

1

Divisibilidad y números enteros



1. Divisibilidad

PIENSA Y CALCULA

Escribe los números primos menores que 20

Solución:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19

Carné calculista 86617 : 35 | C = 2474; R = 27

APLICA LA TEORÍA

1 Completa con la palabra **múltiplo** o **divisor**:

- a) 5 es 15 b) 12 es 3
c) 24 es 2 d) 7 es 42

Solución:

- a) divisor de
b) múltiplo de
c) múltiplo de
d) divisor de

2 Calcula mentalmente todos los divisores de:

- a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

Solución:

- a) $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$ b) $D(7) = \{1, 7\}$
c) $D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$ d) $D(9) = \{1, 3, 9\}$

3 Calcula mentalmente los cinco primeros múltiplos de:

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

Solución:

- a) 0, 2, 4, 6 y 8 b) 0, 3, 6, 9 y 12
c) 0, 4, 8, 12 y 16 d) 0, 5, 10, 15 y 20

4 De los siguientes números: 15, 18, 24, 30, 35, indica cuáles son múltiplos de:

- a) 2 b) 3 c) 5

Solución:

- a) Múltiplos de 2: 18, 24 y 30
b) Múltiplos de 3: 15, 18, 24 y 30
c) Múltiplos de 5: 15, 30 y 35

5 Clasifica los siguientes números en primos y compuestos:

12, 17, 25, 29, 42, 43

Solución:

Primos: 17, 29, 43
Compuestos: 12, 25, 42

6 Halla mentalmente la descomposición en factores primos de:

- a) 8 b) 12 c) 15 d) 25

Solución:

- a) 2^3 b) $2^2 \cdot 3$
c) $3 \cdot 5$ d) 5^2

7 Halla la descomposición en factores primos de:

- a) 60 b) 80 c) 64 d) 72

Solución:

- a) $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ b) $2^4 \cdot 5$
c) 2^6 d) $2^3 \cdot 3^2$

8 Halla la descomposición en factores primos de:

- a) 120 b) 1 800 c) 840 d) 2 970

Solución:

- a) $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ b) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
c) $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ d) $2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$

2. M.C.D. y m.c.m.

PIENSA Y CALCULA

Halla mentalmente el M.C.D. y el m.c.m. de 4 y 6

Solución:

M.C.D.(4, 6) = 2
m.c.m.(4, 6) = 12

Carné calculista 295 661 : 43 | C = 6 875; R = 36

APLICA LA TEORÍA

9 Halla mentalmente:

- a) M.C.D.(6, 8) b) m.c.m.(6, 8)
c) M.C.D.(6, 9) d) m.c.m.(6, 9)

Solución:

- a) 2 b) 24 c) 3 d) 18

10 Halla mentalmente:

- a) M.C.D.(2, 4) b) m.c.m.(2, 4)
c) M.C.D.(3, 5) d) m.c.m.(3, 5)

Solución:

- a) 2 b) 4 c) 1 d) 15

11 ¿Cuáles de los siguientes números son primos entre sí?

- a) 3 y 5 b) 4 y 6
c) 8 y 9 d) 15 y 21

Solución:

- a) M.C.D.(3, 5) = 1 \Rightarrow 3 y 5 son primos entre sí.
b) M.C.D.(4, 6) = 2 \Rightarrow 4 y 6 no son primos entre sí.
c) M.C.D.(8, 9) = 1 \Rightarrow 8 y 9 son primos entre sí.
d) M.C.D.(15, 21) = 3 \Rightarrow 15 y 21 no son primos entre sí.

12 Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de:

- a) 360 y 900 b) 1 100 y 720

Solución:

- a) 180 y 1 800 b) 20 y 39 600

13 Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de:

- a) 900 y 840 b) 468 y 504

Solución:

- a) 60 y 12 600 b) 36 y 6 552

14 Aplicando el algoritmo de Euclides, halla:

- a) M.C.D.(252, 66) b) M.C.D.(120, 54)

Solución:

a)		3	1	4	2
	252	66	54	12	6
	54	12	6	0	

M.C.D.(252, 66) = 6

b)		2	4	2
	120	54	12	6
	12	6	0	

M.C.D.(120, 54) = 6

- 15** Aplicando el algoritmo de Euclides, halla el M.C.D.(264, 525), y sin hacer la descomposición en factores primos halla el m.c.m.(264, 525)

Solución:

	1	1	87
525	264	261	3
261	3	0	

$$\text{M.C.D.}(525, 264) = 3$$

$$\text{m.c.m.}(525, 264) = \frac{525 \cdot 264}{3} = 46\,200$$

- 16** Dos barcos salen del puerto de Cádiz. Uno vuelve al puerto cada 18 días y el otro cada 24 días. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que vuelvan a encontrarse?

Solución:

$$\text{m.c.m.}(18, 24) = 72 \text{ días.}$$

3. Los números enteros

PIENSA Y CALCULA

Escribe ordenadamente de menor a mayor todos los números enteros x que verifiquen:

$$-3 < x \leq 5$$

Solución:

$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ y 5

Carné calculista 106 173 : 67 | C = 1 584; R = 45

APLICA LA TEORÍA

- 17** Escribe los cinco números enteros positivos más pequeños.

Solución:

$1, 2, 3, 4$ y 5

- 18** Escribe los cinco números enteros negativos de menor valor absoluto.

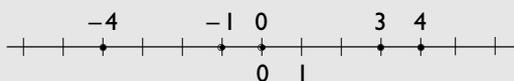
Solución:

$-1, -2, -3, -4, -5$

- 19** Representa gráficamente los siguientes números enteros y ordénalos de menor a mayor:

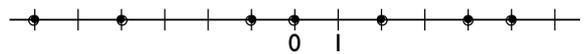
$4, -4, 3, 0, -1$

Solución:



$$-4 < -1 < 0 < 3 < 4$$

- 20** Halla los números enteros representados en la siguiente recta y ordénalos de menor a mayor:



Solución:

$$-6 < -4 < -1 < 0 < 2 < 4 < 5$$

- 21** Completa con signos diferentes los puntos suspensivos de cada apartado:

a) $-2 \dots 6, -2 \dots 6, -2 \dots 6$

b) $3 \dots 3, 3 \dots 3, 3 \dots 3$

Solución:

a) $-2 < 6, \quad -2 \leq 6, \quad -2 \neq 6$

b) $3 = 3, \quad 3 \leq 3, \quad 3 \geq 3$

- 22** Halla todos los números enteros que verifiquen:

$$-5 < x < 2$$

Solución:

-4, -3, -2, -1, 0 y 1

23 Halla todos los números enteros que verifiquen:

$$-3 \leq x \leq 5$$

Solución:

-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 y 5

24 Halla el valor absoluto de los siguientes números enteros:

- a) 5 b) -3 c) -44 d) 53

Solución:

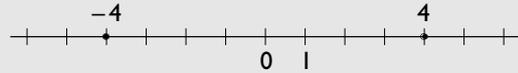
- a) 5 b) 3 c) 44 d) 53

25 Halla y representa todos los números enteros que verifiquen:

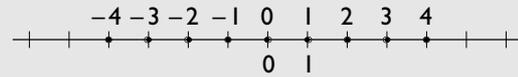
- a) $|x| = 4$ b) $|x| \leq 4$

Solución:

a) -4 y 4



b) -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 y 4



26 ¿Con qué número entero representarías la siguiente situación? Estamos a 5 grados centígrados bajo cero.

Solución:

-5 °C

4. Operaciones con números enteros

PIENSA Y CALCULA

La temperatura máxima el día 1 de enero en un determinado lugar fue de 7 °C, y la temperatura mínima, de -5 °C. ¿Cuál ha sido la variación de temperaturas?

Solución:

$$7 - (-5) = 7 + 5 = 12 \text{ °C}$$

Carné calculista 201 821 : 85 | C = 2 374; R = 31

APLICA LA TEORÍA

27 Realiza las siguientes operaciones:

- a) $5 - 3 + 8 - 4 + 9$
b) $-4 + 1 - 5 + 3 - 8$

Solución:

- a) 15 b) -13

28 Realiza mentalmente las siguientes operaciones:

- a) $7 \cdot (-6)$ b) $-8 \cdot (-9)$ c) $42 : (-6)$
d) $-81 : 9$ e) $-5 \cdot (-2) \cdot 4 \cdot (-10)$
f) $600 : (-10) : 5 : (-2)$

Solución:

- a) -42 b) 72 c) -7
d) -9 e) -400 f) 6

29 Realiza las siguientes operaciones:

- a) $-4(6 - 5) + 6 \cdot (-8) : 4$
b) $24 : (5 - 11) - 3(25 - 30)$

Solución:

- a) -16 b) 11

30 Comprueba la propiedad distributiva en:

a) $-3(4 + 9)$ b) $5(-4 - 7)$

Solución:

a) $-3(4 + 9) = -3 \cdot 13 = -39$
 $-3 \cdot 4 - 3 \cdot 9 = -12 - 27 = -39$
Ambos miembros dan -39
b) $5(-4 - 7) = 5 \cdot (-11) = -55$
 $5(-4) + 5(-7) = -20 - 35 = -55$
Ambos miembros dan -55

31 Halla mentalmente todos los divisores enteros de:

a) 4 b) -7 c) -8 d) 12

Solución:

a) $D(4) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$
b) $D(-7) = \{\pm 1, \pm 7\}$
c) $D(-8) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$
d) $D(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

32 Halla todos los múltiplos enteros de:

a) 2 b) -3
c) -4 d) 5

Solución:

a) $M(2) = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots\}$
b) $M(-3) = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \dots\}$
c) $M(-4) = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \dots\}$
d) $M(5) = \{0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \pm 20, \dots\}$

33 Estamos en el sótano -2 de un aparcamiento. Subimos 7 plantas y bajamos 3. ¿En qué planta nos encontramos?

Solución:

$-2 + 7 - 3 = 7 - 5 = 2$
Estamos en el 2º piso.

Ejercicios y problemas

1. Divisibilidad

34 Completa con la palabra **múltiplo** o **divisor**:

- a) 8 es 4
- b) 7 es 49
- c) 5 es 35
- d) 72 es 9

Solución:

- a) múltiplo de
- b) divisor de
- c) divisor de
- d) múltiplo de

35 Calcula mentalmente todos los divisores de:

- a) 10 b) 11 c) 12 d) 13

Solución:

- a) $D(10) = \{1, 2, 5, 10\}$
- b) $D(11) = \{1, 11\}$
- c) $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
- d) $D(13) = \{1, 13\}$

36 Calcula mentalmente los cinco primeros múltiplos de:

- a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

Solución:

- a) 0, 6, 12, 18 y 24
- b) 0, 7, 14, 21 y 28
- c) 0, 8, 16, 24 y 32
- d) 0, 9, 18, 27 y 36

37 De los siguientes números:

12, 27, 36, 45, 60, 72

indica cuáles son múltiplos de:

- a) 2 b) 3 c) 5

Solución:

- a) Múltiplos de 2: 12, 36, 60 y 72
- b) Múltiplos de 3: 12, 27, 36, 45, 60 y 72
- c) Múltiplos de 5: 45 y 60

38 Clasifica los siguientes números en primos y compuestos: 15, 19, 36, 49, 52, 93

Solución:

Primos: 19

Compuestos: 15, 36, 49, 52, 93

39 Halla mentalmente la descomposición en factores primos de:

- a) 8 b) 9 c) 18 d) 49

Solución:

- a) 2^3 b) 3^2
- c) $2 \cdot 3^2$ d) 7^2

40 Halla la descomposición en factores primos de:

- a) 144 b) 150 c) 300 d) 588

Solución:

- a) $2^4 \cdot 3^2$ b) $2 \cdot 3 \cdot 5^2$
- c) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ d) $2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$

41 Halla la descomposición en factores primos de:

- a) 600 b) 1176 c) 900 d) 1512

Solución:

- a) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$
- b) $2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$
- c) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
- d) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$

2. M.C.D. y m.c.m.

42 Halla mentalmente:

- a) M.C.D.(4, 6) b) m.c.m.(4, 6)
- c) M.C.D.(8, 12) d) m.c.m.(8, 12)

Solución:

- a) 2 b) 12
- c) 4 d) 24

43 Halla mentalmente:

- a) M.C.D.(3, 6) b) m.c.m.(3, 6)
- c) M.C.D.(5, 6) d) m.c.m.(5, 6)

Solución:

- a) 3 b) 6
- c) 1 d) 30

Ejercicios y problemas

44 ¿Cuáles de los siguientes números son primos entre sí?

- a) 4 y 7 b) 6 y 9 c) 8 y 10 d) 13 y 14

Solución:

- a) M.C.D.(4, 7) = 1 \Rightarrow 4 y 7 son primos entre sí.
 b) M.C.D.(6, 9) = 3 \Rightarrow 6 y 9 no son primos entre sí.
 c) M.C.D.(8, 10) = 2 \Rightarrow 8 y 10 no son primos entre sí.
 d) M.C.D.(13, 14) = 1 \Rightarrow 13 y 14 son primos entre sí.

45 Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de:

- a) 124 y 360
 b) 600 y 1176

Solución:

- a) 4 y 11160
 b) 24 y 29400

46 Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de:

- a) 900 y 1200
 b) 1512 y 1575

Solución:

- a) 300 y 3600
 b) 63 y 37800

47 Aplicando el algoritmo de Euclides, halla:

- a) M.C.D.(72, 84)
 b) M.C.D.(264, 525)

Solución:

a)

	1	6
84	72	12
12	0	

M.C.D.(72, 84) = 12

b)

	1	1	87
525	264	261	3
261	3	0	

M.C.D.(264, 525) = 3

48 Aplicando el algoritmo de Euclides, halla:

- a) M.C.D.(175, 345) b) M.C.D.(126, 224)

Solución:

a)

	1	1	34
345	175	170	5
170	5	0	

M.C.D.(175, 345) = 5

b)

	1	1	3	2
224	126	98	28	14
98	28	14	0	

M.C.D.(126, 224) = 14

49 Aplicando el algoritmo de Euclides, halla el M.C.D.(186, 552), y, sin hacer la descomposición en factores primos, halla el m.c.m.(186, 552)

Solución:

	2	1	30
552	186	180	6
180	6	0	

M.C.D.(186, 552) = 6

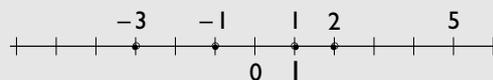
m.c.m.(186, 552) = $\frac{186 \cdot 552}{6} = 17112$

3. Los números enteros

50 Representa gráficamente los siguientes números enteros y ordénalos de menor a mayor:

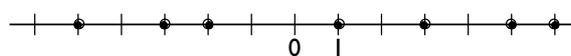
5, -3, 2, 1, -1

Solución:



$-3 < -1 < 1 < 2 < 5$

51 Halla los números enteros representados en la siguiente recta y ordénalos de menor a mayor:



Solución:

$-5 < -3 < -2 < 1 < 3 < 5 < 6$

52 Completa con signos diferentes los puntos suspensivos de cada apartado.

- a) $5 \dots -3$, $5 \dots -3$, $5 \dots -3$
 b) $-4 \dots -4$, $-4 \dots -4$, $-4 \dots -4$

Solución:

- a) $5 \geq -3$, $5 > -3$, $5 \neq -3$
 b) $-4 = -4$, $-4 \leq -4$, $-4 \geq -4$

53 Halla todos los números enteros que verifiquen:
 $-4 \leq x < 6$

Solución:

$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ y 5

54 Halla todos los números enteros que verifiquen:
 $-5 < x \leq 3$

Solución:

$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3

55 Halla el valor absoluto de los siguientes números enteros:

- a) $|-7|$ b) $|56|$ c) $|-543|$ d) $|1\ 500|$

Solución:

- a) 7 b) 56 c) 543 d) $1\ 500$

56 Halla y representa todos los números enteros que verifiquen:

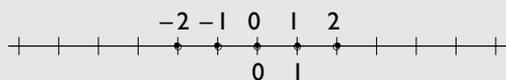
- a) $|x| = 3$ b) $|x| < 3$

Solución:

a) -3 y 3



b) $-2, -1, 0, 1$ y 2



57 ¿Con qué número entero representarías la siguiente situación? Estamos en la planta 3ª del sótano de un aparcamiento.

Solución:

-3

4. Operaciones con números enteros

58 Realiza las siguientes operaciones:

- a) $-5 - 6 + 7 - 3 + 8$ b) $3 + 5 - 9 + 1 - 8$

Solución:

- a) 1 b) -8

59 Realiza mentalmente las siguientes operaciones:

- a) $-8 \cdot 6$ b) $7 \cdot (-9)$
 c) $-48 : 6$ d) $-72 : (-9)$
 e) $-2 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 5$ f) $-900 : (-9) : 2 : (-5)$

Solución:

- a) -48 b) -63 c) -8
 d) 8 e) -300 f) -10

60 Realiza las siguientes operaciones:

- a) $5 \cdot (5 - 9) + 8 \cdot (-9) : 6$
 b) $18 : (9 - 7) - 5 \cdot (50 - 53)$

Solución:

- a) -32 b) 24

61 Comprueba la propiedad distributiva en:

- a) $7(-5 + 3)$ b) $-6(9 - 4)$

Solución:

- a) $7(-5 + 3) = 7 \cdot (-2) = -14$
 $7 \cdot (-5) + 7 \cdot 3 = -35 + 21 = -14$
 Ambos miembros dan -14
 b) $-6(9 - 4) = -6 \cdot 5 = -30$
 $-6 \cdot 9 - 6 \cdot (-4) = -54 + 24 = -30$
 Ambos miembros dan -30

62 Halla mentalmente todos los divisores enteros de:

- a) -5 b) 6 c) -9 d) 18

Solución:

- a) $D(-5) = \{\pm 1, \pm 5\}$
 b) $D(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$
 c) $D(-9) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$
 d) $D(18) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$

63 Halla todos los múltiplos enteros de:

- a) 6 b) -7 c) -8 d) 9

Ejercicios y problemas

Solución:

- a) $M(6) = \{0, \pm 6, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \dots\}$
- b) $M(-7) = \{0, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 28, \dots\}$
- c) $M(-8) = \{0, \pm 8, \pm 16, \pm 24, \pm 32, \dots\}$
- d) $M(9) = \{0, \pm 9, \pm 18, \pm 27, \pm 36, \dots\}$

- 64** Compramos un frigorífico. Cuando lo enchufamos a la red eléctrica está a la temperatura ambiente, que es de $25\text{ }^\circ\text{C}$. Si cada hora la temperatura baja $5\text{ }^\circ\text{C}$, ¿a qué temperatura estará al cabo de 6 horas?

Solución:

$$25 - 6 \cdot 5 = 25 - 30 = -5\text{ }^\circ\text{C}$$

Para ampliar

- 65** Escribe los diez primeros números primos.

Solución:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

- 66** Escribe los diez primeros números compuestos.

Solución:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18

- 67** Calcula mentalmente los divisores comunes de los siguientes pares de números:

- a) 4 y 6 b) 6 y 8 c) 4 y 12 d) 8 y 12

Solución:

- a) $D(4 \text{ y } 6) = \{1, 2\}$ b) $D(6 \text{ y } 8) = \{1, 2\}$
c) $D(4 \text{ y } 12) = \{1, 2, 4\}$ d) $D(8 \text{ y } 12) = \{1, 2, 4\}$

- 68** Calcula mentalmente los cuatro primeros múltiplos comunes y positivos de los siguientes pares de números:

- a) 4 y 6 b) 6 y 8 c) 4 y 12 d) 8 y 12

Solución:

- a) 0, 12, 24 y 36 b) 0, 24, 48 y 72
c) 0, 12, 24 y 36 d) 0, 24, 48 y 72

- 69** De los números comprendidos entre 90 y 100, excluidos ambos, halla cuáles son primos y cuáles compuestos.

Solución:

Primos: 97

Compuestos: 91, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 99

- 70** Halla el valor de la cifra x para que el número $45x$ sea divisible entre 2

Solución:

x puede ser 0, 2, 4, 6 u 8

- 71** Halla el valor de la cifra x para que el número $6x9$ sea divisible entre 3

Solución:

x puede ser 0, 3, 6 o 9

- 72** Halla el valor de la cifra x para que el número $52x$ sea divisible entre 5

Solución:

x puede ser 0 o 5

- 73** Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de:

- a) 50, 60 y 80 b) 600, 900 y 1 200

Solución:

- a) 10 y 1 200 b) 300 y 3 600

- 74** Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de:

- a) 300, 600 y 900 b) 96, 120 y 168

Solución:

- a) 300 y 1 800 b) 24 y 3 360

- 75** Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de:

- a) 1 176, 1 512 y 1 575 b) 400, 560 y 900

Solución:

- a) 21 y 264 600 b) 20 y 25 200

76 Dados los números 600 y 840, comprueba que el producto de su M.C.D. por su m.c.m. es igual al producto de ambos números.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{M.C.D.}(600, 840) &= 120 \\ \text{m.c.m.}(600, 840) &= 4\,200 \\ 120 \cdot 4\,200 &= 504\,000 \\ 600 \cdot 840 &= 504\,000 \end{aligned}$$

77 Escribe un número entero que no sea positivo ni negativo.

Solución:

El cero.

78 Escribe matemáticamente lo que reflejan los siguientes enunciados, calcula el resultado e inter-prétalo:

- a) Subí 5 plantas y luego he bajado 7 plantas.
- b) Tenía 12 € y he pagado 5 €

Solución:

- a) $5 - 7 = -2$
Significa que estamos en el 2º sótano.
- b) $12 - 5 = 7$ €
Significa que me quedan 7 €

79 Escribe dos números enteros distintos que tengan el mismo valor absoluto.

Solución:

Cualquier número entero y su opuesto, por ejemplo 5 y -5

80 Realiza las siguientes operaciones:

- a) $9 \cdot (15 - 8) + 6 \cdot (-9) : 3$
- b) $81 : (7 - 16) - 8 \cdot (80 - 100)$

Solución:

- a) 45
- b) 151

81 Realiza las siguientes operaciones:

- a) $-7 \cdot (-12 - 9) - 5 \cdot (-8) : 4$
- b) $72 : (9 - 17) + 11 \cdot (93 - 105)$

Solución:

- a) 157
- b) -141

82 Halla mentalmente el valor de x

- a) $-5 \cdot x = -40$
- b) $x \cdot 7 = -56$
- c) $42 : x = -6$
- d) $-72 : 8 = x$

Solución:

- a) $x = 8$
- b) $x = -8$
- c) $x = -7$
- d) $x = -9$

83 La altura de un trampolín de una piscina es de 5 m y, en el salto, el nadador desciende 3 m en el agua. Haz una escala graduada del salto.

Solución:



Con calculadora

84 Realiza las siguientes operaciones:

- a) $25 - 36 \cdot 54 - 286 : 13$
- b) $12(28 + 34 - 56)$

Solución:

- a) -1 941
- b) 72

85 Realiza las siguientes operaciones:

- a) $(23 - 44 \cdot 76) : 41$
- b) $(23 \cdot 15 - 56)(87 - 69)$

Solución:

- a) -81
- b) 5 202

Problemas

- 86** Calcula el número mínimo de páginas que debe tener un libro para que éste se pueda leer a razón de 15 páginas cada día, o bien 24 páginas cada día.

Solución:

$$\text{m.c.m.}(15, 24) = 120 \text{ páginas.}$$

- 87** Dados los números 900 y 1 890, comprueba que el producto de su M.C.D. por su m.c.m. es igual al producto de ambos números.

Solución:

$$\text{M.C.D.}(900, 1\ 890) = 90$$

$$\text{m.c.m.}(900, 1\ 890) = 18\ 900$$

$$90 \cdot 18\ 900 = 1\ 701\ 000$$

$$900 \cdot 1\ 890 = 1\ 701\ 000$$

- 88** Se sabe que el $\text{M.C.D.}(96, x) = 16$ y que el $\text{m.c.m.}(96, x) = 672$. Halla el valor de x

Solución:

$$16 \cdot 672 = 96x$$

$$x = 112$$

- 89** Antonio quiere poner el suelo de la cocina de losetas cuadradas del mayor tamaño posible. Si la cocina mide 4,4 m de largo por 3,2 m de ancho, ¿cuántos centímetros debe medir de lado la loseta?

Solución:

Se pasan las medidas a decímetros.

$$\text{M.C.D.}(44, 32) = 4 \text{ dm} = 40 \text{ cm}$$

- 90** ¿De cuántas formas se pueden plantar 36 pinos en un parque rectangular formando filas y columnas?

Solución:

$$D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Una fila de 36 pinos.

Dos filas de 18 pinos.

Tres filas de 12 pinos.

Cuatro filas de 9 pinos.

Seis filas de 6 pinos.

- 91** Pedro y Sonia son primos. Pedro visita a sus abuelos cada 28 días, y Sonia, cada 35 días. Si un determinado domingo coinciden, ¿cuánto tiempo tardarán en volver a coincidir?

Solución:

$$\text{m.c.m.}(28, 35) = 140 \text{ días.}$$

- 92** Los alumnos de 2° C trabajan de dos en dos en clase de Matemáticas, hacen los trabajos de Lengua en grupos de 4, y los trabajos de Tecnología, en grupos de 5. Si la clase tiene menos de 40 alumnos, ¿cuántos alumnos son en total?

Solución:

$$\text{m.c.m.}(2, 4, 5) = 20 \text{ alumnos.}$$

- 93** Se tienen dos cuerdas, una de 28 m y la otra de 32 m. Se quieren cortar en trozos iguales del mayor tamaño posible. Calcula:

- La longitud de cada trozo.
- El número total de trozos.

Solución:

a) $\text{M.C.D.}(28, 32) = 4 \text{ m}$ cada trozo.

b) $(28 + 32) : 4 = 15$ trozos.

- 94** El M.C.D. de dos números es 36, y su producto, 45 360. Halla el m.c.m. de ambos números.

Solución:

$$\text{m.c.m.}(a, b) = 45\ 360 : 36 = 1\ 260$$

- 95** Tenemos 550 litros de aceite de oliva y 445 litros de aceite de girasol, y queremos envasarlos en garrafas iguales y del mayor tamaño posible. Calcula:

- La capacidad de cada garrafa.
- El número de garrafas que se necesitan para envasar el aceite de oliva.
- El número de garrafas que se necesitan para envasar el aceite de girasol.

Solución:

a) $\text{M.C.D.}(550, 445) = 5$ litros.

b) $550 : 5 = 110$ garrafas.

c) $445 : 5 = 89$ garrafas.

96 Una finca que tiene forma rectangular mide de largo 255 m, y de ancho, 125 m. Se quieren plantar nogales lo más separados posible y a igual distancia. Calcula:

- a) A qué distancia se plantarán.
- b) Cuántos se plantarán.

Solución:

- a) M.C.D.(255, 125) = 5 m
- b) Cada nogal ocupará $5 \cdot 5 = 25 \text{ m}^2$
 $255 \cdot 125 : 25 = 1\,275$ nogales.

97 En una estación de esquí la temperatura más alta ha sido de $-2 \text{ }^\circ\text{C}$, y la más baja, de $-23 \text{ }^\circ\text{C}$. ¿Cuál ha sido la diferencia de temperaturas?

Solución:

$$-2 - (-23) = -2 + 23 = 21 \text{ }^\circ\text{C}$$

98 Un avión vuela a 11 000 m, y un submarino está a -850 m. ¿Cuál es la diferencia de alturas entre ambos?

Solución:

$$11\,000 - (-850) = 11\,000 + 850 = 11\,850 \text{ m}$$

99 Un frutero ha comprado 50 kg de manzanas a 1 €/kg, ha vendido 35 kg a 2 €/kg y el resto se ha estropeado. ¿Cuánto ha ganado?

Solución:

$$35 \cdot 2 - 50 \cdot 1 = 70 - 50 = 20 \text{ €}$$

Para profundizar

100 Pitágoras nació el año 585 a.C. y murió el año 495 a.C. ¿Cuántos años vivió?

Solución:

$$-495 - (-585) = -495 + 585 = 90 \text{ años.}$$

101 La cotización en bolsa de una empresa está a 34 €. Durante la semana se producen las siguientes variaciones: -2 € , 1 € , -1 € , 2 € , -1 € . ¿Cuál es la cotización final?

Solución:

$$34 - 2 + 1 - 1 + 2 - 1 = 33 \text{ €}$$

102 En la cuenta corriente del banco tenemos 1 250 €. Se paga el recibo de la luz, que vale 83 €; el recibo del teléfono, que vale 37 €, y dos cheques de gasolina de 40 € cada uno. ¿Cuánto dinero queda en la cuenta corriente?

Solución:

$$1\,250 - 83 - 37 - 2 \cdot 40 = 1\,050 \text{ €}$$

103 Una plataforma petrolífera tiene 23 m sobre el nivel del mar, y desciende 350 m. Halla la altura de la plataforma.

Solución:

$$23 - (-350) = 23 + 350 = 373 \text{ m}$$

104 En una calle de una urbanización se quieren colocar farolas. Si se sitúan cada 12 m, cada 18 m o cada 25 m, coinciden una al principio y otra al final. ¿Cuál es la longitud mínima de la calle? ¿Cuántas farolas se necesitarán en cada caso?

Solución:

$$\text{m.c.m.}(12, 18, 25) = 900 \text{ m}$$

Si se colocan cada 12 m se necesitan:

$$900 : 12 = 75 \text{ farolas.}$$

Si se colocan cada 18 m se necesitan:

$$900 : 18 = 50 \text{ farolas.}$$

Si se colocan cada 25 m se necesitan:

$$900 : 25 = 36 \text{ farolas.}$$

105 En una sala de fiestas hay luces rojas, verdes y azules. Cuando se abre el local se encienden todas al mismo tiempo. Luego, las rojas se encienden cada 4 s; las verdes, cada 6 s, y las azules, cada 5 s. ¿Cuánto tiempo tardarán en volver a coincidir?

Solución:

$$\text{m.c.m.}(4, 6, 5) = 60 \text{ segundos} = 1 \text{ minuto.}$$

Pagos del IVA trimestrales

106 En su declaración del IVA trimestral, una empresa tiene: 1^{er} trimestre, 15 285 €; 2^o trimestre, -2 870 €; 3^{er} trimestre, -23 450 €; y 4^o trimestre, 35 645 €. Halla el resultado final anual del IVA.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

107 En su declaración del IVA trimestral, una empresa tiene: 1^{er} trimestre, 7 834 €; 2^o trimestre, -14 765 €; 3^{er} trimestre, -45 890 €; y 4^o trimestre, 234 500 €. Halla el resultado final anual del IVA.

Solución:

IVA anual:

$$7\,834 - 14\,765 - 45\,890 + 234\,500 = 181\,679 \text{ €}$$

108 En su declaración del IVA trimestral, una empresa tiene: 1^{er} trimestre, -2 523 €; 2^o trimestre, 8 750 €; 3^{er} trimestre, -83 650 €; y 4^o trimestre, 25 876 €. Halla el resultado final anual del IVA.

Solución:

IVA anual:

$$-2\,523 + 8\,750 - 83\,650 + 25\,876 = -51\,547 \text{ €}$$

Comprueba lo que sabes

- 1** Define cuándo un número es primo y pon un ejemplo.

Solución:

Un número es primo si solo tiene exactamente dos divisores: el 1 y él mismo.

Ejemplos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

- 2** Calcula:

a) M.C.D.(540, 630) b) m.c.m.(540, 630)

Solución:

a) 90 b) 3 780

- 3** Calcula el M.C.D. de 258 y de 72 aplicando el algoritmo de Euclides, y después, halla su m.c.m. sin hacer la descomposición en factores primos.

Solución:

	3	1	1	2	2
258	72	42	30	12	6
42	30	12	6	0	

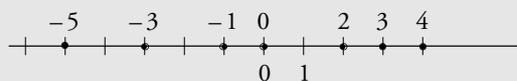
M.C.D.(258, 72) = 6

m.c.m.(252, 72) = $258 \cdot 72 : 6 = 3 096$

- 4** Representa gráficamente los siguientes números enteros y ordénalos de menor a mayor:

3, -5, 4, -1, 0, 2, -3

Solución:

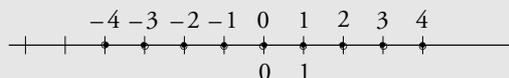


$-5 < -3 < -1 < 0 < 2 < 3 < 4$

- 5** Halla y representa gráficamente todos los números enteros que verifiquen:

$$-4 \leq x < 5$$

Solución:



-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4

- 6** Realiza las siguientes operaciones:

a) $-4(6 - 5) + 6 \cdot (-8) : 4$

b) $24 : (5 - 11) - 3(25 - 30)$

Solución:

a) -16

b) 11

- 7** Compramos un frigorífico. Cuando lo enchufamos a la red eléctrica está a la temperatura ambiente, que es de 25 °C. Si cada hora la temperatura baja 5 °C, ¿a qué temperatura estará al cabo de 6 horas?

Solución:

$$25 - 6 \cdot 5 = 25 - 30 = -5 \text{ °C}$$

- 8** En un determinado día han recogido en una granja 510 huevos de clase extra y 690 de clase normal. Si se quieren colocar en cartones iguales que contengan el mayor número posible de huevos, ¿cuántos huevos se pondrán en cada cartón?

Solución:

M.C.D.(510, 690) = 30 huevos.

Paso a paso

109 Haz la descomposición en factores primos de:
3 600

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

110 Halla todos los divisores de:
18

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

111 Halla el M.C.D. de:
504 y 720

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

112 Halla el m.c.m. de:
504 y 720

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

113 Calcula:
 $5(7 - 4) + 9 \cdot 4 : 6$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE.

114 Comprueba si el número 503 es primo o compuesto.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

115 Dos barcos salen del puerto de Cádiz. Uno vuelve al puerto cada 18 días, y el otro, cada 24 días. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que vuelvan a encontrarse?

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

116 En su declaración del IVA trimestral, una empresa tiene: 1^{er} trimestre, 15 285 €; 2^o trimestre, -2 870 €; 3^{er} trimestre, -23 450 €; y 4^o trimestre, 35 645 €. Halla el resultado final anual del IVA.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

117 **Internet.** Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso** y **tema**.

Practica

118 Haz la descomposición en factores primos de:
a) 900 b) 1 200
c) 1 176 d) 1 575

Solución:

- a) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
b) $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$
c) $2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$
d) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

119 Halla todos los divisores de:
a) 12 b) 18
c) 24 d) 32

Solución:

- a) $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
b) $D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
c) $D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
d) $D(32) = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$

120 Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de:

- a) 600 y 1 176
- b) 504 y 792
- c) 900 y 1200
- d) 1 512 y 1 575

Solución:

- a) 24 y 29 400
- b) 72 y 5 544
- c) 300 y 3 600
- d) 63 y 37 800

121 Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de:

- a) 96, 120 y 168
- b) 400, 560 y 900

Solución:

- a) 24 y 3 360
- b) 20 y 25 200

122 Calcula:

- a) $57 \cdot (-483) + 85 939$
- b) $-19 278 : 567 - 123$
- c) $43(-546 + 845) - 12 500$
- d) $(234 - 567)(8 459 - 15 346)$

Solución:

- a) 58 408
- b) -157
- c) 357
- d) 2 293 371

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

123 ¿Cuáles de los siguientes números son primos? ¿Cuáles son compuestos?

- a) 87
- b) 103
- c) 957
- d) 1 553

Solución:

- a) $D(87) = \{1, 3, 29, 87\} \Rightarrow 87$ es compuesto.
- b) $D(103) = \{1, 103\} \Rightarrow 103$ es primo.
- c) $D(957) = \{1, 3, 11, 29, 33, 87, 319, 957\} \Rightarrow 957$ es compuesto.
- d) $D(1 553) = \{1, 1 553\} \Rightarrow 1 553$ es primo.

124 En una autopista se coloca un teléfono de emergencia cada 2 400 m. Si al principio de la autopista coincide un mojón kilométrico con un teléfono, ¿cada qué distancia coincidirá un teléfono con un mojón?

Solución:

$$\text{m.c.m.}(2 400, 1 000) = 12 000 \text{ m} = 12 \text{ km}$$

125 Hemos ido al mercado con 100 €. Si en la pescadería hemos pagado 23 €; en la carnicería, 35 €; y en la frutería, 17 €, ¿cuánto nos ha sobrado?

Solución:

$$100 - (23 + 35 + 17) = 25 \text{ €}$$



1. Operaciones con fracciones

PIENSA Y CALCULA

Realiza mentalmente las siguientes operaciones:

a) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$

b) $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}$

c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$

Solución:

a) $\frac{5}{7}$

b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{10}{21}$

Carné calculista 215 455 : 56 | C = 3 847; R = 23

APLICA LA TEORÍA

1 Calcula mentalmente:

a) $\frac{1}{2} + 1$

b) $2 - \frac{1}{3}$

c) $2 \cdot \frac{3}{5}$

Solución:

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{5}{3}$

c) $\frac{6}{5}$

2 Halla las fracciones opuestas y las fracciones inversas de:

$$\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$$

Solución:

Fracciones opuestas: $-2/3, 4/5, -1/2, 1/3$

Fracciones inversas: $3/2, -5/4, 2, -3$

3 Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{1}{3} - \frac{5}{6} + \frac{3}{2}$

b) $\frac{7}{9} + \frac{11}{12} - \frac{5}{6}$

c) $\frac{3}{8} - 2 + \frac{5}{6}$

d) $\frac{2}{35} + \frac{8}{7} - \frac{3}{10}$

Solución:

a) 1

b) $31/36$

c) $-19/24$

d) $9/10$

4 Calcula:

a) $\frac{2}{9} \cdot \frac{15}{4}$

b) $5 \cdot \frac{3}{25}$

c) $\frac{7}{12} : \frac{3}{4}$

d) $\frac{14}{5} : 28$

Solución:

a) $5/6$

b) $3/5$

c) $7/9$

d) $1/10$

5 Realiza las siguientes operaciones:

a) $3 - \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{3}\right)$

b) $1 - \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{5}\right)$

c) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{9}\right)$

d) $\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right) : \frac{3}{4}$

Solución:

a) $13/12$

b) $9/10$

c) $14/27$

d) $1/6$

6 El depósito de gasolina de un coche, con capacidad para 80 litros, tiene lleno las $\frac{2}{5}$ partes. ¿Cuántos litros de gasolina lleva?

Solución:

$$\text{Litros de gasolina: } \frac{2}{5} \cdot 80 = 32 \text{ litros.}$$

7 Se quieren envasar 600 litros de alcohol en botellas de $\frac{3}{4}$ de litro. ¿Cuántas se necesitarán?

Solución:

Nº de botellas:

$$600 : \frac{3}{4} = 600 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2400}{3} = 800 \text{ botellas.}$$

2. Operaciones con números decimales

PIENSA Y CALCULA

Plantea y resuelve mentalmente las siguientes situaciones:

- a) Se tienen 4,8 kg de patatas y se han consumido 2,5 kg. ¿Cuántos kilos quedan?
b) En 100 cajas de 0,5 kg de bombones cada una, ¿cuántos kilos de bombones hay?

Solución:

a) $4,8 - 2,5 = 2,3 \text{ kg}$

b) $100 \cdot 0,5 = 50 \text{ kg}$

Carné calculista 299 234 : 83 | C = 3 605; R = 19

APLICA LA TEORÍA

8 Realiza las siguientes sumas:

a) $24,57 + 31,85 + 7,846$

b) $4,78 + 0,57 + 18,462$

Solución:

a) 64,266

b) 23,812

9 Haz las siguientes restas:

a) $134,58 - 30,485$

b) $458,7 - 95,58$

Solución:

a) 104,095

b) 363,12

10 Multiplica los siguientes números decimales:

a) $5,24 \cdot 3,2$

b) $21,42 \cdot 5,4$

c) $85,6 \cdot 32,5$

d) $4,7 \cdot 0,02$

Solución:

a) 16,768

b) 115,668

c) 2782

d) 0,094

11 Realiza mentalmente las siguientes multiplicaciones:

a) $7,45 \cdot 100$

b) $20,142 \cdot 1000$

c) $75,6 \cdot 0,01$

d) $14,8 \cdot 0,001$

Solución:

a) 745

b) 20 142

c) 0,756

d) 0,0148

12 Haz las siguientes divisiones obteniendo dos decimales:

a) $85,24 : 7$

b) $23,45 : 6,9$

c) $57,62 : 8,51$

d) $5,7 : 0,09$

Solución:

a) 12,17

b) 3,39

c) 6,77

d) 63,33

13 Divide mentalmente los siguientes números:

a) $243,5 : 100$

b) $43,12 : 1000$

c) $7,516 : 0,01$

d) $34,6 : 0,001$

Solución:

a) 2,435

b) 0,04312

c) 751,6

d) 34 600

14 En un depósito que tiene 457,85 hl, se vierten 89,54 hl y se desaguan 12,3 hl. ¿Cuántos hectolitros quedan en el depósito?

Solución:

$$457,85 + 89,54 - 12,3 = 535,09 \text{ hl}$$

15 En un almacén han comprado 254,5 kg de lengüado a 5,79 € el kilo. ¿Cuánto se ha pagado por el lengüado?

Solución:

$$254,5 \cdot 5,79 = 1\,473,56 \text{ €}$$

16 Se dispone de 450 kg de mandarinas y se quieren envasar en bolsas de 7,5 kg. ¿Cuántas bolsas se necesitarán?

Solución:

$$450 : 7,5 = 60 \text{ bolsas.}$$

3. Fracciones y números decimales

PIENSA Y CALCULA

Haz la división decimal y di cuántas cifras decimales significativas puedes sacar en el cociente.

a) $12 : 3$

b) $14 : 10$

c) $17 : 3$

d) $13 : 6$

Solución:

- a) 4 No se obtienen cifras decimales.
- b) 1,4 Se obtiene una cifra decimal significativa.
- c) 5,666... Se obtienen infinitas cifras decimales significativas.
- d) 2,1666... Se obtienen infinitas cifras decimales significativas.

Carné calculista 304 491 : 79 | C = 3 854; R = 25

APLICA LA TEORÍA

17 Calcula mentalmente la expresión decimal de las siguientes fracciones:

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{3}{4}$

Solución:

- a) 1,5 b) 0,2 c) 0,25 d) 0,75

18 Clasifica en fracciones ordinarias o decimales las siguientes fracciones:

a) $\frac{12}{5}$

b) $\frac{7}{20}$

c) $\frac{11}{9}$

d) $\frac{5}{6}$

Solución:

- a) El denominador solo tiene como factor el 5 \Rightarrow Fracción decimal.
- b) El denominador solo tiene como factores el 2 y el 5 \Rightarrow Fracción decimal.
- c) El denominador tiene como factor el 3 \Rightarrow Fracción ordinaria.
- d) El denominador tiene como factores el 2 y el 3 \Rightarrow Fracción ordinaria.

19 Halla las expresiones decimales de las siguientes fracciones y clasifica el cociente obtenido:

a) $\frac{10}{3}$

b) $\frac{86}{15}$

c) $\frac{12}{4}$

d) $\frac{47}{20}$

Solución:

- a) $3,33... = 3,\widehat{3}$ Número decimal periódico puro.
- b) $5,7333... = 5,7\widehat{3}$ Número decimal periódico mixto.
- c) 3 Número entero.
- d) 2,35 Número decimal exacto.

20 Redondea a dos cifras decimales los siguientes números y di si la aproximación es por defecto o por exceso:

- a) 3,4272 b) 0,3629 c) 1,2071 d) 2,0982

Solución:

- a) $3,4272 = 3,43$ por exceso.
- b) $0,3629 = 0,36$ por defecto.
- c) $1,2071 = 1,21$ por exceso.
- d) $2,0982 = 2,10$ por exceso.

Ejercicios y problemas

1. Operaciones con fracciones

29 Calcula mentalmente:

a) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{1}{7}$ b) $\frac{3}{13} + \frac{4}{13} + \frac{5}{13}$

Solución:

a) 6/7 b) 12/13

30 Calcula mentalmente:

a) $\frac{18}{53} + \frac{32}{53} - \frac{1}{53} - \frac{16}{53}$
b) $\frac{4}{11} - \frac{3}{11} + \frac{2}{11} - \frac{7}{11}$

Solución:

a) 33/53 b) -4/11

31 Calcula:

a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$ b) $\frac{4}{5} + \frac{3}{10}$
c) $\frac{7}{6} - \frac{3}{8}$ d) $\frac{7}{10} - \frac{2}{15}$

Solución:

a) 3/2 b) 11/10
c) 19/24 d) 17/30

32 Calcula:

a) $\frac{2}{3} + 4 - \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \frac{7}{10}$
c) $\frac{1}{8} + \frac{11}{16} - \frac{7}{4}$ d) $\frac{4}{15} + 1 - \frac{2}{5}$

Solución:

a) 25/6 b) 3/5
c) -15/16 d) 13/15

33 Realiza mentalmente las siguientes operaciones:

a) $1 + \frac{3}{4}$ b) $2 + \frac{3}{7}$ c) $2 - \frac{3}{5}$ d) $1 - \frac{7}{10}$

Solución:

a) 7/4 b) 17/7
c) 7/5 d) 3/10

34 Calcula mentalmente:

a) $\frac{4}{7} + 1$ b) $\frac{2}{9} + 3$
c) $\frac{12}{5} - 1$ d) $\frac{3}{11} - 2$

Solución:

a) 11/7 b) 29/9
c) 7/5 d) -19/11

35 Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{8} + 2 - \frac{2}{3}$
c) $2 - \frac{1}{4} + \frac{7}{9}$ d) $\frac{5}{3} + \frac{1}{2} - \frac{7}{12}$

Solución:

a) 0 b) 47/24
c) 91/36 d) 19/12

36 Multiplica:

a) $\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{7}$ b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{5}$
c) $\frac{8}{11} \cdot \frac{3}{4}$ d) $\frac{7}{2} \cdot \frac{3}{14}$

Solución:

a) 4/7 b) 6/5
c) 6/11 d) 3/4

37 Calcula mentalmente:

a) $\frac{3}{7} \cdot 21$ b) $\frac{2}{3} \cdot 30$ c) $54 \cdot \frac{1}{9}$ d) $60 \cdot \frac{2}{5}$

Solución:

a) 9 b) 20
c) 6 d) 24

38 Calcula:

a) $\frac{2}{5} \cdot 4 \cdot \frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3$
c) $5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{7}$ d) $\frac{3}{8} \cdot 2 \cdot \frac{4}{5}$

Solución:

a) 8/15 b) 15/4
c) 5/14 d) 3/5

39 Calcula:

a) $\frac{3}{5} : \frac{7}{10}$

b) $\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$

c) $\frac{1}{9} : \frac{5}{8}$

d) $\frac{8}{9} : \frac{4}{3}$

Solución:

a) 6/7

b) 4/5

c) 8/45

d) 2/3

40 Efectúa:

a) $\frac{2}{5} : 6$

b) $\frac{6}{7} : 3$

c) $3 : \frac{6}{7}$

d) $2 : \frac{5}{18}$

Solución:

a) 1/15

b) 2/7

c) 7/2

d) 36/5

41 Calcula:

a) $\frac{2}{3} : 4 : \frac{1}{3}$

b) $\frac{3}{2} : \frac{5}{2} : 6$

c) $5 : \frac{1}{4} : \frac{10}{7}$

d) $\frac{3}{8} : 6 : \frac{5}{2}$

Solución:

a) 1/2

b) 1/10

c) 14

d) 1/40

42 Calcula:

a) $\left(\frac{2}{5} - 1\right) \cdot \frac{5}{3}$

b) $\left(\frac{4}{5} - 2\right) \cdot \left(\frac{7}{4} - \frac{5}{6}\right)$

c) $\left(\frac{4}{3} - 2\right) \cdot \frac{3}{10}$

d) $\left(2 - \frac{7}{6}\right) \cdot \left(4 - \frac{7}{3}\right)$

Solución:

a) -1

b) -11/10

c) -1/5

d) 25/18

43 Calcula:

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{8} : \frac{5}{4}$

b) $\frac{5}{6} : \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2}$

c) $\frac{3}{4} : \frac{6}{5} - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}$

d) $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{4} : \frac{3}{8}$

Solución:

a) -1/5

b) 23/5

c) -5/4

d) 4/5

44 Calcula:

a) $\left(\frac{2}{5} - 1\right) : \frac{3}{5}$

b) $\left(\frac{4}{5} - 2\right) : \left(3 - \frac{4}{5}\right)$

c) $\left(\frac{4}{3} - 2\right) : \frac{5}{3}$

d) $\left(2 - \frac{7}{6}\right) : \left(1 + \frac{2}{3}\right)$

Solución:

a) -1

b) -6/11

c) -2/5

d) 1/2

45 Calcula:

a) $\frac{7}{5} : \frac{7}{10} - \frac{5}{6} : \frac{1}{4}$

b) $\frac{7}{12} \cdot \frac{6}{5} + \frac{3}{4} : \frac{5}{8}$

c) $\frac{2}{7} : \frac{5}{21} - \frac{4}{7} \cdot \frac{14}{3}$

d) $\frac{11}{7} \cdot \frac{5}{21} + \frac{1}{2} : \frac{3}{4}$

Solución:

a) -4/3

b) 19/10

c) -22/15

d) 51/49

46 Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{5}{6} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)$

b) $2 - \frac{3}{7} + \frac{2}{5}$

c) $3 - \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{9} - \frac{5}{3}\right)$

d) $\frac{2}{3} - \frac{5}{2} + \frac{4}{15} + 2$

Solución:

a) 1

b) 69/35

c) 34/9

d) 13/30

47 Realiza las siguientes operaciones:

a) $5 - \left(\frac{7}{6} + \frac{3}{2}\right)$

b) $\frac{2}{3} - \left(\frac{4}{5} + 1\right)$

c) $\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{6}{7} - \frac{3}{2}\right)$

d) $\frac{1}{2} - \frac{5}{6} : \frac{2}{3}$

Solución:

a) 7/3

b) -17/15

c) -6/7

d) -3/4

Ejercicios y problemas

48 Calcula:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) : \frac{2}{15} & \text{b) } \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{2}\right) \\ \text{c) } \frac{1}{3} : \left(\frac{5}{7} - \frac{2}{3}\right) & \text{d) } \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{6}\right) : \frac{2}{3} \end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 11/2 & \text{b) } 23/15 \\ \text{c) } 7 & \text{d) } 1 \end{array}$$

49 Efectúa:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left(\frac{7}{4} + \frac{5}{8}\right) \cdot \left(\frac{3}{5} + 1\right) & \text{b) } \left(\frac{2}{3} + 1\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) \\ \text{c) } \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{5}{12} - \frac{2}{3}\right) & \text{d) } \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) : \left(1 - \frac{5}{8}\right) \end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 19/5 & \text{b) } -4/9 \\ \text{c) } 2/3 & \text{d) } 2/3 \end{array}$$

50 Realiza las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{1}{4} + 5 - \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{2}\right) & \text{b) } 3 - \left(\frac{5}{6} - 2\right) + \frac{2}{3} \\ \text{c) } \frac{1}{2} : \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10}\right) & \text{d) } 3 - \left(\frac{5}{2} - \frac{7}{4}\right) : \frac{3}{2} \end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 25/8 & \text{b) } 29/6 \\ \text{c) } 5 & \text{d) } 5/2 \end{array}$$

51 Calcula:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left(\frac{7}{3} + 3\right) \cdot \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{2}\right) : \frac{8}{3} \\ \text{b) } 4 + \left(5 + \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{5}{6} - 2\right) \\ \text{c) } \frac{2}{5} - \frac{1}{2} : \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{6}\right) \\ \text{d) } \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{3}{8} : \frac{5}{4} \end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 11/2 & \text{b) } -6/7 \\ \text{c) } -3/5 & \text{d) } 1/6 \end{array}$$

52 Calcula:

$$\text{a) } \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{7} - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{6}{5}\right)$$

$$\text{b) } \frac{7}{2} + \left(2 + \frac{5}{3}\right) : \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{4}\right)$$

$$\text{c) } \frac{7}{5} - 2 : \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right)$$

$$\text{d) } 2 + \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{7} - \frac{3}{4} : \frac{7}{8}$$

Solución:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } -1/5 & \text{b) } -1/2 \\ \text{c) } -2/5 & \text{d) } 10/7 \end{array}$$

53 Calcula:

$$\text{a) } \left(2 + \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{2}\right) + \frac{9}{8}$$

$$\text{b) } 3 : \left(\frac{5}{2} - \frac{7}{6}\right) + \frac{3}{4} - \left(\frac{5}{3} - 2\right)$$

$$\text{c) } \frac{7}{5} : 14 + \frac{5}{8} : \left(\frac{7}{4} - \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{d) } \frac{7}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} + \frac{3}{4} : \frac{5}{8}$$

Solución:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 3/32 & \text{b) } 10/3 \\ \text{c) } 13/5 & \text{d) } 11/5 \end{array}$$

54 Calcula:

$$\text{a) } \left(2 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{7}{3}\right) : \frac{5}{4}$$

$$\text{b) } \frac{3}{4} : \left(2 - \frac{7}{6}\right) - \left(\frac{8}{5} - \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{c) } \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} + \frac{7}{2} : \left(\frac{5}{4} - 3\right)$$

$$\text{d) } 2 - \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{4} + \frac{8}{15} : \frac{4}{3}$$

Solución:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 7/30 & \text{b) } 4/5 \\ \text{c) } -4/3 & \text{d) } 13/20 \end{array}$$

55 Calcula:

$$\text{a) } \frac{3}{8} : \left(\frac{5}{4} + 2\right) \cdot \left(\frac{13}{6} - \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{b) } \frac{2}{9} + \left(2 - \frac{4}{3}\right) : \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{4}\right)$$

Ejercicios y problemas

- 65** Se han comprado 1,7 kg de pollo que han costado 3,57 €. ¿Cuánto cuesta el kilo?

Solución:

$$3,57 : 1,7 = 2,1 \text{ €/kg}$$

3. Fracciones y números decimales

- 66** Clasifica en fracciones ordinarias o decimales las siguientes fracciones:

a) $\frac{47}{50}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{2}{15}$ d) $\frac{3}{10}$

Solución:

- a) El denominador solo tiene como factores el 2 y el 5 \Rightarrow Fracción decimal.
b) El denominador tiene como factor el 7 \Rightarrow Fracción ordinaria.
c) El denominador tiene como factores el 3 y el 5 \Rightarrow Fracción ordinaria.
d) El denominador solo tiene como factores el 2 y el 5 \Rightarrow Fracción decimal.

- 67** Halla las expresiones decimales de las siguientes fracciones y clasifica el cociente obtenido:

a) $\frac{13}{6}$ b) $\frac{72}{9}$ c) $\frac{41}{9}$ d) $\frac{56}{45}$

Solución:

- a) $2,1\overline{6}$... Número decimal periódico mixto.
b) 8 Número entero.
c) $4,5$ Número decimal periódico puro.
d) $1,2\overline{4}$ Número decimal periódico mixto.

- 68** Redondea a dos cifras decimales los siguientes números y di si la aproximación es por defecto o por exceso:

a) 0,4752 b) 5,7236 c) 72,995
d) 3,0274 e) 8,4062 f) 5,2997

Solución:

- a) 0,48 por exceso.
b) 5,72 por defecto.
c) 73 por exceso.
d) 3,03 por exceso.
e) 8,41 por exceso.
f) 5,30 por exceso.

- 69** Haz una estimación de las siguientes operaciones:
a) $139,8 \cdot 9,5$ b) $360,4 : 89,7$

Solución:

a) $140 \cdot 10 = 1400$ b) $360 : 90 = 4$

- 70** El área de un rectángulo mide $14,45 \text{ m}^2$ y su altura mide 4,52 m. Calcula la longitud de la base y redondea el resultado a centímetros.

Solución:

$$14,45 : 4,52 = 3,1969 \text{ cm} = 3,20 \text{ cm}$$

4. Fracción generatriz

- 71** Expresa en forma de fracción los siguientes números decimales:

a) 5,8 b) 0,05 c) 3,125

Solución:

a) $\frac{58}{10} = \frac{29}{5}$ b) $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

c) $\frac{3125}{1000} = \frac{125}{4}$

- 72** Escribe las fracciones generatrices de los siguientes números decimales:

a) $0,5$ b) $3,\overline{7}$ c) $6,8\overline{1}$

Solución:

a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{34}{9}$ c) $\frac{75}{11}$

- 73** Escribe las fracciones generatrices de los siguientes números decimales:

a) $0,6\overline{4}$ b) $1,7\overline{6}$ c) $2,068\overline{1}$

Solución:

a) $\frac{29}{45}$ b) $\frac{53}{30}$ c) $\frac{91}{44}$

- 74** Expresa en forma de fracción y calcula:

a) $2,5 - 0,2 \cdot 0,4$ b) $4,\overline{7} - 0,\overline{5}$

Solución:

a) $\frac{25}{10} - \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{5}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{121}{50}$

b) $\frac{43}{9} - \frac{5}{9} = \frac{38}{9}$

Para ampliar

75 Calcula:

a) $1 - \frac{3}{5} + \frac{1}{2}$

b) $4 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$

Solución:

a) 9/10

b) 25/6

76 Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{7}{6} - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)$

b) $3 - \frac{5}{2} + \frac{4}{5}$

c) $5 - \frac{4}{3} - \left(\frac{7}{9} + \frac{5}{3}\right)$

d) $\frac{7}{3} + \frac{3}{2} - \frac{4}{15} - 3$

Solución:

a) 0

b) 13/10

c) 11/9

d) 17/30

77 Calcula:

a) $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2}$

b) $2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{4} : \frac{1}{8} : 2$

d) $15 : \frac{5}{4} : \frac{2}{3}$

Solución:

a) 5/9

b) 1/3

c) 3

d) 18

78 Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{5}{4} + 2 - \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{2}\right)$

b) $2 + \frac{2}{3} - \left(\frac{4}{5} - 1\right)$

c) $\frac{1}{2} : \left(\frac{3}{5} - \frac{7}{10}\right)$

d) $2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right) : \frac{3}{2}$

Solución:

a) 3/8

b) 43/15

c) -5

d) 19/6

79 Calcula:

a) $\left(\frac{2}{3} + 1\right) \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\right)$

b) $\left(\frac{9}{4} + \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{11}{6} - 3\right)$

c) $\frac{3}{5} + \frac{3}{2} : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)$

d) $\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{3}{4} : \frac{9}{2}$

Solución:

a) 15/4

b) -5/2

c) 18/5

d) 2/3

80 Un edificio tiene 8 pisos más una planta baja de local comercial. Estima la altura total del edificio si la de cada piso es de 3,2 m y la del local comercial es de 3,7 m

Solución:

$$8 \cdot 3 + 4 = 28 \text{ m}$$

81 Hemos comprado acciones de una empresa a 10,45 € cada acción. Si la compra ha sido por valor de 9927,5 €, ¿cuántas acciones hemos comprado?

Solución:

$$9927,5 : 10,45 = 950 \text{ acciones.}$$

82 Una parcela mide 45 m por 235 m. Si el metro cuadrado cuesta 0,75 €, ¿cuánto se pagará por la parcela?

Solución:

$$45 \cdot 235 \cdot 0,75 = 7931,25 \text{ €}$$

83 Sabiendo que la fracción generatriz del número decimal $0,\overline{3}$ es $1/3$, calcula las fracciones generatrices de los siguientes números decimales:

a) $2,\overline{3}$

b) $0,0\overline{3}$

c) $4,0\overline{3}$

Solución:

a) $2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

b) $\frac{1}{3} : 10 = \frac{1}{30}$

c) $4 + \frac{1}{3} : 10 = \frac{121}{30}$

Ejercicios y problemas

84 Expresa en forma de fracción y calcula:

a) $7,4 - 1,2 : 3,4$ b) $1,4\overline{6} - 0,2\overline{3}$

Solución:

a) $\frac{74}{10} - \frac{12}{10} : \frac{34}{10} = \frac{37}{5} - \frac{6}{5} : \frac{17}{5} = \frac{599}{85}$

b) $\frac{132}{90} - \frac{21}{90} = \frac{22}{15} - \frac{7}{30} = \frac{37}{30}$

85 Utilizando el valor de $\pi = 3,14$, calcula la longitud de una circunferencia de 4,7 m de radio y redondea el resultado a centímetros.

Solución:

Longitud = $2\pi R$

Longitud = $2 \cdot 3,14 \cdot 4,7 = 29,516 \text{ m} = 2952 \text{ cm}$

86 Se quiere solar con losetas una habitación de 4,62 m de largo por 3,45 m de ancho. ¿Cuántos metros cuadrados de losetas harán falta? Redondea el resultado a metros cuadrados.

Solución:

Superficie: $4,62 \cdot 3,45 = 15,939 \text{ m}^2 = 16 \text{ m}^2$

87 Se han comprado 2 bolígrafos a 0,6 € cada uno, 4 cuadernos a 1,3 € cada uno y un archivador a 5,8 €. Haz una estimación del dinero pagado.

Solución:

Se paga: $2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 6 = 12 \text{ €}$

Con calculadora

88 Calcula:

a) $\frac{7}{6} - 3 + \frac{4}{15}$ b) $\frac{25}{36} + \frac{14}{9} - 2$

c) $\frac{18}{35} \cdot \frac{14}{27}$ d) $\frac{75}{16} : \frac{21}{8}$

Solución:

a) $-47/30$

b) $1/4$

c) $4/15$

d) $25/14$

89 Calcula:

a) $\frac{3}{16} + \frac{25}{32} \cdot \frac{4}{15}$ b) $\frac{95}{36} : \frac{4}{3} - \frac{5}{6}$

c) $\frac{4}{5} : \left(-2 + \frac{7}{25}\right)$ d) $\left(\frac{5}{8} - 5\right) : \frac{13}{16}$

Solución:

a) $19/48$

b) $55/48$

c) $-20/43$

d) $-70/13$

90 Calcula:

a) $\left(1 - \frac{16}{7}\right) \cdot \left(2 - \frac{20}{9}\right)$

b) $\left(\frac{13}{50} - \frac{11}{25}\right) : \left(1 - \frac{6}{25}\right)$

Solución:

a) $2/7$

b) $-9/38$

Problemas

91 Rubén y Marta tienen el mismo dinero ahorrado. Rubén se ha gastado dos tercios, y Marta, cinco séptimos. Ordena de menor a mayor el dinero que les queda ahorrado.

Solución:

A Rubén le queda: $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = 0,33$

A Marta le queda: $1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7} = 0,29$

$\frac{2}{7} < \frac{1}{3} \Rightarrow$ A Marta le queda menos que a Rubén.

92 Una grúa está elevando $5/7$ de los 224 kg que puede elevar como máximo. ¿Cuántos kilos está elevando?

Solución:

$\frac{5}{7} \cdot 224 = 160 \text{ kg}$

93 Un rectángulo tiene de altura $\frac{3}{5}$ de la longitud de la base. Si ésta mide 25 cm, ¿cuál es el área del rectángulo?

Solución:

$$\text{Altura} = \frac{3}{5} \cdot 25 = 15 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = 25 \cdot 15 = 375 \text{ cm}^2$$

94 En un centro escolar hay 657 estudiantes. Si el número de chicos es $\frac{4}{9}$ del total, ¿cuántos chicos y cuántas chicas hay en el centro?

Solución:

$$\text{N}^\circ \text{ de chicos} = \frac{4}{9} \cdot 657 = 292$$

$$\text{N}^\circ \text{ de chicas} = 657 - 292 = 365$$

95 Si he leído los $\frac{6}{7}$ de las 252 páginas de un libro, y después leo los $\frac{2}{3}$ de las páginas que me quedan, ¿cuántas páginas me faltan para acabar el libro?

Solución:

$$\text{Fracción leída: } \frac{6}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{20}{21}$$

$$\text{Me quedan: } \frac{1}{21} \cdot 252 = 12 \text{ páginas.}$$

96 Una segadora siega los $\frac{3}{5}$ de una finca en una jornada, y otra segadora, los $\frac{2}{7}$ en el mismo tiempo. ¿Qué fracción de la finca habrán segado en una jornada si trabajan las dos a la vez?

Solución:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{31}{35}$$

97 De una botella de agua de un litro y medio se han gastado $\frac{3}{4}$ de litro. ¿Cuánta agua queda?

Solución:

$$\frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

98 Si un metro de cable cuesta 3 €, ¿cuánto costarán $\frac{3}{4}$ de metro de cable?

Solución:

$$\frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ €}$$

99 Se han destinado $\frac{2}{3}$ de la superficie de una finca para sembrar cereal. Por un problema en la tierra se ha dejado sin cultivar $\frac{1}{6}$ de la superficie que se iba a utilizar. ¿Qué fracción de la finca se ha utilizado para sembrar el cereal?

Solución:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{9}$$

100 Marta ha utilizado $\frac{3}{5}$ del dinero que tiene en comprar unos discos, y $\frac{1}{2}$ de lo que le quedaba, en un regalo para su hermana.

a) ¿Qué fracción de dinero ha gastado?

b) Si le quedan 6 €, ¿qué dinero tenía al principio?

Solución:

$$\text{a) Fracción gastada: } \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Le queda: } \frac{1}{5}$$

$$\text{b) } 6 : \frac{1}{5} = 6 \cdot 5 = 30 \text{ €}$$

101 Elvira y José han consumido los $\frac{2}{3}$ de una botella de refresco, y después se han bebido $\frac{1}{6}$ del total. ¿Qué fracción del total queda en la botella?

Solución:

$$1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}$$

102 En una clase, $\frac{8}{25}$ del alumnado han obtenido una calificación superior a suficiente, y $\frac{1}{2}$ ha obtenido suficiente. ¿Qué fracción del total del alumnado de la clase ha suspendido?

Solución:

$$1 - \left(\frac{8}{25} + \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{50} \text{ han suspendido.}$$

Ejercicios y problemas

- 103** De una garrafa de agua se han sacado $\frac{3}{7}$; y una hora después, la mitad de lo que quedaba. ¿Qué fracción del total de agua se ha consumido?

Solución:

$$\frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{7} \text{ de agua se ha consumido.}$$

- 104** De un trozo de cuerda se han cortado $\frac{2}{5}$ del total, y ha quedado un trozo de 21 cm. ¿Cuál era la longitud de la cuerda?

Solución:

$$\text{Fracción que queda: } 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$21 : \frac{3}{5} = 21 \cdot \frac{5}{3} = 35 \text{ cm}$$

- 105** Entre Ernesto y su padre están organizando su biblioteca. Ernesto ha colocado $\frac{3}{10}$ de los libros, y su padre, $\frac{3}{5}$ del total. Si aún les quedan 64 libros sin colocar, ¿cuántos libros tienen en la biblioteca?

Solución:

$$\text{Les queda: } 1 - \frac{3}{10} - \frac{3}{5} = \frac{1}{10} \text{ de los libros.}$$

$$64 : \frac{1}{10} = 64 \cdot 10 = 640 \text{ libros tiene la biblioteca.}$$

- 106** ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{2}$ de litro se pueden llenar con 72 litros de agua?

Solución:

$$72 : \frac{3}{2} = 72 \cdot \frac{2}{3} = 48 \text{ botellas.}$$

- 107** Marta se ha comprado una chaqueta que cuesta 68,25 € y una camisa que cuesta 18,72 €. Si ha entregado 100 €, ¿cuánto le devolverán?

Solución:

$$100 - (68,25 + 18,72) = 13,03 \text{ €}$$

Para profundizar

- 108** Un jardinero siega la mitad de un jardín por la mañana. Por la tarde siega la tercera parte de lo que queda, y aún quedan 30 m² sin segar. ¿Cuántos metros cuadrados tiene el jardín?

Solución:

$$\text{Le quedan por segar: } 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$30 : \frac{1}{3} = 30 \cdot 3 = 90 \text{ m}^2 \text{ tiene el jardín.}$$

- 109** Una rueda avanza $\frac{3}{5}$ de metro al dar una vuelta. ¿Cuántas vueltas debe dar para avanzar 15 m?

Solución:

$$15 : \frac{3}{5} = 15 \cdot \frac{5}{3} = 25 \text{ vueltas.}$$

- 110** En una tienda de informática montan $\frac{2}{5}$ de los ordenadores de un pedido. Al día siguiente montan $\frac{5}{6}$ de los ordenadores que quedaban, y el tercer día, los $\frac{4}{5}$ del resto. Si el pedido era de 50 ordenadores, ¿cuántos les quedan para terminar?

Solución:

$$1^{\text{er}} \text{ día montan: } \frac{2}{5} \text{ les queda: } \frac{3}{5}$$

$$2^{\text{o}} \text{ día montan: } \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Entre los dos días: } \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$$

$$\text{Les queda: } \frac{1}{10}$$

$$3^{\text{er}} \text{ día montan: } \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{25}$$

$$\text{Entre los tres días: } \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{25} = \frac{49}{50}$$

$$\text{Les queda: } \frac{1}{50}$$

Les queda un ordenador sin montar.

111 En una inversión de 4 000 € hemos obtenido una rentabilidad de $1/20$. Si debemos pagar $9/50$ de los beneficios a Hacienda, ¿cuánto dinero ganaremos?

Solución:

$$\text{Se gana: } \frac{1}{20} \cdot \left(1 - \frac{9}{50}\right) \cdot 4\,000 = 164 \text{ €}$$

112 Se tiene un depósito para trigo lleno con $3/8$ de su capacidad. Se le añaden 132 kg y se llena hasta $5/6$ de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad del depósito?

Solución:

Los 132 kilos corresponden a:

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{11}{24}$$

$$132 : \frac{11}{24} = 132 \cdot \frac{24}{11} = 288 \text{ kg}$$

La capacidad del depósito es de 288 kg

113 Calcula mentalmente cuántos minutos son:

- a) Un cuarto de hora.
- b) Media hora.
- c) Tres cuartos de hora.

Solución:

- a) $\frac{1}{4} \cdot 60 = 15$ minutos.
- b) $\frac{1}{2} \cdot 60 = 30$ minutos.
- c) $\frac{3}{4} \cdot 60 = 45$ minutos.

114 El porcentaje es una cantidad de cada 100 unidades. Expresa los siguientes porcentajes en forma de fracción irreducible y de número decimal:

- a) 10%
- b) 25%
- c) 50%
- d) 75%

Solución:

- a) $\frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1$
- b) $\frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0,25$
- c) $\frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,5$
- d) $\frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0,75$

115 En 250 g de mezcla de café, 50 g son de café torrefacto, y el resto, de café natural. Expresa la fracción de café torrefacto y natural en 100 g. ¿A qué porcentaje corresponde cada fracción?

Solución:

$$\text{Café torrefacto: } \frac{50}{250} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$$

$$\text{Café natural: } \frac{200}{250} = \frac{4}{5} = 0,8 = 80\%$$

116 El 40% del alumnado de un centro escolar practica atletismo. Si el centro tiene 600 alumnos, calcula el número de ellos que practica atletismo.

Solución:

$$0,4 \cdot 600 = 240 \text{ alumnos.}$$

Comprueba lo que sabes

- 1** Define qué es aproximar un número decimal y pon un ejemplo.

Solución:

Aproximar un número decimal es sustituirlo por otro muy cercano pero con menos cifras significativas. La aproximación puede ser:

- a) **Por defecto:** si el número que se toma es menor que el número inicial.
b) **Por exceso:** si el número que se toma es mayor que el número inicial.

Ejemplo

- a) $3,4567 = 3,45$ es una aproximación por defecto ya que $3,45 < 3,4567$
b) $3,4567 = 3,46$ es una aproximación por exceso ya que $3,46 > 3,4567$

- 2** Calcula:

a) $2 - \frac{5}{6} + \frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)$

Solución:

a) $\frac{17}{12}$ b) $-\frac{7}{12}$

- 3** Calcula

a) $\left(\frac{4}{5} - 2\right) \cdot \left(\frac{7}{4} - \frac{5}{6}\right)$ b) $\frac{7}{5} : \frac{7}{10} - \frac{5}{6} : \frac{1}{4}$

Solución:

a) $-\frac{11}{10}$ b) $-\frac{4}{3}$

- 4** Calcula:

- a) La siguiente división obteniendo dos decimales en el cociente: $42,7 : 7,08$
b) $(45,14 - 13,205) \cdot 9,6$

Solución:

a) 6,03 b) 306,576

- 5** El perímetro de un triángulo equilátero mide 24,8 m. Calcula el lado del triángulo y redondea el resultado a centímetros.

Solución:

$24,8 : 3 = 8,2666\dots \text{ m} = 8,27 \text{ m} = 827 \text{ cm}$

- 6** Halla la fracción generatriz de:

- a) 1,25 b) $8,\bar{3}$ c) $2,6\overline{81}$

Solución:

- a) $\frac{125}{100} = \frac{5}{4}$
b) $\frac{25}{3}$
c) $\frac{59}{22}$

- 7** Un coche ha consumido 31,32 litros de gasolina en 540 km. ¿Cuánto consume cada 100 km?

Solución:

Gastará: $31,32 : 540 \cdot 100 = 5,8$ litros.

- 8** Marta ha utilizado $\frac{3}{5}$ del dinero que tiene en comprar unos discos, y $\frac{1}{2}$ de lo que le quedaba, en un regalo para su hermana.

- a) ¿Qué fracción de dinero ha gastado?
b) Si le quedan 6 €, ¿qué dinero tenía al principio?

Solución:

a) Ha gastado: $\frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

Le queda: $\frac{1}{5}$

b) $6 : \frac{1}{5} = 6 \cdot 5 = 30 \text{ €}$

Paso a paso**117** Calcula:

$$\frac{5}{4} + 2 - \frac{7}{6}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

118 Calcula:

$$\frac{2}{5} \cdot \left(4 - \frac{7}{3}\right) + \frac{5}{6}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

119 Calcula:

$$13,76 + 1,38 + 0,62$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

120 Calcula:

$$86,4 \cdot 2,03$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

121 Halla la expresión decimal con 50 dígitos de la siguiente fracción y clasifica el resultado como decimal exacto, periódico puro o periódico mixto:

$$\frac{58}{11}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

*Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Wiris o DERIVE.***122** El depósito de gasolina de un coche, con capacidad para 80 litros, tiene lleno las $\frac{2}{5}$ partes. ¿Cuántos litros de gasolina lleva?**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

123 Internet. Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema.****Practica****124** Calcula:

a) $\frac{3}{8} - 2 + \frac{5}{6}$

b) $\frac{2}{35} + \frac{8}{7} - \frac{3}{10}$

Solución:a) $-19/24$ b) $9/10$ **125** Calcula:

a) $\frac{2}{9} \cdot \frac{15}{4}$

b) $5 \cdot \frac{3}{25}$

c) $\frac{7}{12} : \frac{3}{4}$

d) $\frac{14}{5} : 28$

Solución:a) $5/6$ b) $3/5$ c) $7/9$ d) $1/10$ **126** Calcula:

a) $3 - \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{3}\right)$

b) $1 - \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{5}\right)$

Solución:a) $13/12$ b) $9/10$ **127** Haz las operaciones:

a) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{9}\right)$

b) $\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right) : \frac{3}{4}$

Solución:a) $14/27$ b) $1/6$

128 Realiza las siguientes operaciones:

a) $24,57 + 31,85 + 7,846$

b) $134,58 - 30,485$

Solución:

a) 64,266

b) 104,095

129 Haz las siguientes operaciones:

a) $5,24 \cdot 3,2$

b) $85,6 \cdot 32,5$

Solución:

a) 16,768

b) 2 782

130 Halla la expresión decimal con 15 dígitos de los siguientes números y clasifica el resultado como número entero, decimal exacto, periódico puro, periódico mixto o irracional:

a) $\frac{23}{7}$

b) $\frac{15}{4}$

c) $\frac{1579}{88}$

d) $\sqrt{2}$

Solución:

a) $3,2857142857142\dots = 3,\overline{285714}$ Número decimal periódico puro.

b) 3,75 Número decimal exacto.

c) $17,9431818\dots = 17,943\overline{18}$ Número decimal periódico mixto.

d) 1,414213562373... Número irracional.

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

131 Una grúa está elevando $\frac{5}{7}$ de los 224 kg que puede elevar como máximo. ¿Cuántos kilos está elevando?

Solución:

$$\frac{5}{7} \cdot 224 = 160 \text{ kg}$$

132 Se quieren envasar 600 litros de alcohol en botellas de $\frac{3}{4}$ de litro. ¿Cuántas se necesitarán?

Solución:

Nº de botellas:

$$600 : \frac{3}{4} = 600 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2400}{3} = 800 \text{ botellas.}$$

133 En un depósito que tiene 457,85 hl, se vierten 89,54 hl y se desaguan 12,3 hl. ¿Cuántos hectolitros quedan en el depósito?

Solución:

$$457,85 + 89,54 - 12,3 = 535,09 \text{ hl}$$

134 En un almacén han comprado 254,5 kg de lenguado a 5,79 € el kilo. ¿Cuánto se ha pagado por el lenguado?

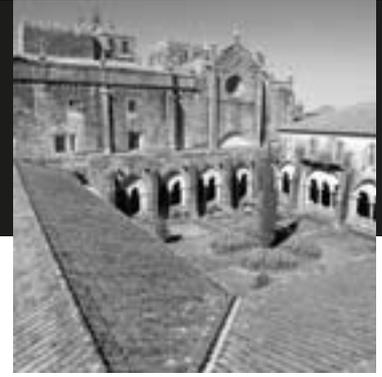
Solución:

$$254,5 \cdot 5,79 = 1\,473,56 \text{ €}$$

135 Se dispone de 450 kg de mandarinas y se quieren envasar en bolsas de 7,5 kg. ¿Cuántas bolsas se necesitarán?

Solución:

$$450 : 7,5 = 60 \text{ bolsas.}$$



1. Potencias de exponente entero

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente las siguientes potencias:

- a) 5^2 b) 3^4 c) 10^6 d) $(-2)^3$ e) $(-2)^4$ f) -2^3 g) -2^4

Solución:

- a) 25 b) 81 c) 1 000 000 d) -8 e) 16 f) -8 g) -16

Carné calculista 173 849 : 47 | C = 3 698; R = 43

APLICA LA TEORÍA

1 Escribe en forma de potencia:

- a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$
b) $-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$

Solución:

- a) 7^6 b) $(-3)^5$

2 Calcula mentalmente las siguientes potencias:

- a) 2^0 b) 2^1 c) 2^2 d) 2^3 e) 2^4 f) 2^5

Solución:

- a) 1 b) 2 c) 4
d) 8 e) 16 f) 32

3 Calcula mentalmente las siguientes potencias:

- a) 10^0 b) 10^1 c) 10^2 d) 10^3 e) 10^4 f) 10^5

Solución:

- a) 1 b) 10 c) 100
d) 1 000 e) 10 000 f) 100 000

4 Calcula mentalmente las siguientes potencias:

- a) $(-3)^0$ b) $(-3)^1$ c) $(-3)^2$ d) $(-3)^3$ e) $(-3)^4$

Solución:

- a) 1 b) -3 c) 9
d) -27 e) 81

5 Calcula:

- a) 33^2 b) $2,5^2$ c) $0,7^3$ d) $1,2^3$

Solución:

- a) 1 089 b) 6,25
c) 0,343 d) 1,728

6 Escribe el resultado en forma de una sola potencia aplicando las propiedades de las potencias:

- a) $5^3 \cdot 5^4$ b) $5^9 : 5^3$ c) $(5^3)^2$
d) $5^3 \cdot 7^3$ e) $5^4 : 7^4$

Solución:

- a) 5^7 b) 5^6 c) 5^6
d) 35^3 e) $(5 : 7)^4$

7 Escribe en forma de potencia de base entera positiva los siguientes números:

- a) $\frac{1}{5^3}$ b) $\frac{1}{16}$ c) $\frac{1}{3^2}$ d) $\frac{1}{81}$

Solución:

- a) 5^{-3} b) 2^{-4} c) 3^{-2} d) 3^{-4}

8 Sustituye los puntos por uno de los signos = o \neq , en las siguientes expresiones:

- a) $7^2 \dots 14$ b) $(-3)^3 \dots -3^3$
c) $(2 + 3)^2 \dots 5^2$ d) $(5 - 3)^2 \dots 5^2 - 3^2$

Solución:

- a) \neq
b) =
c) =
d) \neq

2. Raíz cuadrada

PIENSA Y CALCULA

Un aula es cuadrada y mide 49 m^2 de área. ¿Cuánto mide cada uno de los lados?

Solución:

Lado = 7 m

Carné calculista

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} + \frac{5}{2} : \frac{3}{4} = \frac{9}{2}$$

APLICA LA TEORÍA

9 Calcula mentalmente la raíz cuadrada de los siguientes números:

- a) 0 b) 1
c) 49 d) 100

Solución:

- a) 0 b) ± 1 c) ± 7 d) ± 10

10 ¿Cuántas raíces cuadradas tienen los siguientes números?

- a) 25 b) -16
c) 0 d) 10 000

Solución:

- a) Dos b) Ninguna
c) Una d) Dos

11 Escribe los 5 primeros cuadrados perfectos.

Solución:

0, 1, 4, 9 y 16

12 Calcula mentalmente la raíz entera por defecto de los siguientes números:

- a) 15 b) 34
c) 57 d) 85

Solución:

- a) 3 b) 5
c) 7 d) 9

13 Aplicando las propiedades de la raíz cuadrada, calcula:

- a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ b) $\sqrt{8} : \sqrt{2}$

Solución:

- a) ± 4 b) ± 2

14 Extrae fuera del radical el mayor número que puedas:

- a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{32}$

Solución:

- a) $3\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{2}$

15 Sustituye los puntos por uno de los signos, = o \neq , en las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{36 + 64} \dots \sqrt{36} + \sqrt{24}$

b) $\sqrt{169 - 25} \dots \sqrt{144}$

Solución:

a) \neq

b) =

16 Una finca tiene forma cuadrada y su área mide 81 m^2 . ¿Cuánto mide cada uno de sus lados?

Solución:

Cada lado = 9 m

3. Raíz cuadrada con decimales

PIENSA Y CALCULA

Halla la raíz cuadrada entera por defecto de los siguientes números:

a) $\sqrt{7}$

b) $\sqrt{33}$

c) $\sqrt{45}$

d) $\sqrt{56}$

e) $\sqrt{80}$

Solución:

a) 2

b) 5

c) 6

d) 7

e) 8

Carné calculista $209,884 : 3,7 \mid C = 56,32; R = 1,5$

APLICA LA TEORÍA

17 Halla las siguientes raíces cuadradas con un decimal y haz la comprobación:

a) $\sqrt{237,5}$

b) $\sqrt{5816,34}$

Solución:

a) 15,4 y resto: 0,34.

Comprobación: $15,4^2 + 0,34 = 237,5$

b) 76,2 y resto: 9,9

Comprobación: $76,2^2 + 9,9 = 5816,34$

19 Halla la raíz cuadrada con un decimal de los siguientes números enteros y haz la comprobación:

a) 83

b) 574

Solución:

a) 9,1 y resto: 0,19

Comprobación: $9,1^2 + 0,19 = 83$

b) 23,9 y resto: 2,79

Comprobación: $23,9^2 + 2,79 = 574$

18 Halla las siguientes raíces cuadradas con dos decimales y haz la comprobación:

a) $\sqrt{654,7}$

b) $\sqrt{1805,31}$

Solución:

a) 25,58 y resto: 0,3636

Comprobación: $25,58^2 + 0,3636 = 654,7$

b) 42,48 y resto: 0,7596

Comprobación: $42,48^2 + 0,7596 = 1805,31$

20 Halla la raíz cuadrada con dos decimales de los siguientes números enteros y haz la comprobación:

a) 845

b) 5874

Solución:

a) 29,06 y resto: 0,5164

Comprobación: $29,06^2 + 0,5164 = 845$

b) 76,64 y resto: 0,3104

Comprobación: $76,64^2 + 0,3104 = 5874$

21 Realiza las siguientes operaciones aplicando la jerarquía:

a) $(9^2 + 23 - 7^2) \cdot \sqrt{64}$

b) $(10^2 - \sqrt{81} + 5^3) : \sqrt{36}$

Solución:

- a) 440 b) 36

22 El patio de un centro escolar es cuadrado y mide 1 000 m². ¿Cuánto mide de largo y de ancho? Aprecia el resultado hasta los centímetros.

Solución:

Largo = ancho = 31,62 m

4. Raíz cúbica

PIENSA Y CALCULA

Una pecera tiene forma cúbica, y su arista mide 1 m. Calcula mentalmente cuántos kilos pesa el agua destilada de su interior cuando está llena, a 4 °C y al nivel del mar.

Solución:

Pesa: 1 000 kg

Carné calculista

$$\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{7}{4} - \frac{3}{8} \right) = \frac{11}{20}$$

APLICA LA TEORÍA

23 Calcula mentalmente la raíz cúbica de los siguientes números:

- a) 0 b) 1 c) -27 d) 125

Solución:

- a) 0 b) 1 c) -3 d) 5

24 ¿Cuántas raíces cúbicas tienen los siguientes números?

- a) -8 b) 1 c) 0 d) 1 000

Solución:

- a) Una b) Una c) Una d) Una

25 Escribe los 5 primeros cubos perfectos no negativos.

Solución:

0, 1, 8, 27 y 64

26 Calcula mentalmente la raíz cúbica entera por defecto de los siguientes números:

- a) 5 b) 37 c) 84 d) 101

Solución:

- a) 1 b) 3 c) 4 d) 4

27 Calcula mentalmente la raíz cúbica entera por exceso de los siguientes números:

- a) 4 b) 33 c) 77 d) 123

Solución:

- a) 2 b) 4 c) 5 d) 5

28 Aplicando las propiedades de la raíz cúbica, calcula:

- a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3}$

Solución:

- a) 2 b) 3

29 Extrae fuera del radical el número mayor que puedas:

- a) $\sqrt[3]{40}$ b) $\sqrt[3]{54}$ c) $\sqrt[3]{500}$

Solución:

- a) $2\sqrt[3]{5}$ b) $3\sqrt[3]{2}$ c) $5\sqrt[3]{4}$

30 Un envase de zumo tiene forma cúbica, y su capacidad es de 216 cm³. ¿Cuánto mide la arista?

Solución:

Arista: $\sqrt[3]{216} = 6$ cm

Solución:

36, 49, 64, 81 y 100

- 43** Calcula mentalmente la raíz entera por exceso de los siguientes números:

a) 23 b) 44 c) 62 d) 93

Solución:a) 5 b) 7
c) 8 d) 10

- 44** Aplicando las propiedades de la raíz cuadrada, calcula:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ b) $\sqrt{72} : \sqrt{8}$ **Solución:**a) ± 6 b) ± 3

- 45** Extrae fuera del radical el mayor número que puedas:

a) $\sqrt{20}$ b) $\sqrt{75}$ c) $\sqrt{98}$ **Solución:**a) $2\sqrt{5}$ b) $5\sqrt{3}$ c) $7\sqrt{2}$

- 46** Sustituye los puntos por uno de los signos, = o \neq , en las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{36 + 64} \dots 10$
b) $\sqrt{100 - 36} \dots \sqrt{100} - \sqrt{36}$ **Solución:**a) = b) \neq **3. Raíz cuadrada con decimales**

- 47** Halla las siguientes raíces cuadradas con un decimal y haz la comprobación:

a) $\sqrt{658,2}$ b) $\sqrt{3\,456,85}$ **Solución:**a) 25,6 y resto: 2,84
Comprobación: $25,6^2 + 2,84 = 658,2$
b) 58,7 y resto: 11,16
Comprobación: $58,7^2 + 11,16 = 3\,456,85$

- 48** Halla las siguientes raíces cuadradas con dos decimales y haz la comprobación:

a) $\sqrt{105,6}$ b) $\sqrt{9\,531,08}$ **Solución:**a) 10,27 y resto: 0,1271
Comprobación: $10,27^2 + 0,1271 = 105,6$
b) 97,62 y resto: 1,4156
Comprobación: $97,62^2 + 1,4156 = 9\,531,08$

- 49** Halla la raíz cuadrada con un decimal de los siguientes números enteros y haz la comprobación:

a) 598 b) 5\,678

Solución:a) 24,4 y resto: 2,64
Comprobación: $24,4^2 + 2,64 = 598$
b) 75,3 y resto: 7,91
Comprobación: $75,3^2 + 7,91 = 5\,678$

- 50** Halla la raíz cuadrada con dos decimales de los siguientes números enteros y haz la comprobación:

a) 456 b) 8\,765

Solución:a) 21,35 y resto: 0,1775
Comprobación: $21,35^2 + 0,1775 = 456$
b) 93,62 y resto: 0,2956
Comprobación: $93,62^2 + 0,2956 = 8\,765$

- 51** Realiza las siguientes operaciones aplicando la jerarquía:

a) $(7\sqrt{36} - 8^2 + 15) \cdot \sqrt{100}$
b) $(7^2 + 476 - \sqrt{64} + 2^5) : \sqrt{81}$ **Solución:**

a) -70 b) 61

4. Raíz cúbica

- 52** Calcula mentalmente la raíz cúbica de los siguientes números:

a) 8 b) -64 c) 216 d) -1\,000

Ejercicios y problemas

Solución:

- a) 2 b) -4 c) 6 d) -10

53 ¿Cuántas raíces cúbicas tienen los siguientes números?

- a) 27 b) -1 c) -125 d) 1 000 000

Solución:

- a) Una b) Una
c) Una d) Una

54 Escribe los 5 primeros cubos perfectos mayores que 4

Solución:

8, 27, 64, 125 y 216

55 Calcula mentalmente la raíz cúbica entera por defecto de los siguientes números:

- a) 7 b) 25 c) 50 d) 100

Solución:

- a) 1 b) 2
c) 3 d) 4

56 Calcula mentalmente la raíz cúbica entera por exceso de los siguientes números:

- a) 6 b) 45 c) 75 d) 150

Solución:

- a) 2 b) 4
c) 5 d) 6

57 Aplicando las propiedades de la raíz cúbica, calcula:

- a) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$
b) $\sqrt[3]{250} : \sqrt[3]{2}$

Solución:

- a) 4 b) 5

58 Extrae fuera del radical el mayor número que puedas:

- a) $\sqrt[3]{56}$ b) $\sqrt[3]{135}$ c) $\sqrt[3]{6000}$

Solución:

- a) $2\sqrt[3]{7}$ b) $3\sqrt[3]{5}$ c) $10\sqrt[3]{6}$

Para ampliar

59 Escribe los cuadrados perfectos menores o iguales que 100

Solución:

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 y 100

60 Escribe los cubos perfectos cuyo valor absoluto sea menor o igual que 100

Solución:

0, ± 1 , ± 8 , ± 27 y ± 64

61 Expresa el resultado en forma de una sola potencia utilizando las propiedades de las potencias:

- a) $x^5 \cdot x^3$ b) $x^4 : x^9$
c) $(x^3)^5$ d) $x^5 \cdot x^2 : x^3$

Solución:

- a) x^8 b) x^{-5}
c) x^{15} d) x^4

62 Halla el valor de x en los siguientes casos:

- a) $2^x = 32$ b) $x^4 = 81$
c) $5^3 = x$ d) $(-2)^x = 64$

Solución:

- a) $x = 5$ b) $x = \pm 3$
c) $x = 125$ d) $x = 6$

63 Halla el valor de x en los siguientes casos:

- a) $\sqrt{x} = 7$ b) $\sqrt{36} = x$
c) $\sqrt[3]{x} = 4$ d) $\sqrt[3]{x} = -5$

Solución:

- a) $x = 49$ b) $x = \pm 6$
 c) $x = 64$ d) $x = -125$

64 Efectúa las siguientes operaciones:

- a) 3^4 b) $3 \cdot 4$
 c) $(-2)^3$ d) -2^3
 e) $(-2)^4$ f) -2^4

Solución:

- a) 81 b) 12 c) -8
 d) -8 e) 16 f) -16

65 Efectúa las siguientes operaciones:

- a) $(3 + 4)^2$ b) $3^2 + 4^2$
 c) $(13 - 5)^2$ d) $13^2 - 5^2$

Solución:

- a) $7^2 = 49$ b) $9 + 16 = 25$
 c) $8^2 = 64$ d) $169 - 25 = 144$

66 La velocidad de la luz es de 300 000 km/s. Escribe dicha velocidad en notación científica.**Solución:**

$$3 \cdot 10^5 \text{ km/s}$$

67 Efectúa las siguientes operaciones:

- a) $\sqrt{9 + 16}$
 b) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$
 c) $\sqrt{100 - 64}$
 d) $\sqrt{100} - \sqrt{64}$

Solución:

- a) $\sqrt{25} = 5$ b) $3 + 4 = 7$
 c) $\sqrt{36} = 6$ d) $10 - 8 = 2$

Con calculadora**68** Utilizando la calculadora, halla:

- a) $2,5^2$ b) $7,4^3$
 c) 2^{10} d) $0,25^2$
 e) $1,1^3$ f) 2^{20}

Solución:

- a) 6,25 b) 405,224 c) 1 024
 d) 0,0625 e) 1,331 f) 1 048 576

69 Utilizando la calculadora, halla:

- a) $\sqrt{529}$
 b) $\sqrt{55\,225}$
 c) $\sqrt{18,0625}$
 d) $\sqrt{1\,207,5625}$

Solución:

- a) 23 b) 235
 c) 4,25 d) 34,75

70 Utilizando la calculadora, halla:

- a) $\sqrt[3]{343}$
 b) $\sqrt[3]{166\,375}$
 c) $\sqrt[3]{15,625}$
 d) $\sqrt[3]{0,970299}$

Solución:

- a) 7 b) 55
 c) 2,5 d) 0,99

71 Utilizando la calculadora, halla:

- a) $(13\sqrt{81} - 12^2 + 105) \cdot \sqrt{625}$
 b) $(7^3 - 5\,334 - \sqrt{169} + 2^7) : \sqrt[3]{12\,167}$

Solución:

- a) 1 950 b) -212

72 Utilizando la calculadora, realiza las siguientes operaciones y da el resultado en notación científica:

- a) 2^{64}
 b) $5,3 \cdot 10^{23} \cdot 4,81 \cdot 10^{-5}$
 c) 3^{15}
 d) $8,75 \cdot 10^{12} : (6,32 \cdot 10^{-4})$

Solución:

- a) $1,844674407 \cdot 10^{19}$ b) $2,5493 \cdot 10^{19}$
 c) $1,4348907 \cdot 10^7$ d) $1,384493671 \cdot 10^{16}$

Problemas

73 Una finca tiene forma cuadrada y mide 25 m de lado. Si el metro cuadrado se paga a 300 €, ¿cuánto vale la finca?

Solución:

$$\text{Área: } 25^2 = 625 \text{ m}^2$$

$$\text{Coste: } 625 \cdot 300 = 187\,500 \text{ €}$$

74 Un chalé está edificado sobre una parcela cuadrada de 5 625 m² de área. ¿Cuánto mide el lado de la parcela?

Solución:

$$\text{Lado: } \sqrt{5\,625} = 75 \text{ m}$$

75 Halla el volumen de un cubo de 2,5 m de arista.

Solución:

$$\text{Volumen: } 2,5^3 = 15,625 \text{ m}^3$$

76 Halla la arista de un cubo cuyo volumen mide 185,193 m³

Solución:

$$\text{Arista: } \sqrt[3]{185,193} = 5,7 \text{ m}$$

77 Un cine tiene el mismo número de filas que de columnas, y en total tiene 289 butacas. ¿Cuántas butacas tiene cada fila?

Solución:

$$\text{Cada fila: } \sqrt{289} = 17 \text{ butacas.}$$

78 El patio de un centro escolar es cuadrado, y cada lado mide 60 m. Queremos ponerlo de terrazo, que mide 40 cm × 40 cm. Si cada pieza de terrazo vale 0,65 €, y por colocarlo cobran 3 000 €, ¿cuánto cuesta arreglar el patio?

Solución:

$$\text{Superficie del patio: } 60^2 = 3\,600 \text{ m}^2$$

$$\text{Superficie de cada terrazo: } 0,4^2 = 0,16 \text{ m}^2$$

Nº de piezas de terrazo:

$$3\,600 : 0,16 = 22\,500 \text{ piezas.}$$

$$\text{Coste del terrazo: } 22\,500 \cdot 0,65 = 14\,625 \text{ €}$$

$$\text{Coste total: } 14\,625 + 3\,000 = 17\,625 \text{ €}$$

79 Calcula en kilómetros y notación científica la distancia que hay desde la Tierra al Sol sabiendo que la velocidad de la luz es aproximadamente de 300 000 km/s y que la luz del Sol tarda 8,25 minutos en llegar a la Tierra.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Distancia: } & 300\,000 \cdot 8,25 \cdot 60 = 1\,485\,000\,000 = \\ & = 1,485 \cdot 10^8 \text{ km} \end{aligned}$$

80 En un restaurante hay para elegir 5 platos de primero, 5 platos de segundo y 5 platos de postre. ¿Cuántos días puedo ir a comer sin repetir el menú?

Solución:

$$\text{Nº de días: } 5^3 = 125 \text{ días.}$$

81 Un rectángulo mide 120 m de largo y 30 m de ancho. Calcula el lado de un cuadrado que tenga la misma área.

Solución:

$$\text{Área del rectángulo: } 120 \cdot 30 = 3\,600 \text{ m}^2$$

$$\text{Lado del cuadrado: } \sqrt{3\,600} = 60 \text{ m}$$

82 El presupuesto para alicatar las cuatro paredes de una cocina es de 900 €. Si las paredes son cuadradas y nos cobran a 25 € el metro cuadrado, ¿cuánto mide el lado de cada pared?

Solución:

$$\text{Superficie de la cocina: } 900 : 25 = 36 \text{ m}^2$$

$$\text{Superficie de cada pared: } 36 : 4 = 9 \text{ m}^2$$

$$\text{Lado de la cocina: } \sqrt{9} = 3 \text{ m}$$

83 Un parque cuadrado, que tiene de superficie 7,84 ha, está plantado de pinos perfectamente alineados y distribuidos en filas y columnas. Si cada pino ocupa 49 m², ¿cuántos pinos hay en cada fila?

Solución:

$$\text{Nº de pinos: } 78\,400 : 49 = 1\,600 \text{ pinos.}$$

$$\text{Nº de pinos en cada fila: } \sqrt{1\,600} = 40 \text{ pinos.}$$

84 El disco duro de un ordenador tiene 40 Gb de capacidad. Si $1 \text{ Gb} = 2^{10} \text{ Mb}$, $1 \text{ Mb} = 2^{10} \text{ Kb}$ y $1 \text{ Kb} = 2^{10} \text{ bytes}$, ¿cuál es la capacidad del disco duro en bytes y notación científica?

Solución:

Capacidad: $40 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} = 4,29 \cdot 10^{10} \text{ bytes}$.

Para profundizar

85 Un tablero de ajedrez tiene 8 filas y 8 columnas. Expresa como potencia del menor número entero posible el número total de cuadros que tiene el ajedrez.

Solución:

Nº de cuadros: $8 \cdot 8 = 64 = 2^6$ cuadros.

86 El suelo de una cocina es cuadrado y está formado por 81 losas cuadradas de $30 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$. Halla la medida del lado de la cocina y su área.

Solución:

Superficie de la cocina: $81 \cdot 0,3^2 = 7,29 \text{ m}^2$

Lado: $\sqrt{7,29} = 2,7 \text{ m}$

87 ¿En qué cifras puede terminar un cubo perfecto?

Solución:

Se obtienen haciendo los cubos de los números formados por un dígito.

0, 1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2 y 9

Es decir, en todos los números.

88 Escribe en forma de potencia el número de bisabuelos de una persona.

Solución:

Nº de bisabuelos: $2^3 = 8$ bisabuelos.

89 Expresa en notación científica un año luz en kilómetros sabiendo que es el espacio que recorre la luz en un año, y que la velocidad de la luz es de $300\,000 \text{ km/s}$

Solución:

Año luz:

$300\,000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 9,4608 \cdot 10^{12} \text{ km}$

90 Un depósito de forma cúbica está lleno de agua, y su arista mide 80 m. Si abastece a una ciudad de medio millón de habitantes y cada habitante consume diariamente 16 litros, ¿para cuántos días habrá agua?

Solución:

Volumen del depósito:

$80^3 = 512\,000 \text{ m}^3 = 512\,000\,000 \text{ litros}$.

Nº de días:

$512\,000\,000 : (500\,000 \cdot 16) = 64 \text{ días}$.

91 En una ciudad hay 25 centros educativos. Cada centro educativo tiene 25 aulas, y cada aula tiene 25 alumnos. Expresa en forma de potencia del menor número entero posible el número total de alumnos que tiene dicha ciudad, y halla el número de alumnos.

Solución:

Nº de alumnos:

$25^3 = (5^2)^3 = 5^6 = 15\,625$ alumnos.

92 Una parcela es cuadrada, y la medida de su área es $6\,400 \text{ m}^2$. Halla el área de otra parcela cuyo lado sea el doble.

Solución:

Lado de la 1ª parcela: $\sqrt{6\,400} = 80 \text{ m}$

Lado de la 2ª parcela: $80 \cdot 2 = 160 \text{ m}$

Área de la nueva parcela: $160^2 = 25\,600 \text{ m}^2$

93 Se tiene un envase de *tetrabrik* de forma cúbica con 2 litros de capacidad. ¿Cuánto mide la arista? Redondea el resultado a milímetros.

Solución:

Arista: $\sqrt[3]{2} = 1,259921049 \text{ dm} = 126 \text{ mm}$

94 Una pecera de forma cúbica contiene 1 000 kg de agua destilada a 4 °C y a nivel del mar. ¿Cuánto mide la arista de la pecera?

Solución:

Volumen: $1\,000 \text{ litros} = 1\,000 \text{ dm}^3$

Arista: $\sqrt[3]{1\,000} = 10 \text{ dm} = 1 \text{ m}$

Aplica tus competencias

95 Halla el área de una finca cuadrada que tiene 100 m de lado. Da el resultado en hectáreas.

Solución:

$$\text{Área: } 100^2 = 10\,000 \text{ m}^2 = 1 \text{ ha}$$

96 Halla la longitud del lado de una finca cuadrada que tiene 62 500 m² de área.

Solución:

$$\text{Lado: } \sqrt{62\,500} = 250 \text{ m}$$

97 Halla el volumen de un estanque de forma cúbica que tiene 7,5 m de arista.

Solución:

$$\text{Volumen: } 7,5^3 = 421,875 \text{ m}^3$$

98 Halla la longitud de la arista de un estanque de forma cúbica que tiene un volumen de 216 m³

Solución:

$$\text{Arista: } \sqrt[3]{216} = 6 \text{ m}$$

Comprueba lo que sabes

1 Define raíz cúbica y pon un ejemplo.

Solución:

La **raíz cúbica** de un número **a** es otro número **b**, tal que **b** elevado al cubo es **a**, es decir, es la operación inversa de elevar al cubo.

$$\sqrt[3]{a} = b \quad \text{si} \quad b^3 = a$$

Ejemplo

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad \text{porque} \quad 2^3 = 8$$

2 Calcula:

- a) 5^0
- b) $(-3)^4$
- c) $(-2)^5$
- d) $7,5^2$

Solución:

- a) 1
- b) 81
- c) -32
- d) 56,25

3 Extrae fuera de los radicales el número mayor que puedas:

- a) $\sqrt{18}$
- b) $\sqrt{75}$
- c) $\sqrt[3]{24}$
- d) $\sqrt[3]{250}$

Solución:

- a) $3\sqrt{2}$
- b) $5\sqrt{3}$
- c) $2\sqrt[3]{3}$
- d) $5\sqrt[3]{2}$

4 Halla la siguiente raíz cuadrada con dos decimales, y haz la comprobación:

$$\sqrt{654,7}$$

Solución:

Raíz: 25,58
Resto: 0,3636
Comprobación: $25,58^2 + 0,3636 = 654,7$

5 Realiza la siguiente operación aplicando la jerarquía de las operaciones:

$$(6^3 + \sqrt[3]{125} - 95) : \sqrt{81}$$

Solución:

14

6 Aplicando las propiedades de las raíces, calcula:

- a) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2}$
- b) $\sqrt{63} : \sqrt{7}$
- c) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4}$
- d) $\sqrt[3]{40} : \sqrt[3]{5}$

Solución:

- a) $\sqrt{100} = \pm 10$
- b) $\sqrt{9} = \pm 3$
- c) $\sqrt[3]{64} = 4$
- d) $\sqrt[3]{8} = 2$

7 En una ciudad hay 25 centros educativos. Cada centro educativo tiene 25 aulas, y cada aula tiene 25 alumnos. Expresa en forma de potencia del menor número entero posible el número total de alumnos que tiene dicha ciudad, y halla el número de alumnos

Solución:

Nº de alumnos:
 $25^3 = (5^2)^3 = 5^6 = 15\,625$ alumnos.

8 Se tiene un metro cúbico lleno de agua destilada a 4 °C y a nivel del mar. ¿Entre cuántas personas podrán levantarlo si cada una puede con 125 kg?

Solución:

Volumen: $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ kg}$
Nº de personas: $1\,000 : 125 = 8$ personas.

Paso a paso**99** Calcula:

$$3,56^7$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

100 Calcula:

$$5,7 \cdot 10^{23} \cdot 3,45 \cdot 10^{-9}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

101 Calcula:

$$\sqrt{645,7}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

102 Calcula:

$$\sqrt[3]{216}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

103 Extrae factores del radical:

$$\sqrt{50}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

104 Calcula:

$$(56 - 7^2) \cdot \sqrt{25}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

*Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Wiris o DERIVE:***105** El patio del colegio es cuadrado y mide 1 000 m². ¿Cuánto mide de largo y de ancho? Aprecia el resultado hasta los centímetros.**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

106 **Internet.** Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema.****Practica****107** Calcula las siguientes potencias:

- a) 2^{64}
- b) $(-3)^{15}$
- c) $0,99^5$
- d) $(-1,1)^{10}$

Solución:

- a) 18 446 744 073 709 551 616
- b) -14348907
- c) 0,9509900498
- d) 2,593742460

108 Calcula:

- a) $7,5 \cdot 10^{15} \cdot 3,33 \cdot 10^5$
- b) $2,25 \cdot 10^{14} : (7,9 \cdot 10^{-5})$
- c) $(8,3 \cdot 10^5)^3$

Solución:

- a) $2,4975 \cdot 10^{21}$
- b) $2,848101265 \cdot 10^{18}$
- c) $5,71787 \cdot 10^{17}$

109 Calcula:

- a) $\sqrt{3}$
- b) $\sqrt{55,33074}$
- c) $\sqrt[3]{456,25}$
- d) $\sqrt[3]{80\,023,345}$

Solución:

- a) 1,732050807
- b) 7,438463551
- c) 7,698408621
- d) 43,09288466

110 Extrae fuera del radical el número mayor que puedas:

- a) $\sqrt[3]{40}$
 b) $\sqrt[3]{54}$
 c) $\sqrt[3]{500}$

Solución:

- a) $2\sqrt[3]{5}$ b) $3\sqrt[3]{2}$ c) $5\sqrt[3]{4}$

111 Realiza las siguientes operaciones aplicando la jerarquía:

- a) $(9^2 + 23 - 7^2) \cdot \sqrt{64}$
 b) $(10^2 - \sqrt{81} + 5^3) : \sqrt{36}$

Solución:

- a) 440 b) 36

Escribe las expresiones numéricas correspondientes a los siguientes enunciados y halla el resultado:

112 Un envase de zumo tiene forma cúbica, y su capacidad es de 216 cm^3 . ¿Cuánto mide la arista?

Solución:

Arista: $\sqrt[3]{216} = 6 \text{ cm}$

113 El número 3,45 elevado al cuadrado menos la raíz cuadrada de 42,7

Solución:

$$3,45^2 - \sqrt{42,7} = 5,367976298$$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

114 Queremos vender los pinos de una finca, que tiene 35 filas y 35 columnas, al precio de 35 € cada pino. Expresa en forma de potencia el valor de los pinos y halla el resultado.

Solución:

Valor: $35^3 = 42\,875 \text{ €}$

115 Halla la arista de un cubo cuyo volumen mide $185,193 \text{ m}^3$

Solución:

Arista: $\sqrt[3]{185,193} = 5,7 \text{ m}$

116 El disco duro de un ordenador tiene 200 Gb de capacidad. Si $1 \text{ Gb} = 2^{10} \text{ Mb}$, $1 \text{ Mb} = 2^{10} \text{ Kb}$ y $1 \text{ Kb} = 2^{10} \text{ bytes}$, ¿cuál es la capacidad del disco duro en bytes y notación científica?

Solución:

Capacidad:

$$200 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} = 2,1475 \cdot 10^{11} \text{ bytes.}$$

4

Medida de ángulos y de tiempo



1. Medida de ángulos

PIENSA Y CALCULA

¿Cuánto mide un ángulo recto? ¿Y un ángulo llano?

Solución:

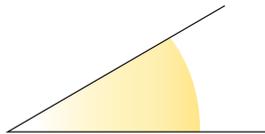
Un ángulo recto mide 90° y un ángulo llano 180°

Carné calculista $659 : 8,6 \mid C = 76,62; R = 0,068$

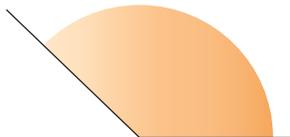
APLICA LA TEORÍA

1 Estima la medida de cada uno de los siguientes ángulos:

a)



b)



Solución:

a) 30°

b) 140°

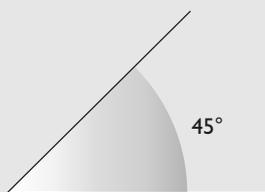
2 Dibuja aproximadamente un ángulo de:

a) 45°

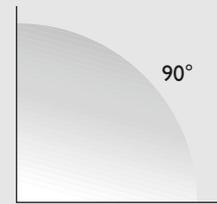
b) 90°

Solución:

a)



b)



3 Pasa mentalmente los siguientes ángulos a forma incompleja:

a) $18^\circ 15'$

b) $43^\circ 30'$

Solución:

a) $18,25^\circ$

b) $43,5^\circ$

4 Pasa mentalmente los siguientes ángulos a forma compleja:

a) $57,5^\circ$

b) $125,75^\circ$

Solución:

a) $57^\circ 30'$

b) $125^\circ 45'$

5 Pasa los siguientes ángulos a forma incompleja:

- a) $23^{\circ} 47' 15''$ b) $55^{\circ} 25' 48''$

Solución:

- a) $23,7875^{\circ}$ b) $55,43^{\circ}$

6 Pasa los siguientes ángulos a forma compleja:

- a) $41,1234^{\circ}$ b) $83,67^{\circ}$

Solución:

- a) $41^{\circ} 7' 24''$ b) $83^{\circ} 40' 12''$

7 Utilizando la calculadora, pasa los siguientes ángulos a forma incompleja:

- a) $44^{\circ} 25' 36''$ b) $77^{\circ} 53' 41''$

Solución:

- a) $44,42666667^{\circ}$ b) $77,89472222^{\circ}$

8 Utilizando la calculadora, pasa los siguientes ángulos a forma compleja:

- a) $58,506^{\circ}$ b) $144,87^{\circ}$

Solución:

- a) $58^{\circ} 30' 22''$ b) $144^{\circ} 52' 12''$

2. Operaciones con ángulos

PIENSA Y CALCULA

Realiza mentalmente las siguientes operaciones:

- a) $25^{\circ} 30' + 10^{\circ} 30'$ b) $90^{\circ} - 50^{\circ} 30'$ c) $4(25^{\circ} 30')$ d) $45^{\circ} : 2$

Solución:

- a) 36° b) $39^{\circ} 30'$ c) 102° d) $22^{\circ} 30'$

Carné calculista

$$\frac{5}{2} : \frac{2}{3} - \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{31}{12}$$

APLICA LA TEORÍA

9 Realiza las siguientes operaciones mentalmente:

- a) $25^{\circ} 30' + 40^{\circ} 30'$ b) $57^{\circ} 45' - 47^{\circ} 15'$
c) $(10^{\circ} 15') \times 4$ d) $(60^{\circ} 30') : 3$

Solución:

- a) 66° b) $10^{\circ} 30'$
c) 41° d) $20^{\circ} 10'$

10 Realiza las siguientes operaciones:

- a) $44^{\circ} 53' 37'' + 32^{\circ} 35' 42''$
b) $83^{\circ} 25' 12'' - 35^{\circ} 48' 30''$
c) $(22^{\circ} 35' 42'') \times 7$
d) $(125^{\circ} 43' 58'') : 9$

Solución:

- a) $77^{\circ} 29' 19''$ b) $47^{\circ} 36' 42''$
c) $158^{\circ} 9' 54''$ d) $13^{\circ} 58' 13''$

11 Realiza las siguientes operaciones:

- a) $36^{\circ} 42' 25'' + 47^{\circ} 23' 52''$
b) $125^{\circ} 44' 18'' - 47^{\circ} 51' 23''$
c) $(15^{\circ} 23' 37'') \times 8$
d) $(93^{\circ} 25' 14'') : 6$

Solución:

- a) $84^{\circ} 6' 17''$ b) $77^{\circ} 52' 55''$
c) $123^{\circ} 8' 56''$ d) $15^{\circ} 34' 12''$

12 Un ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide $23^{\circ} 44' 53''$. ¿Cuánto mide cada uno de los otros ángulos?

Solución:

Uno mide 90°
El otro mide $90^{\circ} - 23^{\circ} 44' 53'' = 66^{\circ} 15' 7''$

3. Medida de tiempo

PIENSA Y CALCULA

¿Cuántos segundos tiene una hora?

Solución:

1 hora = $60 \cdot 60 = 3\,600$ segundos.

Carné calculista $37,49 : 8,6 \mid C = 4,35; R = 0,08$

APLICA LA TEORÍA

13 ¿Cuántos lustros tiene un siglo?

Solución:

Siglo = $100 : 5 = 20$ lustros.

14 Escribe los años bisiestos que hubo entre 1590 y 1620

Solución:

1592, 1596, 1600, 1604, 1608, 1612, 1616 y 1620

15 Se llama solsticio de verano al día más largo del año, que es en el mes de junio. Estima la duración del día y la de la noche.

Solución:

Amanece hacia las 6 h 30 min y anochece hacia las 21 h 30 min

El día dura, aproximadamente, 15 horas y la noche, 9 horas.

16 Pasa mentalmente las siguientes unidades de tiempo a forma incompleja:

a) 2 h 30 min b) 5 h 45 min

Solución:

a) 2,5 h b) 5,75 h

17 Pasa mentalmente las siguientes unidades de tiempo a forma compleja:

a) 7,5 h b) 44,25 h

Solución:

a) 7 h 30 min b) 44 h 15 min

18 Calcula los segundos que tiene un año bisiesto en notación científica.

Solución:

$366 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3,16224 \cdot 10^7$ s

19 Pasa las siguientes unidades de tiempo a forma incompleja:

a) 22 h 43 min 17 s b) 75 h 48 min 19 s

Solución:

a) 22,72138889 h b) 75,80527778 h

20 Pasa las siguientes unidades de tiempo a forma compleja:

a) 5,345 h b) 27,44 h

Solución:

a) 5h 20 min 42 s b) 27 h 26 min 24 s

21 Utilizando la calculadora, pasa las siguientes unidades de tiempo a forma incompleja:

a) 27 h 33 min 18 s
b) 43 h 25 min 50 s

Solución:

a) 27,555 h b) 43,43055556 h

22 Utilizando la calculadora, pasa las siguientes unidades de tiempo a forma compleja:

a) 15,567 h b) 23,8 h

Solución:

a) 15 h 34 min 1 s b) 23 h 48 min

4. Operaciones con medidas de tiempo

PIENSA Y CALCULA

Realiza mentalmente las siguientes operaciones:

- a) $5 \text{ h } 30 \text{ min} + 10 \text{ h } 30 \text{ min}$ b) $5 \text{ h} - 2 \text{ h } 30 \text{ min}$ c) $5 \times (2 \text{ h } 30 \text{ min})$ d) $5 \text{ h} : 2$

Solución:

- a) 16 h b) 2 h 30 min c) 12 h 30 min d) 2 h 30 min

Carné calculista $\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{6}\right) : \frac{5}{6} = \frac{4}{5}$

APLICA LA TEORÍA

23 Realiza las siguientes operaciones mentalmente:

- a) $2 \text{ h } 20 \text{ min} + 3 \text{ h } 40 \text{ min}$
b) $7 \text{ h } 45 \text{ min} - 5 \text{ h } 15 \text{ min}$
c) $(2 \text{ h } 15 \text{ min}) \times 4$
d) $(50 \text{ h } 45 \text{ min}) : 5$

Solución:

- a) 6 h
b) 2 h 30 min
c) 9 h
d) 10 h 9 min

24 Realiza las siguientes operaciones:

- a) $3 \text{ h } 50 \text{ min } 30 \text{ s} + 6 \text{ h } 42 \text{ min } 37 \text{ s}$
b) $9 \text{ h } 23 \text{ min } 5 \text{ s} - 5 \text{ h } 52 \text{ min } 16 \text{ s}$
c) $(7 \text{ h } 25 \text{ min } 30 \text{ s}) \times 8$
d) $(53 \text{ h } 44 \text{ min } 18 \text{ s}) : 6$

Solución:

- a) 10 h 33 min 7 s
b) 3 h 30 min 49 s
c) 59 h 24 min
d) 8 h 57 min 23 s

25 Realiza las siguientes operaciones:

- a) $12 \text{ h } 23 \text{ min } 45 \text{ s} + 9 \text{ h } 45 \text{ min } 25 \text{ s}$
b) $25 \text{ h } 14 \text{ min } 5 \text{ s} - 13 \text{ h } 25 \text{ min } 54 \text{ s}$
c) $(12 \text{ h } 17 \text{ min } 45 \text{ s}) \times 9$
d) $(44 \text{ h } 33 \text{ min } 22 \text{ s}) : 7$

Solución:

- a) 22 h 9 min 10 s
b) 11 h 48 min 11 s
c) 110 h 39 min 45 s
d) 6 h 21 min 55 s

26 He tenido 6 clases de 50 minutos, y en casa he estado estudiando 2 h 30 min. ¿Cuánto tiempo del día me queda para otras cosas?

Solución:

$6 \cdot 50 \text{ min} + 2 \text{ h } 30 \text{ min} = 7 \text{ h } 30 \text{ min}$
Resto del día:
 $24 \text{ h} - 7 \text{ h } 30 \text{ min} = 16 \text{ h } 30 \text{ min}$

3. Medida de tiempo

36 ¿Cuántas décadas tiene un siglo?

Solución:

Siglo = $100 : 10 = 10$ décadas.

37 Escribe los años bisiestos que hubo entre 1790 y 1820

Solución:

1792, 1796, 1804, 1808, 1812, 1816 y 1820

38 Se llama solsticio de invierno al día más corto del año, que es en el mes de diciembre. Estima la duración del día y de la noche.

Solución:

Amanece hacia las 8 h 30 min y anochece hacia las 17 h 30 min

El día dura más o menos 9 horas, y la noche, 15 horas.

39 Pasa mentalmente las siguientes unidades de tiempo a forma incompleja:

- a) 5 h 15 min
- b) 4 h 30 min

Solución:

- a) 5,25 h
- b) 4,5 h

40 Pasa mentalmente las siguientes unidades de tiempo a forma compleja:

- a) 3,25 h
- b) 32,75 h

Solución:

- a) 3 h 15 min
- b) 32 h 45 min

41 Pasa las siguientes unidades de tiempo a forma incompleja:

- a) 7 h 22 min 12 s
- b) 33 h 44 min 24 s

Solución:

- a) 7,37 h
- b) 33,74 h

42 Pasa las siguientes unidades de tiempo a forma compleja:

- a) 9,034 h
- b) 14,78 h

Solución:

- a) 9 h 2 min 2 s
- b) 14 h 46 min 48 s

4. Operaciones con medidas de tiempo

43 Realiza mentalmente las siguientes operaciones:

- a) 5 h 30 min + 2 h 15 min
- b) 8 h 30 min – 4 h 45 min
- c) (3 h 10 min) × 5
- d) (13 h) : 5

Solución:

- a) 7 h 45 min
- b) 3 h 45 min
- c) 15 h 50 min
- d) 2 h 36 min

44 Realiza las siguientes operaciones:

- a) 7 h 27 min 37 s + 9 h 49 min 39 s
- b) 34 h 6 min 12 s – 15 h 43 min 14 s
- c) (13 h 14 min 59 s) × 15
- d) (32 h 25 min 39 s) : 7

Solución:

- a) 17 h 17 min 16 s
- b) 18 h 22 min 58 s
- c) 198 h 44 min 45 s
- d) 4 h 37 min 57 s

45 Realiza las siguientes operaciones:

- a) 50 h 35 min 57 s + 92 h 23 min 14 s
- b) 87 h 53 min 14 s – 58 h 15 min 25 s
- c) (5 h 53 min 18 s) × 8
- d) (32 h 25 min 12 s) : 6

Solución:

- a) 142 h 59 min 11 s
- b) 29 h 37 min 49 s
- c) 47 h 6 min 24 s
- d) 5 h 24 min 12 s

Para ampliar

- 46** Se llama equinoccio de primavera al día en que coinciden la duración del día y la de la noche. Calcula el tiempo que dura el día y la noche en dicho día.

Solución:

El día = la noche = 12 h

- 47** ¿Qué ángulo recorre la manecilla horaria de un reloj analógico durante una hora?

Solución:

$360^\circ : 12 = 30^\circ$

- 48** Escribe los años bisiestos que hubo entre 1890 y 1920

Solución:

1892, 1896, 1904, 1908, 1912, 1916 y 1920

- 49** Escribe los años bisiestos que habrá entre 2080 y 2110

Solución:

2080, 2084, 2088, 2092, 2096, 2104 y 2108

- 50** Escribe los años bisiestos que habrá entre 2380 y 2410

Solución:

2380, 2384, 2388, 2392, 2396, 2400, 2404 y 2408

- 51** Escribe los años bisiestos que habrá entre 3980 y 4010

Solución:

3980, 3984, 3988, 3992, 3996, 4004 y 4008

Con calculadora

- 52** Utilizando la calculadora, pasa los siguientes ángulos a forma incompleja:

a) $45^\circ 33' 22''$

b) $127^\circ 15' 29''$

Solución:

a) $45,55611111^\circ$

b) $127,2580555^\circ$

- 53** Utilizando la calculadora, pasa los siguientes ángulos a forma compleja:

a) $34,789^\circ$

b) $122,045^\circ$

Solución:

a) $34^\circ 47' 20''$

b) $122^\circ 2' 42''$

- 54** Realiza las siguientes operaciones:

a) $44^\circ 44' 44'' + 55^\circ 55' 55''$

b) $107^\circ 2' 23'' - 95^\circ 36' 59''$

c) $(13^\circ 14' 15'') \times 19$

d) $(123^\circ 34' 46'') : 13$

Solución:

a) $100^\circ 40' 39''$

b) $11^\circ 25' 24''$

c) $251^\circ 30' 45''$

d) $9^\circ 30' 22''$

- 55** Utilizando la calculadora, pasa las siguientes unidades de tiempo a forma incompleja:

a) 6 h 15 min 23 s

b) 115 h 45 min 23 s

Solución:

a) 6,256388889 h

b) 115,7563889 h

- 56** Utilizando la calculadora, pasa las siguientes unidades de tiempo a forma compleja:

a) 8,567 h

b) 58,28 h

Solución:

a) 8 h 34 min 1 s

b) 58 h 16 min 48 s

- 57** Realiza las siguientes operaciones:

a) $93 \text{ h } 47 \text{ min } 23 \text{ s} + 18 \text{ h } 49 \text{ min } 23 \text{ s}$

b) $25 \text{ h } 43 \text{ min } 5 \text{ s} - 14 \text{ h } 51 \text{ min } 12 \text{ s}$

c) $(87 \text{ h } 14 \text{ min } 32 \text{ s}) \times 13$

d) $(125 \text{ h } 35 \text{ min } 43 \text{ s}) : 19$

Solución:

a) 112 h 36 min 46 s

b) 10 h 51 min 53 s

c) 1134 h 8 min 56 s

d) 6 h 36 min 37 s

Problemas

- 58** Halla cuánto mide cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero, sabiendo que entre todos ellos miden 180°

Solución:

$$180^\circ : 3 = 60^\circ$$

- 59** Un ángulo mide $43^\circ 28' 45''$. Halla cuánto mide el complementario.

Solución:

$$90^\circ - 43^\circ 28' 45'' = 46^\circ 31' 15''$$

- 60** Pedro ha hablado por el teléfono móvil con sus amigos un total de 18 min 32 s. Si le cuesta 0,18 €/min, ¿cuánto tiene que pagar?

Solución:

$$18 \text{ min } 32 \text{ s} = 18,53333333 \text{ min}$$

$$\text{Coste: } 18,53333333 \cdot 0,18 = 3,34 \text{ €}$$

- 61** Un autobús tarda 1 h 20 min 32 s en hacer un trayecto de ida. En el camino de vuelta tarda 1 h 35 min 15 s

- a) ¿Cuánto tiempo ha invertido entre la ida y la vuelta?
b) ¿Cuánto tiempo tarda más en la vuelta que en la ida?

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } & 1 \text{ h } 20 \text{ min } 32 \text{ s} + 1 \text{ h } 35 \text{ min } 15 \text{ s} \\ & = 2 \text{ h } 55 \text{ min } 47 \text{ s} \end{aligned}$$

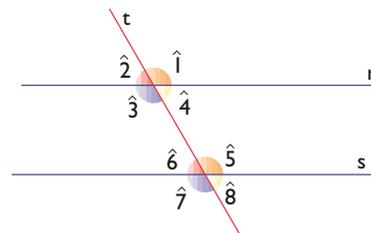
$$\text{b) } 1 \text{ h } 35 \text{ min } 15 \text{ s} - 1 \text{ h } 20 \text{ min } 32 \text{ s} = 14 \text{ min } 43 \text{ s}$$

- 62** Un ángulo mide $83^\circ 14' 27''$. Halla cuánto mide el suplementario.

Solución:

$$180^\circ - 83^\circ 14' 27'' = 96^\circ 45' 33''$$

- 63** Si el ángulo \hat{I} mide $119^\circ 12' 37''$, calcula cuánto mide cada uno de los otros ángulos.



Solución:

$$\hat{I} = \hat{3} = \hat{5} = \hat{7} = 119^\circ 12' 37''$$

$$\hat{2} = \hat{4} = \hat{6} = \hat{8} = 180^\circ - 119^\circ 12' 37'' = 60^\circ 47' 23''$$

- 64** Benjamín se acuesta a las once y treinta y dos de la noche, y se levanta al día siguiente a las siete y cuarenta y dos. ¿Cuánto tiempo ha estado en la cama?

Solución:

$$12 \text{ h} - 11 \text{ h } 32 \text{ min} + 7 \text{ h } 42 \text{ min} = 8 \text{ h } 10 \text{ min}$$

- 65** Se divide un ángulo recto en 7 partes iguales. ¿Cuánto mide cada una de ellas?

Solución:

$$90^\circ : 7 = 12^\circ 51' 26''$$

- 66** Cada uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles mide $45^\circ 55' 17''$. Halla cuánto mide el ángulo desigual.

Solución:

$$180^\circ - 2(45^\circ 55' 17'') = 88^\circ 9' 26''$$

- 67** Un fontanero ha cobrado 282 € por hacer un trabajo. Si cobra 12 €/h, ¿cuánto tiempo ha tardado en hacer el trabajo?

Solución:

$$\text{Tiempo: } 282 : 12 = 23,5 \text{ h} = 23 \text{ h } 30 \text{ min}$$

Ejercicios y problemas

- 68** Un ángulo de un romboide mide $123^\circ 18' 52''$.
¿Cuánto mide cada uno de los otros ángulos?

Solución:

El ángulo opuesto mide también $123^\circ 18' 52''$
Cada uno de los otros dos es suplementario:
 $180^\circ - 123^\circ 18' 52'' = 56^\circ 41' 8''$

- 69** De modo bastante aproximado, la duración de un año es de 365,256363 días. Pasa esta unidad de tiempo a forma compleja.

Solución:

$0,256363 \cdot 24 = 6,152712 \text{ h} = 6 \text{ h } 9 \text{ min } 10 \text{ s}$
Año: 365 días 6 h 9 min 10 s

- 70** Una persona trabaja cada uno de los cinco días laborales de la semana una media de 7 h 47 min 12 s. ¿Cuánto tiempo trabaja en la semana?

Solución:

$5(7 \text{ h } 47 \text{ min } 12 \text{ s}) = 38 \text{ h } 56 \text{ min}$

- 71** Si un móvil recorre 100 m en 9 s, ¿cuántos kilómetros recorrerá en 1 hora?

Solución:

$1 \text{ h} = 60 \cdot 60 = 3600 \text{ s}$
 $100 \cdot \frac{3600}{9} = 100 \cdot 400 = 40000 \text{ m} = 40 \text{ km}$

Para profundizar

- 72** El ángulo desigual de un triángulo isósceles mide $56^\circ 23' 42''$. Halla cuánto mide cada uno de los otros ángulos.

Solución:

$(180^\circ - 56^\circ 23' 42'') : 2 = 61^\circ 48' 9''$

- 73** Se divide un ángulo llano en 13 partes iguales. ¿Cuánto mide cada una de ellas?

Solución:

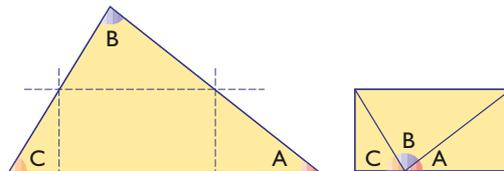
$180^\circ : 13 = 13^\circ 50' 46''$

- 74** Calcula en notación científica el número de horas que tiene un lustro que incluye un año bisiesto.

Solución:

$(5 \cdot 365 + 1) \cdot 24 = 4,3824 \cdot 10^4$

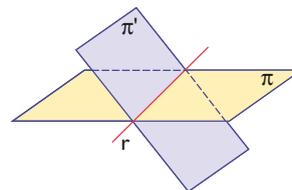
- 75** En el siguiente triángulo, el ángulo A mide $37^\circ 22' 45''$ y el ángulo B mide $83^\circ 53' 48''$. ¿Cuánto mide el ángulo C?



Solución:

$180^\circ - (37^\circ 22' 45'' + 83^\circ 53' 48'') = 58^\circ 43' 27''$

- 76** Uno de los ángulos diedros que forman los siguientes planos mide $127^\circ 30' 43''$. ¿Cuánto mide el otro?



Solución:

$180^\circ - 127^\circ 30' 43'' = 52^\circ 29' 17''$

- 77** Ana trabaja 12 h 15 min un día, y 7 h 13 min otro día. Si le pagan la hora a 7 €, ¿cuánto dinero habrá ganado?

Solución:

Tiempo trabajado:
 $12 \text{ h } 15 \text{ min} + 7 \text{ h } 13 \text{ min} = 19 \text{ h } 28 \text{ min} =$
 $= 19,46666667 \text{ h}$
Habrá ganado: $19,46666667 \cdot 7 = 136,27 \text{ €}$

- 78** Un autobús tarda 44 min 45 s en hacer un trayecto. Si ha hecho 15 paradas y en cada parada tarda un minuto, ¿cuánto tiempo tarda de media entre parada y parada?

Solución:

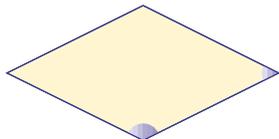
Tiempo en movimiento:

$$44 \text{ min } 45 \text{ s} - 15 \text{ min} = 29 \text{ min } 45 \text{ s}$$

Tiempo medio entre parada y parada:

$$29 \text{ min } 45 \text{ s} : 15 = 1 \text{ min } 59 \text{ s}$$

- 79** Un ángulo de un rombo mide $52^\circ 23' 43''$. ¿Cuánto mide cada uno de los otros ángulos?

**Solución:**El ángulo opuesto mide también $52^\circ 23' 43''$

Cada uno de los otros dos es suplementario:

$$180^\circ - 52^\circ 23' 43'' = 127^\circ 36' 17''$$

- 80** Para maquetar con el ordenador la revista del colegio, 5 alumnos han tardado 20 h 30 min trabajando conjuntamente. Si se les pagase a 17 € la hora, ¿cuánto costaría la maquetación de la revista?

Solución:

Tiempo:

$$5(20 \text{ h } 30 \text{ min}) = 102 \text{ h } 30 \text{ min} = 102,5 \text{ h}$$

Coste:

$$102,5 \cdot 17 = 1742,5 \text{ €}$$

- 81** Juan ha pagado 15,25 € por 5 llamadas del teléfono móvil, y le cobran a 0,18 €/min. ¿Cuánto tiempo ha estado hablando? Expresa el resultado en unidades complejas.

Solución:

Tiempo:

$$15,25 : 0,18 = 84,72 \text{ min} = 84 \text{ min } 43 \text{ s}$$

- 82** Calcula en notación científica el número de segundos que tiene un milenio. Considera que un año tiene 365,256363 días.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Milenio: } & 1000 \cdot 365,256363 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = \\ & = 3,155814976 \cdot 10^{10} \text{ s} \end{aligned}$$

- 83** En un trapecio isósceles un ángulo mide $50^\circ 32' 47''$. ¿Cuánto mide cada uno de los otros ángulos?

Solución:Uno de los ángulos contiguos mide: $50^\circ 32' 47''$

Cada uno de los otros ángulos mide:

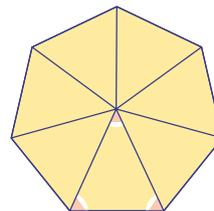
$$180^\circ - 50^\circ 32' 47'' = 129^\circ 27' 13''$$

- 84** En una carrera de fórmula 1 en un circuito de velocidad, un coche tarda 1 h 27 min y 30 s en dar 50 vueltas. ¿Cuánto tiempo invierte de media en cada vuelta?

Solución:

$$(1 \text{ h } 27 \text{ min } 30 \text{ s}) : 50 = 1 \text{ min } 45 \text{ s}$$

- 85** Halla cuánto mide cada uno de los ángulos coloreados de rojo del siguiente heptágono regular:

**Solución:**El ángulo central: $360^\circ : 7 = 51^\circ 25' 43''$

Cada uno de los otros dos:

$$(180^\circ - 51^\circ 25' 43'') : 2 = 64^\circ 17' 9''$$

- 86** Sonia trabaja en una semana laboral, es decir, en cinco días, 43 h 17 min. ¿Cuánto tiempo trabaja de media cada día de la semana?

Solución:

$$(43 \text{ h } 17 \text{ min}) : 5 = 8 \text{ h } 39 \text{ min } 24 \text{ s}$$

- 87** De Madrid a Sevilla hay 540 km, y el AVE va a 220 km/h. ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer la distancia que hay entre las dos ciudades? Expresa el resultado en unidades complejas.

Solución:

$$\text{Tiempo: } \frac{540}{220} = 2 \text{ h } 27 \text{ min } 16 \text{ s}$$

Aplica tus competencias

Una empresa de telefonía móvil cobra 3 € de cuota al mes. Establecer conexión cuesta 0,12 € en cada llamada, el primer minuto vale 0,17 € y cada 30 segundos posteriores al minuto cuesta 0,085 €

- 88** Antonio hace una llamada que dura 55 segundos. ¿Cuánto paga por esta llamada?

Solución:

$$0,12 + 0,17 = 0,29 \text{ €}$$

- 89** Isabel hace una llamada que dura 2 min 25 s. ¿Cuánto paga por esta llamada?

Solución:

$$0,12 + 0,17 + 3 \cdot 0,085 = 0,55 \text{ €}$$

- 90** Benjamín hace 5 llamadas en un mes:

- a) La primera dura 42 s
- b) La segunda dura 1 min 53 s

c) La tercera dura 3 min 25 s

d) La cuarta dura 15 s

e) La quinta dura 44 s

¿Cuánto paga Benjamín de teléfono móvil ese mes?

Solución:

$$3 + 5(0,12 + 0,17) + (2 + 5) \cdot 0,085 = 5,05 \text{ €}$$

- 91** Manuel hace dos llamadas, a teléfonos habituales, que tienen un 25% de descuento.

a) La primera dura 5 min 6 s

b) La segunda dura 20 s

¿Cuánto paga por estas dos llamadas?

Solución:

$$2(0,12 + 0,17) + 9 \cdot 0,085 = 1,345 \text{ €}$$

Como le hace el 25% de descuento, pagará el 75%

$$0,75 \cdot 1,345 = 1,01 \text{ €}$$

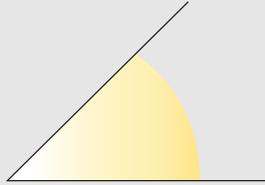
Comprueba lo que sabes

- 1** Define qué es «estimar». Pon un ejemplo dibujando un ángulo y estimando su medida.

Solución:

Estimar una medida es hallar, más o menos y mentalmente, una medida sin utilizar ningún instrumento.

Ejemplo



Este ángulo mide unos 45°

- 2** Pasa el ángulo de $43^\circ 25' 48''$ a unidades complejas.

Solución:

$43,43^\circ$

- 3** Realiza las siguientes operaciones:

- a) $57^\circ 42' 34'' + 13^\circ 34' 51''$
b) $130^\circ 7' 16'' - 90^\circ 18' 25''$

Solución:

- a) $71^\circ 17' 25''$
b) $39^\circ 48' 51''$

- 4** Pasa la siguiente medida de tiempo a unidades complejas:

5,345 h

Solución:

5 h 20 min 42 s

- 5** Escribe los años bisiestos que habrá entre 2280 y 2310

Solución:

2280, 2284, 2288, 2292, 2296, 2304 y 2308

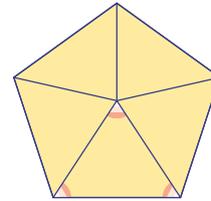
- 6** Realiza las siguientes operaciones:

- a) $(5 \text{ h } 53 \text{ min } 18 \text{ s}) \times 8$
b) $(47 \text{ h } 32 \text{ min } 51 \text{ s}) : 9$

Solución:

- a) 47 h 6 min 24 s
b) 5 h 16 min 59 s

- 7** Halla cuánto mide cada uno de los ángulos coloreados de rojo del siguiente pentágono regular:



Solución:

El ángulo central: $360^\circ : 5 = 72^\circ$
Cada uno de los otros dos:
 $(180^\circ - 72^\circ) : 2 = 54^\circ$

- 8** En una carrera de fórmula 1 en un circuito de velocidad, un coche tarda 1 h 27 min y 30 s en dar 50 vueltas. ¿Cuánto tiempo invierte de media en cada vuelta?

Solución:

$(1 \text{ h } 27 \text{ min } 30 \text{ s}) : 50 = 1 \text{ min } 45 \text{ s}$

Paso a paso**92** Pasa el ángulo $35^\circ 21' 47''$ a forma incompleja.**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

93 Pasa 2,7859 h a forma compleja.**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

94 Efectúa la siguiente operación:

$$25^\circ 43' 32'' + 37^\circ 32' 56''$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

95 Efectúa la siguiente operación:

$$(77 \text{ h } 24 \text{ min } 40 \text{ s}) : 5$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

96 **Internet.** Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema.****Practica****97** Pasa los siguientes ángulos a forma incompleja:

- a)
- $55^\circ 44' 33''$
- b)
- $23^\circ 23' 23''$

Solución:

- a) 55,743° b) 23,39°

98 Pasa los siguientes ángulos a forma compleja:

- a) 97,654° b) 123,4567°

Solución:

- a)
- $97^\circ 39' 14''$
- b)
- $123^\circ 27' 24''$

99 Pasa las siguientes unidades de tiempo a forma incompleja:

- a) 15 h 23 min 47 s
-
- b) 85 h 43 min 15 s

Solución:

- a) 15,396 h b) 85,721 h

100 Pasa las siguientes unidades de tiempo a forma compleja:

- a) 6,023 h b) 37,507 h

Solución:

- a) 6 h 1 min 23 s b) 37 h 30 min 25 s

101 Realiza las siguientes operaciones:

- a)
- $70^\circ 50' 42'' + 35^\circ 47' 59''$
-
- b)
- $113^\circ 20' 18'' - 86^\circ 35' 23''$
-
- c)
- $(13^\circ 27' 40'') \times 7$
-
- d)
- $(105^\circ 18' 54'') : 9$

Solución:

- a)
- $106^\circ 38' 41''$
-
- b)
- $26^\circ 44' 55''$
-
- c)
- $94^\circ 13' 40''$
-
- d)
- $11^\circ 42' 6''$

102 Realiza las siguientes operaciones:

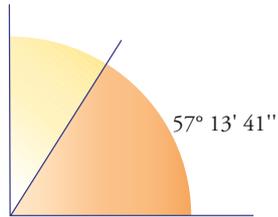
- a) 2 h 20 min 56 s + 5 h 47 min 55 s
-
- b) 10 h 17 min 3 s - 3 h 47 min 51 s
-
- c) (5 h 33 min 41 s)
- \times
- 9
-
- d) (97 h 23 min 24 s) : 6

Solución:

- a) 8 h 8 min 51 s
-
- b) 6 h 29 min 12 s
-
- c) 50 h 3 min 9 s
-
- d) 16 h 13 min 54 s

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

- 103** Un ángulo mide $57^\circ 13' 41''$. Halla cuánto mide el complementario.

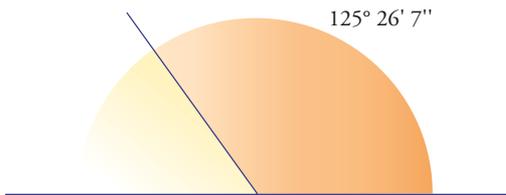


Solución:

Planteamiento:

$$90^\circ - 57^\circ 13' 41'' = 32^\circ 46' 19''$$

- 104** Un ángulo mide $125^\circ 26' 7''$. Halla cuánto mide el suplementario.



Solución:

Planteamiento:

$$180^\circ - 125^\circ 26' 7'' = 54^\circ 33' 53''$$

- 105** Ana trabaja una media de 8 h 23 min 55 s cada uno de los cinco días laborales de la semana. ¿Cuánto tiempo trabaja a la semana?

Solución:

Planteamiento:

$$(8 \text{ h } 23 \text{ min } 55 \text{ s}) \cdot 5 = 41 \text{ h } 59 \text{ min } 35 \text{ s}$$

- 106** Si un nadador invierte 1 h 2 min 30 s en recorrer 5 000 m, ¿cuánto tarda por término medio en hacer un largo de una piscina que mide 100 m de longitud?

Solución:

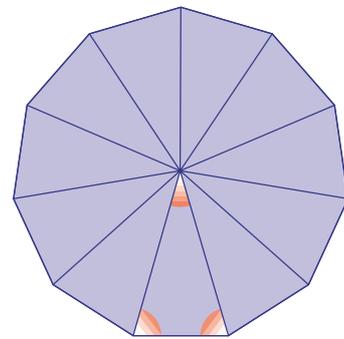
Planteamiento:

Número de largos de 100 m = $5000/100 = 50$

Tiempo de un largo:

$$(1 \text{ h } 2 \text{ min } 30 \text{ s}) : 50 = 1 \text{ min } 15 \text{ s}$$

- 107** Halla cuánto mide cada uno de los ángulos coloreados de rojo del siguiente polígono regular:



Solución:

Planteamiento:

El ángulo central:

$$360^\circ : 11 = 32^\circ 43' 38''$$

Entre los otros dos:

$$180^\circ - 32^\circ 43' 38'' = 147^\circ 16' 22''$$

Cada uno de ellos:

$$(147^\circ 16' 22'') : 2 = 73^\circ 38' 11''$$

- 108** De Madrid a Barcelona hay 600 km. El avión del puente aéreo lleva una velocidad media de 550 km/h. ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer la distancia que hay entre las dos ciudades? Expresa el resultado en unidades complejas.

Solución:

Planteamiento:

$$600 : 550 = 1 \text{ h } 5 \text{ min } 27 \text{ s}$$



1. Razón y proporción

PIENSA Y CALCULA

Una pescadería cobra 160 € por 8 kg de bogavantes. ¿Cuánto cobrará por un kilo?

Solución:

$$160 : 8 = 20 \text{ €/kg}$$

Carné calculista 409,6 : 68 | C = 6,02; R = 0,24

APLICA LA TEORÍA

1 Calcula mentalmente las razones entre las cantidades siguientes, e interpreta el resultado:

- 2 kg de nueces cuestan 7 €
- Un tren en 3 h recorre 360 km
- 25 paquetes de folios cuestan 75 €
- 5 kg de detergente se gastan en 40 lavados.

Solución:

- $7 : 2 = 3,5 \text{ €/kg} \Rightarrow$ Es el precio por kilo de las nueces.
- $360 : 3 = 120 \text{ km/h} \Rightarrow$ Es la velocidad media.
- $75 : 25 = 3 \text{ €/paquete} \Rightarrow$ Es el precio del paquete de folios.
- $40 : 5 = 8 \text{ lavados/kg} \Rightarrow$ Es el número de lavados por kilo.

2 Calcula mentalmente las razones entre las siguientes cantidades e interpreta el resultado:

- Una varilla mide 120 cm, y otra, 240 cm
- Una casa tiene 100 m², y otra, 125 m²
- José marcha a 4 km/h, y Diego, a 5 km/h
- Un paquete de galletas contiene 250 g, y otro, 1 000 g

Solución:

- $240 : 120 = 2 \Rightarrow$ La longitud de la varilla más larga es el doble de la más corta.

b) $125 : 100 = 1,25 \Rightarrow$ La casa de mayor superficie es 1,25 veces la de la pequeña.

c) $5 : 4 = 1,25 \Rightarrow$ Diego marcha a una velocidad de 1,25 veces la de José.

d) $1\ 000 : 250 = 4 \Rightarrow$ El peso de la caja grande es 4 veces el de la pequeña.

3 Calcula mentalmente y completa para que formen proporción:

$$\text{a) } \frac{3}{4} = \frac{\dots}{32}$$

$$\text{b) } \frac{\dots}{9} = \frac{21}{27}$$

$$\text{c) } \frac{4}{\dots} = \frac{2}{1,5}$$

$$\text{d) } \frac{2}{1,5} = \frac{10}{\dots}$$

Solución:

$$\text{a) } \frac{3}{4} = \frac{24}{32}$$

$$\text{b) } \frac{7}{9} = \frac{21}{27}$$

$$\text{c) } \frac{4}{3} = \frac{2}{1,5}$$

$$\text{d) } \frac{2}{1,5} = \frac{10}{7,5}$$

4 Calcula el cuarto proporcional:

$$\text{a) } \frac{x}{9} = \frac{8}{3}$$

$$\text{b) } \frac{0,5}{1,5} = \frac{4,2}{x}$$

$$\text{c) } \frac{5,2}{4,3} = \frac{x}{8,6}$$

$$\text{d) } \frac{3,6}{x} = \frac{1,8}{2,3}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } x &= \frac{8 \cdot 9}{3} = 24 & \text{b) } x &= \frac{1,5 \cdot 4,2}{0,5} = 12,6 \\ \text{c) } x &= \frac{5,2 \cdot 8,6}{4,3} = 10,4 & \text{d) } x &= \frac{3,6 \cdot 2,3}{1,8} = 4,6 \end{aligned}$$

5 Calcula el medio proporcional:

$$\text{a) } \frac{10,8}{x} = \frac{x}{1,2} \quad \text{b) } \frac{5,12}{x} = \frac{x}{12,5}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 &= 12,96 \Rightarrow x = \pm 3,6 \\ \text{b) } x^2 &= 64 \Rightarrow x = \pm 8 \end{aligned}$$

6 Calcula los valores de x e y sabiendo que:

$$\begin{aligned} x + y &= 20 \\ \frac{4}{x} &= \frac{12}{y} \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{4}{x} &= \frac{12}{y} = \frac{16}{20} \\ \frac{4}{x} &= \frac{16}{20} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 20}{16} = 5 \\ \frac{12}{y} &= \frac{16}{20} \Rightarrow y = \frac{12 \cdot 20}{16} = 15 \end{aligned}$$

2. Magnitudes proporcionales

PIENSA Y CALCULA

Se han invertido 6 h en recorrer cierta distancia, a una velocidad de 10 km/h. ¿A qué velocidad se debe ir para invertir una hora en recorrer la misma distancia?

Solución:

$$10 \cdot 6 = 60 \text{ km/h}$$

Carné calculista

$$\frac{9}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{3}{4} : \frac{5}{3} = \frac{3}{4}$$

APLICA LA TEORÍA

7 Si 6 cajas de ciruelas cuestan 9,72 €, ¿cuánto costarán 21 cajas iguales?

Solución:

Nº de cajas	(D)	Dinero (€)
6	→	9,72
21	→	x

$$\frac{6}{21} = \frac{9,72}{x} \Rightarrow x = 34,02 \text{ €}$$

9 De una fuente manan 4 150 litros de agua en 4 h. ¿Cuántos litros de agua manarán en 2 días?

Solución:

Tiempo (horas)	(D)	Capacidad (litros)
4	→	4 150
48	→	x

$$\frac{4}{48} = \frac{4 150}{x} \Rightarrow x = 49 800 \text{ litros.}$$

8 Si 14 obreros tardan 45 días en hacer una obra, ¿cuántos días necesitarán 30 obreros en hacer la misma obra trabajando al mismo ritmo?

Solución:

Nº de obreros	(I)	Tiempo (días)
14	→	45
30	→	x

$$\frac{30}{14} = \frac{45}{x} \Rightarrow x = 21 \text{ días.}$$

10 Una cuadrilla de obreros canaliza 80 m de tubería en 4 días. ¿Cuántos días tardarán, trabajando al mismo ritmo, en canalizar 120 m?

Solución:

Longitud (m)	(D)	Tiempo (días)
80	→	4
120	→	x

$$\frac{80}{120} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 6 \text{ días.}$$

- 11** Cinco grifos llenan un depósito en 30 h. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenar el mismo depósito 3 grifos iguales a los anteriores?

Solución:

Nº de grifos	(I)	Tiempo (horas)
5	→	30
3	→	x

$\frac{3}{5} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = 50$ horas.

3. Porcentajes

PIENSA Y CALCULA

De los 600 alumnos que hay en un centro escolar, el 10% ha participado en un concurso de poesía. ¿Cuántos alumnos han participado en el concurso?

Solución:

$600 \cdot 0,1 = 60$ alumnos.

Carné calculista 574 : 7,5 | C = 76,53; R = 0,025

APLICA LA TEORÍA

- 12** Por el gasto de 90 € en una compra realizada en un supermercado, nos han descontado el 5% gracias a un bono. ¿Cuánto dinero han descontado?

Solución:

Han descontado: $90 \cdot 0,05 = 4,5$ €

- 13** El 60% del alumnado de una clase ha aprobado el examen de Literatura. Si han aprobado 15 estudiantes, ¿cuántos estudiantes hay en la clase?

Solución:

En la clase hay:

$15 : 0,6 = 25$ alumnos.

- 14** En un paquete de 250 g de mezcla de café, hay 60 g de café torrefacto. Calcula el tanto por ciento que hay de este café en la mezcla.

Solución:

$60 : 250 = 0,24 = 24\%$ de café torrefacto.

- 15** Durante el transporte de 12 500 kg de tomates se ha estropeado el 8%. ¿Cuántos kilos de tomates han quedado?

Solución:

$12\ 500 \cdot 0,92 = 11\ 500$ kg

- 16** Un comerciante paga el metro de tela a 8 €. Si quiere ganar el 20% del precio de costo, ¿a qué precio debe vender el metro de tela?

Solución:

Precio de venta: $8 \cdot 1,2 = 9,6$ € el metro de tela.

- 17** Alberto pagó el año pasado 350 € por un servicio de teléfono móvil. Si este año ha pagado 378 €, ¿qué tanto por ciento ha aumentado en el gasto de teléfono?

Solución:

El aumento porcentual es:

$378 : 350 = 1,08$

El tanto por ciento es:

$1,08 - 1 = 0,08 = 8\%$

4. Proporcionalidad compuesta

PIENSA Y CALCULA

Analiza en la siguiente situación si la cantidad de días es directa o inversamente proporcional a la cantidad de pienso y al número de vacas: un ganadero necesita 600 kg de pienso para alimentar a 40 vacas durante 8 días. ¿Durante cuántos días podrá alimentar a 20 vacas con 1 500 kg de pienso?

Solución:

El número de kilos y el número de días es directa. El número de vacas y el número de días es inversa.

Carné calculista $\left(\frac{7}{6} - \frac{3}{4}\right) : \frac{5}{8} = \frac{2}{3}$

APLICA LA TEORÍA

- 18** Un obrero gana 540 € por trabajar durante 15 días a razón de 6 h diarias. ¿Cuánto ganará por 8 días de trabajo a razón de 9 h diarias?

Solución:

(D)	(D)	(D)
↓	↓	↓
Tiempo (días)	Tiempo (h/día)	Dinero (€)
15	6	540
8	9	x
} $\frac{15}{8} \cdot \frac{6}{9} = \frac{540}{x} \Rightarrow x = 432 \text{ €}$		

- 19** Durante unas vacaciones, 7 personas gastan en alimentación 63 € diarios. Calcula cuántas personas podrán alimentarse durante 30 días con 3 240 €

Solución:

(D)	(I)	(D)
↓	↓	↓
Dinero (€)	Tiempo (días)	Nº personas
63	1	7
3 240	30	x
} $\frac{63}{3 240} \cdot \frac{30}{1} = \frac{7}{x} \Rightarrow x = 12 \text{ personas.}$		

- 20** Un trabajo se ha realizado con 50 obreros que emplearon 15 días trabajando 10 h diarias. Si el trabajo se hiciese con 75 obreros durante 20 días, ¿cuántas horas diarias tendrían que trabajar?

Solución:

(I)	(I)	(I)
↓	↓	↓
Nº obreros	Tiempo (días)	Tiempo (h/día)
50	15	10
75	20	x
} $\frac{75}{50} \cdot \frac{20}{15} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = 5 \text{ horas/día.}$		

- 21** Calcula el interés producido por un capital de 900 € al 4,5% en 2 años.

Solución:

$$I = 900 \cdot 0,045 \cdot 2 = 81 \text{ €}$$

- 22** ¿Qué capital se debe depositar al 3% para que después de 5 años produzca 750 €?

Solución:

$$c \cdot 0,03 \cdot 5 = 750 \Rightarrow c = 5 000 \text{ €}$$

- 23** ¿A qué rédito se debe depositar un capital de 5 280 € para que produzca un interés de 264 € en 15 meses?

Solución:

$$\frac{5 280 \cdot r \cdot 15}{12} = 264 \Rightarrow r = 0,04 \Rightarrow R = 4\%$$

- 24** ¿Durante cuántos meses se deben dejar depositados 4 800 € al 5% para obtener un capital total de 5 160 €?

Solución:

$$I = 5 160 - 4 800 = 360 \text{ €}$$

$$\frac{4 800 \cdot 0,05 \cdot t}{12} = 360 \Rightarrow t = 18 \text{ meses.}$$

Ejercicios y problemas

1. Razón y proporción

25 Calcula mentalmente las razones entre las cantidades siguientes e interpreta el resultado:

- Un jamón de 9 kg cuesta 72 €
- Un coche en 5 h recorre 450 km
- Rocío tiene 4 €, y Luis, 20 €
- Una finca tiene 25 ha, y otra, 100 ha

Solución:

- $72 : 9 = 8 \text{ €/kg} \Rightarrow$ Es el precio por kilo de jamón.
- $450 : 5 = 90 \text{ km/h} \Rightarrow$ Es la velocidad media.
- $20 : 4 = 5 \Rightarrow$ Luis tiene 5 veces la cantidad de Rocío.
- $100 : 25 = 4 \Rightarrow$ La 2ª finca es 4 veces más grande que la 1ª

26 Completa para que formen proporción:

- $\frac{5}{7} = \frac{\dots}{28}$
- $\frac{\dots}{3} = \frac{35}{15}$
- $\frac{3}{\dots} = \frac{5}{2,5}$
- $\frac{6}{0,5} = \frac{12}{\dots}$

Solución:

- $\frac{5}{7} = \frac{20}{28}$
- $\frac{7}{3} = \frac{35}{15}$
- $\frac{3}{1,5} = \frac{5}{2,5}$
- $\frac{6}{0,5} = \frac{12}{1}$

27 Calcula el cuarto proporcional:

- $\frac{x}{6} = \frac{5}{0,4}$
- $\frac{1,8}{2,5} = \frac{5,4}{x}$
- $\frac{0,2}{1,3} = \frac{x}{3,9}$
- $\frac{0,24}{x} = \frac{0,02}{0,3}$

Solución:

- $x = \frac{6 \cdot 5}{0,4} = 75$
- $x = \frac{2,5 \cdot 5,4}{1,8} = 7,5$
- $x = \frac{0,2 \cdot 3,9}{1,3} = 0,6$
- $x = \frac{0,24 \cdot 0,3}{0,02} = 3,6$

28 Calcula el medio proporcional:

- $\frac{6,4}{x} = \frac{x}{2,5}$
- $\frac{7,2}{x} = \frac{x}{0,8}$

Solución:

- $x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$
- $x^2 = 5,76 \Rightarrow x = \pm 2,4$

2. Magnitudes proporcionales

29 Un reloj se adelanta 4 minutos cada 28 h. ¿Cuánto tiempo se adelantará cada semana?

Solución:

Tiempo (h)	(D)	Tiempo (min)
28	→	4
168	→	x

$$\frac{28}{168} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 24 \text{ minutos.}$$

30 Un grifo vierte 30 litros por minuto y tarda 3 h en llenar un depósito. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar el mismo depósito otro grifo que vierte 45 litros por minuto?

Solución:

Caudal (l/min)	(l)	Tiempo (h)
30	→	3
45	→	x

$$\frac{45}{30} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 2 \text{ horas.}$$

31 Una pieza de tela de 42 m vale 210 €. ¿Cuánto costará una pieza de 64 m de la misma tela?

Solución:

Longitud (m)	(D)	Dinero (€)
42	→	210
64	→	x

$$\frac{42}{64} = \frac{210}{x} \Rightarrow x = 320 \text{ €}$$

32 El tablero de una mesa tiene 120 cm de largo por 80 cm de ancho. Si se desea una mesa de 150 cm de largo y con la misma superficie, ¿cuánto debe medir de ancho?

Solución:

Longitud (m)	(l)	Longitud (m)
120	→	80
150	→	x

$$\frac{150}{120} = \frac{80}{x} \Rightarrow x = 64 \text{ cm}$$

3. Porcentajes

- 33** En la compra de un televisor de 300 €, se ha realizado un descuento del 15%. ¿Cuánto dinero se ha descontado?

Solución:

Se descuenta: $300 \cdot 0,15 = 45 \text{ €}$

- 34** En una mezcla de azúcar, el 20% es azúcar morena. Si hay 150 g de azúcar morena en la mezcla, ¿cuánto pesa el total de la misma?

Solución:

Peso de la mezcla: $150 : 0,2 = 750 \text{ g}$

- 35** En una fiesta de cumpleaños hay 60 botellas de refresco. Si hay 9 botellas de limón, ¿cuál es el tanto por ciento de este tipo de refresco?

Solución:

Tanto por ciento de refresco:

$9 : 60 = 0,15 = 15\%$

- 36** En una planta de envasado de fruta, el 3% de las cajas tiene algún defecto. Si se han envasado 12 500 cajas en total, ¿cuántas cajas hay sin defecto?

Solución:

Nº de cajas sin defecto:

$12\,500 \cdot 0,97 = 12\,125 \text{ cajas.}$

- 37** Un comerciante paga 12 € por unas figuras de cristal. Si se desea ganar el 64% del precio de costo, ¿a qué precio se debe vender cada figura?

Solución:

Precio de venta: $12 \cdot 1,64 = 19,68 \text{ €}$

4. Proporcionalidad compuesta

- 38** El precio por transportar 800 kg de mercancía a una distancia de 120 km es de 80 €. ¿Qué precio se pagará por transportar 1 200 kg a 450 km?

Solución:

	(D)		
	↓	↓	↓
Peso (kg)	Longitud (km)	Dinero (€)	
800	120	80	}
1 200	450	x	
$\frac{800}{1\,200} \cdot \frac{120}{450} = \frac{80}{x} \Rightarrow x = 450 \text{ €}$			

- 39** Una obra se hace con 24 obreros durante 18 días a razón de 8 h diarias. ¿Con cuántos obreros se haría la misma obra en 12 días a razón de 9 h diarias?

Solución:

	(I)		
	↓	↓	↓
Tiempo (días)	Tiempo (h/día)	Nº obreros	
18	8	24	}
12	9	x	
$\frac{12}{18} \cdot \frac{9}{8} = \frac{24}{x} \Rightarrow x = 32 \text{ obreros.}$			

- 40** Cinco grifos abiertos 15 h diarias han vertido agua por valor de 25 €. ¿Qué coste de agua se tendrá con 12 grifos abiertos 6 h diarias durante el mismo período de tiempo?

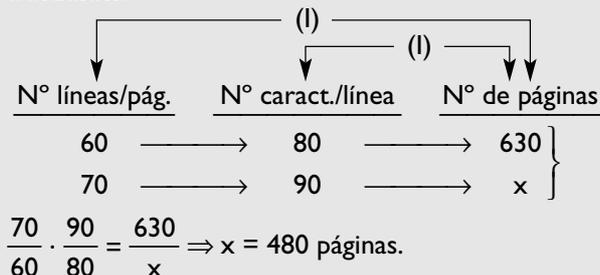
Solución:

	(D)		
	↓	↓	↓
Nº de grifos	Tiempo (h/día)	Dinero (€)	
5	15	25	}
12	6	x	
$\frac{5}{12} \cdot \frac{15}{6} = \frac{25}{x} \Rightarrow x = 24 \text{ €}$			

- 41** Un libro tiene 630 páginas, y cada una de ellas tiene 60 líneas de 80 caracteres. Si se escribe el mismo libro con 70 líneas en cada página, y cada línea tiene 90 caracteres, ¿cuántas páginas tendrá el libro?

Ejercicios y problemas

Solución:



42 ¿Qué interés produce un capital de 7 800 € al 4,5% durante 3 años?

Solución:

$$I = 7\,800 \cdot 0,045 \cdot 3 = 1\,053 \text{ €}$$

43 Calcula el capital que hay que depositar al 3% durante 20 meses para que genere un interés de 225 €

Solución:

$$\frac{c \cdot 0,03 \cdot 20}{12} = 225 \Rightarrow c = 4\,500 \text{ €}$$

44 ¿Cuántos días debe estar un capital de 3 600 € al 4% de interés para obtener 72 €?

Solución:

$$\frac{3\,600 \cdot 0,04 \cdot t}{360} = 72 \Rightarrow t = 180 \text{ días.}$$

Para ampliar

45 Forma una proporción en la que figuren los siguientes datos: 3 kg, 4,5 € y 8 kg

Solución:

$$\frac{3}{4,5} = \frac{8}{x}$$

46 Escribe un ejemplo de cantidades de longitud cuya razón sea 3/4

Solución:

Un árbol de 8 m proyecta una sombra de 6 m

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

47 Calcula el cuarto proporcional:

- a) $\frac{x}{7} = \frac{12}{21}$ b) $\frac{2,5}{3,2} = \frac{10}{x}$
 c) $\frac{5,6}{3,7} = \frac{x}{7,4}$ d) $\frac{4,6}{x} = \frac{9,2}{4,8}$

Solución:

- a) $x = \frac{7 \cdot 12}{21} = 4$ b) $x = \frac{3,2 \cdot 10}{2,5} = 12,8$
 c) $x = \frac{5,6 \cdot 7,4}{3,7} = 11,2$ d) $x = \frac{4,6 \cdot 4,8}{9,2} = 2,4$

48 Calcula el medio proporcional:

- a) $\frac{2,5}{x} = \frac{x}{14,4}$ b) $\frac{6,4}{x} = \frac{x}{22,5}$

Solución:

- a) $x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$
 b) $x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm 12$

49 Calcula el valor de **x** y de **y** en la siguiente expresión:

$$\frac{3,5}{x} = \frac{7}{y} = \frac{21}{36}$$

Solución:

$$x = \frac{3,5 \cdot 36}{21} = 6 \qquad y = \frac{7 \cdot 36}{21} = 12$$

50 Calcula tres números cuya suma sea 20 y cumplan:

$$\frac{1,5}{x} = \frac{4,5}{y} = \frac{6}{z}$$

Solución:

$$\frac{1,5}{x} = \frac{4,5}{y} = \frac{6}{z} = \frac{12}{20}$$

$$x = \frac{1,5 \cdot 20}{12} = 2,5$$

$$y = \frac{4,5 \cdot 20}{12} = 7,5 \qquad z = \frac{6 \cdot 20}{12} = 10$$

- 51** Una familia de 4 miembros pagó 240 € por sus pasajes para unas vacaciones. Si con la familia hubiesen viajado dos familiares más, ¿cuánto se habría pagado por todos los pasajes?

Solución:

Cada uno paga: $240 : 4 = 60$ €

Todos: $6 \cdot 60 = 360$ €

- 52** Diego recorre una distancia en 1,5 h caminando a una velocidad de 4 km/h. Calcula cuánto tardará en recorrer la misma distancia si su velocidad aumenta en 2 km/h

Solución:

Velocidad (km/h)	(I)	Tiempo (h)
4	→	1,5
6	→	x

$$\frac{6}{4} = \frac{1,5}{x} \Rightarrow x = 1 \text{ hora.}$$

- 53** En una granja hay pienso para 2 400 gallinas durante 120 días. Si se venden 600 gallinas, ¿durante cuántos días se tendrá alimento para las gallinas que quedan, sin variar la ración?

Solución:

Nº de gallinas	(I)	Tiempo (días)
2 400	→	120
1 800	→	x

$$\frac{1\ 800}{2\ 400} = \frac{120}{x} \Rightarrow x = 160 \text{ días.}$$

- 54** En una empresa hacen unos calendarios de publicidad para sus clientes. Si por 12 000 calendarios se han pagado 720 €, ¿cuánto se pagará por 20 000 calendarios?

Solución:

Por un calendario se paga:

$$720 : 12\ 000 = 0,06 \text{ €}$$

Por todos los calendarios:

$$20\ 000 \cdot 0,06 = 1\ 200 \text{ €}$$

- 55** Para hacer una obra en 120 días hacen falta 20 obreros trabajando 8 h diarias. ¿Cuántos días duraría la misma obra si hubiese 16 obreros trabajando 6 h diarias?

Solución:

Nº obreros	Tiempo (h/día)	Tiempo (días)
20	→ 8	→ 120
16	→ 6	→ x

$$\frac{16}{20} \cdot \frac{6}{8} = \frac{120}{x} \Rightarrow x = 200 \text{ días.}$$

- 56** Transportar 250 cajas a 400 km de distancia cuesta 320 €. ¿Cuántas cajas pueden transportarse a una distancia de 300 km por 720 €?

Solución:

Dinero (€)	Longitud (km)	Nº de cajas
320	→ 400	→ 250
720	→ 300	→ x

$$\frac{320}{720} \cdot \frac{300}{400} = \frac{250}{x} \Rightarrow x = 750 \text{ cajas.}$$

- 57** Cuatro grifos llenan a la vez un depósito de 8 000 litros en 15 h. ¿Cuánto tiempo tardarán cinco grifos iguales a los anteriores en llenar a la vez un depósito de 12 000 litros?

Solución:

Nº de grifos	Capacidad (l)	Tiempo (h)
4	→ 8 000	→ 15
5	→ 12 000	→ x

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{8\ 000}{12\ 000} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = 18 \text{ horas.}$$

- 58** ¿Qué interés generará un capital de 5 400 € durante 6 meses al 3,5% anual?

Solución:

$$I = \frac{5\ 400 \cdot 0,035 \cdot 6}{12} = 94,5 \text{ €}$$

Ejercicios y problemas

- 59** ¿Durante cuántos meses se deben depositar 3 000 € al 5% de rédito para obtener 112,5 € de interés?

Solución:

$$\frac{3\,000 \cdot 0,05 \cdot t}{12} = 112,5 \Rightarrow t = 9 \text{ meses.}$$

- 60** ¿A qué rédito se deben depositar 9 000 € durante 180 días para obtener 270 €?

Solución:

$$\frac{9\,000 \cdot r \cdot 180}{360} = 270 \Rightarrow r = 0,06 \Rightarrow R = 6\%$$

- 61** Si el 15% de una masa de bollo es leche, ¿cuánta leche contiene un bollo de 250 g?

Solución:

$$\text{Cantidad de leche: } 250 \cdot 0,15 = 37,5 \text{ g}$$

- 62** En una mezcla de pienso para conejos hay un 15% de fibra. ¿Qué cantidad de pienso se le debe dar a un conejo si se quiere que ingiera 27 g de fibra?

Solución:

$$\text{Cantidad de pienso: } 27 : 0,15 = 180 \text{ g}$$

- 63** Jaime ha pagado 27 € por una camisa que costaba 36 €. ¿Qué descuento se ha aplicado?

Solución:

Porcentaje descontado:

$$(36 - 27) : 36 = 0,25 = 25\%$$

- 64** Los padres de Sofía le han prometido un aumento del 20% en su paga. Si su paga mensual es de 24 €, ¿cuánto le darán sus padres mensualmente?

Solución:

$$\text{Paga: } 24 \cdot 1,2 = 28,8 \text{ €}$$

- 65** En un pueblo ha disminuido la población un 8% en los últimos cinco años. Si quedan 782 habitantes, ¿cuántos había en el pueblo?

Solución:

$$782 : 0,92 = 850 \text{ habitantes.}$$

Problemas

- 66** La razón de dos números es $\frac{2}{5}$. Sabiendo que el mayor de ellos es 35, calcula el otro.

Solución:

$$\frac{x}{35} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = 35 \cdot \frac{2}{5} = 14$$

- 67** Se tiene un rectángulo de 5 cm de largo por 4 cm de ancho. Si se construye un rectángulo cuyos lados son proporcionales y cuyo perímetro es 54 cm, ¿cuál es la longitud de sus lados?

Solución:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{27}{9}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{27}{9} \Rightarrow x = \frac{27 \cdot 4}{9} = 12 \text{ cm}$$

$$\frac{y}{5} = \frac{27}{9} \Rightarrow y = \frac{27 \cdot 5}{9} = 15 \text{ cm}$$

- 68** La suma de dos números es 24. Sabiendo que uno de ellos es proporcional a 3, y otro, a 5, calcula dichos números.

Solución:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{24}{8} = 3$$

$$\frac{x}{3} = 3 \Rightarrow x = 3 \cdot 3 = 9$$

$$\frac{y}{5} = 3 \Rightarrow y = 5 \cdot 3 = 15$$

- 69** Un transportista cobra 810 € por trasladar una carga a 45 km de distancia. ¿Cuánto cobrará por trasladar la misma carga a 150 km?

Solución:

Longitud (km)	(D)	Dinero (€)
45	→	810
150	→	x

$$\frac{45}{150} = \frac{810}{x} \Rightarrow x = 2700 \text{ €}$$

- 70** Un trabajo mecanografiado tiene 70 páginas, y cada una de ellas tiene 36 líneas. ¿Cuántas páginas tendría el mismo trabajo si cada página tuviese 30 líneas?

Solución:

Nº de líneas	(I)	Nº de páginas
36	→	70
30	→	x

$$\frac{30}{36} = \frac{70}{x} \Rightarrow x = 84 \text{ páginas.}$$

- 71** En una asociación de vecinos preparan un viaje y contratan un autocar. Al principio se apuntan al viaje 45 personas, que deben pagar 8 € cada una. Si anulan su viaje 9 personas, ¿cuánto debería pagar cada una?

Solución:

Nº de personas	(I)	Dinero (€)
45	→	8
36	→	x

$$\frac{36}{45} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 10 \text{ €}$$

- 72** Para hacer 90 kg de masa de bizcocho se necesitan 54 kg de harina. ¿Cuántos kilos de harina se necesitarán para hacer 160 kg de masa?

Solución:

Masa (kg)	(D)	Masa (kg)
90	→	54
160	→	x

$$\frac{90}{160} = \frac{54}{x} \Rightarrow x = 96 \text{ kg}$$

- 73** Veinte obreros asfaltan un tramo de carretera en 60 días. ¿Cuántos obreros harán falta para asfaltar el mismo tramo en 25 días?

Solución:

Tiempo (días)	(I)	Nº de obreros
60	→	20
25	→	x

$$\frac{25}{60} = \frac{20}{x} \Rightarrow x = 48 \text{ obreros.}$$

- 74** Un grifo abierto 9 h diarias durante 8 días ha vertido 5 400 litros de agua. Si permanece abierto 6 h diarias durante 18 días, ¿cuántos litros habrá vertido?

Solución:

		(D)		
Tiempo (h/día)	Tiempo (días)		Capacidad (l)	
9	→	8	→	5 400
6	→	18	→	x

$$\frac{9}{6} \cdot \frac{8}{18} = \frac{5400}{x} \Rightarrow x = 8100 \text{ litros.}$$

- 75** Un grupo de 8 obreros han canalizado 400 m de tubería en 20 días. ¿En cuánto tiempo se canalizarán 800 m si trabajan 10 obreros?

Solución:

		(I)		
Nº obreros	Longitud (m)		Tiempo (días)	
8	→	400	→	20
10	→	800	→	x

$$\frac{10}{8} \cdot \frac{400}{800} = \frac{20}{x} \Rightarrow x = 32 \text{ días.}$$

- 76** Una persona lee un libro en 8 días dedicando 3 h diarias a razón de 15 páginas por hora. ¿Cuántas horas diarias debe leer para acabar el libro en 20 días a razón de 9 páginas por hora?

Solución:

		(I)		
Tiempo (días)	Página/hora		Tiempo (h/día)	
8	→	15	→	3
20	→	9	→	x

$$\frac{20}{8} \cdot \frac{9}{15} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 2 \text{ horas/día.}$$

Ejercicios y problemas

77 ¿Qué interés generará un capital de 4 800 € durante 18 meses al 6% anual?

Solución:

$$I = \frac{4800 \cdot 0,06 \cdot 18}{12} = 432 \text{ €}$$

78 ¿Durante cuántos meses se deben depositar 12 000 € al 3% de rédito para obtener 600 € de interés?

Solución:

$$\frac{12000 \cdot 0,03 \cdot t}{12} = 600$$

$$30t = 600 \Rightarrow t = 20 \text{ meses.}$$

79 ¿A qué rédito se deben depositar 9 000 € durante 200 días para obtener 250 €?

Solución:

$$\frac{9000 \cdot r \cdot 200}{360} = 250 \Rightarrow r = 0,05 \Rightarrow R = 5\%$$

80 Se prepara para una fiesta una limonada con 15 litros de agua y 10 litros de zumo de limón. ¿Qué porcentaje de zumo de limón tiene la limonada?

Solución:

$$10 : (10 + 15) = 10 : 25 = 0,4 = 40\%$$

81 El precio de un bono de 10 viajes de autobús ha pasado de 4,6 € a 4,83 €. ¿Qué porcentaje de subida ha tenido el bono?

Solución:

$$4,83 : 4,6 = 1,05 \Rightarrow \text{Ha subido un } 5\%$$

82 En un cultivo de 130 000 bacterias, se ha producido un aumento del 15%. ¿Cuántas bacterias se encuentran en el cultivo?

Solución:

$$130000 \cdot 1,15 = 149500 \text{ bacterias.}$$

83 En un ayuntamiento organizan todos los años una campaña para recoger dinero para las familias necesitadas. Este año han recogido un 12% más que el año pasado. Si el año anterior recogieron 13 500 €, ¿cuánto han recogido este año?

Solución:

$$13500 \cdot 1,12 = 15120 \text{ €}$$

Para profundizar

84 Una rueda de 25 dientes está engranada a otra rueda de 50 dientes. Si la primera gira a 120 revoluciones por minuto, ¿a cuántas revoluciones por minuto girará la segunda?

Solución:

Nº de dientes	(l)	Velocidad (rpm)
25	—————→	120
50	—————→	x

$$\frac{50}{25} = \frac{120}{x} \Rightarrow x = 60 \text{ rpm}$$

85 Una habitación está enlosada con 250 baldosas cuadradas de 20 cm de lado. Si se quiere cambiar el suelo poniendo baldosas cuadradas de 50 cm de lado, ¿cuántas baldosas se necesitarán?

Solución:

Área (cm ²)	(l)	Nº de baldosas
20 ²	—————→	250
50 ²	—————→	x

$$\frac{50^2}{20^2} = \frac{250}{x} \Rightarrow x = 40 \text{ baldosas.}$$

86 En una granja se tiene alimento para 150 conejos durante 80 días. Si al cabo de 20 días se venden 100 conejos, ¿durante cuántos días se tendrá alimento para los conejos que quedan, sin variar la ración?

Solución:

Nº de conejos	(l)	Tiempo (días)
150	—————→	60
50	—————→	x

$$\frac{50}{150} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = 180 \text{ días.}$$

87 En una factura de 250 €, hemos pagado 290 € por un recargo de demora. ¿Qué porcentaje han incrementado en la factura?

Solución:

Tanto por ciento: $290 : 250 = 1,16 \Rightarrow 16\%$

88 En la compra de unos pantalones, nos aplican un descuento del 20%. Calcula el precio de los pantalones si hemos pagado 57,6 €

Solución:

$57,6 : 0,8 = 72 \text{ €}$

Aplica tus competencias

89 En la factura de un hotel se ha realizado un descuento de un 20% y se ha aumentado el 16% de impuestos. Si el precio de la factura era de 290 €, ¿cuánto se ha pagado en total?

Solución:

$$290 \cdot 0,8 \cdot 1,16 = 269,12 \text{ €}$$

90 Un calzado deportivo que costaba 60 € ha aumentado su precio un 12% en un año, y al año siguiente aumenta un 10%. ¿Cuánto se pagará por ese calzado después de dos años?

Solución:

$$60 \cdot 1,12 \cdot 1,1 = 73,92 \text{ €}$$

Comprueba lo que sabes

- 1** Define qué son magnitudes inversamente proporcionales y pon un ejemplo.

Solución:

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si el producto de las cantidades correspondientes es constante.

La **constante de proporcionalidad** inversa es el valor de este producto.

Ejemplo

Para hacer una obra 10 obreros han tardado 6 días.

Nº obreros	10	20	30	40	50	60
Nº de días	6	3	2	1,5	1,2	1

Las magnitudes *número de obreros* y *número de días* que tardan en hacer la obra son inversamente proporcionales y la constante de proporcionalidad inversa es **60**

- 2** Calcula el término que falta en las siguientes proporciones:

a) $\frac{3,2}{5,8} = \frac{4,8}{x}$ b) $\frac{0,4}{x} = \frac{x}{0,9}$

Solución:

a) $x = \frac{5,8 \cdot 4,8}{3,2} = 8,7$

b) $x^2 = 0,4 \cdot 0,9 \Rightarrow x = \pm 0,6$

- 3** Un reloj se adelanta 4 minutos cada 28 h. ¿Cuánto tiempo se adelantará cada semana?

Solución:

Tiempo (h)	(D)	Tiempo (min)
28	→	4
168	→	x

$$\frac{28}{168} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 24 \text{ minutos.}$$

- 4** Se llena un contenedor con 1 200 sacos de patatas de 4 kg cada uno. Si los sacos fueran de 5 kg, ¿cuántos sacos cabrían en el contenedor?

Solución:

Masa (kg)	(I)	Nº de sacos
4	→	1 200
5	→	x

$$\frac{5}{4} = \frac{1 200}{x} \Rightarrow x = 960 \text{ sacos.}$$

- 5** Una frutería que vende 140 kg de manzanas ha aumentado sus ventas un 20%. ¿Cuántos kilos de manzanas vende ahora?

Solución:

$$140 \cdot 1,2 = 168 \text{ kg}$$

- 6** En una granja de cerdos, se muere un 22% de los animales por la peste porcina. Si quedan 273 animales, ¿cuántos cerdos había en la granja?

Solución:

$$273 : 0,78 = 350 \text{ cerdos.}$$

- 7** ¿A qué rédito se deben depositar 9 000 € durante 200 días para obtener 250 €?

Solución:

$$\frac{9 000 \cdot r \cdot 200}{360} = 250 \Rightarrow r = 0,05 \Rightarrow R = 5 \%$$

- 8** Una familia de 4 personas puede mantenerse durante 6 meses con 7 200 €. ¿Cuántas personas podrán mantenerse durante 9 meses con 21 600 €?

Solución:

Dinero (€)	Tiempo (meses)	Nº personas
7 200	→	6
21 600	→	9

$$\frac{7 200}{21 600} \cdot \frac{9}{6} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 8 \text{ personas.}$$

Paso a paso

91 Calcula el cuarto proporcional:

$$\frac{5}{7} = \frac{10}{x}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

92 Una máquina hace 8 circuitos en 14 minutos. ¿Cuánto tardará en hacer 2 circuitos?

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

93 En una tienda de ropa hacen una rebaja del 20% a una chaqueta que cuesta 112 €. Calcula la cantidad que se paga por la chaqueta.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

94 Un ganadero necesita 600 kg de pienso para alimentar a 40 vacas durante 8 días. ¿Durante cuántos días podrá alimentar a 20 vacas con 1 500 kg de pienso?

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

95 Se depositan 750 € a un interés simple del 3% durante 4 años. ¿Qué capital tendremos al finalizar ese tiempo?

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

96 Internet. Abre la web: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas**, **curso** y **tema**.

Practica

97 Calcula el cuarto proporcional:

a) $\frac{x}{9} = \frac{8}{3}$

b) $\frac{0,5}{1,5} = \frac{4,2}{x}$

c) $\frac{5,2}{4,3} = \frac{x}{8,6}$

d) $\frac{3,6}{x} = \frac{1,8}{2,3}$

Solución:

a) $x = \frac{8 \cdot 9}{3} = 24$

b) $x = \frac{1,5 \cdot 4,2}{0,5} = 12,6$

c) $x = \frac{5,2 \cdot 8,6}{4,3} = 10,4$

d) $x = \frac{3,6 \cdot 2,3}{1,8} = 4,6$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

98 Si 6 cajas de ciruelas cuestan 9,72 €, ¿cuánto costarán 21 cajas iguales?

Solución:

Nº de cajas	(D)	Dinero (€)
6	→	9,72
21	→	x

$\frac{6}{21} = \frac{9,72}{x} \Rightarrow x = 34,02 \text{ €}$

99 Para almacenar una colección de cómics hemos utilizado 60 carpetas con 4 cómics cada una. Si se quieren almacenar 5 cómics en cada carpeta, ¿cuántas se necesitarán?

Solución:

Nº de cómics	(I)	Nº de carpetas
4	→	60
5	→	x

$\frac{5}{4} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = 48 \text{ carpetas.}$

100 ¿Qué tanto por ciento se ha aplicado a 150 € si se han obtenido 18 €?

Solución:

$$\frac{18}{150} = 0,12 = 12\%$$

101 Calcula el 40% de 380 €

Solución:

$$380 \cdot 0,4 = 152 \text{ €}$$

102 Al calcular el 20% sobre una cantidad, se han obtenido 24 €. ¿Cuál es la cantidad total?

Solución:

$$\frac{24}{0,2} = 120 \text{ €}$$

103 A Sonia le han aplicado un 20% de rebaja en el seguro del coche por no haber tenido accidentes. Si ahora le cuesta 600 €, ¿cuánto pagaba anteriormente?

Solución:

$$\frac{600}{0,8} = 750 \text{ €}$$

104 Alba ganaba 1 400 € y ha recibido un aumento del 5% en su salario. ¿Cuánto gana ahora?

Solución:

$$1\,400 \cdot 1,05 = 1\,470 \text{ €}$$

105 Durante unas vacaciones, 7 personas gastan en alimentación 63 € diarios. Calcula cuántas personas podrán alimentarse durante 30 días con 3 240 €

Solución:

Dinero (€)	Tiempo (días)	Nº personas
63	1	7
3 240	30	x

$\frac{63}{3\,240} \cdot \frac{30}{1} = \frac{7}{x} \Rightarrow x = 12 \text{ personas.}$

106 Calcula el interés producido por un capital de 900 € al 4,5% en 2 años.

Solución:

$$900 \cdot 0,045 \cdot 2 = 81 \text{ €}$$

107 ¿Durante cuántos meses se deben depositar 12 000 € al 4,5% de rédito para obtener 675 € de interés?

Solución:

$$\frac{12\,000 \cdot 0,045 \cdot t}{12} = 675 \Rightarrow t = 15 \text{ meses.}$$

108 ¿A qué rédito se deben depositar 4 860 € durante 240 días para obtener 113,4 €?

Solución:

$$\frac{4\,860 \cdot r \cdot 240}{360} = 113,4$$

$$r = 0,035 \Rightarrow R = 3,5\%$$

109 En una academia hay 48 alumnos y 72 alumnas. ¿Qué porcentaje hay de cada grupo?

Solución:

Tanto por ciento de alumnos:

$$\frac{48}{48 + 72} = 0,4 = 40\%$$

Tanto por ciento de alumnas:

$$60\%$$

110 Una impresora cuesta 218 € sin descuento y 185,3 € con descuento. ¿Qué porcentaje de descuento se hace en el precio de la impresora?

Solución:

Tanto por ciento pagado:

$$\frac{185,3}{218} = 0,85 = 85\%$$

Tanto por ciento de descuento:

$$15\%$$

6

Resolución de problemas aritméticos



1. Problemas de reparto

PIENSA Y CALCULA

Reparte mentalmente 50 bombones, de forma directamente proporcional a 2 y 3



Solución:

$$50 : 5 = 10$$

En el primer bote: $10 \cdot 2 = 20$ bombones.

En el segundo bote: $10 \cdot 3 = 30$ bombones.

Carné calculista $485,7 : 6,8 \mid C = 71,42; R = 0,044$

APLICA LA TEORÍA

- 1** Reparte 990 de forma directamente proporcional a 7 y 15

Solución:

$$a) \frac{990}{7 + 15} = 45$$

$$b) 1^{\text{a}} \text{ parte: } 45 \cdot 7 = 315$$

$$2^{\text{a}} \text{ parte: } 45 \cdot 15 = 675$$

Solución:

$$m.c.m.(4, 5) = 20$$

$$a) \frac{1}{4} = \frac{5}{20}, \frac{1}{5} = \frac{4}{20}$$

$$b) \frac{225}{5 + 4} = 25$$

$$1^{\text{a}} \text{ parte: } 25 \cdot 5 = 125$$

$$2^{\text{a}} \text{ parte: } 25 \cdot 4 = 100$$

- 2** Reparte 225 de forma inversamente proporcional a 4 y 5

- 3** Reparte 660 de forma directamente proporcional a 6, 10 y 14

Solución:

a) $\frac{660}{6 + 10 + 14} = 22$

- b) 1ª parte: $22 \cdot 6 = 132$
 2ª parte: $22 \cdot 10 = 220$
 3ª parte: $22 \cdot 14 = 308$

- 4** Reparte 183 de forma inversamente proporcional a 3, 4 y 7

Solución:

m.c.m.(3, 4, 7) = 84

a) $\frac{1}{3} = \frac{28}{84}, \frac{1}{4} = \frac{21}{84}, \frac{1}{7} = \frac{12}{84}$

b) $\frac{183}{28 + 21 + 12} = 3$

- 1ª parte: $3 \cdot 28 = 84$
 2ª parte: $3 \cdot 21 = 63$
 3ª parte: $3 \cdot 12 = 36$

- 5** Sara quiere repartir 580 € de forma directamente proporcional a las edades de sus sobrinos Óscar, Diego y María, que tienen, respectivamente, 7, 10 y 12 años. Calcula la cantidad que le corresponde a cada uno.

Solución:

a) $\frac{580}{7 + 10 + 12} = 20$

- b) Óscar: $20 \cdot 7 = 140$ €
 Diego: $20 \cdot 10 = 200$ €
 María: $20 \cdot 12 = 240$ €

- 6** En un juego se deben repartir 210 puntos de forma inversamente proporcional al número de faltas que han cometido sus tres concursantes. Si Antonio ha cometido 4; Rubén, 6; y Sara, 12, ¿cuántos puntos le corresponden a cada uno?

Solución:

m.c.m.(4, 6, 12) = 12

a) $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}, \frac{1}{6} = \frac{2}{12}, \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$

b) $\frac{210}{3 + 2 + 1} = 35$

- Antonio: $35 \cdot 3 = 105$ puntos.
 Rubén: $35 \cdot 2 = 70$ puntos.
 Sara: $35 \cdot 1 = 35$ puntos.

2. Problemas de grifos

PIENSA Y CALCULA

Un grifo A tarda 3 h en llenar un depósito. ¿Qué fracción del depósito llenará el grifo en una hora?

Solución:

En una hora llena $\frac{1}{3}$ del depósito.

Carné calculista $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{1}{6}$

APLICA LA TEORÍA

- 7** Un grifo A llena un depósito de agua en 3 h, y otro grifo B, en 1 h. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar a la vez el depósito?

Solución:

a) Grifo A llena en una hora: $\frac{1}{3}$ del depósito.

Grifo B llena en una hora: el depósito entero.

- b) Los dos juntos llenan en una hora:

$$\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \text{ del depósito.}$$

- c) El tiempo que tardan es:

$$1 : \frac{4}{3} = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \text{ de hora} = 45 \text{ min}$$

- 8** Un grifo A llena un depósito de agua en 2 h, y otro grifo B, en 3 h. El depósito tiene un desagüe que lo vacía en 6 h estando los grifos cerrados. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar a la vez el depósito estando el desagüe abierto?

Solución:

a) Grifo A llena en una hora: $\frac{1}{2}$ del depósito.

Grifo B llena en una hora: $\frac{1}{3}$ del depósito.

Desagüe vacía en una hora: $\frac{1}{6}$ del depósito.

b) Los dos grifos juntos con el desagüe abierto llenan en una hora:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \text{ del depósito.}$$

c) El tiempo que tardan es:

$$1 : \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ h} = 1 \text{ h } 30 \text{ min}$$

- 9** Un grifo A llena un depósito de agua en 2 h; otro grifo B, en 5 h, y otro C, en 10 h. ¿Cuánto tiempo tardarán los tres grifos en llenar a la vez el depósito?

Solución:

a) Grifo A llena en una hora: $\frac{1}{2}$ del depósito.

Grifo B llena en una hora: $\frac{1}{5}$ del depósito.

Grifo C llena en una hora: $\frac{1}{10}$ del depósito.

b) Los tres juntos llenan en una hora:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \text{ del depósito.}$$

c) El tiempo que tardan es:

$$1 : \frac{4}{5} = 1 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ h} = 1 \text{ h } 15 \text{ min}$$

- 10** Un grifo A llena un depósito de agua en 2 h; otro grifo B, en 3 h, y otro C, en 4 h. El depósito tiene un desagüe que lo vacía en 12 h estando los grifos cerrados. ¿Cuánto tiempo tardarán los tres grifos en llenar a la vez el depósito estando el desagüe abierto?

Solución:

a) Grifo A llena en una hora: $\frac{1}{2}$ del depósito.

Grifo B llena en una hora: $\frac{1}{3}$ del depósito.

Grifo C llena en una hora: $\frac{1}{4}$ del depósito.

Desagüe vacía en una hora: $\frac{1}{12}$ del depósito.

b) Los dos grifos juntos con el desagüe abierto llenan en una hora:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = 1$$

c) El tiempo que tardan es: 1 h

3. Problemas de mezclas

Si se mezcla el cacao de dos paquetes de un kilo cada uno, cuyos precios son 5 €/kg y 3 €/kg, ¿a qué precio hay que vender el kilo de la mezcla para no perder ni ganar?

Solución:

$$\frac{5 + 3}{2} = 4 \text{ €/kg}$$

PIENSA Y CALCULA



Carné calculista 468,35 : 87 | C = 5,38; R = 0,29

11 Se tienen 30 kg de un surtido normal de frutos secos a un precio de 12 € el kilo y 50 kg de otro surtido extra a un precio de 14 € el kilo. Si se mezclan los dos surtidos, ¿qué precio tendrá el kilo de mezcla?

Solución:

	F. s. n.	F. s. extra	Mezcla
Masa (kg)	30	50	80
Precio (€/kg)	12	14	p
Dinero (€)	$30 \cdot 12 + 50 \cdot 14 = 80 p$		

b) El precio de la mezcla es:

$$p = \frac{1060}{80} = 13,25 \text{ €/kg}$$

12 Se mezclan 120 litros de un jabón líquido sin aceite protector de la piel, de 1,5 € el litro, con 80 litros de otro jabón líquido con aceite protector, de 2 € el litro. ¿A qué precio se debe vender la mezcla?

Solución:

	J. líq. sin ac.	J. líq. con ac.	Mezcla
Capacidad (l)	120	80	200
Precio (€/l)	1,5	2	p
Dinero (€)	$120 \cdot 1,5 + 80 \cdot 2 = 200 p$		

b) El precio de la mezcla es:

$$p = \frac{340}{200} = 1,7 \text{ €/litro}$$

13 Se mezclan 5 litros de colonia con alcohol, de 60 € el litro, con 3 litros de colonia sin alcohol, de 80 € el litro. Calcula el precio medio por litro de la mezcla.

Solución:

	C. con ac.	C. sin ac.	Mezcla
Capacidad (l)	5	3	8
Precio (€/l)	60	80	p
Dinero (€)	$5 \cdot 60 + 3 \cdot 80 = 8 p$		

b) El precio de la mezcla es:

$$p = \frac{540}{8} = 67,5 \text{ €/litro}$$

14 Si se funden 15 g de oro puro con 10 g de cobre, ¿cuál es la ley de la aleación?

Solución:

$$\text{Ley} = \frac{15}{15 + 10} = 0,6 = 60\%$$

15 Se tienen un lingote de 500 g de oro A con una ley 0,8 y otro de 300 g de oro B con una ley 0,6. Si se alean o se funden los dos lingotes, ¿cuál es la ley de la aleación?

Solución:

	Oro A	Oro B	Aleación
Masa (g)	500	300	800
Ley	0,8	0,6	L
Masa de oro (g)	$500 \cdot 0,8 + 300 \cdot 0,6 = 800 L$		

b) La ley de la aleación es:

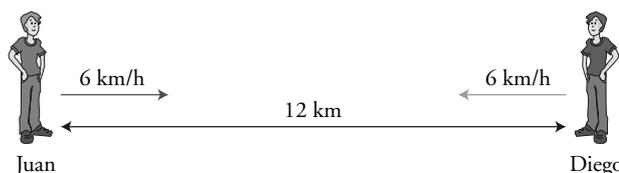
$$\text{Ley} = \frac{580}{800} = 0,725 = 72,5\%$$

4. Problemas de móviles y de relojes

¿Cuánto tiempo tardarán en encontrarse Juan y Diego?

Solución:

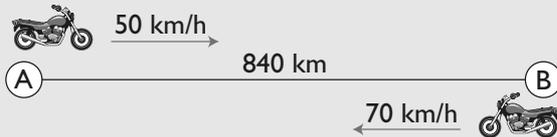
$$12 : 12 = 1 \text{ hora}$$



Carné calculista $\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{6} \right) = \frac{8}{5}$

16 Desde la ciudad A sale una moto hacia B con una velocidad de 50 km/h. A la misma hora sale de B hacia A otra moto a 70 km/h. Si la distancia entre las dos ciudades es de 840 km, ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

Solución:



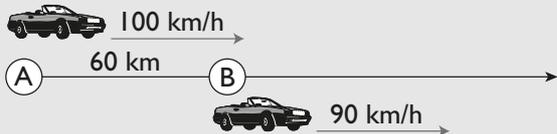
- a) La velocidad es: $v = 50 + 70 = 120$ km/h
 b) El tiempo es:

$$t = \frac{e}{v}$$

$$t = \frac{840}{120} = 7 \text{ h}$$

17 Un coche sale de A y, al mismo tiempo, otro sale de B; ambos van hacia el sur por la misma carretera, con velocidades de 100 km/h y 90 km/h, respectivamente. Si B está hacia el sur a una distancia de 60 km de A, ¿cuánto tardará el coche que sale de A en alcanzar al coche que sale de B?

Solución:

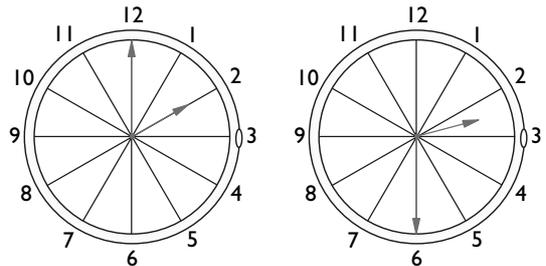


- a) La velocidad es: $v = 100 - 90 = 10$ km/h
 b) El tiempo es:

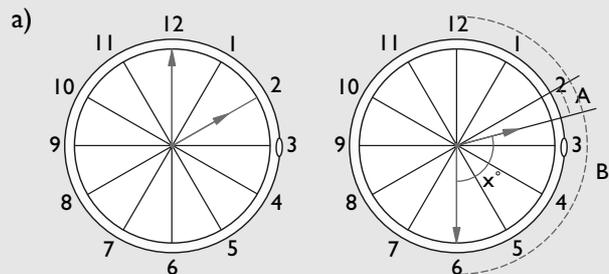
$$t = \frac{e}{v}$$

$$t = \frac{60}{10} = 6 \text{ h}$$

18 ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las dos y media?



Solución:



- b) El ángulo B = $6 \cdot 30^\circ = 180^\circ$
 c) El ángulo A = $180^\circ : 12 = 15^\circ$
 d) El ángulo x = $3 \cdot 30^\circ + 15^\circ = 105^\circ$

Ejercicios y problemas

1. Problemas de reparto

- 19** Reparte 15 000 de forma directamente proporcional a 2, 3 y 5

Solución:

$$a) \frac{15\,000}{2+3+5} = 1\,500$$

- b) 1ª parte: $1\,500 \cdot 2 = 3\,000$
2ª parte: $1\,500 \cdot 3 = 4\,500$
3ª parte: $1\,500 \cdot 5 = 7\,500$

- 20** Reparte 1 500 de forma inversamente proporcional a 4, 6 y 12

Solución:

$$\text{m.c.m.}(4, 6, 12) = 12$$

$$a) \frac{1}{4} = \frac{3}{12}, \frac{1}{6} = \frac{2}{12}, \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$b) \frac{1\,500}{3+2+1} = 250$$

- 1ª parte: $250 \cdot 3 = 750$
2ª parte: $250 \cdot 2 = 500$
3ª parte: $250 \cdot 1 = 250$

- 21** Reparte 1 080 de forma directamente proporcional a 13, 19 y 22

Solución:

$$a) \frac{1\,080}{13+19+22} = 20$$

- b) 1ª parte: $20 \cdot 13 = 260$
2ª parte: $20 \cdot 19 = 380$
3ª parte: $20 \cdot 22 = 440$

- 22** Reparte 2 125 de forma inversamente proporcional a 6, 8 y 16

Solución:

$$\text{m.c.m.}(6, 8, 16) = 48$$

$$a) \frac{1}{6} = \frac{8}{48}, \frac{1}{8} = \frac{6}{48}, \frac{1}{16} = \frac{3}{48}$$

$$b) \frac{2\,125}{8+6+3} = 125$$

- 1ª parte: $125 \cdot 8 = 1\,000$
2ª parte: $125 \cdot 6 = 750$
3ª parte: $125 \cdot 3 = 375$

- 23** Una empresaria reparte 3 000 € entre tres trabajadores de forma directamente proporcional al tiempo que llevan trabajando. ¿Cuánto le corresponderá a cada uno si llevan 12, 8 y 5 años, respectivamente?

Solución:

$$a) \frac{3\,000}{12+8+5} = 120$$

- b) 1º trabajador: $120 \cdot 12 = 1\,440$ €
2º trabajador: $120 \cdot 8 = 960$ €
3º trabajador: $120 \cdot 5 = 600$ €

- 24** Se deben repartir 220 € de forma inversamente proporcional al lugar en el que quedan los tres primeros clasificados de una carrera. Calcula el dinero que le corresponde a cada uno.

Solución:

$$\text{m.c.m.}(1, 2, 3) = 6$$

$$a) \frac{1}{6} = \frac{6}{6}, \frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

$$b) \frac{220}{6+3+2} = 20$$

- 1º corredor: $20 \cdot 6 = 120$ €
2º corredor: $20 \cdot 3 = 60$ €
3º corredor: $20 \cdot 2 = 40$ €

2. Problemas de grifos

- 25** Un grifo A llena un depósito de agua en 8 h, y otro grifo B, en 12 h. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar a la vez el depósito?

Solución:

a) Grifo A llena en una hora: $\frac{1}{8}$ del depósito.

Grifo B llena en una hora: $\frac{1}{12}$ del depósito.

- b) Los dos juntos llenan en una hora:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24} \text{ del depósito.}$$

- c) El tiempo que tardan es:

$$1 : \frac{5}{24} = 1 \cdot \frac{24}{5} = \frac{24}{5} = 4,8 \text{ h} = 4 \text{ h } 48 \text{ min}$$

Ejercicios y problemas

- 26** Un estanque tiene dos desagües que lo vacían en 60 h y 40 h, respectivamente. Si se abren los dos desagües a la vez, ¿cuánto tiempo tardará en vaciarse el estanque?

Solución:

a) El primer desagüe vacía en una hora: $\frac{1}{60}$ del depósito.

El segundo desagüe vacía en una hora: $\frac{1}{40}$ del depósito.

b) Los dos juntos vacían en una hora:

$$\frac{1}{60} + \frac{1}{40} = \frac{1}{24} \text{ del depósito.}$$

c) El tiempo que tardan es:

$$1 : \frac{1}{24} = 1 \cdot \frac{24}{1} = 24 \text{ h}$$

- 27** Un grifo A llena un depósito de agua en 12 h; otro grifo B, en 6 h, y otro C, en 4 h. El depósito tiene un desagüe que lo vacía en 10 h estando los grifos cerrados. ¿Cuánto tiempo tardarán los tres grifos en llenar a la vez el depósito estando el desagüe abierto?

Solución:

a) Grifo A llena en una hora: $\frac{1}{12}$ del depósito.

Grifo B llena en una hora: $\frac{1}{6}$ del depósito.

Grifo C llena en una hora: $\frac{1}{4}$ del depósito.

Desagüe vacía en una hora: $\frac{1}{10}$ del depósito.

b) Los tres grifos juntos con el desagüe abierto llenan en una hora:

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

c) El tiempo que tardan es:

$$1 : \frac{2}{5} = 1 \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ h} = 2 \text{ h } 30 \text{ min}$$

- 28** Un depósito tiene tres grifos que vierten 1 440 litros en 2 h, 1 620 litros en 3 h y 2 100 litros en 5 h. Si el depósito tiene una capacidad de 10 080 litros, ¿cuánto tiempo tardarán los tres grifos en llenar a la vez el depósito?

Solución:

a) Primer grifo llena: $\frac{1\ 440}{2} = 720$ litros/hora

Segundo grifo llena: $\frac{1\ 620}{3} = 540$ litros/hora

Tercer grifo llena: $\frac{2\ 100}{5} = 420$ litros/hora

b) Los tres grifos juntos:

$$720 + 540 + 420 = 1\ 680 \text{ litros/hora}$$

c) El tiempo que tarda es: $10\ 080 : 1\ 680 = 6 \text{ h}$

3. Problemas de mezclas

- 29** Se tienen 300 kg de arroz extra de 1,6 € el kilo y 200 kg de arroz normal de 0,7 € el kilo. Si se mezclan los dos tipos de arroz, ¿qué precio tendrá el kilo de mezcla?

Solución:

a)

	A. extra	A. normal	Mezcla
Masa (kg)	300	200	500
Precio (€/kg)	1,6	0,7	p
Dinero (€)	$300 \cdot 1,6 + 200 \cdot 0,7 = 500 p$		

b) El precio de la mezcla es:

$$p = \frac{620}{500} = 1,24 \text{ €/kg}$$

- 30** Se desean mezclar 60 kg de café natural de 7,4 € el kilo, con 90 kg de café torrefacto de 6,8 € el kilo. ¿Cuál será el precio del kilo de la mezcla?

Solución:

a)

	C. natural	C. torref.	Mezcla
Masa (kg)	60	90	150
Precio (€/kg)	7,4	6,8	p
Dinero (€)	$60 \cdot 7,4 + 90 \cdot 6,8 = 150 p$		

b) El precio de la mezcla es:

$$p = \frac{1\ 056}{150} = 7,04 \text{ €/kg}$$

- 31** Se mezclan 100 kg de trigo a un precio de 0,15 € el kilo, con 50 kg de cebada de 0,12 € el kilo. ¿Cuál es el precio de la mezcla?

Solución:

	Trigo	Cebada	Mezcla
Masa (kg)	100	50	150
Precio (€/kg)	0,15	0,12	p
Dinero (€)	$100 \cdot 0,15 + 50 \cdot 0,12 = 150p$		

b) El precio de la mezcla es:

$$p = \frac{21}{150} = 0,14 \text{ €/kg}$$

32 Si una cadena de 40 g tiene 32 g de oro puro, ¿cuál es su ley?

Solución:

$$\text{Ley} = \frac{32}{40} = 0,8 = 80\%$$

33 Una pieza de plata de ley 0,65 contiene 13 g de plata pura. ¿Cuánto pesa la pieza?

Solución:

$$\frac{13}{0,65} = 20 \text{ g}$$

34 Se funden 15 g de plata A de ley 0,8 con 35 g de plata B de ley 0,7. Calcula la ley de la aleación.

Solución:

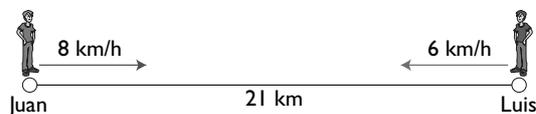
	Plata A	Plata B	Aleación
Masa (g)	15	35	50
Ley	0,8	0,7	L
Masa de plata (g)	$15 \cdot 0,8 + 35 \cdot 0,7 = 50L$		

b) La ley de la aleación es:

$$\text{Ley} = \frac{36,5}{50} = 0,73 = 73\%$$

4. Problemas de móviles y de relojes

35 A la misma hora, Juan y Luis salen de dos pueblos distantes entre sí 21 km, y van el uno hacia el otro. La velocidad de Juan es de 8 km/h, y la de Luis, de 6 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

**Solución:**

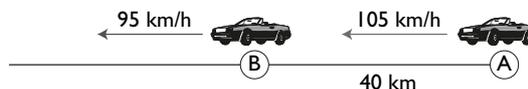
a) La velocidad es: $v = 8 + 6 = 14 \text{ km/h}$

b) El tiempo es:

$$t = \frac{e}{v}$$

$$t = \frac{21}{14} = 1,5 \text{ h} = 1 \text{ h } 30 \text{ min}$$

36 Dos coches salen a la vez desde un pueblo A y desde un pueblo B hacia el oeste por la misma carretera, con velocidades de 105 km/h y 95 km/h, respectivamente. Si B está hacia el oeste a una distancia de 40 km de A, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar el coche que sale desde A al que ha salido de B?

**Solución:**

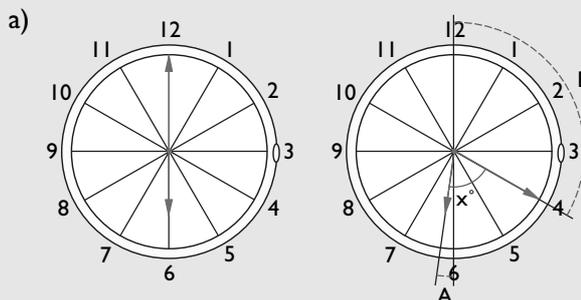
a) La velocidad es: $v = 105 - 95 = 10 \text{ km/h}$

b) El tiempo es:

$$t = \frac{e}{v}$$

$$t = \frac{40}{10} = 4 \text{ h}$$

37 Calcula el ángulo que forman las agujas de un reloj a las seis y veinte.

Solución:

b) El ángulo B = $4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$

c) El ángulo A = $120^\circ : 12 = 10^\circ$

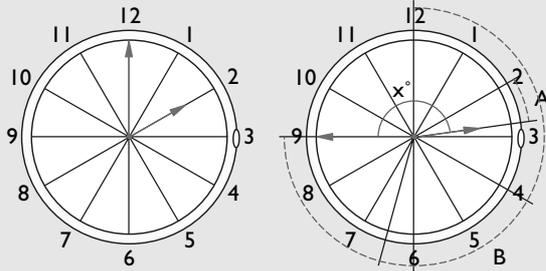
d) El ángulo x = $2 \cdot 30^\circ + 10^\circ = 70^\circ$

38 ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las tres menos cuarto?

Ejercicios y problemas

Solución:

a)



b) El ángulo $B = 9 \cdot 30^\circ = 270^\circ$

c) El ángulo $A = 270^\circ : 12 = 22,5^\circ$

d) El ángulo $x = 6 \cdot 30^\circ - (30^\circ - 22,5^\circ) = 172,5^\circ = 172^\circ 30'$

Para ampliar

39 Tres agricultores transportan sus cosechas de trigo en camiones que pagan entre los tres de forma directamente proporcional al trigo que envía cada uno. Los agricultores envían 120, 230 y 250 sacos, respectivamente. Si el transporte cuesta 1 800 €, ¿cuánto pagará cada uno?

Solución:

$$a) \frac{1\ 800}{120 + 230 + 250} = 3$$

- b) 1^{er} agricultor: $3 \cdot 120 = 360$ €
 2^o agricultor: $3 \cdot 230 = 690$ €
 3^{er} agricultor: $3 \cdot 250 = 750$ €

40 Un empresario reparte 9 360 € de forma inversamente proporcional a los salarios que perciben tres obreros. Si los salarios son 720 €, 900 € y 1 200 €, respectivamente, ¿cuánto le corresponderá a cada uno?

Solución:

$$\text{m.c.m. } (720, 900, 1200) = 3\ 600$$

$$a) \frac{1}{720} = \frac{5}{3\ 600}, \frac{1}{900} = \frac{4}{3\ 600}, \frac{1}{1\ 200} = \frac{3}{3\ 600}$$

$$b) \frac{9\ 360}{5 + 4 + 3} = 780$$

- 1^a parte: $780 \cdot 5 = 3\ 900$ €
 2^a parte: $780 \cdot 4 = 3\ 120$ €
 3^a parte: $780 \cdot 3 = 2\ 340$ €

41 Un grifo vierte 6 litros por minuto, y otro grifo, 8 litros por minuto. Se abren a la vez para llenar un depósito que tiene un desagüe por el que se pierden

4 litros por minuto. Si el depósito tiene una capacidad de 4 800 litros, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse?

Solución:

- a) Primer grifo llena: 6 litros/min
 Segundo grifo llena: 8 litros/min
 Desagüe vacía: 4 litros/min
- b) Los dos grifos juntos con el desagüe llenan:
 $6 + 8 - 4 = 10$ litros/min
- c) El tiempo que tarda es:
 $4\ 800 : 10 = 480$ min = 8 horas

42 Un depósito tiene dos grifos que vierten 45 litros cada 5 minutos, y 96 litros en 8 minutos, respectivamente. Se abren los dos grifos a la vez para llenar el depósito, que tiene una capacidad de 546 litros. Calcula el tiempo que tardará en llenarse.

Solución:

- a) Primer grifo llena: $45/5 = 9$ litros/min
 Segundo grifo llena: $96/8 = 12$ litros/min
- b) Los dos grifos juntos llenan:
 $9 + 12 = 21$ litros/min
- c) El tiempo que tarda es: $546 : 21 = 26$ min

43 Un depósito tiene un grifo que vierte 720 litros por hora, y un desagüe por el que pierde 480 litros por hora. Si con el grifo y el desagüe abiertos se ha llenado el depósito en 5 horas, ¿cuál es la capacidad del depósito?

Solución:

- a) Grifo llena: 720 litros/h
 Desagüe vacía: 480 litros/h

b) El grifo y el desagüe juntos llenan:

$$720 - 480 = 240 \text{ litros/h}$$

c) La capacidad del depósito es:

$$240 \cdot 5 = 1\,200 \text{ litros}$$

- 44** Se tienen 40 litros de un licor A de 12 grados, que se mezclan con 60 litros de otro licor B similar de 15 grados. Calcula la graduación media de la mezcla.

Solución:

a)	Licor A	Licor B	Mezcla
Capacidad (l)	40	60	100
Graduación (%)	12	15	p
Alcohol (g)	$40 \cdot 12 + 60 \cdot 15 = 100p$		

b) La graduación de la mezcla es:

$$p = \frac{1\,380}{100} = 13,8^\circ$$

- 45** Se desean vender mezcladas 60 kg de manzanas Granny de 1,7 € el kilo y 20 kg de manzanas Golden de 1,9 € el kilo. ¿Cuál debe ser el precio medio del kilo para no perder ni ganar?

Solución:

a)	M. Granny	M. Golden	Mezcla
Masa (kg)	60	20	80
Precio (€/kg)	1,7	1,9	p
Dinero (€)	$60 \cdot 1,7 + 20 \cdot 1,9 = 80p$		

b) El precio de la mezcla es:

$$p = \frac{140}{80} = 1,75 \text{ €/kg}$$

- 46** Se mezclan 400 litros de aceite de oliva puro de 2,4 € el litro con 600 litros de oliva virgen extra de 3 € el litro. Calcula el precio de la mezcla.

Solución:

a)	A. puro	A. virgen	Mezcla
Capacidad (l)	400	600	1 000
Precio (€/l)	2,4	3	p
Dinero (€)	$400 \cdot 2,4 + 600 \cdot 3 = 1\,000p$		

b) El precio de la mezcla es:

$$p = \frac{2\,760}{1\,000} = 2,76 \text{ €/l}$$

- 47** Calcula la ley de un anillo de oro de 20 g en el que hay 18 g de oro puro.

Solución:

$$\text{Ley} = \frac{18}{20} = 0,9 = 90\%$$

- 48** Una chapa de 15 g de plata tiene una ley de 0,6. ¿Cuántos gramos de plata pura tiene la chapa?

Solución:

$$15 \cdot 0,6 = 9 \text{ g}$$

- 49** Una pieza de oro de ley 0,7 contiene 14 g de oro puro. ¿Cuánto pesa la pieza?

Solución:

$$\frac{14}{0,7} = 20 \text{ g}$$

- 50** Se funden 20 g de plata A de ley 0,6 con 30 g de plata B de ley 0,9. Calcula la ley de la aleación.

Solución:

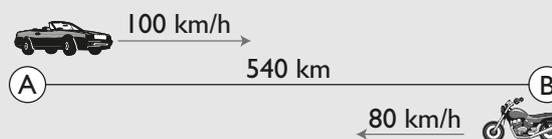
a)	Plata A	Plata B	Aleación
Masa (g)	20	30	50
Ley	0,6	0,9	L
Masa de plata (g)	$20 \cdot 0,6 + 30 \cdot 0,9 = 50L$		

b) La ley de la aleación es:

$$\text{Ley} = \frac{39}{50} = 0,78 = 78\%$$

- 51** Un coche y una moto salen de dos ciudades a las 9 de la mañana el uno hacia el otro por la misma carretera. La velocidad del coche es de 100 km/h y la de la moto es de 80 km/h. Si la distancia entre las ciudades es de 540 km, ¿a qué hora se encontrarán?

Solución:



Ejercicios y problemas

- a) La velocidad es: $v = 100 + 80 = 180 \text{ km/h}$
 b) El tiempo es:

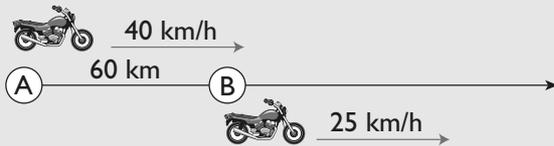
$$t = \frac{e}{v}$$

$$t = \frac{540}{180} = 3 \text{ h}$$

Se encuentran a las: $9 + 3 = 12 \text{ h}$

- 52** A las 10 de la mañana dos motocicletas salen de A y B en dirección norte; B está a 60 km hacia el norte de A. Si la velocidad de la motocicleta que sale de A es de 40 km/h y la velocidad de la que sale de B es de 25 km/h, ¿a qué hora alcanzará la motocicleta que sale de A a la motocicleta que sale de B?

Solución:



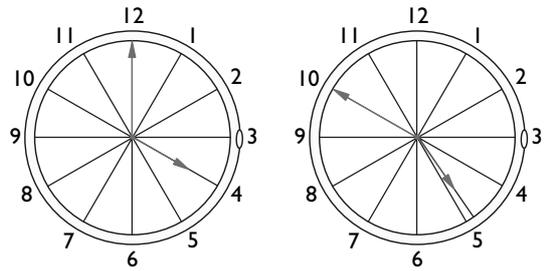
- a) La velocidad es: $v = 40 - 25 = 15 \text{ km/h}$
 b) El tiempo es:

$$t = \frac{e}{v}$$

$$t = \frac{60}{15} = 4 \text{ h}$$

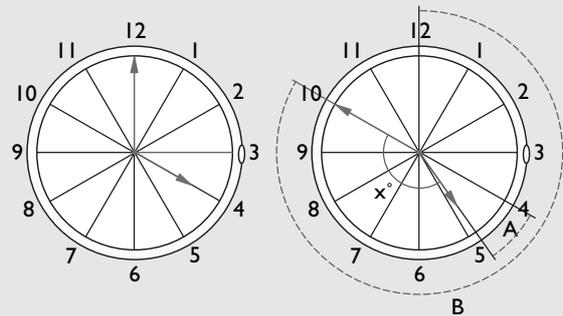
La motocicleta que sale de A alcanza a la 2ª motocicleta a las: $10 + 4 = 14 \text{ horas}$

- 53** ¿Qué ángulo forman las manecillas de un reloj a las cinco menos diez?



Solución:

a)



- b) El ángulo B = $10 \cdot 30^\circ = 300^\circ$
 c) El ángulo A = $300^\circ : 12 = 25^\circ$
 d) El ángulo x = $5 \cdot 30^\circ + (30^\circ - 25^\circ) = 155^\circ$

Problemas

- 54** Tres ganaderos alquilan unos pastos para sus ovejas por 3 900 €. Si el primero lleva 80 ovejas; el segundo, 60; y el tercero, 55, ¿cuánto debe pagar cada uno?

Solución:

$$a) \frac{3900}{80 + 60 + 55} = 20$$

$$b) 1^{\text{er}} \text{ ganadero: } 20 \cdot 80 = 1600 \text{ €}$$

$$2^{\text{o}} \text{ ganadero: } 20 \cdot 60 = 1200 \text{ €}$$

$$3^{\text{er}} \text{ ganadero: } 20 \cdot 55 = 1100 \text{ €}$$

- 55** Para transportar una mercancía a 1 530 km, tres transportistas deciden repartirse la distancia de forma inversamente proporcional al número de años de antigüedad que tienen sus camiones. Si éstos tienen 2 años, 3 años y 9 años, respectivamente, ¿qué distancia recorre cada uno?

Solución:

$$\text{m.c.m.}(2, 3, 9) = 18$$

$$a) \frac{1}{2} = \frac{9}{18}, \frac{1}{3} = \frac{6}{18}, \frac{1}{9} = \frac{2}{18}$$

$$b) \frac{1\ 530}{9 + 6 + 2} = 90$$

1^{er} transportista: $90 \cdot 9 = 810$ km

2^o transportista: $90 \cdot 6 = 540$ km

3^{er} transportista: $90 \cdot 2 = 180$ km

- 56** Se reparte una cantidad de dinero entre tres hermanos, Luis, María y Santiago, de forma directamente proporcional a 4, 6 y 8 años, respectivamente. Si a María le corresponden 1 980 €, calcula qué cantidad se reparte y cuánto les corresponde a Luis y a Santiago.

Solución:

La constante de proporcionalidad es:

$$1\ 980 : 6 = 330$$

La cantidad total será:

$$330 \cdot (4 + 6 + 8) = 5\ 940 \text{ €}$$

Luis: $330 \cdot 4 = 1\ 320 \text{ €}$

Santiago: $330 \cdot 8 = 2\ 640 \text{ €}$

- 57** Un estanque tiene dos grifos que vierten 780 litros en una hora y 540 litros en una hora, respectivamente. El estanque tiene un desagüe por el que se pierden 400 litros en una hora. Si se ha tardado en llenar el estanque 3 h con los dos grifos y el desagüe abiertos, ¿cuál es la capacidad del estanque?

Solución:

a) 1^{er} grifo llena: 780 litros/h

2^o grifo llena: 540 litros/h

Desagüe vacía: 400 litros/h

b) El grifo y el desagüe juntos llenan:

$$780 + 540 - 400 = 920 \text{ litros/h}$$

c) La capacidad del estanque es:

$$920 \cdot 3 = 2\ 760 \text{ litros}$$

- 58** Un depósito se llena en 5 h con un grifo A, y en 3 horas con otro grifo B. Si se deja abierto una hora el grifo A y después se abren los dos a la vez, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse el depósito?

Solución:

a) Grifo A llena en una hora: $\frac{1}{5}$ del depósito.

Grifo B llena en una hora: $\frac{1}{3}$ del depósito.

- b) Los dos grifos juntos llenan en una hora:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15} \text{ del depósito.}$$

- c) El tiempo que tardan es:

En la primera hora se llena $\frac{1}{5}$ del depósito.

A partir de la primera hora:

$$\frac{4}{5} : \frac{8}{15} = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{8} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ h} = 1 \text{ h } 30 \text{ min}$$

En total: 2 h 30 min

- 59** Se desea obtener un abono mezclando 1 000 kg de un tipo de abono A que cuesta 0,4 € el kilo, con 1 500 kg de otro tipo de abono B que cuesta a 0,3 € el kilo. Calcula el precio de la mezcla.

Solución:

	Abono A	Abono B	Mezcla
Masa (kg)	1 000	1 500	2 500
Precio (€/kg)	0,4	0,3	p
Dinero (€)	$1\ 000 \cdot 0,4 + 1\ 500 \cdot 0,3 = 2\ 500 \text{ p}$		

- b) El precio de la mezcla es:

$$p = \frac{850}{2\ 500} = 0,34 \text{ €/kg}$$

- 60** Se quiere hacer una mezcla con 20 kg de frutos secos normales de 17 € el kilo y 60 kg de frutos secos extra de 20 € el kilo. ¿Cuál será el precio de la mezcla?

Solución:

	F. s. nor.	F. s. ext.	Mezcla
Masa (kg)	20	60	80
Precio (€/kg)	17	20	p
Dinero (€)	$20 \cdot 17 + 60 \cdot 20 = 80 \text{ p}$		

- b) El precio medio es:

$$p = \frac{1\ 540}{80} = 19,25 \text{ €/kg}$$

- 61** Se funden 1,6 kg de cobre con 6,4 kg de oro. Halla la ley de la aleación.

Ejercicios y problemas

Solución:

$$\text{Ley} = \frac{6,4}{1,6 + 6,4} = 0,8 = 80\%$$

- 62** Una cadena de plata de 200 g contiene 20 g de cobre. ¿Cuál es la ley de la cadena?

Solución:

$$\text{Ley} = \frac{200 - 20}{200} = 0,9 = 90\%$$

- 63** Se funden 24 g de oro A de ley 0,8 con 16 g de oro B de ley 0,6. Calcula la ley de la aleación.

Solución:

a)	Oro A	Oro B	Aleación
Masa (g)	24	16	40
Ley	0,8	0,6	L
Masa de oro (g)	$24 \cdot 0,8 + 16 \cdot 0,6 = 40$ L		

- b) La ley de la aleación es:

$$\text{Ley} = \frac{28,8}{40} = 0,72 = 72\%$$

- 64** Ernesto y María salen de dos pueblos distantes entre sí 28,5 km el uno hacia el otro. Ernesto sale a las 8 de la mañana a una velocidad de 6 km/h y María sale dos horas más tarde a una velocidad de 5 km/h. ¿A qué hora se encontrarán?

Solución:

Desde las 8 de la mañana Ernesto recorre:

$$6 \cdot 2 = 12 \text{ km}$$

Desde las 10 horas:

- a) La velocidad es: $v = 6 + 5 = 11 \text{ km/h}$

- b) El tiempo es:

$$t = \frac{e}{v}$$

$$t = \frac{28,5 - 12}{11} = 1,5 \text{ h}$$

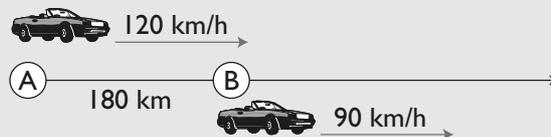
Se juntan a las:

$$8 + 2 + 1,5 = 11,5 \text{ h} = 11 \text{ h } 30 \text{ min}$$

- 65** Un coche sale de A a las 8 de la mañana con una velocidad de 90 km/h. Dos horas más tarde sale otro coche de la misma ciudad, por la misma

carretera, a una velocidad de 120 km/h. ¿A qué hora alcanzará el segundo coche al primero?

Solución:



Desde las 8 de la mañana el primer coche recorre:
 $90 \cdot 2 = 180 \text{ km}$

Desde las 10 horas:

- a) La velocidad es: $v = 120 - 90 = 30 \text{ km/h}$

- b) El tiempo es:

$$t = \frac{e}{v}$$

$$t = \frac{180}{30} = 6 \text{ h}$$

Se juntan a las: $10 + 6 = 16$ horas.

Para profundizar

- 66** Se ha repartido un número en partes inversamente proporcionales a 3, 5 y 7. Calcula el número si a 5 le corresponde 84

Solución:

$$\text{m.c.m.}(3, 5, 7) = 105$$

$$\frac{1}{3} = \frac{35}{105}, \frac{1}{5} = \frac{21}{105}, \frac{1}{7} = \frac{15}{105}$$

Consiste en repartir directamente a 35, 21 y 15

$$84 : 21 = 4$$

El número es:

$$N = 4 \cdot (35 + 21 + 15) = 4 \cdot 71 = 284$$

- 67** Tres familiares deciden reunir su cosecha para fundar una cooperativa. El primero recolectó 4,8 toneladas; el segundo, 7,5 toneladas; y el tercero, 8,2 toneladas. Si la cooperativa les proporciona un beneficio de 23 985 €, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

Solución:

$$\text{a) } \frac{23\,985}{4,8 + 7,5 + 8,2} = 1\,170$$

$$\text{b) } 1^{\text{er}} \text{ agricultor: } 1\,170 \cdot 4,8 = 5\,616 \text{ €}$$

$$2^{\text{o}} \text{ agricultor: } 1\,170 \cdot 7,5 = 8\,775 \text{ €}$$

$$3^{\text{er}} \text{ agricultor: } 1\,170 \cdot 8,2 = 9\,594 \text{ €}$$

- 68** Un grifo A llena un depósito de agua en 4 h, y otro grifo B, en 6 h. El depósito tiene un desagüe que lo vacía en 2 h estando los grifos cerrados. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar a la vez el depósito estando el desagüe abierto? Interpreta el resultado. (Advertencia: los datos no están mal.)

Solución:

a) Grifo A llena en una hora: $\frac{1}{4}$ del depósito.

Grifo B llena en una hora: $\frac{1}{6}$ del depósito.

Desagüe vacía en una hora: $\frac{1}{2}$ del depósito.

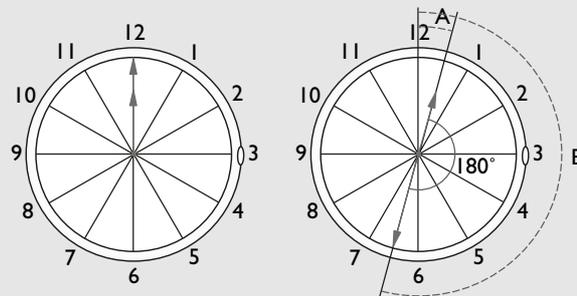
b) Los dos grifos juntos con el desagüe abierto llenan en una hora:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{12} \text{ del depósito.}$$

c) El depósito no se llena nunca porque el desagüe vacía más de lo que llenan los grifos.

- 69** ¿A qué hora después de las doce forman por primera vez un ángulo de 180° las manecillas de un reloj?

Solución:



Se observa en el dibujo que el ángulo $B = 180^\circ + A$ y además se sabe que el ángulo B es 12 veces el ángulo A, por tanto:

$$11A = 180^\circ \Rightarrow A = 180^\circ : 11 = 16^\circ 21' 49''$$

El ángulo A de $16^\circ 21' 49''$ se corresponde con:

$$16^\circ 21' 49'' \cdot \frac{5 \text{ min}}{30^\circ} = 2 \text{ min } 43 \text{ s}$$

Luego serán las 12 h 32 min 43 s

Aplica tus competencias

- 70** Una pieza de oro de 14 quilates pesa 12 g. ¿Qué cantidad de oro puro contiene?

Solución:

$$\frac{14}{24} \cdot 12 = 7 \text{ g}$$

- 71** Una cadena de oro de 18 quilates tiene 60 g de oro puro. ¿Cuánto pesa?

Solución:

$$60 : \frac{18}{24} = 60 \cdot \frac{24}{18} = 80 \text{ g}$$

- 72** Se funden 30 g de oro de 18 quilates con 20 g de oro de 15 quilates. Calcula la ley de la aleación.

Solución:

a)

	Oro A	Oro B	Aleación
Masa (g)	30	20	50
Ley	18/24	15/24	L
Masa de oro (g)	$30 \cdot 0,75 + 20 \cdot 0,625 = 50 \text{ L}$		

b) La ley de la aleación es:

$$\text{Ley} = \frac{35}{50} = 0,7 = 70\%$$

Comprueba lo que sabes

- 1** Indica cómo se calcula el tiempo que tardan dos grifos en llenar a la vez un depósito sin desagüe. Pon un ejemplo.

Solución:

- Se calcula la parte del depósito que llena cada grifo en una hora.
- Se calcula la parte del depósito que llenan a la vez los dos grifos en una hora.
- Se calcula el tiempo que tardan los dos grifos en llenar a la vez el depósito.

Ejemplo

Un grifo A llena un depósito de agua en 2 horas y otro grifo B lo llena en 3 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos juntos en llenar el depósito?

El grifo A llena en una hora: $\frac{1}{2}$ del depósito.

El grifo B llena en una hora: $\frac{1}{3}$ del depósito.

Los dos grifos juntos llenan en una hora:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \text{ del depósito.}$$

El tiempo que tardan es:

$$1 : \frac{5}{6} = 1 \cdot \frac{6}{5} = \frac{6}{5} \text{ de hora} = 1,2 \text{ horas} = 1 \text{ h } 12 \text{ min}$$

- 2** Meli, Ismael y Ana han jugado a la lotería, y han puesto 20 €, 30 € y 40 €, respectivamente. Si les toca un premio de 1 350 €, ¿cuánto le corresponderá a cada uno?

Solución:

$$\text{a) } \frac{1350}{20 + 30 + 40} = 15$$

$$\text{b) Meli: } 15 \cdot 20 = 300 \text{ €}$$

$$\text{Ismael: } 15 \cdot 30 = 450 \text{ €}$$

$$\text{Ana: } 15 \cdot 40 = 600 \text{ €}$$

- 3** Se deben repartir 220 € de forma inversamente proporcional al lugar en el que quedan los tres primeros clasificados de una carrera. Calcula el dinero que le corresponde a cada uno.

Solución:

$$\text{m.c.m.}(1, 2, 3) = 6$$

$$\text{a) } 1 = \frac{6}{6}, \frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

$$\text{b) } \frac{220}{6 + 3 + 2} = 20$$

1^{er} corredor: $20 \cdot 6 = 120 \text{ €}$
 2^o corredor: $20 \cdot 3 = 60 \text{ €}$
 3^{er} corredor: $20 \cdot 2 = 40 \text{ €}$

4 Un grifo A llena un depósito de agua en 3 h y otro grifo B lo llena en 4 h. El depósito tiene un desagüe que lo vacía en 6 h estando los grifos cerrados. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar a la vez el depósito estando el desagüe abierto?

Solución:

a) Grifo A llena en una hora: $\frac{1}{3}$ del depósito.

Grifo B llena en una hora: $\frac{1}{4}$ del depósito.

Desagüe vacía en una hora: $\frac{1}{6}$ del depósito.

b) Los tres grifos juntos con el desagüe abierto llenan en una hora:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \text{ del depósito.}$$

c) El tiempo que tardan es:

$$1 : \frac{5}{12} = 1 \cdot \frac{12}{5} = 2,4 \text{ h} = 2 \text{ h } 24 \text{ min}$$

5 Se dispone de 30 kg de almendras largueta de 6 € el kilo, y de 20 kg de almendras marcona de 8 € el kilo. Si se mezclan para su venta, ¿cuál debe ser el precio del kilo de la mezcla?

Solución:

a)	A. largueta	A. marcona	Mezcla
Masa (kg)	30	20	50
Precio (€/kg)	6	8	p
Dinero (€)	$30 \cdot 6 + 20 \cdot 8 = 50 p$		

b) El precio de la mezcla es:

$$p = \frac{340}{50} = 6,8 \text{ €/kg}$$

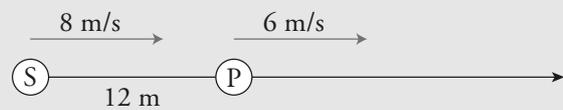
6 Una cadena de plata de 200 g contiene 20 g de cobre. ¿Cuál es la ley de la cadena?

Solución:

$$\text{Ley} = \frac{200 - 20}{200} = 0,9 = 90\%$$

7 Sonia corre a una velocidad de 8 m/s, y Patricia, a 6 m/s. Si Patricia va delante, a una distancia de 12 m de Sonia, ¿cuánto tiempo tardará Sonia en alcanzar a Patricia?

Solución:



a) La velocidad es: $v = 8 - 6 = 2 \text{ m/s}$

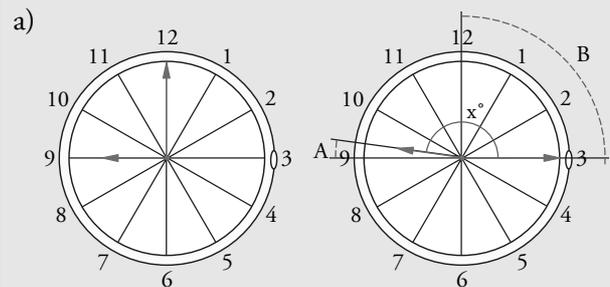
b) El tiempo es:

$$t = \frac{e}{v}$$

$$t = \frac{12}{2} = 6 \text{ s}$$

8 ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las nueve y cuarto?

Solución:



b) El ángulo B = $3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$

c) El ángulo A = $90 : 12 = 7,5^\circ$

d) El ángulo x = $6 \cdot 30^\circ - 7,5^\circ = 172,5^\circ = 172^\circ 30'$

Paso a paso

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

- 73** La madre de Belén, Rocío y Antonio ha decidido repartir 450 € en partes directamente proporcionales al número de horas que sus tres hijos le han ayudado. Belén le ha ayudado durante 3 h; Rocío, durante 5 h; y Antonio, durante 7 h. ¿Qué cantidad de dinero le corresponde a cada uno?

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 74** Un grifo A llena un depósito de agua en 4 h, y otro grifo B, en 6 h. El depósito tiene un desagüe que lo vacía en 12 h estando los grifos cerrados. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar a la vez el depósito estando el desagüe abierto?

Solución:

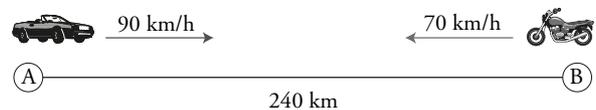
Resuelto en el libro del alumnado.

- 75** Se tienen 20 kg de cacao del tipo A a un precio de 3 € el kilo, y 30 kg de cacao del tipo B a un precio de 5 € el kilo. Si se mezclan, ¿qué precio tendrá el kilo de mezcla?

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 76** Desde la ciudad A sale un coche hacia B con una velocidad de 90 km/h. En el mismo instante sale de B hacia A una moto a 70 km/h. Si la distancia entre las dos ciudades es de 240 km, ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse?



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 77** Internet. Abre: www.editorial-bruno.es y elige Matemáticas, curso y tema.

Practica

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

- 78** Sara quiere repartir 580 € de forma directamente proporcional a las edades de sus sobrinos Óscar, Diego y María, que tienen, respectivamente, 7, 10 y 12 años. Calcula la cantidad que le corresponde a cada uno.

Solución:

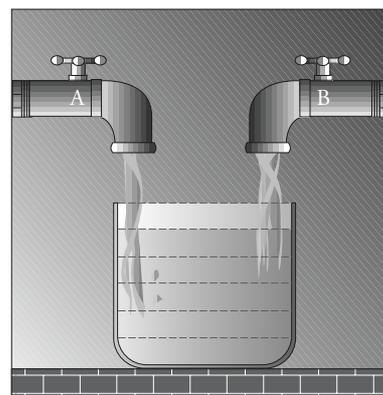
$$\frac{580}{7 + 10 + 12} [7, 10, 12] = [140, 200, 240]$$

- 79** Reparte 180 bombones de forma inversamente proporcional a las edades de Lidia, Ernesto y Rodrigo, que tienen, respectivamente, 3, 4 y 6 años.

Solución:

$$\frac{180}{1/3 + 1/4 + 1/6} [1/3, 1/4, 1/6] = [80, 60, 40]$$

- 80** Un grifo A llena un depósito de agua en 2 h, y otro grifo B, en 3 h. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar a la vez el depósito?



Solución:

$$1 : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 1,2 \text{ h}$$

81 Un grifo A llena un depósito de agua en 2 h, y otro grifo B, en 3 h. El depósito tiene un desagüe que lo vacía en 6 h estando los grifos cerrados. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar a la vez el depósito estando el desagüe abierto?

Solución:

$$1 : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) = 1,5 \text{ h}$$

82 Se tienen 30 kg de un surtido normal de frutos secos a un precio de 12 € el kilo y 50 kg de otro surtido extra a un precio de 14 € el kilo. Si se mezclan los dos surtidos, ¿qué precio tendrá el kilo de mezcla?

Solución:

$$30 \cdot 12 + 50 \cdot 14 = (30 + 50) \cdot p \Rightarrow p = 13,25 \text{ €/kg}$$

83 En una pieza de 20 gramos, 15 gramos son de oro. ¿Cuál es su ley?

Solución:

$$\text{Ley} = \frac{15}{20} = 0,75 = 75\%$$

84 Se tienen 300 gramos de una aleación de plata del tipo A con una ley 0,7 y 100 gramos de otra aleación de plata del tipo B con una ley 0,9. Si se funden las dos aleaciones, ¿cuál es la ley de la nueva aleación?

Solución:

$$\text{Ley} = \frac{300 \cdot 0,7 + 100 \cdot 0,9}{300 + 100} = 0,75 = 75\%$$

85 Desde la ciudad A sale una moto hacia B con una velocidad de 50 km/h. A la misma hora sale de B hacia A otra moto a 70 km/h. Si la distancia entre las dos ciudades es de 840 km, ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

Solución:



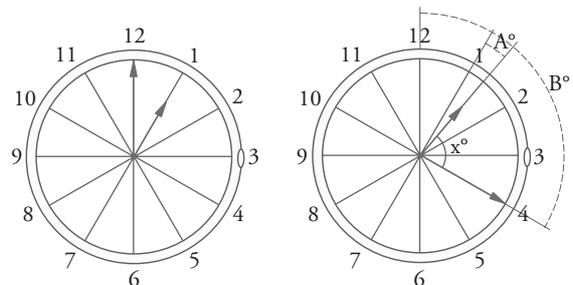
$$t = \frac{840}{50 + 70} = 7 \text{ h}$$

86 Desde la ciudad A sale un coche hacia C con una velocidad de 90 km/h. En la misma carretera y en el mismo instante sale de B, que está a 20 km de A, una moto hacia C, con una velocidad de 80 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar el coche a la moto?

Solución:

$$t = \frac{20}{90 - 80} = 2 \text{ h}$$

87 ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a la una y veinte?



Solución:

80°



BLOQUE II

Álgebra

7. Polinomios
8. Ecuaciones de 1^{er} y 2^o grado
9. Sistemas de ecuaciones lineales



1. Lenguaje algebraico

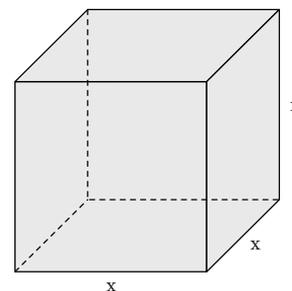
PIENSA Y CALCULA

Dado el cubo de la figura siguiente, halla su área y su volumen en función de x

Solución:

$$A(x) = 6x^2$$

$$V(x) = x^3$$



Carné calculista 36 : 0,79 | C = 45,56; R = 0,0076

APLICA LA TEORÍA

1 Escribe en lenguaje algebraico las siguientes expresiones coloquiales:

- Un número x aumentado en 5 unidades.
- El lado de un cuadrado mide x metros. ¿Cuánto mide su área?
- Los lados de un rectángulo miden x metros e y metros. ¿Cuánto mide su perímetro?

Solución:

a) $x + 5$

b) $A(x) = x^2$

c) $P(x, y) = 2x + 2y$

2 En la expresión algebraica: $4xy - 5x + 6x - 3$, halla los términos, el término independiente, las variables y los coeficientes.

Solución:

Términos: $4xy, -5x, 6x, -3$

Término independiente: -3

Variables: x, y

Coefficientes: $4, -5, 6, -3$

3 Completa la siguiente tabla:

Monomio	$-7x^5$	$4x^3y^2z$	5	$-6x$
Coefficiente				
Grado				

Solución:

Monomio	$-7x^5$	$4x^3y^2z$	5	$-6x$
Coefficiente	-7	4	5	-6
Grado	5	6	0	1

4 Halla cuáles de los siguientes monomios son semejantes:

$$5x^3, 7x, -7x^2, -9x^3, 8x^2, x^3, 9x$$

Solución:

a) $5x^3, -9x^3, x^3$

b) $-7x^2, 8x^2$

c) $7x, 9x$

10 Realiza las siguientes operaciones de monomios:

- a) $12x^5 : 3x^2$ b) $7x^3 \cdot (-7) \cdot x^5$
c) $(3x^3)^3$ d) $-7x^2 + 12x^2 + 6x^2 - x^2$

Solución:

- a) $4x^3$ b) $-49x^8$
c) $27x^9$ d) $10x^2$

11 Realiza las siguientes operaciones de monomios:

- a) $5x^5 \cdot (-3x)$ b) $(-2x^3)^5$
c) $2x - 7x + x - 15x$ d) $7x^3 : 2x$

Solución:

- a) $-15x^6$ b) $-32x^{15}$
c) $-19x$ d) $\frac{7}{2}x^2$

12 Multiplica los siguientes polinomios por monomios:

- a) $(x^4 - 5x^3 + 4x + 1) \cdot 2x^4$
b) $(x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 9) \cdot 3x^5$
c) $(x^4 + 4x^3 - 9x + 5) \cdot (-4x)$
d) $(x^4 - 7x^3 + 2x - 12) \cdot (-5x^2)$

Solución:

- a) $2x^8 - 10x^7 + 8x^5 + 2x^4$
b) $3x^{11} - 9x^9 + 18x^7 - 27x^5$
c) $-4x^5 - 16x^4 + 36x^2 - 20x$
d) $-5x^6 + 35x^5 - 10x^3 + 60x^2$

13 Elimina los paréntesis y reduce las siguientes expresiones:

- a) $6x - (5x^2 - 3 + 4x^2) - 9x - 8$
b) $5x^2 - 6x - 2(3x + 8x^2 - 9x - 4)$
c) $-(5x - 7 + 2x - 4x^2 + 8) + 9x^2$
d) $9(3x^2 - 5x + 7) - 5(4x - 8x^2 + 1)$

Solución:

- a) $-9x^2 - 3x - 5$
b) $-11x^2 + 6x + 8$
c) $13x^2 - 7x - 1$
d) $67x^2 - 65x + 58$

14 Extrae todos los factores que puedas como factor común:

- a) $8x - 12y$
b) $4x^5 - 6x^3$
c) $3x^4 + 15x^2 - 6x$
d) $4x^2y + 6xy^2 - 2xy$

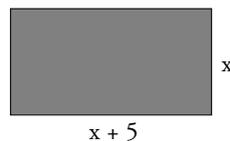
Solución:

- a) $4(2x - 3y)$
b) $2x^3(2x^2 - 3)$
c) $3x(x^3 + 5x - 2)$
d) $2xy(2x + 3y - 1)$

3. Operaciones con polinomios

PIENSA Y CALCULA

Halla el polinomio que calcula el área del siguiente rectángulo:



Solución:

$$A(x) = (x + 5)x \Rightarrow A(x) = x^2 + 5x$$

Carné calculista 62,4 : 9,7 | C = 6,43; R = 0,029

15 Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = 5x^3 - 6x + 9$$

$$Q(x) = -7x^4 + 5x^3 + 6x - 12$$

calcula:

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

Solución:

a) $-7x^4 + 10x^3 - 3$

b) $7x^4 - 12x + 21$

16 Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = 3x^5 - 7x^4 + 9x^2 - 13$$

$$Q(x) = 5x^4 - 9x^2 + 7x - 1$$

calcula:

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

Solución:

a) $3x^5 - 2x^4 + 7x - 14$

b) $3x^5 - 12x^4 + 18x^2 - 7x - 12$

17 Dado el siguiente polinomio:

$$P(x) = -8x^5 + 5x^4 - 9x^2 + 2$$

a) halla su opuesto: $-P(x)$

b) suma $P(x)$ con $-P(x)$. ¿Qué polinomio se obtiene?

Solución:

a) $-P(x) = 8x^5 - 5x^4 + 9x^2 - 2$

b) $P(x) - P(x) = 0$

18 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^2 - 7x + 2$$

$$Q(x) = 3x + 1$$

halla el grado del producto.

Solución:

$$3x^3 - 20x^2 - x + 2$$

El grado del producto es $2 + 1 = 3$

19 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^4 - 5x^3 - 3x + 1$$

$$Q(x) = 2x^2 - x + 7$$

halla el grado del producto.

Solución:

$$2x^6 - 11x^5 + 12x^4 - 41x^3 + 5x^2 - 22x + 7$$

El grado del producto es $4 + 2 = 6$

20 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 4$$

$$Q(x) = -3x^2 + x - 5$$

halla el grado del producto.

Solución:

$$-3x^5 + 7x^4 - 7x^3 + 22x^2 - 4x + 20$$

El grado del producto es $3 + 2 = 5$

21 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^2 + x + 1$$

$$Q(x) = x - 1$$

halla el grado del producto.

Solución:

$$x^3 - 1$$

El grado del producto es $2 + 1 = 3$

4. Igualdades notables

Sustituye los puntos suspensivos por el signo de igualdad = o de desigualdad \neq

a) $(3 + 4)^2 \dots 3^2 + 4^2$

b) $(3 + 4)^2 \dots 49$

c) $(5 - 3)^2 \dots 4$

d) $(5 - 3)^2 \dots 5^2 - 3^2$

Solución:

a) $(3 + 4)^2 \neq 3^2 + 4^2$

b) $(3 + 4)^2 = 49$

c) $(5 - 3)^2 = 4$

d) $(5 - 3)^2 \neq 5^2 - 3^2$

Carné calculista $\frac{6}{5} \cdot \left(\frac{5}{4} - \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{10}$

22 Calcula mentalmente:

- a) $(x + 1)^0$ b) $(x - 1)^0$
 c) $(x + 1)^1$ d) $(x - 1)^1$

Solución:

- a) 1 b) 1
 c) $x + 1$ d) $x - 1$

23 Calcula mentalmente:

- a) $(x + 1)^2$
 b) $(x - 1)^2$
 c) $(x + 1)(x - 1)$

Solución:

- a) $x^2 + 2x + 1$
 b) $x^2 - 2x + 1$
 c) $x^2 - 1$

24 Calcula mentalmente:

- a) $(x + 4)^2$ b) $(x - 4)^2$
 c) $(x + 4)(x - 4)$ d) $(x + 5)^2$
 e) $(x - 5)^2$ f) $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$

Solución:

- a) $x^2 + 8x + 16$ b) $x^2 - 8x + 16$
 c) $x^2 - 16$ d) $x^2 + 10x + 25$
 e) $x^2 - 10x + 25$ f) $x^2 - 5$

25 Calcula:

- a) $(2x + 3)^2$
 b) $(2x - 3)^2$
 c) $(2x + 3)(2x - 3)$

Solución:

- a) $4x^2 + 12x + 9$
 b) $4x^2 - 12x + 9$
 c) $4x^2 - 9$

26 Halla mentalmente la descomposición factorial de:

- a) $x^2 + 3x$
 b) $x^2 - 3x$
 c) $x^2 - 49$
 d) $x^2 + 4x + 4$
 e) $x^2 - 6x + 9$

Solución:

- a) $x(x + 3)$
 b) $x(x - 3)$
 c) $(x + 7)(x - 7)$
 d) $(x + 2)^2$
 e) $(x - 3)^2$

27 Calcula:

- a) $\left(3x + \frac{1}{2}\right)^2$ b) $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2$
 c) $\left(3x + \frac{1}{2}\right)\left(3x - \frac{1}{2}\right)$

Solución:

- a) $9x^2 + 3x + 1/4$
 b) $9x^2 - 3x + 1/4$
 c) $9x^2 - 1/4$

28 Halla mentalmente la descomposición factorial de:

- a) $3x^4 + 6x^2$ b) $6x^3 - 8x$ c) $x^2 - 5$
 d) $x^2 - 2x + 1$ e) $x^3 + 2x^2 + x$

Solución:

- a) $3x^2(x^2 + 2)$
 b) $2x(3x^2 - 4)$
 c) $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$
 d) $(x - 1)^2$
 e) $x(x + 1)^2$

29 Halla los cinco primeros números cuadrangulares sabiendo que vienen dados por la fórmula:

$$C(n) = n^2$$

Solución:

- 1, 4, 9, 16, 25

30 Escribe una fórmula, una ecuación y una identidad.

Solución:

Fórmula:

Área del cuadrado: $A(x) = x^2$

Ecuación: $x + 5 = 7$

Identidad: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

Ejercicios y problemas

1. Lenguaje algebraico

31 Escribe en lenguaje algebraico las siguientes expresiones coloquiales:

- El triple de un número x disminuido en 7 unidades.
- Tenía x euros y me han dado 15 €. ¿Cuánto tengo?
- El lado de un cuadrado mide x metros. ¿Cuánto mide su perímetro?
- Los lados de un rectángulo miden x metros e y metros. ¿Cuánto mide su área?

Solución:

- $3x - 7$
- $x + 15$
- $P(x) = 4x$
- $A(x, y) = xy$

32 En la expresión algebraica:

$$7x^2y - 9xy^2 + 5xy - 3x + 1$$

halla los términos, el término independiente, las variables y los coeficientes.

Solución:

Términos: $7x^2y, -9xy^2, 5xy, -3x, 1$

Término independiente: 1

Variables: x, y

Coeficientes: $7, -9, 5, -3, 1$

33 Completa la siguiente tabla:

Monomio	Coeficiente	Grado
$9x^3$		
$-7x^2yz^5$		
$8x$		
-3		

Solución:

Monomio	Coeficiente	Grado
$9x^3$	9	3
$-7x^2yz^5$	-7	8
$8x$	8	1
-3	-3	0

34 Halla cuáles de los siguientes monomios son semejantes:

$$7x, -5x^3, -x, 5x^3, 4x^2, x, 9x^2$$

Solución:

- $-5x^3, 5x^3$
- $4x^2, 9x^2$
- $7x, -x, x$

35 Completa la siguiente tabla:

$P(x) = -9x^4 + 5x^2 - 17$				
Términos	Grado	Coeficientes	Coeficiente principal	Término independiente

Solución:

$P(x) = -9x^4 + 5x^2 - 17$				
Términos	Grado	Coeficientes	Coeficiente principal	Término independiente
$-9x^4, 5x^2, -17$	4	-9, 5, -17	-9	-17

36 Halla el valor numérico del siguiente polinomio:

$$P(x) = -x^3 + 5x - 1$$

para los valores que se indican:

- $x = 0$
- $x = 1$
- $x = 3$
- $x = -3$

Solución:

- $P(0) = -1$
- $P(1) = 3$
- $P(3) = -13$
- $P(-3) = 11$

37 Halla el valor numérico de los siguientes polinomios para los valores que se indican:

- $P(x) = -x^3 + 5x - 4$ para $x = -2$
- $P(x) = x^4 + 7x - 12$ para $x = 3$
- $P(x) = 2x^5 - 8x^3 + 5x + 3$ para $x = 1$
- $P(x) = -3x^5 + 7x^3 - 8x + 5$ para $x = -1$

Solución:

- $P(-2) = -6$
- $P(3) = 90$
- $P(1) = 2$
- $P(-1) = 9$

Ejercicios y problemas

2. Operaciones con monomios

38 Realiza las siguientes operaciones de monomios:

- a) $7x^5 - 4x^5 + 9x^5$
- b) $-5x^2 \cdot x$
- c) $(-2x^5)^3$
- d) $-6x^3 : (-3x)$

Solución:

- a) $12x^5$
- b) $-5x^3$
- c) $-8x^{15}$
- d) $2x^2$

39 Realiza las siguientes operaciones de monomios:

- a) $(3x^4)^3$
- b) $-5x^3 + 2x^3 + 4x^3$
- c) $-12x^2 : (-4x)$
- d) $-6x^2 \cdot (-9x) \cdot x^3$

Solución:

- a) $27x^{12}$
- b) x^3
- c) $3x$
- d) $54x^6$

40 Realiza las siguientes operaciones de monomios:

- a) $56x^5 : 8x$
- b) $6x^3 \cdot (-9x^2)$
- c) $-3x^2 + 15x^2 + 4x^2$
- d) $(2x^5)^2$

Solución:

- a) $7x^4$
- b) $-54x^5$
- c) $16x^2$
- d) $4x^{10}$

41 Realiza las siguientes operaciones de monomios:

- a) $6x^4 \cdot (-9x^3)$
- b) $(-3x^3)^3$
- c) $5x - 9x + 7x - x$
- d) $6x^5 : 4x$

Solución:

- a) $-54x^7$
- b) $-27x^9$
- c) $2x$
- d) $\frac{3}{2}x^4$

42 Multiplica los siguientes polinomios por monomios:

- a) $(x^5 - 7x^3 + 6x - 1) \cdot 8x^2$
- b) $(2x^4 - 8x^2 + 7x - 9) \cdot 7x^3$
- c) $(6x^4 + 5x^3 - 8x + 7) \cdot (-9x)$
- d) $(x^4 - 9x^3 + 7x - 6) \cdot (-6x^4)$

Solución:

- a) $8x^7 - 56x^5 + 48x^3 - 8x^2$
- b) $14x^7 - 56x^5 + 49x^4 - 63x^3$
- c) $-54x^5 - 45x^4 + 72x^2 - 63x$
- d) $-6x^8 + 54x^7 - 42x^5 + 36x^4$

43 Reduce las siguientes expresiones:

- a) $8x - 12x^2 + 1 + 7x^2 - 3x - 5$
- b) $x^2 - 6x - 5x^2 + 7x^2 - 5x - 9$
- c) $-7x - 8 + 9x - 11x^2 + 6 + 8x^2$
- d) $7x^2 - 9x + 6 - 7x - 8x^2 + 12$

Solución:

- a) $-5x^2 + 5x - 4$
- b) $3x^2 - 11x - 9$
- c) $-3x^2 + 2x - 2$
- d) $-x^2 - 16x + 18$

44 Elimina los paréntesis y reduce las siguientes expresiones:

- a) $7x - (8x^2 + 9 + 5x^2) - 7x - 2$
- b) $2x^2 - 5x - 3(2x^2 + 4x^2 - 5x - 6)$
- c) $-(3x - 5 + 9x - 7x^2 + 4) + 10x^2$
- d) $7(x^2 - 6x + 9) - 7(3x - 7x^2 + 9)$

Solución:

- a) $-13x^2 - 11$
- b) $-16x^2 + 10x + 18$
- c) $17x^2 - 12x + 1$
- d) $56x^2 - 63x$

45 Extrae todos los factores que puedas como factor común:

- a) $6x - 8y$
- b) $8x^3 - 12x^2$
- c) $4x^4 + 10x^3 - 6x^2$
- d) $9x^2y + 6xy^2 - 3xy$

Solución:

- a) $2(3x - 4y)$
- b) $4x^2(2x - 3)$
- c) $2x^2(2x^2 + 5x - 3)$
- d) $3xy(3x + 2y - 1)$

3. Operaciones con polinomios

46 Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = 7x^4 - 5x^2 + 2$$

$$Q(x) = -5x^4 + 9x^2 + 4x - 10$$

calcula:

a) $P(x) + Q(x)$ b) $P(x) - Q(x)$

Solución:

a) $2x^4 + 4x^2 + 4x - 8$

b) $12x^4 - 14x^2 - 4x + 12$

47 Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 12x^2 - 9$$

$$Q(x) = 4x^4 - 8x^2 - 5x - 3$$

calcula:

a) $P(x) + Q(x)$ b) $P(x) - Q(x)$

Solución:

a) $2x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 5x - 12$

b) $-6x^4 + 5x^3 + 20x^2 + 5x - 6$

48 Dado el siguiente polinomio:

$$P(x) = 5x^4 + 7x^3 - 2x + 9$$

a) halla su opuesto: $-P(x)$

b) suma $P(x)$ con $-P(x)$. ¿Qué polinomio se obtiene?

Solución:

a) $-P(x) = -5x^4 - 7x^3 + 2x - 9$

b) $P(x) - P(x) = 0$

49 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^2 + 4x - 3$$

$$Q(x) = 5x + 2$$

Halla el grado del producto.

Solución:

$$5x^3 + 22x^2 - 7x - 6$$

El grado del producto es $2 + 1 = 3$

50 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = -2x^4 + 3x^2 - 5x + 7$$

$$Q(x) = 4x^2 - 2x + 6$$

Halla el grado del producto.

Solución:

$$-8x^6 + 4x^5 - 26x^3 + 56x^2 - 44x + 42$$

El grado del producto es $4 + 2 = 6$

51 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = 5x^3 - 3x - 1 \quad Q(x) = -x^2 + 2x - 4$$

Halla el grado del producto.

Solución:

$$-5x^5 + 10x^4 - 17x^3 - 5x^2 + 10x + 4$$

El grado del producto es $3 + 2 = 5$

52 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \quad Q(x) = x + 2$$

Halla el grado del producto.

Solución:

$$x^4 - 16$$

El grado del producto es $3 + 1 = 4$

53 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 7 \quad Q(x) = 3x^2 - 4x + 6$$

Halla el grado del producto.

Solución:

$$6x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 9x^2 + 28x - 42$$

El grado del producto es $3 + 2 = 5$

54 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = 7x^3 - 4x - 1 \quad Q(x) = -2x^2 + 5x - 3$$

Halla el grado del producto.

Solución:

$$-14x^5 + 35x^4 - 13x^3 - 18x^2 + 7x + 3$$

El grado del producto es $3 + 2 = 5$

55 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8 \quad Q(x) = x - 2$$

Halla el grado del producto.

Solución:

$$x^4 - 16$$

El grado del producto es $3 + 1 = 4$

4. Igualdades notables

56 Calcula mentalmente:

- a) $(x + 2)^0$
- b) $(x - 2)^0$
- c) $(x + 2)^1$
- d) $(x - 2)^1$

Solución:

- a) 1
- b) 1
- c) $x + 2$
- d) $x - 2$

57 Calcula mentalmente:

- a) $(x + 2)^2$
- b) $(x - 2)^2$
- c) $(x + 2)(x - 2)$

Solución:

- a) $x^2 + 4x + 4$
- b) $x^2 - 4x + 4$
- c) $x^2 - 4$

58 Calcula mentalmente:

- a) $(x + 3)^2$
- b) $(x - 3)^2$
- c) $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

Solución:

- a) $x^2 + 6x + 9$
- b) $x^2 - 6x + 9$
- c) $x^2 - 3$

59 Calcula mentalmente:

- a) $(x + 6)^2$
- b) $(x - 6)^2$
- c) $(x + 6)(x - 6)$

Solución:

- a) $x^2 + 12x + 36$
- b) $x^2 - 12x + 36$
- c) $x^2 - 36$

60 Calcula:

- a) $(3x + 5)^2$
- b) $(3x - 5)^2$
- c) $(3x + 5)(3x - 5)$

Solución:

- a) $9x^2 + 30x + 25$
- b) $9x^2 - 30x + 25$
- c) $9x^2 - 25$

61 Calcula:

- a) $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2$
- b) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2$
- c) $\left(2x + \frac{1}{2}\right)\left(2x - \frac{1}{2}\right)$

Solución:

- a) $4x^2 + 2x + 1/4$
- b) $4x^2 - 2x + 1/4$
- c) $4x^2 - 1/4$

62 Sustituye los puntos suspensivos por uno de los signos = o \neq :

- a) $(x - 3)^2 \dots x^2 - 6x + 9$
- b) $(x + 2)^2 \dots x^2 + 4$
- c) $(x - 3)^2 \dots x^2 - 9$
- d) $(x + 2)^2 \dots x^2 + 4x + 4$

Solución:

- a) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$
- b) $(x + 2)^2 \neq x^2 + 4$
- c) $(x - 3)^2 \neq x^2 - 9$
- d) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

63 Halla mentalmente la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

- a) $x^2 + 5x$
- b) $x^2 - 5x$
- c) $x^2 - 25$
- d) $x^2 + 2x + 1$
- e) $x^2 - 10x + 25$

Solución:

- a) $x(x + 5)$
- b) $x(x - 5)$
- c) $(x + 5)(x - 5)$
- d) $(x + 1)^2$
- e) $(x - 5)^2$

64 Halla mentalmente la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

- a) $6x^3 + 9x^2$ b) $8x^4 - 12x^2$
c) $x^2 - 3$ d) $x^2 - 8x + 16$
e) $x^3 - 2x^2 + x$

Solución:

- a) $3x^2(2x + 3)$ b) $4x^2(2x^2 - 3)$
c) $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ d) $(x - 4)^2$
e) $x(x - 1)^2$

65 Halla los cinco primeros números triangulares, sabiendo que vienen dados por la fórmula:

$$t(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Solución:

1, 3, 6, 10, 15

66 Identifica cada una de las siguientes igualdades como fórmula, identidad o ecuación:

- a) $3x = 5 + 2x$
b) $A(R) = \pi R^2$
c) $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

Solución:

- a) Ecuación.
b) Fórmula del área del círculo.
c) Identidad.

Para ampliar

67 Escribe en lenguaje algebraico las siguientes expresiones coloquiales:

- a) El año pasado me daban $x \in$ de paga y este año me dan un euro más. ¿Cuánto recibo de paga este año?
b) Ayer anduve x y hoy he andado el doble. ¿Cuánto he recorrido hoy?
c) Un perro come x y un gato come la mitad. ¿Cuánto come el gato?
d) La altura de un rectángulo mide x y la base mide el triple de la altura. ¿Cuánto mide la base?

Solución:

- a) $x + 1$
b) $2x$
c) $x/2$
d) $3x$

68 Escribe la expresión algebraica de:

- a) El siguiente de un número.
b) El anterior de un número.

Solución:

- a) $x + 1$
b) $x - 1$

69 Escribe la expresión algebraica de:

- a) Un número par.
b) Un número impar.
c) Tres números pares consecutivos.

Solución:

- a) $2x$ b) $2x + 1$ c) $2x, 2x + 2, 2x + 4$

70 Escribe la expresión algebraica de:

- a) Un cuadrado perfecto.
b) Un cubo perfecto.

Solución:

- a) x^2 b) x^3

71 Halla mentalmente el valor numérico de los siguientes polinomios para $x = 0$:

- a) $x^2 - 3x - 5$
b) $7x^3 + 4x^2 - 6x + 1$
c) $x^4 - 7x^2 + x - 7$
d) $2x^5 + 9x^3 - 12x + 23$

Observando los resultados obtenidos, ¿cómo enunciarías una ley para hallar el valor numérico de un polinomio para $x = 0$?

Ejercicios y problemas

Solución:

- a) -5 b) 1 c) -7 d) 23

El valor numérico de un polinomio para $x = 0$ es igual al término independiente.

72 Halla mentalmente el valor numérico de los siguientes polinomios para $x = 1$:

- a) $2x^2 + 5x - 3$
b) $x^3 - 3x^2 + 5x + 2$
c) $3x^4 + 9x^2 - 7x - 5$
d) $x^5 - 2x^3 + 13x + 8$

Observando los resultados obtenidos, ¿cómo enunciarías una ley para hallar el valor numérico de un polinomio para $x = 1$?

Solución:

- a) 4 b) 5 c) 0 d) 20

El valor numérico de un polinomio para $x = 1$ es igual a la suma de sus coeficientes.

73 Halla mentalmente los valores que anulan los siguientes binomios:

- a) $x - 5$
b) $x + 3$
c) $2x - 6$
d) $3x + 15$

Solución:

- a) $x = 5$
b) $x = -3$
c) $x = 3$
d) $x = -5$

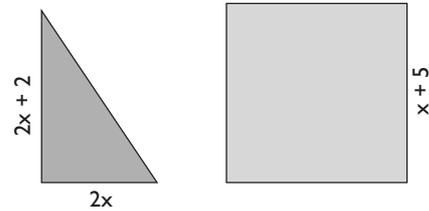
74 Halla el valor numérico de los siguientes polinomios para los valores que se indican:

- a) $x^2 + 6x - 1$ para $x = 2$
b) $3x^3 - 5x^2 + 3x + 4$ para $x = -2$
c) $x^4 + 2x^2 - 5x - 7$ para $x = 3$
d) $2x^5 - 5x^3 + x + 1$ para $x = -3$

Solución:

- a) 15 b) -46
c) 77 d) -353

75 Dados el triángulo rectángulo y el cuadrado siguientes, halla sus áreas en función de x



Solución:

Triángulo

$$A(x) = 2x(2x + 2) : 2 \Rightarrow A(x) = 2x^2 + 2x$$

Cuadrado

$$A(x) = (x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$$

76 Realiza las siguientes operaciones de monomios:

- a) $(5x^3)^2$ b) $7x^3 - x^3 + 2x^3$
c) $12x^3 : (-3x^2)$ d) $x^3 \cdot (-3x) \cdot x^2$

Solución:

- a) $25x^6$ b) $8x^3$ c) $-4x$ d) $-3x^6$

77 Realiza las siguientes multiplicaciones de polinomios por monomios:

- a) $(x^3 - 3x^2 + 6x + 2) \cdot 3x$
b) $(x^5 + 5x^3 + 7x - 1) \cdot 2x^2$
c) $(x^4 - 3x^3 - 6x + 7) \cdot (-5x^3)$
d) $(-3x^4 - 9x^3 + 7x - 6) \cdot (-8x^4)$

Solución:

- a) $3x^4 - 9x^3 + 18x^2 + 6x$
b) $2x^7 + 10x^5 + 14x^3 - 2x^2$
c) $-5x^7 + 15x^6 + 30x^4 - 35x^3$
d) $24x^8 + 72x^7 - 56x^5 + 48x^4$

78 Extrae todos los factores que puedas como factor común:

- a) $8x^2 - 12x$ b) $8x^4 + 6x^2$
c) $2x^4 + 4x^3 - 6x^2$ d) $6x^2y + 4xy^2 - 8xy$

Solución:

- a) $4x(2x - 3)$
b) $2x^2(4x^2 + 3)$
c) $2x^2(x^2 + 2x - 3)$
d) $2xy(3x + 2y - 4)$

79 Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = 7x^3 - 5x + 1$$

$$Q(x) = -4x^4 - 9x^2 + 4x - 7$$

$$R(x) = 5x^4 - 7x^3 + 5x + 6$$

calcula:

a) $P(x) + Q(x) + R(x)$ b) $P(x) + Q(x) - R(x)$

c) $P(x) - Q(x) - R(x)$

Solución:

a) $x^4 - 9x^2 + 4x$

b) $-9x^4 + 14x^3 - 9x^2 - 6x - 12$

c) $-x^4 + 14x^3 + 9x^2 - 14x + 2$

80 Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = 2x^3 - 7x + 5$$

$$Q(x) = 3x^2 + 6x - 1$$

calcula: $P(x) \cdot Q(x)$

Solución:

$$6x^5 + 12x^4 - 23x^3 - 27x^2 + 37x - 5$$

81 Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^4 - 8x^2 + 6$$

$$Q(x) = 5x^3 + 7x - 9$$

calcula: $P(x) \cdot Q(x)$

Solución:

$$5x^7 - 33x^5 - 9x^4 - 26x^3 + 72x^2 + 42x - 54$$

82 Sustituye los puntos suspensivos por uno de los signos = o \neq :

a) $(x + 5)^2 \dots x^2 + 25$

b) $(x + 5)^2 \dots x^2 + 10x + 25$

c) $(x - 4)^2 \dots x^2 - 8x + 16$

d) $(x - 4)^2 \dots x^2 - 16$

Solución:

a) $(x + 5)^2 \neq x^2 + 25$

b) $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$

c) $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$

d) $(x - 4)^2 \neq x^2 - 16$

83 Calcula:

a) $(x + 1/3)^2$

b) $(x - 1/2)^2$

c) $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

Solución:

a) $x^2 + 2x/3 + 1/9$

b) $x^2 - x + 1/4$

c) $x^2 - 2$

84 Calcula:

a) $(x + 3/2)^2$

b) $(x - 2/3)^2$

c) $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$

Solución:

a) $x^2 + 3x + 9/4$

b) $x^2 - 4/3x + 4/9$

c) $x^2 - 5$

85 Halla mentalmente la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

a) $12x^4 + 18x^3$

b) $18x^5 - 24x^4$

c) $x^2 - 7$

d) $x^2 - x + 1/4$

e) $x^3 + 2x^2 + x$

Solución:

a) $6x^3(2x + 3)$

b) $6x^4(3x - 4)$

c) $(x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})$

d) $(x - 1/2)^2$

e) $x(x + 1)^2$

86 Halla mentalmente la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

a) $15x^6 + 20x^3$

b) $20x^6 - 30x^4$

c) $x^2 - 1/4$

d) $x^3 + 6x^2 + 9x$

e) $x^5 - 10x^4 + 25x^3$

Solución:

a) $5x^3(3x^3 + 4)$

b) $10x^4(2x^2 - 3)$

c) $(x + 1/2)(x - 1/2)$

d) $x(x + 3)^2$

e) $x^3(x - 5)^2$

Ejercicios y problemas

87 Identifica cada una de las siguientes igualdades como fórmula, identidad o ecuación:

- a) $5 + 3x - 4 = 5x + 1 - 2x$
- b) $(x + 1/2)(x - 1/2) = x^2 - 1/4$
- c) $V(x, y, z) = xyz$

Solución:

- a) Identidad.
- b) Identidad.
- c) Fórmula.

88 Las siguientes fórmulas corresponden a Geometría. Identifica cada una de ellas:

- a) $P(a) = 4a$
- b) $A(a) = a^2$
- c) $L(R) = 2\pi R$
- d) $A(R) = \pi R^2$

Solución:

- a) Perímetro de un cuadrado.
- b) Área de un cuadrado.
- c) Longitud de la circunferencia.
- d) Área del círculo.

Calculadora

89 Dada la fórmula de Herón para el cálculo del área de un triángulo:

$$A(a, b, c) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p = semiperímetro

halla el área de un triángulo cuyos lados miden $a = 9$ m, $b = 8$ m y $c = 5$ m. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

$$A = 19,90 \text{ m}^2$$

90 Dada la fórmula del área del rombo:

$$A(D, d) = \frac{D \cdot d}{2}$$

halla el área de uno cuyas diagonales miden $D = 7,5$ m y $d = 3,8$ m. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

$$A = 14,25 \text{ m}^2$$

91 Dada la fórmula de la longitud del arco:

$$L_{\text{Arco}} = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot n^\circ$$

halla la longitud de uno que tiene 3,5 m de radio y un ángulo de 135° . Toma como valor de π el que da la calculadora y redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

$$L = 8,25 \text{ m}$$

92 Dada la fórmula del volumen de la esfera:

$$V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

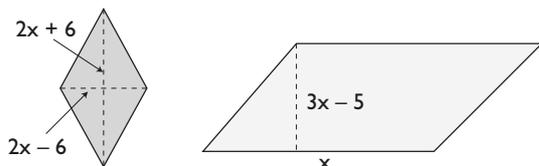
halla el volumen de una que tiene 6,5 m de radio. Toma como valor de π el que da la calculadora y redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

$$V = 1150,35 \text{ m}^3$$

Problemas

93 Dados el rombo y el romboide siguientes, halla sus áreas en función de x

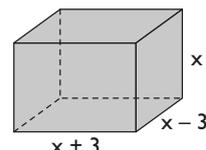


Solución:

$$\text{Rombo: } A(x) = 2x^2 - 18$$

$$\text{Romboide: } A(x) = 3x^2 - 5x$$

94 Dado el ortoedro o paralelepípedo de la siguiente figura, halla el volumen en función de x



Solución:

$$V(x) = x^3 - 9x$$

- 95** El espacio que recorre un coche cuando arranca viene dado por la fórmula:

$$e = \frac{1}{4}(7t - t^2), \text{ donde } e \text{ se mide en metros, y } t, \text{ en segundos.}$$

Calcula el espacio que recorre en los 3 primeros segundos.

Solución:

$$e = \frac{1}{4}(7 \cdot 3 - 3^2) = \frac{1}{4}(21 - 9) = \frac{1}{4} \cdot 12 = 3 \text{ m}$$

- 96** Dada la fórmula del área del triángulo:

$$A(b, a) = \frac{b \cdot a}{2}$$

halla el área de uno de 8 m de base y 9 m de altura.

Solución:

$$A = 36 \text{ m}^2$$

- 97** Dada la fórmula del área del círculo: $A(R) = \pi R^2$

halla el área de uno que tiene 5 m de radio. Toma como valor de $\pi = 3,14$, y redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

$$A = 78,50 \text{ m}^2$$

- 98** Dada la fórmula del área del paralelepípedo u ortoedro: $A(a, b, c) = 2(ab + ac + bc)$

halla el área de uno en el que $a = 12 \text{ m}$, $b = 7 \text{ m}$ y $c = 3 \text{ m}$

Solución:

$$V = 282 \text{ m}^3$$

- 99** Dada la fórmula del volumen del cubo: $V(a) = a^3$ calcula el volumen de uno que tiene 5 m de arista.

Solución:

$$V = 125 \text{ m}^3$$

- 100** Dada la fórmula del área de la esfera:

$$A(R) = 4\pi R^2$$

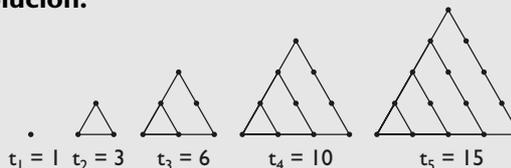
halla el área de una que tiene 8 m de radio. Toma como valor de $\pi = 3,14$ y redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

$$A = 803,84 \text{ m}^2$$

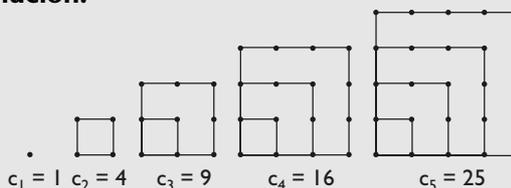
- 101** Dibuja y halla los cinco primeros números triangulares.

Solución:



- 102** Dibuja y halla los cinco primeros números cuadrangulares.

Solución:



- 103** Prueba que la suma de dos números impares consecutivos es siempre múltiplo de 4

Solución:

Dos números impares consecutivos son:

$$2n + 1, 2n + 3$$

$$2n + 1 + 2n + 3 = 4n + 4 = 4(n + 1)$$

Se observa que es múltiplo de 4

- 104** El perímetro de un rectángulo mide 24 m

- ¿Cuánto mide la base más la altura?
- Si la base mide x , ¿cuánto mide la altura?
- Calcula el polinomio que halla el área del rectángulo en función de x
- Calcula el área del rectángulo cuando la base mide 5 m

Solución:

a) 12 m

b) Base: x , altura: $12 - x$

c) $A(x) = x(12 - x) \Rightarrow P(x) = 12x - x^2$

d) $A(5) = 12 \cdot 5 - 5^2 = 60 - 25 = 35$

Ejercicios y problemas

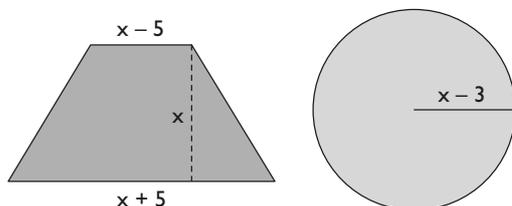
- 105** El primer polinomio de los números primos de Euler es: $P(x) = x^2 + x + 41$
 Para $x = 0, 1, 2, \dots, 39$, $P(x)$ es un número primo.
 Halla los 5 primeros números primos que se obtienen aplicando dicho polinomio.

Solución:

41, 43, 47, 53 y 61

Para profundizar

- 106** Dados el trapecio y el círculo siguientes, halla sus áreas en función de x



Solución:

Trapecio:

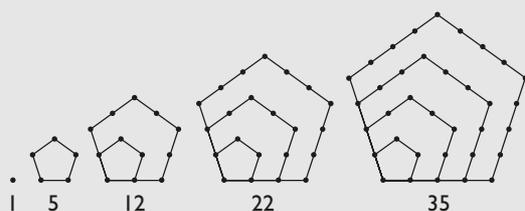
$$A(x) = \frac{x+5+x-5}{2} \cdot x = x^2$$

Círculo:

$$A(x) = \pi(x-3)^2 = \pi(x^2 - 6x + 9)$$

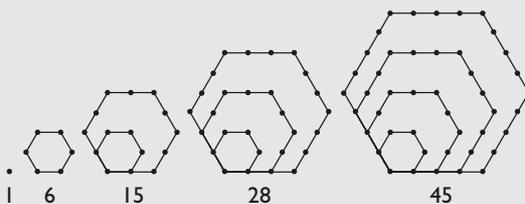
- 107** Dibuja y halla los cinco primeros números pentagonales.

Solución:



- 108** Dibuja y halla los cinco primeros números hexagonales.

Solución:



- 109** Dado un número x :

- halla el siguiente.
- eleva este siguiente al cuadrado y desarrolla el cuadrado.
- observa el resultado y escribe una ley que permita calcular, a partir del cuadrado de un número, el cuadrado del siguiente.
- pon un ejemplo.

Solución:

a) $x + 1$

b) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

- c) Dado un número al cuadrado, para hallar el cuadrado del siguiente, se le suma el doble del número más uno.

d) Ejemplo:

$$11^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 = 100 + 20 + 1 = 121$$

- 110** Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 6x + 9}$

b) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

Solución:

a) $\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 6x + 9} = \frac{x(x+3)}{(x+3)^2} = \frac{x}{x+3}$

b) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$

- 111** Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$

b) $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 10x + 25}$

Solución:

a) $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x}{x+2}$

b) $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 10x + 25} = \frac{(x+5)(x-5)}{(x+5)^2} = \frac{x-5}{x+5}$

- 112** El segundo polinomio de los números primos de Euler es: $P(x) = x^2 - 79x + 1601$

Para $x = 0, 1, 2, \dots, 79$, $P(x)$ es un número primo.

Halla los 2 últimos números primos que se obtienen aplicando dicho polinomio.

Solución:

1523 y 1601

Aplica tus competencias

Longitudes, áreas y volúmenes

En el cálculo de longitudes aparecen siempre variables lineales; en el de áreas, variables cuadradas; y en el de volúmenes, variables cúbicas, porque se miden en unidades lineales, cuadradas y cúbicas, respectivamente.

113 Halla la fórmula del perímetro de un cuadrado de lado x . Aplica la fórmula al caso en que $x = 5$ m

Solución:

$$P(x) = 4x$$

$$P(5) = 4 \cdot 5 = 20 \text{ m}$$

114 Halla la fórmula de la longitud de una circunferencia de radio x . Aplica la fórmula al caso en que $x = 5$ m. Utiliza como valor de π el que trae la calculadora, y redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

$$L(x) = 2\pi x$$

$$L(5) = 2\pi \cdot 5 = 31,42 \text{ m}$$

115 Halla la fórmula del área de un cuadrado de lado x . Aplica la fórmula al caso en que $x = 6$ m

Solución:

$$A(x) = x^2$$

$$A(6) = 6^2 = 36 \text{ m}^2$$

116 Halla la fórmula del área de un círculo de radio x . Aplica la fórmula al caso en que $x = 7$ m. Utiliza como valor de π el que trae la calculadora, y redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

$$A(x) = \pi x^2$$

$$A(7) = \pi \cdot 7^2 = 153,94 \text{ m}^2$$

117 Halla la fórmula del área de un cubo de arista x . Aplica la fórmula al caso en que $x = 8$ m

Solución:

$$A(x) = 6x^2$$

$$A(8) = 6 \cdot 8^2 = 384 \text{ m}^2$$

118 Halla la fórmula del área de una esfera de radio x . Aplica la fórmula al caso en que $x = 9$ m. Utiliza como valor de π el que trae la calculadora, y redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

$$A(x) = 4\pi x^2$$

$$A(9) = 4\pi \cdot 9^2 = 1\,017,88 \text{ m}^2$$

119 Halla la fórmula del volumen de un cubo de arista x . Aplica la fórmula al caso en que $x = 10$ m

Solución:

$$V(x) = x^3$$

$$V(10) = 10^3 = 1\,000 \text{ m}^3$$

120 Halla la fórmula del volumen de una esfera de radio x . Aplica la fórmula al caso en que $x = 11$ m. Utiliza como valor de π el que trae la calculadora, y redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

$$V(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$$

$$V(11) = \frac{4}{3}\pi \cdot 11^3 = 5\,575,28 \text{ m}^3$$

Comprueba lo que sabes

- 1** Define qué es el valor numérico de un polinomio. Pon un ejemplo.

Solución:

El **valor numérico de un polinomio** es el valor que se obtiene al sustituir la variable por un número y efectuar las operaciones.

Ejemplo

Halla el valor numérico de

$$P(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 4 \text{ para } x = 2$$

$$P(2) = 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 - 4 =$$

$$= 8 + 20 - 14 - 4 = 28 - 18 = 10$$

- 2** Escribe en lenguaje algebraico las siguientes expresiones coloquiales:

- a) El triple de un número x disminuido en 7 unidades.
b) Dos números impares consecutivos.

Solución:

a) $3x - 7$

b) $2x + 1, 2x + 3$

- 3** Realiza las siguientes operaciones de monomios:

a) $4x^5 \cdot (-8x^2)$ b) $(-5x^2)^3$

c) $x^2 - 7x^2 + 5x^2 - 3x^2$ d) $12x^5 : 18x^3$

Solución:

a) $-32x^7$

b) $-125x^6$

c) $-4x^2$

d) $\frac{2}{3}x^2$

- 4** Dados los polinomios:

$$P(x) = 2x^5 - 8x^4 + 7x^2 - 3$$

$$Q(x) = 6x^4 - 5x^2 + 9x - 4$$

calcula:

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

Solución:

a) $2x^5 - 2x^4 + 2x^2 + 9x - 7$

b) $2x^5 - 14x^4 + 12x^2 - 9x + 1$

- 5** Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = 3x^3 - 7x - 6$$

$$Q(x) = 5x^2 - 9x + 1$$

Halla el grado del producto.

Solución:

$$15x^5 - 27x^4 - 32x^3 + 33x^2 + 47x - 6$$

El grado del producto es: $3 + 2 = 5$

- 6** Calcula:

a) $(2x + 1/2)^2$

b) $(2x + 3)(2x - 3)$

c) $(x - 5)^2$

Solución:

a) $4x^2 + 2x + 1/4$

b) $4x^2 - 9$

c) $x^2 - 10x + 25$

- 7** El espacio que recorre un coche cuando arranca viene dado por la fórmula:

$$e = \frac{1}{4}(7t - t^2), \text{ donde } e \text{ se mide en metros, y } t,$$

en segundos.

Calcula el espacio que recorre en los 3 primeros segundos.

Solución:

$$e = \frac{1}{4}(7 \cdot 3 - 3^2) = \frac{1}{4}(21 - 9) = \frac{1}{4} \cdot 12 = 3 \text{ m}$$

- 8** Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

a) $6x^3 + 9x^2$

b) $x^2 - 49$

c) $x^2 + 10x + 25$

d) $x^2 - 8x + 16$

Solución:

a) $3x^2(2x + 3)$

b) $(x + 7)(x - 7)$

c) $(x + 5)^2$

d) $(x - 4)^2$

Paso a paso

121 Calcula el valor numérico del polinomio:

$$P(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 4$$

para $x = 2$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

122 Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^4 - 6x^3 + 7x - 8$$

$$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

calcula: $P(x) - Q(x)$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

123 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$$

$$Q(x) = x^2 - 4x + 6$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

124 Desarrolla: $(x + 5)^2$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

125 Factoriza: $x^3 + 2x^2 + x$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Wiris o DERIVE:

126 Halla el décimo número triangular, sabiendo que la fórmula de los números triangulares es:

$$t(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

127 Internet. Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso** y **tema**.

Practica

128 Halla el valor numérico de los siguientes polinomios para los valores que se indican:

a) $P(x) = x^2 - 7x - 9$ para $x = -2$

b) $P(x) = x^3 + 6x^2 - 15$ para $x = 3$

Solución:

a) 9

b) 66

129 Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = 9x^4 - 6x^2 + 3$$

$$Q(x) = -7x^4 + 8x^2 + x - 19$$

calcula: a) $P(x) + Q(x)$ b) $P(x) - Q(x)$

Solución:

a) $2x^4 + 2x^2 + x - 16$ b) $16x^4 - 14x^2 - x + 22$

130 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = 5x^3 - 7x^2 - 9$$

$$Q(x) = -6x^4 + 4x^2 - 3x + 8$$

Solución:

$$-30x^7 + 42x^6 + 20x^5 + 11x^4 + 61x^3 - 92x^2 + 27x - 72$$

131 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$$

$$Q(x) = x - 2$$

Solución:

$$x^4 - 16$$

132 Calcula:

- a) $(5x + 7/2)^2$
- b) $(5x - 7/2)^2$
- c) $(5x + 7/2)(5x - 7/2)$

Solución:

- a) $25x^2 + 35x + 49/4$
- b) $25x^2 - 35x + 49/4$
- c) $25x^2 - 49/4$

133 Halla la descomposición factorial de:

- a) $x^2 - 5x$
- b) $4x^2 - 49$
- c) $x^3 - 36x$
- d) $x^3 - 2x^2 + x$

Solución:

- a) $x(x - 5)$
- b) $(2x + 7)(2x - 7)$
- c) $x(x + 6)(x - 6)$
- d) $x(x - 1)^2$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

134 Dada la fórmula del volumen de la esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

halla el volumen de una con $R = 7,25$ m

Solución:

$$1\,596,3 \text{ m}^3$$

135 El primer polinomio de los números primos de Euler es: $P(x) = x^2 + x + 41$

Para $x = 0, 1, 2, \dots, 39$, $P(x)$ es un número primo.

Halla los 3 últimos números primos que se obtienen aplicando dicho polinomio.

Solución:

$$1\,447, 1\,523, 1\,601$$

136 Dada la fórmula del área del triángulo:

$$A = \frac{b \cdot a}{2}$$

halla el área de uno que tiene 8,75 m de base y 15,42 m de altura.

Solución:

$$A = 67,4625 \text{ m}^2$$

8

Ecuaciones de 1^{er}
y 2^o grado1. Ecuaciones de 1^{er} grado

PIENSA Y CALCULA

Resuelve mentalmente:

a) $x + 3 = 5$

b) $x - 2 = 6$

c) $5x = 15$

d) $\frac{x}{2} = 7$

Solución:

a) $x = 2$

b) $x = 8$

c) $x = 3$

d) $x = 14$

Carné calculista 328,4 : 52 | C = 6,31; R = 0,28

APLICA LA TEORÍA

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1 $2x + 3 = 9$

Solución:

$x = 3$

2 $5 - 3x = 2$

Solución:

$x = 1$

3 $3x + 1 = 1$

Solución:

$x = 0$

4 $5 - x = 0$

Solución:

$x = 5$

5 $1 - 6x + 3 = 2x - 12$

Solución:

$x = 2$

6 $4 - 3x + 2 = 4 - 5x$

Solución:

$x = -1$

7 $3 + 2(x - 1) = 4x - 5$

Solución:

$x = 3$

8 $2x - 3(x + 2) = 2(x - 1) - 1$

Solución:

$x = -1$

9 $3(2x + 1) - (x + 2) = 2x - 3(x - 1)$

Solución:

$x = 1/3$

10 $x - (x + 3) - 2(x + 5) = 5 - 4(x + 3)$

Solución:

$x = 3$

$$11 \quad \frac{x}{4} + 2 = 2x - \frac{3}{2}$$

Solución:

$$x = 2$$

$$12 \quad \frac{x}{6} + \frac{x}{2} = 3 - x$$

Solución:

$$x = 9/5$$

$$13 \quad \frac{x}{6} + 5 + x = \frac{1}{3}$$

Solución:

$$x = -4$$

$$14 \quad \frac{x}{6} - \frac{3x-1}{4} = 2x + \frac{33}{8}$$

Solución:

$$x = -3/2$$

$$15 \quad \frac{1}{5} + \frac{3x}{2} = \frac{2x}{3}$$

Solución:

$$x = -6/25$$

$$16 \quad 3 - \frac{7x+2}{8} = 2x + \frac{5x+1}{9}$$

Solución:

$$x = 10/13$$

$$17 \quad \frac{x-3}{4} = \frac{x-5}{6} + \frac{x-1}{9}$$

Solución:

$$x = 7$$

$$18 \quad \frac{x-2}{3} - \frac{x-4}{5} = \frac{x-3}{4}$$

Solución:

$$x = 53/7$$

$$19 \quad 2(x-3) + 10x = \frac{8x-1}{2}$$

Solución:

$$x = 11/16$$

$$20 \quad \frac{x-1}{2} = \frac{3x-10}{5} + \frac{x-2}{3}$$

Solución:

$$x = 5$$

2. Ecuaciones de 2º grado

PIENSA Y CALCULA

Resuelve mentalmente, si es posible:

a) $x^2 = 0$

b) $x^2 = 9$

c) $x^2 = -16$

d) $x(x-1) = 0$

Solución:

a) $x_1 = x_2 = 0$

b) $x_1 = 3, x_2 = -3$

c) No tiene solución.

d) $x_1 = 0, x_2 = 1$

Carné calculista $\frac{3}{4} : \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

21 $3x^2 = 0$

Solución:

$x_1 = x_2 = 0$

22 $x^2 - 4 = 0$

Solución:

$x_1 = 2, x_2 = -2$

23 $x^2 + x - 6 = 0$

Solución:

$x_1 = 2, x_2 = -3$

24 $x^2 - 36 = 0$

Solución:

$x_1 = 6, x_2 = -6$

25 $x^2 + 3x - 4 = 0$

Solución:

$x_1 = 1, x_2 = -4$

26 $x^2 - 9 = 0$

Solución:

$x_1 = 3, x_2 = -3$

27 $x^2 - 3x - 10 = 0$

Solución:

$x_1 = 5, x_2 = -2$

28 $x^2 - 3x = 0$

Solución:

$x_1 = 0, x_2 = 3$

29 $x^2 - 100 = 0$

Solución:

$x_1 = 10, x_2 = -10$

30 $2x^2 + 3x - 2 = 0$

Solución:

$x_1 = 1/2, x_2 = -2$

31 $2x^2 - 5x = 0$

Solución:

$x_1 = 0, x_2 = 5/2$

32 $9x^2 - 18x + 8 = 0$

Solución:

$x_1 = 4/3, x_2 = 2/3$

33 $9x^2 - 4 = 0$

Solución:

$x_1 = 2/3, x_2 = -2/3$

34 $4x^2 - 13x + 3 = 0$

Solución:

$x_1 = 1/4, x_2 = 3$

35 $2x + 5x^2 = 0$

Solución:

$x_1 = 0, x_2 = -2/5$

36 $2x^2 - 3x + 1 = 0$

Solución:

$x_1 = 1/2, x_2 = 1$

37 $25x^2 - 1 = 0$

Solución:

$x_1 = 1/5, x_2 = -1/5$

38 $2x^2 - x - 6 = 0$

Solución:

$x_1 = 2, x_2 = -3/2$

39 $5x^2 - 3x = 0$

Solución:

$x_1 = 0, x_2 = 3/5$

40 $4x^2 - x = 0$

Solución:

$x_1 = 0, x_2 = 1/4$

41 $5x^2 - 14x - 3 = 0$

Solución:

$x_1 = 3, x_2 = -1/5$

42 $3x^2 = 4x$

Solución:

$x_1 = 0, x_2 = 4/3$

43 $5x^2 - 24x - 5 = 0$

Solución:

$x_1 = 5, x_2 = -1/5$

44 $(x - 3)(x - 1) = 15$

Solución:

$x_1 = 6, x_2 = -2$

45 $(x + 1)(x - 2) = 10$

Solución:

$x_1 = 4, x_2 = -3$

46 $\frac{3x}{2} = 1 + \frac{x^2 + 4}{4}$

Solución:

$x_1 = 4, x_2 = 2$

3. Número de soluciones y factorización

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente las siguientes raíces cuadradas y da todas las soluciones:

a) $\sqrt{2^2 + 4 \cdot 3}$

b) $\sqrt{6^2 - 4 \cdot 9}$

c) $\sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}$

Solución:

a) ± 4

b) 0

c) No tiene raíz real.

Carné calculista 435 : 9,2 | C = 47,28; R = 0,024

APLICA LA TEORÍA

47 Sin resolver las siguientes ecuaciones, determina cuántas soluciones tienen:

a) $x^2 + 5x - 7 = 0$

b) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

c) $x^2 + 4x + 4 = 0$

d) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Solución:

a) $\Delta = 53 > 0 \Rightarrow$ Tiene dos soluciones.

b) $\Delta = -31 < 0 \Rightarrow$ No tiene soluciones.

c) $\Delta = 0 \Rightarrow$ Tiene una solución doble.

d) $\Delta = 0 \Rightarrow$ Tiene una solución doble.

48 Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios de segundo grado:

a) $x^2 - x - 12$

b) $2x^2 - x - 3$

c) $3x^2 + 5x - 12$

d) $5x^2 - 2x$

Solución:

a) $(x - 4)(x + 3)$

b) $2(x - 3/2)(x + 1)$

c) $3(x - 4/3)(x + 3)$

d) $5x(x - 2/5)$

49 Escribe en cada caso una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:

- a) $x_1 = 3, x_2 = -5$
- b) $x_1 = 2, x_2 = -3$
- c) $x_1 = -1, x_2 = -2/5$
- d) $x_1 = 3/2, x_2 = -1/4$

Solución:

- a) $x^2 + 2x - 15 = 0$
- b) $x^2 + x - 6 = 0$
- c) $5x^2 + 7x + 2 = 0$
- d) $8x^2 - 10x - 3 = 0$

50 Sin resolver las siguientes ecuaciones, calcula la suma y el producto de sus soluciones:

- a) $2x^2 - 14x - 5 = 0$
- b) $x^2 - 7x + 4 = 0$
- c) $2x^2 - 5x + 2 = 0$
- d) $2x^2 - 3x + 6 = 0$

Solución:

- a) $S = 7, P = -5/2$
- b) $S = 7, P = 4$
- c) $S = 5/2, P = 1$
- d) $S = 3/2, P = 3$

4. Problemas de ecuaciones

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente:

- a) Un número cuya mitad más uno es tres.
- b) El lado de un cuadrado cuya área es 25 m^2

Solución:

- a) $x = 4$
- b) $x = 5 \text{ m}$

Carné calculista $\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{3}\right) = \frac{23}{9}$

APLICA LA TEORÍA

51 Encuentra un número tal que el cuádruple de dicho número más 20 unidades sea igual a 68

Solución:

Número = x
 $4x + 20 = 68 \Rightarrow x = 12$
El número es 12

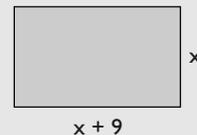
52 Halla tres números enteros consecutivos cuya suma sea 189

Solución:

Primer número: x
Segundo número: $x + 1$
Tercer número: $x + 2$
 $x + x + 1 + x + 2 = 189 \Rightarrow x = 62$
Los números son: 62, 63 y 64

53 La base de un rectángulo mide 9 cm más que la altura. Si su perímetro mide 74 cm, ¿cuáles serán las dimensiones del rectángulo?

Solución:



$$2(x + 9 + x) = 74 \Rightarrow x = 14$$

La altura mide: 14 cm

La base mide: 23 cm

54 Se desea mezclar un jabón líquido normal de 1,5 €/litro con jabón extra de 2 €/litro, para hacer 200 litros de mezcla a 1,7 €/litro. Calcula la cantidad de litros que se debe mezclar de cada tipo de jabón.

Solución:

	Normal	Extra	Mezcla
Precio (€/litro)	1,5	2	1,7
Volumen (litros)	x	200 - x	200
Dinero (€)	$1,5x + 2(200 - x) = 1,7 \cdot 200$		

$$1,5x + 2(200 - x) = 1,7 \cdot 200 \Rightarrow x = 120$$

Jabón normal: 120 litros.

Jabón extra: 80 litros.

- 55** Una madre tiene 35 años más que su hijo, y dentro de 15 años su edad será el doble de la del hijo. ¿Cuántos años tienen en la actualidad?

Solución:

	Hoy	Dentro de 15 años
Edad del hijo	x	x + 15
Edad de la madre	35 + x	x + 35 + 15

$$x + 35 + 15 = 2(x + 15) \Rightarrow x = 20$$

La edad del hijo: 20 años.

La edad de la madre: 55 años.

- 56** Un grifo A llena un depósito de agua en 2 h y otro grifo B lo hace en 3 h. El depósito tiene un desagüe que lo vacía en 6 h estando los grifos cerrados. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar a la vez el depósito estando el desagüe abierto?

Solución:

Tiempo que tarda en llenarse el depósito: x

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ horas.}$$

- 57** Irene sale en moto desde su pueblo hacia el este a una velocidad de 60 km/h. Dos horas más tarde, María sale en moto tras ella, a una velocidad de 90 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará María en alcanzar a Irene?

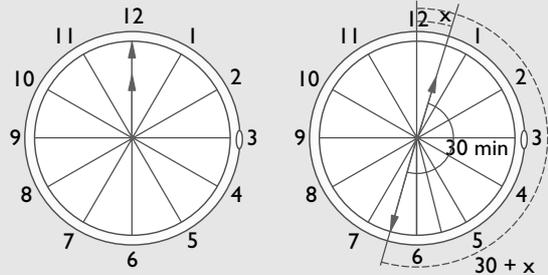
Solución:

Tiempo que tarda en alcanzar María a Irene desde la salida de Irene: x

$$60x = 90(x - 2) \Rightarrow x = 6$$

Tardará 6 horas.

- 58** ¿A qué hora estarán por primera vez en línea recta las manecillas del reloj después de las doce?

Solución:

Recorrido en minutos de la aguja horaria: x

$$30 + x = 12x$$

$$x = \frac{30}{11} = 2,73 = 2 \text{ min } 44 \text{ s}$$

La hora será: 12 h 32 min 44 s

- 59** Halla dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 313

Solución:

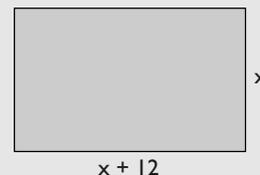
Primer número: x

Segundo número: x + 1

$$x^2 + (x + 1)^2 = 313 \Rightarrow x_1 = 12, x_2 = -13$$

Los números son: 12 y 13 o bien -13 y -12

- 60** Calcula las dimensiones de una finca rectangular que tiene 12 dam más de largo que de ancho, y una superficie de 640 dam²

Solución:

$$(x + 12)x = 640 \Rightarrow x_1 = 20, x_2 = -32$$

La solución negativa no es válida.

La finca tiene 32 dam por 20 dam

Ejercicios y problemas

1. Ecuaciones de 1^{er} grado

Resuelve las siguientes ecuaciones:

61 $5x + 3x = 50 - 2x$

Solución:

$$x = 5$$

62 $2x - 5x = -6x + 12$

Solución:

$$x = 4$$

63 $4x + 2 = 3x + 8 - x$

Solución:

$$x = 3$$

64 $5x - 9 = 3x - 3$

Solución:

$$x = 3$$

65 $3(x - 5) = 2(x - 4)$

Solución:

$$x = 7$$

66 $4(x - 1) + 3(3x - 1) = 28 - 3(x + 1)$

Solución:

$$x = 2$$

67 $5(x - 3) - (2x + 1) = 4(x - 1) - 1$

Solución:

$$x = -11$$

68 $3x - 2(3 - x) - 17 = 3(x + 1) - 4(x - 1)$

Solución:

$$x = 5$$

69 $3(4x - 2) - 2(5x + 3) = 5 - 3(x - 1)$

Solución:

$$x = 4$$

70 $3(2x - 5) - 2(3 - 4x) + 5(x - 1) = 12$

Solución:

$$x = 2$$

71 $3x - 4(2 - 3x) - 16 = 5x - 2(4x + 3)$

Solución:

$$x = 1$$

72 $4 - 5x - (10 - x) = 3(1 - x) - 2(x + 3)$

Solución:

$$x = 3$$

73 $2(x - 1) + 3(1 - 2x) = 4(x + 1) + 13$

Solución:

$$x = -2$$

74 $2x - (x - 2) - 2(10 - x) = 5(x - 2)$

Solución:

$$x = -4$$

75 $3(2 - 4x) = 8x - (x - 2) - 15 + 2(x - 1)$

Solución:

$$x = 1$$

76 $\frac{x}{2} + 1 = 4 - x$

Solución:

$$x = 2$$

77 $\frac{x}{3} + 2 = \frac{10}{3} - x$

Solución:

$$x = 1$$

78 $\frac{x}{2} - 1 = \frac{x}{6} - \frac{1}{3}$

Solución:

$$x = 2$$

$$79 \quad \frac{2x}{5} - \frac{x}{2} = \frac{x}{5}$$

Solución:

$$x = 0$$

$$80 \quad \frac{x}{2} + \frac{x-1}{4} = \frac{x}{3}$$

Solución:

$$x = 3/5$$

$$81 \quad x + \frac{x+2}{6} = \frac{4x}{3}$$

Solución:

$$x = 2$$

$$82 \quad x - \frac{5x-1}{2} = \frac{3x}{5} + 1$$

Solución:

$$x = -5/21$$

$$83 \quad \frac{x-1}{4} = \frac{x}{6} - 2$$

Solución:

$$x = -21$$

$$84 \quad 2 - \frac{x-4}{3} = x - \frac{14}{3}$$

Solución:

$$x = 6$$

$$85 \quad \frac{2x}{3} - \frac{x+2}{6} = \frac{3x}{2} + 1$$

Solución:

$$x = -4/3$$

$$86 \quad \frac{x}{3} - \frac{x-2}{12} = \frac{31}{24} - 2x$$

Solución:

$$x = 1/2$$

$$87 \quad \frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{3} = x + 2$$

Solución:

$$x = -13$$

$$88 \quad \frac{x+1}{6} + \frac{x-4}{3} = \frac{1}{3}$$

Solución:

$$x = 3$$

$$89 \quad \frac{2-x}{3} + \frac{x-3}{4} = \frac{x}{7} + \frac{1}{7}$$

Solución:

$$x = -1$$

$$90 \quad \frac{x-1}{12} - \frac{2x+1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1-x}{4}$$

Solución:

$$x = -2/5$$

$$91 \quad \frac{x+3}{7} + \frac{x-1}{14} = \frac{x+1}{2}$$

Solución:

$$x = -1/2$$

$$92 \quad \frac{x-3}{4} - \frac{x-5}{6} = \frac{x-1}{9}$$

Solución:

$$x = 7$$

$$93 \quad \frac{x+1}{3} - \frac{3x+1}{9} = \frac{1}{2} - \frac{2x+1}{18}$$

Solución:

$$x = 2$$

$$94 \quad x + \frac{2}{3} - \frac{3x-1}{5} = \frac{2x-1}{3}$$

Solución:

$$x = 9/2$$

$$95 \quad \frac{4x+1}{3} - \frac{5x-1}{6} = \frac{2x-1}{5}$$

Solución:

$$x = -7$$

Ejercicios y problemas

$$96 \quad \frac{x-1}{3} - 1 = \frac{x+1}{6} - \frac{x}{2}$$

Solución:

$$x = 9/4$$

$$97 \quad \frac{5-x}{2} - 2 = \frac{1-x}{2} - \frac{2(x+1)}{3}$$

Solución:

$$x = -1$$

$$98 \quad \frac{3x+2}{5} - \frac{x-2}{35} = 1 - \frac{4x-3}{7}$$

Solución:

$$x = 17/20$$

$$99 \quad \frac{2x+3}{8} - \frac{x+7}{2} = -\frac{1}{8} - \frac{5(x+3)}{2}$$

Solución:

$$x = -2$$

$$100 \quad \frac{x-3}{8} = \frac{x+5}{20} - \frac{x+2}{5} - \frac{1}{2}$$

Solución:

$$x = -1$$

2. Ecuaciones de 2º grado

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$101 \quad 6x^2 = 0$$

Solución:

$$x_1 = x_2 = 0$$

$$102 \quad x^2 - 25 = 0$$

Solución:

$$x_1 = 5, x_2 = -5$$

$$103 \quad x^2 + 3x - 10 = 0$$

Solución:

$$x_1 = 2, x_2 = -5$$

$$104 \quad x^2 - 64 = 0$$

Solución:

$$x_1 = 8, x_2 = -8$$

$$105 \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

Solución:

$$x_1 = 3, x_2 = -1$$

$$106 \quad x^2 - 2x = 0$$

Solución:

$$x_1 = 0, x_2 = 2$$

$$107 \quad x^2 + 2x - 24 = 0$$

Solución:

$$x_1 = 4, x_2 = -6$$

$$108 \quad x^2 - 81 = 0$$

Solución:

$$x_1 = 9, x_2 = -9$$

$$109 \quad 3x^2 + x - 2 = 0$$

Solución:

$$x_1 = 2/3, x_2 = -1$$

$$110 \quad 2x^2 + x - 3 = 0$$

Solución:

$$x_1 = 1, x_2 = -3/2$$

$$111 \quad x^2 - 16 = 0$$

Solución:

$$x_1 = 4, x_2 = -4$$

$$112 \quad 5x^2 + 9x - 2 = 0$$

Solución:

$$x_1 = 1/5, x_2 = -2$$

113 $3x^2 - 4x = 0$

Solución:

$x_1 = 0, x_2 = 4/3$

114 $x^2 = 3x$

Solución:

$x_1 = 0, x_2 = 3$

115 $9x^2 - 15x + 4 = 0$

Solución:

$x_1 = 4/3, x_2 = 1/3$

116 $4x^2 - 25 = 0$

Solución:

$x_1 = 5/2, x_2 = -5/2$

117 $7x^2 + 20x - 3 = 0$

Solución:

$x_1 = 1/7, x_2 = -3$

118 $5x^2 + 7x = 0$

Solución:

$x_1 = 0, x_2 = -7/5$

119 $4x^2 - 3x - 10 = 0$

Solución:

$x_1 = 2, x_2 = -5/4$

120 $4x^2 - 1 = 0$

Solución:

$x_1 = 1/2, x_2 = -1/2$

121 $9x^2 - 9x + 2 = 0$

Solución:

$x_1 = 2/3, x_2 = 1/3$

122 $2x^2 + x = 0$

Solución:

$x_1 = 0, x_2 = -1/2$

123 $x^2 - 9x + 20 = 0$

Solución:

$x_1 = 5, x_2 = 4$

124 $3x^2 + 4x - 15 = 0$

Solución:

$x_1 = 5/3, x_2 = -3$

125 $9x^2 - 1 = 0$

Solución:

$x_1 = 1/3, x_2 = -1/3$

126 $4x^2 - 12x - 7 = 0$

Solución:

$x_1 = 7/2, x_2 = -1/2$

127 $5x^2 - 28x + 15 = 0$

Solución:

$x_1 = 3/5, x_2 = 5$

128 $x + 5x^2 = 0$

Solución:

$x_1 = 0, x_2 = -1/5$

129 $5x^2 - 12x + 4 = 0$

Solución:

$x_1 = 2/5, x_2 = 2$

130 $3x^2 - 11x - 4 = 0$

Solución:

$x_1 = -1/3, x_2 = 4$

Ejercicios y problemas

131 $(2x - 1)^2 = 0$

Solución:

$$x_1 = x_2 = 1/2$$

132 $x(x - 1) = 0$

Solución:

$$x_1 = 0, x_2 = 1$$

133 $x(2x - 3) = 0$

Solución:

$$x_1 = 0, x_2 = 3/2$$

134 $(x + 1)(x - 1) = 2(x + 5) + 4$

Solución:

$$x_1 = 5, x_2 = -3$$

135 $2x(x + 3) - (8 + 6x) = (x + 2)(x - 3)$

Solución:

$$x_1 = 1, x_2 = -2$$

136 $x^2 + \frac{5x}{12} - \frac{1}{6} = 0$

Solución:

$$x_1 = 1/4, x_2 = -2/3$$

137 $3x^2 - \frac{3x}{4} - \frac{9}{8} = 0$

Solución:

$$x_1 = 3/4, x_2 = -1/2$$

138 $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} = \frac{1}{3}$

Solución:

$$x_1 = -2/3, x_2 = 2$$

139 $2x^2 - \frac{4x}{3} - \frac{10}{3} = 0$

Solución:

$$x_1 = 5/3, x_2 = -1$$

140 $x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{x}{4}$

Solución:

$$x_1 = 1/4, x_2 = 1$$

141 $\frac{x + 1}{2} + \frac{10x^2 + 3x}{8} = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{8}$

Solución:

$$x_1 = 1/8, x_2 = -1$$

142 $\frac{x^2 + 2}{5} - \frac{x^2 + x}{2} = \frac{3x + 1}{10}$

Solución:

$$x_1 = 1/3, x_2 = -3$$

143 $\frac{x^2 - 8x - 2}{3} = \frac{x^2 - 3x + 2}{2}$

Solución:

$$x_1 = -5, x_2 = -2$$

3. Números de soluciones y factorización

144 Sin resolver las siguientes ecuaciones, determina cuántas soluciones tienen:

- a) $3x^2 + 7x - 1 = 0$ b) $2x^2 - 5x + 20 = 0$
c) $x^2 + 6x + 9 = 0$ d) $3x^2 - 4x - 2 = 0$

Solución:

- a) $\Delta = 61 > 0 \Rightarrow$ Tiene dos soluciones reales.
b) $\Delta = -135 < 0 \Rightarrow$ No tiene soluciones reales.
c) $\Delta = 0 \Rightarrow$ Tiene una solución doble.
d) $\Delta = 40 > 0 \Rightarrow$ Tiene dos soluciones reales.

145 Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios de segundo grado:

- a) $3x^2 - 7x + 2$ b) $4x^2 - x - 3$
c) $2x^2 - 13x + 15$ d) $4x^2 + 7x - 2$

Solución:

- a) $3(x - 1/3)(x - 2)$ b) $4(x + 3/4)(x - 1)$
c) $2(x - 3/2)(x - 5)$ d) $4(x - 1/4)(x + 2)$

146 Escribe en cada caso una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:

- a) $x_1 = 2, x_2 = -6$ b) $x_1 = 3, x_2 = -2$
 c) $x_1 = -4, x_2 = -2/3$ d) $x_1 = 1/2, x_2 = -3/4$

Solución:

- a) $x^2 + 4x - 12 = 0$
 b) $x^2 - x - 6 = 0$
 c) $3x^2 + 14x + 8 = 0$
 d) $8x^2 + 2x - 3 = 0$

147 Sin resolver las siguientes ecuaciones, calcula la suma y el producto de sus soluciones:

- a) $3x^2 - 21x - 4 = 0$ b) $2x^2 - 5x + 4 = 0$
 c) $3x^2 + 6x - 8 = 0$ d) $x^2 + 7x - 15 = 0$

Solución:

- a) $S = 7, P = -4/3$
 b) $S = 5/2, P = 2$
 c) $S = -2, P = -8/3$
 d) $S = -7, P = -15$

4. Problemas de ecuaciones

148 Calcula un número cuya cuarta parte más la sexta parte sumen 15 unidades.

Solución:

Número: x

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 15 \Rightarrow x = 36$$

El número es 36

149 De un depósito lleno de agua se saca primero la mitad del agua que contiene, y después, un quinto del resto. Si en el depósito quedan aún 600 litros, ¿cuál es la capacidad del depósito?

Solución:

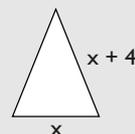
Capacidad del depósito: x

$$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{x}{2} \right) = 600 \Rightarrow x = 1500$$

La capacidad del depósito es 1500 litros.

150 En un triángulo isósceles, cada uno de los lados iguales es 4 cm más largo que el lado desigual. Si el perímetro del triángulo mide 44 cm, ¿cuál es la longitud de cada lado?

Solución:



$$x + 2(x + 4) = 44 \Rightarrow x = 12$$

Los lados miden:

Lado desigual: 12 cm

Lados iguales: 16 cm

151 Se mezclan café natural de 7,4 € el kilo y café torrefacto de 6,8 € el kilo, y se obtienen 150 kg a 7,04 € el kilo. ¿Cuántos kilos de cada tipo de café se han mezclado?

Solución:

	Natural	Torrefacto	Mezcla
Precio (€/kg)	7,4	6,8	7,04
Peso (kg)	x	$150 - x$	150
Dinero (€)	$7,4x + 6,8(150 - x) = 7,04 \cdot 150$		

$$7,4x + 6,8(150 - x) = 7,04 \cdot 150 \Rightarrow x = 60$$

Se mezclan:

Café natural = 60 kg

Café torrefacto = 90 kg

152 La edad de un padre es cinco veces la del hijo. Si dentro de dos años la edad del padre será cuatro veces la del hijo, ¿cuál es la edad actual de cada uno?

Solución:

	Hoy	Dentro de 2 años
Edad de hijo	x	$x + 2$
Edad del padre	$5x$	$5x + 2$

$$5x + 2 = 4(x + 2) \Rightarrow x = 6$$

La edad del hijo es 6 años.

La edad del padre es 30 años.

Ejercicios y problemas

153 Un grifo A llena un depósito de agua en 12 h, otro grifo B lo llena en 6 h y otro C lo llena en 4 h. El depósito tiene un desagüe que lo vacía en 10 h estando los grifos cerrados. ¿Cuánto tiempo tardarán los tres grifos en llenar a la vez el depósito estando el desagüe abierto?

Solución:

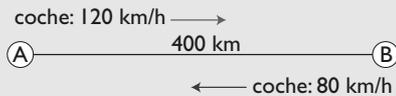
Tiempo que tarda en llenarse: x

$$\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10}\right)x = 1 \Rightarrow x = 5/2 = 2,5 \text{ horas.}$$

154 Un coche sale de una ciudad A hacia otra ciudad B, que se encuentra a 400 km de distancia, con una velocidad de 120 km/h. A la misma hora, otro coche sale de B hacia A con una velocidad de 80 km/h

- ¿Cuánto tiempo tardarán en encontrarse los coches?
- ¿A qué distancia de A se encontrarán?

Solución:



Tiempo que tardan en encontrarse: x

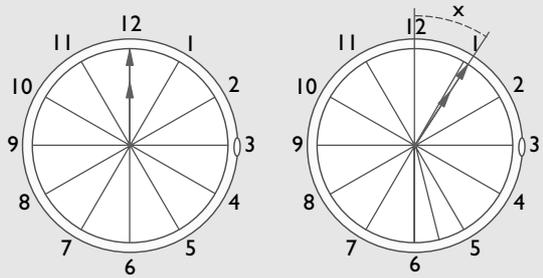
El espacio que recorren los dos suma 400 km

$$120x + 80x = 400 \Rightarrow x = 2$$

- Tardan en encontrarse 2 horas.
- Se encuentran a $120 \cdot 2 = 240$ km de A

155 ¿A qué hora se volverán a superponer por primera vez las manecillas del reloj después de las doce?

Solución:



Recorrido en minutos de la aguja horaria: x

$$60 + x = 12x \Rightarrow x = 60/11 = 5,45$$

Se vuelven a superponer a la 1 h 5 min 27 s

156 Calcula dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 420

Solución:

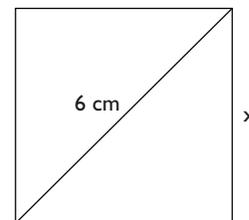
Primer número: x

Segundo número: $x + 1$

$$x(x + 1) = 420 \Rightarrow x_1 = 20, x_2 = -21$$

Los números son: 20 y 21 o bien -21 y -20

157 La diagonal de un cuadrado mide 6 cm. Calcula la longitud del lado del cuadrado.



Solución:

Lado del cuadrado: x

$$x^2 + x^2 = 36 \Rightarrow x_1 = 3\sqrt{2}, x_2 = -3\sqrt{2}$$

La solución negativa no tiene sentido.

El lado del cuadrado es $3\sqrt{2}$ cm

Para ampliar

158 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2}{x} = \frac{5}{x} + 1$

b) $\frac{8}{x} - 1 = \frac{4}{x}$

c) $\frac{2}{x-1} = \frac{3}{x}$

d) $\frac{4}{x+2} = \frac{6}{2x-1}$

Solución:

a) $x = -3$

b) $x = 4$

c) $x = 3$

d) $x = 8$

159 Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado e interpreta el resultado. Indica si tienen solución, si no tienen o si tienen más de una solución.

a) $x + 2(x - 2) = 3(x - 1) - 1$

b) $\frac{x}{5} = \frac{x+6}{7} + 2$

c) $x + \frac{x-2}{3} = x + \frac{x+2}{3}$

Solución:

a) Es una identidad. Tiene infinitas soluciones.

b) $x = 50$ Tiene una solución.

c) No tiene solución.

160 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2}{x} + 2x = 4$

b) $3x - 11 = \frac{1}{x-3}$

Solución:

a) $x = 1$

b) $x_1 = 8/3, x_2 = 4$

161 Sin resolver las siguientes ecuaciones, determina cuántas soluciones tienen:

a) $6x^2 + x + 1 = 0$

b) $x^2 + 3x + 2 = 0$

c) $x^2 + 10x + 25 = 0$

d) $2x^2 - 3x + 7 = 0$

Solución:

a) $\Delta = -23 < 0 \Rightarrow$ No tiene solución real.

b) $\Delta = 1 > 0 \Rightarrow$ Tiene dos soluciones reales.

c) $\Delta = 0 \Rightarrow$ Tiene una solución doble.

d) $\Delta = -47 < 0 \Rightarrow$ No tiene solución real.

162 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 7x - 8$

b) $6x^2 - 13x + 2$

c) $12x^2 - 35x + 8$

d) $x^2 - 6x + 9$

Solución:

a) $(x - 8)(x + 1)$

b) $6(x - 1/6)(x - 2)$

c) $12(x - 1/4)(x - 8/3)$

d) $(x - 3)^2$

163 Escribe en cada caso una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:

a) $x_1 = 1, x_2 = -4$

b) $x_1 = 5, x_2 = -2$

c) $x_1 = -4, x_2 = -3/2$

d) $x_1 = 1/6, x_2 = -1/2$

Solución:

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$

b) $x^2 - 3x - 10 = 0$

c) $2x^2 + 11x + 12 = 0$

d) $12x^2 + 4x - 1 = 0$

164 Sin resolver las siguientes ecuaciones, calcula la suma y el producto de sus soluciones:

a) $2x^2 + 5x + 2 = 0$

b) $x^2 - 7x + 12 = 0$

c) $4x^2 - 12x - 7 = 0$

d) $6x^2 - 7x + 2 = 0$

Solución:

a) $S = -5/2, P = 1$

b) $S = 7, P = 12$

c) $S = 3, P = -7/4$

d) $S = 7/6, P = 1/3$

Problemas

165 La suma de tres números pares consecutivos es 60. Calcula dichos números.

Solución:

Primer número: $2x$

Segundo número: $2x + 2$

Tercer número: $2x + 4$

$$2x + 2x + 2 + 2x + 4 = 60 \Rightarrow x = 9$$

Los números son: 18, 20 y 22

166 De una pieza de tela se vende la mitad, y después, la tercera parte de la longitud inicial. Si quedan 4 m de tela, ¿cuál era la longitud inicial de la pieza?

Solución:

Longitud de la tela: x

$$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3} \right) = 4 \Rightarrow x = 24$$

La tela tenía 24 m

167 Reparte 3 900 € entre tres personas, de forma que a cada uno le correspondan 500 € más que al anterior.

Solución:

Primera persona: $x - 500$

Segunda persona: x

Tercera persona: $x + 500$

$$x - 500 + x + x + 500 = 3\,900 \Rightarrow x = 1\,300$$

Primera persona: 800 €

Segunda persona: 1 300 €

Tercera persona: 1 800 €

168 Con 6 000 € se han hecho dos inversiones, de forma que una de ellas da unos intereses del 5%, y el resto, del 3%. Si la primera parte produce 200 € más que la segunda, ¿qué cantidad de dinero corresponde a cada parte?

Solución:

Parte al 5%: x

Parte al 3%: $6\,000 - x$

$$0,05x = 0,03(6\,000 - x) + 200 \Rightarrow x = 4\,750$$

Parte al 5%: 4 750 €

Parte al 3%: 1 250 €

169 Un padre reparte 1 680 € entre dos hijos, de forma que el menor recibe los $\frac{2}{5}$ de lo que recibe el mayor. ¿Cuánto ha recibido cada uno?

Solución:

Parte del hijo mayor: x

Parte del hijo menor: $\frac{2x}{5}$

$$x + \frac{2x}{5} = 1\,680 \Rightarrow x = 1\,200$$

Parte del hijo mayor: 1 200 €

Parte del hijo menor: 480 €

170 Se han comprado por 83 € unos zapatos y unos pantalones que costaban 110 €. Si en los zapatos han rebajado el 20%, y en los pantalones, el 30%, ¿cuál era el precio inicial de cada producto?

Solución:

Precio de los zapatos: x

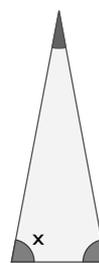
Precio de los pantalones: $110 - x$

$$0,8x + 0,7(110 - x) = 83 \Rightarrow x = 60$$

Precio de los zapatos: 60 €

Precio de los pantalones: 50 €

171 En un triángulo isósceles, el ángulo desigual mide la cuarta parte del valor de los ángulos iguales. Calcula el valor de los tres ángulos.



Solución:

Amplitud del ángulo igual: x

$$2x + \frac{x}{4} = 180 \Rightarrow x = 80$$

Ángulos iguales = 80°

Ángulo desigual = 20°



172 Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles mide el triple que el lado desigual. Si su perímetro mide 56 cm, calcula la longitud de los lados del triángulo.

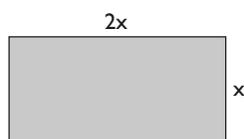
Solución:

$$3x + 3x + x = 56 \Rightarrow x = 8 \text{ cm}$$

Lado desigual = 8 cm

Lados iguales: 24 cm

173 En un rectángulo la base es el doble que la altura. Calcula la longitud de sus lados si su perímetro mide 72 cm



Solución:

$$2(x + 2x) = 72 \Rightarrow x = 12$$

La altura mide 12 cm

La base mide 24 cm

174 Pablo tiene 14 años, y su madre, 42. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la edad de la madre sea el doble de la de Pablo?

Solución:

	Hoy	Dentro de x años
Pablo	14	$x + 14$
Madre	42	$x + 42$

$$x + 42 = 2(x + 14) \Rightarrow x = 14$$

Tienen que transcurrir 14 años.

175 Un padre tiene el triple de la edad de su hijo. Si el padre tuviera 10 años menos y el hijo 18 años más, los dos tendrían la misma edad. Calcula la edad actual de cada uno.

Solución:

	Hoy	Hace 10 años	Dentro de 18 años
Hijo	x		$x + 18$
Padre	$3x$	$3x - 10$	

$$x + 18 = 3x - 10 \Rightarrow x = 14$$

El hijo tiene 14 años. El padre tiene 42 años.

176 Un padre tiene 50 años, y sus hijos, 12 y 7. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea igual a la suma de las edades de los hijos?

Solución:

	Hoy	Dentro de x años
Hijo 1	12	$x + 12$
Hijo 2	7	$x + 7$
Padre	50	$x + 50$

$$x + 50 = x + 12 + x + 7 \Rightarrow x = 31$$

Deben transcurrir 31 años.

177 Las edades de una madre y un hijo suman 40 años, y dentro de 14 años la edad de la madre será el triple de la del hijo. Calcula la edad actual de cada uno.

Solución:

	Hoy	Dentro de 14 años
Hijo	x	$x + 14$
Madre	$40 - x$	$40 - x + 14$

$$40 - x + 14 = 3(x + 14) \Rightarrow x = 3$$

La edad del hijo es 3 años.

La edad de la madre es 37 años.

178 Se ha mezclado aceite de girasol de 0,8 € el litro con aceite de oliva de 3,5 € el litro. Si se han obtenido 1 000 litros de mezcla a 2,96 € el litro, ¿cuántos litros se han utilizado de cada clase de aceite?

Solución:

	Girasol	Oliva	Mezcla
Precio (€/litro)	0,8	3,5	2,96
Volumen (litros)	x	$1\,000 - x$	1 000
Dinero (€)	$0,8x + 3,5(1\,000 - x) = 2,96 \cdot 1\,000$		

$$0,8x + 3,5(1\,000 - x) = 2,96 \cdot 1\,000 \Rightarrow x = 200$$

Aceite de girasol: 200 litros.

Aceite de oliva: 800 litros.

179 Se mezclan avena de 0,3 €/kg y centeno de 0,2 €/kg para hacer pienso para vacas. Si se hacen 5 000 kg de pienso a 0,23 €/kg, ¿cuántos kilos de avena y de centeno se han utilizado?

Ejercicios y problemas

Solución:

	Avena	Centeno	Mezcla
Precio (€/kg)	0,3	0,2	0,23
Masa (kg)	x	5 000 - x	5 000
Dinero (€)	$0,3x + 0,2(5\,000 - x) = 0,23 \cdot 5\,000$		

$$0,3x + 0,2(5\,000 - x) = 0,23 \cdot 5\,000 \Rightarrow x = 1\,500$$

Avena: 1 500 kg

Centeno: 3 500 kg

- 180** Se funde plata de ley 0,6 con plata de ley 0,9 para conseguir una aleación de 50 gramos de una ley 0,78. Calcula la cantidad de cada tipo de plata que se ha usado.

Solución:

	Plata	Plata	Aleación
Ley	0,6	0,9	0,78
Masa (g)	x	50 - x	50
	$0,6x + 0,9(50 - x) = 0,78 \cdot 50$		

$$0,6x + 0,9(50 - x) = 0,78 \cdot 50 \Rightarrow x = 20$$

Plata de 0,6: 20 g

Plata de 0,9: 30 g

- 181** Se alean dos lingotes de oro. Uno de ellos con una ley 0,8, y otro, con una ley 0,6. Si se han conseguido 800 g de aleación con una ley 0,725, ¿cuántos gramos pesaba cada lingote de oro?

Solución:

	Oro	Oro	Aleación
Ley	0,8	0,6	0,725
Masa (g)	x	800 - x	800
	$0,8x + 0,6(800 - x) = 0,725 \cdot 800$		

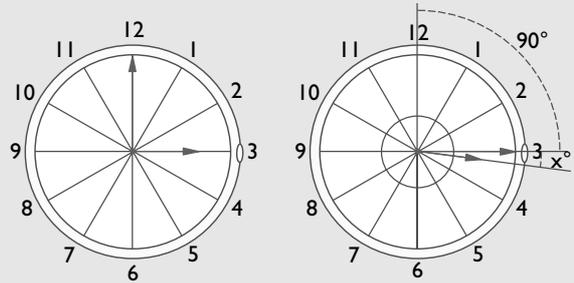
$$0,8x + 0,6(800 - x) = 0,725 \cdot 800 \Rightarrow x = 500$$

Oro de 0,8: 500 g

Oro de 0,6: 300 g

- 182** Calcula el ángulo que forman las agujas de un reloj a las tres y cuarto.

Solución:



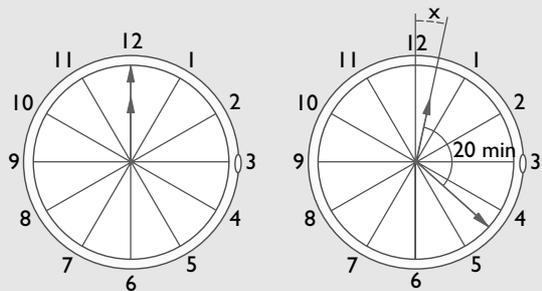
Ángulo de la aguja horaria: x

$$90 = 12x \Rightarrow x = 15/2 = 7,5$$

El ángulo es: 7° 30'

- 183** ¿A qué hora forman por primera vez las agujas de un reloj un ángulo de 120° después de las doce?

Solución:



Espacio en minutos de la aguja horaria: x

$$12x = x + 20 \Rightarrow x = 20/11 = 1,82$$

A las 12 h 21 min 49 s

- 184** Un grifo A llena un depósito de agua en 3 h y otro grifo B lo hace en 4 h. El depósito tiene un desagüe que lo vacía en 6 h estando los grifos cerrados. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar a la vez el depósito estando el desagüe abierto?

Solución:

Tiempo que tarda en llenarse el depósito: x

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)x = 1 \Rightarrow x = 12/5 = 2,4 \text{ horas.}$$

Tardará: 2 h 24 min

- 185** Un grifo A llena un depósito de agua en 4 h. Si se abren el grifo A y el grifo B, llenan el depósito en 3 h. ¿Cuánto tiempo tardará solo el grifo B en llenar el depósito?

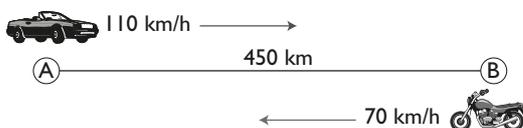
Solución:

Tiempo que tarda en llenar el depósito el grifo B: x

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{x}\right)3 = 1 \Rightarrow x = 12$$

El grifo B tardará 12 horas.

- 186** A las 8 de la mañana un coche y una moto salen de dos ciudades, y van uno hacia otro por la misma carretera. La velocidad del coche es de 110 km/h y la velocidad de la moto es de 70 km/h. Si la distancia entre las ciudades es de 450 km, ¿a qué hora se encuentran el coche y la moto?

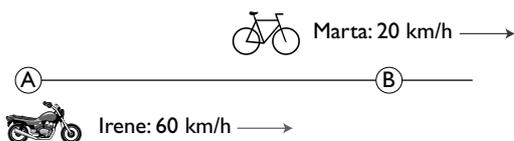
**Solución:**

Tiempo que tardan en encontrarse: x

$$110x + 70x = 450 \Rightarrow x = 5/2 = 2,5 \text{ horas.}$$

Tardarán 2 h 30 min, luego se encuentran a las 10 h 30 min

- 187** A las 9 de la mañana, Marta sale en bicicleta de una población A a una velocidad de 20 km/h. Dos horas y media después, Irene sale en su búsqueda con una moto a 60 km/h. ¿A qué hora alcanzará Irene a Marta?

**Solución:**

Tiempo que tarda en alcanzar Irene a Marta desde la salida de Marta: x

$$20x = 60(x - 2,5) \Rightarrow x = 15/4 = 3,75$$

Tardará en alcanzarla 3 h 45 min

Luego se encontrarán a las 12 h 45 min

Para profundizar

- 188** El triple del cuadrado de un número natural es el doble del número más 645. Calcula dicho número.

Solución:

Número: x

$$3x^2 = 2x + 645 \Rightarrow x_1 = 15, x_2 = -43/3$$

Como el número es natural, la solución fraccionaria no es válida. El número es 15

- 189** Encuentra dos números enteros cuya diferencia sea 7 y la suma de sus cuadrados sea 569

Solución:

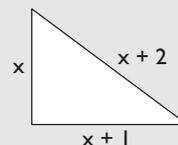
Número menor: x

Número mayor: $x + 7$

$$x^2 + (x + 7)^2 = 569 \Rightarrow x_1 = 13, x_2 = -20$$

Los números son: 13 y 20, o bien -20 y -13

- 190** Las medidas, en centímetros, de los tres lados de un triángulo rectángulo son tres números naturales consecutivos. Calcula el perímetro del triángulo.

Solución:

Cateto menor: x

Cateto mayor: $x + 1$

Hipotenusa: $x + 2$

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$$

La solución negativa no tiene sentido.

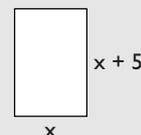
Cateto menor: 3 cm

Cateto mayor: 4 cm

Hipotenusa: 5 cm

Perímetro: $3 + 4 + 5 = 12$ cm

- 191** Un rectángulo mide 5 cm más de alto que de ancho, y su área mide 150 cm². ¿Cuánto miden sus lados?

Solución:

$$x(x + 5) = 150 \Rightarrow x_1 = 10, x_2 = -15$$

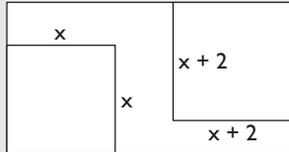
La solución negativa no tiene sentido.

Las dimensiones son 10 cm por 15 cm

Ejercicios y problemas

- 192** En una cartulina rectangular de $0,1 \text{ m}^2$ de superficie, recortamos dos cuadrados, de forma que uno tiene 2 cm de lado más que el otro. Si sobran 116 cm^2 de cartulina, calcula la longitud de los lados de los cuadrados recortados.

Solución:



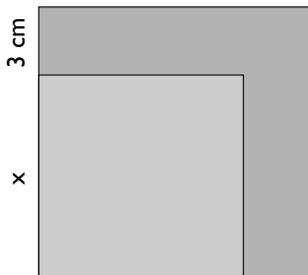
Longitud del lado del cuadrado menor: x

$$x^2 + (x + 2)^2 + 116 = 1000 \Rightarrow x_1 = -22, x_2 = 20$$

La solución negativa no tiene sentido.

El cuadrado menor tiene 20 cm de lado, y el mayor, 22 cm

- 193** Si se aumenta en tres centímetros el lado de un cuadrado, el área aumentará en 51 cm^2 . Calcula la longitud del lado del cuadrado inicial.



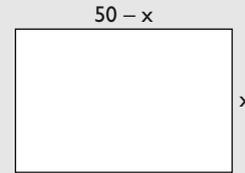
Solución:

$$x^2 + 51 = (x + 3)^2 \Rightarrow x = 7$$

El cuadrado tendrá 7 cm de lado.

- 194** Para vallar una parcela de 600 m^2 se han utilizado 100 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.

Solución:

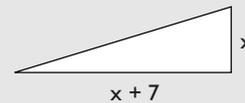


$$x(50 - x) = 600 \Rightarrow x_1 = 30, x_2 = 20$$

Las dimensiones de la finca son 30 m por 20 m

- 195** Calcula la longitud de los catetos de un triángulo rectángulo sabiendo que uno de ellos es 7 cm más largo que el otro y que su superficie es de 15 cm^2

Solución:



$$\frac{x(x + 7)}{2} = 15 \Rightarrow x_1 = -10, x_2 = 3$$

La solución negativa no tiene sentido.

Los catetos son 3 cm y 10 cm

- 196** Escribe una ecuación de segundo grado sabiendo que la suma de las soluciones es 2 y que el producto de las mismas es -48

Solución:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0$$

Aplica tus competencias

197 ¿En cuánto tiempo recorrerá un móvil 1 200 m si parte con una velocidad de 20 m/s con una aceleración de 4 m/s²?

Solución:

$$1\ 200 = \frac{1}{2} 4t^2 + 20t \Rightarrow t_1 = -30, t_2 = 20$$

La solución negativa no tiene sentido.

El tiempo es 20 segundos.

198 Una pelota se deja caer desde 490 m. Si la aceleración es de 9,8 m/s², ¿cuánto tiempo tarda en llegar al suelo? La fórmula que tienes que aplicar

$$\text{es: } e = \frac{1}{2} gt^2$$

Solución:

$$490 = \frac{1}{2} 9,8t^2 \Rightarrow t_1 = -10, t_2 = 10$$

La solución negativa no tiene sentido.

El tiempo es 10 segundos.

Comprueba lo que sabes

1 Explica la relación que existe entre la suma y el producto de las raíces de una ecuación de 2º grado, y pon un ejemplo.

Solución:

Las soluciones x_1 y x_2 de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cumplen las siguientes relaciones:

$$\text{a) } S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\text{b) } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ejemplo

En la ecuación $2x^2 + 3x - 5 = 0$

$$a = 2, b = 3 \text{ y } c = -5$$

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{3}{2}$$

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = -\frac{5}{2}$$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } 2(3x - 5) - 4(x - 2) = 13 - x$$

$$\text{b) } \frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = x - \frac{5}{2}$$

Solución:

$$\text{a) } x = 5$$

$$\text{b) } x = 2$$

3 Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } x^2 - 4x = 0$$

$$\text{b) } x^2 - 81 = 0$$

$$\text{c) } x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$\text{d) } 3x^2 - \frac{3x}{4} - \frac{9}{8} = 0$$

Solución:

$$\text{a) } x_1 = 0, x_2 = 4$$

$$\text{b) } x_1 = -9, x_2 = 9$$

$$\text{c) } x_1 = -5, x_2 = 3$$

$$\text{d) } x_1 = 3/4, x_2 = -1/2$$

Comprueba lo que sabes

4 Sin resolver las siguientes ecuaciones, justifica el número de soluciones que tienen:

- a) $x^2 - 3x + 8 = 0$
- b) $2x^2 - 9x + 7 = 0$
- c) $x^2 - 4x + 4 = 0$
- d) $4x^2 + 6x + 5 = 0$

Solución:

- a) $\Delta = -23 < 0 \Rightarrow$ No tiene soluciones reales.
- b) $\Delta = 25 > 0 \Rightarrow$ Tiene dos soluciones.
- c) $\Delta = 0 \Rightarrow$ Tiene una solución doble.
- d) $\Delta = -44 < 0 \Rightarrow$ No tiene soluciones reales.

5 Escribe una ecuación de segundo grado que tenga como soluciones:

$$x_1 = 4/3, x_2 = -2$$

Solución:

$$(x - 4/3)(x + 2) = 0$$
$$3x^2 + 2x - 8 = 0$$

6 Factoriza los siguientes polinomios:

- a) $3x^2 - 7x + 2$
- b) $5x^2 - 6x - 8$

Solución:

- a) $3(x - 1/3)(x - 2)$
- b) $5(x + 4/5)(x - 2)$

7 Las edades de una madre y un hijo suman 40 años y dentro de 14 años la edad de la madre será el triple de la del hijo. Calcula la edad actual de cada uno.

Solución:

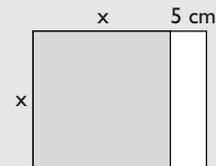
	Hoy	Dentro de 14 años
Hijo	x	$x + 14$
Madre	$40 - x$	$40 - x + 14$

$$40 - x + 14 = 3(x + 14) \Rightarrow x = 3$$

La edad del hijo es 3 años.
La edad de la madre es 37 años.

8 Halla el lado de un cuadrado sabiendo que si se aumentan en 5 cm dos de sus lados paralelos, se obtiene un rectángulo de 24 cm^2

Solución:



$$x(x + 5) = 24 \Rightarrow x_1 = -8, x_2 = 3$$

La solución negativa no tiene sentido.
El lado del cuadrado es 3 cm

Paso a paso**199** Resuelve la siguiente ecuación:

$$2 + \frac{x+3}{4} - \frac{x-1}{2} = x + \frac{1}{3}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

200 Resuelve la siguiente ecuación: $3x^2 - x - 2 = 0$ **Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

201 Factoriza el siguiente polinomio:

$$x^2 - 2x - 15$$

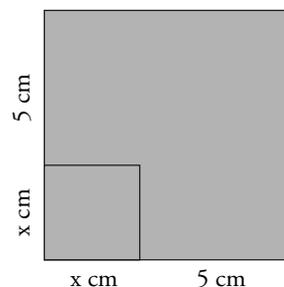
Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

202 Escribe una ecuación de 2º grado que tenga como soluciones $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ **Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

203 Si se aumenta en 5 cm el lado de un cuadrado, el área aumenta en 55 cm^2 . Calcula la longitud inicial del lado del cuadrado.**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

204 Teresa tiene 6 años, y su madre, 36. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad de la madre sea el triple de la de Teresa?**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

205 Internet. Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema.****Practica****206** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x + 2 = 8 - 5x$

b) $\frac{x}{6} - \frac{3x-1}{4} = 2x + \frac{33}{8}$

c) $\frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{3} + 1$

d) $\frac{2(x+1)}{3} + \frac{5-x}{2} = \frac{1-x}{2} + 2$

Solución:

a) $x = 3/4$

b) $x = -3/2$

c) $x = 1$

d) $x = -1$

207 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 = 0$

b) $9x^2 - 1 = 0$

c) $4x^2 + 5x = 0$

d) $x^2 + x - 6 = 0$

Solución:

a) $x = 0$

b) $x_1 = 1/3, x_2 = -1/3$

c) $x_1 = 0, x_2 = -5/4$

d) $x_1 = 2, x_2 = -3$

208 Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $5x^2 - 8x = 20x - 15$
- b) $5x - 11 = (x - 1)^2$
- c) $x(x - 1) + 5(x + 4) = 41$
- d) $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$

Solución:

- a) $x_1 = 3/5, x_2 = 5$
- b) $x_1 = 4, x_2 = 3$
- c) $x_1 = -7, x_2 = 3$
- d) $x_1 = 2/3, x_2 = 1/2$

209 Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios de 2º grado:

- a) $x^2 - 81$
- b) $x^2 - 5x + 6$
- c) $x^2 + 5x$
- d) $x^2 + x - 2$

Solución:

- a) $(x + 9)(x - 9)$
- b) $(x - 2)(x - 3)$
- c) $x(x + 5)$
- d) $(x + 2)(x - 1)$

210 Halla una ecuación de 2º grado que tenga las raíces siguientes:

- a) $x_1 = 4, x_2 = -5$
- b) $x_1 = 3, x_2 = 6$

Solución:

- a) $x^2 + x - 20 = 0$
- b) $x^2 - 9x + 18 = 0$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

211 Encuentra un número tal que el cuádruple de dicho número más 20 unidades sea igual a 68

Solución:

Número = x
 $4x + 20 = 68 \Rightarrow x = 12$
 El número es 12

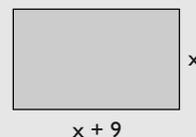
212 Halla tres números enteros consecutivos cuya suma sea 189

Solución:

Primer número: x
 Segundo número: $x + 1$
 Tercer número: $x + 2$
 $x + x + 1 + x + 2 = 189 \Rightarrow x = 62$
 Los números son: 62, 63 y 64

213 La base de un rectángulo mide 9 cm más que la altura. Si su perímetro mide 74 cm, ¿cuáles serán las dimensiones del rectángulo?

Solución:



$2(x + 9 + x) = 74 \Rightarrow x = 14$
 La altura mide: 14 cm
 La base mide: 23 cm

214 Se desea mezclar un jabón líquido normal de 1,5 €/litro con jabón extra de 2 €/litro, para hacer 200 litros de mezcla a 1,7 €/litro. Calcula la cantidad de litros que se debe mezclar de cada tipo de jabón.

Solución:

	Normal	Extra	Mezcla
Precio (€/litro)	1,5	2	1,7
Volumen (litros)	x	$200 - x$	200
Dinero (€)	$1,5x + 2(200 - x) = 1,7 \cdot 200$		

$1,5x + 2(200 - x) = 1,7 \cdot 200 \Rightarrow x = 120$
 Jabón normal: 120 litros.
 Jabón extra: 80 litros.

215 Una madre tiene 35 años más que su hijo, y dentro de 15 años su edad será el doble de la del hijo. ¿Cuántos años tienen en la actualidad?

Solución:

	Hoy	Dentro de 15 años
Edad del hijo	x	$x + 15$
Edad de la madre	$35 + x$	$x + 35 + 15$

$$x + 35 + 15 = 2(x + 15) \Rightarrow x = 20$$

La edad del hijo: 20 años.

La edad de la madre: 55 años.

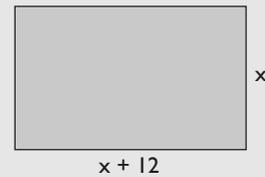
- 216** Un grifo A llena un depósito de agua en 2 h y otro grifo B lo hace en 3 h. El depósito tiene un desagüe que lo vacía en 6 h estando los grifos cerrados. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar a la vez el depósito estando el desagüe abierto?

Solución:

Tiempo que tarda en llenarse el depósito: x

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ horas.}$$

- 217** Calcula las dimensiones de una finca rectangular que tiene 12 dam más de largo que de ancho, y una superficie de 640 dam^2

Solución:

$$(x + 12)x = 640 \Rightarrow x_1 = 20, x_2 = -32$$

La solución negativa no es válida.

La finca tiene 32 dam por 20 dam

9

Sistemas de ecuaciones lineales



1. Sistemas lineales. Resolución gráfica

PIENSA Y CALCULA

Comprueba si $x = 2, y = 3$ es solución del siguiente sistema:
$$\left. \begin{array}{l} x + 4y = 14 \\ 5x + y = 13 \end{array} \right\}$$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 2 + 4 \cdot 3 = 14 \\ 5 \cdot 2 + 3 = 13 \end{array} \right\}$$

Verifica las dos ecuaciones, luego es solución del sistema.

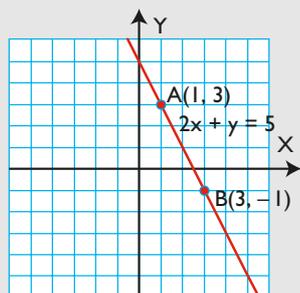
Carné calculista 57,3 : 0,84 | C = 68,21; R = 0,0036

APLICA LA TEORÍA

1 Haz la representación gráfica de las soluciones de la siguiente ecuación:

$$2x + y = 5$$

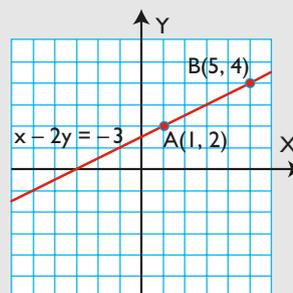
Solución:



2 Haz la representación gráfica de las soluciones de la siguiente ecuación:

$$x - 2y = -3$$

Solución:



3 La suma de dos números x e y es 5. Escribe una ecuación que exprese dicha condición y calcula cinco parejas de números que la verifiquen. Representa gráficamente el conjunto de todas las soluciones.

Solución:

$$x + y = 5$$

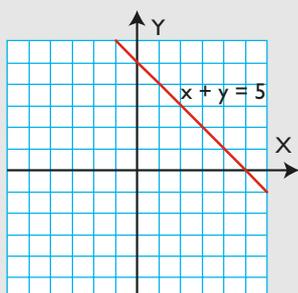
$$A(1, 4)$$

$$B(2, 3)$$

$$C(3, 2)$$

$$D(4, 1)$$

$$E(5, 0)$$



4 Resuelve gráficamente los sistemas:

$$a) \begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -2x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

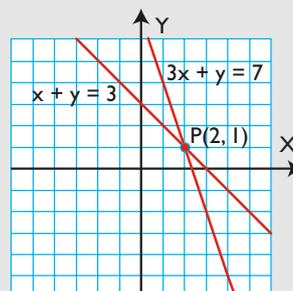
$$c) \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + 3y = 2 \\ -x - 3y = 2 \end{cases}$$

¿Son compatibles o incompatibles?

Solución:

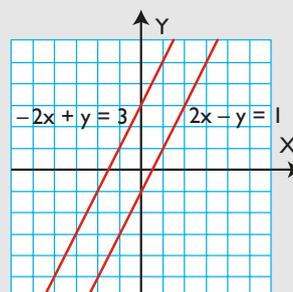
a)



$$x = 2, y = 1$$

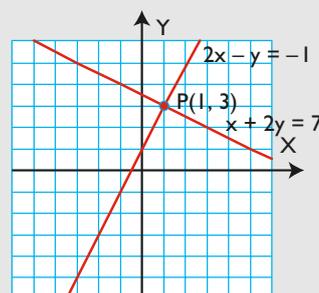
Es compatible porque tiene solución.

b)



Es incompatible porque no tiene solución.

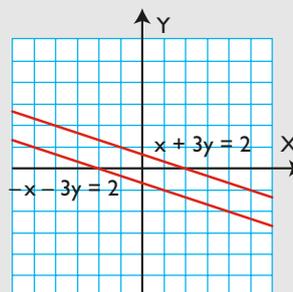
c)



$$x = 1, y = 3$$

Es compatible porque tiene solución.

d)



Es incompatible porque no tiene solución.

2. Métodos de sustitución e igualación

PIENSA Y CALCULA

Resuelve mentalmente el siguiente sistema observando el dibujo:

$$\begin{cases} y = 4x \\ x + y = 5 \end{cases}$$



Solución:

Cada piña pesa 1 kg, y el melón, 4 kg

Carné calculista $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2} - \frac{3}{2} : \frac{9}{4} = \frac{8}{3}$

APLICA LA TEORÍA

5 Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$$

Solución:

Se resuelve por sustitución.

$$x = 1, y = 2$$

7 Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\begin{cases} y = 3x + 6 \\ y = 2 - x \end{cases}$$

Solución:

Se resuelve por igualación.

$$x = -1, y = 3$$

6 Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\begin{cases} y = 3x \\ 3x + y = 12 \end{cases}$$

Solución:

Se resuelve por sustitución.

$$x = 2, y = 6$$

8 Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$$

Solución:

Se resuelve por sustitución.

$$x = 2, y = -3$$

- 9** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y = 13 \\ 2x - y = 18 \end{array} \right\}$$

Solución:

Se resuelve por sustitución.

$$x = 3, y = -4$$

- 10** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 3x - y = -9 \end{array} \right\}$$

Solución:

Se resuelve por igualación.

$$x = -2, y = 3$$

- 11** La suma de dos números x e y es 8 y el doble del primero más el triple del segundo es 19. Halla el valor de ambos números.

Solución:

$x = 1^{\text{er}}$ número.

$y = 2^{\text{o}}$ número.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 8 \\ 2x + 3y = 19 \end{array} \right\} x = 5, y = 3$$

- 12** La suma de dos números x e y es 11, y su diferencia es 3. Halla el valor de ambos números.

Solución:

$x = 1^{\text{er}}$ número.

$y = 2^{\text{o}}$ número.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 11 \\ x - y = 3 \end{array} \right\} x = 7, y = 4$$

- 13** Halla dos números proporcionales a 3 y 5 cuya suma es 16

Solución:

$x = 1^{\text{er}}$ número.

$y = 2^{\text{o}}$ número.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{3} = \frac{y}{5} \\ x + y = 16 \end{array} \right\} x = 6, y = 10$$

3. Método de reducción y qué método utilizar

PIENSA Y CALCULA

En el dibujo de la izquierda está planteado un sistema. Resuélvelo mentalmente aplicando estas pautas:

$$3 \text{ CD} + 2 \text{ cinta} = 23 \text{ €}$$

a) Suma las dos ecuaciones y calcula el valor de un CD.

$$5 \text{ CD} - 2 \text{ cinta} = 17 \text{ €}$$

b) Sustituye el valor del CD en la primera ecuación y calcula el valor de una cinta.

Solución:

Un CD vale 5 €, y una cinta de vídeo, 4 €

Carné calculista 358,6 : 8,7 | C = 41,21; R = 0,073

- 14** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ 5x - 2y = 17 \end{cases}$$

Solución:

Se resuelve por reducción; sumando las dos ecuaciones se obtiene x

$$x = 5, y = 4$$

- 15** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 7 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$$

Solución:

Se resuelve por reducción; restando las dos ecuaciones se obtiene x

$$x = 2, y = -1$$

- 16** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\begin{cases} 5x + y = 13 \\ 4x + y = 10 \end{cases}$$

Solución:

Se resuelve por igualación. También se resuelve bien por reducción; restando las dos ecuaciones se obtiene x

$$x = 3, y = -2$$

- 17** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 5x - 6y = 17 \end{cases}$$

Solución:

Se resuelve por reducción; multiplicando la 1ª ecuación por 2 y sumando se obtiene x

$$x = 1, y = -2$$

- 18** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ -6x + 5y = 27 \end{cases}$$

Solución:

Se resuelve por reducción: el m.c.m.(4, 6) = 12; se multiplica la 1ª ecuación por 3 y la 2ª por 2 y se suman.

$$x = -2, y = 3$$

- 19** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\begin{cases} 3x + 5y = -12 \\ 4x - 7y = 25 \end{cases}$$

Solución:

Se resuelve por reducción; se multiplica la 1ª ecuación por 4 y la 2ª por -3 y se suman.

$$x = 1, y = -3$$

- 20** El doble de un número más el triple de otro es igual a 16, y seis veces el primero menos cinco veces el segundo es igual a 20. Calcula ambos números.

Solución:

$$x = 1^{\text{er}} \text{ número}$$

$$y = 2^{\text{o}} \text{ número}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 6x - 5y = 20 \end{cases}$$

$$x = 5, y = 2$$

- 21** Dos pantalones y tres camisas valen 120 €. Tres pantalones y dos camisas valen 130 €. ¿Cuánto vale cada pantalón y cada camisa?

Solución:

$$x = \text{precio de un pantalón.}$$

$$y = \text{precio de una camisa.}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 120 \\ 3x + 2y = 130 \end{cases}$$

$$x = 30 \text{ € precio de un pantalón.}$$

$$y = 20 \text{ € precio de una camisa.}$$

4. Resolución de problemas de sistemas

PIENSA Y CALCULA

Resuelve mentalmente el siguiente problema:

Entre Sonia y Ana tienen 30 €. Si Sonia tiene el doble que Ana, ¿cuánto dinero tiene cada una?

Solución:

Sonia tiene 20 €, y Ana, 10 €

Carné calculista $\frac{5}{4} : \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{6}\right) = \frac{15}{4}$

APLICA LA TEORÍA

- 22** La suma de dos números es 20, y el doble del primero más el triple del segundo es 45. Halla el valor de ambos números.

Solución:

x = el 1^{er} número.

y = el 2^o número.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 20 \\ 2x + 3y = 45 \end{array} \right\}$$

$x = 15$

$y = 5$

- 23** En un garaje, hay 25 vehículos entre coches y motos. El número total de ruedas sin contar las de repuesto es 80. ¿Cuántos coches y cuántas motos hay en el garaje?

Solución:

x = número de coches.

y = número de motos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 25 \\ 4x + 2y = 80 \end{array} \right\}$$

$x = 15$ coches.

$y = 10$ motos.

- 24** Se mezcla aceite de oliva, que cuesta a 3 € el litro, con aceite de girasol, que cuesta a 1 € el litro. Si tenemos 20 litros de mezcla a un precio de 2,5 € el litro, ¿cuántos litros de aceite de cada clase se han mezclado?

Solución:

x = litros de aceite de oliva.

y = litros de aceite de girasol.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 20 \\ 3x + y = 50 \end{array} \right\}$$

$x = 15$ litros de aceite de oliva.

$y = 5$ litros de aceite de girasol.

- 25** Hoy la edad de Miguel es el doble de la edad de María. Dentro de 10 años la suma de sus edades será 65. ¿Cuántos años tiene actualmente cada uno?

Solución:

	Edad hoy	Edad dentro de 10 años
María	x	$x + 10$
Miguel	y	$y + 10$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ x + 10 + y + 10 = 65 \end{array} \right\}$$

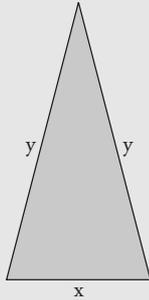
Edad de María hoy: $x = 15$ años.

Edad de Miguel hoy: $y = 30$ años.

- 26** En un triángulo isósceles cada uno de los lados iguales mide el doble del lado desigual y su perímetro mide 35 m. ¿Cuánto mide cada lado?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ x + 2y = 35 \end{array} \right\}$$
$$x = 7 \text{ m}$$
$$y = 14 \text{ m}$$



- 27** En una tienda 5 bocadillos de jamón y dos refrescos de cola cuestan 17 €, y 3 bocadillos de jamón y 7 refrescos de cola, 16 €. ¿Cuánto cuesta cada bocadillo de jamón y cada refresco de cola?

Solución:

x = precio del bocadillo de jamón.

y = precio del refresco de cola.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 2y = 17 \\ 3x + 7y = 16 \end{array} \right\}$$

x = 3 € el bocadillo de jamón.

y = 1 € el refresco de cola.

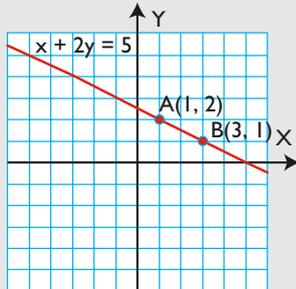
Ejercicios y problemas

1. Sistemas lineales. Resolución gráfica

- 28** Haz la representación gráfica de las soluciones de la siguiente ecuación:

$$x + 2y = 5$$

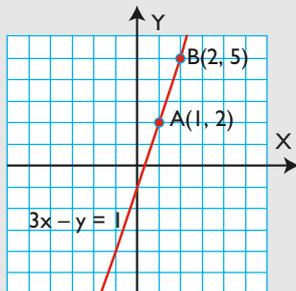
Solución:



- 29** Haz la representación gráfica de las soluciones de la siguiente ecuación:

$$3x - y = 1$$

Solución:

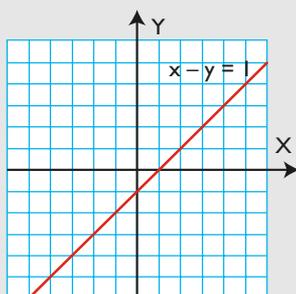


- 30** La diferencia de dos números x e y es 1. Escribe una ecuación que exprese dicha condición y calcula cinco parejas de números que la verifiquen. Representa gráficamente el conjunto de todas las soluciones.

Solución:

$$x - y = 1$$

A(1, 0), B(2, 1), C(3, 2), D(4, 3), E(5, 4)

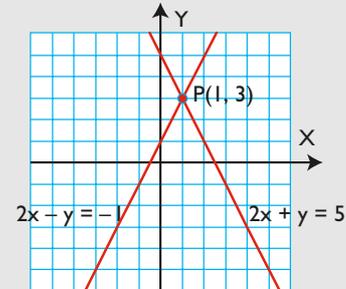


- 31** Resuelve el siguiente sistema gráficamente:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

¿Es compatible o incompatible?

Solución:



$$x = 1, y = 3$$

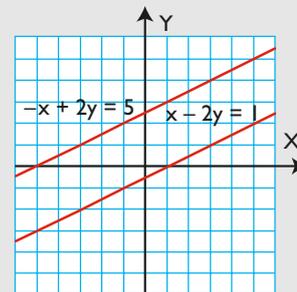
Es compatible porque tiene solución.

- 32** Resuelve el siguiente sistema gráficamente:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$$

¿Es compatible o incompatible?

Solución:



Es incompatible porque no tiene solución.

- 33** Resuelve el siguiente sistema gráficamente:

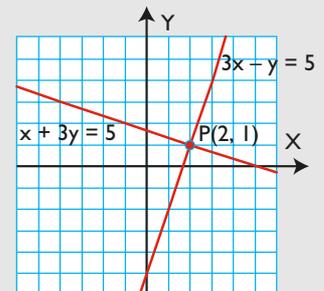
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

¿Es compatible o incompatible?

Solución:

$$x = 2, y = 1$$

Es compatible porque tiene solución.



Ejercicios y problemas

2. Métodos de sustitución e igualación

- 34** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left. \begin{array}{l} 5x + y = 17 \\ 2x - 3y = 0 \end{array} \right\}$$

Solución:

Se resuelve por sustitución.

$$x = 3, y = 2$$

- 35** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2y \\ x - 3y = -1 \end{array} \right\}$$

Solución:

Se resuelve por sustitución.

$$x = 2, y = 1$$

- 36** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + 7 \\ y = 3x + 9 \end{array} \right\}$$

Solución:

Se resuelve por igualación.

$$x = -2, y = 3$$

- 37** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 5 \\ -5x + y = 9 \end{array} \right\}$$

Solución:

Se resuelve por sustitución.

$$x = -1, y = 4$$

- 38** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y = 5 \\ 3x + 4y = -6 \end{array} \right\}$$

Solución:

Se resuelve por sustitución.

$$x = 2, y = -3$$

- 39** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + y = 14 \end{array} \right\}$$

Solución:

Se resuelve por igualación o por reducción.

$$x = 5, y = 4$$

- 40** La diferencia de dos números x e y es 3, y el triple del primero más el doble del segundo es 19. Halla el valor de ambos números.

Solución:

$$x = 1^{\text{er}} \text{ número}$$

$$y = 2^{\text{o}} \text{ número}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 3 \\ 3x + 2y = 19 \end{array} \right\}$$

$$x = 5, y = 2$$

- 41** La suma de dos números x e y es 15, y uno es el doble del otro. Halla el valor de ambos números.

Solución:

$$x = 1^{\text{er}} \text{ número}$$

$$y = 2^{\text{o}} \text{ número}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 15 \\ y = 2x \end{array} \right\}$$

$$x = 5, y = 10$$

3. Método de reducción y qué método utilizar

- 42** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 5y = 1 \end{array} \right\}$$

Solución:

Se resuelve por reducción; sumando las dos ecuaciones se obtiene y

$$x = 2, y = 1$$

- 43** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 5y = 7 \\ 4x + 5y = 11 \end{array} \right\}$$

Solución:

Se resuelve por reducción; restando las dos ecuaciones se obtiene x

$$x = 4, y = -1$$

- 44** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ x = 3y - 11 \end{array} \right\}$$

Solución:

Se resuelve por sustitución.

$$x = -2, y = 3$$

- 45** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 3y = 12 \\ 7x - 6y = 27 \end{array} \right\}$$

Solución:

Se resuelve por reducción; multiplicando la 1ª ecuación por 2 y sumando se obtiene x

$$x = 3, y = -1$$

- 46** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left. \begin{array}{l} -2x - 3y = 11 \\ 5x - 4y = 30 \end{array} \right\}$$

Solución:

Se resuelve por reducción; se multiplica la 1ª ecuación por 5 y la 2ª por 2 y se suman

$$x = 2, y = -5$$

- 47** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 4y = 7 \\ 7x - 6y = 33 \end{array} \right\}$$

Solución:

Se resuelve por reducción: el m.c.m.(4, 6) = 12; se multiplica la 1ª ecuación por 3 y la 2ª por 2 y se suman

$$x = 3, y = -2$$

- 48** El triple de un número más el doble de otro es igual a 17, y cinco veces el primero menos el doble del segundo es igual a 7. Halla ambos números.

Solución:

$x = 1^{\text{er}}$ número.

$y = 2^{\text{o}}$ número.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 17 \\ 5x - 2y = 7 \end{array} \right\}$$

$$x = 3, y = 4$$

- 49** Tres kilos de manzanas y dos kilos de naranjas cuestan 9 €. Dos kilos de manzanas y 2 kilos de naranjas cuestan 7 €. ¿Cuánto vale el kilo de manzanas y el kilo de naranjas?

Solución:

$x =$ precio de un kilo de manzanas.

$y =$ precio de un kilo de naranjas.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 9 \\ 2x + 2y = 7 \end{array} \right\}$$

$x = 2$ € el kilo de manzanas.

$y = 1,5$ € el kilo de naranjas.

4. Resolución de problemas de sistemas

- 50** La suma de dos números es 3, y su diferencia es 11. Halla el valor de ambos números.

Solución:

$x =$ el 1^{er} número.

$y =$ el 2^o número.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - y = 11 \end{array} \right\}$$

$$x = 7$$

$$y = -4$$

- 51** En un corral hay 80 animales entre gallinas y conejos. El número de patas que hay en total es 220. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay en el corral?

Solución:

$x =$ número de gallinas.

$y =$ número de conejos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 80 \\ 2x + 4y = 220 \end{array} \right\}$$

$x = 50$ gallinas.

$y = 30$ conejos.

Ejercicios y problemas

- 52** Se mezcla café de tipo A, que cuesta a 6 € el kilo, con café de tipo B, que cuesta a 4 € el kilo. Si tenemos 60 kilos de mezcla que sale a 4,5 € el kilo, ¿cuántos kilos de café de cada clase se han mezclado?

Solución:

x = kilos de café del tipo A.

y = kilos de café del tipo B.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 60 \\ 6x + 4y = 270 \end{array} \right\}$$

x = 15 kilos de café del tipo A.

y = 45 kilos de café del tipo B.

- 53** Hoy la edad de Ana es el triple de la de su hija, y hace 5 años era cinco veces mayor. ¿Cuántos años tiene actualmente cada una?

Solución:

	Edad hoy	Edad hace 5 años
Hija	x	$x - 5$
Ana	y	$y - 5$

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x \\ y - 5 = 5(x - 5) \end{array} \right\}$$

Edad de la hija hoy: $x = 10$ años.

Edad de Ana hoy: $y = 30$ años.

- 54** Halla los lados de un rectángulo sabiendo que uno es el triple del otro y que el perímetro mide 40 m



Solución:



$$\left. \begin{array}{l} y = 3x \\ 2x + 2y = 40 \end{array} \right\}$$

$x = 5$ m

$y = 15$ m

- 55** Dos kilos de gambas y tres kilos de pulpo cuestan 51 €, y tres kilos de gambas y dos kilos de pulpo cuestan 54 €. ¿Cuánto cuesta cada kilo de gambas y cada kilo de pulpo?

Solución:

x = precio del kilo de gambas.

y = precio del kilo de pulpo.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 51 \\ 3x + 2y = 54 \end{array} \right\}$$

$x = 12$ € el kilo de gambas.

$y = 9$ € el kilo de pulpo.

Para ampliar

- 56** Resuelve el siguiente sistema gráficamente:

$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ y = -x \end{array} \right\}$$

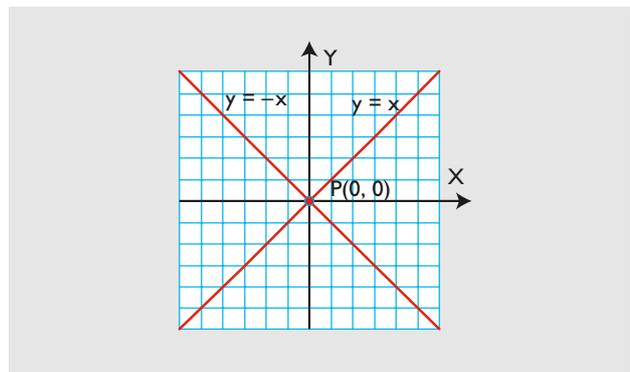
¿Es compatible o incompatible?

Solución:

$x = 0$

$y = 0$

El sistema es compatible.

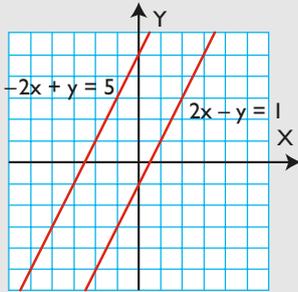


57 Resuelve el siguiente sistema gráficamente:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$$

¿Es compatible o incompatible?

Solución:



No tiene solución, el sistema es incompatible.

58 Escribe un sistema que tenga las soluciones $x = 2$, $y = 3$

Solución:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 4x + 5y = 23 \end{cases}$$

59 Un ángulo de un romboide es el doble del ángulo consecutivo. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos de dicho romboide?



Solución:

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x + 2y = 360 \\ x = 60^\circ \\ y = 120^\circ \end{cases}$$

60 Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 5x - 7y = 1 \end{cases}$$

Solución:

Se resuelve por reducción, se multiplica la 1ª ecuación por 5 y la 2ª por -2 y se suman.

$$x = 3, y = 2$$

61 Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 16 \\ 5x - 9y = 11 \end{cases}$$

Solución:

Se resuelve por reducción, se multiplica la 1ª ecuación por 5 y la 2ª por -3 y se suman.

$$x = 4, y = 1$$

62 Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\begin{cases} y = 2x \\ x = 5y - 27 \end{cases}$$

Solución:

Se resuelve por sustitución.

$$x = 3, y = 6$$

63 Halla dos números sabiendo que suman 8 y que su diferencia es 2

Solución:

x = el 1º número.

y = el 2º número.

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$x = 5$$

$$y = 3$$

64 Halla dos números que sean proporcionales a 3 y 4 cuya suma sea 35

Solución:

x = el 1º número

y = el 2º número

$$\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \\ x + y = 35 \end{cases}$$

$$x = 15$$

$$y = 20$$

Problemas

- 65** Halla dos números sabiendo que tres veces el primero más cuatro veces el segundo es 68 y que cinco veces el primero menos cuatro veces el segundo es -4

Solución:

x = el 1^{er} número.

y = el 2^o número.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 68 \\ 5x - 4y = -4 \end{array} \right\}$$

$$x = 8$$

$$y = 11$$

- 66** En el aparcamiento de un centro escolar hay 50 vehículos entre coches y bicicletas. El número total de ruedas, sin contar las de repuesto, es 140. ¿Cuántos coches y cuántas bicicletas hay en el aparcamiento?

Solución:

x = número de coches.

y = número de bicicletas.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 50 \\ 4x + 2y = 140 \end{array} \right\}$$

$$x = 20 \text{ coches.}$$

$$y = 30 \text{ bicicletas.}$$

- 67** Se mezcla trigo con avena para obtener pienso. El kilo de trigo cuesta a 0,3 € y el kilo de avena a 0,2 €. Si se quieren obtener 10 000 kilos de pienso a 0,25 € el kilo, ¿cuántos kilos de trigo y de avena tendremos que comprar?

Solución:

x = kilos de trigo.

y = kilos de avena.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 10\,000 \\ 0,3x + 0,2y = 10\,000 \cdot 0,25 \end{array} \right\}$$

$$x = 5\,000 \text{ kilos de trigo.}$$

$$y = 5\,000 \text{ kilos de avena.}$$

- 68** La edad de Pedro es el doble de la edad de Susana. Dentro de 8 años la suma de sus edades será 46 años. ¿Cuántos años tiene actualmente cada uno?

Solución:

	Edad hoy	Edad dentro de 8 años
Susana	x	$x + 8$
Pedro	y	$y + 8$

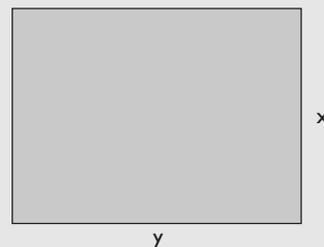
$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ x + 8 + y + 8 = 46 \end{array} \right\}$$

Edad de Susana hoy: $x = 10$ años.

Edad de Pedro hoy: $y = 20$ años.

- 69** Un aula tiene forma rectangular, mide 2 metros más de largo que de ancho y la suma del largo y del ancho es 14 m. Halla el área del aula.

Solución:



$$\left. \begin{array}{l} y = x + 2 \\ x + y = 14 \end{array} \right\}$$

$$x = 6 \text{ m, } y = 8 \text{ m}$$

$$\text{Área} = 8 \cdot 6 = 48 \text{ m}^2$$

- 70** En una tienda Pablo compra 2 cuadernos y 1 bolígrafo y le cobran 6 €. Rocío compra 4 cuadernos y 3 bolígrafos y le cobran 13 €. ¿Cuánto cuesta cada cuaderno y cada bolígrafo?

Solución:

x = precio de un cuaderno.

y = precio del un bolígrafo.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 6 \\ 4x + 3y = 13 \end{array} \right\}$$

$$x = 2,5 \text{ € cada cuaderno.}$$

$$y = 1 \text{ € cada bolígrafo.}$$

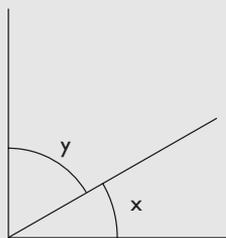
- 71** Se divide un ángulo recto en dos partes. Sabiendo que una parte es el doble de la otra, halla cuánto mide cada una de las partes.

Solución:

$$\left. \begin{aligned} y &= 2x \\ x + y &= 90 \end{aligned} \right\}$$

$$x = 30^\circ$$

$$y = 60^\circ$$



- 72** En un bar nos han cobrado 5 € por 4 cafés y 2 refrescos. Otro día nos cobran 11 € por 8 cafés y 5 refrescos. ¿Cuánto cuesta cada café y cada refresco?

Solución:

x = precio de un café.

y = precio de un refresco.

$$\left. \begin{aligned} 4x + 2y &= 5 \\ 8x + 5y &= 11 \end{aligned} \right\}$$

$x = 0,75$ € cada café.

$y = 1$ € cada refresco.

- 73** En un supermercado, por fin de temporada, se venden los melones y las sandías por unidades. Óscar compra 4 melones y 3 sandías y le cobran 18 €. Sonia compra 2 melones y 5 sandías y le cobran 16 €. ¿Qué precio tiene cada melón y cada sandía?

Solución:

x = precio de un melón.

y = precio de una sandía.

$$\left. \begin{aligned} 4x + 3y &= 18 \\ 2x + 5y &= 16 \end{aligned} \right\}$$

$x = 3$ € cada melón.

$y = 2$ € cada sandía.

- 74** Una finca rectangular mide 25 m más de largo que de ancho. Si el perímetro mide 250 m, ¿cuánto mide su área?

Solución:

$$\left. \begin{aligned} y &= x + 25 \\ 2x + 2y &= 250 \end{aligned} \right\}$$

$$x = 50 \text{ m}$$

$$y = 75 \text{ m}$$

$$\text{Área} = 50 \cdot 75 = 3750 \text{ m}^2$$

- 75** Ángel tiene 9 animales entre gatos y canarios. El total de patas que tienen es 28. Calcula cuántos gatos y cuántos canarios tiene.

Solución:

x = número de gatos.

y = número de canarios.

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 9 \\ 4x + 2y &= 28 \end{aligned} \right\}$$

$x = 5$ gatos.

$y = 4$ canarios.

- 76** Se tienen 75 monedas: unas son de 10 céntimos de euro y otras de 20 céntimos de euro. Si en total suman 10 €, ¿cuántas monedas hay de cada tipo?

Solución:

x = monedas de 10 céntimos de euro.

y = monedas de 20 céntimos de euro.

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 75 \\ 0,1x + 0,2y &= 10 \end{aligned} \right\}$$

$x = 50$ monedas de 10 céntimos de euro.

$y = 25$ monedas de 20 céntimos de euro.

Para profundizar

- 77** La suma de dos números es 16, y su cociente es 3. Halla ambos números.

Solución:

x = el 1^{er} número.

y = el 2^o número.

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 16 \\ \frac{x}{y} &= 3 \end{aligned} \right\}$$

$x = 12$

$y = 4$

Ejercicios y problemas

- 78** La suma de las dos cifras de un número es 9, y la cifra de las decenas es el doble de la cifra de las unidades. ¿De qué número se trata?

Solución:

x = cifra de las unidades.

y = cifra de las decenas.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 9 \\ y = 2x \end{array} \right\}$$

$x = 3, y = 6$. El número es el 63

- 79** Luis tiene el doble de dinero que Silvia. Si Luis le da 15 € a Silvia, entonces tienen lo mismo. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Solución:

x = dinero que tiene Silvia.

y = dinero que tiene Luis.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ y - 15 = x + 15 \end{array} \right\}$$

$x = 30$ € es el dinero que tiene Silvia.

$y = 60$ € es el dinero que tiene Luis.

- 80** La edad de un padre es el doble de la del hijo, y hace 10 años era el triple. ¿Qué edad tiene cada uno?

Solución:

	Edad hoy	Edad hace 10 años
Hijo	x	$x - 10$
Padre	y	$y - 10$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ y - 10 = 3(x - 10) \end{array} \right\}$$

Edad del hijo hoy: $x = 20$ años.

Edad del padre hoy: $y = 40$ años.

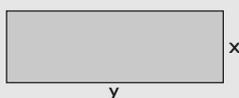
- 81** Calcula el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 m y que su base es el triple de la altura.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 16 \\ y = 3x \end{array} \right\}$$

$x = 2$ m, $y = 6$ m

Área = $6 \cdot 2 = 12$ m²



- 82** Halla una fracción equivalente a $\frac{3}{4}$ en la que la suma del numerador y del denominador valga 14

Solución:

x = numerador de la fracción.

y = denominador de la fracción.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \\ x + y = 14 \end{array} \right\}$$

$x = 6, y = 8$

- 83** Dos números proporcionales a 2 y 3 suman 20. Calcula ambos números.

Solución:

x = el 1^{er} número.

y = el 2^o número.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ x + y = 20 \end{array} \right\}$$

$x = 8, y = 12$

- 84** Se tienen 250 monedas de las cuales unas son de 2 céntimos de euro y otras de 5 céntimos de euro. Si en total suman 6,5 €, ¿cuántas monedas hay de cada tipo?

Solución:

x = monedas de 2 céntimos de euro.

y = monedas de 5 céntimos de euro.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 250 \\ 0,02x + 0,05y = 6,5 \end{array} \right\}$$

$x = 200$ monedas de 2 céntimos de euro.

$y = 50$ monedas de 5 céntimos de euro.

- 85** Repartir 500 € proporcionalmente a 2 y 3

Solución:

x = 1^a parte de euros.

y = 2^a parte de euros.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 500 \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \end{array} \right\}$$

$x = 200$ €

$y = 300$ €

Problemas de edades

86 Hoy las edades de Sara y de su hijo José suman 43 años. Dentro de 4 años la edad de la madre será el doble de la edad del hijo. ¿Cuántos años tiene actualmente cada uno?

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

87 Ana y Pablo son hermanos. La suma de sus edades es 29 años. Hace 10 años la edad de Ana era el doble de la de su hermano. ¿Cuántos años tiene actualmente cada uno?

Solución:

	Edad hoy	Edad hace 10 años
Pablo	x	x - 10
Ana	y	y - 10

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 29 \\ y - 10 = 2(x - 10) \end{array} \right\}$$

Edad de Pablo hoy: x = 13 años.

Edad de Ana hoy: y = 16 años.

88 Hoy la suma de las edades de Antonio y su nieta Juana es 98 años. Dentro de cinco años la edad del abuelo será el quintuplo de la de su nieta. ¿Cuántos años tiene actualmente cada uno?

Solución:

	Edad hoy	Edad dentro de 5 años
Juana	x	x + 5
Antonio	y	y + 5

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 98 \\ y + 5 = 5(x + 5) \end{array} \right\}$$

Edad de Juana hoy: x = 13 años.

Edad de Antonio hoy: y = 85 años.

Comprueba lo que sabes

- 1** Define qué es un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas y pon un ejemplo.

Solución:

Un **sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas** es una expresión algebraica de la forma:

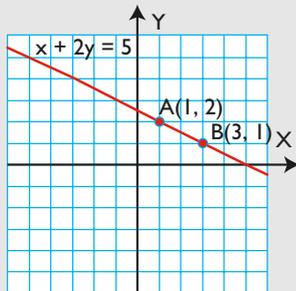
$$\left. \begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned} \right\}$$

Ejemplo

$$\left. \begin{aligned} 4x + 7y &= 26 \\ 6x - 5y &= 8 \end{aligned} \right\}$$

- 2** Haz la representación gráfica de las soluciones de la siguiente ecuación: $x + 2y = 5$

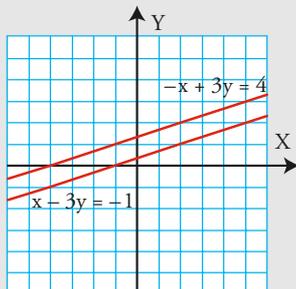
Solución:



- 3** Resuelve el siguiente sistema gráficamente y clasifícalo:

$$\left. \begin{aligned} x - 3y &= -1 \\ -x + 3y &= 4 \end{aligned} \right\}$$

Solución:



El sistema no tiene solución porque las rectas son paralelas; por tanto, el sistema es incompatible.

- 4** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left. \begin{aligned} x - y &= 1 \\ y &= 2x - 4 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

Se resuelve por sustitución.

$$x = 3, y = 2$$

- 5** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left. \begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ 3x + 4y &= -5 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

Se resuelve por sustitución.

$$x = 1, y = -2$$

- 6** Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ 5x - 7y &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

Se resuelve por reducción; se multiplica la 1ª ecuación por 5 y la 2ª por -2 y se suman.

$$x = 3, y = 2$$

- 7** Halla dos números sabiendo que uno es el triple del otro y que el doble del primero más cinco veces el segundo es 85

Solución:

x = el 1º número

y = el 2º número

$$\left. \begin{aligned} y &= 3x \\ 2x + 5y &= 85 \end{aligned} \right\}$$

$$x = 5, y = 15$$

- 8** Una finca rectangular mide 25 m más de largo que de ancho. Si el perímetro mide 250 m, ¿cuánto mide su área?

Solución:

$$\left. \begin{aligned} y &= x + 25 \\ 2x + 2y &= 250 \end{aligned} \right\}$$

$$x = 50 \text{ m}$$

$$y = 75 \text{ m}$$

$$\text{Área} = 50 \cdot 75 = 3750 \text{ m}^2$$

Paso a paso

- 89** Resuelve el siguiente sistema gráficamente, clasifícalo y, si es compatible, halla la solución:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 4 \\ 2x - y = -1 \end{array} \right\}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 90** Resuelve algebraicamente el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 8 \\ 5x - 4y = 7 \end{array} \right\}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 91** Un campo de fútbol tiene forma rectangular. El largo más el ancho mide 150 m y el largo es el doble del ancho. ¿Cuánto mide cada lado?

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 92** **Internet.** Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema.**

Practica

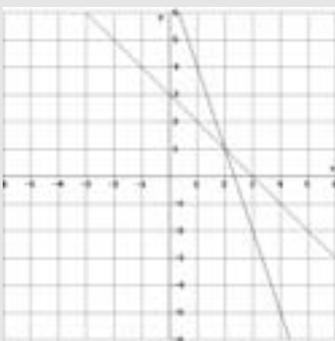
- 93** Resuelve los siguientes sistemas gráficamente, clasifícalos y, si son compatibles, halla las soluciones.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ 3x + y = 7 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} -3x + y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{array} \right\}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} 2x - y = -1 \\ x + 2y = 7 \end{array} \right\} \quad \text{d) } \left. \begin{array}{l} x + 3y = 2 \\ -x - 3y = 2 \end{array} \right\}$$

Solución:

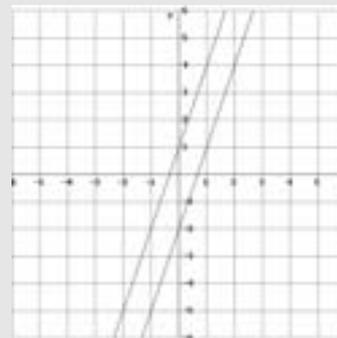
a)



Sistema compatible.

$$x = 2, y = 1$$

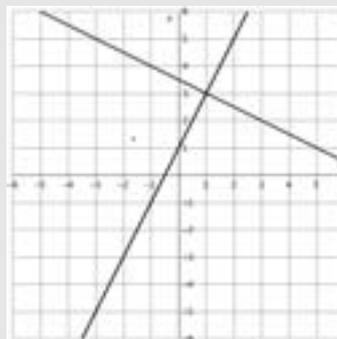
b)



Sistema incompatible.

No tiene solución.

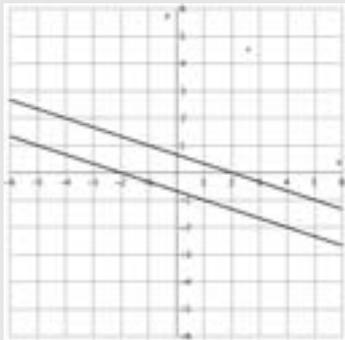
c)



Sistema compatible.

$$x = 1, y = 3$$

d)



Sistema incompatible.
No tiene solución.

94 Resuelve los siguientes sistemas algebraicamente:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x + y = 5 \\ -4x + y = -9 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} -7x + 6y = 11 \\ 5x + 3y = 14 \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

$$\text{a) } x = 2, y = -1 \qquad \text{b) } x = 1, y = 3$$

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Wiris o DERIVE:

95 Ana compra 4 CD y 3 DVD por 100 €. Óscar compra en el mismo establecimiento 2 CD y 3 DVD por 80 €. ¿Cuánto cuesta cada CD y cada DVD?

Solución:

$$\begin{array}{l} x = \text{valor del CD} \\ y = \text{valor del DVD} \\ \left. \begin{array}{l} 4x + 3y = 100 \\ 2x + 3y = 80 \end{array} \right\} \\ x = 10 \text{ € cada CD} \\ y = 20 \text{ € cada DVD} \end{array}$$

96 Halla dos números sabiendo que entre los dos suman 12 y que el doble del primero más el triple del segundo es 29

Solución:

$$\begin{array}{l} x = \text{el 1}^{\text{er}} \text{ número.} \\ y = \text{el 2}^{\text{o}} \text{ número.} \\ \left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ 2x + 3y = 29 \end{array} \right\} \\ x = 7 \\ y = 5 \end{array}$$

97 El patio de un colegio tiene forma rectangular. El largo es el triple del ancho, y el perímetro mide 400 m. Halla las dimensiones del patio.

Solución:



$$\begin{array}{l} x = \text{medida del ancho.} \\ y = \text{medida del largo.} \\ \left. \begin{array}{l} y = 3x \\ 2x + 2y = 400 \end{array} \right\} \\ x = 50 \text{ m} \\ y = 150 \text{ m} \end{array}$$

Bloque 2: Álgebra

- 1** c
- 2** b
- 3** c
- 4** a
- 5** c
- 6** d
- 7** a
- 8** c
- 9** b
- 10** d
- 11** a

Ejercicios

12 Caminar

- a) 50 cm
- b) $89,6 \text{ m/min} = 5,4 \text{ km/h}$

13 Terreno familiar

800 m²

14 Cine

Precio de la entrada: 4,8 €

Precio del paquete de palomitas: 1,5 €



BLOQUE III

Funciones

10. Rectas e hipérbolas

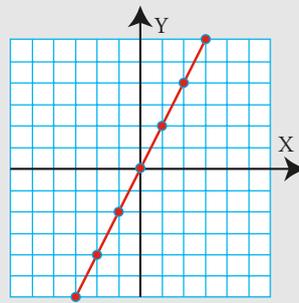


1. Las funciones

PIENSA Y CALCULA

Representa en unos ejes de coordenadas todos los puntos en que la ordenada sea el doble de la abscisa.

Solución:

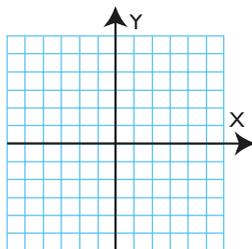


Carné calculista 456,7 : 6,9 | C = 66,18; R = 0,058

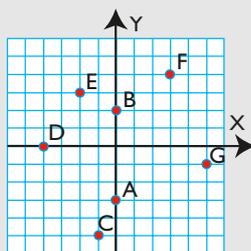
APLICA LA TEORÍA

1 Representa en unos ejes coordenados los siguientes puntos:

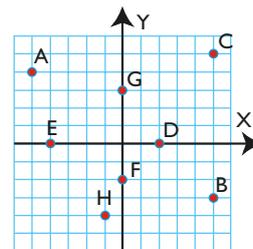
A(0, -3), B(0, 2), C(-1, -5), D(-4, 0), E(-2, 3), F(3, 4) y G(5, -1)



Solución:



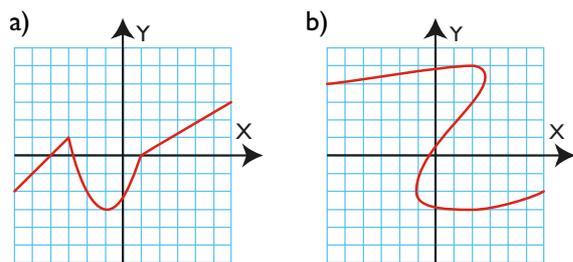
2 Halla las coordenadas de los puntos representados en el gráfico:



Solución:

A(-5, 4)
 B(5, -3)
 C(5, 5)
 D(2, 0)
 E(-4, 0)
 F(0, -2)
 G(0, 3)
 H(-1, -4)

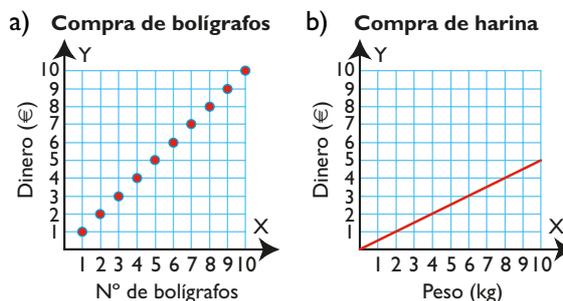
3 Indica cuáles de las siguientes gráficas son funciones y por qué:



Solución:

- a) Sí es función, porque para cada valor de la variable independiente, x , solo existe un único valor de la variable dependiente, y
- b) No es función, porque hay valores de la variable independiente, x , a los que les corresponde más de un valor de la variable dependiente, y . Por ejemplo: para $x = 2$, a la variable y le corresponden 3 valores: 5, 3 y -3

4 En las siguientes gráficas indica qué magnitudes se relacionan, cuál es la variable independiente, si es discreta o continua, y cuál es la variable dependiente.



Solución:

- a) Se relacionan el número de bolígrafos y el dinero que se paga por ellos.
La variable independiente es el nº de bolígrafos. Es discreta.
La variable dependiente es el dinero que se paga.
- b) Se relacionan el peso, en kilos, de la harina y el dinero que se paga por ella.
La variable independiente es el nº de kilos de harina. Es continua.
La variable dependiente es el dinero que se paga.

2. Función lineal o de proporcionalidad directa

PIENSA Y CALCULA

Halla la constante de proporcionalidad directa en la compra de nueces, sabiendo que 5 kg cuestan 15 €. Interpreta el resultado.

Solución:

La constante de proporcionalidad es:

$$m = 15 : 5 = 3$$

Significa que se paga a 3 €/kg

Carné calculista $\frac{2}{5} : \frac{3}{10} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{15}$

APLICA LA TEORÍA

5 Indica si la siguiente tabla es de proporcionalidad directa y calcula la constante de proporcionalidad.

Peso (kg)	1	2	3	4
Dinero (€)	3	6	9	12

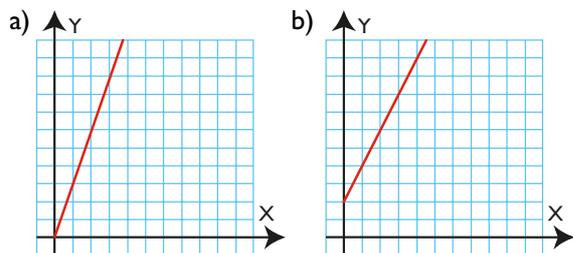
Solución:

Es de proporcionalidad directa.

La constante es:

$$m = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = 3$$

6 Indica si las siguientes gráficas son de proporcionalidad directa y calcula la constante de proporcionalidad.



Solución:

a) Pasa por el origen $O(0,0)$ y su pendiente es 3; y, por lo tanto, la constante de proporcionalidad directa es $m = 3$

Es una gráfica de una función de proporcionalidad directa.

b) No pasa por el origen $O(0,0)$ y, por lo tanto, no es una gráfica de una función de proporcionalidad directa.

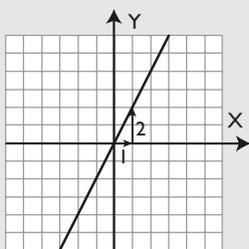
7 Halla la pendiente, estudia el crecimiento y dibuja la gráfica de las funciones siguientes:

a) $y = 2x$

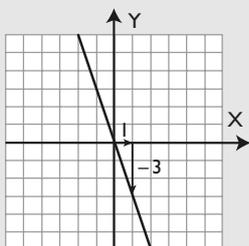
b) $y = -3x$

Solución:

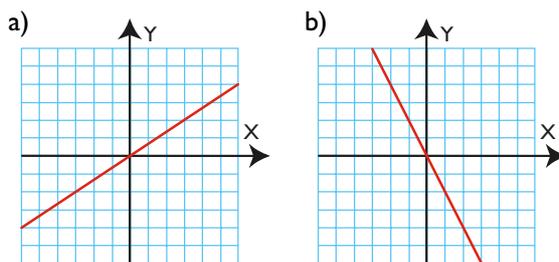
a) $m = 2 > 0$. Es creciente.



b) $m = -3 < 0$. Es decreciente.

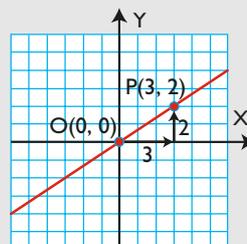


8 Halla la ecuación de las rectas siguientes:



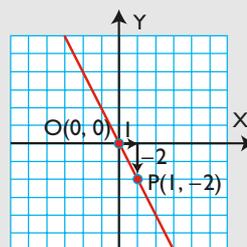
Solución:

a)



$$m = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$$

b)



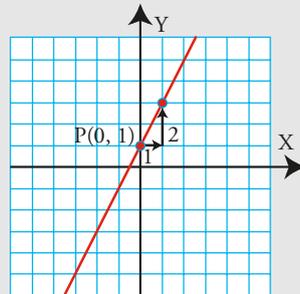
$$m = -\frac{2}{1} = -2 \Rightarrow y = -2x$$

3. Función afín. Estudio de rectas

PIENSA Y CALCULA

Dibuja una recta que pase por el punto $P(0, 1)$ y que tenga de pendiente $m = 2$

Solución:



Carné calculista 652,3 : 7,8 | C = 83,62; R = 0,064

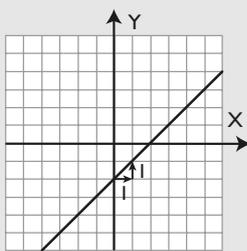
APLICA LA TEORÍA

9 Halla la pendiente, el valor de la ordenada en el origen y dibuja la gráfica de las funciones siguientes:

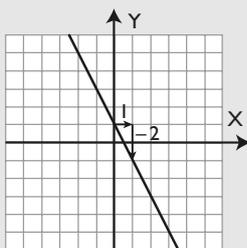
- a) $y = x - 2$
- b) $y = -2x + 1$
- c) $y = -\frac{3}{2}x + 4$
- d) $y = \frac{1}{3}x + 1$

Solución:

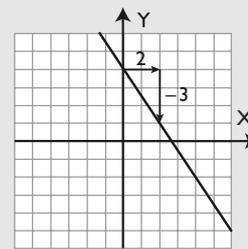
- a) $m = 1$
 $b = -2$



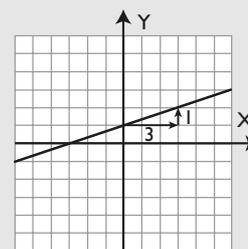
- b) $m = -2$
 $b = 1$



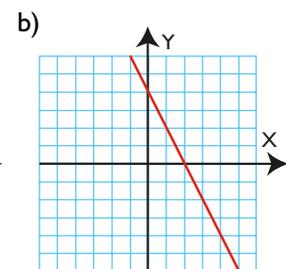
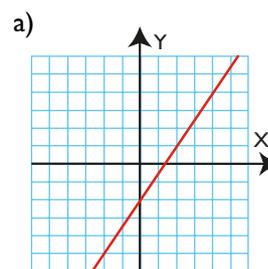
- c) $m = -3/2$
 $b = 4$



- d) $m = 1/3$
 $b = 1$

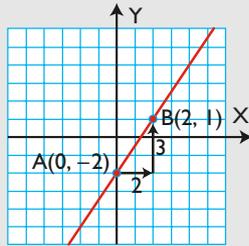


10 Halla la ecuación de las rectas siguientes:



Solución:

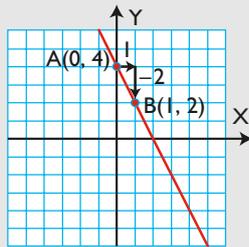
a)



$$m = \frac{3}{2}, b = -2$$

$$\text{La ecuación es: } y = \frac{3}{2}x - 2$$

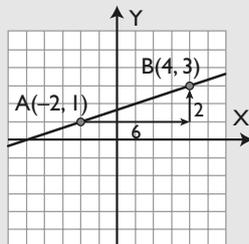
b)



$$m = -2, b = 4$$

$$\text{La ecuación es: } y = -2x + 4$$

- 11** Halla la fórmula de la recta que pasa por los puntos A(-2, 1) y B(4, 3)

Solución:

- Se calcula la pendiente:

$$m = \frac{3 - 1}{4 - (-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- En la fórmula $y = \frac{1}{3}x + b$ se sustituyen las coordenadas del punto A(-2, 1)

$$y = \frac{1}{3}x + b \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot (-2) + b = 1 \Rightarrow b = \frac{5}{3}$$

$$\text{La recta es: } y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

- 12** Representa las siguientes rectas y di cuáles son funciones:

a) $y = 4$

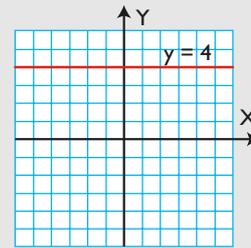
b) $y = -2$

c) $x = 1$

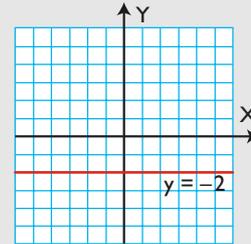
d) $x = -5$

Solución:

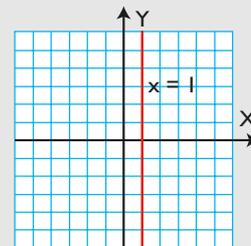
a) Es función.



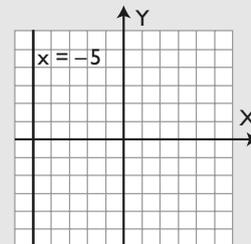
b) Es función.



c) No es función.

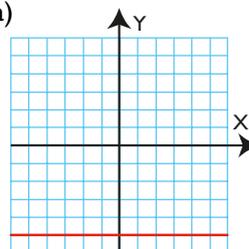


d) No es función.

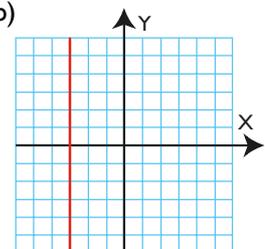


- 13** Halla la ecuación de las siguientes rectas:

a)



b)

**Solución:**

a) $y = -3$

b) $x = -3$

4. Función de proporcionalidad inversa

PIENSA Y CALCULA

Halla mentalmente el valor de la constante de proporcionalidad inversa sabiendo que para hacer una obra, 10 obreros han tardado 6 días.

Solución:

La constante es: $k = 10 \cdot 6 = 60$

Carné calculista $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right) : \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

APLICA LA TEORÍA

14 Indica si la siguiente tabla es de proporcionalidad inversa y calcula la constante de proporcionalidad:

x	1	2	3	4	5
y	12	6	4	3	2,4

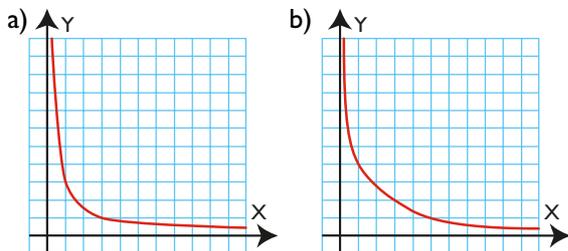
Solución:

Sí es de proporcionalidad inversa.

La constante es:

$k = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 5 \cdot 2,4 = 12$

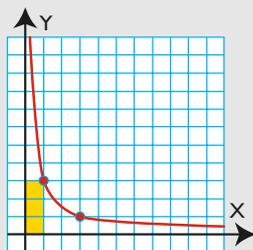
15 Indica si las siguientes gráficas son de proporcionalidad inversa:



Solución:

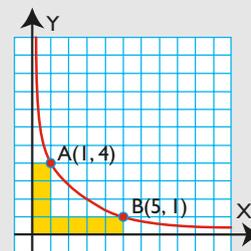
a) Sí es de proporcionalidad inversa.

Es una curva en la que se cumple siempre que el producto que se obtiene al multiplicar un valor cualquiera de las abscisas por el correspondiente valor de las ordenadas es la constante de proporcionalidad, $k = 3$



b) No es de proporcionalidad inversa.

Se observa que existen dos puntos A(1, 4) y B(5, 1) tales que $1 \cdot 4 = 4 \neq 5 \cdot 1 = 5$

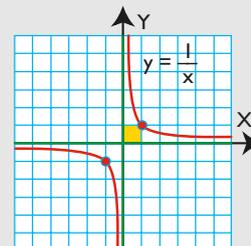


16 Halla la constante de proporcionalidad, estudia el crecimiento y dibuja las gráficas de las siguientes funciones:

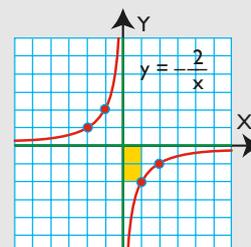
a) $y = \frac{1}{x}$ b) $y = -\frac{2}{x}$

Solución:

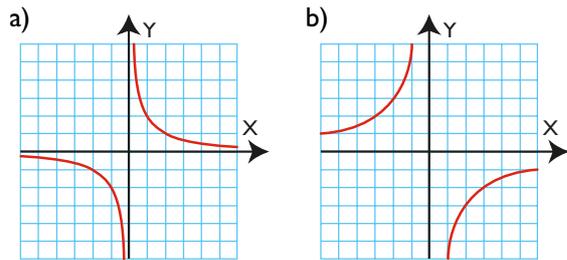
a) $k = 1 > 0$. Es decreciente.



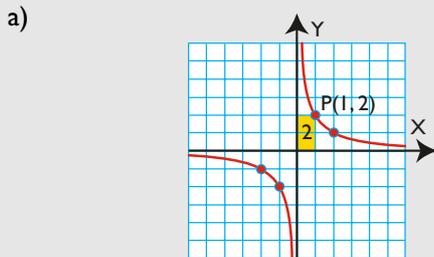
b) $k = -2 < 0$. Es creciente.



17 Halla las ecuaciones de las hipérbolas siguientes:

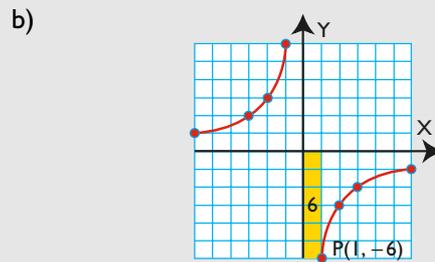


Solución:



$$P(1, 2) \Rightarrow k = 1 \cdot 2 = 2$$

La ecuación es: $y = \frac{2}{x}$

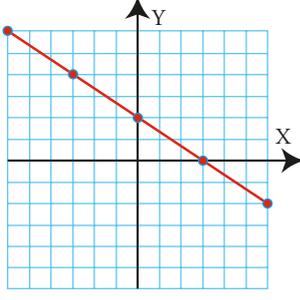
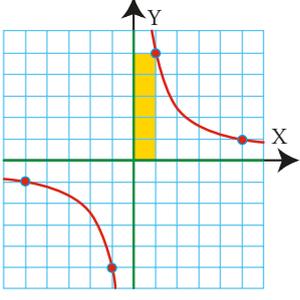
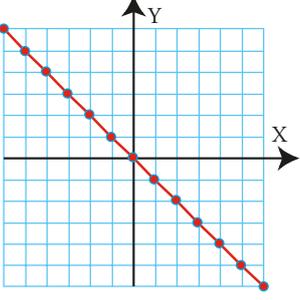
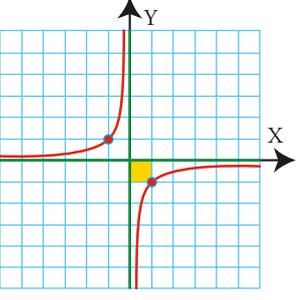
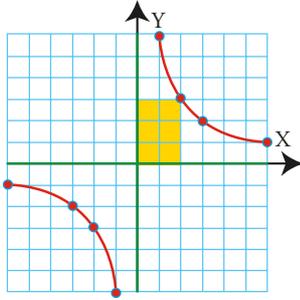
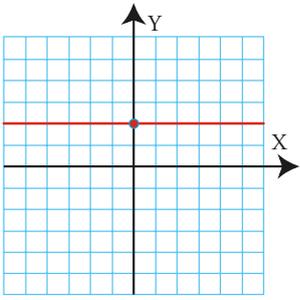
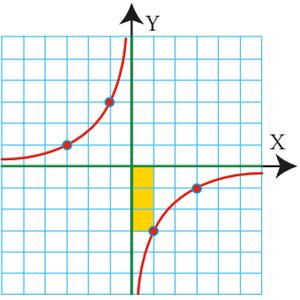
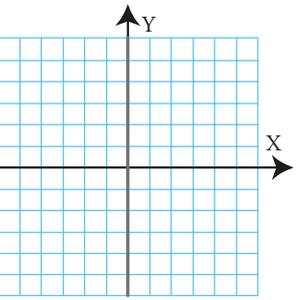
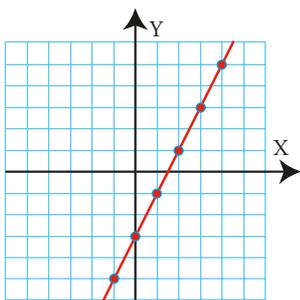
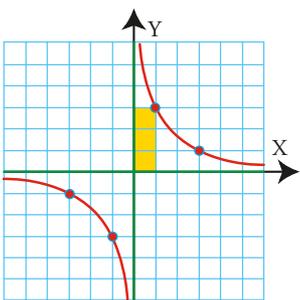
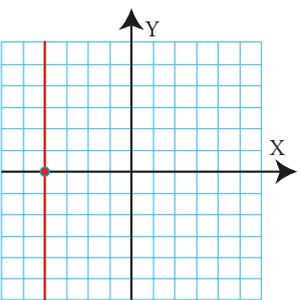
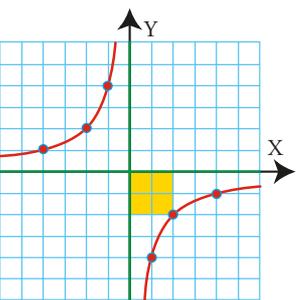


$$P(1, -6) \Rightarrow k = 1 \cdot (-6) = -6$$

La ecuación es: $y = -\frac{6}{x}$

Halla el tipo de cada una de las siguientes funciones y calcula mentalmente su ecuación:

1. Función lineal o de proporcionalidad directa $y = 3x$	2. Función de proporcionalidad inversa $y = \frac{1}{x}$	3. Función afín $y = -x + 3$	4. Función de proporcionalidad inversa $y = -\frac{5}{x}$
5. Función de proporcionalidad inversa $y = \frac{2}{x}$	6. Función constante $y = 0$	7. Función de proporcionalidad inversa $y = -\frac{6}{x}$	8. Función lineal o de proporcionalidad directa $y = x$

<p>9. Función afín</p> $y = -\frac{2}{3}x + 2$	<p>10. Función de proporcionalidad inversa</p> $y = \frac{5}{x}$	<p>11. Función lineal o de proporcionalidad directa</p> $y = -x$	<p>12. Función de proporcionalidad inversa</p> $y = -\frac{1}{x}$
			
<p>13. Función de proporcionalidad inversa</p> $y = \frac{6}{x}$	<p>14. Función constante</p> $y = 2$	<p>15. Función de proporcionalidad inversa</p> $y = -\frac{3}{x}$	<p>16. No es función</p> $x = 0$
			
<p>17. Función afín</p> $y = 2x - 3$	<p>18. Función de proporcionalidad inversa</p> $y = \frac{3}{x}$	<p>19. No es función</p> $x = -4$	<p>20. Función de proporcionalidad inversa</p> $y = -\frac{4}{x}$
			

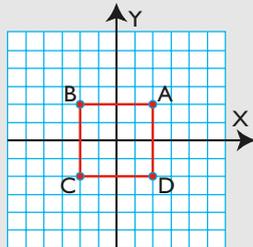
Ejercicios y problemas

1. Las funciones

18 Representa en unos ejes coordenados los siguientes puntos y únelos en orden alfabético. Une también el último con el primero. ¿Qué figura se obtiene?

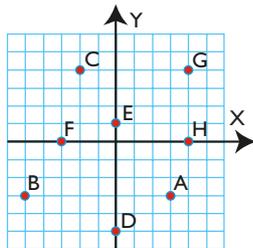
$A(2, 2)$, $B(-2, 2)$, $C(-2, -2)$ y $D(2, -2)$

Solución:



Se obtiene un cuadrado.

19 Halla las coordenadas de los puntos representados en el gráfico:



Solución:

$A(3, -3)$

$B(-5, -3)$

$C(-2, 4)$

$D(0, -5)$

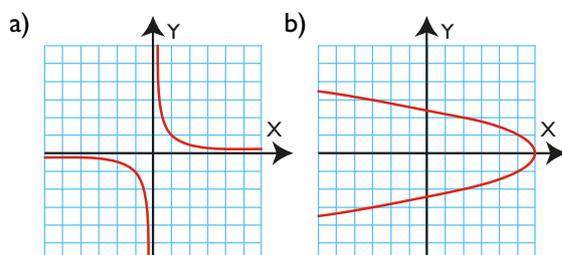
$E(0, 1)$

$F(-3, 0)$

$G(4, 4)$

$H(4, 0)$

20 Indica cuáles de las siguientes gráficas son funciones y por qué.



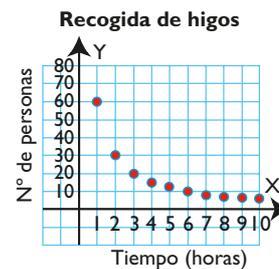
Solución:

a) Sí es función, porque para cada valor de la variable independiente, x , solo existe un único valor de la variable dependiente, y

b) No es función, porque hay valores de la variable independiente, x , a los que les corresponden dos valores de la variable dependiente, y . Por ejemplo, para $x = 5$ la variable y vale $|y - 1$

21 En la siguiente gráfica, indica:

- qué magnitudes se relacionan.
- cuál es la variable independiente. ¿Es discreta o continua?
- cuál es la variable dependiente.

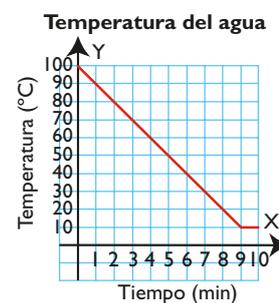


Solución:

- Se relacionan el tiempo en horas y el número de personas.
- La variable independiente es el tiempo. Es continua.
- La variable dependiente es el número de personas que recogen los higos.

22 En la siguiente gráfica, indica:

- qué magnitudes se relacionan.
- cuál es la variable independiente. ¿Es discreta o continua?
- cuál es la variable dependiente.



Solución:

- Se relacionan el tiempo en minutos y la temperatura en $^{\circ}\text{C}$
- La variable independiente es el tiempo. Es continua.
- La variable dependiente es la temperatura.

2. Función lineal o de proporcionalidad directa

23 Indica si la siguiente tabla es de proporcionalidad directa y, si lo es, calcula la constante de proporcionalidad:

x	1	2	3	4
y	5	10	15	20

Solución:

Es de proporcionalidad directa.

La constante es:

$$m = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \frac{20}{4} = 5$$

24 Completa la siguiente tabla para que sea de proporcionalidad directa y calcula la constante de proporcionalidad:

x	1	2	3	4
y		3		

Solución:

x	1	2	3	4
y	1,5	3	4,5	6

La constante es: $m = \frac{3}{2} = 1,5$

25 Indica si la siguiente gráfica es de proporcionalidad directa y, si lo es, calcula la constante de proporcionalidad:



Solución:

La gráfica pasa por el origen $O = (0, 0)$ y su pendiente es 0,04. Por tanto, la constante de proporcionalidad directa es $m = 0,04$. Es una gráfica de proporcionalidad directa.

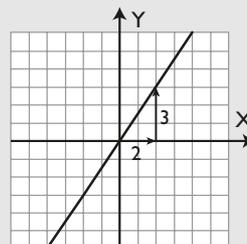
26 Halla la pendiente, estudia el crecimiento y dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{3}{2}x$

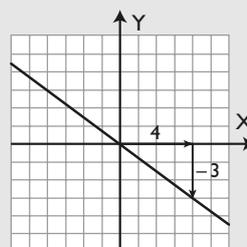
b) $y = -\frac{3}{4}x$

Solución:

a) $m = 3/2 > 0$. Es creciente.

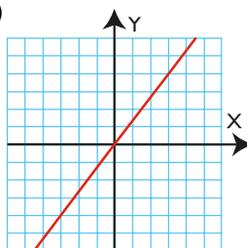


b) $m = -3/4 < 0$. Es decreciente.

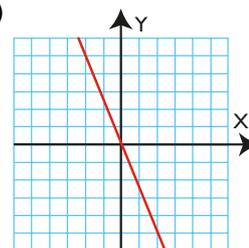


27 Halla la ecuación de las rectas siguientes:

a)

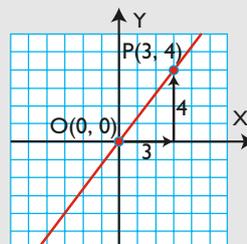


b)



Solución:

a)

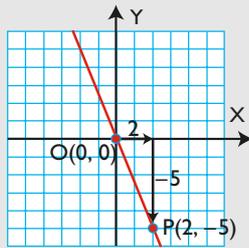


$m = 4/3$

La ecuación es: $y = \frac{4}{3}x$

Ejercicios y problemas

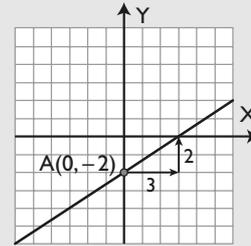
b)



$$m = -5/2$$

La ecuación es: $y = -\frac{5}{2}x$

d) $m = 2/3, b = -2$



3. Función afín. Estudio de rectas

28 Halla la pendiente, el valor de la ordenada en el origen y dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = 3x - 4$

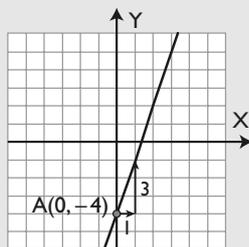
b) $y = -x + 2$

c) $y = -\frac{4}{5}x + 1$

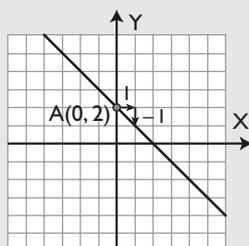
d) $y = \frac{2}{3}x - 2$

Solución:

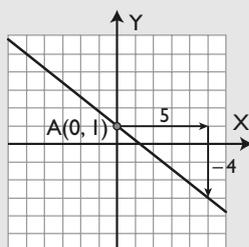
a) $m = 3, b = -4$



b) $m = -1, b = 2$

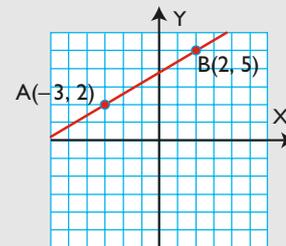


c) $m = -4/5, b = 1$



29 Halla la fórmula de la recta que pasa por los puntos $A(-3, 2)$ y $B(2, 5)$

Solución:



a) Se calcula la pendiente:

$$m = \frac{5 - 2}{2 - (-3)} = \frac{3}{5}$$

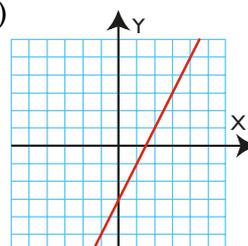
b) En la fórmula $y = 3/5x + b$ se sustituyen las coordenadas del punto $A(-3, 2)$

$$y = 3/5x + b \Rightarrow 3/5(-3) + b = 2 \Rightarrow b = 19/5$$

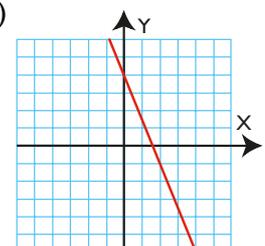
La recta es: $y = \frac{3}{5}x + \frac{19}{5}$

30 Halla la ecuación de las rectas siguientes:

a)



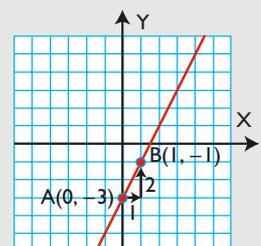
b)



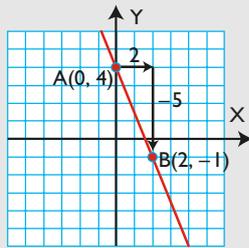
Solución:

a) $m = 2, b = -3$

La ecuación es: $y = 2x - 3$



b)



$m = -5/2, b = 4$

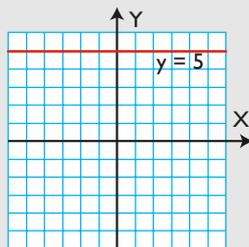
La ecuación es: $y = -\frac{5}{2}x + 4$

31 Representa las siguientes rectas y di cuáles son funciones:

- a) $y = 5$
- b) $y = -4$
- c) $x = 4$
- d) $x = -1$

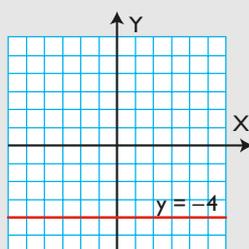
Solución:

a)



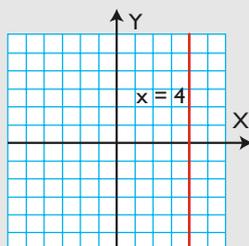
Es una función constante.

b)



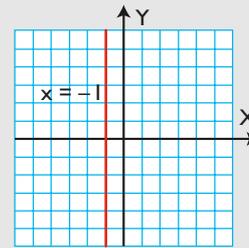
Es una función constante.

c)



No es función.

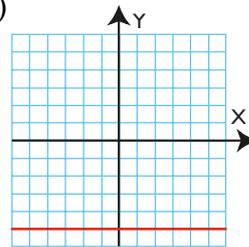
d)



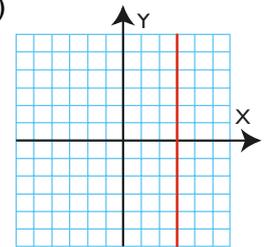
No es función.

32 Halla la ecuación de las siguientes rectas:

a)



b)



Solución:

a) $y = -5$

b) $x = 3$

4. Función de proporcionalidad inversa

33 Indica si la siguiente tabla es de proporcionalidad inversa y, si lo es, calcula la constante de proporcionalidad:

x	1	2	3	4	5
y	30	15	10	7,5	6

Solución:

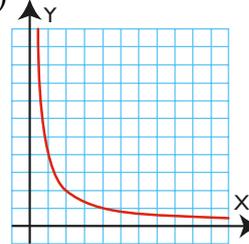
Sí es de proporcionalidad inversa.

La constante es:

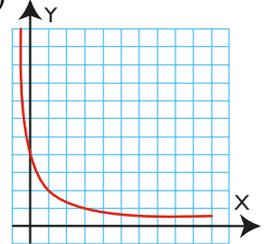
$k = 1 \cdot 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 4 \cdot 7,5 = 5 \cdot 6 = 30$

34 Indica si las siguientes gráficas son de proporcionalidad inversa:

a)



b)

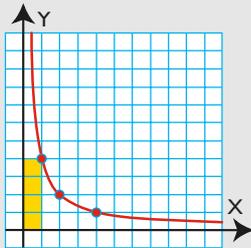


Ejercicios y problemas

Solución:

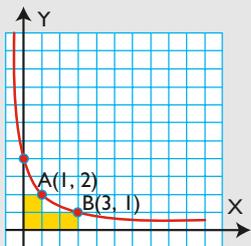
a) Sí es de proporcionalidad inversa.

Es una curva en la que se cumple siempre que el producto que se obtiene al multiplicar un valor cualquiera de la abscisa por el correspondiente valor de la ordenada es la **constante de proporcionalidad inversa, $k = 4$**



b) No es de proporcionalidad inversa.

Se observa que existen dos puntos $A(1, 2)$ y $B(3, 1)$ tales que $1 \cdot 2 = 2 \neq 3 \cdot 1 = 3$



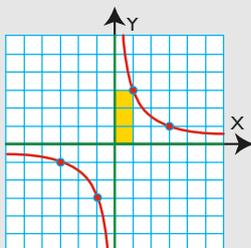
35 Halla la constante de proporcionalidad, estudia el crecimiento y dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{3}{x}$

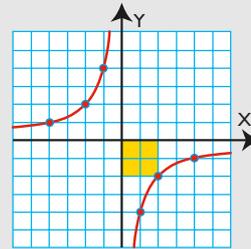
b) $y = -\frac{4}{x}$

Solución:

a) $k = 3 \Rightarrow$ Es decreciente.

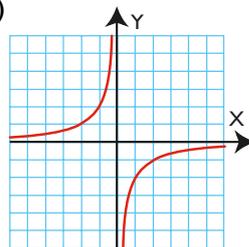


b) $k = -4 \Rightarrow$ Es creciente.

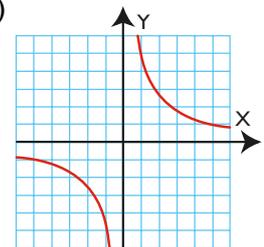


36 Halla las ecuaciones de las hipérbolas siguientes:

a)

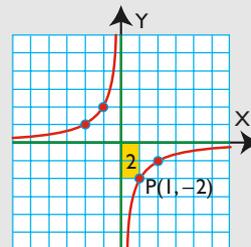


b)



Solución:

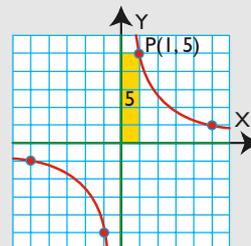
a)



$P(1, -2) \Rightarrow k = 1 \cdot (-2) = -2$

La ecuación es: $y = -\frac{2}{x}$

b)

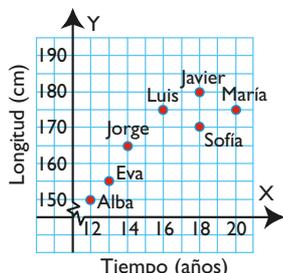


$P(1, 5) \Rightarrow k = 1 \cdot 5 = 5$

La ecuación es: $y = \frac{5}{x}$

Para ampliar

- 37** La gráfica siguiente representa las edades y las estaturas de un grupo de personas:



- ¿Quién es el más joven?
- ¿Quién es el más alto?
- ¿Quién tiene más de 16 años?
- ¿Quién mide más de 170 cm?
- De los que miden 175 cm, ¿quién es mayor?
- De los que tienen 18 años, ¿quién es más alto?

Solución:

- Alba.
- Javier.
- Sofía, Javier y María.
- Luis, María y Javier.
- María.
- Javier.

- 38** Una barra de pan cuesta 0,6 €

- ¿Qué magnitudes se relacionan?
- ¿Cuál es la variable independiente y cuál la variable dependiente?
- Haz una tabla de valores y calcula la constante de proporcionalidad.
- Escribe la ecuación que da el precio en función del número de barras de pan.

Solución:

- El número de barras de pan y el dinero que cuestan.
- La variable independiente es el número de barras de pan. La variable dependiente es el dinero.

Nº de barras	1	2	3	4
Dinero (€)	0,6	1,2	1,8	2,4

La constante es: $m = 0,6$

- $y = 0,6x$

- 39** Una moto recorre 60 km a velocidad constante. Dada la siguiente tabla:

Tiempo (h)	1	2	3	4	5
Velocidad (km/h)	60	30	20	15	12

- ¿qué magnitudes se relacionan?
- ¿cuál es la variable independiente y cuál la variable dependiente?
- calcula la constante de proporcionalidad.
- escribe la ecuación que da la velocidad en función del tiempo.

Solución:

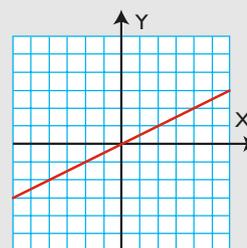
- Tiempo y velocidad.
- La variable independiente es el tiempo. La variable dependiente es la velocidad.
- La constante de proporcionalidad inversa es: $k = 60$
- $v = \frac{60}{t}$

- 40** Dadas las siguientes ecuaciones, indica si corresponden a funciones lineales, afines, constantes o si no son funciones, y representa las rectas correspondientes:

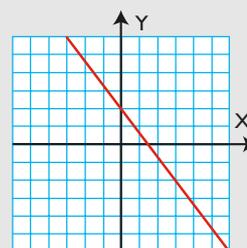
- $y = \frac{1}{2}x$
- $y = -\frac{4}{3}x + 2$
- $x = -4$
- $y = 2$

Solución:

- Es una función lineal.

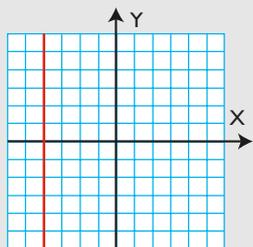


- Es una función afín.

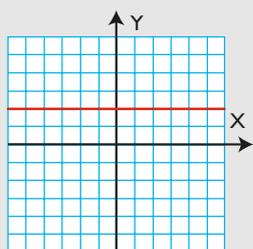


Ejercicios y problemas

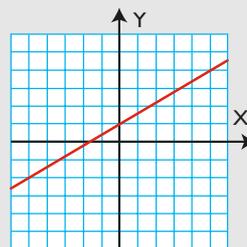
c) No es función.



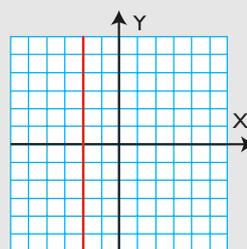
d) Es una función constante.



c) Función afín.



d) No es función.



41 Dadas las siguientes ecuaciones, indica si corresponden a funciones lineales, afines, constantes o si no son funciones, y representa las rectas correspondientes:

a) $y = -\frac{4}{5}x$

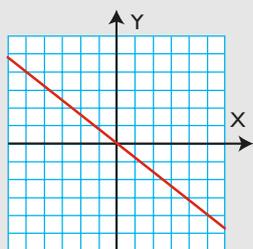
b) $y = 2$

c) $y = \frac{3}{5}x + 1$

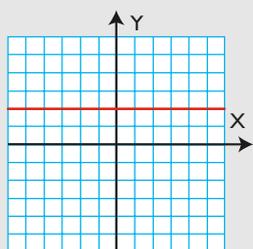
d) $x = -2$

Solución:

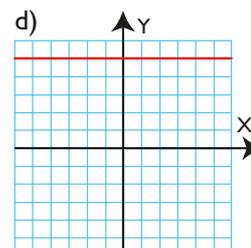
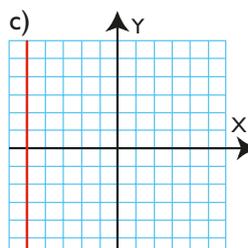
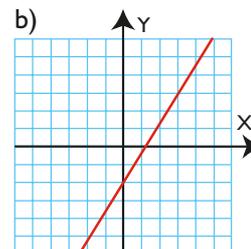
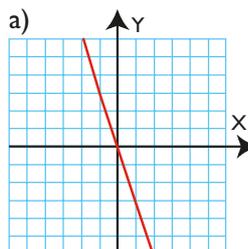
a) Función lineal.



b) Función constante.

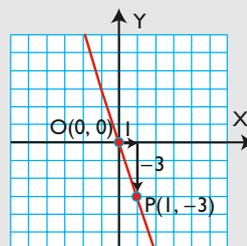


42 Indica cuáles de las siguientes rectas son funciones y halla su ecuación:



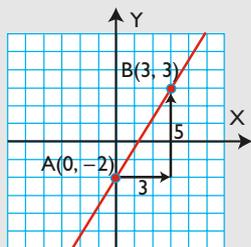
Solución:

a) Función lineal.



$m = -3 \Rightarrow y = -3x$

b) Función afín.



$$m = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{3}x - 2$$

c) No es función.

$$x = -5$$

d) Función constante.

$$y = 5$$

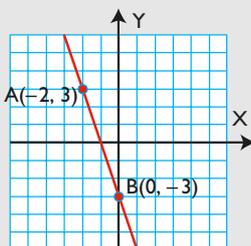
43 Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por los siguientes puntos:

a) $A(-2, 3), B(0, -3)$

b) $A(-3, -5), B(5, 1)$

Solución:

a)



• Se calcula la pendiente:

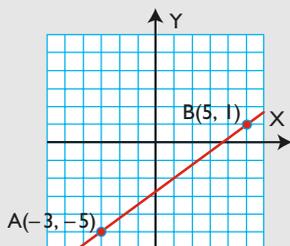
$$m = \frac{-3 - 3}{0 - (-2)} = -\frac{6}{2} = -3$$

• En la fórmula $y = -3x + b$ se sustituyen las coordenadas del punto $A(-2, 3)$

$$y = -3x + b \Rightarrow -3 \cdot (-2) + b = 3 \Rightarrow b = -3$$

La recta es: $y = -3x - 3$

b)



• Se calcula la pendiente:

$$m = \frac{1 - (-5)}{5 - (-3)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

• En la fórmula $y = 3/4x + b$ se sustituyen las coordenadas del punto $A(-3, -5)$

$$y = \frac{3}{4}x + b \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot (-3) + b = -5 \Rightarrow b = -\frac{11}{4}$$

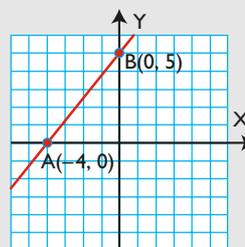
La recta es: $y = \frac{3}{4}x - \frac{11}{4}$

44 Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por los siguientes puntos:

a) $A(-4, 0), B(0, 5)$ b) $A(0, 3), B(3, 5)$

Solución:

a)



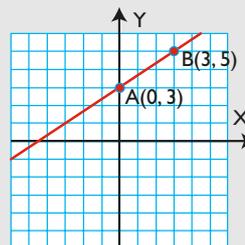
• Se calcula la pendiente: $m = \frac{5 - 0}{0 - (-4)} = \frac{5}{4}$

• En la fórmula $y = 5/4x + b$ se sustituyen las coordenadas del punto $A(-4, 0)$

$$y = \frac{5}{4}x + b \Rightarrow \frac{5}{4} \cdot (-4) + b = 0 \Rightarrow b = 5$$

La recta es: $y = \frac{5}{4}x + 5$

b)



• Se calcula la pendiente: $m = \frac{5 - 3}{3 - 0} = \frac{2}{3}$

• En la fórmula $y = 2/3x + b$ se sustituyen las coordenadas del punto $A(0, 3)$

$$y = \frac{2}{3}x + b \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot 0 + b = 3 \Rightarrow b = 3$$

La recta es: $y = \frac{2}{3}x + 3$

Ejercicios y problemas

45 Dadas las siguientes ecuaciones, indica si corresponden a funciones lineales, afines, constantes, de proporcionalidad inversa o no son funciones, y represéntalas:

a) $y = 4x - 3$

b) $y = 4$

c) $y = \frac{1}{3}x$

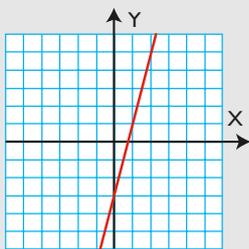
d) $y = \frac{5}{x}$

e) $x = -5$

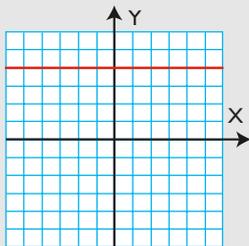
f) $y = -\frac{3}{x}$

Solución:

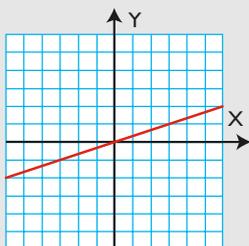
a) Función afín.



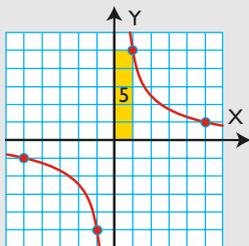
b) Función constante.



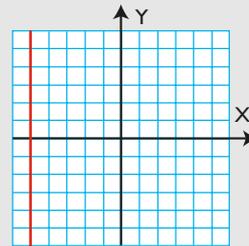
c) Función lineal.



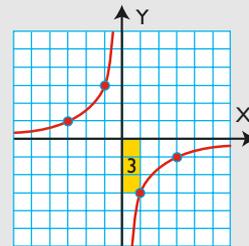
d) Función de proporcionalidad inversa.



e) No es función.



f) Función de proporcionalidad inversa.



46 Dadas las siguientes ecuaciones, indica si corresponden a funciones lineales, afines, constantes, de proporcionalidad inversa o si no son funciones, y represéntalas:

a) $y = \frac{2}{5}x$

b) $x = 2$

c) $y = -\frac{6}{x}$

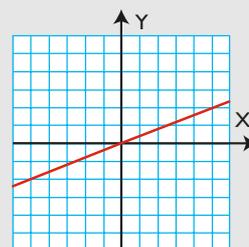
d) $y = -5$

e) $y = -\frac{1}{4}x - 2$

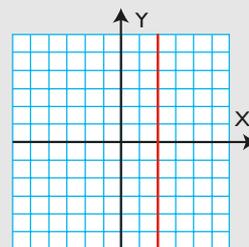
f) $y = \frac{4}{x}$

Solución:

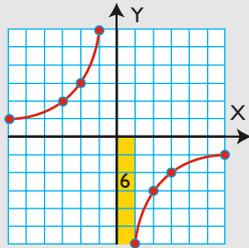
a) Función lineal.



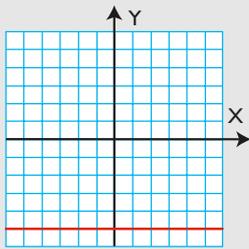
b) No es función.



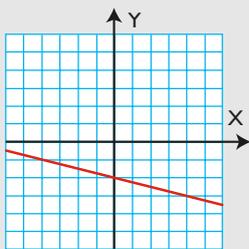
c) Función de proporcionalidad inversa.



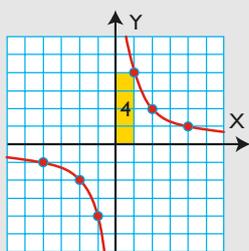
d) Función constante.



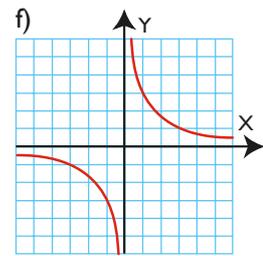
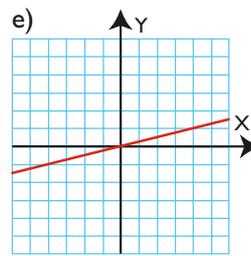
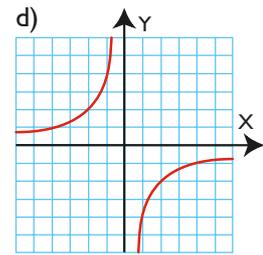
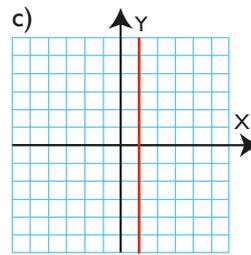
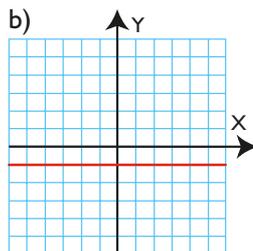
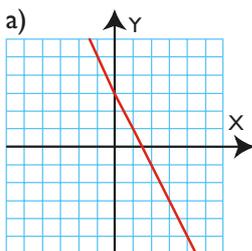
e) Función afín.



f) Función de proporcionalidad inversa.

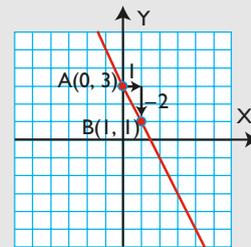


47 Indica en cada una de las siguientes gráficas si corresponden a funciones lineales, afines, constantes, de proporcionalidad inversa o si no son funciones, y halla su ecuación:



Solución:

a) Función afín.

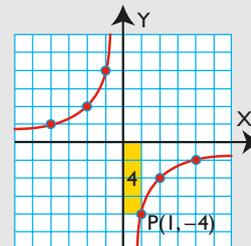


$$m = -2 \Rightarrow y = -2x + 3$$

b) Función constante: $y = -1$

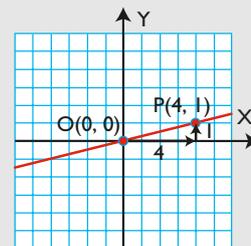
c) No es función: $x = 1$

d) Función de proporcionalidad inversa.



$$P(1, -4) \Rightarrow k = 1 \cdot (-4) = -4 \Rightarrow y = -4/x$$

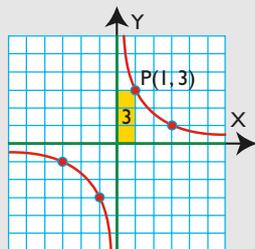
e) Función lineal.



$$m = 1/4 \Rightarrow y = 1/4x$$

Ejercicios y problemas

f) Función de proporcionalidad inversa.



$$P(1, 3) \Rightarrow k = 1 \cdot 3 = 3 \Rightarrow y = 3/x$$

Con calculadora

48 Completa la tabla de valores para la función lineal:

x	1	2	3	4	5
y = 3,5x					

Solución:

x	1	2	3	4	5
y = 3,5x	3,5	7	10,5	14	17,5

49 Completa la tabla de valores para la función lineal:

x	1	2	3	4	5
y = 1,45x					

Solución:

x	1	2	3	4	5
y = 1,45x	1,45	2,9	4,35	5,8	7,25

50 Completa la siguiente tabla de una función lineal:

x	1	2	3	4	5
y		6,4			

Solución:

x	1	2	3	4	5
y = 3,2x	3,2	6,4	9,6	12,8	16

51 Completa la tabla de valores para la función afín:

x	1	2	3	4	5
y = 2,05x + 3,4					

Solución:

x	1	2	3	4	5
y = 2,05x + 3,4	5,45	7,5	9,55	11,6	13,65

52 Completa la tabla de valores para la función afín:

x	1	2	3	4	5
y = -2,3x + 2,1					

Solución:

x	1	2	3	4	5
y = -2,3x + 2,1	-0,2	-2,5	-4,8	-7,1	-9,4

53 Completa la siguiente tabla de una función afín:

x	0	1	2	3	4	5
y	1,5	4,2				

Solución:

$$b = 1,5$$

$$m = 4,2 - 1,5 = 2,7$$

x	0	1	2	3	4	5
y = 2,7x + 1,5	1,5	4,2	6,9	9,6	12,3	15

54 El alquiler de un coche cuesta 19,76 € al día, más 0,42 € por kilómetro. Haz una tabla de valores que relacione el precio que se paga en función del número de kilómetros realizados en un día.

Solución:

Nº de km	Dinero (€) $y = 0,42x + 19,76$
0	19,76
1	20,18
2	20,60
3	21,02

Problemas

- 55** Un CD-ROM virgen cuesta 0,50 €. Haz una tabla de valores y escribe la ecuación que da el precio en función del número de CD-ROM vírgenes. Representa la función y halla la pendiente.

Solución:

Nº de CD	1	2	3	4	...
Dinero (€)	0,5	1	1,5	2	...

La ecuación es: $y = 0,5x$

La pendiente es la constante de proporcionalidad:
 $m = 0,5$

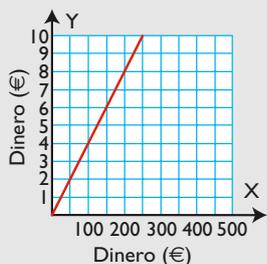


- 56** El IVA de los libros es el 4%. Escribe la fórmula que da el IVA en función del precio. Representala y calcula la pendiente.

Solución:

$$y = 0,04x$$

La pendiente es $m = 0,04$



- 57** Un coche consume 7 litros de gasolina cada 100 km. Expresa el consumo de gasolina del coche en función del número de kilómetros recorridos. ¿Cuánto gastará en 540 km?

Solución:

$$y = 0,07x$$

Si ha recorrido 540 km, el consumo será:

$$y = 0,07 \cdot 540 = 37,8 \text{ litros.}$$

- 58** En una tienda pagamos 22,5 € por 3 kg de café.

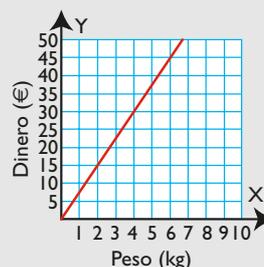
- Escribe la ecuación que da el dinero que se paga en función del peso de café comprado.
- Dibuja la gráfica.

Solución:

$$a) m = 22,5 : 3 = 7,5$$

$$y = 7,5x$$

b)



- 59** Se quiere llenar un termo de 120 litros con el agua de un grifo.

- Haz una tabla de valores que exprese la cantidad de litros/minuto de agua que debe arrojar el grifo en función del tiempo que tarda en llenarse el termo.
- ¿Qué tipo de función es? Halla la constante de proporcionalidad.
- Escribe la ecuación de la función.
- Haz su representación gráfica.

Solución:

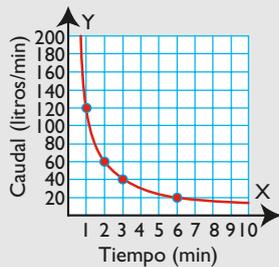
a)	Tiempo (min)	Caudal (litros/min)
	1	120
	2	60
	3	40
	4	30
	5	24
	6	20

- b) Es una función de proporcionalidad inversa.
La constante es $k = 120$

$$c) y = \frac{120}{x}$$

Ejercicios y problemas

d)



60 El coste de una máquina que pone etiquetas en botes de conserva es de 5 € desde que se conecta, y después, de 3 € por cada hora.

- Expresa el coste de la máquina en función del tiempo.
- Si se han gastado 296 €, ¿cuánto tiempo ha estado funcionando la máquina?

Solución:

a) $y = 3x + 5$

donde x es el número de horas, e y , el coste en €

b) $296 = 3x + 5$

$3x = 291$

$x = 97$ horas.

61 Un metro de papel cuesta 2 €

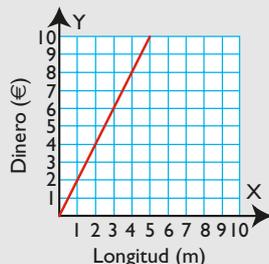
- Haz una tabla de valores que dé el precio para distintas cantidades de metros de papel.
- Escribe la ecuación de la función correspondiente.
- Representa la función.

Solución:

a)	Longitud (m)	1	2	3	4	5	6	...
	Dinero (€)	2	4	6	8	10	12	...

b) $y = 2x$

c)



62 Cinco obreros realizan una obra en 6 días.

- Haz una tabla de valores que exprese el número de días que tardan en hacer la obra, en función del número de obreros que trabajan.
- ¿Qué tipo de función es? Halla la constante de proporcionalidad.
- Escribe la ecuación de la función.
- Haz su representación gráfica.

Solución:

a)	Nº de obreros	1	2	3	4	5	6	...
	Tiempo (días)	30	15	10	7,5	6	5	...

b) Es una función de proporcionalidad inversa. La constante es $k = 30$

c) $y = \frac{30}{x}$

d)

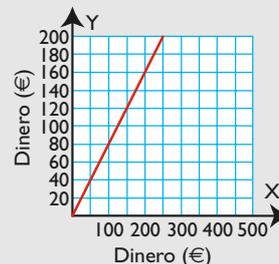


63 En una tienda descuentan el 20% en todos los productos por fin de temporada. Escribe la ecuación que da la cantidad que se paga, en función del precio, una vez hecho el descuento. Di qué tipo de función es y represéntala.

Solución:

$y = 0,8x$

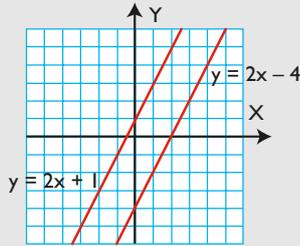
Es una función lineal.



64 En un bidón que pesa vacío 3 kg se pone agua destilada que pesa 1 kg por litro. Expresa la ecuación que da el peso total del bidón, en función de la cantidad de litros de agua que se ponen en él. Di qué tipo de función es y haz su representación gráfica.

Ejercicios y problemas

Solución:



Son paralelas.

Tienen la misma pendiente: $m = 2$

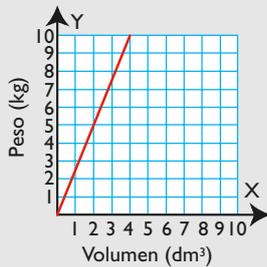
Las rectas que tienen la misma pendiente son paralelas.

- 72** Sabemos que 5 dm^3 de granito pesan $12,5 \text{ kg}$.
Expresa la ecuación de la función que da el peso, en función de la cantidad de decímetros cúbicos.
Haz la gráfica correspondiente y calcula cuántos decímetros cúbicos ocuparán 30 kg

Solución:

$$m = \frac{12,5}{5} = 2,5$$

$$y = 2,5x$$



$$\text{Para } x = 30 \Rightarrow y = 2,5 \cdot 30 = 75 \text{ kg}$$

- 73** En una empresa se ha subido el salario un 3% más un complemento fijo de 30 € para todos los empleados.

a) Completa la tabla siguiente:

Salario antiguo	500	1 000	1 500	2 000
Salario nuevo				

b) Escribe la fórmula que da el salario nuevo, en función del antiguo.

c) ¿Qué salario ganará un empleado que cobraba $1 200 \text{ €}$ antes de la subida?

Solución:

a) Salario antiguo	500	1 000	1 500	2 000
Salario nuevo	545	1 060	1 575	2 090

b) $y = 1,03x + 30$

c) $y = 1,03 \cdot 1 200 + 30 = 1 266 \text{ €}$

Aplica tus competencias

- 74** Una empresa A, de reparaciones a domicilio, cobra 20 € por desplazamiento y 10 € por cada hora de trabajo. Otra empresa B cobra 10 € por desplazamiento y 15 € por cada hora. Halla la ecuación de cada una de ellas y represéntalas. Si se tienen que contratar los servicios de una empresa, ¿cuál interesa más?

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

Comprueba lo que sabes

- 1** Escribe lo que sepas de la ecuación de una función lineal o de proporcionalidad directa y pon un ejemplo.

Solución:

La **ecuación de una función de proporcionalidad directa** es:

$$y = mx \text{ con } m \neq 0$$

donde **m** es la **pendiente** de la recta que coincide con la **constante de proporcionalidad directa**.

Constante de proporcionalidad = pendiente = m

Si la **pendiente es positiva** ($m > 0$), la recta **es creciente**.

Si la **pendiente es negativa** ($m < 0$), la recta **es decreciente**.

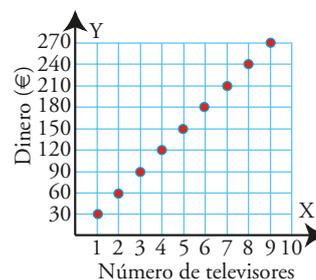
Ejemplo

$$y = 2x$$

La pendiente es $m = 2$ y la función es creciente.

- 2** Dada la gráfica adjunta:

- ¿qué magnitudes se relacionan?
- ¿cuál es la variable independiente? ¿Es discreta o continua?
- ¿cuál es la variable dependiente?



Solución:

- Se relacionan el número de televisores y el dinero.
- La variable independiente es el número de televisores. Es discreta.
- La variable dependiente es el dinero.

Comprueba lo que sabes

3 Representa gráficamente las siguientes ecuaciones. Di cuáles son funciones y clasifícalas.

a) $y = \frac{2}{x}$

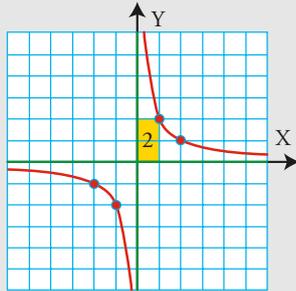
b) $y = \frac{2}{3}x$

c) $x = 4$

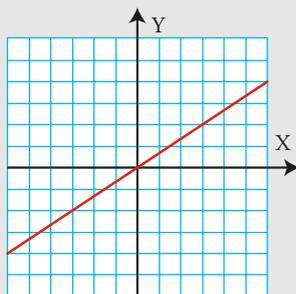
d) $y = -2x + 3$

Solución:

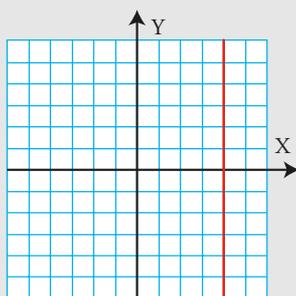
a) Función de proporcionalidad inversa.



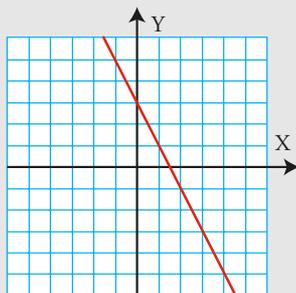
b) Función lineal.



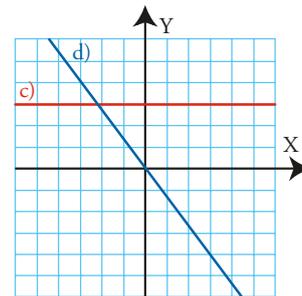
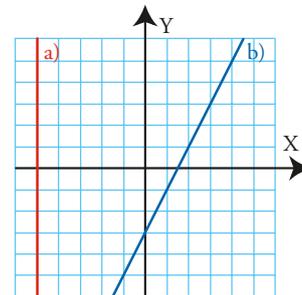
c) No es función.



d) Función afín.



4 Halla las ecuaciones de las rectas a), b), c) y d) del margen. Di cuáles son funciones y clasifícalas.



Solución:

a) $x = -5$

No es función.

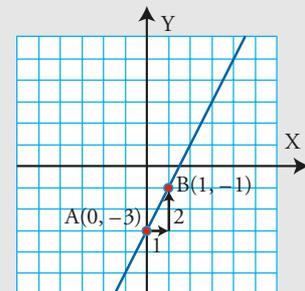
b)

$b = -3$

$m = 2$

$y = 2x - 3$

Es una función afín.



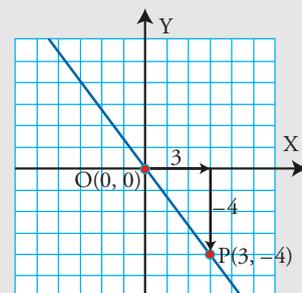
c) $y = 3$

Es una función constante.

d)

$m = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x$

Es una función lineal.

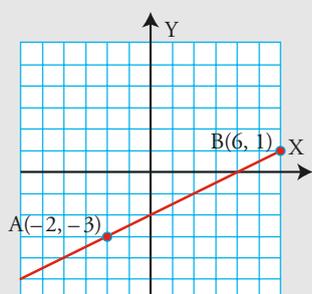


5 Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

$A(-2, -3)$ y $B(6, 1)$

Solución:

a)



Se calcula la pendiente:

$$m = \frac{1 - (-3)}{6 - (-2)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

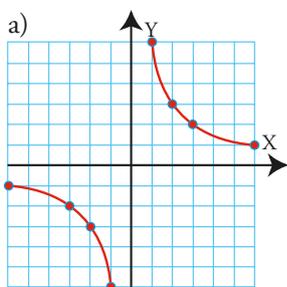
b) En la fórmula $y = 1/2x + b$ se sustituyen las coordenadas del punto $B(6, 1)$

$$y = \frac{1}{2}x + b \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 6 + b = 1 \Rightarrow b = -2$$

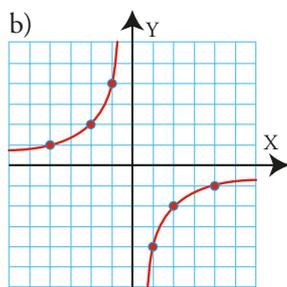
La recta es: $y = \frac{1}{2}x - 2$

6 Halla la ecuación de las siguientes hipérbolas:

a)

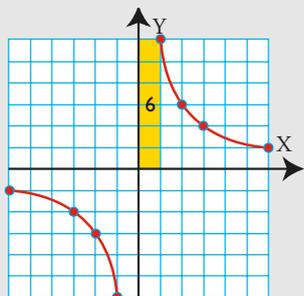


b)



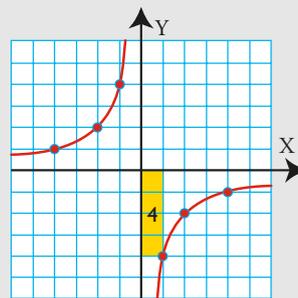
Solución:

a)



$$k = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{x}$$

b)



$$k = -4 \Rightarrow y = -\frac{4}{x}$$

7 El alquiler de un coche cuesta 20 € al día, más 0,5 € por kilómetro recorrido. Halla la ecuación que calcula lo que se cobra diariamente por el alquiler del coche, en función de los kilómetros recorridos. ¿Qué tipo de función es?

Solución:

$$y = 0,5x + 20$$

Es una función afín.

8 Dado un rectángulo de 24 m² de área, expresa la ecuación que da la longitud de la altura, en función de la longitud de la base. ¿Qué tipo de función es?

Solución:

$$y = \frac{24}{x}$$

Es una función de proporcionalidad inversa.

Paso a paso

75 Representa la función:

$$y = -3x + 2$$

Clasifícala, halla la pendiente, estudia el crecimiento y halla la ordenada en el origen.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

76 Representa la función:

$$y = \frac{6}{x}$$

Calcula el valor de **k** y estudia el crecimiento.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de GeoGebra o DERIVE:

77 Halla la ecuación de la función que expresa el coste de las peras si un kilo cuesta 1,5 €, y represéntala gráficamente. ¿Qué tipo de función es? Halla la pendiente.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

78 **Internet.** Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema.**

Practica

79 Representa gráficamente las siguientes ecuaciones. Di cuáles son funciones y clasifícalas. Halla la pendiente de las funciones lineales y afines y estudia su crecimiento:

a) $y = \frac{4}{5}x$

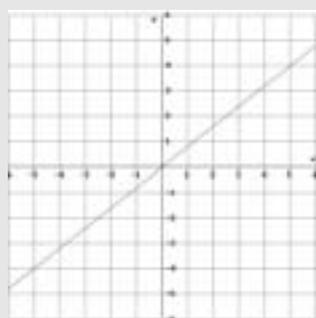
b) $y = 3$

c) $x = -2$

d) $y = -\frac{2}{3}x + 2$

Solución:

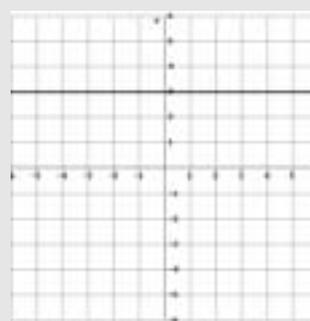
a)



Es una función lineal.

La pendiente $m = 4/5 > 0$, es creciente.

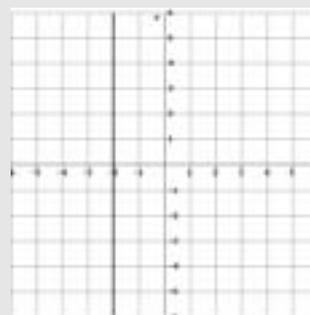
b)



Es una función constante.

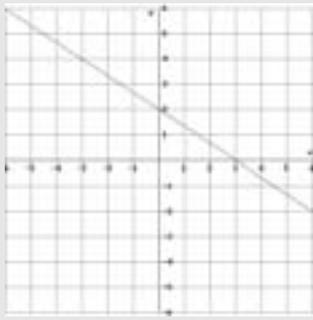
Pendiente: $m = 0$

c)



No es función.

d)



Es una función afín.

Pendiente: $m = -2/3 < 0$, es decreciente.

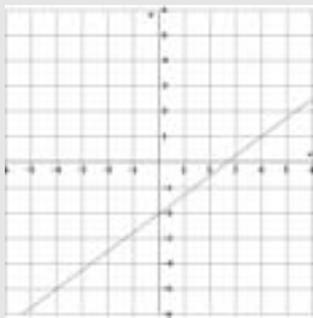
80 Dibuja la gráfica de las funciones afines siguientes y halla en cada una de ellas la pendiente y la ordenada en el origen. ¿Cuál es creciente y cuál decreciente?

a) $y = \frac{3}{4}x - 2$

b) $y = -\frac{x}{3} + 1$

Solución:

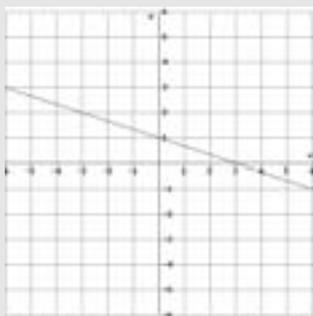
a)



Pendiente: $m = 3/4 > 0$, es creciente.

Ordenada en el origen: $b = -2$

b)



Pendiente: $m = -1/3 < 0$, es decreciente.

Ordenada en el origen: $b = 1$

81 Representa gráficamente las siguientes funciones:

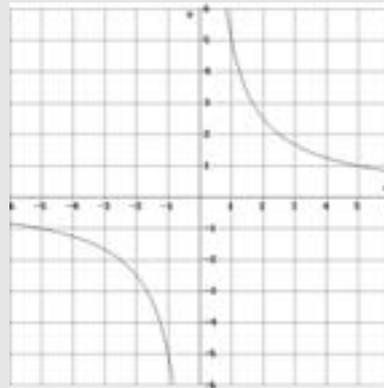
a) $y = \frac{5}{x}$

b) $y = -\frac{4}{x}$

Calcula el valor de k y estudia el crecimiento.

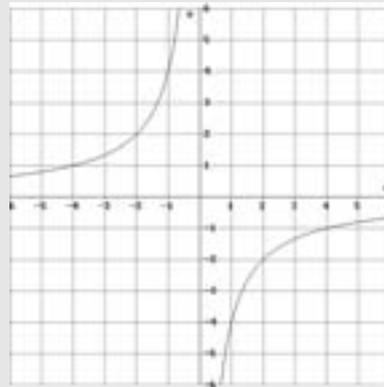
Solución:

a)



$k = 5 > 0$, es decreciente.

b)



$k = -4 < 0$, es creciente.

82 Representa las siguientes funciones y di cuáles son de proporcionalidad. De estas últimas, halla la constante de proporcionalidad y di si son de proporcionalidad directa o inversa.

a) $y = -2x + 3$

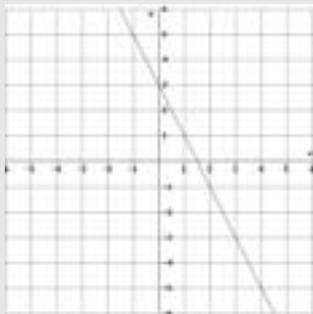
b) $y = -\frac{2}{x}$

c) $y = \frac{x}{4}$

d) $y = 5$

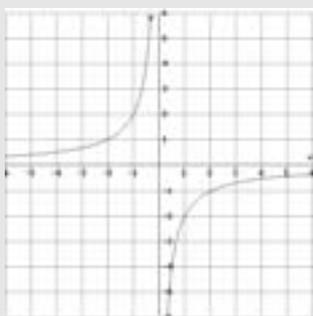
Solución:

a)



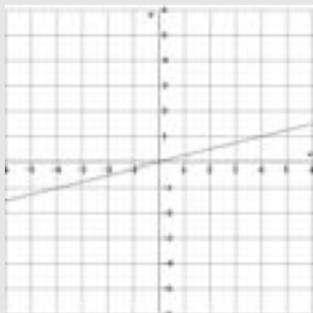
No es de proporcionalidad.
Es una función afín.

b)



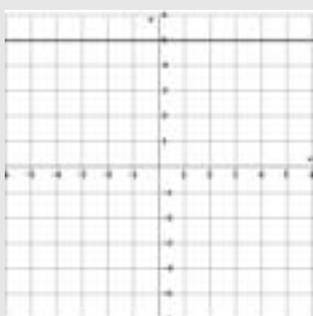
Es de proporcionalidad inversa.
La constante es $k = -2$

c)



Es de proporcionalidad directa.
La constante es $m = 1/4$

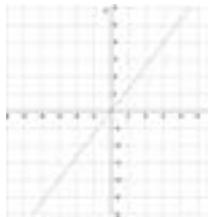
d)



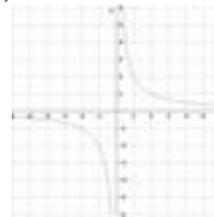
No es de proporcionalidad.
Es una función constante.

83 Identifica las siguientes funciones y halla mediante ensayo-acierto su fórmula:

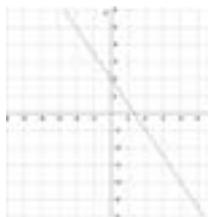
a)



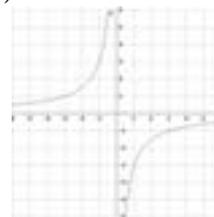
b)



c)



d)



Solución:

a) Función lineal: $y = 4x/3$

b) Función de proporcionalidad inversa: $y = 2/x$

c) Función afín: $y = -3x/2 + 2$

d) Función de proporcionalidad inversa: $y = -3/x$

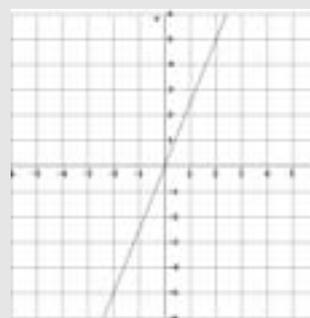
Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de GeoGebra o DERIVE:

84 Halla la ecuación de la función que expresa el coste del aceite si un litro cuesta 2,5 €. Representala gráficamente.

¿Qué tipo de función es? Halla la pendiente.

Solución:

$y = 2,5x$

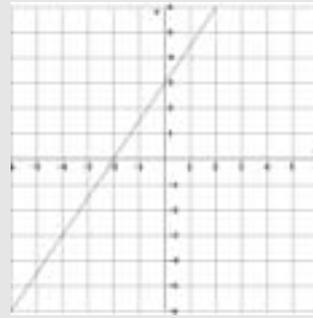


Es función de proporcionalidad directa.
Pendiente: $m = 2,5$

- 85** Halla la ecuación de la función que expresa el dinero que cobra diariamente un repartidor, en función del número de pedidos que reparte, si cobra 3 € por día y 1,5 € por cada pedido. Representala gráficamente.
¿Qué tipo de función es?
Halla la pendiente y la ordenada en el origen.

Solución:

$$y = 1,5x + 3$$



Es función afín.

Pendiente: $m = 1,5$

Ordenada en el origen: $b = 3$

Bloque 3: Funciones

1 b

2 b

3 a

4 d

5 a

6 b

7 c

8 a

9 c

Ejercicios

10 Crecer

a) 168,3 cm

b) Cualquier respuesta que lo justifique; por ejemplo: a partir de los 12 años la curva crece más lentamente.

La tasa media entre los 10 y 12 años es aproximadamente 7,5 cm/año, y la tasa media entre los 12 y 20 años, es de 2 cm/año

c) De 11 a 13 años.

11 El mejor coche

a) Puntuación total = 15 puntos

b) Cualquier combinación válida que haga Ca ganador; por ejemplo: $2S + C + D + 3H$



BLOQUE IV

Geometría

11. Semejanza. Teorema de Thales y Pitágoras
12. Cuerpos en el espacio
13. Áreas y volúmenes



1. Figuras semejantes

PIENSA Y CALCULA

Si la Torre del Oro mide aproximadamente 20 m de alto, ¿cuánto mide aproximadamente de alto la Giralda de Sevilla?



Solución:

Si la Torre de Oro mide 1 cm en el libro, en la realidad mide aproximadamente 20 m; y si la Giralda en el libro mide 5 cm, su altura en la realidad será:

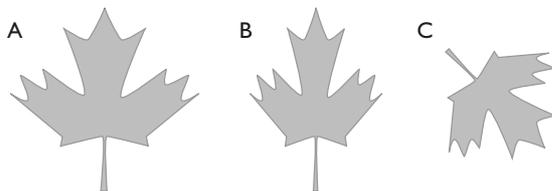
$$20 \cdot 5 = 100 \text{ m aproximadamente.}$$

Exactamente la Torre del Oro mide 20,79 m, y la Giralda, 97,5 m

Carné calculista 25,6 : 0,68 | C = 37,64; R = 0,0048

APLICA LA TEORÍA

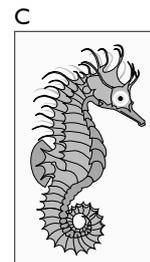
1 De las figuras siguientes, hay dos semejantes. ¿Cuáles son?



Solución:

Son semejantes la A y C porque tienen la misma forma.

2 De las figuras siguientes, A es la original. ¿Cuál de las siguientes es ampliación y cuál es reducción? Halla el tanto por ciento de ampliación y reducción correspondientes.



Solución:

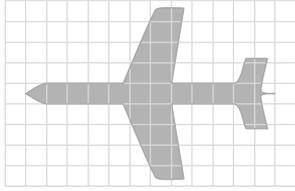
B es una reducción.

$$r = \frac{1,6}{2,2} = 0,73 = 73 \%$$

C es una ampliación.

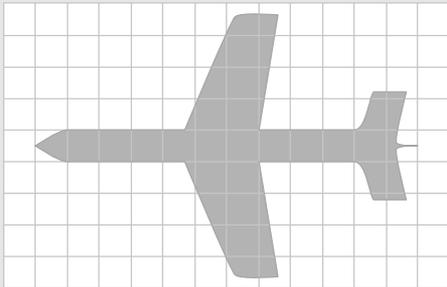
$$r = \frac{3,3}{2,2} = 1,5 = 150 \%$$

- 3** Mediante la técnica de cuadrículado, haz un avión semejante al siguiente, pero con el doble de tamaño.

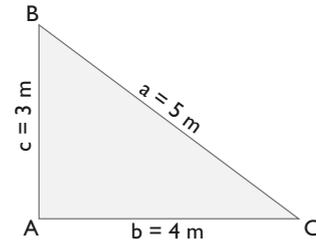


Solución:

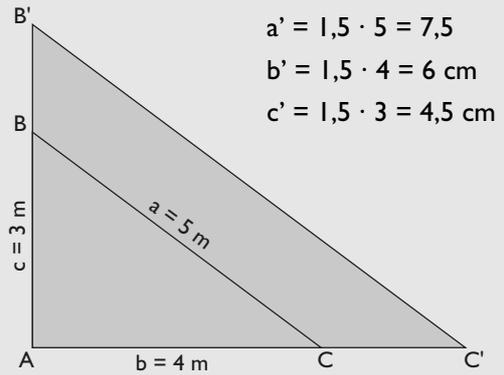
Hay que hacer un cuadrículado que tenga de lado el doble. El original mide 4 cm de largo; por tanto, el semejante, 8 cm y en cada casilla hay que hacer la misma forma.



- 4** Mediante una proyección que tenga como centro el vértice A, dibuja otro triángulo rectángulo que sea una ampliación al 150%. ¿Cuánto mide cada uno de los lados?



Solución:



2. Teorema de Thales

PIENSA Y CALCULA

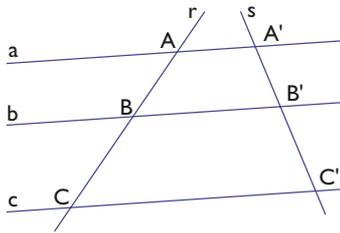
Si una persona que mide 1,75 m proyecta una sombra de 1,75 m, y en el mismo lugar, el mismo día y a la misma hora la sombra de un árbol mide 6,5 m, ¿cuánto mide la altura del árbol?

Solución:

Se observa que la altura de la persona es igual a la sombra; por tanto, lo mismo sucederá en el árbol. El árbol mide 6,5 m

Carné calculista $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} : \frac{7}{10} = \frac{1}{2}$

- 5** Sabiendo que $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm y $A'B' = 7,5$ cm, halla la longitud del segmento $B'C'$. ¿Qué teorema has aplicado?



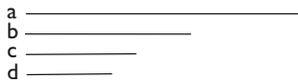
Solución:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{7,5}{9} = \frac{B'C'}{12}$$

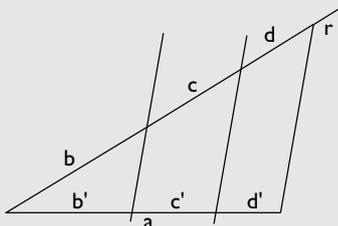
$$B'C' = 10 \text{ cm}$$

Hemos aplicado el teorema de Tales.

- 6** Divide el segmento **a** en partes proporcionales a los segmentos **b, c y d**

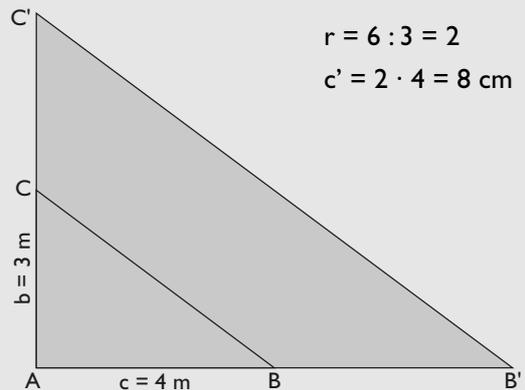


Solución:



- 7** Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 cm y 4 cm. Dibuja otro triángulo rectángulo en posición de Tales, de forma que el cateto menor mida 6 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

Solución:



- 8** Dos ángulos de un triángulo miden 55° y 65° , y dos ángulos de otro triángulo miden 55° y 60° . ¿Son semejantes ambos triángulos?

Solución:

El tercer ángulo del 1^{er} triángulo mide:

$$180^\circ - (55^\circ + 65^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Es decir, los ángulos del 1^{er} triángulo miden: 55° , 65° y 60°

El tercer ángulo del 2^o triángulo mide:

$$180^\circ - (55^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

Es decir, los ángulos del 2^o triángulo miden: 55° , 60° y 65°

Como los dos triángulos tienen sus ángulos iguales, son semejantes.

- 9** En una fotografía están Pablo y su padre. Se sabe que Pablo mide en la realidad 1,50 m. Las medidas en la fotografía son: Pablo, 6 cm, y su padre, 7,2 cm. ¿Cuánto mide su padre en la realidad?

Solución:

$$\frac{6}{150} = \frac{7,2}{x}$$

$$x = 180 \text{ cm} = 1,8 \text{ m}$$

3. Relaciones en figuras semejantes

PIENSA Y CALCULA

Un cuadrado tiene 9 m^2 de área. Calcula el área de otro cuadrado cuyo lado mide el doble.

Solución:

El lado del 1^{er} cuadrado mide 3 m, luego el lado del 2^o cuadrado medirá 6 m
Área del 2^o cuadrado: $6^2 = 36 \text{ m}^2$

Carné calculista 36,89 : 5,9 | C = 6,25; R = 0,015

APLICA LA TEORÍA

- 10** Un lado de un triángulo mide 3,5 m, y el lado correspondiente de otro triángulo semejante mide 8,75 cm. Si el perímetro del primer triángulo mide 12 m y el área mide $4,6 \text{ m}^2$:
- a) ¿cuánto mide el perímetro del triángulo semejante?
 - b) ¿cuánto mide el área del triángulo semejante?

Solución:

$$r = \frac{8,75}{3,5} = 2,5$$

a) $\frac{P'}{P} = 2,5$

$$P' = 2,5 \cdot 12 = 30 \text{ m}$$

b) $\frac{A'}{A} = 2,5^2 = 6,25$

$$A' = 6,25 \cdot 4,6 = 28,75 \text{ m}^2$$

- 11** Una arista de un ortoedro mide 2,5 m, y la arista correspondiente de otro ortoedro semejante mide 3,75 m. El área del primer ortoedro mide $71,5 \text{ m}^2$, y el volumen, $39,375 \text{ m}^3$. Halla en el ortoedro semejante:
- a) El área.
 - b) El volumen.

Solución:

$$r = \frac{3,75}{2,5} = 1,5$$

a) $\frac{A'}{A} = 1,5^2 = 2,25$

$$A' = 2,25 \cdot 71,5 = 160,875 \text{ m}^2$$

b) $\frac{V'}{V} = 1,5^3 = 3,375$

$$V' = 3,375 \cdot 39,375 = 132,89 \text{ m}^3$$

- 12** ¿Qué escala es mayor, 1:200 o 1:20 000? ¿Cuál corresponde a un mapa y cuál a un plano?

Solución:

$$1:200 = 0,005$$

$$1:20\ 000 = 0,00005$$

La 1^a es mayor.

La 1^a corresponde a un plano.

La 2^a corresponde a un mapa.

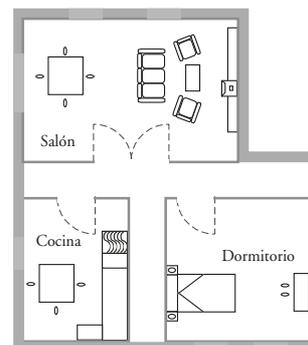
- 13** Un terreno tiene forma rectangular y mide 3 km de largo. Se dibuja un rectángulo semejante de 6 cm de longitud.
- a) Halla la escala.
 - b) ¿El objeto dibujado es un plano o un mapa?

Solución:

a) $6 \text{ cm} : 3 \text{ km} = 6 : 300\ 000 = 1:50\ 000$

b) Es un mapa.

- 14** En el plano siguiente, el salón mide $3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$. Calcula sus dimensiones y el área en la realidad.



Escala 1:200

Solución:

Largo: $3 \cdot 200 = 600 \text{ cm} = 6 \text{ m}$

Ancho: $2 \cdot 200 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$

Área: $6 \cdot 4 = 24 \text{ m}^2$

15 Midiendo con la regla en el mapa siguiente, calcula la distancia que hay en línea recta entre:

- a) Barcelona y La Coruña. b) Bilbao y Cádiz.
c) Huelva y Oviedo. d) Valencia y Madrid.



Escala 1:25 000 000

Solución:

a) $3,6 \times 25\,000\,000 = 90\,000\,000 \text{ cm} = 900 \text{ km}$

b) $3,3 \times 25\,000\,000 = 82\,500\,000 \text{ cm} = 825 \text{ km}$

c) $2,8 \times 25\,000\,000 = 70\,000\,000 \text{ cm} = 700 \text{ km}$

d) $1,2 \times 25\,000\,000 = 30\,000\,000 \text{ cm} = 300 \text{ km}$

16 Las dimensiones de una maqueta de un coche a escala 1:50 son $9 \text{ cm} \times 3,6 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$. Calcula sus dimensiones en la realidad.

Solución:

Largo: $9 \cdot 50 = 450 \text{ cm} = 4,5 \text{ m}$

Ancho: $3,6 \cdot 50 = 180 \text{ cm} = 1,8 \text{ m}$

Alto: $3 \cdot 50 = 150 \text{ cm} = 1,5 \text{ m}$

4. Teorema de Pitágoras

PIENSA Y CALCULA

Sustituye los puntos suspensivos por el signo de igualdad, =, o de desigualdad, \neq :

a) $5^2 \dots 3^2 + 4^2$

b) $6^2 + 7^2 \dots 8^2$

c) $6^2 + 8^2 \dots 10^2$

d) $13^2 \dots 5^2 + 12^2$

Solución:

a) $5^2 = 3^2 + 4^2$

b) $6^2 + 7^2 \neq 8^2$

c) $6^2 + 8^2 = 10^2$

d) $13^2 = 5^2 + 12^2$

Carné calculista

$$\left(\frac{1}{5} - 2\right) : \frac{3}{10} = -6$$

APLICA LA TEORÍA

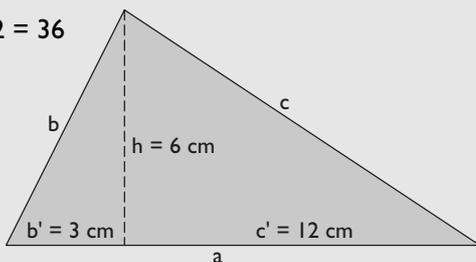
17 En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos con longitudes de 3 cm y 12 cm. Halla la longitud de dicha altura y dibuja el triángulo rectángulo.

Solución:

$h^2 = b' \cdot c'$

$h^2 = 3 \cdot 12 = 36$

$h = 6 \text{ cm}$



18 En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 5 m y la proyección del cateto **b** sobre ella mide 1,8 m. Halla:

- a) La longitud del cateto **b**
b) La longitud de la proyección del cateto **c** sobre la hipotenusa.
c) La longitud del cateto **c**
d) La longitud de la altura relativa a la hipotenusa **h**
e) Dibuja el triángulo rectángulo.

Solución:

a) $b^2 = a \cdot b'$

$b^2 = 5 \cdot 1,8 = 9 \text{ m}$

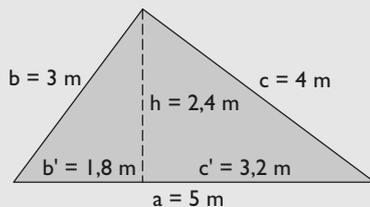
$b = 3 \text{ m}$

b) $c' = a - b'$
 $c' = 5 - 1,8 = 3,2$ m

c) $c^2 = a \cdot c'$
 $c^2 = 5 \cdot 3,2 = 16$
 $c = 4$ m

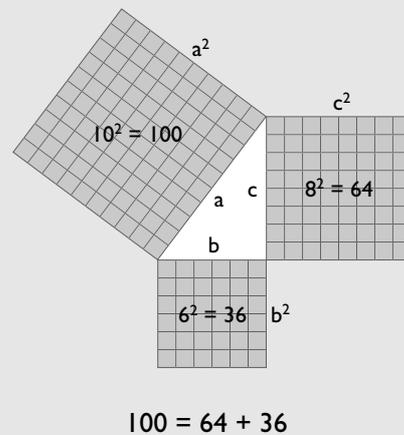
d) $h^2 = b' \cdot c'$
 $h^2 = 1,8 \cdot 3,2 = 5,76$
 $h = 2,4$ m

e) Dibujo



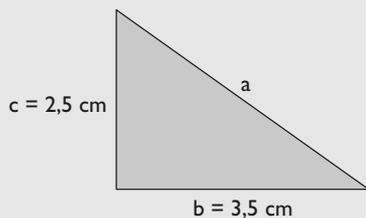
21 Dibuja la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras en el caso en que los lados midan 6 cm, 8 cm y 10 cm

Solución:



19 En un triángulo rectángulo, los catetos miden 3,5 cm y 2,5 cm. Haz el dibujo y halla la longitud de la hipotenusa. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 3,5^2 + 2,5^2$$

$$a = 4,30 \text{ cm}$$

22 ¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

- a) 2, 3 y 4
- b) 3, 4 y 5
- c) 4, 5 y 6
- d) 5, 12 y 13

Solución:

- a) $2^2 + 3^2 \neq 4^2 \Rightarrow$ No
- b) $3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow$ Sí
- c) $4^2 + 5^2 \neq 6^2 \Rightarrow$ No
- d) $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow$ Sí

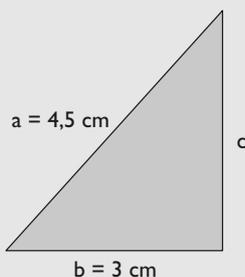
20 En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 4,5 cm, y un cateto, 3 cm. Haz el dibujo y halla la longitud del otro cateto. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

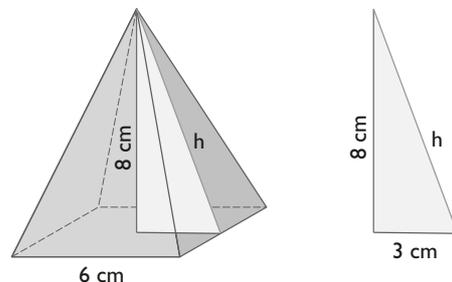
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$4,5^2 = 3^2 + c^2$$

$$c = 3,35 \text{ cm}$$



23 En una pirámide cuadrangular, la arista de la base mide 6 cm, y la altura, 8 cm. Calcula cuánto mide la apotema de dicha pirámide. Redondea el resultado a dos decimales.



Solución:

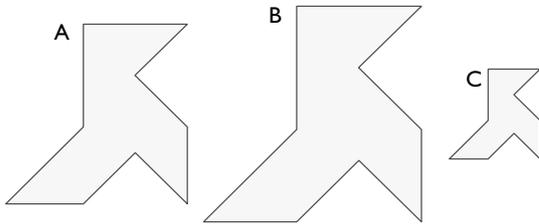
$$h^2 = 3^2 + 8^2$$

$$h = 8,54 \text{ cm}$$

Ejercicios y problemas

1. Figuras semejantes

24 De las figuras siguientes, la A es la original. ¿Cuál de las otras es ampliación y cuál es reducción? Halla el tanto por ciento de ampliación y reducción correspondientes.



Solución:

Se mide la altura de cada una de las pajaritas y se busca la razón.

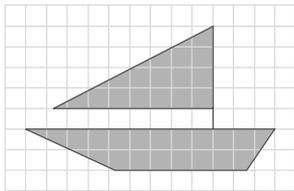
B es una ampliación.

$$r = \frac{3}{2,5} = 1,2 = 120\%$$

C es una reducción.

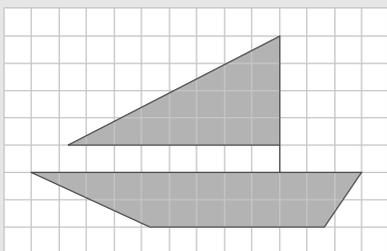
$$r = \frac{1,2}{2,5} = 0,48 = 48\%$$

25 Mediante la técnica de cuadrículado, haz un barco semejante al siguiente, pero que tenga el doble de tamaño.

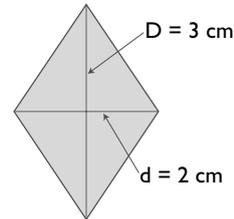


Solución:

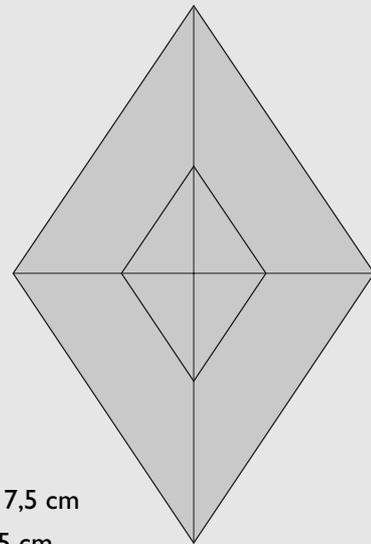
Hay que hacer una cuadrícula que tenga de lado el doble. El original tiene 4 cm de largo, por tanto, el semejante debe medir 8 cm, y en cada casilla hay que hacer la misma forma.



26 Mediante una proyección que tenga como centro el centro del rombo, dibuja otro rombo que sea una ampliación al 250%. ¿Cuánto miden las nuevas diagonales?



Solución:

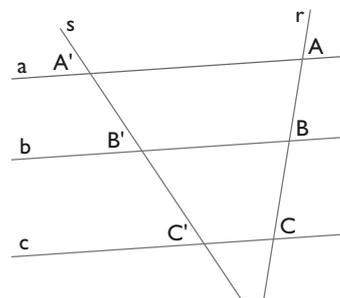


$$D' = 2,5 \cdot 3 = 7,5 \text{ cm}$$

$$d' = 2,5 \cdot 2 = 5 \text{ cm}$$

2. Teorema de Thales

27 Sabiendo que $AB = 15 \text{ cm}$, $BC = 20 \text{ cm}$ y $B'C' = 24 \text{ cm}$, halla la longitud del segmento $A'B'$. ¿Qué teorema has aplicado?



Solución:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{A'B'}{15} = \frac{24}{20}$$

$$A'B' = 18 \text{ cm}$$

Se ha aplicado el teorema de Thales.

Ejercicios y problemas

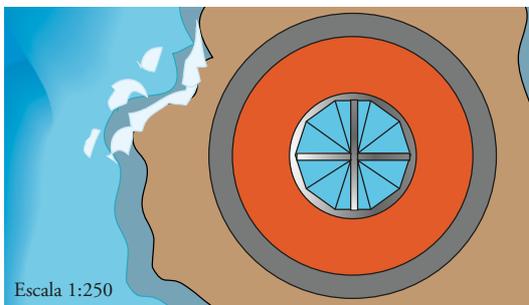
35 Un terreno tiene forma de trapezio rectángulo y la longitud de la base mayor mide 50 km. Se dibuja un trapezio semejante en el que la base mayor mide 5 cm de longitud.

- a) Halla la escala.
b) ¿El terreno dibujado es un plano o un mapa?

Solución:

- a) $5 \text{ cm} : 50 \text{ km} = 5 : 5\,000\,000 = 1 : 1\,000\,000$
b) Es un mapa.

36 El plano siguiente corresponde a la planta de un faro. Halla cuánto mide en la realidad el diámetro del faro.



Solución:

El diámetro mide 4 cm
 $D = 4 \cdot 250 = 1\,000 \text{ cm} = 10 \text{ m}$

37 Midiendo con la regla en el mapa siguiente, calcula la distancia que hay en línea recta entre:

- a) Madrid y Bruselas.
b) Madrid y Roma.
c) Londres y Roma.
d) Londres y París.



Escala 1:100 000 000

Solución:

- a) $2,4 \cdot 100\,000\,000 = 240\,000\,000 \text{ cm} = 2\,400 \text{ km}$
b) $2,3 \cdot 100\,000\,000 = 230\,000\,000 \text{ cm} = 2\,300 \text{ km}$
c) $2,5 \cdot 100\,000\,000 = 250\,000\,000 \text{ cm} = 2\,500 \text{ km}$
d) $0,6 \cdot 100\,000\,000 = 60\,000\,000 \text{ cm} = 600 \text{ km}$

38 Las dimensiones de la maqueta de un vagón de un tren a escala 1:50 son $24 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$. Calcula sus dimensiones en la realidad.

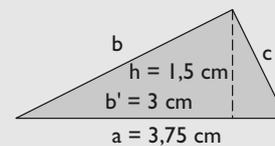
Solución:

Largo: $24 \cdot 50 = 1\,200 \text{ cm} = 12 \text{ m}$
Ancho: $5 \cdot 50 = 250 \text{ cm} = 2,5 \text{ m}$
Alto: $6 \cdot 50 = 300 \text{ cm} = 3 \text{ m}$

4. Teorema de Pitágoras

39 En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 3,75 cm, y uno de los segmentos en que la divide la altura correspondiente mide 3 cm. Halla la longitud de dicha altura y dibuja el triángulo rectángulo.

Solución:



$$h^2 = b' \cdot c'$$

$$b' = 3 \text{ cm}$$

$$c' = a - b' = 3,75 - 3 = 0,75 \text{ cm}$$

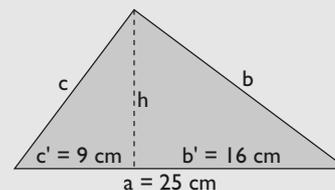
$$h^2 = 3 \cdot 0,75 = 2,25$$

$$h = 1,5 \text{ cm}$$

40 En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos que miden $b' = 16 \text{ cm}$ y $c' = 9 \text{ cm}$. Halla:

- a) el cateto **b**
b) el cateto **c**

Solución:

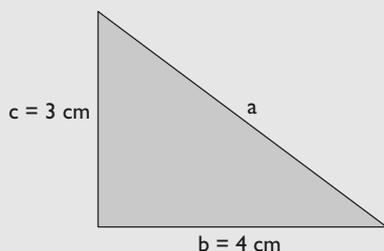


a) $b^2 = a \cdot b'$
 $a = b' + c' = 16 + 9 = 25$ cm
 $b^2 = 25 \cdot 16 = 400$
 $b = 20$ cm

b) $c^2 = a \cdot c'$
 $c^2 = 25 \cdot 9 = 225$
 $c = 15$ cm

41 En un triángulo rectángulo los catetos miden 4 cm y 3 cm. Haz el dibujo y halla la longitud de la hipotenusa.

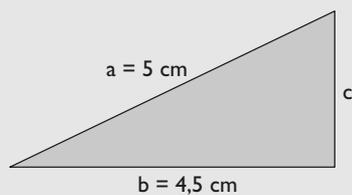
Solución:



$a^2 = b^2 + c^2$
 $a^2 = 4^2 + 3^2$
 $a = 5$ cm

42 En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 5 cm, y un cateto, 4,5 cm. Haz el dibujo y halla la longitud del otro cateto. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$a^2 = b^2 + c^2$
 $5^2 = 4,5^2 + c^2$
 $c = 2,18$ cm

43 ¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

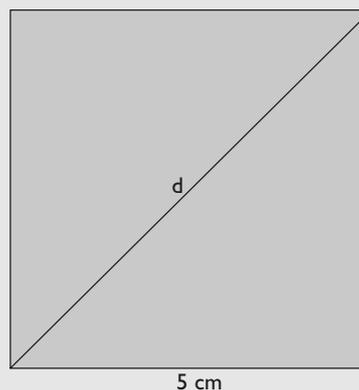
- a) 5, 7 y 9
- b) 6, 8 y 10
- c) 7, 9 y 11
- d) 10, 24 y 26

Solución:

- a) $5^2 + 7^2 \neq 9^2 \Rightarrow$ No.
- b) $6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow$ Sí.
- c) $7^2 + 9^2 \neq 11^2 \Rightarrow$ No.
- d) $10^2 + 24^2 = 26^2 \Rightarrow$ Sí.

44 Dibuja un cuadrado de 5 cm de lado y su diagonal. Halla la longitud de la diagonal, redondea el resultado a un decimal y comprueba el resultado midiendo con una regla.

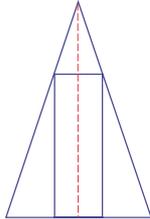
Solución:



$d^2 = 5^2 + 5^2$
 $d = 7,1$ cm

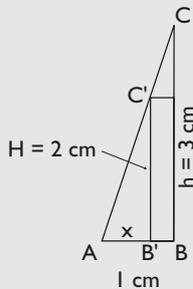
Para ampliar

- 45** Se tiene un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que la base del triángulo es $b = 2$ cm, y la altura $h = 3$ cm, y que la altura del rectángulo es $H = 2$ cm, halla cuánto mide la base del rectángulo.

Solución:



Los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes.

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

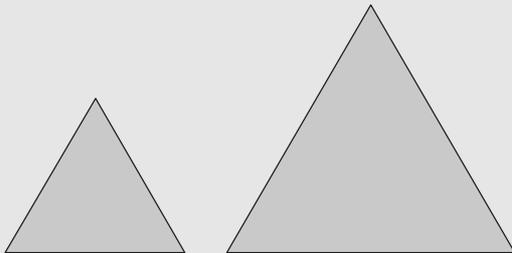
$$\frac{AB'}{1} = \frac{2}{3}$$

$$AB' = 0,67 \text{ cm}$$

$$\text{Base del rectángulo: } 2(1 - 0,67) = 0,66 \text{ cm}$$

- 46** Dibuja dos triángulos equiláteros distintos. Razona si son semejantes.

Solución:



Sí, son semejantes, porque los ángulos de uno son iguales a los ángulos del otro.

- 47** Los lados de un triángulo miden $a = 7$ cm, $b = 8,5$ cm y $c = 12$ cm. Halla la medida de los lados a' , b' y c' de un triángulo semejante en el que $r = 1,75$

Solución:

$$a' = 1,75 \cdot a$$

$$a' = 1,75 \cdot 7 = 12,25 \text{ cm}$$

$$b' = 1,75 \cdot b$$

$$b' = 1,75 \cdot 8,5 = 14,875 \text{ cm}$$

$$c' = 1,75 \cdot c$$

$$c' = 1,75 \cdot 12 = 21 \text{ cm}$$

- 48** Un palo de 1 m de longitud colocado verticalmente proyecta una sombra de 1 m. Sabiendo que el mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar la sombra de la torre Eiffel de París mide 320 m, calcula mentalmente lo que mide de alto la torre Eiffel.

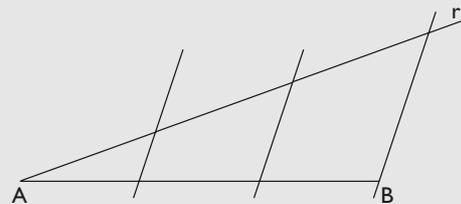
Solución:

La torre Eiffel mide lo mismo que su sombra, es decir, 320 m

- 49** Dibuja un segmento de 5 cm y divídelo en tres partes iguales.

Solución:

Sobre una recta oblicua r se toman tres medidas iguales.



- 50** El radio de una circunferencia mide x metros, y el radio de otra circunferencia es el triple. Calcula cuántas veces es mayor la longitud de la segunda circunferencia y el área del círculo correspondiente.

Solución:

$$\text{Longitud: } \frac{L'}{L} = 3$$

$$L' = 3L$$

La longitud es el triple.

Área:

$$\frac{A'}{A} = 3^2 = 9$$

$$A' = 9A$$

El área es nueve veces mayor.

- 51** La arista de un cubo mide x metros, y la arista de otro cubo mide $5x$ metros. Calcula cuántas veces son mayores el área y el volumen del segundo cubo respecto al primero.

Solución:

Área:

$$\frac{A'}{A} = 5^2 = 25$$

$$A' = 25A$$

El área es 25 veces mayor.

$$\frac{V'}{V} = 5^3 = 125$$

$$V' = 125V$$

El volumen es 125 veces mayor.

- 52** De los siguientes triángulos, ¿cuáles son rectángulos?

- a) $a = 1$ cm, $b = 1,5$ cm, $c = 2$ cm
- b) $a = 1,5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 2,5$ cm
- c) $a = 2$ cm, $b = 2,5$ cm, $c = 3$ cm
- d) $a = 2,5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 6,5$ cm

Solución:

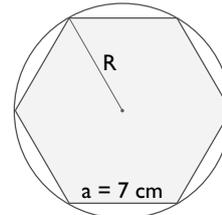
a) $1^2 + 1,5^2 \neq 2^2 \Rightarrow$ No.

b) $1,5^2 + 2^2 = 2,5^2 \Rightarrow$ Sí.

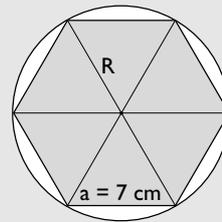
c) $2^2 + 2,5^2 \neq 3^2 \Rightarrow$ No.

d) $2,5^2 + 6^2 \neq 6,5^2 \Rightarrow$ Sí.

- 53** Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente hexágono:



Solución:



En el hexágono coinciden la longitud del lado y del radio de la circunferencia circunscrita; por tanto, $R = 7$ m

Problemas

- 54** Mediante la técnica de cuadrículado dibuja un perro semejante al siguiente, pero que tenga el doble de tamaño.

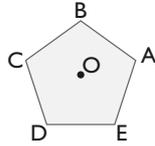


Solución:

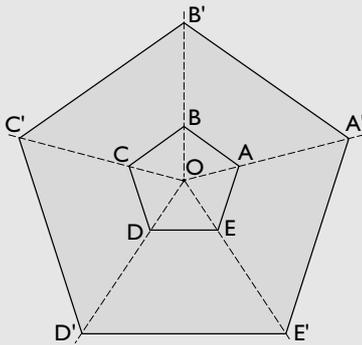


Ejercicios y problemas

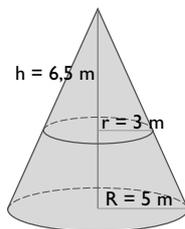
- 55** Dibuja un pentágono semejante al siguiente mediante una proyección que tenga como centro el centro de dicho pentágono, y cuya razón de semejanza sea 3



Solución:



- 56** Dado el siguiente dibujo, calcula la medida de la altura H del cono grande.



Solución:

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{H}{6,5}$$

$$H = 10,83 \text{ m}$$

- 57** Los lados de un triángulo miden $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$ y $c = 7 \text{ cm}$. Sabiendo que en otro triángulo semejante $a' = 6 \text{ cm}$, halla la medida de los lados b' y c'

Solución:

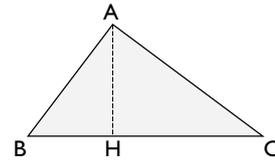
Razón de semejanza: $r = \frac{a'}{a}$

$$r = \frac{6}{4} = 1,5$$

$$b' = 5 \cdot 1,5 = 7,5 \text{ cm}$$

$$c' = 7 \cdot 1,5 = 10,5 \text{ cm}$$

- 58** En el siguiente dibujo, ¿cuántos triángulos semejantes hay? Nómbralos por las letras de los vértices y escribe los ángulos que son iguales.



Solución:

Hay tres triángulos semejantes: ABC, ABH y AHC

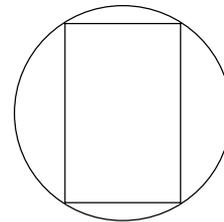
Los ángulos iguales son:

$$\angle BAC = \angle AHB = \angle AHC = 90^\circ$$

$$\angle ABC = \angle ABH = \angle CAH$$

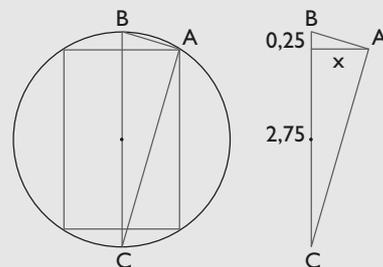
$$\angle ACB = \angle ACH = \angle BAH$$

- 59** Se tiene un rectángulo inscrito en una circunferencia, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el diámetro de la circunferencia es $R = 3 \text{ cm}$ y que la altura del rectángulo es $h = 2,5 \text{ cm}$, halla cuánto mide la base del rectángulo.

Solución:



El triángulo dibujado es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: $180^\circ/2 = 90^\circ$

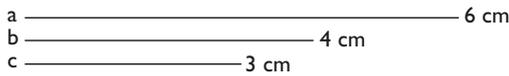
Aplicando el teorema de la altura:

$$x^2 = 2,75 \cdot 0,25$$

$$x = 0,83 \text{ cm}$$

$$\text{Base del rectángulo: } 2x = 2 \cdot 0,83 = 1,66 \text{ cm}$$

60 Dados los segmentos **a**, **b** y **c**



resuelve los siguientes apartados:

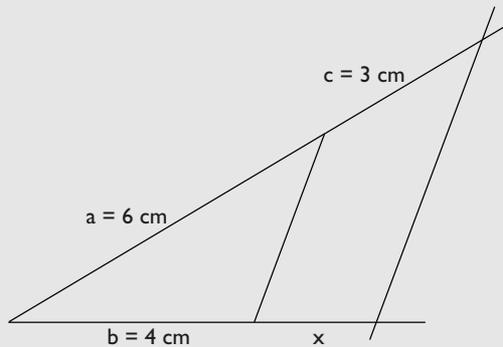
- Halla el cuarto proporcional de las medidas 6 cm, 4 cm y 3 cm
- Halla el cuarto proporcional geoméricamente.
- Mide con la regla el segmento cuarto proporcional y comprueba que su longitud es el valor obtenido en el apartado a)

Solución:

$$\text{a) } \frac{6}{4} = \frac{3}{x}$$

$$x = 2 \text{ cm}$$

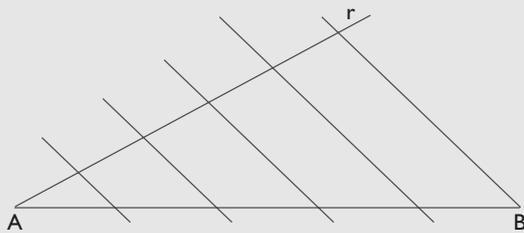
b)



c) Efectivamente, el segmento **x** mide 2 cm

61 Dibuja un segmento de 7 cm y divídelo en cinco partes iguales.

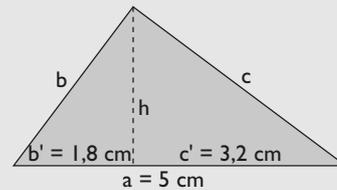
Solución:



62 En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos que miden $b' = 1,8 \text{ cm}$ y $c' = 3,2 \text{ cm}$. Halla:

- La longitud de la hipotenusa **a**
- La longitud de la altura relativa a la hipotenusa.
- El cateto **b**
- El cateto **c**
- El área de dicho triángulo rectángulo.

Solución:



- $a = b' + c'$
 $a = 1,8 + 3,2 = 5 \text{ cm}$
- $h^2 = b' \cdot c'$
 $h^2 = 1,8 \cdot 3,2 = 5,76$
 $h = 2,4 \text{ cm}$
- $b^2 = a \cdot b'$
 $b^2 = 5 \cdot 1,8 = 9$
 $b = 3 \text{ cm}$
- $c^2 = a \cdot c'$
 $c^2 = 5 \cdot 3,2 = 16$
 $c = 4 \text{ cm}$
- Área = $\frac{1}{2} b \cdot c$
Área = $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ cm}^2$

63 Un rectángulo mide 40 m de perímetro y su área mide 100 m^2 . Halla el área de otro semejante en el que el perímetro mide 80 m

Solución:

$$r = \frac{P'}{P}$$

$$r = \frac{80}{40} = 2$$

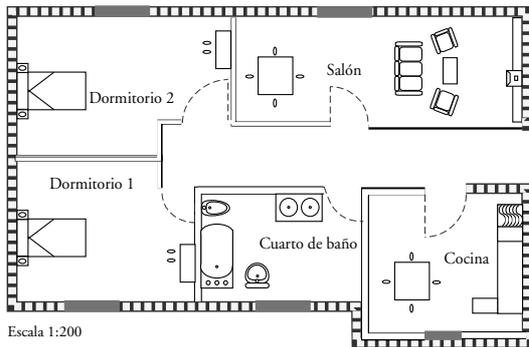
$$\frac{A'}{A} = r^2 = 4$$

$$A' = 4 \cdot A$$

$$A' = 4 \cdot 100 = 400 \text{ m}^2$$

Ejercicios y problemas

64 En el plano siguiente:



calcula la superficie:

- a) Del salón.
- b) De la cocina.
- c) Del cuarto de baño.
- d) Del dormitorio I
- e) Del dormitorio 2

Solución:

- a) $4 \cdot 200 = 800 \text{ cm} = 8 \text{ m}$
 $1,5 \cdot 200 = 300 \text{ cm} = 3 \text{ m}$
 $\text{Área} = 8 \cdot 3 = 24 \text{ m}^2$
- b) $2 \cdot 200 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$
 $2 \cdot 200 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$
 $\text{Área} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ m}^2$
- c) $2 \cdot 200 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$
 $1,5 \cdot 200 = 300 \text{ cm} = 3 \text{ m}$
 $\text{Área} = 4 \cdot 3 = 12 \text{ m}^2$
- d) $2,5 \cdot 200 = 500 \text{ cm} = 5 \text{ m}$
 $2 \cdot 200 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$
 $\text{Área} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ m}^2$
- e) $3 \cdot 200 = 600 \text{ cm} = 6 \text{ m}$
 $2 \cdot 200 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$
 $\text{Área} = 6 \cdot 4 = 24 \text{ m}^2$

65 En el siguiente mapa de Andalucía:



calcula la distancia que hay en línea recta entre:

- a) Sevilla y Almería.
- b) Jaén y Huelva.
- c) Córdoba y Cádiz.
- d) Málaga y Granada.

Solución:

- a) $4,7 \cdot 8\,000\,000 = 37\,600\,000 \text{ cm} = 376 \text{ km}$
- b) $4,2 \cdot 8\,000\,000 = 33\,600\,000 \text{ cm} = 336 \text{ km}$
- c) $3 \cdot 8\,000\,000 = 24\,000\,000 \text{ cm} = 240 \text{ km}$
- d) $1,3 \cdot 8\,000\,000 = 10\,400\,000 \text{ cm} = 104 \text{ km}$

66 Se quiere hacer la maqueta de una urbanización en la que los 500 m de longitud de una calle equivalgan a 2 m en la maqueta.

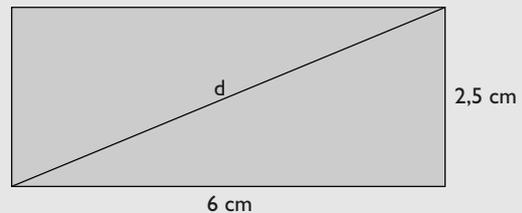
- a) Calcula la escala de la maqueta.
- b) Si un edificio mide 12 m de alto en la realidad, ¿cuánto medirá en la maqueta?
- c) Si una calle mide en la maqueta 3 cm de ancho, ¿cuánto medirá en la realidad?

Solución:

- a) Escala: $2:500 = 1:250$
- b) Altura: $12 \text{ m} : 250 = 0,048 \text{ m} = 4,8 \text{ cm}$
- c) Ancho: $3 \text{ cm} \cdot 250 = 750 \text{ cm} = 7,5 \text{ m}$

67 Calcula la diagonal de un rectángulo en el que los lados miden 6 cm y 2,5 cm

Solución:



$$d^2 = 6^2 + 2,5^2$$

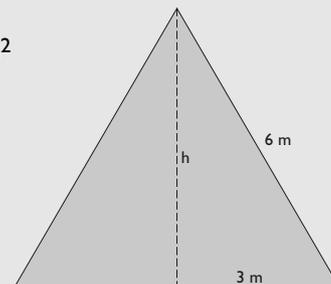
$$d = 6,5 \text{ cm}$$

68 Halla la altura de un triángulo equilátero de 6 m de lado. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

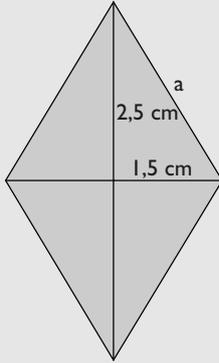
$$h^2 + 3^2 = 6^2$$

$$h = 5,20 \text{ m}$$



- 69** Halla la longitud del lado de un rombo sabiendo que las diagonales miden 3 cm y 5 cm. Redondea el resultado a dos decimales.

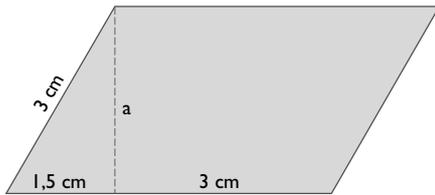
Solución:



$$a^2 = 1,5^2 + 2,5^2$$

$$a = 2,92 \text{ cm}$$

- 70** Halla el área del siguiente romboide:



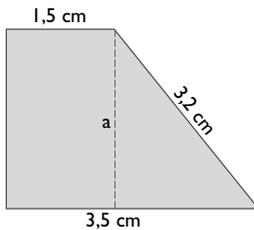
Solución:

$$a^2 + 1,5^2 = 3^2$$

$$a = 2,60 \text{ cm}$$

$$\text{Área: } 4,5 \cdot 2,60 = 11,7 \text{ cm}^2$$

- 71** Halla el área del siguiente trapecio rectángulo:



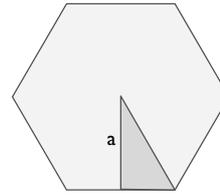
Solución:

$$a^2 + 2^2 = 3,2^2$$

$$a = 2,50 \text{ cm}$$

$$\text{Área: } \frac{3,5 + 1,5}{2} \cdot 2,50 = 6,25 \text{ cm}^2$$

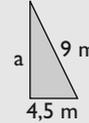
- 72** Halla la apotema de un hexágono regular de 9 m de lado. Redondea el resultado a dos decimales.



Solución:

$$a^2 + 4,5^2 = 9^2$$

$$a = 7,79 \text{ m}$$



- 73** Una escalera de bomberos que mide 20 m se apoya sobre la fachada de un edificio. La base de la escalera está separada 5 m de la pared. ¿A qué altura llegará?



Solución:

$$a^2 + 5^2 = 20^2$$

$$a = 19,36 \text{ m}$$

- 74** Una torre de telefonía móvil proyecta una sombra de 23 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, Ana, que mide 1,72 m, proyecta una sombra de 2,10 m. Calcula la altura de la antena de telefonía móvil.

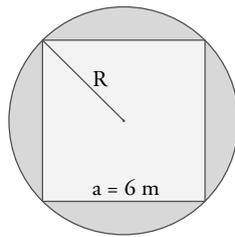
Solución:

$$\frac{2,10}{1,72} = \frac{23}{x}$$

$$x = 18,84 \text{ m}$$

- 75** Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente cuadrado:

Ejercicios y problemas

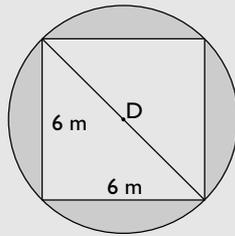


Solución:

$$D^2 = 6^2 + 6^2$$

$$D = 8,49 \text{ m}$$

$$R = D/2 = 4,245 \text{ m}$$

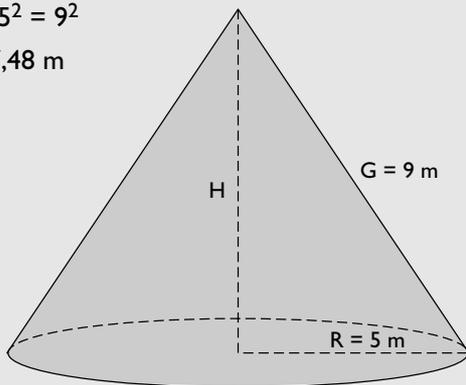


- 76** Halla la altura de un cono recto en el que el radio de la base mide 5 m, y la generatriz, 9 m. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

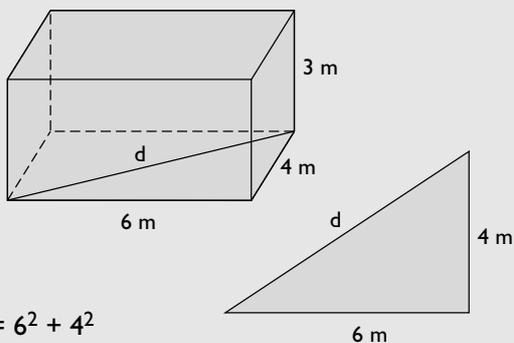
$$H^2 + 5^2 = 9^2$$

$$H = 7,48 \text{ m}$$



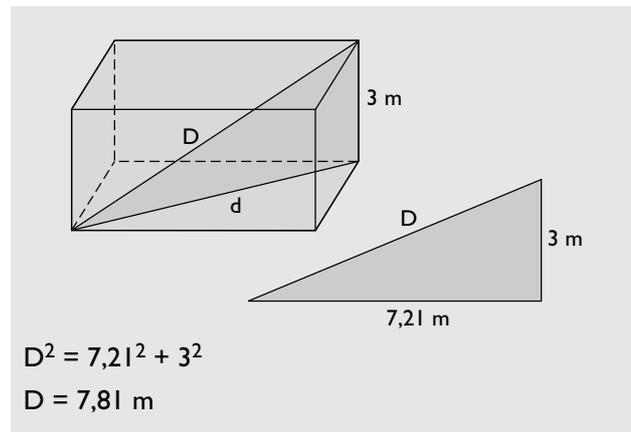
- 77** Calcula la diagonal de una habitación cuyas dimensiones son 6 m × 4 m × 3 m

Solución:



$$d^2 = 6^2 + 4^2$$

$$d = 7,21 \text{ m}$$

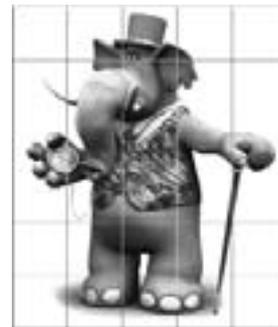


$$D^2 = 7,21^2 + 3^2$$

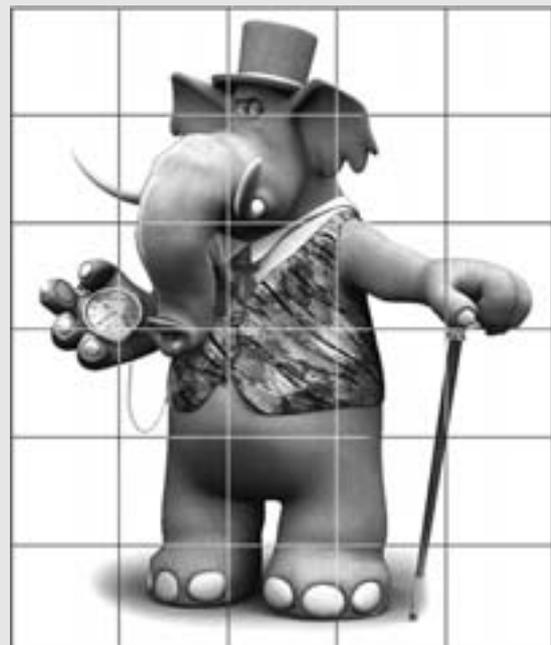
$$D = 7,81 \text{ m}$$

Para profundizar

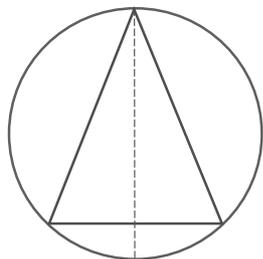
- 78** Mediante la técnica de cuadrículado dibuja un elefante semejante al siguiente, pero que tenga el doble de tamaño.



Solución:

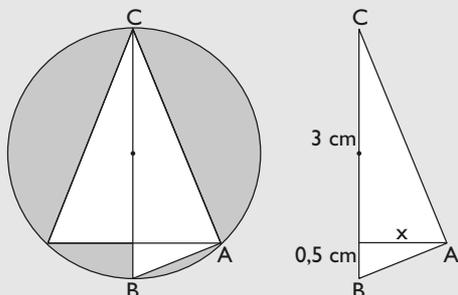


- 79** Se tiene un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el diámetro de la circunferencia es $D = 3,5$ cm y que la altura del triángulo es $h = 3$ cm, halla cuánto mide la base del triángulo.

Solución:



El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: $180^\circ/2 = 90^\circ$

Aplicando el teorema de la altura:

$$x^2 = 3 \cdot 0,5$$

$$x = 1,22 \text{ cm}$$

$$\text{Base del triángulo: } 2x = 2 \cdot 1,22 = 2,44 \text{ cm}$$

- 80** Una esfera cuyo radio es $r = x$ m tiene un área de $314,16 \text{ m}^2$ y un volumen de $523,60 \text{ m}^3$. Halla el área y el volumen de otra esfera cuyo radio es $R = 2,5x$

Solución:

La razón es 2,5

$$\frac{A'}{A} = 2,5^2 = 6,25$$

$$A' = 6,25 \cdot 314,16 = 1963,5 \text{ m}^2$$

$$\frac{V'}{V} = 2,5^3 = 15,625$$

$$V' = 15,625 \cdot 523,60 = 8181,25 \text{ m}^3$$

- 81** Halla el lado de un cuadrado de 6 m de diagonal. Redondea el resultado a dos decimales.

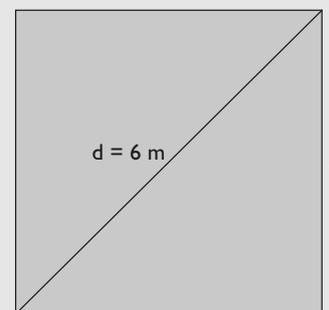
Solución:

$$a^2 + a^2 = 6^2$$

$$2a^2 = 36$$

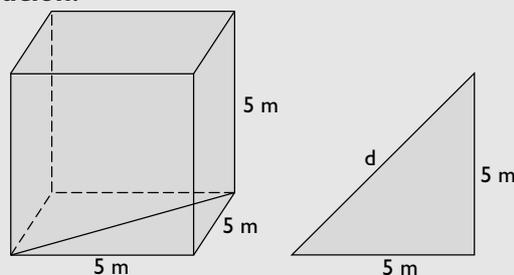
$$a^2 = 18$$

$$a = 4,24 \text{ m}$$

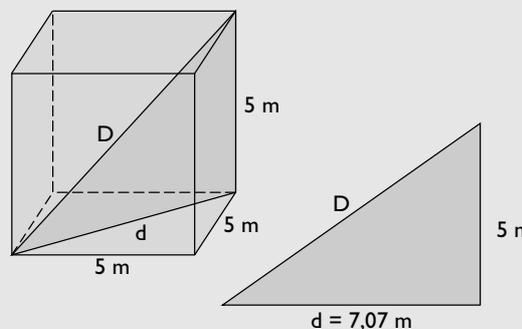


- 82** Halla la diagonal de un cubo de 5 m de arista. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$$d^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow d = 7,07 \text{ m}$$



$$D^2 = 7,07^2 + 5^2$$

$$D = 8,66 \text{ m}$$

- 83** Un faro proyecta una sombra de 53 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un árbol de 1,5 m proyecta una sombra de 2,05 m. Calcula la altura del faro.

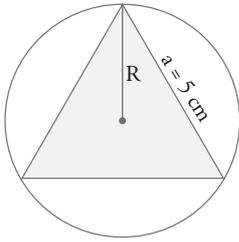
Solución:

$$\frac{2,05}{1,5} = \frac{53}{x}$$

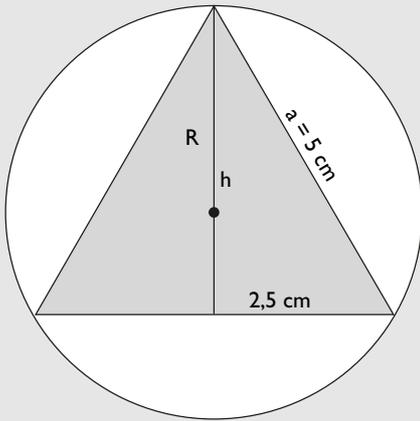
$$x = 38,78 \text{ m}$$

Ejercicios y problemas

- 84** Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente triángulo equilátero:



Solución:



$$h^2 + 2,5^2 = 5^2$$

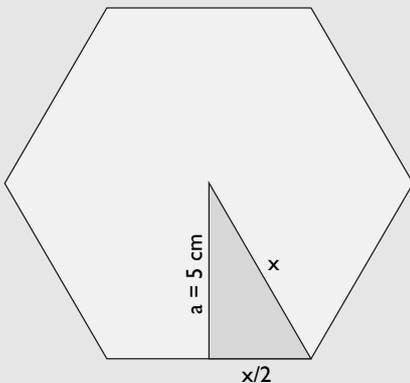
$$h = 4,33 \text{ cm}$$

El radio es los $\frac{2}{3}$ de la altura por una propiedad de las medianas de un triángulo.

$$R = \frac{2}{3} \cdot 4,33 = 2,89 \text{ cm}$$

- 85** La apotema de un hexágono regular mide 5 cm. Calcula cuánto mide el lado.

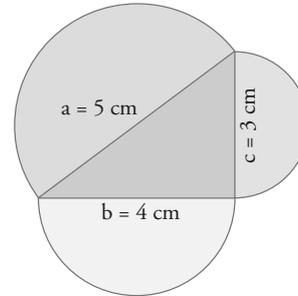
Solución:



$$x^2 = (x/2)^2 + 5^2$$

$$x = 5,77 \text{ cm}$$

- 86** Un triángulo rectángulo tiene los siguientes lados: $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ y $c = 3 \text{ cm}$. Cambia el cuadrado por un semicírculo en la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras, calcula el área de los tres semicírculos y comprueba si se sigue verificando la interpretación geométrica.



Solución:

Área del semicírculo de radio $a = 5 \text{ cm}$

$$A_1 = \pi \cdot 5^2/2 = 39,27 \text{ cm}^2$$

Área del semicírculo de radio $b = 4 \text{ cm}$

$$A_2 = \pi \cdot 4^2/2 = 25,13 \text{ cm}^2$$

Área del semicírculo de radio $c = 3 \text{ cm}$

$$A_3 = \pi \cdot 3^2/2 = 14,14 \text{ cm}^2$$

$$A_2 + A_3 = 25,13 + 14,14 = 39,27 \text{ cm}^2$$

Vemos que se sigue verificando la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras.

Aplica tus competencias

- 87** Un edificio proyecta una sombra de 25 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un palo vertical de 2 m proyecta una sombra de 2,5 m. Calcula la altura del edificio.



Solución:

$$\frac{2,5}{2} = \frac{25}{x}$$

$$x = 20 \text{ m}$$

- 88** Un árbol proyecta una sombra de 29,75 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un palo vertical de 1,5 m proyecta una sombra de 2,15 m. Calcula la altura del árbol.

Solución:

$$\frac{2,15}{1,5} = \frac{29,75}{x}$$

$$x = 20,76 \text{ m}$$

- 89** Una antena proyecta una sombra de 43 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un palo vertical de 1,75 m proyecta una sombra de 2,5 m. Calcula la altura de la antena.

Solución:

$$\frac{2,5}{1,75} = \frac{43}{x}$$

$$x = 30,1 \text{ m}$$

- 90** Un acantilado proyecta una sombra de 35 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un palo vertical de 1,25 m proyecta una sombra de 1,5 m. Calcula la altura del acantilado.

Solución:

$$\frac{1,5}{1,25} = \frac{35}{x}$$

$$x = 29,17 \text{ m}$$

Comprueba lo que sabes

- 1** Escribe el enunciado del teorema de Pitágoras. Pon un ejemplo de una terna pitagórica.

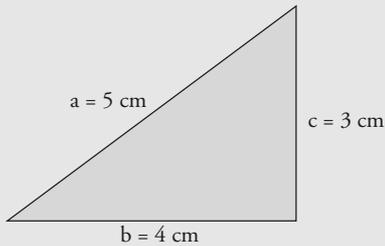
Solución:

El **teorema de Pitágoras** dice: en un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ejemplo

$a = 5$ cm, $b = 4$ cm y $c = 3$ cm es una terna pitagórica.

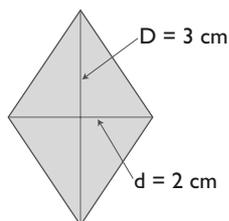


$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 5^2 = 25$$

$$b^2 + c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

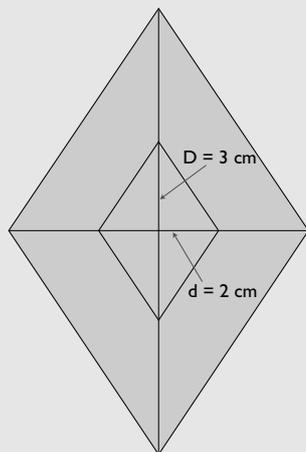
- 2** Mediante una proyección que tenga como centro el centro del rombo, dibuja otro rombo que sea una ampliación al 250%. ¿Cuánto miden las nuevas diagonales?



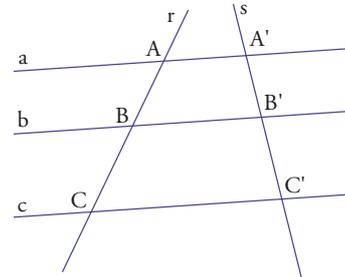
Solución:

$$D' = 2,5 \cdot 3 = 7,5 \text{ cm}$$

$$d' = 2,5 \cdot 2 = 5 \text{ cm}$$



- 3** Sabiendo que $AB = 18$ cm, $BC = 24$ cm y $A'B' = 15$ cm, halla la longitud del segmento $B'C'$. ¿Qué teorema has aplicado?



Solución:

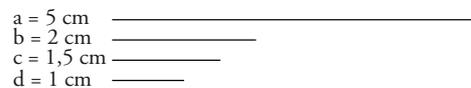
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$\frac{15}{18} = \frac{B'C'}{24}$$

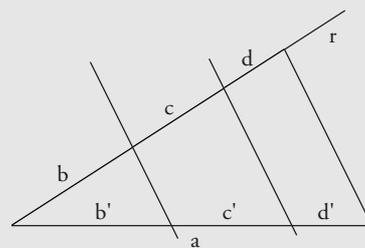
$$B'C' = 15 \cdot 24 : 18 = 20 \text{ cm}$$

Se ha aplicado el teorema de Thales.

- 4** Divide el segmento a en partes proporcionales a los segmentos b , c y d



Solución:



- 5** En una casa, un pasillo mide 6 m, y en su plano, 2,4 cm. Halla la escala.

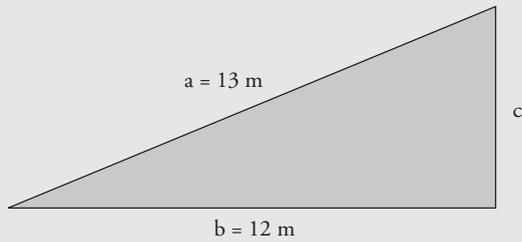
Solución:

Escala:

$$2,4 \text{ cm} : 6 \text{ m} = 2,4 \text{ cm} : 600 \text{ cm} = 1:250$$

- 6** En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 13 m, y un cateto, 12 m. Halla cuánto mide el otro cateto.

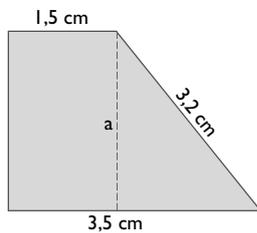
Solución:



$$12^2 + c^2 = 13^2$$

$$c = 5 \text{ m}$$

7 Halla el área del siguiente trapecio rectángulo:



Solución:

$$a^2 + 2^2 = 3,2^2$$

$$a = 2,50 \text{ cm}$$

$$\text{Área: } \frac{3,5 + 1,5}{2} \cdot 2,50 = 6,25 \text{ cm}^2$$

8 Un faro proyecta una sombra de 55 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un palo vertical de 1,5 m proyecta una sombra de 1,75 m. Calcula la altura del faro.

Solución:

$$\frac{1,75}{1,5} = \frac{55}{x}$$

$$x = 1,5 \cdot 55 : 1,75 = 47,14 \text{ m}$$

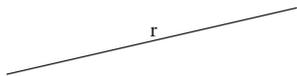
Paso a paso

91 Dibuja un punto **A**

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

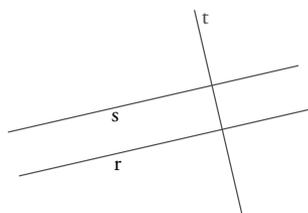
92 Dibuja una recta **r**



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

93 Dibuja dos rectas paralelas, **r** y **s**, y una perpendicular, **t**



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

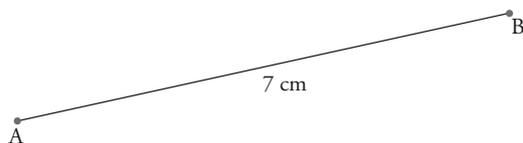
94 Dibuja una semirrecta horizontal de origen **O**



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

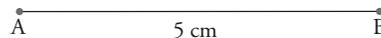
95 Dibuja un segmento **AB** y mide su longitud.



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

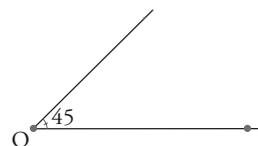
96 Dibuja un segmento **AB** de 5 cm



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

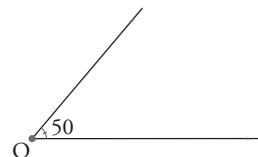
97 Dibuja un ángulo, márcalo y mídelo.



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

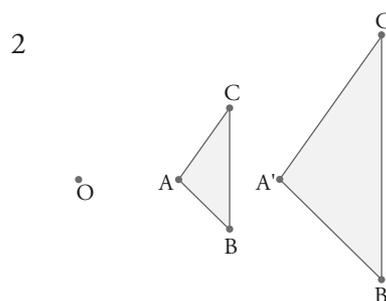
98 Dibuja un ángulo de 50°



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

99 Dibuja un triángulo semejante a **ABC** de razón de semejanza **2**



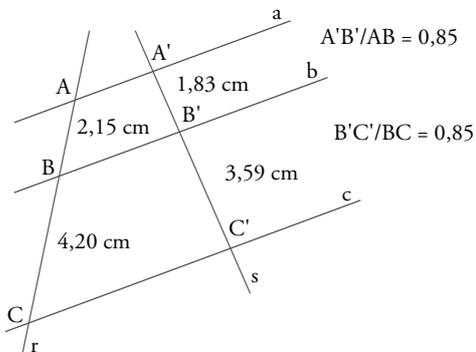
Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

100 Internet. Abre: www.editorial-bruno.es y elige Matemáticas, curso y tema.

Practica

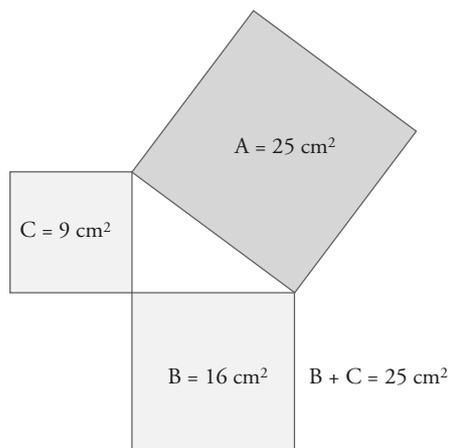
101 Comprueba el teorema de Tales.



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

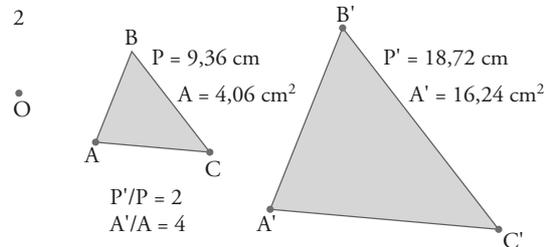
102 Comprueba el teorema de Pitágoras.



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

103 Dibuja dos triángulos semejantes, calcula las razones entre sus perímetros y entre sus áreas y comprueba que la segunda razón es el cuadrado de la primera.



Solución:

- Edita el número 2
- Dibuja el punto O
- Dibuja el triángulo ABC
- Rellena el triángulo ABC
- Elige **Transformar/ Homotecia**, haz *click* en el número 2, en el triángulo y en el centro O de homotecia.
- Elige **Ver/ Etiqueta**, haz *click* en el punto A' y escribe la letra A'; haz lo mismo con B' y C'



1. Elementos básicos en el espacio

PIENSA Y CALCULA

Dibuja a mano alzada un punto, una recta, un romboide y un cubo.

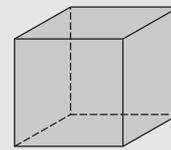
Solución:

Punto

Recta



Romboide



Cubo

Carné calculista 489,6 : 7,5 | C = 65,28; R = 0

APLICA LA TEORÍA

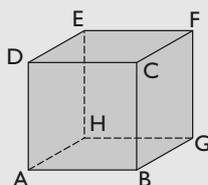
- 1** Escribe tres ejemplos reales que representen intuitivamente una recta.

Solución:

- Un hilo de coser completamente estirado.
- Una cuerda completamente estirada.
- Un cable completamente estirado.

- 2** Dibuja un cubo, ponle letras a los vértices y representa cada una de las caras por las cuatro letras de sus vértices.

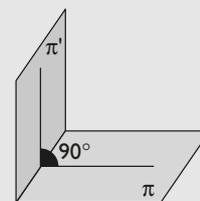
Solución:



ABCD, ADEH, EFGH, BCFG, ABGH, CDEF

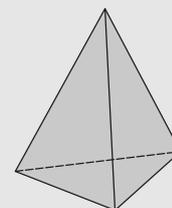
- 3** Dibuja un ángulo diedro recto.

Solución:



- 4** Dibuja un poliedro de cuatro caras y en el que todos los ángulos poliedros estén formados por tres caras.

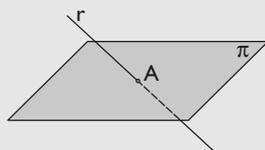
Solución:



Es un tetraedro.

5 Dibuja una recta secante a un plano. ¿Qué tienen en común la recta y el plano?

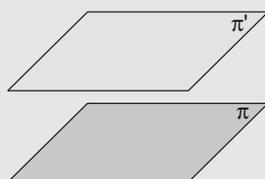
Solución:



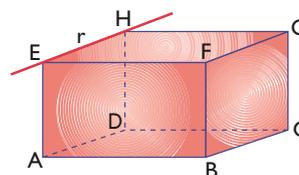
Tienen en común un punto, A

6 Dibuja dos planos paralelos.

Solución:



7 Dada la recta r generada por la arista EH del ortoedro:



- ¿qué aristas cortan a la recta r ?
- ¿qué aristas son paralelas a la recta r ?
- ¿qué aristas se cruzan con la recta r ?
- ¿qué caras prolongadas contienen a la recta r ?
- ¿qué caras prolongadas son paralelas a la recta r ?
- ¿qué caras prolongadas son secantes con la recta r ?
- ¿cuánto mide cada uno de los ángulos diedros?

Solución:

- | | |
|--------------------|----------------|
| a) AE, DH, EF y HG | b) AD, BC y FG |
| c) AB, DC, BF y CG | d) ADHE y EFGH |
| e) ABCD y BCGF | f) ABFE y CDHG |
| g) 90° | |

2. Poliedros

A partir de los recortables que venden en las papelerías, construye los poliedros regulares.

Solución:

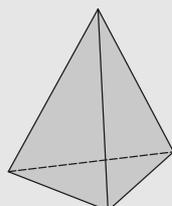
Consiste en recortar, pegar y observar cuántas caras tiene cada uno y qué son.

Carné calculista

$$\frac{10}{9} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$$

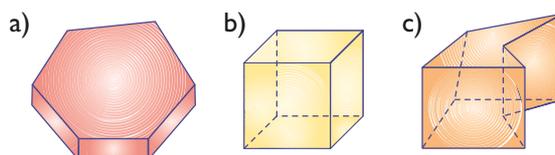
8 Dibuja un tetraedro y halla el orden de cada vértice.

Solución:



Cada vértice es de orden 3

9 Clasifica los siguientes poliedros:

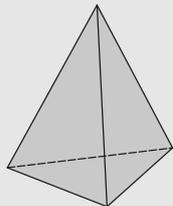


Solución:

- Poliedro irregular y convexo.
- Poliedro regular y convexo.
- Poliedro irregular y cóncavo.

10 Dibuja un tetraedro y comprueba el teorema de Euler en él.

Solución:

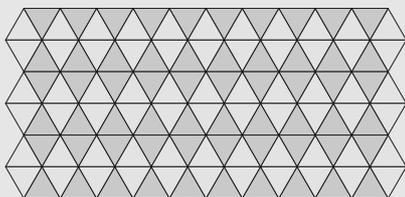


$$C + V = 4 + 4 = 8$$

$$A + 2 = 6 + 2 = 8$$

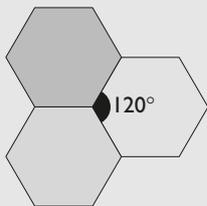
11 Dibuja un mosaico regular formado por triángulos equiláteros.

Solución:



12 ¿Se puede construir un poliedro regular con caras hexagonales? Justifica la respuesta.

Solución:



No se puede.

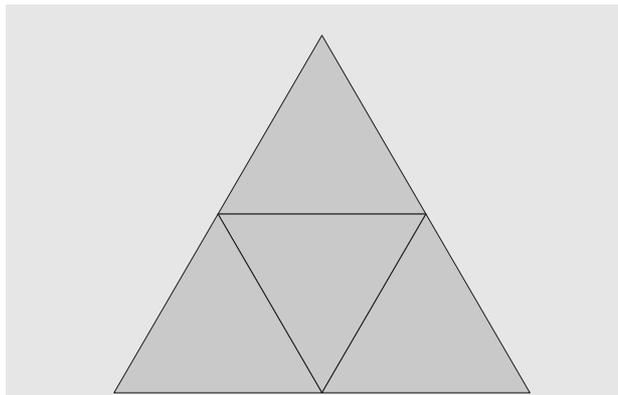
Si unimos tres caras, el ángulo formado es:

$$3 \times 60^\circ = 180^\circ \text{ y se obtiene un mosaico.}$$

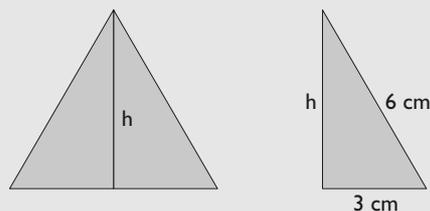
13 Dibuja el desarrollo plano de un tetraedro de 6 cm de arista. Describe el desarrollo y calcula su área.

Solución:

El desarrollo está formado por 4 triángulos equiláteros iguales.



Para calcular el área hay que hallar previamente la altura de uno de los triángulos equiláteros.



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$h^2 + 3^2 = 6^2$$

$$h^2 + 9 = 36$$

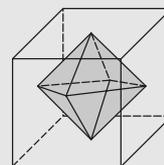
$$h^2 = 27$$

$$h = \sqrt{27} = 5,20$$

$$A = 4 \cdot \frac{6 \cdot 5,20}{2} = 62,4 \text{ cm}^2$$

14 Dibuja el poliedro que se obtiene al unir los puntos centrales de las caras de un cubo. ¿Qué poliedro se obtiene? ¿Qué relación hay entre las caras y los vértices de ambos poliedros?

Solución:



Se obtiene un octaedro.

Cubo	C	6	8	C	Octaedro
	V	8	6	V	

Que el número de caras de uno es igual al número de vértices del otro, y por ello son duales.

3. Prismas y cilindros

PIENSA Y CALCULA

A partir de los recortables que venden en la papelería, construye todos los prismas y cilindros.

Solución:

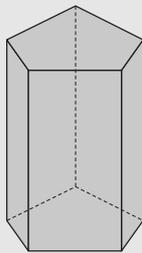
Consiste en recortar, pegar y observar cuántas caras tiene cada uno y qué son.

Carné calculista 305,26 : 8,5 | C = 35,91; R = 0,025

APLICA LA TEORÍA

15 Dibuja un prisma pentagonal y comprueba el teorema de Euler en él.

Solución:

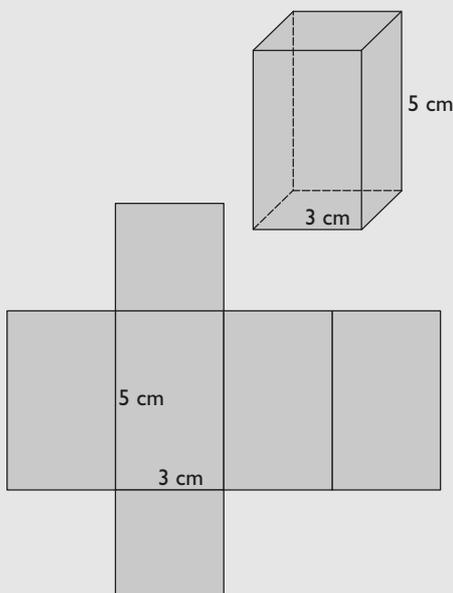


$$C + V = 7 + 10 = 17$$

$$A + 2 = 15 + 2 = 17$$

16 Dibuja el desarrollo plano de un prisma recto cuadrangular en el que la arista de la base mide 3 cm, y la altura, 5 cm. Describe el desarrollo y calcula su área.

Solución:



El desarrollo plano está formado por dos cuadrados iguales que son las bases y cuatro rectángulos iguales.

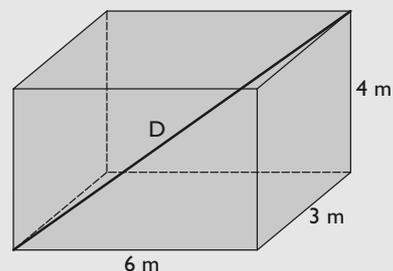
$$\text{Área de las bases: } 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área lateral: } 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total: } 18 + 60 = 78 \text{ cm}^2$$

17 Dibuja un ortoedro cuyas dimensiones sean 6 m, 3 m y 4 m, y dibuja una diagonal. Calcula la longitud de dicha diagonal.

Solución:



Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 6^2 + 3^2 + 4^2 = 36 + 9 + 16 = 61$$

$$D = \sqrt{61} = 7,81 \text{ m}$$

18 Dibuja el desarrollo plano de un cilindro recto en el que el radio de la base mide 1,5 cm, y la altura, 3,5 cm. Describe el desarrollo y calcula su área.

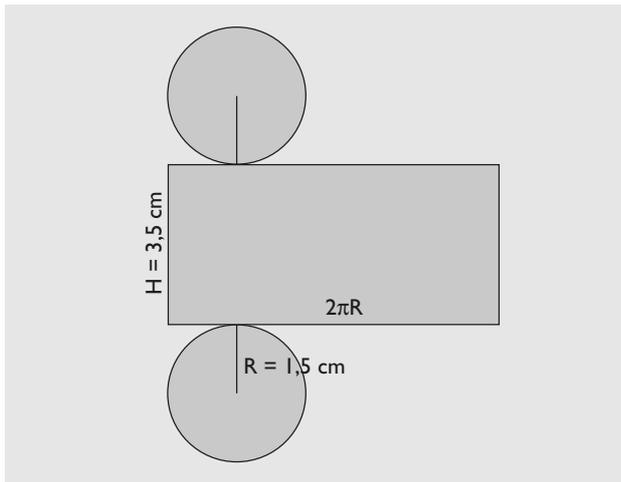
Solución:

El desarrollo plano está formado por dos círculos iguales, que son las bases, y un rectángulo.

$$\text{Área de las bases: } 2 \cdot \pi \cdot 1,5^2 = 14,14 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área lateral: } 2\pi \cdot 1,5 \cdot 3,5 = 32,99 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total: } 14,14 + 32,99 = 47,13 \text{ cm}^2$$



19 Las dimensiones de una caja son 10 cm, 5 cm y 6 cm. Calcula si un lápiz de 12,5 cm cabe en su interior.

Solución:

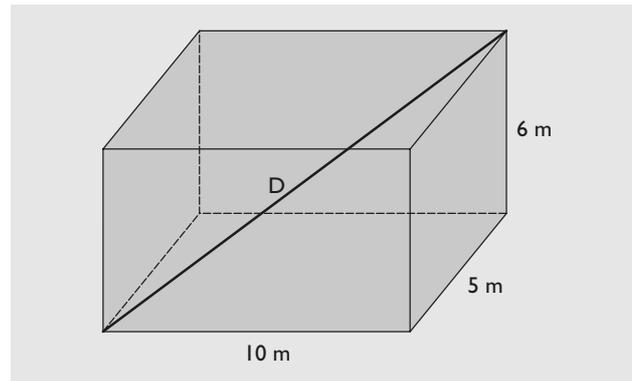
Tenemos que ver si la diagonal es mayor o menor.

Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 10^2 + 6^2 + 5^2 = 100 + 36 + 25 = 161$$

$$D = \sqrt{161} = 12,69 \text{ cm}$$

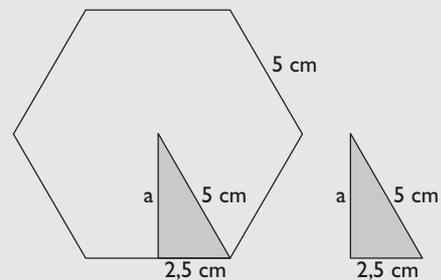
Como: $D > 12,5 \text{ cm}$, el lápiz sí cabe en la caja.



20 Halla la apotema de la base de un prisma regular hexagonal en el que la arista de la base mide 5 cm, y la altura, 9 cm

Solución:

Nos piden hallar la apotema de un hexágono regular.



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + 2,5^2 = 5^2$$

$$a^2 + 6,25 = 25$$

$$a^2 = 18,75$$

$$a = \sqrt{18,75} = 4,33 \text{ cm}$$

4. Pirámides y conos

PIENSA Y CALCULA

A partir de los recortables que venden en las papelerías, construye todas las pirámides y conos.

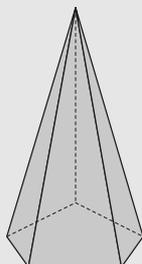
Solución:

Consiste en recortar, pegar y observar cuántas caras tiene cada uno y qué son.

Carné calculista $\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right) : \frac{5}{6} = -\frac{1}{2}$

21 Dibuja una pirámide pentagonal y comprueba en ella el teorema de Euler.

Solución:

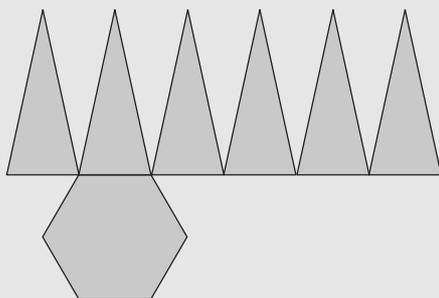


$$C + V = 6 + 6 = 12$$

$$A + 2 = 10 + 2 = 12$$

22 Dibuja el desarrollo plano de una pirámide regular hexagonal. Describe el desarrollo.

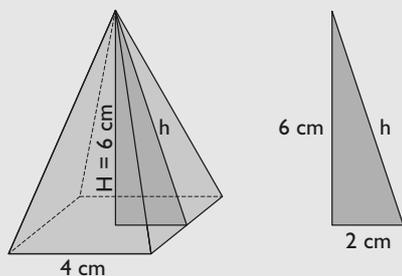
Solución:



El desarrollo plano está formado por un hexágono regular y 6 triángulos isósceles iguales.

23 Dibuja una pirámide recta cuadrangular en la que la arista de la base mida 4 cm, y la altura, 6 cm. Calcula su apotema.

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras:

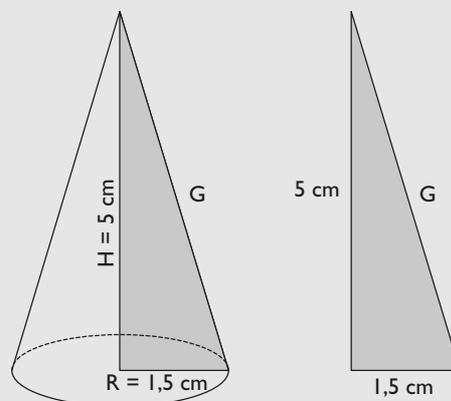
$$h^2 = 2^2 + 6^2$$

$$h^2 = 4 + 36 = 40$$

$$h = \sqrt{40} = 6,32 \text{ cm}$$

24 Dibuja un cono recto en el que el radio de la base mida 1,5 cm, y la altura, 5 cm. Calcula su generatriz.

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras:

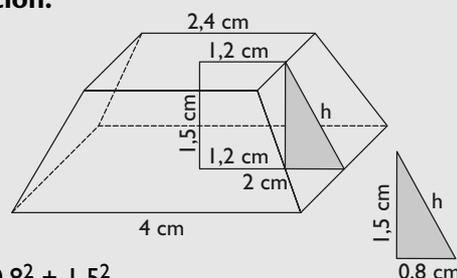
$$G^2 = 1,5^2 + 5^2$$

$$G^2 = 2,25 + 25 = 27,25$$

$$G = \sqrt{27,25} = 5,22 \text{ cm}$$

25 Dibuja un tronco de pirámide recta cuadrangular en el que la arista de la base mayor mida 4 cm; la arista de la base menor, 2,4 cm, y la altura, 1,5 cm. Halla su apotema.

Solución:



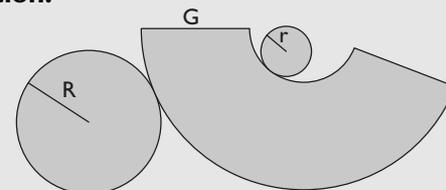
$$h^2 = 0,8^2 + 1,5^2$$

$$h^2 = 0,64 + 2,25 = 2,89$$

$$h = \sqrt{2,89} = 1,7 \text{ cm}$$

26 Dibuja el desarrollo plano de un tronco de cono recto. Describe el desarrollo.

Solución:



El desarrollo plano está formado por dos círculos desiguales y un trapecio circular.

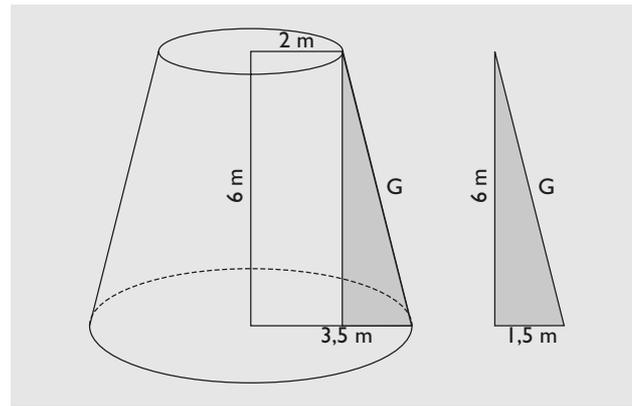
- 27** Dibuja un tronco de cono recto en el que el radio de la base mayor mida 3,5 m; el de la base menor, 2 m; y la altura, 6 m. Halla su generatriz.

Solución:

$$G^2 = 1,5^2 + 6^2$$

$$G^2 = 2,25 + 36 = 38,25$$

$$G = \sqrt{38,25} = 6,18 \text{ m}$$



Ejercicios y problemas

1. Elementos básicos en el espacio

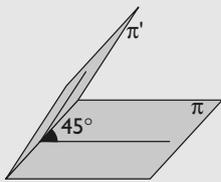
28 Escribe tres ejemplos reales que representen intuitivamente un plano.

Solución:

- a) Una plancha de aluminio.
- b) Un espejo.
- c) Una hoja de un libro.

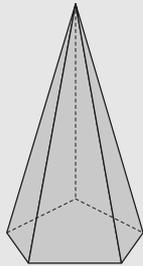
29 Dibuja un ángulo diedro de 45° aproximadamente.

Solución:



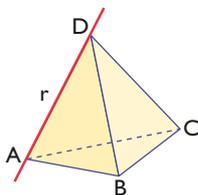
30 Dibuja un poliedro que tenga un ángulo poliedro formado por 5 caras.

Solución:



El vértice superior de una pirámide pentagonal.

31 Dada la recta r generada por la arista AD del siguiente tetraedro:



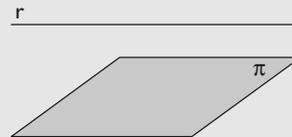
- a) ¿qué aristas cortan a la recta r ?
- b) ¿qué aristas son paralelas a la recta r ?
- c) ¿qué aristas se cruzan con la recta r ?
- d) ¿qué caras prolongadas contienen a la recta r ?
- e) ¿qué caras prolongadas son paralelas a la recta r ?
- f) ¿qué caras prolongadas son secantes con la recta r ?

Solución:

- a) AB, AC, BD y CD
- b) Ninguna.
- c) BC
- d) ABD y ACD
- e) Ninguna.
- f) ABC y BCD

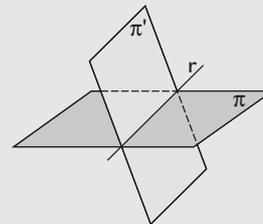
32 Dibuja una recta paralela a un plano.

Solución:



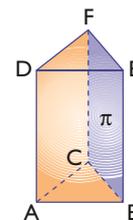
33 Dibuja dos planos secantes. ¿Qué tienen en común?

Solución:



Tienen en común una recta r

34 Dado el plano π que contiene la cara BCFE del siguiente prisma:



- a) ¿qué aristas están contenidas en el plano π ?
- b) ¿qué aristas son paralelas al plano π ?
- c) ¿qué aristas cortan al plano π ?
- d) ¿qué caras son paralelas al plano π ?
- e) ¿qué caras cortan al plano π ?

Solución:

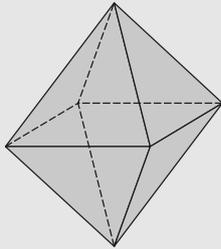
- a) BC, BE, CF y EF
- b) AD
- c) AB, AC, DE y DF
- d) Ninguna.
- e) Todas las demás: ABC, DEF, ABED y ACFD

Ejercicios y problemas

2. Poliedros

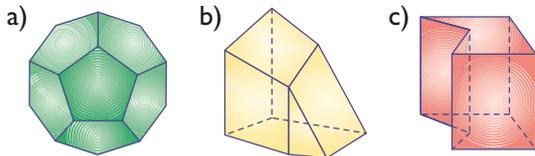
35 Dibuja un octaedro y halla el orden de cada vértice.

Solución:



Cada vértice es de orden 4

36 Clasifica los siguientes poliedros:

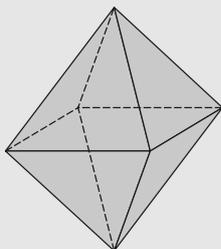


Solución:

- a) Poliedro regular y convexo.
- b) Poliedro irregular y convexo.
- c) Poliedro irregular y cóncavo.

37 Dibuja un octaedro y comprueba el teorema de Euler en él.

Solución:

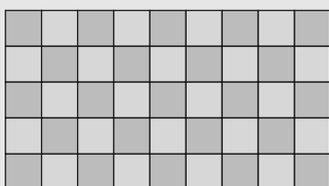


$$C + V = 8 + 6 = 14$$

$$A + 2 = 12 + 2 = 14$$

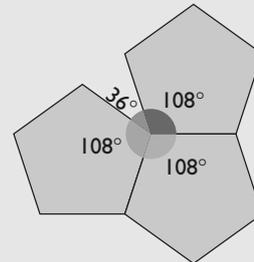
38 Dibuja un mosaico regular formado por cuadrados.

Solución:



39 ¿Se puede construir un poliedro regular con caras pentagonales? Justifica la respuesta.

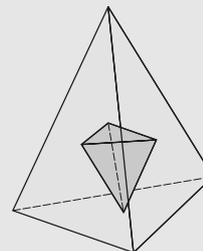
Solución:



Si unimos tres caras, el ángulo que se obtiene es $3 \times 108^\circ = 324^\circ$, que es menor de 360° , y sí se obtiene un poliedro regular, que es el dodecaedro.

40 Dibuja el poliedro que se obtiene al unir los puntos centrales de las caras de un tetraedro. ¿Qué poliedro se obtiene? ¿Qué relación hay entre las caras y vértices de ambos poliedros?

Solución:



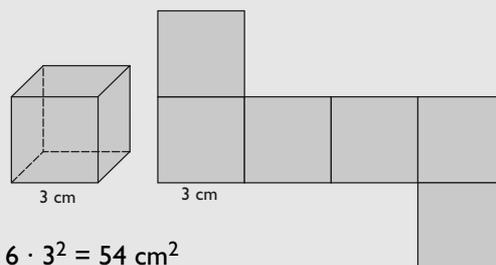
Se obtiene un tetraedro.

Tetraedro	C	4	4	C	Tetraedro
	V	4	4	V	

Que el número de caras de uno es igual al número de vértices del otro, y por ello son duales.

41 Dibuja un cubo que tenga 3 cm de arista y su desarrollo plano. Calcula su área.

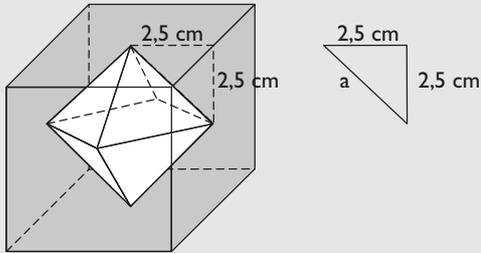
Solución:



$$A = 6 \cdot 3^2 = 54 \text{ cm}^2$$

- 42** Dibuja un cubo que tenga 5 cm de arista y el poliedro dual inscrito. Calcula la longitud de la arista de dicho poliedro.

Solución:



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 2,5^2 + 2,5^2$$

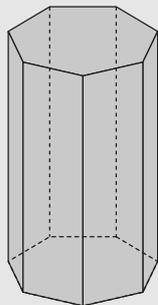
$$a^2 = 6,25 + 6,25 = 12,5$$

$$a = \sqrt{12,5} = 3,54 \text{ cm}$$

3. Prismas y cilindros

- 43** Dibuja un prisma heptagonal y comprueba el teorema de Euler en él.

Solución:



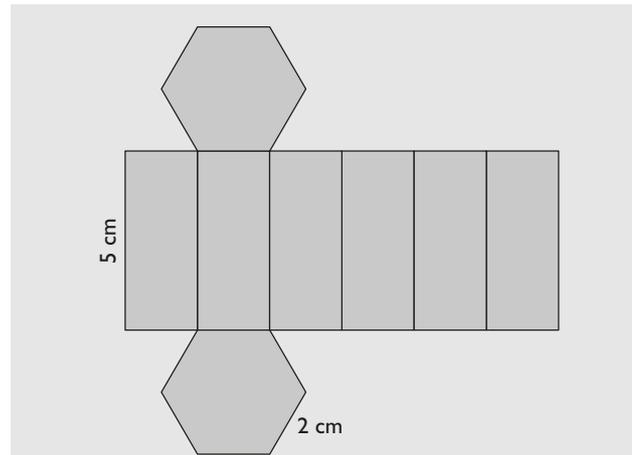
$$C + V = 9 + 14 = 23$$

$$A + 2 = 21 + 2 = 23$$

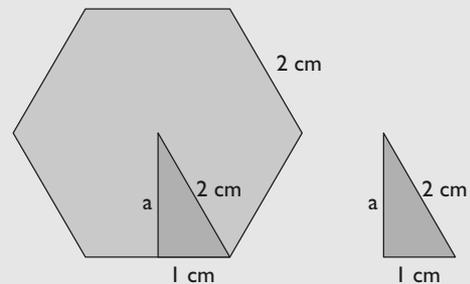
- 44** Dibuja el desarrollo plano de un prisma recto hexagonal en el que la arista de la base mide 2 cm, y la altura, 5 cm. Describe el desarrollo y calcula su área.

Solución:

El desarrollo plano está formado por dos hexágonos regulares iguales y por 6 rectángulos iguales.



Para calcular el área hay que hallar previamente la apotema de la base.



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + 1^2 = 2^2$$

$$a^2 + 1 = 4$$

$$a^2 = 3$$

$$a = \sqrt{3} = 1,73 \text{ cm}$$

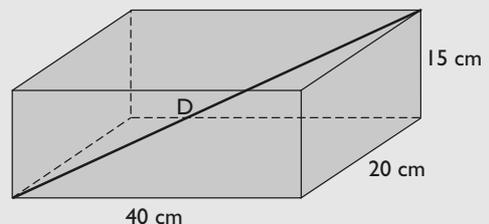
$$\text{Área de las bases: } 2 \cdot \frac{6 \cdot 2 \cdot 1,73}{2} = 20,76 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área lateral: } 6 \cdot 2 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total: } 20,76 + 60 = 80,76 \text{ cm}^2$$

- 45** Las dimensiones de una caja de zapatos son 40 cm, 20 cm y 15 cm. Calcula la longitud de su diagonal.

Solución:



Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

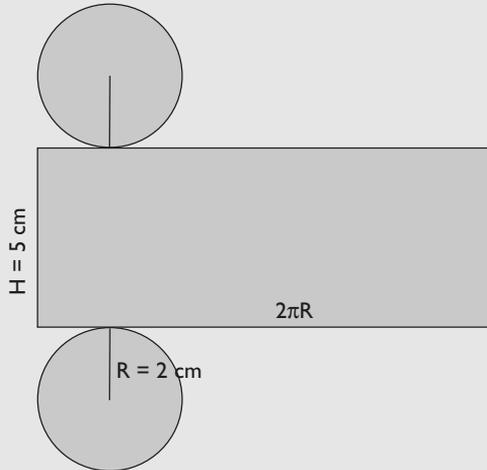
$$D^2 = 40^2 + 20^2 + 15^2 = 1600 + 400 + 225 = 2225$$

$$D = \sqrt{2225} = 47,17 \text{ cm}$$

Ejercicios y problemas

- 46** Dibuja el desarrollo plano de un cilindro recto en el que el radio de la base mide 2 cm, y la altura, 5 cm. Describe el desarrollo y calcula su área.

Solución:



El desarrollo plano está formado por dos círculos iguales, que son las bases, y un rectángulo.

$$\text{Área de las bases: } 2 \cdot \pi \cdot 2^2 = 25,13 \text{ cm}^2$$

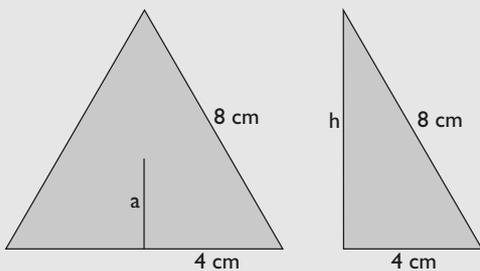
$$\text{Área lateral: } 2\pi \cdot 2 \cdot 5 = 62,83 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total: } 25,13 + 62,83 = 87,96 \text{ cm}^2$$

- 47** Halla la apotema de la base de un prisma regular triangular en el que la arista de la base mide 8 cm, y la altura, 23 cm

Solución:

Nos piden hallar la apotema de un triángulo equilátero.



Aplicando una propiedad de las medianas de un triángulo, la apotema es un tercio de la mediana, que en un triángulo equilátero coincide con la altura.

Para hallar la altura, se aplica el teorema de Pitágoras:

$$h^2 + 4^2 = 8^2$$

$$h^2 + 16 = 64$$

$$h^2 = 48$$

$$h = \sqrt{48} = 6,93 \text{ cm}$$

Por tanto:

$$a = \frac{1}{3} \cdot 6,93 = 2,31 \text{ cm}$$

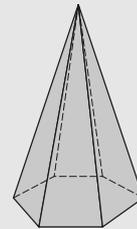
4. Pirámides y conos

- 48** Dibuja una pirámide hexagonal y comprueba en ella el teorema de Euler.

Solución:

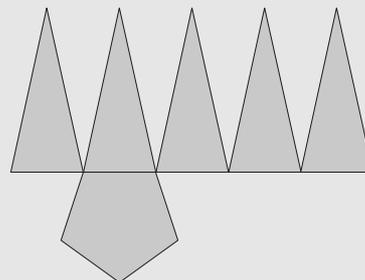
$$C + V = 7 + 7 = 14$$

$$A + 2 = 12 + 2 = 14$$



- 49** Dibuja el desarrollo plano de una pirámide regular pentagonal. Describe el desarrollo.

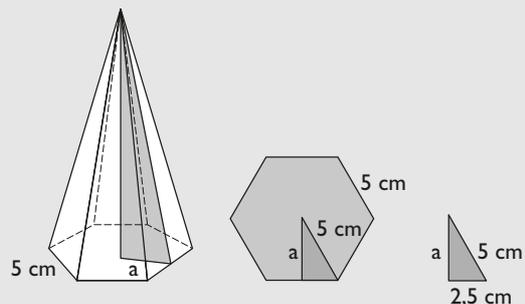
Solución:



El desarrollo plano está formado por un pentágono regular y 5 triángulos isósceles iguales.

- 50** Dibuja una pirámide regular hexagonal en la que la arista de la base mide 5 cm, y la altura, 20 cm. Calcula su apotema.

Solución:



En primer lugar, hay que hallar la apotema de la base.

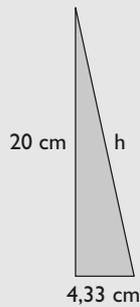
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + 2,5^2 = 5^2$$

$$a^2 + 6,25 = 25$$

$$a^2 = 18,75$$

$$a = \sqrt{18,75} = 4,33 \text{ cm}$$



Se aplica otra vez el teorema de Pitágoras:

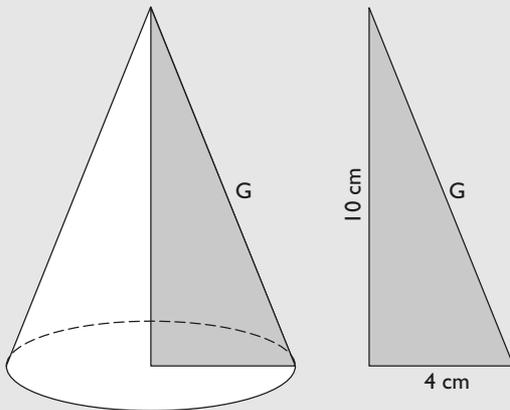
$$h^2 = 4,33^2 + 20^2$$

$$h^2 = 18,75 + 400 = 418,75$$

$$h = \sqrt{418,75} = 20,46 \text{ cm}$$

- 51** Dibuja un cono recto en el que el radio de la base mida 4 cm, y la altura, 10 cm. Calcula su generatriz.

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras:

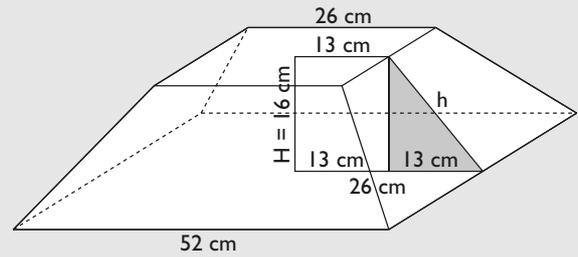
$$G^2 = 4^2 + 10^2$$

$$G^2 = 16 + 100 = 116$$

$$G = \sqrt{116} = 10,77 \text{ cm}$$

- 52** Dibuja un tronco de pirámide recta cuadrangular en el que la arista de la base mayor mida 52 cm; la arista de la base menor, 26 cm, y la altura, 16 cm. Halla su apotema.

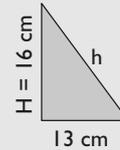
Solución:



$$h^2 = 13^2 + 16^2$$

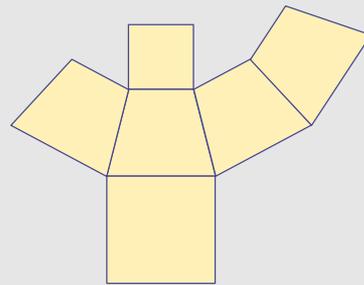
$$h^2 = 169 + 256 = 425$$

$$h = \sqrt{425} = 20,62 \text{ cm}$$



- 53** Dibuja el desarrollo plano de un tronco de pirámide de cuadrangular recta. Describe el desarrollo.

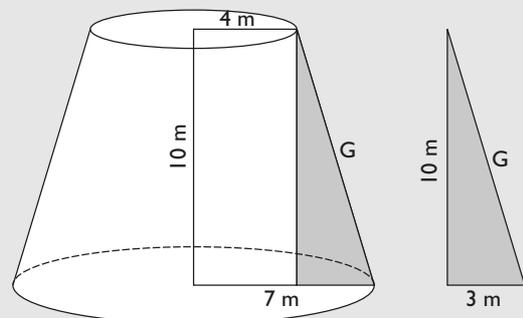
Solución:



El desarrollo plano está formado por dos cuadrados desiguales y cuatro trapecios isósceles iguales.

- 54** Dibuja un tronco de cono recto en el que el radio de la base mayor mida 7 m; el de la base menor, 4 m, y la altura, 10 m. Halla su generatriz.

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras:

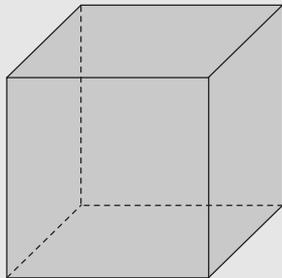
$$G^2 = 3^2 + 10^2$$

$$G^2 = 9 + 100 = 109 \Rightarrow G = \sqrt{109} = 10,44 \text{ m}$$

Para ampliar

- 55** Dibuja un cubo y comprueba el teorema de Euler en él.

Solución:

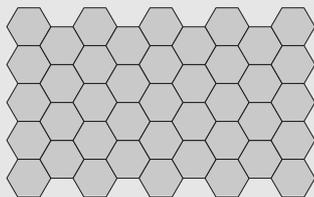


$$C + V = 6 + 8 = 14$$

$$A + 2 = 12 + 2 = 14$$

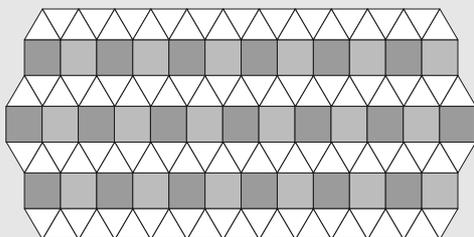
- 56** Dibuja un mosaico regular formado por hexágonos regulares.

Solución:

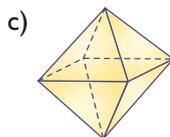
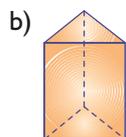
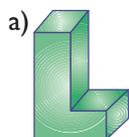


- 57** Dibuja un mosaico semirregular formado por cuadrados y triángulos equiláteros.

Solución:



- 58** Clasifica los siguientes poliedros:



Solución:

- a) Poliedro irregular y cóncavo.
- b) Poliedro irregular y convexo.
- c) Poliedro regular y convexo.

- 59** Halla la apotema de la base de un prisma recto cuadrangular en el que la arista de la base mide 10 cm, y la altura, 27 cm

Solución:

Como la base es un cuadrado, la apotema es la mitad de la arista de la base.

$$a = 5 \text{ cm}$$

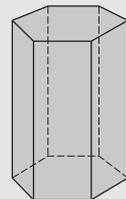


- 60** Dibuja un prisma hexagonal y comprueba el teorema de Euler en él.

Solución:

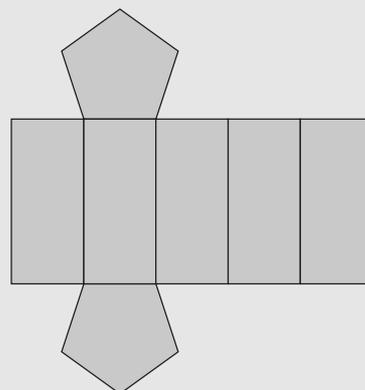
$$C + V = 8 + 12 = 20$$

$$A + 2 = 18 + 2 = 20$$



- 61** Dibuja el desarrollo plano de un prisma regular pentagonal. Describe el desarrollo.

Solución:



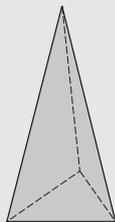
El desarrollo plano está formado por dos pentágonos regulares iguales, que son las bases, y 5 rectángulos iguales.

62 Dibuja una pirámide triangular y comprueba en ella el teorema de Euler.

Solución:

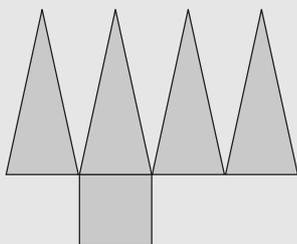
$$C + V = 4 + 4 = 8$$

$$A + 2 = 6 + 2 = 8$$



63 Dibuja el desarrollo plano de una pirámide recta cuadrangular. Describe su desarrollo.

Solución:



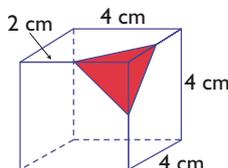
El desarrollo plano está formado por un cuadrado y 4 triángulos isósceles iguales.

64 ¿Qué poliedro regular tiene como vértices el centro de las caras de un dodecaedro?

Solución:

Un icosaedro y por ello son duales.

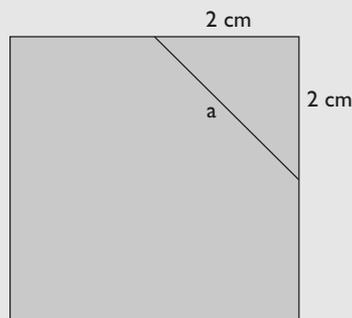
65 Calcula la longitud de los lados del triángulo coloreado en rojo de la siguiente figura, redondea el resultado a dos decimales y clasifica el triángulo obtenido.



Solución:

Cada lado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales y miden la mitad del lado, es decir, 2 cm

Se aplica el teorema de Pitágoras:



$$a^2 = 2^2 + 2^2$$

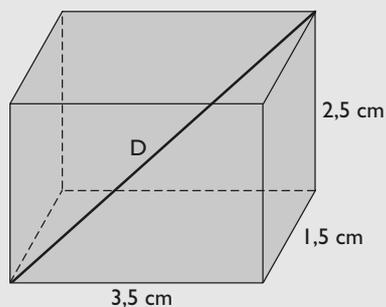
$$a^2 = 4 + 4 = 8$$

$$a = \sqrt{8} = 2,83 \text{ cm}$$

El triángulo es equilátero, porque los tres lados son iguales.

66 Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son 3,5 cm, 1,5 cm y 2,5 cm

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 3,5^2 + 1,5^2 + 2,5^2$$

$$D^2 = 12,25 + 2,25 + 6,25 = 20,75$$

$$D = \sqrt{20,75} = 4,56 \text{ cm}$$

Problemas

- 67** Comprueba el teorema de Euler en el dodecaedro.

Solución:

$$C + V = 12 + 20 = 32$$

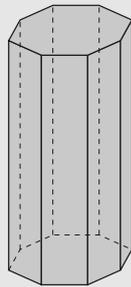
$$A + 2 = 30 + 2 = 32$$

- 68** Dibuja un prisma octogonal y comprueba el teorema de Euler en él.

Solución:

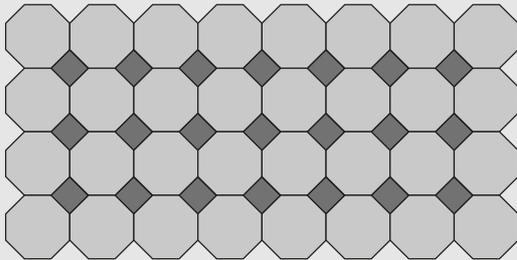
$$C + V = 10 + 16 = 26$$

$$A + 2 = 24 + 2 = 26$$



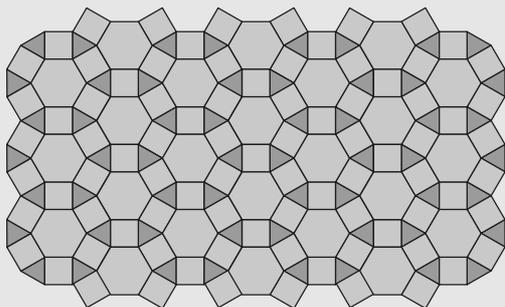
- 69** Dibuja un mosaico semirregular formado por cuadrados y octógonos regulares.

Solución:



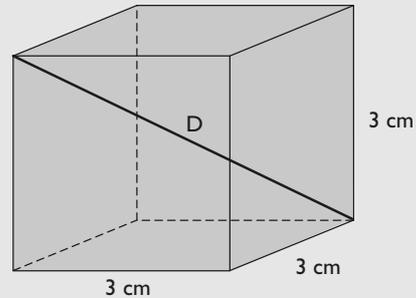
- 70** Dibuja un mosaico semirregular formado por triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares.

Solución:



- 71** Dibuja un cubo de 3 cm de arista y halla la longitud de su diagonal.

Solución:



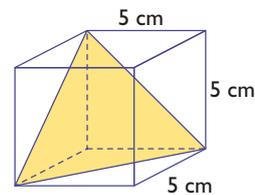
Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2$$

$$D^2 = 9 + 9 + 9 = 27$$

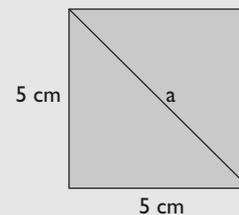
$$D = \sqrt{27} = 5,20 \text{ cm}$$

- 72** Clasifica el triángulo coloreado en amarillo de la figura y calcula la longitud de sus lados.



Solución:

Cada lado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son dos aristas. Por tanto, es un triángulo equilátero.



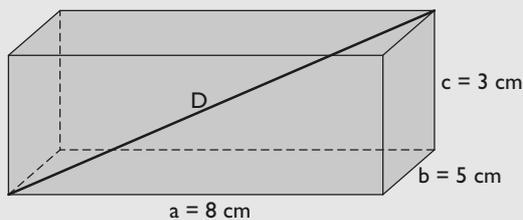
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 5^2 + 5^2$$

$$a^2 = 25 + 25 = 50 \Rightarrow a = \sqrt{50} = 7,07 \text{ cm}$$

- 73** Si tienes un ortoedro cuyas aristas miden $a = 8 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$ y $c = 3 \text{ cm}$, ¿cuál será la longitud máxima de una varilla que quieras introducir en su interior?

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

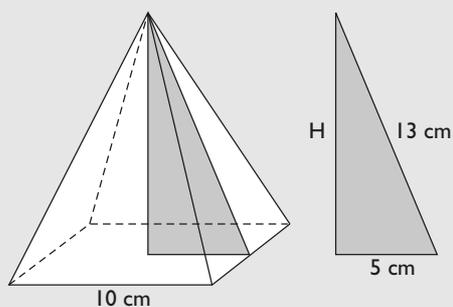
$$D^2 = 8^2 + 5^2 + 3^2$$

$$D^2 = 64 + 25 + 9 = 98$$

$$D = \sqrt{98} = 9,90 \text{ cm}$$

- 74** Dibuja una pirámide regular cuadrangular en la que la arista de la base mida 10 cm, y la apotema, 13 cm. Calcula su altura.

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$H^2 + 5^2 = 13^2$$

$$H^2 + 25 = 169$$

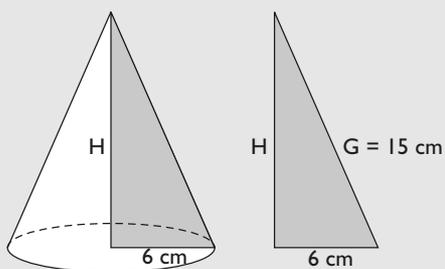
$$H^2 = 144$$

$$H = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

- 75** Dibuja un cono recto en el que el radio de la base mida 6 cm, y la generatriz, 15 cm. Halla su altura.

Solución:

Se aplica el teorema de Pitágoras:



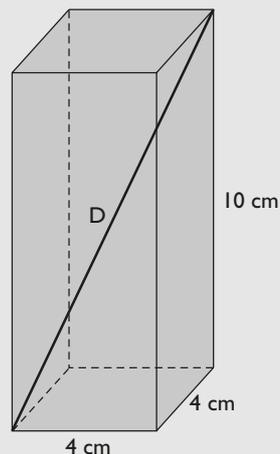
$$H^2 + 6^2 = 15^2$$

$$H^2 + 36 = 225$$

$$H^2 = 189 \Rightarrow H = \sqrt{189} = 13,75 \text{ cm}$$

- 76** Calcula la diagonal de un prisma recto cuadrangular cuya base tiene de arista 4 cm, y de altura, 10 cm

Solución:

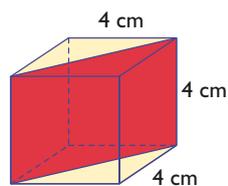


Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 4^2 + 4^2 + 10^2$$

$$D^2 = 16 + 16 + 100 = 132 \Rightarrow D = \sqrt{132} = 11,49 \text{ cm}$$

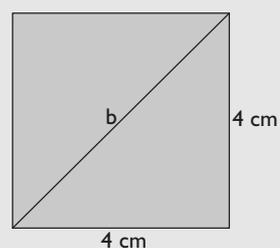
- 77** Calcula las dimensiones del rectángulo coloreado en rojo de la figura siguiente:



Solución:

La altura vale 4 cm

La base es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos de 4 cm



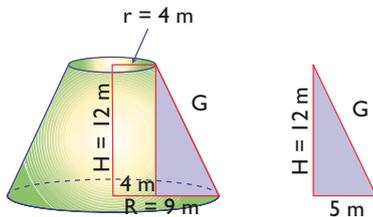
Ejercicios y problemas

Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$b^2 = 4^2 + 4^2$$

$$b^2 = 16 + 16 = 32 \Rightarrow b = \sqrt{32} = 5,66 \text{ cm}$$

78 Halla la generatriz del tronco de cono siguiente:



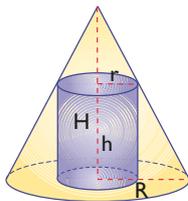
Solución:

Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$G^2 = 5^2 + 12^2$$

$$G^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow G = \sqrt{169} = 13 \text{ m}$$

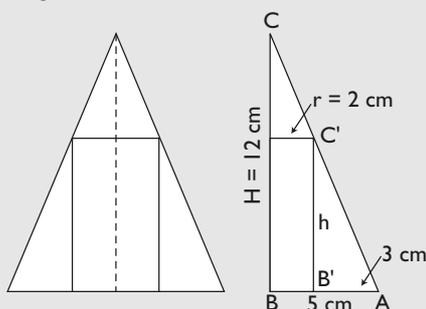
79 Se tiene un cilindro inscrito en un cono, como se indica en la figura adjunta.



Sabiendo que la altura del cono es $H = 12 \text{ cm}$, que el radio es $R = 5 \text{ cm}$ y que el radio del cilindro mide $r = 2 \text{ cm}$, halla cuánto mide la altura del cilindro.

Solución:

Haciendo una sección se tiene un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles.

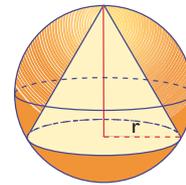


Los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes.

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{h}{12}$$

$$x = 7,2 \text{ cm}$$

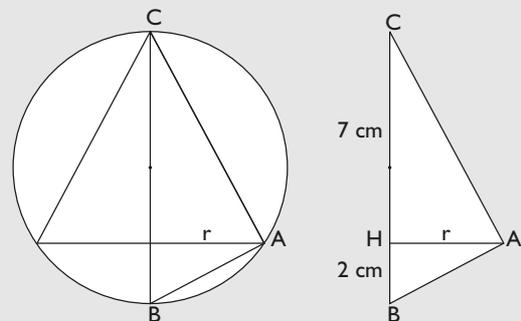
80 Se tiene un cono inscrito en una esfera, como se indica en la figura adjunta.



Sabiendo que el radio de la esfera es $R = 9 \text{ cm}$ y que la altura del cono es $h = 7 \text{ cm}$, halla cuánto mide el radio de la base del cono.

Solución:

Haciendo una sección se tiene un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia.



El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado, es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: $180^\circ/2 = 90^\circ$

Aplicando el teorema de la altura:

$$r^2 = 7 \cdot 2 = 14$$

$$r^2 = 14$$

$$r = \sqrt{14}$$

$$r = 3,74 \text{ cm}$$

81 Halla el radio de la base de un cono recto que mide 12 m de altura y cuya generatriz es de 13 m

Solución:

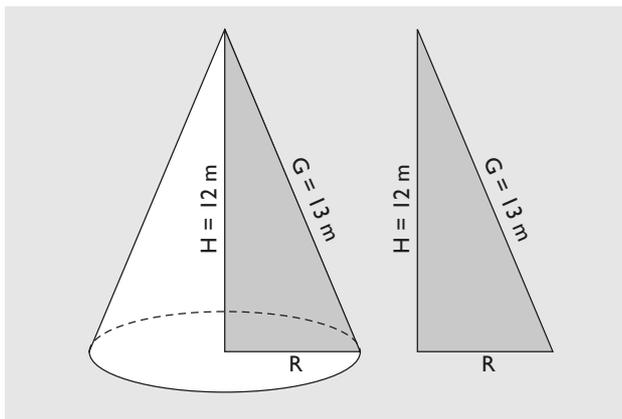
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$R^2 + 12^2 = 13^2$$

$$R^2 + 144 = 169$$

$$R^2 = \sqrt{25}$$

$$R = 25 = 5 \text{ m}$$

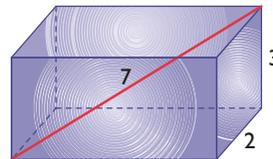


Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 8^2 + 15^2$$

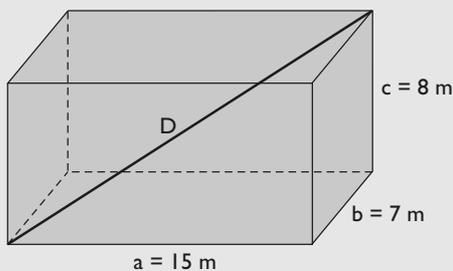
$$h^2 = 64 + 225 = 289 \Rightarrow h = \sqrt{289} = 17 \text{ cm}$$

- 84** La diagonal de un ortoedro mide 7 cm, y dos de sus aristas, 2 cm y 3 cm. Halla la tercera arista.



- 82** Halla la diagonal de un ortoedro de aristas 15 m, 7 m y 8 m. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



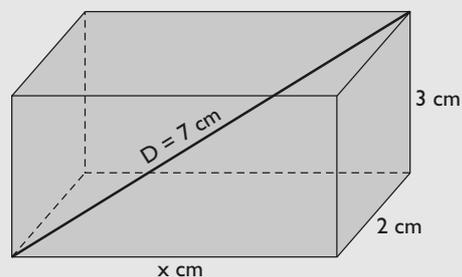
Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 15^2 + 7^2 + 8^2$$

$$D^2 = 225 + 49 + 64 = 338$$

$$D = \sqrt{338} = 18,38 \text{ m}$$

Solución:



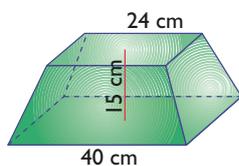
Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$x^2 + 2^2 + 3^2 = 7^2$$

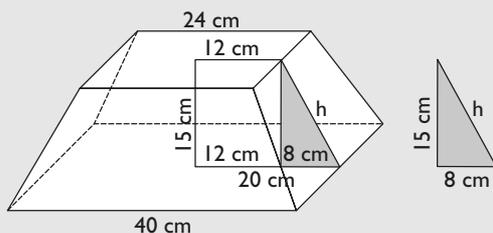
$$x^2 + 4 + 9 = 49$$

$$x^2 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

- 83** Calcula la apotema del siguiente tronco de pirámide:

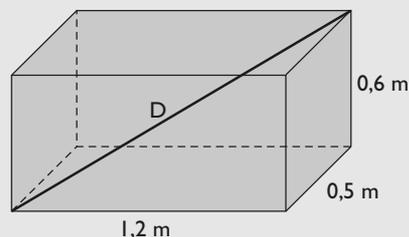


Solución:



- 85** Un acuario con forma de ortoedro tiene unas dimensiones de 1,2 m de largo, 0,5 m de ancho y 0,6 m de alto. ¿Se podría introducir en su interior un administrador de oxígeno en forma de varilla de 1,4 m de largo?

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 1,2^2 + 0,5^2 + 0,6^2$$

$$D^2 = 1,44 + 0,25 + 0,36 = 2,05 \Rightarrow D = \sqrt{2,05} = 1,43 \text{ m}$$

Como $D > 1,4 \text{ m}$, el administrador de oxígeno sí cabe en el acuario.

Ejercicios y problemas

Para profundizar

86 Comprueba el teorema de Euler en el icosaedro.

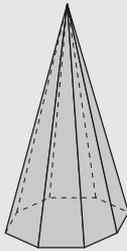
Solución:

$$C + V = 20 + 12 = 32$$

$$A + 2 = 30 + 2 = 32$$

87 Dibuja una pirámide octogonal y comprueba el teorema de Euler en ella.

Solución:

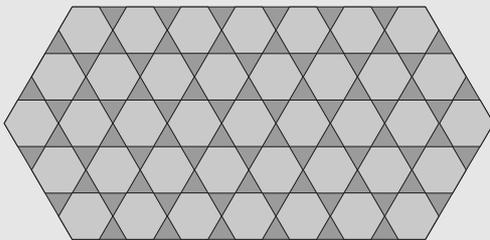


$$C + V = 8 + 9 = 17$$

$$A + 2 = 16 + 2 = 18$$

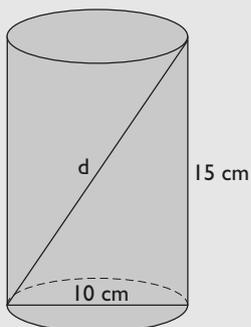
88 Dibuja un mosaico semirregular formado por triángulos equiláteros y hexágonos regulares.

Solución:



89 Si tienes un bote de forma cilíndrica, que mide 5 cm de radio de la base y 15 cm de altura, ¿cuál será la longitud máxima de un lápiz que quieras introducir en su interior?

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras:

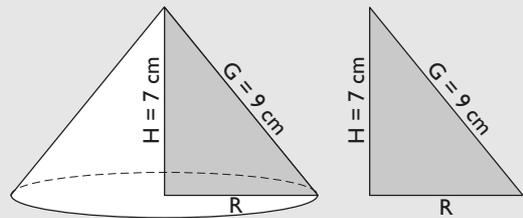
$$d^2 = 10^2 + 15^2$$

$$d^2 = 100 + 225 = 325$$

$$d = \sqrt{325} = 18,03 \text{ cm}$$

90 Dibuja un cono recto en el que la altura mida 7 cm, y la generatriz, 9 cm. Halla el radio de la base.

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$R^2 + 7^2 = 9^2$$

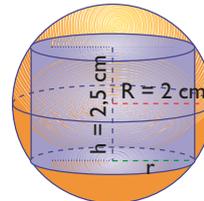
$$R^2 + 49 = 81$$

$$R^2 = 32$$

$$R = \sqrt{32}$$

$$R = 5,66 \text{ cm}$$

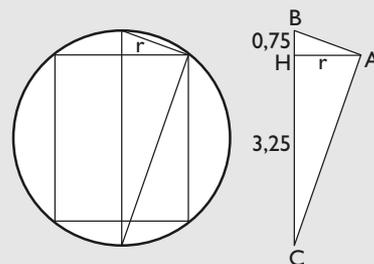
91 Se tiene un cilindro inscrito en una esfera, como se indica en la figura adjunta.



Sabiendo que el radio de la esfera es $R = 2 \text{ cm}$ y la altura del cilindro es $h = 2,5 \text{ cm}$, halla cuánto mide el radio de la base del cilindro.

Solución:

Haciendo una sección se tiene un rectángulo inscrito en una circunferencia.



El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: $180^\circ/2 = 90^\circ$

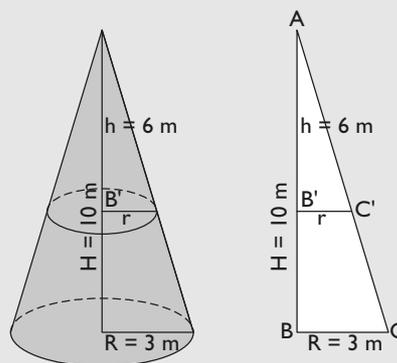
Aplicando el teorema de la altura:

$$r^2 = 3,25 \cdot 0,75 = 2,44$$

$$r = 1,56 \text{ cm}$$

- 92** Un cono de 10 m de altura se corta, por un plano paralelo a la base, a 4 m de la misma. Si el radio de la base es de 3 m, ¿qué radio tendrá la circunferencia que hemos obtenido en el corte?

Solución:



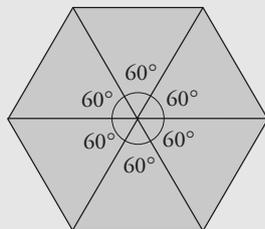
Los triángulos ABC y AB'C' son semejantes porque tienen los ángulos iguales; por tanto, los lados son proporcionales:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{r}{3} \Rightarrow r = 1,8 \text{ m}$$

Aplica tus competencias

- 93** Comprueba que con triángulos equiláteros se puede formar un mosaico regular.

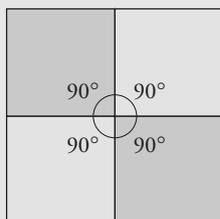
Solución:



Si en el plano unimos 6 triángulos equiláteros iguales con un vértice común, se acoplan perfectamente; luego forman un mosaico.

- 94** Comprueba que con cuadrados se puede formar un mosaico regular.

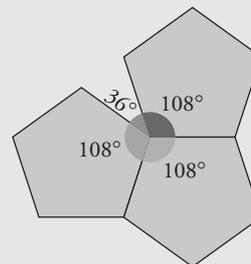
Solución:



Si en el plano unimos 4 cuadrados iguales con un vértice común, se acoplan perfectamente; luego forman un mosaico.

- 95** Comprueba que con pentágonos regulares no se puede formar un mosaico regular.

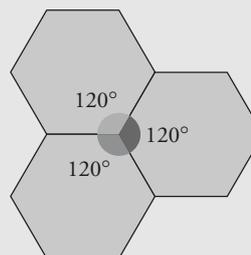
Solución:



Si en el plano unimos 3 pentágonos regulares con un vértice común, no encajan perfectamente, y 4 no caben; por tanto, no forman un mosaico.

- 96** Comprueba que con hexágonos regulares se puede formar un mosaico regular.

Solución:



Si en el plano unimos 3 hexágonos regulares iguales con un vértice común, encajan perfectamente, luego, forman un mosaico.

Comprueba lo que sabes

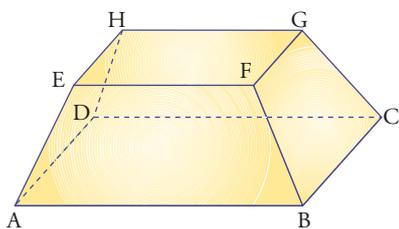
- 1** Define qué es un poliedro regular. Di cuántos hay y cómo se llaman.

Solución:

Un **poliedro es regular** si todas sus caras son polígonos regulares iguales y los vértices son del mismo orden.

Son cinco: tetraedro, cubo o hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

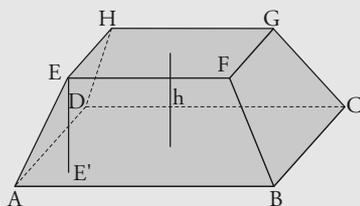
- 2** Dado el plano π , que contiene la cara EFGH del tronco de pirámide:



- ¿qué aristas están contenidas en el plano π ?
- ¿qué aristas son paralelas al plano π ?
- ¿qué aristas cortan al plano π ?
- ¿qué caras son paralelas al plano π ?
- ¿qué caras cortan al plano π ?
- dibuja la distancia del vértice E al plano definido por la cara ABCD

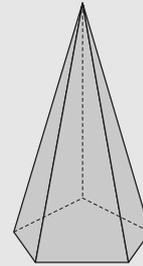
Solución:

- EF, FG, GH y HE
- AB, BC, CD y DA
- AE, BF, CG y DH
- ABCD
- ABFE, BCGF, CDHG y ADHE
- Es la altura del tronco de pirámide.



- 3** Dibuja una pirámide pentagonal y comprueba en ella el teorema de Euler.

Solución:

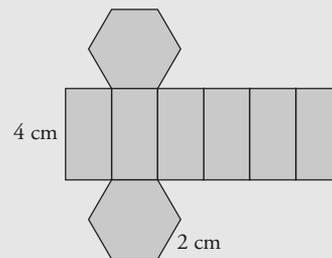


$$C + V = 6 + 6 = 12$$

$$A + 2 = 10 + 2 = 12$$

- 4** Dibuja el desarrollo plano de un prisma hexagonal regular de 4 cm de altura y 2 cm de arista de la base, y describe su desarrollo.

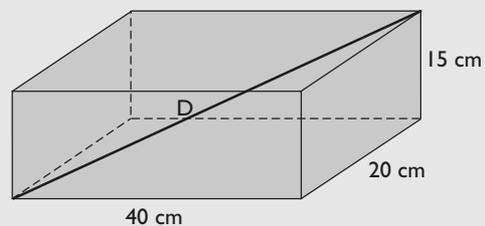
Solución:



El desarrollo plano está formado por dos hexágonos regulares iguales que son las bases y de 6 rectángulos iguales.

- 5** Las dimensiones de una caja de zapatos son 40 cm, 20 cm y 15 cm. Calcula la longitud de su diagonal.

Solución:



Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

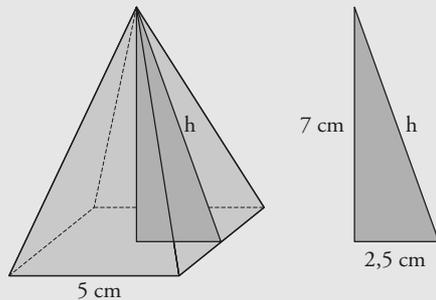
$$D^2 = 40^2 + 20^2 + 15^2 = 1\,600 + 400 + 225 = 2\,225$$

$$D = \sqrt{2\,225} = 47,17 \text{ cm}$$

Comprueba lo que sabes

- 6** Calcula la apotema de una pirámide cuadrangular de 5 cm de arista de la base y 7 cm de altura.

Solución:



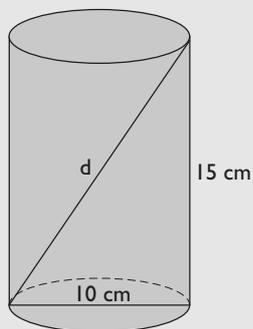
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 2,5^2 + 7^2 = 55,25$$

$$h = 7,43 \text{ cm}$$

- 7** Si tienes un bote de forma cilíndrica, que mide 5 cm de radio de la base y 15 cm de altura, ¿cuál será la longitud máxima de un lápiz que quieras introducir en su interior?

Solución:



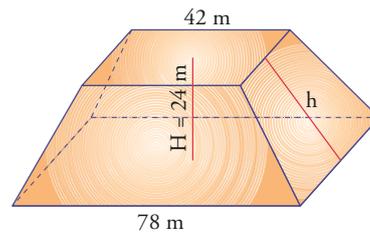
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 10^2 + 15^2$$

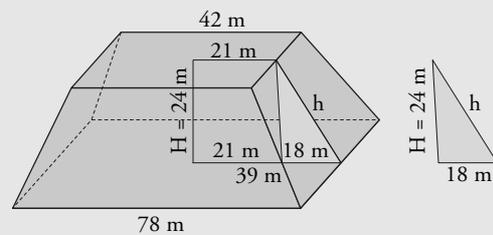
$$d^2 = 100 + 225 = 325$$

$$d = \sqrt{325} = 18,03 \text{ cm}$$

- 8** Calcula la apotema del tronco de la pirámide del dibujo.



Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 18^2 + 24^2 = 900$$

$$h = 30 \text{ m}$$

Paso a paso

- 97** Dibuja un cubo en perspectiva y las líneas ocultas en trazo discontinuo.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 98** Dibuja el desarrollo plano de un cubo.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 99** **Internet.** Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema.**

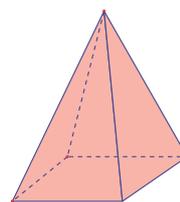
Practica

- 100** Dibuja un prisma hexagonal en perspectiva y las líneas ocultas en trazo discontinuo.

**Solución:**

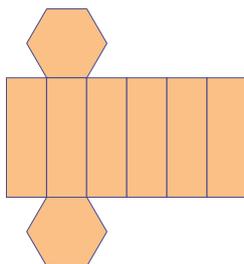
- Dibuja el polígono exterior y rellénalo.
- Dibuja las aristas continuas.
- Dibuja las aristas discontinuas.
- Arrastrando* los vértices mejora el diseño.

- 102** Dibuja una pirámide regular cuadrangular en perspectiva y las líneas ocultas en trazo discontinuo.

**Solución:**

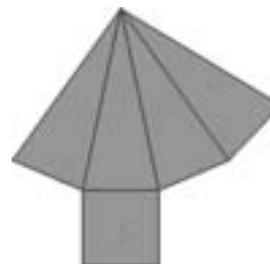
- Dibuja el polígono exterior y rellénalo.
- Dibuja las aristas continuas.
- Dibuja las aristas discontinuas.
- Arrastrando* los vértices, mejora el diseño.

- 101** Dibuja el desarrollo plano de un prisma regular hexagonal.

**Solución:**

- Dibuja un hexágono regular utilizando la herramienta **polígono regular**.
- Rellénalo de color.
- Por simetrías axiales dibuja el resto del desarrollo.

- 103** Dibuja el desarrollo plano de una pirámide cuadrangular.

**Solución:**

- Dibuja un cuadrado utilizando la herramienta **polígono regular**.
- Rellénalo de color.
- Dibuja el triángulo isósceles que tiene por base un lado del cuadrado.
- Por simetrías axiales dibuja el resto del desarrollo lateral.

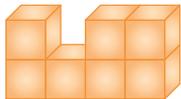


1. Unidades de volumen

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente el volumen de las siguientes figuras teniendo en cuenta que cada cubo es una unidad.

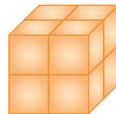
a)



b)



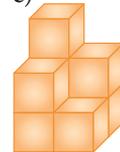
c)



d)



e)

**Solución:**a) 7 u³b) 4 u³c) 8 u³d) 6 u³e) 8 u³**Carné calculista**

658,9 : 7,6 | C = 86,69; R = 0,056

APLICA LA TEORÍA

1 Transforma mentalmente en m³:a) 25 dam³b) 0,02 hm³c) 2 560 dm³d) 32 000 cm³e) 45 km³f) 575 000 mm³**Solución:**

a) 25 dam³ = 25 × 1 000 m³ = 25 000 m³

b) 0,02 hm³ = 0,02 × 1 000 000 m³ = 20 000 m³

c) 2 560 dm³ = 2 560 : 1 000 m³ = 2,56 m³

d) 32 000 cm³ = 32 000 : 1 000 000 m³ = 0,032 m³

e) 45 km³ = 45 000 000 000 m³

f) 570 000 mm³ = 0,00057 m³

2 Expresa en litros las siguientes cantidades:a) 5 m³b) 0,008 hm³c) 250 dm³d) 12 000 cm³e) 10 km³f) 250 000 mm³**Solución:**

a) 5 m³ = 5 000 litros

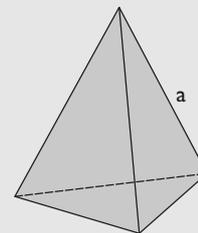
b) 0,008 hm³ = 8 000 000 litros

c) 250 dm³ = 250 litros

d) 12 000 cm³ = 12 litros

e) 10 km³ = 10 000 000 000 000 litros

f) 250 000 mm³ = 0,25 litros

3 Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un tetraedro de 6 cm de arista. Redondea el resultado a dos decimales.**Solución:**

$$A = a^2 \sqrt{3}$$

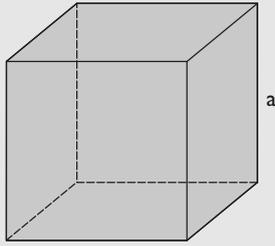
$$A = 6^2 \sqrt{3} = 62,35 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

$$V = \frac{6^3 \sqrt{2}}{12} = 25,46 \text{ cm}^3$$

- 4** Haz el dibujo y calcula mentalmente el área y el volumen de un cubo de 5 m de arista.

Solución:



$$A = 6a^2$$

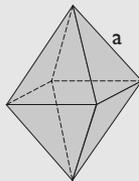
$$A = 6 \cdot 5^2 = 150 \text{ m}^2$$

$$V = a^3$$

$$V = 5^3 = 125 \text{ m}^3$$

- 5** Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un octaedro de 7 dm de arista. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$$A = 2a^2 \sqrt{3}$$

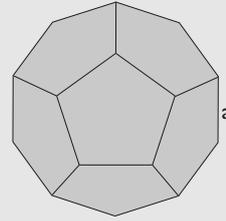
$$A = 2 \cdot 7^2 \sqrt{3} = 169,74 \text{ dm}^2$$

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$

$$V = \frac{7^3 \sqrt{2}}{3} = 161,69 \text{ dm}^3$$

- 6** Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un dodecaedro de 5 m de arista. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$$A = 3a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

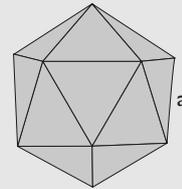
$$A = 3 \cdot 5^2 \cdot \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 516,14 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{a^3}{4} (15 + 7\sqrt{5})$$

$$V = \frac{5^3}{4} \cdot (15 + 7\sqrt{5}) = 957,89 \text{ m}^3$$

- 7** Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un icosaedro de 9 cm de arista. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$$A = 5a^2 \sqrt{3}$$

$$A = 5 \cdot 9^2 \sqrt{3} = 701,48 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{5a^3}{12} (3 + \sqrt{5})$$

$$V = \frac{5 \cdot 9^3}{12} (3 + \sqrt{5}) = 1590,46 \text{ cm}^3$$

2. Área y volumen del ortoedro, el prisma y el cilindro

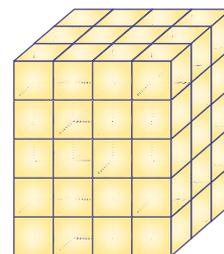
PIENSA Y CALCULA

Calcula el área y el volumen de la figura mayor:

Solución:

$$A = 2(4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5) = 2(12 + 20 + 15) = 2 \cdot 47 = 94 \text{ cm}^2$$

$$V = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^3$$



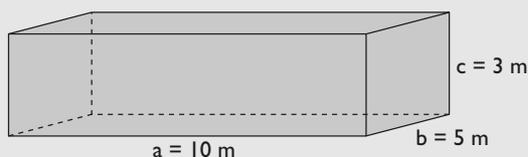
Carné calculista

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3} - \frac{3}{4} : \frac{6}{5} = -\frac{1}{3}$$

APLICA LA TEORÍA

- 8** Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son 10 m, 5 m y 3 m

Solución:



$$A = 2(ab + ac + bc)$$

$$A = 2(10 \cdot 5 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 3) = 190 \text{ m}^2$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 10 \cdot 5 \cdot 3 = 150 \text{ m}^3$$

- 9** Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un prisma cuadrangular en el que la arista de la base mide 3 cm y la altura del prisma mide 8 cm

Solución:

$$A_B = \ell^2 \Rightarrow$$

$$A_B = 3^2 = 9 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 4\ell H \Rightarrow$$

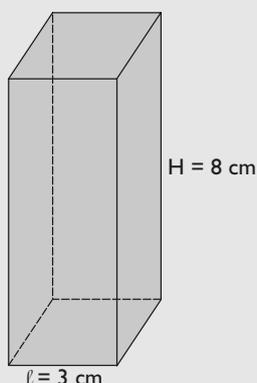
$$A_L = 4 \cdot 3 \cdot 8 = 96 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 2A_B + A_L \Rightarrow$$

$$A_T = 2 \cdot 9 + 96 = 114 \text{ cm}^2$$

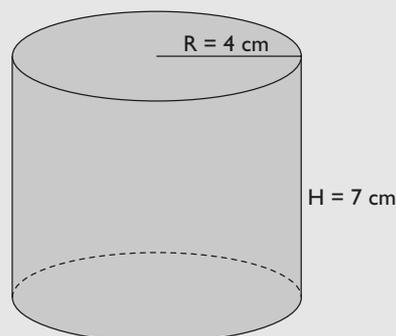
$$V = A_B \cdot H \Rightarrow$$

$$V = 9 \cdot 8 = 72 \text{ cm}^3$$



- 10** Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un cilindro recto de 4 cm de radio de la base y 7 cm de altura. Aproxima el resultado a dos decimales.

Solución:



$$A_B = \pi R^2 \Rightarrow A_B = \pi \cdot 4^2 = 50,27 \text{ cm}^2$$

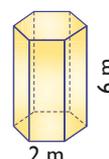
$$A_L = 2\pi R H \Rightarrow A_L = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 7 = 175,93 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 2A_B + A_L \Rightarrow$$

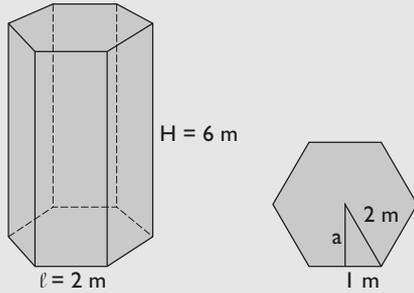
$$A_T = 2 \cdot 50,27 + 175,93 = 276,47 \text{ cm}^2$$

$$V = A_B \cdot H \Rightarrow V = 50,27 \cdot 7 = 351,89 \text{ cm}^3$$

- 11** Calcula el área y el volumen de un prisma hexagonal en el que la arista de la base mide 2 m y la altura del prisma mide 6 m. Aproxima el resultado a dos decimales.



Solución:



$$A_B = \frac{P \cdot a}{2}$$

Se calcula la apotema:

$$a = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3} = 1,73 \text{ m}$$

$$A_B = \frac{6 \cdot 2 \cdot 1,73}{2} = 10,38 \text{ m}^2$$

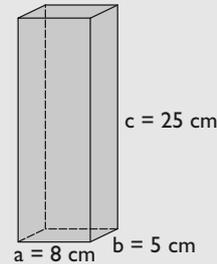
$$A_L = 6lH \Rightarrow A_L = 6 \cdot 2 \cdot 6 = 72 \text{ m}^2$$

$$A_T = 2A_B + A_L \Rightarrow A_T = 2 \cdot 10,38 + 72 = 92,76 \text{ m}^2$$

$$V = A_B \cdot H \Rightarrow V = 10,38 \cdot 6 = 62,28 \text{ m}^3$$

- 12** Se ha construido un recipiente con forma de ortoedro, para envasar leche, cuyas dimensiones son 8 cm, 5 cm y 25 cm. Dibuja el recipiente, calcula su volumen y exprésalo en litros.

Solución:



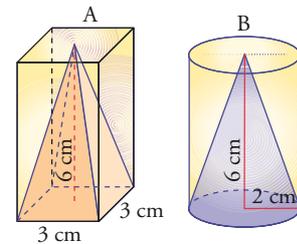
$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 8 \cdot 5 \cdot 25 = 1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ litro}$$

3. Área y volumen de la pirámide, el cono y la esfera

PIENSA Y CALCULA

- a) Calcula mentalmente el volumen del prisma de la figura A y, sabiendo que la pirámide tiene un volumen de 18 cm^3 , halla cuántas veces es más pequeño el volumen de la pirámide que el del prisma.
- b) Calcula mentalmente el volumen del cilindro de la figura B en función de π y, sabiendo que el cono tiene un volumen de $8\pi \text{ cm}^3$, halla cuántas veces es más pequeño el volumen del cono que el del cilindro.



Solución:

a) Volumen del prisma:

$$V = 3 \cdot 3 \cdot 6 = 54 \text{ cm}^3$$

$$54 : 18 = 3$$

El volumen de la pirámide es una tercera parte del volumen del prisma.

b) Volumen del cilindro:

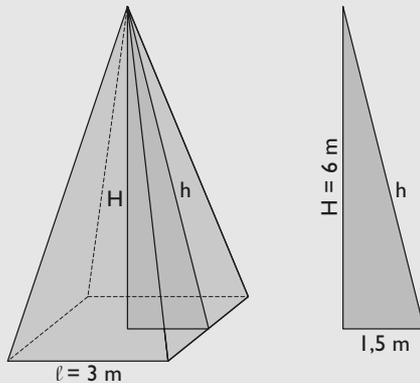
$$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 24\pi \text{ cm}^3$$

$$24\pi : 8\pi = 3$$

El volumen del cono es una tercera parte del volumen del cilindro.

- 13** Haz el dibujo y halla el área y el volumen de una pirámide cuadrangular cuya base tiene 3 m de arista y cuya altura mide 6 m. Aproxima el resultado a dos decimales.

Solución:



$$A_B = l^2 \Rightarrow A_B = 3^2 = 9 \text{ m}^2$$

$$A_L = 4l \cdot h : 2$$

Se calcula la apotema de la pirámide:

$$h = \sqrt{1,5^2 + 6^2} = 6,18 \text{ m}$$

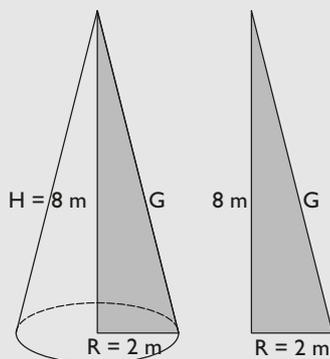
$$A_L = 4 \cdot 3 \cdot 6,18 : 2 = 37,08 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_B + A_L \Rightarrow A_T = 9 + 37,08 = 46,08 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 6 = 18 \text{ m}^3$$

- 14** Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un cono recto en el que el radio de la base mide 2 m y la altura mide 8 m. Aproxima el resultado a dos decimales.

Solución:



$$A_B = \pi R^2 \Rightarrow A_B = \pi \cdot 2^2 = 12,57 \text{ m}^2$$

$$A_L = \pi R G$$

Se calcula la generatriz G:

$$G = \sqrt{2^2 + 8^2} = 8,25 \text{ m}$$

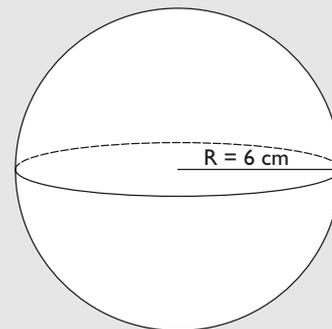
$$A_L = \pi \cdot 2 \cdot 8,25 = 51,84 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_B + A_L \Rightarrow A_T = 12,57 + 51,84 = 64,41 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 12,57 \cdot 8 = 33,52 \text{ m}^3$$

- 15** Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de una esfera cuyo radio mide 6 cm. Aproxima el resultado a dos decimales.

Solución:

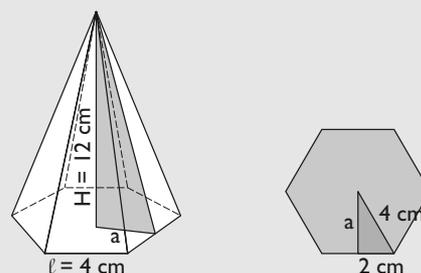


$$A = 4\pi R^2 \Rightarrow A = 4\pi \cdot 6^2 = 452,39 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi \cdot 6^3 = 904,78 \text{ cm}^3$$

- 16** Se ha construido un adorno de metacrilato con forma de pirámide hexagonal cuya base tiene 4 cm de arista y cuya altura mide 12 cm. El metacrilato cuesta 28,5 € el m². Dibuja el adorno y calcula el precio del material. Aproxima el resultado a dos decimales.

Solución:



$$A_B = \frac{P \cdot a}{2}$$

Se calcula la apotema de la base, a:

$$a = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 3,46 \text{ cm}$$

$$A_B = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3,46}{2} = 41,52 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 6 \cdot l \cdot h : 2$$

Se calcula la apotema de la pirámide, h:



$$h = \sqrt{3,46^2 + 12^2} = 12,49 \text{ cm}$$

$$A_L = 6 \cdot 4 \cdot 12,49 : 2 = 149,88 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_B + A_L$$

$$A_T = 41,52 + 149,88 = 191,4 \text{ cm}^2$$

El coste del metacrilato es:

$$191,4 : 10\,000 \cdot 28,5 = 0,55 \text{ €}$$

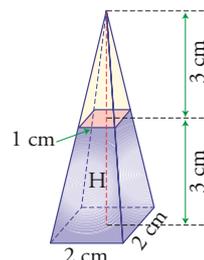
4. Área y volumen del tronco de pirámide y tronco de cono

PIENSA Y CALCULA

- a) Calcula mentalmente el volumen del tronco de pirámide azul restando, del volumen del total de la pirámide, el volumen de la pirámide amarilla.
 b) Comprueba que el resultado es el mismo que aplicando la fórmula:

$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$

donde H es la altura del tronco de pirámide.



Solución:

a) Volumen de la pirámide: $V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 6 = 8 \text{ cm}^3$

Volumen de la pirámide amarilla: $V = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 = 1 \text{ cm}^3$

Volumen del tronco: $V = 8 - 1 = 7 \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{1}{3} (4 + 1 + \sqrt{4 \cdot 1}) \cdot 3 = 7 \text{ cm}^3$

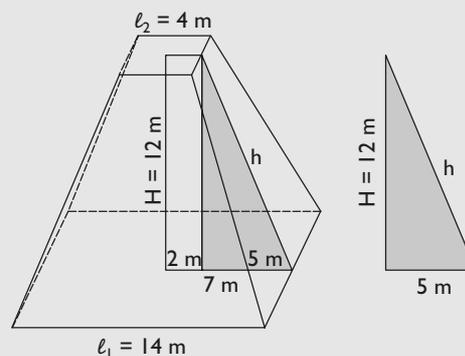
El resultado es el mismo.

Carné calculista $\frac{4}{9} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{27}$

APLICA LA TEORÍA

- 17** Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un tronco de pirámide cuadrada en el que la arista de la base mayor mide 14 m; la arista de la base menor, 4 m; y la altura, 12 m. Aproxima el resultado a dos decimales.

Solución:



$$A_{B_1} = \ell_1^2 \Rightarrow A_{B_1} = 14^2 = 196 \text{ m}^2$$

$$A_{B_2} = \ell_2^2 \Rightarrow A_{B_2} = 4^2 = 16 \text{ m}^2$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} \cdot h$$

Se calcula la apotema del tronco de pirámide, h:

$$h = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ m}$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{14 + 4}{2} \cdot 13 = 468 \text{ m}^2$$

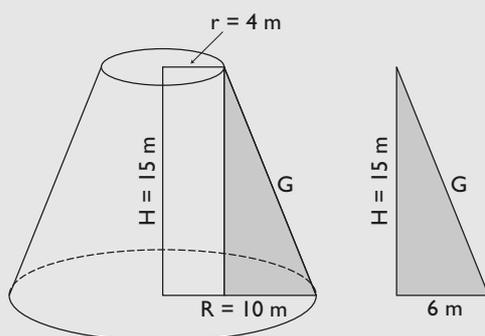
$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L \Rightarrow A_T = 196 + 16 + 468 = 680 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} (196 + 16 + \sqrt{196 \cdot 16}) \cdot 12 = 1072 \text{ m}^3$$

- 18** Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un tronco de cono en el que el radio de la base mayor mide 10 m; el radio de la base menor, 4 m, y la altura, 15 m. Aproxima el resultado a dos decimales.

Solución:



$$A_{B_1} = \pi R^2 \Rightarrow A_{B_1} = \pi \cdot 10^2 = 314,16 \text{ m}^2$$

$$A_{B_2} = \pi r^2 \Rightarrow A_{B_2} = \pi \cdot 4^2 = 50,27 \text{ m}^2$$

$$A_L = \pi(R + r)G$$

Se calcula la generatriz, G:

$$G = \sqrt{6^2 + 15^2} = 16,16 \text{ m}$$

$$A_L = \pi \cdot (10 + 4) \cdot 16,16 = 710,75 \text{ m}^2$$

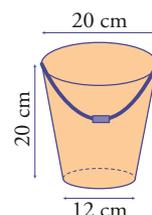
$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$$

$$A_T = 314,16 + 50,27 + 710,75 = 1075,18 \text{ m}^2$$

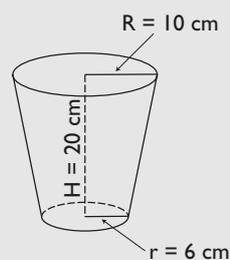
$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} (314,16 + 50,27 + \sqrt{314,16 \cdot 50,27}) \cdot 15 = 2450,50 \text{ m}^3$$

- 19** Calcula la cantidad de agua que cabe en el cubo de la figura:



Solución:



$$A_{B_1} = \pi r^2 \Rightarrow A_{B_1} = \pi \cdot 6^2 = 113,10 \text{ cm}^2$$

$$A_{B_2} = \pi R^2 \Rightarrow A_{B_2} = \pi \cdot 10^2 = 314,16 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} (113,10 + 314,16 + \sqrt{113,10 \cdot 314,16}) \cdot 20 = 4105,05 \text{ cm}^3$$

El agua que cabe en el cubo será:

$$4105,05 : 1000 = 4,10505 = 4,11 \text{ dm}^3 = 4,11 \text{ litros}$$

Ejercicios y problemas

1. Unidades de volumen

20 Completa:

- a) $15 \text{ dm}^3 = \dots \text{ cm}^3$
- b) $0,05 \text{ dam}^3 = \dots \text{ m}^3$
- c) $250 \text{ dm}^3 = \dots \text{ m}^3$
- d) $32\,500\,000 \text{ cm}^3 = \dots \text{ dam}^3$

Solución:

- a) $15 \text{ dm}^3 = 15\,000 \text{ cm}^3$
- b) $0,05 \text{ dam}^3 = 50 \text{ m}^3$
- c) $250 \text{ dm}^3 = 0,25 \text{ m}^3$
- d) $32\,500\,000 \text{ cm}^3 = 0,0325 \text{ dam}^3$

21 Expresa en metros cúbicos las siguientes cantidades:

- a) $1\,300 \text{ dm}^3$
- b) 6 hm^3
- c) $0,005 \text{ km}^3$
- d) $400\,000 \text{ cm}^3$

Solución:

- a) $1\,300 \text{ dm}^3 = 1,3 \text{ m}^3$
- b) $6 \text{ hm}^3 = 6\,000\,000 \text{ m}^3$
- c) $0,005 \text{ km}^3 = 5\,000\,000 \text{ m}^3$
- d) $400\,000 \text{ cm}^3 = 0,4 \text{ m}^3$

22 Expresa en litros las siguientes cantidades:

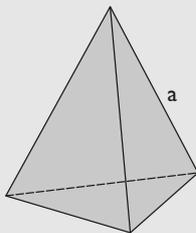
- a) $1,5 \text{ m}^3$
- b) $0,04 \text{ dam}^3$
- c) 25 dm^3
- d) 750 cm^3

Solución:

- a) $1,5 \text{ m}^3 = 1\,500 \text{ litros}$
- b) $0,04 \text{ dam}^3 = 40\,000 \text{ litros}$
- c) $25 \text{ dm}^3 = 25 \text{ litros}$
- d) $750 \text{ cm}^3 = 0,75 \text{ litros}$

23 Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un tetraedro de 5 cm de arista. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$$A = a^2\sqrt{3}$$

$$A = 5^2\sqrt{3} = 43,30 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

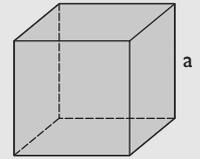
$$V = \frac{5^3\sqrt{2}}{12} = 14,73 \text{ cm}^3$$

24 Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un cubo de 4 m de arista.

Solución:

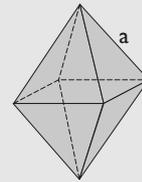
$$A = 6a^2 \Rightarrow A = 6 \cdot 4^2 = 96 \text{ m}^2$$

$$V = a^3 \Rightarrow V = 4^3 = 64 \text{ m}^3$$



25 Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un octaedro de 6 dm de arista. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



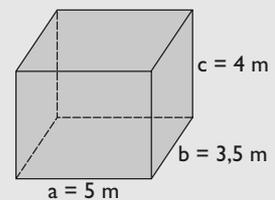
$$A = 2a^2\sqrt{3} \Rightarrow A = 2 \cdot 6^2\sqrt{3} = 124,71 \text{ dm}^2$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V = \frac{6^3\sqrt{2}}{3} = 101,82 \text{ dm}^3$$

2. Área y volumen del ortoedro, el prisma y el cilindro

26 Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son 5 m, 3,5 m y 4 m

Solución:



$$A = 2(ab + ac + bc)$$

$$A = 2(5 \cdot 3,5 + 5 \cdot 4 + 3,5 \cdot 4) = 103 \text{ m}^2$$

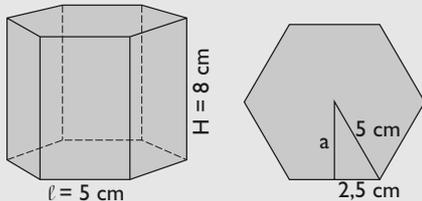
$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 5 \cdot 3,5 \cdot 4 = 70 \text{ m}^3$$

Ejercicios y problemas

- 27** Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un prisma hexagonal en el que la arista de la base mide 5 cm, y la altura del prisma, 8 cm. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$$A_B = \frac{P \cdot a}{2}$$

Se calcula la apotema, a:

$$a = \sqrt{5^2 - 2,5^2} = 4,33 \text{ cm}$$

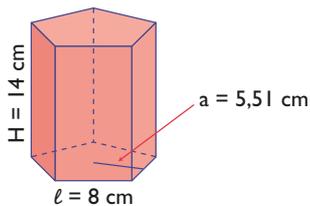
$$A_B = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4,33}{2} = 64,95 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 6 \cdot l \cdot H \Rightarrow A_L = 6 \cdot 5 \cdot 8 = 240 \text{ cm}^2$$

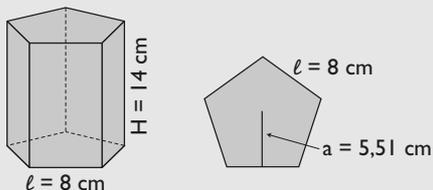
$$A_T = 2A_B + A_L \Rightarrow A_T = 2 \cdot 64,95 + 240 = 369,9 \text{ cm}^2$$

$$V = A_B \cdot H \Rightarrow V = 64,95 \cdot 8 = 519,6 \text{ cm}^3$$

- 28** Calcula el área y el volumen de un prisma pentagonal en el que la arista de la base mide 8 cm, la apotema de la base mide 5,51 cm y la altura del prisma mide 14 cm. Redondea el resultado a dos decimales.



Solución:



$$A_B = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$A_B = \frac{5 \cdot 8 \cdot 5,51}{2} = 110,2 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 5 \cdot l \cdot H$$

$$A_L = 5 \cdot 8 \cdot 14 = 560 \text{ cm}^2$$

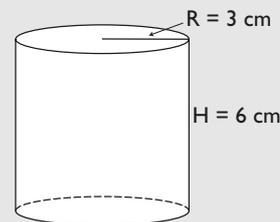
$$A_T = 2A_B + A_L \Rightarrow A_T = 2 \cdot 110,2 + 560 = 780,4 \text{ cm}^2$$

$$V = A_B \cdot H$$

$$V = 110,2 \cdot 14 = 1542,8 \text{ cm}^3$$

- 29** Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un cilindro recto cuya base tiene 3 cm de radio y cuya altura mide 6 cm. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$$A_B = \pi R^2$$

$$A_B = \pi \cdot 3^2 = 28,27 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 2\pi R \cdot H$$

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 6 = 113,10 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 2 \cdot A_B + A_L$$

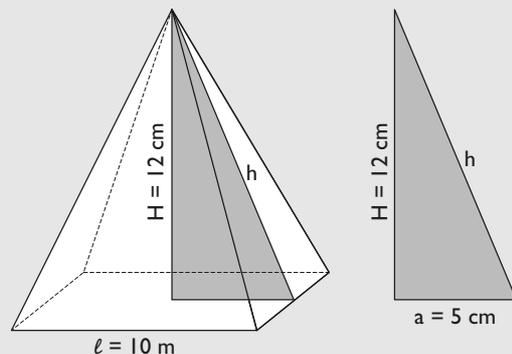
$$A_T = 2 \cdot 28,27 + 113,10 = 169,64 \text{ cm}^2$$

$$V = A_B \cdot H \Rightarrow V = 28,27 \cdot 6 = 169,62 \text{ cm}^3$$

3. Área y volumen de la pirámide, el cono y la esfera

- 30** Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de una pirámide cuadrangular en la que la arista de la base mide 10 cm y la altura de la pirámide mide 12 cm

Solución:



$$A_B = \ell^2$$

$$A_B = 10^2 = 100 \text{ m}^2$$

$$A_L = 4 \cdot \ell \cdot h : 2$$

Se calcula la apotema de la pirámide, h:

$$h = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm}$$

$$A_L = 4 \cdot 10 \cdot 13 : 2 = 260 \text{ cm}^2$$

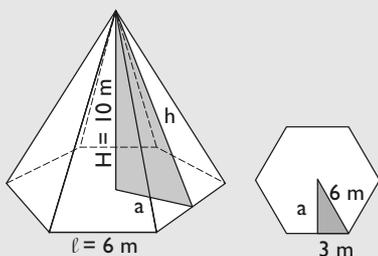
$$A_T = A_B + A_L \Rightarrow A_T = 100 + 260 = 360 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400 \text{ cm}^3$$

- 31** Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de una pirámide hexagonal en la que la arista de la base mide 6 m y la altura de la pirámide mide 10 m

Solución:



$$A_B = \frac{P \cdot a}{2}$$

Se calcula la apotema de la base, a:

$$a = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5,20 \text{ m}$$

$$A_B = \frac{6 \cdot 6 \cdot 5,20}{2} = 93,6 \text{ m}^2$$

$$A_L = 6 \cdot l \cdot h : 2$$

Se calcula la apotema de la pirámide, h:

$$h = \sqrt{5,20^2 + 10^2} = 11,27 \text{ m}$$

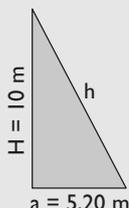
$$A_L = 6 \cdot 6 \cdot 11,27 : 2 = 202,86 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_B + A_L$$

$$A_T = 93,6 + 202,86 = 296,46 \text{ m}^2$$

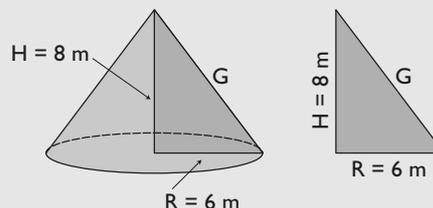
$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 93,6 \cdot 10 = 312 \text{ m}^3$$



- 32** Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un cono recto de 6 m de radio de la base y 8 m de altura.

Solución:



$$A_B = \pi R^2$$

$$A_B = \pi \cdot 6^2 = 113,10 \text{ m}^2$$

$$A_L = \pi R G$$

Se calcula la generatriz, G:

$$G = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ m}$$

$$A_L = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 188,50 \text{ m}^2$$

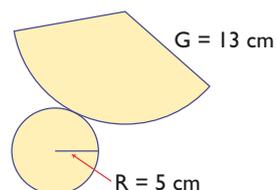
$$A_T = A_B + A_L$$

$$A_T = 113,10 + 188,50 = 301,6 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

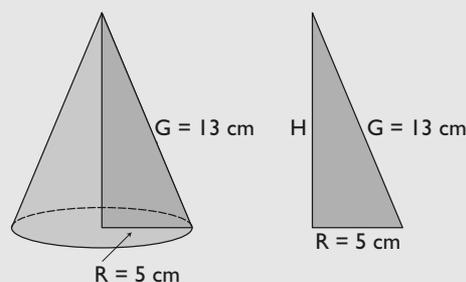
$$V = \frac{1}{3} \cdot 113,10 \cdot 8 = 301,6 \text{ m}^3$$

- 33** Calcula el área y el volumen de un cono cuyo desarrollo plano es el siguiente:



Solución:

Los datos del desarrollo plano se pueden expresar en el siguiente dibujo:



Ejercicios y problemas

$$A_B = \pi R^2 \Rightarrow A_B = \pi \cdot 5^2 = 78,54 \text{ cm}^2$$

$$A_L = \pi R G \Rightarrow A_L = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 204,20 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_B + A_L \Rightarrow A_T = 78,54 + 204,20 = 282,74 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

Se calcula la altura del cono, H:

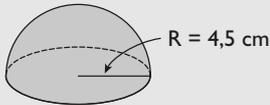
$$H = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 78,54 \cdot 12 = 314,16 \text{ cm}^3$$

- 34** Calcula cuánto cuesta el helado de la figura, que es media esfera, si el litro de helado cuesta 5 €



Solución:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 : 2$$


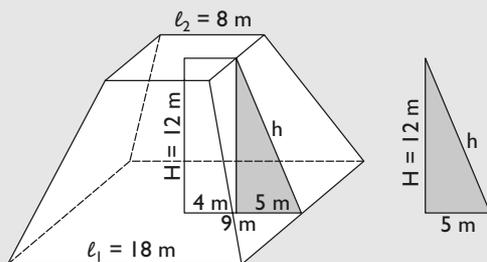
$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot 4,5^3 : 2 = 190,85 \text{ cm}^3 \approx 0,19 \text{ litros}$$

Precio: $0,19 \cdot 5 = 0,95 \text{ €}$

4. Área y volumen del tronco de pirámide y tronco de cono

- 35** Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular, en el que la arista de la base mayor mide 18 m, la arista de la base menor mide 8 m y la altura del tronco mide 12 m

Solución:



$$A_{B_1} = \ell_1^2 \Rightarrow A_{B_1} = 18^2 = 324 \text{ m}^2$$

$$A_{B_2} = \ell_2^2 \Rightarrow A_{B_2} = 8^2 = 64 \text{ m}^2$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} \cdot h$$

Se calcula la apotema del tronco, h:

$$h = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ m}$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{18 + 8}{2} \cdot 13 = 676 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$$

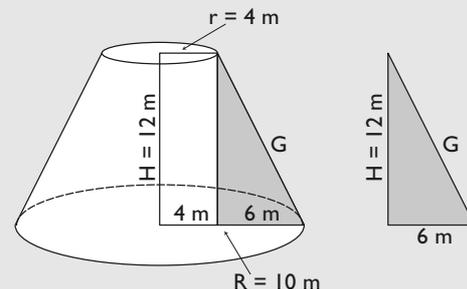
$$A_T = 324 + 64 + 676 = 1064 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} (324 + 64 + \sqrt{324 \cdot 64}) \cdot 12 = 2128 \text{ m}^3$$

- 36** Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un tronco de cono de 12 m de altura y en el que los radios de las bases miden 10 m y 4 m

Solución:



$$A_{B_1} = \pi R^2 \Rightarrow A_{B_1} = \pi \cdot 10^2 = 314,16 \text{ m}^2$$

$$A_{B_2} = \pi r^2 \Rightarrow A_{B_2} = \pi \cdot 4^2 = 50,27 \text{ m}^2$$

$$A_L = \pi (R + r) G$$

Se calcula la generatriz, G:

$$G = \sqrt{6^2 + 12^2} = 13,42 \text{ m}$$

$$A_L = \pi \cdot (10 + 4) \cdot 13,42 = 590,24 \text{ m}^2$$

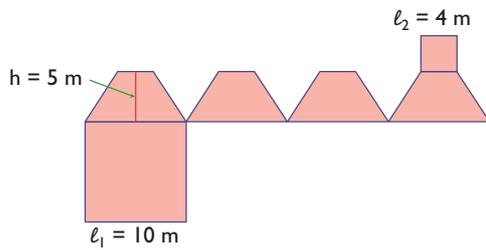
$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$$

$$A_T = 314,16 + 50,27 + 590,24 = 954,67 \text{ m}^2$$

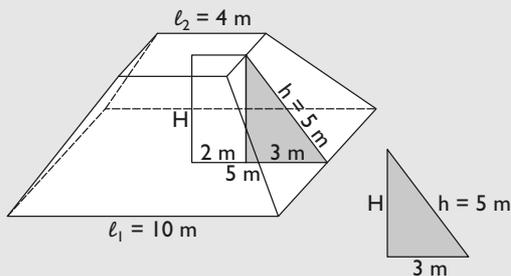
$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} (314,16 + 50,27 + \sqrt{314,16 \cdot 50,27}) \cdot 12 = 1960,40 \text{ m}^3$$

- 37** Calcula el área y el volumen del tronco de pirámide de cuyo desarrollo plano es el siguiente:



Solución:



$$A_{B_1} = l_1^2 \Rightarrow A_{B_1} = 10^2 = 100 \text{ m}^2$$

$$A_{B_2} = l_2^2 \Rightarrow A_{B_2} = 4^2 = 16 \text{ m}^2$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot h$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{10 + 4}{2} \cdot 5 = 140 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L \Rightarrow A_T = 100 + 16 + 140 = 256 \text{ m}^2$$

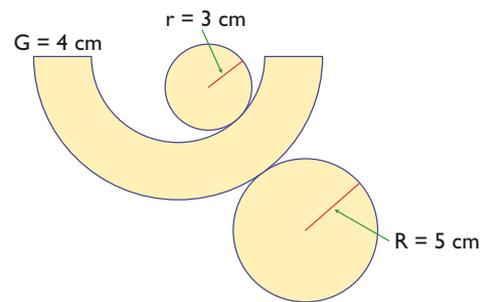
$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$

Se calcula la altura, H:

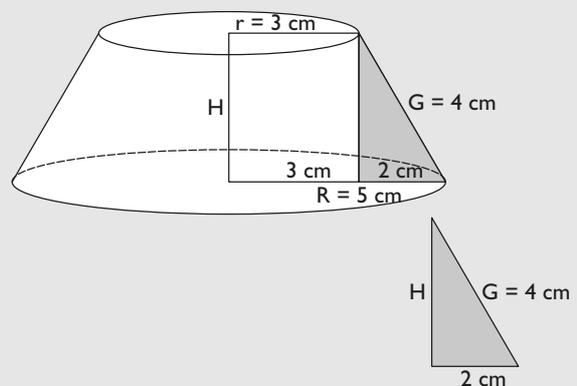
$$H = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ m}$$

$$V = \frac{1}{3} (100 + 16 + \sqrt{100 \cdot 16}) \cdot 4 = 208 \text{ m}^3$$

- 38** Calcula el área y el volumen del tronco de cono de cuyo desarrollo plano es el siguiente:



Solución:



$$A_{B_1} = \pi R^2 \Rightarrow A_{B_1} = \pi \cdot 5^2 = 78,54 \text{ cm}^2$$

$$A_{B_2} = \pi r^2 \Rightarrow A_{B_2} = \pi \cdot 3^2 = 28,27 \text{ cm}^2$$

$$A_L = \pi(R + r)G$$

$$A_L = \pi \cdot (5 + 3) \cdot 4 = 100,53 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$$

$$A_T = 78,54 + 28,27 + 100,53 = 207,34 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$

Se calcula la altura, H:

$$H = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3,46 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} (78,54 + 28,27 + \sqrt{78,54 \cdot 28,27}) \cdot 3,46 = 177,53 \text{ cm}^3$$

Ejercicios y problemas

Para ampliar

39 Halla la arista de un octaedro cuya área es $18\sqrt{3} \text{ m}^2$

Solución:

$$A = 2a^2\sqrt{3}$$

$$2a^2\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \text{ m}$$

40 Halla el área de un tetraedro regular en el que la suma de sus aristas es 24 cm. Aproxima el resultado a dos decimales.

Solución:

$$A = a^2\sqrt{3}$$

Hay que calcular el valor de la arista.

$$24 : 6 = 4 \text{ cm}$$

Luego:

$$A = a^2\sqrt{3} \Rightarrow A = 4^2\sqrt{3} = 27,71 \text{ cm}^2$$

41 Halla la arista de un tetraedro regular cuya área mide 6,93 m^2 . Aproxima el resultado a dos decimales.

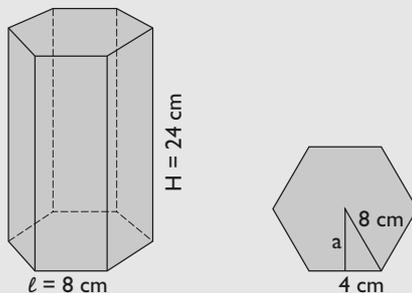
Solución:

$$A = a^2\sqrt{3}$$

$$a^2\sqrt{3} = 6,93 \Rightarrow a^2 = \frac{6,93}{\sqrt{3}} = 4 \Rightarrow a = 2 \text{ m}$$

42 Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un prisma hexagonal en el que la arista de la base mide 8 cm y la altura del prisma mide 24 cm. Aproxima el resultado a dos decimales.

Solución:



$$A_B = \frac{P \cdot a}{2}$$

Se calcula la apotema, a:

$$a = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6,93 \text{ cm}$$

$$A_B = \frac{6 \cdot 8 \cdot 6,93}{2} = 166,32 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 6 \cdot l \cdot H$$

$$A_L = 6 \cdot 8 \cdot 24 = 1152 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 2A_B + A_L$$

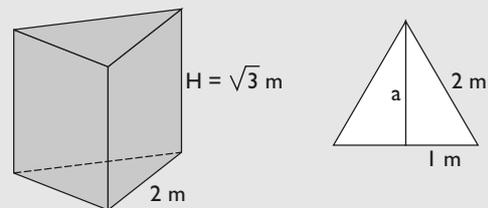
$$A_T = 2 \cdot 166,32 + 1152 = 1484,64 \text{ cm}^2$$

$$V = A_B \cdot H$$

$$V = 166,32 \cdot 24 = 3991,68 \text{ cm}^3$$

43 Haz el dibujo y calcula el volumen de un prisma recto de $\sqrt{3} \text{ m}$ de altura, que tiene por base un triángulo equilátero de 2 m de arista.

Solución:



$$V = A_B \cdot H$$

Hay que calcular el área de la base:

$$A_B = \frac{2 \cdot a}{2} = a$$

La altura del triángulo de la base es:

$$a = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3} \text{ m}$$

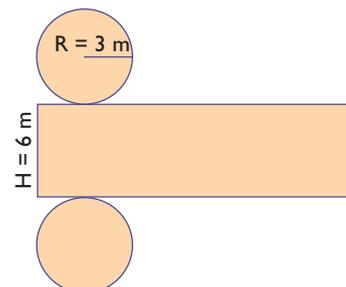
Luego:

$$A_B = a = \sqrt{3} \text{ m}$$

El volumen es:

$$V = A_B \cdot H \Rightarrow V = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \text{ m}^3$$

44 Calcula la capacidad en litros de un depósito cuyo desarrollo plano es el que se indica en la figura siguiente:



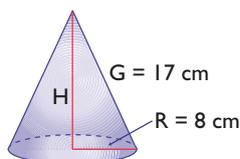
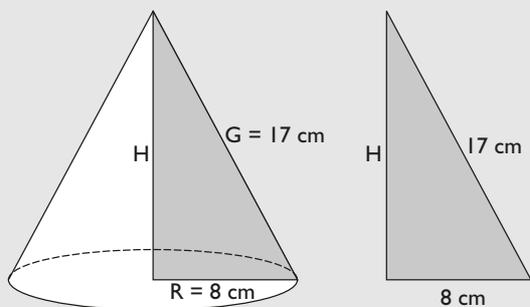
Solución:

Es un cilindro en el que el radio de la base mide 3 m y la altura del cilindro mide 6 m

Volumen:

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 169,65 \text{ m}^3 = 169\,650 \text{ litros}$$

- 45** Calcula el área y el volumen del cono de la figura siguiente:

**Solución:**

$$A_B = \pi R^2 \Rightarrow A_B = \pi \cdot 8^2 = 201,06 \text{ cm}^2$$

$$A_L = \pi R G \Rightarrow A_L = \pi \cdot 8 \cdot 17 = 427,26 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_B + A_L \Rightarrow$$

$$A_T = 201,06 + 427,26 = 628,32 \text{ cm}^2$$

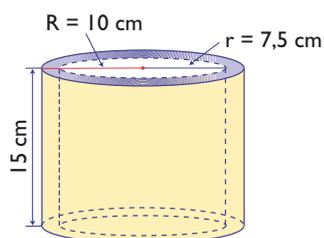
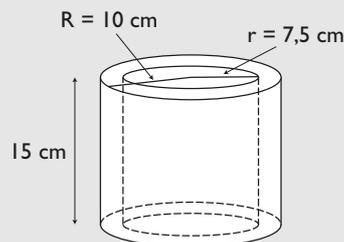
$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

Se calcula la altura, H:

$$H = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 201,06 \cdot 15 = 1\,005,3 \text{ cm}^3$$

- 46** Calcula el volumen de la pieza de la figura siguiente:

**Solución:**

El volumen de la pieza es la diferencia entre el volumen del cilindro exterior y el volumen del interior:

Área de la base del cilindro exterior:

$$A = \pi R^2 \Rightarrow A = \pi \cdot 10^2 = 314,16 \text{ cm}^2$$

Área de la base del cilindro interior:

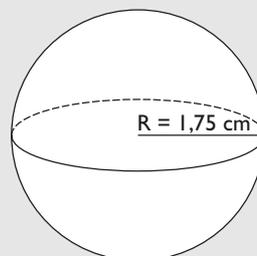
$$A' = \pi r^2 \Rightarrow A' = \pi \cdot 7,5^2 = 176,71 \text{ cm}^2$$

Área de la base de la pieza:

$$A_B = A - A' = 314,16 - 176,71 = 137,45 \text{ cm}^2$$

$$V = A_B \cdot H \Rightarrow V = 137,45 \cdot 15 = 2\,061,75 \text{ cm}^3$$

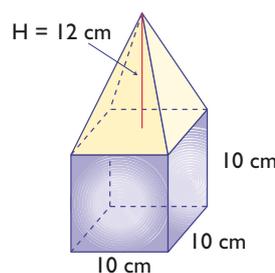
- 47** Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de una esfera de 3,5 cm de diámetro.

Solución:

$$A = 4\pi R^2 \Rightarrow A = 4\pi \cdot 1,75^2 = 38,48 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1,75^3 = 22,45 \text{ cm}^3$$

- 48** Calcula el volumen de la figura siguiente:



Ejercicios y problemas

Solución:

Volumen = volumen del cubo + volumen de la pirámide

Volumen del cubo:

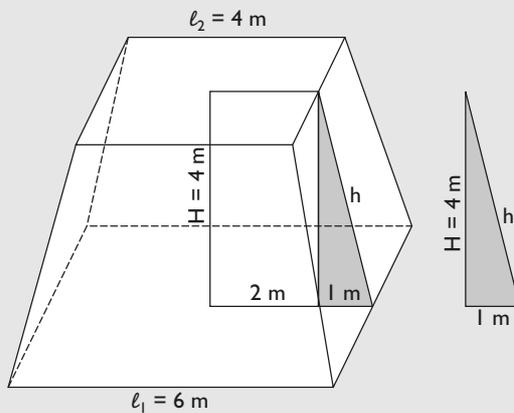
$$V_C = 10^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 12 = 400 \text{ cm}^3$$

$$V = 1000 + 400 = 1400 \text{ cm}^3$$

- 49** Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular, en el que la arista de la base mayor mide 6 m, la arista de la base menor mide 4 m y la altura del tronco mide 4 m

Solución:



$$A_{B_1} = l_1^2 \Rightarrow A_{B_1} = 6^2 = 36 \text{ m}^2$$

$$A_{B_2} = l_2^2 \Rightarrow A_{B_2} = 4^2 = 16 \text{ m}^2$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot h$$

Se calcula la apotema, h:

$$h = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4,47 \text{ m}$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{6 + 4}{2} \cdot 4,47 = 89,4 \text{ m}^2$$

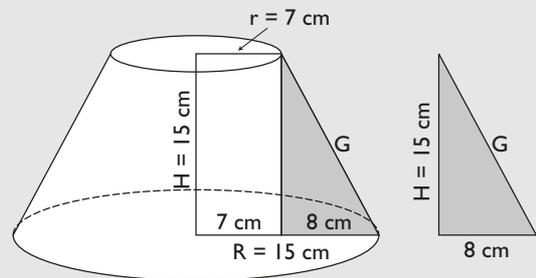
$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L \Rightarrow A_T = 36 + 16 + 89,4 = 141,4 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} (36 + 16 + \sqrt{36 \cdot 16}) \cdot 4 = 101,33 \text{ m}^3$$

- 50** Haz el dibujo y halla el área de un tronco de cono de 15 cm de altura en el que los radios de las bases miden 15 cm y 7 cm

Solución:



$$A_{B_1} = \pi R^2 \Rightarrow A_{B_1} = \pi \cdot 15^2 = 706,86 \text{ cm}^2$$

$$A_{B_2} = \pi r^2 \Rightarrow A_{B_2} = \pi \cdot 7^2 = 153,94 \text{ cm}^2$$

$$A_L = \pi(R + r)G$$

Se calcula la generatriz, G:

$$G = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17 \text{ cm}$$

$$A_L = \pi \cdot (15 + 7) \cdot 17 = 1174,96 \text{ cm}^2$$

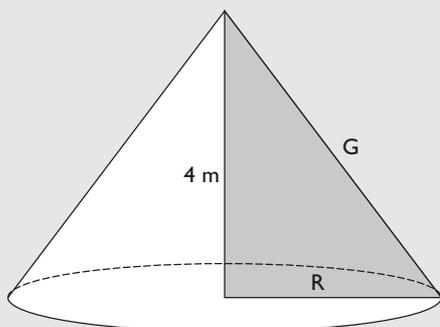
$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$$

$$A_T = 706,86 + 153,94 + 1174,96 = 2035,76 \text{ cm}^2$$

Problemas

- 51** Haz el dibujo y calcula el área lateral de un cono de 4 m de altura cuya base tiene una superficie que mide $9\pi \text{ m}^2$

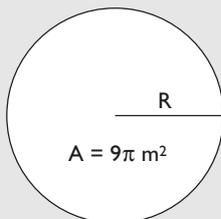
Solución:



$$A_L = \pi R G$$

Hay que calcular el radio de la base, R, y la generatriz, G

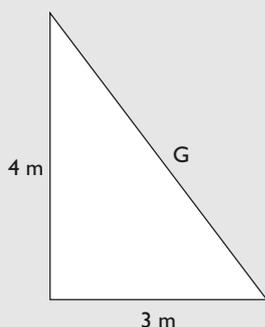
El radio R:



$$A_B = \pi R^2$$

$$\pi \cdot R^2 = 9\pi \Rightarrow R = 3 \text{ m}$$

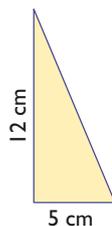
La generatriz G:



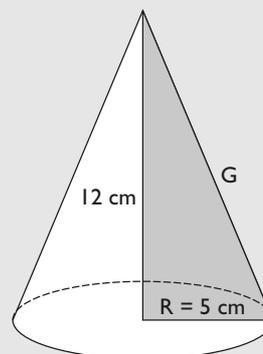
$$G = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ m}$$

$$A_L = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 47,12 \text{ m}^2$$

- 52** Haz el dibujo y calcula el área lateral del cono que se genera al hacer girar el triángulo rectángulo de la figura alrededor del cateto mayor.



Solución:



$$A_L = \pi R G$$

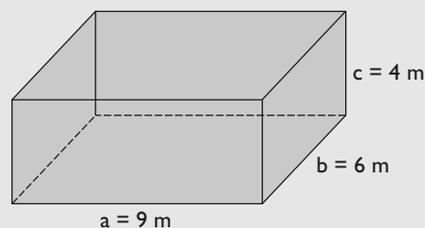
Se calcula la generatriz, G:

$$G = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

$$A_L = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 204,20 \text{ cm}^2$$

- 53** Las dimensiones de un depósito de agua son $9 \text{ m} \times 6 \text{ m} \times 4 \text{ m}$. Dibuja el depósito y calcula cuántos litros de agua contendrá cuando esté completamente lleno.

Solución:

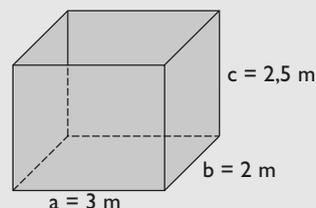


$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 9 \cdot 6 \cdot 4 = 216 \text{ m}^3 = 216\,000 \text{ litros}$$

- 54** Se quiere alicatar un cuarto de baño cuyas dimensiones son 3 m, 2 m y 2,50 m. Si se cobra a 24 €/m^2 , ¿cuánto costará alicatar el cuarto de baño?

Solución:



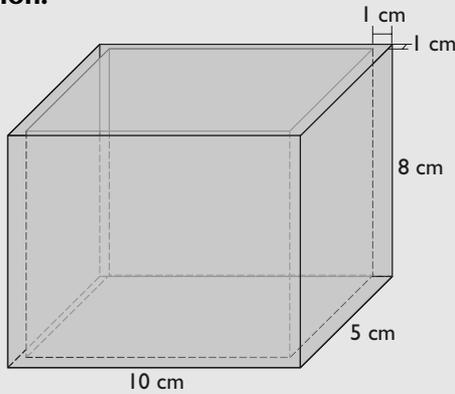
$$A = 2(3 \cdot 2,5 + 2 \cdot 2,5) = 25 \text{ m}^2$$

$$\text{Precio} = 25 \cdot 12 = 300 \text{ €}$$

Ejercicios y problemas

- 55** Se ha construido una caja de madera sin tapa, con forma de ortoedro, cuyas dimensiones exteriores son 10 cm × 5 cm × 8 cm. Si la madera tiene un grosor de 1 cm, ¿cuál será la capacidad de la caja?

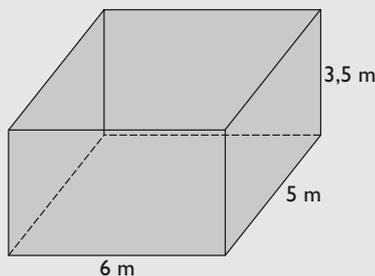
Solución:



$$V = (10 - 2)(5 - 2)(8 - 2) = 144 \text{ cm}^3$$

- 56** Un depósito de agua, con forma de ortoedro, tiene unas dimensiones de 6 m, 5 m y 3,5 m. Si está al 45% de su capacidad, ¿cuántos litros tiene?

Solución:

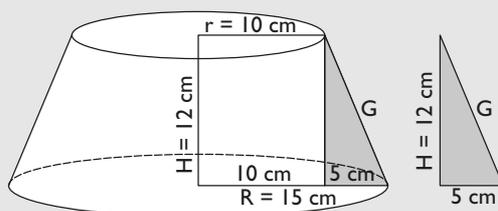


$$V = 6 \cdot 5 \cdot 3,5 = 105 \text{ m}^3 = 105\,000 \text{ litros}$$

$$105\,000 \cdot 0,45 = 47\,250 \text{ litros}$$

- 57** La tulipa de una lámpara tiene forma de tronco de cono. El radio de la base mayor mide 15 cm; el radio de la base menor, 10 cm, y su altura, 12 cm. Si el material con el que está construida cuesta a 12,5 €/m², ¿cuál será el precio del material utilizado?

Solución:



$$A_L = \pi(R + r)G$$

Se calcula la generatriz, G:

$$G = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

$$A_L = \pi(15 + 10) \cdot 13 = 1\,021,02 \text{ cm}^2 = 0,1\,021 \text{ m}^2$$

$$\text{Precio del material: } 0,1021 \cdot 12,5 = 1,28 \text{ €}$$

- 58** Un bote de refresco, con forma de cilindro, contiene 33 cl. Calcula el radio de la base sabiendo que su altura es de 11 cm

Solución:

$$V = A_B \cdot H$$

$$\pi R^2 \cdot 11 = 330 \text{ cm}^3$$

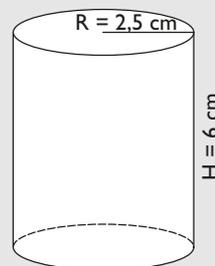
$$R^2 = \frac{330}{11\pi} = 9,55$$

$$R = 3,09 \text{ cm}$$



- 59** El envase de un yogur es un cilindro en el que el diámetro de la base mide 5 cm, y la altura, 6 cm. Calcula la superficie de la etiqueta que rodea completamente la superficie lateral del envase.

Solución:



$$A_L = 2\pi RH$$

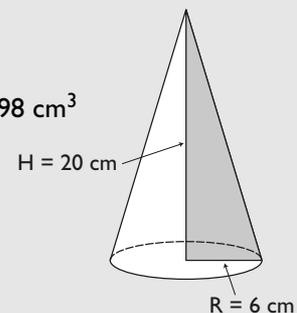
$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot 2,5 \cdot 6 = 94,25 \text{ cm}^2$$

- 60** Se quiere hacer una pieza de plástico con forma de cono recto, que debe llenarse de agua. Si la pieza debe tener 12 cm de diámetro de la base y 20 cm de altura, ¿cuál será su volumen?

Solución:

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

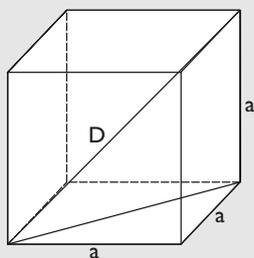
$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 20 = 753,98 \text{ cm}^3$$



Para profundizar

- 61** La diagonal de un cubo mide 4 m. Calcula el área total del cubo.

Solución:



Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = a^2 + a^2 + a^2$$

$$D^2 = 3a^2$$

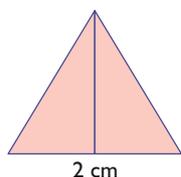
$$3a^2 = 4^2$$

$$3a^2 = 16$$

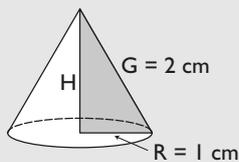
$$a^2 = 16/3$$

$$A = 6 \cdot 16/3 = 32 \text{ m}^2$$

- 62** Calcula el área lateral y el volumen del cuerpo que se genera al hacer girar el triángulo equilátero de la figura sobre su altura.



Solución:



Se genera un cono de altura H , de generatriz $G = 2 \text{ cm}$ y radio de la base $R = 1 \text{ cm}$

$$A_L = \pi R G \Rightarrow A_L = \pi \cdot 1 \cdot 2 = 6,28 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

Se calcula la altura, H :

$$H = \sqrt{2^2 - 1^2} = 1,73 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1 \cdot 1,73 = 1,81 \text{ cm}^3$$

- 63** Se introduce una esfera en un recipiente completamente lleno de agua y se derraman $36\pi \text{ dm}^3$ de agua. Calcula el radio de la esfera.

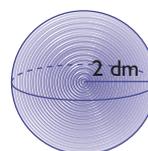
Solución:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$$

$$R^3 = \frac{3 \cdot 36\pi}{4\pi} = 27$$

$$R = 3 \text{ dm}$$

- 64** Calcula el peso de la esfera de la figura sabiendo que es maciza y su densidad es de $7,5 \text{ kg/dm}^3$



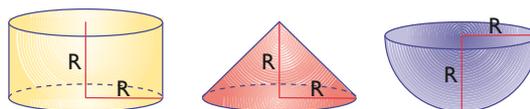
Solución:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = 33,51 \text{ dm}^3$$

$$\text{Peso} = 33,51 \cdot 7,5 = 251,33 \text{ kg}$$

- 65** Compara los volúmenes de los tres cuerpos. ¿Qué relación encuentras entre ellos?



Solución:

$$V_{\text{Cilindro}} = A_B \cdot H \Rightarrow V_{\text{Cilindro}} = \pi R^2 R = \pi R^3$$

$$V_{\text{Cono}} = \frac{1}{3} A_B \cdot H \Rightarrow V_{\text{Cono}} = \frac{1}{3} \pi R^2 R = \frac{1}{3} \pi R^3$$

$$V_{\text{Semiesfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3 : 2 \Rightarrow V_{\text{Semiesfera}} = \frac{2}{3}\pi R^3$$

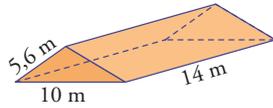
Se da la relación:

$$\frac{2}{3}\pi R^3 + \frac{1}{3}\pi R^3 = \pi R^3$$

$$V_{\text{Semiesfera}} + V_{\text{Cono}} = V_{\text{Cilindro}}$$

Aplica tus competencias

- 66** Se quieren poner tejas en un tejado como el de la figura adjunta. Si cada teja cubre aproximadamente 5 dm^2 , ¿cuántas tejas harán falta para cubrir el tejado?



Solución:

$$\text{Área del tejado: } 2 \cdot 5,6 \cdot 14 = 156,8 \text{ m}^2$$

$$156,8 \text{ m}^2 = 15\,680 \text{ dm}^2$$

$$15\,680 : 5 = 3\,136 \text{ tejas.}$$

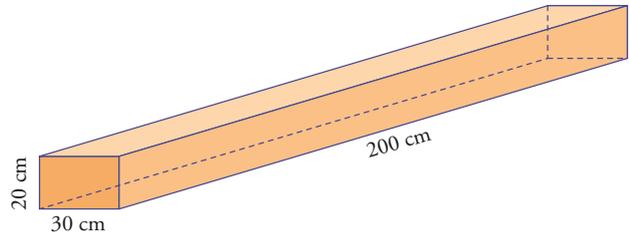
- 67** A Pedro le ha recetado el médico que se tome 10 cm^3 de jarabe para la tos tres veces al día. Si el frasco contiene 240 ml, ¿cuántos días puede tomar jarabe?

Solución:

$$\text{Toma cada día: } 3 \cdot 10 = 30 \text{ cm}^3 = 30 \text{ ml}$$

$$\text{N}^\circ \text{ de días: } 240 : 30 = 8 \text{ días.}$$

- 68** Una viga de hormigón tiene forma de ortoedro de dimensiones $200 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$. Si la densidad del hormigón es $2,4 \text{ kg/dm}^3$, ¿cuánto pesará la viga?



Solución:

$$V = 200 \cdot 30 \cdot 20 = 120\,000 \text{ cm}^3$$

$$120\,000 \text{ cm}^3 = 120 \text{ dm}^3$$

$$\text{Peso: } 120 \cdot 2,4 = 288 \text{ kg}$$

Comprueba lo que sabes

- 1** Escribe los múltiplos y submúltiplos del metro cúbico. Pon un ejemplo de cómo se pasa de hectómetro cúbico a metro cúbico.

Solución:

	Nombre	Abreviatura	Cantidad en metros
Múltiplos	kilómetro cúbico	km³	1 000 000 000 m ³ = 10 ⁹ m ³
	hectómetro cúbico	hm³	1 000 000 m ³ = 10 ⁶ m ³
	decámetro cúbico	dam³	1 000 m ³ = 10 ³ m ³
	metro cúbico	m³	1 m ³
Submúltiplos	decímetro cúbico	dm³	0,001 m ³ = 10 ⁻³ m ³
	centímetro cúbico	cm³	0,000001 m ³ = 10 ⁻⁶ m ³
	milímetro cúbico	mm³	0,000000001 m ³ = 10 ⁻⁹ m ³

Ejemplo

$$12 \text{ hm}^3 = 12\,000\,000 \text{ m}^3$$

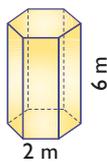
- 2** Completa:

- a) 17 hm³ = ... litros b) 250 cl = ... dm³
 c) 2 000 cm³ = ... litros d) 5 ml = ... cm³

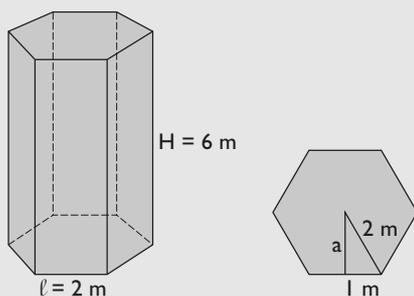
Solución:

- a) 17 hm³ = 17 000 000 000 litros
 b) 250 cl = 2,5 dm³
 c) 2 000 cm³ = 2 litros
 d) 5 ml = 5 cm³

- 3** Calcula el área y el volumen de un prisma hexagonal en el que la arista de la base mide 2 m y la altura del prisma mide 6 m. Aproxima el resultado a dos decimales.



Solución:



$$A_B = \frac{P \cdot a}{2}$$

Se calcula la apotema:

$$a = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} = 1,73 \text{ m}$$

$$A_B = \frac{6 \cdot 2 \cdot 1,73}{2} = 10,38 \text{ m}^2$$

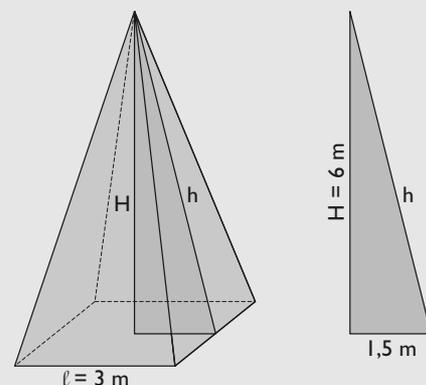
$$A_L = 6\ell H \Rightarrow A_L = 6 \cdot 2 \cdot 6 = 72 \text{ m}^2$$

$$A_T = 2A_B + A_L \Rightarrow A_T = 2 \cdot 10,38 + 72 = 92,76 \text{ m}^2$$

$$V = A_B \cdot H \Rightarrow V = 10,38 \cdot 6 = 62,28 \text{ m}^3$$

- 4** Haz el dibujo y halla el área y el volumen de una pirámide cuadrangular cuya base tiene 3 m de arista y cuya altura mide 6 m. Aproxima el resultado a dos decimales.

Solución:



Comprueba lo que sabes

$$A_B = \ell^2 \Rightarrow A_B = 3^2 = 9 \text{ m}^2$$

$$A_L = 4\ell \cdot h : 2$$

Se calcula la apotema de la pirámide, h:

$$h = \sqrt{1,5^2 + 6^2} = 6,18 \text{ m}$$

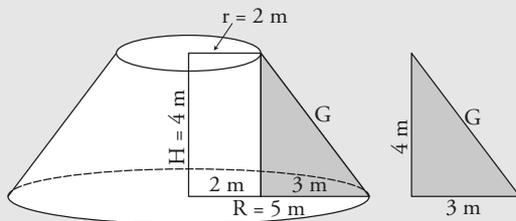
$$A_L = 4 \cdot 3 \cdot 6,18 : 2 = 37,08 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_B + A_L \Rightarrow A_T = 9 + 37,08 = 46,08 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 6 = 18 \text{ m}^3$$

- 5** Halla el área y el volumen de un tronco de cono en el cual el radio de la base mayor mide 5 m; el radio de la base menor, 2 m, y la altura, 4 m. Aproxima el resultado a dos decimales.

Solución:



$$A_{B_1} = \pi R^2 \Rightarrow A_{B_1} = \pi \cdot 5^2 = 78,54 \text{ m}^2$$

$$A_{B_2} = \pi r^2 \Rightarrow A_{B_2} = \pi \cdot 2^2 = 12,57 \text{ m}^2$$

$$A_L = \pi(R + r)G$$

Hay que calcular la generatriz, G:

$$G = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$$

$$A_L = \pi \cdot (5 + 2) \cdot 5 = 109,96 \text{ m}^2$$

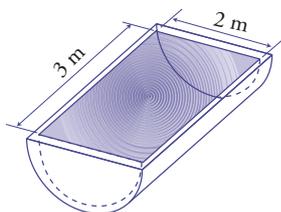
$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$$

$$A_T = 78,54 + 12,57 + 109,96 = 201,07 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}})$$

$$V = (78,54 + 12,57 + \sqrt{78,54 \cdot 12,57}) \cdot 4 = 163,37 \text{ m}^3$$

- 6** ¿Cuántas garrafas de 5 litros se llenarán con el agua del depósito de la figura?



Solución:

$$V = V_{\text{Cilindro}} : 2 = \pi \cdot 1^2 \cdot 3 : 2 = 4,71 \text{ m}^3 =$$

$$= 4710 \text{ litros}$$

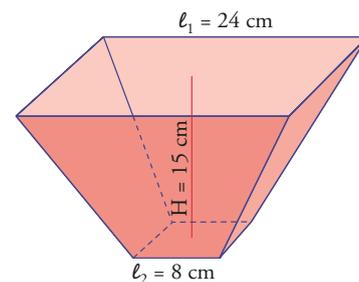
$$4710 : 5 = 942 \text{ garrafas.}$$

- 7** Se introduce una esfera en un recipiente completamente lleno de agua y se derraman $36\pi \text{ dm}^3$ de agua. Calcula el radio de la esfera.

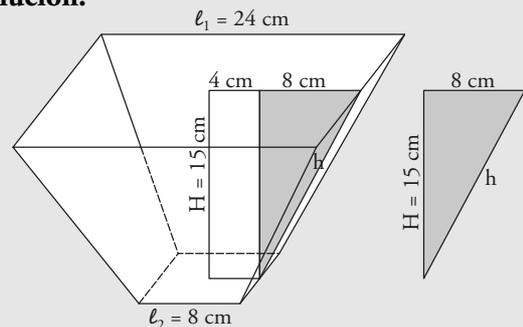
Solución:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 36 \Rightarrow R^3 = \frac{3 \cdot 36\pi}{4\pi} = 27 \Rightarrow R = 3 \text{ dm}$$

- 8** Se quiere construir un farolillo con forma de tronco de pirámide y con las caras laterales de cristal. Si la arista de la base mayor mide 24 cm, la arista de la base menor mide 8 cm, y la altura mide 15 cm, ¿cuánto costará el cristal de las caras laterales si se cobra a 24 € el metro cuadrado?



Solución:



$$A_L = 4 \cdot \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot h$$

Hay que calcular la apotema del tronco de pirámide, h:

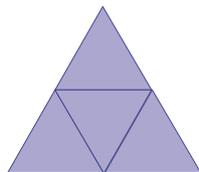
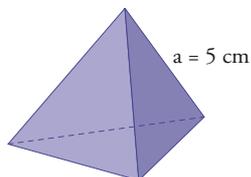
$$h = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17 \text{ cm}$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{24 + 8}{2} \cdot 17 = 1088 \text{ cm}^2 = 0,1088 \text{ m}^2$$

$$\text{Dinero} = 0,1088 \cdot 24 = 2,61 \text{ €}$$

Paso a paso

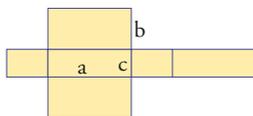
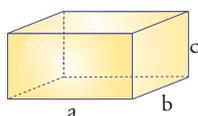
- 69** Calcula el área y el volumen de un tetraedro de 5 cm de arista.



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

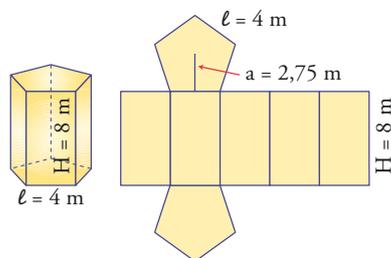
- 70** Calcula el área y el volumen de un ortoedro de 5 cm, 3 cm, y 2 cm de aristas.



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

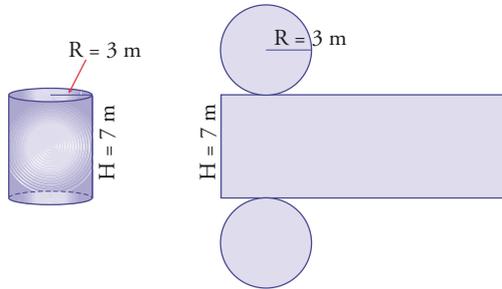
- 71** Calcula el área y el volumen de un prisma pentagonal de 4 m de arista de la base; 2,75 m de apotema de la base y 8 m de altura.



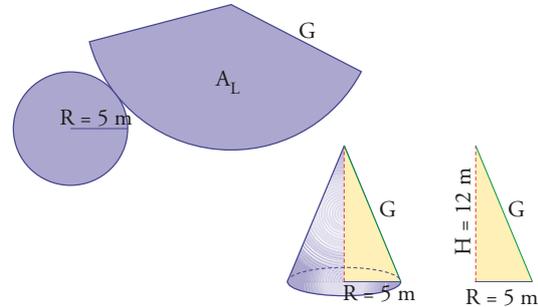
- 72** Internet. Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema.**

Practica

73 Halla el área y el volumen de un cilindro recto de 3 m de radio de la base y 7 m de altura.



75 Halla el área y el volumen de un cono recto de 5 m de radio de la base y 12 m de altura.



Solución:

```

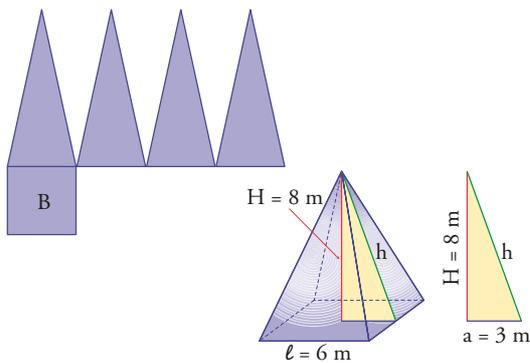
Ejercicio 73
Área y volumen del cilindro
R = 3 → 3
H = 7 → 7
Abase = pi_ · R² → 28.274
Alateral = 2 · pi_ · R · H → 131.95
Atotal = 2 · Abase + Alateral → 188.5
V = Abase · H → 197.92
    
```

Solución:

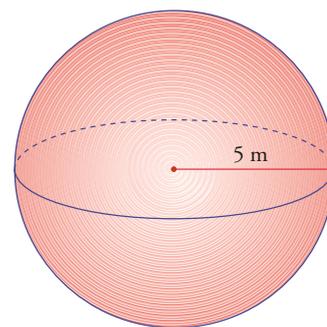
```

Ejercicio 75
Área y volumen del cono
R = 5 → 5
H = 12 → 12
G = √(R² + H²) → 13
Abase = pi_ · R² → 78.54
Alateral = pi_ · R · G → 204.2
Atotal = Abase + Alateral → 282.74
V = 1/3 · Abase · H → 314.16
    
```

74 Halla el área y el volumen de una pirámide cuadrangular de 6 m de arista de la base y 8 m de altura.



76 Halla el área y el volumen de una esfera de 3 m de radio.



Solución:



Solución:



Bloque 4: Geometría

- 1** b
- 2** c
- 3** d
- 4** b
- 5** b
- 6** a
- 7** d
- 8** b
- 9** c
- 10** a

Ejercicios

11 Carpintero

A: Sí.

B: No.

C: Sí.

D: Sí.

12 Dados

I: No.

II: Sí.

III: Sí.

IV: No.



BLOQUE V

Estadística

14. Estadística



1. Tabla de frecuencias

PIENSA Y CALCULA

Se ha realizado una encuesta entre 30 alumnos y se ha recogido la siguiente información:

Estudios que desea realizar	Grado medio	Grado superior	No desea estudiar	No sabe
Nº de personas	8	11	7	4

Observa la tabla y contesta:

- ¿Sobre qué asunto se ha realizado la encuesta?
- ¿Qué significan los números de la segunda fila?

Solución:

- Sobre el nivel de estudios que desean realizar.
- El número de alumnos que quieren realizar cada uno de los niveles de estudios.

Carné calculista 625,8 : 7,05 | C = 88,76; R = 0,042

APLICA LA TEORÍA

- Se desea hacer un estudio sobre el número de personas que hacen deporte en una localidad. Para ello se entrevista a 300 personas al azar. Indica la población, la muestra y el carácter estadístico que se estudia, y clasifica este último.

Solución:

Población: Todas las personas que viven en esa localidad.

Muestra: 300 personas de la localidad.

Carácter estadístico: Hacer deporte. Es cualitativo.

- Clasifica los siguientes caracteres estadísticos:
 - Color del cabello.
 - Nº de libros leídos.
 - Peso de un paquete.

Solución:

- Cualitativo.
- Cuantitativo discreto.
- Cuantitativo continuo.

- Se ha lanzado un dado numerado con seis caras y se han anotado los resultados siguientes:

1	3	1	4	2	2	5	3	6	2	4	5	4
6	2	3	5	3	6	3	4	1	6	3	4	

Clasifica el carácter estudiado y haz una tabla de frecuencias absoluta y relativa.

Solución:

El carácter es cuantitativo discreto.

x_i	n_i	f_i
1	3	0,12
2	4	0,16
3	6	0,24
4	5	0,20
5	3	0,12
6	4	0,16
Total	25	1,00

- 4** Se ha realizado una encuesta sobre la opinión que a unos usuarios les merece una línea ADSL, y se han obtenido los siguientes resultados:

Mala	Buena	Regular	Buena	Regular
Buena	Regular	Buena	Mala	Buena
Regular	Buena	Buena	Buena	Regular
Buena	Regular	Mala	Regular	Buena
Regular	Mala	Regular	Regular	Mala

Clasifica el carácter estudiado y haz una tabla de frecuencias absoluta y relativa.

Solución:

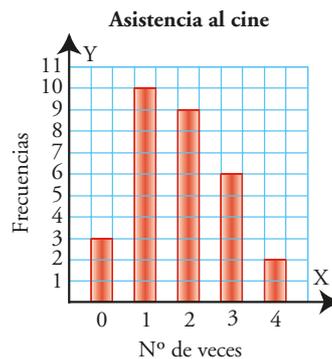
Cualitativo.

x_i	n_i	f_i
Mala	5	0,2
Regular	10	0,4
Buena	10	0,4
Total	25	1,0

2. Representación gráfica

PIENSA Y CALCULA

- a) ¿Qué representa el gráfico adjunto?
 b) ¿A cuántas personas se les ha realizado la encuesta?
 c) ¿Cuál es el valor más frecuente y cuál el menos frecuente?

**Solución:**

- a) La distribución del número de veces que se va al cine.
 b) 30 personas.
 c) El más frecuente, 1 vez. El menos frecuente, 4 veces.

Carné calculista $\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{5} : \frac{3}{10} = -\frac{2}{15}$

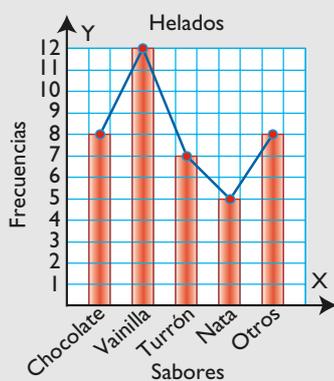
5 Se ha realizado un estudio en una heladería preguntando a 40 personas sobre los sabores más solicitados, y se han obtenido los resultados de la tabla siguiente:

x_i	Chocolate	Vainilla	Turrón	Nata	Otro
n_i	8	12	7	5	8

- a) Representa los datos en un diagrama de barras e interpreta el gráfico obtenido.
 b) Representa el polígono lineal.

Solución:

a) y b)



El sabor más frecuente es la vainilla, y entre el chocolate y la vainilla suponen la mitad de las elecciones.

6 Se ha realizado una encuesta sobre el tipo de deporte preferido entre los estudiantes de un centro escolar, y se han obtenido los siguientes resultados:

Deporte	Atletismo	Baloncesto	Fútbol	Natación
Frecuencia	20	30	40	10

Representa en un diagrama de sectores los datos e interpreta el gráfico obtenido.

Solución:

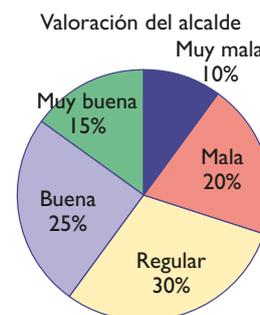
$$360 : 100 = 3,6^\circ$$

Deporte	n_i	Amplitud
Atletismo	20	$3,6^\circ \cdot 20 = 72^\circ$
Baloncesto	30	$3,6^\circ \cdot 30 = 108^\circ$
Fútbol	40	$3,6^\circ \cdot 40 = 144^\circ$
Natación	10	$3,6^\circ \cdot 10 = 36^\circ$
Total	100	360°



El fútbol y el baloncesto son elegidos por la mayor parte de los encuestados. Son claramente los deportes preferidos.

7 El siguiente diagrama representa la opinión de 60 vecinos sobre la actuación de su alcalde. Haz la tabla de frecuencias absolutas y da la amplitud de los ángulos de los sectores.



Solución:

$$360 : 60 = 6^\circ$$

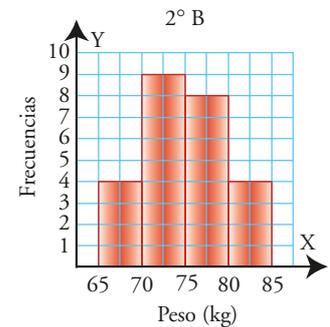
x_i	n_i	Amplitud
Muy mala	$60 \cdot 0,10 = 6$	$6^\circ \cdot 6 = 36^\circ$
Mala	$60 \cdot 0,20 = 12$	$6^\circ \cdot 12 = 72^\circ$
Regular	$60 \cdot 0,30 = 18$	$6^\circ \cdot 18 = 108^\circ$
Buena	$60 \cdot 0,25 = 15$	$6^\circ \cdot 15 = 90^\circ$
Muy buena	$60 \cdot 0,15 = 9$	$6^\circ \cdot 9 = 54^\circ$
Total	60	360°

3. Representación gráfica de caracteres continuos

PIENSA Y CALCULA

Se ha hecho un estudio en el curso 2º B. Observa el siguiente gráfico y contesta:

- a) ¿Qué carácter estadístico se estudia? Clasifícalo.
- b) ¿Cuál es el ancho de cada rectángulo rojo? ¿Y su altura?
- c) ¿Cuál es el número total de datos?
- d) ¿Cuál es el peso más frecuente?



Solución:

- a) El peso. Es cuantitativo continuo.
- b) 5 kg. Las alturas son 4, 9, 8 y 4
- c) 25
- d) El comprendido entre 70 kg y 75 kg

Carné calculista 502,3 : 0,84 | C = 597,97; R = 0,0052

APLICA LA TEORÍA

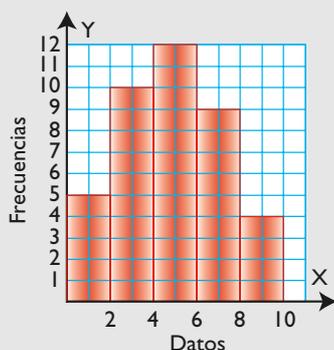
8 Representa en un histograma la siguiente tabla de frecuencias:

Intervalo	Frecuencias
0-2	5
2-4	10
4-6	12
6-8	9
8-10	4
Total	40

9 El tiempo en minutos que tardan un grupo de escolares en llegar al centro es:

2	5	3	10	6	11	14	7
16	18	8	12	15	10	20	11
10	13	10	18	4	20	6	22
8	15	7	10	24	13	18	15
12	5	16	7	10	12	4	7

Solución:

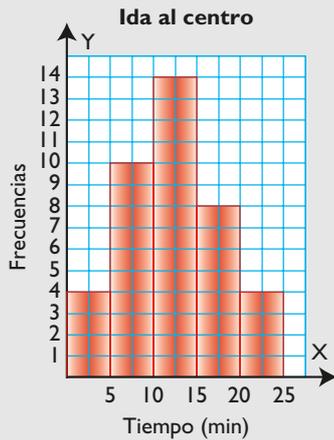


Completa la siguiente tabla de frecuencias, representa los datos en un histograma e interpreta los datos.

Intervalo	Frecuencias
0-5	
5-10	
10-15	
15-20	
20-25	
Total	

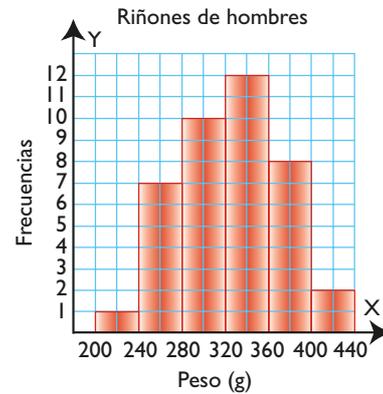
Solución:

Intervalo	n_i	f_i
0 - 5	4	0,10
5 - 10	10	0,25
10 - 15	14	0,35
15 - 20	8	0,20
20 - 25	4	0,10
Total	40	1,00



El tiempo empleado más frecuente está entre 10 y 15 minutos. Hay muy pocos alumnos que vivan al lado del centro o muy lejos.

10 El siguiente histograma recoge el peso de los riñones, redondeados en gramos, de hombres normales de 40 años. Haz la tabla de frecuencias e interpreta el resultado.



Solución:

Peso	n_i
200 - 240	1
240 - 280	7
280 - 320	10
320 - 360	12
360 - 400	8
400 - 440	2
Total	40

Aproximadamente la mitad de la población está entre 280 g y 360 g, en los dos intervalos centrales. A la izquierda y a la derecha de estos intervalos se reparten los pesos de forma bastante simétrica.

4. Medidas de centralización

PIENSA Y CALCULA

Jorge ha obtenido en sus tres últimos exámenes las calificaciones: 5, 8 y 8. Calcula la nota media.

Solución:

$$(5 + 8 + 8) : 3 = 21 : 3 = 7$$

Carné calculista $\frac{2}{3} : \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{5}$

11 Calcula la media aritmética, la moda y la mediana de la siguiente tabla de datos:

x_i	3	4	5	6	7	8
n_i	1	4	10	5	4	1

Solución:

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$
3	1	3
4	4	16
5	10	50
6	5	30
7	4	28
8	1	8
Total	25	135

Media: $\bar{x} = \frac{135}{25} = 5,4$

Moda: 5

Mediana: 5

12 El número de goles que ha marcado un equipo de fútbol en los últimos 20 partidos han sido los siguientes:

Nº de goles: x_i	0	1	2	3	4	5
Frecuencia: n_i	2	5	8	2	2	1

Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido, e interpreta el resultado.

Solución:

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$
0	2	0
1	5	5
2	8	16
3	2	6
4	2	8
5	1	5
Total	20	40

Como el carácter es cuantitativo, se pueden calcular los tres parámetros.

Media: $\bar{x} = \frac{40}{20} = 2$

Moda: 2

Mediana: 2

La media de dos goles es el valor alrededor del cual se distribuyen los datos. Además, en este caso, la mediana, que es el valor central, coincide con la media y la moda.

13 El número de días que en una ciudad se han dado distintos factores climáticos han sido los siguientes:

x_i	Lluvia	Soleado	Nubes y claros	Nublado
n_i	9	12	5	4

Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido, e interpreta el resultado.

Solución:

Como el carácter es cualitativo no ordenable, el único parámetro que tiene sentido es la moda.

Moda: Soleado.

14 Calcula la media en la siguiente tabla de frecuencias:

x_i	3-7	7-11	11-15	15-19
n_i	4	10	3	3

Solución:

Intervalo	x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$
3 - 7	5	4	20
7 - 11	9	10	90
11 - 15	13	3	39
15 - 19	17	3	51
Total		20	200

Media: $\bar{x} = \frac{200}{20} = 10$

Ejercicios y problemas

1. Tabla de frecuencias

- 15** Se desea hacer un estudio sobre el número de ordenadores que tienen en sus hogares las familias de una ciudad. Se entrevista a 500 familias al azar. Indica la población, la muestra y el carácter estadístico que se estudia, y clasifícalo.

Solución:

Población: Todas las personas que viven en la ciudad.

Muestra: 500 personas de la ciudad.

Carácter estadístico: número de ordenadores en los hogares. Es cuantitativo discreto.

- 16** Clasifica los siguientes caracteres estadísticos:
- Sueldo mensual.
 - Número de hermanos.
 - Color de un coche.

Solución:

- Cuantitativo continuo.
- Cuantitativo discreto.
- Cualitativo.

- 17** Se ha estudiado el consumo diario de piezas de fruta que comen unos escolares, y se han registrado los siguientes datos:

0	1	2	1	3	1	2	1	3	0
2	4	1	4	0	3	0	1	1	2
1	0	2	1	4	1	2	1	3	0
0	2	0	4	1	0	1	0	1	1
1	1	3	0	3	1	2	1	0	1

Clasifica el carácter estudiado y haz una tabla de frecuencias absoluta y relativa. Interpreta el resultado.

Solución:

Carácter cuantitativo discreto.

x_i	n_i	f_i
0	12	0,24
1	20	0,40
2	8	0,16
3	6	0,12
4	4	0,08
Total	50	1,00

Como se puede observar en la tabla, más de la mitad de los escolares comen sólo una pieza de

de fruta o no comen ninguna. Esta población tiene un consumo de fruta escaso.

- 18** Se ha realizado una encuesta sobre las preferencias de lectura de un grupo de personas, y se han recogido los siguientes datos:

Novela	Aventuras	C. ficción	Aventuras	Novela
Aventuras	C. ficción	Novela	Aventuras	C. ficción
Poesía	C. ficción	Poesía	Novela	Aventuras
Aventuras	Novela	Aventuras	C. ficción	Aventuras
C. ficción	Aventuras	C. ficción	C. ficción	Novela
Novela	C. ficción	Poesía	Aventuras	C. ficción
C. ficción	Aventuras	Novela	C. ficción	Novela
Novela	Poesía	Aventuras	Aventuras	Aventuras

Clasifica el carácter estudiado y haz una tabla de frecuencias absoluta y relativa. Interpreta el resultado.

Solución:

Carácter cualitativo.

x_i	n_i	f_i
Novela	10	0,25
Aventuras	14	0,35
Ciencia ficción	12	0,30
Poesía	4	0,10
Total	40	1,00

Claramente, la poesía es el género menos leído, mientras que los otros tres géneros se reparten de forma parecida.

2. Representación gráfica

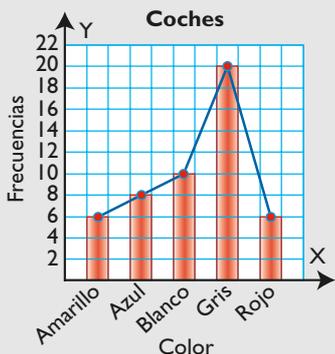
- 19** Se ha realizado un estudio sobre el color del coche de un grupo de familias, y se ha obtenido la siguiente tabla de frecuencias:

x_i	Amarillo	Azul	Blanco	Gris	Rojo
n_i	6	8	10	20	6

- Representa los datos en un diagrama de barras, e interpreta el gráfico obtenido.
- Representa el polígono lineal.

Solución:

a) y b)



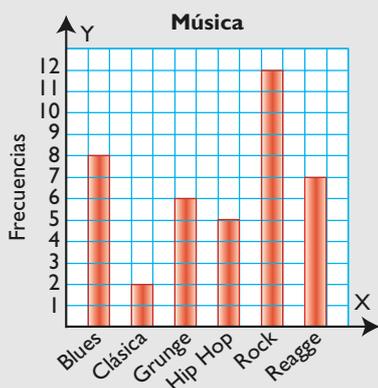
Claramente el color gris es el color de moda. También se observa que los colores más llamativos (amarillo y rojo) son los menos frecuentes. Son colores más juveniles y los jóvenes tiene normalmente menos dinero para comprar un coche.

20 Se ha realizado una encuesta a 40 personas sobre el tipo de música que prefieren, y se han obtenido los siguientes resultados:

Música	Blues	Clásica	Grunge	Hip Hop	Rock	Reagge
Frecuencias	8	2	6	5	12	7

Representa los datos en un diagrama de barras e interpreta el gráfico obtenido.

Solución:



Está claro que el rock y el blues son los dos estilos preferidos. La música clásica queda de forma testimonial con una frecuencia casi mínima.

21 Entre los 120 alumnos de un centro escolar se han obtenido los siguientes datos sobre su intención de continuar los estudios:

Respuestas	Sigue	No sigue	No sabe
Frecuencias	96	18	6

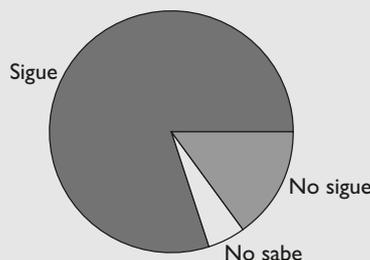
Haz un diagrama de sectores que represente la información.

Solución:

$$360^\circ : 120 = 3^\circ$$

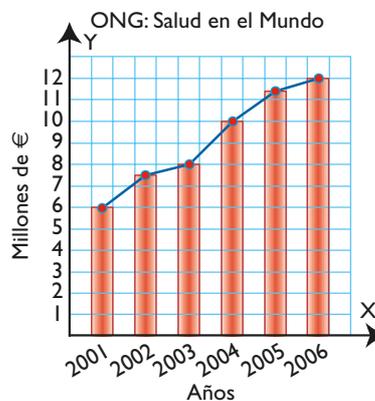
x_i	n_i	Amplitud
Sigue	96	$3^\circ \cdot 96 = 288^\circ$
No sigue	18	$3^\circ \cdot 18 = 54^\circ$
No sabe	6	$3^\circ \cdot 6 = 18^\circ$
Total	120	360°

Continuación de los estudios



Una gran parte de los alumnos desea continuar los estudios.

22 El siguiente diagrama representa la evolución de dinero recaudado por la ONG Salud en el Mundo. Haz la tabla de frecuencias e interpreta los resultados.



Solución:

La tendencia general en el dinero recaudado es creciente.

Años	n_i
2001	6,0
2002	7,5
2003	8,0
2004	10,0
2005	11,5
2006	12,0

Ejercicios y problemas

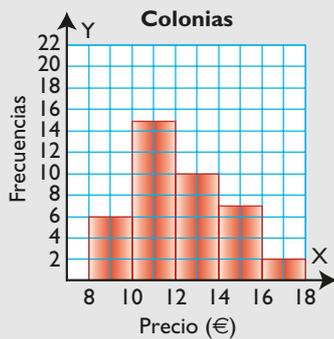
3. Representación gráfica de caracteres continuos

23 Los precios de varias colonias que hay en una tienda se recogen en la siguiente tabla:

Precio (€)	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	Total
Nº frascos	6	15	10	7	2	40

Representa los datos en un histograma e interpreta los resultados.

Solución:



Aproximadamente la mitad de las colonias son de un precio menor de 12 €, repartidos en dos intervalos. La otra mitad se reparte en tres intervalos, y en el último, que es el más caro, hay poca frecuencia.

24 Las horas semanales que dedica al estudio un grupo de 2º de ESO son las siguientes:

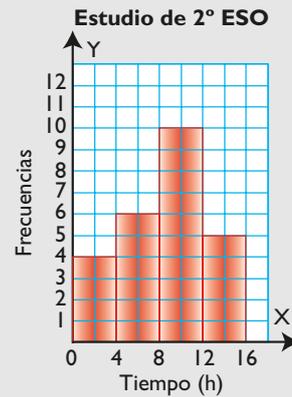
5	15	2	3	12	4	10	6	4	10	9
11	1	9	10	8	13	14	9	12	7	6
11	8	2								

Completa la siguiente tabla de frecuencias, representa los datos en un histograma e interpreta los datos.

Intervalo	0-4	4-8	8-12	12-16	Total
Frecuencias					

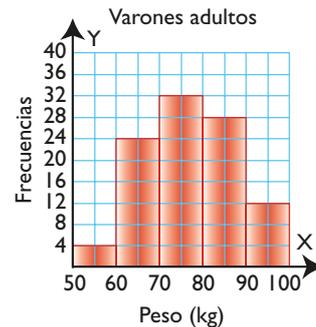
Solución:

Intervalo	Frecuencias
0 - 4	4
4 - 8	6
8 - 12	10
12 - 16	5
Total	25



El tiempo más frecuente está en el intervalo de 8 a 12 horas semanales; a la izquierda quedan el doble de alumnos que a la derecha del mencionado intervalo.

25 El siguiente histograma recoge el peso de una muestra de varones adultos. Haz la tabla de frecuencias e interpreta el resultado.



Solución:

Intervalo	n _i
50 - 60	4
60 - 70	24
70 - 80	32
80 - 90	28
90 - 100	12
Total	100

Los valores centrales se encuentran en el intervalo de 70 a 80, que es el más frecuente. La distribución de los datos es bastante simétrica respecto de este intervalo.

4. Medidas de centralización

- 26** Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido, e interpreta el resultado.

x_i	2	4	6	8	10	12
n_i	1	3	8	5	2	1

Solución:

Como el carácter es cuantitativo, se pueden calcular los tres parámetros.

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$
2	1	2
4	3	12
6	8	48
8	5	40
10	2	20
12	1	12
Total	20	134

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{134}{20} = 6,7$$

Moda: 6

Mediana: 6

Los datos se distribuyen alrededor de 6,7. Además, la media está muy próxima a la mediana y a la moda.

- 27** Las notas que un grupo de estudiantes ha obtenido en un examen de Lengua han sido:

Notas: x_i	3	4	5	6	7	8	10
Frecuencias: n_i	2	3	9	5	3	2	1

Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido, e interpreta el resultado.

Solución:

Notas	n_i	$n_i \cdot x_i$
3	2	6
4	3	12
5	9	45
6	5	30
7	3	21
8	2	16
10	1	10
Total	25	140

Como el carácter es cuantitativo, se pueden calcular los tres parámetros.

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{140}{25} = 5,6$$

Moda: 5

Mediana: 5

El valor de la nota media, 5,6, es el valor alrededor del cual se distribuyen los datos. En este caso, además, la mediana, que es el valor central, está en 5, próxima a la media. La mayoría de las notas están próximas al 5

- 28** En una camisería se han vendido en el último mes los siguientes tipos de camisa:

Camisas: x_i	Blanca	Rayada	Cuadros	Color liso
Frecuencias: n_i	20	30	45	12

Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido, e interpreta el resultado.

Solución:

Como el carácter es cualitativo, solo tiene sentido calcular la moda, que es: Cuadros.

- 29** Calcula la media en la siguiente tabla de frecuencias:

x_i	5-10	10-15	15-20	20-25
n_i	8	12	14	6

Solución:

Intervalo	x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$
5 - 10	7,5	8	60
10 - 15	12,5	12	150
15 - 20	17,5	14	245
20 - 25	22,5	6	135
Total		40	590

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{590}{40} = 14,75$$

Ejercicios y problemas

Para ampliar

30 Representa en un diagrama de sectores la siguiente tabla de frecuencias, que recoge el número de veces que tres equipos han ganado una liga escolar:

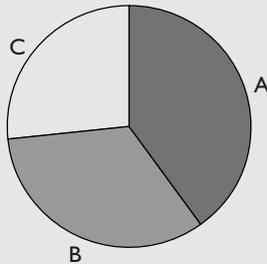
Equipos: x_i	A	B	C
Frecuencias: n_i	12	10	8

Solución:

$$360^\circ : 30 = 12^\circ$$

Equipo	Frecuencia	Amplitud
A	12	$12^\circ \cdot 12 = 144^\circ$
B	10	$12^\circ \cdot 10 = 120^\circ$
C	8	$12^\circ \cdot 8 = 96^\circ$
Total	30	360°

Ganadores de la liga



31 Tras 20 días de proceso de envasado, el control de calidad ha detectado diariamente el siguiente número de botes defectuosos:

1	3	2	4	3	2	3	0	3	2	3
2	4	1	3	2	5	3	3	2	3	2
3	2	1								

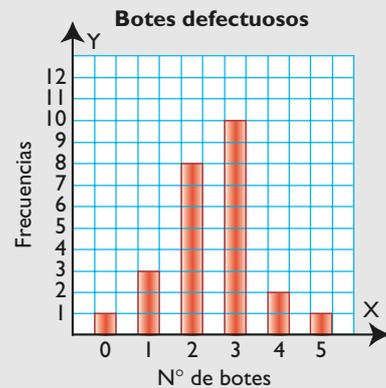
- Clasifica el carácter estudiado y haz una tabla de frecuencias absoluta y relativa.
- Representa los datos en un diagrama de barras.
- Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido, e interpreta el resultado.

Solución:

a) Carácter cuantitativo discreto.

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$
0	1	0
1	3	3
2	8	16
3	10	30
4	2	8
5	1	5
Total	25	62

b)



c) Como el carácter es cuantitativo, se pueden calcular los tres parámetros.

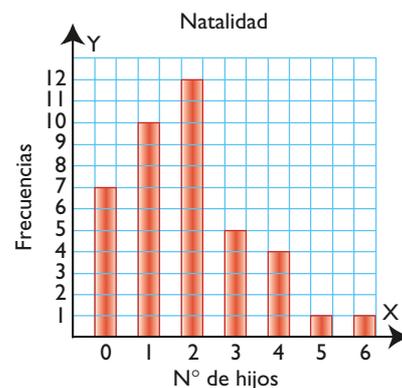
$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{62}{25} = 2,48$$

Moda: 3

Mediana: 3

Los datos se distribuyen alrededor de la media, 2,48 botes y de forma bastante simétrica. Hay muchos botes en torno a la media y pocos en los valores extremos.

32 El número de hijos que tienen 40 matrimonios se recoge en el siguiente diagrama de barras:



- Haz la correspondiente tabla de frecuencias.
- Calcula los parámetros que tengan sentido, e interpreta los resultados.

Solución:

a)

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$
0	7	0
1	10	10
2	12	24
3	5	15
4	4	16
5	1	5
6	1	6
Total	40	76

b) Como el carácter es cuantitativo, se pueden calcular los tres parámetros.

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{76}{40} = 1,9$$

Moda: 2

Mediana: 2

El valor de la media, 1,9, es el valor alrededor del cual se distribuyen los datos. En este caso, además, la mediana, que es el valor central, está en 2, que casi coincide con la media, y la moda también es 2. Entre el 1 y el 2 está más de la mitad de la población.

33 Las edades de los jóvenes inscritos en la asociación de ajedrez RAJE son:

13	16	12	14	14	15	16	14	19	13
18	12	16	17	16	14	13	16	12	17
15	19	14	18	12	17	16	16	17	15
16	14	17	13	18	16	15	17	16	18

a) Clasifica el carácter estudiado.

b) Haz la tabla de frecuencias agrupando los datos en intervalos de longitud 2 y comenzando en 12

c) Representa los datos en un histograma.

d) Calcula la media e interpreta el resultado.

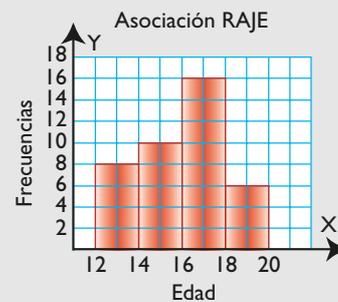
Solución:

a) Cuantitativo continuo.

b)

Intervalo	x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$
12 - 14	13	8	104
14 - 16	15	10	150
16 - 18	17	16	272
18 - 20	19	6	114
Total		40	640

c)



d) Media: $\bar{x} = \frac{640}{40} = 16$

Los datos se distribuyen alrededor de la media, que es 16 años.

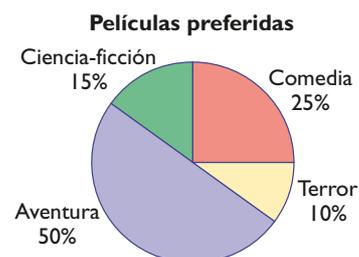
Problemas

34 El siguiente diagrama muestra las películas que prefieren un grupo de 80 jóvenes encuestados según el género del filme:

a) Clasifica el carácter estudiado.

b) Haz la tabla de frecuencias.

c) Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido e interpreta el resultado.



Ejercicios y problemas

Solución:

a) Cualitativo.

b)

Película	n_i
Aventura	$80 \cdot 0,5 = 40$
Ciencia-Ficción	$80 \cdot 0,15 = 12$
Comedia	$80 \cdot 0,25 = 20$
Terror	$80 \cdot 0,1 = 8$
Total	80

c) Como el carácter es cualitativo no ordenable, solo tiene sentido calcular la moda: Aventura.

Las películas de aventuras son las que prefiere la mitad de la población, y después, las comedias.

35 Se ha medido a los 20 alumnos de una clase de 2º de ESO, y se ha obtenido la siguiente tabla de frecuencias:

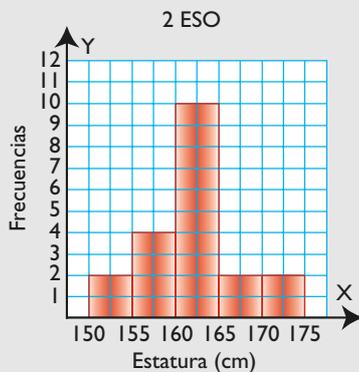
Intervalo	Frecuencias
150-155	2
155-160	4
160-165	10
165-170	2
170-175	2

- Clasifica el carácter estudiado.
- Representa los datos en un histograma.
- Calcula la media e interpreta el resultado.

Solución:

a) Cuantitativo continuo.

b)



c)

Intervalo	x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$
150 - 155	152,5	2	305
155 - 160	157,5	4	630
160 - 165	162,5	10	1625
165 - 170	167,5	2	335
170 - 175	172,5	2	345
Total		20	3240

d) Media: $\bar{x} = \frac{3240}{20} = 162$

Como se puede ver en el gráfico, los datos se distribuyen de forma bastante simétrica alrededor de la media, que está en el intervalo central.

36 Los días que faltaron los integrantes del equipo de fútbol juvenil Panteras FC a un entrenamiento fuera, durante el último mes, los siguientes:

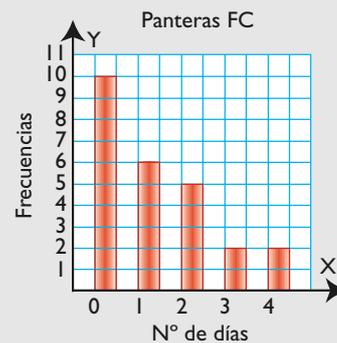
Nº de días: x_i	0	1	2	3	4
Frecuencias: n_i	10	6	5	2	2

- Clasifica el carácter estudiado.
- Representa los datos en un diagrama de barras.
- Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido.

Solución:

a) Cuantitativo discreto.

b)



c) Como el carácter es cuantitativo, se pueden calcular los tres parámetros.

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$
0	10	0
1	6	6
2	5	10
3	2	6
4	2	8
Total	25	30

Media: $\bar{x} = \frac{30}{25} = 1,2$

Moda: 0

Mediana: 1

Para profundizar

37 Halla el dato que falta en los valores 3, 3, 4, 6 para que su media sea 5

Solución:

$$\frac{3 + 3 + 4 + 6 + x}{5} = 5 \Rightarrow 16 + x = 25 \Rightarrow x = 9$$

38 La altura media de los 5 jugadores del equipo de baloncesto que están jugando es de 197 cm. El entrenador cambia a Ernesto, que mide 208 cm, por Miguel, que mide 203 cm. ¿Cuál es la media del equipo ahora?

Solución:

$$\bar{x} = 197 - \frac{208}{5} + \frac{203}{5} = 197 - 1 = 196 \text{ cm}$$

39 En un control policial se ha denunciado a varios conductores por exceso de velocidad, según la tabla siguiente:

Velocidad	Frecuencias
70-80	6
80-90	9
90-100	10
100-110	15
110-120	10

- Calcula la velocidad media de los vehículos denunciados.
- ¿Dónde crees que está el control policial, en plena autovía o en un centro urbano?

Solución:

Intervalo	x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$
70 - 80	75	6	450
80 - 90	85	9	765
90 - 100	95	10	950
100 - 110	105	15	1 575
110 - 120	115	10	1 150
Total		50	4 890

Media: $\bar{x} = \frac{4890}{50} = 97,8 \text{ km/h}$

Si la velocidad media es 97,8 km/h, el control estará en un centro urbano con un límite de 70 km/h. En una autovía se puede circular a 120 km/h.

Aplica tus competencias

40 En el concesionario López se han vendido en los últimos años los coches que se recogen en la tabla adjunta. Realiza un pictograma que represente los datos.

Año	2003	2004	2005	2006	2007
Nº de coches	20	35	50	60	55

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

Comprueba lo que sabes

1 Define «carácter estadístico cualitativo» y «carácter estadístico cuantitativo». Pon un ejemplo.

Solución:

Carácter estadístico cualitativo: es aquel que indica una cualidad. No se puede contar ni medir.

Carácter estadístico cuantitativo: es aquel que indica una cantidad. Se puede contar o medir. Puede ser: **Discreto** si toma valores aislados.

Continuo si toma todos los valores dentro de un intervalo.

Ejemplo

Carácter estadístico			Valores
Cualitativo		El deporte practicado	Atletismo, natación, fútbol...
Cuantitativo	Discreto	Nº de hermanos	1, 2, 3, ...
	Continuo	La estatura	165 cm, 170 cm, ...

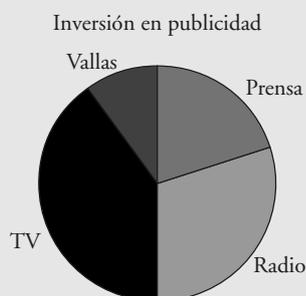
2 La siguiente tabla recoge la inversión en publicidad que una empresa hace en los distintos medios. Representa los datos en un diagrama de sectores e interpreta el resultado.

Medios: x_i	Prensa	Radio	Televisión	Vallas
Inversión (miles de €)	24	36	48	12

Solución:

$$360^\circ : 120 = 3^\circ$$

x_i	n_i	Amplitud
Prensa	24	$3^\circ \cdot 24 = 72^\circ$
Radio	36	$3^\circ \cdot 36 = 108^\circ$
TV	48	$3^\circ \cdot 48 = 144^\circ$
Vallas	12	$3^\circ \cdot 12 = 36^\circ$
Total	120	360°



Se observa cómo entre televisión y radio se cubre la mayoría del gasto en publicidad. Esto resulta lógico si se piensa que es más la gente que escucha la radio o ve la televisión que la que lee el periódico.

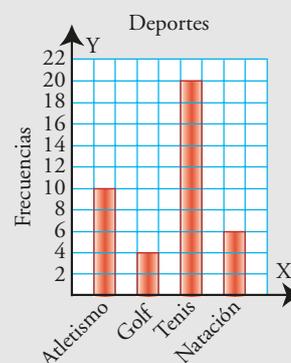
3 En una encuesta sobre el deporte que se practica, se ha obtenido la siguiente tabla de frecuencias:

Deporte: x_i	Atletismo	Golf	Tenis	Natación
Frecuencias n_i	10	4	20	6

a) Haz un diagrama de barras.

b) Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido.

Solución:



Como el carácter es cualitativo no ordenable, solo tiene sentido calcular la moda: Tenis.

- 4** Las notas que un grupo de estudiantes han obtenido en un examen de Lengua han sido:

Notas: x_i	3	4	5	6	7	8	10
Frecuencias: n_i	2	3	9	5	3	2	1

Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido, e interpreta el resultado.

Solución:

Notas	n_i	$n_i \cdot x_i$
3	2	6
4	3	12
5	9	45
6	5	30
7	3	21
8	2	16
10	1	10
Total	25	140

Como el carácter es cuantitativo, se pueden calcular los tres parámetros.

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{140}{25} = 5,6$$

Moda: 5

Mediana: 5

El valor de la nota media, 5,6, es el valor alrededor del cual se distribuyen los datos. En este caso, además, la mediana, que es el valor central, está en 5, próxima a la media. La mayoría de las notas están próximas al 5

- 5** Se ha medido a los 20 alumnos de una clase de 2º de ESO, y se ha obtenido la siguiente tabla de frecuencias:

Intervalo	Frecuencias
150-155	2
155 - 160	4
160 - 165	10
165 - 170	2
170 - 175	2

- a) Clasifica el carácter estudiado.
 b) Representa los datos en un histograma.
 c) Calcula la media e interpreta el resultado.

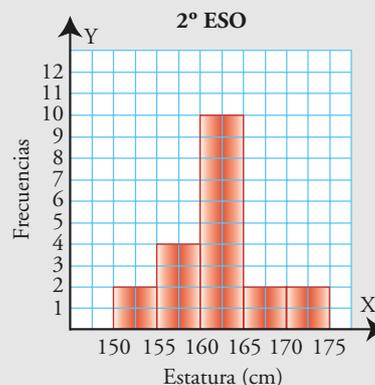
Solución:

- a) Cuantitativo continuo.

- b)

Intervalo	n_i	n_i	$n_i \cdot x_i$
150 - 155	152,5	2	305
155 - 160	157,5	4	630
160 - 165	162,5	10	1625
165 - 170	167,5	2	335
170 - 175	172,5	2	345
Total		20	3240

- c)



d) Media: $\bar{x} = \frac{3240}{20} = 162$

Como se puede ver en el gráfico, los datos se distribuyen de forma bastante simétrica alrededor de la media, que está en el intervalo central.

Paso a paso

- 41** Durante un mes se han observado y anotado diariamente los fenómenos climáticos de la ciudad de Abella, y se han obtenido los resultados siguientes:

1 Clima en Abella	
2 Datos cualitativos	
3 Datos	Frecuencias
4 x_i	n_i
5 Lluvioso	9
6 Nublado	6
7 Nubes y claros	3
8 Soleado	12
9 Total	
10 Parámetros de centralización	
11 Moda	

Obtén las medidas de centralización que tengan sentido, y haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 42** Se ha hecho una encuesta a 30 personas sobre el número de veces que han ido al cine en el último mes, y se han obtenido los resultados siguientes:

	A	B	C	D
1	Asistencia al cine			
2	Datos cuantitativos discretos			
3	Datos		Frecuencias	
4	x_i	n_i	N_i	$N_i \cdot n_i$
5		0	3	
6		1	10	
7		2	9	
8		3	6	
9		4	2	
10	Total			
11	Parámetros de centralización			
12	Moda			
13	Mediana			
14	Media			

Obtén las medidas de centralización que tengan sentido y haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 43** Se ha tomado una muestra de 20 alumnos de 2º de ESO y se han medido sus estaturas. Se han obtenido los siguientes datos:

Peso (kg) Intervalo	Marca de clase: x_i	Frecuencias: n_i
155-160	157,5	2
160-165	162,5	5
165-170	167,5	6
170-175	172,5	4
175-180	177,5	3

Obtén las medidas de centralización que tengan sentido y haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 44** **Internet.** Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema.**

Practica

- 45** Se ha hecho una encuesta de opinión relativa a lo que piensan los ciudadanos sobre las ayudas a la familia, y se han obtenido los siguientes resultados:

Valores: x_i	Frecuencias: n_i
Muy mala	15
Mala	30
Regular	40
Buena	10
Muy buena	5

Obtén los parámetros de centralización que tengan sentido y haz la representación gráfica más idónea. Interpreta el resultado.

Solución:

Como los datos son cualitativos, solo tiene sentido calcular la moda.

Ayuda a la familia	
Datos cualitativos	
Valores	Frecuencias
x_i	n_i
Muy mala	15
Mala	30
Regular	40
Buena	10
Muy buena	5
Total	100
Parámetros de centralización	
Moda	Regular

La representación se hace en un diagrama de sectores o de barras.

**Interpretación:**

Lo que piensan es que es regular tendiendo a mala.

- 46** En una ciudad se ha realizado un estudio sobre el número de coches que hay por cada familia, y se han obtenido los siguientes datos:

Valores: x_i	0	1	2	3	4	5
Frecuencias: n_i	2	40	45	10	2	1

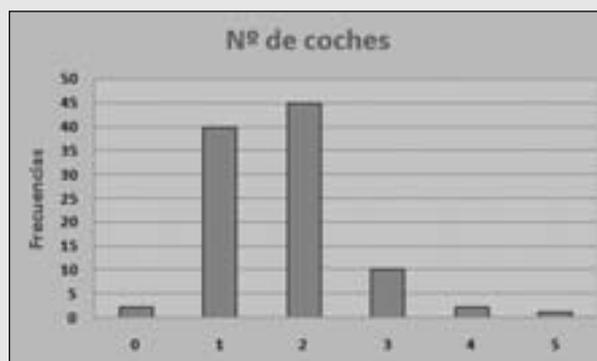
Obtén los parámetros de centralización que tengan sentido y haz la representación gráfica más idónea. Interpreta el resultado.

Solución:

Los datos son cuantitativos discretos. Se pueden calcular los tres parámetros de centralización.

Nº de coches				
Datos cuantitativos discretos				
Valores	Frecuencias	H_i	$x_i \cdot n_i$	
x_i	n_i			
0	2	2	0	0
1	40	42	40	40
2	45	87	90	90
3	10	97	30	30
4	2	99	8	8
5	1	100	5	5
Total	100			173
Parámetros de centralización				
Moda	2			
Mediana	2			
Media	1,73			

La representación se hace mediante un diagrama de barras.

**Interpretación:**

El número de coches más frecuentes es 1 y 2.

47 Se ha realizado una encuesta sobre el tipo de deporte preferido entre los estudiantes de un centro escolar, y se han obtenido los siguientes resultados:

Deporte	Atletismo	Baloncesto	Fútbol	Natación
Frecuencia	20	30	40	10

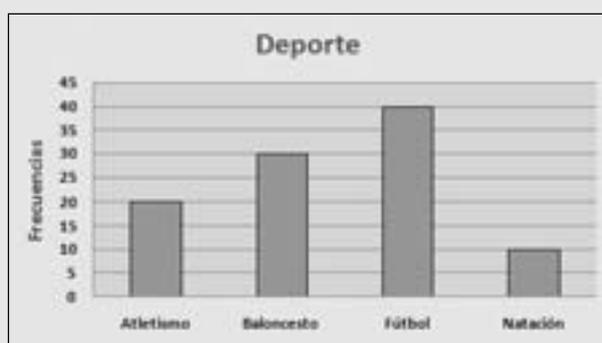
Representa en un diagrama de sectores los datos e interpreta el gráfico obtenido.

Solución:

Como los datos son cualitativos, solo tiene sentido calcular la moda.

Deporte	
Datos cualitativos	
Valores	Frecuencias
x_i	n_i
Atletismo	20
Baloncesto	30
Fútbol	40
Natación	10
Total	100
Parámetros de centralización	
Moda	Fútbol

La representación se hace en un diagrama de barras o de sectores.



Interpretación:

El deporte preferido es el fútbol.

48 En una determinada tienda de telefonía tienen varios teléfonos móviles, distribuidos según los precios que se recogen en la tabla siguiente:

Precio (€) Intervalo	Marca de clase: x_i	Frecuencias: n_i
70-130	100	50
130-190	160	120
190-250	220	15
250-310	280	10
310-370	340	5

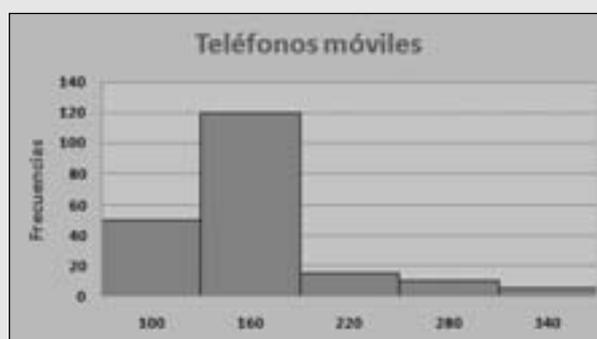
Obtén los parámetros de centralización que tengan sentido y haz la representación gráfica más idónea. Interpreta el resultado.

Solución:

Los datos son cuantitativos continuos. La representación se hace en un histograma.

Teléfonos móviles				
Datos cuantitativos continuos				
Valores	Frecuencias	n_i	$x_i \cdot n_i$	
x_i	n_i			
100	50	50	5000	
160	120	170	19200	
220	15	185	3300	
280	10	195	2800	
340	5	200	1700	
Total	200		12000	
Parámetros de centralización				
Moda	160			
Mediana	160			
Media	160			

El precio de la mayoría de los teléfonos que hay en la tienda está en los intervalos menores, y hay pocos teléfonos caros que están alejados del poder adquisitivo de la mayoría de los usuarios.



Interpretación:

Los precios más frecuentes están hacia 160 €

Bloque 5: Estadística

1 a

2 c

3 d

4 c

5 c

Ejercicios

6 Exportaciones

a) 27,1 millones.

b) 3,8 millones.

7 Examen de ciencias

Puntuación media: 64 puntos.