{si } 6<x\le 7\end{cases}$, para calcular $F(x)$ se integra f a medida que x va recorriendo el intervalo [0, 7] teniendo en cuenta los cambios que se dan en $x=4$ y $x=6$.

Si $0\le x<4$, $F(x)=\int_0^x 1\,dt=[t]_0^x=x$

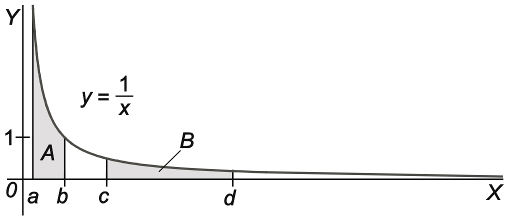
Si $4\le x\le 6$, $F(x)=\int_0^4 1\,dt+\int_4^x (5-t)\,dt=4+\left[5t-\frac{t^2}{2}\right]_4^x=4+5x-\frac{x^2}{2}-12=-\frac{x^2}{2}+5x-8$

Si $6<x\le 7$, $F(x)=\int_0^4 1\,dt+\int_4^6 (5-t)\,dt+\int_6^x -1\,dt=4+0-[t]_6^x=4-x+6=-x+10$

Así, $F(x)=\begin{cases}x & \text{si } 0\le x<4\\ -\frac{x^2}{2}+5x-8 & \text{si } 4\le x\le 6\\ -x+10 & \text{si } 6<x\le 7\end{cases}$



63. Si $c=ra$ y $d=rb$, ¿qué área es mayor, A o B?



$$A=\int_a^b \frac{1}{x}dx=[\ln x]_a^b=\ln b-\ln a=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$B=\int_c^d \frac{1}{x}dx=[\ln x]_c^d=\ln d-\ln c=\ln\left(\frac{d}{c}\right)=\ln\left(\frac{rb}{ra}\right)=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Las áreas son iguales.

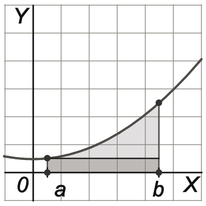
CUESTIONES

64. Un estudiante, aunque no sabe obtener la derivada del cociente, dice que las funciones $f(x)=\frac{1}{2x+1}$ y $g(x)=\frac{2x+2}{2x+1}$ son primitivas de la misma función. Si el profesor dice que está en lo correcto, ¿cómo ha razonado el alumno?

El estudiante ha observado que $g(x)=\frac{2x+2}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x+1}+\frac{1}{2x+1}=1+f(x)$, por lo que, $f'(x)=g'(x)$, es decir, efectivamente, f y g son primitivas de la misma función.

65. Justifica que si $f(a) > 0$ y f es creciente en [a, b], entonces $\int_a^b f(x)dx \geq f(a)(b-a)$.

Como $f(a)$ es positiva y f es crecienteen [a, b], se deduce que f es positiva en todo el intervalo [a, b], por lo que $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área de la figura bajo dicha curva.



Por otra parte, $f(a)(b-a)$ es el área del rectángulo marcado en la figura, cuya área es claramente menor, o igual si la función fuera constante en [a, b], que la integral definida, yaque la función f es creciente.

66. Razona si es cierto o no que si f es una función continua no negativa en [1, 5] y $f(3) > 0$, entonces $\int_1^5 f(x)dx > 0$.

Obviamente, al ser f no negativa en [1, 5] se tiene $\int_1^5 f(x)dx \geq 0$.

Para ver que la desigualdad es estricta observemos que, al ser $f(3) > 0$ y $f$continua, existe un intervalo $[3-r, 3+r]$ en el que f es positiva, por ello, tenemos $\int_1^5 f(x)dx \geq \int_{3-r}^{3+r} f(x)dx > 0$.

67. Sea f una función continua en el intervalo [–1, 3] y $g(x) = f(x)+1$. Si $\int_{-1}^3 f(t)\,dt = 7$, ¿cuál ha de ser el valor de $\int_{-1}^3 g(u)\,du$?

$$\int_{-1}^3 g(u)\,du = \int_{-1}^3 (f(u)+1)\,du = \int_{-1}^3 f(u)du + \int_{-1}^3 1du = 7+4 = 11$$

68. Si $\int_0^1 f(x)dx = 2$ y $\int_0^2 f(x)dx = 1$, entonces ¿habrá algún punto en el intervalo [1, 2] en el que f deba ser negativa?

En efecto, debe haber algún punto en el intervalo [1, 2] en el que f es negativa, ya que en caso contrario sería $\int_1^2 f(x)dx \geq 0$, en contradicción con que $\int_1^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = -1$.

69. Si $\int_a^b f(x)dx > 0$ y c es un número de [a, b], ¿será entonces $\int_a^c f(x)dx < \int_a^b f(x)dx$?

No es obligatoriamente cierto. Basta considerar funciones que sean positivas en un tramo y negativas en el siguiente, como la función seno:

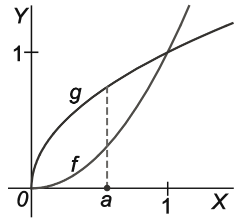
$\int_0^{\pi} \text{sen}\,x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$, y, en cambio, $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \text{sen}\,x\,dx = [-\cos x]_0^{\frac{3\pi}{2}} = 1$.

70. ¿Será cierto que si $\int f(x)dx = \int g(x)dx$, entonces $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$?

Si $\int f(x)dx = \int g(x)dx$, el conjunto de primitivas de f coincide con el conjunto de primitivas de g, por tanto, si F es una primitiva de f, también lo es de g, con lo que, efectivamente, $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = F(1) - F(0)$.

71. Si f y g son funciones que admiten derivada segunda y $f(x) \le g(x)$ para todo x, ¿cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones tiene que ser verdadera?

I) $f'(x) \le g'(x)$ para todo x **II)** $f''(x) \le g''(x)$ para todo x **III)** $\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 g(x)dx$



Las afirmaciones I y II son falsas como muestran las gráficas de las funciones f y g, que cumplen que $f(x) \le g(x)$, pero, en cambio, $f'(a) > g'(b)$ y $f''(a) > 0$ y $g''(b) < 0$, con lo que $f''(a) > g''(b)$.

La afirmación III es verdadera pues $f(x) \le g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \le 0$ para todo x, con lo que $\int_0^1 (f-g)(x)dx \le 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 g(x)dx$.

72. ¿Son verdaderas o falsas estas afirmaciones?

a) Si f es continua y par, entonces: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

b) Si f' es continua, entonces: $\int_0^7 f'(x)\,dx = f(7) - f(0)$

c) $\int_0^\pi x \operatorname{sen} x\,dx = 2x$

d) $\int_{-1}^{1}\left(ax^2 + bx + c\right)dx = 2\cdot\int_0^1\left(ax^2 + c\right)dx$

e) El área de la región encerrada por la curva $f(x) = x(x-1)(x-3)$ y el eje horizontal se mide con:

$\int_0^3 x(x-1)(x-3)\,dx$

f) El área encerrada por la curva $f(x) = x^2 - 1$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$ es 6.

a) Si f es par, entonces $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$, por lo que $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ y la afirmación es verdadera.

Observemos que si f es impar, tenemos $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$, de donde deducimos que $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

b) Al ser f' continua, aplicando la regla de Barrow tenemos $\int_0^7 f'(x)\,dx = f(7) - f(0)$, la afirmación es verdadera.

c) Falsa, pues $\int_0^\pi x \operatorname{sen} x\,dx$ es un número.

d) $\int_{-1}^{1}\left(ax^2 + bx + c\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(ax^2 + c\right)dx + \int_{-1}^{1} bx\,dx$. Al ser $f(x) = ax^2 + c$ par y $g(x) = bx$ impar, usando las propiedades demostradas en el apartado a se concluye que $\int_{-1}^{1}\left(ax^2 + c\right)dx = 2\int_0^1\left(ax^2 + c\right)dx$ y $\int_{-1}^{1} bx\,dx = 0$, con lo que la afirmación es cierta.

e) Falso, ya que la función $f(x) = x(x-1)(x-3)$ cambia de signo en [0, 3].

f) Falso, $\int_0^3 (x^2 - 1)dx = 6$, pero el área pedida no es esta integral, pues la función $f(x) = x^2 - 1$ cambia de signo en [0, 3].

En concreto, el área pedida es $\int_0^1 -(x^2-1)dx + \int_1^3 (x^2-1)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^3 = \frac{22}{3}$ u^2.

73. Dadas las siguientes integrales, ¿cuál no es ceroy por qué ?

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^3 x\, dx$ **c)** $\int_{\pi}^{3\pi} \text{sen}\, x\, dx$ **e)** $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx$

b) $\int_{0}^{\pi} \cos x\, dx$ **d)** $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, \text{sen}\, x\, dx$ **f)** $\int_{-1}^{1} \text{tg}\, x\, dx$

Las integrales de los apartados a), d) y f) son nulas, ya que las funciones integradas son impares.

Las integrales de los apartados b) y c) también son nulas:

$$\int_0^{\pi} \cos x\, dx = [\text{sen}\, x]_0^{\pi} = \text{sen}\, \pi - \text{sen}\, 0 = 0 \quad \int_{\pi}^{3\pi} \text{sen}\, x\, dx = [-\cos x]_{\pi}^{3\pi} = -\cos 3\pi + \cos \pi = -(-1) - 1 = 0$$

La integral del apartado e) no es cero pues la función $f(x) = \cos^2 x \geq 0$ para todo x, por lo que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx$ mide el área de la región encerrada por dicha curva y el eje horizontal entre $-\pi$ y π.

74. La gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ está siempre por encima del eje horizontal. Si se pide calcular el área de la región limitada por dicha gráfica, el eje horizontal y las verticales $x = -1$ y $x = 3$, se puede proceder así:

$F(x) = \frac{-1}{x}$ es una primitiva de $f(x)$, ya que $F'(x) = \frac{1}{x^2}$, por tanto el área será:

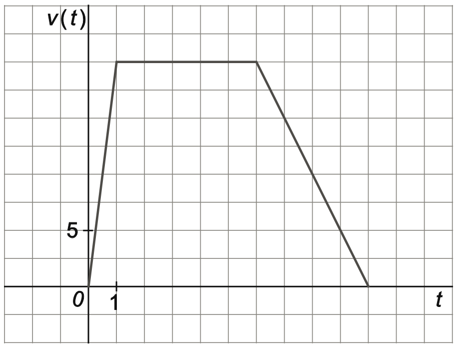
$$\text{Área} = F(3) - F(-1) = \frac{-1}{3} - \left(\frac{-1}{-1}\right) = \frac{-4}{3}$$

que, al ser negativo, es un número que no puede medir un área. ¿Qué hay de erróneo en este razonamiento?

La función $f(x)$ no es continua en el intervalo [–1, 3], por lo que no se puede aplicar la regla de Barrow.

PROBLEMAS

75. La velocidad de un automóvil ha variado de acuerdo a lo recogido en la siguiente gráfica.



a) Calcula la aceleración del automóvil en cada uno de los tres tramos del recorrido.

b) Calcula el espacio total recorrido por dicho automóvil.

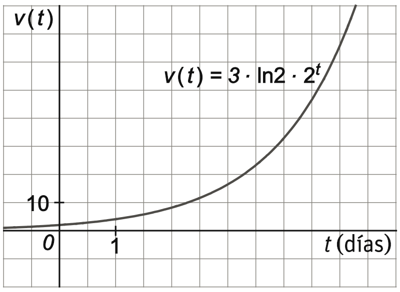
c) Calcula la velocidad que llevará el automóvil en los instantes de tiempo $t = 0{,}5$ s, $t = 3{,}5$ s, $t = 6{,}5$ s y $t = 8{,}5$ s.

a) Como la aceleración es la derivada de la velocidad, su valor en cada punto es el valor de la pendiente de la gráfica en dicho punto. Así, en el primer tramo, de 0 a 1 s, la aceleración es $a = \frac{20}{1} = 20$; en el segundo tramo, de 1 a 6 s, la aceleración es $a = 0$ y en el tercer tramo, de 6 a 10 s, la aceleración es $a = \frac{-20}{4} = -5$.

b) Como la velocidad es la derivada de la función de posición, el espacio total recorrido es el área del recinto limitado por la función velocidad: $e = \int_0^{10} v(t)\, dt = \frac{1 \cdot 20}{2} + 5 \cdot 20 + \frac{4 \cdot 20}{2} = 150$.

c) $v(t) = \begin{cases} 20x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 20 & \text{si} \quad 1 < x < 6 \\ -5x + 50 & \text{si} \quad 6 \leq x \leq 10 \end{cases} \Rightarrow v(0{,}5) = 10$, $v(3{,}5) = 20$, $v(6{,}5) = 17{,}5$ y $v(8{,}5) = 7{,}5$.

76. La velocidad de crecimiento de una población de bacterias es la representada en la gráfica, donde la velocidad se expresa en bacterias por día y el tiempo en días.



a) ¿Qué cantidad de bacterias habrá pasados 5 días?

b) ¿Y pasados 15 días?

c) ¿Cuál es la ecuación que determina el número de bacterias que habrá en un tiempo *t*?

La cantidad de bacterias tras *t* días viene dada por el área bajo la gráfica entre 0 y *t*, por tanto:

a) $\int_0^5 v(t)\,dt = \left[3\cdot 2^t\right]_0^5 = 3\left(2^5 - 2^0\right) = 93$ bacterias

b) $\int_0^{15} v(t)\,dt = \left[3\cdot 2^t\right]_0^{15} = 3\left(2^{15} - 2^0\right) = 98301$ bacterias

c) $n(t) = \int_0^t v(x)\,dx = \left[3\cdot 2^x\right]_0^t = 3\left(2^t - 1\right)$

77. La intensidad de la lluvia caída en un observatorio, en litros por minuto, registrada por un pluviógrafo, durante una tormenta se puede representar mediante la función:

$$\boldsymbol{f(t) = 4(1 - e^{-0,1t}) \qquad 0 < t < 60 \text{ min}}$$

Calcula la cantidad de agua recogida por metro cuadrado en dicho observatorio en la hora que duró la tormenta.

Nota: Integra $f(t)$ en el intervalo de tiempo pedido.

Cantidad de agua $= \int_0^{60} 4\left(1 - e^{-0,1t}\right)dt = 4\left[t + 10e^{-0,1t}\right]_0^{60} = 4\left[\left(60 + 10e^{-6}\right) - \left(0 + 10\right)\right] = 4\cdot\left(50 + \frac{10}{e^6}\right) = 200 + \frac{40}{e^6}$ L/m^2,

es decir, se han recogido aproximadamente 200 L/m^2.

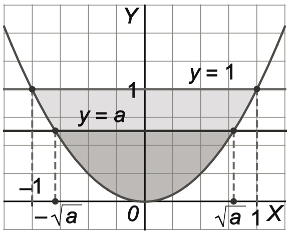
78. Al pisar el freno ante un semáforo, la velocidad de un coche (en ms^{-1}) está dada por $v(t) = 30 - 6t$. Calcula los segundos que tarda en parar y el espacio recorrido.

El coche se detiene cuando $v(t) = 0$, es decir, tarda en detenerse $t = \frac{30}{6} = 5$ segundos.

Durante ese tiempo, el espacio recorrido ha sido $\int_0^5 v(t)\,dt = \int_0^5 (30 - 6t)\,dt = \left[30t - 3t^2\right]_0^5 = 75$ metros.

PARA PROFUNDIZAR

79. Dos hermanos heredan una parcela que tiene la forma de la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$. Deciden dividirla en dos regiones de igual área. Si la división la llevan a cabo mediante la recta horizontal $y = a$. Calcula el valor de a.



La situación es la indicada en la figura y, puesto que el área de la parcela es $\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx = 2\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)dx = 2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$ u², hay que calcular el valor de a para que $\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}\left(a-x^2\right)dx = \frac{2}{3}$, es decir, para que $\int_{0}^{\sqrt{a}}\left(a-x^2\right)dx = \frac{1}{3}$.

Así pues:

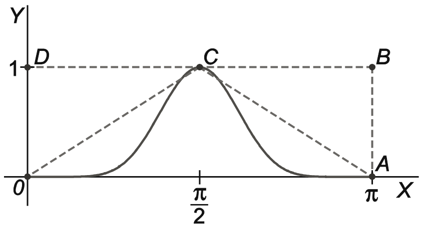
$$\int_{0}^{\sqrt{a}}\left(a-x^2\right)dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \left[ax-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow a\sqrt{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^3 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

80. Encuentra el intervalo [a, b] para el que la integral definida $\int_a^b \left(x-x^2\right)dx$ alcanza el máximo valor.

Como $f(x) = x - x^2$ es negativa si $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y positiva si $x \in (0, 1)$, el intervalo buscado es [0, 1].

81. Cuatro estudiantes no se ponen de acuerdo sobre el valor de $\int_0^{\pi} \text{sen}^8\, x\, dx$. Alberto dice que vale π; Beatriz que es igual a $\frac{35\pi}{128}$; Carolina que vale $\frac{3\pi}{90} - 1$; y David dice que vale $\frac{\pi}{2}$. Uno de los cuatro está en lo cierto, ¿quién?

Esbozando la gráfica de $f(x) = \text{sen}^8\, x$ en [0, π]se puede decidir quién tiene razón.



La integral $\int_0^{\pi} \text{sen}^8\, x\, dx$ mide el área de la zona bajo la curva, que, obviamente, es menor que el área del rectángulo $OABD$, es decir, es menor que π, por lo que Alberto no tiene razón.

De igual manera, aunque los segmentos OC y AC“comen” un poco de la región, claramente dejan la mayor parte de ella en el interior del triángulo OAC, de área $\frac{\pi}{2}$, por lo que la integral también es menor que $\frac{\pi}{2}$ y David no tiene razón.

Carolina está claramente equivocada, ya que su valor, $\frac{3\pi}{90} - 1$, es negativo.

Así pues, es Beatriz la que acierta, el valor de la integral es $\frac{35\pi}{128}$.

82. Calcula las siguientes primitivas.

a) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$

b) $\int 2^x\,dx$

c) $\int \frac{\sqrt[5]{3+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$

d) $\int \frac{2^x}{1+4^x}\,dx$

e) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx$

f) $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$

a) Tipo 3 con $f(x)=\operatorname{arctg} x$, por tanto, $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx = e^{\operatorname{arctg} x}+C$

b) Tipo 4, $\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2}+C$

c) Tipo 1, $\int \frac{\sqrt[5]{3+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx = \int (3+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{5}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{5(3+\operatorname{tg} x)^{\frac{6}{5}}}{6}+C = \frac{5\sqrt[5]{(3+\operatorname{tg} x)^6}}{6}+C$

d) Tipo 9, $\int \frac{2^x}{1+4^x}\,dx = \int \frac{2^x}{1+(2^x)^2}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{2^x\cdot\ln 2}{1+(2^x)^2}\,dx = \frac{\operatorname{arctg}\left(2^x\right)}{\ln 2}+C$

e) Tipo 1, $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx = -\int \cos^{-3} x\cdot(-\operatorname{sen} x)\,dx = -\frac{\cos^{-2} x}{-2}+C = \frac{1}{2\cos^2 x}+C$

f) Tipo 9, $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x)+C$

83. **a)** Halla dos números A y B tales que:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

b) Utilizando el resultado anterior, calcula:

$$\int \frac{3}{x^2-3x+2}\,dx$$

a) $\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow A(x-2)+B(x-1)=1$

Tomando en esta última igualdad $x=1$ se obtiene $-A=1 \Rightarrow A=-1$, tomando $x=2$ se obtiene: $B=1$.

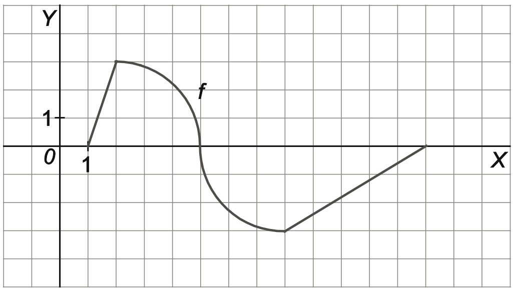
Por tanto, $\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$

b) Como $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, según el apartado anterior se tiene $\frac{3}{x^2-3x+2} = \frac{-3}{x-1}+\frac{3}{x-2}$

Por tanto,

$$\int \frac{3}{x^2-3x+2}\,dx = -3\int \frac{1}{x-1}\,dx + 3\int \frac{1}{x-2}\,dx = -3\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$$

84. Sea la función cuya gráfica es la de la figura, que consiste en segmentos y cuartos de circunferencia.



Calcula:

a) $\int_1^{13} f(x)\,dx$ **b)** $\int_5^{13} f(x)\,dx$ **c)** $\int_2^{8} f(x)\,dx$

a) $\int_1^{13} f(x)\,dx = \int_1^{2} f(x)\,dx + \int_2^{5} f(x)\,dx + \int_5^{8} f(x)\,dx + \int_8^{13} f(x)\,dx = \frac{3}{2} + \frac{9\pi}{4} - \frac{9\pi}{4} - \frac{15}{2} = -6$

b) $\int_5^{13} f(x)\,dx = \int_5^{8} f(x)\,dx + \int_8^{13} f(x)\,dx = -\frac{9\pi}{4} - \frac{15}{2} = \frac{-30-9\pi}{4}$

c) $\int_2^{8} f(x)\,dx = \int_2^{5} f(x)\,dx + \int_5^{8} f(x)\,dx = \frac{9\pi}{4} - \frac{9\pi}{4} = 0$

85. a) Encuentra tres números A, B y C tales que:

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

b) Esboza la gráfica de f para $x > 0$.

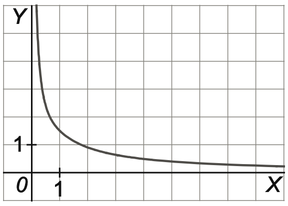
c) Encuentra el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje horizontal y las rectas $x = 1$ y $x = e$.

a) $\frac{2x^2+1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x^3+x} \Rightarrow A(x^2+1)+(Bx+C)x = 2x^2+1$

Tomando en esta última igualdad $x = 0$ se obtiene $A = 1$, tomando $x = -1$ y $x = 1$ se obtiene

$\begin{cases} 2A+B+C=3 \\ 2A+B-C=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+C=1 \\ B-C=1 \end{cases} \Rightarrow B = 1,\ C = 0$. Por tanto, $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^3+x} = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$.

b) En $(0, +\infty)$ f es continua y positiva, tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$, una asíntota vertical de ecuación $x = 0$ y es decreciente, ya que $f'(x) = \frac{4x(x^3+x)-(2x^2+1)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2} = \frac{-2x^4-x^2-1}{(x^3+x)^2} < 0$ para todo x, con estos datos se puede esbozar la gráfica de f para $x > 0$.



c) $\text{Área} = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \left[\ln x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_1^e = 1 + \frac{1}{2}\ln(e^2+1) - \frac{1}{2}\ln 2 = 1 + \ln\sqrt{\frac{e^2+1}{2}}\ \text{u}^2$.

ENTORNO MATEMÁTICO

El agrimensor

El padre de Julia y Julián es agrimensor, es decir, se dedica a medir la superficie de los terrenos y realizar los planos correspondientes a los mismos o, como sus hijos dicen, se dedica a medir tierras.

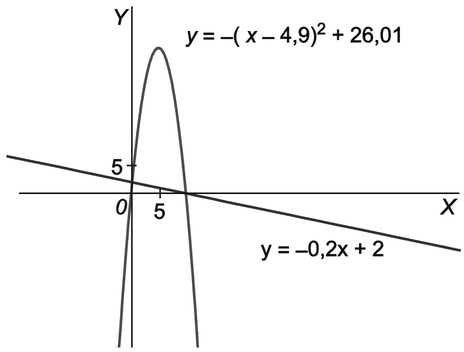
Un día, ambos entraron en el despacho de su padre mientras trabajaba. Encima de su mesa se encontraba la fotografía aérea de un bosque limitado por un río y una carretera y, dibujados sobre ella, unos ejes de coordenadas.

– Hola chicos, estoy intentando medir la superficie de este bosque, ¿queréis ayudarme? – les dijo el padre.

Los chicos se acercaron a la mesa con curiosidad.

– Fijaos – continuó el padre – al colocar de manera adecuada los ejes se puede observar que el río tiene forma de parábola.

– He colocado este papel cebolla – y no, no huele – encima del mapa, y he dibujado de forma aproximada una línea sobre el río y otra sobre la carretera que delimitan el bosque. He añadido además unos ejes en los que la unidad es 5 km, según me ha indicado la escala del mapa y, finalmente, al igual que hubierais hecho vosotros sin dificultad, he hallado las ecuaciones de la recta y la curva. Con esto ya puedo calcular la superficie del bosque.



¿Cuál es la superficie del bosque que están midiendo Julia, Julián y su padre?

Puntos de corte: $-0,2x+2=-\left(-x-4,9\right)^2+26,01 \Rightarrow x^2-10x=0 \Rightarrow x=0,\ x=10$

El área del bosque es, por tanto:

$$\int_0^{10}\left[-\left(x-4,9\right)^2+26,01-\left(-0,2x+2\right)\right]dx=\int_0^{10}\left(-x^2+10x\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+5x^2\right]_0^{10}=\frac{500}{3}\simeq 166,67\ \text{km}^2$$

Aburrido en el atasco

Como cada fin de semana Carlos y su familia han ido al pueblo a descansar. El inconveniente que tiene tan relajante costumbre es que, como en la mayoría de las grandes ciudades, el domingo por la tarde se forman grandes atascos de entrada a la misma.

Carlos quiere ver el partido de liga que retransmiten esa tarde a las 19:30, por lo que han salido del pueblo con tiempo y a las 19:00 se encuentran a sólo 28 km de su casa y metidos en el atasco habitual.

Aburrido, o tal vez preocupado, Carlos empieza a hacer cálculos con el propósito de hacer más corta la espera y ya de paso intentar predecir si podrá ver el partido o no.

Recuerda haber visto en algún sitio, aunque no está seguro de si en un artículo de una revista de divulgación científica o en las noticias, que en las horas críticas, es decir, aquellas en las que el atasco es mayor, y que comprenden la franja que va desde las 19:00 hasta las 21:00, la velocidad que llevan los coches puede medirse con la ecuación $v(t)=10+\frac{1125}{18t+25}$ donde *t* se mide en minutos y $v(t)$ es la velocidad en km/h en el instante *t*.

a) ¿A qué velocidad iba el coche a las 7 de la tarde? ¿Y a las 7:30?

b) ¿Llegará a tiempo para ver el partido?

a) A las 19:00 la velocidad es $v(0)=55$ km/h, a las 19:30 es $v(30)\simeq 12$ km/h.

b) El espacio, en km, que recorren en *T* minutos es $\int_0^T \frac{v(t)}{60}dt$, por tanto, basta comprobarsi $\int_0^{30}\frac{v(t)}{60}dt \geq 28$, es decir, si $\int_0^{30} v(t)dt \geq 1680$. Como $\int_0^{30} v(t)dt=\left[10t+\frac{1125}{18}\ln\left(18t+25\right)\right]_0^{30}=300+62,5\ln 565-62,5\ln 25\simeq 494,87$, Carlos no llega a tiempo para ver el partido.

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula la primitiva de la función $\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}$ que se anula para $x=1$.

Las primitivas son de la forma $F(x)=\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx=\ln|x|-2x^{-\frac{1}{2}}+C=\ln|x|-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$.

Como $F(1)=0$ tenemos $0-2+C=0 \Rightarrow C=2$, con lo que la primitiva buscada es $F(x)=\ln|x|-\frac{2}{\sqrt{x}}+2$.

2. Calcula las siguientes integrales inmediatas.

a) $\int x^2(x-3)\,dx$ **b)** $\int -\operatorname{sen}(3x)\,dx$

a) $\int x^2(x-3)\,dx=\int(x^3-3x^2)\,dx=\frac{x^4}{4}-x^3+C$

b) $\int -\operatorname{sen}(3x)\,dx=-\frac{1}{3}\int 3\operatorname{sen}(3x)\,dx=\frac{1}{3}\cos(3x)+C$

3. Halla las integrales indefinidas siguientes.

a) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}+e^{2x}\right)dx$ **b)** $\int\frac{x+3}{x^2+6x-3}dx$

a) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}+e^{2x}\right)dx=\int 1dx-\int x^{-2}\,dx+\frac{1}{2}\int 2e^{2x}=x+\frac{1}{x}+\frac{e^{2x}}{2}+C$

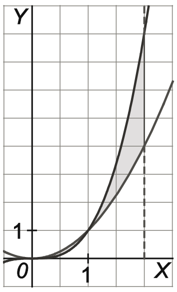
b) $\int\frac{x+3}{x^2+6x-3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+6}{x^2+6x-3}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x-3\right|+C$

4. Dadas las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=x^3$, determina el área encerrada por las gráficas de ambas funciones y la recta $x=2$.

Las funciones se cortan si $x=0$ o $x=1$.

Como $f(x)\geq g(x)$ si $0\leq x\leq 1$ y $g(x)\geq f(x)$ si $1\leq x\leq 2$, el área pedida es:

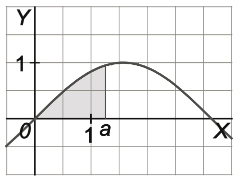
$$\int_0^1\left(x^2-x^3\right)dx+\int_1^2\left(x^3-x^2\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\left(\frac{1}{12}-0\right)+\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{12}\right)=\frac{3}{2}\text{ u}^2$$



5. Calcula $a>0$ tal que el área encerrada por la gráfica de $f(x)=\operatorname{sen}x$, el eje $y=0$, y la recta $x=a$, sea $\frac{1}{2}$.

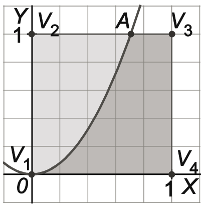
Como $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$, debe ser $a<\frac{\pi}{2}$, por tanto:

$$\frac{1}{2}=\int_0^a\operatorname{sen}x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^a=-\cos a+1\Rightarrow\cos a=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{\pi}{3}$$



6. La curva $y = 2x^2$ divide al cuadrado de vértices $V_1 = (0,\ 0)$, $V_2 = (0,\ 1)$, $V_3 = (1,\ 1)$ y $V_4 = (1,\ 0)$ en dos recintos. Dibújalos y halla el área del recinto mayor.

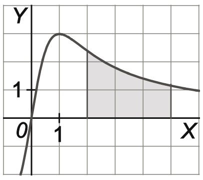
El punto de corte de $y = 2x^2$ con la recta $y = 1$ es $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$, por tanto, el área del recinto superior es $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2x^2)\,dx = \left[x - \frac{2x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \simeq 0{,}47\ \text{u}^2$ y el área del recinto inferior es $1 - \frac{\sqrt{2}}{3} \simeq 0{,}53\ \text{u}^2$, con lo que el recinto mayor es el inferior.



7. Calcula el área encerrada entre $f(x) = \frac{6x}{x^2+1}$ y el eje de abscisas para $x \in [2,\ 5]$.

La función es positiva si $x > 0$, así, el área del recinto es:

$$\int_2^5 \frac{6x}{x^2+1}\,dx = 3\int_2^5 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = 3\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_2^5 = 3(\ln 26 - \ln 5) \simeq 4{,}95\ \text{u}^2$$

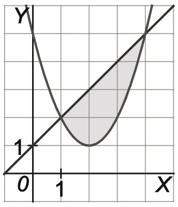


8. Dibuja la superficie limitada por la parábola $y = x^2 - 4x + 5$ y la recta $y = x + 1$. Calcula el área de dicha superficie.

Puntos de corte: $x^2 - 4x + 5 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = 4$.

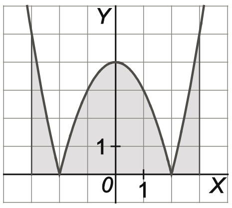
Si $1 \le x \le 4$ la recta está por encima de la parábola, por tanto, el área del recinto es:

$$\int_1^4 \left[(x+1) - \left(x^2 - 4x + 5\right)\right]dx = \int_1^4 \left(-x^2 + 5x - 4\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4 = \frac{8}{3} - \left(-\frac{11}{6}\right) = \frac{9}{2}\ \text{u}^2$$



9. Dibuja la gráfica de $f(x) = |x^2 - 4|$ en el intervalo $[-3,\ 3]$ y calcula su integral.

$f(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x \le -2 \\ 4 - x^2 & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$, por tanto, el área del recinto es:



$$\int_{-3}^3 f(x)dx = 2\int_0^3 f(x)dx = 2\left(\int_0^2 \left(4 - x^2\right)dx + \int_2^3 \left(x^2 - 4\right)dx\right) = 2\left(\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^3\right) = \frac{46}{3}\ \text{u}^2.$$

10. Calcular el valor positivo de a para que se verifique: $\int_0^{a-1} (x+1)\,dx = \frac{9}{2}$

$$\frac{9}{2} = \int_0^{a-1} (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^{a-1} = \frac{(a-1)^2}{2} + a - 1 = \frac{a^2-1}{2} \Rightarrow a^2 = 10 \Rightarrow a = \sqrt{10}$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Si $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, entonces el valor de $\int_0^{2\pi} f(x)dx$ es:

A. 0

B. 4

C. -1

D. No se puede calcular al ser *f* discontinua en $[0, 2\pi]$.

$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 2\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx = 2[-\cos x]_0^{\pi} = 2 \cdot 2 = 4$, respuesta B.

2. Si *f* es la primitiva de la función $g(x) = \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}$ en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ que toma el valor $-\frac{3}{2}$ en $x = 0$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ vale:

A. 0

B. $\frac{\pi}{4}$

C. 1

D. $-\frac{1}{6}$

La función $f(x)$ es de la forma: $\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$

Como $f(0) = -\frac{3}{2}$ tenemos $C = -\frac{3}{2}$, así, $f(x) = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \frac{3}{2}$ y, por tanto, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{6}$, respuesta D.

3. ¿Cuál de las siguientes integrales no es igual a cero?

A. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^3 x\, dx$

B. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x\, dx$

C. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x\, dx$

D. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx$

La integral del apartado D no es cero ya que la función $f(x) = \cos^2 x$ no es nunca negativa, así que dicha integral mide un área y no puede ser cero.

El resto de las integrales son nulas, ya que todas son integrales en $[-\pi, \pi]$ de funciones impares.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Si $M = \int_0^1 x^2 \operatorname{sen} x\, dx$ y $N = \int_0^1 x \operatorname{sen}^2 x\, dx$, entonces:

A. $M \geq 0$

B. $M \leq N$

C. $N \leq M$

D. $M \geq 1$

Sean $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x \operatorname{sen}^2 x$.

Como $0 < f(x) < 1$ en (0, 1), $0 = \int_0^1 0\, dx < \int_0^1 f(x)\, dx < \int_0^1 1\, dx = 1$, es decir, A es correcta, y D, no.

Como $f(x) - g(x) = x \operatorname{sen} x(x - \operatorname{sen} x) > 0$ en (0, 1), $\int_0^1 (f(x) - g(x))dx = M - N > 0$, es decir, B es falsa y C correcta.

5. **Si $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\, 2t\, dt$, entonces:**

A. $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\, t \cos t\, dt$

B. $I = 1$

C. $I = \left[\cos^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

D. $I > \frac{\pi}{2}$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\, 2t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\text{sen}\, 2t\, dt = \frac{1}{2}\left[-\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(1+1) = 1$, es decir, B es cierta, y D, no.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\, 2t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\text{sen}\, t \cos t\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\, t \cos t\, dt$, es decir, A es cierta.

$\left[\cos^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - 1 = -1$, es decir, C es falsa.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. **Sea *f* una función continua en [*a*, *b*]. Considera las dos afirmaciones siguientes:**

1. $\int_a^b f(x)dx < 0$

2. $f(x) < 0$ **en todo el intervalo.**

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

Claramente $2 \Rightarrow 1$,pero $1 \not\Rightarrow 2$, ya que $\int_a^b f(x)dx$ puede ser negativa sin que $f(x)$ sea negativa en todo el intervalo, por ejemplo, basta considera $f(x) = x - 1$ en el intervalo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

Por tanto, la relación correcta es B.

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Sea $f(x) = a\,\text{sen}\, x + be^x + c\sqrt{x}$, de la que se sabe que en el punto de abscisa $x = d$ la gráfica de *f* presenta tangente horizontal. Para calcular $\int_1^d f''(x)\, dx$ se tienen los siguientes valores:**

1. **El valor de *a***

2. **El valor de *b***

3. **El valor de *c***

4. **El valor de *d***

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. Puede eliminarse el dato 4.

Sabemos que $f'(d) = 0$, además, como $f'(x) = a\cos x + be^x + \frac{c}{2\sqrt{x}}$ es una primitiva de $f''(x)$ tenemos $\int_1^d f''(x)dx = f'(d) - f'(1) = -\left(a\cos 1 + be + \frac{c}{2}\right)$, por lo que podemos eliminar el valor de *d*, respuesta D.

12 Distribuciones bidimensionales

ACTIVIDADES INICIALES

12.I. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2, 5)$ y tiene por pendiente $-\frac{1}{2}$. Calcula la ordenada en el origen y represéntala.

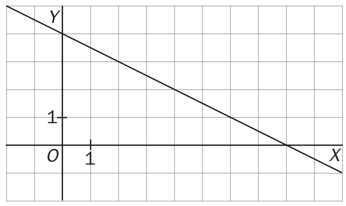
La ecuación de la recta es de la forma $y = -\frac{1}{2}x + b$.

La recta pasa por el punto $A(-2, 5)$; por tanto:

$5 = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 4$

La recta tiene por ecuación $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

La ordenada en el origen es 4.



12.II. En cada caso, calcula la pendiente de la recta que pasa por los siguientes puntos.

a) $A(3, 2)$ y $B(1, 1)$

b) $A(-5, 4)$ y $B(-1, 0)$

a) $m = \frac{1 - 2}{1 - 3} = \frac{1}{2}$

b) $m = \frac{0 - 4}{-1 - (-5)} = \frac{-4}{4} = -1$

EJERCICIOS PROPUESTOS

12.1. La siguiente tabla proporciona la distribución conjunta de frecuencias absolutas de la variable X, que representa el número de tarjetas de crédito que posee una persona, y la variable Y, que representa el número de compras semanales realizadas con tarjeta de crédito.

Y \ X	1	2	3	4
1	20	16	2	0
2	10	4	6	0
3	8	2	8	4

a) Calcula las distribuciones marginales. ¿Cuántas personas tienen más de tres tarjetas?

b) ¿Cuál es el número más frecuente de tarjetas de crédito?

c) ¿Cuántas personas realizan dos o menos de dos compras semanales?

d) ¿Cuál es la media y la varianza del número de tarjetas que posee una persona?

e) ¿Cuál es la media y la varianza del número de compras semanales realizadas con tarjeta?

Construimos las siguientes tablas:

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
1	38	38	38
2	22	44	88
3	16	48	144
4	4	16	64
	80	146	334

y_i	f_i	$y_i f_i$	$y_i^2 f_i$
1	38	38	38
2	20	40	80
3	22	66	198
	80	146	316

a) Cuatro personas tienen más de tres tarjetas.

b) El número más frecuente de tarjetas de crédito es 1.

c) $20 + 38 = 58$ personas realizan más de dos compras semanales.

d) $\bar{x} = \frac{146}{80} = 1{,}825$ tarjetas $\qquad s_X^2 = \frac{334}{80} - 1{,}825^2 = 0{,}84 \qquad s_x = 0{,}92$

e) $\bar{y} = \frac{144}{80} = 1{,}8$ compras $\qquad s_Y^2 = \frac{316}{80} - 1{,}8^2 = 0{,}71 \qquad s_Y = 0{,}84$

12.2. Las calificaciones de 39 alumnos en Filosofía e Historia han sido las siguientes:

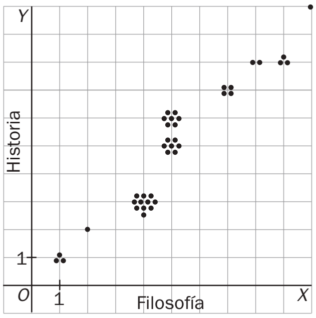
Filosofía (x_i)	1	2	4	5	6	7	8	9	10
Historia (y_i)	1	2	3	5	6	7	8	8	10
N.° de alumnos (f_i)	3	1	11	7	7	4	2	3	1

a) Representa el diagrama de dispersión.

b) A la vista del diagrama de dispersión, ¿se puede establecer que existe algún tipo de relación entre las calificaciones de Historia y Filosofía?

c) Calcula la nota media en Historia.

a)



c) Formamos la tabla:

y_i	f_i	$y_i f_i$
1	3	3
2	1	2
3	11	33
5	7	35
6	7	42
7	4	28
8	5	40
10	1	10
	39	193

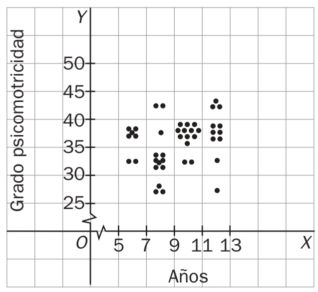
$$\bar{y} = \frac{193}{39} = 4{,}95$$

b) A mayor nota de Filosofía, mayor nota de Historia

12.3. En la siguiente tabla se recogen las edades y el grado de psicomotricidad de 44 niños:

Y (psicom.) \ X (años)	[5, 7)	[7, 9)	[9, 11)	[11, 13)	
[25, 30)	4	3	0	1	8
[30, 35)	2	7	2	0	11
[35, 40)	1	1	11	1	14
[40, 45)	0	2	0	6	8
[45, 50)	0	0	0	3	3
	7	13	13	11	44

Representa el diagrama de dispersión.



12.4. La siguiente tabla muestra las calificaciones obtenidas por cinco alumnos en Bachillerato (X) y en las PAU (Y).

Bachillerato	5,4	6,8	5,3	7,4	4,3
PAU	5,8	4,8	5,9	7,4	4,2

A partir de ella, calcula:

a) Las medias y las varianzas de X y de Y.

b) La covarianza de (X, Y).

Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
5,4	5,8	29,16	33,64	31,32
6,8	4,8	46,24	23,04	32,64
5,3	5,9	28,09	34,81	31,27
7,4	7,4	54,76	54,76	54,76
4,3	4,2	18,49	17,64	18,06
29,2	28,1	176,74	163,89	168,05

a) $\bar{x} = \frac{29{,}2}{5} = 5{,}84$ $\quad s_X^2 = \frac{176{,}74}{5} - 5{,}84^2 = 1{,}2424$

$\bar{y} = \frac{28{,}1}{5} = 5{,}62$ $\quad s_Y^2 = \frac{163{,}89}{5} - 5{,}62^2 = 1{,}1936$

b) $S_{XY} = \frac{168{,}05}{5} - 5{,}84 \cdot 5{,}62 = 0{,}7892$

12.5. En un depósito cilíndrico la altura del agua que contiene varía conforme pasa el tiempo según la siguiente tabla:

Tiempo (h)	8	22	27	33	50	70
Altura (m)	17	14	12	11	6	1

Halla:

a) Las medias de *X* y de *Y*.

b) Las varianzas de *X* y de *Y*.

c) La covarianza de (*X*, *Y*)

Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
8	17	64	289	136
22	14	484	196	308
27	12	729	144	324
33	11	1089	121	363
50	6	2500	36	300
70	1	4900	1	70
210	61	9766	787	1501

a) $\bar{x} = \dfrac{210}{6} = 35$

$\bar{y} = \dfrac{61}{6} = 10{,}17$

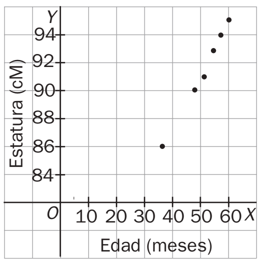
b) $s_X^2 = \dfrac{9766}{6} - 35^2 = 402{,}67$

$s_Y^2 = \dfrac{787}{6} - 10{,}17^2 = 27{,}74$

c) $S_{XY} = \dfrac{1501}{6} - 35 \cdot 10{,}17 = -105{,}78$

12.6. La tabla adjunta expresa los valores de la variable bidimensional edad, en meses, y estatura, en centímetros, de una niña entre los 3 y los 5 años. Representa la nube de puntos de esta variable e indica la relación existente entre la edad y la estatura.

Edad (meses)	36	48	51	54	57	60
Estatura (cm)	86	90	91	93	94	95

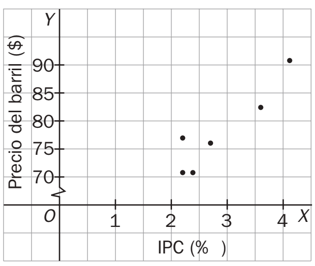


Según se observa en el diagrama de dispersión, existe una correlación lineal positiva fuerte.

12.7. En la siguiente tabla se recoge la evolución del IPC (índice de precios al consumo) y el precio del barril de petróleo (*brent*) durante el segundo semestre de 2007.

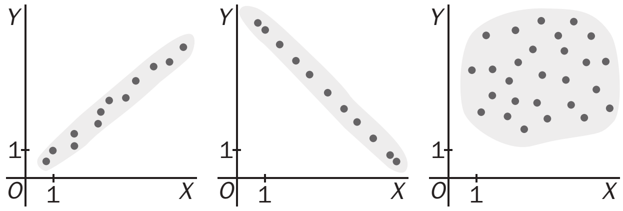
IPC (%)	2,4	2,2	2,2	2,7	3,6	4,1
Precio barril ($)	71,54	77,01	70,73	76,87	82,50	90,16

¿Se puede asegurar que la evolución del IPC está directamente relacionada con el precio del petróleo?



Sí, existe una correlación lineal positiva fuerte.

12.8. Los números 0, 0,8 y 1 son los valores absolutos del coeficiente de correlación de las distribuciones bidimensionales cuyas nubes de puntos se adjuntan:



Asigna a cada diagrama su coeficiente de correlación, cambiando el signo cuando sea necesario.

Primero: 0,8

Segundo: -1

Tercero: 0

12.9. (PAU) Los resultados de los exámenes de Inglés (X) y Matemáticas (Y) de 8 alumnos han sido los siguientes:

X	8	9	8,5	7	7	7,5	7,5	6,5
Y	7	7,5	8	6	6,5	7	6,5	2

a) Halla el coeficiente de correlación de las calificaciones en Inglés y Matemáticas de los siete primeros alumnos.

b) Calcula el coeficiente de correlación de esas dos variables para los ocho alumnos.

c) Explica la diferencia entre los resultados obtenidos.

a) Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i\,y_i$
8	7	64	49	56
9	7,5	81	56,25	67,5
8,5	8	72,25	64	68
7	6	49	36	42
7	6,5	49	42,25	45,5
7,5	7	56,25	49	52,5
7,5	6,5	56,25	42,25	48,75
54,5	48,5	427,75	338,75	380,25

$\bar{x} = \dfrac{54,5}{7} = 7,79$ $\qquad \bar{y} = \dfrac{48,5}{7} = 6,93$

$s_X^2 = \dfrac{427,75}{7} - 7,79^2 = 0,42$ $\qquad s_X = \sqrt{0,42} = 0,65$

$s_Y^2 = \dfrac{338,75}{7} - 6,93^2 = 0,37$ $\qquad s_Y = \sqrt{0,37} = 0,61$

$S_{XY} = \dfrac{380,25}{7} - 7,79 \cdot 6,93 = 0,34$

$r = \dfrac{S_{XY}}{s_X s_Y} = \dfrac{0,34}{0,65 \cdot 0,61} = 0,86$

b) Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i\,y_i$
8	7	64	49	56
9	7,5	81	56,25	67,5
8,5	8	72,25	64	68
7	6	49	36	42
7	6,5	49	42,25	45,5
7,5	7	56,25	49	52,5
7,5	6,5	56,25	42,25	48,75
6,5	2	42,25	4	13
61	50,5	470	342,75	393,25

$\bar{x} = \dfrac{61}{8} = 7,635$ $\qquad \bar{y} = \dfrac{50,5}{8} = 6,4125$

$s_X^2 = \dfrac{470}{8} - 7,625^2 = 0,61$ $\qquad s_X = \sqrt{0,61} = 0,78$

$s_Y^2 = \dfrac{342,75}{8} - 6,3125^2 = 3$ $\qquad s_Y = \sqrt{3} = 1,73$

$S_{XY} = \dfrac{393,25}{8} - 7,625 \cdot 6,3125 = 1,02$

$r = \dfrac{S_{XY}}{s_X s_Y} = \dfrac{1,02}{0,78 \cdot 1,73} = 0,76$

c) Mientras que los siete primeros alumnos tienen una nota pareja en las dos materias, el último no.

12.10. (PAU) En cierto país, el tipo de interés y el índice de la Bolsa en los seis últimos meses vienen dados por la siguiente tabla.

Tipo de interés (%)	8	7,5	7,2	6	5,5	5
Índice	120	130	134	142	150	165

Halla el índice previsto de la Bolsa en el séptimo mes, suponiendo que el tipo de interés en ese mes fue del 4,1%, y analiza la fiabilidad de la predicción, según el valor del coeficiente de correlación.

Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
8	120	64	14 400	960
7,5	130	56,25	16 900	975
7,2	134	51,84	17 956	964,8
6	142	36	20 164	852
5,5	150	30,25	22 500	825
5	165	25	27 225	825
39,2	841	263,34	119 145	4501,8

$\bar{x} = \dfrac{39,2}{6} = 6,53$ $\qquad \bar{y} = \dfrac{841}{6} = 140,17$

$s_X^2 = \dfrac{263,34}{6} - 6,53^2 = 1,25$ $\qquad s_X = \sqrt{1,2491} = 1,12$

$s_Y^2 = \dfrac{119\,145}{6} - 140,17^2 = 209,8711$ $\qquad s_Y = \sqrt{209,8711} = 14,48$

$S_{XY} = \dfrac{5401,8}{6} - 6,53 \cdot 140,17 = -15,01$

La recta de regresión de Y sobre X es: $y - 140,17 = \dfrac{-15,01}{1,25}(x - 6,53) \Rightarrow y = -12,008x + 218,58.$

$y = -12,008 \cdot 4,1 + 218,58 = 169,35$ es el índice de Bolsa esperado para el siguiente mes.

Como $r = \dfrac{S_{XY}}{s_X s_Y} = \dfrac{-15,01}{1,12 \cdot 14,48} = -0,93$, el resultado obtenido es fiable.

12.11. (PAU) Como consecuencia de un estudio estadístico realizado sobre 100 universitarios se ha obtenido una estatura media de 155 cm, con una desviación típica de 15,5 cm. Además se obtuvo la recta de regresión: $y = 80 + 1,5x$ (siendo X el peso, e Y, la altura).

Determina el peso medio de estos 100 universitarios.

Las rectas de regresión se cortan en el punto $(\bar{x}, \bar{y})$: $155 = 80 + 1,5\bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \dfrac{155 - 80}{1,5} = 50$ kilos.

12.12. (PAU) Un estudio sociológico proporcionó la siguiente tabla.

Nivel de estudios	1	2	3	4	5
Salario medio (€)	800	1000	1500	2000	3000

a) Calcula el coeficiente de correlación lineal entre el nivel de estudios y el salario medio, y, en función del valor obtenido, explica si se puede considerar que el salario medio está determinado por el nivel de estudios.

1 = estudios primarios 2 = estudios secundarios 3 = formación profesional
4 = técnicos de grado medio 5 = técnicos superiores 6 = doctores

b) Deduce el salario esperado para el nivel de estudios 6.

Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	800	1	640 000	800
2	1000	4	1 000 000	2000
3	1500	9	2 250 000	4500
4	2000	16	4 000 000	8000
5	3000	25	9 000 000	15 000
15	8300	55	16 890 000	30 300

a) $\bar{x} = \dfrac{15}{5} = 3$ $\qquad s_X^2 = \dfrac{55}{5} - 3^2 = 2$ $\qquad s_X = 1,41$

$\bar{y} = \dfrac{8300}{5} = 1660$ $\qquad s_Y^2 = \dfrac{16\,890\,000}{5} - 1660 = 622\,400$ $\qquad s_Y = 788,92$

$S_{XY} = \dfrac{30\,300}{5} - 3 \cdot 1660 = 1080$

$r = \dfrac{S_{XY}}{s_X s_Y} = \dfrac{1080}{1,41 \cdot 788,92} = 0,97$

Se puede considerar que el salario es en función del nivel de estudios.

b) $y - 1660 = 540(x - 3) \Rightarrow y = 540x + 40 \Rightarrow y = 540 \cdot 6 + 40 = 3280$ euros.

12.13. Sea la variable bidimensional dada por la siguiente tabla.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	5	6	8	11	1	13	14	14	17

a) Halla la recta de Tukey.

b) Halla la recta de regresión de Y sobre *X*.

c) Representa la nube de puntos y las dos rectas obtenidas.

a) Dividimos el conjunto de datos en los grupos:

$G_1 = \{(1, 5)\ (2, 6)\ (3, 8)\}$

$G_2 = \{(4, 11)\ (5, 1)\ (6, 13)\}$

$G_3 = \{(7, 14)\ (8, 14)\ (9, 17)\}$

Mediana de las abscisas de G_1: $x_1 = 2 \quad \Rightarrow P_1(2, 6)$

Mediana de las ordenadas de G_1: $y_1 = 6$

Mediana de las abscisas de G_2: $x_2 = 5 \quad \Rightarrow P_2(5, 11)$

Mediana de las ordenadas de G_2: $y_2 = 11$

Mediana de las abscisas de G_3: $x_3 = 8 \quad \Rightarrow P_3(8, 14)$

Mediana de las ordenadas de G_3: $y_3 = 14$

Baricentro del triángulo P_1, P_2, P_3: $G\left(\dfrac{2+5+8}{3}, \dfrac{6+11+14}{3}\right) = \left(5, \dfrac{31}{3}\right)$

Pendiente de la recta que pasa por P_1 y P_3: $m = \dfrac{14-6}{8-2} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

Recta de Tukey: $y - \dfrac{31}{3} = \dfrac{4}{3}(x-5) \Rightarrow y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{11}{3}$

b) Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i\,y_i$
1	5	1	5
2	6	4	12
3	8	9	24
4	11	16	44
5	1	25	5
6	13	36	78
7	14	49	98
8	14	64	112
9	17	81	153
45	89	285	531

$\bar{x} = \dfrac{45}{9} = 5$

$\bar{y} = \dfrac{89}{9} = 9{,}89$

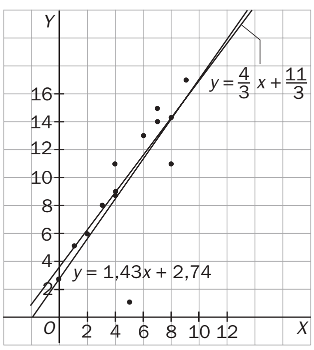
$s_X^2 = \dfrac{285}{9} - 5^2 = 6{,}67$

$S_{XY} = \dfrac{531}{9} - 5 \cdot 9{,}89 = 9{,}55$

La recta de regresión de *Y* sobre *X* es:

$y - 9{,}89 = \dfrac{9{,}55}{6{,}67}(x-5) \Rightarrow y = 1{,}43x + 2{,}74$

c)



12.14. La siguiente tabla da los datos obtenidos para una variable bidimensional.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	14	4	18	16	13	18	15	10	11

a) Halla la recta de regresión de *Y* sobre *X*.

b) Calcula la recta de Tukey.

c) Representa la nube de puntos y las dos rectas obtenidas.

a) Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i\,y_i$
1	14	1	14
2	4	4	8
3	18	9	54
4	16	16	64
5	13	25	65
6	18	36	108
7	15	49	105
8	10	64	80
9	11	81	99
45	119	285	597

$$\bar{x} = \frac{45}{9} = 5$$

$$\bar{y} = \frac{119}{9} = 13{,}22$$

$$s_X^2 = \frac{285}{9} - 5^2 = 6{,}67$$

$$s_{XY} = \frac{597}{9} - 5 \cdot 13{,}22 = 0{,}23$$

La recta de regresión de *Y* sobre *X* es:

$$y - 13{,}22 = \frac{0{,}23}{6{,}67}(x - 5) \Rightarrow y = 0{,}034x + 13{,}05$$

b) Formamos con los datos ordenados tres grupos:

$G_1 = \{(1, 14)\ (2, 4)\ (3, 18)\}$

$G_2 = \{(4, 16)\ (5, 13)\ (6, 18)\}$

$G_3 = G_3 = \{(7, 15)\ (8, 10)\ (9, 11)\}$

Para cada grupo G_i hallamos el punto $P_i\,(x_i, y_i)$:

$P_1(2, 14)$ $\quad P_2(5, 16)$ $\quad P_3(8, 11)$

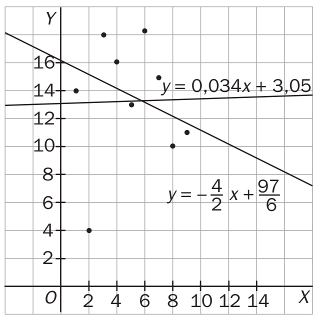
El baricentro del triángulo de vértices $P_1\,P_2\,P_3$ tiene por coordenadas:

$$x_G = \frac{2 + 5 + 8}{3} = 5$$

$$y_G = \frac{14 + 16 + 11}{3} = \frac{41}{3}$$

La pendiente $P_1\,P_3$ es: $m = \dfrac{11 - 14}{8 - 2} = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2}$

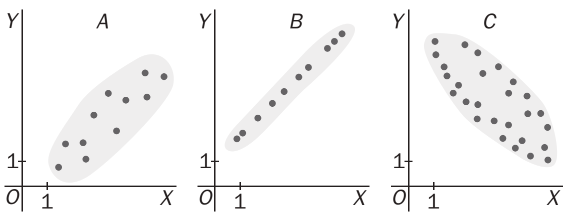
Recta de Tukey: $y - \dfrac{41}{3} = -\dfrac{1}{2}(x - 5) \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{97}{6}$



EJERCICIOS

Nube de puntos y correlación

12.15. Considera las siguientes nubes de puntos.



a) ¿En cuál de ellas los datos se ajustarán mejor a una recta?

b) Asigna a cada una de las nubes uno de los siguientes coeficientes de correlación, fijando el signo en cada caso.

$r_1 - \pm 0{,}99$

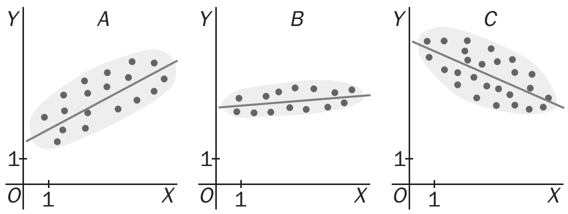
$r_2 = \pm 0{,}6$

$r_3 = \pm 0{,}8$

a) Se ajustará mejor a una recta la nube de puntos del apartado b.

b) *A*: $r = 0{,}8$ $\quad$ *B*: $r = 0{,}99$ $\quad$ *C*: $r = -0{,}6$

12.16. (PAU) En las gráficas siguientes se muestran las rectas de regresión obtenidas en tres estudios estadísticos.



a) ¿En cuál de las gráficas el coeficiente de correlación será mayor?

b) Indica en qué gráficas el coeficiente de correlación sería negativo.

Justifica las respuestas.

a) El de la gráfica *B*, ya que los puntos están más agrupados.

b) El de la gráfica *C*, ya que los puntos se agrupan en torno a una recta de pendiente negativa.

12.17. (PAU) En una empresa de transportes trabajan cuatro conductores. Los años de antigüedad de sus permisos de conducir y el número de infracciones cometidas en el último año por cada uno de ellos son los siguientes:

X: años de antigüedad	3	4	5	6
Y: infracciones	4	3	2	1

a) Representa gráficamente los datos anteriores. Razona si muestran correlación positiva o negativa.

b) Calcula el coeficiente de correlación e interprétalo en términos de la situación real.

a)

Relación positiva

b) $\bar{x} = \dfrac{3+4+5+6}{4} = \dfrac{18}{4} = 4,5$ $\qquad \bar{y} = \dfrac{4+3+2+1}{4} = \dfrac{10}{4} = 2,5$

$s_x^2 = \dfrac{9+16+25+36}{4} - 4,5^2 = 1,25 \qquad s_X = 1,12$

$s_y^2 = \dfrac{16+9+4+1}{4} - 2,5^2 = 1,25; \qquad s_Y = 1,12$

$s_{XY} = \dfrac{12+12+10+6}{4} - 4,5 \cdot 2,5 = 10 - 11,25 = -1,25;$

$r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y} = \dfrac{-1,25}{1,12 \cdot 1,12} = -1.$

Existe dependencia funcional negativa.

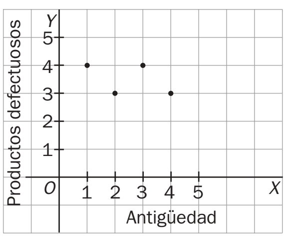
12.18. En una empresa trabajan cuatro obreros. La antigüedad y el número de productos defectuosos elaborados por ellos durante el último año vienen dados en la siguiente tabla.

Antigüedad	3	2	4	1
Productos defectuosos	4	3	3	4

a) Dibuja el diagrama de dispersión y justifica si los datos presentan correlación positiva o negativa.

b) Calcula el coeficiente de correlación.

a)



b) $\bar{x} = \dfrac{3+2+4+1}{4} = \dfrac{10}{4} = 2,5;$ $\qquad \bar{y} = \dfrac{4+3+3+4}{4} = \dfrac{14}{4} = 3,5$

$s_x^2 = \dfrac{9+4+16+1}{4} - 2,5^2 = 1,25 \qquad s_X = 1,12$

$s_y^2 = \dfrac{16+9+9+16}{4} - 3,5^2 = 0,25 \qquad s_Y = 0,5$

$S_{XY} = \dfrac{12+6+12+4}{4} - 2,5 \cdot 3,5 = -0,25;$

$r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y} = \dfrac{-0,25}{1,12 \cdot 0,5} = -0,45$

Los datos no presentan relación.

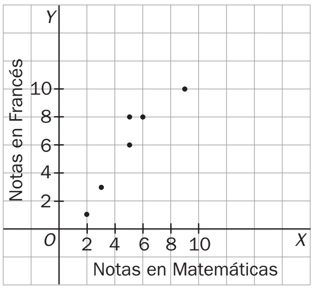
12.19. La tabla siguiente muestra las notas de Matemáticas, X, y de Francés, Y, de seis estudiantes.

X	2	3	5	5	6	9
Y	1	3	8	16	8	10

a) Representa gráficamente los valores de la tabla mediante una nube de puntos.

b) Halla el coeficiente de correlación. ¿Crees que las variables están fuertemente correlacionadas?

a)



b) Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
2	1	4	1	2
3	3	9	9	9
5	8	25	64	40
5	6	25	36	30
6	8	36	64	48
9	10	81	100	90
30	36	180	274	219

$\bar{x} = \dfrac{30}{6} = 5$ $\qquad s_X^2 = \dfrac{180}{6} - 5^2 = 5$ $\qquad s_X = 2{,}24$

$\bar{y} = \dfrac{36}{6} = 6$ $\qquad s_Y^2 = \dfrac{274}{6} - 6^2 = 9{,}67$ $\qquad s_Y = 3{,}11$

$s_{XY} = \dfrac{219}{6} - 5 \cdot 6 = 6{,}5$ $\qquad r = \dfrac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \dfrac{6{,}5}{2{,}24 \cdot 3{,}11} = 0{,}93$

Las variables están fuertemente correlacionadas y la correlación es positiva, es decir, cuando aumenta la variable X, aumenta también la variable Y.

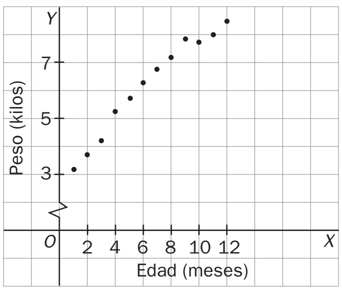
12.20. Durante su primer año de vida han pesado a Marta cada mes. En la tabla siguiente aparecen sus pesos. X representa la edad en meses, e Y, el peso en kilogramos.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	3,2	3,7	4,2	5,3	5,7	6,5	6,8	7,2	7,9	7,7	8	8,5

a) Representa el diagrama de dispersión.

b) Calcula el coeficiente de correlación lineal e interprétalo.

a)



b) Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	3,2	1	10,24	3,2
2	3,7	4	13,69	7,4
3	4,2	9	17,64	12,6
4	5,3	16	28,09	21,2
5	5,7	25	32,49	28,5
6	6,5	36	42,25	39
7	6,8	49	46,24	47,6
8	7,2	64	51,84	57,6
9	7,9	81	62,41	71,1
10	7,7	100	59,29	77
11	8	121	64	88
12	8,5	144	72,25	102
78	74,7	650	500,43	555,2

$\bar{x} = \dfrac{78}{12} = 6{,}5$

$s_X^2 = \dfrac{650}{12} - 6{,}5^2 = 11{,}9$ $\qquad s_X = 3{,}45$

$\bar{y} = \dfrac{74{,}7}{6} = 6{,}23$

$s_Y^2 = \dfrac{500{,}43}{12} - 6{,}23^2 = 2{,}89$ $\qquad s_Y = 1{,}7$

$s_{XY} = \dfrac{555{,}2}{12} - 6{,}5 \cdot 6{,}23 = 5{,}78$

$r = \dfrac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \dfrac{5{,}78}{3{,}45 \cdot 1{,}7} = 0{,}99$

La correlación es positiva y fuerte: al aumentar el tiempo, aumenta el peso de Marta aumenta.

12.21. Se hizo una prueba a 10 estudiantes para ver la relación que había entre la expresión oral (X) y la destreza manual (Y), obteniéndose la siguiente tabla.

X	8	7	6	5	4	3	7	6	9	5
Y	5	5	6	7	8	7	4	5	3	5

a) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de X.

b) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de Y.

c) ¿Qué distribución está más dispersa? Justifica la respuesta.

d) Calcula el coeficiente de correlación lineal e interprétalo.

Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
8	5	64	25	40
7	5	49	25	35
6	6	36	36	36
5	7	25	49	35
4	8	16	64	32
3	7	9	49	21
7	4	49	16	28
6	5	36	25	30
9	3	81	9	27
5	5	125	25	25
60	55	390	323	309

a) $\bar{x} = \dfrac{60}{10} = 6 \qquad s_X^2 = \dfrac{390}{10} - 6^2 = 3 \qquad s_X = 1{,}73$

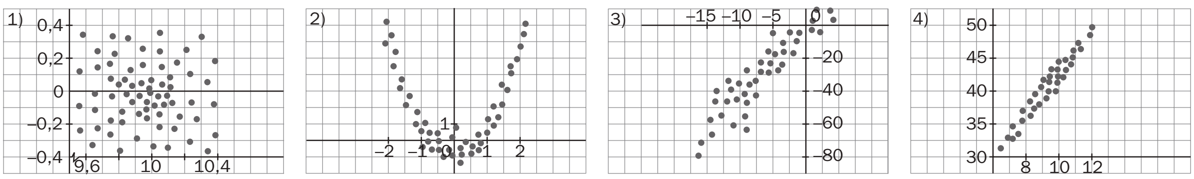
b) $\bar{y} = \dfrac{55}{10} = 5{,}5 \qquad s_Y^2 = \dfrac{323}{10} - 6^2 = 2{,}05 \qquad s_Y = 1{,}43$

c) Como la desviación típica de X es mayor que la desviación típica de Y, está más dispersa la distribución de X.

d) $s_{xy} = \dfrac{309}{10} - 6 \cdot 5{,}5 = -2{,}1 \qquad r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y} = \dfrac{-2{,}1}{1{,}73 \cdot 1{,}43} = -0{,}85$

La correlación es inversa: a mejor expresión oral, peor destreza manual.

12.22. Considera las nubes de puntos de la figura.



a) Indica si hay relación de dependencia entre la variable X y la variable Y. En caso de haberla, ¿puede considerarse esta relación lineal?

b) Asigna a cada gráfico una de las siguientes rectas:

$$y = x \qquad y = 1 - 0{,}2x \qquad y = 2 + 4x.$$

a) Hay relación entre las variables 2, 3 y 4, siendo lineal en las dos últimas.

b) La recta $y = 2 + 4x$ es la más adecuada para reflejar la relación entre las variables X e Y de los gráficos 3 y 4. Esta recta tiene pendiente 4 y en ambas nubes de puntos se observa que el rango de y es aproximadamente 4 veces mayor que el rango de X.

Modelo de regresión lineal

12.23. Los datos siguientes corresponden a la altura sobre el nivel del mar (X) y la presión atmosférica (Y) de siete puntos.

X	11	14	16	15	16	18	20	21	14	20	19	11
Y	2	3	5	6	5	3	7	10	6	10	5	6

a) Halla la recta de regresión de Y sobre X.

b) ¿Qué presión atmosférica habría sobre Peña Vieja (2600 metros de altitud aproximadamente)?

a) Formamos la tabla siguiente:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
0	760	0	577 600	0
184	745	33 856	555 025	137 080
231	740	53 361	547 600	170 940
481	720	231 361	518 400	346 320
730	700	532 900	490 000	511 000
911	685	829 921	469 225	624 035
1550	650	2 402 500	422 500	1 007 500
4087	5000	390	3 580 350	2 796 875

$$\bar{x} = \frac{4087}{7} = 583,86 \qquad \bar{y} = \frac{5000}{7} = 714,29$$

$$s_x^2 = \frac{4\,083\,899}{7} - 583,86^2 = 242\,521,64$$

$$s_{xy} = \frac{2\,796\,875}{7} - 583,86 \cdot 714,29 = -17\,491,79$$

Recta de regresión de la presión respecto de la altura:

$$y - 714,29 = -\frac{17\,491,79}{242\,521,64}(x - 583,86)$$

$$y = -0,07x + 755,16$$

b) Para saber qué presión atmosférica habrá en Peña Vieja, que se encuentra situada a 2600 m de altitud, sustituiremos en la ecuación anterior $x = 2600$.

$$y = -0,07 \cdot 2600 + 755,16 = 573,16 \text{ mm de mercurio}$$

12.24. (PAU) La información estadística obtenida de una muestra de tamaño 12 sobre la relación existente entre la inversión realizada, X, y el rendimiento obtenido, Y, en miles de euros para explotaciones agropecuarias se muestra en la siguiente tabla.

X	0	184	231	481	730	911	1550
Y	760	745	740	720	700	685	650

a) Halla la recta de regresión de Y sobre X.

b) Determina la previsión de inversión que se obtendrá con un rendimiento de 7500 euros.

a) Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
11	2	121	4	22
14	3	196	9	42
16	5	256	25	80
15	6	225	36	90
16	5	256	25	80
18	3	324	9	54
20	7	400	49	140
21	10	441	100	210
14	6	196	36	84
20	10	400	100	200
19	5	361	25	95
11	6	121	121	66
195	68	3297	454	1163

$$\bar{x} = \frac{195}{12} = 16,25; \qquad \bar{y} = \frac{68}{12} = 5,67$$

$$s_x^2 = \frac{3297}{12} - 16,25^2 = 274,75 - 264,06 = 10,68$$

$$s_y^2 = \frac{454}{12} - 5,67^2 = 37,83 - 32,15 = 5,68$$

$$s_{xy} = \frac{1163}{12} - 16,25 \cdot 5,67 = 96,92 - 92,14 = 4,78$$

Recta de regresión de Y sobre X

$$y - 5,67 = \frac{4,78}{10,68}(x - 16,25) \Rightarrow y = 0,45x - 1,64$$

b) La recta de regresión de X sobre Y es:

$$x - \bar{x} = \frac{s_{xy}}{s_y^2}(y - \bar{y}); \; x - 16,25 = \frac{4,78}{5,68}(y - 5,67) \Rightarrow x = 0,84y + 11,49$$

Para $y = 7,5$, sustituimos este valor en la ecuación obtenida: $x = 0,84 \cdot 7,5 + 11,49 = 17,79$.

Por tanto, para un rendimiento de 7500 euros se prevé una inversión de 17 790.

12.25. Cinco niñas de 2, 3, 5, 7 y 8 años de edad pesan, respectivamente, 14, 20, 32, 42 y 44 kilos.

a) Halla la ecuación de la recta de regresión de edad sobre el peso.

b) ¿Cuál sería el peso aproximado de una niña de 6 años?

a) Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
2	14	4	196	28
3	20	9	400	60
5	32	25	1024	160
7	42	49	1764	294
8	44	64	1936	352
60	152	151	5320	894

$$\bar{x} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\bar{y} = \frac{152}{5} = 30,4$$

$$s_x^2 = \frac{151}{5} - 5^2 = 5,2$$

$$s_y^2 = \frac{5320}{5} - 30,4^2 = 139,84$$

$$s_{xy} = \frac{894}{5} - 5 \cdot 30,4 = 26,8$$

Recta de regresión de X sobre Y:

$$x - 5 = \frac{26,8}{139,84}(y - 30,4)$$

$$x = 0,19y - 0,78$$

b) Recta de regresión de Y sobre X: $y - 30,4 = \dfrac{26,8}{139,84}(x - 5)$; $\quad y = 5,15x + 4,65.$

A una niña de 6 años le corresponde un peso de: $y = 5,15 \cdot 6 + 4,65 = 35,55$ kg.

12.26. La siguiente tabla ofrece los resultados de 6 pares de observaciones, realizadas para analizar el grado de relación existente entre dos variables, X e Y.

X	2	2	3	3	3	4
Y	0	1	1	2	4	3

a) Encuentra la recta de regresión de Y sobre X.

b) Representa, sobre unos mismos ejes, la recta anterior y los pares de observaciones de la tabla.

c) ¿Qué grado de relación lineal existe entre ambas variables?

a) Formamos la tabla

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
2	0	4	0	0
2	1	4	1	2
3	1	9	1	3
3	2	9	4	6
3	4	9	16	12
4	3	16	9	12
17	11	51	31	35

$$\bar{x} = \frac{17}{6} = 2,83$$

$$\bar{y} = \frac{11}{6} = 1,83$$

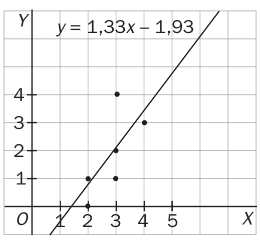
$$s_x^2 = \frac{51}{6} - 2,83^2 = 0,49$$

$$s_{xy} = \frac{35}{6} - 2,83 \cdot 1,83 = 0,65$$

Recta de regresión de Y sobre X:

$$y - 1,83 = \frac{0,65}{0,49}(x - 2,83); \quad y = 1,33x - 1,93$$

b)



c) $s_x = \sqrt{0,47} = 0,7$

$$s_y^2 = \frac{31}{6} - 1,83^2 = 1,82$$

$$s_y = \sqrt{1,82} = 1,35$$

$$r = \frac{0,65}{0,7 \cdot 1,35} = 0,69.$$

Existe relación positiva.

12.27. Se sabe que entre el consumo de papel y el número de litros de agua por metro cuadrado que se recogen en una ciudad no existe relación. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones.

a) ¿Cuál es el valor de la covarianza de estas variables?

b) ¿Cuánto vale el coeficiente de correlación lineal?

c) ¿Qué ecuaciones tienen las dos rectas de regresión y cuál es su posición en el plano?

a) $s_{xy} = 0$

b) $r = 0$

c) Las ecuaciones de las rectas de regresión son: $y = \bar{y}$; $x = \bar{x}$

Por tanto, son paralelas a los ejes y, en consecuencia, perpendiculares.

12.28. En una distribución bidimensional, la recta de regresión de Y sobre X es $y = \bar{y}$, siendo $\bar{y}$ la media de la distribución Y. ¿Cuál es la recta de regresión de X sobre Y? ¿Existe dependencia lineal entre Y y X? Razona las respuestas.

Si la recta de regresión de Y sobre X es $y = \bar{y}$, la recta de regresión de X sobre Y será $x = \bar{x}$.

En estos casos no existe ningún tipo dependencia entre las variables X e Y; por tanto, están incorreladas.

12.29. Dada la distribución bidimensional:

X	5	6,5	8	4	3
Y	4,5	7	7,5	5	3,5

a) Calcula el coeficiente de correlación lineal, interpretando el resultado.

b) Determina la recta de regresión de Y sobre X.

c) Determina la recta de regresión de X sobre Y.

d) Halla el punto en que se cortan las dos rectas.

Formamos la tabla siguiente:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
5	4,5	25	20,25	22,5
6,5	7	42,25	49	45,5
8	7,5	64	56,25	60
4	5	16	25	20
3	3,5	9	12,25	10,5
26,5	27,5	156,25	162,75	158,5

$$\bar{x} = \frac{26,5}{5} = 5,3$$

$$s_x^2 = \frac{156,25}{5} - 5,3^2 = 3,16$$

$$s_x = \sqrt{3,16} = 1,78$$

$$\bar{y} = \frac{27,5}{5} = 5,5$$

$$s_y^2 = \frac{162,75}{5} - 5,5^2 = 2,3$$

$$s_y = \sqrt{2,3} = 1,52$$

$$s_{xy} = \frac{158,5}{5} - 5,3 \cdot 5,5 = 2,55$$

a) $r = \dfrac{2,55}{1,78 \cdot 1,52} = 0,95$. Al ser positivo y próximo a la unidad, se trata de una correlación fuerte y positiva.

b) $y - 5,5 = \dfrac{2,55}{3,16}(x - 5,3)$ $\qquad y = 0,81x + 1,2$

c) $x - 5,3 = \dfrac{2,55}{2,3}(y - 5,5)$ $\qquad x = 1,11y - 0,81$

d) El punto donde se cortan las dos rectas es el $(\bar{x}, \bar{y})$, es decir: (5,3; 5,5).

12.30. La tabla siguiente expresa el porcentaje de alcohol en sangre de 6 conductores y los segundos que tardan en reaccionar:

% de alcohol	0,08	0,11	0,12	0,14	0,15	0,16
Tiempo de reacción, en segundos	0,38	0,41	0,61	0,44	0,52	0,64

a) ¿Qué tipo de dependencia existe entre estas variables?

b) Estima cuál será el tiempo de reacción cuando el porcentaje de alcohol en sangre sea igual a 0,25.

a) Calculamos el coeficiente de correlación lineal.

Formamos la tabla siguiente:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i\,y_i$
0,08	0,38	0,0064	0,1444	0,0304
0,11	0,41	0,0121	0,1681	0,0451
0,12	0,61	0,0144	0,3721	0,0732
0,14	0,44	0,0196	0,1936	0,0616
0,15	0,52	0,0225	0,2704	0,078
0,16	0,64	0,0256	0,4096	0,1024
0,76	3	0,1006	1,5582	0,3907

$\bar{x} = \dfrac{0,76}{6} = 0,127$ $\qquad \bar{y} = \dfrac{3}{6} = 0,5$

$s_x^2 = \dfrac{0,1006}{6} - 0,127^2 = 0,0009$ $\qquad s_x = \sqrt{0,0009} = 0,03$

$s_y^2 = \dfrac{1,5582}{6} - 0,5^2 = 0,0097$ $\qquad s_y = \sqrt{0,0097} = 0,098$

$s_{xy} = \dfrac{0,3907}{6} - 0,127 \cdot 0,5 = 0,0016$ $\qquad r = \dfrac{0,0016}{0,03 \cdot 0,098} = 0,54$

Por tanto, la dependencia es positiva y débil.

b) Recta de regresión de Y sobre X: $y - 0,5 = \dfrac{0,0016}{0,0009}(x - 0,127)$ $\qquad y = 1,78x + 0,27$

Para $x = 0,25 \Rightarrow y = 1,78 \cdot 0,25 + 0,27 = 0,715$ Luego el tiempo de reacción en segundos es 0,715.

12.31. La tabla siguiente muestra la altitud en metros y la temperatura en grados centígrados a medida que se asciende en una montaña.

Altitud (m)	1000	1100	1200	1300	1400	1500
Temperatura (°C)	12,5	11	10	9,8	8,5	8

a) ¿Qué tipo de dependencia existe entre estas variables?

b) Estima a qué altitud se alcanzarán los cero grados.

a) Calculamos el coeficiente de correlación lineal.

Formamos la tabla siguiente:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i\,y_i$
1000	12,5	1 000 000	156,25	12 500
1100	11	1 210 000	121	12 100
1200	10	1 440 000	100	12 000
1300	9,8	1 690 000	96,04	12 740
1400	8,5	1 960 000	72,25	11 900
1500	8	2 250 000	64	12 000
7500	59,8	9 550 000	609,54	73240

$\bar{x} = \dfrac{7500}{6} = 1250$ $\qquad \bar{y} = \dfrac{59,8}{6} = 9,967$

$s_x^2 = \dfrac{9\,550\,000}{6} - 1250^2 = 29166,7$

$s_x = \sqrt{29\,166,7} = 170,78$

$s_y^2 = \dfrac{609,54}{6} - 9,967^2 = 2,25$

$s_y = \sqrt{2,25} = 1,5$

$s_{xy} = \dfrac{73\,240}{6} - 1250 \cdot 9,967 = -252,08$

$r = \dfrac{-252,08}{170,78 \cdot 1,5} = -0,98$

Por tanto, la dependencia es negativa y fuerte.

b) Recta de regresión de X sobre Y: $x - 1250 = \dfrac{-252,08}{2,25}(y - 9,967)$ $\qquad x = 112,04x + 2366,66$

Para $y = 0 \Rightarrow x = 2366,66$. La altitud estimada es de 2366,66 metros.

Luego el tiempo de reacción en segundos es 0,715.

12.32. (PAU) Se midieron los valores de concentración de una sustancia *A* en suero fetal y los valores de su concentración en suero materno. Se obtuvieron los siguientes datos en una muestra de 6 embarazadas al final de la gestación.

Concentración suero madre (*X*)	8	4	12	2	7	9
Concentración suero feto (*Y*)	6	4	8	1	4	5

a) Calcula el coeficiente de correlación lineal.

b) Halla la expresión de la recta que permita estimar los valores fetales a partir de los maternos.

a) Calculamos el coeficiente de correlación lineal.

Formamos la tabla siguiente:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i\,y_i$
8	6	64	36	48
4	4	16	16	16
12	8	144	64	96
2	1	4	1	2
7	4	49	16	28
9	5	81	25	45
42	28	358	158	235

$$\bar{x} = \frac{42}{6} = 7$$

$$\bar{y} = \frac{28}{6} = 4{,}67$$

$$s_x^2 = \frac{358}{6} - 7^2 = 10{,}67$$

$$s_x = \sqrt{10{,}67} = 3{,}27$$

$$s_y^2 = \frac{158}{6} - 4{,}67^2 = 4{,}52$$

$$s_y = \sqrt{2{,}25} = 2{,}13$$

$$s_{xy} = \frac{235}{6} - 7 \cdot 4{,}67 = 6{,}48$$

$$r = \frac{6{,}48}{3{,}27 \cdot 2{,}13} = 0{,}93$$

b) Recta de regresión de *Y* sobre *X*: $y - 4{,}67 = \dfrac{6{,}48}{10{,}67}(x - 7)$ $\quad y = 0{,}607x + 3{,}41$

12.33. La tabla siguiente expresa los gastos en electricidad y los ingresos mensuales de 6 familias, en euros.

Gastos en electricidad	20	30	50	90	100	190
Ingresos	400	600	800	950	1200	2000

¿Qué gasto en electricidad se estima que tendrá una familia que percibe unos ingresos totales de 2500 euros?

Calculamos la recta de regresión de *x* (gastos en electricidad) sobre *y* (ingresos).

Formamos la tabla siguiente:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i\,y_i$
20	400	400	160 000	8 000
30	600	900	360 000	18 000
50	800	2500	640 000	40 000
90	950	8100	902 500	85 500
100	1200	10 000	1 440 000	120 000
150	2000	22 500	4 000 000	300 000
440	5950	44 400	7 502 500	571 500

$$\bar{x} = \frac{440}{6} = 73{,}33$$

$$\bar{y} = \frac{5950}{6} = 991{,}67$$

$$s_y^2 = \frac{7\,502\,500}{6} - 991{,}67^2 = 267027{,}11$$

$$s_{xy} = \frac{571\,500}{6} - 73{,}33 \cdot 991{,}67 = 22\,530{,}84$$

$$x - 73{,}33 = \frac{22\,530{,}84}{267\,027{,}11}(y - 991{,}67)$$

$$x = 0{,}084y - 10{,}34$$

Para $y = 2500$ $\quad x = 0{,}084 \cdot 2500 - 10{,}34 = 199{,}66$

Para una familia con unos ingresos mensuales de 2500 euros se espera un gasto en electricidad de 199,66 euros.

12.34. Sea la variable bidimensional dada por la tabla siguiente:

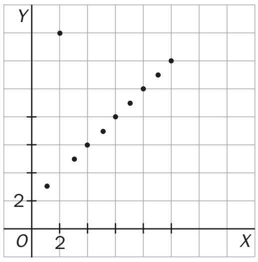
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	3	14	5	6	7	8	9	10	11	12

a) Representa la nube de puntos.

b) Halla la recta de Tukey.

c) Halla la recta de regresión de Y sobre X.

a)



b) Formamos con los datos ordenados tres grupos:

$G_1 = \{(1, 3), (2, 14), (3, 5)\}$

$G_2 = \{(4, 6), (5, 7), (6, 8), (7, 9)\}$

$G_3 = \{(8, 10), (9, 11), (10, 12)\}$

Para cada grupo G_i hallamos el punto $P_i(x_i, y_i)$:

$P_1(2, 5)$

$P_2(5{,}5; 7{,}5)$

$P_3(9, 11)$

El baricentro del triángulo de vértices $P_1 P_2 P_3$ tiene por coordenadas:

$$x_G = \frac{2 + 5{,}5 + 9}{3} = 5{,}5$$

$$y_G = \frac{5 + 7{,}5 + 11}{3} = 7{,}83$$

La pendiente $P_1 P_3$ es: $m = \dfrac{11 - 5}{9 - 2} = \dfrac{6}{7} = 0{,}857$.

La recta de Tukey es: $y - 7{,}83 = 0{,}857\,(x - 5{,}5) \Rightarrow y = 0{,}857x + 3{,}12$

c) Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i\,y_i$
1	3	1	3
2	14	4	28
3	5	9	15
4	6	16	24
5	7	25	35
6	8	36	48
7	9	49	63
8	10	64	80
9	11	81	99
10	12	100	120
55	85	385	515

$$\bar{x} = \frac{55}{10} = 5{,}5$$

$$\bar{y} = \frac{85}{10} = 8{,}5$$

$$s_X^2 = \frac{385}{10} - 5{,}5^2 = 8{,}25$$

$$s_{XY} = \frac{515}{10} - 5{,}5 \cdot 8{,}25 = 6{,}125$$

La recta de regresión de Y sobre X es:

$$y - 8{,}5 = \frac{6{,}125}{8{,}25}(x - 5{,}5) \Rightarrow y = 0{,}74x + 4{,}42$$

12.35. Dada la variable bidimensional cuyos datos se recogen en la siguiente tabla:

X	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Y	3	25	26	20	11	23	24	27	28	24

a) Calcula la recta de Tukey.

b) Halla la recta de regresión de Y sobre X.

a) Formamos con los datos ordenados tres grupos:

$G_1 = \{(2, 23), (4, 25), (6, 26)\}$ $G_2 = \{(8, 20), (10, 11), (12, 23), (14, 24)\}$ $G_3 = \{(16, 27), (18, 28), (20, 24)\}$

Para cada grupo G_i hallamos el punto $P_i(x_i, y_i)$:

$P_1(4, 25)$

$P_2(11; 21{,}5)$

$P_3(18, 27)$

El baricentro del triángulo de vértices $P_1P_2P_3$ tiene por coordenadas:

$x_G = \dfrac{4 + 11 + 18}{3} = 7{,}67$ $\qquad y_G = \dfrac{25 + 21{,}5 + 27}{3} = 24{,}5$

La pendiente P_1P_3 es: $m = \dfrac{27 - 25}{18 - 4} = \dfrac{2}{14} = 0{,}14.$

La recta de Tukey es: $y - 24{,}5 = 0{,}14\,(x - 7{,}67) \Rightarrow y = 0{,}14x + 23{,}43$

b) Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i\,y_i$
2	23	4	46
4	25	16	100
6	26	36	156
8	20	64	160
10	11	100	110
12	23	144	276
14	24	196	336
16	27	256	432
18	28	324	504
20	24	400	480
110	231	1540	2600

$\bar{x} = \dfrac{110}{10} = 11$ $\qquad \bar{y} = \dfrac{231}{10} = 23{,}1$

$s_X^2 = \dfrac{1540}{10} - 11^2 = 33$ $\qquad s_{XY} = \dfrac{2600}{10} - 11 \cdot 23{,}1 = 5{,}9$

La recta de regresión de Y sobre X es:

$$y - 23{,}1 = \frac{5{,}9}{33}(x - 11) \Rightarrow y = 0{,}18x + 21{,}13$$

12.36. Sea la variable bidimensional dada por la tabla siguiente:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	7	6	6	8	1	10	9	7	6	11

a) Halla la recta de Tukey.

b) Calcula la recta de regresión de Y sobre X.

a) Formamos con los datos ordenados tres grupos:

$G_1 = \{(1, 7), (2, 6), (3, 6)\}$ $G_2 = \{(4, 8), (5, 1), (6, 10), (7, 9)\}$ $G_3 = \{(8, 7), (9, 6), (10, 11)\}$

Para cada grupo G_i hallamos el punto $P_i(x_i, y_i)$:

$P_1(2, 6)$

$P_2(5{,}5; 8)$

$P_3(9, 7)$

El baricentro del triángulo de vértices $P_1P_2P_3$ tiene por coordenadas:

$x_G = \dfrac{2 + 5{,}5 + 9}{3} = 5{,}5$

$y_G = \dfrac{6 + 8 + 7}{3} = 7$

La pendiente P_1P_3 es: $m = \dfrac{7 - 6}{9 - 2} = \dfrac{1}{7} = 0{,}14.$

La recta de Tukey es: $y - 7 = 0{,}14\,(x - 5{,}5) \Rightarrow y = 0{,}14x + 6{,}23$

b) Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	7	1	7
2	6	4	12
3	6	9	18
4	8	16	32
5	1	25	5
6	10	36	60
7	9	49	63
8	7	64	56
9	6	81	54
10	11	100	110
55	71	385	417

$\bar{x} = \frac{55}{10} = 5{,}5$ $\qquad \bar{y} = \frac{71}{10} = 7{,}1$

$s_X^2 = \frac{385}{10} - 5{,}5^2 = 8{,}25$ $\qquad s_{XY} = \frac{417}{10} - 5{,}5 \cdot 7{,}1 = 2{,}65$

La recta de regresión de Y sobre X es:

$$y - 7{,}1 = \frac{2{,}65}{8{,}25}(x - 5{,}5) \Rightarrow y = 0{,}32x + 5{,}33$$

PROBLEMAS

12.37. Una planta envasadora de frutos secos necesita adquirir una máquina empaquetadora de bolsas de 50 gramos lo más precisa posible, para lo que efectúa una prueba de 10 pesadas con cada una de las máquinas X e Y, obteniendo los siguientes resultados en gramos:

X	52	54	53	47	48	49	46	48	51	52
Y	51	54	41	46	49	49	48	49	51	52

a) Calcula la media y la desviación típica de cada una de las distribuciones X e Y. ¿Qué máquina se debe elegir y por qué?

b) Calcula la recta de regresión de Y sobre X. ¿Qué pesada se espera de la máquina Y en una nueva prueba si se sabe que X ha dado 54 gramos?

Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
52	51	2704	2601	2652
54	54	2916	2916	2916
53	51	2809	2601	2703
47	46	2209	2116	2162
48	49	2304	2401	2352
49	49	2401	2401	2401
46	48	2116	2304	2208
48	49	2304	2401	2352
51	51	2601	2601	2601
52	52	2704	2704	2704
195	68	25 068	25 046	25 051

a) $\bar{x} = \frac{500}{10} = 50;$ $\qquad \bar{y} = \frac{500}{10} = 50$

$s_x^2 = \frac{25\,068}{10} - 50^2 = 6{,}8$ $\qquad s_x = \sqrt{6{,}8} = 2{,}61$

$s_y^2 = \frac{25\,046}{10} - 50^2 = 4{,}6$ $\qquad s_y = \sqrt{4{,}6} = 2{,}14$

Las dos distribuciones tienen igual media, pero la desviación típica de la máquina Y es más pequeña que la de la máquina X. Se debe elegir la máquina Y, ya que las pesadas están más concentradas alrededor de la media.

b) $s_{xy} = \frac{25\,051}{10} - 50 \cdot 50 = 5{,}1$

Recta de regresión de Y sobre X

$$y - 50 = \frac{5{,}1}{6{,}8}(x - 50) \quad \Rightarrow \quad y = 0{,}75x + 12{,}5$$

Para $x = 54 \quad y = 0{,}55 \cdot 54 + 12{,}5 = 53$ gramos

12.38. (PAU) A partir de los datos recogidos sobre la estatura (E) y el peso (P) en un grupo de 50 estudiantes se ha obtenido una estatura media de 165 cm y un peso medio de 61 kg.

Sabiendo que al aumentar la estatura aumenta también el peso, identifica, entre las siguientes, cuál podría ser la recta de regresión del peso en función de la estatura obtenida a través de los datos recogidos en ese grupo de estudiantes.

a) $P = 226 - E$ $\qquad$ b) $P = -104 + E$ $\qquad$ c) $P = 5 + \frac{1}{3}E$ $\qquad$ d) $P = 171 - \frac{2}{3}E$

La recta de regresión debe ser de pendiente positiva, ya que al aumentar la estatura, aumenta el peso. Por tanto, estudiaremos si las rectas b y c pasan por (165, 61).

b) $P = -104 + 165 = 61$. Cumple la condición.

c) $P = 5 + \frac{165}{3} = 60$. No cumple la condición.

La recta pedida podría ser $P = -104 + E$.

12.39. El número de horas dedicadas al estudio de una prueba y las respuestas correctas obtenidas en un test de 100 preguntas vienen en la siguiente tabla.

X: horas de estudio	20	16	34	23	27	32	18	22
Y: aciertos	65	60	85	70	90	95	75	80

a) Halla la recta de regresión de *Y* sobre *X*.

b) Calcula la calificación estimada para una persona que hubiese estudiado 28 horas.

Formamos la siguiente tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
20	65	400	4225	1300
16	60	256	3600	960
34	85	1156	7225	2890
23	70	529	4900	1610
27	90	729	8100	2430
32	95	1024	9025	3040
18	75	324	5625	1350
22	80	484	6400	1760
192	620	4902	49 100	15 340

a) $\bar{x} = \dfrac{192}{8} = 24;$

$\bar{y} = \dfrac{620}{8} = 77{,}5$

$s_x^2 = \dfrac{4902}{8} - 24^2 = 36{,}75$

$s_{xy} = \dfrac{15\,340}{8} - 24 \cdot 77{,}5 = 57{,}5$

$y - 77{,}5 = \dfrac{57{,}5}{36{,}75}(x - 24) \Rightarrow y = 1{,}56x + 39{,}95$

b) Si $x = 28$, $y = 1{,}56 \cdot 28 + 39{,}95 = 83{,}63$. Por tanto, si un alumno dedica al estudio 28 horas, se espera que responda correctamente a 84 preguntas.

12.40. En la siguiente tabla se consideran las puntuaciones en dos pruebas (*X*, *Y*) de 5 alumnos.

X	1	6	9	3	2
Y	2	3	9	6	1

a) Encuentra las ecuaciones de las rectas de regresión de *X* sobre *Y* y de *Y* sobre *X*.

b) Con los resultados obtenidos en el apartado anterior, determina el coeficiente de correlación.

Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	2	1	4	2
6	3	36	9	18
9	9	81	81	81
3	6	9	36	18
2	1	4	1	2
21	21	131	131	121

a) $\bar{x} = \dfrac{21}{5} = 4{,}2$

$\bar{y} = \dfrac{21}{5} = 4{,}2$

$s_x^2 = \dfrac{131}{5} - 4{,}2^2 = 8{,}56$

$s_y^2 = \dfrac{131}{5} - 4{,}2^2 = 8{,}56$

$s_{xy} = \dfrac{121}{5} - 4{,}2^2 = 6{,}56$

Recta de regresión de *Y* sobre *X*: $y - 4{,}2 = \dfrac{6{,}56}{8{,}56}(x - 4{,}2)$; $y = 0{,}767x + 0{,}98$

Recta de regresión de *X* sobre *Y*: $x - 4{,}2 = \dfrac{6{,}56}{8{,}56}(y - 4{,}2)$; $x = 0{,}767y + 0{,}98$

b) El coeficiente de correlación lineal es igual a $r = \sqrt{0{,}767 \cdot 0{,}767} = 0{,}767$.

12.41. (PAU) La siguiente tabla relaciona la inversión, en millones, y la rentabilidad obtenida, en tanto por ciento, de 6 inversores.

Inversión	10	12	14	14	15	15
Rentabilidad (%)	4	4	5	4	5	5

a) Calcula la media y la desviación típica de las variables inversión y rentabilidad.

b) Halla el coeficiente de correlación e interprétalo.

c) Si un inversionista invierte 13,5 millones, ¿qué rentabilidad puede esperar?

d) Si un inversionista ha obtenido una rentabilidad del 5,5%, ¿qué capital se puede esperar que haya invertido?

Consideramos la inversión como variable X y la rentabilidad como variable Y.

Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
10	4	100	16	40
12	4	144	16	48
14	5	196	25	70
14	4	196	16	56
15	5	225	25	75
15	5	225	25	75
80	27	1086	123	364

a) $\bar{x} = \frac{80}{6} = 13,33$

$s_X^2 = \frac{1086}{6} - 13,33^2 = 3,31$

$s_X = \sqrt{3,31} = 1,82$

$\bar{y} = \frac{27}{6} = 4,5$

$s_Y^2 = \frac{123}{6} - 4,5^2 = 0,25$

$s_Y = \sqrt{0,25} = 0,5$

b) $s_{xy} = \frac{364}{6} - 13,33 \cdot 4,5 = 0,68$ $\qquad r = \frac{0,68}{1,82 \cdot 0,5} = 0,74$

Como el valor de r es próximo a 1, la correlación es directa y moderadamente fuerte. Por tanto, las variables están en dependencia aleatoria.

c) Hallamos la recta de regresión de Y sobre X: $y - 4,5 = \frac{0,68}{3,31}(x - 13,33)$ $\quad y = 0,21x + 1,76$

Por tanto, para x = 13,5 se obtiene: $y = 0,21 \cdot 13,5 + 1,76 = 4,59$. Así pues, si un inversionista invierte 13,5 millones, se espera que obtenga una rentabilidad del 4,57%.

d) Hallamos la recta de regresión de X sobre Y: $x - 13,33 = \frac{0,68}{0,25}(y - 4,5)$ $\quad y = 2,72x + 1,09$

Por tanto, para $y = 5,5$ se obtiene: $x = 2,72 \cdot 5,5 + 1,09 = 16,05$. Así pues, si un inversionista obtiene una rentabilidad del 5,5%, se supone que había invertido 16,05 millones.

12.42. En una población, la media de los pesos es de 70 kg, y la de las estaturas, de 175 cm. Las desviaciones típicas son 5 kg y 10 cm, respectivamente, y la covarianza de ambas variables es 40.

a) Estima el peso de una persona de esa población que mide 185 cm de estatura.

b) Usando el coeficiente de correlación lineal, explica hasta qué punto confiarías en la estimación que se ha hecho en el apartado a.

Si X es la variable peso e Y la variable estatura, el enunciado nos da los siguientes datos:

$$\bar{x} = 70 \text{ kg} \quad s_X = 5 \text{ kg} \quad \bar{y} = 175 \text{ cm} \quad s_Y = 10 \text{ cm} \quad s_{xy} = 40$$

a) Hay que hallar la recta de regresión de X sobre Y.

$$x - 70 = \frac{40}{100}(y - 175) \qquad x = 0,4y$$

Para una estatura de $y = 185$ cm, el peso esperado es $x = 0,4 \cdot 185 = 74$ kg.

b) El coeficiente de correlación es $r = \frac{40}{5 \cdot 10} = 0,8$.

Este valor de r indica que la correlación es directa y fuerte; por tanto, existe una alta confianza en las estimaciones obtenidas.

12.43. Las rectas de regresión de cuatro distribuciones bidimensionales son las siguientes:

a) $y = x + 2$; $x = 4$

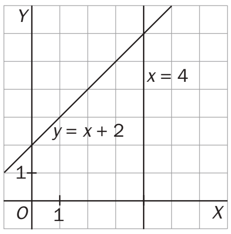
b) $y = \frac{4}{5}x + 2$ $x = \frac{5}{6}y + 2$

c) $y = 3$; $x = 2$

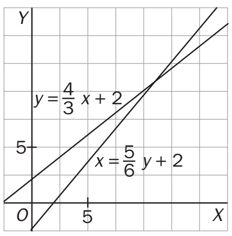
d) $y = x$; $x = \frac{4}{5}y + 1$

Indica en qué casos es significativa la correlación lineal.

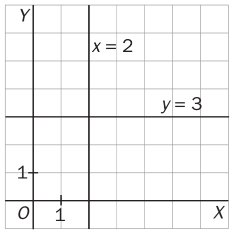
a)



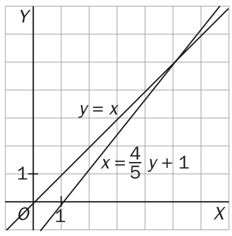
b)



c)



d)



El ángulo formado por las rectas es más pequeño en d y b. Por tanto, en esos casos es más significativa la correlación.

12.44. A partir de los datos recogidos sobre facturación y beneficios en un determinado año sobre un conjunto de 50 grandes empresas europeas se ha calculado una facturación media de 80 millones de euros y unos beneficios medios de 65 millones de euros.

a) Teniendo en cuenta esa información, determina la recta de regresión que permite obtener los beneficios en función de la facturación, sabiendo que a partir de ella se han calculado unos beneficios de 59 millones de euros para una empresa que ha facturado 75 millones de euros en 1998.

b) ¿Qué signo tendría el coeficiente de correlación lineal entre ambas variables?

a) Consideramos X como la variable facturación e Y como la variable beneficio.

La recta de regresión de Y sobre X es de la forma $y = mx + n$.

Como la recta pasa por los puntos (80, 65) y (75, 59), se tiene:

$65 = 80m + n$

$59 = 75m + n$

Resolviendo el sistema, resulta: $m = \frac{6}{5}$ y $n = -31$.

La recta de regresión de Y sobre X es: $y = \frac{6}{5}x - 31$.

b) El coeficiente de correlación tiene el mismo signo que la pendiente de la recta de regresión; por tanto, es positivo.

12.45. (PAU) La recta de regresión de una variable Y respecto de la variable X es $y = 0{,}3x + 1$. Los valores que ha tomado la variable x han sido {3, 4, 5, 6, 7}.

a) Determina el valor esperado de Y para el valor particular de $x = 3{,}5$.

b) Si los valores de la variable Y utilizados para la regresión se multiplican por 10 y se dejan los mismos valores para la variable X, determina razonadamente la nueva recta de regresión.

a) Para $x = 3{,}5 \Rightarrow y = 0{,}3 \cdot 3{,}5 + 1 = 2{,}05$

b) Si los valores de la variable Y se multiplican por 10, se tendrá:

$\bar{y}' = 10\bar{y}$, siendo $\bar{y}$ la media inicial

$$s'_{xy} = \frac{\sum 10x_iy_i}{N} - \bar{x}\ 10\,\bar{y} = 10\,s_{xy}$$

Con esto, la nueva recta será:

$$y - 10\,\bar{y} = \frac{10\ S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x}) \Rightarrow y = \frac{10\ S_{xy}}{S_x^2}x + 10\left(\bar{y} - \frac{Sxy}{S_x^2}\bar{x}\right) \Rightarrow y = 3x + 10$$

12.46. (PAU) Cien alumnos prepararon un examen de Matemáticas. Se representa por X el número de problemas hechos por cada alumno en la preparación, y por Y, la calificación obtenida. Sabiendo que las medias aritméticas de esas variables fueron $\bar{x} = 9{,}2$ e $\bar{y} = 9{,}5$, que el coeficiente de correlación entre esas variables fue 0,7 y que la desviación típica de la variable Y fue el doble que la de la variable X, calcula las ecuaciones de las rectas de regresión.

Como la desviación típica de la variable Y fue el doble que la de la variable X, se tiene:

1) $r = \dfrac{s_{XY}}{s_Xs_Y} = \dfrac{s_{XY}}{s_X \cdot 2s_X} = \dfrac{s_{XY}}{2s_X^2} = 0{,}7 \Rightarrow \dfrac{s_{XY}}{s_X^2} = 0{,}7 \cdot 2 = 1{,}4$

La recta de regresión de Y sobre X es:

$y - 9{,}5 = 1{,}4\ (x - 9{,}2)$.

2) $\dfrac{s_{XY}}{s_Y^2} = \dfrac{s_{XY}}{(2s_X)^2} = \dfrac{s_{XY}}{4s_X^2} = \dfrac{1}{4} \cdot 1{,}4 = 0{,}35$

La recta de regresión de X sobre Y es:

$x - 9{,}2 = 0{,}35\ (y - 9{,}5)$.

PROFUNDIZACIÓN

12.47. (PAU) La tabla siguiente muestra los valores observados de dos variables X e Y en 5 individuos.

X	1	−1	*x*	2	3
Y	−2	−3	2	1	0

a) Halla el valor x para que el coeficiente de correlación sea nulo.

b) Suponiendo que $x = 4$, halla la recta de regresión de Y sobre X y estudia el valor de Y cuando X toma el valor −2.

a) $\bar{x} = \dfrac{5 + x}{5} \quad \bar{y} = -\dfrac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad s_{xy} = \dfrac{-2 + 3 + 2x + 2}{5} - \dfrac{5 + x}{5} \cdot \left(\dfrac{-2}{5}\right) = \dfrac{12x + 25}{25}$

Como $r = \dfrac{s_{xy}}{s_xs_y} = 0$, $s_{xy} = 0$; $\dfrac{12x + 25}{25} = 0$, y, por tanto, $x = -\dfrac{25}{12}$

b) Si $x = 4$, $\bar{x} = \dfrac{9}{5}$; $\bar{y} = -\dfrac{2}{5}$; $s_{xy} = \dfrac{73}{25}$

$$s_x^2 = \frac{1 + 1 + 16 + 4 + 9}{5} - \frac{81}{25} = \frac{74}{25}$$

Recta de regresión de Y sobre X: $y - \dfrac{2}{5} = \dfrac{73}{74}\left(x - \dfrac{9}{5}\right)$; $y = 0{,}986x - 2{,}176$. Si $x = -2$, $y = -4{,}148$

12.48. Se considera la siguiente tabla estadística, donde a es una incógnita:

X	2	4	a	3	5
Y	1	2	1	1	3

a) Calcula el valor de a sabiendo que la media de X es 3.

b) Mediante la correspondiente recta de regresión lineal, predice el valor que se obtiene para Y cuando $X = 4{,}5$. Explica la fiabilidad de la predicción anterior.

a) $x = \dfrac{2 + 4 + a + 3 + 5}{5} = 3 \Rightarrow 14 + a = 15 \Rightarrow a = 1$

b) Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
2	1	4	1	2
4	2	16	4	8
1	1	1	1	1
3	1	9	1	3
5	3	25	9	15
15	8	55	16	29

$\bar{x} = \dfrac{15}{5} = 3 \quad s_x^2 = \dfrac{55}{5} - 9^2 = 2 \quad s_X = \sqrt{2} = 1{,}41$

$\bar{y} = \dfrac{8}{5} = 1{,}6 \quad s_y^2 = \dfrac{16}{5} - 1{,}6^2 = 0{,}64 \quad s_X = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$

$s_{xy} = \dfrac{29}{5} - 3 \cdot 1{,}6 = 1$

$r = \dfrac{1}{1{,}41 \cdot 0{,}8} = 0{,}89$

$y - 1{,}6 = 0{,}5(x - 3)$; $y = 0{,}5x + 0{,}1$. Si $x = 4{,}5$, $y = 0{,}5 \cdot 4{,}5 = 2{,}35$

Como r es próximo a la unidad, permite obtener conclusiones muy fiables del comportamiento de Y estudiando la variable X.

12.49. Los siguientes pares de datos corresponden a las variables X (producto interior bruto en decenas de millones de euros) e Y (tasa de inflación):

X	3,4	4,6	5,2	3,2
Y	8,3	1,5	2,1	5,8

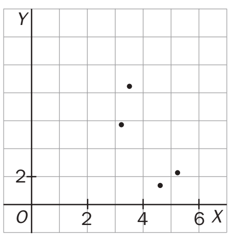
a) Dibuja el diagrama de dispersión de los datos.

b) Decide razonadamente cuál de las siguientes rectas es la de regresión de Y sobre X:

$$y = 16{,}26 + 2{,}88x \qquad y = 16{,}26 - 2{,}88x$$

c) Calcula el valor esperado de la tasa de inflación que corresponde a un producto interior bruto de 4,3 decenas de millones de euros.

a)



b) De ser alguna de esas dos rectas, será la de la pendiente negativa, $y = 16{,}26 - 2{,}88x$, pues así lo sugiere el diagrama de dispersión.

c) Si $x = 4{,}3$, sustituyendo en la recta dada se obtiene: $y = -2{,}88 \cdot 4{,}3 + 16{,}26 = 3{,}88$.

Es decir, para un producto interior bruto de 4,3 decenas de millones de euros se espera una tasa de inflación del 3,88.

12.50. Se ha solicitado a un grupo de 50 individuos información sobre el número de horas que dedican diariamente a dormir y a ver la televisión. Los resultados vienen dados por la siguiente tabla.

X: N.° de horas dormidas	6	7	8	9	10
Y: N.° de horas viendo la televisión	4	3	3	2	1
Frecuencias absolutas	3	16	20	10	1

a) Calcula el coeficiente de correlación entre X e Y e interprétalo en los términos del enunciado.

b) Calcula la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X.

c) Si una persona duerme 8 horas y media, ¿cuántas horas cabe esperar que vea la televisión?

d) Sin calcular la recta de regresión de X sobre Y, ¿en qué punto se cortará esta recta con la calculada en el apartado b?

e) Si una persona ve la televisión 2 horas, ¿cuánto tiempo cabe esperar que duerma?

Formamos la siguiente tabla:

x_i	y_i	f_i	x_i^2	y_i^2	$f_i x_i$	$f_i y_i$	$f_i x_i^2$	$f_i y_i^2$	$f_i x_i y_i$
6	4	3	36	16	18	12	108	48	72
7	3	16	49	9	112	48	784	144	336
8	3	20	64	9	160	60	1280	180	480
9	2	10	81	4	90	20	810	40	180
10	1	1	100	1	10	1	100	1	10
		50			390	141	3082	413	1078

a) $\bar{x} = \dfrac{390}{50} = 7{,}8;$

$$s_x^2 = \frac{3082}{50} - (7{,}8)^2 = 0{,}80$$

$$s_x = \sqrt{0{,}8} = 0{,}89$$

$$\bar{y} = \frac{141}{50} = 2{,}82$$

$$s_y^2 = \frac{413}{50} - (2{,}82)^2 = 0{,}3076$$

$$\text{sY} = \sqrt{0{,}3076} = 0{,}55$$

$$s_{xy} = \frac{1078}{50} - (7{,}8)\,(2{,}82) = -0{,}436$$

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{-0{,}436}{0{,}89 \cdot 0{,}55} = -0{,}88$$

La correlación lineal entre ambas variables es grande e inversa.

b) $y - 2{,}82 = -\dfrac{0{,}436}{0{,}80}\,(x - 7{,}8) \quad \Rightarrow \quad y = -0{,}545x + 7{,}071$

c) Si $x = 8{,}5$: $y = -0{,}545 \cdot 8{,}5 + 7{,}071 = 2{,}44$

Si una persona duerme 8 horas y media, verá la televisión durante 2 horas 26,4 minutos.

d) La recta de regresión de Y sobre X y la recta de regresión de X sobre Y se cortan en el centro de gravedad de la nube de puntos, es decir, en el punto $(\bar{x}, \bar{y}) = (7{,}8;\ 2{,}82)$.

e) La recta de regresión de X sobre Y es: $x - 7{,}8 = \dfrac{-0{,}436}{0{,}3076}\,(y - 2{,}82)$; $\quad x = 11{,}787 - 1{,}417y.$

Si $y = 2$, $x = 11{,}787 - 1{,}41 \cdot 2 = 8{,}953$ horas, es decir, que si una persona ve la televisión durante 2 horas, se espera que duerma aproximadamente 9 horas.

12.51. Los valores de dos variables X e Y se distribuyen según la tabla siguiente.

Y \ X	0	2	4
1	2	1	3
2	1	4	2
3	2	5	0

Determina el coeficiente de correlación y la recta de regresión de Y sobre X.

Convertimos la tabla de doble entrada en tabla simple y efectuamos los siguientes cálculos:

x_i	y_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	$y_i f_i$	$y_i^2 f_i$	$x_i y_i f_i$
0	1	2	0	0	2	2	0
0	2	1	0	0	2	4	0
0	3	2	0	0	6	18	0
2	1	1	2	4	1	1	2
2	2	4	8	16	8	16	16
2	3	5	10	20	15	45	30
4	1	3	12	48	3	3	12
4	2	2	8	32	4	8	16
		20	40	120	41	97	76

$\bar{x} = \dfrac{40}{20} = 2$ $\qquad s_x^2 = \dfrac{120}{20} - 2^2 = 2$ $\qquad s_x = \sqrt{2} = 1{,}41$

$\bar{y} = \dfrac{41}{20} = 2{,}05$ $\qquad s_y^2 = \dfrac{97}{20} - 2{,}05^2 = 0{,}65$ $\qquad s_y = \sqrt{0{,}65} = 0{,}81$

$s_{xy} = \dfrac{76}{20} - 2 \cdot 2{,}05 = -0{,}3$

$r = \dfrac{-0{,}3}{1{,}41 \cdot 0{,}81} = -0{,}26$

Recta de regresión de Y sobre X:

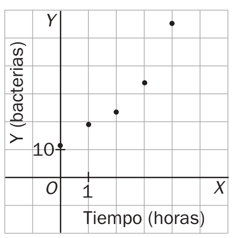
$$y - 2{,}05 = -0{,}15\,(x - 2);\; y = -0{,}15x + 2{,}35$$

12.52. El número de bacterias por unidad de volumen presentes en un cultivo después de cierto número de horas viene expresado por la siguiente tabla.

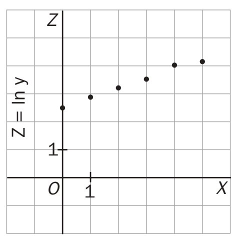
X: horas	0	1	2	3	4	5
Y: bacterias	12	19	23	24	56	62

¿Cuántas bacterias habrá al cabo de seis horas? Ayuda: realiza el cambio de variable $Z = \ln Y$

Dibujamos el diagrama de dispersión y observamos que existe una relación curvilínea.



X	$Z = \ln Y$
0	2,48
1	2,94
2	3,14
3	3,53
4	4,03
5	4,13



Al realizar el cambio de variable $Z = \ln Y$, la nube de puntos se ajusta a una recta. Podemos calcular ahora la recta de regresión de Z sobre X.

x_i	z_i	x_i^2	z_i^2	$x_i z_i$
0	2,48	0	6,1504	0
1	2,94	1	8,6436	2,94
2	3,14	4	9,8596	6,28
3	3,53	9	12,4609	10,59
4	4,03	16	16,2409	16,12
5	4,13	25	17,0569	20,65
15	20,25	55	70,4123	56,58

$$\overline{x} = \frac{15}{6} = 2,5; \qquad \overline{z} = \frac{20,25}{5} = 3,375$$

$$s_x^2 = \frac{55}{6} - 2,5^2 = 2,92 \Rightarrow s_x = \sqrt{2,92} = 1,71$$

$$s_z^2 = \frac{70,4123}{6} - 3,375^2 = 0,35 \Rightarrow s_z = \sqrt{0,35} = 0,59$$

$$s_{xz} = \frac{56,58}{6} - 2,5 \cdot 3,375 = 0,9925$$

Como $r = \dfrac{0,9925}{1,71 \cdot 0,59} = 0,98$, nos indica que la relación existente entre X e Y es de tipo exponencial.

La recta de regresión de Z sobre X es: $z - 3,375 = \dfrac{0,9925}{2,92}(x - 2,5) \Rightarrow z = 0,34x + 2,53$

Como $Z = \ln Y$, se cumple que: $\ln y = 0,34x + 2,53$.

Tomando exponenciales en los dos miembros queda: $y = e^{0,34x + 2,53}$

El número de bacterias esperado al cabo de seis horas es: $y = e^{0,34 \cdot 6 + 2,53} = 96,54$

13 Probabilidad

ANALIZA Y CALCULA

¿Crees que merece la pena aplicar razonamientos matemáticos en los juegos de azar o piensas que al final el azar decide por su cuenta?

Respuesta libre.

En la cita Jakob Bernoulli vincula la probabilidad a la toma de decisiones, ¿por qué?

Jakob Bernoulli dice que se deben medir las probabilidades de las cosas, para que en nuestras acciones podamos elegir lo más satisfactorio y razonable.

¿A qué se refiere cuando habla de la sabiduría del filósofo y la prudencia del político?

Jakob Bernoulli, en su obra, pretende desarrollar una teoría estudiada por los filósofos para la toma de decisiones prudentes y razonables en temas políticos.

¿Piensas que el conocimiento de las leyes del azar nos ayuda en nuestra vida cotidiana? Pon algún ejemplo.

Respuesta libre.

REFLEXIONA Y SACA CONCLUSIONES

En la pregunta del texto, ¿qué opción elegirías? ¿Por qué?

Es más ventajoso apostar por sacar un seis en cuatro tiradas de un dado.

¿Por qué crees que matemáticos tan notables dedicaban su tiempo y sus esfuerzos en resolver problemas relacionados con juegos de azar?

Respuesta libre.

Actividades propuestas

1. **Se lanza una moneda tres veces.**

a) **Escribe el espacio muestral.**

b) **Describe dos sucesos elementales y uno compuesto.**

c) **Escribe el suceso S = "salir una cara" y el suceso contrario $\overline{S}$.**

a) $E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX, XXX\}$

b) Sucesos elementales, por ejemplo, A = "sacar tres caras" = $\{CCC\}$ y B = "sacar tres cruces" = $\{XXX\}$.

Suceso compuesto, por ejemplo, C = "sacar una cara" = $\{XXC, XCX, CXX\}$

c) $S = \{XXC, XCX, CXX\}$ y $\overline{S} = \{CCC, CCX, CXC, XCC, XXX\}$

2. **Se extraen tres bolas de una urna con 5 bolas rojas y 5 bolas blancas.**

a) **Describe dos sucesos elementales y uno compuesto.**

b) **Escribe el suceso contrario de S = "sacar dos bolas blancas y una roja".**

a) Sucesos elementales, por ejemplo, A = "sacar tres bolas blancas" = $\{BBB\}$ y B = "sacar tres rojas" = $\{RRR\}$

Suceso compuesto, por ejemplo, C = "sacar dos bolas rojas y una blanca" = $\{RRB, RBR, BRR\}$.

b) $\overline{S} = \{RRR, RRB, RBR, BRR, BBB\}$

3. **En el experimento consistente en extraer una carta de una baraja española de 40 naipes, describe los elementos de los sucesos:**

a) ***A* = "sacar un oro"** **c)** ***C* ="sacar una figura"**

b) ***B* = "sacar un rey"** **d)** **$A \cup B$ y $B \cup C$**

a) *A* = {as de oros, dos de oros, tres de oros, cuatro de oros, cinco de oros, seis de oros, siete de oros, sota de oros, caballo de oros, rey de oros}.

b) *B* = {rey de oros, rey de copas, rey de espadas, rey de bastos}.

c) *C* = {sota de oros, caballo de oros, rey de oros, sota de copas, caballo de copas, rey de copas, sota de espadas, caballo de espadas, rey de espadas, sota de bastos, caballo de bastos, rey de bastos}.

d) $A \cup B$ = "sacar oro o rey" = {as de oros, dos de oros, tres de oros, cuatro de oros, cinco de oros, seis de oros, siete de oros, sota de oros, caballo de oros, rey de oros, rey de copas, rey de espadas, rey de bastos}.

$B \cup C$ = "sacar rey o figura" = *C* = {sota de oros, caballo de oros, rey de oros, sota de copas, caballo de copas, rey de copas, sota de espadas, caballo de espadas, rey de espadas, sota de bastos, caballo de bastos, rey de bastos}.

4. **Se extrae una bola de un bombo que contiene 10 bolas numeradas de 0 a 9. Se consideran los sucesos *A* = "sacar un número par", *B*= "sacar un múltiplo de tres". Calcula:**

a) **$A \cup B$** **b)** **$A \cap B$** **c)** **$A - B$**

a) $A \cup B$ = "sacar un número par o múltiplo de tres" = {0, 2, 3, 4, 6, 8, 9}.

b) $A \cap B$ = "sacar un número par y múltiplo de tres" = {0, 6}.

c) $A - B = A \cap \overline{B}$ = "sacar un número par no múltiplo de tres" = {2, 4, 8}.

5. **En una bolsa hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 azules. Si se saca al azar una bola de la bolsa, halla las siguientes probabilidades.**

a) **Que la bola sea verde.** **c)** **Que la bola sea verde o azul.**

b) **Que la bola no sea roja.** **d)** **Que la bola no sea roja ni azul.**

a) $P(\text{bola verde}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ **c)** $P(\text{bola verde o azul}) = \frac{5}{9}$

b) $P(\text{bola no roja}) = \frac{5}{9}$ **d)** $P(\text{bola no roja ni azul}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

6. **Se elige un número al azar entre 1 y 50. Calcular la probabilidad de que:**

a) **Sea un múltiplo de 4.** **c)** **Sea múltiplo de 6 y de 4.**

b) **Sea múltiplo de 6.** **d)** **Sea múltiplo de 6 o de 4.**

a) $P(\text{múltiplo de 4}) = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$ **c)** $P(\text{múltiplo de 6 y 4}) = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$

b) $P(\text{múltiplo de 6}) = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$ **d)** $P(\text{múltiplo de 6 o de 4}) = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$

7. **Se lanzan un dado blanco y otro rojo y se consideran los sucesos *A* = "la suma de los puntos es 6", *B* = "sacar los mismos puntos en los dos dados" y *C* = "sacar más de 3 en el dado rojo". Calcula las probabilidades de los sucesos:**

a) ***A*, *B* y *C*** **b)** **$\overline{B}$** **c)** **$A \cap C$ y $A \cup C$** **d)** **$\overline{A \cap B}$**

a) $P(A) = \frac{5}{36}$, $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ y $P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ **c)** $P(A \cap C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ y $P(A \cup C) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

b) $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ **d)** $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

8. **Si *A* y *B* son dos sucesos de un mismo experimento y sabemos que *P*(*A*) = 0,6, *P*(*B*) = 0,3 y *P*(*A* ∪ *B*) = 0,7. ¿Son *A* y *B* sucesos incompatibles? Calcula la probabilidad de *A* ∩ *B*.**

Los sucesos A y B no son incompatibles porque $P(A \cup B) = 0{,}7 \neq P(A) + P(B) = 0{,}6 + 0{,}3 = 0{,}9$.

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}7 = 0{,}2$.

9. **De una baraja de 40 cartas se extraen simultáneamente dos cartas (equivale a no reponer la primera). Halla las probabilidades de que:**

a) Las dos sean copas.

b) Al menos una sea copas.

Consideramos los sucesos A = "sacar copa en la primera extracción" y B = "sacar copas en la segunda extracción":

a) $P(A \cap B) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{90}{1560} = \frac{3}{52}$

b) $P(A \cup B) = 1 - P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} = 1 - \frac{870}{1560} = 1 - \frac{29}{52} = \frac{23}{52}$

10. **Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 azules. Se extraen dos bolas sucesivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean del mismo color si devolvemos la primera bola a la bolsa? ¿Y si no lo hacemos?**

Consideramos los sucesos B = "sacar bola blanca", R = "sacar bola roja" y A = "sacar bola azul".

Con devolución: $P(\text{igual color}) = P(1^{a}B\ 2^{a}B) + P(1^{a}R\ 2^{a}R) + P(1^{a}A\ 2^{a}A) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{38}{100} = \frac{19}{50}$

Sin devolución: $P(\text{igual color}) = P(1^{a}B\ 2^{a}B) + P(1^{a}R\ 2^{a}R) + P(1^{a}A\ 2^{a}A) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}$

11. **En una clase hay 12 chicas y 16 chicos. Si se eligen 2 alumnos al azar, calcula la probabilidad en cada caso.**

a) Que sean los dos chicos.

b) Que sean exactamente un chico y una chica.

c) Que haya al menos una chica.

d) Que no haya ningún chico.

Consideramos los sucesos O = "sea chico" y A = "sea chica".

a) $P(OO) = \frac{16}{28} \cdot \frac{15}{27} = \frac{240}{756} = \frac{20}{63}$

b) $P(OA) = \frac{16}{28} \cdot \frac{12}{27} + \frac{12}{28} \cdot \frac{16}{27} = \frac{384}{756} = \frac{32}{63}$

c) $P(\text{al menos una chica}) = 1 - P(\text{ninguna chica}) = 1 - P(OO) = 1 - \frac{20}{63} = \frac{43}{63}$

d) $P(\text{ningún chico}) = P(AA) = \frac{12}{28} \cdot \frac{11}{27} = \frac{132}{756} = \frac{11}{63}$

12. Un alumno ha estudiado 10 de los 15 temas de un examen. El profesor preselecciona dos temas y deja que el alumno escoja uno de los dos. Halla la probabilidad de que el alumno pueda elegir uno de los temas estudiados.

Casos posibles.

El profesor puede preseleccionar dos temas cualesquiera de los 15. Por tanto, puede escoger los temas de $C_{15,2} = 105$ formas distintas.

Casos favorables.

El alumno se ha estudiado uno de los dos temas preseleccionados

Para que el alumno pueda escoger uno de los dos temas propuestos, de los 10 que se ha estudiado, el profesor habrá preseleccionado uno y, de los 5 temas que no se ha estudiado, el profesor habrá preseleccionado otro. Entonces, existen $C_{10,1} \cdot C_{5,1} = 10 \cdot 5 = 50$ casos en los que el alumno se sabe uno de los dos temas preseleccionados.

El alumno se ha estudiado los dos temas preseleccionados

Para que el alumno pueda escoger cualquiera de los dos temas propuestos, el profesor habrá preseleccionado dos de los 10 que se ha estudiado. Entonces, existen $C_{10,2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ casos en los que el alumno se sabe los dos temas preseleccionados.

Por tanto, *P*("el alumno puede elegir uno de los temas preseleccionados") = *P*("el alumno puede elegir uno de los dos temas preseleccionados") + *P*("el alumno puede elegir cualquiera de los dos temas preseleccionados") =

$$= \frac{50}{105} + \frac{45}{105} = \frac{10}{21} + \frac{9}{21} = \frac{19}{21}.$$

13. En una ciudad el 25 % de las mujeres y el 40 % de los hombres usan gafas. Calcula la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, sea mujer y use gafas.

	Gafas	No gafas	Total
Mujer	25	75	100
Hombre	40	60	100
Total	65	135	200

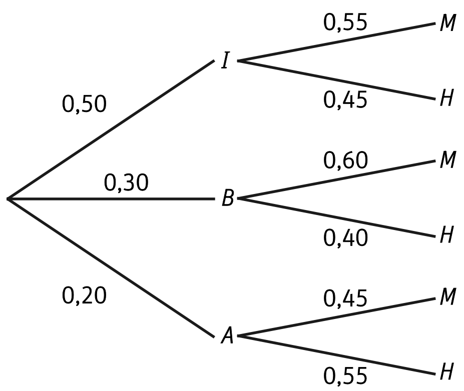
$P(\text{mujer con gafas}) = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$

14. En una academia de inglés se imparten clases de tres niveles: inicial, básico y avanzado.

- **En el nivel inicial están el 50 % de los inscritos, en el básico, el 30 %, y en el avanzado, el 20 %.**
- **En el nivel inicial hay un 55 % de mujeres, en el nivel básico, un 60 %, y en el avanzado, un 45 %.**

a) Se elige al azar una persona inscrita. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un hombre y esté en el nivel básico?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una mujer?



Definimos los sucesos:

I = "estar inscrito en el nivel inicial"

B = "estar inscrito en el nivel básico"

A = "estar inscrito en el nivel avanzado"

H = "ser hombre"

M = "ser mujer".

a) $P(B \cap H) = P(B) \cdot P(H / B) = 0{,}30 \cdot 0{,}40 = 0{,}12$

b) $P(M) = P(I) \cdot P(M / I) + P(B) \cdot P(M / B) + P(A) \cdot P(M / A) =$

$= 0{,}50 \cdot 0{,}55 + 0{,}30 \cdot 0{,}60 + 0{,}20 \cdot 0{,}45 = 0{,}545$

15. **Una industria fabrica dos tipos de tornillos *A* y *B*.**

- **Produce al día 600 del tipo *A* y 800 del tipo *B*.**
- **El 4 % de los del tipo *A* y el 5 % de los del *B* salen defectuosos.**

Si se selecciona un tornillo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

Hay 4 % de 600 = 24 tornillos defectuosos del tipo *A* y 5 % de 800 = 40 tornillos defectuosos del tipo *B*.

En total se producen 600 + 800 = 1400 tornillos, de los cuales 24 + 40 = 64 son defectuosos. Por tanto, de 1400 tornillos, 1400 – 64 = 1336 no son defectuosos. Entonces, $P(\text{no defectuoso}) = \frac{1336}{1400} = \frac{167}{175}$

16. **Una urna contiene 4 bolas blancas y negras del mismo tamaño. Se sabe que al menos hay una de cada color. Se extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?**

Como la urna debe tener, al menos, una bola de cada color entonces puede tener 1 blanca y 3 negras, 2 blancas y 2 negras o 3 blancas y 1 negra.

Sean los sucesos:

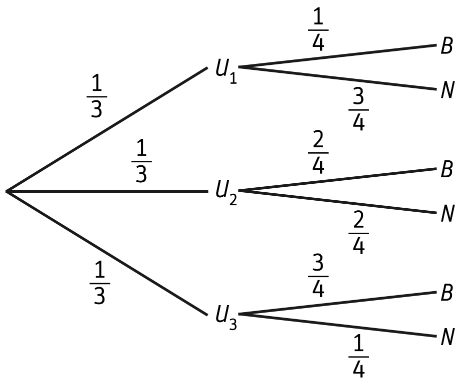
U_1 = "elegir la urna con 1 bola blanca y 3 negras"

U_2 = "elegir la urna 2 bolas blancas y 2 negras"

U_3 = "elegir la urna con 3 bolas blancas y 1 negra"

B = "extraer bola blanca"

N = "extraer bola negra".



$$P(B) = P(U_1) \cdot P(B / U_1) + P(U_2) \cdot P(B / U_2) + P(U_3) \cdot P(B / U_3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

17. **En una ferretería hay tres cajas de bombillas. La primera contiene 20 bombillas, de las cuales 3 están fundidas, en la segunda hay 16 bombillas, con 2 fundidas, y en la tercera caja hay 10 bombillas, ninguna de ellas fundida.**

a) **¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una bombilla al azar esté fundida?**

b) **Se saca una bombilla y está fundida. ¿Qué probabilidad hay de que sea de la tercera caja?**

Sean los sucesos:

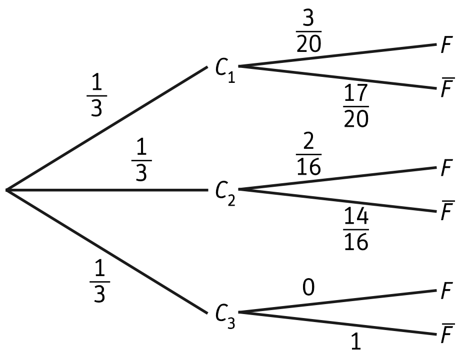
C_1 = "elegir la caja 1"

C_2 = "elegir la caja 2"

C_3 = "elegir la caja 3"

F = "la bombilla está fundida"

$\overline{F}$ = "la bombilla no está fundida"



a) $P(F) = P(C_1) \cdot P(F / C_1) + P(C_2) \cdot P(F / C_2) + P(C_3) \cdot P(F / C_3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{20}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{16}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{22}{240}=\frac{11}{120}$

b) $P\left(C_3 / \overline{F}\right)=\dfrac{P(C_3)\cdot P\left(\overline{F}/C_3\right)}{P\left(\overline{F}\right)}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 1}{1-\frac{11}{120}}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{109}{120}}=\dfrac{40}{109}$

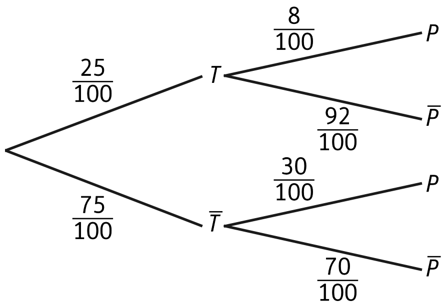
18. En una ciudad el 25 % de la población activa tiene estudios superiores. La tasa de paro entre los titulados superiores es del 8 %, mientras que en el resto de la población activa es del 30 %. Se elige una persona al azar que tiene empleo, ¿qué probabilidad tiene de ser titulado superior?

Sean los sucesos:

T = "ser titulado superior" $\overline{T}$ = "no ser titulado superior"

P = "estar en el paro" $\overline{P}$ = "no estar en el paro"

$$P\left(T/\overline{P}\right)=\frac{P(T)\cdot P\left(\overline{P}/T\right)}{P\left(\overline{P}\right)}=\frac{\frac{25}{100}\cdot\frac{92}{100}}{\frac{25}{100}\cdot\frac{92}{100}+\frac{75}{100}\cdot\frac{70}{100}}=\frac{\frac{23}{100}}{\frac{151}{200}}=\frac{46}{151}$$



19. Actividad interactiva.

20. En un concurso hay dos bolsas. En la bolsa *A* hay 3 bolas verdes y 2 rojas y en la bolsa *B* hay 7 bolas verdes, una blanca y 5 bolas rojas. Tienes que elegir una bolsa y sacar una bola roja para ganar un premio.

a) ¿Qué bolsa elegirías?

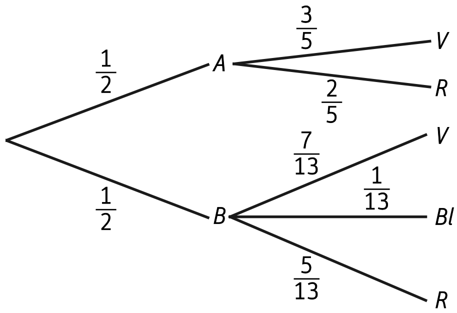
b) ¿Qué probabilidad tienes de ganar?

c) Si ha salido bola roja, ¿qué probabilidad hay de que el concursante haya elegido la bolsa *A*?

a) Elegiría la 1ª bolsa porque la proporción de bolas rojas es mayor.

b) $P(R) = P(A)\cdot P(R/A) + P(B)\cdot P(R/B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{13}=\frac{51}{130}$

c) $P(A/R)=\frac{P(A)\cdot P(R/A)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{51}{130}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{51}{130}}=\frac{26}{51}$



21. Mi abuelo ha marcado las 6 caras de un dado con cuatro ∆ y dos O y dos urnas, una con un ∆ y otra con una O.

Me pide tirar el dado y sacar una bola de la urna marcada con esa letra y dice que me dará el equivalente en euros al número de la bola.

a) Calcula la probabilidad de que me dé 45 €.

b) Calcula la probabilidad de que me dé solo 3 €.

Sean los sucesos

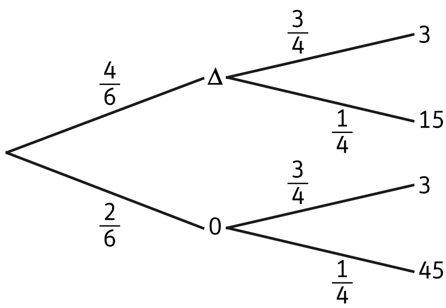
∆ = "obtener ∆ al lanzar el dado" O = "obtener O al lanzar el dado"

3 = "extraer una bola con un 3" 15 = "extraer una bola con un 15"

45 = "extraer una bola con un 45"

a) $P(45) = P(\Delta)\cdot P(45/\Delta) + P(O)\cdot P(45/O) = \frac{4}{6}\cdot 0+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

b) $P(3) = P(\Delta)\cdot P(3/\Delta) + P(O)\cdot P(3/O) = \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$



22. **En un juego se utilizan dos monedas iguales pero una de ellas está trucada y sale cara un 75 % de las veces. Se escoge una moneda al azar y se lanza.**

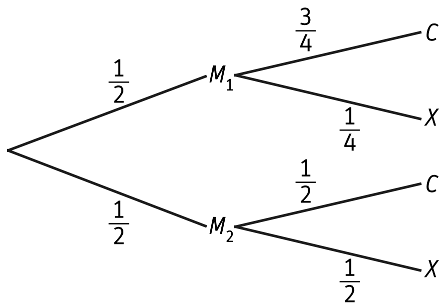
a) **¿Cuál es la probabilidad de sacar cara?**

b) **En el lanzamiento ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido la moneda trucada?**

Sean los sucesos:

M_1 = "elegir la moneda trucada" M_2 = "elegir la moneda no trucada"

C = "sacar cara" X = "sacar cruz"



a) $P(C) = P(M_1) \cdot P(C / M_1) + P(M_2) \cdot P(C / M_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$

b) $P(M_1 / C) = \dfrac{P(M_1) \cdot P(C / M_1)}{P(C)} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} = \dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}$

23. **Calcula la probabilidad de ganar en este juego de cartas.**

- **Se ponen en un montón las cartas as, 2, 3, 4 y 5 de oros de una baraja española.**
- **Se barajan las cinco cartas y se sacan una tras otra tres de ellas sin reemplazamiento.**
- **Se gana si las tres cartas son consecutivas.**

Casos posibles.

Hay que seleccionar 3 cartas de 5, el orden influye y las cartas no se pueden repetir. Se trata de calcular variaciones sin repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3: $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ formas diferentes.

Casos favorables.

Para ganar existen tres únicas formas. Extraer 1 – 2 – 3, 2 – 3 – 4 o 3 – 4 – 5.

Por tanto, P("ganar el juego") = $\frac{3}{60} = \frac{1}{20}$.

24. **Se ha realizado un test sobre una nueva vacuna a 12 000 personas. En 75 de ellas, entre las que había 30 mujeres embarazadas, se ha producido una reacción secundaria adversa.**

a) **Si la vacuna se ha administrado a 700 mujeres embarazadas, ¿cuál es la probabilidad de que una mujer embarazada sufra la reacción?**

b) **¿Cuál es la probabilidad de que una persona no embarazada tenga una reacción adversa?**

a) Se organizan los datos en una tabla de contingencia, completando los que faltan.

	Embarazada	No embarazada	Total
Reacción	30	45	75
No reacción	670	11 255	11 925
Total	700	11 300	12 000

P(reacción / embarazada) = $\frac{30}{700} = \frac{3}{70}$

b) P(reacción / no embarazada) = $\frac{45}{11300} = \frac{9}{2260}$

25. **Indica cuáles de los experimentos siguientes son aleatorios. Cuando lo sean escribe su espacio muestral.**

a) **Medir el volumen de una botella de agua.**

b) **Encestar al lanzar un triple de espaldas a la canasta.**

c) **Extraer una carta de una baraja y mirar su palo.**

d) **Acertar el segundo premio del sorteo de la lotería de Navidad.**

a) Suceso determinista.

b) Suceso aleatorio.

c) Suceso aleatorio. E = {oros, copas, espadas, bastos}.

d) Suceso aleatorio. E = {00 000, 00 001, 00 002, ..., 99 999}.

26. En una urna hay nueve bolas numeradas del 1 al 9.

a) Escribe los sucesos elementales.

b) Describe dos sucesos compuestos.

c) Describe dos sucesos incompatibles.

a) Cada uno de los resultados posibles del espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

b) A = "sacar bola par" = $\{2, 4, 6, 8, 9\}$ y B = "sacar bola impar" = $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

c) Los sucesos A = "sacar bola par" y B = "sacar bola impar" son incompatibles porque $A \cap B = \varnothing$.

27. Se pueden construir dados equiprobables con los cinco poliedros regulares. ¿Cuántos sucesos elementales hay en los siguientes experimentos?

a) Lanzar un dado dodecaédrico y uno cúbico.

b) Lanzar un dado octaédrico y un tetraédrico.

c) Lanzar tres dados icosáedricos.

a) $12 \cdot 6 = 72$ sucesos elementales. **b)** $8 \cdot 4 = 32$ sucesos elementales. **c)** $20^3 = 8000$ sucesos elementales

28. Se lanza un dado de ocho caras y se consideran los sucesos:

***A* = "sacar más de 5"** ***B* = "sacar un número par"** ***C* = "sacar un múltiplo de 3"**

a) Escribe los elementos de los sucesos *A*, *B* y *C*.

b) Di si son compatibles: *A* y *B*, *A* y *C*, *B* y *C*.

c) Escribe los sucesos: $\overline{C}$, $A \cap B$, $B \cup C$, $B - C$

d) Describe: $\overline{A} \cup B$, $\overline{B} \cap C$, $\overline{A \cup C}$, $\overline{B \cap C}$.

a) $A = \{6, 7, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 6\}$.

b) A y B son compatibles porque $A \cap B = \{6, 8\} \neq \varnothing$, A y C son compatibles porque $A \cap C = \{6\} \neq \varnothing$ y B y C son compatibles porque $B \cap C = \{6\} \neq \varnothing$.

c) $\overline{C}$ = "no sacar un múltiplo de 3" = $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

$A \cap B$ = "sacar par mayor de 5" = $\{6, 8\}$

$B \cup C$ = "sacar par o múltiplo de 3" = $\{2, 3, 4, 6, 8\}$

$B - C = B \cap \overline{C}$ = "sacar un número par no múltiplo de 3" = $\{2, 4, 8\}$

d) $\overline{A} \cup B$ = "sacar menor o igual que 5 o par" = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

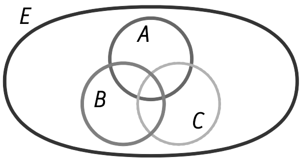
$\overline{B} \cap C$ = "sacar impar múltiplo de 3" = $\{3, 9\}$

$\overline{A \cup C}$ = "sacar menor o igual que 5 y no múltiplo de 3" = $\{1, 2, 4, 5\}$

$\overline{B \cap C}$ = "sacar impar o no múltiplo de 3" = $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$.

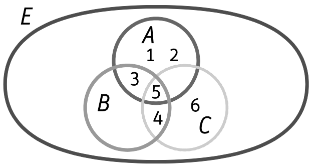
29. **Lanzamos un dado cúbico y consideramos los sucesos: $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ y $C = \{4, 5, 6\}$.**

a) Copia en tu cuaderno el diagrama de Venn y coloca los números en las regiones correspondientes.



b) Calcula los sucesos: $A \cup B \cup C$; $(A \cup B) \cap C$; $A \cup (B \cap C)$; $\overline{A} \cup B$; $\overline{A} \cap \overline{C}$

a)



b) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$ $\quad A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad \overline{A} \cap \overline{C} = \varnothing$

$(A \cup B) \cap C = \{4, 5\}$ $\quad \overline{A} \cup B = \{3, 4, 5, 6\}$

30. **Se escoge al azar una carta de una baraja de 40 cartas. Consideramos los sucesos A = "sacar un basto", B = "sacar un rey", C = "sacar una carta más baja que 3". Describe los sucesos:**

a) $A \cap C$ **b)** $\overline{A} \cap \overline{B}$ **c)** $A \cap \overline{B}$ **d)** $\overline{A - C}$

a) $A \cap C$ = "sacar un basto menor que 3".

b) $\overline{A} \cap \overline{B}$ = "sacar una carta que no sea un rey ni bastos"

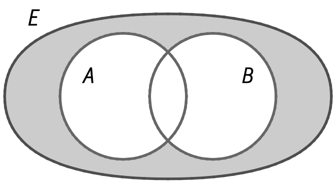
c) $A \cap \overline{B}$ = "sacar cualquier carta de bastos que no sea el rey"

d) $\overline{A - C}$ = "sacar una carta que no sea bastos o que sea bastos menor que 3"

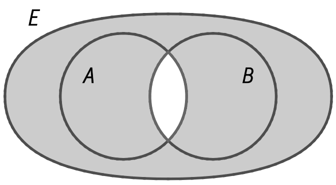
31. **Utiliza diagramas de Venn para comprobar si son ciertas las igualdades siguientes:**

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ **b)** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

a) Cierta. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



b) Cierta. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



32. Se lanzan dos dados y se mira la diferencia de puntos entre uno y otro.

a) Escribe el espacio muestral del experimento.

b) ¿Son sucesos equiprobables? En caso negativo, escribe las probabilidades de cada suceso elemental.

c) Halla la probabilidad del suceso *A* = “la diferencia es menor que 4”.

a) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

b) No son sucesos equiprobables.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos al hallar la diferencia entre puntos obtenidos al lanzar dos dados.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$P(0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $P(1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ $P(2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

$P(3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $P(4) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ $P(5) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

c) $P(A) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

33. Se elige un número de tres cifras. ¿Qué probabilidad hay de que tenga alguna cifra repetida?

Llamamos al suceso *A* = “el número tiene alguna cifra repetida”. Por tanto, $\overline{A}$ = “el número tiene todas sus cifras distintas”. Calculamos $P\left(\overline{A}\right)$.

Casos posibles: todos los números de tres cifras. Es decir, hay $9 \cdot 10^2 = 900$ números.

Casos favorables: todos los números de tres cifras con todas sus cifras distintas. Es decir, hay $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ números.

Por tanto, $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{648}{900} = \frac{7}{25}$

34. Actividad resuelta.

35. Se lanzan dos dados y consideramos los sucesos:

***A* = “sacar al menos un 6”**

***B* = “la diferencia de puntos es 2”**

Calcula las probabilidades de:

a) $A \cap B$ **b)** $A \cup B$ **c)** $A - B$

$A = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6 ,6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\} \Rightarrow P(A) = \frac{11}{36}$

$B = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)\} \Rightarrow P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

a) $A \cap B = \{(4, 6), (6, 4)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{36} + \frac{2}{9} - \frac{1}{18} = \frac{17}{36}$

c) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{11}{36} - \frac{1}{18} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

36. **Se elige al azar un número de 6 cifras (no puede empezar por 0). ¿Cuál es la probabilidad de que tenga al menos una cifra impar?**

Llamamos al suceso A = "el número tiene alguna cifra impar". Por tanto, $\overline{A}$ = "el número tiene todas sus cifras pares". Calculamos $P\left(\overline{A}\right)$.

Casos posibles: todos los números de seis cifras. Es decir, hay $9 \cdot 10^5 = 900\,000$ números.

Casos favorables: todos los números de seis cifras con todas sus cifras pares. Es decir, hay $4 \cdot 5^5 = 12\,500$ números.

Por tanto, $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{12\,500}{900\,000} = \dfrac{71}{72}$

37. **En una empresa hay 20 trabajadores: 12 hombres y 8 mujeres. Se eligen tres de ellos al azar para formar una comisión. Halla la probabilidad de que:**

a) **Entre los elegidos haya solo una mujer.**

b) **Haya al menos una mujer.**

c) **La comisión no sea mixta, es decir, haya sólo hombres o sólo mujeres.**

En todos los apartados los casos posibles son las comisiones formadas por tres personas elegidas al azar de entre 20. Es decir, hay $C_{20,3} = 1140$ comisiones posibles.

a) Casos favorables: comisiones formadas por dos hombres elegidos de entre 12 y una mujer elegida de entre 8. Es decir, hay $C_{12,2} \cdot C_{8,1} = 528$ comisiones.

Por tanto, P("en la comisión hay una sola mujer") = $\dfrac{528}{1140} = \dfrac{44}{95}$

b) Llamamos al suceso A = "la comisión tiene al menos una mujer". Por tanto, $\overline{A}$ = "la comisión no tiene ninguna mujer". Calculamos $P\left(\overline{A}\right)$. Casos favorables: comisiones formadas por tres hombres elegidos al azar de entre 12. Es decir, hay $C_{12,3} = 220$ comisiones.

Por tanto, $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{220}{1140} = \dfrac{46}{57}$

c) Llamamos al suceso A = "la comisión está formada solo por mujeres".

Casos favorables: comisiones formadas por tres mujeres elegidas al azar de entre 8. Es decir, hay $C_{8,3} = 56$ comisiones. Por tanto, $P(A) = \dfrac{56}{1140} = \dfrac{14}{285}$

P("la comisión está formada sólo por hombres") = P("la comisión no tiene ninguna mujer") = $\dfrac{220}{1140} = \dfrac{11}{57}$

Por tanto, P("la comisión no es mixta) = $\dfrac{14}{285} + \dfrac{11}{57} = \dfrac{23}{95}$

38. **Colocamos 3 bolas rojas, 3 verdes y 3 azules en fila sin mirar su color. ¿Cuál es la probabilidad de que no hay dos bolas azules juntas?**

Casos posibles: todas las filas distintas que se pueden hacer con 3 bolas rojas, 3 verdes y 3 azules. Es decir, hay $P_9^{3,3,3} = 1680$ filas distintas.

Casos favorables. Para colocar en fila 3 bolas rojas, 3 verdes y 3 azules, sin que haya dos azules juntas, se debe dar la situación *AOAOAOAOAOAOA*, donde *O* representa el lugar donde se coloca una bola roja o verde y *A* las posiciones donde podrían situarse las azules. En total hay 7 posiciones en las que las 3 bolas azules se podrían situar para que no hubiera dos de ellas juntas. De estas 7 posiciones disponibles hay que elegir 3 donde se vayan a colocar las bolas azules. Por tanto, hay $C_{7,3}$ formas de seleccionar las posiciones. Como las bolas rojas y verdes se pueden colocar de $P_6^{3,3}$ formas diferentes, entonces hay $P_6^{3,3} \cdot C_{7,3} = 700$ formas de colocar las bolas, de forma que no haya dos azules juntas.

Por tanto, P("no hay dos bolas azules juntas") = $\dfrac{700}{1680} = \dfrac{5}{12}$

39. ¿Cuál es la probabilidad de tener 4 ases al sacar 5 cartas de una baraja de 52 cartas?

Casos posibles: formas diferentes de extraer 5 cartas de 52. Es decir, hay $C_{52,\,5}$ = 2 598 960 formas distintas.

Casos favorables: formas diferentes de extraer los 4 ases de la baraja y otra carta cualquiera de las 48 restantes. Es decir, hay $C_{4,4} \cdot C_{48,1}$ = 48 formas distintas.

Por tanto, $P(\text{“extraer 4 ases”}) = \dfrac{48}{2\,598\,960} = \dfrac{1}{54\,145}$

40. Se lanza una moneda 4 veces. Calcula las probabilidades de:

a) Sacar 4 cruces.

b) Sacar exactamente 3 cruces.

c) Sacar al menos 3 cruces.

d) Sacar al menos una cruz.

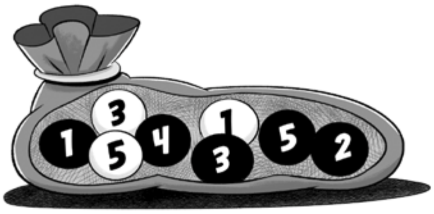
a) $P(\text{4 cruces}) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{16}$

b) $P(\text{3 cruces}) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 4 = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$

c) $P(\text{al menos 3 cruces}) = P(\text{3 cruces}) + P(\text{4 cruces}) = \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{16}$

d) $P(\text{al menos 1 cruz}) = 1 - P(\text{4 caras}) = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$

41. Observa la bolsa que contiene bolas del mismo tamaño.



Se sacan al azar dos bolas al mismo tiempo. Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos sean del mismo color.

b) Las dos tengan el mismo número.

a) $P(\text{“las dos sean del mismo color”}) = P(\text{“sacar 2 blancas”}) + P(\text{“sacar dos negras”}) = \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{2}{7} + \dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{4}{7} = \dfrac{13}{28}$

b) $P(\text{“las dos tengan el mismo número”}) = P(\text{“sacar dos bolas con un 1”}) + P(\text{“sacar dos bolas con un 3”}) + P(\text{“sacar dos bolas con un 5”}) = \dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1}{7} + \dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1}{7} + \dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1}{7} = \dfrac{3}{28}$

42. Con la misma bolsa del ejercicio anterior se consideran los sucesos *A* =”sacar bola negra”, *B* = “sacar un número impar”. ¿Son sucesos dependientes? Justifica la respuesta.

Como $P(A) \cdot P(B) = \dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{6}{8} = \dfrac{30}{64} \neq P(A \cap B) = \dfrac{3}{8}$, entonces los sucesos son dependientes.

43. Una paloma mensajera llamada Pronta llega a su destino con el mensaje el 90 % de las veces. Otra paloma menos experta, llamada Tarda, entrega el mensaje el 80 % de las veces. Se envía a las dos palomas a un mismo destino. Calcula las posibilidades siguientes.

a) Que al menos una de las palomas entregue el mensaje.

b) Que no llegue ninguna de las dos.

Llamamos a los sucesos *P* = “la paloma Pronta llega a su destino” y *T* = “la paloma Tarda llega a su destino”.

a) Como los sucesos *P* y *T* son independientes, entonces $P(P \cap T) = P(P) \cdot P(T) = \dfrac{90}{100} \cdot \dfrac{80}{100} = \dfrac{72}{100}$.

Entonces, $P(P \cup T) = P(P) + P(T) - P(P \cap T) = \dfrac{90}{100} + \dfrac{80}{100} - \dfrac{72}{100} = \dfrac{98}{100}$.

b) $P\left(\overline{P} \cap \overline{T}\right) = P\left(\overline{P}\right)\cdot P\left(\overline{T}\right) = (1 - P(P))(1 - P(T)) = \left(1 - \dfrac{90}{100}\right)\left(1 - \dfrac{80}{100}\right) = \dfrac{10}{100}\cdot\dfrac{20}{100} = \dfrac{2}{100}$

44. Se extraen sucesivamente tres cartas de una baraja de 40 cartas. Calcula la probabilidad de que las tres cartas sean reyes si:

a) Se vuelven a meter al mazo las cartas extraídas.

b) No se devuelven al mazo las cartas.

a) P(“tres reyes”) = $\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{40}=\frac{64}{64\,000}=\frac{1}{1000}$ **b)** P(“tres reyes”) = $\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}\cdot\frac{2}{38}=\frac{24}{59\,280}=\frac{1}{2470}$

45. Las habitaciones de un hotel están numeradas de tal forma que la primera cifra indica la planta y las otras dos el número de la habitación en esa planta. El hotel tiene 3 plantas y en cada planta hay 40 habitaciones. Si se eligen dos habitaciones al azar, calcula la probabilidad de que las habitaciones sean contiguas.

Supongamos que las plantas del hotel están numeradas con los números 1, 2 y 3 y, en cada planta, las habitaciones están numeradas del 1 al 40.

Entonces las habitaciones del hotel serán 101, 102, …, 139, 140, 201, 202, …, 239, 240, 301, 302, …, 339, 340.

Si las habitaciones del hotel estuvieran, en cada planta, en un lado del pasillo, entonces las habitaciones 101, 140, 201, 240, 301 y 340 únicamente tendrían una habitación contigua. El resto de habitaciones tendrían 2 habitaciones contiguas. Es decir, habría 6 habitaciones con una única habitación contigua y, 114 habitaciones, con 2 habitaciones contiguas.

Por tanto, P(“sean contiguas”) = $\frac{1}{120}\cdot\frac{1}{119}\cdot 6+\frac{1}{120}\cdot\frac{2}{119}\cdot 114=\frac{39}{2380}$

Si las habitaciones del hotel estuvieran, en cada planta, en forma circular, entonces todas las habitaciones tendrían 2 habitaciones contiguas.

Por tanto, P(“sean contiguas”) = $\frac{1}{120}\cdot\frac{2}{119}\cdot 120=\frac{2}{119}$

46. Actividad resuelta.

47. En un congreso de médicos hay 200 congresistas. De ellos 130 son morenos, 80 tienen los ojos castaños, de los cuales 50 son morenos. Se selecciona al azar a un asistente. Haz una tabla de contingencia y calcula la probabilidad de que:

a) Sea moreno y con los ojos castaños.

b) No tenga los ojos castaños y no sea moreno.

Se organizan los datos en una tabla de contingencia, completando los que faltan.

	Ojos castaños	No ojos castaños	Total
Moreno	50	80	130
No moreno	30	40	70
Total	80	120	200

a) P(moreno y ojos castaños) = $\frac{50}{200}=\frac{1}{4}$ **b)** P(ojos no castaños y no moreno) = $\frac{40}{200}=\frac{1}{5}$

48. En una rifa con números del 001 al 500 se sortean tres premios distintos. Luisa ha comprado 10 boletos. Calcula las probabilidades siguientes:

a) Al menos un boleto tenga premio.

b) Tengan premio a lo sumo dos boletos.

a) P(“al menos un boleto tiene premio”) = 1 – P(“ningún boleto tiene premio”) = 1 – $\frac{490\cdot 489\cdot 488}{500\cdot 499\cdot 498}$ = 0,058 923

b) P(“tengan premio a lo sumo dos boletos”) = P(“ningún boleto tiene premio”) + P(“tenga premio 1 boleto”) + + P(“tengan premio 2 boletos”) = 1 – P(“tengan premio 3 boletos”) – P(“tengan premio los 3 boletos”) = 1 – $-\frac{10\cdot 9\cdot 8}{500\cdot 499\cdot 498}$ = 0,999 994

49. Un estudio de una tienda de electrodomésticos dice que 6 de cada 10 clientes compra un televisor. La probabilidad de que un cliente compre un lector de DVD si ha comprado un televisor es 0,4, mientras que si no ha comprado el televisor la probabilidad es 0,2. Calcular la probabilidad de que:

a) Compre un televisor y un lector de DVD.

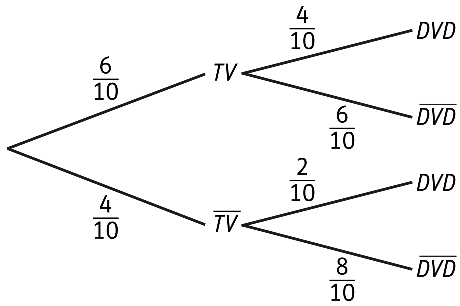
b) Compre un lector de DVD.

c) Compre un televisor si ha comprado un lector de DVD.

Sean los sucesos:

T = "comprar un televisor" $\overline{T}$ = "no comprar un televisor"

D = "comprar un DVD" $\overline{D}$ = "no comprar un DVD"



a) $P(T \cap D) = P(T) \cdot P(D / T) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{6}{25}$

b) $P(D) = P(T) \cdot P(D / T) + P\left(\overline{T}\right) \cdot P\left(D / \overline{T}\right) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{8}{25}$

c) $P(T / D) = \frac{P(T) \cdot P(D / T)}{P(D)} = \frac{\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{8}{25}} = \frac{3}{4}$

50. Actividad resuelta.

51. Se dispone de dos urnas *A* y *B*. La urna *A* contiene 3 bolas blancas y una negra y la urna *B* una blanca y 2 negras. Se lanza un dado y si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna *A* y si no es así se saca de la urna *B*.

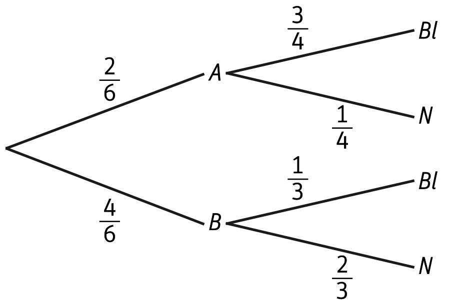
a) Calcula la probabilidad de sacar una bola negra.

b) Se saca una bola de una de las urnas y es blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido más de 2 en el dado?

Sean los sucesos:

A = "extraer bola de la urna A" B = "extraer bola de la urna B"

Bl = "extraer bola blanca" N = "extraer bola negra"



a) $P(N) = P(A) \cdot P(N / A) + P(B) \cdot P(N / B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{19}{36}$

b) $P(B / Bl) = \frac{P(B) \cdot P(Bl / B)}{P(Bl)} = \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{19}{36}} = \frac{8}{17}$

52. **Existen tres medicamentos genéricos para combatir una enfermedad, excluyentes entre sí.**

- **El *A* lo toman el 60 % de los enfermos y su índice de curación es del 85 %.**
- **El *B* lo toman el 25 % de los enfermos y es eficaz en 9 de cada 10 pacientes.**
- **El *C* lo toman el resto y su nivel de eficacia es del 80 %.**

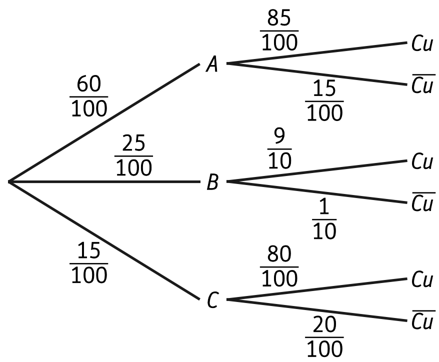
a) Calcula la probabilidad global de curación de un paciente.

b) Se ha seleccionado al azar a un paciente que no ha respondido positivamente al tratamiento. Calcula la probabilidad de que haya tomado el medicamento *B*.

Sean los sucesos:

A = "tomar el medicamento *A*" *B* = "tomar el medicamento *B*" *C* = "tomar el medicamento *C*"

C_u = "el paciente se cura" $\overline{C_u}$ = "el paciente no se cura"



a) $P(C_u) = P(A) \cdot P(C_u / A) + P(B) \cdot P(C_u / B) + P(B) \cdot P(C_u / B) = \frac{60}{100} \cdot \frac{85}{100} + \frac{25}{100} \cdot \frac{9}{10} + \frac{15}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{171}{200}$

b) Aplicamos el teorema de Bayes: $P\left(B / \overline{C_u}\right) = \frac{P(B) \cdot P\left(\overline{C_u} / B\right)}{P\left(\overline{C_u}\right)} = \frac{\frac{25}{100} \cdot \frac{1}{10}}{1 - \frac{171}{200}} = \frac{5}{29}$

53. **Indica el suceso contrario en los siguientes casos.**

a) En una clase se eligen al azar dos estudiantes. *A* = "los dos son chicos"

b) En un restaurante Luis pide dos platos: *B* = "sopa y pescado"

c) En una rifa Juan lleva tres números distintos: *C* = "al menos uno está premiado"

a) $\overline{A}$ = "al menos un estudiante es chica".

b) $\overline{B}$ = "no sopa y pescado simultáneamente"

c) $\overline{C}$ = "ninguno está premiado".

54. **Se lanza una moneda tres veces. Consideramos los sucesos, *A* = "solo han salido caras" y *B* = "ha salido al menos una cara". Calcula las probabilidades de los sucesos:**

a) $\overline{A}$ **b)** $A \cup B$ **c)** $\overline{A} \cap B$ **d)** $A \cup \overline{B}$

$E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX, XXX\} \Rightarrow A = \{CCC\}$ y $B = \{CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX\}$

a) $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

b) $A \cap B = \{CCC\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

c) $\overline{A} \cap B = \{CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX\} \Rightarrow P\left(\overline{A} \cap B\right) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

d) $A \cup \overline{B} = \{CCC, XXX\} \Rightarrow P\left(A \cap \overline{B}\right) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

55. Una urna contiene 5 bolas rojas, 3 negras y 2 blancas. Se sacan 3 bolas sin remplazarlas. Calcula las probabilidades de los sucesos siguientes:

a) Que las tres sean del mismo color.

b) Que sean de tres colores distintos.

a) P(“igual color”) = P(“tres rojas”) + P(“tres negras”) = $\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{11}{120}$

b) P(“distinto color”) = 3! · P(“bola roja, bola negra, bola blanca”) = $6\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

56. Se tienen 4 cajas numeradas del 1 al 4 y repartimos al azar 10 bolas idénticas entre las 4 cajas. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna esté vacía?

Casos posibles.

Formas distintas de repartir 10 bolas idénticas en 4 cajas.

El problema es equivalente a contar de cuántas formas diferentes se pueden distribuir 10 bolas y 3 barras. Por ejemplo, la distribución ••|•••|•|••••, significa que en la primera caja hay 2 bolas, en la segunda 3, en la tercera 1 y en la cuarta 4.

Por tanto, hay $C_{13,3}$ = 286 formas diferentes de distribuir 10 bolas idénticas en 4 cajas.

Casos favorables.

Formas distintas de repartir 10 bolas idénticas en 4 cajas, de forma que ninguna caja esté vacía.

Repartimos una bola en cada caja. De esta forma ninguna caja está vacía. Ahora falta repartir 6 bolas idénticas en 4 cajas. El problema es equivalente a contar de cuántas formas diferentes se pueden distribuir 6 bolas y 3 barras.

Es decir, hay $C_{9,3}$ = 84 formas diferentes de distribuir 10 bolas idénticas en 4 cajas, de forma que ninguna caja esté vacía.

Por tanto, P(“ninguna caja vacía”) = $\frac{84}{286}=\frac{42}{143}$

57. En un experimento la probabilidad de un suceso *A* es *P*(*A*) = 0,50 y la de otro suceso *B* es *P*(*B*) = 0,45. La probabilidad de la unión es *P*(*A* ∪ *B*) = 0,90.

a) ¿Son incompatibles *A* y *B*?

b) ¿Son independientes?

c) Calcula las probabilidades de $A \cap B$, A / B, B / A y $\bar{A} \cap B$.

a) $P(A \cup B) = 0{,}90 \neq P(A) + P(B) = 0{,}50 + 0{,}45 = 0{,}95 \Rightarrow A$ y B no son incompatibles.

b) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}50 + 0{,}45 - 0{,}90 = 0{,}05$

$P(A \cap B) = 0{,}05 \neq P(A) \cdot P(B) = 0{,}50 \cdot 0{,}45 = 0{,}225 \Rightarrow A$ y B no son independientes.

c) $P(A \cap B) = 0{,}05$

$P(B / A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0{,}05}{0{,}50}=\frac{1}{10}$

$P(A / B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}05}{0{,}45}=\frac{1}{9}$

$P(\bar{A}\cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}45 - 0{,}05 = 0{,}40$

58. **En un concurso de redacción el ganador elige un libro al azar entre 5 novelas y 3 libros de poesía y tras él, el segundo clasificado elige otro libro. Calcular la probabilidad de que:**

a) **Al segundo le toque un libro de poesía.**

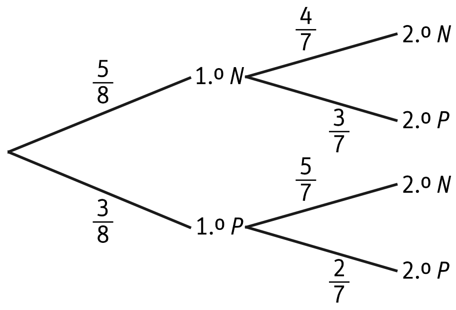
b) **Al ganador le haya tocado una novela si sabemos que al segundo le tocó un libro de poesía.**

c) **Que a los dos les toque un libro del mismo género.**

Sean los sucesos:

1º*N* = “el ganador elige novela” 1º*P* = “el ganador elige poesía”

2º*N* = “el segundo elige novela” 2º*P* = “el segundo elige poesía”



a) $P(2^oP) = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3}{8}$

b) $P\left(1^oN/2^oP\right)=\frac{P\left(1^oN\right)\cdot P\left(2^oP/1^oN\right)}{P\left(2^oP\right)}=\frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}}{\frac{3}{8}}=\frac{5}{7}$

c) $P(\text{“mismo género”}) = P(1^oN \cap 2^oN) + P(1^oP \cap 2^oP) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{13}{28}$

59. **Un pastillero A1 contiene 4 pastillas blancas y 3 azules, otro A2 tiene 5 blancas y ninguna azul y un tercero A3 tiene 2 blancas y 4 azules.**

a) **Se escoge un pastillero al azar y de él se extrae una pastilla. Calcula la probabilidad de que sea blanca.**

b) **Si ha salido una pastilla blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la pastilla estuviera en el primer pastillero?**

c) **Se han juntado todas las pastillas y se extrae una al azar. Calcula la probabilidad de que sea del primer pastillero.**

Sean los sucesos:

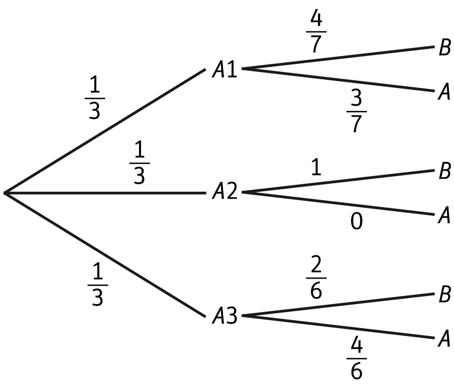
A_1 = “elegir el pastillero *A*1”

A_2 = “elegir el pastillero *A*2”

A_3 = “elegir el pastillero *A*3”

B = “extraer pastilla blanca”

A = “extraer pastilla azul”.



a) $P(B) = P(A1)\cdot P(B/A1) + P(A2)\cdot P(B/A2) + P(A3)\cdot P(B/A3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}=\frac{40}{63}$

b) $P\left(A1/B\right)=\frac{P\left(A1\right)\cdot P\left(B/A1\right)}{P\left(B\right)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{40}{63}}=\frac{3}{10}$

c) En total hay 18 pastillas, de las cuales 7 pertenecen al primer pastillero $\Rightarrow P(A1) = \frac{7}{18}$.

60. **Tres bolsas contienen bolas de colores, la *A* tiene 5 bolas negras y 2 blancas, la *B*, 4 negras y 3 blancas, y la *C*, 4 negras y 4 blancas. Se elige una bolsa al azar y se extraen dos bolas de la misma. Calcula la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.**

$P(\text{“igual color”}) = P(BB) + P(NN) = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\right)=\frac{29}{63}$

61. En un campamento hispano-francés los participantes se han apuntado a un único deporte según la siguiente tabla:

	Tenis	Natación	Vela
Español	40	24	16
Francés	14	21	35

Indica si los siguientes pares de sucesos son independientes.

a) *A* = "ser español" y *T* = "practicar tenis".

b) *B* = "ser francés" y *V* = "practicar vela".

Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

	Tenis	Natación	Vela	Total
Español	40	24	16	80
Francés	14	21	35	70
Total	54	45	51	150

a) $P(A \cap T) = \frac{40}{150} = \frac{4}{15} \neq P(A) \cdot P(T) = \frac{80}{150} \cdot \frac{54}{150} = \frac{24}{125} \Rightarrow A$ y T no son independientes.

b) $P(B \cap V) = \frac{35}{150} = \frac{7}{30} \neq P(B) \cdot P(V) = \frac{70}{150} \cdot \frac{51}{150} = \frac{119}{750} \Rightarrow B$ y V no son independientes.

62. En un comercio hay instaladas dos alarmas *A* y *B* contra incendios en zonas distintas. La probabilidad de que se active la alarma *A* es *P*(*A*) = 0,90, la probabilidad de que se active *B* es *P*(*B*) = 0,75 y la probabilidad de que se activen ambas simultáneamente es *P*(*A* ∩ *B*) = 0,70. Si hay un incendio, calcula las siguientes probabilidades:

a) Que se active alguna alarma.

b) Que no se active ninguna de las dos alarmas.

c) Que se active solo una alarma.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}90 + 0{,}75 - 0{,}70 = 0{,}95$

b) $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(A \cup B\right) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$

c) $P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}90 - 0{,}70 + 0{,}75 - 0{,}70 = 0{,}25$

63. Una bolsa contiene 5 bolas rojas numeradas del 1 al 5 y 3 bolas azules numeradas del 1 al 3. Se extraen, sin reponerlas, tres bolas al azar. Calcula las probabilidades siguientes:

a) No sacar 3 bolas rojas.

b) No sacar ninguna bola roja.

c) Sacar al menos una bola roja.

a) P("no sacar tres bolas rojas") = 1 – P("sacar tres bolas rojas") = $1 - \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{23}{28}$

b) P("no sacar ninguna bola roja") = P("sacar tres bolas azules") = $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$

c) P("sacar al menos una bola roja") = 1 – P("no sacar ninguna bola roja") = $1 - \frac{1}{56} = \frac{55}{56}$

64. **En un plató de televisión hay dos cámaras que enfocan al presentador en todo momento. La cámara *A* falla en un 8 % de los casos, y la *B*, en un 5 %. En un 2 % fallan los dos simultáneamente. Calcula la probabilidad de que:**

a) **Fallen las dos cámaras.**

b) **Falle *B* sabiendo que ha fallado *A*.**

c) **No falle ninguna cámara.**

Llamamos a los sucesos *FA* ="falla la cámara *A*" y *FB* = "falla la cámara *B*".

a) $P(FA \cap FB) = 0,02$

b) $P(FB / FA) = \dfrac{P(FA \cap FB)}{P(FA)} = \dfrac{0,02}{0,08} = 0,25$

c) $P\left(\overline{FA} \cap \overline{FB}\right) = 1 - P\left(\overline{\overline{FA} \cap \overline{FB}}\right) = 1 - P(FA \cup FB) = 1 - \left(P(FA) + P(FB) - P(FA \cap FB)\right) = 1 - (0,08 + 0,05 - 0,02) =$

$= 1 - 0,11 = 0,89$

65. **En una fábrica de envases se ha realizado un test de calidad resultando que el 3 % salen defectuosos. Se han seleccionado 10 piezas al azar. Calcula la probabilidad de que:**

a) **Ningún envase sea defectuoso.**

b) **El primer envase defectuoso salga en la tercera extracción.**

c) **Que haya exactamente un envase defectuoso.**

a) *P*("ningún envase defectuoso") = $0,97^{10} = 0,74$

b) *P*("el primer envase defectuoso salga en la tercera extracción") = $\dfrac{97}{100} \cdot \dfrac{96}{99} \cdot \dfrac{3}{98} = \dfrac{388}{13\,475}$

c) *P*("un envase defectuoso") = $10 \cdot 0,97^9 \cdot 0,03 = 0,23$

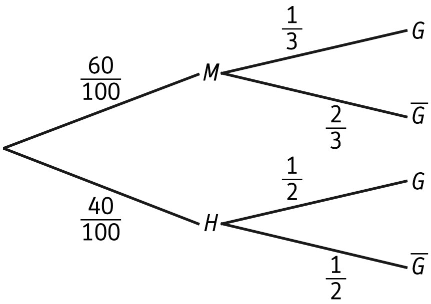
66. **Un estudiante hace un test de 8 preguntas. En cada una de ellas debe elegir la respuesta correcta entre tres posibles. Para pasar el test hay que acertar al menos 6 respuestas. Decide rellenar todas las respuestas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que pase el test?**

Para superar el test, el alumno debe acertar al menos 6 respuestas. La probabilidad de acertar cada respuesta es $\dfrac{1}{3}$ y, de fallarla, $\dfrac{2}{3}$.

P("acertar al menos 6 preguntas") = *P*("acertar 6 preguntas") + *P*("acertar 7 preguntas") + *P*("acertar 8 preguntas")=

$= \binom{8}{6} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \binom{8}{7} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3}\right)^8 = 0,0197$

67. **En el claustro de profesores de un centro el 60 % de los miembros son mujeres. Entre las profesoras una de cada 3 lleva gafas, mientras que entre los profesores las llevan uno de cada 2. Se elige al azar a un miembro del claustro, ¿cuál es la probabilidad de que sea una profesora si sabemos que llevaba gafas?**



Sean los sucesos:

M = "es mujer" *H* = "es hombre"

G = "lleva gafas" $\overline{G}$ = "no lleva gafas"

$$P(M/G) = \frac{P(M) \cdot P(G/M)}{P(G)} = \frac{\dfrac{60}{100} \cdot \dfrac{1}{3}}{\dfrac{60}{100} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{40}{100} \cdot \dfrac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

68. **La probabilidad de que al seleccionar un número capicúa entre 1000 y 10 000 sea múltiplo de 7 es:**

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{1}{7}$

Casos posibles. Todos los números capicúas de 4 cifras. Es decir, hay $9 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 90$ números capicúas de 4 cifras.

Casos favorables. Todos los números capicúas de 4 cifras múltiplos de 7.

$1000a + 100b + 10b + a$, con $a = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $b = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, es un número capicúa de 4 cifras. Como el número tiene que ser múltiplo de 7, entonces es de la forma $7k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Por tanto, $1000a + 100b + 10b + a = 7k \Rightarrow 1001a + 110b = 7k \Rightarrow 11(91a + 10b) = 7k$.

Como 11 no es divisible entre 7, entonces $91a + 10b$ debe ser múltiplo de 7.

Como $91a = 13 \cdot 7a$ es divisible entre 7, entonces $10b$ debe ser también divisible entre 7.

Es decir, $10b = 7k$. Pero $b = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, por tanto $b = 0$ o $b = 7$.

Si $b = 0$, el número capicúa es de la forma $a00a \Rightarrow$ existen 9 números de la forma $a00a$ múltiplos de 7.

Si $b = 7$, el número capicúa es de la forma $a77a \Rightarrow$ existen 9 números de la forma $a77a$ múltiplos de 7.

Existen 18 números capicúas de 4 cifras múltiplos de 7.

Por tanto, P(“el número capicúa de 4 cifras sea múltiplo de 7”) = $\frac{18}{90} = \frac{1}{5}$

La respuesta correcta es la B.

69. ***A* y *B* son dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}40$, $P(B / A) = 0{,}25$ y $P(B) = b$. ¿Cuál es el mayor valor posible que puede tomar *b*?**

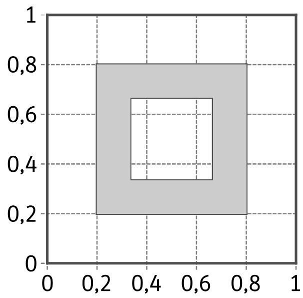
A. 0,40 **B.** 0,36 **C.** 0,70 **D.** 1

$P(A \cap B) = P(B / A) \cdot P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}40 = 0{,}1 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}40 + b - 0{,}1 = 0{,}3 + b$

Como $P(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow 0{,}3 + b \leq 1 \Rightarrow b \leq 0{,}7$.

La respuesta correcta es la C.

70. **Se escoge un punto al azar en el interior de un cuadrado de lado 1 y se mide la distancia del punto al lado más próximo. ¿Cuál es la probabilidad de que esa distancia esté comprendida entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$?**



A. $\frac{45}{225}$ **C.** $\frac{56}{225}$

B. $\frac{55}{225}$ **D.** $\frac{60}{225}$

Casos posibles

Área del cuadrado de lado 1: $A_{cuadrado} = 1^2 = 1$.

Casos favorables

Área de la zona coloreada de la figura. Es un marco cuyo borde exterior está a $\frac{1}{5}$ de distancia del lado del cuadrado y, cuyo borde interior, está a $\frac{1}{3}$ de distancia del lado del cuadrado.

$$A_{zona\ sombreada} = \left(1 - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{56}{225}$$

Por tanto, $P\left(\text{distancia comprendida entre } \frac{1}{5} \text{ y } \frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{56}{225}}{1} = \frac{56}{225}$

La respuesta correcta es la C.

Encuentra el error

71. Un fallo con historia. Si se lanzan al aire dos monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que salga alguna cara? El matemático francés Jean Le Rond d´Alembert (1717 - 1783) dijo que la probabilidad era $\frac{2}{3}$. Razonó así:

- **Si la primera moneda sale cara ya se cumple nuestro suceso.**
- **Si no es así los resultados pueden ser (*X*, *C*) o (*X*, *X*). En dos de los casos sale alguna cara y en el tercero no sale ninguna. Luego la probabilidad de salir alguna cara es $\frac{2}{3}$.**

¿Estás de acuerdo con d´Alembert? Calcula la probabilidad de obtener “al menos una cara” al lanzar dos monedas. Encuentra el fallo, si lo hay, en el razonamiento de d´Alembert.

Jean Le Rond d´Alembert cometió un error al contabilizar el número de casos posibles.

Si se lanzan dos monedas, el espacio muestral es $E = \{CC, CX, XC, XX\}$. Por tanto, hay 4 posibles resultados. De esos 4 posibles resultados, al menos se obtiene una cara en tres de ellos.

Por tanto, *P*(“obtener al menos una cara”) = $\frac{3}{4}$.

PONTE A PRUEBA

La importancia de los análisis médicos y de las leyes del azar

Actividad resuelta.

Un juego con trampa

Belén y Carlos han descubierto un nuevo juego:

- **Se introducen tres fichas en un sombrero.**
- **Una de ellas tiene las dos caras blancas, otra las dos caras rojas y la tercera una blanca y otra roja.**
- **Uno de los ellos extrae una ficha, mira sólo una de sus caras y le muestra el color al otro jugador.**

Carlos apuesta a que la ficha es la que tiene las dos caras iguales, y Belén a que es la que tiene las caras diferentes.

Parece que los dos jugadores tienen las mismas posibilidades de acertar, ya que si la cara que se ha visto es roja la cara oculta o es roja también, en cuyo caso sería la ficha de dos caras rojas, o por el contrario, es blanca, y entonces la ficha extraída sería la blanca-roja.

1. ¿Tienen los dos jugadores las mismas probabilidades de ganar?

Los jugadores no tienen las mismas probabilidades de ganar.

Tendría más posibilidades de ganar el jugador que apueste por la ficha de doble color; es decir, si la cara que han visto es roja tendría más posibilidades el jugador que apueste por la ficha rojo – rojo y, si la cara que han visto es blanca, tendría más posibilidades de ganar el jugador que apueste por la ficha blanca – blanca.

Por tanto, tendría más posibilidades de ganar Carlos.

2. En caso contrario, ¿por cuál de las dos opciones apostarías? Calcula la probabilidad de ganar de cada jugador.

Llamamos a los sucesos:

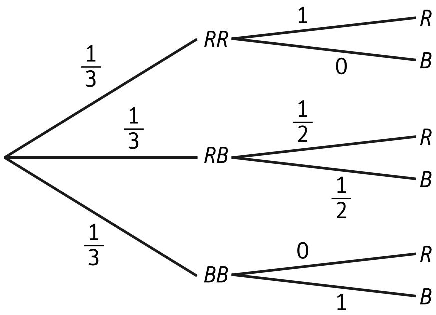
RR = “la ficha elegida es la que tiene las dos caras rojas”

BB = “la ficha elegida es la que tiene las dos caras blancas”

RB = “la ficha elegida es la que tiene una cara roja y otra blanca”

R = “la cara de la ficha que se enseña sea roja”

B = “la cara de la ficha que se enseña sea azul”



Supongamos que se ha sacado una ficha y la cara que se ve es roja. Belén apostaría por la ficha *RB* y, Carlos, por la ficha *RR*.

$$P(RR/R)=\frac{P(RR)\cdot P(R/RR)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\ \text{ y }\ P(RB/R)=\frac{P(RB)\cdot P(R/RB)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

Por tanto, Carlos tendría más probabilidades de ganar.

Si la cara que se viera fuera blanca, Belén apostaría por la ficha *RB* y, Carlos, por la ficha *BB*.

$$P(BB/B)=\frac{P(BB)\cdot P(B/BB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1}=\frac{2}{3}\ \text{ y }\ P(RB/B)=\frac{P(RB)\cdot P(B/RB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1}=\frac{1}{3}$$

De nuevo, Carlos tendría más probabilidades de ganar.

Una partida sin terminar. Reparto justo.

Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665) son dos de los fundadores de la teoría de la probabilidad. Se intercambiaron numerosas cartas planteándose problemas relacionados con el azar. Uno de ellos fue cómo habría que repartir las cantidades apostadas por dos jugadores si hubieran de interrumpir el juego antes del final y uno fuera ganando al otro.

En una carta escrita el 29 de julio de 1654 Pascal le remite a Fermat su solución:

"He aquí como lo hago para saber el valor de cada una de las partidas cuando dos jugadores juegan al mejor de tres partidas, y cada uno ha apostado 32 monedas. Supongamos que el primero ha ganado dos y el otro una. Ahora están jugando una partida cuya suerte es que, si gana el primero, gana la apuesta, las 64 monedas. Si gana el otro empatan a dos partidas, y por tanto, si suspenden el juego cada uno retiraría su apuesta. Considerad, señor, que si gana el primero le pertenecen 64 monedas y 32 si pierde. Ahora bien, si no quieren arriesgar esta partida y separarse sin jugarla, el primero debe decir: "estoy seguro de ganar 32 monedas, porque aunque pierda las tengo; pero las otras 32 quizás las tendré yo o quizás las tendréis vos; el azar es igual, repartamos pues estas monedas mitad por mitad, y me dais, además de estas 16 las 32 monedas que me corresponden con seguridad". Tendrá, pues, 48 monedas el primero y el otro 16"

1. ¿Estás de acuerdo con la solución de Pascal?

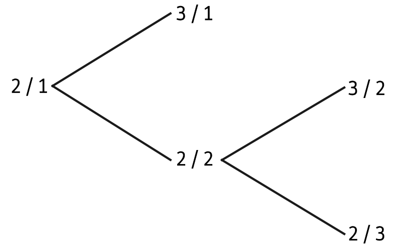
Sí, porque Pascal plantea que hay que tener en cuenta lo que podría ocurrir si siguieran jugando, y repartir el dinero en base a ello.

2. ¿No sería más justo este razonamiento: "si han jugado tres partidas y uno ha ganado dos y el otro una, lo lógico es dividir las 64 monedas en tres partes y que el primero se lleve dos partes y el otro una. Es decir, al primero le corresponden $\frac{2}{3}\cdot 64=42{,}66$ y al otro $\frac{1}{3}\cdot 64=21{,}33$?

No sería más justo porque no se tendrían en cuenta las probabilidades de ganar cada uno, en función de su trayectoria.

3. Haz un diagrama de árbol, suponiendo que los dos tiene la misma probabilidad de ganar una partida y saca tus propias conclusiones.

Denotamos por *X* / *Y* al número de partidas ganadas por cada jugador, donde *X* representa el número de partidas por el primer jugador e *Y* el número de partidas ganadas por el segundo. Por ejemplo, 2 / 1 significa que el primer jugador ha ganado dos partidas y, el segundo, una.



El jugador que lleva ventaja en el momento de plantearse parar el juego gana 2 de cada 3 partidas.

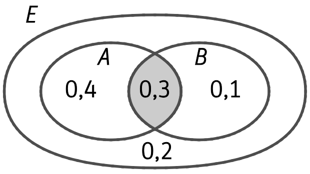
AUTOEVALUACIÓN

1. **Se consideran dos sucesos *A* y *B* de un experimento aleatorio y se sabe que *P*(*A*) = 0,7; *P*(*B*) = 0,4 y *P*(*A* ∩ *B*) = 0,3. Representa los sucesos *A* y *B* mediante un diagrama de Venn y calcula:**

a) $P(A \cup B)$

b) $P(\overline{B})$

c) $P(A \cup \overline{B})$



a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}8$

b) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

c) $P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}4 = 0{,}9$

2. **Los dados para rellenar quinielas son dados cúbicos con estas características: tres caras están marcadas con un 1 que representa la victoria local, dos caras con una *X* que representa el empate y una cara con un 2, que representa la victoria visitante.**

Calcula las probabilidades de que al lanzar el dado tres veces:

a) **Salgan 3*X*.** **b)** **No salga ninguna *X*.** **c)Salga al menos una *X*.**

a) $P(3X) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

b) $P(\text{“ninguna } X\text{”}) = \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$

c) $P(\text{“al menos una } X) = 1 - P(\text{“ninguna } X\text{”}) = \frac{19}{27}$

3. **Se elige un número al azar entre 1000 y 9999. Calcula la probabilidad de que:**

a) **Tenga alguna cifra repetida.**

b) **Tenga solo una cifra repetida dos veces.**

a) $P(\text{“alguna cifra repetida”}) = 1 - P(\text{“ninguna cifra repetida”}) = 1 - \frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{9000} = 1 - \frac{4536}{9000} = \frac{62}{125}$

b) $P(\text{“una cifra repetida dos veces”}) = \frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 6}{9000} = \frac{3888}{9000} = \frac{54}{125}$

4. **Se extraen 4 cartas de una baraja de 40 naipes. Calcula la probabilidad de que:**

a) **Tres de las cuatro cartas tengan el mismo valor: tres cuatros, tres reyes…**

b) **Las cuatro tengan distinto valor.**

a) $P(\text{“tres de las cuatro cartas tienen igual valor”}) = 4 \cdot \frac{40}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} \cdot \frac{36}{37} = \frac{144}{9139}$

b) $P(\text{“las cuatro cartas tengan distinto valor”}) = \frac{40}{40} \cdot \frac{36}{39} \cdot \frac{32}{38} \cdot \frac{28}{37} = \frac{5376}{9139}$

5. **En un concurso de televisión, un concursante domina 5 de los 8 temas sobre los que le pueden preguntar. En la primera ronda, el presentador elige dos sobres al azar y le muestra los temas que contienen al concursante, para que elija uno de ellos.**

a) **Halla la probabilidad de que el concursante pueda elegir uno de los temas que domina.**

b) **Halla la probabilidad de que el presentador le muestre al concursante dos temas que conoce.**

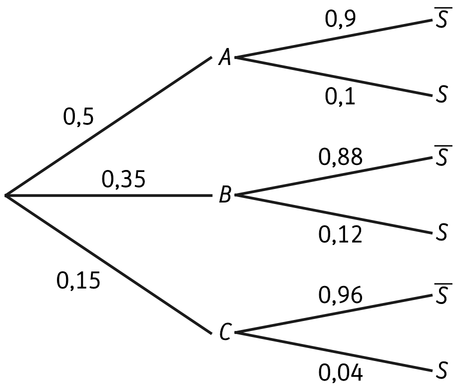
a) $P(\text{“el concursante se sabe al menos un tema”}) = \frac{C_{5,1} \cdot C_{3,1}}{C_{8,2}} + \frac{C_{5,2}}{C_{8,2}} = \frac{15}{28} + \frac{10}{28} = \frac{25}{28}$

b) $P(\text{“el concursante se sabe los dos temas”}) = \frac{C_{5,2}}{C_{8,2}} = \frac{5}{14}$

6. **En una ciudad hay tres centros educativos *A*, *B* y *C* que presentan alumnos al examen de acceso a la Universidad. El 50 % de los alumnos presentados son del centro *A*, el 35 % del *B* y el 15 % del *C*. El centro *A* tiene un porcentaje de aprobados del 90 %, el *B* del 88 % y el *C* del 96 %.**

a) ¿Cuál es el índice global de aprobados en la ciudad?

b) Se ha elegido un estudiante al azar y ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que sea alumno del centro *A*?



Sean los sucesos:

A = “asistir al centro *A*”

B = “asistir al centro *B*”

C = “asistir al centro *C*”

S = “el alumno suspende”

$\overline{S}$ = “el alumno no suspende”

a) $P\left(\overline{S}\right) = 0,5 \cdot 0,9 + 0,35 \cdot 0,88 + 0,15 \cdot 0,96 = 0,902$

b) $P(A/S) = \dfrac{P(A) \cdot P(S/A)}{P(S)} = \dfrac{0,5 \cdot 0,1}{1 - 0,902} = 0,51$